

**Direction des bibliothèques**

**AVIS**

Ce document a été numérisé par la Division de la gestion des documents et des archives de l'Université de Montréal.

L'auteur a autorisé l'Université de Montréal à reproduire et diffuser, en totalité ou en partie, par quelque moyen que ce soit et sur quelque support que ce soit, et exclusivement à des fins non lucratives d'enseignement et de recherche, des copies de ce mémoire ou de cette thèse.

L'auteur et les coauteurs le cas échéant conservent la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent ce document. Ni la thèse ou le mémoire, ni des extraits substantiels de ce document, ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans l'autorisation de l'auteur.

Afin de se conformer à la Loi canadienne sur la protection des renseignements personnels, quelques formulaires secondaires, coordonnées ou signatures intégrées au texte ont pu être enlevés de ce document. Bien que cela ait pu affecter la pagination, il n'y a aucun contenu manquant.

**NOTICE**

This document was digitized by the Records Management & Archives Division of Université de Montréal.

The author of this thesis or dissertation has granted a nonexclusive license allowing Université de Montréal to reproduce and publish the document, in part or in whole, and in any format, solely for noncommercial educational and research purposes.

The author and co-authors if applicable retain copyright ownership and moral rights in this document. Neither the whole thesis or dissertation, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms, contact information or signatures may have been removed from the document. While this may affect the document page count, it does not represent any loss of content from the document.

Université de Montréal

L'ensemble des EDO d'ordres 2 et 3 invariante  
sous  $SL(2, \mathbb{R})$  et leur discrétisation préservant les  
symétries

par

Raphaël Verge-Rebêlo

Département de physique  
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures  
en vue de l'obtention du grade de  
Maître ès sciences (M.Sc.)  
en Physique

décembre 2007

© Raphaël Verge-Rebêlo, 2007



**Université de Montréal**

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

**L'ensemble des EDO d'ordres 2 et 3 invariante  
sous  $SL(2, \mathbb{R})$  et leur discrétisation préservant les  
symétries**

présenté par

**Raphaël Verge-Rebêlo**

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

*Richard MacKenzie*

---

(président-rapporteur)

*Pavel Winternitz*

---

(directeur de recherche)

*Véronique Hussin*

---

(membre du jury)

Mémoire accepté le:

.....

---

## SOMMAIRE

---

La classification des équations différentielles ordinaires d'ordres 2 et 3 invariantes sous  $SL(2, \mathbb{R})$  est donnée. Ces équations sont ensuite discrétisées en préservant leurs symétries. Les schémas discrets résultants forment, à toutes fins pratiques, une classification des schémas discrets invariants par rapport à  $SL(2, \mathbb{R})$  sur des maillages à trois et quatre points. Ces schémas symétriques sont finalement utilisés afin de résoudre les EDO non-linéaires invariantes sous  $SL(2, \mathbb{R})$ . Je montre que les schémas symétriques génèrent de meilleures solutions que des méthodes standard aux différences finies, notamment proche de singularités.

**Mots clés** : équation différentielle ordinaire, groupe de Lie, algèbre de Lie, schéma invariant, équation aux différences finies, analyse numérique.

## SUMMARY

---

The classification of second and third order ODEs invariant under  $SL(2, \mathbb{R})$  is given. These equations are then discretized preserving their symmetries. The resulting discrete schemes constitute a classification of discrete schemes invariant under  $SL(2, \mathbb{R})$  over three and four point lattices. I show that invariant schemes generate better solutions than standard finite difference methods, especially near singularities.

**Key words** : ordinary differential equation, Lie group, Lie algebra, symmetry, invariant scheme, finite difference equation, numerical analysis.

# TABLE DES MATIÈRES

---

Sommaire.....	iii
Summary.....	iv
Liste des figures.....	viii
Liste des tableaux.....	x
Remerciements.....	xi
Introduction.....	1
<b>Chapitre 1. Quelques définitions préliminaires.....</b>	<b>6</b>
1.1. Groupe de Lie.....	6
1.2. Algèbre de Lie.....	9
1.3. Générateurs infinitésimaux.....	13
1.4. Symmétries d'une équation différentielle.....	16
<b>Chapitre 2. Construction des équations invariantes.....</b>	<b>19</b>
2.1. Équations différentielles ordinaires (EDO).....	19
2.2. Schémas aux différences ordinaires (SΔO).....	21
<b>Chapitre 3. Réalisations de <math>sl(2, \mathbb{R})</math>.....</b>	<b>24</b>
<b>Chapitre 4. L'ensemble des EDO d'ordre 2 et 3 invariantes sous</b> <b><math>SL(2, \mathbb{R})</math> et leur discrétisation préservant les symétries</b>	<b>32</b>
4.1. <u><math>sl_1 : v_1 = \partial_y \quad v_2 = x\partial_x + y\partial_y \quad v_3 = 2xy\partial_x + y^2\partial_y</math></u> .....	33

4.1.1.	EDO .....	33
4.1.2.	SΔO .....	37
4.1.3.	SΔO explicités.....	41
4.2.	<u><math>sl_2 : v_1 = \partial_y \quad v_2 = x\partial_x + y\partial_y \quad v_3 = 2xy\partial_x + (y^2 - x^2)\partial_y</math></u> .....	42
4.2.1.	EDO .....	42
4.2.2.	SΔO .....	44
4.2.3.	SΔO explicités.....	46
4.3.	<u><math>sl_3 : v_1 = \partial_y \quad v_2 = x\partial_x + y\partial_y \quad v_3 = (2xy + x^2)\partial_x + (y^2 - x^2)\partial_y</math></u>	
	48	
4.3.1.	EDO .....	48
4.3.2.	SΔO .....	49
4.3.3.	SΔO explicités.....	50
4.4.	<u><math>sl_4 : v_1 = \partial_y \quad v_2 = y\partial_y \quad v_3 = y^2\partial_y</math></u> .....	52
4.4.1.	EDO .....	52
4.4.2.	SΔO .....	53
4.4.3.	SΔO explicités.....	53
<b>Chapitre 5. Analyse numérique .....</b>		<b>55</b>
5.1.	<u><math>sl_1 : X_1 = \partial_y \quad X_2 = x\partial_x + y\partial_y \quad X_3 = 2xy\partial_x + y^2\partial_y</math></u> .....	59
5.1.1.	2e ordre .....	59
5.1.2.	3e ordre .....	61
5.2.	<u><math>sl_2 : v_1 = \partial_y \quad v_2 = x\partial_x + y\partial_y \quad v_3 = 2xy\partial_x + (y^2 - x^2)\partial_y</math></u> .....	65
5.2.1.	2e ordre .....	65
5.2.2.	3e ordre .....	67
5.3.	<u><math>sl_3 : v_1 = \partial_y \quad v_2 = x\partial_x + y\partial_y \quad v_3 = (2xy + x^2)\partial_x + (y^2 - x^2)\partial_y</math></u>	
	70	
5.3.1.	2e ordre .....	70

5.3.2. 3e ordre .....	72
5.4. <u><math>sl_4 : v_1 = \partial_y \quad v_2 = y\partial_y \quad v_3 = y^2\partial_y</math></u> .....	73
<b>Conclusion</b> .....	76
Partie théorique : les EDO et leur discrétisation préservant les symétries	76
Partie numérique : la précision de la méthode symétrique et son comportement proche de singularités .....	78
<b>Bibliographie</b> .....	80
<b>Annexe A. <math>SL(2, \mathbb{R})</math> comme groupe d'automorphismes de <math>\mathbb{R}^2</math> qui préservent l'élément de volume</b> .....	A-i

## LISTE DES FIGURES

---

5.1	Comportement du schéma symétrique proche de la singularité pour l'éq. (4.1.16) .....	60
5.2	Comportement de toutes les méthodes proche de la singularité pour l'éq. (4.1.16) .....	61
5.3	Erreur des méthodes symétrique et standard pour l'éq. (4.1.16) .....	62
5.4	Erreurs des méthodes symétrique et standard pour l'éq. (4.1.20) .....	63
5.5	Comportement des méthodes à proximité de la singularité pour l'éq. (4.1.20) .....	64
5.6	Comportement des méthodes pour l'éq. (4.2.2) .....	66
5.7	Comportement des méthodes pour l'éq. (4.2.2) .....	67
5.8	Maillage de la méthode symétrique, pas $h_n$ en fonction de $x_n$ .....	68
5.9	Comportements de la méthode symétrique et de la méthode standard linéarisée à proximité d'une singularité pour l'éq. (4.2.6) .....	69
5.10	Maillage de la méthode symétrique, pas $h_n$ en fonction de $x_n$ .....	70
5.11	Erreur des méthodes symétrique et standard pour l'éq. (4.3.2) .....	71
5.12	Comportements des méthodes symétrique et standard proche d'une singularité pour l'éq. (4.3.2) .....	72
5.13	Maillage de la méthode symétrique, pas $h_n$ en fonction de $x_n$ l'éq. (4.3.2) .....	73
5.14	Comportement des méthodes à proximité de la singularité pour l'éq. (4.4.2) .....	74

5.15 Erreurs des méthodes pour l'éq. (4.4.2).....	75
---	----

## LISTE DES TABLEAUX

---

5.1	Erreur des méthodes symétrique et standard pour l'éq. (4.1.16).....	60
5.2	Erreur des méthodes symétrique et standard pour l'éq. (4.1.20).....	63
5.3	Erreur des méthodes symétrique et standard linéarisée pour l'éq. (4.2.2)	66
5.4	Erreur des méthodes symétrique et standard pour l'éq. (4.3.2).....	71
5.5	Erreur des méthodes pour l'éq. (4.4.2) .....	75

## REMERCIEMENTS

---

Merci à l'Université de Montréal de me former en physique mathématique et de me permettre ainsi de pousser plus avant cette passion.

Merci à Mme Anne Bourlioux pour son aide et ses conseils judicieux grâce auxquels j'ai pu aborder le monde de l'analyse numérique du bon pied. Ce fut un honneur de collaborer avec elle lors de la recherche menant à ce qui aura été mon premier article scientifique.

Merci à mon directeur de recherche, Pavel Winternitz, qui encadre et stimule mon apprentissage et mes débuts en recherche. Je considère la possibilité de collaborer avec lui comme étant une chance exceptionnelle. Je ne cesse de m'émerveiller devant l'étendue de ses connaissances, sachant d'autant plus que je n'appréhende qu'une infime partie de son bagage intellectuel. Cet écart qui nous sépare ravive mon ardeur au travail. Je suis aussi heureux de pouvoir dire que j'apprécie l'homme derrière le mathématicien.

Merci à Frédérick Tremblay pour ses conseils, pour son appui, et pour toutes les discussions rafraîchissantes que nous avons eues. Je n'oublierai pas la conférence de Minneapolis.

Merci à mes parents qui m'ont donné une enfance magnifique et l'énergie, donc, de persévérer dans mes projets.

Enfin, merci à Raphaëlle Dancette, ma conjointe, mon âme soeur, ma compagne de toutes les épreuves. En espérant que la petite Livia qui vient de naître ne soit que le commencement de notre descendance.

# INTRODUCTION

---

L'utilisation des symétries a été une des pierres angulaires des grandes théories de la physique au XXe siècle, que l'on pense, par exemple, aux transformations de Lorentz en relativité restreinte, aux orbitales en mécanique quantique ou à la découverte de particules élémentaires en physique des particules. Les symétries d'un problème donné traduisent certaines caractéristiques qualitatives de ce dernier. Parallèlement, un processus dynamique en physique se décrit généralement par une ou plusieurs équations différentielles. Il semble donc naturel d'étudier la façon dont les symétries d'un problème se reflètent dans la structure des équations différentielles le décrivant.

Depuis la classification des équations différentielles ordinaires (EDO) de second ordre réalisée par Sophus Lie à la fin du XIXe [1] siècle, de nombreuses recherches appliquant la théorie des groupes de Lie aux équations différentielles ont permis d'en trouver des solutions, de les classer et d'établir des propriétés de leur espace solution [2, 3, 4, 5, 6, 7].

Cependant, au cours du dernier quart du XXe siècle et jusqu'à aujourd'hui, l'intérêt des chercheurs s'est porté davantage sur l'application de la théorie des groupes de Lie aux équations discrètes [8]-[41]. Plusieurs raisons pertinentes justifient cet intérêt :

1. Malgré que la théorie des groupes de Lie se soit avérée un outil puissant de résolution d'équations différentielles, cette dernière échoue souvent lorsqu'il s'agit de fournir une solution explicite à des équations différentielles non-linéaires. En

réalité, même lorsque l'équation possède suffisamment de symétries pour qu'il soit possible, en théorie, de la réduire à une quadrature, il n'est pas évident que la réduction puisse s'effectuer jusqu'au bout puisqu'il n'y a pas de garantie qu'une équation réduite possède les symétries de l'équation originale<sup>1</sup>. Aussi, même lorsque la réduction peut être menée à bon terme, il peut en résulter une équation fonctionnelle implicite. Autrement dit, malgré la connaissance de  $n$  sous-groupes à un paramètre d'une équation différentielle d'ordre  $n$ , il est très probable que sa résolution passe par un calcul numérique. La discrétisation de l'équation est donc nécessaire.

2. Certains éléments des théories de la physique au XXe siècle, comme la distance de Planck, donnent à penser que les équations discrètes peuvent être considérées comme des objets pertinents à étudier en eux-mêmes plutôt que simplement comme des approximations d'équations continues. En effet, la signification physique de la distance de Planck reste sûrement encore à être précisée, mais on pourrait dire qu'elle est la distance minimale pour laquelle la notion d'espace-temps conserve son sens habituel. Une façon possible de combler cette perte de sens sous la distance de Planck pourrait être de définir l'espace-temps comme discret. À long terme, les progrès des techniques de manipulations des équations discrètes pourraient donc permettre de refaire la mécanique quantique sur un espace-temps discret.

3. Certains problèmes se présentent d'office comme discrets. On peut penser, entre autres, aux vibrations des molécules dans un solide (comme un cristal), ou encore à la répartition des spins des électrons d'un matériau (modèle d'Ising). De plus, si le lecteur accepte le point 2 ci-haut, alors toute la physique devient discrète à l'échelle de la distance de Planck et on peut rajouter comme problèmes/équations discrets(ètes) : le mouvement brownien, les équations de Newton, l'équation de Schrödinger, etc. En particulier, le mouvement brownien, qui

---

<sup>1</sup>On sait qu'il est possible de réduire l'équation à une quadrature si le groupe est résoluble et si la réduction est effectuée en utilisant les sous-groupes à un paramètre dans l'ordre approprié [2]. Cependant, en pratique, la plupart des groupes ne sont pas résolubles.

même à l'échelle macroscopique apparaît comme un mouvement ayant une trajectoire continue mais nulle part différentiable, se représente assez naturellement par un modèle discret (voir les marcheurs aléatoires).

En pratique, deux approches sont possibles lors de l'application de la théorie des groupes de Lie aux équations discrètes : soit les équations discrètes sont utilisées afin d'approximer des équations continues et leurs solutions par du calcul numérique [11, 12, 13, 42], soit elles sont étudiées comme objet auto-suffisant. Dans ce dernier cas, les pratiques les plus courantes sont de classer les équations selon leurs symétries et d'effectuer la réduction par symétrie sur ces dernières afin d'obtenir des solutions discrètes propres aux équations discrètes [8, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 23, 26, 29, 43]. Le présent mémoire s'inscrit plutôt dans la première approche puisqu'il fournit des discrétisations préservant les symétries des EDO d'ordres 2 et 3 invariantes sous  $SL(2, \mathbb{R})$  et qu'il teste la précision des schémas symétriques obtenus en les comparant à des méthodes numériques standard. Cependant, le mémoire est par le fait-même une classification des EDO continues et discrètes d'ordres 2 et 3 (sur des maillages à trois et quatre points dans le cas des équations discrètes) invariantes sous  $SL(2, \mathbb{R})$ . Il est à noter que toutes les symétries considérées à l'intérieur de ce mémoire sont de type ponctuel et qu'il est requis des maillages qu'ils soient aussi invariants par rapport à ces transformations ponctuelles.

La classification contenue dans le mémoire vient compléter, en partie, la classification de V.A. Dorodnitsyn et co-auteurs [10] et celle de C. Cyr-Gagnon [42]. Les premiers ne s'étaient pas intéressés aux EDO d'ordre 3 tandis que C. Cyr-Gagnon a tenté de fournir les équations invariantes d'ordre 3 pour  $SL(2, \mathbb{R})$ , mais ceci sans succès. De plus, le groupe  $SL(2, \mathbb{R})$ , important en mathématique, est aussi fondamental en physique puisqu'il est localement isomorphe au groupe de Lorentz d'un espace de Minkowski de dimension 3 ( $O(2, 1)$ ). De surcroît, les résultats du

mémoire peuvent être généralisés au cas complexe  $SL(2, \mathbb{C})^2$  qui est localement isomorphe au groupe de Lorentz de notre espace-temps ( $O(3, 1)$ ). Ces généralisations s'effectuent en faisant agir  $O(2, 1)$  et  $O(3, 1)$  sur les espaces de Minkowski  $M(2, 1)$  et  $M(3, 1)$  respectivement. Pour ce faire, il faut généraliser les générateurs infinitésimaux qui seront présentés dans ce mémoire pour en faire des fonctions de 3 et 4 variables respectivement, ce qui mène à des équations aux dérivées partielles (EDP) invariantes plutôt qu'à des EDO invariantes. Cette généralisation est non triviale et sera l'objectif de mon doctorat. D'un point de vue pratique, les EDO invariantes par rapport à  $SL(2, \mathbb{R})$  apparaissent lors de la réduction par symétrie de certaines EDP provenant de problèmes physiques qui possèdent des groupes de symétries suffisamment grands. Les équations de Navier-Stokes ou de la magnétohydrodynamique en sont des exemples. Finalement, ce mémoire vient ajouter un certain nombre de tests numériques intéressants portant sur l'efficacité de la méthode symétrique, ce qui vient enrichir le bassin encore trop restreint d'exemples de résolutions numériques d'EDO non-linéaires à l'aide de la méthode symétrique.

Les chapitres 1 et 2 se veulent une revue condensée des notions théoriques utilisées dans ce mémoire. Le chapitre 1 couvre les définitions de groupe de Lie, d'algèbre de Lie, de générateurs infinitésimaux et de symétries des équations différentielles, alors que le chapitre 2 explique comment former des équations invariantes à partir des notions définies dans le précédent chapitre. La matière du chapitre 1 étant exposée de manière rigoureuse et plus complète dans les ouvrages [2, 44, 45, 46], j'ai préféré, vu l'espace aloué, éliminer les preuves et donner autant d'exemples et d'explications que possible. Le lecteur familier au domaine peut sans difficulté passer directement au chapitre 3.

Le chapitre 3 est la dérivation explicite des différentes réalisations de  $sl(2, \mathbb{R})$  qui mènent chacune à différentes EDO.

Les chapitres 4 et 5 représentent le corps du mémoire. Le premier consiste en la classification des EDO d'ordres 2 et 3 invariantes pour les différentes réalisations

---

<sup>2</sup>Toutes les équations invariantes par rapport à  $SL(2, \mathbb{R})$  sont aussi invariantes par rapport à  $SL(2, \mathbb{C})$  si on considère  $x$  et  $y$  comme des variables complexes

trouvées au chapitre 3, en une classification discrète équivalente, puis en la dérivation des schémas symétriques résultants exprimés en termes des points des maillages  $\{(x_{n-1}, y_{n-1}), (x_n, y_n), (x_{n+1}, y_{n+1})\}$  pour les EDO d'ordre 2 et  $\{(x_{n-1}, y_{n-1}), (x_n, y_n), (x_{n+1}, y_{n+1}), (x_{n+2}, y_{n+2})\}$  pour les EDO d'ordre 3. Le second de ces chapitres réunit des tests numériques effectués sur la précision des schémas symétriques en les comparant à des schémas standard et en testant le comportement des schémas symétriques proches de singularités.

Du point de vue théorique, le mémoire montre qu'il y a une forme récurrente pour les schémas discrets invariants de 3e ordre. Cette forme, jamais explicitée auparavant, est prometteuse car il est probable qu'elle soit généralisable aux équations d'ordre supérieur et à des équations invariantes par rapport à un groupe de symétrie quelconque. La connaissance d'un tel objet faciliterait grandement la recherche de schémas discrets invariants d'ordre supérieur. De plus, l'ordre de convergence des schémas symétriques a été amélioré par une méthode originale qui sera expliquée au chapitre 2. Finalement, le mémoire révèle une corrélation entre la nature des solutions des équations invariantes continues et de leurs schémas symétriques correspondants. Du point de vue de l'analyse numérique, le mémoire montre que les schémas symétriques sont généralement nettement plus précis que les schémas standards. Cependant, la propriété la plus remarquable des schémas symétriques, mise à jour par plusieurs exemples, est de décrire avec justesse le comportement de solutions à proximité de singularités (alors même que les solveurs de Matlab, qui sont censés fournir les solutions de références, cessent d'intégrer).

# Chapitre 1

---

## QUELQUES DÉFINITIONS PRÉLIMINAIRES

Le but de ce chapitre est de fournir une base minimale au lecteur non familier avec la théorie des groupes de Lie appliquée au domaine des équations différentielles. J'énonce les définitions et les résultats qui seront nécessaires à ce mémoire sans en fournir les preuves, mais en les accompagnant d'exemples et de commentaires qui, je l'espère, stimuleront l'intuition du lecteur néophyte au domaine. Pour une introduction approfondie et formelle, je renvoie le lecteur aux ouvrages [2, 44, 45, 46]. Je me suis grandement inspiré de ces quatre manuels pour construire ce chapitre. Je dois avouer que certains passages sur les champs de vecteurs et sur les générateurs infinitésimaux sont à quelques mots près des traductions littérales du manuel de P. Olver. Il me semblait toutefois important de répéter ces commentaires éclairants. Le lecteur familier au domaine peut sans difficulté passer directement au chapitre 3.

### 1.1. GROUPE DE LIE

Un groupe de Lie est essentiellement un groupe qui possède les propriétés d'une variété. Quelques définitions sont nécessaires afin de donner un sens à cet objet. Voici donc un rappel sommaire des définitions de groupe et de variété afin de comprendre comment l'union de ces deux concepts constitue le groupe de Lie.

**Définition 1.1.1** (Groupe). Un groupe  $(G, *)$  est un ensemble  $G$  muni d'une opération interne  $*$  (aussì nommée opération binaire ou produit) qui répond aux

quatre propriétés suivantes :

$$\diamond \text{ fermeture : } \quad \forall x, y \in G, \quad x * y \in G.$$

$$\diamond \text{ associativité : } \quad (x * y) * z = x * (y * z), \quad \forall x, y, z \in G.$$

$$\diamond \text{ élément neutre : } \quad \exists e \in G \text{ tel que } e * x = x, \quad \forall x \in G.$$

$\diamond$  élément inverse :  $\forall x \in G, \exists y \in G$  tel que  $x * y = e$ , où  $e$  est l'élément neutre de  $G$ .

Il est facile de montrer l'unicité de l'élément neutre et de l'inverse (chaque élément possède un unique inverse). L'inverse de  $x$  est généralement noté  $x^{-1}$  (on écrit  $-x$  lorsque l'opération interne est l'addition usuelle  $+$ ).

Une variété est en fait la généralisation des notions de courbe et de surface de  $\mathbb{R}^3$ . C'est un espace qui ressemble localement à un espace euclidien, mais qui peut avoir une allure globale complètement différente.

**Définition 1.1.2** (Variété). Une variété de dimension  $n$  est un ensemble  $M$  possédant une collection dénombrable de sous-ensembles  $U_\alpha \subset M$  et d'applications injectives  $\chi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$  avec  $V_\alpha$  des sous-ensembles ouverts et connexes de  $\mathbb{R}^n$ . Les paires  $(U_\alpha, \chi_\alpha)$  sont appelées cartes. De plus, une variété doit répondre aux propriétés suivantes :

$$\diamond \text{ l'ensemble des } U_\alpha \text{ est un recouvrement de } M, \quad \bigcup_\alpha U_\alpha = M.$$

$\diamond$  pour toute intersection  $U_\alpha \cap U_\beta$ , on a une fonction lisse telle que

$$\chi_\beta \circ \chi_\alpha^{-1} : \chi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \chi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta).$$

◇ si  $x_1 \in U_\alpha$  et  $x_2 \in U_\beta$  sont des points distincts de  $M$ , alors il existe des sous-ensembles ouverts  $W_1 \subset V_\alpha$  et  $W_2 \subset V_\beta$ , avec  $\chi_\alpha(x_1) \in W_1$  et  $\chi_\beta(x_2) \in W_2$ , qui satisfont

$$\chi_\alpha^{-1}(W_1) \cap \chi_\beta^{-1}(W_2) = \emptyset.$$

Ces deux définitions permettent d'enchaîner naturellement avec la notion de groupe de Lie.

**Définition 1.1.3** (Groupe de Lie). Un groupe de Lie à  $n$  paramètres est un groupe  $(G, *)$  qui possède aussi la structure d'une variété à  $n$  dimensions en ce sens que l'opération  $*$  et l'inversion  $i(g) = g^{-1}$  sont des applications lisses entre variétés

$$\begin{aligned} * : G \times G &\rightarrow G \\ *(x, y) &\rightarrow x * y \\ \\ i : G &\rightarrow G \\ i(x) &\rightarrow x^{-1} \end{aligned}$$

Autrement dit, un groupe de Lie est un espace topologique qui est localement équivalent à un espace euclidien et qui possède une opération qui respecte les propriétés d'une opération de groupe. Voici quelques-uns des exemples les plus communs et simples de groupes de Lie.

