

**Direction des bibliothèques**

**AVIS**

Ce document a été numérisé par la Division de la gestion des documents et des archives de l'Université de Montréal.

L'auteur a autorisé l'Université de Montréal à reproduire et diffuser, en totalité ou en partie, par quelque moyen que ce soit et sur quelque support que ce soit, et exclusivement à des fins non lucratives d'enseignement et de recherche, des copies de ce mémoire ou de cette thèse.

L'auteur et les coauteurs le cas échéant conservent la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent ce document. Ni la thèse ou le mémoire, ni des extraits substantiels de ce document, ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans l'autorisation de l'auteur.

Afin de se conformer à la Loi canadienne sur la protection des renseignements personnels, quelques formulaires secondaires, coordonnées ou signatures intégrées au texte ont pu être enlevés de ce document. Bien que cela ait pu affecter la pagination, il n'y a aucun contenu manquant.

**NOTICE**

This document was digitized by the Records Management & Archives Division of Université de Montréal.

The author of this thesis or dissertation has granted a nonexclusive license allowing Université de Montréal to reproduce and publish the document, in part or in whole, and in any format, solely for noncommercial educational and research purposes.

The author and co-authors if applicable retain copyright ownership and moral rights in this document. Neither the whole thesis or dissertation, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms, contact information or signatures may have been removed from the document. While this may affect the document page count, it does not represent any loss of content from the document.

Université de Montréal

Évaluation du prix et de la variance de produits  
dérivés de taux d'intérêt dans un modèle de  
Vasiček

par

Vinal Shamal Ramdenee

Département de mathématiques et de statistique  
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures  
en vue de l'obtention du grade de  
Maître ès sciences (M.Sc.)  
en statistique

janvier 2008

© Vinal Shamal Ramdenee, 2008



Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

Évaluation du prix et de la variance de produits  
dérivés de taux d'intérêt dans un modèle de  
Vasiček

présenté par

Vinal Shamal Ramdenee

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

*Manuel Morales*

---

(président-rapporteur)

*Charles Dugas*

---

(directeur de recherche)

*Louis Doray*

---

(membre du jury)

Mémoire accepté le:

---

## SOMMAIRE

---

La modélisation du taux d'intérêt a été introduite par Oldrich Vasiček en 1977 avec le développement du modèle de Vasiček. À partir de ce modèle, les formules de prix de produits dérivés de taux d'intérêt ont été obtenues dont les plus connus sont les obligations à coupon zéro et les options européennes.

Or, peu a été fait dans le cadre de la variance de ces mêmes produits dérivés de taux d'intérêt : le but est d'explorer ce domaine. Nous développerons ainsi les formules de variance d'obligation à coupon zéro, d'option européenne et de contrat à terme standardisé tout en calculant le prix théorique correspondant.

L'environnement mathématique nécessaire est celui de la théorie des équations différentielles stochastiques : le lemme d'Itô et les techniques comme le théorème de représentation de Feynman-Kač simplifient grandement l'évaluation de ces produits dérivés de taux d'intérêt. Comme ce mémoire a des applications financières, nous ne discuterons pas de la théorie de la mesure et d'intégration sous-jacente à la théorie mathématique pour ne pas diverger du but fixé.

**Mots clés :** modèle de Vasiček, prix de produit dérivé de taux d'intérêt, variance de produit dérivé de taux d'intérêt, obligation coupon zéro, option européenne, contrat à terme standardisé.

## SUMMARY

---

Interest rate models have been introduced by Oldrich Vasiček in 1977 with the development of the Vasiček model. With this model, formulas for the price of interest rate derivatives have been found and formulas for the price of zero-coupon bonds and european options are well known.

Yet, little research has been done on the variance of such interest rate derivatives : the goal of this thesis is to start filling in this gap. Thus, we will develop formulas for the variance of zero-coupon bond, european option and futures contract while calculating their theoretical price.

The mathematical framework involved in obtaining the formulas is the theory of stochastic differential equations : Itô's Lemma and techniques like the stochastic representation formula of Feynman-Kač will simplify the valuation of interest rate derivatives. Since this thesis is intended for financial applications, we will not discuss the integration and measure theories underlying the theory so that we do not diverge from our goal.

**Keywords** : Vasiček model, price of interest rate derivatives, variance of interest rate derivatives, zero coupon bond, european option, futures contract.

## TABLE DES MATIÈRES

---

<b>Sommaire</b> .....	iii
<b>Summary</b> .....	iv
<b>Liste des figures</b> .....	x
<b>Liste des tableaux</b> .....	xii
<b>Remerciements</b> .....	1
<b>Introduction</b> .....	2
0.1. Revue de littérature.....	3
<b>Chapitre 1. Le modèle de Vasicek et sa mesure neutre au risque :     introduction et application aux obligations coupon     zéro</b> .....	7
1.1. Le modèle de Vasicek.....	8
1.1.1. Caractéristiques du modèle.....	9
1.2. La mesure neutre au risque dans un modèle de Vasicek.....	10
1.2.1. Équation de la courbe des rendements.....	10
1.3. Prix d'une obligation dans un modèle de Vasicek.....	13
1.3.1. Prix d'une obligation en utilisant la distribution du taux d'intérêt	15
1.3.2. Prix d'une obligation en utilisant son équation différentielle stochastique.....	17
1.4. Variance d'une obligation dans un modèle de Vasicek.....	18

1.5.	Simulation des résultats théoriques.....	20
1.5.1.	Intervalles de confiance classiques.....	21
1.5.2.	Intervalles de confiance par la méthode percentile.....	21
1.6.	Conclusion du chapitre.....	24
<b>Chapitre 2.</b>	<b>Évaluation du prix futur et de la variance du prix futur d'une obligation coupon zéro dans un modèle de Vasiček.....</b>	<b>25</b>
2.1.	Prix futur d'une obligation coupon zéro.....	26
2.2.	Variance du prix futur et du prix futur escompté d'une obligation coupon zéro.....	28
2.2.1.	Variance du prix futur d'une obligation coupon zéro.....	28
2.2.2.	Variance du prix futur escompté d'une obligation coupon zéro..	29
2.3.	Simulations des résultats théoriques.....	30
2.3.1.	Intervalles de confiance par la méthode delta.....	32
2.3.2.	Simulation du prix futur d'une obligation coupon zéro.....	34
2.3.3.	Simulation de la variance du prix futur d'une obligation coupon zéro et de la variance du prix futur escompté d'une obligation coupon zéro.....	35
2.3.3.1.	Démarche à suivre pour la simulation de la variance du prix escompté d'une obligation coupon zéro.....	36
2.4.	Conclusion du chapitre.....	38
<b>Chapitre 3.</b>	<b>Évaluation du prix et de la variance d'une option européenne d'achat dans un modèle de Vasiček.....</b>	<b>40</b>
3.1.	Prix d'un produit dérivé avec une obligation coupon zéro comme numéraire.....	41

3.2.	Évaluation du prix d'un produit dérivé avec application à une option européenne d'achat : méthode de changement de mesure .....	44
3.2.1.	Cas général .....	44
3.2.2.	Application : le taux d'intérêt suit un modèle de Vasicek et le sous-jacent $S(\cdot)$ est une obligation .....	48
3.3.	Calcul de la variance d'un produit dérivé dont le sous-jacent est une obligation dans un modèle de Vasicek .....	50
3.3.1.	Cas général .....	50
3.3.2.	Application à une option européenne d'achat dont le sous-jacent est une obligation coupon zéro .....	51
3.3.3.	Simulation de la variance d'une option européenne d'achat dans un modèle de Vasicek .....	52
3.4.	Conclusion du chapitre .....	56
<b>Chapitre 4. Tarification et variance de produits dérivés dont le sous-jacent paie des dividendes : Application aux contrats à terme de gré à gré et aux contrats à terme standardisés dans un modèle de Vasicek .....</b>		<b>57</b>
4.1.	Tarification d'un produit dérivé dont le sous-jacent paie des dividendes dans un cas général .....	58
4.2.	Prix d'un contrat à terme de gré à gré .....	60
4.3.	Prix d'un contrat à terme standardisé .....	62
4.3.1.	Cas général .....	62
4.3.2.	Application à une obligation coupon zéro dans un modèle de Vasicek .....	63
4.4.	Variance d'un contrat à terme standardisé .....	64
4.4.1.	Cas général .....	64



4.4.2. Application dans un modèle de Vasicek dont le sous-jacent est une obligation coupon zéro.....	66
4.5. Simulation de la variance d'un contrat à terme standardisé dont le sous-jacent est une obligation coupon zéro dans un modèle de Vasicek.....	68
4.5.1. Méthodologie.....	68
4.5.2. Résultats de la simulation.....	69
4.6. Conclusion du chapitre.....	70
<b>Chapitre 5. Application pratique des résultats.....</b>	<b>72</b>
5.1. Les données.....	72
5.2. Méthodologie.....	74
5.2.1. Cas du taux de rendement selon différentes échéances.....	75
5.2.2. Cas d'une obligation coupon zéro.....	76
5.2.2.1. Prix d'une obligation à coupon zéro.....	77
5.2.2.2. Variance d'une obligation à coupon zéro.....	77
5.2.3. Prix futur et variance du prix futur d'une obligation coupon zéro.....	78
5.2.3.1. Cas du prix futur d'une obligation coupon zéro.....	78
5.2.3.2. Cas de la variance du prix futur d'une obligation coupon zéro.....	79
5.3. Conclusion du chapitre.....	80
<b>Chapitre 6. Conclusion.....</b>	<b>86</b>
<b>Bibliographie.....</b>	<b>89</b>
<b>Annexe A. Prix d'une obligation à coupon zéro en utilisant son équation différentielle stochastique.....</b>	<b>A-i</b>

<b>Annexe B. Évaluation du prix futur et de la variance du prix futur d'une obligation coupon zéro dans un modèle de Vasíček .....</b>	<b>B-i</b>
B.1. Prix futur d'une obligation coupon zéro.....	B-ii
B.2. Variance du prix futur escompté d'une obligation coupon zéro ....	B-iii
B.2.1. Résultat sur le prix futur escompté.....	B-iv
B.2.2. Variance du prix futur escompté d'une obligation .....	B-v
<b>Annexe C. Évaluation du prix et de la variance d'une option européenne d'achat dans un modèle de Vasíček .....</b>	<b>C-i</b>
C.1. Calcul de la variance d'un produit dérivé dans un modèle de Vasíček : cas général.....	C-i
C.2. Application à une option européenne d'achat dont le sous-jacent est une obligation.....	C-iii
<b>Annexe D. Calcul de la variance d'un contrat à terme standardisé : Application à une obligation coupon zéro dans un modèle de Vasíček.....</b>	<b>D-i</b>

## LISTE DES FIGURES

---

2.1	Exemple de simulation du taux d'intérêt pour le calcul du prix d'une obligation coupon zéro au temps $s$ échéant au temps $T$ avec $N_1 = 1$ et $N_2 = 20$ .....	32
3.1	Distribution simulée de $\chi = \max(P(T_1; T_2) - K, 0)$ .....	55
5.1	Taux de rendement de 3 mois d'obligations coupon zéro et de bons du trésor du gouvernement du Canada durant la période 2000-2007. ....	73
5.2	Variation mensuelle successive du taux de rendement de 3 mois durant la période 2000-2007. ....	73
5.3	Les courbes de rendement moyennes en fonction de l'échéance.....	81
5.4	Les courbes de rendement du mois d'octobre 2005 en fonction de l'échéance .....	81
5.5	Les courbes de rendement du mois d'avril 2003 en fonction de l'échéance	82
5.6	Comparaison du prix théorique et observé d'une obligation coupon zéro	83
5.7	Comparaison de la variance théorique et observée d'une obligation coupon zéro .....	83
5.8	Comparaison du prix futur théorique et observé d'une obligation coupon zéro en octobre 2005 échéant dans 5 ans.....	84
5.9	Comparaison de la variance théorique et observée d'une obligation coupon zéro en octobre 2005 échéant dans 5 ans.....	84
5.10	Comparaison du prix futur théorique et observé d'une obligation coupon zéro en octobre 2005 échéant dans 2 ans.....	85

5.11	Comparaison de la variance théorique et observée d'une obligation coupon zéro en octobre 2005 échéant dans 2 ans.....	85
------	--	----

## LISTE DES TABLEAUX

---

1.1	Résultat de la simulation de la variance d'une obligation avec $T = 3$ ..	23
2.1	Résultat de la simulation de la variance d'une obligation dont le taux d'intérêt présent est inconnu .....	34
2.2	Résultat de la simulation de la variance du prix futur d'une obligation coupon zéro .....	37
2.3	Simulation de la variance du prix futur escompté d'une obligation coupon zéro .....	39
3.1	Résultat de la simulation de la variance d'une option .....	54
4.1	Résultats de la simulation de la variance d'un contrat à terme standardisé dont le sous-jacent est une obligation dans un modèle de Vasíček ....	70

## REMERCIEMENTS

---

Je voudrais tout d'abord remercier mon directeur de recherche, Charles Dugas, pour son support moral et financier tout au long de ma maîtrise ; sa patience, son appui et ses conseils ont été vraiment appréciés. Je suis aussi reconnaissant qu'il m'ait donné la chance de travailler sur des modèles mathématiques appliqués à la finance, ce qui a contribué à approfondir mes connaissances.

Je voudrais aussi souligner l'aide de Manuel Morales, qui m'a souvent conseillé dans la résolution de mes problèmes mathématiques.

Je suis reconnaissant à Pierre Duchesne et aux administrateurs, Francis Forget et Faouzi Gassemi, pour m'avoir donné l'opportunité de travailler comme coadministrateur du laboratoire. Je voudrais encore remercier Francis et Faouzi pour leur formation et leur aide, ce qui m'a permis d'apprendre énormément d'un point de vue informatique et personnel.

Je voudrais prendre le temps de remercier Jean-François Angers, pour m'avoir motivé dans la rédaction de ce mémoire ; je voudrais aussi souligner l'aide apportée par le personnel du DMS, en particulier par Julie Collette.

Je souhaite dire merci à mes amis qui m'ont aidé à franchir cette étape de ma vie par leur bonne humeur et par les nombreuses sorties.

Je voudrais exprimer ma gratitude envers mes parents, ma soeur et mon frère : bien qu'ils n'étaient pas physiquement présents, j'ai apprécié leur soutien moral qui m'a permis d'être là où je suis.

Finalement, je souhaiterais dédier ce mémoire à mon oncle Prakash Kalachand, décédé en été 2006 ; il a été comme un deuxième père, qui m'a tout le temps aidé et supporté.

# INTRODUCTION

---

Un produit dérivé de taux d'intérêt est un titre financier dont la valeur est dépendante du taux d'intérêt. Le marché des produits dérivés de taux d'intérêt est le marché financier le plus important : selon le *International Swaps and Derivatives Association*, 80% des 500 plus grandes compagnies mondiales utilisent les produits dérivés de taux d'intérêt pour contrôler leur flux monétaire.

Comme tout produit dérivé, les investisseurs cherchent à utiliser les produits dérivés de taux d'intérêt pour maximiser leur profit et diminuer leur risque associé à d'autres actifs financiers. Ils peuvent alors estimer le prix réel du produit dérivé par un prix théorique en se basant sur un modèle de taux d'intérêt. Puisque les taux d'intérêt fluctuent dans le temps de manière imprévue, le prix théorique est, lui aussi, déterminé par un processus stochastique. En sus du prix théorique, pourrait-on connaître la variabilité associée à ce processus stochastique? Vu que le prix du produit dérivé de taux d'intérêt ne nous apporte aucune indication sur sa variabilité associée, la variance théorique nous apporte ainsi des informations sur ce sujet. Par exemple, on pourrait comparer la variance théorique d'un même produit dérivé sur différentes années afin de déterminer la stabilité du produit dérivé à travers le temps. Le but de ce mémoire est ainsi de calculer le prix et la variance théorique de produits dérivés de taux d'intérêt dans un marché financier.

L'objectif de ce mémoire est de montrer que, si nous pouvons calculer le prix théorique d'un produit dérivé de taux d'intérêt à partir d'un modèle donné, il est alors possible de trouver la variance théorique d'un produit dérivé de taux d'intérêt. Cependant, comme la complexité des calculs augmente rapidement, nous nous concentrons sur un modèle de taux d'intérêt simple, qui est celui du modèle de Vasicek.

Vu que les formules de variance et certaines formules du prix des produits dérivés de taux d'intérêt ne se retrouvent pas dans la littérature, nous faisons une simulation pour confirmer les résultats obtenus. Le logiciel utilisé est Matlab, version R2007a.

## 0.1. REVUE DE LITTÉRATURE

Au cours des vingt dernières années, la quête pour comprendre et trouver le meilleur modèle de taux d'intérêt a intéressé plusieurs et il existe maintenant des journaux s'intéressant uniquement à ce domaine. Mais, plus le modèle obtenu se rapproche de la réalité, plus il devient compliqué : il faudra alors faire un compromis.

Afin de pouvoir évaluer les produits dérivés de taux d'intérêt, l'investisseur choisit des hypothèses économiques qu'il juge acceptables et ceux-ci lui permettent de développer un modèle de taux d'intérêt. L'investisseur regarde ensuite les conséquences de ce choix sur les différents produits dérivés et juge si ce modèle lui convient ; si c'est le cas, il pourra alors utiliser des données recueillies sur les marchés financiers et calibrer son modèle afin qu'il corresponde aux observations empiriques. Il pourra ensuite déduire le prix des produits dérivés de taux d'intérêt à partir du modèle construit.

Dans cet ouvrage, nous nous limiterons à l'utilisation de modèles dont la courbe de rendement est affine ; la définition de ces modèles est donnée par Björk [3] :

### **Définition 0.1.1. Courbe de rendement affine**

Soit  $P(t; T)$ , le prix d'une obligation au temps  $t \geq 0$  coupon zéro venant à échéance au temps  $T > t$ . Si  $P(t; T)$  est de la forme :

$$P(t; T) = F(t, r(t); T) = e^{A(t; T) - B(t; T) \cdot r},$$

et  $A$  et  $B$  sont des fonctions déterministes, alors la courbe de rendement est affine.

Dans le cas où la courbe de rendement est affine, un résumé détaillé des méthodes employées est donné par l'article *Affine Term Structure Models* de Piazzesi [18].



Le principal avantage des modèles de courbe de rendement affine est que nous pouvons généralement obtenir une solution analytique pour le prix des obligations, options européennes, contrats à terme et de plusieurs autres produits dérivés de taux d'intérêt. Il est important qu'une solution analytique existe, car sinon, l'évaluation des produits dérivés de taux d'intérêt devrait par exemple être calculée par des méthodes numériques ou de simulation.

Mais le fait de se restreindre aux modèles de courbe de rendement affine a un prix. Ainsi, lorsque l'échéance d'une obligation à coupon zéro augmente, Björk [3] indique que le taux de rendement théorique s'ajuste de moins en moins bien au taux de rendement observé.

Les modèles de taux d'intérêt à un facteur dans le cas où le sous-jacent suit une distribution lognormale, tels que dans le modèle de Black-Scholes (Hull [14, Chapitre 22]), sont applicables aux options européennes sur une obligation, swaps et aux caps. Ce sont des modèles simples et faciles à appliquer mais ils sont limités : Bick [2] démontre que ces modèles s'ajustent très bien au taux de rendement à court terme d'une obligation mais ne peuvent donner qu'un estimé plus ou moins bon du taux de rendement à long terme d'une obligation.

Dans le cas de modèles de courbe de rendement affine à un facteur, l'équation différentielle stochastique du taux d'intérêt est représentée par le processus stochastique  $r$  :

$$dr(t) = \mu_r(r(t))dt + \sigma_r(r(t))dW_t^{\mathcal{P}},$$

où les coefficients sont donnés par :

$$\mu_r(x) = \kappa(\tau_0 - x) \text{ (coefficient de dérive),}$$

$$\sigma_r(x) = \Sigma\sqrt{s_0 + s_1x} \text{ (coefficient de diffusion),}$$

avec  $\kappa, \tau_0, \Sigma, s_0, s_1$  des constantes et  $W^{\mathcal{P}}$  le mouvement brownien.

Les deux principaux modèles de courbe de rendement affine sont :

- Le processus gaussien : Introduit par Oldrich Vasiček en 1977, ce modèle de taux d'intérêt est connu sous le nom de modèle de Vasiček [21] dont l'équation différentielle stochastique est donnée par :

$$dr(t) = a(\tau_0 - r(t))dt + \sigma dW_t^{\mathcal{P}},$$

où  $a, \tau_0$  et  $\sigma$  sont des constantes.

Il peut être démontré que le taux d'intérêt  $r$  dans modèle de Vasicek est distribué selon une loi normale qui peut prendre des valeurs négatives avec probabilité non nulle.

Bien évidemment, on pourra montrer que le prix de l'obligation est une fonction affine. Ces résultats seront démontrés dans les prochains chapitres.

- Le processus de racine carrée : Introduit par John C. Cox, Jonathan E. Ingersoll et Stephen A. Ross en 1985, ce modèle de taux d'intérêt est connu sous le nom de modèle de Cox-Ingersoll-Ross (CIR) [6] dont l'équation différentielle stochastique est donnée par :

$$dr(t) = a(r_0 - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW_t^P,$$

où  $a, r_0$  et  $\sigma$  sont des constantes. Dans le modèle de Cox-Ingersoll-Ross, le taux d'intérêt ne prend que des valeurs non négatives. Vu que le coefficient de diffusion est dépendant du taux d'intérêt, plus le taux d'intérêt sera élevé, plus la variance conditionnelle le sera aussi, et vice-versa.

Bien que le taux d'intérêt ne prenne que des valeurs positives, nous perdons maintenant l'avantage que la distribution du taux d'intérêt est normale : la distribution du taux d'intérêt  $r$  suit maintenant une loi chi-carré décentrée. En plus de proposer le modèle, Cox, Ingersoll et Ross [6] fournissent aussi des formules pour le prix d'une obligation et d'une option européenne sur une obligation à coupon zéro.

La structure de ce mémoire est la suivante : au chapitre 1, nous présentons le modèle de Vasicek qui sera le modèle de taux d'intérêt utilisé comme application aux résultats. Nous faisons un résumé des avantages et désavantages de ce modèle et nous essayons aussi de justifier le choix de ce modèle par rapport aux autres modèles disponibles. Nous introduisons aussi la mesure neutre au risque, qui est un artifice de calcul utilisé pour l'évaluation de produits dérivés de taux d'intérêt, et nous établissons l'équation différentielle stochastique du taux d'intérêt  $r$  sous la mesure neutre au risque.

Au chapitre 1, la distribution du taux d'intérêt sous la mesure neutre au risque est calculée, ce qui nous aidera à calculer le prix d'une obligation. Nous obtenons aussi le prix d'une obligation par différentes méthodes et montrons que

ces méthodes donnent le même résultat : chacune des méthodes est elle-même utile dans les différents chapitres de ce mémoire. Enfin, nous trouvons la variance de l'obligation en utilisant sa distribution : le fait que la distribution est lognormale simplifiera les calculs.

Au chapitre 2, nous obtenons le prix d'une obligation à coupon zéro comme dans le chapitre 1, mais il y a bien sûr une différence ; nous trouvons le prix d'une obligation à coupon zéro à un temps futur : si nous connaissons uniquement le taux d'intérêt au temps  $t$  et que nous voulons connaître le prix d'une obligation coupon zéro à un temps  $s > t$ , nous verrons que nous pouvons tout de même calculer le prix de cette obligation coupon zéro avec l'information disponible au temps  $t$ . Nous calculerons aussi la variance de cette obligation à coupon zéro.

Au chapitre 3, nous trouvons le prix d'une option européenne d'achat dans un modèle de Vasicek en utilisant la méthode de changement de mesure qui est expliquée au début du chapitre. Pour trouver la variance de l'option européenne d'achat, nous utilisons la méthode de Jamshidian qui consiste à trouver la fonction de densité conjointe du taux d'intérêt et de l'option.

Au chapitre 4, nous évaluerons le prix et la variance de produits dérivés de taux d'intérêt dont le sous-jacent paie des dividendes : le cas le plus connu est celui des contrats à terme standardisés. Dans ce cas, il est nécessaire de trouver l'équation différentielle stochastique du sous-jacent sous la mesure neutre au risque ; ceci nécessite bien sûr de prendre en considération le paiement de dividendes. Une application sera faite aux contrats à terme de gré à gré (*forward contract*) et aux contrats à terme standardisés (*futures contract*).

Au chapitre 5, nous appliquons les résultats théoriques obtenus à un jeu de données d'obligations à coupon zéro et de bons du trésor du gouvernement canadien. Ce chapitre nous aidera à déterminer les forces et les faiblesses associées au modèle de Vasicek dans le cas du prix et de la variance d'obligations à coupon zéro.

# Chapitre 1

---

## LE MODÈLE DE VASIČEK ET SA MESURE NEUTRE AU RISQUE : INTRODUCTION ET APPLICATION AUX OBLIGATIONS COUPON ZÉRO

Le but de ce mémoire étant de déterminer les formules de prix et variance de différents produits dérivés de taux d'intérêt, nous modélisons plusieurs produits financiers par des processus stochastiques en temps continu en utilisant leurs équations différentielles stochastiques.

Dans le cadre des espaces probabilisables, nous définissons les éléments de l'espace probabilisable  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathcal{P})$  choisis par :

$$\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_s : s \geq t\} \text{ avec } \mathcal{F}_s = \delta(\{W_u^{\mathcal{P}} : u \geq s\} \cup \mathcal{N}),$$

où  $\delta(\cdot)$  représente la fonction de sigma-algèbre,

$W_u^{\mathcal{P}}$  représente le mouvement brownien standard sous la mesure  $\mathcal{P}$  au temps  $u$ ,  
et  $\mathcal{N}$  représente tous les évènements de probabilité nulle.

Bien que la définition de l'espace probabilisable ne soit pas indiquée dans les prochains chapitres, elle n'est pas pour autant inutile : cette définition est nécessaire lors de la recherche de la mesure neutre au risque  $\mathcal{Q}$  à placer sur l'espace  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathcal{P})$  qui fera en sorte que  $W^{\mathcal{Q}}$  soit un  $\mathcal{Q}$ -mouvement brownien standard, qui nous servira dans l'utilisation du théorème de Girsanov. Pour plus de détails, nous référons le lecteur aux chapitres 4 et 5 de Björk [3] et aux chapitres 1 à 4 de Gauthier [11].

Afin d'alléger la notation dans les prochains chapitres, nous ne citerons plus la définition de cet espace probabilisable.

Il faudrait noter que le temps  $t$  est supposé être le temps présent alors que plusieurs articles supposent que la situation de départ est au temps 0 : nous préférons le temps  $t$  car ce modèle est plus général et met l'emphasis sur le fait que nos modèles sont dépendants du temps de référence  $t$ .

Dans ce chapitre, nous introduisons dans un premier temps, le modèle de Vasiček et ses caractéristiques : l'existence d'une mesure neutre au risque permettant de tarifer un produit dérivé de taux d'intérêt est démontrée.

Dans un deuxième temps, le prix et la variance d'une obligation à coupon zéro sont obtenus lorsque le taux d'intérêt suit un modèle de Vasiček. Le prix d'une obligation coupon zéro est calculé selon plusieurs méthodes : nous voulons ainsi montrer qu'il n'existe pas une approche unique à la résolution du prix d'une obligation coupon zéro et chaque méthode apporte des informations qui seront aussi utiles dans les prochains chapitres.

Pour calculer la variance de l'obligation à coupon zéro, nous allons utiliser le fait que la distribution d'une obligation est lognormale dans un modèle de Vasiček. Or, cette formule de la variance d'une obligation coupon zéro (énoncé à la page 19) ne se retrouve pas dans la littérature ; ainsi, nous la prouvons dans l'annexe A à la page A-i et nous la simulons afin de confirmer si la formule obtenue est correcte.

## 1.1. LE MODÈLE DE VASIČEK

Introduit en 1977 par Oldrich Vasiček dans l'article "An Equilibrium Characterization of the Term Structure" [21], le modèle de Vasiček est l'un des premiers à développer un modèle mathématique décrivant l'allure du taux d'intérêt.

Dans l'article de Vasiček, celui-ci détermine la distribution d'une obligation coupon zéro en utilisant la méthode de résolution des équations différentielles partielles. La mesure neutre au risque n'est pas utilisée explicitement vu qu'elle n'avait pas encore été développée à cette époque. Il est évident que les deux méthodes donneront le même prix théorique d'une obligation coupon zéro.

### 1.1.1. Caractéristiques du modèle

Sous le modèle de Vasiček, le taux d'intérêt instantané sans risque  $\{r(s) : s \geq t\}$  suit l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{aligned} dr(s) &= a(r_0 - r(s))ds + \sigma dW_s^{\mathcal{P}}, \\ r(t) &= c, \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

avec  $a, r_0, \sigma, c$  des constantes positives et  $W^{\mathcal{P}}$  représentant un mouvement brownien standard à une dimension relatif à l'espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ .  $\mathcal{P}$  représente l'anticipation du taux d'intérêt par l'investisseur.

Le processus stochastique  $r$  donné par l'équation (1.1.1) est connu sous le nom de marche aléatoire élastique ("elastic random walk"). Le coefficient de dérive  $a(r_0 - r(\cdot))$  représente une force qui ramène le processus  $r$  vers sa moyenne à long terme  $r_0$  à une vitesse dépendante de la valeur de  $a > 0$ . Le processus stochastique du taux d'intérêt  $r$  est aussi soumis à la variation d'un mouvement brownien standard  $W^{\mathcal{P}}$  multipliée par un facteur  $\sigma$ , ce qui cause le processus stochastique à se disperser d'une manière continue et aléatoire.

Comme avec tous les modèles gaussiens, le taux d'intérêt peut être négatif, ce qui ne reflète pas la réalité. Si le taux d'intérêt peut prendre des valeurs négatives, pourquoi alors choisir ce modèle pour modéliser des produits dérivés de taux d'intérêt ?

Bick [2] indique que, même si le modèle de Vasiček ne reflète pas tout le temps la réalité, il fournit des informations utiles à la compréhension de l'évaluation de produits dérivés de taux d'intérêt. Bick [2] et Jamshidian [15] s'accordent sur le fait que la simplicité du calcul du prix des produits dérivés de taux d'intérêt dans un modèle de Vasiček est très attrayant. Aussi, la probabilité que le taux d'intérêt prenne des valeurs négatives est très petite selon le choix des paramètres.

Le modèle de Cox-Ingersoll-Ross (CIR) [6], défini dans l'Introduction (page 2) n'a pas le problème de taux d'intérêt négatif, mais nous perdons aussi l'avantage de la distribution de loi normale du taux d'intérêt.

Il ne faudrait pas non plus oublier que le but de ce mémoire est de trouver la variance de produits dérivés de taux d'intérêt. Le fait que le taux d'intérêt

soit distribué selon une loi normale est un avantage considérable : on verra que la distribution d'une obligation à coupon zéro dans un modèle de Vasiček est lognormale. Vu que les calculs de variance de produits dérivés de taux d'intérêt se compliquent rapidement, le fait que le sous-jacent soit distribué selon une loi lognormale simplifie grandement les calculs et c'est pour cela que nous avons choisi le modèle de Vasiček comme modèle de taux d'intérêt.

## 1.2. LA MESURE NEUTRE AU RISQUE DANS UN MODÈLE DE VASIČEK

Il existe deux méthodes pour obtenir le prix d'un produit dérivé : la méthode de fonction de densité du taux d'intérêt développée par Jamshidian [15] (voir le chapitre 3, page 40 pour plus de détails) et la méthode, plus répandue, d'utilisation de la mesure neutre au risque  $\mathcal{Q}$  (voir Vasiček [21] et Björk [3]). Dans cette partie, nous utiliserons la méthode de la mesure neutre au risque  $\mathcal{Q}$ . Comme son nom le suggère, cette mesure artificielle est indépendante du choix de risque de l'investisseur : le prix d'un produit dérivé sera alors obtenu en calculant la valeur présente des gains sous la mesure neutre au risque  $\mathcal{Q}$ .

Cette section est inspirée des chapitres 21 et 22 de Björk [3]. Plus de détails sur les mesures neutres au risque peuvent être retrouvés dans les notes de cours de Gauthier [11] et l'article de Girsanov [12].

### 1.2.1. Équation de la courbe des rendements

Considérons deux produits dérivés  $\Phi$  et  $\Gamma$  dont l'unique versement au temps  $T$  est respectivement  $\mathcal{Y}$  et  $\mathcal{Z}$ . Le but de cette section est de déterminer le prix au temps  $t$ ,  $\Pi(t; T, \mathcal{Y})$ , du produit dérivé  $\Phi$  payant  $\mathcal{Y}$  au temps  $T$ .

