

**Direction des bibliothèques**

**AVIS**

Ce document a été numérisé par la Division de la gestion des documents et des archives de l'Université de Montréal.

L'auteur a autorisé l'Université de Montréal à reproduire et diffuser, en totalité ou en partie, par quelque moyen que ce soit et sur quelque support que ce soit, et exclusivement à des fins non lucratives d'enseignement et de recherche, des copies de ce mémoire ou de cette thèse.

L'auteur et les coauteurs le cas échéant conservent la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent ce document. Ni la thèse ou le mémoire, ni des extraits substantiels de ce document, ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans l'autorisation de l'auteur.

Afin de se conformer à la Loi canadienne sur la protection des renseignements personnels, quelques formulaires secondaires, coordonnées ou signatures intégrées au texte ont pu être enlevés de ce document. Bien que cela ait pu affecter la pagination, il n'y a aucun contenu manquant.

**NOTICE**

This document was digitized by the Records Management & Archives Division of Université de Montréal.

The author of this thesis or dissertation has granted a nonexclusive license allowing Université de Montréal to reproduce and publish the document, in part or in whole, and in any format, solely for noncommercial educational and research purposes.

The author and co-authors if applicable retain copyright ownership and moral rights in this document. Neither the whole thesis or dissertation, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms, contact information or signatures may have been removed from the document. While this may affect the document page count, it does not represent any loss of content from the document.

Université de Montréal

**Factorisation de la fonction de partition  
du modèle d'Ising en deux dimensions  
défini sur deux régions contiguës**

par

**Dominique Chassé**

Département de physique  
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures  
en vue de l'obtention du grade de  
Maître ès sciences (M.Sc.)  
en physique

août 2006

© Dominique Chassé, 2006



Université de Montréal  
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

**Factorisation de la fonction de partition  
du modèle d'Ising en deux dimensions  
défini sur deux régions contiguës**

présenté par

**Dominique Chassé**

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Manu Paranjape

(président-rapporteur)

Yvan Saint-Aubin

(directeur de recherche)

Abraham Broer

(membre du jury)

David London

(membre du jury)

Mémoire accepté le :

24 octobre 2006

# Sommaire

Dans le but de définir une transformation de renormalisation pour le modèle d'Ising en deux dimensions, Langlands a récemment étudié le recollement de plages de spins. Le paramètre d'ordre qu'il a proposé en 2000 avec Lewis et Saint-Aubin est lié aux courbes (orientées) délimitant les plages de spins constants et les poids de Boltzmann sont exprimés en termes de ce paramètre d'ordre. La question se pose alors naturellement de savoir s'il est possible d'exprimer le poids de Boltzmann associé à l'union de deux plages comme la somme de produits de poids associés à chacune des plages considérées individuellement, la somme portant sur tous les états possibles le long de la courbe  $C$  commune aux deux plages.

Langlands a présenté un argument en 2003 reliant la factorisation des poids de Boltzmann à la limite thermodynamique du rapport entre les deux plus grandes valeurs propres d'une matrice  $n! \times n!$ , où  $n$  est le nombre de courbes délimitant les plages de spins qui intersectent  $C$ . Ce rapport, ainsi que sa limite thermodynamique, ont été obtenus et sont décrits dans la proposition suivante qui constitue le résultat principal du présent mémoire :

**Proposition.** Soit  $R_n(\alpha)$  la matrice  $n! \times n!$  dont les éléments  $[R_n(\alpha)]_{\sigma\rho}$  sont étiquetés par des permutations  $\sigma$  et  $\rho$  du groupe symétrique  $S_n$  et prennent pour valeur  $\alpha^{\ell(\sigma\rho^{-1})}$  avec  $0 < \alpha < 1$  et où  $\ell(\pi)$  dénote le nombre de cycles dans  $\pi \in S_n$ . Soit  $\lambda_0 > \lambda_1$  les deux plus grandes valeurs propres (prises en valeur absolue) de  $R_n(\alpha)$ , alors pour tout  $\alpha$ , le rapport  $\lambda_1/\lambda_0$  tend vers 0 dans la limite thermodynamique ( $n \rightarrow \infty$ ).

**MOTS CLÉS :** phénomènes critiques, groupe de renormalisation, modèle d'Ising, théorie des représentations, groupes symétriques

# Abstract

In order to define a renormalization transformation for the two-dimensional Ising model, Langlands has recently studied the heaping of spin domains. The order parameter he proposed in 2000 together with Lewis and Saint-Aubin is related to the (oriented) level curves delimiting the domains of constant spin and the Boltzmann factors are expressed in terms of this order parameter. A natural question is therefore whether it is possible to express the Boltzmann factor associated with the union of two domains as a sum of products of factors associated with each of the domains considered individually, the sum being taken on all possible states along the curve  $C$  delimiting the two domains.

In 2003, Langlands proposed an argument relating the factorization of the Boltzmann factors to the thermodynamic limit of the ratio of the two largest eigenvalues of an  $n! \times n!$  matrix  $R$ , with  $n$  denoting the number of level curves delimiting the domains of constant spin intersecting  $C$ . This ratio and its thermodynamic limit were obtained and are described in the following proposition which is the main result of the present work :

**Proposition.** *Let  $R_n(\alpha)$  be the  $n! \times n!$  matrix whose matrix elements  $[R_n(\alpha)]_{\sigma\rho}$ , with  $\sigma$  and  $\rho$  in the symmetric group  $S_n$ , are  $\alpha^{\ell(\sigma\rho^{-1})}$  with  $0 < \alpha < 1$  and  $\ell(\pi)$  denoting the number of cycles in  $\pi \in S_n$ . The ratio of the second largest eigenvalue of  $R_n(\alpha)$  to the largest one (in absolute value) goes to zero in the thermodynamic limit ( $n \rightarrow \infty$ ) for all  $\alpha$ .*

**KEY WORDS :** critical phenomena, renormalization group, Ising model, representation theory, symmetric groups

# Remerciements

Je tiens à exprimer toute ma gratitude envers mon directeur de recherche, Yvan Saint-Aubin, qui par son aide intellectuelle soutenue et son support humain m'a procuré un environnement de formation d'une qualité exceptionnelle.

Je souhaite également remercier ma copine, Caroline, pour sa compréhension et ses encouragements, ainsi que mes parents pour leur amour inconditionnel.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Phénomènes critiques, groupe de renormalisation et factorisation des poids de Boltzmann</b>	<b>1</b>
1.1	Les phénomènes critiques . . . . .	1
1.1.1	Introduction . . . . .	1
1.1.2	Les exposants critiques . . . . .	3
1.1.3	Paramètre d'ordre et fonction de corrélation . . . . .	5
1.1.4	Le phénomène d'universalité . . . . .	6
1.1.5	L'invariance d'échelle . . . . .	7
1.2	Le groupe de renormalisation . . . . .	12
1.2.1	Les processus itératifs . . . . .	13
1.2.2	Dérivation du comportement critique au moyen du GR . . . . .	15
1.2.3	La décimation du modèle d'Ising en une dimension . . . . .	17
1.2.4	La décimation du modèle d'Ising en deux dimensions . . . . .	19
1.3	La factorisation de la fonction de partition du modèle d'Ising en deux dimensions défini sur deux régions contiguës . . . . .	24
1.3.1	La transformation de renormalisation de Langlands pour la percolation . . . . .	24

1.3.2	La transformation de renormalisation de Langlands pour le modèle d'Ising en deux dimensions . . . . .	31
1.3.3	La factorisation de la mesure $\mu_C$ à la frontière de deux tuiles contiguës . . . . .	34
<b>2</b>	<b>Le groupe symétrique et ses représentations</b>	<b>41</b>
2.1	Éléments de la théorie des groupes . . . . .	41
2.1.1	Structure de groupe . . . . .	41
2.1.2	Le groupe symétrique $S_n$ (ou groupe des permutations) . . . . .	42
2.1.3	Classes résiduelles . . . . .	45
2.1.4	Théorème de Cayley . . . . .	45
2.1.5	Classes de conjugaison . . . . .	46
2.2	Éléments de la théorie des représentations des groupes finis . . . . .	48
2.2.1	Définitions de base . . . . .	48
2.2.2	Représentations équivalentes . . . . .	50
2.2.3	Représentations irréductibles . . . . .	50
2.2.4	Représentations induites . . . . .	56
2.3	Éléments de la théorie des représentations des groupes symétriques . . . . .	58
2.3.1	Les représentations de $S_n$ . . . . .	58
2.3.2	Diagrammes, tableaux et tabloïdes . . . . .	60
2.3.3	Modules de Specht . . . . .	63
2.3.4	Les éléments de Garnir . . . . .	68
2.3.5	La règle de Young . . . . .	69



2.3.6	La forme déterminantale . . . . .	74
<b>3</b>	<b>Le spectre de la matrice R</b>	<b>77</b>
3.1	Les valeurs propres de $R_n(\alpha)$ comme un quotient de deux déterminants . . . . .	78
3.2	Le calcul du quotient des deux déterminants . . . . .	81
3.3	La relation d'ordre entre les valeurs propres . . . . .	83
<b>4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>85</b>

# Table des figures

1.1	La magnétisation $m_0(T)$ du fer (carrés) et du nickel (triangles) en l'absence de champ magnétique externe. Pour cette transition de phase continue $dm_0/dT$ possède une discontinuité au point de Curie (figure tirée de Binney & al. [1]). . . . .	2
1.2	Les isothermes de l'eau (figure tirée de Binney & al. [1]). Sous la courbe hachurées, le système est constitué d'un mélange d'eau et de vapeur. À droite de cette courbe et sous l'isotherme critique (celle passant par le point C), le système est uniquement constitué d'eau. Au-dessus de l'isotherme critique et/ou à gauche de la courbe hachurée, le système n'est constitué que de vapeur. . . . .	3
1.3	Les courbes de coexistence liquide-gaz de nombreux fluides peuvent être littéralement superposées lorsque la température et la densité sont mesurées à l'échelle de leur valeur critique $T_c$ et $\rho_c$ (figure tirée de Binney & al. [1]). . . . .	7
1.4	Sommation partielle sur le spin $\sigma_2$ dans la transformation de décimation du modèle d'Ising en une dimension (figure tirée de Domb [4]). . . . .	18
1.5	Modèle d'Ising bidimensionnel sur un réseau carré. Les spins qui seront éliminés lors de la transformation de décimation sont marqués d'une croix (figure tirée de Domb [4]). . . . .	20
1.6	Sommation partielle sur un spin marqué d'une croix dans la transformation de décimation du modèle d'Ising en deux dimensions (figure tirée de Domb [4]). . . . .	20
1.7	Trajectoires dans l'espace des constantes de couplages en fonction de différentes conditions initiales (figure tirée de Domb [4]). . . . .	23
1.8	Configuration sur le carré $SQ_{16}$ pour la percolation par site (figure tirée de [7]). . . . .	25

- 1.9 Les courbes de  $\pi_h^n(p)$  pour  $n = 2, 4, 8, 16, 32, 64$  et  $126$  (l'abscisse correspond à  $p$  et l'ordonnée à  $\pi_h^n(p)$ ). Les courbes ayant une pente plus abrupte au voisinage de  $p_c$  correspondent à des valeurs plus grandes de  $n$  (figure tirée de [7]). . . . . 26
- 1.10 Transformation de renormalisation de Langlands en percolation pour  $m = 2$  et  $l = 1$ . . . . . 28
- 1.11 Courbes délimitant les plages de spin constant d'une configuration  $\sigma$  du modèle d'Ising définie sur un cylindre (le haut est relié au bas). En assignant arbitrairement à chacune de ces courbes une orientation donnée, on obtient un des ensemble possible  $\lambda = \{L_1, L_2, \dots\}$  de lignes de contour associé à  $\sigma$  (figure tirée de [10]). 32
- 1.12 Bilans assignés aux  $4l$  intervalles de base d'une tuile donnée du modèle d'Ising bidimensionnel pour  $l = 2$ . 33
- 1.13 Opération de recollement des tuiles dans la transformation de renormalisation proposée par Langlands pour le modèle d'Ising bidimensionnel. Les deux bilans assignés à un intervalle commun à deux tuiles contiguës doivent être de même valeur absolue et de signes opposés. Les bilans de la tuile résultante sont marqués d'un prime et sont la somme des bilans réunis par une accolade. . . . . 35
- 1.14 La courbe  $C$  divise le réseau en deux régions contiguës,  $S_l$  (représentée ici à gauche de  $C$ ) et  $S_r$  (représentée ici à droite de  $C$ ). À chaque site  $\pi$  on associe l'étoile  $St_\pi$  constituée des sites qui sont voisins immédiats de  $\pi$ . On désigne par  $\Pi_C$  l'ensemble des sites  $\pi$  tels que  $C$  intersecte  $St_\pi$ . Les sites n'appartenant pas à  $\Pi_C$  sont répartis en deux sous-ensembles, l'ensemble  $\Pi_l$  de ceux qui sont situés sur  $S_l$  et l'ensemble  $\Pi_r$  de ceux qui sont situés sur  $S_r$ . . . . . 36
- 1.15 L'information contenu dans  $(X, Y)$  ne permet pas de compter le nombre  $l_C$  de courbes intersectant  $C$ . Par exemple, la paire  $(X, Y) = (x_A, x_B, x_C; y_A, y_B, y_C)$  est compatibles avec plusieurs configurations de courbes dont deux sont représentées ici. Remarquons que dans cet exemple,  $y_i$  est situé à la suite de  $x_i$  pour tout  $i$ , mais nous pourrions imaginer des arrangements entièrement différents. Par exemple, nous aurions pu disposer  $(X, Y)$  de sorte que tous les  $x$  soient contigus et que, par conséquent, tous les  $y$  le soient également. 38

# Liste des tableaux

1.1	Valeurs des exposants critiques (tableau tiré de Binney & al. [1]). . . . .	6
-----	---	---

# Chapitre 1

## Phénomènes critiques, groupe de renormalisation et factorisation des poids de Boltzmann

### 1.1 Les phénomènes critiques

#### 1.1.1 Introduction

Dans les conditions qui nous sont familières, les transitions de phase de l'eau, ou la solidification d'un métal fondu, sont des transitions de phases du *premier ordre*. Ce type de transition est généralement défini comme impliquant une libération ou une absorption de chaleur latente – toutes les autres transitions étant habituellement subsumées dans la catégorie des transitions de phase "continues".

Plus précisément, lorsqu'un matériau subit une transition du premier ordre d'une phase à température élevée à une phase à basse température (par exemple la transition eau-glace), une quantité non-nulle de chaleur, appelée chaleur latente, est libérée à mesure que le matériau se refroidit à travers un intervalle infinitésimal de température centré autour de la température de transition  $T_t$ . Ceci nous indique qu'à  $T_t$ , le matériau subit une altération radicale de sa structure microscopique.

À l'opposé, les propriétés d'un matériau subissant une transition de phase continue ne varient pas profondément à mesure que se déroule la transition. Afin d'illustrer ceci simplement, référons-

nous à l'exemple paradigmatique d'une transition de phase continue, soit le passage du fer de l'état paramagnétique à l'état ferromagnétique à la **température de Curie**  $T_c = 1043$  K. À  $T > T_c$ , le fer est paramagnétique, c'est-à-dire que la magnétisation du matériau est nulle en l'absence d'un champ magnétique externe et que, lorsque l'on applique un champ faible  $\mathbf{B}$ , le moment magnétique par unité de volume du matériau devient proportionnel au champ :

$$\mathbf{m} \cong \mu \mathbf{B}$$

où  $\mu$  est une constante positive. À  $T < T_c$ , le fer est ferromagnétique, ce qui signifie que la magnétisation du matériau est non-nulle même en l'absence d'un champ magnétique externe<sup>1</sup> et que, si l'on applique un champ  $\mathbf{B}$  (non-négligeable), cette magnétisation s'aligne presque instantanément avec  $\mathbf{B}$ . Par conséquent,  $\mathbf{m}$  n'est plus relié linéairement à  $\mathbf{B}$ . À mesure que l'on chauffe un échantillon de fer et que l'on approche  $T_c$  par le bas, la magnétisation décroît rapidement jusqu'à s'annuler en  $T_c$  et pour toute température  $T > T_c$ . Les propriétés de l'échantillon ne changent donc pas de façon radicale à mesure que l'on traverse  $T_c$ . Toutefois, on remarque qu'une discontinuité apparaît dans le taux de variation de  $\mathbf{m}_0(T)$  (voir figure 1.1) et c'est précisément ce qui constitue l'essence d'une transition de phase continue : quoique les propriétés du système varient de façon continue en  $T_c$ , au moins un de leurs taux de variation y est discontinu.

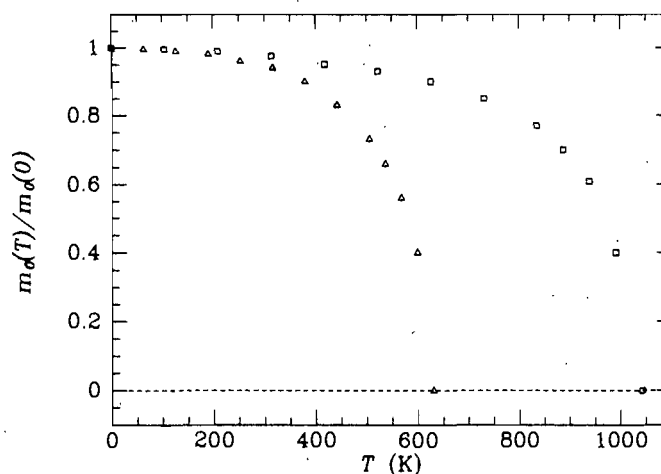


FIG. 1.1 – La magnétisation  $m_0(T)$  du fer (carrés) et du nickel (triangles) en l'absence de champ magnétique externe. Pour cette transition de phase continue  $dm_0/dT$  possède une discontinuité au point de Curie (figure tirée de Binney & al. [1]).

Les transitions de phase de l'eau sont ordinairement du premier ordre, mais il existe une condition spéciale sous laquelle la transition eau-vapeur est continue. À  $\rho_c = 0.323$  g/cm<sup>3</sup> et  $T_c = 647$  K,

<sup>1</sup>En réalité, la magnétisation est constante seulement à l'intérieur de domaines petits, mais macroscopiques.

aucune chaleur latente n'est libérée lors de la transition. Ces valeurs définissent le **point critique** auquel la transition eau-vapeur devient continue (point C à la figure 1.2). À  $T > T_c$ , liquide et vapeur cessent d'être des états distincts de l'eau. En particulier, il est possible de convertir une quantité de

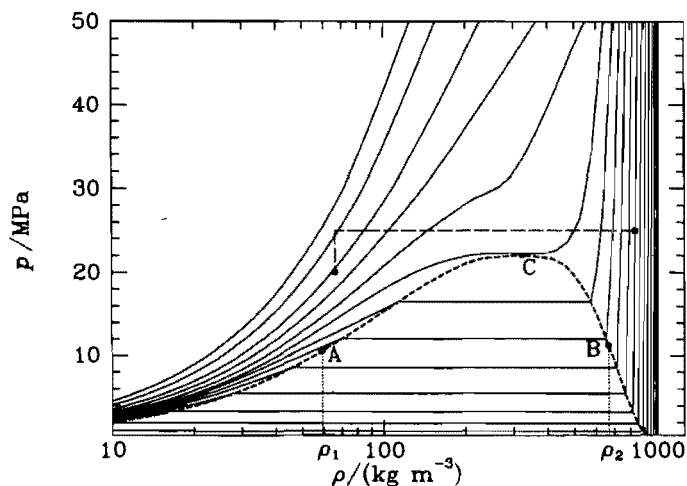


FIG. 1.2 – Les isothermes de l'eau (figure tirée de Binney & al. [1]). Sous la courbe hachurées, le système est constitué d'un mélange d'eau et de vapeur. À droite de cette courbe et sous l'isotherme critique (celle passant par le point C), le système est uniquement constitué d'eau. Au-dessus de l'isotherme critique et/ou à gauche de la courbe hachurée, le système n'est constitué que de vapeur.

liquide en vapeur sans la faire bouillir : 1) on chauffe d'abord l'eau à  $T > T_c$  sous une pression qui excède la pression de vapeur à  $(\rho_c, T_c)$  puis, 2) on réduit la pression par expansion isothermique (voir figure 1.2).

### 1.1.2 Les exposants critiques

L'expression "phénomènes critiques" réfère aux propriétés thermodynamiques de systèmes au voisinage de la température critique  $T_c$  d'une transition de phase continue. Au point critique, diverses quantités mesurables ont un comportement divergent que l'on peut décrire au moyen d'**exposants critiques**. On en reconnaît communément six que l'on dénote par  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, \nu$ . Introduisons la quantité

$$t = \frac{T - T_c}{T_c}$$

et supposons que, dans la limite  $t \rightarrow 0$ , toute quantité thermodynamique peut se décomposer en une partie "régulière", demeurant finie (mais pas nécessairement continue), et une partie "singulière"

pouvant diverger ou présenter des dérivées divergentes. La partie singulière est supposée proportionnelle à une certaine puissance de  $t$ , généralement fractionnaire.