**Exemple 1.1.4.**  $G = (\mathbb{R}^n, +)$ , avec les cartes fournies par l'application identité, où  $+$  est l'addition vectorielle usuelle et l'inverse d'un vecteur  $x$  est donné par  $-x$ . Les applications  $+$  et inverse sont lisses.  $G$  possède ainsi une structure évidente de variété et une opération de groupe. C'est donc un groupe de Lie.

**Exemple 1.1.5.**  $G = (GL(n, \mathbb{R}), *)$  l'ensemble des matrices inversibles de dimension  $n \times n$  sur le corps des réels  $\mathbb{R}$  muni de la multiplication matricielle usuelle. Ce groupe, connu sous le nom de *groupe linéaire général*, peut être identifié au

sous-ensemble ouvert

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{X \in M_{n \times n} : \det(X) \neq 0\} \quad (1.1.1)$$

de l'espace de toutes les matrices  $n \times n : M_{n \times n}$ . Pour toute matrice  $X \in M_{n \times n}$ , on peut identifier chaque entrée  $e_{ij}$  à un axe dans  $\mathbb{R}^{n^2}$ . Il en est de même pour  $GL(n, \mathbb{R})$ , ce qui en fait une variété de dimension  $n^2$ . La multiplication matricielle et l'application inverse sont lisses (en utilisant la règle de Cramer pour calculer l'inverse). Le groupe linéaire général est donc un groupe de Lie.

$GL(n, \mathbb{R})$  peut aussi être vu comme le groupe d'automorphismes d'un espace vectoriel  $V$  de dimension  $n$ . Dans ce cas,  $GL(n, \mathbb{R}) = \text{Aut}(V)$ . Le groupe linéaire général est un exemple crucial puisqu'un très grand nombre de groupes de Lie apparaissent comme des sous-groupes de ce dernier.

Ceci nous amène au groupe de Lie qui est au centre de ce mémoire et qui est aussi un exemple important de groupe de Lie.

**Exemple 1.1.6.** Le *groupe linéaire spécial*  $SL(n, \mathbb{R})$  se présente comme un sous-groupe du groupe linéaire général  $GL(n, \mathbb{R})$ . On a

$$SL(n, \mathbb{R}) = \{X \in GL(n, \mathbb{R}) : \det(X) = 1\} \quad (1.1.2)$$

ou, de façon équivalente, c'est le groupe d'automorphismes de  $\mathbb{R}^n$  qui préservent l'élément de volume (voir Annexe 1). L'opération est la même que pour  $GL(n, \mathbb{R})$ .  $SL(n, \mathbb{R})$  est de dimension  $n^2 - 1$  (à cause de la condition  $\det(X) - 1 = 0$ ).

## 1.2. ALGÈBRE DE LIE

La pierre angulaire de la théorie des groupes de Lie consiste à remarquer que pour chaque groupe de Lie  $G$ , il existe un espace vectoriel, appelé *algèbre de Lie*, qui contient presque toute l'information contenue dans le groupe tout en étant beaucoup plus facile à manipuler. En pratique, c'est avec l'algèbre que l'on veut travailler pour ensuite tirer des conclusions concernant le groupe. Avant de tracer

le lien entre groupe et algèbre de Lie, une définition formelle d'algèbre de Lie ainsi que quelques exemples s'imposent.

**Définition 1.2.1** (Algèbre de Lie). Une algèbre de Lie  $g$  sur  $\mathbb{R}$  est un espace vectoriel réel  $g$  doté d'une opération bilinéaire (appelée crochet de Lie)  $[\cdot, \cdot] : g \times g \rightarrow g$  telle que  $\forall x, y, z \in g$ , les deux conditions suivantes soient respectées :

$$\diamond \text{ anti-commutativité : } [x, y] = -[y, x],$$

$$\diamond \text{ identité de Jacobi : } [[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0.$$

**Exemple 1.2.2.** Tout espace vectoriel dont le crochet de Lie est fixé à  $[x, y] = 0 \forall x, y \in g$  est une algèbre de Lie (dite *abélienne*).

**Exemple 1.2.3.** L'espace vectoriel  $gl(n, \mathbb{R})$  de toutes les matrices réelles  $n \times n$  est une algèbre de Lie si on pose

$$[x, y] = x * y - y * x \quad \forall x, y \in g \quad (1.2.1)$$

où  $*$  est la multiplication matricielle usuelle. Le crochet de Lie est donc le commutateur usuel pour l'espace vectoriel  $gl(n, \mathbb{R})$  ainsi que pour tous ses sous-espaces.

$gl(n, \mathbb{R})$  est en fait l'algèbre de Lie correspondant au groupe de Lie  $GL(n, \mathbb{R})$  (1.1.1). De la même manière que  $SL(n, \mathbb{R})$  apparaît comme un sous-groupe de  $GL(n, \mathbb{R})$  (voir (1.1.2)), l'algèbre de Lie  $sl(n, \mathbb{R})$  correspondant au groupe  $SL(n, \mathbb{R})$  apparaît comme une sous-algèbre de  $gl(n, \mathbb{R})$ . Une sous-algèbre de Lie est simplement un sous-espace fermé par rapport au crochet de Lie.

**Exemple 1.2.4.** L'algèbre de Lie correspondant au groupe linéaire spécial est

$$sl(n, \mathbb{R}) = \{x \in gl(n, \mathbb{R}) \mid \text{trace}(x) = 0\}. \quad (1.2.2)$$

En particulier, pour  $n = 2$ , une base possible pour l'espace vectoriel est

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

À partir de cette base et de (1.2.3), on peut écrire le tableau des commutateurs de  $sl(2, \mathbb{R})$  :

$$\begin{array}{c|ccc}
 [ \cdot, \cdot ] & v_1 & v_2 & v_3 \\
 \hline
 v_1 & 0 & v_1 & -2v_2 \\
 v_2 & -v_1 & 0 & v_3 \\
 v_3 & 2v_2 & -v_3 & 0
 \end{array} \tag{1.2.3}$$

La structure d'une algèbre de Lie abstraite est en fait complètement déterminée par son tableau des commutateurs. Toute algèbre de Lie possédant le tableau des commutateurs (1.2.3) à un changement de base près est donc isomorphe à  $sl(2, \mathbb{R})$ .

Maintenant que l'algèbre de Lie a été définie comme entité indépendante, je présenterai une autre définition qui lie cette fois le groupe à l'algèbre. Pour se faire, il est nécessaire d'introduire les espaces tangents et l'application différentielle. L'objectif est de représenter l'algèbre de Lie comme un ensemble de champs de vecteurs sur la variété qu'est le groupe de Lie.

**Définition 1.2.5** (Espace tangent). L'ensemble des vecteurs tangents à toutes les courbes pouvant passer en un point  $x$  d'une variété  $M$  est appelé *espace tangent de  $M$  au point  $x$*  et est noté  $TM|_x$ . Si  $M$  est la variété associée à un groupe de Lie  $G$ , on peut parler de l'espace tangent de  $G$  au point  $x$ , qu'on note  $TG|_x$ .

**Définition 1.2.6** (Application différentiel). Pour toute application lisse  $R : M \rightarrow N$ , où  $M$  et  $N$  sont des variétés lisses, on associe à  $R$  l'application différentielle  $dR : TM|_x \rightarrow TN|_{R(x)}$ . En particulier, pour un groupe de Lie  $G$ , une application lisse  $R : G \rightarrow G$  donne lieu à l'application différentielle  $dR : TG|_x \rightarrow TG|_{R(x)}$ .

**Définition 1.2.7** (Champ de vecteur invariant sur un groupe de Lie). Un champ de vecteur  $v$  sur un groupe de Lie  $G$  est dit invariant à droite si

$$dR_x(v|_y) = v|_{R_x(y)} = v|_{yx} \quad (1.2.4)$$

où  $R$  est l'application de la multiplication à droite dans  $G$  et  $v|_x$  signifie  $v$  évalué au point  $x$ .

**Définition 1.2.8** (Algèbre de Lie d'un groupe de Lie). L'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  d'un groupe de Lie  $G$  est l'espace vectoriel formé par l'ensemble des champs de vecteurs invariants à droite sur  $G$ .

Tout champ de vecteur invariant à droite sur  $G$  est complètement déterminé par sa valeur à l'identité  $e$  puisque

$$v|_x = dR_x(v|_e) \quad (1.2.5)$$

et inversement, tout vecteur à l'identité  $v|_e$  de  $G$  génère un champ de vecteur invariant à droite sur  $G$  si on utilise (1.2.5). En effet, pour constater l'invariance à droite du champ de vecteur  $v$  généré par (1.2.5), il suffit de remarquer que

$$dR_y(v|_x) = dR_y(dR_x(v|_e)) = d(R_y \circ R_x)(v|_e) = dR_{xy}(v|_e) = v|_{xy}. \quad (1.2.6)$$

Ceci mène à une troisième façon de définir l'algèbre de Lie qui consiste à identifier cette dernière à l'espace tangent de  $G$  à l'identité,  $\mathfrak{g} \cong TG|_e$ . En prenant ce point de vue, il est facile de comprendre que  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$  soit l'algèbre du groupe  $GL(n, \mathbb{R})$ . Par contre, la preuve que  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$  est bel et bien l'algèbre du groupe  $SL(n, \mathbb{R})$  demande un peu plus de machinerie et je m'abstiendrai de justifier ce fait ici (voir [2, 44] pour des preuves).

L'espace tangent à l'identité  $TM|_e$  d'une variété  $M$  possède la même dimension que cette dernière. De plus, si la variété  $M$  est dotée d'une base  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , on prend comme base de l'espace tangent  $\{\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \dots, \partial_{x_n}\}$ . Cette notation peut sembler étrange à prime à bord, mais elle découle du fait que les éléments de la base de l'espace tangent correspondent bel et bien à des dérivées partielles (voir [2, 44]).

### 1.3. GÉNÉRATEURS INFINITÉSIMAUX

En pratique, les groupes de Lie apparaissent généralement comme des groupes de transformation d'une variété  $M$ .  $GL(n, \mathbb{R})$ , par exemple, est le groupe des transformations linéaires inversibles sur  $M = \mathbb{R}^n$ , tandis que  $SL(n, \mathbb{R})$  est le groupe des transformations linéaires inversibles sur  $M = \mathbb{R}^n$  qui préservent l'élément de volume. On dit d'un groupe qu'il est un groupe de transformation d'une variété  $M$  si pour chaque  $h$  dans  $G$  on peut associer une application  $\phi : M \rightarrow M$ . Il est à noter que l'action du groupe (par l'entremise de l'application  $\phi$ ) peut être définie seulement pour un sous-espace de la variété  $M$  ou du groupe de Lie  $G$ , ce groupe est alors nommé *groupe local de transformation*.

**Définition 1.3.1** (Groupe local de transformation). Un groupe local de transformation agissant sur une variété lisse  $M$  est donné par un groupe de Lie (local)  $G$ , un sous-ensemble ouvert  $O$  tel que

$$\{e\} \times M \subset O \subset G \times M,$$

où  $O$  est le domaine de définition de l'action de groupe, et une application lisse  $\phi : O \rightarrow M$  qui possède les propriétés suivantes :

◇ si  $(h_1, x) \in O$ ,  $(h_2, \phi(h_1, x)) \in O$  et  $(h_2 * h_1, x) \in O$ , alors

$$\phi(h_2, \phi(h_1, x)) = \phi(h_2 * h_1, x). \quad (1.3.1)$$

◇  $\forall x \in M$ ,

$$\phi(e, x) = x. \quad (1.3.2)$$

**Exemple 1.3.2.** Le groupe des translations sur  $\mathbb{R}$ , avec  $G = (\mathbb{R}, +)$

$$\phi(\epsilon, x) = x + \epsilon \quad (1.3.3)$$

**Exemple 1.3.3.** Le groupe des dilatations sur  $\mathbb{R}^2$ , avec  $G = (\mathbb{R}^+, \times)$

$$\phi(\epsilon, (x, y)) = (\epsilon \times x, \epsilon \times y) \quad (1.3.4)$$

Dans les deux exemples ci-dessus, on peut considérer  $\epsilon$  comme une quantité infinitésimale qui varie.

Simultanément, à tout champ de vecteurs sur une variété on peut associer un flot. Ce flot se révélera être tout à fait similaire aux groupes de transformations définis ci-haut. Afin de définir la notion de flot, il faut commencer par définir la courbe intégrale.

**Définition 1.3.4** (Courbe intégrale). une courbe intégrale d'un champ de vecteurs  $v$  est une courbe lisse  $\psi(\epsilon)$  paramétrisée dont le vecteur tangent en tout point coïncide avec le champ de vecteurs  $v$  en ce point. Formellement, on écrit

$$\dot{\psi}(\epsilon) = v|_{\psi(\epsilon)} \quad (1.3.5)$$

avec  $\dot{\psi}(\epsilon) \equiv \frac{d\psi}{d\epsilon}$  et  $\dot{\psi}(\epsilon) = (\dot{\psi}^1(\epsilon), \dots, \dot{\psi}^n(\epsilon))$ .

Intuitivement, si le champ de vecteur représentait le courant dans un fluide et que l'on déposait une particule dans ce fluide, alors cette dernière cheminerait le long d'une courbe intégrale. La courbe intégrale est dite *maximale* si elle est la plus longue courbe intégrale passant par un point donné. Il est à remarquer que cette courbe intégrale maximale est unique. Dans ce qui suit, la variable  $\phi$  sera utilisée pour dénoter le flot (plutôt que *psi*), ceci puisque nous verrons sous-peu que le flot peut être identifié à un groupe local de transformation (voir la notation employée pour les groupes locaux de transformation).

**Définition 1.3.5** (Flot). Le flot généré en un point  $x$  d'une variété  $M$  par un champ de vecteurs  $v$  est la courbe intégrale maximale paramétrisée passant en  $x$ . Le flot généré par  $v$  en  $x$  est noté  $\phi(\epsilon, x)$ . Le flot  $\phi(\epsilon, x)$  possède les propriétés suivantes :

$$\phi(\delta, \phi(\epsilon, x)) = \phi(\delta + \epsilon, x) \quad x \in M \quad (1.3.6)$$

où  $\delta, \epsilon \in \mathbb{R}$  et dans la mesure où le flot est défini pour ces valeurs,

$$\phi(0, x) = x \quad (1.3.7)$$

et

$$\frac{d}{d\epsilon}\phi(\epsilon, x) = v|_{\phi(\epsilon, x)}. \quad (1.3.8)$$

(1.3.8) énonce simplement le fait que  $v$  est tangent au flot  $\phi(\epsilon, x)$ . Le flot  $\phi(\epsilon, x)$  exprime la position de la particule au temps  $\epsilon$ , si la particule était en  $x$  au temps  $\epsilon = 0$ .

La comparaison de la définition d'un flot à celle d'un groupe local de transformation révèle que le flot peut être identifié à l'action du groupe de Lie  $G = (\mathbb{R}, +)$  sur la variété  $M$  (on nomme ce groupe *groupe de transformation à un paramètre*). De plus, pour  $\epsilon$  suffisamment petit, on a

$$\phi(\epsilon, x) = \phi(0, x) + \epsilon \frac{d}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0}\phi(\epsilon, x) + O(\epsilon^2) \quad (1.3.9)$$

Or,

$$\frac{d}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0}\phi(\epsilon, x) = v|_{\phi(0, x)} = v|_x \quad (1.3.10)$$

On dit donc du champ de vecteurs  $v$  qu'il est le *générateur infinitésimal* de l'action de groupe. Et c'est ici en pratique que l'on constate le lien direct entre l'algèbre de Lie et le groupe de Lie puisque par la définition (1.2.8) l'algèbre de Lie est un champ de vecteurs sur  $G$ . Il est possible de montrer qu'il existe une correspondance biunivoque entre les sous-groupes (connexes) à un paramètre d'un groupe de Lie  $G$  et les sous-espaces unidimensionnels de son algèbre de Lie. On peut aussi prouver qu'il existe une correspondance biunivoque entre les sous-groupes (connexes) d'un groupe de Lie et les sous-algèbres de son algèbre de Lie.

Il suffit donc de doter l'espace vectoriel qu'est l'algèbre de Lie d'une base et chaque élément de base est alors le générateur infinitésimal d'un groupe de transformation à un paramètre. Ces groupes de transformation à un paramètre sont alors les générateurs du groupe de Lie correspondant à l'algèbre. Par exemple, si le groupe de Lie  $G$  est tridimensionnel et agit sur la variété  $M = \mathbb{R}^2$  (comme

$SL(2, \mathbb{R})$ ), la base de l'algèbre de Lie aura la forme

$$v_i = f_i(x, y)\partial_x + g_i(x, y)\partial_y \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.3.11)$$

où  $f, g$  sont des fonctions données,  $x, y$  sont les coordonnées locales sur  $M = \mathbb{R}^2$ , et les  $v_i$  sont linéairement indépendants.  $\{\partial_x, \partial_y\}$  font office de base de l'espace tangent tel que mentionné à la fin de la section 1.2.

#### 1.4. SYMMÉTRIES D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

Une équation différentielle est invariante par rapport à un groupe donné si tous les éléments du groupe envoient des solutions de l'équation vers des solutions de l'équation. Autrement dit, l'action du groupe conserve l'espace solution de l'équation différentielle.

Toutes les symétries considérées dans ce mémoire sont dites *ponctuelles* en ce sens que l'action de groupe agit en chaque point de la variété séparément, ce fait se traduit dans les générateurs infinitésimaux (1.3.11) par une dépendance des fonctions  $f, g$  par rapport aux variables dépendantes et indépendantes uniquement. Par opposition, les générateurs de transformations dites *généralisées* admettent des fonctions  $f, g$  qui sont aussi dépendantes par rapport aux dérivées des variables dépendantes. Ces transformations généralisées agissent sur des ensembles de points de manière simultanée.

Avant de donner la définition formelle d'invariance d'une équation par rapport à un groupe, il faut introduire la notion de prolongation de l'action du groupe. L'action de tout élément  $x \in G$  sur une solution transforme les variables indépendantes et dépendantes. Incidemment, cette action transforme aussi les dérivées des variables dépendantes par rapport aux variables indépendantes. La prolongation  $pr^{(n)}x$  de l'action d'un élément  $x \in G$  est donc l'opérateur qui agit à la fois sur les variables et sur leurs dérivées (voir [2] pour plus d'information sur la prolongation de l'action de groupe).

**Définition 1.4.1** (invariance d'une EDO par rapport à un groupe). Soit une équation différentielle ordinaire d'ordre  $n$  notée  $\Delta(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ , et son espace solution  $S_\Delta = \{(x, y, y', \dots, y^{(n)}) \mid \Delta(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0\}$ ,  $G$  est un groupe de symétrie de l'EDO donnée si,  $\forall (x, y, y', \dots, y^{(n)}) \in S_\Delta$  et  $\forall g \in G$ ,

$$pr^{(n)}g \cdot (x, y, y', \dots, y^{(n)}) \in S_\Delta. \quad (1.4.1)$$

Tel que mentionné dans la section 1.2, il est plus facile en pratique de manipuler les algèbres de Lie que les groupes correspondants. La question revient donc à déterminer comment se traduit l'invariance d'une équation par rapport à un groupe (1.4.1) en terme du rapport entre l'équation et l'algèbre du groupe. Le théorème suivant donne la réponse à cette question (voir [2] pour une preuve). Toute l'analyse des symétries des équations différentielles dépend de ce théorème.

**Définition 1.4.2** (Rang maximal). Une équation différentielle  $\Delta(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$  est dite de rang maximal si la matrice jacobienne

$$J_\Delta(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = \left( \frac{\partial \Delta}{\partial x}, \frac{\partial \Delta}{\partial y'}, \dots, \frac{\partial \Delta}{\partial y^{(n)}} \right) \quad (1.4.2)$$

est de rang 1 si  $\Delta(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ .

**Théorème 1.4.3** (Critère infinitésimal d'invariance). Posons une équation différentielle  $\Delta(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$  de rang maximal. Si  $G$  est un groupe local de transformation agissant sur  $M$ , et que

$$pr^{(n)}v[\Delta(x, y, y', \dots, y^{(n)})] = 0 \quad \text{lorsque} \quad \Delta(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1.4.3)$$

pour tout générateur infinitésimal  $v$  de  $G$ , alors  $G$  est un groupe de symétrie de l'équation différentielle.

La condition qui force l'équation à être de *rang maximal* n'est pas très contraignante. En fait, il peut être montré que pour toute équation différentielle n'étant pas de rang maximal, il existe une équation équivalente (qui engendre les mêmes solutions) qui est de rang maximal. Il faut simplement s'assurer de travailler avec la bonne forme de l'équation.

De la même manière que l'action de groupe a dû être prolongée, les générateurs infinitésimaux doivent aussi être prolongés pour la même raison. La forme de ces prolongations sera explicitée dans le chapitre 2.

Le critère infinitésimal d'invariance (1.4.3) établit donc une condition sur les générateurs infinitésimaux (base de l'algèbre de Lie) pour que les groupes de transformation à un paramètre envoient des solutions de l'équation vers des solutions de l'équation.

# Chapitre 2

---

## CONSTRUCTION DES ÉQUATIONS INVARIANTES

### 2.1. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES (EDO)

L'allure générale d'un générateur infinitésimal (1.3.11) pour une transformation ponctuelle est, pour  $p$  variables indépendantes et  $q$  variables dépendantes,

$$v = \sum_{i=1}^p \xi^i(x, y) \partial_{x^i} + \sum_{j=1}^q \delta_j(x, y) \partial_{y^j}. \quad (2.1.1)$$

Un générateur de la sorte engendre une transformation dite *ponctuelle* en ce sens qu'elle agit sur chaque point de la variété de manière indépendante. Les transformations dites *généralisées* admettent des fonctions  $\xi, \delta$  qui dépendent aussi des dérivées des variables dépendantes par rapport aux variables indépendantes dans leur générateur (2.1.1).

La prolongation d'un générateur (2.1.1) est donnée par le théorème suivant (voir [2] pour une preuve).

**Théorème 2.1.1** (Prolongation continue du générateur infinitésimal). Pour un générateur de la forme (2.1.1), la  $n$ ème prolongation est donnée par

$$pr^{(n)}v = v + \sum_{j=1}^q \sum_J \delta_j^J(x, y^{(n)}) \partial_{y_j^J} \quad (2.1.2)$$

où  $pr^{(n)}$  signifie que le générateur est prolongé jusqu'aux dérivées d'ordre  $n$ , la sommation en  $J$  se fait sur toutes les variables indépendantes (afin d'obtenir toutes les dérivées partielles par rapport à ces dernières), et les  $\delta_j^J$  sont donnés

par

$$\delta_j^J(x, y^{(n)}) = D_J \left( \delta_j - \sum_{i=1}^p \xi^i y_i^j \right) + \sum_{i=1}^p \xi^i y_{J,i}^j \quad (2.1.3)$$

où  $D$  est l'opérateur dérivée totale,  $y_i^j = \partial y^j / \partial x^i$ , et  $y_{J,i}^j = \partial y^j / \partial x^i$ .

Possédant une expression pour cette prolongation, le but est de former l'équation différentielle la plus générale possible respectant le critère infinitésimal (1.4.3). Pour se faire, il suffit de trouver un ensemble complet d'invariants fonctionnellement indépendants et de bâtir une équation générale à partir de ces invariants (de la manière explicitée par l'algorithme ci-bas). Un ensemble d'invariants fonctionnellement indépendants  $\{I_1, I_2, \dots, I_n\}$  est dit *complet* si tout invariant du groupe n'appartenant pas à l'ensemble complet peut être exprimé comme une fonction  $F(I_1, I_2, \dots, I_n)$ . Le nombre d'invariants fonctionnellement indépendants pour un groupe donné peut être déterminé à partir de la dimension des orbites générées par l'action du groupe sur la variété. Pour davantage d'informations théoriques, je renvoie le lecteur à [2]. En pratique, il existe un algorithme assez simple à énoncer qui permet de trouver l'ensemble complet des invariants fonctionnellement indépendants d'un groupe donné :

1. Prendre un générateur infinitésimal de l'algèbre de Lie

$$v_1 = \xi_1 \partial_{x_1} + \xi_2 \partial_{x_2} + \dots + \xi_n \partial_{x_n}. \quad (2.1.4)$$

Un invariant du groupe de transformation à un paramètre généré par  $v_1$  est une fonction  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  telle que  $v_1(f) = 0$ . La solution générale de (2.1.4) est obtenue en intégrant le système des caractéristiques correspondant

$$\frac{dx_1}{\xi_1} = \frac{dx_2}{\xi_2} = \dots = \frac{dx_n}{\xi_n} \quad (2.1.5)$$

qui mène à un ensemble de  $n - 1$  invariants fonctionnellement indépendants.

2. Prendre un autre générateur infinitésimal  $v_2$  de l'algèbre de Lie et l'exprimer en terme des invariants trouvés en 1. puis résoudre le système des caractéristiques correspondants.

3. Recommencer l'étape 2 jusqu'à épuiser tous les générateurs infinitésimaux formant une base de l'algèbre de Lie. L'ensemble des invariants obtenus à la dernière étape du processus est l'ensemble complet des invariants fonctionnellement indépendants.

