

**Direction des bibliothèques**

**AVIS**

Ce document a été numérisé par la Division de la gestion des documents et des archives de l'Université de Montréal.

L'auteur a autorisé l'Université de Montréal à reproduire et diffuser, en totalité ou en partie, par quelque moyen que ce soit et sur quelque support que ce soit, et exclusivement à des fins non lucratives d'enseignement et de recherche, des copies de ce mémoire ou de cette thèse.

L'auteur et les coauteurs le cas échéant conservent la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent ce document. Ni la thèse ou le mémoire, ni des extraits substantiels de ce document, ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans l'autorisation de l'auteur.

Afin de se conformer à la Loi canadienne sur la protection des renseignements personnels, quelques formulaires secondaires, coordonnées ou signatures intégrées au texte ont pu être enlevés de ce document. Bien que cela ait pu affecter la pagination, il n'y a aucun contenu manquant.

**NOTICE**

This document was digitized by the Records Management & Archives Division of Université de Montréal.

The author of this thesis or dissertation has granted a nonexclusive license allowing Université de Montréal to reproduce and publish the document, in part or in whole, and in any format, solely for noncommercial educational and research purposes.

The author and co-authors if applicable retain copyright ownership and moral rights in this document. Neither the whole thesis or dissertation, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms, contact information or signatures may have been removed from the document. While this may affect the document page count, it does not represent any loss of content from the document.

Université de Montréal

**Gravitation conforme**

par  
Jihène Bouchami

Département de physique  
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures  
en vue de l'obtention du grade de Maître ès sciences (M.Sc.)  
en physique

Août, 2007

© Jihène Bouchami, 2007.



Université de Montréal  
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé:

**Gravitation conforme**

présenté par:

Jihène Bouchami

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes:

Richard Mackenzie,	président-rapporteur
Manu B. Paranjape,	directeur de recherche
Victor Zacek,	membre du jury

**Mémoire accepté le:** .....

## RÉSUMÉ

Des quatre interactions fondamentales de la nature, la gravitation est celle dont la conception a nécessité une très longue évolution. La contribution la plus révolutionnaire à son histoire reste sans doute celle d'Einstein par la formulation de sa théorie de la relativité générale.

Bien que la relativité générale soit la loi universelle de la gravitation, certains physiciens voient qu'elle présente des difficultés l'empêchant d'être une théorie complète. Pour cela, plusieurs alternatives étaient proposées dont la gravitation conforme. Comme celle d'Einstein, la gravitation conforme est une théorie métrique mais de plus hautes dérivées basée sur le principe de covariance et l'invariance conforme locale.

L'objectif de ce mémoire ne sortira pas de ce cadre. Nous allons étudier la brisure spontanée de la symétrie conforme et la génération de l'espace-temps anti-de Sitter comme solution du vide de la théorie. Nous passerons par la suite à étudier les perturbations autour de cette solution et voir que les ondes gravitationnelles ainsi trouvées admettent un tenseur énergie-impulsion nul. Nous montrerons aussi que la théorie standard de la gravitation ne peut pas être complètement rejetée. En effet, la brisure spontanée de la symétrie conforme induit la théorie d'Einstein comme limite à basse énergie de la gravitation conforme.

**Mots clés: gravitation conforme, espace-temps anti-de Sitter, brisure spontanée de la symétrie conforme.**

## ABSTRACT

Conformal gravity has been presented as a possible theory of gravity which possesses the symmetry under local conformal transformations.

In this Master thesis, we study the spontaneously broken conformal symmetry and the generation of anti-de Sitter space-time as vacuum solution of the theory. Analysis of perturbations around this solution leads to gravitational waves carrying a zero energy-momentum tensor. The symmetry breaking generates also general relativity as a low energy limit of conformal gravity.

**Keywords: conformal gravity, anti-de Sitter space-time, spontaneous breaking of conformal symmetry.**

## TABLE DES MATIÈRES

<b>RÉSUMÉ</b> . . . . .	<b>iii</b>
<b>ABSTRACT</b> . . . . .	<b>iv</b>
<b>TABLE DES MATIÈRES</b> . . . . .	<b>v</b>
<b>LISTE DES ANNEXES</b> . . . . .	<b>vii</b>
<b>DÉDICACE</b> . . . . .	<b>viii</b>
<b>REMERCIEMENTS</b> . . . . .	<b>ix</b>
<b>CHAPITRE 1 : INTRODUCTION</b> . . . . .	<b>1</b>
1.1 La relativité générale . . . . .	1
1.2 La gravitation conforme . . . . .	7
<b>CHAPITRE 2 : RÉSULTATS</b> . . . . .	<b>15</b>
2.1 Préliminaires . . . . .	15
2.1.1 Espace-temps anti-de Sitter . . . . .	15
2.1.2 Brisure spontanée de la symétrie conforme . . . . .	17
2.2 Article . . . . .	20
<b>CHAPITRE 3 : CONCLUSION</b> . . . . .	<b>41</b>

**BIBLIOGRAPHIE . . . . . 43**

## LISTE DES ANNEXES

<b>Annexe I :</b>	<b>Espaces maximalement symétriques . . . . .</b>	<b>x</b>
<b>Annexe II :</b>	<b>Transformations conformes . . . . .</b>	<b>xii</b>



(dédicace) À ma famille.

## **REMERCIEMENTS**

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de recherche Manu B. Paranjape pour son soutien et ses encouragements.

Je voudrais aussi remercier les membres du jury qui ont accepté d'examiner le présent mémoire.

Je suis reconnaissante envers mon collègue Jules Lambert pour les grands services qu'il m'a rendus.

# CHAPITRE 1

## INTRODUCTION

### 1.1 La relativité générale

La relativité générale est l'une des grandes théories physiques développées au XX<sup>ème</sup> siècle. Elle présente la gravitation comme l'effet de la courbure de l'espace-temps dont la géométrie est dictée par la matière.

La structure de l'espace-temps de la relativité restreinte se généralise dans la nouvelle théorie d'Einstein. La base de cette généralisation est le principe d'équivalence d'après lequel, à chaque point dans un champ gravitationnel arbitraire, on peut choisir un référentiel localement inertiel où la relativité restreinte est valable.

La réalisation mathématique de la théorie d'Einstein consiste à demander l'invariance des lois physiques par changement de coordonnées (principe de covariance générale). Les équations de la dynamique du champ gravitationnel décrit par le tenseur métrique  $g_{\mu\nu}$ <sup>1</sup> se dérivent à partir du principe de moindre action. Comme la relativité générale exige que ces équations soient au second ordre en dérivées partielles de la métrique de façon à généraliser l'équation de Poisson :  $\nabla^2 V_N = 4\pi G\rho$  ( $V_N$  est le potentiel Newtonien,  $G$  est la constante de Newton et  $\rho$  est la densité de masse), Hilbert constata que le seul scalaire satisfaisant à cette exigence est le scalaire de courbure  $R$  et proposa

---

<sup>1</sup> Par convention, on choisit le système d'unités dans lequel la vitesse de la lumière dans le vide  $c = 1$ . La signature de la métrique est prise (+ - - -) et les indices grecs varient de 0 à 3.

en 1915 l'action gravitationnelle de la relativité générale en 3+1 dimensions :

$$I_E = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R, \quad (1.1)$$

où  $g = \det(g_{\mu\nu})$  [5]. En tenant compte de la présence de la matière, l'action totale s'écrit  $I = I_E + I_M$  (où  $I_M$  est l'action associée à la matière). Sa variation par rapport à la métrique donne les équations d'Einstein :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (1.2)$$

où  $R_{\mu\nu}$  est le tenseur de Ricci,  $R$  est le scalaire de courbure ( $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ ) et  $T_{\mu\nu}$  est le tenseur énergie-impulsion associé à la matière considérée [5]. Ces équations relient la géométrie de l'espace-temps à la distribution énergétique de la matière, elles sont non linéaires et déterminent localement les composantes  $g_{\mu\nu}$  de la métrique dans un certain système de coordonnées. Pour des champs gravitationnels faibles produits par des sources non-relativistes, les équations de la relativité générale redonnent la loi de Newton [25].

Une solution intéressante des équations d'Einstein était donnée par Schwarzschild pour une métrique statique et sphériquement symétrique du vide ( $R_{\mu\nu} = 0$ ) tel que

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2, \quad (1.3)$$

le terme  $-\frac{GM}{r}$  s'identifie au potentiel Newtonien. Cette métrique décrit un champ gravitationnel à l'extérieur d'un corps à symétrie sphérique de masse  $M$  [5].

Einstein avait apporté le triomphe à sa théorie en réussissant à prédire et à expliquer certains phénomènes [25]. Il a expliqué l'avance de la périhélie de Mercure par le fait que les orbites des planètes subissent toujours une précession due à la courbure de l'espace-temps. La valeur qu'il a obtenue pour Mercure était en accord avec celle déjà observée. En plus, il a prédit et a calculé la déviation de la trajectoire de la lumière près du soleil, phénomène observé en 1919 donnant une preuve décisive que l'espace-temps est bien courbé, etc.

D'autre part, la relativité générale était un cadre pour construire des modèles cosmologiques décrivant l'univers. Le premier modèle fut élaboré par Einstein lui-même. Croyant à un univers statique, homogène et spatialement fini, il ajouta au membre gauche de ses équations le terme  $\Lambda g_{\mu\nu}$ , où  $\Lambda$  est une constante positive appelée constante cosmologique, dont l'effet est de compenser l'effondrement que prévoit ses solutions. Ce modèle a rapidement échoué quand Hubble, en 1929, a mis en évidence l'expansion de l'univers. Les équations (1.2) admettent des solutions spatialement homogènes et isotropes décrivant un univers dynamique, elles représentent les espaces-temps de Robertson-Walker dont la métrique s'écrit

$$d\tau^2 = dt^2 - a(t)^2 \left[ (1 - kr^2)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right], \quad (1.4)$$

$a(t)$  est le facteur d'échelle de l'espace et  $k$  est un paramètre représentant par ses trois valeurs trois espaces différents :  $k = 0$  (espace plat),  $k = 1$  (espace fermé sphérique) et  $k = -1$  (espace ouvert hyperbolique) (voir annexe I). La symétrie de ce modèle permet au tenseur énergie-impulsion correspondant de prendre la forme de celui d'un fluide parfait :

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu}, \quad (1.5)$$

où  $\rho$  et  $p$  sont respectivement la densité d'énergie et la pression du fluide et  $U^\mu$  est sa quadrivitesse. Insérés dans les équations d'Einstein, la métrique (1.4) et le tenseur (1.5) permettent de déterminer l'équation décrivant l'évolution du facteur d'échelle, appelée équation de Friedmann<sup>2</sup> [5]

$$\dot{a}^2 + k = \frac{8\pi G\rho}{3} a^2. \quad (1.6)$$

L'expansion observée de l'univers prédit l'existence d'une période plus dense que l'univers a connue dans le passé. Cette période s'appelle le Big Bang et représente la phase où  $a = 0$  [25].

Malgré toutes ses caractéristiques prometteuses, la relativité générale présente de sérieux problèmes. Le concept des champs quantiques était né dans les années 20. Il a été appliqué un peu plus tard sur toutes les interactions, sauf la gravitation. En effet, le champ gravitationnel ne se laisse pas quantifier de façon perturbative, car l'application des règles de Feynman engendre des divergences ultraviolettes incontrôlables. La pré-

---

<sup>2</sup> Dans l'équation (1.6),  $\dot{a}$  désigne  $\frac{da(t)}{dt}$ .

sence d'une constante de couplage de dimension égale à l'inverse de celle d'une masse rend la relativité générale une théorie non-renormalisable [7, 12]. Il s'avère ainsi que la théorie d'Einstein est incapable de décrire les phénomènes gravitationnels de haute énergie comme par exemple l'étude des singularités des trous noirs, ainsi que la singularité cosmologique que prédit le modèle de Robertson-Walker. Depuis des décennies, l'orientation principale de la physique théorique fondamentale est de construire une théorie quantique consistante de la gravitation. Bien qu'actuellement plusieurs théories partagent ce même but (gravitation quantique, supergravité, supercorde, etc), la gravitation présente encore des problèmes.