Nous supposons que :

- L'information disponible est connue jusqu'au temps  $t$  ;
- Il existe un actif sans-risque  $B(t)$  qui est défini par :

$$\begin{cases} dB(s) = r(s)B(s)ds, \\ B(t) = 1; \end{cases} \quad (1.2.1)$$

- Il existe un marché où  $\Gamma$  est échangé ;

– Les prix au temps  $t$  des produits dérivés  $\Phi$  et  $\Gamma$  sont respectivement de la forme :

$$\Pi(t; T, \mathcal{Y}) = F(t, r(t)), \quad (1.2.2)$$

$$\Pi(t; T, \mathcal{Z}) = G(t, r(t)), \quad (1.2.3)$$

où  $F$  et  $G$  sont des fonctions déterministes.

Par les équations (1.2.2) et (1.2.3), nous pouvons appliquer le lemme d'Itô à  $F$  et  $G$  en utilisant le modèle de Vasiček pour obtenir leur équation différentielle stochastique :

$$dF = \alpha_F F ds + \sigma_F F dW_s^{\mathcal{P}},$$

$$dG = \alpha_G G ds + \sigma_G G dW_s^{\mathcal{P}},$$

où  $\alpha_F = \frac{F_s + a(r_0 - r(s)) \cdot F_r + \frac{1}{2} \sigma^2 F_{rr}}{F}$ ,  $\sigma_F = \frac{\sigma F_r}{F}$ ,  $F_s = \frac{\partial F}{\partial s}$ ,  $F_r = \frac{\partial F}{\partial r}$  et  $F_{rr} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}$ .  $\alpha_G$  et  $\sigma_G$  sont définis de manière équivalente.

Si nous formons un portefeuille basé sur les produits dérivés  $F$  et  $G$  et choisissons les poids du portefeuille afin que celui-ci soit localement sans-risque, nous obtenons alors le résultat suivant montré dans Björk [3] :

**Résultat 1.2.1.** *On suppose que le marché est sans arbitrage. Alors il existe une variable aléatoire  $\lambda(\cdot)$  telle que  $\forall s \geq t$ ,*

$$\lambda(s) = \frac{\alpha_G(s) - r(s)}{\sigma_G(s)} \quad (1.2.4)$$

$$= \frac{\alpha_F(s) - r(s)}{\sigma_F(s)}. \quad (1.2.5)$$

$\lambda$  est communément appelé la prime de risque unitaire (market price of risk).

En posant  $\lambda(s) = \frac{\alpha_G(s) - r(s)}{\sigma_G(s)}$  et en utilisant l'équation (1.2.5) (avec ses formules correspondantes), nous obtenons l'équation de la courbe de rendement du produit dérivé  $F$  :

$$F_s + \{a(r_0 - r(s)) - \lambda(s)\sigma\}F_r + \frac{1}{2}\sigma^2 F_{rr} - r(s)F = 0, \quad (1.2.6)$$

$$\text{avec } F(T, r(T)) = \mathcal{Y}. \quad (1.2.7)$$

Finalement, le théorème de Feynman-Kač, expliqué dans Björk [3], propose une solution à l'équation de la courbe de rendement :



**Résultat 1.2.2. Théorème de Feynman-Kač**

Soit  $F$  la solution à l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\delta F}{\delta s}(s, x) + \mu(s, x) \frac{\delta F}{\delta x}(s, x) + \frac{1}{2} \sigma^2(s, x) \frac{\delta^2 F}{\delta x^2}(s, x) - r(s) F(s, x) = 0,$$

$$F(T, z) = g(z).$$

On suppose aussi que  $\sigma(s, X_s) \frac{\delta F}{\delta x}(s, X_s)$  est intégrable, c'est-à-dire que :

$$E^{\mathcal{Q}} \left[ \left( \sigma(s, X_s) \frac{\delta F}{\delta x}(s, X_s) \right)^2 \middle| \mathcal{F}_t \right] < \infty.$$

Alors la solution à  $F$  est donnée par :

$$F(t, x) = E^{\mathcal{Q}} \left[ e^{-\int_t^T r(u) du} g(X_T) \middle| \mathcal{F}_t \right],$$

où l'espérance est prise par rapport à la nouvelle mesure  $\mathcal{Q} \sim \mathcal{P}$  et l'équation différentielle stochastique de  $X$  sous  $\mathcal{Q}$  est donnée par :

$$dX_s = \mu(s, X_s) ds + \sigma(s, X_s) dW^{\mathcal{Q}}(s),$$

$$X_t = x.$$

En appliquant le théorème de Feynman-Kač aux équations (1.2.6) et (1.2.7), le prix pour le produit dérivé  $\mathcal{Y}$  au temps  $t$  est donné par :

**Théorème 1.2.1. Prix d'un produit dérivé  $\mathcal{Y}$**

Soit un produit dérivé dont l'unique paiement au temps  $T$  est  $\mathcal{Y}$ . Alors, sous le modèle de Vasicek, le prix  $\Pi(t; T, \mathcal{Y})$  au temps  $t$  de ce produit dérivé est donné par :

$$\Pi(t; T, \mathcal{Y}) = E^{\mathcal{Q}} \left[ e^{-\int_t^T r(u) du} \cdot \mathcal{Y} \middle| \mathcal{F}_t \right], \quad (1.2.8)$$

où l'espérance est prise par rapport à la mesure neutre au risque  $\mathcal{Q} \sim \mathcal{P}$  sous laquelle l'équation différentielle stochastique du taux d'intérêt est donnée par :

$$dr(s) = \{a(b - r(s))\} ds + \sigma dW_s^{\mathcal{Q}}, \quad (1.2.9)$$

$$\text{où } b = r_0 - \lambda(s)\sigma/a,$$

$$r(t) = c.$$

Nous avons maintenant obtenu la nouvelle mesure  $\mathcal{Q}$  permettant de tarifier des produits dérivés dont le paiement est unique; en comparant les équations

différentielles stochastiques du taux d'intérêt sous les 2 mesures (équations (1.1.1) (page 9) et (1.2.9) ), le lien entre les mesures  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  est alors :

$$W^{\mathcal{P}}(T) = \int_t^T \lambda(s) ds + W^{\mathcal{Q}}(T).$$

Cette relation est contenue dans le théorème de Girsanov (voir Björk [3, section 11.3] pour plus de détails).

Pour résumer, le marché est constitué des composantes suivantes :

- le taux sans risque  $B(s)$  donné par l'équation (1.2.1) à la page 10;
- la prime de risque unitaire calculée à partir de l'équation (1.2.4) (vu que le produit dérivé  $G$  est échangé dans un marché financier);
- le taux d'intérêt  $r(s)$  donné par l'équation (1.2.9).

Lorsque nous évaluerons le prix d'un produit dérivé ou tout simplement énoncerons son processus stochastique, il sera très important de différencier quelle est la mesure utilisée :

- $W^{\mathcal{P}}$  et  $W^{\mathcal{Q}}$  dénotent les processus de mouvement brownien sous les mesures  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  respectivement ;
- $E^{\mathcal{Q}} [\cdot | \mathcal{F}_t]$  dénote l'opérateur d'espérance sous la mesure  $\mathcal{Q}$  sachant  $\mathcal{F}_t$  ;
- ces conventions de notation seront aussi applicables lorsque des nouvelles mesures seront introduites.

### 1.3. PRIX D'UNE OBLIGATION DANS UN MODÈLE DE VASIČEK

Dans cette section, nous déterminons le prix d'une obligation à coupon zéro dans un modèle de Vasiček. Plusieurs approches pour obtenir le prix de l'obligation à coupon zéro sont discutées dans la littérature ; nous montrons ainsi que ces deux approches aboutissent au même résultat, celles-ci étant :

- Prix d'une obligation coupon zéro par la distribution du taux d'intérêt ;
- Prix d'une obligation coupon zéro par son équation différentielle stochastique.

Appliquons les formules obtenues dans le cas d'une obligation coupon zéro. Le prix au temps  $t$  d'une obligation dont la date d'échéance est  $T$  sera dénoté par :

$$P(t, T) = F(t, r(t)).$$

Il faudrait se rappeler que la valeur à l'échéance  $T$  de l'obligation est :

$$\mathcal{Y} = F(T, r(T)) = 1.$$

En appliquant le théorème 1.2.1 de la page 12 à l'obligation coupon zéro, nous obtenons :

$$P(t, T) = \mathbb{E}^{\mathcal{Q}} \left[ e^{-\int_t^T r(u) du} \cdot 1 \middle| \mathcal{F}_t \right],$$

où l'espérance doit être prise par rapport à l'équation différentielle stochastique du taux d'intérêt  $r$  :

$$\begin{aligned} dr(s) &= a(b - r(s))ds + \sigma dW_s^{\mathcal{Q}}, \\ r(t) &= c. \end{aligned}$$

Nous allons montrer que le prix d'une obligation coupon zéro est donné par le théorème suivant et nous résumerons les 2 approches décrites plus haut :

**Théorème 1.3.1. Prix d'une obligation au temps  $t$**

Le prix,  $P(t; T)$ , d'une obligation au temps  $t$  échéant au temps  $T$  dont le taux d'intérêt au temps  $t$  est  $c$  dans un modèle de Vasicek est donné par :

$$P(t; T) = \exp \left[ -n(c, t; T) + \frac{k^2(t; T)}{2} \right],$$

$$\text{où } -n(c, t; T) = -(c - b)B(t; T) - b(T - t),$$

$$B(t; T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a},$$

$$\begin{aligned} k^2(t; T) &= \frac{\sigma^2}{2a^3} [2a(T - t) - 3 + 4e^{-a(T-t)} - e^{-2a(T-t)}] \\ &= \frac{\sigma^2}{a^2} [(T - t) - B(t; T) - B^2(t; T) \cdot a/2], \end{aligned}$$

$$r(t) = c.$$

**Note :** Une autre forme connue de représentation du prix d'une obligation coupon zéro est d'écrire  $P(t; T)$  comme :

$$P(t; T) = \exp [A(t; T) - B(t; T)r(t)],$$

$$\begin{aligned} \text{où } A(t; T) &= \frac{\{B(t; T) - (T - t)\} \{a^2 b - \frac{\sigma^2}{2}\}}{a^2} - \frac{\sigma^2 B^2(t; T)}{4a} \\ &= b\{B(t; T) - (T - t)\} + \frac{k^2(t; T)}{2}. \end{aligned}$$

Cette forme de représentation met l'emphase sur le fait que le prix de l'obligation est dépendante du taux d'intérêt au temps  $t$ ,  $r(t)$ .

### 1.3.1. Prix d'une obligation en utilisant la distribution du taux d'intérêt

Dans cette partie, nous allons, dans un premier temps, déterminer la distribution du taux d'intérêt à partir de son équation différentielle stochastique en supposant que le taux d'intérêt au temps  $t$  est connu. Dans un deuxième temps, nous allons obtenir la distribution d'une obligation à partir de la distribution du taux d'intérêt pour ensuite pouvoir obtenir le prix au temps  $t$  d'une obligation lorsque le taux d'intérêt au temps  $t$  est connu.

Cette méthode est l'approche la plus communément utilisée et le fait que la distribution de l'obligation est lognormale sera un résultat qui sera fréquemment utilisé dans les autres chapitres.

La méthodologie et les résultats de cette section proviennent de Mamon [17].

Nous avons besoin d'un résultat provenant de Arnold [1] pour connaître la distribution du taux d'intérêt qui est un résultat pour les processus Ornstein-Uhlenbeck que nous définissons tout d'abord :

#### **Définition 1.3.1. Les processus Ornstein-Uhlenbeck**

*Nommé après Leonard Salomon Ornstein et George Eugene Uhlenbeck et qui est connu en anglais sous le nom de mean-reverting process, le processus  $X$  est un processus Ornstein-Uhlenbeck (processus **OU**) si son équation différentielle stochastique est de la forme :*

$$dX_s = (A(s)X_s + a(s))ds + B(s)dW_s,$$

*où  $A$ ,  $a$  et  $B$  sont des paramètres et  $W$  dénote un processus processus Wiener.*

#### **Résultat 1.3.1 (Arnold [1]). Représentation des processus Ornstein-Uhlenbeck**

*Soit  $X$  un processus Ornstein-Uhlenbeck qui a pour équation différentielle stochastique sur l'intervalle  $[t, T]$  :*

$$dX_s = (A(s)X_s + a(s))ds + B(s)dW_s.$$

La solution à cette équation différentielle stochastique est :

$$X_s = e^{\int_t^s A(u)du} \left( X_t + \int_t^s e^{-\int_t^u A(v)dv} (a(u)du + B(u)dW_u) \right).$$

Ainsi, le taux d'intérêt  $r$  dans le modèle de Vasiček est un processus Ornstein-Uhlenbeck ; en utilisant le résultat 1.3.1 et l'équation différentielle stochastique du taux d'intérêt sous la mesure  $\mathcal{Q}$ , il peut alors être démontré que :

$$r(s)|\mathcal{F}_t = e^{-a(s-t)}(r(t) + b(e^{a(s-t)} - 1)) + \sigma \int_t^s e^{-a(s-u)} dW_u^{\mathcal{Q}}. \quad (1.3.1)$$

Le résultat suivant, provenant de Björk [3], nous aidera à déterminer la distribution du taux d'intérêt :

**Résultat 1.3.2. Propriétés du mouvement brownien**

Soit  $\gamma(s)$  une fonction déterministe du temps et définissons  $X$  par :

$$X(s) = \int_t^s \gamma(u) dW_u.$$

Alors,  $X(s)$  est distribuée selon une loi normale de moyenne 0 et de variance :

$$\text{Var}^{\mathcal{Q}} [X(s)|\mathcal{F}_t] = \int_t^s \gamma^2(u) du.$$

Par le résultat 1.3.2 et l'équation (1.3.1), nous pouvons montrer que  $E^{\mathcal{Q}} [r(s)|\mathcal{F}_t] = e^{-a(s-t)} (r(t) + b(e^{-a(s-t)} - 1)) = m(c, t; s)$  et aussi :

$$\begin{aligned} \text{Var}^{\mathcal{Q}} [r(s)|\mathcal{F}_t] &= \text{Var}^{\mathcal{Q}} \left[ \sigma \int_t^s e^{-a(s-u)} dW_u^{\mathcal{Q}} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= \sigma^2 \int_t^s e^{-2a(s-u)} du = v^2(t; s). \end{aligned}$$

On peut alors résumer les résultats obtenus sous la forme d'un théorème :

**Théorème 1.3.2 (Mamon [17]). Distribution du taux d'intérêt**

Dans un modèle de Vasiček, la distribution du taux d'intérêt sous la mesure  $\mathcal{Q}$  est donnée par :

$$(r(s)|\mathcal{F}_t) \sim \mathcal{N}^{\mathcal{Q}}(m(c, t; s); v^2(t; s))$$

$$\text{où } m(c, t; s) = c \cdot e^{-a(s-t)} + b(1 - e^{-a(s-t)}),$$

$$v^2(t; s) = \sigma^2 \frac{1 - e^{-2a(s-t)}}{2a},$$

$\mathcal{N}^{\mathcal{Q}}$  est la distribution d'une loi normale sous la mesure  $\mathcal{Q}$

$$\text{et } r(t) = c.$$

**Théorème 1.3.3** (Mamon [17]). *Distribution de  $-\int_t^T r(s)ds$  dans un modèle de Vasiček*

Dans un modèle de Vasiček, la distribution de  $-\int_t^T r(s)ds$  par rapport à la filtration  $\mathcal{F}_t$  est une normale dont les paramètres sont donnés par :

$$\begin{aligned} E^{\mathcal{Q}} \left[ -\int_t^T r(s)ds \middle| \mathcal{F}_t \right] &= -n(c, t; T), \\ \text{Var}^{\mathcal{Q}} \left[ -\int_t^T r(u)du \middle| \mathcal{F}_t \right] &= k^2(t; T), \\ \text{où } B(t; T) &= \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}, \\ n(c, t; T) &= (c - b)B(t; T) + b(T - t), \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

$$k^2(t; T) = \frac{\sigma^2}{a^2} [(T - t) - B(t; T) - B^2(t; T) \cdot a/2]. \quad (1.3.3)$$

Aussi, nous obtenons que, sous la mesure  $\mathcal{Q}$  :

$$\left( e^{-\int_t^T r(u)du} \middle| \mathcal{F}_t \right) \sim \mathcal{LN}^{\mathcal{Q}}(-n(c, t; T), k^2(t; T)). \quad (1.3.4)$$

**Preuve.** Vu que la distribution de  $r$  sous la mesure  $\mathcal{Q}$  est normale (théorème 1.3.2), alors la distribution de  $-\int_t^T r(s)ds \middle| \mathcal{F}_t$  sous la mesure  $\mathcal{Q}$  est distribuée selon une loi normale. Voir l'article de Mamon [17] pour les détails.

En utilisant le théorème 1.3.3, le prix au temps  $t$  d'une obligation échéant au temps  $T$  dans un modèle de Vasiček est donné par :

$$P(t; T) = E^{\mathcal{Q}} \left[ e^{-\int_t^T r(s)ds} \middle| \mathcal{F}_t \right] = \exp \left[ -n(c, t; T) + \frac{k^2(t; T)}{2} \right], \quad (1.3.5)$$

où  $n(c, t; T)$  et  $k^2(t; T)$  sont donnés par les équations (1.3.2) et (1.3.3) respectivement.

### 1.3.2. Prix d'une obligation en utilisant son équation différentielle stochastique

Dans cette partie, le but est encore de déterminer le prix au temps  $t$  d'une obligation échéant au temps  $T$  mais ce sera fait en utilisant l'équation différentielle stochastique de l'obligation. Bien que cette section puisse paraître redondante à la section 1.3.1 précédente (page 15), l'équation différentielle stochastique de l'obligation nous sera très utile dans les prochains chapitres, notamment dans

l'utilisation de la méthode de changement de mesure discutée dans un prochain chapitre.

Sans plus attendre, le théorème suivant, cité dans Björk [3], nous permet d'obtenir l'équation différentielle stochastique de  $P(s; T)$  :

**Théorème 1.3.4. Équation différentielle stochastique de  $P(s; T)$**

*Sous la mesure neutre au risque  $\mathcal{Q}$  dans un modèle de Vasiček, l'équation différentielle stochastique du prix  $P(s; T)$  d'une obligation évaluée au temps  $s$  échéant au temps  $T$  dont le taux d'intérêt au temps  $s$  est  $r(s)$ , est donnée par :*

$$dP(s; T) = P(s; T) \cdot r(s)ds - P(s; T)\sigma B(s; T)dW_s^{\mathcal{Q}}, \quad t < s < T. \quad (1.3.6)$$

**Preuve.** Il suffit d'appliquer le lemme d'Itô à  $P(s; T) = E^{\mathcal{Q}} \left[ e^{-\int_s^T r(u)du} \middle| \mathcal{F}_t \right]$  en utilisant l'équation différentielle stochastique du taux d'intérêt. La démonstration du théorème nécessite l'utilisation de dérivées partielles de  $P(s; T)$  et de l'équation de la courbe de rendement. Les détails de la preuve sont faits dans Björk [3, chapitre 7].

Pour trouver le prix de l'obligation à partir son équation différentielle stochastique, il suffit d'appliquer le lemme d'Itô à  $\text{Log}[P(s; T)]$  : il est important de noter que le coefficient de dérive de l'équation (1.3.6) contient la variable aléatoire  $r$  impliquant une dépendance linéaire entre  $r(s)$  et  $\sigma B(s; T)dW_s^{\mathcal{Q}}$  et une covariance positive. Vu que la preuve n'a pas été trouvée, les détails, faits dans l'annexe A à la page A-i, démontrent alors que le prix d'une obligation est donnée par le théorème 1.3.1 page 14, "Prix d'une obligation au temps  $t$ ".

#### 1.4. VARIANCE D'UNE OBLIGATION DANS UN MODÈLE DE VASIČEK

Nous allons maintenant établir la formule de la variance au temps  $t$  d'une obligation échéant au temps  $T$  lorsque le taux d'intérêt suit un modèle de Vasiček avec  $r(t) = c$  et il faudrait noter que cette section est une contribution originale ne se retrouvant pas dans la littérature.

Il faudrait noter que  $\text{Var}^{\mathcal{Q}} \left[ \frac{1}{B(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right]$  représente la variance d'une obligation au temps  $t$  alors que  $\text{Var}^{\mathcal{Q}} [P(t; T) | \mathcal{F}_t]$  représente la variance du prix d'une obligation qui est égale à zéro car  $P(t; T)$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable.

Car, vu que  $P(t; T)$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable :

$$\text{Var}^{\mathcal{Q}} [P(t; T) | \mathcal{F}_t] = \underbrace{E^{\mathcal{Q}} [(P(t; T))^2 | \mathcal{F}_t]}_{=(P(t; T))^2} - \left( \underbrace{E^{\mathcal{Q}} [P(t; T) | \mathcal{F}_t]}_{=P(t; T)} \right)^2 = 0.$$

À noter que pour  $t < T_1 < T_2$ ,  $\text{Var}^{\mathcal{Q}} [P(T_1; T_2) | \mathcal{F}_t] > 0$  car  $P(T_1; T_2)$  n'est pas  $\mathcal{F}_t$ -mesurable. (Ce problème sera traité dans le chapitre 2.)

La variance au temps  $t$  de cette obligation coupon zéro est donnée par :

**Théorème 1.4.1. Variance au temps  $t$  d'une obligation dans un modèle de Vasiček**

La variance au temps  $t$  d'une obligation échéant au temps  $T$  lorsque le taux d'intérêt suit un modèle de Vasiček avec  $r(t) = c$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \text{Var}^{\mathcal{Q}} \left[ \frac{1}{B(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right] &= (P(t; T))^2 \cdot \left( e^{k^2(t; T)} - 1 \right), \\ \text{où } -n(c, t, T) &= -(c - b)B(t, T) - b(T - t), \\ B(t, T) &= \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}, \\ k^2(t, T) &= \frac{\sigma^2}{2a^3} [2a(T - t) - 3 + 4e^{-a(T-t)} - e^{-2a(T-t)}] \\ &= \frac{\sigma^2}{a^2} [(T - t) - B(t, T) - B^2(t, T) \cdot a/2]. \end{aligned}$$

**Preuve.** La variance est calculée à partir de la formule suivante :

$$\begin{aligned} \text{Var}^{\mathcal{Q}} \left[ \frac{1}{B(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right] &= E^{\mathcal{Q}} \left[ \left( e^{-\int_t^T r(u) du} \right)^2 \middle| \mathcal{F}_t \right] - \left( E^{\mathcal{Q}} \left[ e^{-\int_t^T r(u) du} \middle| \mathcal{F}_t \right] \right)^2 \\ &= E^{\mathcal{Q}} \left[ e^{-2\int_t^T r(u) du} \middle| \mathcal{F}_t \right] - (P(t; T))^2. \end{aligned} \quad (1.4.1)$$

En utilisant la propriété que la distribution de  $\left( e^{-\int_t^T r(s) ds} \middle| \mathcal{F}_t \right)$  est lognormale dans un modèle de Vasiček, alors  $e^{-2\int_t^T r(u) du} \middle| \mathcal{F}_t$  est distribuée selon une loi lognormale où les paramètres sont :

$$\begin{aligned} E^{\mathcal{Q}} \left[ -2 \int_t^T r(u) du \middle| \mathcal{F}_t \right] &= 2E^{\mathcal{Q}} \left[ -\int_t^T r(u) du \middle| \mathcal{F}_t \right] = -2n(c, t; T) \\ \text{et } \text{Var}^{\mathcal{Q}} \left[ -2 \int_t^T r(u) du \middle| \mathcal{F}_t \right] &= 4 \text{Var}^{\mathcal{Q}} \left[ -\int_t^T r(u) du \middle| \mathcal{F}_t \right] = 4k^2(t; T). \end{aligned}$$

En remplaçant dans l'équation (1.4.1), la preuve du théorème est alors complétée. ■



## 1.5. SIMULATION DES RÉSULTATS THÉORIQUES

Nous voulons vérifier que la variance d'une obligation coupon zéro dans un modèle de Vasicek, donnée par le théorème 1.4.1 (page 19) est correcte. Afin de valider la variance d'une obligation au temps  $t$ , échéant au temps  $T$ , nous simulons l'équation différentielle stochastique du taux d'intérêt  $r(\cdot)$  de  $t$  à  $T$  :

$$dr(s) = a(b - r(s))ds + \sigma dW_s^{\mathcal{Q}}.$$

Les valeurs numériques des paramètres proviennent de l'exemple 23.1 de Hull [14] :  $a = 0,1$ ,  $b = 0,1$  et  $\sigma = 0,02$ ; et on suppose aussi que le taux d'intérêt au temps  $t = 0$  est connu et égal à  $r(0) = c = 0,1$ .

Le schéma de discrétisation choisi est celui du schéma d'Euler, expliqué dans l'article de Haugh [13] :

$$\hat{r}[t_{k+1}] = \hat{r}[t_k] + a(b - \hat{r}[t_k])h + \sigma\sqrt{h}Z_{t_{k+1}},$$

où  $k = 0, 1, \dots, (m-1)$ ,  $\hat{r}[t_0] = r(t) = c$ ,  $t_m = T$ ,  $t_k - t_{k-1} = \Delta t = \frac{T-t}{h}$  et  $Z_{t_{k+1}}$  est une variable aléatoire distribuée selon une loi normale standard.

L'intégrale  $\int_t^T r(u)du$  est estimée par une approximation de Riemann-Stieltjes :

$$\int_t^T r(u)du \approx = \sum_{k=0}^{m-1} \hat{r}[t_k](t_k - t_{k-1}).$$

Une valeur simulée de  $e^{-\int_t^T r(u)du}$  est alors donnée par :

$$\hat{P}(t; T) = \exp \left[ - \sum_{k=0}^{m-1} \hat{r}[t_k](t_k - t_{k-1}) \right].$$

Si nous répétons la simulation  $N$  fois, nous obtenons :

$$\hat{P}^{(i)}(t; T) = \exp \left[ - \sum_{k=0}^{m-1} \hat{r}^{(i)}[t_k](t_k - t_{k-1}) \right], \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

La valeur simulée de  $P(t; T)$  est calculée comme la moyenne des  $\hat{P}^{(i)}(t; T)$  :

$$\bar{\hat{P}}(t; T) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{P}^{(i)}(t; T),$$

et la valeur simulée de  $\text{Var}^{\mathcal{Q}} \left[ \frac{1}{B(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right]$  sera donnée par :

$$\widehat{\text{Var}} \left[ \hat{P}(t; T) \right] = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} \left( \hat{P}^{(i)}(t; T) - \bar{\hat{P}}(t; T) \right)^2.$$

Nous n'obtiendrons alors qu'une seule valeur simulée de  $\widehat{\text{Var}}^Q \left[ \frac{1}{B(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right]$  ce qui ne nous permettra **pas** de créer un intervalle de confiance simulé. Pour remédier à ce problème, nous répétons  $m$  fois la simulation pour obtenir  $\widehat{\text{Var}}^{(1)} \left[ \widehat{P}(t; T) \right], \widehat{\text{Var}}^{(2)} \left[ \widehat{P}(t; T) \right], \dots, \widehat{\text{Var}}^{(m)} \left[ \widehat{P}(t; T) \right]$ . Nous pourrons alors obtenir un intervalle de confiance de la variance simulée à partir de ces  $m$  variances simulées.

### 1.5.1. Intervalles de confiance classiques

L'intervalle de confiance classique est obtenu en appliquant le théorème limite central à  $\left\{ \widehat{\text{Var}}^{(j)} \left[ \widehat{P}(t; T) \right] : j \in \{1, 2, \dots, m\} \right\}$  et nous pouvons alors calculer les intervalles de confiance associés que nous appellerons "intervalles de confiance classiques".

### 1.5.2. Intervalles de confiance par la méthode percentile

Comme les résultats avec les intervalles de confiance classiques peuvent être trop conservateurs (car l'hypothèse de normalité est prise sous la méthode classique alors que  $e^{-\int_t^T r(u)du}$  est distribuée selon une lognormale), nous introduisons aussi la méthode percentile, expliqué dans Efron et Tibshirani [10], pour obtenir un intervalle de confiance reflétant les variances calculées.

#### Résultat 1.5.1. Intervalle de confiance par la méthode percentile

*Soit  $\hat{\theta}$  un estimateur du paramètre  $\theta$  et  $\hat{\sigma}$  son écart-type estimé. Si  $\hat{\theta}$  est distribuée selon une loi  $Z$ , avec fonction de répartition  $z^{(\cdot)}$ , l'intervalle de confiance pour  $\theta$  au niveau  $1 - 2\alpha$  est donné par :*

$$\left[ \hat{\theta}_{inf} = \hat{\theta} - z^{(1-\alpha)} \cdot \hat{\sigma}, \hat{\theta}_{sup} = \hat{\theta} - z^{(\alpha)} \cdot \hat{\sigma} \right],$$

*Supposons  $Z = \mathcal{N}$  et  $\theta^*$  une variable aléatoire telle que  $\theta^* \sim \mathcal{N}(\hat{\theta}; \hat{\sigma}^2)$ ; l'intervalle de confiance pour  $\theta$  de niveau  $1 - 2\alpha$  est alors donné par :*

$$\left[ \hat{\theta}_{inf}^*, \hat{\theta}_{sup}^* \right]$$

où  $\hat{\theta}_{inf}^* = \hat{\theta} - z^{(1-\alpha)} \cdot \hat{\sigma}$

$$\hat{\theta}_{sup}^* = \hat{\theta} - z^{(\alpha)} \cdot \hat{\sigma}$$

En d'autres mots,

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_{inf}^* &= \hat{\theta}^{*(\alpha)} = 100 \cdot \alpha\text{-ème percentile de la distribution de } \theta^*, \\ \hat{\theta}_{sup}^* &= \hat{\theta}^{*(1-\alpha)} = 100 \cdot (1 - \alpha)\text{-ème percentile de la distribution de } \theta^*.\end{aligned}$$

Dans le cas où la distribution  $Z$  est inconnue, pour avoir un estimé de l'intervalle de confiance, il suffit alors d'avoir un estimé de la distribution de  $Z$  en simulant  $\hat{\theta}^*$  plusieurs fois : supposons  $\hat{\theta}_1^*, \hat{\theta}_2^*, \dots, \hat{\theta}_m^*$  des estimateurs de la statistique  $\theta$  obtenus par simulation. Soit  $G$  la vraie fonction de répartition de la distribution de  $Z$  et  $\hat{G}$  la fonction de répartition de la distribution obtenue par simulation. Si  $G$  est connue, l'intervalle de confiance pour  $\theta$  au niveau  $1 - 2\alpha$  est :

$$\begin{aligned}[\hat{\theta}_{inf}, \hat{\theta}_{sup}] &= [G^{-1}(\alpha), G^{-1}(1 - \alpha)] \\ &= [\hat{\theta}^{*(\alpha)}, \hat{\theta}^{*(1-\alpha)}].\end{aligned}$$

Si  $G$  est inconnue, un estimé de l'intervalle de confiance pour  $\theta$  au niveau  $1 - 2\alpha$  est :

$$[\hat{\theta}_{inf}, \hat{\theta}_{sup}] \approx [\hat{\theta}_{(m \cdot \alpha)}^*, \hat{\theta}_{(m \cdot (1-\alpha))}^*],$$

où  $\hat{\theta}_{(m \cdot \beta)}^*$  est la statistique d'ordre de rang  $m \cdot \beta$  de  $\hat{\theta}_1^*, \hat{\theta}_2^*, \dots, \hat{\theta}_m^*$ .

Dans notre cas, nous avons :

$$\begin{aligned}\theta &= \text{Var}^{\mathcal{Q}} \left[ \frac{1}{B(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ \hat{\theta}_i^* &= \widehat{\text{Var}}^{(i)} \left[ \hat{P}(t; T) \right], i = 1, \dots, m.\end{aligned}$$

Le résultat de la simulation est donné dans le tableau 1.1 à la page 23. Les intervalles de confiance sont au niveau 0,95 et les conclusions que nous obtenons sont :

- Lorsque  $h$  augmente de 300 à 600, la valeur simulée se rapproche de la valeur théorique.
- La valeur théorique n'est pas contenue dans l'intervalle de confiance classique : le problème pourrait être dû au calcul de l'intervalle de confiance classique et nous regardons l'intervalle de confiance par la méthode percentile.

- Nous voyons que l'intervalle de confiance percentile est plus large que l'intervalle de confiance classique et que la valeur théorique est maintenant contenue dans l'intervalle de confiance par la méthode percentile.
- Si nous doublons le nombre de simulations le nombre de simulations  $N$ , les résultats sont les mêmes : la valeur théorique n'est pas contenue dans l'intervalle de confiance classique mais l'est pour l'intervalle de confiance par la méthode percentile. Ceci nous indique que l'intervalle de confiance classique n'est pas approprié dans ce cas.

Nous concluons donc que la formule de variance d'une obligation coupon zéro dans un modèle de Vasicek obtenue est correcte.