Un exemple de cet algorithme sera explicité pour la réalisation  $sl_1^1$ .

Finalement, l'équation différentielle invariante la plus générale par rapport au groupe donné est écrite sous la forme

$$F(I_1, I_2, \dots, I_n) = 0, \quad (2.1.6)$$

où  $F$  est une fonction arbitraire et les  $I_i$  sont les invariants fournis par l'algorithme.

## 2.2. SCHÉMAS AUX DIFFÉRENCES ORDINAIRES (S $\Delta$ O)

L'espace est maintenant considéré comme discret. Les fonctions sont notées  $y_n = y(x_n)$  et prennent des valeurs sur un maillage  $\{\dots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \dots\}$ . La distance entre deux points du maillage est notée  $h_n = x_n - x_{n-1}$ .

La prolongation du générateur infinitésimal (2.1.1) ne se fait plus sur l'espace des dérivées mais sur l'ensemble des points du maillage.

**Définition 2.2.1** (Prolongation discrète du générateur infinitésimal). Pour un générateur de la forme (2.1.1), la prolongation à tous les points d'un maillage contenant  $k$  points  $n, n+1, \dots, n+k-1$  est donnée par

$$pr^{(n)}v = v + v|_{n+1} + v|_{n+2} + \dots + v|_{n+k-1} \quad (2.2.1)$$

où

$$v|_{n+h} = \sum_{i=1}^p \xi^i(x_{n+h}, y_{n+h}) \partial_{x_{n+h}^i} + \sum_{j=1}^q \delta_j(x_{n+h}, y_{n+h}) \partial_{y_{n+h}^j}, \quad 0 \leq h \leq k-1. \quad (2.2.2)$$

---

<sup>1</sup>Les quatre réalisations  $sl_1, sl_2, sl_3, sl_4$  de  $sl(2, \mathbb{R})$  seront dérivées au chapitre 3

Autrement dit, la prolongation dans le cas discret n'est qu'une copie du générateur évaluée en chaque point du maillage. Cette définition de la prolongation *discrète* est compatible avec la définition de la prolongation *continue* définie plus haut en ce sens que la prolongation discrète tend vers la prolongation continue dans la limite du continu (les pas  $h_i$  tendent vers zéro) ; voir [12] pour une preuve partielle de cette affirmation.

L'algorithme permettant de trouver l'ensemble complet des invariants discrets fonctionnellement indépendants est identique à celui donné pour les invariants différentiels.

Si  $\{I_1, I_2, \dots, I_n\}$  est l'ensemble complet des invariants discrets, le défi est de construire deux équations, qu'on nomme *schéma aux différences ordinaire* ( $S\Delta O$ ),

$$E_1(I_1, I_2, \dots, I_n) = 0 \quad (2.2.3)$$

$$E_2(I_1, I_2, \dots, I_n) = 0$$

telles que dans la limite du continu  $E_2 \rightarrow 0$  et  $E_1$  tende vers l'EDO (2.1.6).  $E_1$  est une approximation discrète de l'EDO (2.1.6) et  $E_2$  définit le maillage. On dit du  $S\Delta O$  (2.2.3) que c'est une discrétisation invariante de l'EDO (2.1.6).

Le choix de l'équation du maillage  $E_2$  influence la vitesse à laquelle  $E_1$  tend vers l'EDO approximée (on parle d'ordre de précision du schéma invariant). En pratique, la liberté dans le choix de  $E_2$  sera donc utilisée afin d'optimiser l'ordre de précision du schéma (2.2.3). Notons qu'il ne faut pas confondre l'ordre de convergence du schéma discret vers l'EDO continue avec l'ordre de convergence des solutions générées par le schéma. Il semble naturel qu'un schéma convergeant plus rapidement vers une EDO dans la limite du continu produise des solutions convergeant aussi plus rapidement, mais aucune preuve ne montre pour l'instant un lien direct entre l'ordre de convergence d'un schéma et l'ordre de convergence de ses solutions.

Trouver un schéma (2.2.3) peut s'avérer ardu puisque c'est la seule partie du travail pour laquelle il n'y a aucun algorithme.

Finalement, le schéma (2.2.3) peut être exprimé en terme des points  $(x_i, y_i)$  du maillage. Je nomme cette forme du schéma : *schéma explicite*. C'est cette forme qui est utile lors des tests numériques.

**Définition 2.2.2** (Schémas explicites et implicites). Pour un maillage à trois points, si le schéma a la forme

$$x_{n+1} = F(x_{n-1}, x_n, y_{n-1}, y_n), \quad y_{n+1} = G(x_{n-1}, x_n, y_{n-1}, y_n), \quad (2.2.4)$$

avec  $F, G$  des fonctions données, alors on dit du schéma qu'il est *explicite*. Par opposition, dans un schéma *implicite*  $x_{n+1}$  et  $y_{n+1}$  sont des arguments des fonctions  $F$  et  $G$ .

Un schéma explicite est donc un schéma qui exprime le point cherché  $(x_i, y_i)$  uniquement en fonction des points précédents du maillage. La définition d'un schéma explicite pour un maillage à trois points se généralise directement pour un maillage à  $n$  points. Les schémas explicites présentent l'avantage, en comparaison aux schémas implicites, d'être extrêmement simples à résoudre (et donc peu coûteux numériquement).

# Chapitre 3

---

## RÉALISATIONS DE $SL(2, \mathbb{R})$

Les quatre réalisations de  $sl(2, \mathbb{R})$  sont connues. Elles ont été trouvées sur  $\mathbb{C}$  en premier lieu [1] et sur  $\mathbb{R}$  beaucoup plus tard [47]. Cependant, j'insère tout de même ici leur dérivation explicite dans le but d'être complet et puisque je ne l'ai vu faite nulle part au long. Toute base (1.3.11) qui possède le tableau des commutateurs (1.2.3) est une base pour  $sl(2, \mathbb{R})$ . Il existe en fait quatre bases inéquivalentes pour  $sl(2, \mathbb{R})$  menant à des équations différentielles différentes. Deux bases sont dites inéquivalentes si elles ne peuvent être transformées de manière continue l'une vers l'autre par une transformation ponctuelle. On nomme ces bases inéquivalentes les différentes *réalisations* de  $sl(2, \mathbb{R})$ .

*A priori*, la base de  $sl(2, \mathbb{R})$  a la forme (1.3.11)

$$\tilde{v}_i = \tilde{f}_i(x, y)\partial_x + \tilde{g}_i(x, y)\partial_y, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.0.5)$$

On peut toujours faire en sorte que  $\tilde{v}_1 \rightarrow v_1 = \partial_y$ , tandis que

$$\tilde{v}_i \rightarrow v_i = f_i(x, y)\partial_x + g_i(x, y)\partial_y, \quad i = 2, 3. \quad (3.0.6)$$

Ceci grâce aux théorème de Lie sur la rectification de champs de vecteurs (prouvé dans [2]). La rectification de  $\tilde{v}_1$  correspond à le transformer en  $v_1 = \partial_y$  (localement) par un choix de base approprié.

Le crochet de Lie de  $v_1$  et  $v_2$  donne

$$\begin{aligned}
 [v_1, v_2] &= \partial_y(f_2\partial_x + g_2\partial_y) - (f_2\partial_x + g_2\partial_y)\partial_y \\
 &= \partial_y f_2 \partial_x + f_2 \partial_y \partial_x + \partial_y g_2 \partial_y + g_2 \partial_y^2 - f_2 \partial_x \partial_y - g_2 \partial_y^2 \\
 &= \partial_y f_2 \partial_x + \partial_y g_2 \partial_y \\
 &= v_1 = \partial_y.
 \end{aligned} \tag{3.0.7}$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned}
 \partial_y f_2 &= 0 \quad \text{et} \quad \partial_y g_2 = 1. \\
 \Rightarrow \quad f_2(x, y) &= f_2(x) \quad \text{et} \quad g_2 = y + F(x),
 \end{aligned} \tag{3.0.8}$$

où  $F(x)$  est une fonction arbitraire de  $x$ .

On a donc

$$v_1 = \partial_y, \tag{3.0.9}$$

$$v_2 = f_2(x)\partial_x + (y + F(x))\partial_y. \tag{3.0.10}$$

Peut-on simplifier  $v_2$  tout en laissant  $v_1$  inchangé ? Un changement de variable  $(x, y) \rightarrow (t, u)$  se traduit sur les opérateurs dérivées par

$$\partial_x = \frac{\partial t}{\partial x} \partial_t + \frac{\partial u}{\partial x} \partial_u, \tag{3.0.11}$$

$$\partial_y = \frac{\partial t}{\partial y} \partial_t + \frac{\partial u}{\partial y} \partial_u.$$

Pour que  $v_1$  reste inchangé, il faut que

$$\frac{\partial t}{\partial y} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 1. \tag{3.0.12}$$

$$\Rightarrow t = t(x) \quad \text{et} \quad u = y + G(x), \tag{3.0.13}$$

où  $G(x)$  est une fonction arbitraire.

Et on obtient

$$\begin{aligned}
 v_2 &= f_2(x) \left( \frac{\partial t}{\partial x} \partial_t + \frac{\partial u}{\partial x} \partial_u \right) + (y + F(x)) \partial_u, \\
 \Rightarrow v_2 &= f_2(x) t_x \partial_t + (f_2(x) G_x(x) + y + F(x)) \partial_u, \\
 \Rightarrow v_2 &= f_2(x) t_x \partial_t + (f_2(x) G_x(x) + u - G(x) + F(x)) \partial_u.
 \end{aligned} \tag{3.0.14}$$

Deux cas se distinguent ici.

cas 1 :  $f_2(x) \neq 0$

On peut toujours choisir  $t(x)$  et  $G(x)$  tels que

$$f_2(x) t_x(x) = t \quad \text{et} \quad G(x) = f_2(x) G_x(x) + F(x). \tag{3.0.15}$$

Ce qui implique que  $v_1$  et  $v_2$  peuvent toujours être ramenés à

$$v_1 = \partial_u \tag{3.0.16}$$

$$v_2 = t \partial_t + u \partial_u$$

par une transformation de variables appropriée.

cas 2 :  $f_2(x) = 0$

On a

$$v_2 = (u - G(x) + F(x)) \partial_u \tag{3.0.17}$$

et il suffit de prendre  $G(x) = F(x)$  pour que  $v_1$  et  $v_2$  deviennent

$$v_1 = \partial_u, \tag{3.0.18}$$

$$v_2 = u \partial_u.$$

Il ne reste qu'à déterminer quelles sont les possibilités pour  $v_3$  dans les deux cas énoncés ci-haut.

cas 1 :

Les crochets de Lie des générateurs imposent les conditions suivantes sur  $v_3$

$$\begin{aligned} [v_1, v_3] &= \partial_y f_3 \partial_x + \partial_y g_3 \partial_y \\ &= -2v_2 = -2x\partial_x - 2y\partial_y. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \partial_y f_3 = -2x \quad \text{et} \quad \partial_y g_3 = -2y.$$

$$\Rightarrow f_3 = -2xy + H(x) \quad \text{et} \quad g_3 = -y^2 + K(x). \quad (3.0.19)$$

En utilisant  $f_3$  et  $g_3$  trouvées ci-haut, on obtient

$$\begin{aligned} [v_2, v_3] &= x\partial_x f_3 \partial_x + y\partial_y f_3 \partial_x - f_3 \partial_x + x\partial_x g_3 \partial_y + y\partial_y g_3 \partial_y - g_3 \partial_y \\ &= [x(-2y + H'(x)) + y(-2x) - (-2xy + H(x))] \partial_x \\ &\quad + [xK'(x) + y(-2y) - (-y^2 + K(x))] \partial_y \\ &= v_3 = (-2xy + H(x)) \partial_x + (-y^2 + K(x)) \partial_y. \end{aligned} \quad (3.0.20)$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned} -2xy + xH'(x) - H(x) &= -2xy + H(x). \\ \Rightarrow xH'(x) &= 2H(x) \end{aligned} \quad (3.0.21)$$

et une équation identique en  $K(x)$ . On a donc

$$H(x) = Cx^2 \quad \text{et} \quad K(x) = Dx^2, \quad (3.0.22)$$

où  $C, D$  sont des constantes.  $v_3$  doit donc être de la forme

$$v_3 = (-2xy + Cx^2) \partial_x + (-y^2 + Dx^2) \partial_y. \quad (3.0.23)$$

Comme précédemment pour  $v_2$ , il est possible de transformer  $v_3$  par un changement de variable  $(x, y) \rightarrow (t, u)$  tout en maintenant  $v_1$  et  $v_2$  inchangés. Les nouveaux opérateurs dérivées sont, encore une fois, donnés par

$$\begin{aligned} \partial_x &= \frac{\partial t}{\partial x} \partial_t + \frac{\partial u}{\partial x} \partial_u, \\ \partial_y &= \frac{\partial t}{\partial y} \partial_t + \frac{\partial u}{\partial y} \partial_u. \end{aligned} \quad (3.0.24)$$

Pour que  $v_1$  et  $v_2$  restent inchangés par la transformation, il faut que

$$\begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial y} &= 0 & \text{et} & & \frac{\partial u}{\partial y} &= 1, \\ \Rightarrow t &= t(x) & \text{et} & & u &= y + L(x), \end{aligned} \quad (3.0.25)$$

et que

$$\begin{aligned} v_2 &= x \left[ \frac{\partial t}{\partial x} \partial_t + \frac{\partial u}{\partial x} \partial_u \right] + y \partial_u \\ &= xt'(x) \partial_t + (xL'(x) + y) \partial_u \\ &= t \partial_t + u \partial_u. \end{aligned} \quad (3.0.26)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow xt'(x) &= t & \text{et} & & xL'(x) + y &= u = y + L(x). \\ \Rightarrow t(x) &= C_2 x & \text{et} & & L(x) &= D_2 x, \end{aligned} \quad (3.0.27)$$

où  $C_2, D_2$  sont des constantes.

(3.0.24) devient ainsi

$$\begin{aligned} \partial_x &= C_2 \partial_t + D_2 \partial_u, \\ \partial_y &= \partial_u. \end{aligned} \quad (3.0.28)$$

Ce qui donne un  $\bar{v}_3$

$$\begin{aligned} \bar{v}_3 &= (-2xy + Cx^2)(C_2 \partial_t + D_2 \partial_u) + (-y^2 + Dx^2) \partial_u \\ &= C_2(-2xy + Cx^2) \partial_t + [D_2(-2xy + Cx^2) - y^2 + Dx^2] \partial_u \\ &= C_2 \left( -2 \frac{t}{C_2} \left( u - \frac{D_2}{C_2} t \right) + \frac{C}{C_2^2} t^2 \right) \partial_t \\ &+ \left[ D_2 \left( -2 \frac{t}{C_2} \left( u - \frac{D_2}{C_2} t \right) + \frac{C}{C_2^2} t^2 \right) \right. \\ &\quad \left. - \left( u - \frac{D_2}{C_2} t \right)^2 + \frac{D}{C_2^2} t^2 \right] \partial_u \\ &= \left( -2tu + \left( \frac{2D_2 + C}{C_2} \right) t^2 \right) \partial_t + \left( -u^2 + \left( \frac{D_2^2 + CD_2 + D}{C_2^2} \right) t^2 \right) \partial_u. \end{aligned} \quad (3.0.29)$$

$$\Rightarrow \bar{C} = \frac{1}{C_2} [2D_2 + C] \quad \text{et} \quad \bar{D} = \frac{1}{C_2^2} [D_2^2 + CD_2 + D]. \quad (3.0.30)$$

Les deux libertés disponibles pour simplifier  $v_3$  sont  $C_2$  et  $D_2$ . Si on pose  $D_2 = -\frac{C}{2}$ ,

$$\tilde{C} = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{D} = \frac{1}{C_2^2} \left[ D - \frac{C^2}{4} \right] \quad (3.0.31)$$

peut être normalisé à 1 ou  $-1$  à l'aide de  $C_2$  (si  $D - \frac{C^2}{4} \neq 0$ ).

Si on tente plutôt d'annuler  $D_2$ , on doit poser

$$\begin{aligned} D_2 &= \frac{-C \pm \sqrt{C^2 - 4D}}{2} \\ &= -\frac{C}{2} \pm \sqrt{\frac{C^2}{4} - D}. \end{aligned} \quad (3.0.32)$$

Il en résulte trois possibilités pour le cas 1 :

i) si  $C, D \neq 0$  et  $\frac{C^2}{4} - D < 0$ , on peut alors annuler  $\tilde{C}$  par (3.0.31) et normaliser  $\tilde{D}$  à 1.

ii) si  $C, D \neq 0$  et  $\frac{C^2}{4} - D \geq 0$ , on peut alors annuler  $\tilde{D}$  en posant (3.0.32) et normaliser  $\tilde{C}$  à  $-1$ .

iii)  $C, D$  sont égaux à zéro.

iv) Si  $C = 0$  ou  $D = 0$ , on peut normaliser celui qui est non-nul, ce qui est équivalent au cas i) ou au cas ii).

Le cas 1 mène donc aux trois réalisations inéquivalentes de  $sl(2, \mathbb{R})$  :

$$v_1 = \partial_y, \quad v_2 = x\partial_x + y\partial_y, \quad v_3 = 2xy\partial_x + y^2\partial_y, \quad (3.0.33)$$

$$v_1 = \partial_y, \quad v_2 = x\partial_x + y\partial_y, \quad v_3 = 2xy\partial_x + (y^2 - x^2)\partial_y, \quad (3.0.34)$$

$$v_1 = \partial_y, \quad v_2 = x\partial_x + y\partial_y, \quad v_3 = (2xy + x^2)\partial_x + y^2\partial_y. \quad (3.0.35)$$

Il est à noter que le signe de  $v_3$  n'a aucune importance puisqu'il génère le même sous-espace de dimension 1 peu importe son signe.

cas 2 :

Les crochets de Lie impliquent cette fois

$$\begin{aligned}
 [v_1, v_3] &= \partial_y f_3 \partial_x + \partial_y g_3 \partial_y = -2y \partial_y, \\
 \Rightarrow \partial_y f_3 &= 0 \quad \text{et} \quad \partial_y g_3 = -2y, \\
 \Rightarrow f_3 &= f_3(x) \quad \text{et} \quad g_3 = -y^2 + G(x),
 \end{aligned} \tag{3.0.36}$$

et

$$\begin{aligned}
 [v_2, v_3] &= y \partial_y f_3 \partial_x + y \partial_y g_3 \partial_y - g_3 \partial_y = f_3(x) \partial_x + (-y^2 + G(x)) \partial_y, \\
 \Rightarrow f_3 &= 0 \quad \text{et} \quad -2y^2 - (-y^2 + G(x)) = -y^2 + G(x) \Rightarrow G(x) = 0, \\
 \Rightarrow f_3 &= 0 \quad \text{et} \quad g_3 = -y^2.
 \end{aligned} \tag{3.0.37}$$

Le cas 2 est donc toujours équivalent à la réalisation

$$v_1 = \partial_y, \quad v_2 = y \partial_y, \quad v_3 = y^2 \partial_y. \tag{3.0.38}$$

On conclut finalement que  $sl(2, \mathbb{R})$  possède 4 réalisations inéquivalentes qui mèneront toutes à des EDO différentes qui seront étudiées dans le chapitre 4. Ces 4 réalisations sont

$$sl_1 : v_1 = \partial_y, \quad v_2 = x \partial_x + y \partial_y, \quad v_3 = 2xy \partial_x + y^2 \partial_y, \tag{3.0.39}$$

$$sl_2 : v_1 = \partial_y, \quad v_2 = x \partial_x + y \partial_y, \quad v_3 = 2xy \partial_x + (y^2 - x^2) \partial_y, \tag{3.0.40}$$

$$sl_3 : v_1 = \partial_y, \quad v_2 = x \partial_x + y \partial_y, \quad v_3 = (2xy + x^2) \partial_x + y^2 \partial_y, \tag{3.0.41}$$

$$sl_4 : v_1 = \partial_y, \quad v_2 = y \partial_y, \quad v_3 = y^2 \partial_y. \tag{3.0.42}$$

Une forme équivalente pour  $sl_3$  est

$$v_1 = \partial_y, \quad v_2 = x \partial_x + y \partial_y, \quad v_3 = 2xy \partial_x + (x^2 + y^2) \partial_y. \tag{3.0.43}$$

En prenant cette forme pour  $sl_3$ , on peut voir que  $sl_3$  et  $sl_2$  sont équivalentes sur  $\mathbb{C}$ , mais non sur  $\mathbb{R}$ . Sur  $\mathbb{C}$ , un peu de travail permet de montrer que le changement de variable

$$z = x + y + i(x + y), \quad w = y - x - i(y - x) \tag{3.0.44}$$

transforme  $sl_2$  en  $sl_3$  (à une constante de multiplication près). Afin d'effectuer le changement de variable, il faut calculer l'effet du changement de variable sur les opérateurs dérivées  $\partial_x, \partial_y$ . D'un point de vue calculatoire, il est peut-être plus simple de faire la transformation en deux étapes : en posant  $u = y+ix$  et  $v = y-ix$  en premier lieu, et  $z = u + iv$  et  $w = u - iv$  ensuite.

De plus,  $sl_1$  peut être prolongée à une réalisation de  $gl(2, \mathbb{R})$  (voir section 4.1.1) et  $sl_4$  peut être prolongée à  $sl_4 \oplus sl_4$  en ajoutant une  $sl_4$  en  $x$  plutôt qu'en  $y$  :  $v_1 = \partial_x, \quad v_2 = x\partial_x, \quad v_3 = x^2\partial_x$ .

## Chapitre 4

---

### L'ENSEMBLE DES EDO D'ORDRE 2 ET 3 INVARIANTES SOUS $SL(2, \mathbb{R})$ ET LEUR DISCRÉTISATION PRÉSERVANT LES SYMÉTRIES

Ce chapitre contient toutes les EDO d'ordre 2 et 3 invariantes par rapport aux 4 réalisations de  $sl(2, \mathbb{R})$  dérivées dans le chapitre 3 ainsi que leur discrétisation préservant les symétries. Pour chaque réalisation, trois sous-sections contiennent respectivement les EDO invariantes, les  $S\Delta O$  invariants et les  $S\Delta O$  invariants explicites.

Tel qu'annoncé, je retranscris dans le détail l'algorithme permettant de générer les invariants différentiels qui forment ensuite les EDO ainsi que le pendant discret de cet algorithme pour  $sl_1$ . Je ne ferai que donner les résultats pour les autres réalisations.

$$4.1. \quad \underline{sl_1 : v_1 = \partial_y \quad v_2 = x\partial_x + y\partial_y \quad v_3 = 2xy\partial_x + y^2\partial_y}$$

#### 4.1.1. EDO

Afin de trouver les invariants différentiels de 2e et 3e ordre, prolongeons  $v_1$  en utilisant (2.1.2) et (2.1.3) de manière à ce que le générateur infinitésimal agisse sur les dérivées d'ordre 3 ( $y'''(x)$ ) :

$$pr^{(3)}v_1 = \partial_y. \quad (4.1.1)$$

On peut en déduire automatiquement les quatre invariants :  $\{x, y', y'', y'''\}$ .  $v_2$  doit maintenant être exprimé en fonction de ces invariants puis prolongé, ce qui donne

$$pr^{(3)}v_2 = x\partial_x + y \underbrace{\partial_y}_{=0} - y''\partial_{y''} - 2y'''\partial_{y''}. \quad (4.1.2)$$

$\partial_y = 0$ , car en fonction des quatre invariants générés par  $v_1$

$$\partial_y = \frac{\partial x}{\partial y}\partial_x + \frac{\partial y'}{\partial y}\partial_{y'} + \frac{\partial y''}{\partial y}\partial_{y''} + \frac{\partial xy'''}{\partial y}\partial_{y'''} = 0. \quad (4.1.3)$$

$y'$  demeure clairement un invariant vu la forme de (4.1.2).