Expérimentalement, la relativité générale s'est confrontée à une grande énigme. La masse visible des galaxies spirales diminue au fur et à mesure qu'on s'éloigne de leurs centres et donc son influence gravitationnelle devrait être moins importante à leurs périphéries, ce qui laisse croire que les courbes de rotation de ces galaxies subissent une chute Keplérienne à partir d'une certaine distance. Mais rien de ça ne se passe réellement : la vitesse de rotation des galaxies spirales reste presque constante au-delà de leurs régions lumineuses [1]. Cette découverte remonte aux années 30 et a donné comme première interprétation que la masse dynamique des galaxies n'est pas uniquement composée de leur masse lumineuse visible mais aussi d'une matière manquante ou inobservable englobant les galaxies, appelée matière sombre. L'introduction de ladite matière était aussi nécessaire pour pouvoir expliquer le fait que les galaxies et les amas de galaxies dévient la lumière encore plus que ne prévoit la loi standard (phénomène des lentilles

gravitationnelles). Plusieurs hypothèses sur la composition de la matière sombre étaient émises (Weakly Interacting Massive Particles, MAAssive Compact Halo Objects), mais malgré les diverses tentatives pour la détecter, aucune réponse confirmative n'est encore obtenue [4, 23].

L'effet de ces phénomènes a aussi touché certains théoriciens. Ils voyaient que le manque n'est pas dans la matière mais dans les lois de la gravitation elles-mêmes, donc ils ont cherché des alternatives pouvant expliquer ces faits galactiques et extragalactiques. Dans ce contexte, le travail fait par Milgrom dans sa théorie intitulée MOND (MODified Newtonian Dynamics) [20] était la plus compatible avec les observations, mais ceci ne l'empêche pas d'être une théorie non-relativiste, donc loin de décrire la gravitation. Une deuxième alternative, la théorie tenseur-scalaire proposée par Bekenstein et Sanders [2], ne réussit pas à donner une bonne déviation de la lumière.

L'univers démasque un autre phénomène. Contrairement à toutes les attentes, la récolte des études menées en 1998 sur certaines supernovas était l'existence d'une gravitation répulsive qui laisse l'univers s'accélérer au cours de son expansion [13, 21]. L'explication était rapide : l'espace est majoritairement composé d'une énergie exerçant une pression négative qui, comme la matière sombre, n'est observée que par son effet gravitationnel, cette énergie porte le nom d'énergie sombre. Cette découverte a poussé certains cosmologistes à reprendre la constante cosmologique  $\Lambda$  puisque l'effet de son terme correspondant, qui est la cause de sa naissance, est répulsif. Mais dans ce cas, l'ajout de la constante cosmologique aux équations d'Einstein définit le tenseur



énergie-impulsion du vide de la forme  $T_{\mu\nu}^{vide} = -\frac{\Lambda}{8\pi G}g_{\mu\nu}$ . Avec ce modèle du vide cosmique, l'énergie sombre se trouve avec une densité d'énergie  $\rho = -p = \frac{\Lambda}{8\pi G}$  où  $p$  est sa pression. D'autres physiciens, par contre, ont supposé l'existence d'un champ scalaire dynamique appelé quintessence pouvant être composé soit d'une énergie fantôme ou de k-essence [3]. Cette forme hypothétique n'a pas encore donné signe d'existence, alors que la densité d'énergie du vide a été observée donnant une valeur  $10^{120}$  plus petite que celle prévue par la théorie quantique des champs [6].

Bien que la relativité générale était un défi pour son fondateur, elle représente maintenant un grand défi pour les théoriciens qui veulent trouver une théorie plus complète de la gravitation viable face aux phénomènes astronomiques et cosmologiques. Une théorie qui semble être intéressante est la gravitation conforme, sujet de ce présent mémoire.

## 1.2 La gravitation conforme

Peu après l'énoncé de la théorie d'Einstein, une première alternative est apparue. En 1918, le mathématicien allemand Hermann Weyl, dans son essai (non réussi) d'unifier la gravitation et l'électromagnétisme, a développé un modèle géométrique où les longueurs ne sont pas préservées lors d'une transformation locale de la métrique :

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow \Omega^2(x)g_{\mu\nu}(x), \quad (1.7)$$

mais les angles que font les courbes entre elles dans une variété Riemannienne ou pseudo-Riemannienne le sont. La transformation (1.7) s'appelle transformation conforme où  $\Omega(x)$  est une fonction réelle, continue et ne s'annulant jamais [11]. La densité lagrangienne gravitationnelle proposée est au quatrième ordre en dérivées de la métrique, c'est-à-dire s'écrivant en fonction des termes  $R_{\mu\nu\sigma\tau}R^{\mu\nu\sigma\tau}$ ,  $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$  et  $R^2$ . Cette proposition reflète le désir de Weyl de construire une théorie de jauge invariante sous les transformations conformes [22]. Trois ans après, Bach réalisa que la seule combinaison linéaire possible des termes mentionnés ci-haut ne peut que provenir du scalaire  $C_{\mu\nu\sigma\tau}C^{\mu\nu\sigma\tau}$ , où  $C_{\mu\nu\sigma\tau}$  est le tenseur de Weyl (voir annexe II) qui donne la densité lagrangienne

$$L_W = \sqrt{-g}C_{\mu\nu\sigma\tau}C^{\mu\nu\sigma\tau} = \sqrt{-g}\left(R_{\mu\nu\sigma\tau}R^{\mu\nu\sigma\tau} - 2R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + \frac{1}{3}R^2\right).$$

Or, la quantité  $\sqrt{-g}\left(R_{\mu\nu\sigma\tau}R^{\mu\nu\sigma\tau} - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R^2\right)$  est une divergence totale [14], ce qui finalement donne l'action gravitationnelle de Weyl ou encore l'action de la gravitation conforme

$$I_W = -2\alpha \int d^4x \sqrt{-g} \left( R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} - \frac{1}{3}R^2 \right), \quad (1.8)$$

où  $\alpha$  est une constante de couplage sans dimension [8]. Cette action est invariante sous les transformations conformes locales de la métrique [18].

La gravitation conforme, comme théorie quantique de hautes dérivées, a eu beaucoup d'intérêt puisqu'elle possède une constante de couplage sans dimension. Outre le graviton de masse nulle et de spin 2, la linéarisation de cette théorie donne naissance à

une particule scalaire massive et une particule fantôme massive de spin 2 [24].

Il reste tout de même essentiel de savoir si la gravitation conforme pouvait détourner vers elle le succès de la relativité générale en couvrant les effets gravitationnels classiques. C'était avec Mannheim et Kazanas que ce projet avait commencé vers la fin des années 80. Comme les équations de la métrique en relativité générale sont celles d'Einstein, les équations de Bach sont celles pour la gravitation conforme. La variation de l'action (1.8) donne  $(-g)^{\frac{1}{2}} g_{\mu\sigma} g_{\nu\tau} \frac{\delta I_W}{\delta g_{\sigma\tau}} = -2\alpha W_{\mu\nu} = 0$ , où [18]

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu} = & -\frac{1}{6} g_{\mu\nu} R_{;\sigma}^{\sigma} + \frac{2}{3} R_{;\mu;\nu} + R_{\mu\nu}^{\sigma}{}_{;\sigma} - R_{\mu;\nu;\sigma}^{\sigma} - R_{\nu;\mu;\sigma}^{\sigma} \\ & -2R_{\mu\sigma} R_{\nu}^{\sigma} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R_{\sigma\tau} R^{\sigma\tau} + \frac{2}{3} R R_{\mu\nu} - \frac{1}{6} g_{\mu\nu} R^2. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Les équations de Bach se généralisent en présence de la matière dont l'action s'écrit [15]

$$\begin{aligned} I_M = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} \partial_{\mu} \varphi \partial^{\mu} \varphi - \frac{1}{12} R \varphi^2 + \lambda \varphi^4 \right. \\ \left. + i \bar{\psi} \gamma^{\mu} (\partial_{\mu} + \Gamma_{\mu}) \psi - h \varphi \bar{\psi} \psi \right], \end{aligned} \quad (1.10)$$

où  $\varphi(x)$  est un champ scalaire réel,  $\psi(x)$  est un champ fermionique,  $\gamma^{\mu}$  sont les matrices de Dirac,  $\Gamma_{\mu}$  sont les connexions dues au spin du fermion et  $\lambda$  et  $h$  sont deux constantes de couplage sans dimension. L'expression écrite en fonction de  $\varphi$  seulement peut être vue comme le potentiel du champ scalaire :

$$V(\varphi) = \frac{1}{12} R \varphi^2 - \lambda \varphi^4. \quad (1.11)$$

L'équation du mouvement pour le champ  $\varphi(x)$  s'écrit

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\sqrt{-g}\partial^\mu\varphi - \frac{1}{6}R\varphi + 4\lambda\varphi^3 - h\bar{\psi}\psi = 0. \quad (1.12)$$

Comme l'action gravitationnelle de Weyl,  $I_M$  doit être invariante sous les transformations conformes de la métrique donc les champs  $\varphi(x)$  et  $\psi(x)$  doivent se transformer comme suit :

$$\varphi(x) \rightarrow \Omega^{-1}(x)\varphi(x) \quad (1.13)$$

$$\psi(x) \rightarrow \Omega^{-\frac{3}{2}}(x)\psi(x). \quad (1.14)$$

La variation de (1.10) par rapport à la métrique définit le tenseur énergie-impulsion de la matière :

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = & i\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu + \Gamma_\mu)\psi + \frac{2}{3}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - \frac{1}{6}g_{\mu\nu}\partial_\sigma\varphi\partial^\sigma\varphi \\ & - \frac{1}{3}\varphi D_\nu\partial_\mu\varphi + \frac{1}{3}g_{\mu\nu}D_\sigma\partial^\sigma\varphi - \frac{1}{6}\varphi^2(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R) - g_{\mu\nu}\lambda\varphi^4, \end{aligned} \quad (1.15)$$

où  $D_\mu$  est la dérivée covariante.

Les équations complètes de la gravitation conforme sont alors

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{4}\alpha T_{\mu\nu}. \quad (1.16)$$

Les deux tenseurs  $W_{\mu\nu}$  et  $T_{\mu\nu}$  sont symétriques, covariants, sans trace et se transforment comme  $W_{\mu\nu}(x) \rightarrow \Omega^{-2}(x)W_{\mu\nu}(x)$  et  $T_{\mu\nu}(x) \rightarrow \Omega^{-2}(x)T_{\mu\nu}(x)$  suite aux transformations (1.7), (1.13) et (1.14). Par conséquent, toute métrique obtenue par la transformation (1.7) se trouve aussi solution de (1.16).

En relativité générale, l'annulation du tenseur de Ricci donne la métrique de Schwarzschild comme solution statique et sphériquement symétrique du vide (1.3). On retrouve la même solution pour  $W_{\mu\nu} = 0$  mais qui n'est pas unique comme le montrent Mannheim et Kazanas :

$$d\tau^2 = B(r)dt^2 - B(r)^{-1}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\phi^2, \quad (1.17)$$

tel que  $B(r) = 1 - \frac{2\beta}{r} + \gamma r - kr^2$  où  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $k$  sont des constantes d'intégration choisies de telle sorte que  $\beta$  s'identifie au terme  $GM$  du potentiel Newtonien et  $\gamma$  et  $k$  sont suffisamment petites pour que leurs termes soient négligeables à l'échelle du système solaire devant celui de Schwarzschild [18]. En faisant ce choix, Mannheim et Kazanas ont prouvé que la théorie de Weyl est capable de remplacer celle d'Einstein dans la région qui lui avait donné succès en recouvrant les mêmes solutions. Le terme  $-kr^2$  n'est autre que le terme cosmologique. Contrairement à la relativité générale, ce terme se trouve solution du vide de la gravitation conforme en absence de la constante cosmologique. Le terme

linéaire est le joker de la gravitation conforme. Pour un bon choix de la valeur de  $\gamma$ , ce terme prend l'élan à des distances au-delà d'un rayon galactique et permet de donner une approche qui réussit à reproduire les courbes de rotation des galaxies sans avoir besoin de modifier les lois de Newton ni de supposer l'existence d'une matière inobservable. En effet, dans la théorie conforme, les constituants périphériques des galaxies spirales se trouvent dans un champ gravitationnel faible où le potentiel s'écrit

$$V_W(r) = -\frac{\beta}{r} + \frac{1}{2}\gamma r. \quad (1.18)$$

Ce potentiel généralise la limite Newtonnienne des champs gravitationnels faibles dont le terme linéaire représente une correction de celle-ci à l'échelle galactique. Mannheim a rendu cette expression compatible avec les données observationnelles de certaines galaxies spirales, en proposant différentes expressions de leur vitesse de rotation chacune pour un type particulier de galaxies. Les courbes de rotation que Mannheim avait trouvées sont en bon accord avec les observations [16, 19].