Pour un système magnétique, les quatres premiers exposants critiques ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ ) sont définis comme suit :

$$\text{chaleur spécifique : } c_B = \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_B \sim |t|^{-\alpha}, \quad t \rightarrow 0, B = 0 \quad (1.1)$$

$$\text{magnétisation : } m \sim |t|^\beta, \quad T \rightarrow T_{c-}, B = 0 \quad (1.2)$$

$$\text{susceptibilité : } \chi_T = \left( \frac{\partial m}{\partial B} \right)_T \sim |t|^{-\gamma}, \quad t \rightarrow 0, B = 0 \quad (1.3)$$

$$\text{équation d'état (} t = 0 \text{): } m \sim B^{1/\delta}, \quad t = 0, B \rightarrow 0 \quad (1.4)$$

Ces définitions demeurent valides dans le cas d'une transition liquide-gaz à condition de faire la substitution  $c_B \rightarrow c_v \equiv (\partial u / \partial T)_v$  puis de remplacer la magnétisation  $m$  par la différence de densité  $\Delta \rho \equiv \rho_{\text{liquide}} - \rho_{\text{gaz}}$  et la susceptibilité  $\chi_T$  par la compressibilité isothermique  $\kappa_T \equiv -(1/V)(\partial V / \partial P)_T$ . Les définitions des deux derniers exposants critiques,  $\eta$  et  $\nu$ , seront énoncées plus loin puisqu'elles reposent sur les notions de paramètre d'ordre et de fonction de corrélation qui seront introduites en 1.1.3.

### Fluctuations et opalescence critique

Les valeurs élevées atteintes par  $\kappa_T$  et  $\chi_T$  juste au-dessus de  $T_c$  donnent lieu à d'importantes fluctuations dans la densité ou la magnétisation du matériau. Dans le cas d'un gaz, les origines physiques de ces fluctuations peuvent se comprendre qualitativement. La pression qu'un gaz exerce sur une petite surface fluctue constamment en raison de la nature atomique de la matière. Par conséquent, chaque parcelle de gaz (contenant un nombre fixe de particules) peut être vue comme soumise aux fluctuations incessantes de la pression de confinement exercée par le gaz qui l'enveloppe. Si la compressibilité du gaz est inhabituellement élevée, telle qu'elle l'est au voisinage de  $(\rho_c, T_c)$ , le volume de la parcelle de gaz considérée fluctuera par une quantité tout aussi élevée en réponse aux fluctuations de la pression de confinement à ses frontières.

Au voisinage d'un point critique, la plupart des gaz sont plutôt denses et possèdent donc des indices de réfraction relativement élevés. Par conséquent, les fluctuations de l'ordre de la longueur d'onde moyenne du spectre visible ( $\approx 0.5 \mu\text{m}$ ) peuvent être suffisamment importantes pour être observées en laboratoire à travers le phénomène d'**opalescence critique**, lequel consiste en un manque de netteté des images vues à travers un petit volume de gaz.



### 1.1.3 Paramètre d'ordre et fonction de corrélation

La première étape vers une théorie quantitative des transitions de phase continues est d'identifier une quantité  $\phi$ , appelée **paramètre d'ordre**, dont la moyenne thermique (c'est-à-dire la moyenne prise sur une longue période d'équilibre thermodynamique) s'annule d'un côté de la transition (presque invariablement du côté à haute température) et s'éloigne de zéro de l'autre côté. On définit  $\phi$  comme une quantité qui varie dans l'espace et le temps afin de pouvoir interpréter des phénomènes tels que l'opalescence critique en termes de fluctuations dans  $\phi(\mathbf{x}, t)$ .

Le choix d'un paramètre d'ordre reposant sur des considérations de nature phénoménologique, il n'existe donc pas de méthode générale permettant de le déterminer. Par exemple, dans le cas d'une transition liquide-gaz, à mesure que l'on tend vers  $T_c$  par dessous, les densités moyennes de liquide et de vapeur convergent vers une valeur commune, ce qui suggère que le champ scalaire  $\phi(\mathbf{x}) \equiv \rho(\mathbf{x}) - \rho_{\text{gaz}}(\mathbf{x})$  constitue un paramètre d'ordre approprié pour cette transition. Dans le cas d'une transition ferromagnétique-paramagnétique, on définit  $\phi(\mathbf{x})$  comme étant la magnétisation moyenne instantanée dans un petit volume centré en  $\mathbf{x}$ . Le paramètre d'ordre d'un système magnétique est donc un champ vectoriel plutôt qu'un simple paramètre. Pour une transition conducteur/supraconducteur, on adopte comme paramètre d'ordre le champ scalaire complexe  $\phi(\mathbf{x})$  représentant l'amplitude quantique de trouver une paire de Cooper en  $\mathbf{x}$ .

Outre les quantités thermodynamiques mentionnées à la section précédente, la **fonction de corrélation**  $G_c(\mathbf{r})$  fournit d'importantes informations au sujet d'une transition de phase. On la définit par l'expression

$$G_c(\mathbf{r}) \equiv \langle \phi(\mathbf{0}) \cdot \phi(\mathbf{r}) \rangle - |\langle \phi \rangle|^2$$

où  $\langle \rangle$  représente la moyenne thermique et " $\cdot$ ", un produit scalaire approprié. Comme son nom l'indique, la fonction de corrélation fournit une mesure des corrélations entre les fluctuations spatiales du paramètre d'ordre. Nous allons supposer que, dans la limite  $t \rightarrow 0$ ,  $G_c(\mathbf{r})$  peut s'exprimer sous la forme d'Ornstein-Zernike (voir Huang [2], §16.2)

$$\lim_{t \rightarrow 0} G_c(\mathbf{r}) \sim r^{-p} e^{-r/\xi}, \quad (1.5)$$

où  $\xi$  est la **longueur de corrélation**. Les deux exposants critiques restant,  $\eta$  et  $\nu$ , sont définis à partir de cette dernière expression :

$$\text{longueur de corrélation : } \xi \sim |t|^{-\nu}, \quad B = 0 \quad (1.6)$$

$$\text{décroissance en loi de puissance (t=0) : } p = d - 2 + \eta, \quad t = 0, B = 0, \quad (1.7)$$

où  $d$  est la dimension spatiale du système à l'étude.

L'équation (1.5) nous indique que les fluctuations dans la valeur du paramètre d'ordre peuvent

être corrélées jusqu'à des distances de l'ordre de la longueur de corrélation  $\xi$ , mais que les corrélations sur des distances significativement plus grandes sont excessivement rares. Au point critique, toutefois, on observe expérimentalement que la longueur de corrélation diverge (voir (1.6)), ce qui entraîne pour conséquence que les corrélations à grande échelle entre les fluctuations du paramètre d'ordre ne sont plus exponentiellement rares et peuvent s'étendre à travers tout le système. Ainsi, les interactions intermoléculaires, qui sont de courte portée, contribuent à générer des structures dynamiques de dimensions macroscopiques. Plus encore, alors que les interactions intermoléculaires se manifestent à une échelle bien définie, les structures dynamiques dont elles sont à l'origine apparaissent, quant à elles, dépourvues d'échelle naturelle.

### 1.1.4 Le phénomène d'universalité

Les exposants critiques se révèlent être des quantités particulièrement significatives du fait de leur **universalité**. On constate en effet qu'étonnamment, les exposants critiques caractérisant des transitions fort différentes, telles que la transition liquide-gaz du xénon et la séparation de phase d'une solution binaire, sont égaux à l'intérieur des incertitudes expérimentales (voir tableau 1.1). La

	Xe	Fluide binaire	cuivre- $\beta$	$^4\text{He}$	Fe	Ni
D	1	1	1	2	3	3
$\alpha$	< 0.2	$0.113 \pm .005$	$0.05 \pm .06$	$-0.014 \pm .016$	$-0.03 \pm .12$	$0.04 \pm .12$
$\beta$	$0.35 \pm .015$	$0.322 \pm .002$	$0.305 \pm .005$	$0.34 \pm .01$	$0.37 \pm .01$	$0.358 \pm .003$
$\gamma$	$1.3^{+1}_{-2}$	$1.239 \pm .002$	$1.25 \pm .02$	$1.33 \pm .03$	$1.33 \pm .015$	$1.33 \pm .02$
$\delta$	$4.2^{+6}_{-3}$	$4.85 \pm .03$		$3.95 \pm .15$	$4.3 \pm .1$	$4.29 \pm .05$
$\eta$	$0.1 \pm .1$	$0.017 \pm .015$	$0.08 \pm .07$	$0.021 \pm .05$	$0.07 \pm .04$	$0.041 \pm .01$
$\nu$	$\approx 0.57$	$0.625 \pm .006$	$0.65 \pm .02$	$0.672 \pm .001$	$0.69 \pm .02$	$0.64 \pm .1$

TAB. 1.1 – Valeurs des exposants critiques (tableau tiré de Binney & al. [1]).

théorie basée sur le groupe de renormalisation, dont nous discuterons à la section suivante, suggère en fait que les systèmes se répartissent en **classes d'universalité** et que l'égalité des exposants critiques n'est vérifiée qu'au sein d'une même classe d'universalité.

Un exemple encore plus surprenant de similitude entre les propriétés de systèmes apparemment différents nous est donné à la figure 1.3, laquelle démontre que les courbes de coexistence liquide-gaz de plusieurs fluides peuvent être superposées après un simple changement d'échelle des variables. Les systèmes magnétiques présentent aussi ce type de superposition de données. Un des principaux objectifs de la théorie des phénomènes critiques est d'expliquer comment il est possible que des sys-

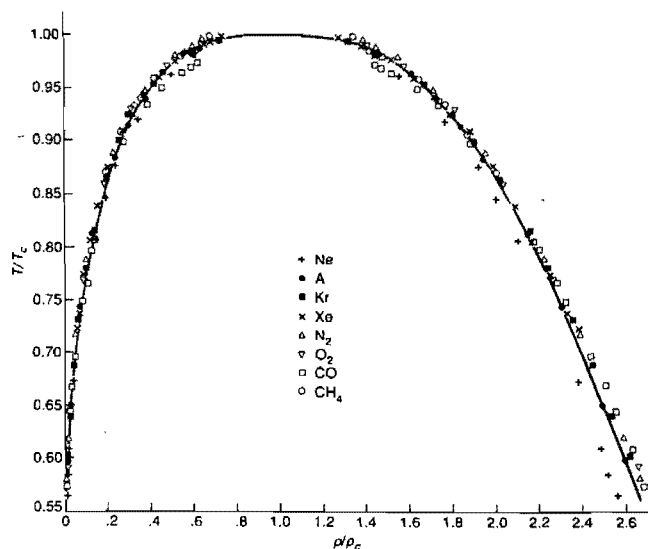


FIG. 1.3 – Les courbes de coexistence liquide-gaz de nombreux fluides peuvent être littéralement superposées lorsque la température et la densité sont mesurées à l'échelle de leur valeur critique  $T_c$  et  $\rho_c$  (figure tirée de Binney & al. [1]).

tèmes très différents à l'échelle moléculaire puissent présenter ce genre de superposition de données et soient caractérisés par les mêmes exposants critiques. Car il semble paradoxal que la détermination de ces exposants ne dépende aucunement des détails des interactions inter-moléculaires, alors que ces dernières sont responsables de l'existence même d'une transition de phase.

### 1.1.5 L'invariance d'échelle

Des six exposants critiques  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, \nu$ , seulement deux sont indépendants compte tenu des "lois d'échelle" suivantes :

$$\text{Rushbrooke : } \alpha + 2\beta + \gamma = 2 \quad (1.8)$$

$$\text{Griffiths : } \alpha + \beta(\delta + 1) = 2 \quad (1.9)$$

$$\text{Fisher : } \gamma = \nu(2 - \eta) \quad (1.10)$$

$$\text{Josephson : } \nu d = 2 - \alpha. \quad (1.11)$$

Ces lois d'échelle, qui sont vérifiées expérimentalement, peuvent être dérivées théoriquement sur la base de l'*hypothèse d'échelle* selon laquelle, au voisinage du point critique, la longueur de corrélation  $\xi$  constitue l'unique longueur caractéristique du système en terme de laquelle toutes les autres longueurs doivent être mesurées (voir Huang [2], §16.4). Lorsqu'on la combine avec l'observation expérimentale de la divergence de  $\xi$ , en  $t = 0$ , l'hypothèse d'échelle mène directement à la conclusion qu'un système au point critique ne possède aucune longueur caractéristique, ce qui implique que sa description doit être invariante sous transformation d'échelle.

Intuitivement, l'invariance d'échelle signifie que si l'on agrandit une région d'un système jusqu'à ce qu'elle soit aussi grande que le système initial, il devient alors impossible de distinguer entre la région agrandie et le système initial. En termes mathématiques, on définit un système invariant sous transformation d'échelle comme un système dont toutes les fonctions thermodynamiques sont des *fonctions homogènes* de leurs paramètres.

### Les fonctions homogènes

On dit d'une fonction  $F(x)$  qu'elle est "homogène de degré  $p$ " si, pour toute valeur de  $\lambda$ , elle satisfait

$$F(\lambda x) = \lambda^p F(x) .$$

En posant  $\lambda = x^{-1}$  dans l'expression précédente, on trouve

$$F(x) = F(1)x^p .$$

Une fonction homogène  $F(x)$  se comporte donc comme une loi de puissance et c'est précisément pour cette raison qu'elle est invariante d'échelle. En effet, si l'on calcule  $f \sim (x)^p$  sur les paires d'octaves  $(0.5, 2)$ ,  $(5, 20)$  et  $(50, 200)$ , le rapport entre la plus grande et la plus petite valeur est toujours  $4^{|p|}$ , de sorte que les graphiques de  $f(x)$  sur chacun de ces trois intervalles peuvent être superposés par un simple changement d'échelle. En ce sens, la description d'un phénomène obéissant à une loi de puissance demeure la même quelque soit l'échelle à laquelle on l'étudie.

Considérons maintenant une fonction homogène de deux variables  $\mathcal{F}(x, y)$ . Une telle fonction peut s'écrire sous la forme

$$\mathcal{F}(\lambda^p x, \lambda^q y) = \lambda \mathcal{F}(x, y)$$

et est caractérisée par deux paramètres,  $p$  et  $q$ . En posant  $\lambda = y^{-1/q}$ , on obtient

$$\mathcal{F}(x, y) = y^{1/q} \mathcal{F}\left(\frac{x}{y^{p/q}}, 1\right) ,$$

et on constate alors que la fonction homogène,  $\mathcal{F}(x, y)$ , ne dépend de  $x$  et de  $y$  qu'à travers la quantité  $x/y^{p/q}$ .

### L'hypothèse d'échelle de Widom

Widom fut le premier à souligner que, lorsque l'on varie la distance par rapport au point critique en son voisinage, les fonctions thermodynamiques ne changent pas de forme, mais seulement d'échelle. Il montra que les lois d'échelle de Rushbrooke et de Griffiths (éqs. (1.8) et (1.9)) peuvent être dérivées théoriquement en supposant qu'au voisinage du point critique, l'énergie libre de Helmholtz se comporte comme une fonction homogène de ses paramètres. Pour un système magnétique, Widom suggéra

$$f(t, B) = t^{1/y} f(B/t^{x/y}), \quad t \rightarrow 0. \quad (1.12)$$

Notons qu'une expression de cette forme serait valide pour tout autre système possédant le même nombre de degrés de liberté. Si l'on calcule  $m$ ,  $\chi$  et  $c_B$  en utilisant (1.12) et que l'on compare les résultats avec les définitions (1.1), (1.2) et (1.3) on obtient

$$m|_{B=0} = -\left(\frac{\partial f}{\partial B}\right)_T \Big|_{B=0} = -(t^{1/y}/t^{x/y})f'(0) \Rightarrow \beta = \frac{1-x}{y} \quad (1.13)$$

$$\chi|_{B=0} = -\left(\frac{\partial^2 f}{\partial B^2}\right)_T \Big|_{B=0} = t^{(1-2x)/y} f''(0) \Rightarrow \gamma = \frac{2x-1}{y} \quad (1.14)$$

$$c_B|_{B=0} = -T \left(\frac{\partial^2 f}{\partial T^2}\right)_B \Big|_{B=0} = -\frac{f(0)}{T_c} \frac{1}{y} \left(\frac{1}{y} - 1\right) t^{1/y-2} \Rightarrow \alpha = 2 - \frac{1}{y} \quad (1.15)$$

Finalement, en réécrivant (1.12) sous la forme  $f(T, B) = B^{1/x} f(t/B^{y/x})$  et en utilisant la définition (1.4), on trouve

$$m|_{t=0} = -\left(\frac{\partial f}{\partial B}\right)_T \Big|_{t=0} = B^{1/x-1} f(0) \Rightarrow \delta = \frac{x}{1-x}. \quad (1.16)$$

Il est alors possible d'éliminer  $x$  et  $y$  des quatre relations (1.13), (1.14), (1.15) et (1.16) et de retrouver, tel qu'annoncé, les lois d'échelle de Rushbrooke et de Griffiths :

$$\alpha + 2\beta + \gamma = \frac{(2y-1) + 2(1-x) + (2x-1)}{y} = 2. \quad (1.17)$$

$$\alpha + \beta(\delta + 1) = \frac{(2y-1)}{y} + \frac{1}{y} = 2.$$

### La transformation d'échelle de Kadanoff

Kadanoff (1966) montra le premier comment l'idée d'invariance d'échelle pouvait être appliquée dans le cas du modèle d'Ising. Nous allons suivre Reichl [3] (§8.C.3) et considérer un système de  $N$  spins en  $d$  dimensions avec couplage entre voisins immédiats. L'hamiltonien s'écrit

$$\mathcal{H}(\sigma) = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j - B \sum_{i=1}^N \sigma_i. \quad (1.18)$$

Nous allons diviser le réseau en blocs de longueur  $La$ , où  $a$  est la distance entre les sites. La longueur  $L$  est choisie telle que  $La \ll \xi$ . Le nombre total de spins dans chaque bloc est  $L^d$  et le nombre total de blocs est  $NL^{-d}$ . Le spin total à l'intérieur du bloc  $I$  est

$$\sigma'_I = \sum_{i \in I} \sigma_i . \quad (1.19)$$

Puisque  $L$  est choisie tel que  $La \ll \xi$ , les spins contenus à l'intérieur d'un même bloc sont fortement corrélés et il est hautement probable qu'ils soient alignés dans une direction commune. C'est pourquoi il est utile de définir une nouvelle variable de spin,  $\sigma_I$ , à travers la relation

$$\sigma'_I = L^q \sigma_I , \quad (1.20)$$

où  $\sigma_I = \pm 1$ . Comme les spins ne sont couplés qu'à leurs plus proches voisins, il est raisonnable de supposer que, de la même façon, le couplage entre blocs ne sera effectif qu'entre blocs contigus. Ainsi, l'hamiltonien décrivant le système de blocs sera de la forme

$$\mathcal{H}(\sigma_L) = -J_L \sum_{\langle I, J \rangle} \sigma_I \sigma_J - B_L \sum_{I=1}^{NL^{-d}} \sigma_I , \quad (1.21)$$

où  $J_L$  est une nouvelle constante de couplage entre blocs contigus et  $B_L = L^q B$ . L'hamiltonien (1.21) possède exactement la même forme que l'hamiltonien initial excepté que tous les paramètres ont subi un changement d'échelle. On s'attend donc à ce que l'énergie libre de Helmholtz par bloc,  $f(t_L, B_L)$ , ait la même forme fonctionnelle que l'énergie libre par site,  $f(t, B)$ . Puisqu'il y a  $L^d$  spins par bloc, on a

$$f(t_L, B_L) = L^d f(t, B) . \quad (1.22)$$

En variant l'échelle du système afin de le décrire en termes de blocs plutôt qu'en termes de sites, on réduit la longueur de corrélation effective (en la mesurant en unités de  $La$ ) et l'on s'éloigne donc du point critique. Par conséquent, la longueur de corrélation se comportera comme

$$\xi_L(t_L, B_L) = L^{-1} \xi(t, B) . \quad (1.23)$$

Puisque la transformation d'échelle nous éloigne du point critique, la température  $t$  et le champ magnétique  $B$  doivent aussi "changer d'échelle". En ce qui concerne le champ magnétique, nous savons déjà que  $B_L = L^q B$ . Quant à la température, nous allons supposer que  $t_L = L^p t$ . L'équation (1.22) devient alors

$$f(L^p t, L^q B) = L^d f(t, B) , \quad (1.24)$$

ce qui est identique à l'hypothèse d'échelle de Widom (1.12) en prenant  $p = yd$  et  $q = xd$ .