(4.1.2) induit le système des caractéristiques

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dy''}{y''} = -\frac{dy'''}{2y'''} \quad (4.1.4)$$

En intégrant le système (4.1.4), on obtient les invariants  $E = xy''$ ,  $F = xy'''^{1/2}$ . Ces deux invariants avec  $y'$  forment les trois invariants fonctionnellement indépendants de  $v_1$  et  $v_2$ . Il ne reste plus qu'à recommencer le travail pour  $v_3$ . On obtient

$$\begin{aligned} pr^{(3)}v_3 &= 2xy\partial_x + y^2 \underbrace{\partial_y}_{=0} - 2xy'^2\partial_{y'} \\ &+ (-2y'^2 - 6xy'y'' - 2yy'')\partial_{y''} + (-12y'y'' - 6xy''^2 - 8xy'y''' - 4yy''')\partial_{y''}. \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

Les dérivées partielles, en fonction des invariants  $\{y', E, F\}$ , deviennent

$$\begin{aligned}\partial_x &= y''\partial_E + y'''^{1/2}\partial_F, & \partial_{y'} &= \partial_{y'}, \\ \partial_{y''} &= x\partial_E, & \partial_{y'''} &= \frac{1}{2}xy'''^{-1/2}\partial_F.\end{aligned}\quad (4.1.6)$$

Et donc,

$$\begin{aligned}pr^{(3)}v_3 &= -2xy'^2\partial_{y'} + (-2y'^2 - 6xy'y'')x\partial_E + x(-6y'y''y'''^{-1/2} - 3xy''^2y'''^{-1/2} - 4xy'y'''^{1/2})\partial_F \\ &= -2xy'^2\partial_{y'} - 2x(y'^2 + 3y'E)\partial_E - 2x(3y'\frac{E}{F} + \frac{3E^2}{2F} + 2y'F)\partial_F.\end{aligned}\quad (4.1.7)$$

Le système des caractéristiques correspondant est

$$\frac{dy'}{y'^2} = \frac{dE}{y'^2 + 3y'E} = \frac{dF}{3y'\frac{E}{F} + \frac{3E^2}{2F} + 2y'F}.\quad (4.1.8)$$

La première égalité implique

$$(y'^2 + 2y'E)dy' - y'^2dE = 0.\quad (4.1.9)$$

Cette équation différentielle totale devient exacte si on la multiplie par le facteur intégrant  $y'^{-5}$ . L'équation résultante est

$$\begin{aligned}(y'^{-3} + 3y'^{-4}E)dy' - y'^{-3}dE &= 0. \\ \Rightarrow T = \int -\frac{dE}{y'^3} &= -\frac{E}{y'^3} + f(y')\end{aligned}\quad (4.1.10)$$

où  $f$  est une fonction arbitraire. L'éq. (4.1.1) implique

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial y'} &= 3Ey'^{-4} + f'(y') = y'^{-3} + 3Ey'^{-4}, \\ \Rightarrow f(y') &= -\frac{1}{2y'^2}, \\ \Rightarrow -T &= \frac{2E + y'}{y'^3} = \frac{2xy'' + y'}{y'^3} \equiv I_1.\end{aligned}\quad (4.1.11)$$

$I_1$  est donc l'invariant différentiel de second ordre de  $sl_1$ .

En utilisant  $E = \frac{I_1y'^3 - y'}{2}$ , le système (4.1.8) implique aussi

$$\left(\frac{3}{4}I_1y'^4 - \frac{9}{8}y'^2 + \frac{3}{8}I_1^2y'^6 + 2y'F^2\right)dy' - y'^2FdF = 0.\quad (4.1.12)$$

Multipliée par le facteur  $y'^{-6}$ , cette équation différentielle totale devient exacte et s'écrit

$$\begin{aligned} & \left( \frac{3}{4}I_1 y'^{-2} - \frac{9}{8}y'^{-4} + \frac{3}{8}I_1^2 + 2y'^{-5}F^2 \right) dy' - y'^{-4}F dF = 0. \\ & \Rightarrow T_2 = \int -\frac{F dF}{y'^4} = -\frac{1}{2}F^2 y'^{-4} + f_2(y'), \\ & \Rightarrow \frac{\partial T_2}{\partial y'} = 2F^2 y'^{-5} + f_2'(y') = \frac{3}{4}I_1 y'^{-2} - \frac{9}{8}y'^{-4} + \frac{3}{8}I_1^2 + 2F^2 y'^{-5}, \\ & \Rightarrow f_2(y') = -\frac{3I_1}{4y'} + \frac{3}{8y^3} + \frac{3}{8}I_1^2 y', \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow T_2 &= -\frac{F^2}{2y'^4} - \frac{3I_1}{4y'} + \frac{3}{8y^3} + \frac{3}{8}I_1^2 y' \\ &= \frac{-\frac{1}{2}x^2 y^{(4)} - \frac{3}{2}xy'' - \frac{3}{4}y' + \frac{3}{8}y'}{y'^4} + \frac{3(4x^2 y''^2 + y'^2 + 4xy'y'')}{8y'^5} \\ &= \frac{-\frac{1}{2}x^2 y' y''' + \frac{3}{2}x^2 y''^2}{y'^5}, \\ \Rightarrow I_2 &\equiv \frac{x^2(y' y''' - 3y''^2)}{y'^5}. \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

En conclusion, les invariants différentiels d'ordre 2 et 3 de  $sl_1$  sont

$$I_1 = \frac{2xy'' + y'}{y'^3}, \quad I_2 = \frac{x^2(y' y''' - 3y''^2)}{y'^5}. \quad (4.1.15)$$

L'EDO de second ordre la plus générale possible formée à partir de ces invariants est donc

$$C_1 = \frac{2xy'' + y'}{y'^3} \quad C_1 = \text{const.} \quad (4.1.16)$$

La solution générale de (4.1.16) est

$$y_{1,2}(x) = \begin{cases} y_b \pm \frac{2}{D_1} \sqrt{C_1 - D_1 x} & D_1 \neq 0 \\ y_b \pm \frac{1}{\sqrt{C_1}} x & D_1 = 0 \end{cases} \quad (4.1.17)$$

où  $y_b$  et  $D_1$  sont des constantes d'intégration. Les deux branches de la solution pour  $D_1 \neq 0$  s'intersectent en  $y_1(x) = y_2(x) = y_b$  lorsque  $x = C_1/D_1$ . De plus, ces deux branches possèdent une singularité en ce point puisque la solution  $y$  devient complexe.

La solution (4.1.17), pour  $D_1 \neq 0$ , peut être réécrite sous la forme

$$(y - y_b)^2 = \frac{-4}{D_1^2}(D_1x - C_1). \quad (4.1.18)$$

Cette forme permet de voir que la solution de l'EDO (4.1.16) est une parabole horizontale possédant son sommet en  $x = C_1/D_1$ .

L'EDO de troisième ordre la plus générale formée à partir des invariants de  $sl_1$  est

$$I_2 = F(I_1), \quad (4.1.19)$$

en posant que  $I_2$  peut être isolé.

Il est intéressant de noter que  $sl_1$  peut être étendue à une réalisation de  $gl(2, \mathbb{R})$  si on ajoute l'opérateur  $v_4 = x\partial_x$ . En particulier, l'EDO (4.1.19) devient invariante sous le groupe correspondant  $GL(2, \mathbb{R})$  si la fonction arbitraire  $F(I_1)$  est restreinte à  $F(I_1) = AI_1^{3/2}$ , avec  $A$  une constante. Puisqu'il faudra spécifier  $F(I_1)$  pour pouvoir effectuer les tests numériques du chapitre 5, pourquoi ne pas prendre, justement,  $F(I_1) = AI_1^{3/2}$ . L'EDO invariante résultante est donc

$$x^2(y'y''' - 3y''^2) = Ay^{1/2}(2xy'' + y')^{3/2}. \quad (4.1.20)$$

Cette EDO peut être réduite à une quadrature. Cependant, la solution demeure implicite

$$y = y_0 + D_1 \int_0^x e^{\int_0^t f(s) ds} dt \quad (4.1.21)$$

où  $f(x)$  satisfait l'équation

$$f(x) = \frac{1}{2x} \left[ \frac{1}{D_2x} \left( \frac{\sqrt{2xf(x)+1} + A - \sqrt{A^2+1}}{\sqrt{2xf(x)+1} + A + \sqrt{A^2+1}} \right)^{\left(\frac{A-\sqrt{A^2+1}}{\sqrt{A^2+1}}\right)} - 1 \right] \quad (4.1.22)$$

où  $y_0$ ,  $D_1$  et  $D_2 \neq 0$  sont des constantes d'intégration. (4.1.20) est un bon exemple d'équation pour laquelle le groupe de symétrie est suffisamment grand pour permettre la réduction à une quadrature mais sans toutefois fournir une solution explicite. En fait, le problème de résoudre l'EDO pour  $y(x)$  s'est transformé en celui de résoudre l'équation fonctionnelle (4.1.22) pour  $f(x)$ . Autrement dit, les

méthodes numériques seront tout de même nécessaires pour résoudre et tracer  $y(x)$ .

#### 4.1.2. $S\Delta O$

Tout d'abord, la proposition suivante va grandement simplifier la recherche des invariants discrets fonctionnellement indépendants.

**Définition 4.1.1** (Invariants décallés). Pour chaque invariant discret

$F^{n+l}(x_{n-k}, x_{n-k+1}, \dots, x_{n+l-1}, x_{n+l}, y_{n-k}, y_{n-k+1}, \dots, y_{n+l-1}, y_{n+l})$ , avec  $k, l \in \mathbb{N}$ , sur un maillage, on définit des copies décallées de cet invariant comme

$F^{n+l+p} = F(x_{n-k+p}, x_{n-k+1+p}, \dots, x_{n+l-1+p}, x_{n+l+p}, y_{n-k+p}, y_{n-k+1+p}, \dots, y_{n+l-1+p}, y_{n+l+p})$  avec  $p \in \mathbb{N}$ .

**Proposition 4.1.2.** Les copies décallées d'invariants sont aussi des invariants (pour un groupe de transformation donné).

Cette proposition se déduit directement de la forme de la prolongation discrète des générateurs infinitésimaux (2.2.1).

Dans le cas présent, par exemple, il suffit de trouver un seul invariant discret afin d'en déduire un ensemble complet d'invariants discrets fonctionnellement indépendants.

Pour approximer des dérivées d'ordre 2, un maillage possédant minimalement trois points est nécessaire; soit  $\{(x_{n-1}, y_{n-1}), (x_n, y_n), (x_{n+1}, y_{n+1})\}$ . La prolongation discrète de  $v_1$  à tous les points du maillage est, par (2.2.1),

$$pr^{(2)}v_1 = \partial_{y_{n-1}} + \partial_{y_n} + \partial_{y_{n+1}}. \quad (4.1.23)$$

La méthode des caractéristiques appliquée à (4.1.23) génère les invariants  $\{x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, i_n \equiv y_n - y_{n-1}, i_{n+1} \equiv y_{n+1} - y_n\}$ .

La prolongation de  $v_2$  en terme de ces invariants est

$$\begin{aligned} pr^{(2)}v_2 &= x_{n-1}\partial_{x_{n-1}} + y_{n-1}\partial_{y_{n-1}} + x_n\partial_{x_n} + x_{n+1}\partial_{x_{n+1}} + y_{n+1}\partial_{y_{n+1}} \\ &= x_{n-1}\partial_{x_{n-1}} + x_n\partial_{x_n} + x_{n+1}\partial_{x_{n+1}} + i_n\partial_{i_n} + i_{n+1}\partial_{i_{n+1}} \end{aligned} \quad (4.1.24)$$

et il en résulte les invariants  $\{\alpha \equiv x_{n-1}/x_n, \beta \equiv x_{n+1}/x_n, \delta \equiv i_{n+1}/x_n, \zeta \equiv i_n/x_n\}$ .

Les opérateurs dérivées partielles deviennent

$$\begin{aligned} \partial_{x_{n-1}} &= \frac{1}{x_n}\partial_\alpha, & \partial_{y_{n-1}} &= -\frac{1}{x_n}\partial_\zeta, \\ \partial_{x_n} &= \frac{1}{x_n}(-\alpha\partial_\alpha - \beta\partial_\beta - \zeta\partial_\zeta - \delta\partial_\delta), \\ \partial_{y_n} &= \frac{1}{x_n}\partial_\zeta - \frac{1}{x_n}\partial_\delta, \\ \partial_{x_{n+1}} &= \frac{1}{x_n}\partial_\beta, & \partial_{y_{n+1}} &= \frac{1}{x_n}\partial_\delta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow pr^{(2)}v_3 &= \left( \frac{2x_{n-1}y_{n-1}}{x_n} - 2y_n\alpha \right) \partial_\alpha + (\zeta(y_n + y_{n-1}) - 2y_n\zeta)\partial_\zeta + \left( -2y_n\beta + \frac{2x_{n+1}y_{n+1}}{x_n} \right) \partial_\beta \\ &\quad + \left( -2y_n\delta - \frac{y_n^2}{x_n} + \frac{y_{n+1}^2}{x_n} \right). \end{aligned} \quad (4.1.25)$$

Le système des caractéristique correspondant est

$$\frac{d\alpha}{-2\alpha i_n} = \frac{d\zeta}{-\zeta i_n} = \frac{d\beta}{2\alpha i_{n+1}} = \frac{d\delta}{\delta i_{n+1}}. \quad (4.1.26)$$

Cela implique

$$\frac{d\alpha}{-2\alpha} = \frac{d\zeta}{-\zeta} \Rightarrow I_1^n \equiv \zeta/\alpha^{1/2} = \frac{i_n\sqrt{x_n}}{x_n\sqrt{x_{n-1}}} = \frac{y_n - y_{n-1}}{\sqrt{x_{n-1}x_n}}. \quad (4.1.27)$$

$I_1^n$  est donc un premier invariant discret pour  $sl_1$ . Grâce à la proposition 4.1.2, la copie décalée  $I_1^{n+1}$  est un invariant. De plus, l'argument qui justifie la proposition 4.1.2 implique que  $I_2^{n+1} = \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{\sqrt{x_{n+1}x_{n-1}}}$  est aussi un invariant (puisque la prolongation discrète (2.2.1) ne fait pas de distinction entre les différents points du maillage).

Un ensemble possible d'invariants discrets pour le second ordre est ainsi

$$\begin{aligned} I_1^n &= 2 \frac{y_n - y_{n-1}}{\sqrt{x_n x_{n-1}}}, & I_1^{n+1} &= 2 \frac{y_{n+1} - y_n}{\sqrt{x_{n+1} x_n}}, \\ I_2^{n+1} &= \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{\sqrt{x_{n+1} x_{n-1}}}. \end{aligned} \quad (4.1.28)$$

Cet ensemble est complet puisque (4.1.26) admet trois solutions fonctionnellement indépendantes et notre ensemble contient trois invariants fonctionnellement indépendants.

Un maillage permettant d'approximer des dérivées d'ordre trois nécessiterait un point de plus, disons  $(x_{n+2}, y_{n+2})$ , et les prolongations des générateurs infinitésimaux posséderaient deux nouveaux termes (un pour  $x_{n+2}$  et un pour  $y_{n+2}$ ) qui produiraient deux nouvelles égalités qui s'ajouteraient au système des caractéristiques (4.1.26). Il y aurait donc maximale deux nouveaux invariants dans l'ensemble complet pour le troisième ordre. Or, la proposition 4.1.2 implique que  $I_1^{n+2}$  et  $I_2^{n+2}$  sont aussi des invariants sur un maillage à quatre points. L'ensemble complet d'invariants discrets fonctionnellement indépendants pour le troisième ordre est donc  $\{I_1^n, I_1^{n+1}, I_1^{n+2}, I_2^{n+1}, I_2^{n+2}\}$ .

Un SΔO qui tend vers l'EDO (4.1.16) dans la limite du continu est

$$C_1 = 8^2 \frac{I_2^{n+1} - \frac{1}{2}(I_1^{n+1} + I_1^n)}{I_1^n I_1^{n+1} (I_1^{n+1} + I_1^n)} \equiv J_1^{n+1} \quad I_1^{n+1} = I_1^n \equiv I_1 \quad (4.1.29)$$

avec  $C_1 = \text{const.}$  (4.1.29) est la discrétisation invariante de l'EDO (4.1.16).

Le choix du maillage est important pour les tests numériques. Le maillage choisi ici permet de faire passer l'ordre du premier terme de correction du schéma du premier au deuxième ordre. Ce fait se constate facilement en regardant l'expansion de Taylor du schéma autour de  $y_n$  :

$$J_1^{n+1} = 8^2 \frac{I_2^{n+1} - \frac{1}{2}(I_1^{n+1} + I_1^n)}{I_1^n I_1^{n+1} (I_1^{n+1} + I_1^n)} = \frac{2xy'' + y'}{y'^3} + 2(h_{n+1} - h_n)x \frac{-3y''^2 + y'y'''}{3y'^4} + 0(h^2) \quad (4.1.30)$$

où  $0(h^2)$  peut contenir des termes de la forme  $h_n^i h_{n+1}^j$  avec  $i, j = 0, 1, 2$  et  $i+j = 2$ .

Or,

$$0 = I_1^{n+1} - I_1^n = 2(h_{n+1} - h_n) \frac{y'}{x} + 0(h^2) \quad (4.1.31)$$

ou

$$(h_{n+1} - h_n) = -\frac{x}{2y'} 0(h^2). \quad (4.1.32)$$

Ce qui signifie que la différence  $(h_{n+1} - h_n)$  est d'ordre  $0(h^2)$  et (4.1.30) est donc aussi d'ordre  $0(h^2)$ .

Un équivalent discret de l'invariant différentiel  $I_2$  est

$$J_2^{n+2} = \frac{3}{I_1^n + I_1^{n+1} + I_1^{n+2}} (J_1^{n+2} - J_1^{n+1}). \quad (4.1.33)$$

Un SΔO qui tend vers L'EDO (4.1.19) dans la limite du continu est

$$J_2^{n+2} = F(J_1^{n+1}) \quad I_1^{n+1} = I_1^n \equiv I_1. \quad (4.1.34)$$

Une autre possibilité intéressante serait

$$J_2^{n+2} = F\left(\frac{J_1^{n+1} + J_1^{n+2}}{2}\right) \quad I_1^{n+2} = I_1^n. \quad (4.1.35)$$

Sous ces formes, les deux schémas convergent comme  $0(h^2)$ . (4.1.34) possède la qualité d'être un schéma linéaire en  $y_{n+1}$  et en  $x_{n+1}$  peu importe la fonction  $F(J_1^{n+1})$ , ce qui est avantageux d'un point de vue du coût numérique de la méthode. Par contre, l'équation du maillage  $I_1^{n+1} = I_1^n$  du schéma (4.1.34) s'avère trop contraignante lors de tests numériques pour des EDO d'ordre 3 ou supérieur car il faut alors spécifier trois conditions initiales et  $I_1^n, I_1^{n+1}$  sont alors complètement déterminés<sup>1</sup>. Une façon de contourner ce problème est de prendre, lors des tests numériques, le maillage  $I_1^{n+1} = \gamma I_1^n$ , avec  $\gamma$  une constante déterminée par les conditions initiales, mais (4.1.34) perd alors sa propriété de convergence de deuxième ordre. Cette perte n'est cependant pas catastrophique en ce sens que (4.1.34) tend tout de même vers un ordre de précision  $0(h^2)$  à mesure que l'on rapetisse le pas  $h$ . Le schéma retenu pour les tests numériques sera (4.1.34), mais

<sup>1</sup>voir le chapitre 5 pour plus d'explications

il serait intéressant de tester (4.1.35) lors d'une prochaine recherche.

On peut montrer que les schémas (4.1.34) et (4.1.35) sont d'ordre  $O(h^2)$  en observant l'expansion de  $J_2^{n+2}$  autour de  $y_{n+1/2} = y(\frac{x_n+x_{n+1}}{2})$ . Cette expansion est

$$\begin{aligned}
J_2^{n+2} &= \frac{x^2(y'y''' - 3y''^2)}{y'^5} + \frac{h_n - h_{n+2}}{32(h_n + h_{n+1} + h_{n+2})xy'^6} (3(h_n - h_{n+1} + h_{n+2})y'^3 \\
&\quad - 120(h_n + h_{n+1} + h_{n+2})x^3y''^3 + 4x^2y'y''(3(5h_n + 3h_{n+1} + 5h_{n+2})y'' \\
&\quad + 20(h_n + h_{n+1} + h_{n+2})xy''') + 4xy'^2(3(h_n - h_{n+1} + h_{n+2})y'' \\
&\quad - 2(h_n + h_{n+1} + h_{n+2})x(2y''' + xy^{(4)})).
\end{aligned} \tag{4.1.36}$$

Or, le maillage  $I_1^n = I_1^{n+2}$  implique une relation similaire à (4.1.32) mais pour  $h_n$  et  $h_{n+2}$  :

$$(h_{n+2} - h_n) = \frac{x}{2y'} O(h^2). \tag{4.1.37}$$

$J_2^{n+2}$  et  $\frac{J_1^{n+1} + J_1^{n+2}}{2}$  sont donc respectivement des approximations de second ordre des invariants différentiels  $I_2^{n+1}$  et  $I_1^n$  sur le maillage  $I_1^n = I_1^{n+2}$ . De manière similaire,  $J_2^{n+2}$  et  $J_1^{n+1}$  sont de deuxième ordre sur le maillage  $I_1^n = I_1^{n+1}$ . Les schémas (4.1.34) et (4.1.35) sont donc de deuxième ordre pour toute fonction  $F$ .

### 4.1.3. SΔO explicites

Le schéma du deuxième ordre (4.1.29) implique

$$I_2^{n+1} = \frac{I_1^3 J_1^{n+1}}{32} + I_1 \equiv \beta \quad \beta \in \mathbb{R} \tag{4.1.38}$$

où  $\beta$  est une constante puisque  $I_1$  est complètement déterminé par les conditions initiales  $\{x_0, y_0, x_1, y_1\}^2$  fournies dans les tests numériques.

---

<sup>2</sup>Pour une EDO d'ordre 2 il faut spécifier deux conditions initiales.  $\{y_0, y'_0\}$  par exemple, ce qui revient à spécifier  $y$  en deux points du maillage.

Le schéma (4.1.29) peut donc être résolu de manière explicite en  $x_{n+1}$  et  $y_{n+1}$  :

$$y_{n+1} = \frac{y_{n-1} - \omega_n y_n}{1 - \omega_n}, \quad x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{(1 - \omega_n)^2}, \quad (4.1.39)$$

avec  $\omega_n = \frac{2\beta}{I_1} \sqrt{\frac{x_{n-1}}{x_n}}$ .

Le schéma de troisième ordre (4.1.34) implique quant à lui

$$y_{n+2} = \frac{y_n - \omega_n y_{n+1}}{1 - \omega_n}, \quad x_{n+2} = \frac{x_n}{(1 - \omega_n)^2} \quad (4.1.40)$$

avec

$$\omega_n \equiv \frac{2\beta_n}{I_1} \sqrt{\frac{x_n}{x_{n+1}}} \quad \text{où} \quad \beta_n \equiv \frac{2I_1^3}{8^2} (I_1 F(J_1^{n+1}) + J_1^{n+1}) + I_1 \quad (4.1.41)$$

Contrairement au schéma de second ordre,  $\omega_n$  et  $\beta_n$  doivent maintenant être calculés à chaque itération puisqu'ils dépendent de  $J_1^{n+1}$  qui varie avec  $n$ .

Les deux schémas invariants sont donc linéaires et explicites.

Note : Le SΔO explicité (4.1.40) a été déduit en utilisant le maillage  $I_1^{n+1} = I_1^n$  dans (4.1.34). Cependant, pour les raisons énoncées ci-haut, le maillage  $I_1^{n+1} = \gamma I_1^n$  sera choisi lors des tests numériques afin que ce dernier soit compatible avec le choix des conditions initiales, ce qui a pour effet de rajouter ici et là un facteur  $\gamma$  dans les équations (4.1.40), mais sans les modifier de manière importante. Je discuterai de cet ajustement du maillage de manière plus complète au chapitre 5.

$$4.2. \quad \underline{sl_2 : v_1 = \partial_y \quad v_2 = x\partial_x + y\partial_y \quad v_3 = 2xy\partial_x + (y^2 - x^2)\partial_y}$$

#### 4.2.1. EDO

Les invariants différentiels d'ordre deux et trois pour  $sl_2$  sont

$$I_1 = \frac{y'(1 + y'^2) - xy''}{(1 + y'^2)^{3/2}}, \quad I_2 = \frac{3x^2 y' y''^2 - x^2 y''' (1 + y'^2)}{(1 + y'^2)^3}. \quad (4.2.1)$$

On peut donc former l'EDO de second ordre

$$\frac{y'(1 + y'^2) - xy''}{(1 + y'^2)^{3/2}} = C_1 \quad C_1 = \text{constante}. \quad (4.2.2)$$

La solution générale de l'éq. (4.2.2) est

$$y_{1,2}(x) = \begin{cases} y_b + \frac{\sqrt{1 - (ax - C_1)^2}}{a} & a \neq 0 \\ y_b + \frac{C_1}{\sqrt{1 - C_1^2}}x & a = 0 \end{cases} \quad (4.2.3)$$

ou, sous une autre forme pour  $a \neq 0$ ,

$$(y - \tilde{y}_b)^2 + (x - C_1/a)^2 = 1/a^2 \quad (4.2.4)$$

avec  $a, y_b, \tilde{y}_b$  des constantes. On a donc un demi-cercle de centre  $(C_1/a, \tilde{y}_b)$  et de rayon  $r = 1/a$  pour  $a \neq 0$  et une droite pour  $a = 0$ . La solution se limite au demi-cercle supérieur pour  $C_1 > 0$  car (4.2.3) pour  $a \neq 0$  ne possède qu'un + devant la racine carrée plutôt qu'un  $\pm$ . Cependant, on obtient la moitié inférieure du même demi-cercle en prenant  $-C_1$ . Il faut toutefois réaliser que l'EDO (4.2.2) change avec  $C_1$ , les deux moitiés du cercle ne sont donc pas solution de la même équation. La solution demi-cercle  $a \neq 0$  est réelle pour  $|ax - C_1| \leq 1$ , ce qui équivaut au domaine  $[\frac{C_1-1}{a}, \frac{C_1+1}{a}]$  si  $a > 0$  et  $[\frac{C_1+1}{a}, \frac{C_1-1}{a}]$  si  $a < 0$ . La solution (4.2.3) pour  $a \neq 0$  possède une singularité aux extrémités du domaine puisqu'elle devient complexe et que ses dérivées deviennent infinies en ces points.

L'EDO de troisième ordre pouvant être formée à partir des invariants est

$$I_2 = F(I_1) \quad (4.2.5)$$

où  $F(I_1)$  est une fonction arbitraire.