Le potentiel linéaire de la gravitation conforme a aussi servi pour déterminer la déviation de la lumière par une source gravitationnelle sphériquement symétrique. En fait, Edery et Paranjape ont trouvé que la trajectoire des photons se dévie d'un angle

$$\Delta\phi = \frac{4\beta}{r_0} - \gamma r_0, \quad (1.19)$$

où  $r_0$  est la plus proche distance que fait la lumière avec la source gravitationnelle [10]. À

l'échelle du système solaire, cette expression recouvre bien le résultat de la relativité générale. Une fois étendu à l'échelle galactique et extragalactique, le terme en  $\gamma$  commence à jouer son rôle et montre que la lumière ne peut subir une déviation supplémentaire par rapport à celle prévue que si  $\gamma$  est de signe négatif. Ce résultat contredit celui de Mannheim et Kazanas, car il fallait un  $\gamma$  positif pour pouvoir expliquer les courbes de rotation des galaxies. Or, ces courbes reproduisent des géodésiques massives qui sont sensibles aux transformations conformes, donc doivent être déterminées pour un facteur conforme donné. Et puisque ceci n'affecte pas les géodésiques nulles, le facteur conforme peut être choisi tel que en partant de la métrique (1.17) avec un  $\gamma$  négatif et faisant une transformation conforme, un changement de coordonnées garde la métrique sous la même forme sauf un signe opposé devant le terme linéaire [9].

La cosmologie a aussi pris sa part dans la théorie de Weyl. La métrique de Robertson-Walker (1.4) est encore solution de  $W_{\mu\nu} = 0$  puisqu'elle est conformément plate. Le tenseur énergie-impulsion correspondant peut être écrit sous sa forme conforme

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu} - \frac{1}{6}\varphi_0^2(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R) - g_{\mu\nu}\lambda\varphi_0^4,$$

où  $\varphi_0$  est un champ scalaire constant obtenu en faisant transformer un champ scalaire non nul. La composante temps-temps de l'équation (1.16) donne une expression analogue à celle de Friedmann [15]

$$\dot{a}^2 + k = -\frac{2a^2\rho}{\varphi_0^2} - 2a^2\lambda\varphi_0^2. \quad (1.20)$$

D'après cette équation, Mannheim prédit que l'univers associé à la cosmologie conforme ne peut être que de courbure négative, ce qui permet d'expliquer de façon naturelle la répulsion cosmique [17]. En plus, cet univers n'admet pas de singularités et ne prévoit absolument pas de période inflationnaire.

Ayant à peu près le même âge que la théorie d'Einstein, celle de Weyl essaye encore de s'imposer comme la théorie de la gravitation. Donner des résultats intéressants ne l'empêche pas d'être encore exploitable et pouvant même avoir des problèmes. Notre participation à l'exploitation de la gravitation conforme sera orientée vers l'étude de la brisure spontanée de l'invariance conforme qui nous laisse regarder en particulier l'espace-temps anti-de Sitter et traiter quelques sujets qui en découlent. Tout cela sera présenté dans le chapitre suivant.



## CHAPITRE 2

### RÉSULTATS

#### 2.1 Préliminaires

##### 2.1.1 Espace-temps anti-de Sitter

Le fond anti-de Sitter est une solution du vide des équations d'Einstein avec une constante cosmologique  $\Lambda$  négative. Il représente un espace maximalement symétrique de scalaire de courbure  $R$  constant et positif dont la géométrie est celle des hypersurfaces hyperboloïdes. L'espace-temps anti-de Sitter est aussi solution du vide pour la gravitation conforme mais sans constante cosmologique ( $W_{\mu\nu} = 0$ ). On propose dans ce qui suit de démontrer que la métrique anti-de Sitter est conforme à celle de Minkowski dont on déterminera le facteur conforme  $\Omega(x)$ .

On considère le système de coordonnées sphériques  $(t, r, \theta, \phi)$  où  $-\infty < t < +\infty$ ,  $0 < r < +\infty$ ,  $0 < \theta < \pi$  et  $0 < \phi < 2\pi$ . Dans ce système, la métrique anti-de Sitter  $\gamma_{\mu\nu}$  peut s'écrire sous la forme

$$d\tau^2 = (1+r^2)dt^2 - (1+r^2)^{-1}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\phi^2. \quad (2.1)$$

On pose  $r = \tan \rho$ , la métrique (2.1) devient

$$d\tau^2 = \frac{1}{\cos^2 \rho} \left[ dt^2 - d\rho^2 - \sin^2 \rho d\theta^2 - \sin^2 \rho \sin^2 \theta d\phi^2 \right], \quad (2.2)$$

où  $0 < \rho < \frac{\pi}{2}$ . On définit de nouvelles coordonnées  $p$  et  $q$  tels que  $t = p + q$  et  $\rho = p - q$ ,

l'équation (2.2) prend la forme

$$d\tau^2 = \frac{1}{\cos^2(p-q)} \left[ 4dpdq - \sin^2(p-q)d\theta^2 - \sin^2(p-q)\sin^2\theta d\phi^2 \right], \quad (2.3)$$

où  $-\frac{\pi}{2} < q \leq p < \frac{\pi}{2}$ . Or,  $\cos(p-q) = \cos p \cos q (1 + \tan p \tan q)$  et  $\sin(p-q) = \sin p \cos q - \sin q \cos p$ . Les transformations  $u = \tan p$  et  $v = \tan q$  ( $-\infty < v \leq u < +\infty$ ) donnent la métrique

$$d\tau^2 = \frac{1}{(1+uv)^2} \left[ 4dudv - (u-v)^2 d\theta^2 - (u-v)^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right]. \quad (2.4)$$

Un dernier changement de variables  $u = t' + r'$  et  $v = t' - r'$  ( $-\infty < t' < +\infty$  et  $0 \leq r'$ ) nous mène à la forme conforme de la métrique anti-de Sitter

$$d\tau^2 = \frac{4}{(1+t'^2 - r'^2)^2} \left[ dt'^2 - dr'^2 - r'^2 d\theta^2 - r'^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right]. \quad (2.5)$$

Donc,  $\gamma_{\mu\nu} = \Omega^2 \eta_{\mu\nu}$  où  $\eta_{\mu\nu}$  est la métrique plate et  $\Omega(t', r') = \frac{2}{1+t'^2 - r'^2}$ .

L'expression explicite du facteur conforme ne sera pas utilisée dans notre étude bien qu'elle serait utile pour d'autres sujets. Le fait que l'espace anti-de Sitter est conforme à celui de Minkowski nous sera vraiment utile dans l'étude des fluctuations.

### 2.1.2 Brisure spontanée de la symétrie conforme

La théorie de Weyl se distingue par l'ordre élevé de ses dérivées imposé par la symétrie conforme de l'action. Ceci a rendu possible l'étude de la gravitation au point de vue quantique. Quoique ce sujet mérite d'être abordé, on vise dans ce mémoire sur l'aspect phénoménologique de notre théorie où la symétrie conforme se trouve spontanément brisée. En effet, la description du mouvement des particules massives nécessite le choix du facteur conforme puisque leurs géodésiques sont sensibles aux transformations conformes ( $d\tau^2 \neq 0$ ). Un mécanisme qui génère la masse à la matière par brisure spontanée de symétrie est donc nécessaire.

La densité lagrangienne pour la matière

$$L_M = \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{12} R \varphi^2 + \lambda \varphi^4 + i \bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu + \Gamma_\mu) \psi - h \varphi \bar{\psi} \psi \right]$$

ne contient pas explicitement un terme de masse mais contient plutôt un terme d'interaction entre le champ scalaire et le champ fermionique<sup>1</sup>. La seule façon pour que la symétrie conforme soit spontanément brisée est que le champ  $\varphi$  atteigne une valeur stationnaire stable qui minimise le potentiel

$$V(\varphi) = \frac{1}{12} R \varphi^2 - \lambda \varphi^4.$$

---

<sup>1</sup> Le champ scalaire  $\varphi$  n'est pas considéré comme matière.

L'état fondamental correspond alors à un champ scalaire  $\varphi_0$  tel que

$$\varphi_0^2 = \frac{R}{24\lambda}.$$

Évidemment, cette solution ne peut exister que pour un scalaire de courbure  $R$  constant et positif<sup>2</sup>. Ceci ne veut pas dire que, à basse énergie, l'espace-temps est seulement anti-de Sitter. En effet, nous allons voir dans l'article que des espaces qui ne sont pas maximalelement symétriques mais ayant les mêmes caractéristiques pour  $R$  peuvent être le support de l'état du vide.

L'ajout d'un champ scalaire couplé à la gravitation par le terme  $R\varphi^2$  provoque spontanément la brisure de l'invariance conforme quand  $\varphi(x)$  est une fonction jamais nulle. On peut traduire ça par la possibilité de ramener un tel champ à une valeur constante  $\varphi_0$  non nulle en choisissant le facteur conforme comme  $\Omega(x) = \varphi(x)/\varphi_0$  de telle sorte que

$$\varphi(x) \rightarrow \tilde{\varphi}(x) = \varphi_0$$

et

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu}(x) = \frac{\varphi(x)^2}{\varphi_0^2} g_{\mu\nu}(x).$$

L'équation du mouvement (1.12) pour  $\tilde{\varphi}$  (ou  $\varphi_0$ ) est alors (on ne tient pas compte de  $\psi$ )

$$-\frac{1}{6}\tilde{R}\varphi_0 + 4\lambda\varphi_0^3 = 0,$$

---

<sup>2</sup> Par convention, on prend  $\lambda$  de signe positif.

où  $\tilde{R}$  est le transformé du scalaire de courbure  $R$ . Les solutions non nulles de cette équation sont les minima du potentiel  $V(\varphi)$ .

La situation où le champ scalaire peut s'annuler nécessite une étude particulière. Nous avons considéré simplement le cas d'un champ qui passe d'une région où  $\varphi(x) = -\sqrt{\frac{R}{24\lambda}}$  à une autre où  $\varphi(x) = \sqrt{\frac{R}{24\lambda}}$  en s'annulant en un certain point de l'espace. Le domaine qui englobe ce point s'appelle mur ou bulle dépendement de la géométrie de l'espace. L'étude de la stabilité des domaines sphérique et plan sera faite dans la dernière section de l'article.

On a vu que le choix du minimum du potentiel n'est pas unique mais il est arbitraire. Une fois ce choix est fait, la symétrie conforme est brisée et une génération de la masse aux fermions est associée. Ce mécanisme n'est possible qu'à basse énergie. Or, pour de tel niveau d'énergie, on a montré que l'interaction gravitationnelle est bien décrite par la relativité générale et non pas par la théorie de Weyl. De plus amples détails seront donnés dans la section 4 de l'article.

## 2.2 Article

Cette section est réservée à l'article où les principaux résultats de ma maîtrise sont présentés et analysés. Il est à noter que l'article n'est pas encore soumis pour publication.

L'étude de la stabilité des configurations avec bulles et murs est originellement réalisée par moi-même mais elle a été approfondie par mon directeur de recherche Manu Paranjape, tandis que l'analyse des fluctuations autour des solutions du vide était entièrement mon travail. La rédaction de l'article a été partagée entre nous deux.