La représentation de Kadanoff de l'invariance d'échelle nous permet de dériver théoriquement les lois de Fisher et de Josephson (éqs. (1.10) et (1.11)), lesquelles sont reliées aux corrélations spatiales

entre les fluctuations des spins dans le système. La fonction de corrélation du système de blocs est définie par

$$G_c(r_L, t_L) = \langle \sigma_I \sigma_J \rangle - \langle \sigma_I \rangle \langle \sigma_J \rangle, \quad (1.25)$$

où  $r_L$  est la distance entre les blocs I et J en unités de  $L$ . On peut récrire (1.25) comme

$$\begin{aligned} G_c(r_L, t_L) &= (L^q)^{-2} [\langle \sigma'_I \sigma'_J \rangle - \langle \sigma'_I \rangle \langle \sigma'_J \rangle] \\ &= L^{-2q} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} [\langle \sigma_i \sigma_j \rangle - \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle] \\ &= L^{-2q} (L^d)^2 [\langle \sigma_i \sigma_j \rangle - \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle] = L^{2(d-q)} G_c(r, t), \end{aligned} \quad (1.26)$$

où  $r$  est la distance entre les sites  $i \in I$  et  $j \in J$ . Puisque les distances  $r_L$  et  $r$  sont reliées par l'expression  $r_L = L^{-1}r$ , on peut écrire

$$G_c(L^{-1}r, L^p t) = L^{2(d-q)} G_c(r, t) \quad (1.27)$$

et si l'on choisit  $L = r/a$ , la fonction de corrélation prend alors la forme

$$G_c(r, t) = \left(\frac{r}{a}\right)^{2(q-d)} G_c\left(a, \left(\frac{r}{a}\right)^p t\right). \quad (1.28)$$

Au point critique,  $t = 0$  et la fonction de corrélation se comporte donc comme

$$G_c(r, 0) \sim r^{2(q-d)}. \quad (1.29)$$

En comparant avec (1.5) et (1.7), on trouve

$$d - 2 + \eta = 2(d - q) = 2d(1 - x) \quad \Rightarrow \quad (2 - \eta) = d(2x - 1). \quad (1.30)$$

Maintenant, d'après (1.5) et (1.6), on voit que le comportement de la longueur de corrélation au voisinage du point critique dépend de  $r$  et  $t$  à travers la combinaison  $r/\xi = rt^\nu$ . Or, dans l'équation (1.28), la fonction de corrélation dépend de  $r$  et  $t$  à travers la combinaison  $r^p t$ . Donc,  $p = \nu d = \nu^{-1}$ . En insérant ce résultat dans (1.15), on obtient la loi de Josephson

$$\nu d = 2 - \alpha. \quad (1.31)$$

À présent, utilisons (1.31) et (1.14) afin d'éliminer respectivement  $d$  et le facteur  $(2x - 1)$  dans (1.30) puis utilisons (1.15) pour éliminer le facteur " $\nu$ " que ces dernières étapes on introduit. On obtient alors la loi de Fisher

$$(2 - \eta)\nu = \gamma. \quad (1.32)$$

Bien que la représentation de Kadanoff de l'invariance d'échelle possède une grande valeur heuristique, elle ne peut constituer la base d'un formalisme opératoire. Elle repose tout simplement sur un trop grand nombre de suppositions ad hoc dont certaines ne peuvent être vraies que dans certains domaines de paramètres. Notamment, l'interaction entre blocs de spins est généralement plus compliquée qu'une simple interaction entre blocs contigus.

## 1.2 Le groupe de renormalisation

Nous avons déjà mentionné à la section précédente qu'au voisinage du point critique, des fluctuations dans la valeur du paramètre d'ordre se manifestent à toutes les échelles au sein du système et ce, de la distance intermoléculaire jusqu'à la longueur de corrélation, laquelle tend vers l'infini au point critique. Le groupe de renormalisation (GR) est une méthode qui vise à réduire de façon systématique le grand nombre de degrés de liberté et de longueurs d'échelle caractérisant le système. Bien que le GR ne produise pas de solution exacte et que son application implique d'importantes approximations, il parvient néanmoins à capturer l'ensemble des caractéristiques physiques essentielles à la description des phénomènes critiques. Mentionnons que les développements présentés dans cette section sont tirés de Domb [4] et K.G. Wilson [5].

L'idée du GR consiste à définir une transformation  $\mathbf{R}$  dans l'espace des paramètres de l'hamiltonien :

$$\mathcal{H}' = \mathbf{R}[\mathcal{H}] \quad (1.33)$$

telle que la dimension et la symétrie du système soient préservées, la longueur de corrélation réduite par un facteur  $b > 1$  et le nombre de degrés de liberté réduit de  $N$  à  $N' = N/b^d$ . On choisit  $\mathbf{R}$  de sorte que la fonction de partition soit aussi préservée :

$$Z_{N'}(\mathcal{H}') = Z_N(\mathcal{H}) . \quad (1.34)$$

Il existe un vaste choix de transformations possibles que l'on peut définir aussi bien dans l'espace des positions que dans l'espace des impulsions. Dans l'espace des positions, la transformation suit habituellement l'idée de Kadanoff d'introduire de nouvelles variables correspondant à des blocs de spins ou d'éliminer une certaine fraction des spins par sommation partielle (transformation de décimation). Toutefois, la dimension des côtés des blocs est restreinte à un ou deux pas de réseau et la relation entre le spin initial et le bloc de spin doit être décrite avec précision. Dans l'espace des impulsions, l'objectif est d'éliminer les variables à grande impulsion qui correspondent à des fluctuations de courte longueur d'onde. Dans les sous-sections qui suivent, nous ne donnerons que des exemples de transformations définies dans l'espace des positions.

On itère la transformation,

$$\mathcal{H}' = \mathbf{R}(\mathcal{H}), \quad \mathcal{H}'' = \mathbf{R}(\mathcal{H}'), \quad \dots \quad (1.35)$$

et l'on suppose que la convergence a lieu vers une certaine valeur  $\mathcal{H}^*$  de l'hamiltonien, appelée **point fixe**, satisfaisant la relation

$$\mathcal{H}^* = \mathbf{R}[\mathcal{H}^*] . \quad (1.36)$$



L'idée essentielle du GR est alors de supposer que les propriétés critiques sont déterminées par le comportement au voisinage du point fixe. Puisque les processus itératifs tiennent un rôle central dans la théorie, nous allons consacrer la première partie de cette section à une discussion de leur propriétés caractéristiques.

### 1.2.1 Les processus itératifs

Le processus itératif le plus simple consiste en une relation en une dimension de la forme

$$x_{n+1} = F(x_n) . \quad (1.37)$$

qui mène à une solution de l'équation

$$x = F(x) . \quad (1.38)$$

Soit  $\zeta$  une solution particulière de cette équation. Écrivons

$$x_{n+1} = \zeta + \theta_{n+1} \quad (1.39)$$

et supposons que  $\theta_{n+1}$  est suffisamment petit pour qu'un développement en série de Taylor au premier ordre au voisinage de  $\zeta$  puisse constituer une approximation adéquate. En substituant (1.39) dans (1.37), on obtient

$$\theta_{n+1} \cong F'(\zeta)\theta_n . \quad (1.40)$$

Ainsi, dépendamment si  $|F'(\zeta)| > 1$  ou  $|F'(\zeta)| < 1$ , l'écart par rapport à  $\zeta$  va croître ou décroître à chaque itération en suivant une progression géométrique. Un point  $\zeta$  tel que  $|F'(\zeta)| > 1$  est appelé **point fixe répulsif** alors qu'un point  $\zeta$  tel que  $|F'(\zeta)| < 1$  est appelé **point fixe attractif**.

Considérons à présent un processus itératif en deux dimensions

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= F_1(x_n, y_n) \\ y_{n+1} &= F_2(x_n, y_n) . \end{aligned} \quad (1.41)$$

Les points fixes sont les solutions des équations simultanées

$$\begin{aligned} x &= F_1(x, y) \\ y &= F_2(x, y) . \end{aligned} \quad (1.42)$$

Soit  $(\zeta, \eta)$  une solution particulière et écrivons

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \zeta + \theta_{n+1} \\ y_{n+1} &= \eta + \phi_{n+1} . \end{aligned} \quad (1.43)$$

En substituant (1.43) dans (1.41), on obtient au premier ordre

$$\begin{aligned}\theta_{n+1} &= \frac{\partial F_1}{\partial x} \Big|_{\substack{x=\zeta \\ y=\eta}} \theta_n + \frac{\partial F_1}{\partial y} \Big|_{\substack{x=\zeta \\ y=\eta}} \phi_n \\ \phi_{n+1} &= \frac{\partial F_2}{\partial x} \Big|_{\substack{x=\zeta \\ y=\eta}} \theta_n + \frac{\partial F_2}{\partial y} \Big|_{\substack{x=\zeta \\ y=\eta}} \phi_n\end{aligned}\tag{1.44}$$

ou en notation matricielle

$$\Theta_{n+1} = \Delta \Theta_n \tag{1.45}$$

où

$$\Theta_n = \begin{pmatrix} \theta_n \\ \phi_n \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} \partial F_1 / \partial x & \partial F_1 / \partial y \\ \partial F_2 / \partial x & \partial F_2 / \partial y \end{pmatrix}_{\substack{x=\zeta \\ y=\eta}} \tag{1.46}$$

Supposons que les valeurs propres de la matrice  $\Delta$  sont  $\lambda_1, \lambda_2$ , et que les vecteurs propres correspondants sont  $t_1, t_2$ . Alors  $\Theta_0$  peut s'écrire sous la forme

$$\Theta_0 = a_1 t_1 + a_2 t_2 \tag{1.47}$$

et en substituant (1.47) dans (1.45), on obtient

$$\Theta_n = a_1 \lambda_1^n t_1 + a_2 \lambda_2^n t_2. \tag{1.48}$$

Si  $\lambda_1 < 1, \lambda_2 < 1$ ,  $\Theta_n$  tend vers 0 et le point fixe sera dit attractif (ou "2-stable"). Si  $\lambda_1 > 1, \lambda_2 > 1$ ,  $\Theta_n$  croît indéfiniment (sauf si  $\Theta_0 = 0$ ) et le point fixe sera dit répulsif (ou "instable"). Si  $\lambda_1 < 1, \lambda_2 > 1$ , alors pour tout point initial avec  $a_2 = 0$ , c'est-à-dire pour tout vecteur initial orthogonal à  $t_2$ ,  $\Theta_n$  tend vers zéro, mais pour tout autre vecteur initial,  $\Theta_n$  croît indéfiniment. Le point  $(\zeta, \eta)$  est alors appelé **point fixe mixte** (ou "1-stable"). Finalement, si une des deux valeurs propres vaut 1, le point fixe est appelé **point fixe marginal**.

La généralisation à un espace de dimension  $r$  est immédiate. Dans le cas d'un point fixe  $(r-s)$ -stable,  $\Theta_0$  tend vers 0 pour tout vecteur dans le sous-espace de dimension  $(r-s)$  défini par les  $r-s$  valeurs propres  $\lambda_i < 1$ .

En s'éloignant de l'approximation linéaire (valable uniquement au voisinage d'un point fixe donné), il est possible d'identifier une région de dimension  $(r-s)$  appelée **domaine d'attraction** du point fixe. Tout vecteur initial compris dans ce sous-espace tendra vers le point fixe alors que tout autre vecteur initial s'étendant au-delà des limites de ce sous-espace s'éloignera vers un autre point fixe ou encore vers 0 ou l'infini (lesquels sont, par convention, appelés *points fixes triviaux*).

Les propriétés caractéristiques des processus itératifs que nous venons de décrire fournissent un cadre conceptuel naturel à l'explication du phénomène d'universalité. Différents points fixes correspondent à différentes classes d'universalité et nous verrons comment les propriétés de chaque classe

d'universalité particulière sont reliées au comportement analytique au voisinage du point fixe correspondant. Le domaine d'attraction d'un point fixe particulier définit les valeurs des paramètres de l'hamiltonien pour lesquelles les exposants critiques (ou tout autre propriété du comportement critique caractérisant une classe d'universalité spécifique) sont identiques.

### 1.2.2 Dérivation du comportement critique au moyen du GR

Il est d'usage d'établir la méthode générale de dérivation du comportement critique au moyen du GR en se basant sur la renormalisation dans l'espace des positions d'un système discret de spins. Considérons la fonction de partition

$$Z_N = \sum_{\{\sigma\}} \exp(-\beta\mathcal{H}[\sigma]) \quad (1.49)$$

que l'on suppose caractérisée par un certain nombre de constantes de couplage  $K_1, K_2, K_3, \dots$  dépendant de  $T, B, \dots$  et pouvant être regroupées sous la forme d'un vecteur  $\mathbf{K}$ . Chacune de ces constantes de couplage correspond à un type différent d'interaction présent au sein du système (couplage entre voisins immédiats, entre seconds voisins immédiats, etc.).

Appliquons maintenant une transformation par blocs de spins ou de décimation  $\mathbf{R}_b$  afin d'obtenir un nouvel ensemble de paramètres  $\mathbf{K}'$  satisfaisant

$$\mathbf{K}' = F(\mathbf{K}) \quad (1.50)$$

où la fonction  $F$  sera habituellement non-linéaire. Puisque nous avons réduit l'unité de longueur par un facteur  $b$ , il s'ensuit que la longueur de corrélation  $\xi$  doit vérifier la relation

$$\xi(\mathbf{K}') = b^{-1} \xi(\mathbf{K}) . \quad (1.51)$$

Par conséquent, en raison de (1.34), nous obtenons pour la fonction de partition par site  $Z = (Z_N)^{1/N}$

$$[Z(\mathbf{K}')]^{N'} = [Z(\mathbf{K})]^N \quad (1.52)$$

et pour l'énergie libre par site

$$f(\mathbf{K}') = b^d f(\mathbf{K}) . \quad (1.53)$$

En appliquant successivement la transformation sous la forme

$$\mathbf{K}_{n+1} = F(\mathbf{K}_n) \quad (1.54)$$

on trouve

$$\xi(\mathbf{K}_{n+1}) = b^{-1} \xi(\mathbf{K}_n) = \dots = b^{-(n+1)} \xi(\mathbf{K}_0) . \quad (1.55)$$

Supposons maintenant que  $\mathbf{K}_n$  approche un point fixe  $\mathbf{K}^*$  satisfaisant

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{F}(\mathbf{K}^*) . \quad (1.56)$$

Il découle alors de (1.55) que si l'on débute en  $\mathbf{K}_0$  et que l'on atteint  $\mathbf{K}^*$  à la  $n^e$  itération,

$$\xi(\mathbf{K}^*) = \mathbf{b}^{-1} \xi(\mathbf{K}^*) = \dots = \mathbf{b}^{-n} \xi(\mathbf{K}_0) , \quad \forall n , \quad (1.57)$$

de sorte que, si  $\xi(\mathbf{K}^*) \neq 0$ , on doit nécessairement avoir  $\xi(\mathbf{K}_0) = \infty$ , c'est-à-dire que le système initial devait forcément être situé au point critique. Par contre, si le point de départ  $\mathbf{K}_0$  est légèrement éloigné du point critique, la longueur de corrélation  $\xi(\mathbf{K}_0)$  est alors finie et nous ne pourrions d'aucune façon aboutir à  $\mathbf{K}^*$ . C'est pourquoi le point fixe  $\mathbf{K}^*$  doit être mixte.

L'ensemble des points convergeant vers  $\mathbf{K}^*$  sous l'application successive de  $\mathbf{R}_b$  est appelé la **surface critique** associée à  $\mathbf{K}^*$ . Chaque point sur cette surface correspond à un hamiltonien effectif situé à la température critique appropriée à la valeur des autres paramètres en ce point. Par exemple, il y aura exactement un point sur cette surface correspondant à l'interaction entre voisins immédiats. Il ne faut cependant pas se représenter la surface critique à la manière d'une surface isotherme,  $T = T_c$ . En général, la température critique variera en différents points de la surface.

Chaque point fixe possède son propre domaine d'attraction et tous les hamiltoniens situés à l'intérieur de ce domaine présenteront le même comportement critique (universalité). Mais différents points fixes dans l'espace des paramètres donneront lieu à différentes classes d'universalité.

Afin d'obtenir le comportement critique au voisinage de  $\mathbf{K}^*$ , écrivons

$$\mathbf{K}_n = \mathbf{K}^* + \mathbf{k}_n \quad (1.58)$$

où  $\mathbf{k}_n$  est petit. En appliquant (1.54) à (1.58), nous pouvons faire un développement en série de Taylor de  $\mathbf{F}(\mathbf{K}^* + \mathbf{k}_n)$  autour de  $\mathbf{K}^*$  et ne retenir que les termes linéaires en  $\mathbf{k}_n$  de manière à obtenir

$$\mathbf{k}_{n+1} = \mathbf{L} \mathbf{k}_n \quad (1.59)$$

où  $\mathbf{L}$  est la matrice jacobienne de la transformation. Écrivons  $\mathbf{I}_i$  afin de dénoter le vecteur propre de  $\mathbf{L}$  de valeur propre  $\Lambda_i$  et développons  $\mathbf{k}_{n_0}$  sous la forme

$$\mathbf{k}_{n_0} = \sum_i u_i^{(0)} \mathbf{I}_i \quad (1.60)$$

où  $n_0$  est suffisamment grand pour que (1.59) soit valide. Nous pouvons alors écrire

$$\mathbf{k}_{n+n_0} = \sum_i \Lambda_i^n u_i^{(0)} \mathbf{I}_i . \quad (1.61)$$

Toute valeur propre  $\Lambda_i$  telle que  $|\Lambda_i| > 1$  grandira en importance avec  $n$  et sera considérée comme *pertinente* alors qu'une valeur propre pour laquelle  $|\Lambda_i| < 1$  sera considérée *non-pertinente*. Si  $|\Lambda_i| = 1$ ,

la valeur propre  $\Lambda_i$  est alors dite *marginale*. Les  $u_i^{(0)}$  sont appelés *champs d'échelle* (et, dans ce qui suit, nous omettrons l'exposant); par exemple,  $u_1$  est la température  $t$ ,  $u_2$  le champ magnétique  $B$ , etc.

De (1.55), on obtient pour la longueur de corrélation

$$\xi(u_1, u_2, \dots) = b^n \xi(\Lambda_1^n u_1, \Lambda_2^n u_2, \dots) \quad (1.62)$$

alors que la relation correspondante pour l'énergie libre découle de (1.53),

$$f(u_1, u_2, \dots) = b^{-dn} f(\Lambda_1^n u_1, \Lambda_2^n u_2, \dots) . \quad (1.63)$$

Lorsque  $B = 0$  et que le seul champ pertinent est la température  $t$ , on trouve à partir de (1.62)

$$\xi(t) = b^n \xi(\Lambda_1^n t) \cong b^n (\Lambda_1^n t)^{-\nu} . \quad (1.64)$$

Et puisque  $\xi(t) \sim t^{-\nu}$ , on obtient

$$b \Lambda_1^{-\nu} = 1 \quad \text{ou} \quad \nu = \ln b / \ln \Lambda_1 . \quad (1.65)$$

Pour l'énergie libre, on définit des indices d'échelle  $y_T$  et  $y_B$  par

$$\Lambda_1 = b^{dy_T}, \quad \Lambda_2 = b^{dy_B} \quad (1.66)$$

et nous obtenons alors, pour tout  $\lambda = b^{dn}$ ,

$$f(\lambda^{y_T} t, \lambda^{y_B} B) = \lambda f(t, B) . \quad (1.67)$$

L'énergie libre est donc une fonction homogène de ses paramètres. En prenant  $\lambda = t^{-1/y_T}$ , on retrouve l'hypothèse d'échelle de Widom (éq.(1.12))

$$f(t, B) = t^{1/y_T} f(B/t^{y_B/y_T}) , \quad (1.68)$$

Finalement, les équations (1.65) et (1.66) nous permettent d'obtenir une dernière relation :

$$\nu^{-1} = dy_T . \quad (1.69)$$

Par conséquent, tous les exposants critiques peuvent être déterminés à partir de  $y_T$  et  $y_B$ , en accord avec l'hypothèse d'échelle de Kadanoff.

Il convient à présent d'illustrer la méthode du GR à travers quelques exemples pratiques.

### 1.2.3 La décimation du modèle d'Ising en une dimension

L'objectif de la transformation de décimation est d'éliminer une fraction des spins en procédant à une sommation partielle dans l'hamiltonien, ces spins étant choisis de telle sorte que les spins

restants constituent un réseau identique au réseau initial. L'application la plus élémentaire de cette transformation s'effectue dans le cas du modèle d'Ising en une dimension. En l'absence de champ externe, l'hamiltonien est donné par

$$\mathcal{H}_0[\sigma] = -J \sum_{i=1}^{2N} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad (\sigma_1 \equiv \sigma_{2N+1}), \quad (1.70)$$

où la condition de périodicité confère au système la topologie d'un cercle. Le nombre de degré de liberté peut être réduit par un facteur 2 et la longueur des liens augmentée d'un facteur 2 ( $b = 2$ ) en sommant sur les spins pairs  $\sigma_2, \sigma_4, \dots, \sigma_{2N}$  dans la fonction de partition

$$Z_{2N}(K) = \sum_{\sigma_1 = \pm 1} \sum_{\sigma_2 = \pm 1} \dots \sum_{\sigma_{2N} = \pm 1} \exp\left(K \sum_{i=1}^{2N} \sigma_i \sigma_{i+1}\right) \quad (1.71)$$

où  $K = -\beta J$ . Étudions la sommation partielle sur le spin  $\sigma_2$  (voir figure (1.4)). Dans  $\mathcal{H}_0$ , ce spin n'est



FIG. 1.4 – Sommation partielle sur le spin  $\sigma_2$  dans la transformation de décimation du modèle d'Ising en une dimension (figure tirée de Domb [4]).

couplé qu'à  $\sigma_1$  et  $\sigma_3$  ce qui nous permet de d'effectuer la somme partielle sur  $\sigma_2$  indépendamment de celles sur les autres spins pairs. Cette somme est

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma_2 = \pm 1} \exp\left[K(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3)\right] &= 2 \cosh K(\sigma_1 + \sigma_3) \\ &= \exp(K\sigma_1) \exp(K\sigma_3) + \exp(-K\sigma_1) \exp(-K\sigma_3) \end{aligned}$$

et comme  $\sigma_1, \sigma_3 = \pm 1$ ,

$$\begin{aligned} &= (\cosh(K) + \sigma_1 \sinh K)(\cosh(K) + \sigma_3 \sinh K) \\ &\quad + (\cosh(K) - \sigma_1 \sinh K)(\cosh(K) - \sigma_3 \sinh K) \quad (1.72) \\ &= 2 \cosh^2 K (1 + \sigma_1 \sigma_3 \tanh^2 K) \end{aligned}$$

Dans le but d'exprimer la fonction de partition  $Z_{2N}(K)$  du réseau initial en termes de la fonction de partition  $Z_N(K')$  du nouveau réseau, récrivons (1.72) sous la forme

$$f(K') \exp(K' \sigma_1 \sigma_3) \quad (1.73)$$

et dérivons des relations pour  $K'$  et  $f(K')$  en fonction de  $K$ . Une façon simple de calculer ces relations est d'égaliser (1.72) et (1.73) pour chacune des deux valeurs que peut prendre le produit  $\sigma_1 \sigma_3$ . Ainsi,

en utilisant

$$\begin{aligned} \sigma_1 = \sigma_3 = \pm 1 & : 2 \cosh 2K = f(K') \exp K' \\ \sigma_1 = \pm 1, \sigma_3 = \mp 1 & : 2 = f(K') \exp(-K') \end{aligned} \quad (1.74)$$

on trouve

$$K' = (\ln \cosh 2K)/2 \quad (1.75)$$

$$f(K') = 2(\cosh 2K)^{1/2} \quad (1.76)$$

En substituant ces résultats dans 1.71, on trouve

$$Z_{2N}(K) = 2^N (\cosh 2K)^{N/2} Z_N(K') \quad (1.77)$$

La transformation du groupe de renormalisation est donnée par la relation (1.75), laquelle définit une séquence de constantes de couplage satisfaisant

$$K_{n+1} = [\ln(\cosh 2K_n)]/2 \quad (1.78)$$

Il est aisé de s'assurer que l'équation

$$K^* = [\ln(\cosh 2K^*)]/2 \quad (1.79)$$

ne possède aucune solution non-triviale (ses seules solutions sont  $K^* = 0, \infty$ , qui correspondent respectivement à  $T = \infty$  et  $T = 0$ ), ce qui témoigne de l'absence de point critique pour ce système.