Pour les fins des tests numériques, il faut spécifier  $F(I_1)$ . Je prendrai  $F(I_1) = I_1^2$ . Ce choix est tout à fait arbitraire et n'est, à ma connaissance, en rien plus avantageux pour une des méthodes en comparaison aux autres. L'EDO ainsi formée est

$$x^2 y'''(1 + y'^2) = 3x^2 y' y''^2 - (y'(1 + y'^2) - xy'')^2. \quad (4.2.6)$$

L'éq. (4.2.6) est invariante par rapport aux translations  $\partial_y(y \rightarrow y + \epsilon)$ , on peut donc effectuer le changement de variable  $u = y'$ . L'équation résultante est invariante par rapport aux dilatations  $x\partial_x(x \rightarrow \lambda x)$ , ce qui permet d'encore

réduire l'ordre de l'équation par le changement de variables  $v = \ln(x)$  et  $w = u$ . Puis, on peut encore poser  $z = v'$  (attention :  $v=v(w)$  et  $v'$  est donc une dérivée par rapport à  $w$ ). Tout ceci revient à poser  $w = y'$  et  $z = \frac{1}{xy''}$  et l'éq. (4.2.6) devient

$$z' = w^2(1 + w^2)z^3 - (1 + 2w)z^2 + \frac{1 - 3w}{1 + w^2}z, \quad (4.2.7)$$

qui est un cas particulier de l'équation d'Abel pour laquelle il n'y a pas de solution analytique connue. Cependant, l'éq. (4.2.6) possède la solution particulière

$$y(x) = y_b + \frac{(1 - a^2x^2)^{1/2}}{a}, \quad (4.2.8)$$

qui ressemble à la solution (4.2.3) pour  $a \neq 0$  de l'EDO d'ordre deux ((4.2.3) avec  $C_1 = 0$ ). La constante  $C_1$  n'a plus de sens pour l'équation du troisième ordre. Cette ressemblance des solutions n'est pas surprenante puisqu'elles sont construites à partir du même groupe de symétrie. La solution particulière (4.2.8) correspond aux moitiés supérieures des cercles de centre  $(0, \tilde{y}_b)$  et de rayon  $1/a$

$$(y - \tilde{y}_b)^2 + x^2 = 1/a^2. \quad (4.2.9)$$

Il est possible d'appliquer le changement de variable transformant (4.2.6) en (4.2.7) à la solution (4.2.8) et on obtient

$$z(w) = \frac{1}{w(1 + w^2)}, \quad (4.2.10)$$

qui est respectivement une solution de (4.2.7).

#### 4.2.2. S△O

Un ensemble complet d'invariants discrets fonctionnellement indépendants sur un maillage à trois points (pour approximer l'EDO de deuxième ordre) est

$$I_1^n = \sqrt{\frac{(x_n - x_{n-1})^2 + (y_n - y_{n-1})^2}{x_n x_{n-1}}}, \quad I_1^{n+1} = \sqrt{\frac{(x_{n+1} - x_n)^2 + (y_{n+1} - y_n)^2}{x_{n+1} x_n}}, \quad (4.2.11)$$

$$I_2^{n+1} = \sqrt{\frac{(x_{n+1} - x_{n-1})^2 + (y_{n+1} - y_{n-1})^2}{x_{n+1} x_{n-1}}}. \quad (4.2.12)$$

Il suffit de rajouter  $\{I_1^{n+2}, I_2^{n+2}\}$  pour obtenir un ensemble complet sur un maillage à quatre points (pour approximer l'EDO de troisième ordre).

Un  $S\Delta O$  qui tend vers l'EDO (4.2.2) dans la limite du continu est

$$C_1 = \sqrt{-8 \frac{I_2^{n+1} - (I_1^n + I_1^{n+1})}{I_1^n I_1^{n+1} (I_1^{n+1} + I_1^n)} + 1} \equiv J_1^{n+1} \quad I_1^{n+1} = I_1^n. \quad (4.2.13)$$

Comme pour  $sl_1$ , ce choix de maillage rend le schéma de second ordre, tel que le montre l'expansion de  $J_1^{n+1}$  autour de  $y_n = y(x_n)$

$$\begin{aligned} J_1^{n+1} &= \sqrt{-8 \frac{I_2^{n+1} - (I_1^n + I_1^{n+1})}{I_1^n I_1^{n+1} (I_1^{n+1} + I_1^n)} + 1} = \frac{y'(1+y'^2) - xy''}{(1+y'^2)^{3/2}} \\ &\quad + x(h_{n+1} - h_n) \frac{3y'y''^2 - (1+y'^2)y'''}{3(1+y'^2)^{5/2}} + 0(h^2), \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

car l'équation du maillage implique

$$0 = I_1^{n+1} - I_1^n = (h_{n+1} - h_n) \sqrt{\frac{1+y'^2}{x^2}} + 0(h^2). \quad (4.2.15)$$

La différence  $h_{n+1} - h_n$  est donc d'ordre  $0(h^2)$  et, par conséquent,  $J_1^{n+1}$  est une approximation d'ordre  $0(h^2)$  de l'invariant différentiel  $I_1$ .

Un équivalent discret de l'invariant  $I_2$  est

$$J_2^{n+2} = \frac{3}{I_1^n + I_1^{n+1} + I_1^{n+2}} (J_1^{n+2} - J_1^{n+1}), \quad (4.2.16)$$

et un  $S\Delta O$  qui tend vers l'EDO (4.2.6) dans la limite du continu est donc

$$J_2^{n+2} = F(J_1^{n+1}) \equiv (J_1^{n+1})^2 \quad I_1^{n+1} = I_1^n \quad (4.2.17)$$

ou encore

$$J_2^{n+2} = F\left(\frac{J_1^{n+1} + J_1^{n+2}}{2}\right) \equiv \left(\frac{J_1^{n+1} + J_1^{n+2}}{2}\right)^2 \quad I_1^{n+2} = I_1^n. \quad (4.2.18)$$

Exactement comme dans le cas de la réalisation  $sl_1$ , le maillage du schéma (4.2.17) est trop contraignant pour une EDO d'ordre trois (voir (4.1.34)). J'aurai recours au même truc du maillage  $I_1^{n+1} = \gamma I_1^n$  pour les tests numériques. Le schéma (4.2.18), qui est l'équivalent de (4.1.35) pour cette réalisation, est aussi une option intéressante puisque son maillage est compatible avec des conditions

initiales pour une EDO de troisième ordre. Le schéma (4.2.17) présente l'avantage de ne pas contenir de dépendance en  $x_{n+2}$  et  $y_{n+2}$  à l'intérieur de la fonction arbitraire  $F$ , ce qui simplifie la résolution. Je m'attendrais cependant à ce que le schéma (4.2.18) soit plus précis que le précédent. Je repousse toutefois la comparaison de ces deux schémas à une prochaine recherche.

Ces deux schémas sont d'ordre  $0(h^2)$  puisque l'expansion de  $J_2^{n+2}$  autour de  $y_{n+1/2} = y\left(\frac{x_n+x_{n+1}}{2}\right)$  est

$$J_2^{n+2} = \frac{3x^2y'y''^2 - x^2y'''(1+y'^2)}{(1+y'^2)^3} - (h_{n+2} - h_n)H(x, y', \dots, y^{(4)}) + 0(h^2) \quad (4.2.19)$$

et que les maillages impliquent

$$h_{n+2} - h_n \sim 0(h^2). \quad (4.2.20)$$

$J_1^{n+1}$  et  $\frac{J_1^{n+1}+J_1^{n+2}}{2}$  sont aussi d'ordre  $0(h^2)$  sur les maillages  $I_1^{n+1} = I_1^n$  et  $I_1^{n+2} = I_1^n$  respectivement.

### 4.2.3. SΔO explicites

Le schéma du deuxième ordre (4.2.13) implique

$$I_2^{n+1} = -\frac{(I_1^n)^3}{4}(C_1^2 - 1) + 2I_1^n \equiv \beta. \quad (4.2.21)$$

$\beta$  est donc une constante car  $I_1^n$  est complètement déterminé par les conditions initiales.

En terme des points du maillage, le schéma devient donc

$$(x_{n+1} - x_{n-1})^2 + (y_{n+1} - y_{n-1})^2 = x_{n+1}x_{n-1}\beta^2 \quad (4.2.22)$$

$$(x_{n+1} - x_n)^2 + (y_{n+1} - y_n)^2 = x_{n+1}x_nI_1^2.$$

En soustrayant les deux équations et en réarrangeant les termes, on obtient le schéma

$$(x_n(2 + I_1^2) - x_{n-1}(2 + \beta^2))x_{n+1} + 2(y_n - y_{n-1})y_{n+1} = x_n^2 - x_{n-1}^2 + y_n^2 - y_{n-1}^2 \quad (4.2.23)$$

$$(x_{n+1} - (1 + I_1^2/2)x_n)^2 + (y_{n+1} - y_n)^2 = (1 + I_1^2/4)I_1^2x_n^2.$$

La résolution du schéma (4.2.23) consiste donc à trouver l'intersection entre une droite et un cercle de centre  $((1 + I_1^2/2)x_n, y_n)$  et de rayon  $r = \sqrt{1 + I_1^2/4}I_1x_n$  ( $x_{n+1}$  et  $y_{n+1}$  sont les inconnues). Ce fait est intéressant puisque la solution (4.2.4) de l'EDO approximée par le schéma est justement circulaire. Comme si les invariants discrets de  $sl_2$  avaient une structure liée à la solution de son EDO invariante.

Notons que  $C_1$  n'apparaît qu'au carré dans  $\beta$  (4.2.21). Le schéma symétrique (4.2.23) est donc insensible au signe de  $C_1$  et trace (voir section 5.2.1) un cercle complet plutôt qu'un demi-cercle pour  $C_1 > 0$  et le demi-cercle complémentaire pour  $C_1 < 0$ . Il faut donc parfois être prudent avec la méthode symétrique. Ceci dit, une solution en cercle est peut-être plus sensée d'un point de vue physique<sup>3</sup> qu'une solution en demi-cercle avec une singularité à chaque extrémité. Autrement dit, l'équation «naturelle» serait peut-être le carré de l'EDO (4.2.2); la solution posséderait alors aussi la branche avec un «-» devant la racine dans (4.2.3). C'est dire que pour une telle EDO le cercle complet serait alors solution et le schéma symétrique tracerait toujours le cercle.

Le schéma de troisième ordre (4.2.17) explicité est très similaire

$$(x_{n+1}(2 + I_1^2) - x_n(2 + \beta_n^2))x_{n+2} + 2(y_{n+1} - y_n)y_{n+2} = x_{n+1}^2 - x_n^2 + y_{n+1}^2 - y_n^2 \quad (4.2.24)$$

$$(x_{n+2} - (1 + I_1^2/2)x_{n+1})^2 + (y_{n+2} - y_{n+1})^2 = (1 + I_1^2/4)I_1^2x_{n+1}^2$$

---

<sup>3</sup>si on considère le parcours d'une particule par exemple

avec

$$\beta_n \equiv -\frac{(I_1^n)^3}{4} [(I_1^n F(J_1^{n+1}) + J_1^{n+1})^2 - 1] + 2I_1^n. \quad (4.2.25)$$

$\beta_n$  dépend du point  $(x_{n+1}, y_{n+1})$  et doit être calculé à chaque itération. De plus,  $F(J_1^{n+1})$  n'est pas au carré ici (contrairement à  $C_1$  dans le schéma du deuxième ordre (4.2.23)), il n'y a donc plus d'ambiguïté sur la solution.

$$4.3. \quad \underline{sl_3 : v_1 = \partial_y \quad v_2 = x\partial_x + y\partial_y \quad v_3 = (2xy + x^2)\partial_x + (y^2 - x^2)\partial_y}$$

#### 4.3.1. EDO

Les invariants différentiels d'ordre deux et trois pour  $sl_3$  sont

$$I_1 = \frac{xy'' + 2y'(1 + 3y' + 2y'^2)}{y^{3/2}(1 + y')^{3/2}}, \quad (4.3.1)$$

$$I_2 = \frac{x^2y'''(1 + y') - 3x^2y''^2 + 6xy''(1 + 2y')(1 + y') + 6y'(1 + y')^2(1 + 6y'(1 + y'))}{y^2(1 + y')^3}.$$

L'EDO de second ordre est donc

$$\frac{xy'' + 2y'(1 + 3y' + 2y'^2)}{y^{3/2}(1 + y')^{3/2}} = C_1 \quad C_1 = \text{constante.} \quad (4.3.2)$$

Sa solution générale est

$$y_{1,2}(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} \pm \frac{1}{2a} \sqrt{(ax \pm C_1)^2 - 16} + b & a \neq 0 \\ \frac{16 - C_1^2 + C_1 \sqrt{C_1^2 - 16}}{2(C_1^2 - 16)} x + b & a = 0 \end{cases} \quad (4.3.3)$$

avec  $a, b$  des constantes. La solution (4.3.3) pour  $a \neq 0$  est une hyperbole.

L'EDO de troisième ordre est, quant à elle,

$$I_2 = F(I_1) \quad (4.3.4)$$

avec  $F(I_1)$  une fonction arbitraire.

Je prendrai  $F(I_1) = I_1^2$  lors des tests numériques. L'EDO ainsi formée est

$$\begin{aligned} x^2y'y'''(1 + y') &= x^2y''^2(1 + 3y') - 2xy'y''(1 + y')(1 + 2y') \\ &\quad - 2y'^2(1 + y')^2(1 + 10y'(1 + y')). \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

En appliquant des changements de variables successifs (en fait, on applique exactement les mêmes changements de variables que pour obtenir l'éq. (4.2.6)), l'éq. (4.3.5) peut être réduite à

$$z' = 2w(1+w)(1+10w(1+w))z^3 + (1+4w)z^2 - \frac{1+3w}{w(1+w)}z, \quad (4.3.6)$$

qui, comme (4.2.7), est un cas particulier de l'équation d'Abel et ne possède pas de solution analytique connue.

Une solution particulière de l'éq. 4.3.5 est

$$y(x) = -x + b. \quad (4.3.7)$$

### 4.3.2. SΔO

Un ensemble complet d'invariants discrets fonctionnellement indépendants sur le maillage à trois points est

$$I_1^n = \sqrt{\frac{(x_n - x_{n-1})(y_n - y_{n-1}) + (y_n - y_{n-1})^2}{x_n x_{n-1} - (x_n - x_{n-1})(y_n - y_{n-1}) - (y_n - y_{n-1})^2}}, \quad (4.3.8)$$

$$I_1^{n+1} = \sqrt{\frac{(x_{n+1} - x_n)(y_{n+1} - y_n) + (y_{n+1} - y_n)^2}{x_{n+1} x_n - (x_{n+1} - x_n)(y_{n+1} - y_n) - (y_{n+1} - y_n)^2}}, \quad (4.3.9)$$

$$I_2^{n+1} = \sqrt{\frac{(x_{n+1} - x_{n-1})(y_{n+1} - y_{n-1}) + (y_{n+1} - y_{n-1})^2}{x_{n+1} x_{n-1} - (x_{n+1} - x_{n-1})(y_{n+1} - y_{n-1}) - (y_{n+1} - y_{n-1})^2}}, \quad (4.3.10)$$

et  $\{I_1^{n+2}, I_2^{n+2}\}$  complètent sur le maillage à quatre points.

Un SΔO qui tend vers l'EDO (4.3.2) dans la limite du continu est

$$C_1 = 4\sqrt{2} \sqrt{\frac{I_2 - (I_1 + I_{1+})}{I_1 I_{1+} (I_1 + I_{1+})}} - 1 \equiv J_1^{n+1} \quad I_1^{n+1} = I_1^n. \quad (4.3.11)$$

L'équation du maillage est, une fois de plus, choisie de manière à ce que le schéma soit de second ordre; ce que l'on constate en prenant l'expansion de  $J_1^{n+1}$  autour de  $y_n$

$$J_1^{n+1} = \frac{xy'' + 2y'(1 + 3y' + 2y'^2)}{y'^{3/2}(1 + y')^{3/2}} - (h_{n+1} - h_n) \frac{x(-3(1 + 2y')y''^2 + 2y'(1 + y')y''')}{6y'^{5/2}(1 + y')^{5/2}} + O(h^2), \quad (4.3.12)$$

car, par l'équation du maillage,

$$0 = I_1^{n+1} - I_1^n = (h_{n+1} - h_n) \sqrt{\frac{y'(1+y')}{x^2}} + 0(h^2). \quad (4.3.13)$$

La différence  $h_{n+1} - h_n$  est donc d'ordre  $0(h^2)$  et  $J_1^{n+1}$  est bien une approximation d'ordre  $0(h^2)$  de l'invariant différentiel  $I_1$ .

Un équivalent discret de l'invariant  $I_2$  (4.3.1) est

$$J_2^{n+1} = \frac{3}{I_1^n + I_1^{n+1} + I_1^{n+2}} (J_1^{n+2} - J_1^{n+1}) + \frac{3}{2} J_1^2 + 12 \quad (4.3.14)$$

et un S $\Delta$ O qui tend vers l'EDO (4.3.5) dans la limite du continu est donc

$$J_2^{n+2} = F(J_1^{n+1}) \equiv (J_1^{n+1})^2 \quad I_1^{n+1} = I_1^n \quad (4.3.15)$$

ou encore

$$J_2^{n+2} = F\left(\frac{J_1^{n+1} + J_1^{n+2}}{2}\right) \equiv \left(\frac{J_1^{n+1} + J_1^{n+2}}{2}\right)^2 \quad I_1^{n+2} = I_1^n. \quad (4.3.16)$$

Comme pour les deux réalisations précédentes, la discussion sur le maillage s'applique (voir (4.1.34) et (4.2.17)). Ces deux schémas sont d'ordre  $0(h^2)$ . L'expansion  $J_2^{n+2}$  autour  $y_{n+1/2} = y\left(\frac{x_n + x_{n+1}}{2}\right)$  est

$$J_2^{n+2} = \frac{x^2 y'''(1+y') - 3x^2 y''^2 + 6xy''(1+2y')(1+y') + 6y'(1+y')^2(1+6y'(1+y'))}{y'^2(1+y')^3} \quad (4.3.17)$$

$$- (h_{n+2} - h_n) H(x, y', \dots, y^{(4)}) + 0(h^2)$$

et les équations du maillage pour (4.3.15) et (4.3.16) impliquent

$$h_{n+2} - h_n \sim 0(h^2). \quad (4.3.18)$$

### 4.3.3. S $\Delta$ O explicites

Le schéma du deuxième ordre (4.3.11) implique

$$I_2^{n+1} = 2I_1^n \left( (I_1^n)^2 \left( \frac{C_1^2}{32} + 1 \right) + 1 \right) \equiv \beta \quad (4.3.19)$$

où  $\beta$  est une constante déterminée par les conditions initiales.

En terme des points du maillage, le schéma résultant est

$$(x_{n+1} - x_{n-1})(y_{n+1} - y_{n-1}) + (y_{n+1} - y_{n-1})^2 = \frac{x_{n+1}x_{n-1}\beta^2}{1 + \beta^2} \quad (4.3.20)$$

$$(x_{n+1} - x_n)(y_{n+1} - y_n) + (y_{n+1} - y_n)^2 = \frac{x_{n+1}x_n(I_1^n)^2}{1 + (I_1^n)^2}.$$

Comme pour le cas  $sl_2$ , le schéma symétrique ne tient compte que de  $C_1^2$ . Il tracera donc, encore une fois, la solution pour l'EDO (4.3.2) avec  $C_1$  et avec  $-C_1$ , ou encore, la solution du carré de l'EDO (4.3.2) (voir Fig. 5.10).

De plus, la soustraction des deux équations de (4.3.20) transforme la première équation en une droite. Le schéma résultant est

$$(y_n - y_{n-1} + px_n - qx_{n-1})x_{n+1} + (2(y_n - y_{n-1}) + x_n - x_{n-1})y_{n+1}$$

$$= y_n(x_n + y_n) - y_{n-1}(x_{n-1} + y_{n-1}) \quad (4.3.21)$$

$$(x_{n+1} - x_n)(y_{n+1} - y_n) + (y_{n+1} - y_n)^2 = px_n x_{n+1}$$

avec

$$p = \frac{I_1^2}{1 + I_1^2}, \quad q = \frac{\beta^2}{1 + \beta^2}. \quad (4.3.22)$$

La résolution du schéma (4.3.3) consiste donc à trouver l'intersection entre une droite et une hyperbole<sup>4</sup>. Encore une fois, il est frappant de voir que le schéma symétrique possède une structure similaire à celle de la solution (4.3.3) (qui est une hyperbole) de l'EDO approximée par le schéma.

Comme pour les réalisations  $sl_1$  et  $sl_2$ , le schéma de troisième ordre (4.3.15) explicité est très similaire à celui de deuxième ordre

$$(y_{n+1} - y_n + px_{n+1} - q_n x_n)x_{n+2} + (2(y_{n+1} - y_n) + x_{n+1} - x_n)y_{n+2}$$

$$= y_{n+1}(x_{n+1} + y_{n+1}) - y_n(x_n + y_n) \quad (4.3.23)$$

$$(x_{n+2} - x_{n+1})(y_{n+2} - y_{n+1}) + (y_{n+2} - y_{n+1})^2 = px_{n+1}x_{n+2}$$

---

<sup>4</sup>Sous la forme  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$  la seconde équation a  $B^2 - 4AC = 1 - 4 \cdot 0 \cdot 1 = 1 > 0$  et est donc une hyperbole

avec

$$\beta = 2I_1^n \left[ (I_1^n)^2 \left( \frac{1}{32} (I_1^n F(J_1^{n+1}) + J_1^{n+1})^2 + 1 \right) + 1 \right] \quad (4.3.24)$$

et

$$p = \frac{I_1^2}{1 + I_1^2}, \quad q_n = \frac{\beta_n^2}{1 + \beta_n^2}. \quad (4.3.25)$$

$$4.4. \quad \underline{sl_4 : v_1 = \partial_y \quad v_2 = y\partial_y \quad v_3 = y^2\partial_y}$$

#### 4.4.1. EDO

$sl_4$  n'admet pas d'invariant différentiel de deuxième ordre, sinon  $I_1 = x$  qui est forcément toujours un invariant pour cette réalisation. L'invariant de troisième ordre est

$$I_2 = \frac{1}{y^2} \left( y'y''' - \frac{3}{2}y''^2 \right) \quad (4.4.1)$$

Il n'y a donc pas d'EDO du deuxième ordre invariante, mais il y en a une du troisième ordre donnée par

$$\frac{1}{y^2} \left( y'y''' - \frac{3}{2}y''^2 \right) = F(x) \quad (4.4.2)$$

avec  $F(x)$  une fonction arbitraire.

Comme dans le cas de  $sl_1$ ,  $sl_4$  peut être étendue à  $gl(2, \mathbb{R})$  en ajoutant, cette fois, le générateur  $v_4 = \partial_x$ . Si on requiert que l'EDO (4.4.2) soit invariante par rapport à  $v_4$ , elle devient

$$\frac{1}{y^2} \left( y'y''' - \frac{3}{2}y''^2 \right) = C_1 \quad (4.4.3)$$

avec  $C_1$  une constante.

La solution générale de l'éq. (4.4.3) est

1.) Si  $C_1 \neq 0$ ,

$$y(x) = \sqrt{2/C_1} b \tan(\sqrt{C_1/2}(x+a)) + c \quad (4.4.4)$$

avec  $a, b, c$  des constantes.

2.) Si  $C_1 = 0$ ,

$$y(x) = \frac{1}{ax + b} + c. \quad (4.4.5)$$

$y(x) = ax + b$  est évidemment aussi une solution.

#### 4.4.2. SΔO

Un ensemble complet d'invariants discrets fonctionnellement indépendants est

$$R \equiv \frac{(y_{n+2} - y_n)(y_{n+1} - y_{n-1})}{(y_{n+2} - y_{n+1})(y_n - y_{n-1})}, x_n, h_{n+2}, h_{n+1}, h_n. \quad (4.4.6)$$

On peut former l'invariant

$$J_1^{n+2} = \frac{6h_{n+2}h_n}{h_{n+1}(h_{n+1} + h_{n+2})(h_n + h_{n+1})(h_n + h_{n+1} + h_{n+2})} \left[ \frac{(h_{n+2} + h_{n+1})(h_{n+1} + h_n)}{h_n h_{n+2}} - R \right] \quad (4.4.7)$$

et un SΔO qui tend vers l'EDO (4.4.2) dans la limite du continu est (pour  $F(x, h_n, h_{n+1}, h_{n+2}) \rightarrow F(x)$ )

$$J_1^{n+2} = F(x_n, h_n, h_{n+1}, h_{n+2}) \quad h_{n+1} = h_n \equiv h. \quad (4.4.8)$$

Le maillage est donc uniforme.

Ce choix de maillage fait en sorte que  $J_1^{n+2}$  tende vers  $I_1$  comme  $0(h^2)$  car

$$J_1^{n+2} = \frac{1}{y'^2} \left[ y' y''' - \frac{3}{2} y''^2 \right] + (h_{n+2} - h_n) H(x, y', \dots, y^{(4)}) + 0(h^2) \quad (4.4.9)$$

avec  $H(x, y', \dots, y^{(4)})$  une fonction arbitraire.  $n$  étant arbitraire dans la définition du maillage, ce dernier implique aussi  $h_{n+2} = h_n$ .