Paramètres	$\text{Var}^Q \left[ \frac{1}{B(T)} \mid \mathcal{F}_t \right]$	$\text{Var}^Q \left[ \frac{1}{B(T)} \mid \mathcal{F}_t \right]$
$t$	0	0
$N$	1 000	1 000
$m$	100	100
$T$	3	3
$h$	300	600
Valeur théorique	$1,5942 \cdot 10^{-3}$	$1,5942 \cdot 10^{-3}$
Borne inférieure simulée avec I.C. classique	$1,5872 \cdot 10^{-3}$	$1,5898 \cdot 10^{-3}$
Valeur simulée	$1,5888 \cdot 10^{-3}$	$1,5914 \cdot 10^{-3}$
Borne supérieure simulée avec I.C. classique	$1,5903 \cdot 10^{-3}$	$1,5929 \cdot 10^{-3}$
Borne inférieure simulée avec I.C. méthode percentile	$1,5699 \cdot 10^{-3}$	$1,5898 \cdot 10^{-3}$
Valeur simulée	$1,5887 \cdot 10^{-3}$	$1,5914 \cdot 10^{-3}$
Borne supérieure simulée avec I.C. méthode percentile	$1,6013 \cdot 10^{-3}$	$1,6054 \cdot 10^{-3}$

TAB. 1.1. Résultat de la simulation de la variance d'une obligation avec  $T = 3$

## 1.6. CONCLUSION DU CHAPITRE

Nous avons maintenant développé la formule de tarification d'un produit dérivé de taux d'intérêt ; celle-ci utilise la mesure neutre au risque  $\mathcal{Q}$  ce qui a nécessité de connaître l'équation différentielle stochastique du taux d'intérêt sous cette mesure. Nous avons aussi démontré les résultats présents dans la littérature pour le prix d'une obligation à coupon zéro lorsque le taux d'intérêt est connu et suit un modèle de Vasicek. Nous avons aussi trouvé une formule exacte pour la variance de l'obligation à coupon zéro : cette formule, bien qu'étant simple à dériver en utilisant la distribution lognormale de l'obligation, ne se retrouve pas dans la littérature et a donc été confirmée par une simulation.

Mais, que se passe-t-il si nous voulons connaître le prix d'une obligation coupon zéro dans un temps futur ? Soit  $t \leq s < T$  et supposons que le taux d'intérêt est connu au temps  $t$  mais que nous voulons avoir le prix d'une obligation coupon zéro au temps  $s$  échéant au temps  $T$  : ce cas est traité dans le chapitre 2 suivant en utilisant les propriétés des filtrations.

## Chapitre 2

---

# ÉVALUATION DU PRIX FUTUR ET DE LA VARIANCE DU PRIX FUTUR D'UNE OBLIGATION COUPON ZÉRO DANS UN MODÈLE DE VASIČEK

Nous allons déterminer la distribution d'une obligation coupon zéro au temps  $s$  échéant au temps  $T$  comme dans le chapitre 1, mais avec une différence : le taux d'intérêt n'est connu qu'au temps  $t \leq s$  ; c'est-à-dire qu'on suppose que  $r(t) = c$  mais on ne peut utiliser la formule du prix d'une obligation coupon zéro du chapitre 1 :

$$P(s; T) = \exp [A(s; T) - B(s; T)r(s)],$$

car  $r(s)$  est une variable aléatoire. Il faudra ainsi utiliser le fait que nous connaissons la distribution du taux d'intérêt au temps  $s$  sachant que  $r(t) = c$ . Les prix sont à nouveau sous la contrainte d'absence d'arbitrage et nous allons encore une fois utiliser la mesure neutre au risque  $\mathcal{Q}$  pour y remédier.

Les résultats et preuves pour le prix futur d'une obligation coupon zéro dans un modèle de Vasiček sont tirés de l'article de Bick [2] alors que la variance du prix futur d'une obligation coupon zéro est une contribution nouvelle de notre part.

Par "Prix futur d'une obligation coupon zéro", nous sous-entendons que ce terme représente le prix d'une obligation coupon zéro dans un temps futur où le taux d'intérêt est inconnu. Les notations suivantes aideront à clarifier les termes mathématiques correspondants et seront utilisées tout au long de ce mémoire :

- $\forall t \leq s < T$ ,
- $P(s; T) = \mathbb{E}^{\mathcal{Q}} \left[ e^{-\int_s^T r(u) du} \middle| \mathcal{F}_s \right]$  est le prix au temps  $s$  d'une obligation coupon zéro dont l'échéance est au temps  $T$  et le taux d'intérêt au temps  $s$  est connu ;
  - $P(r(t); s; T) = \mathbb{E}^{\mathcal{Q}} \left[ e^{-\int_s^T r(u) du} \middle| \mathcal{F}_t \right]$  est le prix futur au temps  $s$  d'une obligation coupon zéro dont l'échéance est au temps  $T$  et le taux d'intérêt au temps  $t$  est connu ;
  - $\text{Var}^{\mathcal{Q}} [P(s; T) | \mathcal{F}_t]$  est la variance du prix futur au temps  $s$  d'une obligation coupon zéro dont l'échéance est au temps  $T$  et le taux d'intérêt au temps  $t$  est connu ;
  - $\text{Var}^{\mathcal{Q}} \left[ \frac{P(s; T)}{B(s)} \middle| \mathcal{F}_t \right]$  est la variance du prix au temps  $s$  escompté au temps  $t$  d'une obligation coupon zéro dont l'échéance est au temps  $T$  et le taux d'intérêt au temps  $t$  est connu.

**Note :** Entre  $P(s; T)$  et  $P(r(t); s; T)$ , la relation est la suivante :

$$P(r(t); s; T) = \mathbb{E}^{\mathcal{Q}} \left[ e^{-\int_s^T r(u) du} \middle| \mathcal{F}_t \right] = \mathbb{E}^{\mathcal{Q}} [P(s; T) | \mathcal{F}_t].$$

La formule exacte du prix futur d'une obligation coupon zéro dans un modèle de Vasiček est donné dans l'article de Bick [2] mais nous trouvons pas sa démonstration ; les formules de variance du prix futur d'une obligation coupon zéro et de variance de prix futur escompté d'une obligation coupon zéro ne se retrouvent elles pas dans la littérature. Dans ce but, le chapitre énonce les résultats et résume la méthodologie à appliquer pour la démonstration des théorèmes alors que les preuves détaillées sont faites dans l'annexe B à la page B-i. Pour confirmer les nouvelles formules obtenues, nous faisons une simulation du taux d'intérêt et l'appliquons aux produits dérivés de taux d'intérêt.

## 2.1. PRIX FUTUR D'UNE OBLIGATION COUPON ZÉRO

Le but de cette section est de déterminer la distribution d'une obligation coupon zéro au temps  $s$  échéant au temps  $T$ , avec  $r(t) = c$ , afin de pouvoir déterminer son prix : en termes mathématiques, ceci revient à évaluer  $P(r(t); s; T) = \mathbb{E}^{\mathcal{Q}} \left[ e^{-\int_s^T r(u) du} \middle| \mathcal{F}_t \right]$ .

Le résultat suivant nous permet de connaître la distribution de l'obligation coupon zéro :

**Résultat 2.1.1. Propriété de la loi normale**

Soit  $X$  et  $Y$  des variables aléatoires telles que :

$$(X | Y) \sim \mathcal{N}(\mu(Y), \sigma^2),$$

$$\text{et } Y \sim \mathcal{N}(E[Y], \text{Var}[Y]).$$

Si  $\mu(Y)$  est une fonction **linéaire** de  $Y$  et  $\sigma^2$  est une fonction **indépendante** de  $Y$ , alors  $X$  est distribuée selon une loi **normale**.

En utilisant les résultats et les notations provenant du chapitre 1, on se rappelle que :

$$\left[ - \int_s^T r(u) du \right] \Big| \mathcal{F}_s \sim \mathcal{N}^{\mathcal{Q}}(-n(r(s)), s; T), k^2(s; T)), \quad (2.1.1)$$

$$r(s) | \mathcal{F}_t \sim \mathcal{N}^{\mathcal{Q}}(m(c, t; s), v^2(t; s)), \quad (2.1.2)$$

$$\text{où } n(\mathbf{r}(s), s; T) = (\mathbf{r}(s) - b)B(s; T) + b(T - s), \quad (2.1.3)$$

$$B(s, T) = \frac{1 - e^{-a(T-s)}}{a},$$

$$k^2(s, T) = \frac{\sigma^2}{a^2} [(T - s) - B(s, T) - B^2(s, T) \cdot a/2],$$

$$m(c, t; s) = c \cdot e^{-a(s-t)} + b(1 - e^{-a(s-t)}),$$

$$v^2(t; s) = \sigma^2 \frac{1 - e^{-2a(s-t)}}{2a}.$$

Vu que  $-n(\mathbf{r}(s), s, T)$  est une fonction linéaire de  $r(s)$  et par le résultat 2.1.1 (on remplace  $X$  et  $Y$  par  $-\int_s^T r(u) du \Big| \mathcal{F}_s$  et  $r(s) | \mathcal{F}_t$  respectivement),  $-\int_s^T r(u) du \Big| \mathcal{F}_t$  est alors distribuée selon une loi normale. Ceci nous amène au théorème suivant :

**Théorème 2.1.1. Prix futur d'une obligation coupon zéro**

Soit  $t, s, T$  tels que  $t \leq s < T$ . Le prix futur au temps  $s$  d'une obligation coupon



zéro échéant au temps  $T$ , alors que  $r(t) = c$ , est donné par :

$$\begin{aligned} P(r(t) = c; s; T) &= E^{\mathcal{Q}} \left[ e^{-\int_s^T r(u) du} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= \exp \left[ -B(s; T) \cdot m(c, t; s) + b(B(s; T) - (T - s)) + \frac{k^2(s; T) + (B(s; T))^2 \cdot v^2(t; s)}{2} \right] \\ &= \exp \left[ -B(s, T) \cdot m(c, t; s) + A(s; T) + \frac{(B(s; T))^2 \cdot v^2(t; s)}{2} \right], \end{aligned}$$

car la distribution de  $\left( e^{-\int_s^T r(u) du} \middle| \mathcal{F}_t \right)$  est lognormale. Aussi, ses moments sont :

$$\begin{aligned} E^{\mathcal{Q}} \left[ -\int_s^T r(u) du \middle| \mathcal{F}_t \right] &= -B(s; T) \cdot m(c, t; s) + b(B(s; T) - (T - s)), \\ \text{Var}^{\mathcal{Q}} \left[ -\int_s^T r(u) du \middle| \mathcal{F}_t \right] &= k^2(s; T) + (B(s; T))^2 \cdot v^2(t; s). \end{aligned}$$

**Preuve.** Il suffit d'utiliser les propriétés associées aux filtrations pour démontrer ce théorème : les démonstrations sont faites dans l'annexe B à la page B-i.

## 2.2. VARIANCE DU PRIX FUTUR ET DU PRIX FUTUR ESCOMPTÉ D'UNE OBLIGATION COUPON ZÉRO

### 2.2.1. Variance du prix futur d'une obligation coupon zéro

Soit  $t, s, T$  des valeurs réelles telles que  $t \leq s < T$ . Nous allons maintenant déterminer la variance du prix à un temps futur  $s$  d'une obligation coupon zéro échéant au temps  $T$  alors que le taux d'intérêt n'est connu qu'au temps  $t$ .

Dans le chapitre 1, nous avons déterminé les formules de variance d'une obligation coupon zéro au temps  $t$  échéant au temps  $T$  (voir la section 1.4 à la page 18). Nous avons aussi démontré que  $\forall T > t$ ,  $\text{Var}^{\mathcal{Q}} [P(t; T) | \mathcal{F}_t] = 0$  car  $P(t; T)$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable. Vu que  $P(r(t) = c; s; T)$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable, nous avons aussi :

$$\begin{aligned} \text{Var}^{\mathcal{Q}} [P(r(t) = c; s; T) | \mathcal{F}_t] &= \underbrace{E^{\mathcal{Q}} [(P(r(t) = c; s; T))^2 | \mathcal{F}_t]}_{=(P(r(t)=c;s;T))^2} - \left( \underbrace{E^{\mathcal{Q}} [P(r(t) = c; s; T) | \mathcal{F}_t]}_{=P(r(t)=c;s;T)} \right)^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Mais, dans notre cas,  $\text{Var}^{\mathcal{Q}} [P(s;T) | \mathcal{F}_t] \neq 0$  car  $P(s;T)$  n'est pas  $\mathcal{F}_t$ -mesurable (donc une variable aléatoire par rapport à  $\mathcal{F}_t$ ) ; or, vu que  $P(s;T) = e^{A(s;T) - B(s;T)r(s)}$  et que l'on connaît la distribution de  $r(s)$  sous la mesure  $\mathcal{Q}$  (voir chapitre 1), le calcul de cette variance est simple. Le théorème suivant nous donne sa formule exacte :

**Théorème 2.2.1.** *Variance du prix futur d'une obligation coupon zéro*  
*La variance du prix à un temps futur  $s$  d'une obligation échéant au temps  $T$ , alors que  $r(t) = c$ , est donnée par :*

$$\text{Var}^{\mathcal{Q}} [P(s;T) | \mathcal{F}_t] = (P(r(t) = c; s; T))^2 \cdot \left( e^{(B(s;T))^2 v^2(t;s)} - 1 \right),$$

$$\text{où } P(r(t) = c; s; T) = e^{-B(s;T) \cdot m(c,t;s) + b(B(s;T) - (T-s)) + \frac{k^2(s;T) + (B(s;T))^2 \cdot v^2(t;s)}{2}}$$

$$B(s;T) = \frac{1 - e^{-a(T-s)}}{a}, \quad m(c,t;s) = c \cdot e^{-a(s-t)} + b(1 - e^{-a(s-t)}),$$

$$v^2(t;s) = \sigma^2 \frac{1 - e^{-2a(s-t)}}{2a}.$$

**Preuve.** *En utilisant le fait que  $P(s;T) = e^{A(s;T) - B(s;T)r(s)}$ , nous avons que :*

$$E^{\mathcal{Q}} [(P(s;T))^2 | \mathcal{F}_t] = E^{\mathcal{Q}} [e^{2A(s;T) - 2B(s;T)r(s)} | \mathcal{F}_t] = e^{2A(s;T)} E^{\mathcal{Q}} [e^{-2B(s;T)r(s)} | \mathcal{F}_t].$$

Or, par le chapitre 1,  $r(s)$  est distribuée selon une normale sous la mesure  $\mathcal{Q}$ ; alors nous avons que :

$$e^{-2B(s;T)r(s)} | \mathcal{F}_t \sim \mathcal{LN}^{\mathcal{Q}}(-2B(s;T)m(c,t;s), 4B^2(s;T)v^2(t;s)),$$

ce qui implique :

$$\begin{aligned} E^{\mathcal{Q}} [(P(s;T))^2 | \mathcal{F}_t] &= e^{2A(s;T)} e^{-2B(s;T)m(c,t;s) + 2B^2(s;T)v^2(t;s)} \\ &= (P(r(t) = c; s; T))^2 e^{B^2(s;T)v^2(t;s)}. \end{aligned}$$

■

### 2.2.2. Variance du prix futur escompté d'une obligation coupon zéro

Nous allons maintenant déterminer la variance du prix au temps futur  $s$  escompté au temps  $t$  d'une obligation coupon zéro échéant au temps  $T$  alors que  $r(t) = c$  : en termes mathématiques, ceci revient à trouver  $\text{Var}^{\mathcal{Q}} \left[ \frac{P(s;T)}{B(s)} \middle| \mathcal{F}_t \right]$ .

**Théorème 2.2.2.** *Variance du prix futur escompté d'une obligation coupon zéro*

La variance du prix futur au temps  $s$  escompté au temps  $t$  d'une obligation coupon zéro échéant au temps  $T$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \text{Var}^{\mathcal{Q}} \left[ \frac{P(s;T)}{B(s)} \middle| \mathcal{F}_t \right] &= E^{\mathcal{Q}} \left[ \left( \frac{P(s;T)}{B(s)} \right)^2 \middle| \mathcal{F}_t \right] - \left( E^{\mathcal{Q}} \left[ \frac{P(s;T)}{B(s)} \middle| \mathcal{F}_t \right] \right)^2 \\ &= (P(t;T))^2 \left( \exp [k^2(t;s) + (B(s;T))^2 v^2(t;s) + B(s;T)\sigma^2(B(t;s))^2] - 1 \right). \end{aligned}$$

**Preuve.** Nous avons besoin de la relation suivante  $P(r(t); s; T) = E^{\mathcal{Q}} [P(s; T) | \mathcal{F}_t]$ , que nous démontrons :

$$\begin{aligned} P(r(t); s; T) &= E^{\mathcal{Q}} \left[ e^{-\int_s^T r(u)du} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= E^{\mathcal{Q}} \left[ E^{\mathcal{Q}} \left[ e^{-\int_s^T r(u)du} \middle| \mathcal{F}_s \right] \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= E^{\mathcal{Q}} [P(s; T) | \mathcal{F}_t]. \end{aligned}$$

En utilisant les formules correspondantes à chacun des termes et la même méthodologie que la preuve du théorème 2.2.1, nous pouvons alors démontrer le théorème. Pour plus de détails, la preuve du théorème est faite dans l'annexe B.2.2 à la page B-v.

### 2.3. SIMULATIONS DES RÉSULTATS THÉORIQUES

Les valeurs numériques des paramètres proviennent de l'exemple 23.1 de Hull [14] :  $a = 0,1$  ;  $b = 0,1$  ;  $\sigma = 0,02$  et nous supposons aussi que le taux d'intérêt au temps  $t = 0$  est connu et égal à  $r(0) = c = 0.1$ .

Nous voulons montrer que les formules du prix futur d'une obligation coupon zéro, de variance du prix futur d'une obligation coupon zéro et de la variance du prix futur escompté d'une obligation coupon zéro sont données respectivement par le théorème 2.1.1 (page 27), le théorème 2.2.1 (page 29) et le théorème 2.2.2 (page 29). Vu que les simulations sont reliées (elles ont toutes besoin de la valeur simulée de  $P(s; T) | \mathcal{F}_t$ ), nous devons simuler dans un premier temps :

$$P(r(t); s; T) = E^{\mathcal{Q}} [P(s; T) | \mathcal{F}_t],$$

dans un deuxième temps :

$$\text{Var}^{\mathcal{Q}} [P(s; T) | \mathcal{F}_t] \tag{2.3.1}$$

et dans un troisième temps :

$$\text{Var}^{\mathcal{Q}} \left[ \frac{P(s;T)}{B(s)} \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

Nous cherchons tout d'abord le prix au temps  $s \geq t$  d'une obligation coupon zéro échéant au temps  $T$  par simulation du taux d'intérêt. Or, on se rappelle que la simulation de ce taux d'intérêt nécessite que le taux d'intérêt au temps  $s$ ,  $r(s)$ , soit connu ; ce qui n'est pas le cas ! Ainsi, si on connaissait le taux d'intérêt  $r^{(i)}(s)$  au temps  $s$ , on pourrait alors, à partir du schéma d'Euler, expliqué dans Haugh [13], (tel que décrit dans la section 1.5 à la page 20), simuler  $N_1$  trajectoires du taux d'intérêt du temps  $s$  au temps  $T$  pour avoir  $\widehat{P}^{(i)}(s;T) \middle| \mathcal{F}_s$ . Ainsi, la valeur simulée de  $P(s;T) = \mathbb{E}^{\mathcal{Q}} \left[ e^{-\int_s^T r(u)du} \middle| \mathcal{F}_s \right]$  est donnée par :

$$\widehat{P}^{(i)}(s;T) = \frac{1}{N_1} \sum_{j=1}^{N_1} \exp \left[ - \sum_{k=m}^{M-1} r^{(i,j)}[t_k](t_k - t_{k-1}) \right], \quad (2.3.2)$$

$$\text{où } t_m = s \cdot \Delta t,$$

$$t_M = T \cdot \Delta t,$$

$$r^{(i,j)}[t_m] = r^{(i)}[t_m] = r^{(i)}(s), \quad j = 1, \dots, N_1.$$

**Comment décider de la valeur de  $r^{(i)}(s)$  ?** Vu que le taux d'intérêt au temps  $t$  est connu ( $r(0) = c = 0, 1$ ), il suffit de simuler à partir du schéma d'Euler [13] une trajectoire du taux d'intérêt du temps  $t$  au temps  $s$  pour avoir le taux d'intérêt  $r^{(i)}(s)$  au temps  $s$ .

La figure 2.1 à la page 32 illustre la simulation du taux d'intérêt décrit dans cette section afin de pouvoir calculer un prix simulé  $\widehat{P}^{(i)}(s;T)$  à partir du taux d'intérêt  $r(t) = c$ . Les paramètres utilisés sont :

Paramètre	Valeur
$t$	0
$s$	3
$T$	5
$t_k - t_{k-1} = \Delta t$	0.01
$h = \frac{T-t}{\Delta t}$	500

Note : Dans le graphique, le point  $s = 3$ , correspondant au point 300 sur l'axe des ordonnées, représente la valeur simulée de  $r^{(i)}(s)$ .

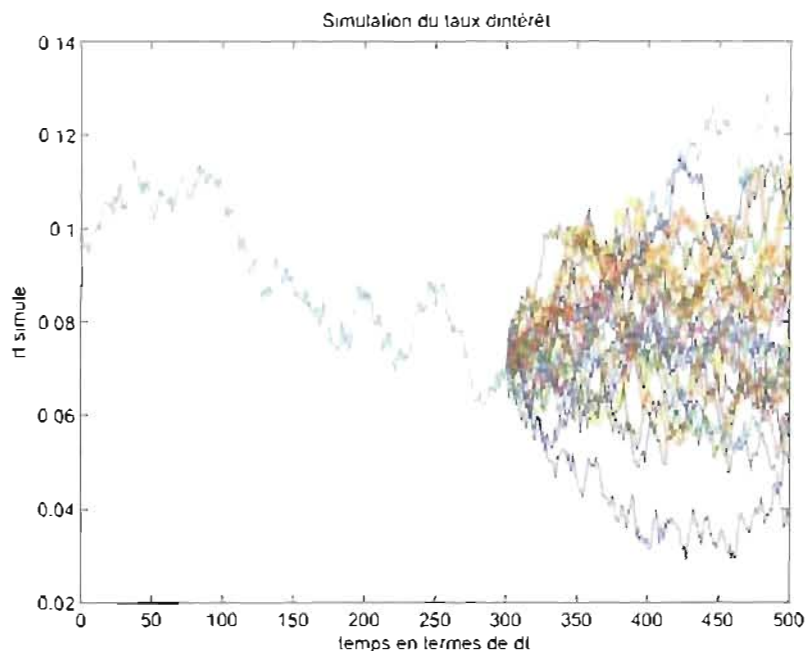


FIG. 2.1. Exemple de simulation du taux d'intérêt pour le calcul du prix d'une obligation coupon zéro au temps  $s$  échéant au temps  $T$  avec  $N_1 = 1$  et  $N_2 = 20$ .

### 2.3.1. Intervalles de confiance par la méthode delta

Avec l'utilisation d'intervalles de confiance classiques (où les variables sont supposées de loi normales), les résultats que nous obtenons avec ceux-ci sont parfois trop conservateurs et la valeur théorique n'est pas tout le temps comprise dans l'intervalle de confiance.

Intuitivement, l'utilisation d'un intervalle de confiance classique n'est pas la plus appropriée dans le cas où l'approximation est faite sur  $-\int_s^T r(u)du$  alors que nous calculons un intervalle de confiance pour  $e^{-\int_s^T r(u)du}$  d'où l'intérêt d'utiliser un intervalle de confiance par la méthode delta.

Nous citons alors un théorème qui nous aidera à construire un nouvel intervalle de confiance plus approprié à notre cas, qui est tiré de Lawless [16] :

**Résultat 2.3.1.** *Approximation par la méthode delta ("delta-method approximation")*

Soit  $\hat{S}_n(t)$  une statistique telle que si  $n \rightarrow \infty$ , alors

$$\sqrt{n} \left( \hat{S}_n(t) - S(t) \right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N} (0, \sigma^2).$$

Soit  $g$  une fonction bijective telle que

$$\begin{aligned} \psi(t) &= g [S(t)], \\ \text{et } \hat{\psi}_n(t) &= g \left[ \hat{S}_n(t) \right]. \end{aligned}$$

Alors lorsque  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\sqrt{n} \left( \hat{\psi}_n(t) - \psi(t) \right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N} \left( 0, \left( \frac{\partial g}{\partial S(t)} \right)^2 \sigma^2 \right).$$

Un estimé de la variance de l'estimateur de la fonction transformée est :

$$\widehat{Var} \left[ \hat{\psi}_n(t) \right] = \left( \frac{\partial \hat{\psi}_n(t)}{\partial \hat{S}_n(t)} \right)^2 \widehat{Var} \left[ \hat{S}_n(t) \right].$$

L'intervalle de confiance de niveau  $1 - \alpha$  est donné par :

$$\psi(t) \in \left\{ \hat{\psi}_n(t) \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\widehat{Var} \left[ \hat{\psi}_n(t) \right]} \right\}.$$

Appliqué à notre cas, nous avons :

$$\begin{aligned} S(s) &= - \int_s^T r(u) du \\ \hat{S}_n(s) &= - \sum_{k=m}^{M-1} r[t_k] (t_{k+1} - t_k) \\ \psi(s) &= g [S(s)] = e^{S(s)} \\ \frac{\partial \hat{\psi}_n(s)}{\partial \hat{S}_n(s)} &= \hat{\psi}_n(s) \end{aligned}$$

Ainsi, la variance est donnée par :

$$\widehat{Var} \left[ \hat{\psi}_n(s) \right] = e^{2\hat{S}_n(s)} \widehat{Var} \left[ \hat{S}_n(s) \right].$$

Paramètres	$P(r(t); s; T)$	$P(r(t); s; T)$
$t$	0	0
$s$	3	3
$T$	5	5
$N_1$	1 000	1 000
$N_2$	100	100
$\Delta t = \frac{T-t}{h}$	0,00667	0,00333
$h$	300	600
Valeur théorique	0,82032	0,82032
Borne inférieure simulée avec I.C. classique	0,81995	0,82007
Valeur simulée	0,82027	0,82038
Borne supérieure simulée avec I.C. classique	0,82059	0,82070
Borne inférieure simulée avec I.C. méthode delta	0,69804	0,69824
Valeur simulée	0,82027	0,82038
Borne supérieure simulée avec I.C. méthode delta	0,94251	0,94253

TAB. 2.1. Résultat de la simulation de la variance d'une obligation dont le taux d'intérêt présent est inconnu

### 2.3.2. Simulation du prix futur d'une obligation coupon zéro

Nous voulons maintenant simuler  $E^{\mathcal{Q}} [P(s; T) | \mathcal{F}_t]$  : en simulant le taux d'intérêt  $r^{(i)}(s)$  à partir de  $r(t) = c = 0, 1$ , nous pouvons alors calculer  $\widehat{P}^{(i)}(s; T) | \mathcal{F}_t$  en utilisant l'équation (2.3.2) à la page 31. Il suffit alors de répéter notre simulation  $N_2$  fois et nous pouvons alors obtenir  $(\widehat{P}^{(1)}(s; T) | \mathcal{F}_t), (\widehat{P}^{(2)}(s; T) | \mathcal{F}_t), \dots, (\widehat{P}^{(N_2)}(s; T) | \mathcal{F}_t)$  qui sont chacun des estimés de  $E^{\mathcal{Q}} [P(s; T) | \mathcal{F}_t]$  et un meilleur estimé est obtenu en prenant la moyenne des valeurs simulées.

Les résultats obtenus par simulation sont résumés dans le tableau 2.1 Les intervalles de confiance (I.C.) sont au niveau 0,95. La deuxième et la troisième colonne du tableau 2.1 sont les paramètres pour le calcul du prix d'une obligation coupon zéro au temps  $s = 3$  échéant au temps  $T = 5$  pour  $h = 300$  et  $h = 600$  respectivement ; ces prix sont évidemment calculés avec la formule obtenue dans la section précédente. Deux conclusions sont à extraire des résultats obtenus :

- (i) Nous voyons que les résultats sont sensiblement les mêmes même si la distance entre deux temps simulés consécutifs  $\Delta t = \frac{T-t}{h}$  devient plus petite (de 0.00667 à 0.00333) : nous pouvons tout de même noter que la valeur simulée se rapproche de la valeur théorique lorsque la distance entre deux temps simulés consécutifs devient petite.
- (ii) Le prix théorique est proche du prix simulé (qui est une moyenne de  $N = 100\ 000$  prix simulés) et est contenu dans les intervalles de confiance obtenus par la méthode classique et la méthode delta.
- (iii) Nous remarquons que l'intervalle de confiance classique nous donne de meilleurs résultats que l'intervalle de confiance par la méthode delta. Ceci n'est pas étonnant car l'intervalle de confiance par la méthode delta prend en considération que nous voulons un intervalle de confiance pour un estimateur et ceci entraîne un intervalle de confiance plus grand mais aussi plus approprié à notre cas.

Nous pouvons alors conclure que la formule du prix futur d'une obligation coupon zéro dans un modèle de Vasiček est correcte.

### **2.3.3. Simulation de la variance du prix futur d'une obligation coupon zéro et de la variance du prix futur escompté d'une obligation coupon zéro**

Afin de calculer  $\text{Var}^{\mathcal{Q}} [P(s; T) | \mathcal{F}_t]$ , comme dans la simulation du prix futur, il suffit d'utiliser l'équation (2.3.2) à la page 31, répéter pour  $i = 1, \dots, N_2$  et l'estimé



de  $\text{Var}^{\mathcal{Q}} [P(s; T) | \mathcal{F}_t]$  sera donné par :

$$\widehat{\text{Var}} [P(s; T)] = \frac{1}{N_2 - 1} \sum_{i=1}^{N_2} \left( \widehat{P}^{(i)}(s; T) - \widehat{P}(s; T) \right)^2, \quad (2.3.3)$$

$$\text{où } \widehat{P}(s; T) = \frac{1}{N_2} \sum_{i=1}^{N_2} \widehat{P}^{(i)}(s; T).$$

**Comment calculer les intervalles de confiance ?** Vu que l'équation (2.3.3) ne nous donne qu'une seule valeur simulée de la variance et qu'il faut plusieurs valeurs simulées afin de pouvoir calculer un intervalle de confiance, on répète le calcul de la variance, avec l'équation 2.3.3,  $m = 100$  fois afin d'obtenir  $\widehat{\text{Var}}^{(1)} [P(s; T)]$ ,  $\widehat{\text{Var}}^{(2)} [P(s; T)]$ ,  $\dots$ ,  $\widehat{\text{Var}}^{(m)} [P(s; T)]$ ; ceci nous permettra de créer une distribution simulée de la variance.

#### Résultats de la simulation :

Vu que les intervalles de confiance classiques supposent que le théorème limite central est applicable, ce qui n'est pas toujours le cas, nous calculons aussi l'intervalle de confiance par la méthode percentile. (Voir le chapitre 1 pour les détails.)

Les résultats obtenus par simulation sont résumés dans le tableau 2.2 à la page 37 avec  $s = 3$  et  $T = 5$ . Les intervalles de confiance (I.C.) sont au niveau 0,95. La deuxième colonne du tableau 2.2 représente la variance du prix d'une obligation coupon zéro au temps  $s = 3$  échéant au temps  $T = 5$  avec  $h = 500$ ; la variance théorique est calculée en utilisant le théorème 2.2.1, page 29.

Vu que le prix théorique est contenu dans les intervalles de confiance obtenus par la méthode classique et la méthode percentile, nous pouvons alors affirmer que la formule de variance du prix futur d'une obligation coupon zéro est correcte.