# Spontaneous breaking of conformal invariance and gravitational waves in theories of conformally invariant gravitation

Jihène Bouchami<sup>1</sup> and Mann B. Paranjape<sup>2</sup>

Groupe de physique des particules, Département de physique, Université de Montréal  
C.P. 6128, succursale centre-ville, Montréal, Québec, Canada H3C 3J7

E-mail: <sup>1</sup> [\[information retirée / information withdrawn\]](#), <sup>2</sup> [\[information retirée / information withdrawn\]](#)

**Abstract.** Conformal gravity is a generally covariant theory of gravitational interactions, which benefits from an additional infinite dimensional invariance under local conformal transformations. This renders the theory attractive from the point of view of integrable quantum field theories, where it has generally been noticed that integrable field theories admit an infinite number of conserved quantities. However, for conformal gravity to be phenomenologically viable requires that the conformal symmetry is not manifested at the energy scales of the other known physical forces. Hence we require a mechanism for the spontaneous breaking of conformal invariance. In this paper, we study the possibility that conformal invariance is spontaneously broken due to interactions with conformally coupled matter fields. The vacuum of the theory admits conformally non-invariant solutions corresponding to maximally symmetric space-times and variants thereof. These are either de Sitter space-time or anti-de Sitter space-time in the full four space-time dimensions or in a lower dimensional sub-space. de Sitter space is seen to be unstable, however, anti-de Sitter space can be stable. We also consider in particular a linearized gravitational perturbation around the anti-de Sitter background. Thanks to the conformal flatness of this space-time, the derivation of gravitational radiation can be done in Minkowskian space-time. We show, to second order, that free gravitational waves carry zero energy-momentum. At low energy, when the conformal symmetry is spontaneously broken, the linearized gravitational field produced by a source is found to obey Einstein equations rather than the higher order derivative equations.

## 1 Introduction

It is widely believed that general relativity is the correct classical theory of gravity. Enjoying great success at the solar system scale, it has to be able to explain many galactic and cosmological phenomena [1]. However, the problem of flat rotational curves of spiral galaxies and the supplementary deflexion of light by galaxies and clusters rule out the validity of the standard gravitational law unless dark matter exists [2]. Furthermore, more recently, the introduction of dark energy has been necessary to explain the observed acceleration of the universe [3]. In addition, Einstein theory does not seem to be consistent as a quantum theory of gravity [4]. For all these reasons, general relativity is quite possibly not to be the correct theory for gravity and the door is still open for several possibilities [5, 6, 7].

Conformal gravity has been suggested as an alternative to the standard theory. It was originally realized by Weyl in the early age of general relativity. To introduce a gauge symmetry for gravity, Weyl proposed that the gravitational action has to be made up of fourth order derivative terms to make it invariant under local conformal transformation of the metric [8]. This model has received some acceptance as a possible quantum theory of gravity since it is power counting renormalizable [9]. Conformal gravity overcomes another challenge. Mannheim and Kazanas showed that the Weyl theory is capable of explaining the observed flat rotation curves at galactic and extragalactic scales without the need of dark matter [7]. Moreover, Mannheim has proposed a conformal cosmological model solving the flatness and horizon problems without predicting an inflationary universe [11]. A difficulty does arise when the deflection of light is studied. It was noticed that the deflection of light is actually diminished, in conflict with observations, by the linear potential that was found by Mannheim and Kazanas [7] and which is so crucial to explain the the flat galactic rotation curves [13]. A possible solution was offered by [14], where it was observed that although the solution for the flat galactic rotation curves is crucially dependent on the the choice of conformal gauge, the deflection of light, a massless particle, is not. Conformal transformations leave the null geodesics invariant. Hence one can choose the linear potential so that the deflection of light is augmented and then choose the conformal gauge so that the galactic rotation curves are explained. For details see [14].

However, this leads us to the most serious defect of the conformally invariant theory. The existence of massive particles implies non invariance under conformal transformations. There is the evident lack of conformal invariance in the observed phenomena, the tangible world has a definite scale. Thus for conformal gravity to be a realistic alternative theory of gravitation there must be a mechanism by which the conformal invariance is broken, at least at the scales of physics that we have been able to heretofore probe.

In this paper, we study spontaneous breaking of conformal invariance in the conformally invariant theory of gravitation coupled to scalar matter. We study the spectrum of its small fluctuations. We focus on anti-de Sitter space-time which is a vacuum solution of conformal gravity that breaks conformal invari-



ance, recovers Einstein equations at low energy and can offer an explanation for repulsive gravitation [12].

## 2 Conformal gravity

It has been suggested that gravity can be described by a fourth order derivative theory based on both covariance principle and conformal symmetry [7]. This theory is called conformal gravity whose action has the form

$$I_W = -\alpha \int d^4x \sqrt{-g} C_{\mu\nu\sigma\tau} C^{\mu\nu\sigma\tau} \quad (1)$$

$$= -\alpha \int d^4x \sqrt{-g} \left( R_{\mu\nu\sigma\tau} R^{\mu\nu\sigma\tau} - 2R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \frac{1}{3} R^2 \right) \quad (2)$$

$$= -2\alpha \int d^4x \sqrt{-g} \left( R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \frac{1}{3} R^2 \right), \quad (3)$$

where  $C_{\mu\nu\sigma\tau}$  is the Weyl tensor,  $R_{\mu\nu\sigma\tau}$  is the Riemann tensor,  $R_{\mu\nu}$  is the Ricci tensor,  $R$  is the curvature scalar and  $\alpha$  is a dimensionless parameter. Equation (2) follows directly from the definition of the Weyl tensor, while equation (3) follows from equation (2) and the expression for the Euler characteristic,

$$\chi = \sqrt{-g} \left( R_{\mu\nu\sigma\tau} R^{\mu\nu\sigma\tau} - 4R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + R^2 \right)$$

a total derivative, which is then used to eliminate the terms involving the Riemann tensor [10].

The sign of  $\alpha$  can be fixed by insisting that the Euclidean action for small fluctuations be positive. This condition is absolutely necessary if the Feynman functional integral is to have any chance of defining the corresponding quantum theory. The Minkowski Feynman functional integral is given by

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\phi e^{i\mathcal{I}_{Mink}}$$

An integral over the space of field configurations weighted by the exponential of  $i$  times the Minkowski action is not very well defined. The Euclidean path integral

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\phi e^{-\mathcal{I}_{Eucl}}$$

is much better defined, however it is crucial that  $\mathcal{I}_{Eucl}$  be non-negative. The Minkowski functional integral is actually obtained by analytically continuing back from Euclidean space. In usual field theory, that is second order in time derivatives, the Minkowski action is of the form

$$\mathcal{I}_{Mink} = \sigma \int d^4x (T - V) \sim \sigma \int dt d^3x \left[ \frac{1}{2} (\dot{\phi})^2 - V \right].$$

The continuation to Euclidean space requires the replacement  $t \rightarrow -i\tau$ , which gives

$$i\mathcal{I}_{Mink.} \rightarrow -\mathcal{I}_{Eucl.} = i(-i)(-)\sigma \int d\tau d^3x \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial\phi}{\partial\tau} \right)^2 + V \right].$$

Evidently the term of highest temporal derivatives (two) changes sign under the analytic continuation, and hence combines with the potential term, giving an overall minus sign and a non-negative Euclidean action. Thus the coefficient  $\sigma$  must be positive and normally we take  $\sigma = 1$ . For a theory with higher temporal derivatives (four), such as the theory of conformal gravity that we are studying here, the Minkowski action has the form

$$\mathcal{I}_{Mink.} = -\alpha \int d^4x (T + V) \sim -\alpha \int dt d^3x \left[ \frac{1}{2} (\ddot{\phi})^2 + V \right], \quad (4)$$

where we have switched the sign of the potential as we are anticipating that  $\alpha$  is positive. This form is certainly true for the dynamics of the perturbative fluctuations and is amenable to continuation to Euclidean space, however, we must note that the analytic continuation of a general curved Lorentzian manifold to Euclidean space is not necessarily possible. Now continuation of (4) to Euclidean space yields

$$i\mathcal{I}_{Mink.} \rightarrow -\mathcal{I}_{Eucl.} = i(-i)(-)\alpha \int d\tau d^3x \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2\phi}{\partial\tau^2} \right)^2 + V \right],$$

thus requiring  $\alpha$  to be positive.

The action (1) is invariant under local conformal transformation of the metric

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow \Omega^2(x)g_{\mu\nu}(x), \quad (5)$$

where  $\Omega(x)$  is a real, continuous and non-vanishing function. The variation of equation (2) or equivalently equation (3) gives the matter free gravitational field equations  $W_{\mu\nu} = 0$ , where

$$g_{\mu\gamma}g_{\nu\beta} \frac{\delta I_W}{\delta g_{\gamma\beta}} = -2\alpha\sqrt{-g}W_{\mu\nu} \quad (6)$$

and

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu} = & -\frac{1}{6}g_{\mu\nu}R^{;\sigma}{}_{;\sigma} + \frac{2}{3}R_{;\mu;\nu} + R_{\mu\nu}^{;\sigma}{}_{;\sigma} - R_{\mu}{}^{\sigma}{}_{;\nu;\sigma} - R_{\nu}{}^{\sigma}{}_{;\mu;\sigma} \\ & -2R_{\mu\sigma}R_{\nu}{}^{\sigma} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R_{\sigma\tau}R^{\sigma\tau} + \frac{2}{3}RR_{\mu\nu} - \frac{1}{6}g_{\mu\nu}R^2. \end{aligned} \quad (7)$$

$W_{\mu\nu}$ , called the Bach tensor, is automatically covariantly conserved (for any choice of the metric), which corresponds to the Bianchi identities,

$$W_{\mu}{}^{\nu}{}_{;\nu} = 0$$

due to the invariance of the action under general coordinate transformations. It is also automatically trace free (for any choice of the metric)

$$W^{\mu}{}_{\mu} = 0$$

due to the invariance of the action under local conformal transformations. The solutions of the equations of motion  $W_{\mu\nu} = 0$  correspond to the vacuum configurations of conformal gravity [7].

Introducing a scalar field  $\varphi(x)$  in this theory and maintaining the conformal invariance, requires the well-known action

$$I_\varphi = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + \frac{1}{12} R \varphi^2 - \lambda \varphi^4 \right], \quad (8)$$

where  $R$  is the scalar curvature and  $\lambda$  is a dimensionless coupling constant. Notice that there is no mass term. Under the conformal transformation of the metric (5) and the corresponding transformation of the scalar field

$$\varphi(x) \rightarrow \Omega^{-1}(x) \varphi(x) \quad (9)$$

the scalar action is invariant. The lack of conformal invariance of the kinetic term is exactly cancelled by that of the  $R\varphi^2$  term.

The variation of the action (8) with respect to the metric defines the energy-momentum tensor of the scalar field

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = & \frac{2}{3} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - \frac{1}{6} g_{\mu\nu} \partial_\sigma \varphi \partial^\sigma \varphi - \frac{1}{3} \varphi D_\nu \partial_\mu \varphi \\ & + \frac{1}{3} g_{\mu\nu} \varphi D_\sigma \partial^\sigma \varphi - \frac{1}{6} \varphi^2 (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R) - g_{\mu\nu} \lambda \varphi^4. \end{aligned} \quad (10)$$

Noting the normalization of  $W_{\mu\nu}$  in equation (7) the full gravitational motion equations are simply

$$2\alpha W_{\mu\nu} = \frac{1}{2} T_{\mu\nu}. \quad (11)$$

The two implicated tensors are symmetric, traceless and independently covariantly conserved: Under conformal transformations (5) and (9), they transform as  $W_{\mu\nu} \rightarrow \Omega^{-2} W_{\mu\nu}$  and  $T_{\mu\nu} \rightarrow \Omega^{-2} T_{\mu\nu}$ . The scalar field equation of motion is obtained by varying  $I_\varphi$  with respect to  $\varphi$ , yielding

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \sqrt{-g} \partial^\mu \varphi - \frac{1}{6} R \varphi + 4\lambda \varphi^3 = 0. \quad (12)$$

### 3 Spontaneous breaking of conformal symmetry

Vacuum solutions of the field equations satisfy

$$W_{\mu\nu} = 0.$$

Evidently, Minkowski space-time ( $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ ) is a solution. Then, using the conformal invariance, every metric that is conformally related to Minkowski space-time,  $g_{\mu\nu} = \Omega^2 \eta_{\mu\nu}$ , is also a solution where  $\Omega$  is an arbitrary but sufficiently smooth non-vanishing function of the coordinates. Taking into account the scalar field, a full vacuum solution corresponds to  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$  and  $\varphi = 0$ . Every conformal transform of this solution is also a solution.