#### 4.4.3. SΔO explicites

Le schéma (4.4.8) implique

$$R = 4 - 2h^2 F(x_n, h, h, h) \equiv \rho \quad (4.4.10)$$

et donc, par (4.4.6),

$$y_{n+2} = \frac{y_n(y_{n+1} - y_{n-1}) - y_{n+1}(y_n - y_{n-1})\rho}{(y_{n+1} - y_{n-1}) - (y_n - y_{n-1})\rho}, \quad x_{n+2} = x_{n+1} + h. \quad (4.4.11)$$

Le schéma symétrique est donc linéaire et explicite en  $y_{n+2}$ .

# Chapitre 5

---

## ANALYSE NUMÉRIQUE

La recherche de schémas *symétriques* tels que ceux trouvés dans ce mémoire requiert un outillage relativement complexe et demande parfois des calculs fastidieux, on voudrait donc que ces schémas possèdent des qualités que n'ont pas les schémas dits *standards* qui sont nettement plus simples à obtenir. Pour chaque exemple traité, je tenterai de répondre à deux grandes questions. La première consiste à comparer la précision des schémas symétriques à celle des schémas standards ainsi que de déterminer l'ordre de convergence des solutions des différentes méthodes. La seconde consiste à examiner la capacité des méthodes étudiées à décrire des solutions possédant une ou des singularités.

Évidemment, il aurait été possible de comparer la *méthode symétrique* à toutes sortes d'autres méthodes. Même si compare de façon significative les méthodes dites *standards* (qui seront expliquées sous peu) à la méthode symétrique, il serait intéressant à l'avenir de comparer cette dernière à d'autres méthodes développées en analyse numérique (tout spécialement avec des méthodes plus efficaces dans la description de solutions proches de singularités).

La procédure que j'utilise pour comparer la méthode symétrique aux méthodes standards a été élaborée et énoncée par Anne Bourlioux dans l'article [11]. Nous avons aussi réutilisé cette procédure dans l'article [13]. Elle compare les schémas symétriques à des schémas standards pour un problème aux valeurs initiales sur

un intervalle donné.

### Procédure des tests numériques

1) Il faut toujours se doter d'une solution de référence. Lorsqu'il n'y a pas de solution générale analytique connue à l'EDO étudiée, une solution de référence est calculée à l'aide de la routine de Matlab ODE45 (qui utilise une méthode de type Runge-Kutta), avec une tolérance sur l'erreur fixée à  $tol = 10^{-9}$ . La première étape consiste à convertir l'EDO d'ordre  $n$  en un système de  $n$  EDO de premier ordre en posant  $u_1(x) = y(x), u_2(x) = y'(x), \dots, u_n(x) = y^{(n-1)}(x)$ . L'EDO

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (5.0.12)$$

devient

$$u'_1 = u_2, \quad u'_2 = u_3, \quad \dots, \quad u'_n = F(x, u_1, u_2, \dots, u_n). \quad (5.0.13)$$

À condition de fournir un intervalle d'intégration et des conditions initiales  $\{u_1(x_0), u_2(x_0), \dots, u_n(x_0)\}$ , ODE45 produit une solution correspondante en ajustant le pas  $h$  à chaque itération afin de satisfaire la tolérance imposée. Ces solutions très précises, mais très coûteuses numériquement, servent de solutions de références et aussi de conditions initiales tel qu'expliqué au prochain point.

2) Les conditions initiales d'un problème aux valeurs initiales sont généralement données sous la forme  $\{y(x_0), y'(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)\}$  alors que les schémas discrets nécessitent plutôt des conditions initiales sous la forme  $\{y(x_0), y(x_1), \dots, y(x_{n-1})\}$ . On peut donc utiliser la solution de référence obtenue en 1) pour transformer les conditions initiales sur les dérivées afin d'obtenir les conditions initiales aux points  $\{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$  du maillage. Pour plus de simplicité, le pas  $h$  est choisi uniforme entre les points initiaux  $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)\}$ , ce qui induit le maillage  $I_1^{n+1} = \gamma I_1^n$  pour la méthode symétrique dans le cas des EDO de troisième ordre car  $I_1^n$  et  $I_1^{n+1}$  sont complètement déterminés par ces trois points. Il n'est pas dit, toutefois, qu'il n'existe pas trois points

$\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)\}$  répartis de manière non-uniforme satisfaisant exactement  $I_1^{n+1} = I_1^n$ , mais ces derniers, s'ils existent, ne se trouvent pas aisément. Il serait intéressant dans une prochaine recherche de développer une méthode qui approximerait numériquement, lorsque possible, les pas  $h_n$  et  $h_{n+1}$  afin d'obtenir ces trois points satisfaisant exactement  $I_1^{n+1} = I_1^n$ .

3) Les schémas standards auxquels sont comparés la méthode symétrique sont des schémas générés en remplaçant simplement les dérivées continues par des équivalents discrets. Cette méthode est souvent appelée *méthode des différences finies* en analyse numérique. Concrètement, il faut d'abord calculer le polynôme d'interpolation  $P(x)$ , puis calculer ses dérivées.

**Définition 5.0.1** (Polynôme d'interpolation). Le polynôme d'interpolation de degré  $\leq n - 1$  passant par les  $n$  points  $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$  est donné par

$$P_n(x) = \sum_{j=1}^n p_j(x) \quad (5.0.14)$$

avec

$$p_j(x) = y_j \prod_{k=1, k \neq j}^n \frac{x - x_k}{x_j - x_k} \quad (5.0.15)$$

$$k \neq j \quad (5.0.16)$$

Pour un maillage à quatre points  $\{(x_{n-1}, y_{n-1}), (x_n, y_n), (x_{n+1}, y_{n+1}), (x_{n+2}, y_{n+2})\}$  (pour une EDO de troisième ordre), par exemple, on obtient

$$\begin{aligned} P_3'(x_{n+1/2}) &= \frac{1}{24h} (27(y_{n+1} - y_n) - (y_{n+2} - y_{n-1})), \\ P_3''(x_{n+1/2}) &= \frac{1}{2h^2} (y_{n+2} - (y_{n+1} + y_n) + y_{n-1}), \\ P_3'''(x_{n+1/2}) &= \frac{1}{h^3} (y_{n+2} - 3y_{n+1} + 3y_n - y_{n-1}), \end{aligned} \quad (5.0.17)$$

où  $x_{n+1/2} = \frac{x_n + x_{n+1}}{2}$ . Les polynômes sont évalués au centre du maillage, ce qui est  $x_{n+1/2}$  dans ce cas mais qui serait  $x_n$  dans le cas d'une EDO de deuxième ordre où on utiliserait seulement trois points (il faut aussi prendre le polynôme

d'interpolation pour trois points pour une EDO de deuxième ordre). Il suffit ensuite de remplacer les dérivées continues par ces expressions dans l'EDO pour obtenir le schéma standard. L'équation du maillage est fixée à  $h_n = h_{n+1}$ , ce qui implique  $x_n = x_0 + nh$  avec  $h = (x_f - x_0)/N$  sur un intervalle  $[x_0, x_f]$  et un maillage de  $N + 1$  points. Typiquement, le schéma standard résultant est non-linéaire en  $y_{n+2}$  ou en  $y_{n+1}$  pour des EDO d'ordre 3 et 2 respectivement. Puisque les schémas symétriques sont, quant à eux, parfois linéaires, il est intéressant de les comparer aussi à des schémas standards *linéarisés* qui consistent à prendre les expressions suivantes pour les dérivées (pour une EDO de troisième ordre)

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h}, \\ y''(x) &= \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2}, \\ y'''(x) &= \frac{y_{n+2} - 3y_{n+1} + 3y_n - y_{n-1}}{h^3}, \end{aligned} \tag{5.0.18}$$

ou encore, pour une EDO de deuxième ordre,

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{y_n - y_{n-1}}{h}, \\ y''(x) &= \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2}. \end{aligned} \tag{5.0.19}$$

4) Les schémas non-linéaires<sup>1</sup>, autant pour la méthode symétrique que pour la méthode standard, sont résolus à l'aide de méthodes de point fixe (généralement la méthode de Newton). Les schémas linéaires sont résolus directement.

5) Les erreurs de toutes les méthodes sont calculées en comparant les  $y_n$  fournis par les méthodes à la solution de référence (trouvée en 1)) évaluée en  $x_n$  :  $y_{ref}(x_n)$ . Malgré que la routine ODE45 choisisse elle-même un maillage approprié à la tolérance requise par l'utilisateur, il est possible d'exiger qu'elle rende des approximations précises de la solution à des points spécifiques.

---

<sup>1</sup>non-linéaire dans ce contexte veut dire non-linéaire en  $y_{n+2}$  et  $y_{n+1}$  pour les EDO d'ordre 3 et 2 respectivement, comme précédemment

$$5.1. \quad \underline{sl_1 : X_1 = \partial_y \quad X_2 = x\partial_x + y\partial_y \quad X_3 = 2xy\partial_x + y^2\partial_y}$$

### 5.1.1. 2e ordre

La discrétisation standard de (4.1.16) est

$$\frac{2x_n(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}))}{h^2} + \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} - C_1 \left( \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} \right)^3 = 0 \quad (5.1.1)$$

et la discrétisation standard linéarisée est

$$\frac{2x_n(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}))}{h^2} + \frac{y_n - y_{n-1}}{h} - C_1 \left( \frac{y_n - y_{n-1}}{h} \right)^3 = 0. \quad (5.1.2)$$

La solution exacte de l'EDO (4.1.16) est donnée par (4.1.17). Fig.5.1 montre la solution, pour  $D_1 \neq 0$ ,  $y_1$  (branche croissante) et  $y_2$  (branche décroissante) avec  $C_1 = 150$ ,  $y_b = 5$  et  $D_1 = e^2$  sur l'intervalle  $[1,25]$ . Le maillage choisi pour la solution exacte est  $h = 0.05$ . La méthode symétrique intègre le long de  $y_1$  jusqu'à la singularité à  $x = C_1/D_1 \sim 20.3$  puis accroche et revient le long de la branche décroissante  $y_2$ . Autrement dit, la méthode symétrique trace la parabole (4.1.18) pour  $x > 0$ . Fig.5.2 illustre les comportements des méthodes standards proche de la singularité. La méthode standard linéarisée est clairement une mauvaise approximation de la solution. La méthode standard quant à elle, est relativement précise mais cesse de converger proche de la singularité alors que la méthode symétrique continue. (4.1.17) implique que la solution demeure finie à la singularité mais que c'est sa dérivée qui devient infinie et ce comportement est bien reproduit par la méthode symétrique.

Fig.5.3 montre la précision du schéma standard et du schéma symétrique. Le schéma standard linéarisé n'est pas tracé étant nettement moins précis. La Table 5.1 recense les erreurs des différentes méthodes pour des pas  $h = 0.05, 0.01, 0.005$ . On en déduit que la méthode standard est environ dix fois plus précise que la méthode symétrique et que les deux méthodes sont de second ordre de précision. La méthode standard linéarisée est quant à elle de premier ordre de précision.

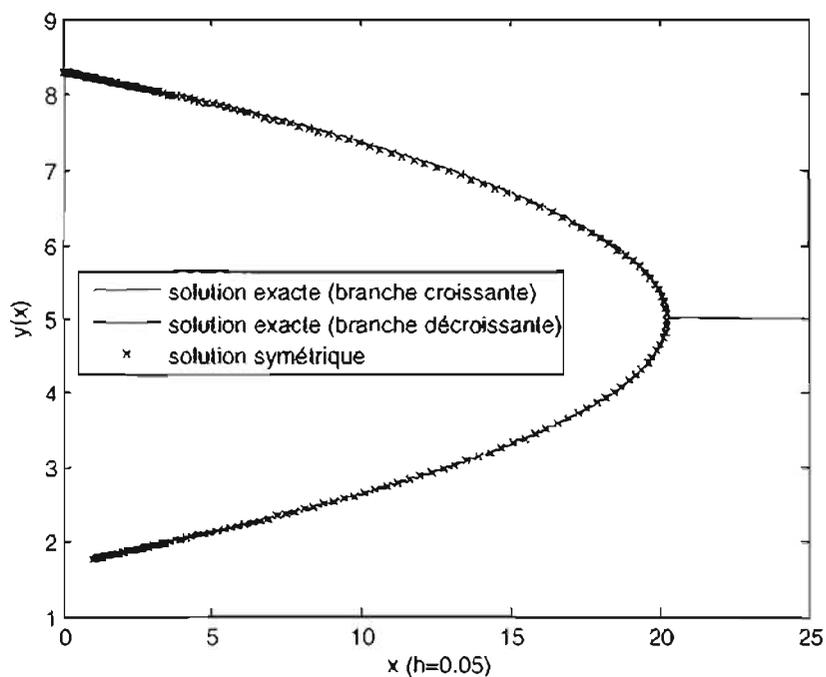


FIG. 5.1. Comportement du schéma symétrique proche de la singularité pour l'éq. (4.1.16)

maillage	$h = 0.05$	$h = 0.01$	$h = 0.005$
schéma symétrique	$3.15 \cdot 10^{-3}$	$1.26 \cdot 10^{-4}$	$3.20 \cdot 10^{-5}$
schéma standard	$6.46 \cdot 10^{-4}$	$2.94 \cdot 10^{-5}$	$7.47 \cdot 10^{-6}$
schéma standard linéarisé	$9.05 \cdot 10^{-2}$	$2.49 \cdot 10^{-2}$	$1.32 \cdot 10^{-2}$

TAB. 5.1. Erreur des méthodes symétrique et standard pour l'éq. (4.1.16)

En conclusion, la méthode symétrique présente dans ce cas-ci l'avantage d'être linéaire (et donc peu coûteuse numériquement) et de mieux approximer la singularité que les autres méthodes. Cependant, elle est moins précise que la méthode standard (non-linéaire) loin de la singularité.

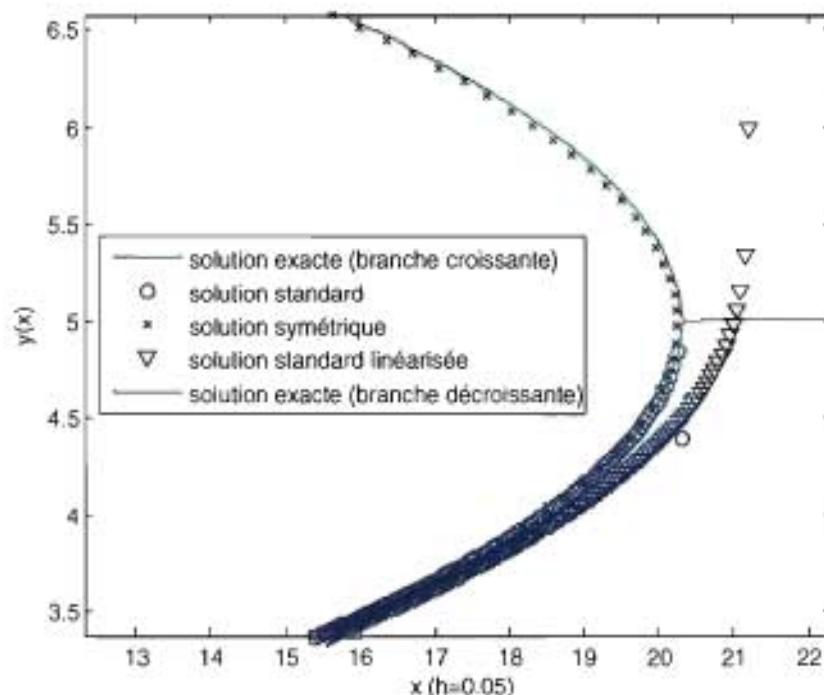


FIG. 5.2. Comportement de toutes les méthodes proche de la singularité pour l'éq. (4.1.16)

### 5.1.2. 3e ordre

Les discrétisations standard et standard linéarisée de (4.1.20) sont obtenues selon la méthode indiquée ci-dessus (5). Je n'écrirai plus au long ces discrétisations car les équations deviennent de plus en plus grosses, mais la façon de les déduire est toujours aussi simple.

Aucune solution exacte n'est cette fois disponible. La routine ODE45 est donc utilisée pour générer une solution de référence. La constante  $A$  apparaissant dans (4.1.20) est fixée à  $A = -1$  et les conditions initiales choisies sont  $\{y_0 = 1, y'_0 = 10, y''_0 = -4\}$ . L'intervalle d'intégration est  $[0, 16]$ . Tel que mentionné, l'équation du maillage utilisée pour le schéma symétrique est  $I_1^{n+1} = \gamma I_1^n$  où  $\gamma$  est déterminé par les conditions initiales. À mesure que le pas  $h$  tend vers 0,  $\gamma$  tend vers 1 et le schéma est de plus en plus près d'être de second ordre de

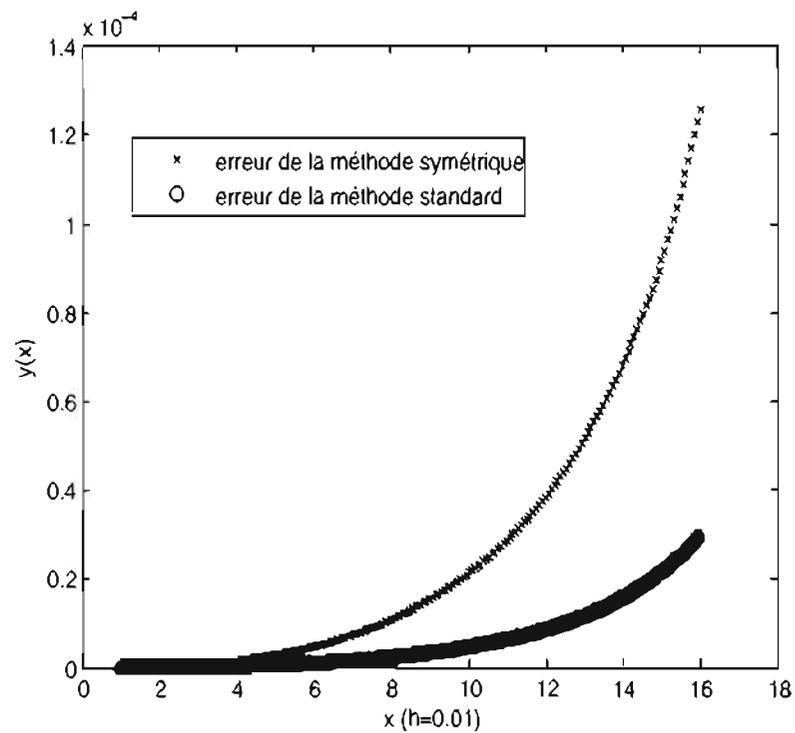


FIG. 5.3. Erreur des méthodes symétrique et standard pour l'éq. (4.1.16)

convergence vers l'EDO.

Fig.5.4 et Table 5.2 montre les erreurs des différentes méthodes. La méthode standard linéarisée n'est pas illustrée dans la figure Fig.5.4, car les erreurs sont beaucoup trop grandes par rapport à celles des autres méthodes. La méthode symétrique est dix fois plus précise que la méthode standard (et cent fois plus que la méthode standard linéarisée) tout en étant linéaire et donc moins coûteuse que la méthode standard. Les méthodes standard linéarisée et symétrique sont d'ordre de précision  $O(h)$  alors que la méthode standard est d'ordre de précision  $O(h^2)$ . Cependant, la méthode standard semble sensible aux erreurs d'arrondis vu la complexité du schéma et cesse de converger pour un pas  $h$  de l'ordre de  $h \sim 0.001$ . La méthode symétrique demeure stable peu importe la taille du pas  $h$  et est donc toujours plus précise que la méthode standard.

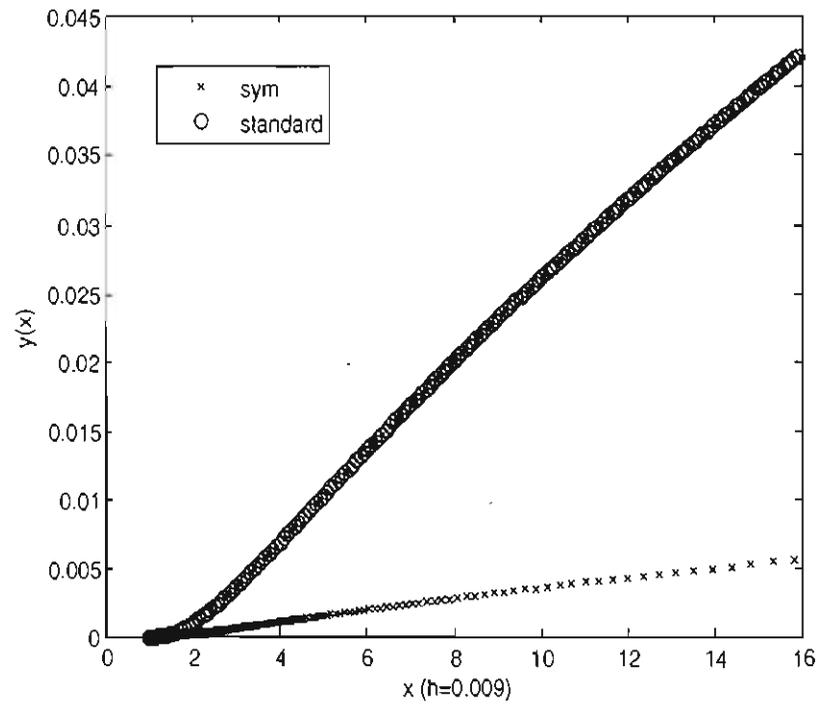


FIG. 5.4. Erreurs des méthodes symétrique et standard pour l'éq. (4.1.20)

maillage	$h = 0.02$	$h = 0.009$	$h = 0.005$
schéma symétrique	$1.16 \cdot 10^{-2}$	$5.60 \cdot 10^{-3}$	$3.16 \cdot 10^{-3}$
schéma standard	$1.59 \cdot 10^{-1}$	$4.21 \cdot 10^{-2}$	$1.44 \cdot 10^{-2}$
schéma standard linéarisé	2.85	1.44	$8.32 \cdot 10^{-1}$

TAB. 5.2. Erreur des méthodes symétrique et standard pour l'éq. (4.1.20)

Il est possible d'obtenir une singularité vers  $x = 1.7$  sur le même intervalle en prenant comme conditions initiales  $\{y_0 = 1, y'_0 = 1, y''_0 = 3\}$ . Fig.5.5 montre un gros plan du comportement des méthodes, proche de la singularité. ODE45 et la méthode standard  $y$  cessent d'intégrer, alors que la méthode standard linéaire et la méthode symétrique continuent. Évidemment, les méthodes linéaires ne peuvent cesser de converger. Par contre, rien n'empêche leurs erreurs de devenir très grandes (au point de ne plus décrire une vraie solution de l'EDO). L'analyse du comportement de la solution et de ses dérivées à l'aide de Matlab révèle que,

comme pour l'équation d'ordre 2, la solution demeure finie mais c'est sa dérivée qui devient infinie à la singularité. La méthode standard linéaire tend vers l'infini à la singularité, elle ne représente donc pas bien la solution de l'équation proche de la singularité. Cependant, la méthode symétrique a un comportement qui concorde avec cette prédiction. De plus, il est possible de montrer que, comme au cas de l'ordre 2, la partie supérieure de la solution tracée par la méthode symétrique est une solution de l'équation. Il y a donc une branche supérieure comme à l'exemple précédent. La ressemblance entre les solutions des équations (4.1.16) et (4.1.20) n'est sûrement pas fortuite puisqu'elles possèdent les mêmes symétries. En effet, le fait d'imposer que l'espace solution d'une EDO soit invariant par rapport à certaines transformations (voir (1.4.1)) impose des contraintes sur ce dernier, augmentant ainsi les chances que des fonctions habitant cet espace (des solutions donc) se ressemblent.

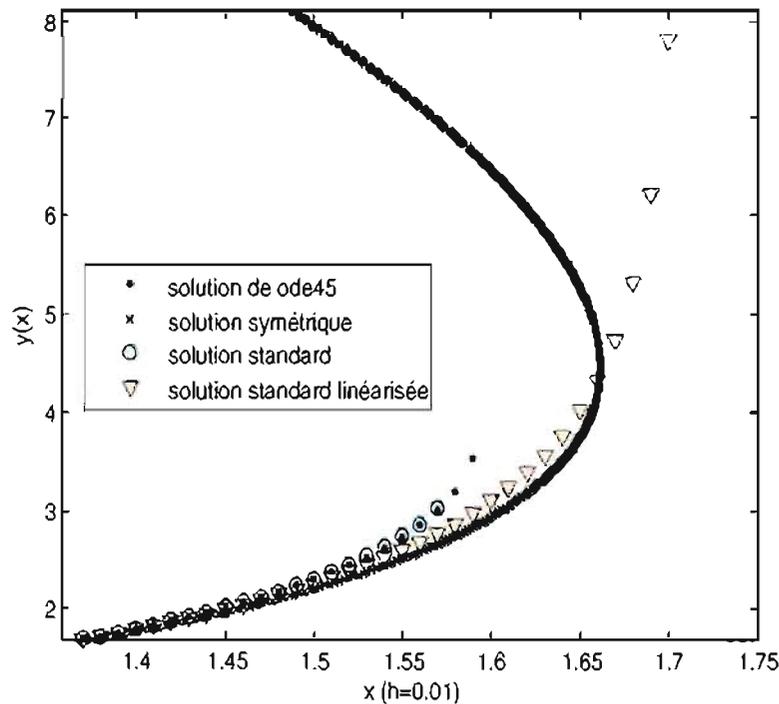


FIG. 5.5. Comportement des méthodes à proximité de la singularité pour l'éq. (4.1.20)

$$5.2. \quad \underline{sl_2 : v_1 = \partial_y \quad v_2 = x\partial_x + y\partial_y \quad v_3 = 2xy\partial_x + (y^2 - x^2)\partial_y}$$

### 5.2.1. 2e ordre

La solution exacte de l'EDO (4.2.2) est donnée par (4.2.3). Pour  $a = 1, y_b = 8$  et  $C_1 = 2$ , la solution est la moitié supérieure d'un cercle de centre  $(2, 8)$  et de sommets horizontaux  $(1, 3)$  (voir (4.2.4)). La solution est tracée à l'aide de (4.2.3). Fig.5.6 et Fig.5.7 montrent le comportement des différentes méthodes sur l'intervalle  $[1, 3.2]$ . Tel que prédit, la méthode symétrique intègre un cercle complet (dû au  $C_1^2$  dans (4.2.21)) et peut même faire plusieurs tours du cercle avant que le cumul des erreurs ne la fasse diverger. Cette caractéristique de la méthode symétrique montre qu'il faut parfois être prudent lors de son utilisation (voir discussion de la Section 4.2.3). La méthode standard, quant à elle, intègre la moitié supérieure du cercle et cesse de converger près de  $x = 3$ . La méthode standard linéarisée trace aussi le demi-cercle supérieur en cessant de converger plus rapidement que la méthode standard.