#### 2.3.3.1. Démarche à suivre pour la simulation de la variance du prix escompté d'une obligation coupon zéro

Pour simuler  $\text{Var}^{\mathcal{Q}} \left[ \frac{P(s; T)}{B(s)} \middle| \mathcal{F}_t \right]$ , il faudra estimer  $\frac{P(s; T)}{B(s)}$  dont les composantes sont :

$$P(s; T) \text{ qui est } \mathcal{F}_s\text{-mesurable,}$$

$$B(s) = e^{\int_t^s r(u) du} \text{ qui est } \mathcal{F}_t\text{-mesurable.}$$

Paramètres	$\text{Var}^{\mathcal{Q}} [P(s;T) \mathcal{F}_t]$
$t$	0
$s$	3
$T$	5
$h$	500
$N_1$	10 000
$N_2$	100
$t_k - t_{k-1} = \Delta t$	0,01
Valeur théorique	$1,9983 \cdot 10^{-3}$
Borne inférieure simulée avec I.C. classique	$1,9316 \cdot 10^{-3}$
Valeur simulée	$1,9879 \cdot 10^{-3}$
Borne supérieure simulée avec I.C. classique	$2,0443 \cdot 10^{-3}$
Borne inférieure simulée avec I.C. méthode percentile	$1,3283 \cdot 10^{-3}$
Valeur simulée	$1,9879 \cdot 10^{-3}$
Borne supérieure simulée avec I.C. méthode percentile	$2,5542 \cdot 10^{-3}$

TAB. 2.2. Résultat de la simulation de la variance du prix futur d'une obligation coupon zéro

Encore une fois, en utilisant l'estimé de  $P(s;T)|\mathcal{F}_t$  donné par l'équation (2.3.2) à la page 31 où le taux d'intérêt du temps  $t$  au temps  $s$  est calculé par le schéma d'Euler avec  $r(t) = c = 0,1$ ; nous obtenons alors qu'un estimé de  $\frac{P(s;T)}{B(s)}$  est :

$$\widehat{PB^{-1}}^{(i)}(s;T) = \exp \left[ - \sum_{k=0}^{m-1} r^{(i)}[t_k](t_{k+1} - t_k) \right] \widehat{P}^{(i)}(s;T),$$

$$\text{où } r^{(i)}[t_0] = r(0) = c,$$

$$r^{(i)}[t_m] = r^{(i)}(s).$$

Si l'on répète  $N_2$  fois notre simulation, un estimé de la variance du prix futur escompté d'une obligation coupon zéro est donné par :

$$\text{Var}^{\mathcal{Q}} \left[ \frac{P(s;T)}{B(s)} \middle| \mathcal{F}_t \right] \approx \frac{1}{N_2 - 1} \sum_{j=1}^{N_2} \left( \widehat{PB^{-1}}^{(j)}(s;T) - \widehat{PB^{-1}}(s;T) \right)^2,$$

$$\text{où } \widehat{PB^{-1}}(s;T) = \frac{1}{N_2} \sum_{i=1}^{N_2} \widehat{PB^{-1}}^{(i)}(s;T).$$

Comme auparavant, les intervalles de confiance simulés sont obtenus en répétant le calcul de la variance escomptée  $m = 100$  fois afin d'obtenir une distribution simulée de la variance.

#### Résultat de la simulation :

Les résultats obtenus par simulation sont résumés dans le tableau 2.3 à la page 39 avec  $s = 3$  et  $T = 5$ . Les intervalles de confiance sont au niveau 0,95. La deuxième colonne du tableau 2.3 représente la variance du prix d'une obligation coupon zéro au temps  $s = 3$  échéant au temps  $T = 5$  avec  $h = 500$ ; la variance théorique est calculée en utilisant le théorème 2.2.2, page 29. Vu que le prix théorique est contenu dans les intervalles de confiance obtenus par la méthode classique et la méthode delta, nous pouvons alors affirmer que la formule de variance du prix futur escompté d'une obligation coupon zéro est correcte.

## 2.4. CONCLUSION DU CHAPITRE

Nous avons maintenant obtenu les formules de prix et de variance d'une obligation coupon zéro dans un cas général lorsque la date d'évaluation de l'obligation diffère de la date où le taux d'intérêt est connu. Ces résultats seront aussi utiles notamment dans le cas des contrats à terme standardisé.

Vu que nous avons développé plusieurs formules de variance jusqu'à maintenant, il serait très important de s'assurer de comprendre ce que représentent chacune des formules développées avant de les utiliser; comme dans le cas du prix futur d'une obligation coupon-zéro  $P(r(t); s; T)$  et du prix futur d'une obligation coupon-zéro  $P(s; T)$ .

Paramètres	$\text{Var}^Q \left[ \frac{P(s;T)}{B(s)} \middle  \mathcal{F}_t \right]$
$t$	0
$s$	3
$T$	5
$N_1$	10 000
$N_2$	100
$t_k - t_{k-1} = \Delta t$	0,01
Valeur théorique	$4,014 \cdot 10^{-3}$
Borne inférieure simulée avec I.C. classique	$3,878 \cdot 10^{-3}$
Valeur simulée	$3,991 \cdot 10^{-3}$
Borne supérieure simulée avec I.C. classique	$4,105 \cdot 10^{-3}$
Borne inférieure simulée avec I.C. méthode percentile	$2,725 \cdot 10^{-3}$
Valeur simulée	$3,991 \cdot 10^{-3}$
Borne supérieure simulée avec I.C. méthode percentile	$5,114 \cdot 10^{-3}$

TAB. 2.3. Simulation de la variance du prix futur escompté d'une obligation coupon zéro

## Chapitre 3

---

### ÉVALUATION DU PRIX ET DE LA VARIANCE D'UNE OPTION EUROPÉENNE D'ACHAT DANS UN MODÈLE DE VASIČEK

Une option d'achat<sup>1</sup> confère à son acheteur le droit, mais non l'obligation, d'acheter d'une autre personne, le vendeur de l'option, une quantité déterminée d'un certain actif sous-jacent à un prix stipulé d'avance, soit à une date déterminée pour une option européenne, soit à n'importe quel moment durant une période donnée pour une option américaine, moyennant le versement par l'acheteur au vendeur du prix de l'option. Les paramètres sont donc :

- $K$ , prix d'exercice : prix d'acquisition déterminé pour l'actif sous-jacent.
- $T$ , échéance : date à laquelle prend fin l'option d'achat. Les options européennes ne peuvent être exercées qu'à la date d'échéance. Les options américaines peuvent être exercées en tout temps jusqu'à la date d'échéance.
- L'acheteur de l'option prévoit que le cours de l'actif sous-jacent en viendra à dépasser le prix d'exercice. Si c'est le cas, l'acheteur exercera son option et le vendeur sera obligé de lui vendre la quantité prévue d'actif sous-jacent au prix d'exercice fixé initialement. Dans le cas contraire, l'acheteur pourra abandonner son option, subissant alors une perte égale à la prime payée, ou bien, si son option est négociable, il pourra la revendre sur un marché réglementé.

---

<sup>1</sup>définition de Dugas [9]

Dans un premier temps, nous introduisons l'utilisation de la méthode de changement de mesure : cette méthode nous sera utile lors de la démonstration pour trouver le prix d'une option européenne dans un modèle de Vasiček. Pour les détails sur la méthode de changement de mesure, nous vous référons à l'article de Chen et Huang [4].

Dans un deuxième temps, nous indiquons la méthode à suivre pour trouver le prix d'une option européenne d'achat dont le sous-jacent est un produit dérivé de taux d'intérêt : en l'appliquant à une obligation coupon zéro sous le modèle de taux d'intérêt Vasiček, nous retrouverons exactement la formule donnée par Jamshidian [15]. Nous allons utiliser la méthode de changement de mesure pour obtenir le prix de l'option européenne d'achat alors que Jamshidian utilisait la fonction de densité du taux d'intérêt pour obtenir le même résultat.

Nous allons trouver, dans un troisième temps, la variance d'une option européenne d'achat sur une obligation coupon zéro avec la méthode de fonction de densité du taux d'intérêt car les calculs sont plus directs et plus simples. Vu que la formule de variance ne se retrouve pas dans la littérature, nous confirmerons en dernier lieu cette formule par une simulation.

### 3.1. PRIX D'UN PRODUIT DÉRIVÉ AVEC UNE OBLIGATION COUPON ZÉRO COMME NUMÉRAIRE

Cette section est un survol des résultats utilisés pour obtenir la formule du prix d'une option européenne d'achat en utilisant la méthode de changement de mesure. Les résultats proviennent du livre de Björk [3, Chapitre 24.2].

Tout d'abord, le théorème suivant permet de définir le numéraire associé à la mesure martingale :

**Théorème 3.1.1.** *Existence d'une mesure martingale.*

*Considérons un marché sans arbitrage sous la mesure martingale  $\mathcal{P}$  dont les titres sont dénotés par  $S_0, S_1, \dots, S_n$  où  $S_0$  est supposée strictement positive. Alors les conditions suivantes s'appliquent :*

- Le marché est sans arbitrage si et seulement s'il existe une *mesure martingale*  $\mathcal{Q}^0 \sim \mathcal{P}$  telle que :

$$\frac{S_0(t)}{S_0(t)}, \frac{S_1(t)}{S_0(t)}, \dots, \frac{S_n(t)}{S_0(t)}$$

sont des martingales sous  $\mathcal{Q}^0$ . Dans ce cas,  $S_0$  est alors appelé le **numéraire**.

- Pour éviter les possibilités d'arbitrage, le prix d'un produit dérivé, dont l'unique paiement au temps  $T$  est  $\chi$ , est calculé selon la formule suivante :

$$\Pi(t; T, \chi) = S_0(t) E^{\mathcal{Q}^0} \left[ \frac{\chi}{S_0(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

*Note* : Pour que la mesure martingale existe, le numéraire utilisé doit être un actif commercialisé qui ne paie pas de dividendes.

Nous voulons maintenant trouver le prix d'un produit dérivé payant  $\mathcal{Y}$  au temps  $T$  en fonction du prix au temps  $t$  d'une obligation  $P(t, T)$  échéant au temps  $T$  :

$$\Pi(t; T, \mathcal{Y}) = P(t, T) \cdot E^{\mathcal{Q}^T} [\mathcal{Y} | \mathcal{F}_t].$$

Cette équation nécessite l'introduction d'une nouvelle mesure  $\mathcal{Q}^T$ , où le numéraire est  $P(\cdot, T)$  et ensuite l'utilisation du théorème 3.1.1 précédent. Nous verrons que la nouvelle mesure  $\mathcal{Q}^T$  sera très utile lors du calcul du prix d'une option européenne.

Nous allons donc chercher la distribution du produit dérivé  $\mathcal{Y}$  sous la mesure  $\mathcal{Q}^T$  : la méthode à utiliser est décrite dans le livre de Björk [3, chapitre 24] et consiste à trouver le noyau de Girsanov (*Girsanov kernel*) pour passer de la mesure neutre au risque  $\mathcal{Q}$  (tel qu'introduit dans la section 1.2, page 10) à la mesure  $\mathcal{Q}^T$ . Le résultat suivant explique la méthode à appliquer :

**Résultat 3.1.1** (Björk [3]). *Méthode de changement de numéraire*

Considérons un marché sans arbitrage dont les actifs  $S_0, S_1, \dots, S_n$  ont chacun une équation stochastique différentielle sous  $\mathcal{Q}$  de la forme :

$$dS_i(s) = \alpha_i(s)S_i(s)ds + \sigma_i(s)S_i(s)dW_s^{\mathcal{Q}}, i = 0, \dots, n,$$

où  $\alpha_i, \sigma_i$  sont des fonctions réelles déterministes du temps et  $W^{\mathcal{Q}}$  est un  $\mathcal{Q}$ -processus de Wiener multidimensionnel. Nous supposons aussi que le numéraire associé à la mesure martingale  $\mathcal{Q}^0$  est l'actif  $S_0$ .

On cherche maintenant à utiliser comme numéraire l'actif  $S_1$  : le problème consiste à trouver la transformation de Girsanov nécessaire pour passer de la mesure  $\mathcal{Q}^0$  à la mesure  $\mathcal{Q}^1$ , où  $\mathcal{Q}^1$  est la mesure associée au numéraire  $S_1$ . Une condition importante pour éviter des possibilités d'arbitrage est que le prix au temps  $t$  de tout produit dérivé  $X$  échéant au temps  $T$  doit être le même indépendamment de la mesure choisie, c'est-à-dire :

$$\Pi(t; T, X) = S_0(t)E_{t,r}^{\mathcal{Q}^0}\left[\frac{X}{S_0T}\right] = S_1(t)E_{t,r}^{\mathcal{Q}^1}\left[\frac{X}{S_1T}\right].$$

Alors, en appliquant le théorème de Radon-Nikodym, nous obtenons que le noyau de Girsanov  $\varphi^1$  pour passer de la mesure  $\mathcal{Q}^0$  à la mesure  $\mathcal{Q}^1$  est donné par :

$$\varphi^T(s) = \sigma_1(s) - \sigma_0(s).$$

Le théorème de Girsanov (voir Björk [3, chapitre 24]) nous donne  $dW_s^{\mathcal{Q}^0} = \varphi_s^T ds + dW_s^{\mathcal{Q}^1}$  et nous pouvons ainsi trouver l'équation stochastique différentielle sous la mesure  $\mathcal{Q}^1$ .

Pour se placer dans le contexte du théorème 3.1.1 (page 41), le marché correspondant à notre cas est composé du titre sans risque  $B(\cdot)$  et d'une obligation coupon-zéro échéant au temps  $T$ ,  $P(\cdot; T)$ ; alors les notations correspondant au théorème 3.1.1 sont  $S_0 = B$  et  $S_1(\cdot) = P(\cdot; T)$ . Quelles sont alors les mesures correspondantes? Nous avons déjà trouvé la formule pour le prix d'un produit dérivé sous la mesure  $\mathcal{Q}$  où le numéraire était  $S_0 = B$  d'où  $\mathcal{Q}^0 = \mathcal{Q}$ . De même, nous voulons trouver l'équation stochastique différentielle sous la mesure  $\mathcal{Q}^T$  avec  $P(\cdot, T)$  comme numéraire donc nous prenons  $\mathcal{Q}^1 = \mathcal{Q}^T$ .

Nous rappelons que le titre sans risque  $B$  est défini par :

$$\begin{cases} dB(s) = r(s)B(s)ds, \\ r(t) = c, \end{cases}$$

d'où  $\sigma_0(s) = 0$ .

Par le théorème 1.3.4 "Équation différentielle d'une obligation coupon zéro" à la page 18, l'équation différentielle stochastique d'une obligation est donnée par :

$$dP(s, T) = r(s)P(s, T)ds - \sigma B(s, T)P(s, T)dW_s^{\mathcal{Q}};$$



d'où, dans notre cas,  $\sigma_1(s) = -\sigma B(s, T) = -\sigma \frac{1 - e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha}$ .

Le noyau de Girsanov, dénoté  $\varphi^T$  pour passer de la mesure  $\mathcal{Q}$  à la mesure  $\mathcal{Q}^T$  est donc :

$$\varphi_s^T = -\sigma B(s, T).$$

On peut alors obtenir l'équation stochastique différentielle de  $r$  :

$$dr(s) = \{a(r_0 - r(s)) - \lambda\sigma - \sigma^2 B(s, T)\}ds + \sigma dW_s^{\mathcal{Q}^T},$$

où  $W^{\mathcal{Q}^T}$  est un processus de Wiener sous la mesure  $\mathcal{Q}^T$ .

En appliquant le théorème 3.1.1 "Existence d'une mesure martingale" de la page 41, nous obtenons le résultat suivant :

**Théorème 3.1.2. Prix d'un produit dérivé sous la mesure  $\mathcal{Q}^T$**

*Le prix du produit dérivé  $\mathcal{Y}$  au temps  $t$  est donné par :*

$$\Pi(t; T, \mathcal{Y}) = P(t, T) \cdot E_{t,r}^{\mathcal{Q}^T}[\mathcal{Y}],$$

où l'équation différentielle stochastique du taux d'intérêt  $r$  sous la mesure  $\mathcal{Q}^T$  est :

$$dr(s) = \{a(b - r(s)) - \sigma^2 B(s, T)\}ds + \sigma dW_s^{\mathcal{Q}^T},$$

avec  $W^{\mathcal{Q}^T}$  un mouvement brownien sous la mesure  $\mathcal{Q}^T$ .

## 3.2. ÉVALUATION DU PRIX D'UN PRODUIT DÉRIVÉ AVEC APPLICATION À UNE OPTION EUROPÉENNE D'ACHAT : MÉTHODE DE CHANGEMENT DE MESURE

### 3.2.1. Cas général

Mathématiquement, nous pouvons alors représenter toute option européenne d'achat par un produit dérivé de taux d'intérêt dont l'unique versement  $\chi$  à l'échéance  $T$  est donné par :

$$\chi = \max[S(T) - K, 0] = (S(T) - K) \cdot I_{\{S(T) \geq K\}},$$

où  $S(\cdot)$  est le sous-jacent du produit dérivé de taux d'intérêt ; le cas que nous traiterons dans la section suivante sera celui d'une obligation coupon zéro échéant au temps  $T_1$ , d'où  $S(\cdot) = P(\cdot; T_1)$ . Nous supposons que le sous-jacent ne paie pas de dividendes et cherchons alors à déterminer le prix de l'option au temps  $t$  dénoté par  $\Pi(t; T, \chi)$ .

Par définition, sous la mesure  $\mathcal{Q}$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned}\Pi(t; T, \chi) &= E^{\mathcal{Q}} \left[ \frac{\chi}{B(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= E^{\mathcal{Q}} \left[ \frac{S(T)}{B(T)} \cdot I_{\{S(T) \geq K\}} \middle| \mathcal{F}_t \right] - K \cdot E^{\mathcal{Q}} \left[ \frac{1}{B(T)} \cdot I_{\{S(T) \geq K\}} \middle| \mathcal{F}_t \right] \quad (3.2.1)\end{aligned}$$

Simplifions les deux espérances de l'équation (3.2.1).

Dans cette partie, nous cherchons à évaluer la *deuxième partie* de l'équation (3.2.1), c'est-à-dire  $E^{\mathcal{Q}} \left[ \frac{1}{B(T)} \cdot I_{\{S(T) \geq K\}} \middle| \mathcal{F}_t \right]$ .

Mais avant tout, énonçons un résultat :

**Résultat 3.2.1** (Björk [3]). *Soit  $\mathcal{Y}$  l'unique paiement d'un produit dérivé au temps  $T$  dont le prix au temps  $t$  est dénoté par  $\Pi(t; T, \mathcal{Y})$ . Sous la mesure  $\mathcal{Q}$  (où  $B(\cdot)$  est le numéraire), le prix au temps  $t$  est :*

$$\Pi(t; T, \mathcal{Y}) = E^{\mathcal{Q}} \left[ \frac{\mathcal{Y}}{B(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

*On se rappelle que  $\mathcal{Q}^T \sim \mathcal{P}$  est une mesure telle que  $\frac{\Pi(\cdot; T, \mathcal{Y})}{P(\cdot, T)}$  est une martingale (locale) sous  $\mathcal{Q}^T$ , alors  $P(\cdot, T)$  est un numéraire.*

*Sous la mesure  $\mathcal{Q}^T$ , nous obtenons :*

$$\Pi(t; T, \mathcal{Y}) = P(t, T) \cdot E^{\mathcal{Q}^T} \left[ \frac{\mathcal{Y}}{P(T, T)} \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

*D'où :*

$$E^{\mathcal{Q}} \left[ \frac{\mathcal{Y}}{B(T)} \right] = P(t, T) \cdot E^{\mathcal{Q}^T} \left[ \frac{\mathcal{Y}}{P(T, T)} \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

Par le résultat cité ci-haut, nous obtenons :

$$\begin{aligned}E^{\mathcal{Q}} \left[ \frac{1}{B(T)} \cdot I_{\{S(T) \geq K\}} \middle| \mathcal{F}_t \right] &= P(t, T) E^{\mathcal{Q}^T} \left[ I_{\{S(T) \geq K\}} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= P(t, T) E^{\mathcal{Q}^T} \left[ I_{\left\{ \frac{S(T)}{P(T, T)} \geq K \right\}} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= P(t, T) E^{\mathcal{Q}^T} \left[ I_{\{Z_{S, T}(T) \geq K\}} \middle| \mathcal{F}_t \right] \quad (3.2.2)\end{aligned}$$

$$= P(t, T) P^{\mathcal{Q}^T} (Z_{S, T}(T) \geq K \middle| \mathcal{F}_t), \quad (3.2.3)$$

où  $P^{\mathcal{Q}^T}(\cdot)$  dénote la probabilité par rapport à la mesure  $\mathcal{Q}^T$ . L'équation (3.2.2) est obtenue en définissant  $Z_{S, T}$  par :

$$Z_{S, T}(\cdot) = \frac{S(\cdot)}{P(\cdot, T)}.$$

Afin d'obtenir une solution théorique à l'équation (3.2.3), dans le cas réel où le sous-jacent  $S(\cdot)$  est connu, il faut que le processus de volatilité de  $Z_{S,T}(\cdot)$  soit déterministe, condition qui nous permettra d'obtenir une solution analytique. Nous résumons les conditions imposées sous la forme d'une hypothèse :

**Hypothèse 3.2.1.** *Supposons que le processus  $Z_{S,T}$  a comme équation stochastique différentielle :*

$$dZ_{S,T}(s) = Z_{S,T}(s)m_{S,T}(s)ds + Z_{S,T}(s)\sigma_{S,T}(s)dW_s,$$

où le processus de volatilité  $\sigma_{S,T}(\cdot)$  est déterministe.

Il faudra ainsi vérifier à l'avenir si le processus de volatilité est déterministe : vu que le processus de volatilité n'est pas affecté par le changement de mesure, la condition que le processus de volatilité soit déterministe peut être vérifiée sous  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{Q}$  ou toute mesure équivalente à  $\mathcal{P}$ .

Sous la mesure  $\mathcal{Q}^T$ ,  $Z_{S,T}(s)$  est une martingale et son équation stochastique différentielle est alors :

$$dZ_{S,T}(s) = Z_{S,T}(s)\sigma_{S,T}(s)dW_s^{\mathcal{Q}^T}.$$

Vu que  $Z_{S,T}$  est une  $\mathcal{Q}$ -martingale, nous pouvons alors simplifier l'équation (3.2.3) et nous obtenons le résultat suivant, tiré de Björk [3] :

**Résultat 3.2.2.**

$$E^{\mathcal{Q}} \left[ \frac{1}{B(T)} \cdot I_{\{S(T) \geq K\}} \middle| \mathcal{F}_t \right] = P(t, T) \cdot \Phi[d_1] \quad (3.2.4)$$

$$\text{où } d_1 = \frac{\text{Log} \left[ \frac{S(t)}{K \cdot P(t, T)} \right] - \frac{\Sigma^2(T)}{2}}{\sqrt{\Sigma^2(T)}},$$

$\Phi(\cdot)$  est la fonction de répartition d'une loi normale standard.

---

En appliquant le même procédé que plus haut avec  $S(\cdot)$  comme numéraire, nous obtenons le théorème suivant, extrait de Björk [3] :

**Théorème 3.2.1.**

$$E^{\mathcal{Q}} \left[ \frac{S(T)}{B(T)} \cdot I_{\{S(T) \geq K\}} | \mathcal{F}_t \right] = S(t) \cdot \Phi[d_2],$$

$$\text{où } d_2 = \frac{\text{Log} \left[ \frac{S(t)}{K \cdot P(t;T)} \right] + \frac{\Sigma^2(T)}{2}}{\sqrt{\Sigma^2(T)}} = d_1 + \sqrt{\Sigma^2(T)}$$

$\Phi(\cdot)$  est la fonction de répartition d'une loi normale standard.

---

Résumons les résultats obtenus pour obtenir le prix de notre option européenne d'achat :

**Résultat 3.2.3. Prix d'une option européenne sur un sous-jacent**

Le prix au temps  $t$  d'une option européenne d'achat (dont le sous-jacent est  $S(\cdot)$ , la date de maturité est  $T$ ) est donné par :

$$\Pi(t; T, \chi) = S(t)P^{\mathcal{Q}^S}(S(T) \geq K | \mathcal{F}_t) - KP(t; T)P^{\mathcal{Q}^T}(S(T) \geq K | \mathcal{F}_t) \quad (3.2.5)$$

où  $P^{\mathcal{Q}^T}(\cdot)$  dénote la probabilité par rapport à la mesure  $\mathcal{Q}^T$  alors que  $P^{\mathcal{Q}^S}(\cdot)$  dénote la probabilité par rapport à la mesure  $\mathcal{Q}^S$ , où  $S(\cdot)$  est le numéraire considéré.

Si  $Z_{S,T}(\cdot) = \frac{S(\cdot)}{P(\cdot; T)}$  est un processus de volatilité déterministe, alors l'équation (3.2.5) devient :

$$\Pi(t; T, \chi) = S(t) \cdot \Phi[d_2] - KP(t; T) \cdot \Phi[d_1],$$

$$\text{où } d_1 = \frac{\text{Log} \left[ \frac{S(t)}{K \cdot P(t; T)} \right] - \frac{\Sigma^2(T)}{2}}{\sqrt{\Sigma^2(T)}},$$

$$d_2 = d_1 + \sqrt{\Sigma^2(T)},$$

$\Phi(\cdot)$  est la fonction de répartition d'une loi normale standard,

$$\Sigma^2(T) = \int_t^T \sigma_{S,T}^2(u) du.$$

### 3.2.2. Application : le taux d'intérêt suit un modèle de Vasicek et le sous-jacent $S(\cdot)$ est une obligation

Comme énoncé, le but de cette section est d'obtenir le prix d'une option européenne d'achat, dont la date d'exercice est  $T_1$  et le prix d'exercice  $K$ , sur une obligation échéant au temps  $T_2$  et dénotée par  $P(\cdot, T_2)$ ,  $T_1 < T_2$ .

Nous allons trouver le prix au temps  $t$  d'un produit dérivé payant au temps  $T$ ,  $\chi = \max [P(T_1, T_2) - K, 0]$ . Dans un modèle de Vasicek, nous nous rappelons que  $P(\cdot, T)$  est donné par :

$$\begin{aligned} \forall s \geq t, P(s; T) &= \mathbb{E}^{\mathcal{Q}} \left[ e^{-\int_s^T r(u) du} \middle| \mathcal{F}_s \right] \\ &= \exp [A(s; T) - B(s; T) \cdot r(s)], \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

$$\text{où } B(s; T) = \frac{1 - e^{-a(T-s)}}{a},$$

$$A(s; T) = \frac{\{B(s; T) - (T - s)\}(a^2 b - \frac{\sigma^2}{2})}{a^2} - \frac{\sigma^2 \cdot B^2(s; T)}{4a}.$$

Avant d'appliquer le théorème au calcul du prix de l'option européenne, il est nécessaire de s'assurer que les probabilités existent (c'est à dire si les processus de volatilité des variables aléatoires sont déterministes).

Nous avons, dans notre cas :

$$\begin{aligned} \forall s \geq t, Z_{S,T}(s) &= \frac{P(s; T_2)}{P(s; T_1)} \\ &= \exp [(A(s; T_2) - A(s; T_1)) - (B(s; T_2) - B(s; T_1)) \cdot r(s)], \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

où l'équation (3.2.7) est obtenue en utilisant l'équation (3.2.6). En utilisant le fait que  $r(s)$  est une variable aléatoire (dont l'équation différentielle stochastique suit le modèle de Vasicek), nous pouvons utiliser le lemme d'Itô [11] pour montrer que l'équation différentielle stochastique de  $Z_{S,T}$  sous la mesure  $\mathcal{Q}$  est donnée par :

$$dZ_{S,T}(s) = Z_{S,T}(s)m_{S,T}(s)ds + Z_{S,T}(s)\sigma_{S,T}(s)dW_s^{\mathcal{Q}}, \quad (3.2.8)$$

où  $\sigma_{S,T}(s) = -\sigma(B(s; T_2) - B(s; T_1))$  et  $m_{S,T}(s) = \sigma B(s; T_1) \cdot \sigma_{S,T}(s)$ . Le processus de volatilité est donc déterministe : nous sommes alors dans les conditions

pour appliquer le théorème 3.2.3 à page 47 pour trouver le prix d'une option européenne.

En appliquant le théorème de Radon-Nikodym (voir Björk [3] et Gauthier [11]), le noyau de Girsanov  $\phi^{\mathcal{Q}^S}$  pour passer de la mesure  $\mathcal{Q}$  à la mesure  $\mathcal{Q}^S$  est donné par :

$$\varphi^{\mathcal{Q}^S}(s) = -\sigma B(s; T_1),$$

et par le théorème de Cameron-Martin-Girsanov (section 11.3 de Björk [3] et chapitre 12 de Gauthier [11]), nous avons :

$$W_s^{\mathcal{Q}} = \int_t^s \varphi^{\mathcal{Q}^S}(u) du + W_s^{\mathcal{Q}^S}.$$

Par un simple calcul, nous pouvons alors démontrer que  $\Sigma^2(T_1) = \int_t^{T_1} \sigma_{S,T}^2(u) du = v^2(t; T_1) \cdot (B(T_1, T_2))^2$ .

**Corollaire 3.2.1. Prix d'une option européenne sur une obligation dans un modèle de Vasiček**

*Dans le cas où le taux d'intérêt suit un modèle de Vasiček, le prix au temps  $t$  d'une option européenne d'achat, dont la date d'exercice est  $T_1$  et le prix d'exercice  $K$ , sur une obligation échéant au temps  $T_2$  est donné par :*

$$\Pi(t; T, \chi) = P(t, T_2) \cdot \Phi[d_2] - KP(t, T_1) \cdot \Phi[d_1]$$

où

$$\Sigma^2(T_1) = \sigma^2 \frac{1 - e^{-2a(T_1 - t)}}{2a} \cdot (B(T_1, T_2))^2,$$

$$d_1 = \frac{\text{Log}\left[\frac{P(t, T_2)}{K \cdot P(t, T_1)}\right] - \frac{\Sigma^2(T)}{2}}{\sqrt{\Sigma^2(T)}},$$

$$d_2 = d_1 + \sqrt{\Sigma^2(T)},$$

$\Phi(\cdot)$  est la fonction de répartition d'une loi normale standard.

### 3.3. CALCUL DE LA VARIANCE D'UN PRODUIT DÉRIVÉ DONT LE SOUS-JACENT EST UNE OBLIGATION DANS UN MODÈLE DE VASIČEK

Après avoir évalué le prix d'un produit dérivé  $\chi$ , nous voulons maintenant connaître la variance escomptée de ce produit dérivé, qui est donnée par :

$$\begin{aligned} \text{Var}^{\mathcal{Q}} \left[ \frac{\chi}{B(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right] &= E^{\mathcal{Q}} \left[ \frac{\chi^2}{B(T)^2} \middle| \mathcal{F}_t \right] - \left( E^{\mathcal{Q}} \left[ \frac{\chi}{B(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right] \right)^2 \\ &= E^{\mathcal{Q}} \left[ \frac{\chi^2}{B(T)^2} \middle| \mathcal{F}_t \right] - (\Pi(t; T, \chi))^2. \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

Nous devons donc évaluer des espérances de la forme  $E^{\mathcal{Q}} \left[ \frac{\dots}{B(T)^2} \middle| \mathcal{F}_t \right]$ . Or, si nous nous rappelons de la définition de  $B(\cdot)$ , nous avons que  $\frac{1}{B(T)^2} = e^{-2 \int_t^T r(u) du}$ , ce qui implique que la variance d'un produit dérivé nécessite l'évaluation d'espérances dont le taux d'escompte est deux fois plus élevé. Aucun des outils développés jusqu'ici ne permettent de résoudre ce problème. On pourrait peut-être introduire une nouvelle mesure pour résoudre ce problème, mais nous voulons maintenant montrer l'utilisation de la méthode de fonction de densité de Jamshidian [15]. La méthode la plus simple est d'utiliser la fonction de densité conjointe entre  $r(s)$  et  $Y(t; s) = \int_t^s r(u) du$  comme faite dans Jamshidian [15].

#### 3.3.1. Cas général

En utilisant les notations de Jamshidian [15] à notre cas, le problème central est de déterminer  $U^*(c, t) = E^{\mathcal{Q}} \left[ \frac{g(r(T))}{B(T)^2} \middle| \mathcal{F}_t \right] = E_{c,t} [e^{-2Y(t;T)} g(r(T))]$ , où  $g(r(T))$  est l'unique paiement du produit dérivé au temps  $T$  et  $Y(t; s) = \int_t^s r(u) du$ .

Pour obtenir le théorème suivant, il suffit de suivre la même méthode que celle de Jamshidian [15] :

**Théorème 3.3.1.** *Variance d'un produit dérivé dans modèle de Vasiček*

*On suppose que le taux d'intérêt  $r$  évolue selon le modèle de Vasiček et que seul le taux d'intérêt au temps  $t$  est connu :  $r(t) = c$ .*

Posons  $U^*(c, t) = E^{\mathcal{Q}} \left[ \frac{g(r(T))}{B(T)^2} \middle| \mathcal{F}_t \right]$  et, après quelques simplifications, la variance d'un produit dérivé au temps  $t$  dont le seul paiement à l'échéance  $T$  est  $\chi = g(r(T))$  est donnée par :

$$U^*(c, t) = (P(t; T))^2 e^{k^2(t; T)} E_{c,t} [g(R_{c,t; T}^*)],$$

où  $R_{c,t; s}^*$  est une variable aléatoire dont la distribution est normale de moyenne  $(m(c, t; s) - 2q(t; s))$  et de variance  $v^2(t; s)$ .

$$\text{De même, } P(t; T) = \exp \left[ -n(c, t; s) + \frac{k^2(t; s)}{2} \right],$$

$$m(c, t; s) = c \cdot e^{-a(s-t)} + b(1 - e^{-a(s-t)}),$$

$$B(t; s) = \frac{1 - e^{-a(s-t)}}{a},$$

$$n(c, t; s) = (c - b)B(t; s) + b(s - t),$$

$$k^2(t; s) = \frac{\sigma^2}{a^2} [(s - t) - B(t; s) - B^2(t; s) \cdot a/2],$$

$$q(t; s) = \frac{\sigma^2}{2} (B(t; s))^2.$$

**Preuve.** En utilisant le fait que la distribution conjointe de  $Y(t; s)$  et  $r(s)$  est une normale bivariée, nous pouvons alors déterminer  $U^*(c, t)$ . Voir l'annexe C.1 à la page C-i pour les détails.