These solutions do not break conformal invariance, no mass scale is generated. However there do exist solutions which spontaneously break the conformally invariance. We do not establish an exhaustive classification of such solutions here, but such an exercise would be very interesting.

### 3.1 Maximally symmetric vacuum solutions with broken conformal invariance

Maximally symmetric space-times have been classified for four dimensional Lorentzian metric space-times [1]. We can use these geometries to establish a class of vacuum solutions that spontaneously break the conformal invariance. These solutions have been first found by Mannheim [10]. Maximally symmetric four dimensional space-times are simply given by either de Sitter space-time, anti-de Sitter space time or Minkowski space-time. They are characterized by an arbitrary and constant curvature scalar  $R$ , a Ricci tensor given by  $R_{\mu\nu} = \frac{R}{4}g_{\mu\nu}$  and a Riemann tensor given by  $R_{\mu\nu\sigma\tau} = \frac{R}{12}(g_{\mu\sigma}g_{\nu\tau} - g_{\mu\tau}g_{\nu\sigma})$ . The Bach tensor vanishes for any value of the (constant) curvature scalar, since all of these geometries are conformally related to Minkowski space. Hence the matter free gravitational field equations  $W_{\mu\nu} = 0$  are satisfied and this is why we call these solutions vacuum solutions. The scalar field equation (12), assuming a space-time independent solution and the gravitational field equations (11), taking into account  $W_{\mu\nu} = 0$  and the assumption that  $\varphi$  is constant, give

$$-\frac{1}{6}R\varphi + 4\lambda\varphi^3 = 0 \quad (13)$$

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{6}\varphi^2(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R) - g_{\mu\nu}\lambda\varphi^4 = 0. \quad (14)$$

Upon replacement  $R_{\mu\nu} = \frac{R}{4}g_{\mu\nu}$ , equation (14) somewhat unexpectedly becomes identical to equation (13) except for being multiplied by the factor  $g_{\mu\nu}\varphi$ , allowing for the simultaneous solutions  $\varphi = 0$  or  $\varphi = \pm\sqrt{\frac{R}{24\lambda}}$ . The solution  $\varphi = 0$  has already been discussed and does not break conformal invariance however the second solution exists for positive constant curvature space-times and spontaneously breaks the conformal invariance by generating a mass scale. Such space-times correspond to anti-de Sitter space-time in our convention. The solutions for different values of the scalar curvature, which serves as a modulus parameter, are related to each other by conformal transformations. Analysis of the small fluctuations about these solutions will be done in the later sections.

The possibility of quantum tunneling between the different vacua is well beyond the scope of this paper, however it is an extremely interesting subject. The non conformally invariant vacua actually correspond to a negatively infinite total action while the simple  $\varphi = 0$  vacuum corresponds to zero total action. The gravitational action for a maximally symmetric space-time should vanish, indeed the expressions given by equations (1) and (2) do vanish. However the action given in equation (3) does not vanish, and is in fact infinite. The explanation for this is given by the fact that although the Euler characteristic is a total

divergence, its value for a maximally symmetric space-time is infinite, hence the value of the action given by (3) must also be infinite to compensate. This can render analysis, such as those used in Derrick's theorem, where the stability or instability of field configurations is determined by explicitly looking at the behavior of the action under changes of scale, problematic. We repeat here, in order to stress, that the field equations obtained by the variation of any of the expressions for the action are identical, because the variation that is considered is local.

### 3.2 Non-maximally symmetric solutions with broken conformal invariance

There exist other (essentially vacuum) solutions to the field equations (11) and (12) which do not satisfy that the Bach tensor vanishes. The solutions are essentially vacuum solutions since the curvature scalar is a constant as is the scalar field, but the space-time is not maximally symmetric. Consider the ansatz

$$d\tau^2 = (1 + B(x))dt^2 - \frac{1}{(1 + B(x))}dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (15)$$

The coordinates  $(x, y, z, t)$  each varies from  $-\infty$  to  $\infty$ . The metric describes a space-time with the topology  $\mathbf{M}^2$  a two dimensional Lorentz manifold cross the flat two dimension Euclidean space  $\mathbf{R}^2$ . The curvature scalar is given by  $R(x) = B(x)''$ .  $B(x) = \frac{R}{2}x^2$  yields a constant curvature space-time for  $R$  a constant, the curvature scalar is evidently given by  $R$ . The two dimensional Lorentz manifold is exactly two dimensional de Sitter or anti-de Sitter space-time. This ansatz for the metric together with the ansatz that the scalar field is a constant yields a solution of the field equations. This solution is fundamentally different from the solution of the section (3.1). Here the Bach tensor does not vanish, and hence a solution exists only for a critically coupled system in terms of the parameters  $\alpha$  and  $\lambda$  and for a specific value of the scalar field. The solutions for different values of the scalar curvature are not related to each other by conformal transformations, nevertheless, the value of the scalar curvature still serves as a modulus parameter.

There are eleven field equations (one symmetric two tensor and the scalar field equation) for the functions  $B(x)$  and  $\varphi(x)$ , however the symmetries and the constraints satisfied by the Bach tensor and the energy-momentum tensor actually reduce them to exactly two equations. Such an analysis was first carried out in [17] where solutions of the Kerr-Reissner-Nordstrom were found. With the ansatz (15) and  $\varphi$  constant, the gravitational field equations reduce to the four diagonal equations together with the scalar field equation

$$2\alpha W_{00} = \frac{1}{2}T_{00} \quad (16)$$

$$2\alpha W_{11} = \frac{1}{2}T_{11} \quad (17)$$

$$2\alpha W_{22} = \frac{1}{2}T_{22} \quad (18)$$

$$2\alpha W_{33} = \frac{1}{2}T_{33} \quad (19)$$

$$-\frac{1}{6}R\varphi + 4\lambda\varphi^3 = 0. \quad (20)$$

The translational symmetry in spatial directions  $y$  and  $z$  yields that  $W_{22} = W_{33}$  and  $T_{22} = T_{33}$ . Using this in the equations for the independent tracefree nature of the Bach tensor and the energy momentum tensor gives us the constraints

$$g^{00}W_{00} + g^{11}W_{11} - 2W_{22} = 0$$

and

$$g^{00}T_{00} + g^{11}T_{11} - 2T_{22} = 0.$$

The first equation is directly valid, while the second reduces to the scalar field equation (20). Hence equations (18) and (19) are automatic if the remaining equations (16), (17) and (20) are satisfied. The covariant conservation of both tensors yields

$$W_{\alpha ; 0}^0 + W_{\alpha ; 1}^1 = 0$$

and

$$T_{\alpha ; 0}^0 + T_{\alpha ; 1}^1 = 0,$$

for  $\alpha = 0, 1$ . We have used the fact that the space-time is flat in the  $(y, z)$  directions hence the explicit derivatives and the connection coefficients simply vanish for these directions. Calculating the  $(0, 1)$  direction connections gives

$$\Gamma_{\alpha\beta}^0 = \frac{g'_{00}}{2g_{00}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Gamma_{\alpha\beta}^1 = \begin{pmatrix} g_{00}g'_{00}/2 & 0 \\ 0 & -g'_{00}/2g_{00} \end{pmatrix} \quad (21)$$

where  $\alpha, \beta$  take on the values 0 and 1. It is then easy to see that  $W_{00}$  depends linearly on  $W_{11}$  and  $T_{00}$  on  $T_{11}$ . Thus the equation (16) is automatic if the remaining two equations (17) and (20) are satisfied. Thus the system reduces to the two equations

$$2\alpha W_{11} = \frac{1}{2}T_{11} \quad (22)$$

$$-\frac{1}{6}R\varphi + 4\lambda\varphi^3 = 0, \quad (23)$$

which are to be solved for two independent constants  $R$  and  $\varphi$ . Explicitly the equations are given by

$$\alpha(B'')^2/3 = \lambda\varphi^4 \quad (24)$$

$$-\frac{1}{6}(B'')\varphi + 4\lambda\varphi^3 = 0, \quad (25)$$

where we have multiplied through by a factor of  $(1+B)$  in equation (24). A non-zero constant solution for  $\varphi$  requires  $B(x) = Rx^2/2$  (where  $R$  is the (constant) curvature scalar) which yields the condition on the couplings

$$\alpha = 1/192\lambda.$$

On first sight this condition does not fix the value of the constant scalar curvature  $R$ , it could be positive or negative, corresponding to two dimensional anti-de Sitter or de Sitter space-time respectively. Only flat Minkowski space-time is a priori excluded, since we have assumed  $R \neq 0$ . However, de Sitter space-time is actually excluded by equation (25) which yields

$$\varphi^2 = \frac{B''}{24\lambda},$$

hence  $R = B''$  must be positive and thus yielding anti-de Sitter space-time. This is exactly the same value as the solution for the scalar field in subsection (3.1) since the scalar field equation and its solution, for constant scalar field and constant scalar curvature, is unique. Our solution is new and involves in a non-trivial way the fourth order Weyl action, in contradistinction to the vacuum solutions corresponding to maximally symmetric anti-de Sitter space-time that we found in subsection (3.1).

## 4 Fluctuations about the vacuum solutions

### 4.1 Gravitational waves in anti-de Sitter space-time

We study the linearized gravitational perturbation around the anti-de Sitter background in conformal gravity. The metric takes the form

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} + \tilde{h}_{\mu\nu} = \Omega^2(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) = \Omega^2 g_{\mu\nu}, \quad (26)$$

where  $\gamma_{\mu\nu}$  and  $\eta_{\mu\nu}$  are respectively anti-de Sitter and Minkowski metrics,  $\tilde{h}_{\mu\nu}$  and  $h_{\mu\nu}$  are small perturbations respectively around  $\gamma_{\mu\nu}$  and  $\eta_{\mu\nu}$  and  $\Omega(x)$  is the conformal factor relating the two metrics. We note that the indices of  $h_{\mu\nu}$ ,  $\tilde{h}_{\mu\nu}$  and all zero order tensors are raised and lowered with  $\gamma_{\mu\nu}$  metric, however for the remainder of tensors we use the full metric  $g_{\mu\nu}$  (or  $\tilde{g}_{\mu\nu}$ ).

To study perturbations around the anti-de Sitter metric, it is more practical to do the work on the flat space-time since  $g_{\mu\nu}$  and  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  are conform one to another. So for  $T_{\mu\nu} = 0$  (in the absence of sources), equation (11) gives

$$\tilde{W}_{\mu\nu} = \Omega^{-2} W_{\mu\nu} = 0, \quad (27)$$

where  $\tilde{W}_{\mu\nu}$  and  $W_{\mu\nu}$  are Bach tensors respectively of anti-de Sitter and Minkowski metrics. To first order in  $\tilde{h}_{\mu\nu}$  and  $h_{\mu\nu}$ , we have

$$\tilde{W}_{\mu\nu}^{(1)} = \Omega^{-2} W_{\mu\nu}^{(1)} = 0, \quad (28)$$

where

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu}^{(1)} = & -\frac{1}{6}\eta_{\mu\nu}\partial_\rho\partial^\rho(\eta^{\lambda\rho}R_{\lambda\rho}^{(1)}) + \frac{2}{3}\partial_\mu\partial_\nu(\eta^{\lambda\rho}R_{\lambda\rho}^{(1)}) \\ & + \partial_\rho\partial^\rho R_{\mu\nu}^{(1)} - \partial_\beta\partial_\mu(\eta^{\alpha\beta}R_{\nu\alpha}^{(1)}) - \partial_\beta\partial_\nu(\eta^{\alpha\beta}R_{\mu\alpha}^{(1)}) = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Since

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2} \left( \partial_\beta \partial_\mu h_\nu^\beta + \partial_\beta \partial_\nu h_\mu^\beta - \partial_\mu \partial_\nu h_\beta^\beta - \partial_\rho \partial^\rho h_{\mu\nu} \right), \quad (30)$$