Les trois méthodes sont non-linéaires et résolues à l'aide de la méthode de point fixe de Newton. On comprendra donc facilement que les méthodes soient très sensibles au choix de la solution initiale pour la boucle de Newton proche du maximum du cercle. Proche de cet extremum,  $y_{n-1}$  et  $y_n$  ont presque la même valeur et on a alors  $y_n - y_{n-1} \sim 0$ , mais cette différence permet généralement aux méthodes de faire la distinction entre une section croissante de cercle et une section décroissante de cercle. Les méthodes peuvent donc confondre le maximum d'un cercle avec le minimum d'un autre. Pour la méthode symétrique par exemple, tous les termes en  $y$  disparaissent dans l'équation de la droite (4.2.23) si  $y_n - y_{n-1} \sim 0$ . J'ai donc dû changer la valeur de la solution initiale de la boucle de Newton proche de l'extremum. La méthode symétrique est toutefois la plus stable proche du sommet.

La Fig.5.8 représente la grandeur des pas  $h_n$  de la méthode symétrique en fonction des points  $x_n$  du maillage. On constate que la grandeur des pas diminue

maillage	$h = 0.01$	$h = 0.005$	$h = 0.002$
schéma symétrique	$2.19 \cdot 10^{-3}$	$1.30 \cdot 10^{-3}$	$5.35 \cdot 10^{-4}$
schéma standard linéarisé	$8.96 \cdot 10^{-2}$	$4.51 \cdot 10^{-2}$	$1.85 \cdot 10^{-2}$

TAB. 5.3. Erreur des méthodes symétrique et standard linéarisée pour l'éq. (4.2.2)

(ce qui veut dire davantage de points) à proximité des singularités/extrémités du cercle.

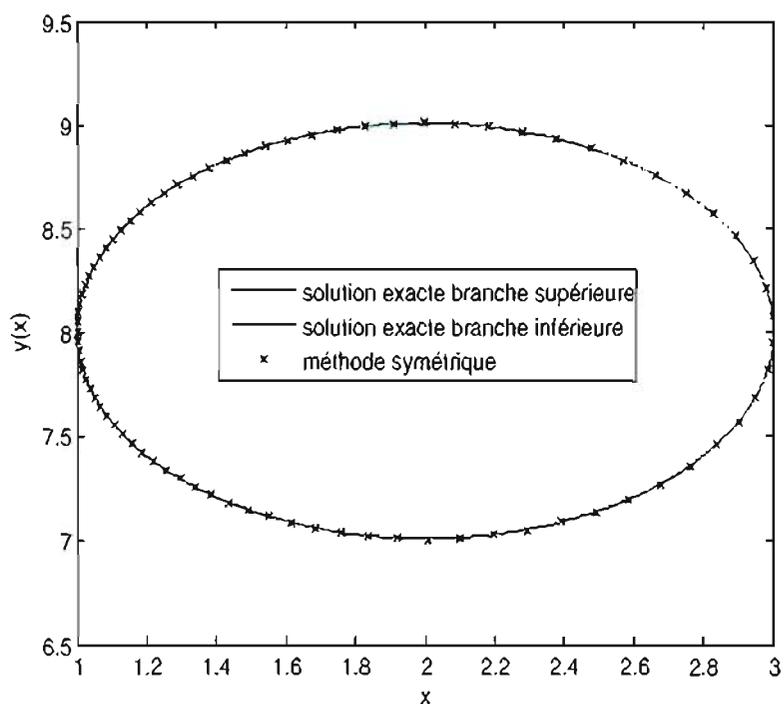


FIG. 5.6. Comportement des méthodes pour l'éq. (4.2.2)

La Table 5.3 montre les erreurs de la méthode symétrique et de la méthode standard linéarisée sur l'intervalle  $[1,2]$  (avec les mêmes constantes que précédemment). Les deux méthodes sont de premier ordre de convergence et la méthode symétrique est entre dix à cent fois plus précise que la méthode standard linéaire.

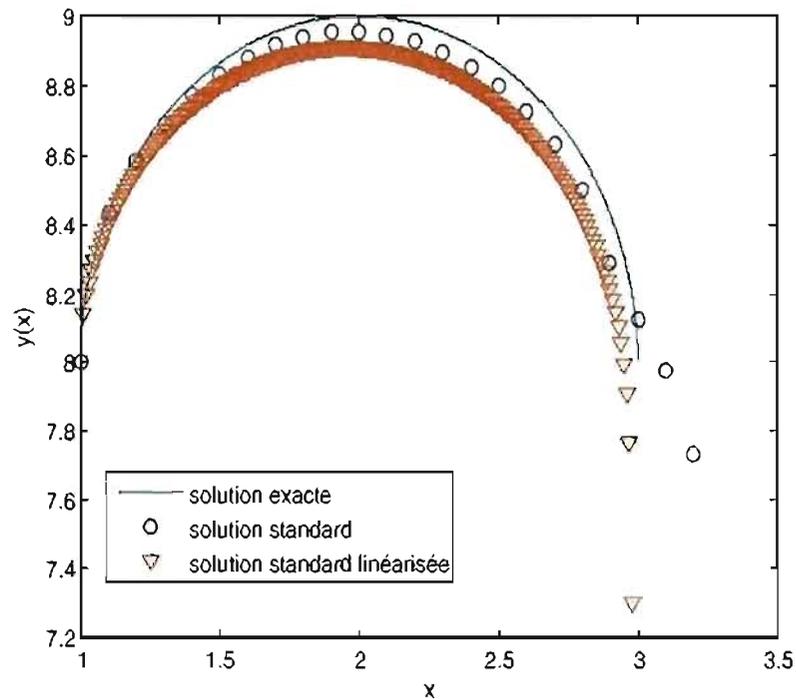


FIG. 5.7. Comportement des méthodes pour l'éq. (4.2.2)

Étant complexe<sup>2</sup>, le schéma standard est très instable et cesse de converger pour des pas  $h < 0.1$  (probablement à cause d'erreurs d'arrondi).

### 5.2.2. 3e ordre

La méthode de Newton échoue dans le cas du schéma symétrique (4.2.24). En fait, le système d'équations (4.2.24), une fois linéarisé, mène à un problème mal conditionné (voir [48] pour une définition de l'expression *mal conditionné* en analyse numérique).

J'utilise donc plutôt ici une routine créée par P. Taddei [49] en Matlab qui calcule de manière exacte le ou les points d'intersections, s'il y en a, entre une droite et une section conique (un cercle en l'occurrence). Les grandes lignes de l'algorithme sont énoncées sur la page de la Politecnico di Milano [49]. Le défaut

<sup>2</sup>la boucle de Newton du schéma standard contient une ligne d'environ 1000 caractères

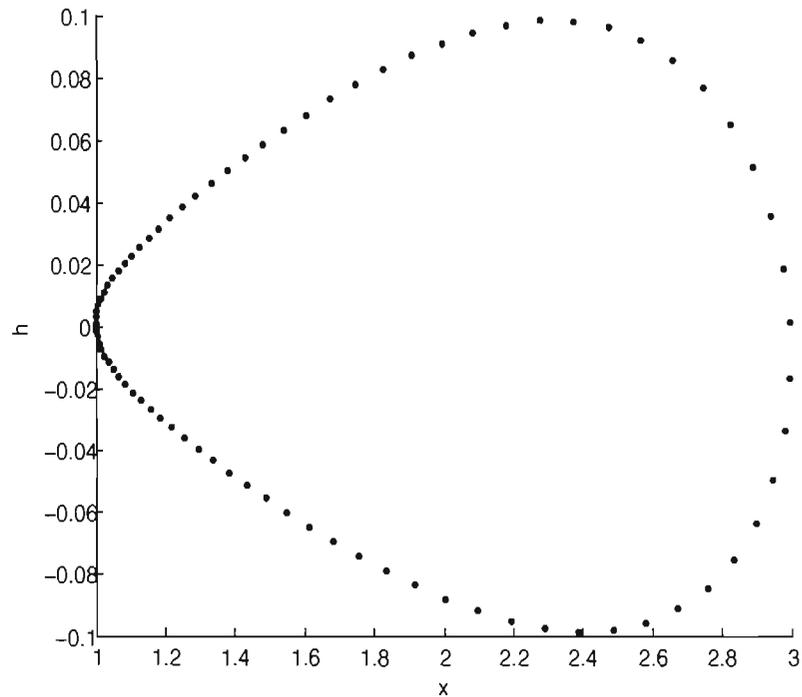


FIG. 5.8. Maillage de la méthode symétrique, pas  $h_n$  en fonction de  $x_n$

de cet algorithme est que sa relative complexité cause une accumulation des erreurs d'arrondi lorsqu'il s'agit d'intégrer un schéma discret sur un grand nombre d'itérations  $n$ . Je vais donc uniquement procéder à une étude qualitative du comportement des méthodes proche d'une singularité. Une méthode plus stable de résolution du schéma (4.2.24) devrait être développée afin d'obtenir des solutions fiables sur de plus grands intervalles (ou pour de plus grands nombres d'itérations).

En prenant  $\{x_0 = 1, y_0 = 1, y'_0 = 1, y''_0 = 3\}$ , le solveur ode45 de Matlab rencontre une singularité près de  $x = 1.28$ . La solution demeure finie en  $x = 1.28$ , mais ses dérivées deviennent infinies. La Fig. 5.9 montre le comportement des différentes méthodes proche de la singularité. La méthode standard n'apparaît pas car elle ne converge pas pour ces données initiales (avec la méthode de point

fixe de Newton du moins). La méthode standard linéarisée approche la singularité, mais explose vers l'infini passée cette dernière, ce qui ne correspond pas au comportement réel de la solution. Par contre, la méthode symétrique trace une solution qui passe proche de la singularité et qui possède des dérivées infinies tout en demeurant finie. De plus, il est possible de montrer à l'aide de la routine ode45 que la partie supérieure tracée par la méthode symétrique est aussi une solution de l'éq. (4.2.6). La Fig. 5.10 montre comment varie le pas  $h_n$  de la méthode symétrique en fonction de  $x_n$  à mesure que l'on progresse dans les itérations  $n$ . Contrairement aux exemples précédents, le pas  $h_n$  varie peu tout au long de l'intégration. La justification de cette uniformité du pas n'est pas claire, peut-être est-ce lié au fait que le problème est mal conditionné.

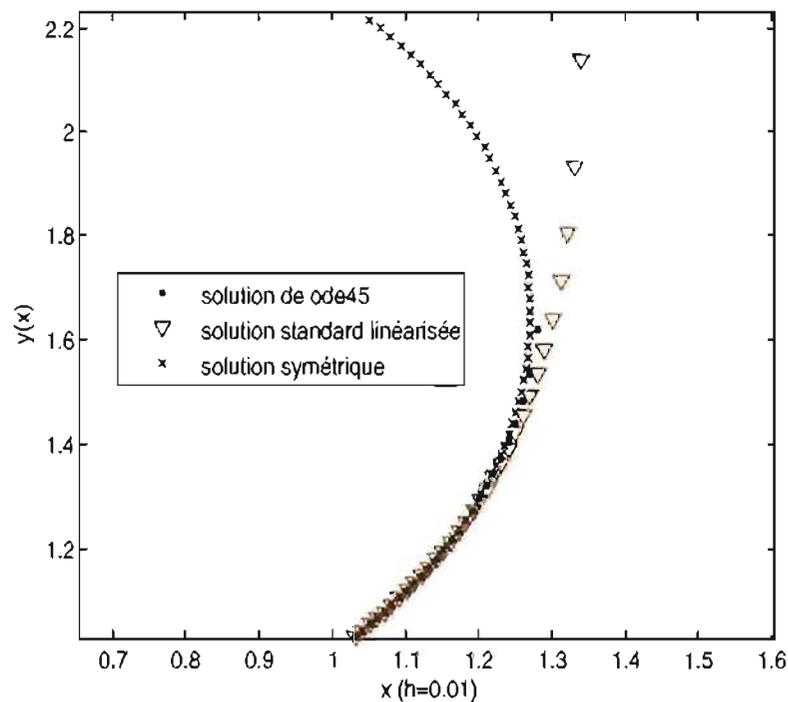


FIG. 5.9. Comportements de la méthode symétrique et de la méthode standard linéarisée à proximité d'une singularité pour l'éq. (4.2.6)

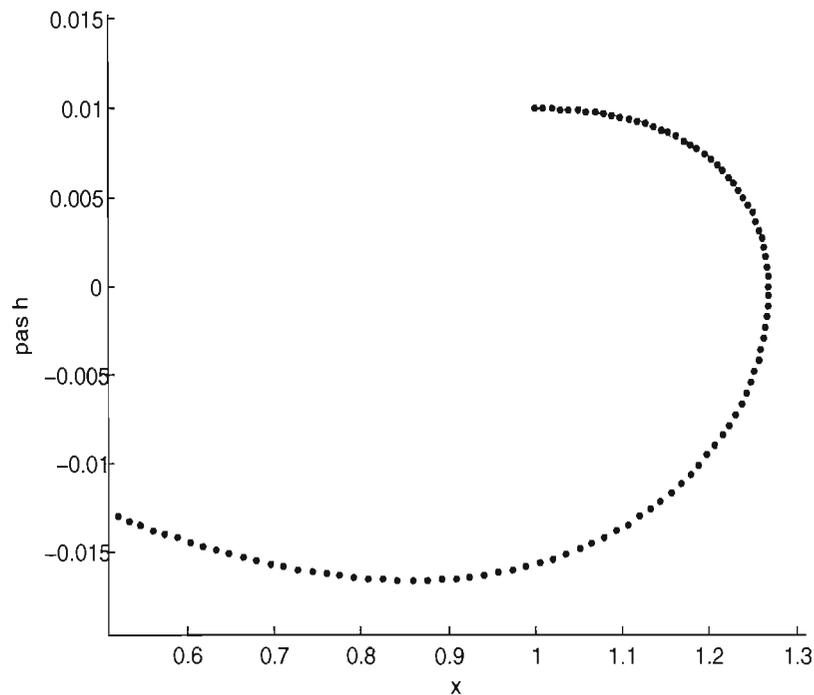


FIG. 5.10. Maillage de la méthode symétrique, pas  $h_n$  en fonction de  $x_n$

$$5.3. \quad \underline{sl_3 : v_1 = \partial_y \quad v_2 = x\partial_x + y\partial_y \quad v_3 = (2xy + x^2)\partial_x + (y^2 - x^2)\partial_y}$$

### 5.3.1. 2e ordre

La solution exacte de l'EDO (4.3.2) est donnée par (4.3.3). Les constantes sont fixées à  $a = 1$ ,  $b = 8$  et  $C_1 = 2$ . La Table 5.4 et Fig. 5.11 montrent le comportement de la méthode symétrique et de la méthode standard sur l'intervalle  $[2, 16]^3$  pour la solution avec deux +.

La méthode symétrique est de premier ordre de convergence tandis que la méthode standard converge très lentement (comme  $0(h^{0.37})$ ). La méthode symétrique

---

<sup>3</sup>Même pour des pas  $h$  initiaux très petits, la méthode symétrique effectue de grands pas sur l'intervalle. Elle effectue donc peu de pas. Le pas uniforme de la méthode standard a été ajusté de façon à ce que les nombres de pas des deux méthodes soient comparables sur l'intervalle afin que la comparaison des précisions ait un sens

maillage initial pour la méthode symétrique	$h = 0.001$	$h = 0.0001$	$h = 0.00001$
schéma symétrique	$4.93 \cdot 10^{-3}$	$5.12 \cdot 10^{-4}$	$5.14 \cdot 10^{-5}$
schéma standard	$1.06 \cdot 10^{-1}$	$7.88 \cdot 10^{-2}$	$4.75 \cdot 10^{-2}$

TAB. 5.4. Erreur des méthodes symétrique et standard pour l'éq. (4.3.2)

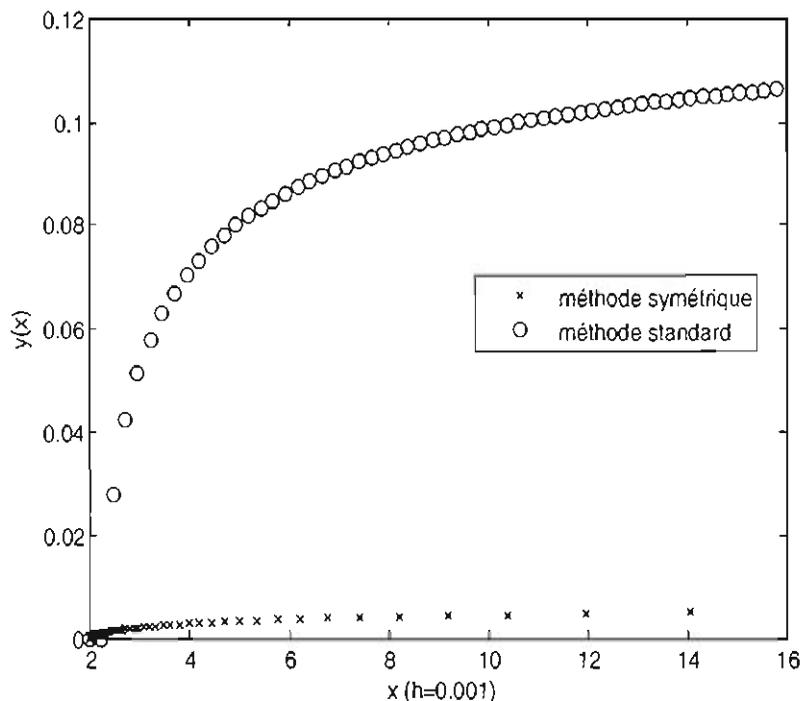


FIG. 5.11. Erreur des méthodes symétrique et standard pour l'éq. (4.3.2)

est aussi de cent à mille fois plus précise pour le pas et l'intervalle considérés.

Si on fixe plutôt les constantes à  $a = 1$ ,  $b = 8$  et  $C_1 = 10$ , une singularité apparaît en  $x = 6$  pour la solution avec deux – de (4.3.3). Comme pour les cas traités dans les sections 5.1 et 5.2, la solution demeure finie à la singularité mais ses dérivées deviennent infinies. Fig. 5.12 montre le comportement des méthodes proche de la singularité. La méthode standard arrête d'intégrer proche de  $x = 5.9$  alors que la méthode symétrique intègre jusqu'à la singularité pour ensuite revenir le

long de la solution de l'EDO (4.3.2) avec  $-C_1$ , tel que prédit dans la Section 4.3.3.

Fig. 5.13 montre comment fluctue le pas  $h$  de la méthode symétrique en fonction de  $x$ . Ce dernier est plus petit proche de la singularité et proche de  $x = 0$ .

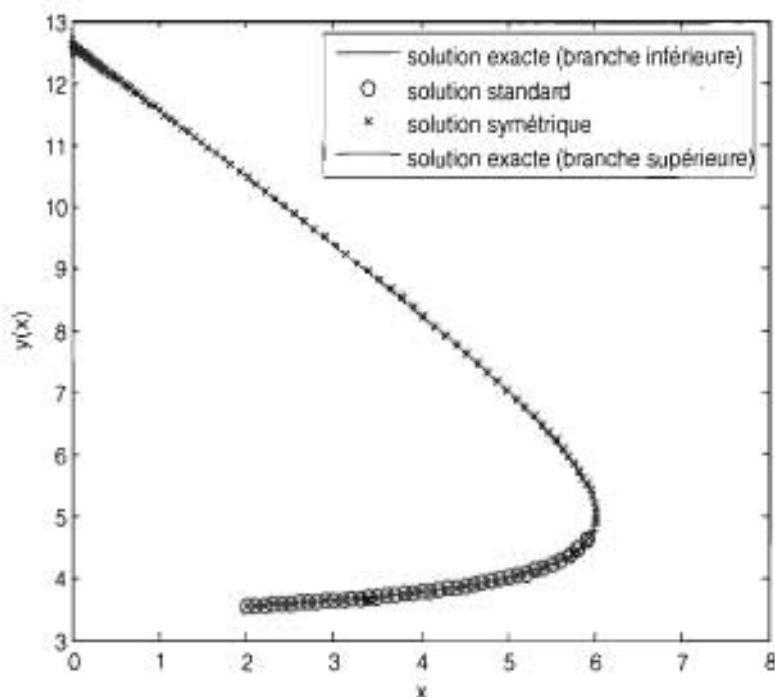


FIG. 5.12. Comportements des méthodes symétrique et standard proche d'une singularité pour l'éq. (4.3.2)

### 5.3.2. 3e ordre

Comme dans le cas du schéma de troisième ordre de  $sl_2$  (4.3.3), le schéma (4.3.3) mène à un système linéarisé mal conditionné que la méthode de Newton échoue à résoudre. La routine de P. Taddei [49] est donc encore utilisée. Malheureusement, autant la méthode standard que la méthode symétrique utilisant la routine de P. Taddei [49] divergent assez rapidement pour les quelques ensembles de coordonnées initiales pour lesquels ode45 réussit à intégrer et générer une solution de référence. Pour la plus part des coordonnées initiales testées, même

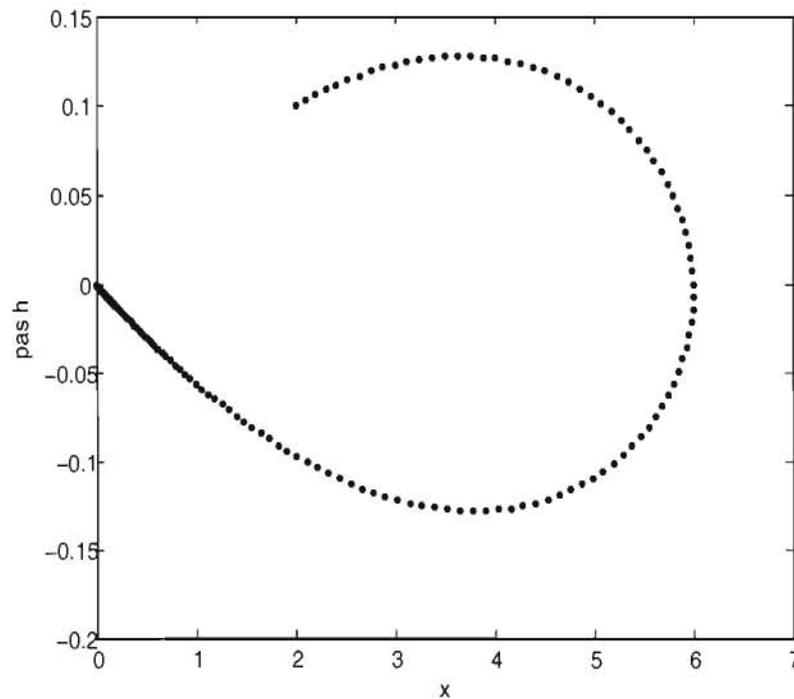


FIG. 5.13. Maillage de la méthode symétrique, pas  $h_n$  en fonction de  $x_n$  l'éq. (4.3.2)

ode45 n'arrive pas à intégrer en respectant la tolérance fixée. Vu la complexité de l'EDO (4.3.5), la méthode de Newton appliquée au schéma standard donne un schéma discret absolument barbare et il n'est pas surprenant que la méthode ne réussisse pas à converger (à cause des erreurs d'arrondis). Je m'explique moins bien la cause de la divergence de la méthode symétrique pour les coordonnées initiales pour lesquelles ode45 génère une solution. Enfin, je pense que la façon de résoudre le schéma (4.3.3) peut être améliorée, mais je n'aurai pas eu le temps de m'attaquer à ce problème dans le cadre de mon mémoire. Je dois donc arrêter ici l'analyse numérique pour cette équation.