### 3.3.2. Application à une option européenne d'achat dont le sous-jacent est une obligation coupon zéro

Nous voulons trouver la variance au temps  $t$ , d'une option européenne d'achat qui a les caractéristiques suivantes :

- date d'exercice :  $T_1$ ,
- prix d'exercice :  $K$ ,
- Prix du sous-jacent à la date d'expiration  $T_1$  :  $P(T_1; T_2)$ ,
- $\chi = g(r(T_1)) = \max(P(T_1; T_2) - K, 0)$ .

En remplaçant  $g(r(T))$  par  $(S(T))^2 \cdot I_{\{S(T) \geq K\}}, \dots, I_{\{S(T) \geq K\}}$  dans le théorème 3.3.1 "Variance d'un produit dérivé dans modèle de Vasiček" et en les évaluant, il est alors facile d'obtenir le corollaire suivant :



**Corollaire 3.3.1. Variance d'une option européenne sur une obligation dans un modèle de Vasicek**

Dans le cas où le taux d'intérêt suit un modèle de Vasicek, la variance au temps  $t$  d'une option européenne d'achat, dont la date d'exercice est  $T_1$  et le prix d'exercice  $K$ , sur une obligation échéant au temps  $T_2$ ,  $T_1 < T_2$ , est donné par :

$$\begin{aligned} \text{Var}^{\mathcal{Q}} \left[ \frac{\chi}{B(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right] &= E^{\mathcal{Q}} \left[ \frac{\chi^2}{B(T)^2} \middle| \mathcal{F}_t \right] - (C(c, t; T_1; T_2; K))^2 \\ \text{où } E^{\mathcal{Q}} \left[ \frac{\chi^2}{B(T_1)^2} \middle| \mathcal{F}_t \right] &= (P(t; T_2))^2 e^{k^2(t; T_1) + 2B(T_1; T_2)q(t; T_1) + \sigma_P^2} \Phi(h^* + \sigma_P), \\ &\quad - 2KP(t; T_1)P(t; T_2)e^{k^2(t; T_1) + B(T_1; T_2)q(t; T_1)} \Phi(h^*) \\ &\quad + K^2 (P(t; T_1))^2 e^{k^2(t; T_1)} \Phi(h^* - \sigma_P^2), \end{aligned}$$

$$\text{avec } h^* = \frac{\text{Log} \left[ \frac{P(t; T_2)}{KP(t; T_1)} \right] + B(T_1; T_2)q(t; T_1)}{\sigma_P} + \frac{\sigma_P}{2},$$

$\Phi(\cdot)$  est la fonction de répartition d'une loi normale standard,

$$\sigma_P = v(t; T_1) \cdot B(T_1, T_2).$$

**Preuve.** Ce corollaire est une simple application du théorème 3.3.1 avec  $T = T_1$  et  $\chi = g(r(T_1)) = \max(P(T_1; T_2) - K, 0)$ . Voir l'annexe C.2 à la page C-iii pour les détails.

**3.3.3. Simulation de la variance d'une option européenne d'achat dans un modèle de Vasicek**

Nous voulons vérifier la formule de variance d'une option européenne d'achat dans un modèle de Vasicek donnée par le corollaire 3.3.1 à la page 52. Ainsi, nous allons simuler :

$$\text{Var}^{\mathcal{Q}} \left[ \frac{\chi}{B(T_1)} \middle| \mathcal{F}_t \right] = \text{Var}^{\mathcal{Q}} \left[ \frac{\max(P(T_1; T_2) - K, 0)}{B(T_1)} \middle| \mathcal{F}_t \right]. \quad (3.3.2)$$

Dans le chapitre 2, nous avons montré que la simulation de  $P(T_1; T_2)$  (qui est  $\mathcal{F}_{T_1}$ -mesurable) est donnée par :

$$\hat{P}^{(i)}(T_1; T_2) = \frac{1}{N_1} \sum_{j=1}^{N_1} \exp \left[ - \sum_{k=l+1}^M r^{(i,j)}[t_k] (t_k - t_{k-1}) \right],$$

où  $t_l = T_1$ ,  $t_M = T_2$ ,  $t_k - t_{k-1} = \frac{T_2 - T_1}{h}$  et  $r^{(i,j)}[t_l] = r^{(i)}[t_l]$ ,  $j = 1, \dots, N_1$ .

Aussi, le taux d'intérêt est simulé selon le schéma d'Euler (expliqué dans l'article de Haugh [13]) du temps  $t$  au temps  $T_2$  (voir le chapitre 2 pour les détails).

Une valeur simulée de  $\chi = \max(P(T_1; T_2) - K, 0)$  est alors donnée par :

$$\chi \approx \hat{\chi}^{(i)} = \max(\hat{P}^{(i)}(T_1; T_2) - K, 0), \quad i = 1, 2, \dots, N_2.$$

Et la valeur simulée de l'équation (3.3.2) est donnée par :

$$\text{Var}^{\mathcal{Q}} \left[ \frac{\chi}{B(T_1)} \middle| \mathcal{F}_t \right] \approx \frac{1}{N_2 - 1} \sum_{i=1}^{N_2} (\hat{\chi}^{(i)} - \bar{\chi})^2, \quad (3.3.3)$$

$$\text{où } \bar{\chi} = \frac{1}{N_2} \sum_{i=1}^{N_2} \hat{\chi}^{(i)}. \quad (3.3.4)$$

Comme dans le chapitre 2, pour obtenir un intervalle de confiance de la variance de l'option européenne d'achat, il faudra alors répéter la simulation de la variance  $m$  fois pour avoir  $m$  estimés.

La simulation de la variance de l'option européenne d'achat est appliquée en prenant comme valeurs numériques :  $a = 0.1$ ,  $b = 0.1$ ,  $c = 0.1$ ,  $\sigma = 0.02$ ,  $K = 0.75$ ,  $m = \frac{N_2}{100}$ ,  $h = 500$ .

Paramètres	$\text{Var}^Q \left[ \frac{X}{B(T_1)} \middle  \mathcal{F}_t \right]$	$\text{Var}^Q \left[ \frac{X}{B(T_1)} \middle  \mathcal{F}_t \right]$
$t$	0	0
$T_1$	3	3
$T_2$	5	5
$h$	500	500
$N_1$	10 000	10 000
$N_2$	10 000	20 000
$m$	100	200
Valeur théorique	$1,1045 \cdot 10^{-3}$	$1,1045 \cdot 10^{-3}$
Borne inférieure simulée avec I.C. classique	$1,1745 \cdot 10^{-3}$	$1,1699 \cdot 10^{-3}$
Valeur simulée	$1,2087 \cdot 10^{-3}$	$1,1936 \cdot 10^{-3}$
Borne supérieure simulée avec I.C. classique	$1,2429 \cdot 10^{-3}$	$1,2173 \cdot 10^{-3}$
Borne inférieure simulée avec I.C. méthode percentile	$0,8617 \cdot 10^{-3}$	$0,8670 \cdot 10^{-3}$
Valeur simulée	$1,2087 \cdot 10^{-3}$	$1,1936 \cdot 10^{-3}$
Borne supérieure simulée avec I.C. méthode percentile	$1,5179 \cdot 10^{-3}$	$1,5339 \cdot 10^{-3}$

TAB. 3.1. Résultat de la simulation de la variance d'une option

### Analyse des résultats obtenus par simulation :

Les résultats obtenus par simulation sont résumés dans le tableau 3.1 où les intervalles de confiance sont au niveau 0,95. Par le tableau 3.1, nous voyons que :

- La valeur théorique de la variance de l'option n'est pas contenue dans l'intervalle de confiance classique dans le cas où le nombre de valeur simulées est de  $N_2 = 10\,000$ . Nous aurions alors pu nous demander si ce problème était dû au nombre de valeurs simulées; nous avons alors augmenté le nombre de valeurs simulées à  $N_2 = 20\,000$  pour écarter cette hypothèse : la valeur

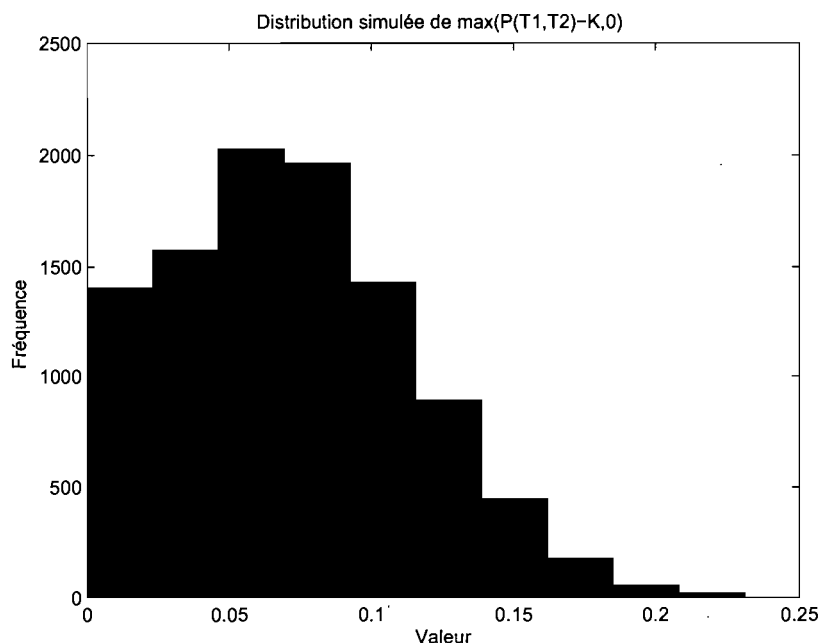


FIG. 3.1. Distribution simulée de  $\chi = \max(P(T_1; T_2) - K, 0)$

théorique de la variance de l'option n'est pas non plus contenue dans l'intervalle de confiance classique dans le cas où le nombre de valeur simulées est de  $N_2 = 20\,000$ .

- Par la figure 3.1 à la page 55, vu que le paiement  $\chi = \max(P(T_1; T_2) - K, 0)$  à l'échéance  $T_1$  ne prend que des valeurs positives, il est évident que l'hypothèse habituelle de normalité de  $\chi$  ne peut s'appliquer et l'intervalle de confiance classique ne peut être utilisé dans ce cas. Une solution pour remédier à ce problème est d'utiliser un intervalle de confiance se basant sur les données : l'intervalle de confiance par la méthode percentile est expliqué dans le chapitre 2. Lorsque  $N_2 = 10\,000$  ou  $N_2 = 20\,000$ , la valeur théorique de la variance de l'option est contenue dans l'intervalle de confiance de la méthode percentile.

Nous avons montré que seul l'intervalle de confiance donné par la méthode percentile est approprié à notre cas ; vu que la valeur théorique est contenue dans l'intervalle de confiance par la méthode percentile, nous pouvons donc affirmer

que la formule de variance d'une option européenne d'achat est donnée par le corollaire 3.3.1 à la page 52.

#### 3.4. CONCLUSION DU CHAPITRE

Nous avons trouvé les formules de prix et de variance d'une option européenne d'achat sur une obligation coupon zéro dans un modèle de Vasiček et avons confirmé la formule de variance par une simulation. Les deux nouveaux résultats qui ne se retrouvent pas dans la littérature sont donnés dans les sections 3.3.1 "Cas général de la variance d'un produit dérivé dans un modèle de Vasiček" (page 50) et 3.3.2 "Variance d'une option européenne sur une obligation dans un modèle de Vasiček" (page 51).

Si nous regardons l'annexe C, nous remarquons que les résultats théoriques, notamment dans le cas de la variance, nécessitent beaucoup de calcul pour un modèle de taux d'intérêt standard. Nous pouvons alors imaginer que, dans le cas de modèles de taux d'intérêt plus complexes (tels le modèle de Cox-Ingersoll-Ross [6] et des modèles à plusieurs dimensions), les calculs se compliqueront encore plus rapidement.

## Chapitre 4

---

# TARIFICATION ET VARIANCE DE PRODUITS DÉRIVÉS DONT LE SOUS-JACENT PAIE DES DIVIDENDES : APPLICATION AUX CONTRATS À TERME DE GRÉ À GRÉ ET AUX CONTRATS À TERME STANDARDISÉS DANS UN MODÈLE DE VASIČEK

Dans ce chapitre, nous traiterons de l'évaluation de produits dérivés de taux d'intérêt dont le sous-jacent paie des dividendes : le cas le plus connu est celui des contrats à terme standardisés (*futures contract*). On traitera aussi de contrats à terme de gré à gré (*forward contract*) vu la similarité entre ces types de contrat.

Les contrats à termes se classent premiers en volume d'échange de produits dérivés sur les marchés financiers; ils sont ainsi des instruments financiers de grande importance.

Historiquement<sup>1</sup>, les contrats à termes constituent une amélioration par rapport aux contrats à terme de gré à gré, qui sont leur ancêtre direct. Les contrats à terme sont apparus sous leur forme actuelle dans la deuxième moitié du XIXe siècle aux États-Unis sur les marchés de céréales (maïs, blé, avoine, etc.) puis, devant le succès de la formule, ont été progressivement mis en place pour

---

<sup>1</sup>Source : Wikipedia

un grand nombre de produits de base, matières premières et produits agricoles : or, argent, pétrole, gaz naturel, soja, bétail, coton, etc. Au cours des années 1970, ils ont été étendus à des produits uniquement financiers :

- \* d'abord les devises, sans grand succès,
- \* puis les taux d'intérêt : emprunts d'état et taux LIBOR.

C'est là qu'ils ont trouvé leur utilité économique principale, et connu une croissance phénoménale. Ils ont depuis été adaptés avec succès aux indices boursiers.

En utilisant les résultats de l'article de Cox, Ingersoll et Ross, "The relation between forward prices and futures prices" [5] et le livre de Björk [3], nous développerons, dans un premier temps, les formules pour la tarification d'un produit dérivé lorsque le sous-jacent paie des dividendes.

Dans un deuxième temps, les contrats à terme de gré à gré et les contrats à terme standardisés seront présentés et le prix à terme de ces contrats dans le cadre d'un modèle de Vasiček sera énoncé. et nous montrerons que les résultats obtenus sont les mêmes que celui obtenu dans l'article de Bick [2]. Les résultats proviennent du chapitre 26 de Björk [3].

Or, on verra que le contrat à terme standardisé peut être vu comme un produit dérivé payant des dividendes et ainsi, nous nous intéressons ensuite à la variance d'un contrat à terme standardisé et obtenons sa formule dans un cas général et faisons ensuite une application dans un modèle de Vasiček dont le sous-jacent est une obligation coupon zéro. Vu que les formules de variance d'un contrat à terme standardisé ne se retrouve pas dans la littérature, nous ferons une simulation de la variance du contrat à terme standardisé dans un modèle de Vasiček dont le sous-jacent est une obligation coupon zéro.

#### 4.1. TARIFICATION D'UN PRODUIT DÉRIVÉ DONT LE SOUS-JACENT PAIE DES DIVIDENDES DANS UN CAS GÉNÉRAL

Le but est maintenant de déterminer le prix d'un produit dérivé lorsque son sous-jacent est sujet au paiement de dividendes ; seul le cas continu sera traité. Ce

cas sera très utile, en particulier dans le cas de la tarification de contrats à terme standardisés et d'options de contrat à terme standardisé. Cette section provient du chapitre 16 de Björk [3].

Définissons  $S_t$  comme le prix d'un titre risqué au temps  $t$  et  $D(t)$  comme le dividende **cumulé** du titre  $S$  sur l'intervalle  $[0, t]$ ; cette dernière définition montre alors que, sur un intervalle infiniment petit  $(t, t + dt]$ , le détenteur du titre risqué recevra le montant  $dD(t) = D(t + dt) - D(t)$ .

**Hypothèse 4.1.1.** *Sous la mesure de probabilité  $\mathcal{P}$ , l'équation différentielle stochastique du titre risqué  $S$  est définie par :*

$$dS_t = S_t \cdot \alpha(t, S_t) + S_t \cdot \sigma(t, S_t) dW_t^{\mathcal{P}}.$$

Alors que l'équation différentielle stochastique du dividende est donnée par :

$$dD(t) = S_t \cdot \delta(t, S_t) dt,$$

où  $\delta$  est une fonction déterministe continue.

Le but de ce problème est de déterminer le prix,  $F(t, S_t)$ , du produit dérivé à un temps quelconque  $t$ , dont le paiement à l'échéance  $T$  est :

$$F(T, S_T) = \Phi(S_T)$$

Nous allons maintenant utiliser une méthode similaire à celle utilisée dans le chapitre 1 (section 1.2, page 10) pour obtenir la formule de tarification d'un produit dérivé sous la mesure neutre au risque  $\mathcal{Q}$ . Nous définissons le processus de gain, qui est défini par :

**Définition 4.1.1.** *Le système de gain*

*Le système de gain  $G^S$  est défini comme étant le gain obtenu en détenant le titre risqué  $S$ , d'où  $G^S(\cdot) = S(\cdot) + D(\cdot)$ . L'équation différentielle stochastique de  $G^S$  est donnée par :*

$$\begin{aligned} dG^S(t) &= dS(t) + dD(t) \\ &= S_t \cdot (\alpha + \delta) + S_t \cdot \sigma dW_t^{\mathcal{P}}. \end{aligned}$$

Le résultat suivant, extrait de Björk [3], nous résume la méthode à appliquer :



**Théorème 4.1.1** (Björk [3]). *Prix d'un produit dérivé dont le sous-jacent paie des dividendes.*

Soit un produit dérivé du sous-jacent  $S$  payant  $\Phi(S_T)$  au temps  $T$ . Alors, le prix au temps  $t$  de ce produit dérivé est donné par :

$$F(t, S_t) = E^{\mathcal{Q}} \left[ e^{-\int_t^T r(u)du} \cdot \Phi(S_T) \middle| \mathcal{F}_t \right],$$

où le titre risqué  $S$  a pour équation différentielle stochastique sous la mesure neutre au risque  $\mathcal{Q}$  :

$$dS_t = S_t \cdot (r(t) - \delta(t, S_t)) + S_t \cdot \sigma(t, S_t) dW_t^{\mathcal{Q}}.$$

**Preuve.** La preuve est faite dans Björk [3, chapitre 16]. Elle consiste à construire un portefeuille sans risque basé sur  $G^S$  et le système de prix  $F$ . En appliquant le théorème de représentation de Feynman-Kač (voir la section 1.2.1 à la page 10), nous obtenons alors le théorème 4.1.1.

Le théorème suivant, tiré de Björk [3], sera utile lors du calcul du prix des contrats à terme standardisés :

**Théorème 4.1.2. Le processus de gain actualisé**

Soit  $S$  un titre risqué dont le dividende cumulé est dénoté par  $D$ . Alors, sous la mesure neutre au risque  $\mathcal{Q}$ , le processus de gain actualisé défini par :

$$G^S(t) = e^{-\int_0^t r(u)du} S_t + \int_0^t e^{-\int_0^\tau r(u)du} dD(\tau),$$

*est une  $\mathcal{Q}$ -martingale.*

**Preuve.** En utilisant le lemme d'Itô, nous pouvons montrer que le coefficient de dérive de l'équation différentielle stochastique de  $G^S$  est nul. Voir Björk [3, chapitre 16] pour les détails.

Nous avons maintenant les outils pour tarifier des produits dérivés payant des dividendes : nous pouvons alors obtenir le prix d'un contrat à terme standardisé mais nous faisons tout d'abord un détour par les contrats à terme de gré à gré.

## 4.2. PRIX D'UN CONTRAT À TERME DE GRÉ À GRÉ

Commençons tout d'abord par définir les paramètres d'un contrat à terme de gré à gré, tel que défini par Björk [3] :

**Définition 4.2.1. Le contrat à terme de gré à gré**

Considérons un produit dérivé payant  $\mathcal{Y}$  au temps  $T$ . Nous définissons un contrat à terme de gré à gré dont le sous-jacent est le produit dérivé considéré, la date d'émission est  $t$ , la date de livraison est  $T$  et le prix à terme est dénoté par  $f(t; \mathbf{T}, \mathcal{Y})$ . Alors les propriétés du contrat à terme de gré à gré sont les suivantes :

- Le détenteur du contrat reçoit, au temps  $T$ , le droit conditionnel  $\mathcal{Y}$  du placeur ;
- Le détenteur du contrat paie, au temps  $T$ , le prix à terme  $f(t; T, \mathcal{Y})$  au placeur ;
- Le prix à terme  $f(t; T, \mathcal{Y})$  est déterminé au temps  $t$  ;
- Le prix à terme  $f(t; T, \mathcal{Y})$  est déterminé de façon à ce que le prix du contrat soit égal à **zéro** à la date d'émission  $t$ .

Nous allons maintenant déterminer la formule pour le calcul du prix à terme  $f(t; T, \mathcal{Y})$  en utilisant le fait que le prix d'un contrat à terme de gré à gré est nul à la date d'émission. Mathématiquement, du point de vue du détenteur du contrat à terme de gré à gré, il recevra le droit contingent européen  $\xi = \mathcal{Y} - f(t; T, \mathcal{Y})$  au temps  $T$  et le prix qu'il devra payer au temps  $t$  sera de zéro :

$$\Pi(t; T, \xi) = \Pi(t; T, \mathcal{Y} - f(t; T, \mathcal{Y})) = 0.$$

Nous pouvons maintenant utiliser les formules de tarification de droit contingent européen pour obtenir le prix à terme  $f(t; T, \mathcal{Y})$  et le théorème suivant, provenant de Björk [3], nous donne la formule :

**Théorème 4.2.1. Prix à terme sur un contrat à terme de gré à gré**

Le prix à terme sur un contrat à terme de gré à gré sur le droit contingent  $\mathcal{Y}$ , dont la date d'émission est  $t$ , la date de livraison est  $T$  et le prix à terme est dénoté par  $f(t; T, \mathcal{Y})$ , est donné par :

$$f(t; T, \mathcal{Y}) = \frac{1}{P(t; T)} E^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^T r(u) du} \cdot \mathcal{Y} \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

*Preuve :*

$$\begin{aligned}
 0 &= \Pi(t; T, \mathcal{Y} - f(t; T, \mathcal{Y})) = E^{\mathcal{Q}} \left[ e^{-\int_t^T r(u) du} \cdot (\mathcal{Y} - f(t; T, \mathcal{Y})) \middle| \mathcal{F}_t \right] \\
 &= E^{\mathcal{Q}} \left[ e^{-\int_t^T r(u) du} \cdot \mathcal{Y} \middle| \mathcal{F}_t \right] - f(t; T, \mathcal{Y}) E^{\mathcal{Q}} \left[ e^{-\int_t^T r(u) du} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\
 &= E^{\mathcal{Q}} \left[ e^{-\int_t^T r(u) du} \cdot \mathcal{Y} \middle| \mathcal{F}_t \right] - f(t; T, \mathcal{Y}) P(t; T)
 \end{aligned}$$

■

### 4.3. PRIX D'UN CONTRAT À TERME STANDARDISÉ

Nous trouvons maintenant le prix d'un contrat à terme standardisé dans un cas général et une application sera faite au cas où le sous-jacent est une obligation coupon zéro et le modèle de taux d'intérêt est celui de Vasicek. Aussi, cette section utilise les résultats de la section 4.1 (page 58) et les théorèmes provenant du livre de Björk [3, chapitre 26].

#### 4.3.1. Cas général

**Définition 4.3.1** (Björk [3]). *Le contrat à terme standardisé*

*Considérons un produit dérivé payant  $\mathcal{Y}$  au temps  $T$ . Nous définissons un contrat à terme standardisé dont le sous-jacent est le produit dérivé considéré, la date d'émission est  $t$ , la date de livraison est  $T$  et le prix à terme est dénoté par  $F(t; T, \mathcal{Y})$ . Alors les propriétés du contrat à terme standardisé sont les suivantes :*

- (i) *À chaque moment  $t$ , il existe, sur le marché, une cotation pour le prix à terme  $F(t; T, \mathcal{Y})$  ;*
- (ii) *À la date de livraison  $T$ , le détenteur du contrat à terme standardisé paie  $F(T; T, \mathcal{Y})$  en échange du droit contingent  $\mathcal{Y}$  ;*
- (iii) *Sur tout intervalle de temps  $(s, u]$ , le détenteur du contrat à terme standardisé aura reçu le montant  $F(u; T, \mathcal{Y}) - F(s; T, \mathcal{Y})$  ;*
- (iv)  *$\forall s < T$ , le prix du contrat à terme standardisé, à tout moment  $s$ , est par définition égal à zéro.*

En utilisant les points (ii) et (iv) de la définition du contrat à terme standardisé, nous avons la relation suivante :

$$F(T; T, \mathcal{Y}) = \mathcal{Y}.$$

Par la définition du contrat à terme standardisé, nous pouvons considérer que le contrat à terme peut-être vu comme un produit dérivé, qui satisfait les conditions suivantes :

- Les dividendes sont payés continuellement et le montant du dividende payé est  $F(u; T, \mathcal{Y}) - F(s; T, \mathcal{Y})$  sur l'intervalle  $(s, u]$ .
- Le prix de ce produit dérivé est égal à zéro en tout temps.

Mathématiquement, le contrat à terme peut alors être représenté par un actif sous-jacent  $Z$  dont les flux financiers sont les suivants :

$$\text{Processus de dividendes cumulés : } D(t) = F(t; T, \mathcal{Y}),$$

$$\text{Processus de prix : } \Pi(t; T, Z) = 0, t \leq T,$$

$$\text{Valeur finale : } F(T; T, \mathcal{Y}) = \mathcal{Y}.$$

**Théorème 4.3.1. Le prix à terme pour le contrat à terme standardisé**

*Soit le contrat à terme standardisé considéré dans le théorème 4.3.1. Nous avons alors les relations suivantes :*

- *Le prix à terme pour le contrat à terme standardisé est donné par :*

$$F(t; T, \mathcal{Y}) = E^{\mathcal{Q}} [\mathcal{Y} | \mathcal{F}_t].$$

- *Si le taux d'intérêt est déterministe, alors tout autre paramètre égal, le prix à terme pour le contrat à terme standardisé et le prix à terme pour le contrat à terme de gré à gré sont égaux :*

$$F(t; T, \mathcal{Y}) = f(t; T, \mathcal{Y}) = E^{\mathcal{Q}} [\mathcal{Y} | \mathcal{F}_t].$$

**Preuve.** *Les détails de la preuve sont faits dans Björk [3, chapitre 26]. Ce théorème est une application du théorème 4.1.2 "Le processus de gain actualisé" donné à la page 60 avec  $D(t) = F(t; T, \mathcal{Y})$ ,  $\Pi(t; T, Z) = 0$  et  $F(T; T, \mathcal{Y}) = \mathcal{Y}$ .*

**4.3.2. Application à une obligation coupon zéro dans un modèle de Vasicek**

Considérons un contrat à terme standardisé dont le sous-jacent est une obligation échéant est au temps  $s$ , la date d'émission est  $t$  et la date de livraison est  $T$ . Ce problème provient de l'article de Bick [2] et ce contrat à terme sur le taux d'intérêt été dénoté " $(T, s)$ -bond futures contract". Le produit dérivé est alors défini par  $\mathcal{Y} = P(T; s)$ .

Nous voulons maintenant déterminer le prix à terme de ce contrat au temps  $t$ ,  $F(t; s, r(s))$ . Par les résultats précédents, nous obtenons que :

$$\begin{aligned} F(t; T, P(T; s)) &= E^{\mathcal{Q}} [P(T; s) | \mathcal{F}_t] \\ &= e^{-B(T,s) \cdot m(c,t,T) + b(B(T,s) - (s-T)) + \frac{1}{2} \cdot (k^2(T,s) + (B(T,s))^2 \cdot v^2(t,T))}, \end{aligned}$$

où les notations proviennent du chapitre 2. Ce résultat est identique à la *Proposition 4-2* de Bick [2].

#### 4.4. VARIANCE D'UN CONTRAT À TERME STANDARDISÉ

Après avoir calculé le prix d'un contrat à terme standardisé, nous nous intéressons maintenant à la variance d'un contrat à terme standardisé dont le sous-jacent est une obligation.

Contrairement aux autres parties, les formules obtenues ici sont nouvelles et ne semblent pas se retrouver dans la littérature, mais sont inspirées des démonstrations de Björk [3, chapitre 26].

##### 4.4.1. Cas général

Nous définissons  $Z$  par un contrat à terme standardisé sur une obligation dont l'échéance est au temps  $s$ , la date d'émission est  $t$  et la date de livraison est  $T$ ,  $t \leq T \leq s$ . Les notations mathématiques sont alors :

$$\text{Processus de dividendes cumulés : } D(t) = F(t; T, \mathcal{Y}),$$

$$\text{Processus de prix : } \Pi(t; T, Z) = 0, t \leq T,$$

$$\text{Valeur finale : } F(T; T, \mathcal{Y}) = \mathcal{Y}.$$

Par la section 4.1 à la page 58, nous nous rappelons que le système de gain  $G^Z$  dans un contrat à terme standardisé est défini par :

$$G^Z(s) = \Pi(s; T, Z) \cdot e^{-\int_0^s r(u) du} + \int_0^s e^{-\int_0^u r(v) dv} dD(u).$$

En examinant  $G^Z$ , nous remarquons que  $G^Z(\tau)$  représente la valeur actualisée au temps 0 des gains du temps 0 au temps  $s$ . On introduit alors la fonction  $G^Z(\tau; s)$  qui est la valeur actualisée au temps  $\tau$  des gains du temps  $\tau$  au temps

$s$  :

$$\begin{aligned} G^Z(\tau; s) &= \Pi(s; T, Z) \cdot e^{-\int_{\tau}^s r(u)du} + \int_{\tau}^s e^{-\int_{\tau}^u r(v)dv} dD(u) \\ &= \int_{\tau}^s e^{-\int_{\tau}^u r(v)dv} dF(u; T, \mathcal{Y}), \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

par la définition du processus de prix et du processus de dividende et le fait que  $\Pi(s; T, Z) = 0$ .

Nous voulons maintenant développer l'équation (4.4.1); pour cela, nous allons montrer que  $F(\cdot; T, \mathcal{Y})$  est une  $\mathcal{Q}$ -martingale en utilisant le résultat suivant extrait de Gauthier [11] :

**Résultat 4.4.1. Une propriété des martingales**

Soit  $X$  une variable aléatoire intégrable. Alors le processus stochastique  $\{M_s : t \leq s \leq T\}$  défini par :

$$M_s = E^{\mathcal{Q}} [X | \mathcal{F}_s] \text{ est une } \mathcal{Q}\text{-martingale.}$$

Ainsi, par le résultat,  $F(\tau; T, \mathcal{Y}) = E^{\mathcal{Q}} [P(T; s) | \mathcal{F}_{\tau}]$  est une  $\mathcal{Q}$ -martingale, ce qui nous permet d'avoir l'équation différentielle stochastique de  $D$  par :

$$dF(\tau; T, \mathcal{Y}) = g_{\tau} dW_{\tau}^{\mathcal{Q}},$$

où  $\{g_{\tau} : t \leq \tau \leq T\}$  est une fonction déterministe.

La valeur actualisée des gains au temps  $t$  du contrat à terme standardisé du temps  $t$  au temps  $T$  est alors :

$$G^Z(t; T) = \int_t^T e^{-\int_t^{\tau} r(u)du} g_{\tau} dW_{\tau}^{\mathcal{Q}}.$$

Le résultat suivant, provenant aussi de Gauthier [11], nous simplifiera le calcul de la variance :

**Résultat 4.4.2. Variance de l'intégrale d'un mouvement brownien**

$$\begin{aligned} \forall T > t, \text{ Var}^{\mathcal{P}} \left[ \int_t^T X_u dW_u^{\mathcal{P}} \right] &= E^{\mathcal{P}} \left[ \int_t^T X_u^2 du \right] \\ &= \int_t^T E^{\mathcal{P}} [X_u^2] du. \end{aligned}$$

En utilisant le résultat 4.4.2, nous obtenons le théorème suivant :

**Théorème 4.4.1. Variance des gains actualisés dans un contrat à terme standardisé dont le sous-jacent est une obligation**

Soit  $Z$  un actif financier représentant un contrat à terme standardisé sur une obligation dont l'échéance est au temps  $s$ , la date d'émission est  $t$  et la date de livraison est  $T$ ,  $t \leq T \leq s$ .