## 1.2.4 La décimation du modèle d'Ising en deux dimensions

Dans le cas du modèle d'Ising bidimensionnel sur un réseau carré, les spins qui seront éliminés lors de la transformation sont indiqués par des croix à la figure 1.5. Le nouveau réseau qui en résultera sera lui aussi carré avec un pas de réseau  $a' = \sqrt{2}$  ( $b = \sqrt{2}$ ).

Procédons maintenant de la même façon que pour le modèle unidimensionnel, c'est-à-dire en étudiant la sommation partielle sur un spin donné marqué d'une croix (voir figure (1.6)). On obtient

$$\sum_{\sigma_0 = \pm 1} \exp[K\sigma_0(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4)] = 2 \cosh K(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4) \quad (1.80)$$

et si l'on développe (1.80) de façon similaire à (1.72), on trouve que les seuls termes qui interviennent sont

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^4 \sigma_i \sigma_j \quad \text{et} \quad \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4,$$

ainsi qu'un terme indépendant des  $\sigma_i$ , ce qui nous permet d'écrire l'identité

$$2 \cosh K(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4) \equiv \exp\left(A(K) + B(K) \sum \sigma_i \sigma_j + C(K) \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4\right). \quad (1.81)$$

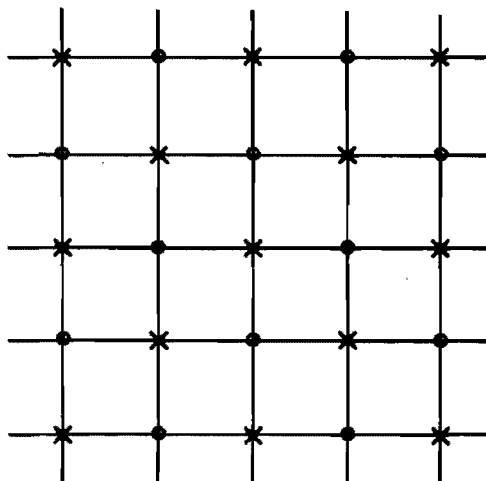


FIG. 1.5 – Modèle d'Ising bidimensionnel sur un réseau carré. Les spins qui seront éliminés lors de la transformation de décimation sont marqués d'une croix (figure tirée de Domb [4]).

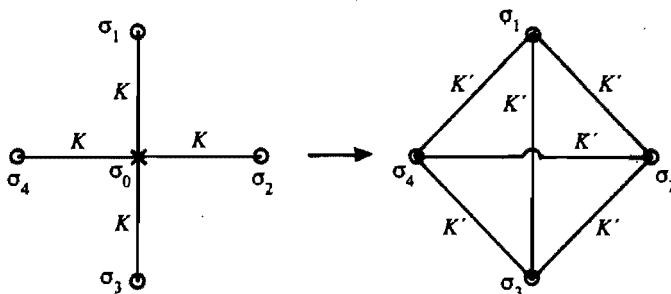


FIG. 1.6 – Somme partielle sur un spin marqué d'une croix dans la transformation de décimation du modèle d'Ising en deux dimensions (figure tirée de Domb [4]).

Afin de prouver cette identité, il faut démontrer sa validité pour toute configuration des spins  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ . Puisque chaque côté de (1.81) est symétrique sous permutation des  $\sigma_i$  et invariant sous la



transformation  $\sigma_i \rightarrow -\sigma_i$ , ceci laisse trois configurations indépendantes à considérer :

- (a) tous les  $\sigma_i = +1$ ,
- (b) un  $\sigma_i = -1$ , les trois autres  $+1$ ,
- (c) deux  $\sigma_i = -1$ , deux  $\sigma_i = +1$ .

On obtient alors les trois conditions suivantes :

$$2 \cosh 4K = \exp(A + 6B + C), \quad (1.82)$$

$$2 \cosh 2K = \exp(A - C), \quad (1.83)$$

$$2 = \exp(A - 2B + C). \quad (1.84)$$

Ces équations peuvent être résolues pour A, B et C :

$$A(K) = \ln 2 + \frac{1}{8} (\ln \cosh 4K + 4 \ln \cosh 2K) \quad (1.85)$$

$$B(K) = \frac{1}{8} \ln \cosh 4K \quad (1.86)$$

$$C(K) = \frac{1}{8} (\ln \cosh 4K - 4 \ln \cosh 2K). \quad (1.87)$$

En effectuant la somme partielle sur tous les spins marqués d'une croix, on obtient le hamiltonien transformé

$$\mathcal{H}'(\sigma) = \frac{N^2}{2} A(K) + 2B(K) \sum_{\text{v.i.}} \sigma_i \sigma_j + B(K) \sum_{\text{s.v.i.}} \sigma_i \sigma_j + C(K) \sum_{\text{blocs}} \sigma_i \sigma_j \sigma_k \sigma_l. \quad (1.88)$$

où "v.i." signifie que l'on prend la somme sur les spins  $\sigma_i$  et  $\sigma_j$  qui sont voisins immédiats dans le nouveau réseau et "s.v.i.", que l'on prend la somme sur les seconds voisins immédiats.

L'expression (1.88) contient un terme constant proportionnel à  $A(K)$  avec un coefficient  $N^2/2$  qui est proportionnel à l'aire total du réseau. On remarque aussi l'apparition d'une nouvelle interaction entre voisins immédiats avec coefficient  $2B(K)$ . Le facteur 2 provient du fait que chaque couplage entre voisins immédiats, par exemple  $\sigma_1 \sigma_2$  dans la figure 1.6, est généré par deux sommes partielles différentes. Il y a enfin un nouveau terme d'interaction entre seconds voisins immédiats ( $\sigma_1 \sigma_3$  est un exemple de produit entre seconds voisins immédiats dans le nouveau réseau) avec coefficient  $B(K)$  et un nouveau terme de couplage entre quatre spins avec coefficient  $C(K)$ .

Examinons maintenant les valeurs numériques des constantes dans (1.88). Par la solution d'Onsager, on sait que la valeur critique  $K_c$  de  $K$  est 0.440 887. En substituant  $K_c$  à  $K$  dans (1.85), (1.86) et

(1.87), on trouve

$$A(K_c) = 1.00376 \quad (1.89)$$

$$B(K_c) = 0.137327 \quad (1.90)$$

$$C(K_c) = -0.035960. \quad (1.91)$$

Notons que  $\mathcal{H}'(\sigma)$  a été obtenu à partir d'un système initial caractérisé uniquement par des interactions entre voisins immédiats. Considérons à présent (en suivant Wilson [5]) ce que la seconde étape du processus d'itération de la transformation implique. Supposons que  $\sigma_1$  et  $\sigma_3$  dans la figure 1.6 soient maintenant marqués d'une croix. On remarque alors que l'interaction entre seconds voisins immédiats établit un couplage entre différents spins marqués d'une croix et qu'il en va de même pour l'interaction entre quatre spins. Par conséquent, il n'est plus possible d'effectuer la sommation partielle sur ces spins indépendamment les uns des autres. Et si l'on considère les étapes subséquentes du processus d'itération, on réalise que des interactions de type et de portée arbitraire seront introduites. Cependant, l'intensité de ces couplages demeure faible; même en  $T = T_c$ ,  $B(K_c)$  vaut seulement 0.14 et  $C(K_c)$  est  $-0.04$ , comparé avec la valeur 0.27 du nouveau couplage entre voisins immédiats et la valeur 0.44 du couplage critique initial  $K_c$ . Ceci suggère qu'il est raisonnable de traiter les termes d'interaction entre seconds voisins immédiats et entre quatre spins de façon perturbative par rapport au terme d'interaction entre voisins immédiats.

Wilson a entrepris numériquement ce type de transformation sur un maximum de 15 spins simultanément (15 spins donne 65 000 configurations) en conservant 217 constantes de couplages différentes. Toutefois, la transformation de décimation présente une lacune en comparaison avec la transformation par blocs de spins en ceci que le changement d'échelle n'affecte que le pas de réseau et non la valeur des spins. Par conséquent, seules les valeurs de  $y_T$  pourront être obtenues avec précision et non celles de  $y_B$ . Cependant, la transformation peut être modifiée de manière à corriger cette lacune et en utilisant une telle modification, Wilson est parvenu à estimer la valeur des exposants critiques avec une précision de 0.2%.

Nous consacrerons le restant de cette section à dériver une approximation basée sur deux paramètres seulement: une constante de couplage entre voisins immédiat  $K$ , et une constante de couplage entre seconds voisins immédiats  $\bar{K}$  (Wilson [5]). En faisant le développement de  $K'$  au second ordre en  $K$ , on trouve à partir de (1.86)

$$\begin{aligned} K_1 &= 2K_0^2 \\ \bar{K}_1 &= K_0^2. \end{aligned} \quad (1.92)$$

Ces termes seront toujours présents après la  $i^e$  itération, mais un terme additionnel sera introduit dans la première équation en raison de l'interaction entre seconds voisins immédiats qui se transforme en interaction entre voisins immédiats (dans la figure 1.6, par exemple,  $\sigma_2$  et  $\sigma_4$  deviennent

voisins immédiats après la seconde itération). Par conséquent, au premier ordre en  $\bar{K}$ , nous pouvons remplacer (1.92) par

$$\begin{aligned} K_{n+1} &= 2K_n^2 + \bar{K}_n \\ \bar{K}_{n+1} &= K_n^2. \end{aligned} \quad (1.93)$$

Les points fixes sont alors déterminés par les équations

$$\begin{aligned} K^* &= 2K^{*2} + \bar{K}^* \\ \bar{K}^* &= K^{*2} \end{aligned} \quad (1.94)$$

et outre les valeurs triviales  $K^*, \bar{K}^* = 0, \infty$ , le point fixe non-trivial est donné par  $K^* = 1/3, \bar{K}^* = 1/9$ .

En prenant  $K_0$  pour valeur initiale, on trouve que pour  $0 < K_0 < 0.3921$  le point fixe est  $(0, 0)$ , pour  $K_0 > 0.3921$  le point fixe est  $(\infty, \infty)$  et pour la valeur unique  $K_0 = 0.3921$  le point fixe est  $(1/3, 1/9)$ . On obtient donc la valeur 0.3921 comme approximation de  $K_c = 0.4407$ . L'effet général de la transformation dans l'espace des constantes de couplages est illustré à la figure 1.7.

En écrivant  $K_n = K^* + k_n$  comme en (1.58), on trouve que la matrice  $L$  est donnée par

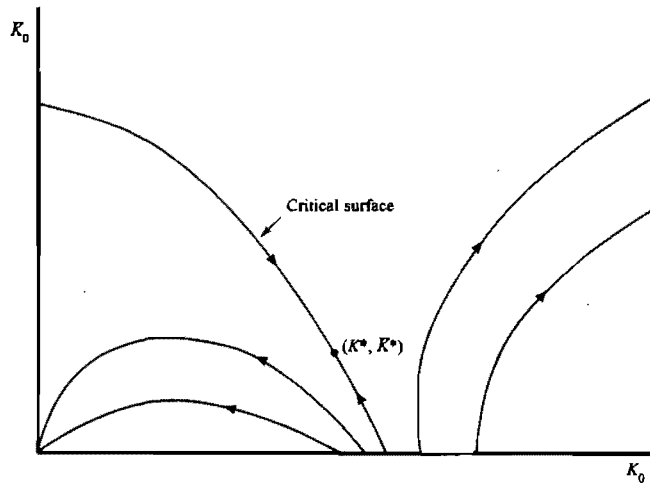


FIG. 1.7 – Trajectoires dans l'espace des constantes de couplages en fonction de différentes conditions initiales (figure tirée de Domb [4]).

$$L = \begin{pmatrix} 4/3 & 1 \\ 2/3 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.95)$$

avec pour valeurs propres

$$\Lambda_1 = \frac{1}{3}(2 + \sqrt{10}), \quad \Lambda_2 = \frac{1}{3}(2 - \sqrt{10}).$$

De toute évidence,  $\Lambda_1$  est pertinente alors que  $\Lambda_2$  est non-pertinente. Puisque  $b = \sqrt{2}$ , on trouve en utilisant (1.65) que

$$\nu = \ln\sqrt{2}/\ln[(1/3)(2 + \sqrt{10})] = 0.638, \quad (1.96)$$

alors que la valeur exacte est  $\nu = 1$ .

Les vecteurs propres correspondant à  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  sont

$$I_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{10} - 2 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ \sqrt{10} + 2 \end{pmatrix}. \quad (1.97)$$

Au point critique, l'orientation de la droite tangente à la surface critique est parallèle aux vecteurs "non-pertinents". Or, puisque dans le cas présent,  $I_2$  est le seul vecteur non-pertinent, la pente de cette tangente sera

$$\frac{\Delta\bar{k}}{\Delta k} = -\frac{\sqrt{10} + 2}{3}. \quad (1.98)$$

### 1.3 La factorisation de la fonction de partition du modèle d'Ising en deux dimensions défini sur deux régions contiguës

Bien que l'application du GR permette de rendre compte de façon convaincante de la phénoménologie du point critique, toutes les tentatives visant à établir cette méthode sur des bases mathématiques rigoureuses ont failli jusqu'à présent. Dans l'espoir de combler cette lacune, R. P. Langlands et Y. Saint-Aubin ont proposé une approche alternative dont l'idée est de capturer des propriétés globales du système statistique à l'étude (et donc d'utiliser un paramètre d'ordre "global"). Dans la présente section, nous nous baserons sur [7], [8] et [9] ainsi que sur une série de notes informelles rédigées par Y. Saint-Aubin afin de définir la transformation de renormalisation développée par Langlands pour le modèle de percolation puis de décrire leur tentative subséquente d'appliquer le principe de cette transformation au modèle d'Ising en deux dimensions. Nous verrons alors que le problème de la factorisation de la fonction de partition apparaît naturellement.

#### 1.3.1 La transformation de renormalisation de Langlands pour la percolation

##### Le modèle de percolation

Le modèle de percolation standard  $M_0$  est défini de façon standard sur un réseau carré, chaque site pouvant se trouver soit dans l'état *ouvert* avec probabilité  $p$ , soit dans l'état *fermé* avec probabilité

$(1 - p)$ . Une configuration du système est déterminée en spécifiant l'état de chaque site du réseau et l'on définit la probabilité  $\pi$  d'une configuration comme étant le produit des probabilités associées à chaque site. Par exemple, une configuration comportant  $k$  sites ouverts et  $l$  sites fermés se voit attribuer la probabilité  $\pi = p^k(1 - p)^l$ . Chaque site peut donc être vu comme une variable aléatoire pouvant prendre deux valeurs, *ouvert* ou *fermé*, avec probabilité  $p$  ou  $(1 - p)$  respectivement. Une configuration typique est présentée à la figure (1.8) dans laquelle les sites ouverts sont représentés en noir et les sites fermés en blanc.

Désignons par  $X_n$  l'ensemble des configurations définies sur le carré  $SQ_n$  de côté  $n$ . Cet en-

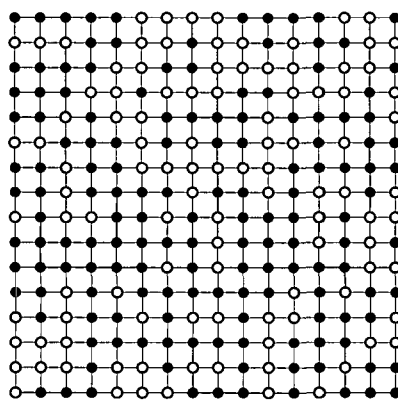


FIG. 1.8 – Configuration sur le carré  $SQ_{16}$  pour la percolation par site (figure tirée de [7]).

semble contient  $2^{n^2}$  éléments. On dit qu'une configuration  $x \in X_n$  admet une traversée horizontale s'il est possible de passer du côté gauche de  $SQ_n$  au côté droit en se déplaçant successivement d'un site ouvert à un voisin immédiat ouvert. On définit alors la probabilité  $\pi_h^n(p)$  d'une traversée horizontale comme étant la somme des probabilités  $\pi(x)$  prise sur l'ensemble des configurations  $x \in X_n$  admettant une traversée horizontale.

La probabilité  $\pi_h^n(p)$  augmente de 0 à 1 avec  $p$ . Son comportement en fonction de  $n$  est présenté à la figure (1.9) pour  $n = 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128$ . On constate qu'à mesure que  $n \rightarrow \infty$ ,  $\pi_h^n(p)$  tend vers la fonction unité de Heaviside  $\mathcal{U}(p - p_c)$  comme le confirme le théorème suivant prouvé par Kesten [6]:

**Théorème 1.3.1.** *Il existe une probabilité critique  $0 < p_c < 1$  telle que :*

(1) pour  $p < p_c$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_h^n(p) = 0;$$

(2) pour  $p > p_c$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_h^n(p) = 1;$$

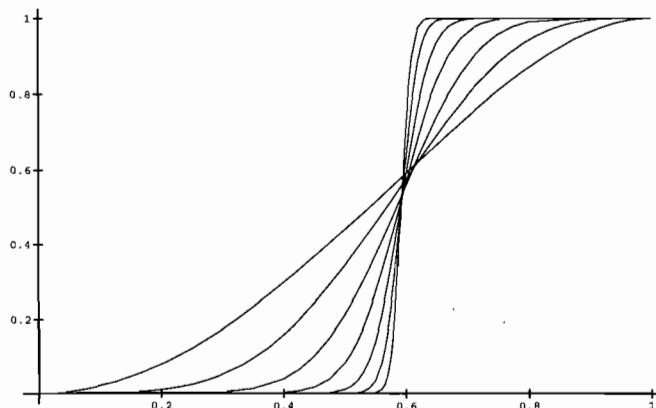


FIG. 1.9 – Les courbes de  $\pi_h^n(p)$  pour  $n = 2, 4, 8, 16, 32, 64$  et  $126$  (l'abscisse correspond à  $p$  et l'ordonnée à  $\pi_h^n(p)$ ). Les courbes ayant une pente plus abrupte au voisinage de  $p_c$  correspondent à des valeurs plus grandes de  $n$  (figure tirée de [7]).

(3) pour  $p = p_c$ ,

$$0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} \pi_h^n(p) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \pi_h^n(p) < 1 .$$

Bien que le précédent théorème ne permette pas de se prononcer sur l'existence de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_h^n(p) \tag{1.99}$$

en  $p = p_c$ , les résultats des simulations numériques ne laissent aucun doute sur l'existence de cette limite. Par ailleurs, si l'on désigne par  $A_n$  la dérivée de  $\pi_h^n(p)$  par rapport à  $p$  en  $p = p_c$ , alors les données numériques suggèrent fortement l'existence d'un exposant critique réel et positif  $\nu$  tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{n^{1/\nu}} \tag{1.100}$$

existe et diffère de 0.

Les questions liées à l'existence des limites (1.99) et (1.100) ainsi que le théorème ont été formulées dans le cadre du modèle  $M_0$ , mais plusieurs autres modèles sont possibles. Par exemple, nous pourrions remplacer le réseau carré par un réseau triangulaire ou hexagonal. Le modèle de percolation par sites pourrait être remplacé par le modèle de percolation par liens, dans lequel tous les sites sont ouverts et où ce sont les liens qui sont ouverts avec probabilité  $p$ . Nous pourrions aussi considérer attribuer des probabilités différentes aux liens horizontaux et verticaux, etc. Pour tous ces modèles cependant, le théorème, sous une forme appropriée, demeure valide et l'existence des deux limites semble toujours vérifiée. De surcroît, les données numériques suggèrent fortement que la valeur de l'exposant  $\nu$  est indépendante du modèle (universalité). Les résultats des simulations portent à croire que cette valeur est  $4/3$ .