5.4.  $sl_4 : v_1 = \partial_y \quad v_2 = y\partial_y \quad v_3 = y^2\partial_y$

Je reproduis ici une expérience effectuée dans [11] qui est un excellent exemple de la supériorité de la méthode symétrique pour décrire des solutions proches de

singularités. L'exemple en question consiste à choisir  $F(x) = \sin(x)$  dans l'EDO (4.4.2) et à prendre les conditions initiales  $\{y_0 = 0, y'_0 = -10, y''_0 = 1\}$  sur l'intervalle  $[0,6]$ . Une singularité apparaît alors en  $x_{sing} \sim 3$ . Fig.5.14 montre le comportement des méthodes sur l'intervalle. Le solveur de Matlab ode45 et la méthode standard cessent d'intégrer proche de la singularité alors que la méthode symétrique approche davantage et traverse la singularité, reproduisant la discontinuité de la solution à gauche de la singularité  $y_{sing-} = -\infty$  et à droite de la singularité  $y_{sing+} = \infty$ . La méthode standard linéarisée n'est pas tracée car elle tend bien vers moins l'infini proche de la singularité mais sans bien approximer la solution (elle continue à tendre vers moins l'infini plus  $x$  grandit).

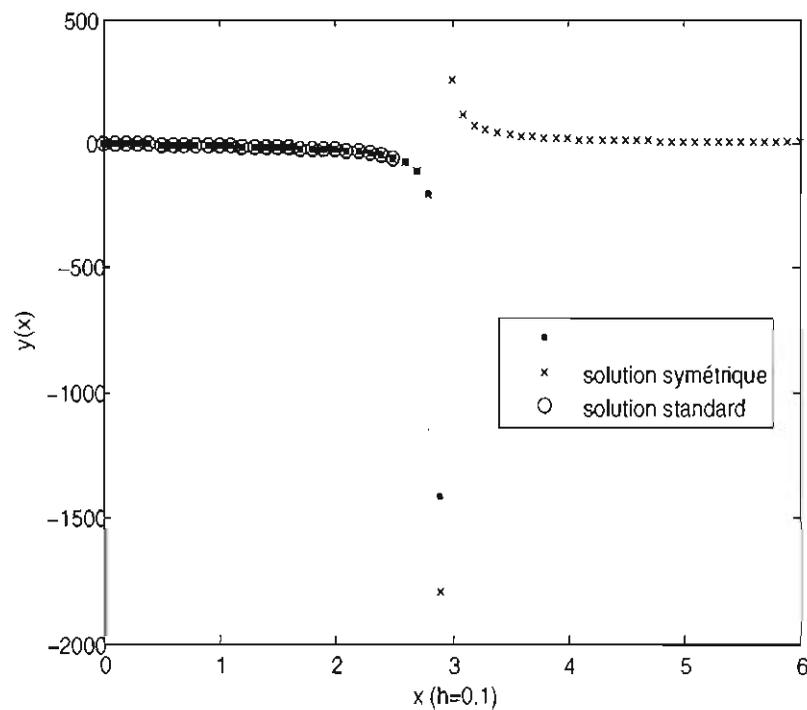


FIG. 5.14. Comportement des méthodes à proximité de la singularité pour l'éq. (4.4.2)

Fig.5.15 et Table 5.5 montrent les erreurs des différentes méthodes sur l'intervalle  $[0,2]$  pour les conditions initiales  $\{y_0 = 0, y'_0 = 4, y''_0 = 1\}$ . La méthode

maillage	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.01$
schéma symétrique	$4.23 \cdot 10^{-2}$	$1.10 \cdot 10^{-2}$	$4.64 \cdot 10^{-4}$
schéma standard	$3.67 \cdot 10^{-1}$	$8.02 \cdot 10^{-2}$	$3.12 \cdot 10^{-3}$
schéma standard linéarisé	2.73	1.78	$4.85 \cdot 10^{-1}$

TAB. 5.5. Erreur des méthodes pour l'éq. (4.4.2)

symétrique et la méthode standard sont de deuxième ordre de précision alors que la méthode standard linéarisée est de premier ordre de précision. La méthode symétrique est environ dix fois plus précise que la méthode standard et cent fois plus que la méthode standard linéarisée.

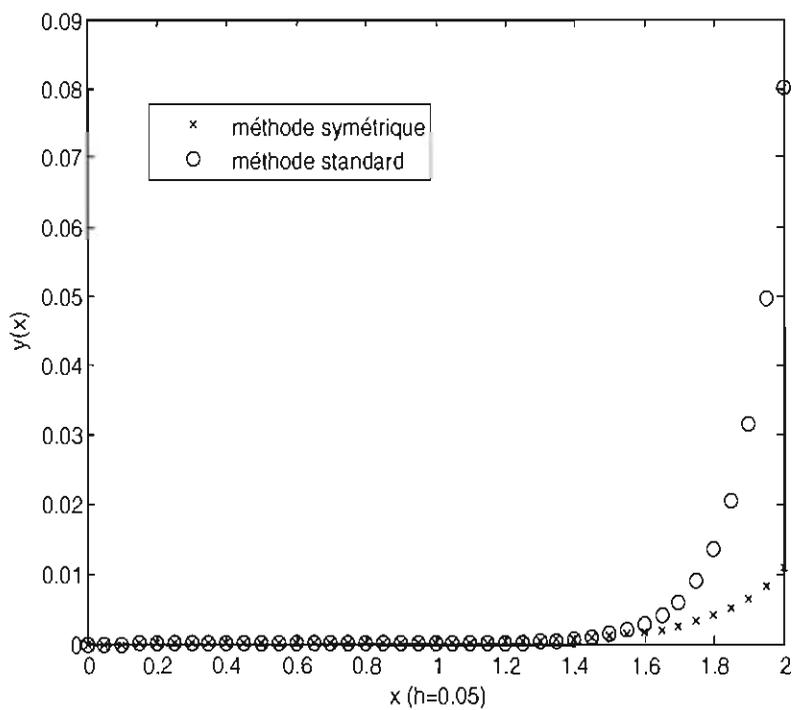


FIG. 5.15. Erreurs des méthodes pour l'éq. (4.4.2)

# CONCLUSION

---

## PARTIE THÉORIQUE : LES EDO ET LEUR DISCRÉTISATION PRÉSERVANT LES SYMÉTRIES

À partir des quatre réalisations indépendantes de  $sl(2, \mathbb{R})$ , une classification des EDO d'ordres 2 et 3 invariantes par rapport à  $SL(2, \mathbb{R})$  a été établie. Puis, leur discrétisation préservant les symétries a été effectuée. L'ensemble de ces schémas discrets forment, à toutes fins pratiques, une classification des  $S\Delta O$  invariants par rapport à  $SL(2, \mathbb{R})$  sur des maillages à trois et quatre points.

Plusieurs éléments mis à jour lors de la discrétisation préservant les symétries des EDO traitées dans ce mémoire mériteraient d'être explorés davantage :

Premièrement, la forme récurrente des invariants discrets  $J_2^{n+2}$  (4.1.33), (4.2.16) et (4.2.16) approximant les invariants différentiels d'ordre 3 est un point intéressant<sup>4</sup>. En effet, la recherche d'un ensemble complet d'invariants discrets fonctionnellement indépendants par rapport à un groupe donné est purement algorithmique. Par contre, la formation d'un  $S\Delta O$  qui possède l'EDO invariante par rapport au même groupe comme limite du continu requiert une recherche à tâtons et une bonne intuition. De plus, plus l'ordre de l'équation cherchée augmente, plus les équations se compliquent et plus il devient difficile de prédire comment se combinent les expansions de Taylor des différents invariants pour former la

---

<sup>4</sup>En général, ces invariants sont plutôt exprimés en terme des invariants  $\{I_1^n, I_1^{n+1}, I_1^{n+2}, I_2^{n+1}, I_2^{n+2}\}$ , ce qui empêche de voir la structure plus générale de l'invariant  $J_2^{n+2}$  mise à jour dans le mémoire

limite du continu du schéma. Un programme algébrique pouvant fournir ces expansions est extrêmement utile dans la recherche du bon schéma<sup>5</sup>. Cependant, il serait nettement plus pratique et élégant d'avoir un algorithme pour cette dernière étape du processus et il n'est pas exclu qu'un tel algorithme existe vu la forme des invariants  $J_2^{n+2}$ . De même, il est possible de montrer qu'il existe la même relation entre l'invariant discret pour l'ordre quatre de  $sl_4$  et l'invariant  $J_1$  (4.4.7). Je suppose que si les invariants différentiels d'ordre supérieur sont générés à l'aide de la méthode d'Olver [2], alors les invariants discrets d'ordres supérieurs tendant vers ces invariants différentiels dans la limite du continu sont toujours de la forme (4.1.33) (peu importe le groupe de symétrie). Il serait intéressant, dans une recherche à venir, de trouver la preuve de cette affirmation ou de la falsifier par un contre-exemple.

Deuxièmement, les schémas invariants implicites (4.1.35), (4.2.18) (4.3.16) sont nettement plus complexes à résoudre que les schémas invariants traités dans ce mémoire, mais ils sont potentiellement plus précis. Il serait intéressant de les tester numériquement lors d'une prochaine recherche.

Troisièmement, l'ordre de convergence dans la limite du continu des schémas invariants a été amélioré en choisissant judicieusement l'équation du maillage dans chacun d'entre eux. Cependant, et même si cela semblerait naturel, rien ne garantit que l'ordre de convergence du schéma et l'ordre de convergence des solutions de ce dernier vers la solution exacte de l'EDO aillent de paire. Il serait pertinent de tenter de lier ces deux notions de manière formelle.

Finalement, il est à noter que les EDO d'ordre 2 de  $sl_1$ ,  $sl_2$  et  $sl_3$  possèdent respectivement des solutions paraboliques (4.1.18), circulaires (4.2.3) et hyperboliques (4.3.3). De plus, les schémas discrets invariants (4.1.29), (4.2.23), (4.3.3) correspondant à chacune de ces réalisations sont tous constitués d'une équation décrivant une parabole, un cercle et une hyperbole respectivement, ce qui révèle

---

<sup>5</sup>Un tel programme a été réalisé dans le cadre de ce mémoire à l'aide de Mathematica

un lien entre le type de solution de l'équation continue et la forme des invariants discrets. Les EDO d'ordre 3, quant à elles, ne possèdent pas de solution analytique, mais possèdent des schémas discrets invariants (4.1.40), (4.2.24), (4.3.3) d'une similarité frappante à ceux de deuxième ordre (toujours avec une équation décrivant une parabole, un cercle et une hyperbole respectivement). On peut donc supposer que leurs solutions possèdent des similarités avec celles des EDO d'ordre 2 (ce qui est confirmé par les tests numériques). Et si l'assertion discutée ci-haut sur la forme des invariants discrets d'ordre supérieur s'avérait vraie, alors les schémas invariants d'ordre supérieur, pour une réalisation donnée, auraient aussi tous une forme similaire aux schémas d'ordres 2 et 3 exposés dans ce mémoire (et donc probablement des solutions possédant des similarités). Tel qu'indiqué dans le chapitre 5, la ressemblance des espaces solutions des EDO d'ordre différent, pour une réalisation donnée, n'est pas si surprenante puisqu'elles possèdent toutes, par construction, les mêmes symétries.

## PARTIE NUMÉRIQUE : LA PRÉCISION DE LA MÉTHODE SYMÉTRIQUE ET SON COMPORTEMENT PROCHE DE SINGULARITÉS

La méthode symétrique s'est avérée plus stable et plus précise (de dix à cent fois plus) que la méthode standard dans la plupart des cas tout en effectuant beaucoup moins de pas. Comme exception, notons le 2e ordre pour  $sl_1$ . Aussi, la comparaison des précisions n'a pas été effectuée pour les équations de 3e ordre de  $sl_2$  et  $sl_3$ , en partie à cause d'un manque de raffinement de la méthode de résolution des schémas invariants. Cependant, la supériorité de la méthode symétrique par rapport à la méthode standard, bien qu'étant un bon signe, ne peut pas être garante de la suprématie de celle-ci. En effet, de nombreuses méthodes en analyse numérique sont beaucoup plus stables et plus précises que la méthode standard employée dans ce mémoire. Il serait pertinent, à l'avenir, de comparer la méthode symétrique à de telles méthodes.

Par contre, la capacité de la méthode symétrique à approcher des singularités et à continuer à intégrer au-delà de ces singularités, tout en fournissant des informations qualitatives sur la solution, est remarquable. Cette dernière a souvent fourni des solutions à l'intérieur et à travers de voisinages de singularités alors que même la routine ode45 de Matlab, qui servait de solution de référence, arrêta d'intégrer à proximité de la singularité. Évidemment, lorsqu'il est question de résoudre des équations différentielles non-linéaires à l'aide de méthodes numériques tout en intégrant des propriétés qualitatives du problème dans les modèles, la méthode utilisant les symétries n'est pas la seule possibilité. Les intégrateurs symplectiques [50, 51] et les méthodes basées sur la conservation d'énergie [52] font partie des diverses méthodes développées en ce sens. Il serait aussi intéressant, éventuellement, de comparer la méthode symétrique, traitée dans ce mémoire, à ces autres méthodes.

# BIBLIOGRAPHIE

---

- [1] Lie S, Klassifikation und Integration von Gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen  $x, y$  die eine Gruppe von Transformationen gestatten, *Math. Ann.* 32, 213 (1888)
- [2] Olver P J, Applications of Lie groups to Differential Equations, Springer-Verlag, New York (2000)
- [3] Ibragimov N H, Transformation Groups Applied to Mathematical Physics (Reidel, Boston, 1985)
- [4] Ovsiannikov L V, Group Analysis of Differential Equations (Academic, New York, 1982)
- [5] Bluman G W et Kumei S, Symmetries and Differential Equations (Springer, Berlin, 1989)
- [6] Gaeta G, Nonlinear Symmetries and Nonlinear Equations (Kluwer, Dordrecht, 1994)
- [7] Winternitz P, Group theory and exact solutions of nonlinear partial differential equations, In Integrable Systems, Quantum Groups and Quantum Field Theories, 429-495, Kluwer, Dordrecht, 1993
- [8] Levi D et Winternitz P, Continuous symmetries of difference equations, *J. Phys. A : Math. gen.* 39, R1-R63 (2006)
- [9] Dorodnitsyn V A, The Group Properties of Difference Equations, Moscow, Fizmatlit (2001)
- [10] Dorodnitsyn V A, Kozlov R et Winternitz P, Lie group classification of second-order ordinary difference equations, *J. Math. Phys.* 41, 480-504 (2000), 45, 336-359 (2004)

- [11] Bourlioux A, Cyr-Gagnon C et Winternitz P, Difference schemes with point symmetries and their numerical tests, *J. Phys. A : Math. gen.* 39, 6877-6896 (2006)
- [12] Valiquette F, Discrétisation des équations aux dérivées partielles avec préservation de leurs symétries, mémoire de maîtrise, Université de Montréal (2005)
- [13] Bourlioux A, Rebelo R et Winternitz P, Symmetry preserving discretization of  $SL(2, \mathbb{R})$  invariant equations, soumis (2007) disponible à arXiv : Preprint Math-ph 0711.0145., URL : <http://arxiv.org/find/math-ph/1/au:+rebelo/0/1/0/all/0/1>
- [14] Maeda S, Canonical structure and symmetries for discrete systems, *Math. Japan* 25, 405 (1980)
- [15] Levi D et Winternitz P, Symmetries and conditional symmetries of differential-difference equations, *J. Math. Phys.* 34, 3713 (1993)
- [16] Levi D et Winternitz P, Symmetries of discrete dynamical systems, *J. Math Phys.* 37, 5551 (1996)
- [17] Levi D, Vinet L et Winternitz P, Lie group formalism for difference equations, *J. Phys. A : Math. Gen.* 30, 663 (1997)
- [18] Heredero R H, Levi D et Winternitz P, symmetries of the discrete Burgers equation, *J. Phys. A Math. Gen.* 32, 2685 (1999)
- [19] Gomez-Ullate D, Lafortune S et Winternitz P, symmetries of discrete dynamical systems involving two species, *J. Math. Phys.* 40, 2782 (1999)
- [20] Lafortune S, Martina L et Winternitz P, Point symmetries of generalized Toda field theory, *J. Phys. A : Math. Gen.* 33, 2419 (2000)
- [21] Levi D et Yamilov R, Conditions for the existence of higher symmetries of evolutionary equations on the lattice, *J. Math. Phys.* 38, 6648 (1997)
- [22] Levi D et Yamilov R, Non-point integrable symmetries for equations on the lattice, *J. Phys. A : Math. Gen.* 33 No 26 (7 July 2000) 4809-4823
- [23] Levi D et Rodriguez M A, Symmetry group of partial differential equations and of differential-difference equations : the Toda lattice vs the Korteweg-de-Vries equations, *J. Phys. A : Math. Gen.* 25, 975 (1992)
- [24] Levi D, Yamilov R, Dilatation symmetries and equations on the lattice, *J. Phys. A : Math. Gen.* 32, 8317 (1999)

- [25] Levi D, Rodriguez M A, Lie symmetries for integrable equations on the lattice, *J. Phys. A : Math. Gen.* 32, 8303 (1999)
- [26] Floreanini R, Negro J, Nieto L M, Vinet L, Symmetries of the heat equation on a lattice, *Lett. Math. Phys.* 36, 351 (1996)
- [27] Floreanini R et Vinet L, Lie symmetries of finite-difference equations, *J. Math. Phys.* 36, 7024 (1995)
- [28] Quispel G R W, Capel H W et Sahadevan R, Continuous symmetries of difference equations; the Kac-van Moerbeke equation and Painleve reduction, *Phys Lett. A* 170, 379 (1992)
- [29] Quispel G R W et Sahadevan R, Lie symmetries and integration of difference equations, *Phys. Lett. A* 184, 64 (1993)
- [30] Dorodnitsyn, Transformation groups in a space of difference variables, in *VINITI Acad. Sci. USSR, Itogi Nauki i Techniki*, 34, 149-190 (1989), (en russe), voir traduction en anglais dans *J. Sov. Math.* 55, 1490 (1991)
- [31] Ames W F, Anderson R L, Dorodnitsyn V A, Ferapontov E V, Gazizov R K, Ibragimov N H et Svirshchevskii S R, *CRC Hand-book of Lie Group Analysis of Differential Equations*, ed. by N. Ibragimov, Volume I : Symmetries, Exact Solutions and Conservation Laws, CRC Press, 1994
- [32] Dorodnitsyn V A, Finite-difference models entirely inheriting continuous symmetry of original differential equations, *Int. J. Mod. Phys. C. (Phys. Comp.)*, 5, 723 (1994)
- [33] Dorodnitsyn V, Continuous symmetries of finite-difference evolution equations and grids, in *Symmetries and Integrability of Difference Equations*, CRM Proceedings and Lecture Notes, Vol. 9, AMS, Providence, R.I., 103-112, 1996, Ed. par D. Levi, L. Vinet, et P. Winternitz, voir aussi Dorodnitsyn V, Invariant discrete model for the Korteweg-de-Vries equation, Preprint CRM-2187, Montreal, 1994
- [34] Bakirova M, Dorodnitsyn et Kozlov R, Invariant difference schemes for heat transfer equations with a source, *J. Phys. A : Math. Gen.*, 30, 8139 (1997) voir aussi Dorodnitsyn V et Kozlov R, The complete set of symmetry preserving discrete versions of a heat transfer equation with a source, Preprint of NTNU, NUMERICS NO. 4/1997, Trondheim, Norway, 1997

- [35] Dorodnitsyn V, Finite-difference models entirely inheriting symmetry of original differential equations *Modern Group Analysis : Advanced Analytical and Computational Methods in Mathematical Physics* (Kluwer Academic Publishers), 191, 1993
- [36] Dorodnitsyn V A, Finite-difference analog of the Noether theorem, Dokl. Akad. Nauk, 328, 678 (1993)(en russe), Dorodnitsyn V, Noether-type theorems for difference equation, IHES/M/98/27, Bures-sur-Yvette, 1998
- [37] Dorodnitsyn V et Winternitz P, Lie point symmetry preserving discretizations for variable coefficient Korteweg-de-Vries equations, CRM-2607, Université de Montréal, 1999 : to appear in *Nonlinear Dynamics*, Kluwer Academic Publisher, 1999
- [38] Dorodnitsyn V, Vinet L et Winternitz P (éditeurs), *Symmetries and Integrability of Difference Equations*, CRM Proceedings and Lecture Notes vol. 9, (AMS, Providence, R.I., 1996)
- [39] Clarkson P A et Nijhoff F W (éditeurs), *Symmetries and Integrability of Difference equations* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1999)
- [40] Dorodnitsyn V, Kozlov R et Winternitz P, Continuous symmetries of Lagrangians and exact solutions of discrete equations, *J. Math. Phys.* 45, 336 (2004)
- [41] Valiquette F et Winternitz P, Discretization of partial differential equations preserving their physical symmetries, *J. Phys. A : Math. Gen.* 38 No 45 (11 novembre 2005) 9765-9783
- [42] Cyr-Gagnon C, *Discrétisations des équations différentielles ordinaires avec préservation de leurs symétries*, mémoire de maîtrise, Université de Montréal (2003)
- [43] Levi D, Tremblay S et Winternitz P, Lie point symmetries of difference equations and lattices, *J. Phys. A : Math gen.* 33, 8507-8524 (2000)
- [44] Warner F W, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer-Verlag, New York (1983)
- [45] Humphreys J E, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer-Verlag, New York (1972)
- [46] Fulton W et Harris J, *Representation Theory (A First Course)*, Springer-Verlag (2004)

- [47] Gonzalez-Lopez A, Kamran N et Olver J P, Lie algebras of vector fields in the real plane, Proc. London Math. Soc. 64, 399 (1992)
- [48] Golub H G et Ortega J M, Scientific Computing and Differential Equations (An Introduction to Numerical Methods), Academic Press (1981)
- [49] Taddei P pour le Dipartimento di Electronica ed informazione de la Politecnico di Milano, 2007. *Conics Intersection*. Page consultée le 2 décembre 2007. URL : <http://vision.elet.polimi.it/>
- [50] Ascher M U et McLachlan R I, On Symplectic and Multisymplectic Schemes for the KdV Equation, J. Sci. Comput. Vol 25, No 1, (2005) 83-104
- [51] Channell P J et Scovel C, Symplectic Integration of Hamiltonian Systems, Nonlinearity 3 (1990) 231-259
- [52] Lewis D et Simo J C, Conserving algorithms for the dynamics of Hamiltonian systems on Lie groups, J. Nonlin. Sci. 4 (1994) 253-299

# Annexe A

---

## $SL(2, \mathbb{R})$ COMME GROUPE D'AUTOMORPHISMES DE $\mathbb{R}^2$ QUI PRÉSERVENT L'ÉLÉMENT DE VOLUME

La preuve pour  $n$  arbitraire est une généralisation du cas  $n = 2$ . Je me contenterai ici de prouver le cas plus simple  $n = 2$  d'autant plus que ce mémoire s'intéresse spécifiquement au groupe  $SL(n = 2, \mathbb{R})$ .

Pour définir l'élément de volume, il est nécessaire d'introduire la notion de produit extérieur. Le produit extérieur est une opération sur les algèbres extérieures. Je voudrais éviter d'avoir à expliquer tout ces concepts, je réfère donc le lecteur à tout ouvrage traitant de géométrie différentielle pour plus de détails et ne vais introduire ici que les propriétés du produit extérieur qui seront utilisées dans cette annexe.

**Définition A.0.1** (Produit extérieur). Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension 2. Le produit extérieur  $\wedge$  est une opération bilinéaire associative telle que  
i)  $v \wedge v = 0 \forall v \in V$ ,  
ii)  $v_1 \wedge v_2 = -v_2 \wedge v_1 \forall v_1, v_2 \in V$ , iii)  $v_1 \wedge v_2 = 0$  si  $v_1, v_2 \in V$  sont linéairement dépendants.

Définissons ce qu'est l'élément de volume et voyons comment ce dernier se transforme sous l'action de  $SL(2, \mathbb{R})$ . Si  $x$  est un vecteur dans  $\mathbb{R}^2$  et  $A$  une transformation linéaire de  $\mathbb{R}^2$  (exprimée par une matrice  $2 \times 2$  inversible), on a

(en utilisant la convention de sommation d'Einstein)

$$x'_i = A_{ij}x_j \quad i, j = 1, 2, \quad (\text{A.0.1})$$

et donc

$$dx'_i = A_{ij}dx_j \quad i, j = 1, 2. \quad (\text{A.0.2})$$

L'élément de volume sur  $\mathbb{R}^2$  est défini comme  $\prod_{i=1}^2 dx_i = dx_1 \wedge dx_2$ . On en déduit

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^2 dx'_i &= \prod_{i=1}^2 A_{ij}dx_j = \prod_{i=1}^2 (A_{i1}dx_1 + A_{i2}dx_2) \\ &= (A_{11}dx_1 + A_{12}dx_2) \wedge (A_{21}dx_1 + A_{22}dx_2) \\ &= A_{11}A_{21}dx_1 \wedge dx_1 + A_{12}A_{22}dx_2 \wedge dx_2 + A_{11}A_{22}dx_1 \wedge dx_2 \\ &\quad + A_{12}A_{21}dx_2 \wedge dx_1, \end{aligned} \quad (\text{A.0.3})$$

où j'ai utilisé la bilinéarité du produit extérieur. Or, par les propriétés i) et ii) du produit extérieur, ceci implique

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^2 dx'_i &= (A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})dx_1 \wedge dx_2 \\ &= \det(A) \prod_{i=1}^2 dx_i. \end{aligned} \quad (\text{A.0.4})$$

Comme pour toute transformation  $A \in SL(2, \mathbb{R})$ ,  $\det(A) = 1$ , l'élément de volume de  $\mathbb{R}^2$  est donc un invariant par rapport à l'action de groupe.