Nous définissons  $\forall \tau$  tel que  $t \leq \tau \leq T$ ,  $F(\tau; T, \mathcal{Y}) = E^{\mathcal{Q}} [P(T; s) | \mathcal{F}_{\tau}]$  le prix à terme pour ce contrat à terme standardisé et l'équation différentielle stochastique du prix est donnée par :

$$dF(\tau; T, \mathcal{Y}) = g_{\tau} dW_{\tau}^{\mathcal{Q}}. \quad (4.4.2)$$

Alors, la variance de la valeur actualisée des gains du contrat à terme standardisé est donnée par :

$$\text{Var}^{\mathcal{Q}} [G^Z(t; T) | \mathcal{F}_t] = \int_t^T E^{\mathcal{Q}} \left[ e^{-2 \int_t^{\tau} r(u) du} (g_{\tau})^2 | \mathcal{F}_t \right] d\tau.$$

**Preuve.** Par les équations (4.4.1) et (4.4.2), nous avons :

$$G^Z(t; T) = \int_t^T e^{-\int_t^{\tau} r(v) dv} dF(\tau; T, \mathcal{Y}) = \int_t^T e^{-\int_t^{\tau} r(v) dv} g_{\tau} dW_{\tau}^{\mathcal{Q}},$$

et une simple application du résultat 4.4.2 termine la preuve.

La prochaine section est une application du théorème 4.4.1 dans le cas où le taux d'intérêt suit le modèle de Vasiček.

#### 4.4.2. Application dans un modèle de Vasiček dont le sous-jacent est une obligation coupon zéro

Nous voulons maintenant calculer la variance d'un contrat à terme standardisé dont le sous-jacent est une obligation échéant au temps  $s$ , la date d'émission est  $t$  et la date de livraison est  $T$ ,  $t \leq T \leq s$ . Le taux d'intérêt  $r$  suivra le modèle de Vasiček sachant que seul le taux d'intérêt au temps  $t$  est connu,  $r(t) = c$ .

En utilisant les résultats de la section 2.1 “Prix futur d’une obligation coupon zéro” (page 26), nous avons :

$$\begin{aligned}
D(\tau) &= F(\tau; T, \mathcal{Y}) = E^{\mathcal{Q}} [P(T; s) | \mathcal{F}_{\tau}] \\
&= \exp \left[ -m(r(\tau); \tau; T)B(T; s) + A(T; s) + \frac{v^2(\tau; T)B^2(T; s)}{2} \right] \\
&= \exp [G(\tau) \cdot r(\tau) + \kappa(\tau)],
\end{aligned} \tag{4.4.3}$$

où  $G(\tau) = -e^{-a(T-\tau)}B(T; s)$

$$\kappa(\tau) = -a \cdot b \cdot B(\tau; T)B(T; s) + A(T; s) + \frac{v^2(\tau; T)B^2(T; s)}{2}$$

En utilisant l’équation différentielle stochastique du taux d’intérêt sous le modèle de Vasiček, l’équation (4.4.3) et le lemme d’Itô, il peut alors être démontré que l’équation différentielle stochastique de  $D$  est donnée par :

$$dD(\tau) = -\sigma D(\tau)B(T; s)e^{-a(T-\tau)}dW_{\tau}^{\mathcal{Q}}. \tag{4.4.4}$$

Le théorème 4.4.1 (page 65) et l’équation (4.4.4) nous donnent alors le corollaire suivant :

**Corollaire 4.4.1.** *Variance d’un contrat à terme standardisé dont le sous-jacent est une obligation coupon zéro dans un modèle de Vasiček*  
*Soit un contrat à terme standardisé dont le sous-jacent est une obligation échéant au temps  $s$ , la date de livraison est  $T$  et le taux d’intérêt suit le modèle de Vasiček. La valeur actualisée au temps  $t$  des gains du contrat à terme standardisé du temps  $t$  au temps  $T$  est dénotée par  $G^Z(t; T)$  et sa variance est alors :*

$$\text{Var}^{\mathcal{Q}} [G^Z(t; T) | \mathcal{F}_t] = (\sigma B(T; s))^2 \int_t^T f(\tau) d\tau,$$

où  $f(\tau) = e^{2(-a(T-\tau) - n(c; t; \tau) + G(\tau) \cdot m(c, t, \tau) + \kappa(\tau) + k^2(t; \tau) + (G(\tau))^2 \cdot v^2(t, \tau) - G(\tau) \cdot \sigma^2 (B(t; \tau))^2)}$ .

**Preuve.** En posant  $g_{\tau} = -\sigma D(\tau)B(T; s)e^{-a(T-\tau)}$  et après quelques simplifications, la démonstration du théorème est complétée. Voir l’annexe D à la page D-i pour les détails.

L’intégrale  $\int_t^T f(\tau) d\tau$  est ne peut être évaluée exactement ; il faut ainsi choisir une méthode d’approximation pour évaluer cette intégrale. Par exemple, nous pouvons faire une approximation de  $f(\cdot)$  par une série de Taylor.



## 4.5. SIMULATION DE LA VARIANCE D'UN CONTRAT À TERME STANDARDISÉ DONT LE SOUS-JACENT EST UNE OBLIGATION COUPON ZÉRO DANS UN MODÈLE DE VASIČEK

### 4.5.1. Méthodologie

Nous voulons nous assurer que la formule de variance d'un contrat à terme standardisé dont le sous-jacent est une obligation dans un modèle de Vasiček, donnée par le corollaire 4.4.1 :

$$\text{Var}^{\mathcal{Q}} [G^Z(t; T) | \mathcal{F}_t] = (\sigma B(T; s))^2 \int_t^T f(\tau) d\tau,$$

est correcte. Pour cela, nous devons donc avoir plusieurs estimations de celle-ci et nous utilisons une approximation de Taylor de  $f$  pour évaluer  $\int_t^T f(\tau) d\tau$  telle que décrite dans le livre "Calculus" [20] de Stewart.

Dans notre cas, le dividende cumulé est donné par :

$$\begin{aligned} D(\tau) &= F(\tau; T, \mathcal{Y}) = E^{\mathcal{Q}} [P(T; s) | \mathcal{F}_\tau] \\ &= P(r(\tau); T; s), \text{ qui est } \mathcal{F}_\tau\text{-mesurable.} \end{aligned} \quad (4.5.1)$$

Par la définition du contrat à terme, nous nous rappelons que le contrat à terme peut-être vu comme un produit dérivé, qui satisfait les conditions suivantes :

- Les dividendes sont payés continuellement et le montant du dividende payé est  $F(u; T, \mathcal{Y}) - F(\tau; T, \mathcal{Y})$  sur l'intervalle  $(\tau, u]$  ;
- Le prix de ce produit dérivé est égal à zéro en tout temps.

Il suffit alors de discrétiser le paiement des dividendes sur l'intervalle  $[t, T]$  : soit  $\{t_k : 0 \leq k \leq m\}$  la discrétisation du temps choisie, où  $t_0 = t$  et  $t_m = T$ . Alors, la simulation du dividende payé au temps  $t_k$  sera calculée par :

$$\widehat{D}^{(i)}(t_k) = P(r^{(i)}[t_k]; T; s) - P(r^{(i)}[t_{k-1}]; T; s), k = 0, \dots, m.$$

**Comment décider de la valeur de  $r^{(i)}[t_k]$  ?** Afin de pouvoir calculer, nous remarquons que la variance est prise selon la filtration  $\mathcal{F}_t$  ; il suffit ainsi simplement de simuler à partir du schéma d'Euler [13] une trajectoire du taux d'intérêt du temps  $t$  au temps  $T$  (voir la section 1.5 à la page 20 pour les détails).

Afin d'avoir un estimé  $\hat{G}^{(i)}$  de  $G^Z(t; T) = \int_t^T e^{-\int_t^\tau r(v)dv} dD(\tau)$ , nous devons connaître la valeur présente des dividendes simulés : l'intégrale contenue dans  $e^{-\int_t^T r(u)du}$  est calculé par une approximation de Riemann-Stieltjes [19] :

$$\exp \left[ - \int_t^T r(u)du \right] \approx \exp \left[ - \sum_{j=1}^m r^{(i)}[t_j](t_j - t_{j-1}) \right].$$

Alors, un estimé de  $G^Z(t; T)$  est donné par :

$$\hat{G}^{(i)} = \sum_{k=0}^m \hat{D}^{(i)}(t_k) \exp \left[ - \sum_{j=1}^k r^{(i)}[t_j](t_j - t_{j-1}) \right].$$

Si nous répétons l'expérience  $N$  fois, nous aurons alors :  $\hat{G}^{(1)}, \dots, \hat{G}^{(i)}, \dots, \hat{G}^{(N)}$  et nous pourrions alors avoir un estimé (qui est la variance des  $\hat{G}^{(i)}, i = 1, \dots, N$ ) et un intervalle de confiance de la variance d'un contrat à terme standardisé dont le sous-jacent est une obligation coupon zéro dans un modèle de Vasicek. L'intervalle de confiance classique et percentile sont des méthodes d'obtention d'intervalles de confiance expliquées dans le chapitre 2.

#### 4.5.2. Résultats de la simulation

La simulation de la variance du contrat à terme standardisé, dont l'actif sous-jacent est une obligation au temps  $T$  échéant au temps  $s$ , est appliquée en prenant comme valeurs numériques :  $t = 0, T = 3, s = 5, a = 0.1, b = 0.1, c = 0.1, \sigma = 0.02, t_{k+1} - t_k = \Delta t = 0.0050, h = \frac{T-t}{\Delta t} = 600$ .

Les résultats obtenus par simulation sont résumés dans le tableau 4.1 à la page 70 où les intervalles de confiance (I.C.) sont au niveau 0,95. La deuxième et la troisième colonne sont les résultats obtenus en prenant respectivement  $N = 1\,000$  et  $N = 10\,000$ , tout autre paramètre constant. Il faudrait observer dans le tableau que :

- Plus le nombre de valeurs simulées  $N$  augmente, plus l'intervalle de confiance classique devient petit et plus la valeur simulée se rapproche de la valeur théorique : ceci nous donne une indication que la simulation a été faite correctement.
- Dans le cas de l'intervalle de confiance percentile, lorsque le nombre de valeurs simulées  $N$  augmente, l'intervalle de confiance ne devient pas plus

petit : ceci est dû au fait que l'intervalle de confiance percentile est plus influencé par les valeurs extrêmes que l'intervalle de confiance classique.

- Dans les deux cas où  $N = 1\ 000$  et  $N = 10\ 000$ , la valeur théorique est contenue dans les intervalles de confiance classiques et percentiles : nous pouvons ainsi conclure que la formule de variance d'un contrat à terme est correcte.

Paramètres	$\text{Var}^Q [G^Z(t; T)   \mathcal{F}_t]$	$\text{Var}^Q [G^Z(t; T)   \mathcal{F}_t]$
$t$	0	0
$T$	3	3
$s$	5	5
$h$	600	600
$N$	1 000	10 000
Valeur théorique	$1,4652 \cdot 10^{-3}$	$1,4652 \cdot 10^{-3}$
Borne inférieure simulée avec I.C. classique	$1,3962 \cdot 10^{-3}$	$1,4169 \cdot 10^{-3}$
Valeur simulée	$1,5609 \cdot 10^{-3}$	$1,4582 \cdot 10^{-3}$
Borne supérieure simulée avec I.C. classique	$1,7257 \cdot 10^{-3}$	$1,4995 \cdot 10^{-3}$
Borne inférieure simulée avec I.C. méthode percentile	$1,1242 \cdot 10^{-3}$	$1,0468 \cdot 10^{-3}$
Valeur simulée	$1,5609 \cdot 10^{-3}$	$1,4582 \cdot 10^{-3}$
Borne supérieure simulée avec I.C. méthode percentile	$1,7675 \cdot 10^{-3}$	$1,8482 \cdot 10^{-3}$

TAB. 4.1. Résultats de la simulation de la variance d'un contrat à terme standardisé dont le sous-jacent est une obligation dans un modèle de Vasiček

## 4.6. CONCLUSION DU CHAPITRE

Le résultat central de ce chapitre a été d'obtenir dans un modèle de Vasiček le prix et surtout la variance d'un contrat à terme standardisé dont le sous-jacent

est une obligation coupon-zéro alors que la formule de variance ne se retrouve pas dans la littérature.

Or, dans la section 3.3 (page 50), il faudrait aussi noter que nous avons obtenu la méthode pour calculer la variance d'un contrat à terme qui paie des dividendes dans un cas général : la variance de ce contrat à terme standardisé dont le sous-jacent est une obligation coupon zéro en est une application. En utilisant cette méthode, nous pourrions développer d'autres formules de variance de contrats à terme standardisés.

## Chapitre 5

---

### APPLICATION PRATIQUE DES RÉSULTATS

Nous voulons maintenant étudier la performance du prix et de la variance théoriques d'obligations à coupon zéro dans un cas réel : nous allons l'appliquer à un jeu de données et extraire les avantages et désavantages du modèle. Nous pouvons ainsi calculer le prix, l'intervalle de confiance associé au prix et la variance d'obligations coupon zéro dans un modèle de Vasiček tel que déterminés dans les chapitres 1 et 2 et les comparer à leurs valeurs empiriques correspondantes sur les marchés.

#### 5.1. LES DONNÉES

Les données utilisées sont les taux de rendement d'obligations coupon zéro, générés à partir des prix des obligations coupon zéro et des bons du Trésor du gouvernement canadien. Les données ont été extraites du site internet de la Banque du Canada<sup>1</sup>. Il s'agit de données mensuelles dont les échéances vont de 0,25 année à 30 années par pas de 0,25 années alors que l'éventail de la période considérée va du 31 Janvier 2000 jusqu'au 30 Avril 2007.

Il faudrait noter que la taille des données utilisées est petite (88), mais le fait que le taux d'intérêt dans un modèle de Vasiček suive une distribution normale implique que des résultats significatifs peuvent être obtenus malgré la petite taille de la base de données considérée. Quel est le taux de rendement à utiliser pour modéliser le taux d'intérêt ? Nous allons utiliser le taux de rendement ayant la

---

<sup>1</sup><http://www.bank-banque-canada.ca/>

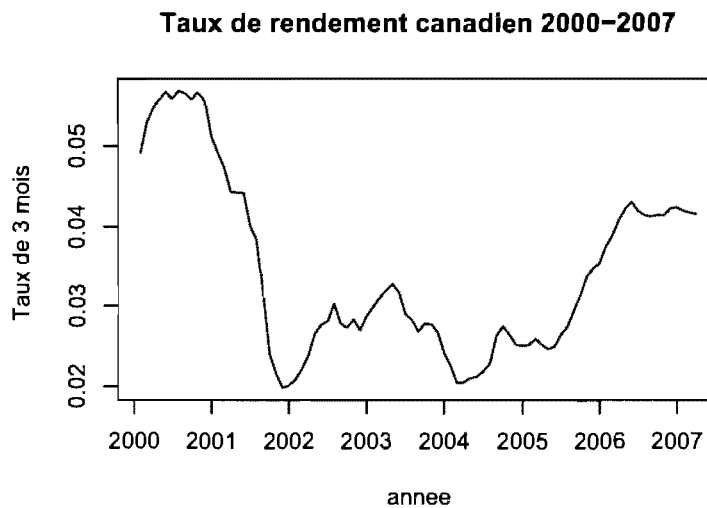


FIG. 5.1. Taux de rendement de 3 mois d'obligations coupon zéro et de bons du trésor du gouvernement du Canada durant la période 2000-2007.

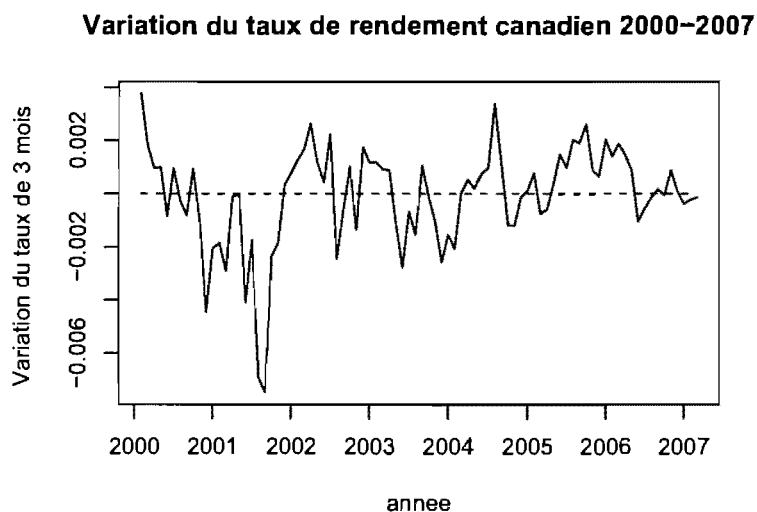


FIG. 5.2. Variation mensuelle successive du taux de rendement de 3 mois durant la période 2000-2007.

plus courte échéance (voir Duffee [7]), qui est dans notre cas, l'échéance de 3 mois afin de représenter le taux court de Vasíček.

La représentation du taux de rendement de 3 mois est illustrée dans le graphique 5.1 alors que le graphique 5.2 représente la variation mensuelle successive du taux de rendement de 3 mois. Nous pouvons alors distinguer 3 périodes :

- (i) Durant la période 2000 à 2001, la tendance du taux de rendement est décroissante. Vu que sa variation successive est souvent négative et importante, cette période affectera le plus la variabilité du modèle : nous ne pourrions donc pas modéliser correctement ce phénomène car la volatilité stochastique du modèle de Vasicek est constante.
- (ii) Durant la période 2002 à 2005, la variation successive du taux de rendement est stable : il y a sensiblement le même nombre de variations positives que négatives. Vu que cette période est la plus longue, le modèle de Vasicek sera le plus influencé à représenter cette période.
- (iii) Durant la période 2006 à 2007, la tendance du taux de rendement est croissante, alors que la variation successive est plus souvent positive sans pour autant être aussi important que la période 2000 à 2001.

Dû au fait que nous pouvons distinguer 3 périodes qui ont chacune une variabilité différente, nous ne nous attendons pas à ce que le modèle de Vasicek nous donne d'excellents résultats.

## 5.2. MÉTHODOLOGIE

La méthode utilisée pour le calibrage des paramètres est la méthode du quasi-maximum de vraisemblance (“Quasi-Maximum Likelihood”); plus de détails sont donnés dans Duffee [7]. Le code écrit par Rolf Poulsen<sup>2</sup>, “R-code for Vasicek estimation”, calibre les paramètres du modèle de Vasicek aux données fournies. Ce code avait été appliqué aux taux de rendement d'obligations coupon zéro américaines et illustre l'application aux courbes de rendement dans un modèle de Vasicek; nous avons utilisé ce code pour l'appliquer aux données canadiennes et implanter la variance réelle et théorique des obligations.

Soit  $y_t^\tau$  le taux de rendement au temps  $t$  échéant au temps  $t + \tau$ ; le prix observé au temps  $t$  d'une obligation coupon zéro, échéant au temps  $t + \tau$ , est alors donné

<sup>2</sup><http://www.math.ku.dk/~rolf/>

par :

$$P(t; t + \tau) = \exp[-y_t^\tau \cdot \tau], \quad (5.2.1)$$

et le prix d'une obligation coupon zéro sous le modèle de Vasiček est :

$$P(t; t + \tau) = \exp[A(t; t + \tau) - B(t; t + \tau)r(t)], \quad (5.2.2)$$

où  $r(t)$  est le taux court.

Nous allons maintenant choisir  $r(t)$  de façon à ce que le prix observé d'une obligation coupon zéro, échéant dans 3 mois, corresponde au prix théorique d'une obligation coupon zéro, échéant dans 3 mois. En utilisant les équations (5.2.1) et (5.2.2), le taux court  $r(t)$  est alors donné par :

$$r(t) = \frac{0.25 \cdot y_t^{0.25} + A(t; t + 0.25)}{B(t; t + 0.25)}.$$

### 5.2.1. Cas du taux de rendement selon différentes échéances

Dans un premier temps, nous allons comparer les courbes de rendement moyennes observées et théoriques (sous le modèle de Vasiček). La courbe de rendement moyenne observée correspond à la moyenne du taux de rendement sur la période 2000-2007 en fonction de l'échéance alors que la courbe de rendement moyenne sous Vasiček utilise comme taux d'intérêt la moyenne du taux court sur la période 2000-2007. Dans un deuxième temps, nous allons comparer les courbes de rendement observées et théoriques par rapport à un mois de la période : nous allons prendre comme exemple les mois d'octobre 2005 et d'avril 2003.

Nous pouvons montrer que le taux de rendement théorique (dans un modèle de Vasiček), au temps  $t$  échéant au temps  $t + \tau$ , est donné par :

$$y_t^\tau = \frac{-A(t; t + \tau) + B(t; t + \tau)r(t)}{\tau}. \quad (5.2.3)$$

Or, on peut montrer que  $A(t; t + \tau)$  et  $B(t; t + \tau)$  sont des fonctions indépendantes de  $t$  et nous introduisons alors une nouvelle notation pour le taux de rendement théorique :

$$y^\tau(z) = \frac{-A(\tau) + B(\tau)z}{\tau}, \quad (5.2.4)$$



où  $A(\tau) = A(t; t + \tau)$  et  $B(\tau) = B(t; t + \tau)$ . Ainsi, la courbe de rendement moyenne sous Vasiček utilise l'équation (5.2.4) en prenant comme taux d'intérêt  $z$ , la moyenne du taux court  $r(\cdot)$  sur la période 2000-2007.

Le graphique 5.3 à la page 81 nous montre les résultats obtenus. Ainsi, nous remarquons que le modèle de Vasiček nous donne une excellente approximation de la courbe de rendement moyenne observée pour les échéances des 15 premières années mais elle est moins bonne pour les 15 dernières années.

Nous nous intéressons maintenant à comparer la courbe générée par le modèle de Vasiček estimé avec chacune des 88 courbes de rendement. Ainsi, nous traitons le cas de la courbe de rendement pour le mois d'octobre 2005 : les courbes de rendement théoriques sont calculées par l'équation (5.2.3) avec le taux court correspondant au mois d'octobre 2005. Par le graphique 5.4 à la page 81, nous voyons que la courbe de rendement moyenne sous Vasiček nous donne de bons résultats lorsque l'échéance est petite, mais se détériore rapidement lorsque l'échéance augmente.

Nous comparons aussi la courbe de rendement observée et théorique par rapport au mois d'avril 2003 afin de montrer que nous pouvons obtenir un meilleur résultat : par le graphique 5.5 à la page 82, nous remarquons que l'approximation de la courbe de rendement observée par le modèle de Vasiček est maintenant meilleure où l'approximation est très bonne pour les échéances de moins 10 années.

### 5.2.2. Cas d'une obligation coupon zéro

Dans un premier temps, nous voulons comparer la valeur observée du prix d'une obligation coupon zéro et sa valeur théorique dans un modèle de Vasiček : comme nous avons maintenant les formules de variance de l'obligation (voir le chapitre 1 pour les détails), nous pouvons maintenant calculer un intervalle de confiance du prix de l'obligation coupon zéro dans un modèle de Vasiček et le comparer au prix observé de l'obligation coupon zéro. Dans un deuxième temps, nous étudierons la variance de l'obligation en comparant les résultats théoriques et observés.

### 5.2.2.1. Prix d'une obligation à coupon zéro

Nous nous intéressons au prix d'une obligation en octobre 2005 selon différentes échéances  $\tau = 0,25, 0,5, \dots, 10$ . Le prix théorique de l'obligation est calculé à partir de la formule :

$$P(t; t + \tau) | \mathcal{F}_t = \exp [A(t; t + \tau) - B(t; t + \tau)r(t)].$$

Le graphique 5.6 à la page 83 résume les résultats obtenus. En examinant le graphique, nous voyons que le prix de l'obligation observé est contenu dans les intervalles de confiance du modèle de Vasiček : ainsi, l'approximation par le modèle de Vasiček du prix de l'obligation est acceptable. Mais, il faudrait aussi remarquer que plus l'échéance augmente, plus le prix observé se rapproche de la borne supérieure de l'intervalle de confiance. Comme auparavant, nous observons que plus l'échéance augmente, moins l'approximation du modèle de Vasiček est fiable.

### 5.2.2.2. Variance d'une obligation à coupon zéro

Nous nous intéressons maintenant au cas de la variance d'une obligation en octobre 2005 pour différentes échéances  $\tau = 0,25, 0,5, \dots, 10$ . Nous avons, par le chapitre 1, les formules pour la variance théorique d'une obligation à coupon zéro dans un modèle de Vasiček mais le problème est que nous n'avons pas de formules pour calculer la variance observée d'une obligation à coupon zéro : il suffit d'avoir plusieurs estimés du prix observé de l'obligation coupon zéro et de calculer la variance correspondante.

Soit  $t$  la date correspondant au mois d'octobre 2005,  $y_t^\tau$  le taux de rendement pour le mois d'octobre 2005 pour l'échéance  $\tau$  et  $\widehat{P}(t; t + \tau)$  le prix observé pour le mois d'octobre 2005 dont l'échéance est  $\tau$ .

Alors, un estimé de  $\widehat{P}(t; t + \tau)$  est donné par :

$$\begin{aligned} \widehat{P}\left(t + \frac{i}{12}; t + \tau\right) &= \exp \left[ -y_{t + \frac{i}{12}}^{\tau - \frac{i}{12}} \left( \tau - \frac{i}{12} \right) \right] \\ &\approx \exp \left[ - \left( y_{t + \frac{i}{12}}^{\tau - 0.25} + \frac{0.25 - \frac{i}{12}}{0.25} (y_{t + \frac{i}{12}}^\tau - y_{t + \frac{i}{12}}^{\tau - 0.25}) \right) \left( \tau - \frac{i}{12} \right) \right], \end{aligned} \tag{5.2.5}$$

où une approximation linéaire est utilisée pour trouver le taux d'intérêt  $y_{t+\frac{i}{12}}^{\tau-\frac{i}{12}}$ . Ainsi, en utilisant uniquement les valeurs estimées suivantes :

$$\left\{ \widehat{P}\left(t + \frac{i}{12}; t + \tau\right) : i \in \{-3, \dots, 0, \dots, 3\} \right\},$$

nous pouvons avoir un estimé de la variance observée de l'obligation et le comparer à la variance sous le modèle de Vasiček .

Le graphique 5.7 à la page 83 résume les variances obtenues uniquement pour les échéances plus petites que 10 années : nous voyons que pour les échéances allant de 0.25 à 3 années, les deux variances sont proches mais que, plus l'échéance augmente, plus l'approximation de la variance observée par le modèle de Vasiček est mauvaise. Nous remarquons, encore une fois, qu'il serait donc judicieux de se limiter aux obligations dont l'échéance est relativement petite.

### 5.2.3. Prix futur et variance du prix futur d'une obligation coupon zéro

Nous nous intéressons maintenant au prix futur, aux intervalles de confiance associés et à la variance du prix futur d'une obligation à coupon zéro en fonction de la filtration utilisée (donc dépendant de la date où nous connaissons le taux d'intérêt) : nous allons comparer les résultats observés et les résultats théoriques obtenus dans le chapitre 2.

#### 5.2.3.1. Cas du prix futur d'une obligation coupon zéro

Dans un premier temps, nous nous intéressons au prix futur et à ses intervalles de confiance associés uniquement. Plus précisément, nous voulons comparer le prix futur théorique  $E^Q [P(s; s + \tau) | \mathcal{F}_t]$  et le prix futur observé  $\widehat{P}(s; s + \tau) | \mathcal{F}_t$  pour différents  $t$ . Nous connaissons la formule pour le prix futur théorique par le chapitre 2, mais pour le prix futur observé, il faudrait utiliser la formule suivante :

$$\widehat{P}(s; s + \tau) | \mathcal{F}_t = \frac{\widehat{P}(t; s + \tau)}{\widehat{P}(t; s)}. \quad (5.2.6)$$

Le prix d'une obligation en janvier 2005 échéant en janvier 2010 en supposant que nous connaissons le taux d'intérêt à différentes années (janvier 2000, janvier 2001, ..., janvier 2004) est considéré : si nous supposons que  $t = 0$  correspond au

mois de janvier 2000,  $\dots$ ,  $t = 4$  correspond à janvier 2004, ceci revient alors à calculer dans le modèle de Vasiček,  $E^{\mathcal{Q}} [P(\mathbf{5}; \mathbf{10}) | \mathcal{F}_t]$  avec  $t = 0, \dots, 4$ . En utilisant l'équation (5.2.6) et les résultats du chapitre 2, nous obtenons le graphique 5.8 à la page 84. Nous remarquons que le prix observé est compris dans l'intervalle de confiance théorique sauf pour l'année 2002; nous sommes satisfaits des résultats car la théorie ne peut pas tout le temps refléter la pratique.

### 5.2.3.2. Cas de la variance du prix futur d'une obligation coupon zéro

Nous portons maintenant notre attention à la variance du prix futur de l'obligation : nous voulons alors comparer la variance théorique  $\text{Var}^{\mathcal{Q}} [P(s; s + \tau) | \mathcal{F}_t]$  à la variance du prix futur observé  $\left( \widehat{P}(s; s + \tau) \Big| \mathcal{F}_t \right)$  pour différents  $t$ .

La variance du prix futur observé est calculée en utilisant les estimés du prix futur  $\left\{ \widehat{P}(s + \frac{i}{12}; s + \tau) \Big| \mathcal{F}_t : i \in \{-3, \dots, 0, \dots, 3\} \right\}$  qui sont eux-mêmes calculés en utilisant les équations (5.2.5) et (5.2.6), définies aux pages 77 et 78 respectivement.

L'application sera faite à l'obligation considérée dans la section 5.2.3.1 précédente, qui est le prix d'une obligation en janvier 2005 échéant en janvier 2010 en supposant que nous connaissons le taux d'intérêt à différentes années (janvier 2000, janvier 2001,  $\dots$ , janvier 2004). Le résultat obtenu est exposé dans le graphique 5.9 à la page 84 : nous voyons que les variances théoriques et observées sont du même ordre de grandeur et sont arbitrairement proches.

Nous sommes donc satisfaits des résultats obtenus; pour nous en convaincre encore plus, nous examinons un autre cas : l'obligation considérée est encore la même, mais l'échéance est maintenant de 2 années. Les résultats sont résumés dans les graphiques 5.10 et 5.11 à la page 85; les conclusions obtenues sont les mêmes que dans les sections précédentes, mais avec quelques différences :

- Dans le graphique 5.10, nous voyons que le prix théorique est maintenant plus proche du prix observé (en comparant les ordonnées des graphiques 5.8 et 5.10). Il faudrait noter que le prix observé, correspondant à  $t = 3$ , est très proche du prix théorique et est donc difficile à distinguer.

- Dans le graphique 5.11, nous voyons que les résultats sont les mêmes mais que la distance entre la variance théorique et observée est maintenant plus petite (en comparant les ordonnées des graphiques 5.9 et 5.11).

### 5.3. CONCLUSION DU CHAPITRE

Le but de ce chapitre était de faire une application pratique des résultats obtenus. Le jeu de données utilisé ne correspondait pas au cas le plus idéal pour un modèle de taux d'intérêt de Vasiček, vu la variabilité de celui-ci. Mais nous avons tout de même obtenu des résultats satisfaisants et nous avons pu ressortir les avantages et les désavantages associés au modèle.

Commençons par énumérer les désavantages :

- Comme nous l'avons vu de nombreuses fois, lorsque l'échéance de l'obligation augmente, l'approximation par le modèle de Vasiček est de moins en moins bonne. Mais ce problème n'est pas dû uniquement au modèle de Vasiček, il est normal que le marché financier soit incertain de l'évolution du taux d'intérêt dans un avenir lointain et ainsi, le taux court observé ne peut refléter cette incertitude.
- Le deuxième inconvénient est que le modèle ne peut prendre en compte une année dont les caractéristiques sont différentes des autres : comme nous l'avons vu, l'année 2002 est une année qui ne suit pas la tendance et les résultats théoriques pour cette année laissent à désirer.

Ensuite, les avantages : le premier avantage est que le modèle de Vasiček peut être appliqué avec un jeu de données relativement petit. Le deuxième avantage est que ce modèle est simple à appliquer, les temps de calcul sont très rapides et les résultats théoriques reflètent tout de même bien la réalité surtout lorsque l'échéance est courte.