## La transformation de renormalisation de Langlands

Puisqu'aucune constante d'interaction n'est définie dans le cas du modèle de percolation (tous les sites sont indépendants), Langlands a proposé de définir l'action de la transformation de renormalisation sur un espace de mesures. Notons le rapprochement possible avec l'exemple du modèle d'Ising où la transformation de renormalisation agit sur les constantes d'interaction, donc sur les probabilités de chaque état et donc sur l'ensemble des mesures de probabilité définies sur l'ensemble des états.

Considérons une tuile carrée de côté 1 du modèle de percolation dans la limite où le pas de réseau tend vers 0 (ce qui est équivalent à prendre  $n \rightarrow \infty$ ). Prenons  $l \in \mathbb{N}$  et divisons chaque côté de la tuile en  $l$  *intervalles de base* de longueur  $1/l$  puis dénotons par  $\mathfrak{A}_l$  l'ensemble de ces intervalles. De toute l'information disponible, Langlands choisit de ne conserver que l'information (globale) concernant les traversées sur les sites ouverts entre les  $4l$  intervalles de base<sup>2</sup>.

À cet effet, définissons un ensemble  $\mathfrak{Y}_l$  de fonctions  $y : \mathfrak{A}_l \times \mathfrak{A}_l \rightarrow \{0, 1\}$  de telle sorte qu'à chaque fonction  $y \in \mathfrak{Y}_l$  corresponde un *événement de base*  $E_y$  impliquant une traversée entre deux intervalles de base  $\alpha$  et  $\beta$  si et seulement si  $y(\alpha, \beta) = 1$ . Introduisons maintenant l'application

$$\Phi_l^{(m)} : \underbrace{\mathfrak{Y}_l \times \dots \times \mathfrak{Y}_l}_{m^2 \text{ fois}} \longrightarrow \mathfrak{Y}_{ml} \quad (m \in \mathbb{N}^*)$$

qui équivaut graphiquement à prendre tout d'abord une tuile carrée de côté 1 et à la diviser en  $m^2$  tuiles de côté  $1/m$ . Le périmètre de chacune des tuiles plus petites est alors divisé en  $4l$  intervalles de base de longueur  $1/ml$ . Chacune de ces tuiles est ensuite étiquetée par une paire d'indice  $(i, j)$ ,  $1 \leq i, j \leq m$  et l'on identifie l'ensemble  $\mathfrak{A}_{i,j}$  des intervalles de base de chaque tuile  $(i, j)$  avec l'ensemble  $\mathfrak{A}_l$ . Ainsi, un élément du  $m^2$ -tuple produit de  $\mathfrak{Y}_l$  avec lui-même est un ensemble de fonctions  $y_{i,j}$  (une pour chaque tuile). L'application  $\Phi_l^{(m)}$  fait donc correspondre à  $\{y_{i,j}\}$  une fonction  $y \in \mathfrak{Y}_{ml}$ .

Définissons à présent l'application

$$\Gamma_l^{ml} : \mathfrak{Y}_{ml} \longrightarrow \mathfrak{Y}_l$$

qui équivaut à une réduction du degré de finesse dans la division des côtés de la tuile. La composition  $\Theta = \Theta_l = \Theta_l^{(m)} = \Gamma_l^{ml} \circ \Phi_l^{(m)}$  constitue alors une application du  $m^2$ -tuple produit de  $\mathfrak{Y}_l$  avec lui-même vers  $\mathfrak{Y}_l$  et par conséquent, définit une application de l'ensemble des mesures de probabilité sur  $\mathfrak{Y}_l$  vers le même ensemble. L'application  $\Theta$  permet donc de définir, comme annoncé, une

<sup>2</sup>Langlands choisit cependant de supprimer les traversées entre intervalles adjacents. La raison de ce choix étant qu'en  $p = p_c$ , la probabilité qu'un point donné soit complètement entouré par une plage de sites de même valeur tend vers 1 lorsque  $n \rightarrow \infty$  (voir Kesten [6] (pp.174-178)). Par conséquent, si ce point est situé à la frontière de deux intervalles adjacents  $\alpha$  et  $\beta$ , cette plage permet alors assurément une traversée entre  $\alpha$  et  $\beta$ . Or, la structure de la preuve de Kesten permet de supposer que ces plages n'ont d'importance que localement et donc, qu'elles n'entraînent pas de conséquences globales.

transformation de renormalisation dans un espace de mesures.

Illustrons maintenant la transformation de Langlands dans le cas  $m = 2$  et  $l = 1$ . Les intervalles dans  $\mathfrak{A}_1$  sont les quatre côtés de la tuile et  $\mathfrak{Y}_1$  contient quatre éléments : l'élément  $y_0$  qui n'admet aucune traversée, l'élément  $y_h$  qui relie les deux côtés verticaux opposés, l'élément  $y_v$  qui relie les deux côtés horizontaux opposés et l'élément  $y_{hv}$  qui relie les deux paires de côtés opposés. Ainsi,  $y_h$  et  $y_{hv}$  sont les deux seuls éléments qui admettent une traversée horizontale.

On définit une mesure de probabilité  $\pi$  en spécifiant les valeurs  $\pi_0, \pi_h, \pi_v$  et  $\pi_{hv}$  qu'elle prend sur les quatre éléments de  $\mathfrak{Y}_1$  avec la condition

$$\pi_0 + \pi_h + \pi_v + \pi_{hv} = 1.$$

Supposons que  $\Theta(\pi) = \pi'$  et définissons la nouvelle probabilité de traversée horizontale.

$$\sigma'_h = \pi'_h + \pi'_{hv} = \sum \pi(y_{11})\pi(y_{12})\pi(y_{21})\pi(y_{22}),$$

où la somme est prise sur tous les quadruplets  $\{y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}\}$  dont l'image  $y$  sous  $\Theta$  admet une traversée horizontale. Considérons, par exemple, la configuration de la figure (1.10) dans laquelle  $y_{11} = y_{21} = y_{hv}$ ,  $y_{12} = y_h$  et  $y_{22} = y_0$  et dont l'image sous  $\Theta$  est  $y = y_{hv}$ . Plusieurs chemins

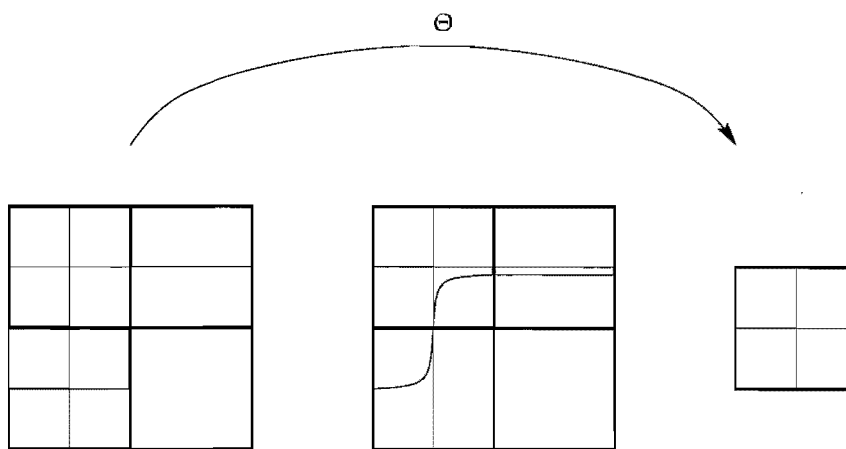


FIG. 1.10 – Transformation de renormalisation de Langlands en percolation pour  $m = 2$  et  $l = 1$ .

sibles permettent une traversée horizontale. Deux sont représentés schématiquement dans l'image du centre de la figure (1.10). On remarque qu'un de ces deux chemins est entièrement contenu à l'intérieur de la rangée formée des deux tuiles du haut. En fait, on peut se convaincre que pour toute configuration admettant une traversée horizontale, cette traversée peut s'effectuer à l'intérieur d'une



des deux rangées. Il en découle que

$$\begin{aligned}
\sigma'_h &= (\text{probabilité de traversée horizontale par la rangée supérieure}) \\
&\quad + (\text{probabilité de traversée horizontale par la rangée inférieure}) \\
&\quad - (\text{probabilités de traversée horizontale par les deux rangées}) \\
&= 2\sigma_h^2 - \sigma_h^4, \quad (\sigma_h = \pi_h + \pi_{hv}),
\end{aligned} \tag{1.101}$$

où l'on a retranché la probabilité de traversée horizontale par les deux rangées afin d'éviter qu'elle soit comptée deux fois. L'expression (1.101) constitue l'équation du groupe de renormalisation associé à la transformation de Langlands dans le cas  $m = 2$  et  $l = 1$ . Par conséquent, les points fixes de  $\Theta$  correspondent aux solutions de l'équation

$$\sigma_h = 2\sigma_h^2 - \sigma_h^4 \tag{1.102}$$

ainsi que de l'équation analogue

$$\sigma_v = 2\sigma_v^2 - \sigma_v^4, \quad (\sigma_v = \pi_v + \pi_{hv}). \tag{1.103}$$

Ces équations possèdent plusieurs solutions. Tout d'abord, l'équation (1.102) possède à elle seule quatre solutions :  $\sigma_h = 1$ ,  $\sigma_h = 0$ ,  $\sigma_h = (-1 + \sqrt{5})/2 = \delta \sim .618$  et  $\sigma_h = (-1 - \sqrt{5})/2$  (la dernière de ses solutions est négative et peut donc être écartée puisqu'une probabilité doit être définie positive).

Les points fixes de  $\Theta$  sont donc

- (1)  $\sigma_h = \sigma_v = 1 \Rightarrow \pi_0 = \pi_h = \pi_v = 0$  et  $\pi_{hv} = 1$ ,
- (2)  $\sigma_h = \sigma_v = 0 \Rightarrow \pi_h = \pi_v = \pi_{hv} = 0$  et  $\pi_0 = 1$ ,
- (3)  $\sigma_h = 1, \sigma_v = 0 \Rightarrow \pi_0 = \pi_v = \pi_{hv} = 0$  et  $\pi_h = 1$ ,
- (4)  $\sigma_h = \delta, \sigma_v = 1 \Rightarrow \pi_0 = \pi_h = 0$  et  $\pi_{hv} = \delta, \pi_v = 1 - \delta$ ,
- (5) point obtenu en interchangeant les axes  $h$  et  $v$  dans (4),
- (6)  $\sigma_h = \delta, \sigma_v = 0 \Rightarrow \pi_0 = 1 - \delta, \pi_v = \pi_{hv} = 0$  et  $\pi_h = \delta$ ,
- (7) point obtenu en interchangeant les axes  $h$  et  $v$  dans (6),
- (8)  $\sigma_h = \sigma_v = \delta$ .

Si l'on ne considère que les modèles symétriques sous inversion des axes horizontal et vertical, seuls les points fixes (1), (2) et (8) retiendront notre attention. Le point fixe (1), pour lequel toutes les traversées surviennent avec probabilité 1 (excepté celles entre intervalles adjacents qui ont été supprimées), correspond, en un certain sens, à la percolation en  $p > p_c$ . Le point (2) correspond quant à lui à  $p < p_c$ .

Étudions à présent le point fixe non-trivial (8) qui devrait correspondre à la percolation en  $p = p_c$ .

Notons que la mesure  $\pi$  est entièrement déterminée par la valeur de  $\pi_{hv}$ . En effet,

$$\pi_h = \pi_v = \delta - \pi_{hv}, \quad (1.104)$$

$$\pi_0 = 1 - \pi_h - \pi_v - \pi_{hv} = 1 - 2\delta + \pi_{hv}. \quad (1.105)$$

On déduit de (1.104) que  $\pi_{hv} \leq \delta$  et de (1.105) que  $\pi_{hv} \geq 2\delta - 1$ , donc  $2\delta - 1 \leq \pi_{hv} \leq \delta$ .

Trouvons l'expression pour  $\pi'_{hv} = \Theta(\pi_{hv})$ . Observons à cette fin que si l'union de quatre tuiles donne  $y_{hv}$ , alors il doit y avoir une traversée horizontale par les deux tuiles du haut ou par les deux tuiles du bas, ainsi qu'une traversée verticale par les deux tuiles de gauche ou par les deux tuiles de droite. La probabilité, par exemple, que surviennent une traversée horizontale par les deux tuiles du haut et une traversée verticale par les deux tuiles de gauche est  $\pi_{hv}\sigma_h\sigma_v$ , puisque l'élément du coin supérieur gauche doit nécessairement être  $y_{hv}$ . De la même façon, la probabilité que surviennent deux traversées horizontales (par le haut et par le bas) ainsi qu'une traversée verticale par la gauche est  $\pi_{hv}^2\sigma_h^2$ . La probabilité que surviennent deux traversées horizontales ainsi que deux traversées verticales est  $\pi_{hv}^4$ . Par conséquent, la probabilité  $\pi'_{hv} = \Theta(\pi_{hv})$  de  $y_{hv}$  après renormalisation est

$$\pi'_{hv} = 4\pi_{hv}\sigma_h\sigma_v - 2\pi_{hv}^2(\sigma_h^2 + \sigma_v^2) + \pi_{hv}^4. \quad (1.106)$$

En évaluant (1.106) en  $\sigma_h = \sigma_v = \delta$  on obtient

$$\begin{aligned} \pi'_{hv} \Big|_{\sigma_h = \sigma_v = \delta} &= 4\pi_{hv}\delta^2 - 4\pi_{hv}^2\delta^2 + \pi_{hv}^4 \\ &= \pi_{hv}(4\delta^2(1 - \pi_{hv}) + \pi_{hv}^3). \end{aligned} \quad (1.107)$$

On peut montrer (voir [8], p.7) que la transformation (1.107) ne possède qu'un seul point fixe  $\pi'$  sur l'intervalle  $2\delta - 1 \leq \pi_{hv} \leq \delta$  et que celui-ci est donné par

$$\pi'_0 = 2\delta^2 - \delta, \quad \pi'_h = \delta - \delta^2, \quad \pi'_v = \delta - \delta^2, \quad \pi'_{hv} = \delta^2, \quad (1.108)$$

ou numériquement,

$$\pi'_0 \sim .146, \quad \pi'_h \sim .236, \quad \pi'_v \sim .236, \quad \pi'_{hv} \sim .382. \quad (1.109)$$

Calculons maintenant la linéarisation  $L$  de la transformation  $\Theta$  au point fixe  $\pi'$  (c'est-à-dire son jacobien évalué en  $\pi'$ ). En exprimant  $L$  en termes des coordonnées  $\sigma_h, \sigma_v$  et  $\pi_{hv}$  puis utilisant (1.101) et (1.106), on obtient :

$$L = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma'_h}{\partial \sigma_h} & \frac{\partial \sigma'_h}{\partial \sigma_v} & \frac{\partial \sigma'_h}{\partial \pi_{hv}} \\ \frac{\partial \sigma'_v}{\partial \sigma_h} & \frac{\partial \sigma'_v}{\partial \sigma_v} & \frac{\partial \sigma'_v}{\partial \pi_{hv}} \\ \frac{\partial \pi'_{hv}}{\partial \sigma_h} & \frac{\partial \pi'_{hv}}{\partial \sigma_v} & \frac{\partial \pi'_{hv}}{\partial \pi_{hv}} \end{pmatrix} \Bigg|_{\substack{\sigma_h = \sigma_v = \delta \\ \pi_{hv} = \delta^2}} = \begin{pmatrix} 1.528 & 0 & 0 \\ 0 & 1.528 & 0 \\ .584 & .584 & .584 \end{pmatrix} \quad (1.110)$$

Il n'est donc pas nécessaire de diagonaliser  $L$  pour connaître ses valeurs propres, puisque les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses éléments diagonaux. On trouve ainsi que le point fixe  $\pi'$  est 1-stable, car la matrice  $L$  ne possède qu'une seule valeur propre non-pertinente, .584 (voir la définition de 1-stable en §1.2.1).

Quelques remarques seront nécessaires avant de calculer l'approximation pour l'exposant critique  $\nu = 4/3$ . Premièrement, puisque  $A_n$  est la dérivée de  $\pi_n^n(p)$  en  $p = p_c$ , la troisième partie du théorème implique que la valeur absolue de  $A_n(p - p_c)$  est un nombre  $B$  borné et non-nul. Deuxièmement, pour que la probabilité de traversée (horizontale ou verticale) soit non-nulle, la longueur de corrélation  $\xi$  doit être de l'ordre de la dimension du réseau  $n$ . Les deux relations  $\xi = n$  et

$$A_n |p - p_c| = B$$

entraînent

$$|p - p_c|^{-1} \sim A_n \sim n^{1/\nu} = \xi^{1/\nu},$$

ou encore  $\xi \sim |p - p_c|^{-\nu}$ . Ceci suggère donc d'utiliser l'expression (1.65) pour calculer l'approximation recherchée de l'exposant  $\nu$ . On obtient ainsi

$$\nu \cong \ln(2)/\ln(1.528) \sim 1.635,$$

ce qui ne constitue pas une très bonne approximation de  $\nu = 4/3$ . Cependant, au niveau  $l = 2$  (que nous ne décrivons pas dans ce mémoire), Langlands et Lafortune [8] obtiennent  $\nu \cong 1.411$  et ce résultat est fort encourageant.

### 1.3.2 La transformation de renormalisation de Langlands pour le modèle d'Ising en deux dimensions

Inspiré par le succès rencontré en recourant à un paramètre d'ordre global en percolation, Langlands, Lewis et Saint-Aubin ont introduit, dans la description du modèle d'Ising, une construction tenant compte globalement des plages de spins.

#### Distribution des lignes de contour à la frontière d'une tuile carrée

À chaque configuration  $\sigma$  correspond une partition unique des sites du réseau en sous-ensembles maximaux (ou plages) de spin constant. Il est possible d'associer à chacune de ces partitions un ensemble de courbes orientées  $L_1, L_2, \dots$ , appelées *lignes de contour*, délimitant ces plages et constituées de segments perpendiculaires aux liens reliant les voisins immédiats (voir figure 1.11). Puisque

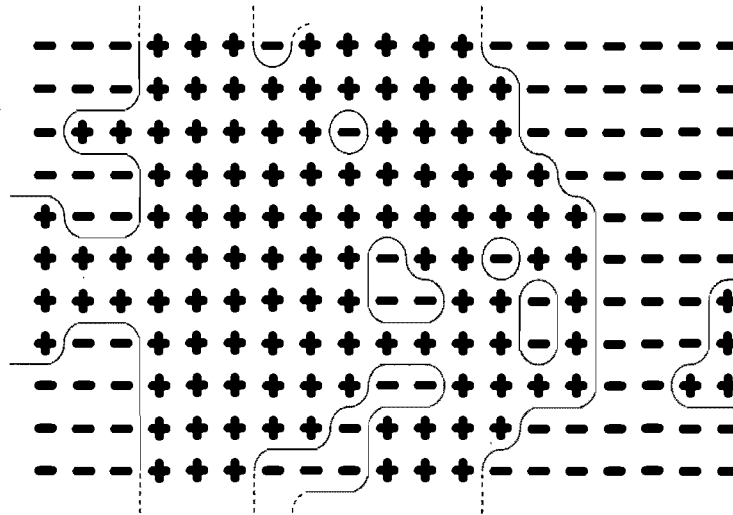


FIG. 1.11 – Courbes délimitant les plages de spin constant d’une configuration  $\sigma$  du modèle d’Ising définie sur un cylindre (le haut est relié au bas). En assignant arbitrairement à chacune de ces courbes une orientation donnée, on obtient un ensemble possible  $\lambda = \{L_1, L_2, \dots\}$  de lignes de contour associé à  $\sigma$  (figure tirée de [10]).

l’orientation de ces courbes est arbitraire, il y aura en général plusieurs ensembles de lignes de contour associés à chaque  $\sigma$ . De surcroît, la plupart des modèles comportent des configurations pour lesquelles même les courbes non-orientées sont définies de façon ambiguë. On peut donc faire correspondre à chaque configuration  $\sigma$  l’ensemble fini  $\Lambda_\sigma$  des ensembles de lignes de contour compatibles avec  $\sigma$  puis associer une probabilité à chaque élément  $\lambda = \{L_1, L_2, \dots\}$  de  $\Lambda_\sigma$ . Ceci nous permet alors de définir l’ensemble  $\Lambda = \cup_\sigma \Lambda_\sigma$  qui s’avère ainsi muni d’une mesure de probabilité.

Considérons à présent une tuile carrée de côté  $a$  du modèle d’Ising dont chaque côté a été divisé en  $l$  intervalles de base de longueur  $a/l$  ( $l \in \mathbb{N}^*$ ) et dénotons par  $C$  la frontière de cette tuile. Nous allons associer à chaque ensemble  $\lambda = \{L_1, L_2, \dots\}$  un élément  $z_\lambda^{(l)}$  du produit cartésien

$$\mathbb{Z}^{(l)} = \underbrace{\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}}_{l \text{ fois}} .$$

Cet élément  $z_\lambda$  est défini comme suit. On attribue d’abord un poids de valeur  $\pm 1$  à chacune des intersections de chaque  $L_i$  avec  $C$ , le signe étant déterminé par l’orientation relative de  $L_i$  et  $C$  à l’intersection considérée. On assigne ensuite à chaque intervalle de base la somme des poids de chaque intersection située à l’intérieur de cet intervalle (voir l’exemple à la figure 1.12). Nous appellerons cette somme un *bilan*. L’application  $\lambda \rightarrow z_\lambda^{(l)}$  permet alors de convertir la mesure de probabilité sur  $\Lambda$  en une mesure de probabilité sur l’espace  $\mathbb{Z}^{(l)}$ . Nous dénoterons cette dernière mesure par  $\mu_\epsilon^{(l)}$  afin de souligner sa dépendance à l’égard du pas de réseau  $\epsilon$ .