So,  $h_{\mu\nu}$  is a solution of the equation

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}(\partial_\rho \partial^\rho)^2 h_{\mu\nu} + \frac{1}{6}\eta_{\mu\nu}(\partial_\rho \partial^\rho)^2 h_\beta^\beta - \frac{1}{6}\eta_{\mu\nu} \partial_\rho \partial^\rho (\eta^{\lambda\rho} \partial_\alpha \partial_\lambda h_\rho^\alpha) - \frac{1}{6}\eta^{\nu\beta} \partial_\mu \partial_\beta \partial_\rho \partial^\rho h_\alpha^\alpha \\ & - \frac{1}{3}\eta^{\nu\beta} \eta^{\lambda\rho} \partial_\mu \partial_\beta \partial_\alpha \partial_\lambda h_\rho^\alpha + \frac{1}{2}\eta^{\nu\rho} \partial_\rho \partial_\beta \partial_\rho \partial^\rho h_\mu^\beta + \frac{1}{2}\eta^{\beta\lambda} \partial_\lambda \partial_\mu \partial_\rho \partial^\rho h_{\nu\beta} = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

This purely fourth order derivative equation can never be simplified without fixing gauge conditions. To translate the invariance of the theory under coordinate transformation we choose the harmonic gauge  $g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0$  (where  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  is the Christoffel coefficient corresponding to the metric  $g_{\mu\nu}$ ) that can be written at first order

$$\partial_\mu h_\nu^\mu = \frac{1}{2} \partial_\nu h_\mu^\mu. \quad (32)$$

Furthermore, since conformal gravity has an additional symmetry (the conformal one),  $h_{\mu\nu}$  can be more restricted by a second gauge choice. If we perform an infinitesimal conformal transformation which the factor  $\Omega(x)$  has the form  $(1 + \epsilon(x))$  where  $\epsilon(x)$  is a function having the same order of magnitude as  $h_{\mu\nu}$ , then the metric  $g_{\mu\nu}$  transforms as

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g'_{\mu\nu} = (1 + \epsilon)(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} + \epsilon \eta_{\mu\nu} + O(h^2) \simeq \eta_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu}, \quad (33)$$

where  $h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \epsilon \eta_{\mu\nu}$ . If we take the trace of this equation, we find  $h'^\mu_\mu = h^\mu_\mu + 4\epsilon$ . Then, we can choose  $\epsilon = -\frac{1}{4} h^\mu_\mu$  to have  $h'^\mu_\mu = 0$ .

If we choose to place in the space-time described by the metric  $g'_{\mu\nu} \simeq \eta_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu}$ , we use the gauge conditions (we can omit the ')

$$\partial_\mu h_\nu^\mu = 0 \quad (34)$$

and

$$h^\mu_\mu = 0. \quad (35)$$

With these conditions, the gravitational perturbation  $h_{\mu\nu}$  turns to obey the equation

$$(\partial_\rho \partial^\rho)^2 h_{\mu\nu} = 0. \quad (36)$$

The general solution of this equation can be written as a linear superposition of plane waves. For simplicity, we consider one mode

$$h_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} e^{ikx} + e_{\mu\nu}^* e^{-ikx} \quad (37)$$

with a wave vector  $k^\mu$  ( $\mu=0,1,2,3$ ) obeying the dispersion relation derived from equation (36)

$$k_\mu k^\mu = 0. \quad (38)$$



The wave polarization  $e_{\mu\nu}$  is a symmetric tensor whose elements obey with the gauge condition

$$k_\mu e_\nu^\mu = 0 \quad (39)$$

and

$$e_\mu^\mu = 0. \quad (40)$$

We see that the familiar gravitational waves are also found in the fourth order theory by using the covariance and the conformal properties. The support of the gravitational waves, the graviton, has a propagator behaving as  $1/k^4$  in the fourth order theory.

## 4.2 Energy-momentum of gravitational waves

Gravitational waves found in the last section are in the first order of  $h_{\mu\nu}$ . However, the terms at higher order in the tensor  $W_{\mu\nu}$  can play the role of the energy-momentum tensor of gravitational waves ( $T_{\mu\nu}$  is still zero). We have

$$W_{\mu\nu} = W_{\mu\nu}^{(0)} + W_{\mu\nu}^{(1)} + W_{\mu\nu}^{(2)} + \dots = 0, \quad (41)$$

with  $W_{\mu\nu}^{(0)} = 0$  (flat metric). Then

$$W_{\mu\nu}^{(1)} = -W_{\mu\nu}^{(2)} - W_{\mu\nu}^{(3)} - \dots = -(W_{\mu\nu} - W_{\mu\nu}^{(1)}) = \frac{1}{4\alpha} t_{\mu\nu}, \quad (42)$$

where  $t_{\mu\nu} = -4\alpha(W_{\mu\nu} - W_{\mu\nu}^{(1)})$  is the energy-momentum tensor carrying by the gravitational waves described by  $h_{\mu\nu}$ . The first term in  $t_{\mu\nu}$  is at second order in  $h_{\mu\nu}$ , so

$$\begin{aligned} t_{\mu\nu}^{(2)} = & -4\alpha \left[ -\frac{1}{6} \eta_{\mu\nu} \partial_\sigma \partial^\sigma (\eta^{\lambda\rho} R_{\lambda\rho}^{(2)}) + \frac{2}{3} \partial_\mu \partial_\nu (\eta^{\lambda\rho} R_{\lambda\rho}^{(2)}) \right. \\ & \left. + \partial_\sigma \partial^\sigma R_{\mu\nu}^{(2)} - \eta^{\beta\alpha} \partial_\mu \partial_\alpha R_{\beta\nu}^{(2)} - \eta^{\beta\alpha} \partial_\nu \partial_\alpha R_{\beta\mu}^{(2)} \right]. \end{aligned} \quad (43)$$

At second order in perturbation, the Ricci tensor takes the form

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}^{(2)} = & \frac{1}{2} h^{\lambda\alpha} (\partial_\mu \partial_\nu h_{\lambda\alpha} - \partial_\nu \partial_\lambda h_{\mu\alpha} - \partial_\mu \partial_\alpha h_{\lambda\nu} + \partial_\alpha \partial_\lambda h_{\mu\nu}) \\ & + \frac{1}{4} (\partial_\lambda h_{\sigma\nu} + \partial_\nu h_{\sigma\lambda} - \partial_\sigma h_{\lambda\nu}) (\partial^\lambda h_\mu^\sigma + \partial_\mu h^{\sigma\lambda} - \partial^\sigma h_\mu^\lambda) \\ & - \frac{1}{4} (2\partial_\alpha h_\sigma^\alpha - \partial_\sigma h) (\partial_\nu h_\mu^\sigma + \partial_\mu h_\nu^\sigma - \partial^\sigma h_{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (44)$$

Using gauge conditions (34) and (35),  $R_{\mu\nu}^{(2)}$  becomes

$$R_{\mu\nu}^{(2)} = -\frac{3}{4} k_\mu k_\nu e^{\lambda\rho} e_{\lambda\rho} e^{2ikx} - \frac{3}{4} k_\mu k_\nu e^{\lambda\rho} e_{\lambda\rho}^* + h.c. \quad (45)$$

Inserting it in (41) we find that

$$t_{\mu\nu}^{(2)} = 0, \quad (46)$$

the energy-momentum tensor of gravitational waves vanishes at the lowest order.

### 4.3 Fluctuations with conformally coupled scalar matter

In this section we consider fluctuations about the vacuum solution found in subsection (3.1) with  $\varphi = \varphi_0 + \delta\varphi$  where

$$\varphi_0^2 = \frac{R}{24\lambda}. \quad (47)$$

and the metric corresponds to anti-de Sitter space-time.

In the presence of perturbation around anti-de Sitter metric, the scalar field moves away  $\varphi_0$  by a small perturbation  $\delta\varphi$  having the same order of magnitude as  $h_\mu^\mu$  and  $\tilde{h}_\mu^\mu$ .

To the first order in  $\delta\varphi$ ,  $h_{\mu\nu}$  and  $\tilde{h}_{\mu\nu}$ , the gravitational motion equations (11) are

$$\begin{aligned} \Omega^{-2}W_{\mu\nu}^{(1)} = & -\frac{1}{4\alpha} \left[ \frac{1}{3}\varphi_0\delta D_\nu\partial_\mu\varphi - \frac{1}{3}\varphi_0\gamma_{\mu\nu}D_\sigma\partial^\sigma\delta\varphi \right. \\ & \left. - \frac{1}{6}\varphi_0^2 \left( R_{\mu\nu}^{(1)} - \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}R^{(1)} - \frac{1}{2}\tilde{h}_{\mu\nu}R^{(0)} \right) - \lambda\varphi_0^4\tilde{h}_{\mu\nu} \right]. \end{aligned} \quad (48)$$

We have seen that  $W_{\mu\nu}^{(1)}$  is made only of the fourth derivatives of the perturbation  $h_{\mu\nu}$ . At low energy, when the conformal symmetry is spontaneously broken, we can neglect these terms in front of the second member terms. Then equation (48) can be seen as

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}^{(1)} - \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}R^{(1)} - \frac{1}{2}\tilde{h}_{\mu\nu}R^{(0)} = & -6\lambda\varphi_0^2\tilde{h}_{\mu\nu} \\ & + \frac{2}{\varphi_0} \left[ D_\nu\partial_\mu\delta\varphi - \gamma_{\mu\nu}D_\sigma\partial^\sigma\delta\varphi \right], \end{aligned} \quad (49)$$

that can be written in the familiar form

$$G_{\mu\nu}^{(1)} = \Lambda\tilde{h}_{\mu\nu} + 8\pi GT_{\mu\nu}^{(1)}, \quad (50)$$

where  $G_{\mu\nu}^{(1)}$  is the first order Einstein tensor in the anti-de Sitter frame, the term  $-6\lambda\varphi_0^2$  defines the cosmological constant  $\Lambda$  ( $-6\lambda\varphi_0^2 = \frac{\Lambda}{8\pi G}$ ) in the hyperboloid space-time and  $T_{\mu\nu}^{(1)}$  represents the energy-momentum tensor at the first order in  $\delta\varphi$ .

This leads to the following result: at low energy, the gravitational waves are derived and studied from Einstein equations rather than conformal theory equations. For the maximally symmetric anti-de Sitter space-time, we find his negative cosmological constant  $\Lambda$ .

## 5 Domain wall solitons

It has been observed that the theory of conformal gravity with a conformally coupled scalar field can be transformed by an appropriate field redefinition to an

Einstein theory of gravity with coupled matter fields and a decoupled conformal sector which does not interact with the observable fields [15]. This analysis critically depends on the non-vanishing of the scalar field. Such a situation might be locally valid, however, globally it is certainly not necessary. Consider the Georgi-Glashow model, which is a theory with a triplet scalar field with non-abelian local gauge symmetry  $SO(3)$  that is spontaneously broken to  $U(1)$  [16]. In unitary gauge, one takes the scalar field to point in the third direction, and then looking at the second order Lagrangian we can read off the spectrum, a theory of a massless  $U(1)$  gauge boson, two massive vector gauge bosons and one massive neutral scalar, indeed the model was first invented in the early 70's as an alternative to the Weinberg-Salam model since the evidence for the massive  $Z$  vector boson was not conclusive at that time. This is a perfectly fine analysis as long as the scalar field does not vanish. However there exist configurations which require zeros of the scalar field. These are the 'tHooft-Polyakov magnetic monopole configurations. Blindly insisting that the scalar field never vanishes can throw out much more than expected. Indeed, soliton type solutions in conformal gravity have already been found, where it is required that the scalar field vanishes [18].