### Les courbes de rendement moyennes

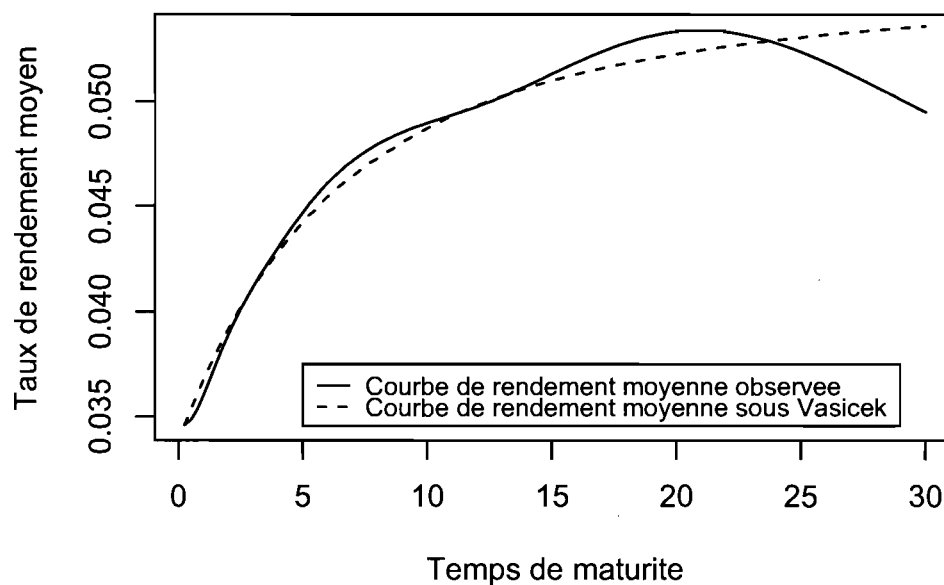


FIG. 5.3. Les courbes de rendement moyennes en fonction de l'échéance

### Les courbes de rendement pour le mois d'octobre 2005

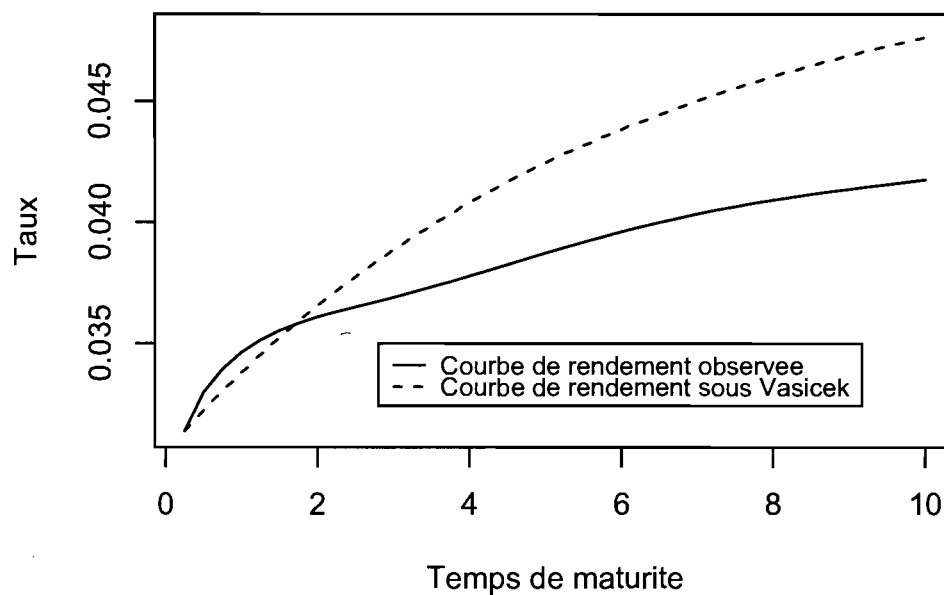


FIG. 5.4. Les courbes de rendement du mois d'octobre 2005 en fonction de l'échéance

### Les courbes de rendement pour le mois d'avril 2003

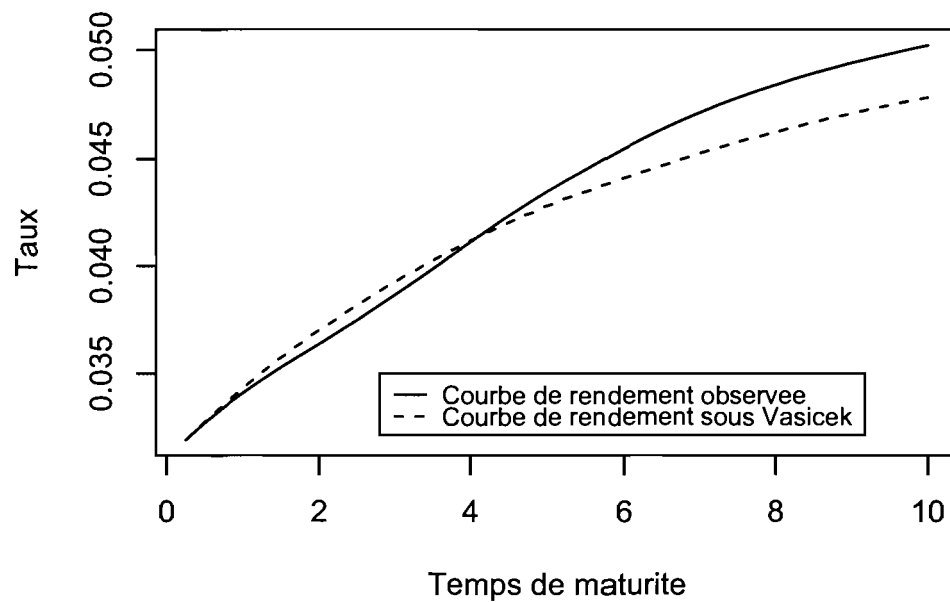


FIG. 5.5. Les courbes de rendement du mois d'avril 2003 en fonction de l'échéance

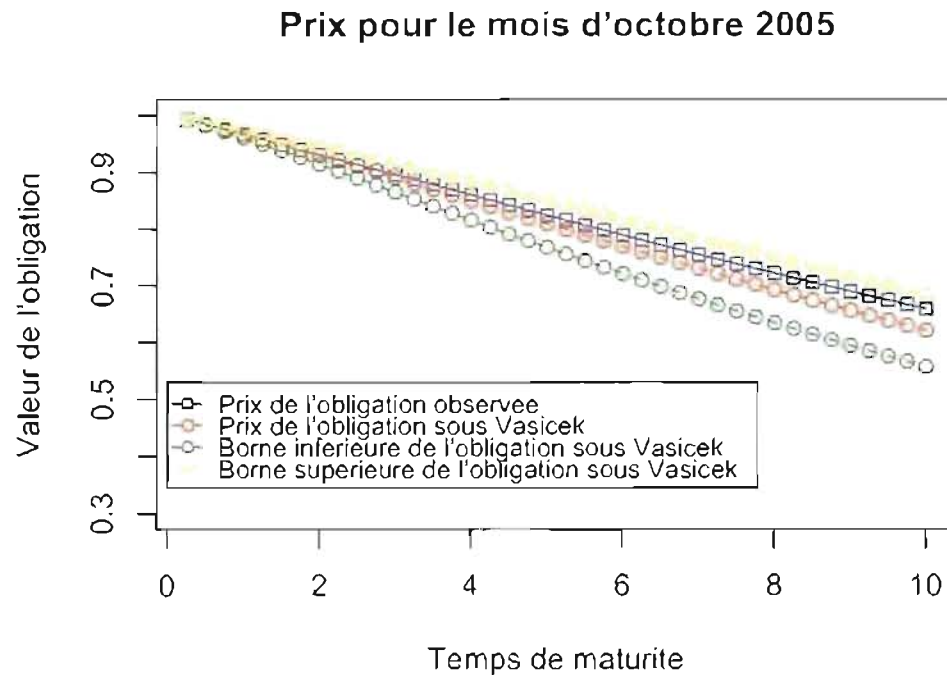


FIG 5.6 Comparaison du prix théorique et observé d'une obligation coupon zéro

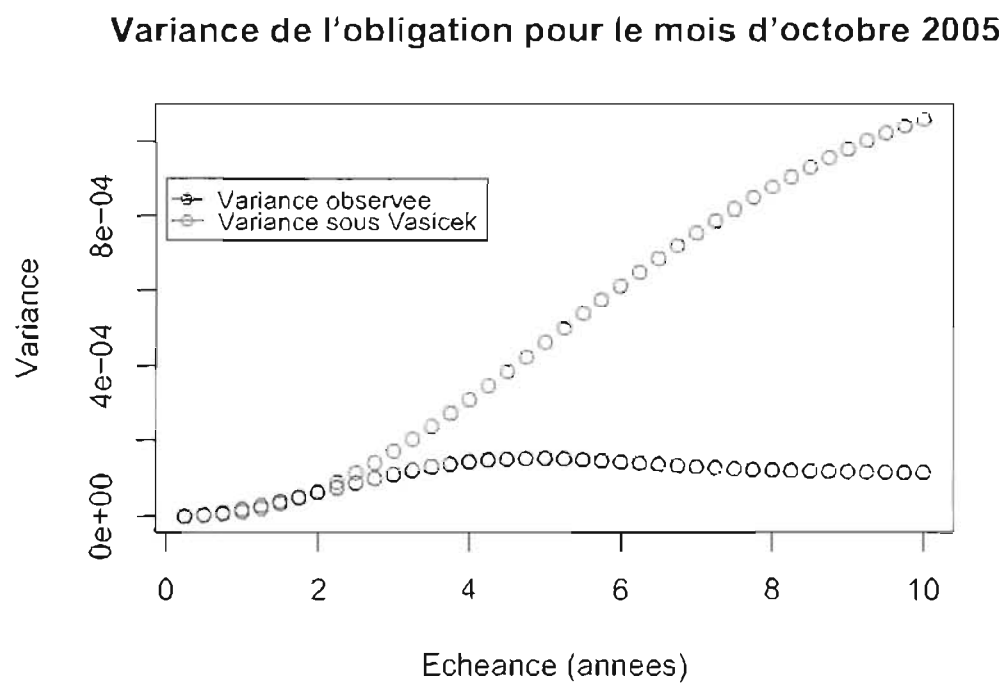


FIG. 5.7. Comparaison de la variance théorique et observée d'une obligation coupon zéro



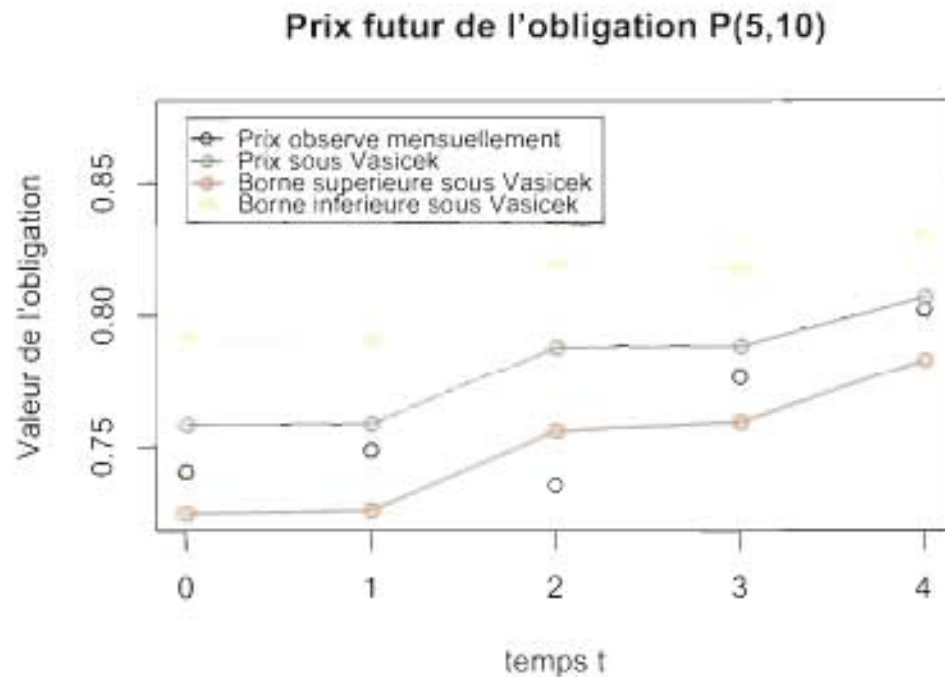


FIG. 5.8. Comparaison du prix futur théorique et observé d'une obligation coupon zéro en octobre 2005 échéant dans 5 ans

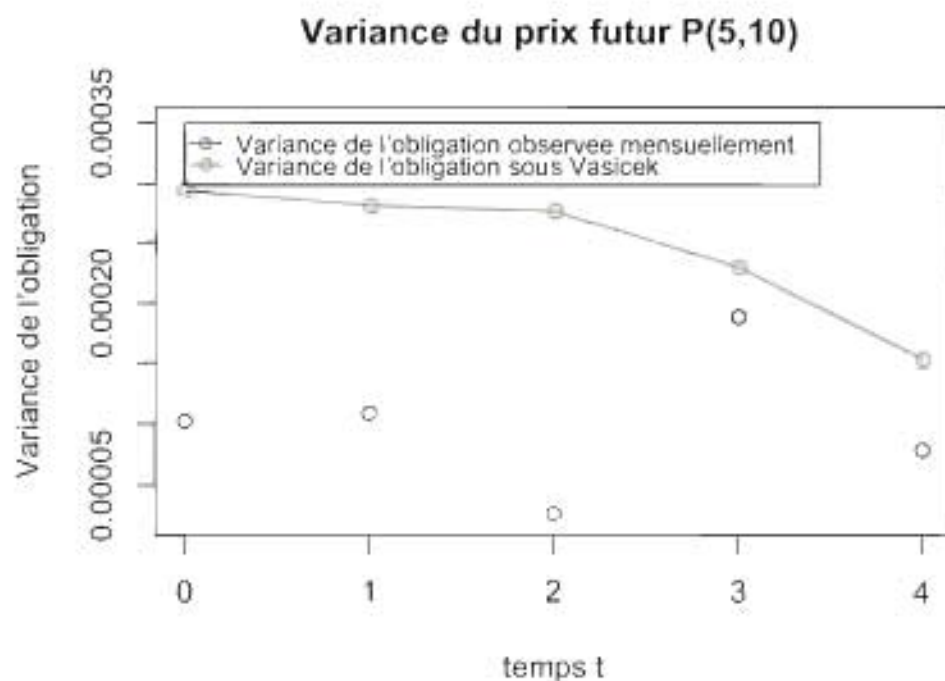


FIG. 5.9. Comparaison de la variance théorique et observée d'une obligation coupon zéro en octobre 2005 échéant dans 5 ans

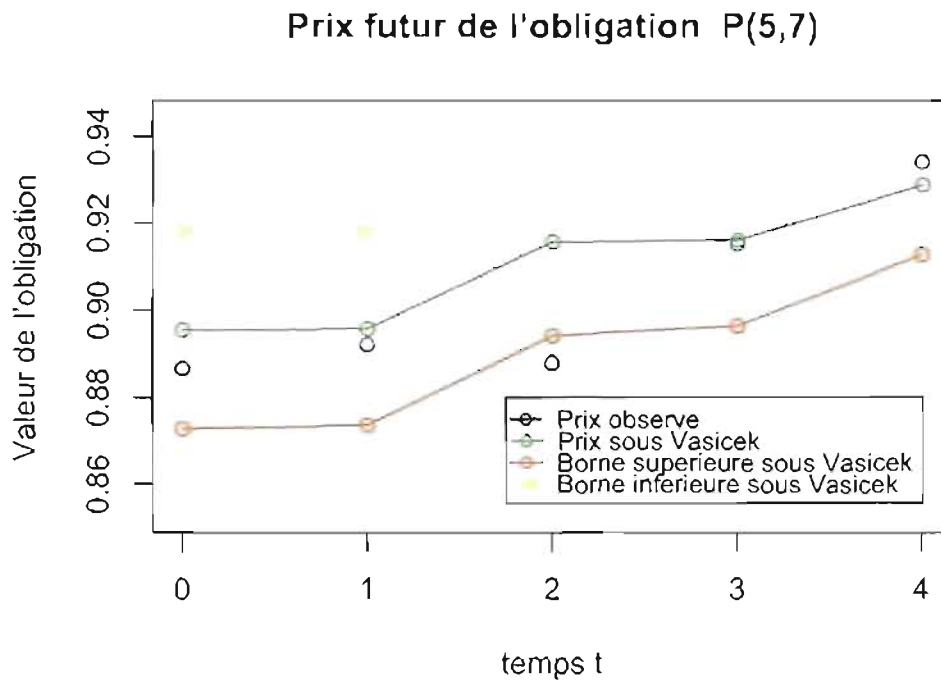


FIG. 5.10. Comparaison du prix futur théorique et observé d'une obligation coupon zéro en octobre 2005 échéant dans 2 ans

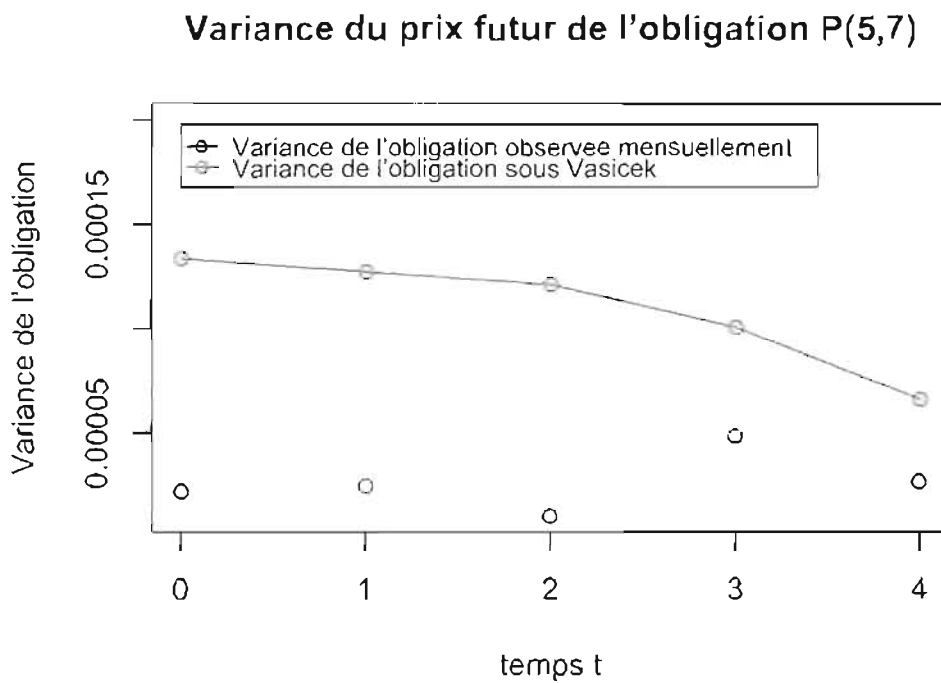


FIG. 5.11. Comparaison de la variance théorique et observée d'une obligation coupon zéro en octobre 2005 échéant dans 2 ans

# Chapitre 6

---

## CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous avons voulu résumer les différents résultats obtenus dans la littérature en matière de calcul stochastique sur les produits dérivés dont le taux d'intérêt suit un modèle de Vasicek : le cas où le sous-jacent est une obligation coupon zéro a été principalement traité. Nous avons aussi essayé de contribuer à la recherche en développant, entre autres, les formules de variance d'une obligation coupon zéro, du prix futur d'une obligation coupon zéro, d'une option européenne d'achat sur une obligation coupon zéro et de contrats à terme standardisés.

Au chapitre 1, nous avons introduit le modèle de Vasicek qui a été le modèle de taux d'intérêt utilisé tout au long du mémoire. Nous avons utilisé la théorie de l'arbitrage pour montrer l'existence d'une mesure neutre au risque, qui est l'outil aidant à calculer le prix sans arbitrage de tout produit dérivé. Nous avons aussi obtenu les formules de prix et de variance d'une obligation coupon zéro dans un modèle de Vasicek : nous illustrons les approches prises pour trouver le prix de cette obligation coupon zéro sans aller en détail mais nous verrons que ces approches sont souvent nécessaires à la démonstration des preuves, bien que les formules et les preuves du prix d'une obligation coupon zéro se retrouvent dans la littérature. Par contre, la formule de variance ne se retrouve pas dans la littérature : nous faisons alors une preuve du résultat ainsi qu'une simulation pour confirmer les résultats obtenus.

Au chapitre 2, nous avons trouvé les formules du prix futur d'une obligation coupon zéro et de la variance du prix futur d'une obligation coupon zéro dans un

modèle de Vasiček. Bien que la formule du prix futur de l'obligation coupon zéro soit connue (voir Bick [2]), une preuve satisfaisante ne semble pas être présente dans la littérature : nous avons alors décidé de faire une brève preuve de celle-ci ainsi qu'une simulation pour confirmer les résultats ; cette preuve nous est aussi utile dans le calcul de la variance du prix futur de l'obligation coupon zéro. Le fait que la distribution du taux d'intérêt dans le modèle de Vasiček soit normale, simplifie beaucoup les calculs.

Au chapitre 3, nous avons déterminé le prix et la variance d'une option européenne d'achat dont le sous-jacent est une obligation à coupon zéro. En ce qui concerne le prix de cette option européenne d'achat, la méthode nécessitait l'utilisation de la méthode de changement de mesure et nous avons ainsi expliqué les étapes pour trouver la nouvelle mesure. Pour la variance de l'option européenne d'achat, nous avons utilisé la méthode de fonction de densité du taux d'intérêt introduite par Jamshidian [15] pour des fins de simplicité et pour montrer une méthode alternative. Un résultat général avait aussi été trouvé pour la variance de produits dérivés sujet à un paiement unique dans un modèle de Vasiček (théorème 3.3.1 à la page 50).

Dans le chapitre 4, nous avons traité le cas où le produit dérivé était sujet au paiement de dividendes et nous avons alors obtenu une formule de représentation des gains futurs escomptés. Pour le calcul du prix et de la variance de ces produits dérivés, il suffit d'utiliser la formule de représentation des gains futurs escomptés : ceci nous a aidé à trouver le prix et la variance d'un contrat à terme standardisé dont le sous-jacent est une obligation coupon zéro.

Les résultats que nous avons obtenu dans les chapitres précédents sont des résultats théoriques et nous avons fait un exemple d'application à un cas pratique au chapitre 5 : le jeu de données est celui des obligations coupon zéro et des bons du trésor du gouvernement canadien. Nous avons comparé les résultats théoriques et observés du prix et de la variance d'une obligation coupon zéro et ensuite, du prix futur d'une obligation coupon zéro. Nous avons vu que nous pouvons obtenir de bons résultats par rapport à un petit jeu de données, lorsque l'on garde l'échéance de l'obligation coupon zéro relativement petite.

Nous avons remarqué que la plupart des articles se concentrent sur le prix de ces produits dérivés de taux d'intérêt mais que peu discutent de la variance associée à celle-ci : ceci a été le but de ce mémoire. Une des raisons qui a peut-être poussé à délaisser cet aspect des produits dérivés de taux d'intérêt est le fait que le calcul stochastique associé à la variance se complique rapidement alors que calculer la variance par les données empiriques est une approche simple et rapide.

L'une des erreurs survenant le plus souvent est lors de la manipulation de processus stochastiques est de supposer que certains processus sont déterministes alors qu'ils sont stochastiques. Obtenir la formule du prix d'une obligation coupon-zéro à partir de son équation différentielle stochastique est un exemple représentatif de cette erreur. On avait que, l'équation différentielle stochastique du prix d'une obligation coupon zéro, échéant au temps  $T$ , est donnée par :

$$dP(s;T) = P(s;T) \cdot r(s)ds - P(s;T)\sigma B(s;T)dW_s^Q.$$

Vu que  $r(s)$  est présent uniquement dans le coefficient de diffusion, on pourrait se dire que la covariance entre  $r(s)$  et le mouvement brownien  $W_s^Q$  est nulle : ceci n'est pas le cas car  $r(s)$  est lui-même un processus stochastique, donc dépendant du terme  $W_s^Q$  (voir l'annexe A à la page A-i pour les détails de la preuve).

D'un point de vue théorique, il y a ainsi un vaste champ à explorer sur la variance de ces produits dérivés de taux d'intérêt tel que l'application aux modèles multidimensionnels : il faudrait alors prendre en compte la covariance en plusieurs dimensions, ce qui ne serait pas une tâche simple.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [1] L. Arnold (1974), *Stochastic Differential Equations : Theory and Applications*, John Wiley & Sons.
- [2] A. Bick (1997), *Two Closed-Form Formulas for the Futures Price in the Presence of a Quality Option*, *European Finance Review* 1 : 81-104.
- [3] T. Björk (2004), *Arbitrage Theory in Continuous Time*, 2nd Edition, Oxford.
- [4] R. Chen, J. Huan (2002), *A note on forward price and forward measure*, *Review of quantitative finance and accounting*, **19(3)**, pp. 261-72.
- [5] J. Cox, J. Ingersoll, S. Ross (1981), *The relation between forward prices and futures prices*, *Journal of Financial Economics*, **9(4)**, pp. 321-346.
- [6] J. Cox, J. Ingersoll, S. Ross (1985), *A Theory of the Term Structure of Interest Rates*, *Econometrica*, **53(2)**, pp. 385-407.
- [7] G. R. Duffee (2002), *Term Premia and Interest Rate Forecasts in Affine Models*, *The Journal of Finance*, **57 (1)**, pp. 405-443.
- [8] D. Duffie (2001), *Dynamic asset pricing theory*, 3rd Edition, Princeton University Press.
- [9] C.P. Dugas (2006), *Notes de Cours : Finance mathématique 2*, Université de Montréal.
- [10] B. Efron, R.J. Tibshirani (1993), *An Introduction to the Bootstrap*, *Monographs on Statistics and Applied Probability*, **57**, Chapman & Hall.
- [11] G. Gauthier (2006), *Notes de cours : Les méthodes stochastiques dans les sciences de la gestion*, HEC Montréal.
- [12] Girsanov, I. V. (1960). *On transforming a certain class of stochastic processes by absolutely continuous substitution of measures*, *Theory Probability and Its Applications*, **5(3)**, pp. 285-301.

- [13] M. Haugh (2004), *Simulating Stochastic Differential Equations*, Course notes of Monte Carlo Simulation, Columbia University.
- [14] J.C. Hull (2003), *Options, futures & other derivatives*, 5th edition, Prentice Hall.
- [15] F. Jamshidian (1989), *An Exact Bond Option Formula*, Journal of Finance, **44(1)**, pp. 205-209.
- [16] J. F. Lawless (1987). *Negative binomial and mixed Poisson regression*, The Canadian Journal of Statistics , **15(3)**.
- [17] R.S. Mamon(2004), *Three Ways to Solve for Bond Prices in the Vasicek Model*, Journal of Applied Mathematics and Decision Sciences, **8(1)**, pp. 1-14.
- [18] M. Piazzesi (2003), *Affine Term Structure Models*, in Y. Ait-Sahalia and L. P. Hansen, Hanbook of Financial Econometrics, North-Holland, Amsterdam.
- [19] W. Rudin (1995), *Principes d'analyse mathématique*, Ediscience International.
- [20] J. Stewart (1991), *Calculus*, Brooks & Cole Publishing.
- [21] O.A. Vasicek (1977), *An Equilibrium Characterization of the Term Structure*, Journal of Financial Economics, **5(2)**, pp. 177-88.

## Annexe A

---

### PRIX D'UNE OBLIGATION À COUPON ZÉRO EN UTILISANT SON ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE STOCHASTIQUE

Nous allons maintenant dériver la formule du prix d'une obligation coupon zéro dans un modèle de Vasicek à partir de son équation différentielle stochastique (théorème 1.3.4 page 18) :

$$dP(s; T) = P(s; T) \cdot r(s)ds - P(s; T)\sigma B(s; T)dW_s^Q.$$

Le problème central est de se rendre compte que le coefficient de dérive (terme en  $ds$ ) est dépendant du coefficient de diffusion (terme en  $dW_s^Q$ ) dû au fait que  $r(s)$  est une variable aléatoire.

Ainsi, nous allons montrer que la formule explicite du prix,  $P(t; T)$ , d'une obligation au temps  $t$  échéant au temps  $T$  dans un modèle de Vasicek est donnée par :

$$P(t; T) = \exp \left[ -n(c; t; T) + \frac{k^2(t; T)}{2} \right].$$

**Démonstration :**

Par le lemme d'Itô, l'équation différentielle stochastique de  $\text{Log}[P(s; T)]$  est :

$$d\text{Log}[P(s; T)] = \left[ r(s) - \frac{\sigma^2}{2}(B(s; T))^2 \right] ds - \sigma B(s; T)dW_s^Q.$$



La forme intégrale de l'équation précédente est alors :

$$\begin{aligned}
\underbrace{\text{Log}[P(T;T)]}_{=0} - \text{Log}[P(t;T)] &= \int_t^T d\text{Log}[P(s;T)] \\
&= \int_t^T r(s)ds - \int_t^T \frac{\sigma^2}{2}(B(s;T))^2 ds - \int_t^T \sigma B(s;T)dW_s^{\mathcal{Q}} \\
&= \int_t^T r(s)ds - \frac{k^2(t;T)}{2} - \sigma \int_t^T B(s;T)dW_s^{\mathcal{Q}}. \tag{A.0.1}
\end{aligned}$$

Par le chapitre 1, nous savons que  $\int_t^T \sigma B(s;T)dW_s^{\mathcal{Q}} \sim \mathcal{N}^{\mathcal{Q}}(0; k^2(t;T))$   
et  $-\int_t^T r(s)ds \Big| \mathcal{F}_t \sim \mathcal{N}^{\mathcal{Q}}(-n(c;t;T); k^2(t;T))$ .

Par l'équation (A.0.1), l'espérance de  $\text{Log}[P(t;T)]$  devient :

$$\begin{aligned}
E^{\mathcal{Q}} [\text{Log}[P(t;T)] \Big| \mathcal{F}_t] &= E^{\mathcal{Q}} \left[ \int_t^T -r(s)ds \Big| \mathcal{F}_t \right] + \frac{k^2(t;T)}{2} + 0 \\
&= -n(c;t;T) + \frac{k^2(t;T)}{2}.
\end{aligned}$$

La variance de  $\text{Log}[P(t;T)]$  est alors :

$$\begin{aligned}
\text{Var}^{\mathcal{Q}} [\text{Log}[P(t;T)] \Big| \mathcal{F}_t] &= \text{Var}^{\mathcal{Q}} \left[ -\int_t^T r(u)du \Big| \mathcal{F}_t \right] + \text{Var}^{\mathcal{Q}} \left[ \sigma \int_t^T B(s;T)dW_s^{\mathcal{Q}} \Big| \mathcal{F}_t \right] \\
&\quad - 2\text{Cov}^{\mathcal{Q}} \left[ \int_t^T r(s)ds, \sigma \int_t^T B(s;T)dW_s^{\mathcal{Q}} \Big| \mathcal{F}_t \right] \\
&= k^2(t;T) + k^2(t;T) - 2k^2(t;T) = 0.
\end{aligned}$$

Le calcul de  $\text{Cov}^{\mathcal{Q}} \left[ \int_t^T r(s)ds, \sigma \int_t^T B(s;T)dW_s^{\mathcal{Q}} \Big| \mathcal{F}_t \right]$  utilise le fait que que  $\int_t^T -r(s)ds$   
et  $\sigma \int_t^T B(s;T)dW_s^{\mathcal{Q}}$  ne sont pas linéairement indépendants :

$$\begin{aligned}
&\text{Cov}^{\mathcal{Q}} \left[ \int_t^T r(s)ds, \sigma \int_t^T B(s;T)dW_s^{\mathcal{Q}} \Big| \mathcal{F}_t \right] \\
&= E^{\mathcal{Q}} \left[ \left( \int_t^T r(v)dv - E^{\mathcal{Q}} \left[ \int_t^T r(v)dv \Big| \mathcal{F}_t \right] \right) \cdot \left( \int_t^T \sigma B(s;T)dW_s^{\mathcal{Q}} - 0 \right) \Big| \mathcal{F}_t \right] \\
&= E^{\mathcal{Q}} \left[ \left( \int_t^T \sigma \int_t^v e^{-a(v-u)} dW_u^{\mathcal{Q}} dv \right) \cdot \left( \int_t^T \sigma B(s;T)dW_s^{\mathcal{Q}} \right) \Big| \mathcal{F}_t \right] \\
&= \sigma^2 \int_t^T E^{\mathcal{Q}} \left[ \left( \int_t^v e^{-a(v-u)} dW_u^{\mathcal{Q}} \right) \cdot \left( \int_t^T B(s;T)dW_s^{\mathcal{Q}} \right) \Big| \mathcal{F}_t \right] dv \\
&= \sigma^2 \int_t^T \int_t^v e^{-a(v-u)} \cdot B(u;T) du dv = k^2(t;T).
\end{aligned}$$

Alors la distribution de  $\text{Log}[P(t; T)]$  est :

$$\begin{aligned}\text{Log}[P(t; T)] &\sim \mathcal{N}^{\mathcal{Q}}\left(-n(c; t; T) + \frac{k^2(t; T)}{2}; 0\right) \\ &= -n(c; t; T) + \frac{k^2(t; T)}{2}.\end{aligned}$$

■

## Annexe B

---

# ÉVALUATION DU PRIX FUTUR ET DE LA VARIANCE DU PRIX FUTUR D'UNE OBLIGATION COUPON ZÉRO DANS UN MODÈLE DE VASIČEK

Nous voulons démontrer les formules du prix futur et de la variance du prix futur escompté d'une obligation coupon zéro dans un modèle de Vasiček, obtenues dans le chapitre 2.