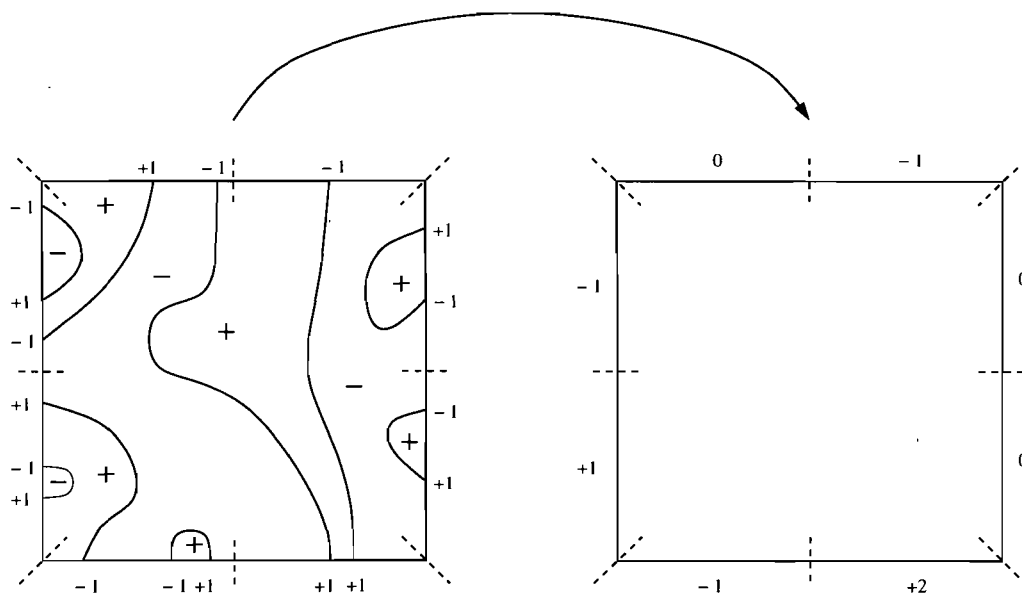


FIG. 1.12 – Bilans assignés aux  $4l$  intervalles de base d'une tuile donnée du modèle d'Ising bidimensionnel pour  $l = 2$

Langlands, Lewis et Saint-Aubin ([10]) ont mené des simulations numériques afin de se convaincre qu'une généralisation des mesures  $\mu_\epsilon^{(l)}$  possédait une limite lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mu_\epsilon^{(l)} = \mu_C^{(l)}$$

et que cette mesure limite était universelle.

### La transformation de renormalisation de Langlands

L'idée de Langlands est d'introduire une transformation de renormalisation sur l'espace des mesures définies sur l'espace des distributions sur  $C$ . Nous décrirons ici une simplification de cet espace de mesures qui fait le lien avec celui introduit pour la percolation. Cette simplification est due à Saint-Aubin.

On définit pour commencer l'application

$$\Psi_m^{(l)} : \underbrace{\mathbb{Z}_{C'}^{(l)} \times \dots \times \mathbb{Z}_{C'}^{(l)}}_{m^2 \text{ fois}} \longrightarrow \mathbb{Z}_{C'}^{(ml)} \quad (1.111)$$

qui équivaut graphiquement à prendre tout d'abord une tuile carrée de côté 1 (dont le périmètre sera dénoté par  $C'$ ) et à la diviser en  $m^2$  tuiles de côté  $1/m$ . Le périmètre  $C$  de chacune des tuiles plus petites est alors divisé en  $4l$  intervalles de base de longueur  $1/ml$ . Chacune de ces tuiles est ensuite étiquetée par une paire d'indice  $(i, j)$ ,  $1 \leq i, j \leq m$ . Ainsi, un élément du  $m^2$ -tuple produit de  $\mathbb{Z}_C^{(1)}$  avec lui-même est un ensemble d'éléments  $z_{i,j}^{(1)}$  (un pour chaque tuile). L'application  $\varphi_m^{(1)}$  fait donc correspondre à  $\{z_{i,j}^{(1)}\}$  un élément  $z^{(m1)}$  dans  $\mathbb{Z}_{C'}^{(m1)}$ .

On définit ensuite l'application

$$\Upsilon_{ml}^{(1)} : \mathbb{Z}_{C'}^{(m1)} \longrightarrow \mathbb{Z}_C^{(1)}$$

qui équivaut à une homothétie ( $C' \rightarrow C$ ) accompagnée d'une réduction du degré de finesse dans la division des côtés de la tuile. La composition  $\Omega = \Omega^{(1)} = \Omega_m^{(1)} = \Upsilon_{ml}^{(1)} \circ \Psi_m^{(1)}$  constitue alors une application du  $m^2$ -tuple produit de  $\mathbb{Z}_C^{(1)}$  avec lui-même vers  $\mathbb{Z}_C^{(1)}$  et par conséquent, définit une application de l'ensemble des mesures de probabilité sur  $\mathbb{Z}_C^{(1)}$  vers le même ensemble. L'application  $\Omega$  permet donc de définir une transformation de renormalisation dans l'espace des mesures  $\mu_C^{(1)}$ .

Considérons l'exemple  $m = l = 2$  de la figure 1.13 où nous avons dénoté par  $a_{ij}$  le bilan sur l'intervalle  $j$  de la tuile  $i$ . Notons que, par construction, les deux bilans assignés à un intervalle commun à deux tuiles contiguës doivent être de même valeur absolue et de signes opposés. Maintenant, si  $\mu(a_{i1}, \dots, a_{i8})$  est une mesure sur  $\mathbb{Z}_C^{(2)}$ , alors  $\mu' = \Omega(\mu)$  est défini par

$$\mu'(a') = \sum \mu(a_I)\mu(a_{II})\mu(a_{III})\mu(a_{IV}), \quad (1.112)$$

où la somme porte sur toutes les valeurs des  $a_I, a_{II}, a_{III}, a_{IV}$  intérieures qui coïncident et les valeurs extérieures compatibles avec  $\{a'\}$ .

### 1.3.3 La factorisation de la mesure $\mu_C$ à la frontière de deux tuiles contiguës

La construction sur laquelle repose la transformation  $\Omega$  soulève de nombreuses questions dont celle, notamment, de savoir si elle permet de capturer les propriétés dynamiques essentielles du modèle d'Ising. Par ailleurs, il serait intéressant de savoir si la transformation  $\Omega$  possède un point fixe et, le cas échéant, s'il est possible d'obtenir les exposants critiques du modèle d'Ising à partir de la linéarisation de  $\Omega$  au voisinage de ce point fixe. Une autre question que l'on peut soulever est celle relative à l'importance de l'erreur contenue dans l'équation (1.112). En effet, puisque l'on a supprimé l'information concernant le nombre et l'emplacement des intersections à la frontière de chacune des tuiles, de même que l'information concernant l'orientation des lignes de contour à ces intersections, il en découle que la somme sur les bilans ne tient aucunement compte de la continuité (nécessaire) des lignes de contour à travers les intervalles communs à deux tuiles contiguës.

L'objet de la présente section concerne une seconde source d'erreur potentielle contenue dans

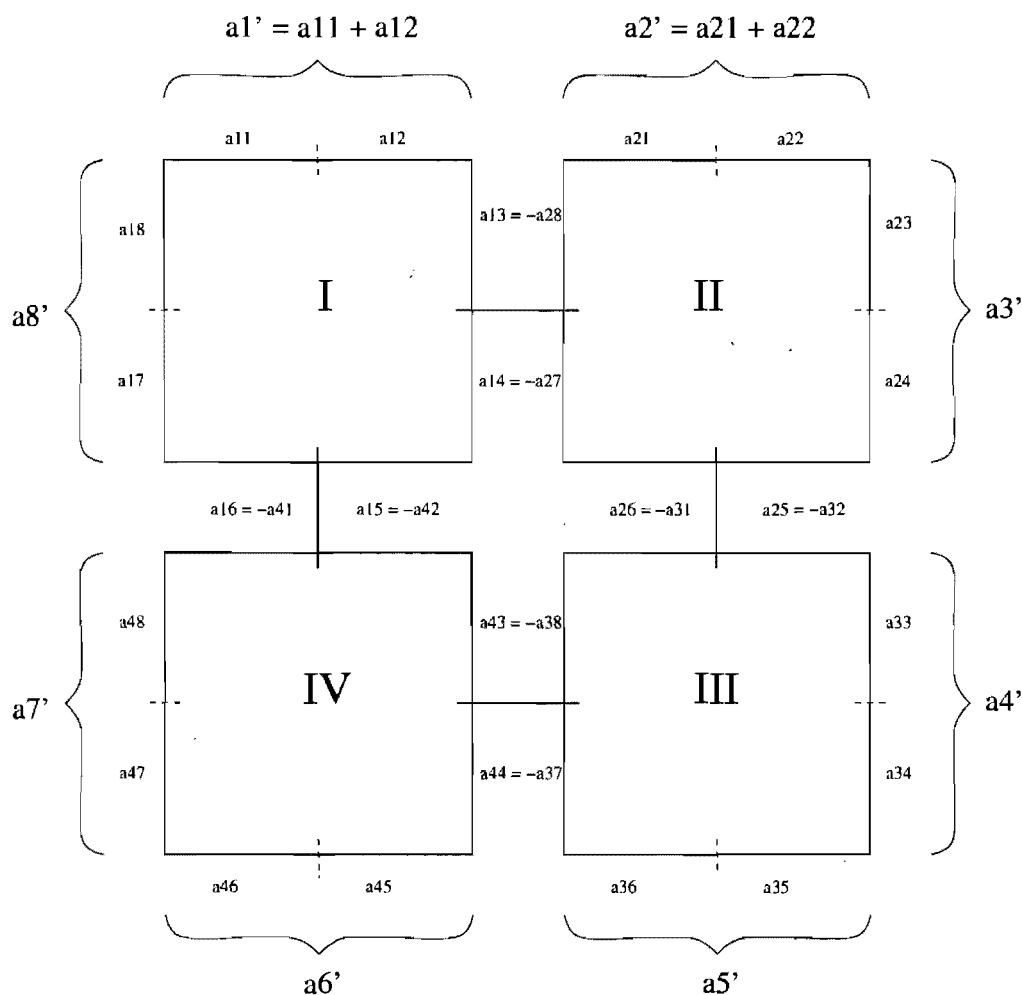


FIG. 1.13 – Opération de recollement des tuiles dans la transformation de renormalisation proposée par Langlands pour le modèle d'Ising bidimensionnel. Les deux bilans assignés à un intervalle commun à deux tuiles contiguës doivent être de même valeur absolue et de signes opposés. Les bilans de la tuile résultante sont marqués d'un prime et sont la somme des bilans réunis par une accolade.

l'équation (1.112). Il s'agit d'étudier la légitimité de la factorisation de la mesure  $\mu_C^{(m1)}$  en un produit de  $m^2$  mesures  $\mu_C^{(1)}$ . À cette fin, nous allons considérer le problème "plus simple" de la factorisation de la mesure de probabilité d'une configuration  $\sigma$  définie sur deux régions contiguës (Langlands [9]). Il est préférable de travailler sur un réseau triangulaire, car la probabilité de  $\lambda \in \Lambda_\sigma$  se définit alors plus aisément. Il s'agit simplement du poids de Boltzmann de la configuration  $\sigma$  divisée par le nombre  $|\Lambda_\sigma| = 2^{l_\sigma}$  où  $l_\sigma$  est le nombre de courbes fermées non-orientées associées à  $\sigma$ .

Soit  $S$  une surface connectée, fermée et bornée sur laquelle est défini le réseau et  $C$  une courbe lisse divisant  $S$  en deux régions contiguës,  $S_1$  et  $S_r$ , et divisant par le fait même le réseau en deux

ensembles disjoints de sites. Chaque élément  $\lambda \in \Lambda_\sigma$  définit deux ensembles de points sur  $C$  : l'ensemble  $X$  des intersections auxquelles une ligne de contour traverse  $C$  avec une orientation "positive" et l'ensemble  $Y$  des intersections auxquelles une ligne de contour traverse  $C$  avec une orientation "négative". En faisant varier  $\sigma$  et  $\lambda$  on obtient un ensemble de paires  $(X, Y)$ , possiblement avec répétitions, et l'on attribue à chacune de ces paires la probabilité  $\mu_\lambda$  associée à l'élément  $\lambda$  correspondant. Si  $\Pi$  désigne l'ensemble des sites du réseau, alors nous dénoterons par  $\mu_C^\Pi(X, Y)$  la somme de  $\mu_\lambda$  sur tous les  $\lambda$  compatibles avec la paire  $(X, Y)$ . Alors

$$\sum_{(X, Y)} \mu_C^\Pi(X, Y) = 1.$$

À chaque site  $\pi$  on associe l'étoile  $St_\pi$  constituée des sites qui sont voisins immédiats de  $\pi$ . Considérons l'ensemble  $\Pi_C$  des sites  $\pi$  tels que  $C$  intersecte  $St_\pi$ . Les sites n'appartenant pas à  $\Pi_C$  sont répartis en deux sous-ensembles, l'ensemble  $\Pi_l$  de ceux qui sont situés sur  $S_l$  et l'ensemble  $\Pi_r$  de ceux qui sont situés sur  $S_r$  (voir figure 1.14). Le problème de la factorisation de  $\mu_C^\Pi$  revient alors à se

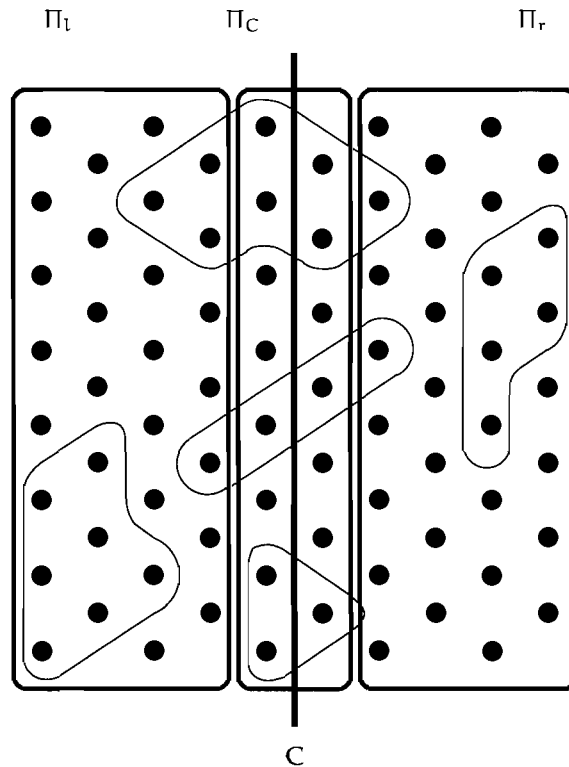


FIG. 1.14 – La courbe  $C$  divise le réseau en deux régions contiguës,  $S_l$  (représentée ici à gauche de  $C$ ) et  $S_r$  (représentée ici à droite de  $C$ ). À chaque site  $\pi$  on associe l'étoile  $St_\pi$  constituée des sites qui sont voisins immédiats de  $\pi$ . On désigne par  $\Pi_C$  l'ensemble des sites  $\pi$  tels que  $C$  intersecte  $St_\pi$ . Les sites n'appartenant pas à  $\Pi_C$  sont répartis en deux sous-ensembles, l'ensemble  $\Pi_l$  de ceux qui sont situés sur  $S_l$  et l'ensemble  $\Pi_r$  de ceux qui sont situés sur  $S_r$ .



demander s'il est permis d'écrire

$$\mu_C^\Pi = \xi^{S_l}(C) \xi^{S_r}(C) \nu_C, \quad (1.113)$$

où  $\nu_C$  est une mesure indépendante du choix de la configuration sur  $S_l$  et  $S_r$  et où  $\xi^{S_l}(C)$  et  $\xi^{S_r}(C)$  sont des fonctions de  $(X, Y)$  ne dépendant respectivement que de  $S_l$  et  $S_r$ .

Étant donnée une paire  $(X, Y)$ , la configuration  $\sigma$  qui la génère est définie par un triplet :  $\sigma_l$  sur les sites de  $\Pi_l$ ,  $\sigma_r$  sur les sites de  $\Pi_r$  et  $\sigma_C$  sur les sites de  $\Pi_C$ . Cette configuration  $\sigma$  est déterminée à un signe près sur chaque composante de  $S$  par  $\lambda \in \Lambda_\sigma$ , mais son poids de Boltzmann n'est pas affecté par cette indétermination. Ce dernier peut s'écrire comme un produit de trois facteurs : a) un facteur  $\beta_C$  provenant de la contribution des liens joignant les sites de  $\Pi_C$  et uniquement déterminé par  $(X, Y)$ , b) deux autres facteurs,  $\beta_l$  et  $\beta_r$ , le premier provenant de la contribution des liens impliquant des sites de  $\Pi_l$  et le second provenant de la contribution des liens impliquant des sites de  $\Pi_r$ . Le nombre  $l_\sigma$  de courbes fermées non-orientées est donné par  $l_\sigma = l_l + l_r + l_C$ , où  $l_l$  est le nombre de celles reposant entièrement dans  $S_l$ ,  $l_r$  le nombre de celles reposant entièrement dans  $S_r$  et  $l_C$  le nombre de celles qui intersectent  $C$ . Par conséquent, hormis le facteur de normalisation donné par la fonction de partition,

$$\mu_C^\Pi(X, Y) = 2^{|S|} \beta_C \sum_{\lambda_l} \sum_{\lambda_r} \frac{\beta_l \beta_r}{2^{l_l + l_r + l_C}}, \quad (1.114)$$

où la somme porte sur tous les  $\lambda_l$  et  $\lambda_r$  compatibles avec  $(X, Y)$  et où  $|S|$  est le nombre de composantes disjointes de  $S$ . Le facteur  $2^{l_C}$  au dénominateur de (1.114) empêche la factorisation formulée en (1.113), car l'information contenu dans  $(X, Y)$  ne permet pas de compter le nombre  $l_C$  de courbes intersectant  $C$  (voir figure 1.15). En fait,  $l_C$  dépend non seulement de  $\sigma_C$ , mais aussi de  $\sigma_l$  et  $\sigma_r$ . Afin de remédier à cette difficulté, Langlands propose donc de modifier la précédente construction.

Il existe deux pairages de  $X$  avec  $Y$  associés à un élément  $\lambda$  et à une paire  $(X, Y)$  compatibles. À chaque intersection  $x_i \in X$  ( $i = 1, \dots, N$ ), une composante de  $\lambda$  traverse de  $S_r$  vers  $S_l$ . Soit  $y_i$  l'intersection à laquelle cette composante revient sur  $S_r$ . Le premier pairing est  $W_l = \{(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)\}$ . Le second,  $W_r = \{(y'_1, x'_1), \dots, (y'_N, x'_N)\}$ , est défini de la même façon excepté que les rôles de  $S_l$  et  $S_r$  sont inversés. Par exemple, pour l'ensemble de courbes de gauche de la figure 1.15,  $W_l = \{(x_A, y_B), (x_B, y_A), (x_C, y_C)\}$  et  $W_r = \{(y_A, x_A), (y_B, x_C), (y_C, x_B)\}$ , alors que pour l'ensemble de courbes de droite,  $W_l$  est le même, mais  $W_r = \{(y_A, x_A), (y_B, x_B), (y_C, x_C)\}$ .