In this same spirit, we look for domain wall configurations that require the Higgs field to vanish. In both symmetry breaking and vacuum type solutions that we have found, the scalar field satisfies

$$\varphi_0^2 = \frac{R}{24\lambda}$$

or equivalently

$$\varphi_0 = \pm \sqrt{\frac{R}{24\lambda}}$$

Thus a configuration which is  $\varphi_0 = -\sqrt{\frac{R}{24\lambda}}$  in one region of space and  $\varphi_0 = +\sqrt{\frac{R}{24\lambda}}$  in another region of space must be separated by a domain wall, which also necessarily requires that the scalar field vanishes at some point between the two regions. The location of the domain wall is nominally defined as the position of the zero of the scalar field. The stability of the domain wall concerns two different analysis. First the domain wall may be of finite or infinite transversal extent. An infinite domain wall can shrink in thickness to be a singular non-observable defect or expand in thickness to completely dilute itself throughout space. A finite domain wall must close on itself, forming a closed two-surface embedded in three dimensional space. Such a domain wall can have three possible instabilities. It may shrink or expand in thickness as the infinite domain, but even if it is stable against these changes, it may also collapse and shrink to a point. We study closed domain wall configurations in the maximally symmetric vacuum solutions of subsection (3.1) and infinite domain walls configurations in the solutions of subsection (3.2)

### 5.1 Spherical domains in maximally symmetric space-times

$$d\tau^2 = (1 + B(r))dt^2 - \frac{1}{(1 + B(r))}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\phi^2 \quad (51)$$

which includes anti-de Sitter space-time if  $B(r) = kr^2$ . We then try a spherical ansatz for the scalar field, that the scalar field is in the vacuum configuration  $\varphi = -\sqrt{\frac{R}{24\lambda}}$  for  $r \ll r_0$  and  $\varphi = +\sqrt{\frac{R}{24\lambda}}$  for  $r \gg r_0$ . The scalar field will interpolate between the two vacua at some point near  $r_0$ . It is evident that such a configuration, even if it is stable under scaling of its local thickness, will minimize its action by shrinking towards a point. What happens when the nontrivial scalar field configurations from opposite sides of the spherical domain wall start to feel each others presence is not a priori obvious. Here we try to show that the spherical bubble is unstable to shrinking to a point, and to disappear this way. We do this by considering a scale transformation on the field  $B(r)$  and the field  $\varphi(r)$  and observe its effects on the action. It is important here to use the action as given by equations (1) or (2), as we are dealing with asymptotically maximally symmetric space-times for which these two expressions vanish and not that given in equations (3). With the metric of equation (51) it is a straightforward, although a little tedious, calculation to find the non-zero components of the Riemann tensor. We find the non-zero components written in tangent space indices:<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} R^0_{101} &= -\frac{B''}{2}, \\ R^0_{202} &= R^0_{303} = R^1_{212} = R^1_{313} = -\frac{B'}{2r}, \\ R^2_{323} &= -\frac{B}{r^2}. \end{aligned}$$

The corresponding orthonormal basis of one-forms of the (dual) tangent space are given by  $\sigma^0 = -\sqrt{1+B}dt$ ,  $\sigma^1 = \frac{1}{\sqrt{1+B}}dr$ ,  $\sigma^2 = rd\theta$  and  $\sigma^3 = r\sin\theta d\phi$ . Then the gravitational action is given by

$$\begin{aligned} I_W &= -\alpha \int d^4x r^2 \sin\theta \left[ \left( B''^2 + \frac{4B'^2}{r^2} + \frac{4B^2}{r^4} \right) \right. \\ &\quad \left. - 2 \left( 2 \left( \frac{B''}{2} + \frac{B'}{r} \right)^2 + 2 \frac{(rB)'^2}{r^4} \right) + \frac{1}{3} 4 \left( \frac{(r^2B)''}{r^2} \right)^2 \right], \quad (52) \end{aligned}$$

while the scalar field action is given by

$$I_M = \int d^4x r^2 \sin\theta \left( -\frac{1}{2}(1+B(r))\partial_r\varphi\partial_r\varphi + \frac{1}{12} \frac{(r^2B)''}{r^2} \varphi^2 - \lambda\varphi^4 + \text{const.} \right), \quad (53)$$

where we have already specialized to static, spherically symmetric configurations, and the constant must be chosen to render the action vanish for the

<sup>1</sup>  $B'$  means  $\frac{dB(r)}{dr}$ .

vacuum configuration. Indeed the action is otherwise an infinite constant for the vacuum configuration.

We may show, using a modified scaling argument, that this action does not have a stable stationary point except for the trivial vacuum. Consider the replacement:

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi(\Lambda x) \quad (54)$$

$$B(x) \rightarrow \frac{B(\Lambda x)}{\Lambda^2}. \quad (55)$$

Under this transformation,  $\varphi(x)$  is squeezed into an every smaller region of space as  $\Lambda \rightarrow \infty$ , although a constant value of  $\varphi$ , such as is attained asymptotical does not change in magnitude. Correspondingly,  $B(x)$  is also squeezed and reduced in magnitude, however  $B''(x) \rightarrow \frac{\partial^2 B(y)}{\partial y^2} \Big|_{y=\Lambda x}$  which does not change in magnitude. Since the curvature scalar is controlled by  $B''(x)$  and dimensionally equivalent objects, the value of the scalar fields symmetry breaking minimum is not altered by such a rescaling. Then under this rescaling we find

$$\begin{aligned} I_W &= -\alpha \int d^4 x r^2 \sin \theta \mathcal{L}(r) \rightarrow -\alpha \int d^4 x r^2 \sin \theta \mathcal{L}(\Lambda r) \\ &= -\frac{\alpha}{\Lambda^3} \int dt d\theta d\phi d(\Lambda r) (\Lambda r)^2 \sin \theta \mathcal{L}(\Lambda r) = I_W / \Lambda^3 \end{aligned} \quad (56)$$

and

$$\begin{aligned} I_M &\rightarrow \int d^4 x r^2 \sin \theta \left( -\frac{1}{2} (1 + B(\Lambda r) / \Lambda^2) \partial_r \varphi \partial_r \varphi(\Lambda r) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{12} \frac{(r^2 B(\Lambda r) / \Lambda^2)''}{r^2} \varphi^2(\Lambda r) - \lambda \varphi^4(\Lambda r) \right) \\ &= \int d^4 x r^2 \sin \theta \left( -\frac{1}{2} (1 + B(\Lambda r) / \Lambda^2) \Lambda^2 \left( \partial_y \varphi(y) \partial_y \varphi(y) \Big|_{y=\Lambda r} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{12} \frac{1}{\Lambda^2 r^2} \frac{\partial^2 (y^2 B(y))}{\partial y^2} \Big|_{y=\Lambda r} \varphi^2(\Lambda r) - \lambda \varphi^4(\Lambda r) + const. \right) \\ &= \frac{1}{\Lambda^3} \int d^4 x r^2 \sin \theta \left( -\frac{1}{2} (1 + B(r) / \Lambda^2) \Lambda^2 (\partial_r \varphi(r) \partial_r \varphi(r)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{12} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 (r^2 B(r))}{\partial r^2} \varphi^2(r) - \lambda \varphi^4(r) + const. \right). \end{aligned} \quad (57)$$

Thus we see that as  $\Lambda \rightarrow \infty$ , the whole classical action vanishes, belying the possibility of a non trivial stationary point of finite action. If there was a finite action stationary point, then its derivative with respect to  $\Lambda$  evaluated at the stationary configuration would have to vanish. This imposes an additional condition on the integrated parts of the Lagrangian density, which we discount. We stress again that it is important that we used the expression (1) or (2) in this analysis, since (3) is actually not finite for the configurations that we are considering. Although this would mean that the spherical domain wall will

necessarily collapse and shrink to a point, it does not mean that the bubble will be short lived. Indeed the dynamics of the collapse could take a macroscopic amount of time, and the configurations could be most relevant to the physics of the theory.

## 5.2 Domain walls in non-maximally symmetric space-times

In the solutions found in section (3.2) we can insert an infinite planar domain wall and ask if the wall is stable against its width shrinking to zero or expanding to infinity. Such a domain wall would, for a finite action configuration, have to close on itself say into a spherical bubble, and would probably collapse and shrink to a point. But if the bubble is of a much larger radius than the thickness of its wall, then this collapse time can be quite long, and the domain wall configurations can be important for the dynamics of the theory.

We take an ansatz of the form

$$d\tau^2 = (1 + B(x))dt^2 - \frac{1}{(1 + B(x))}dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (58)$$

where  $B(x)$  is now a function that will interpolate between the two vacua,  $\varphi_0 = \pm\sqrt{\frac{B''(\pm\infty)}{24\lambda}}$ , where  $B''(\pm\infty)$  is a constant, and the critical coupling condition  $\alpha = 1/(192\lambda)$  is assumed to be satisfied. Then the Riemann curvature is easily calculated with just two non-zero components

$$R^1_{010} = B''(x)/2 = -R^0_{101} \quad (59)$$

and the Ricci tensor also has just two non-zero components

$$R_{00} = B''(x)/2 = -R_{11}, \quad (60)$$

finally giving the scalar curvature

$$R = B''(x). \quad (61)$$

Since the space is flat in the  $(y, z)$  directions, all curvature components with indices in these directions simply vanish. The previous analysis for the equations of motion yields that the 11 a priori equations reduce to just two when the Bianchi identities (covariant conservation) and the tracefree nature of the tensors  $W_{\mu\nu}$  and  $T_{\mu\nu}$  are taken into account. It is straightforward, but tedious to show this explicitly, we will reproduce the calculation for the trace of  $W_{\mu\nu}$ . The expression for  $W_{\mu\nu}$  is given by

$$W_{\alpha\beta} = \frac{1}{3}g_{\alpha\beta} \left[ \left( (1 + B)B''' \right)' - \frac{(B'')^2}{4} \right] + \frac{1}{3}(B'')_{;\alpha;\beta}, \quad (62)$$

with  $(\alpha, \beta)$  taking on the values  $(0, 1)$  while

$$W_{ab} = -\frac{1}{6}g_{ab} \left[ \left( (1 + B)B''' \right)' - \frac{(B'')^2}{2} \right], \quad (63)$$

where  $(a, b)$  take on the values  $(2, 3)$ . Taking the trace yields

$$W^\mu{}_\mu = \frac{2}{3} \left[ \left( (1+B)B''' \right)' - \frac{(B'')^2}{4} \right] + \frac{1}{3} (B'')^{i\beta}{}_{; \beta} - \frac{1}{3} \left[ \left( (1+B)B''' \right)' - \frac{(B'')^2}{2} \right]. \quad (64)$$

Since

$$(B'')^{i\beta}{}_{; \beta} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\beta \sqrt{-g} g^{\beta\alpha} \partial_\alpha B'' = \partial_\beta g^{\beta\alpha} \partial_\alpha B'' = - \left( (1+B)B''' \right)', \quad (65)$$

it is evident that the trace vanishes.

Thus the equations left to satisfy are

$$-2\alpha W_{11} = T_{11}/2 \quad (66)$$

$$(1+B(x))\varphi''(x) + B'(x)\varphi'(x) + \frac{1}{6}B''(x)\varphi(x) - 4\lambda\varphi^3(x) = 0. \quad (67)$$

The which reduce to

$$\frac{2\alpha}{3} \left[ B'''B' - \frac{1}{2}(B'')^2 \right] = \frac{1}{2}(1+B)(\varphi')^2 + \frac{1}{6}\varphi B'\varphi' - \lambda\varphi^4 \quad (68)$$

$$(1+B(x))\varphi''(x) + B'(x)\varphi'(x) + \frac{1}{6}B''(x)\varphi(x) - 4\lambda\varphi^3(x) = 0. \quad (69)$$

We can verify, that for critical coupling,  $\alpha = 1/192\lambda$ , we get the vacuum solution  $B = (R/2)r^2$ ,  $R$  a constant and  $\varphi_0 = \pm\sqrt{R/24\lambda}$ .

The further analysis of these equations requires numerical methods. We have managed to find profiles of approximate solutions of the equations using numerical relaxation methods. The configuration is initially taken to be

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{R}{24\lambda}} \tanh(x) \quad (70)$$

$$B(x) = 1 + \frac{R}{2}x^2 \quad (71)$$

which asymptotically, for  $x \rightarrow \pm\infty$ , attains the vacuum-like field configuration. The initial configuration is allowed to relax with a dissipative linear term. The equations considered are given by

$$k\dot{B} + \frac{2\alpha}{3} \left( B'''B' - \frac{1}{2}(B'')^2 \right) = \frac{1}{2}(1+B)(\varphi')^2 + \frac{1}{6}\varphi B'\varphi' - \lambda\varphi^4 \quad (72)$$

$$k\dot{\varphi} + (1+B(x))\varphi''(x) + B'(x)\varphi'(x) + \frac{1}{6}B''(x)\varphi(x) - 4\lambda\varphi^3(x) = 0, \quad (73)$$

where now  $B = B(x, t)$  and  $\varphi = \varphi(x, t)$ . With appropriate choices for the coefficients, we obtain configurations which seem to have relaxed to a domain wall. Below in Figure (1) is a graph of  $\varphi(x)$  and in Figure (2) is a graph of  $B(x)$  that we have obtained via numerical relaxation. We feel that more numerical work is required to be fully satisfied with the solutions, however, we feel that the present work does indicate the likelihood of a more precise numerical solution which is very similar to what we have found.