La preuve du prix futur d'une obligation coupon zéro nécessite de trouver des distributions de la forme  $e^{-\int_s^T r(u)du} \Big| \mathcal{F}_t$ ; cette démonstration se fait en utilisant les propriétés des filtrations et les résultats obtenus dans le chapitre 1.

Or, nous verrons que la preuve de la variance du prix futur escompté utilise la distribution du taux d'intérêt  $r(\cdot)$ .

Les résultats et les notations suivantes, provenant du chapitre 1, nous seront utiles tout au long des démonstrations :

$$\begin{aligned} \left[ -\int_s^T r(u)du \right] \Big| \mathcal{F}_s &\sim \mathcal{N}^{\mathcal{Q}}(-n(r(s)), s; T), k^2(s; T)); \\ r(s) \Big| \mathcal{F}_t &\sim \mathcal{N}^{\mathcal{Q}}(m(c, t; s), v^2(t; s)); \\ B(s, T) &= \frac{1-e^{-a(T-s)}}{a}; \\ n(\mathbf{r}(s), s; T) &= (\mathbf{r}(s) - b)B(s; T) + b(T - s); \\ k^2(s, T) &= \frac{\sigma^2}{a^2}[(T - s) - B(s, T) - B^2(s, T) \cdot a/2]; \\ m(c, t; s) &= c \cdot e^{-a(s-t)} + b(1 - e^{-a(s-t)}); \\ v^2(t; s) &= \sigma^2 \frac{1-e^{-2a(s-t)}}{2a}. \end{aligned}$$

### B.1. PRIX FUTUR D'UNE OBLIGATION COUPON ZÉRO

Considérons une obligation coupon zéro au temps  $s$ , échéant au temps  $T$ , alors que le taux d'intérêt n'est connu qu'au temps  $t$  ( $r(t) = c$ ). Alors, nous savons que son prix doit être calculée à partir de la formule suivante :

$$P(r(t) = c; s; T) = E^{\mathcal{Q}} \left[ \exp \left[ - \int_s^T r(u) du \right] \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

Or, la distribution de  $\exp \left[ - \int_s^T r(u) du \right] \middle| \mathcal{F}_t$  est lognormale. Ses paramètres sont les suivants :

$$\begin{aligned} E^{\mathcal{Q}} \left[ - \int_s^T r(u) du \middle| \mathcal{F}_t \right] &= -B(s; T) \cdot m(c, t; s) + b(B(s; T) - (T - s)), \\ \text{Var}^{\mathcal{Q}} \left[ - \int_s^T r(u) du \middle| \mathcal{F}_t \right] &= k^2(s; T) + (B(s; T))^2 \cdot v^2(t; s). \end{aligned}$$

Le prix futur de cette obligation coupon zéro est alors donné par :

$$\begin{aligned} P(r(t) = c; s; T) &= \exp \left[ -B(s; T) \cdot m(c, t; s) + b(B(s; T) - (T - s)) \right] \cdot \\ &\quad \exp \left[ \frac{k^2(s; T) + (B(s; T))^2 \cdot v^2(t; s)}{2} \right]. \end{aligned}$$

#### Démonstration :

On a démontré, dans la section 2.1 à la page 26, que  $-\int_s^T r(u) du \middle| \mathcal{F}_t$  est distribuée selon une normale. Trouvons maintenant ses paramètres ; par les propriétés de la filtration, nous obtenons, pour l'espérance suivante :

$$\begin{aligned} E^{\mathcal{Q}} \left[ - \int_s^T r(u) du \middle| \mathcal{F}_t \right] &= E^{\mathcal{Q}} \left[ E^{\mathcal{Q}} \left[ - \int_s^T r(u) du \middle| \mathcal{F}_s \right] \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= E^{\mathcal{Q}} \left[ -n(r(s), s; T) \middle| \mathcal{F}_t \right] = -B(s; T) \cdot m(c, t; s) + b(B(s; T) - (T - s)). \end{aligned} \tag{B.1.1}$$

Or, pour le calcul de la variance, nous avons besoin de la relation suivante :

$$\begin{aligned} E^{\mathcal{Q}} \left[ \left( - \int_s^T r(u) du \right)^2 \middle| \mathcal{F}_s \right] &= \text{Var}^{\mathcal{Q}} \left[ - \int_s^T r(u) du \middle| \mathcal{F}_s \right] + \left( E^{\mathcal{Q}} \left[ - \int_s^T r(u) du \middle| \mathcal{F}_s \right] \right)^2 \\ &= k^2(s; T) + (r(s)B(s; T) - b(B(s; T) - (T - s)))^2. \end{aligned} \tag{B.1.2}$$

On calcule le deuxième moment de  $\int_s^T r(u)du$  par rapport à  $\mathcal{F}_t$  :

$$\begin{aligned}
E^{\mathcal{Q}} \left[ \left( - \int_s^T r(u)du \right)^2 \middle| \mathcal{F}_t \right] &= E^{\mathcal{Q}} \left[ E^{\mathcal{Q}} \left[ \left( - \int_s^T r(u)du \right)^2 \middle| \mathcal{F}_s \right] \middle| \mathcal{F}_t \right] \\
&= E^{\mathcal{Q}} \left[ k^2(s; T) + (r(s)B(s; T) - b(B(s; T) - (T - s)))^2 \middle| \mathcal{F}_t \right] \text{ par l'équation (B.1.2)} \\
&= k^2(s; T) + \text{Var}^{\mathcal{Q}} [r(s)B(s; T) - b(B(s; T) - (T - s)) \middle| \mathcal{F}_t] \\
&\quad + (E^{\mathcal{Q}} [r(s)B(s; T) - b(B(s; T) - (T - s)) \middle| \mathcal{F}_t])^2 \\
&= k^2(s; T) + (B(s; T))^2 \cdot v^2(t; s) + (E^{\mathcal{Q}} [n(r(s), s; T) \middle| \mathcal{F}_t])^2 \\
&= k^2(s; T) + (B(s; T))^2 \cdot v^2(t; s) + \left( E^{\mathcal{Q}} \left[ - \int_s^T r(u)du \middle| \mathcal{F}_t \right] \right)^2 \text{ par l'équation (B.1.1)}.
\end{aligned}$$

Et finalement, la variance est donnée par :

$$\begin{aligned}
\text{Var}^{\mathcal{Q}} \left[ - \int_s^T r(u)du \middle| \mathcal{F}_t \right] &= E^{\mathcal{Q}} \left[ \left( - \int_s^T r(u)du \right)^2 \middle| \mathcal{F}_t \right] - \left( E^{\mathcal{Q}} \left[ - \int_s^T r(u)du \middle| \mathcal{F}_t \right] \right)^2 \\
&= k^2(s; T) + (B(s; T))^2 \cdot v^2(t; s).
\end{aligned}$$

Ainsi,  $\exp \left[ - \int_s^T r(u)du \right] \middle| \mathcal{F}_t$  est distribuée selon une lognormale et il suffit d'appliquer la formule  $P(r(t) = c; s; T) = E^{\mathcal{Q}} \left[ \exp \left[ - \int_s^T r(u)du \right] \middle| \mathcal{F}_t \right]$  pour obtenir le prix futur d'une obligation coupon zéro.

■

## B.2. VARIANCE DU PRIX FUTUR ESCOMPTÉ D'UNE OBLIGATION COUPON ZÉRO

Avant de démontrer la formule de variance du prix futur escompté d'une obligation, nous aurons besoin du résultat suivant afin de pouvoir simplifier la formule de variance.

### B.2.1. Résultat sur le prix futur escompté

La relation suivante nous sera utile lors de la démonstration de la variance escomptée du prix futur d'une obligation :

$$\begin{aligned} -n(c; t; s) + A(s; T) - B(s; T)m(c, t; s) + \frac{k^2(t; s) + (B(s; T))^2 v^2(t; s)}{2} \\ + \frac{B(s; T)\sigma^2(B(t; s))^2}{2} = A(t; T) - B(t; T)c. \end{aligned} \quad (\text{B.2.1})$$

**Démonstration :** La démonstration consiste à utiliser deux méthodes pour trouver la formule de  $\mathbb{E}^{\mathcal{Q}} \left[ \frac{P(s; T)}{B(s)} \middle| \mathcal{F}_t \right]$ . La première méthode est la suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathcal{Q}} \left[ \frac{P(s; T)}{B(s)} \middle| \mathcal{F}_t \right] &= \mathbb{E}^{\mathcal{Q}} \left[ \exp \left[ - \int_t^s r(u) du \right] P(s; T) \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathcal{Q}} \left[ \exp \left[ - \int_t^s r(u) du + A(s; T) - B(s; T)r(s) \right] \middle| \mathcal{F}_t \right] \end{aligned}$$

Sous la mesure  $\mathcal{Q}$ ,  $-\int_t^s r(u) du + A(s; T) - B(s; T)r(s) \middle| \mathcal{F}_t$  est distribuée selon une normale (car c'est une somme de normales), d'espérance :

$$\mathbb{E}^{\mathcal{Q}} \left[ - \int_t^s r(u) du + A(s; T) - B(s; T)r(s) \middle| \mathcal{F}_t \right] = -n(c; t; s) + A(s; T) - B(s; T)m(c, t; s),$$

et de variance :

$$\begin{aligned} \text{Var}^{\mathcal{Q}} \left[ - \int_t^s r(u) du + A(s; T) - B(s; T)r(s) \middle| \mathcal{F}_t \right] &= \text{Var}^{\mathcal{Q}} \left[ - \int_t^s r(u) du - B(s; T)r(s) \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= \text{Var}^{\mathcal{Q}} \left[ \int_t^s r(u) du \middle| \mathcal{F}_t \right] + (B(s; T))^2 \text{Var}^{\mathcal{Q}} [r(s) \middle| \mathcal{F}_t] + B(s; T) \text{Cov}^{\mathcal{Q}} \left[ \int_t^s r(u) du, r(s) \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= k^2(t; s) + (B(s; T))^2 v^2(t; s) + B(s; T)\sigma^2(B(t; s))^2, \end{aligned}$$

car  $\text{Cov}^{\mathcal{Q}} \left[ \int_t^s r(u) du, r(s) \middle| \mathcal{F}_t \right] = \frac{\sigma^2}{2} (B(t; s))^2$ . Ainsi, en utilisant la distribution de  $-\int_t^s r(u) du + A(s; T) - B(s; T)r(s)$ , le prix futur escompté est donné par :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathcal{Q}} \left[ \frac{P(s; T)}{B(s)} \middle| \mathcal{F}_t \right] &= \mathbb{E}^{\mathcal{Q}} \left[ e^{-\int_t^s r(u) du + A(s; T) - B(s; T)r(s)} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= e^{-n(c; t; s) + A(s; T) - B(s; T)m(c, t; s) + \frac{k^2(t; s) + (B(s; T))^2 v^2(t; s) + B(s; T)\sigma^2(B(t; s))^2}{2}}. \end{aligned} \quad (\text{B.2.2})$$

Une autre façon de trouver le prix futur escompté est la suivante :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}^{\mathcal{Q}} \left[ \frac{P(s;T)}{B(s)} \middle| \mathcal{F}_t \right] &= \mathbf{E}^{\mathcal{Q}} \left[ e^{-\int_t^s r(u)du} P(s;T) \middle| \mathcal{F}_t \right] \\
&= \mathbf{E}^{\mathcal{Q}} \left[ e^{-\int_t^s r(u)du} \mathbf{E}^{\mathcal{Q}} \left[ e^{-\int_s^T r(u)du} \middle| \mathcal{F}_s \right] \middle| \mathcal{F}_t \right] \\
&= \mathbf{E}^{\mathcal{Q}} \left[ \mathbf{E}^{\mathcal{Q}} \left[ e^{-\int_t^T r(u)du} \middle| \mathcal{F}_s \right] \middle| \mathcal{F}_t \right] \\
&= P(t;T) = \exp [A(t;T) - B(t;T)c]. \tag{B.2.3}
\end{aligned}$$

Vu que les équations (B.2.2) et (B.2.3) représentent le même produit dérivé, ils doivent donc être égaux. ■

### B.2.2. Variance du prix futur escompté d'une obligation

Nous allons maintenant démontrer que la variance du prix au temps futur  $s$  escompté au temps  $t$  d'une obligation coupon zéro échéant au temps  $T$  alors que  $r(t) = c$  est donnée par :

$$\begin{aligned}
\text{Var}^{\mathcal{Q}} \left[ \frac{P(s;T)}{B(s)} \middle| \mathcal{F}_t \right] &= \mathbf{E}^{\mathcal{Q}} \left[ \left( \frac{P(s;T)}{B(s)} \right)^2 \middle| \mathcal{F}_t \right] - \left( \mathbf{E}^{\mathcal{Q}} \left[ \frac{P(s;T)}{B(s)} \middle| \mathcal{F}_t \right] \right)^2 \\
&= (P(t;T))^2 \left( \exp [k^2(t; s) + (B(s;T))^2 v^2(t; s) + B(s;T)\sigma^2(B(t; s))^2] - 1 \right).
\end{aligned}$$

#### Démonstration :

En utilisant les résultats que  $P(s;T) = e^{A(s;T) - B(s;T)r(s)}$  et que  $B(s) = e^{-\int_t^s r(u)du}$ , le deuxième moment de  $\frac{P(s;T)}{B(s)}$  est donné par :

$$\mathbf{E}^{\mathcal{Q}} \left[ \left( \frac{P(s;T)}{B(s)} \right)^2 \middle| \mathcal{F}_t \right] = \mathbf{E}^{\mathcal{Q}} \left[ e^{-2\int_t^s r(u)du + 2A(s;T) - 2B(s;T)r(s)} \middle| \mathcal{F}_t \right]. \tag{B.2.4}$$

Or,  $-2\int_t^s r(u)du + 2A(s;T) - 2B(s;T)r(s) \middle| \mathcal{F}_t$  est une combinaison linéaire de normales, alors cette dernière est distribuée selon une normale, d'espérance :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}^{\mathcal{Q}} \left[ -2\int_t^s r(u)du + 2A(s;T) - 2B(s;T)r(s) \middle| \mathcal{F}_t \right] &= -2n(c; t; s) \\
&\quad + 2A(s;T) - 2B(s;T)m(c, t; s);
\end{aligned}$$

et de variance :

$$\begin{aligned} \text{Var}^{\mathcal{Q}} \left[ -2 \int_t^s r(u) du + 2A(s; T) - 2B(s; T)r(s) \middle| \mathcal{F}_t \right] &= 4\text{Var}^{\mathcal{Q}} \left[ \int_t^s r(u) du \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &+ 4(B(s; T))^2 \text{Var}^{\mathcal{Q}} [r(s) | \mathcal{F}_t] + 8B(s; T) \text{Cov}^{\mathcal{Q}} \left[ \int_t^s r(u) du, r(s) \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= 4 [k^2(t; s) + (B(s; T))^2 v^2(t; s) + B(s; T)\sigma^2(B(t; s))^2]. \end{aligned}$$

Alors, l'équation (B.2.4) devient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathcal{Q}} \left[ \left( \frac{P(s; T)}{B(s)} \right)^2 \middle| \mathcal{F}_t \right] &= e^{2[-n(c; t; s) + A(s; T) - B(s; T)m(c; t; s) + k^2(t; s) + (B(s; T))^2 v^2(t; s) + B(s; T)\sigma^2(B(t; s))^2]} \\ &= (P(t; T))^2 \exp [k^2(t; s) + (B(s; T))^2 v^2(t; s) + B(s; T)\sigma^2(B(t; s))^2], \end{aligned}$$

où  $P(t; T)$  est calculé en utilisant l'équation (B.2.1) à la page B-iv.

■



## Annexe C

---

### ÉVALUATION DU PRIX ET DE LA VARIANCE D'UNE OPTION EUROPÉENNE D'ACHAT DANS UN MODÈLE DE VASIČEK

Avec le modèle de taux d'intérêt de Vasiček, nous allons maintenant démontrer la variance d'un produit dérivé dans un cas général ; la contrainte que nous donnons au produit dérivé est que son paiement est unique et à une date fixe, connue d'avance. Vu que cette preuve est inspirée de la preuve de Jamshidian [15], nous essaierons de garder ses notations afin que le lecteur puisse faire une concordance entre les résultats obtenus et ceux de Jamshidian.

#### C.1. CALCUL DE LA VARIANCE D'UN PRODUIT DÉRIVÉ DANS UN MODÈLE DE VASIČEK : CAS GÉNÉRAL

Par définition, la variance d'un produit dérivé  $\chi$  au temps  $t$ , dont le seul paiement à l'échéance  $T$  est  $\chi$ , est donnée par :

$$\text{Var}^{\mathcal{Q}} \left[ \frac{\chi}{B(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right] = E^{\mathcal{Q}} \left[ \frac{\chi^2}{B(T)^2} \middle| \mathcal{F}_t \right] - \left( E^{\mathcal{Q}} \left[ \frac{\chi}{B(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right] \right)^2.$$

Le problème est d'évaluer des espérances de la forme  $E^{\mathcal{Q}} \left[ \frac{\chi}{B(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right]$ . Posons  $U^*(c, t) = E^{\mathcal{Q}} \left[ \frac{g(r(T))}{B(T)^2} \middle| \mathcal{F}_t \right]$  où  $g(r(T))$  est le paiement unique du produit dérivé au temps  $T$ .

La formule explicite de  $U^*(c, t)$  est alors donnée par :

$$U^*(c, t) = (P(t; T))^2 e^{k^2(t; T)} E_{c,t} [g(R_{c,t;T}^*)],$$

où  $R_{c,t;s}^*$  est une variable aléatoire dont la distribution est normale de moyenne  $m(c, t; s) - 2q(t; s)$  et de variance  $v^2(t; s)$ .

**Démonstration :**

Nous avons définissons les termes utilisés dans la preuve de Jamshidian [15] :

$$U^*(c, t) = E^{\mathcal{Q}} \left[ \frac{g(r(T))}{B(T)^2} \middle| \mathcal{F}_t \right] = E_{c,t} [e^{-2Y(t;T)} g(r(T))],$$

où  $g(r(T))$  est l'unique paiement du produit dérivé au temps  $T$  et  $Y(t; s) = \int_t^s r(u) du$ .

Ainsi, en utilisant la distribution conjointe de  $r(s)$  et  $Y(t; s)$ ,  $U^*(c, t)$  devient :

$$\begin{aligned} U^*(c, t) &= E_{c,t} [e^{-2Y(t;T)} g(r(T))] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2y} P(c, t; T; \hat{r}, y) g(\hat{r}) dy d\hat{r} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G^*(c; \hat{r}; t; T) g(\hat{r}) d\hat{r}, \end{aligned} \quad (\text{C.1.1})$$

où  $G^*(c; \hat{r}; t; s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2y} P(c, t; s; \hat{r}, y) dy$  et  $P(c, t; s; \cdot, \cdot)$  la fonction de densité conjointe de  $r(s)$  et  $Y(t; s)$  sachant que  $r(t) = c$ .

La covariance de  $r(s)$  et  $Y(t; s)$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \text{Cov}^{\mathcal{Q}} \left[ \int_t^s r(u) du, r(s) \middle| \mathcal{F}_t \right] &= E^{\mathcal{Q}} \left[ \left( \int_t^s \sigma \int_t^v e^{-a(v-u)} dW_u^{\mathcal{Q}} dv \right) \cdot \left( \sigma \int_t^s e^{-a(s-k)} dW_k^{\mathcal{Q}} \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= \sigma^2 \int_t^s E^{\mathcal{Q}} \left[ \left( \int_t^v e^{-a(v-u)} dW_u^{\mathcal{Q}} \right) \cdot \left( \int_t^s e^{-a(s-k)} dW_k^{\mathcal{Q}} \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] dv \\ &= \sigma^2 \int_t^s \int_t^v e^{-a(v-u)} e^{-a(s-u)} du dv = \frac{\sigma^2}{2} (B(t; s))^2 = q(t; s). \end{aligned}$$

Vu que  $r(s)$  et  $Y(t; s)$  sont chacune distribuée selon une normale dans un modèle de Vasiček, alors leur distribution conjointe est une normale bivariée :

$$\begin{pmatrix} r(s) \\ Y(t; s) \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}^{\mathcal{Q}} \left( \begin{pmatrix} m(c, t; s) \\ n(c, t; s) \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} v^2(t; s) & q(t; s) \\ q(t; s) & k^2(t; s) \end{pmatrix} \right),$$

et nous connaissons ainsi la formule de  $P(c, t; s; \cdot, \cdot)$ . En utilisant la distribution conjointe de  $r(s)$  et  $Y(t; s)$ , nous obtenons que :

$$\begin{aligned} G^*(c; \hat{r}; t; s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2y} P(c, t; s; \hat{r}, y) dy \\ &= \exp [-2n(c, t; s) + 2k^2(t; s)] f(\hat{r}; m(c, t; s) - 2q(t; s); v^2(t; s)) \\ &= (P(t; s))^2 e^{k^2(t; s)} f(\hat{r}; m(c, t; s) - 2q(t; s); v^2(t; s)); \end{aligned}$$

où  $f(\cdot; \mu; \Sigma)$  est la fonction de densité d'une loi normale de moyenne  $\mu$  et de variance  $\Sigma$ .

Et l'équation (C.1.1) devient alors :

$$\begin{aligned} U^*(c, t) &= E_{c,t} [e^{-2Y(t;T)} g(r(T))] \\ &= (P(t; T))^2 e^{k^2(t;T)} \int_{-\infty}^{\infty} g(\hat{r}) \underbrace{f(\hat{r}; m(c, t; T) - 2q(t; T); v^2(t; T))}_{\sim \mathcal{N}(m(c, t; T) - 2q(t; T); v^2(t; T))} d\hat{r} \\ &= (P(t; T))^2 e^{k^2(t;T)} E_{c,t} [g(R_{c,t;T}^*)], \end{aligned}$$

où  $R_{c,t;T}^*$  est une variable aléatoire dont la distribution est normale de moyenne  $m(c, t; T) - 2q(t; T)$  et de variance  $v^2(t; T)$ . ■

## C.2. APPLICATION À UNE OPTION EUROPÉENNE D'ACHAT DONT LE SOUS-JACENT EST UNE OBLIGATION

Dans le cas où le taux d'intérêt suit un modèle de Vasiček, nous cherchons la variance au temps  $t$  d'une option européenne d'achat, dont la date d'exercice est  $T_1$  et le prix d'exercice  $K$ , sur une obligation qui a pour date de maturité est  $T_2$ . Dans ce cas,  $\chi = (P(T_1; T_2) - K) \cdot I_{\{P(t; s) \geq K\}}$  et la variance est alors donnée par :

$$\text{Var}^{\mathcal{Q}} \left[ \frac{\chi}{B(T_1)} \middle| \mathcal{F}_t \right] = E^{\mathcal{Q}} \left[ \frac{\chi^2}{B(T_1)^2} \middle| \mathcal{F}_t \right] - (C(c, t; T_1; T_2; K))^2,$$

où

$$\begin{aligned} E^{\mathcal{Q}} \left[ \frac{\chi^2}{B(T_1)^2} \middle| \mathcal{F}_t \right] &= (P(t; T_2))^2 e^{k^2(t; T_1) + 2B(T_1; T_2)q(t; T_1) + \sigma_P^2} \Phi(h^* + \sigma_P) \\ &\quad - 2KP(t; T_1)P(t; T_2)e^{k^2(t; T_1) + B(T_1; T_2)q(t; T_1)} \Phi(h^*) + K^2 (P(t; T_1))^2 e^{k^2(t; T_1)} \Phi(h^* - \sigma_P^2); \end{aligned}$$

avec

$$h^* = \frac{\text{Log} \left[ \frac{P(t; T_2)}{KP(t; T_1)} \right] + B(T_1; T_2)q(t; T_1)}{\sigma_P} + \frac{\sigma_P}{2},$$

$\Phi(\cdot)$  est la fonction de répartition d'une loi normale standard,

et  $\sigma_P = v(t; T_1) \cdot B(T_1, T_2)$ .

**Démonstration :**

Il faudrait trouver la formule de :

$$\begin{aligned}
E^{\mathcal{Q}} \left[ \frac{\chi^2}{B(T)^2} \middle| \mathcal{F}_t \right] &= E^{\mathcal{Q}} \left[ \frac{(P(T; s))^2 \cdot I_{\{P(T; s) \geq K\}}}{B(T)^2} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\
&\quad - 2K E^{\mathcal{Q}} \left[ \frac{P(T; s) \cdot I_{\{P(T; s) \geq K\}}}{B(T)^2} \middle| \mathcal{F}_t \right] + K^2 E^{\mathcal{Q}} \left[ \frac{I_{\{P(T; s) \geq K\}}}{B(T)^2} \middle| \mathcal{F}_t \right]
\end{aligned} \tag{C.2.1}$$

En utilisant le théorème 3.3.1 “Variance d’un produit dérivé dans modèle de Vasiček” et en posant  $\tilde{P}(R_{c,t;T}^*, T; s) = P(T; s)|_{r(T)=R_{c,t;T}^*}$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\tilde{P}(R_{c,t;T}^*, T; s) \middle| \mathcal{F}_t &= P(T; s)|_{r(T)=R_{c,t;T}^*} \\
&= \exp \left[ -n(r(T), T; s) + \frac{k(T; s)}{2} \right] \middle|_{r(T)=R_{c,t;T}^*} \\
&= \exp \left[ -n(R_{c,t;T}^*, T; s) + \frac{k(T; s)}{2} \right] \\
&= \exp \left[ -B(T; s) \cdot R_{c,t;T}^* + b(B(T; s) - (s - T)) + \frac{k(T; s)}{2} \right].
\end{aligned}$$

Alors  $\tilde{P}(R_{c,t;T}^*, T; s) \middle| \mathcal{F}_t$  est distribuée selon une lognormale de moyenne  $-B(T; s)(m(c, t; T) - 2q(t; T)) + b(B(T; s) - (s - T)) + \frac{k(T; s)}{2}$  et de variance  $\underbrace{v^2(t; T) \cdot (B(T; s))^2}_{=\sigma_P^2}$ .

En posant  $g(r(T)) = I_{\{P(T; s) \geq K\}}$  (équivalent à  $g(R_{c,t;T}^*) = I_{\{\tilde{P}(R_{c,t;T}^*, T; s) \geq K\}}$ ), nous pouvons évaluer le dernier terme de l’équation (C.2.1) à l’aide du théorème 3.3.1 “Variance d’un produit dérivé dans modèle de Vasiček” :

$$\begin{aligned}
&E^{\mathcal{Q}} \left[ \frac{I_{\{P(T; s) \geq K\}}}{B(T)^2} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\
&= (P(t; T))^2 e^{k^2(t; T)} E_{c,t} \left[ I_{\{\tilde{P}(R_{c,t;T}^*, T; s) \geq K\}} \right] \\
&= (P(t; T))^2 e^{k^2(t; T)} \Phi(h^* - \sigma_P^2),
\end{aligned}$$

En procédant de la même façon, les autres termes de l’équation (C.2.1) sont obtenus en posant  $g(r(T)) = (P(T; s))^2 \cdot I_{\{P(T; s) \geq K\}}$  et  $P(T; s) \cdot I_{\{P(T; s) \geq K\}}$ . ■

## Annexe D

---

### CALCUL DE LA VARIANCE D'UN CONTRAT À TERME STANDARDISÉ : APPLICATION À UNE OBLIGATION COUPON ZÉRO DANS UN MODÈLE DE VASIČEK

Nous allons maintenant calculer la valeur actualisée des gains d'un contrat à terme standardisé dont la date de livraison est  $T$  le sous-jacent est une obligation coupon zéro échéant au temps  $s$ . Comme d'habitude, nous considérons que le taux d'intérêt suit le modèle de Vasiček.

En utilisant les formules obtenues pour ce contrat à terme standardisé dans la section 4.4 à la page 64, la valeur actualisée au temps  $t$  des gains de ce contrat à terme standardisé du temps  $t$  au temps  $T$  est dénotée par  $G^Z(t; T)$  et sa variance est alors :

$$\text{Var}^{\mathcal{Q}} [G^Z(t; T) | \mathcal{F}_t] = (\sigma B(T; s))^2 \int_t^T f(\tau) d\tau,$$

où  $f(\tau) = e^{2(-a(T-\tau) - n(c; t; \tau) + G(\tau) \cdot m(c, t, \tau) + \kappa(\tau) + k^2(t; \tau) + (G(\tau))^2 \cdot v^2(t, \tau) - G(\tau) \cdot \sigma^2 (B(t; \tau))^2)}$ .

#### Démonstration :

En utilisant le théorème "Variance des gains actualisés dans un contrat à terme standardisé dont le sous-jacent est une obligation coupon zéro" (théorème 4.4.1,

page 65), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\text{Var}^{\mathcal{Q}} [G^Z(t; T) | \mathcal{F}_t] &= \int_t^T E^{\mathcal{Q}} \left[ e^{-2 \int_t^\tau r(u) du} (D(\tau) \sigma B(T; s) e^{-a(T-\tau)})^2 \middle| \mathcal{F}_t \right] d\tau \\
&= \int_t^T (\sigma B(T; s) e^{-a(T-\tau)})^2 E^{\mathcal{Q}} \left[ e^{-2 \int_t^\tau r(u) du} (D(\tau))^2 \middle| \mathcal{F}_t \right] d\tau \\
&= \int_t^T (\sigma B(T; s) e^{-a(T-\tau)})^2 E^{\mathcal{Q}} \left[ e^{-2 \int_t^\tau r(u) du + 2G(\tau) \cdot r(\tau) + 2\kappa(\tau)} \middle| \mathcal{F}_t \right] d\tau \\
&= \int_t^T (\sigma B(T; s))^2 e^{-2a(T-\tau)} E^{\mathcal{Q}} [e^{\varphi(\tau)} | \mathcal{F}_t] d\tau, \quad (\text{D.0.2})
\end{aligned}$$

où  $\varphi(\tau) \equiv 2 \left( - \int_t^\tau r(u) du + G(\tau) \cdot r(\tau) + \kappa(\tau) \right)$ .

Nous devons maintenant trouver la loi de  $e^{\varphi(\tau)}$  avant de pouvoir l'évaluer.

Dans un modèle de Vasiček, nous avons par le chapitre 1 :

$$\begin{aligned}
r(\tau) | \mathcal{F}_t &= m(c; t; \tau) + \sigma \int_t^\tau e^{-a(\tau-u)} dW_u^{\mathcal{Q}}, \\
\int_t^\tau r(u) du | \mathcal{F}_t &= \int_t^\tau m(c; t; u) du + \int_t^\tau \sigma \int_t^u e^{-a(u-k)} dW_k^{\mathcal{Q}} du,
\end{aligned}$$

dont la covariance est donnée par  $\text{Cov}^{\mathcal{Q}} \left[ \int_t^\tau r(u) du, r(\tau) | \mathcal{F}_t \right] = \frac{\sigma^2}{2} (B(t; \tau))^2$ .

Ainsi, sous la mesure  $\mathcal{Q}$ ,  $\varphi(\tau) = 2 \left( - \int_t^\tau r(u) du + G(\tau) \cdot r(\tau) + \kappa(\tau) \right) | \mathcal{F}_t$  est distribuée selon une normale où l'espérance et la variance sont les suivantes :

$$E^{\mathcal{Q}} [\varphi(\tau) | \mathcal{F}_t] = 2 \left( -n(c; t; \tau) + G(\tau) \cdot m(c, t, \tau) + \kappa(\tau) \right),$$

$$\text{Var}^{\mathcal{Q}} [\varphi(\tau) | \mathcal{F}_t] = 4 \left( k^2(t; \tau) + (G(\tau))^2 \cdot v^2(t, \tau) - G(\tau) \cdot \sigma^2 (B(t; \tau))^2 \right).$$

En utilisant le fait que  $e^{\varphi(\tau)} | \mathcal{F}_t$  est distribuée selon une lognormale, l'équation (D.0.2) devient :

$$\begin{aligned}
\text{Var}^{\mathcal{Q}} [G^Z(t; T) | \mathcal{F}_t] &= \int_t^T (\sigma B(T; T_1))^2 e^{-2a(T-\tau)} \\
&\quad \cdot e^{2 \left( -n(c; t; \tau) + G(\tau) \cdot m(c, t, \tau) + \kappa(\tau) + k^2(t; \tau) + (G(\tau))^2 \cdot v^2(t, \tau) - G(\tau) \cdot \sigma^2 (B(t; \tau))^2 \right)} d\tau \\
&= (\sigma B(T; T_1))^2 \int_t^T f(\tau) d\tau,
\end{aligned}$$

où  $f(\tau) = e^{2 \left( -a(T-\tau) - n(c; t; \tau) + G(\tau) \cdot m(c, t, \tau) + \kappa(\tau) + k^2(t; \tau) + (G(\tau))^2 \cdot v^2(t, \tau) - G(\tau) \cdot \sigma^2 (B(t; \tau))^2 \right)}$ .

■