La mesure de probabilité définie sur l'ensemble  $\Lambda$  de tous les ensembles possibles de lignes de contour permet de définir une mesure  $\mu_{C \times C}^\Pi$  sur l'ensemble des paires

$$W = (W_l, W_r) = (\{(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)\}, \{(y'_1, x'_1), \dots, (y'_N, x'_N)\}) \quad (1.115)$$

associées aux éléments  $\lambda \in \Lambda$ . Il en découle alors la relation

$$\mu_C^\Pi(X, Y) = \sum_W \mu_{C \times C}^\Pi(W), \quad (1.116)$$

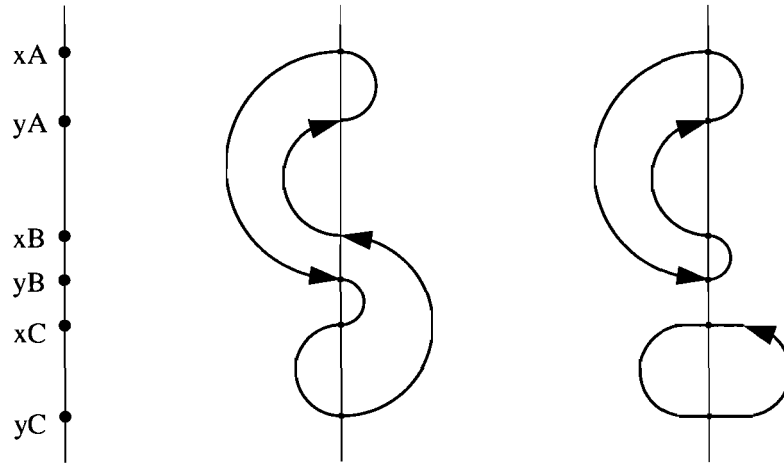


FIG. 1.15 – L'information contenu dans  $(X, Y)$  ne permet pas de compter le nombre  $l_C$  de courbes intersectant  $C$ . Par exemple, la paire  $(X, Y) = (x_A, x_B, x_C; y_A, y_B, y_C)$  est compatible avec plusieurs configurations de courbes dont deux sont représentées ici. Remarquons que dans cet exemple,  $y_i$  est situé à la suite de  $x_i$  pour tout  $i$ , mais nous pourrions imaginer des arrangements entièrement différents. Par exemple, nous aurions pu disposer  $(X, Y)$  de sorte que tous les  $x$  soient contigus et que, par conséquent, tous les  $y$  le soient également.

où la somme porte sur tous les  $W$  compatibles avec  $(X, Y)$ . Afin de calculer  $\mu_{C \times C}^{\Pi}(W)$ , on construit d'abord  $\lambda_l$  dans  $S_l$  compatible avec la première composante  $W_l$  de  $W$ , et  $\lambda_r$  dans  $S_r$  compatible avec la seconde composante,  $W_r$ . En joignant  $\lambda_l$  et  $\lambda_r$  à leurs intersections communes sur  $C$ , on obtient un élément  $\lambda$  compatible avec  $W$ . Tous les  $\lambda$  compatibles avec  $W$  s'obtiennent de la même façon. Lorsque l'ensemble de ces  $\lambda$  est construit, la configuration  $\sigma$  est définie à un signe près. Puisque  $l_C$  est uniquement déterminé par  $W$ , écrivons  $l_C = l_W$ . On obtient alors

$$\mu_{C \times C}^{\Pi}(W) = 2^{|S| - l_W} \beta_C \left\{ \sum_{\lambda_l \rightarrow W_l} \frac{\beta_l}{2^{l_l}} \right\} \left\{ \sum_{\lambda_r \rightarrow W_r} \frac{\beta_r}{2^{l_r}} \right\}. \quad (1.117)$$

Considérons maintenant la matrice  $A$  avec coefficients  $a(W_l, W_r) = 2^{-l_W}$ . Si ces coefficients pouvaient s'écrire sous la forme

$$a(W_l, W_r) = \alpha b(W_l) b(W_r), \quad (1.118)$$

avec  $\alpha$  constant, alors l'expression (1.116) deviendrait

$$\begin{aligned} \mu_C^{\Pi}(X, Y) &= \sum_{W \rightarrow (X, Y)} \mu_{C \times C}^{\Pi}(W) \\ &= \sum_{W \rightarrow (X, Y)} \left( 2^{|S| - l_W} \beta_C \left\{ \sum_{\lambda_l \rightarrow W_l} \frac{\beta_l}{2^{l_l}} \right\} \left\{ \sum_{\lambda_r \rightarrow W_r} \frac{\beta_r}{2^{l_r}} \right\} \right) \\ &= 2^{|S|} \alpha \beta_C \left( \sum_{W_l \rightarrow (X, Y)} \left\{ \sum_{\lambda_l \rightarrow W_l} \frac{b(W_l) \beta_l}{2^{l_l}} \right\} \right) \left( \sum_{W_r \rightarrow (X, Y)} \left\{ \sum_{\lambda_r \rightarrow W_r} \frac{b(W_r) \beta_r}{2^{l_r}} \right\} \right) \end{aligned} \quad (1.119)$$

et l'on obtiendrait la factorisation recherchée. Nous pourrions souligner davantage la forme matricielle de (1.119) en définissant les vecteurs  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  ayant respectivement pour composantes

$$\mathbf{x}_{W_l} = \left\{ \sum_{\lambda_1 \rightarrow W_l} \frac{b(W_l)\beta_l}{2^{l_1}} \right\} \quad \text{et} \quad \mathbf{y}_{W_r} = \left\{ \sum_{\lambda_r \rightarrow W_r} \frac{b(W_r)\beta_r}{2^{l_r}} \right\}. \quad (1.120)$$

L'équation (1.119) pourrait alors s'écrire

$$\frac{1}{2^{|\mathcal{S}|}\beta_C} \mu_C^\Pi(X, Y) = \mathbf{x}^t \mathbf{A} \mathbf{y}. \quad (1.121)$$

Malheureusement, il est impossible qu'une représentation de  $a(W_l, W_r)$  aussi simple qu'en (1.118) existe, mais peut-être n'est-il pas nécessaire d'en exiger autant à mesure que l'on tend vers la limite thermodynamique. On peut supposer qu'il est suffisant que l'expression (1.118) soit valide approximativement excepté pour un certain ensemble de  $(X, Y)$  dont la mesure tend vers 0 avec le pas de réseau. Afin de clarifier cette idée, examinons plus attentivement la matrice  $\mathbf{A}(X, Y) = (a(W_l, W_r))$ .

$X$  et  $Y$  étant deux ensembles de points avec le même nombre  $n$  d'éléments, nous les identifions chacun à l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$  (il est raisonnable de croire que la probabilité que  $n$  soit plus petit qu'une certaine borne inférieure tend vers 0 avec le pas de réseau). Le pairage  $W_l$  peut alors être représenté comme une permutation  $\pi_1$  de  $\{1, \dots, n\}$  et  $W_r$  comme une permutation  $\pi_2$ . Il est maintenant possible de déterminer  $l_W$  à partir de  $\pi_1$  et  $\pi_2$ . En effet, suivons la courbe originant de l'intersection  $x_1$  sur  $C$ . Elle sera étiquetée par les intersections

$$x_1 \rightarrow y_{\pi_1(1)} \rightarrow x_{\pi_2^{-1}\pi_1(1)} \rightarrow y_{\pi_1\pi_2^{-1}\pi_1(1)} \rightarrow x_{\pi_2^{-1}\pi_1\pi_2^{-1}\pi_1(1)} \rightarrow \dots \rightarrow x_1. \quad (1.122)$$

Ainsi, les entiers  $k \in \{1, \dots, n\}$  qui sont contenus dans le cycle de  $\pi_2^{-1}\pi_1$  contenant 1 étiquettent les intersections  $x_i$  et  $y_j$  traversées par la courbe originant de  $x_1$ . On peut répéter ceci pour chacun des entiers qui ne sont pas déjà dans le cycle de  $\pi_2^{-1}\pi_1$  contenant 1. Et il est à présent facile de se convaincre que

$$l_W = \text{nombre de cycles de } \pi_2^{-1}\pi_1. \quad (1.123)$$

Par conséquent,  $\mathbf{A}(X, Y)$  est la matrice  $\mathbf{R}$  dont les éléments  $r_{\pi_1, \pi_2} = [\mathbf{R}]_{\pi_1, \pi_2}$  sont

$$r_{\pi_1, \pi_2} = \left( \frac{1}{2^{l(\pi_2^{-1}\pi_1)}} \right), \quad (1.124)$$

où  $l(\pi)$  dénote le nombre de cycles de la permutation  $\pi$ . À cause de propriétés algébriques dont nous discuterons dans les chapitres suivants, il existe une base dans laquelle  $\mathbf{R}$  est exprimée sous forme de blocs diagonaux multiples de l'identité. Soit  $\lambda_i$  la valeur propre du bloc  $i$  et  $\mathbf{V}_i$  le projecteur sur le sous-espace de ce bloc. Nous démontrerons au chapitre 3 que la plus grande valeur propre  $\lambda_0$  de  $\mathbf{R}$  domine toutes les autres lorsque l'on tend vers la limite thermodynamique ( $n \rightarrow \infty$ ), de sorte qu'on puisse espérer que

$$\mathbf{R} = \sum_i \lambda_i \mathbf{V}_i \quad (1.125)$$

soit correctement approximé par

$$R = \lambda_0 V_0 + \underbrace{\lambda_1 V_1 + \dots}_{\text{négligeable}} \longrightarrow \lambda_0 V_0 .$$

Les notions d'algèbre discutées dans les chapitres suivants permettront de comprendre que  $V_0$  est engendré par le vecteur  $\mathbf{w}$  dont toutes les composantes sont égales à 1 et donc que

$$V_0 = \frac{\mathbf{w}\mathbf{w}^t}{\|\mathbf{w}\|^2} = \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} \frac{\mathbf{w}^t}{\|\mathbf{w}\|} . \quad (1.126)$$

À nouveau, ceci suggère d'approximer  $R(\pi_1, \pi_2)$  par

$$\frac{\mathbf{w}(\bar{\pi}_1)}{\|\mathbf{w}\|} \frac{\mathbf{w}(\bar{\pi}_2)}{\|\mathbf{w}\|} , \quad (1.127)$$

où  $\mathbf{w}(\bar{\pi}_i)$  signifie le produit scalaire entre  $\mathbf{w}$  et  $\bar{\pi}_i$  et où  $\bar{\pi}_i$  est le vecteur dont toutes les composantes sont zéro sauf celle à la position énumérant la permutation  $\pi_i$  qui prend pour valeur 1. Si cette approximation  $R \sim \lambda_0 V_0$  est physiquement justifiable, alors on obtient

$$\mu_C^{\Pi}(X, Y) \cong \beta_C \underbrace{\left( \sum_{\lambda_l, W_l \rightarrow (X, Y)} \frac{\beta_l}{2^{l_l}} \frac{\mathbf{w}(\bar{\pi}_1)}{\|\mathbf{w}\|} \right)}_{\mathcal{E}^{S_1}(C)} \underbrace{\left( \sum_{\lambda_r, W_r \rightarrow (X, Y)} \frac{\beta_r}{2^{l_r}} \frac{\mathbf{w}(\bar{\pi}_2)}{\|\mathbf{w}\|} \right)}_{\mathcal{E}^{S_r}(C)} , \quad (1.128)$$

ce qui factorise la mesure à la limite thermodynamique.

Le but de ce mémoire est d'étudier le spectre de la matrice  $R$  et de montrer que sa plus grande valeur propre domine les autres. Puisque la définition de  $R$  est intimement liée au groupe des permutations, l'étude de son spectre exige une certaine connaissance préalable des propriétés de ce groupe et de ses représentations, lesquelles sont l'objet du chapitre suivant.

## Chapitre 2

# Le groupe symétrique et ses représentations

### 2.1 Éléments de la théorie des groupes

Dans cette section, une description des propriétés du groupe symétrique  $S_n$  est introduite au fil d'un rappel de notions élémentaires de la théorie des groupes. Les résultats qui seront présentés sont adaptés de [11] et [12].

#### 2.1.1 Structure de groupe

**Définition 2.1.1.** On dit d'un ensemble  $G$  qu'il possède la structure de **groupe** s'il vérifie les propriétés suivantes :

- (a) L'ensemble  $G$  est muni d'une loi de composition interne appelée multiplication telle qu'à toute paire  $f, g \in G$ , cette loi fait correspondre un élément  $h \in G$  appelé produit :

$$h = fg.$$

En général  $fg \neq gf$ . Si  $fg = gf$  pour tout  $f, g \in G$  le groupe est dit abélien ou commutatif.

- (b) Associativité :  $f(gh) = (fg)h$ .

(c) Il existe un élément  $e$  appelé **élément neutre** tel que pour tout  $g \in G$

$$eg = ge = g.$$

(d) Tout élément  $g$  possède un inverse noté  $g^{-1}$  tel que

$$gg^{-1} = g^{-1}g = e.$$

**Théorème 2.1.2.** Un groupe  $G$  ne possède qu'un élément neutre et un élément de  $G$  ne possède qu'un inverse. De plus, pour tout  $f, g, h \in G$ , l'égalité  $gf = hf$  implique  $g = h$ .

**Définition 2.1.3.** On appelle **sous-groupe** d'un groupe  $G$  un sous-ensemble  $H$  de  $G$  ayant la structure de groupe relativement à la même loi de composition. On note cette propriété  $H \subset G$ .

On peut démontrer sans difficulté que :

- 1) tout sous-groupe a pour élément neutre l'élément neutre du groupe,
- 2) l'intersection de deux sous-groupes est elle-même un sous-groupe.

**Définition 2.1.4.** L'**ordre d'un groupe**  $G$ , noté  $|G|$ , est le nombre d'éléments dans  $G$ . Il peut être fini ou infini. L'**ordre d'un élément**  $g \in G$  est la plus petite puissance  $n$  de  $g$  telle que  $g^n = e$  (autrement dit, il s'agit de l'ordre du sous-groupe de  $G$  qu'engendre l'élément  $g$  par multiplication successive avec lui-même).

**Exemple 2.1.5.** Le groupe des rotations dans le plan est en correspondance biunivoque avec l'intervalle  $[0, 2\pi[ \subset \mathbb{R}$  et est donc d'ordre infini. Soit  $R$ , la rotation d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .  $R$  engendre le sous-groupe d'ordre 4 constitué des rotations d'angles  $0, \frac{\pi}{2}, \pi$  et  $\frac{3\pi}{2}$  laissant invariant un carré centré à l'origine. L'ordre de l'élément  $R$  est donc 4.

## 2.1.2 Le groupe symétrique $S_n$ (ou groupe des permutations)

Le groupe  $S_n$  des permutations d'un ensemble fini est un des plus importants groupes finis. Cette importance tient essentiellement au théorème de Cayley (voir sous-section 2.1.4) qui stipule que *tout* groupe d'ordre  $n$  possède une structure identique à celle d'un des sous-groupes de  $S_n$ . Nous allons établir ici quelques-unes des propriétés de ce groupe.

**Définition 2.1.6.** Soit  $A$  un ensemble de  $n$  objets désignés par les nombres  $1, 2, 3, \dots, n$ . On dit qu'une application inversible  $\sigma : A \rightarrow A$  est une **bijection** ou une **permutation** de  $A$ . L'ensemble de toutes les permutations (ou bijections) de  $A$  forme un groupe d'ordre  $n!$  appelé **groupe symétrique** et noté  $S_n$ .

Une permutation  $\sigma \in S_n$  est connue si (et seulement si) l'image de chaque élément de  $A$  par  $\sigma$  est connue. On peut donner toutes les images de  $\sigma$  dans un tableau

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Par exemple, si  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , alors

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

représente la permutation  $\sigma : \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$  où

$$\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 3, \sigma(3) = 4, \sigma(4) = 1, \sigma(5) = 5.$$

On obtient l'inverse  $\sigma^{-1}$  de  $\sigma$  en intervertissant les deux lignes dans un tableau de  $\sigma$  :

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

*Produit de deux permutations* : Soit la permutation

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

alors le produit  $\sigma\pi$  s'effectue de la droite vers la gauche, c'est-à-dire en appliquant d'abord  $\pi$  et ensuite  $\sigma$  :

$$\begin{aligned} \sigma\pi &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \\ &\neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \pi\sigma \end{aligned}$$

*Décomposition d'une permutation en permutations cycliques indépendantes* :

La permutation

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 3 & 9 & 6 & 1 & 7 & 5 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

est égale au produit des permutations cycliques *indépendantes* (c'est-à-dire appliquées à des sous-ensembles disjoints de  $A$ )

$$1 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 5 \rightarrow 1$$

$$2 \rightarrow 3 \rightarrow 9 \rightarrow 2$$

$$8 \rightarrow 8$$

que l'on note

$$\tau = (1\ 4\ 6\ 7\ 5)(2\ 3\ 9)(8).$$

Généralement on omet les cycles à 1 élément et l'on écrit simplement

$$\tau = (1\ 4\ 6\ 7\ 5)(2\ 3\ 9).$$

On peut montrer que 2 permutations cycliques indépendantes commutent et que  $\tau$  peut encore s'écrire

$$\tau = (6\ 7\ 5\ 1\ 4)(3\ 9\ 2) \quad \text{ou} \quad (9\ 2\ 3)(5\ 1\ 4\ 6\ 7).$$

**Définition 2.1.7.** Une **transposition** est un cycle à deux éléments.

**Théorème 2.1.8.** Tout cycle peut être décomposé en un produit de transpositions.

Par exemple :  $(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6) = (1\ 6)(1\ 5)(1\ 4)(1\ 3)(1\ 2).$

**Définition 2.1.9 (Parité d'une permutation).** Une permutation est dite **paire (impaire)** si elle peut être décomposée en un nombre pair (impair) de transpositions<sup>1</sup>.

Il découle de cette définition que :

- (a) Le produit de deux permutations paires (impaires) est une permutation paire.
- (b) Le produit d'une permutation pairé par une permutation impaire est une permutation impaire.

*Écriture matricielle d'une permutation :* L'action d'une permutation sur un ensemble de  $p$  objets  $a_1, a_2, \dots, a_p$ , peut être représentée sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \dots \\ a_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_p \\ a_3 \\ a_1 \\ \dots \\ a_{p-1} \end{pmatrix}$$

où l'on fait usage de la multiplication matricielle. On peut vérifier que la matrice carrée ci-dessus contient  $p$  fois le chiffre 1 de telle sorte qu'il ne se trouve qu'une et une seule fois dans chaque ligne et dans chaque colonne. Tous les autres éléments sont nuls.

<sup>1</sup>Quoique la factorisation d'une permutation en transpositions ne soit pas unique, il est possible de montrer que le nombre de transpositions des factorisations d'une même permutation est toujours de même parité.



### 2.1.3 Classes résiduelles

Soit un groupe  $G$  et  $H$ , un sous-groupe non-trivial de  $G$  (c'est-à-dire différent de  $\{e\}$  et de  $G$ ). On peut choisir un élément  $g_1 \notin H$  et en multipliant à gauche par  $g_1$  tous les éléments de  $H$ , on obtient un sous-ensemble de  $G$  noté  $g_1H$ . En choisissant ensuite un élément  $g_2 \notin (H \cup g_1H)$ , on obtient un nouveau sous-ensemble  $g_2H$ . En répétant alors la même opération avec un élément  $g_3 \notin (H \cup g_1H \cup g_2H)$  et ainsi de suite, on produit une décomposition de  $G$  en sous-ensembles  $g_1H, g_2H, \dots$  appelés **classes résiduelles à gauche de  $H$** .

On peut démontrer que les classes résiduelles à gauche d'un sous-groupe  $H$  d'un groupe  $G$  sont :

- (a) disjointes,
- (b) indépendantes du choix des  $g_i \in G$ .

Si le groupe  $G$  est d'ordre fini  $n$ , il découle des propriétés précédentes qu'il est la réunion d'un nombre fini  $p$  de sous-ensembles disjoints contenant chacun le même nombre d'éléments. On peut alors en déduire le théorème suivant :

**Théorème 2.1.10 (Théorème de Lagrange).** *L'ordre d'un sous-groupe d'un groupe fini est un diviseur de l'ordre du groupe.*

Une conséquence immédiate de ce théorème est que tout groupe  $G$  d'ordre premier n'a pour sous-groupes que  $\{e\}$  et  $G$ . Le nombre  $p$  est l'*indice* du sous-groupe  $H$ .

**Exemple 2.1.11.** *À titre d'exemple, voici tous les sous-groupes de  $S_3$ , leurs classes résiduelles et leur indice.*

sous-groupe	classes résiduelles	indice
$\{e\}$	$\{e\}, \{(12)\}, \{(13)\}, \{(23)\}, \{(123)\}, \{(132)\}$	6
$\{e, (12)\}$	$\{e, (12)\}, \{(13), (23)\}, \{(23), (132)\}$	3
$\{e, (13)\}$	$\{e, (13)\}, \{(12), (132)\}, \{(23), (123)\}$	3
$\{e, (23)\}$	$\{e, (23)\}, \{(12), (123)\}, \{(13), (132)\}$	3
$\{e, (123), (132)\}$	$\{e, (123), (132)\}, \{(12), (23), (13)\}$	2
$S_3$	$S_3$	1

### 2.1.4 Théorème de Cayley

**Définition 2.1.12.** *Un homomorphisme de groupe entre deux groupes  $G$  et  $H$  est une application  $\varphi : G \rightarrow H$  telle que*

$$\varphi(g_1g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)$$

pour tout  $g_1, g_2 \in G$ . Le **noyau** de  $\varphi$  (dénoté  $\text{Ker}\varphi$ ) est défini comme

$$\text{Ker}\varphi = \left\{ g \in G \mid \varphi(g) = e_H \right\}$$

où  $e_H$  est le neutre du groupe  $H$ . Un **isomorphisme** est un homomorphisme bijectif, c'est-à-dire tel qu'à chaque  $h \in H$  correspond un unique élément  $g \in G$  tel que  $\varphi(g) = h$ . Cet élément  $g$  est noté  $\varphi^{-1}(h)$ .

**Théorème 2.1.13 (Théorème de Cayley).** Soit  $G$  un groupe fini d'ordre  $n$ . Alors  $G$  est isomorphe à un sous-groupe de  $S_n$ .

**Preuve.** Soient  $g_1, g_2, \dots, g_n$  les éléments du groupe  $G$  (où  $g_1$  désigne l'élément neutre). Considérons la table de multiplication des éléments de  $G$ . On remarque que deux éléments d'une même ligne (ou d'une même colonne) sont nécessairement différents puisque  $g_i g_j = g_i g_k$  entraînerait  $g_j = g_k$ . Il résulte donc de cela que l'on passe de la première ligne à la ligne  $g_i$  de la table de multiplication par une *permutation*  $\pi_i$  des éléments de  $G$ . Il est alors aisé de s'assurer que les  $\pi_i$  forment un groupe isomorphe au groupe  $G$ .  $\square$

### 2.1.5 Classes de conjugaison

On dit que  $a$  et  $b \in G$  sont *conjugués* s'il existe  $g \in G$  tel que

$$a = g b g^{-1}.$$

Notons quelques propriétés de l'opération de conjugaison :

- a) Tout élément est conjugué de lui-même ( $a = e a e^{-1}$ ).
- b) Si  $a$  est conjugué de  $b$  et  $b$  conjugué de  $c$ , alors  $a$  est conjugué de  $c$  :

$$\left. \begin{array}{l} a = g b g^{-1} \\ b = g' c g'^{-1} \end{array} \right\} \Rightarrow a = (g g') c (g g')^{-1}.$$

- c) Si  $a$  est conjugué de  $b$ ,  $b$  est conjugué de  $a$  :

$$a = g b g^{-1} \Leftrightarrow b = (g^{-1}) a (g^{-1})^{-1}.$$

Ces propriétés montrent que l'opération de conjugaison définit une relation d'équivalence entre les éléments de  $G$ . On peut donc grouper les éléments conjugués entre eux en une même classe d'équivalence que l'on appelle **classe de conjugaison**.