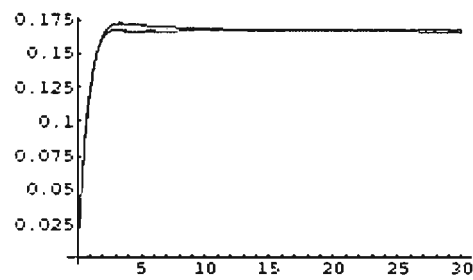


Figure 1:  $\varphi(x)$  for  $x \in [0, 30]$ , initial (green) and final (purple).

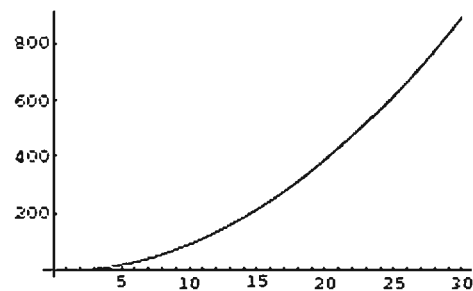


Figure 2:  $B(x)$  for  $x \in [0, 30]$ , initial (green) and final (purple) (they are coincident within the resolution).



## 6 Conclusions

We have studied the spontaneous breaking of the conformal symmetry in Weyl gravity, conformally coupled to scalar matter. The spontaneous symmetry breaking gives mass to the matter field and chooses a solution that is asymptotically anti-de Sitter for the geometry. We have shown that gravitational waves, to second order in perturbation do not carry any energy or momentum. We have found numerical evidence that there exist a long-lived configurations, where the topology requires that the scalar field have a zero. This implies that there can be no conformal transformation that can remove the scalar field, and relegate the conformal invariance to an unobservable disjoint sector, contrary to what has been recently suggested [15]. We think that there is much motivation to study this theory in greater detail as an alternative theory to Einsteinian gravitation, that does not carry the burden of having to explain missing gravitational forces with huge amounts of dark matter.

## 7 Acknowledgments

We thank O.P.S. Negi for useful discussions. We also thank the (Kavli) Institute for Theoretical Physics of the Chinese Academy of Sciences, Beijing, where this work was completed, for financial support and pleasant working conditions. This work is supported by NSERC of Canada and by the Tunisian Ministry of Education with a graduate fellowship.

## References

- [1] S. Weinberg, "Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity", John Wiley and Sons, New York, 1972.
- [2] K. G. Begeman, A. H. Broeils and R. H. Sanders, *Monthly Notices Royal Astronomical Society*, **249**, 523-537, 1991.
- [3] D. Huterer and M. S. Turner, *Physical Review* **D60**, 081301, 1999.
- [4] S. Deser and P. Van Nieuwenhuizen, *Physical Review Letters*, **32**, 245-247, 1974
- [5] M. Milgrom, *The Astrophysical Journal*, **270**, 365-370, 1983.
- [6] J. D. Bekenstein and R. H. Sanders, *The Astrophysical Journal*, **429**, 480-490, 1994.
- [7] P. D. Mannheim and D. Kazanas, *The Astrophysical Journal*, **342**, 635-638, 1989.
- [8] H.-J. Schmidt, "Fourth order gravity: equations, history, and applications to cosmology", (gr-qc/0602017).

- [9] K. S. Stelle, *Physical Review* **D16**, 953-969, 1977.
- [10] P. D. Mannheim, *General Relativity and Gravitation*, **22**, 289 1990.
- [11] P. D. Mannheim, *The Astrophysical Journal*, **391**, 429-432, 1992.
- [12] P. D. Mannheim, *Physical Review* **D58**, 103511, 1998.
- [13] A. Edery and M. B. Paranjape, *Physical Review* **58**, 024011, 1998.
- [14] A. Edery, A. Methot and M. B. Paranjape, *General Relativity and Gravitation* **33**, 2075, 2001.
- [15] E. Flanagan, *Physical Review* **D74**, 023002, 2006.
- [16] H. Georgi and S. Glashow, *Physical Review Letters*, **28**, 1494, 1972.
- [17] P. Mannheim, *Physical Review* **D44**, 417, 1991.
- [18] A. Edery, L. Fabbri and M. B. Paranjape, *Classical and Quantum Gravity*, **23**, 6409, 2006.

## CHAPITRE 3

### CONCLUSION

La relativité générale a évidemment donné une nouvelle vue envers la structure de l'espace-temps. Elle constitue aussi un exemple réussi de l'apport des mathématiques aux problèmes de la physique théorique. Tout ceci avait majoritairement servi dans le développement de la gravitation conforme. Cette théorie, bien qu'elle diffère de celle d'Einstein par l'ordre élevé de ses dérivées afin de lui maintenir sa symétrie conforme, réussit à donner les mêmes explications aux phénomènes gravitationnels jusqu'à l'échelle du système solaire. Encore plus loin, elle propose des solutions élégantes au sujet des problèmes galactiques et cosmologiques que leur validité restera, comme toutes les autres prédictions, une question attendant la réponse.

La symétrie conforme nous était grandement utile dans notre sujet. En effet, il était plus pratique de ramener l'étude des perturbations dans l'espace anti-de Sitter à celui de Minkowski puisqu'ils sont conformes l'un à l'autre. Il est connu que les particules fantômes sont caractéristiques des théories de hautes dérivées, mais la symétrie conforme a fait disparaître ces particules en faisant un choix de jauge adéquat laissant la place libre aux gravitons dont le propagateur se comporte comme  $1/k^4$ . Ceci fait éloigner de la théorie le problème de la destruction de l'unitarité de la matrice  $S$ , ce qui permet de faire de la gravitation conforme une théorie quantique renormalisable. Les ondes gravitationnelles dérivées en gravitation conforme ne se propagent pas, leur tenseur énergie-impulsion est

nul, ce qui dit que les ondes gravitationnelles constituent un problème pour la théorie conforme.

La brisure spontanée de la symétrie conforme se produit quand le champ scalaire acquiert une valeur moyenne dans le vide donnant ainsi la masse aux fermions. En présence des fluctuations autour de la métrique anti-de Sitter (ou Minkowski), nous avons trouvé que ce mécanisme induit les équations d'Einstein pour la perturbation dans l'espace anti-de Sitter tout en négligeant les termes d'ordre quatre en dérivées dans la limite de basse énergie. La relativité générale se trouve ainsi la loi correcte à basse énergie, domaine où la matière est observable à l'échelle macroscopique.

La théorie de Weyl, comme possible théorie quantique consistante de la gravitation, donne de l'espoir à cette interaction d'être traitée comme les autres. L'espoir pourrait être plus grand de trouver le chemin vers l'unification des quatre interactions.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] K. G. Begeman, A. H. Broeils et R. H. Sanders. *Monthly Notices Royal Astronomical Society*, 249:523–537, 1991.
- [2] J. D. Bekenstein et R. H. Sanders. *The Astrophysical Journal*, 429:480–490, 1994.
- [3] R. R. Caldwell, R. Dave et P. J. Steinhardt. *Astrophysics and Space Science*, 261:303–310, 1998.
- [4] B. Carr. *Baryonic and Non-Baryonic Dark Matter*, (gr-qc/0008005).
- [5] S. M. Carroll. *Spacetime and Geometry : An Introduction to General Relativity*. Addison Wesley, 2003.
- [6] S. M. Carroll. *AIP Conference Proceedings*, 743:16–32, 2005.
- [7] S. Deser et P. Van Nieuwenhuizen. *Physical Review Letters*, 32:245–247, 1974.
- [8] P. A. M. Dirac. *Proceedings of the Royal Society*, A333:403, 1973.
- [9] A. Edery, A. A. Méthot et M. B. Paranjape. *General Relativity and Gravitation*, 33:2075–2079, 2001.
- [10] A. Edery et M. B. Paranjape. *Physical Review D*, 58:024011, 1998.
- [11] P. Di Francesco, P. Mathieu et D. Sénéchal. *Conformal Field Theory*. Springer-Verlag, New York, 1997.

- [12] G. 'T Hooft et M. Veltman. *Annales de l'I.H.P.*, section A, tome 20, numéro 1: 69–94, 1974.
- [13] D. Huterer et M. S. Turner. *Physical Review D*, 60:081301, 1999.
- [14] C. Lanczos. *Annals of Mathematics*, 39:842–850, 1983.
- [15] P. D. Mannheim. *The Astrophysical Journal*, 391:429–432, 1992.
- [16] P. D. Mannheim. *The Astrophysical Journal*, 419:150–154, 1993.
- [17] P. D. Mannheim. *Physical Review D*, 58:103511, 1998.
- [18] P. D. Mannheim et D. Kazanas. *The Astrophysical Journal*, 342:635–638, 1989.
- [19] P. D. Mannheim et J. Kmetko. *Linear potentials and galactic rotation curves - detailed fitting*, (astro-ph/9602094).
- [20] M. Milgrom. *The Astrophysical Journal*, 270:365–370, 1983.
- [21] A. G. Riess et al. *The Astronomical Journal*, 116:1009–1038, 1998.
- [22] H.-J. Schmidt. *Fourth order gravity : equations, history, and applications to cosmology*, (gr-qc/0602017).
- [23] P. C. Di Stefano. *Journal of Physics G : Nuclear and Particle Physics*, 27:1959–1974, 2001.
- [24] K. S. Stelle. *Physical Review D*, 16:953–969, 1977.

- [25] S. Weinberg. *Gravitation and cosmology : principles and applications of the general theory of relativity*. John Wiley and Sons, New York, 1972.

## Annexe I

### Espaces maximalement symétriques

La métrique de Robertson-Walker (1.4) représente des espaces homogènes et isotropes de courbure constante, dits espaces maximalement symétriques, admettant le nombre maximal  $N(N + 1)/2$  d'isométries représentées par les vecteurs de Killing ( $N$  est la dimension de l'espace-temps). Dans de tels espaces, les tenseurs de Riemann et de Ricci ainsi que le scalaire de courbure s'écrivent

$$R_{\mu\nu\sigma\tau} = k(g_{\mu\tau}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\tau}), \quad (\text{I.1})$$

$$R_{\mu\nu} = -3kg_{\mu\nu} \quad (\text{I.2})$$

et

$$R = -12k. \quad (\text{I.3})$$

L'espace de Minkowski ( $k = 0$ ) est une solution triviale du modèle de Robertson-Walker.

La forme particulière du tenseur énergie-impulsion  $T_{\mu\nu} = -\frac{\Lambda}{8\pi G}g_{\mu\nu}$ , où  $\Lambda$  est la constante cosmologique supposée de signe arbitraire, donne deux espaces maximalement symétriques différents : espace de Sitter ( $k = 1$  et  $\Lambda > 0$ ) et espace anti-de Sitter ( $k = -1$  et  $\Lambda < 0$ ). Un changement de variable adéquat de la métrique (1.4) mène à une forme plus



simple de la métrique décrivant ces trois espaces :

$$ds^2 = (1 - kr^2) dt^2 - (1 - kr^2)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (\text{I.4})$$

Une propriété importante de ces espaces maximalement symétriques est qu'ils sont conformément plats .

## Annexe II

### Transformations conformes

Le tenseur de Weyl ou tenseur conforme est la partie sans trace du tenseur de Riemann s'écrivant

$$C_{\mu\nu\sigma\tau} = R_{\mu\nu\sigma\tau} + \frac{1}{2} \left( g_{\mu\tau} R_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma} R_{\mu\tau} - g_{\mu\sigma} R_{\nu\tau} - g_{\nu\tau} R_{\mu\sigma} \right) + \frac{1}{6} \left( g_{\mu\sigma} g_{\nu\tau} - g_{\mu\tau} g_{\nu\sigma} \right) R. \quad (\text{II.1})$$

Sous la transformation conforme (1.7), ce tenseur se transforme comme  $\Omega^2 C_{\mu\nu\sigma\tau}$ . Puisque  $C_{\mu\nu\sigma\tau}$  est nul pour la métrique de Minkowski  $\eta_{\mu\nu}$ , alors pour toute métrique conformément plate ( $g_{\mu\nu} = \Omega^2 \eta_{\mu\nu}$ ) le tenseur de Weyl est aussi nul.