*Remarques.*

- (a) L'élément neutre forme une classe à lui tout seul.

(b) Dans un groupe abélien, chaque élément forme une classe à lui tout seul.

(c) Tous les éléments d'une même classe sont du même ordre.

Étudions les classes de conjugaisons du groupe des permutations. Soient les permutations

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

et

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \dots & \tau(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \\ \tau(\sigma(1)) & \tau(\sigma(2)) & \dots & \tau(\sigma(n)) \end{pmatrix}.$$

On calcule

$$\begin{aligned} \tau\sigma\tau^{-1} &= \begin{pmatrix} \sigma(1) & \dots & \sigma(n) \\ \tau(\sigma(1)) & \dots & \tau(\sigma(n)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau(1) & \dots & \tau(n) \\ 1 & \dots & n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \tau(1) & \tau(2) & \dots & \tau(n) \\ \tau(\sigma(1)) & \tau(\sigma(2)) & \dots & \tau(\sigma(n)) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On constate que l'on peut interpréter cette dernière permutation comme étant identique à la permutation  $\sigma$  dans laquelle les éléments ont eu leur nom changé par l'opérateur  $\tau$ . On en déduit que : *La structure en cycles est la même pour deux permutations conjuguées et, réciproquement, deux permutations ayant même structure en cycles sont conjuguées.*

**Exemple 2.1.14.**

$$\begin{aligned} S_2 : & \quad 2 \text{ classes} \quad \left\{ \begin{array}{l} e \\ (12) \end{array} \right. \\ S_3 : & \quad 3 \text{ classes} \quad \left\{ \begin{array}{l} e \\ (12), (13), (23) \\ (123), (132) \end{array} \right. \\ S_4 : & \quad 5 \text{ classes} \quad \left\{ \begin{array}{l} e \\ (12), (13), (14), (23), (24), (34) \\ (12)(34), (13)(24), (14)(23) \\ (123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243) \\ (1234), (1243), (1324), (1342), (1423), (1432) \end{array} \right. \end{aligned}$$

## 2.2 Éléments de la théorie des représentations des groupes finis

Nous allons maintenant introduire la terminologie de base de la théorie des représentations des groupes finis en nous basant sur [13], puis nous exposerons quelques résultats fondamentaux adaptés de [14]. À travers cette section,  $G$  désignera un groupe d'ordre fini. Rappelons que si  $V$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$ , alors  $GL(V)$  est le groupe des transformations linéaires non-singulières de  $V$  dans lui-même, et si  $n \in \mathbb{Z}^+$ , alors  $GL_n(\mathbb{C})$  est le groupe des matrices inversibles  $n \times n$  à éléments dans  $\mathbb{C}$ .

### 2.2.1 Définitions de base

**Définition 2.2.1.** Soit  $G$  un groupe fini et  $V$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$ .

- (1) Une **représentation linéaire** de  $G$  est un homomorphisme de  $G$  dans  $GL(V)$ . Le **degré** de la représentation est la dimension de  $V$ .
- (2) Soit  $n \in \mathbb{Z}^+$ . Une **représentation matricielle** de  $G$  est un homomorphisme de  $G$  dans  $GL_n(\mathbb{C})$ .<sup>2</sup>
- (3) Une représentation linéaire ou matricielle est **fidèle** si elle est injective.
- (4) L'**anneau de groupe** de  $G$  sur  $\mathbb{C}$  (noté  $\mathbb{C}G$ ) consiste en l'ensemble des sommes formelles de la forme

$$\sum_{g \in G} \alpha_g g, \quad \alpha_g \in \mathbb{C}.$$

Supposons que les éléments de  $G$  soient  $g_1, g_2, \dots, g_n$ , alors l'addition et la multiplication dans  $\mathbb{C}G$  sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \alpha_i g_i + \sum_{i=1}^n \beta_i g_i &= \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i) g_i \\ \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i g_i \right) \left( \sum_{i=1}^n \beta_i g_i \right) &= \sum_{k=1}^n \left( \sum_{\substack{i,j \\ g_i g_j = g_k}} \alpha_i \beta_j \right) g_k. \end{aligned}$$

Le groupe  $G$  est inclus dans  $\mathbb{C}G$  (en identifiant  $g_i$  avec  $1g_i$ ) et le corps  $\mathbb{C}$  apparaît dans  $\mathbb{C}G$  (en identifiant  $\beta \in \mathbb{C}$  avec  $\beta g_1$ , où  $g_1$  est l'identité dans  $G$ ). Il est donc possible d'écrire

$$\beta \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i g_i \right) = \sum_{i=1}^n (\beta \alpha_i) g_i, \quad \forall \beta \in \mathbb{C}.$$

<sup>2</sup>Si  $V$  est un espace vectoriel fini de dimension  $n$ , on obtient un isomorphisme  $GL(V) \cong GL_n(\mathbb{C})$  en se donnant une base de  $V$ . Ainsi, toute représentation linéaire de  $G$  sur un espace vectoriel de dimension finie donne une représentation matricielle et vice versa.

De cette façon,  $\mathbb{C}G$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$  avec les éléments de  $G$  pour base. En particulier,  $\mathbb{C}G$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$  de dimension  $|G|$ .

Voici quelques exemples spécifiques de représentations :

**Exemple 2.2.2.** (1) Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension 1 sur  $\mathbb{C}$  et  $G$  un groupe d'ordre fini. Il existe une représentation  $\varphi : G \rightarrow GL(V)$ , appelée **représentation triviale** de  $G$ , définie par  $\varphi(g) = I$  (la transformation linéaire identité), pour tout  $g \in G$ . On obtient ainsi  $\varphi(g)(v) = v$ , pour tout  $g \in G$  et  $v \in V$ . La représentation matricielle correspondante est un homomorphisme de  $G$  dans  $GL_1(\mathbb{C})$  qui envoie tout élément du groupe vers la matrice identité  $1 \times 1$ . La représentation triviale est de degré 1 et si  $|G| \geq 1$ , elle n'est pas fidèle.

(2) Le groupe symétrique  $S_n$  possède deux représentations de dimension unité, la représentation triviale (exemple ci-dessus) et la **représentation alternée** où chaque permutation est représentée par les nombres  $+1$  ou  $-1$  suivant qu'elle soit paire ou impaire. Ainsi, dans le cas de  $S_3$ , les éléments  $e$ ,  $(1\ 2\ 3)$ ,  $(1\ 3\ 2)$  sont représentés par  $+1$  et les éléments  $(1\ 2)$ ,  $(1\ 3)$ ,  $(2\ 3)$  sont représentés par  $-1$ .

(3) Soit  $V = \mathbb{C}G$ , alors il est possible de définir une représentation  $\Phi$  de  $G$  de degré  $|G|$ . En effet, si l'on prend les éléments de  $G$  comme base de  $V$ , chaque  $g \in G$  permute ces éléments de base sous la représentation :

$$\Phi(g)(g_i) = gg_i$$

Dans cette base de  $V$ , la matrice représentant l'élément  $g$  a un 1 dans la ligne  $i$  et la colonne  $j$  si  $gg_j = g_i$  et 0 partout ailleurs. Cette représentation est appelée la **représentation régulière** de  $G$ . Remarquons que tout élément  $g \neq 1_G$  induit une permutation  $\sigma \neq 1$  sur la base de  $V$ , de sorte que la représentation régulière est toujours fidèle.

(4) Soit  $n \in \mathbb{Z}^+$ ,  $G = S_n$  et  $V$  un espace vectoriel de dimension  $n$  sur  $\mathbb{C}$  avec pour base  $e_1, e_2, \dots, e_n$ . Laissons  $S_n$  agir sur  $V$  en définissant pour chaque  $\sigma \in S_n$

$$\sigma \cdot e_i = e_{\sigma(i)}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

c'est-à-dire que  $\sigma$  agit en permutant les éléments de base. On obtient ainsi une représentation fidèle<sup>3</sup> de  $S_n$  de degré  $n$ . Comme dans l'exemple précédent, la matrice de  $\sigma$  dans la base  $e_1, \dots, e_n$  a un 1 dans la ligne  $i$  et la colonne  $j$  si  $\sigma \cdot e_j = e_i$  et 0 partout ailleurs. Autrement dit,  $\sigma$  a un 1 en position  $ij$  si  $\sigma(j) = i$ .

<sup>3</sup>En effet, cette représentation de  $G$  est fidèle (c'est-à-dire injective), puisque pour toute paire de permutation  $\sigma_1 \neq \sigma_2$  dans  $G$ , il existe au moins deux indices  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  tels que  $\sigma_1(i) \neq \sigma_2(i)$ .

## 2.2.2 Représentations équivalentes

Afin de définir une relation d'équivalence sur l'ensemble des représentations d'un groupe  $G$ , il s'avérera utile de se munir de la structure algébrique suivante :

**Définition 2.2.3.** Un  $\mathbb{C}G$ -module  $(V, \varphi)$  est un espace vectoriel  $V$  sur  $\mathbb{C}$  sur lequel est définie une représentation  $\varphi : G \rightarrow GL(V)$ .

Définir une représentation  $\varphi : G \rightarrow GL(V)$  sur un espace vectoriel  $V$  sur  $\mathbb{C}$  est donc équivalent à définir un  $\mathbb{C}G$ -module  $V$ . Sous cette correspondance, nous dirons que le module  $V$  admet la représentation  $\varphi$  de  $G$ .

**Définition 2.2.4.** Soient  $(V, \varphi)$  et  $(W, \psi)$  deux  $\mathbb{C}G$ -modules. Un **homomorphisme de  $\mathbb{C}G$ -modules** de  $V$  vers  $W$  est une application  $T : V \rightarrow W$  telle que :

- (1)  $T(v_1 + cv_2) = T(v_1) + cT(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V, \quad \forall c \in \mathbb{C}$ ,
- (2)  $(T \circ \varphi(g))(v) = (\psi(g) \circ T)(v), \quad \forall g \in G, v \in V$ .

L'ensemble des homomorphismes de  $\mathbb{C}G$ -modules de  $V$  vers  $W$  est dénoté par  $\text{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W)$ .

**Définition 2.2.5.** Soit  $V$  et  $W$  deux espaces vectoriels sur  $\mathbb{C}$ . Deux représentations de  $G$ ,  $\varphi : G \rightarrow GL(V)$  et  $\psi : G \rightarrow GL(W)$ , sont dites **équivalentes** s'il existe un isomorphisme de  $\mathbb{C}G$ -modules  $T : V \rightarrow W$ .

En particulier, si  $V = W$  en tant qu'espaces vectoriels, alors deux représentations  $\varphi$  et  $\psi$  de  $G$  sur  $V$  sont équivalentes si et seulement si  $\exists T \in GL(V)$  tel que

$$T \circ \varphi(g) \circ T^{-1} = \psi(g), \quad \forall g \in G.$$

Ce  $T$  est un changement de bases pour tout  $\varphi(g), g \in G$ .

**Définition 2.2.6.** Un  $\mathbb{C}G$ -sous-module  $(U, \varphi|_U)$  d'un module  $(V, \varphi)$  est un sous-espace  $U$  de  $V$   $\varphi(G)$ -invariant, c'est-à-dire tel que  $\varphi(g)(u) \in U$ ,  $\forall g \in G$  et  $\forall u \in U$ .  $\varphi|_U$  désigne la restriction de  $\varphi$  au sous-espace  $U$ .

## 2.2.3 Représentations irréductibles

**Définition 2.2.7.** Soit  $M$  un  $\mathbb{C}G$ -module.

- (1) Le module  $M$  est dit **irréductible** si ses seuls sous-modules sont  $0$  et  $M$ . Autrement,  $M$  est dit **réductible**.

- (2) Le module  $M$  est dit **indécomposable** si  $M$  ne peut s'écrire sous la forme  $M_1 \oplus M_2$ , où  $M_1$  et  $M_2$  sont des sous-modules non-triviaux. Autrement,  $M$  est dit **décomposable**.
- (3) Le module  $M$  est dit **complètement réductible** s'il est décomposable en une somme directe de sous-modules irréductibles.
- (4) Une représentation est dite **irréductible, réductible, indécomposable, décomposable, ou complètement réductible** si le  $\mathbb{C}G$ -module qui l'admet possède la propriété correspondante.

Soit  $\varphi : G \rightarrow GL(V)$ , une représentation réductible de  $G$ . Par définition, l'espace vectoriel  $V$  possède un sous-espace  $\varphi(G)$ -invariant  $U$ . Formons une base de  $V$  en prenant une base de  $U$  et en l'élargissant en une base de  $V$ . Alors pour chaque  $g \in G$  la matrice  $\varphi(g)$  de  $g$  agissant sur  $V$  dans cette base est de la forme

$$\varphi(g) = \begin{pmatrix} \varphi_1(g) & \psi(g) \\ 0 & \varphi_2(g) \end{pmatrix}$$

où  $\varphi_1 = \varphi|_U$  et  $\varphi_2$  est la représentation de  $G$  sur  $V/U$ . Donc, les représentations réductibles sont celles pour lesquelles il existe une base de  $V$  telle que tous les éléments  $\varphi(g)$  de la représentation matricielle correspondante sont des matrices triangulaires supérieures par blocs.

Supposons de plus que la représentation  $\varphi$  soit décomposable, c'est-à-dire qu'il existe un sous-espace  $\varphi(G)$ -invariant  $U'$  complémentaire à  $U$  tel que  $V = U \oplus U'$ . Prenons pour base de  $V$  l'union d'une base de  $U$  et d'une base de  $U'$ . Dans cette base de  $V$ , la matrice pour chaque  $g \in G$  est de la forme

$$\varphi(g) = \begin{pmatrix} \varphi_1(g) & 0 \\ 0 & \varphi_2(g) \end{pmatrix}$$

(c'est-à-dire,  $\psi(g) = 0, \forall g \in G$ ). Ainsi, les représentations décomposables sont celles pour lesquelles la représentation matricielle correspondante est constituée de matrices diagonales par blocs.

**Théorème 2.2.8 (Théorème de Maschke).** *Toute représentation sur  $\mathbb{C}$  d'un groupe fini  $G$  est complètement réductible.*

**Preuve.** Soit  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  une base d'un espace vectoriel  $V$  sur lequel est définie une représentation  $\varphi$  de  $G$ . Il existe alors une unique forme bilinéaire  $\Phi$  sur  $V$  telle que

$$\Phi(e_i, e_j) = \delta_j^i.$$

Construisons, à partir de  $\Phi$ , une nouvelle forme bilinéaire définie par

$$\langle u, v \rangle = \sum_{g \in G} \Phi(\varphi(g)u, \varphi(g)v) \quad \forall u, v \in V.$$

Cette dernière forme est dite  $\varphi(G)$ -invariante en ce sens que

$$\langle \varphi(g)u, \varphi(g)v \rangle = \langle u, v \rangle \quad \forall g \in G.$$

Notons que, puisque  $u \neq 0$  implique  $\langle u, u \rangle \neq 0$ , la forme  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est définie positive et constitue donc un produit scalaire. Étant donné un sous-espace  $\varphi(G)$ -invariant  $\mathcal{U}$  de  $V$ ,  $v \in \mathcal{U}^\perp$  signifie, par définition, que  $\langle u, v \rangle = 0$  pour tout  $u \in \mathcal{U}$ . Or, si  $u \in \mathcal{U}$ , alors  $\varphi^{-1}(g)u \in \mathcal{U}$  et par conséquent

$$\langle u, \varphi(g)v \rangle = \langle \varphi^{-1}(g)u, v \rangle = 0,$$

puisque la forme bilinéaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est  $\varphi(G)$ -invariante. Ceci montre que  $\varphi(g)v \in \mathcal{U}^\perp$  et donc que  $\mathcal{U}^\perp$  est un sous-espace  $\varphi(G)$ -invariant de  $V$  complémentaire à  $\mathcal{U}$ . Puisque l'on peut ensuite appliquer ce raisonnement à tout sous-espace  $\varphi(G)$ -invariant de  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{U}^\perp$  et ainsi de suite, on voit qu'il est possible de parvenir éventuellement à une décomposition de  $V$  en une somme directe de sous-espaces  $\varphi(G)$ -invariants irréductibles.  $\square$

**Corollaire 2.2.9.** Soit  $G$  un groupe fini,  $V$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$  et  $\varphi : G \rightarrow GL(V)$  une représentation de  $G$  de degré fini. Alors il existe une base de  $V$  dans laquelle pour chaque  $g \in G$  la matrice de  $\varphi(g)$  est diagonale par blocs :

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(g) & & & \\ & \varphi_2(g) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi_m(g) \end{pmatrix}$$

où  $\varphi_i$  est une représentation matricielle irréductible de  $G$ ,  $1 \leq i \leq m$ .

La proposition suivante permet de conclure que les représentations irréductibles d'un groupe fini sont en nombre fini :

**Proposition 2.2.10.** Si  $G$  est fini, il n'existe qu'un nombre fini de classes d'équivalence de  $\mathbb{C}G$ -modules irréductibles.

**Preuve.** Soit  $M$  un  $\mathbb{C}G$ -module irréductible et  $m \in M$ , un vecteur non-nul. L'espace vectoriel engendré par l'ensemble  $\{\varphi(g)m \mid g \in G\}$  est un sous-module non-trivial de  $M$  et est donc égal à  $M$  puisque ce dernier est irréductible. Si on considère  $\mathbb{C}G$  comme  $\mathbb{C}G$ -module, alors l'application

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{C}G &\rightarrow M \\ \sum_{g \in G} c_g g &\mapsto \sum_{g \in G} c_g \varphi(g)m \end{aligned}$$



est un homomorphisme surjectif de  $\mathbb{C}G$ -modules. Alors, par le premier théorème d'isomorphisme <sup>4</sup>

$$\mathbb{C}G/\text{Ker}\psi \cong \psi(\mathbb{C}G) = M.$$

Comme  $\mathbb{C}G$  est de dimension finie, le nombre de quotients possibles de  $\mathbb{C}G$  est fini. On en conclut donc que le nombre de classes d'équivalence de  $\mathbb{C}G$ -modules irréductibles est aussi fini.  $\square$

**Lemme 2.2.11 (lemme de Schur).** (1) Soit  $V$  et  $W$  deux  $\mathbb{C}G$ -modules irréductibles et  $\varphi : V \rightarrow W$  un homomorphisme non-nul de  $\mathbb{C}G$ -modules, alors  $\varphi$  est un isomorphisme.

(2)  $\text{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, V) = \{\lambda 1 \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$ .

**Preuve.** Afin de prouver (1), notons que  $\text{Ker}\varphi$  est un sous-module de  $V$ , mais l'irréductibilité de  $V$  implique  $\text{Ker}\varphi = 0$ . De même, l'image de  $\varphi$  est un sous-module non-trivial de  $W$ . Comme  $W$  est irréductible,  $\varphi(V) = W$ . Cela prouve que l'homomorphisme  $\varphi$  est bijectif.

Maintenant démontrons (2). Soit  $\phi \in \text{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, V)$ . Alors il existe une valeur propre  $\lambda \in \mathbb{C}$  de  $\phi$ . L'espace propre correspondant est un sous-espace  $\varphi(G)$ -invariant de  $V$  et est donc égal à  $V$ . Par conséquent, l'application  $\phi$  est un multiple de l'identité.  $\square$

**Lemme 2.2.12.** Soit  $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$  et  $W = \bigoplus_{j=1}^m W_j$  deux sommes directes de  $\mathbb{C}G$ -modules. Alors, en tant que groupes abéliens,

$$\text{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W) \cong \bigoplus_{i,j} \text{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_i, W_j).$$

**Preuve.** Nous aurons prouvé le lemme si nous parvenons à démontrer que pour des  $\mathbb{C}G$ -modules  $D, L$  et  $N$  :

$$(1) \quad \text{Hom}_{\mathbb{C}G}(D, L \oplus N) \cong \text{Hom}_{\mathbb{C}G}(D, L) \oplus \text{Hom}_{\mathbb{C}G}(D, N), \quad \text{et}$$

$$(2) \quad \text{Hom}_{\mathbb{C}G}(L \oplus N, D) \cong \text{Hom}_{\mathbb{C}G}(L, D) \oplus \text{Hom}_{\mathbb{C}G}(N, D).$$

Soit les projections  $\pi_1 : L \oplus N \rightarrow L$  et  $\pi_2 : L \oplus N \rightarrow N$ . Si  $f \in \text{Hom}_{\mathbb{C}G}(D, L \oplus N)$ , alors  $\pi_1 \circ f$  et  $\pi_2 \circ f$  sont des éléments de  $\text{Hom}_{\mathbb{C}G}(D, L)$  et  $\text{Hom}_{\mathbb{C}G}(D, N)$  respectivement. Ceci permet de définir un homomorphisme injectif de  $\text{Hom}_{\mathbb{C}G}(D, L \oplus N)$  vers  $\text{Hom}_{\mathbb{C}G}(D, L) \oplus \text{Hom}_{\mathbb{C}G}(D, N)$ . À l'inverse, soit  $f_1 \in \text{Hom}_{\mathbb{C}G}(D, L)$  et  $f_2 \in \text{Hom}_{\mathbb{C}G}(D, N)$ . Alors on vérifie sans peine que l'application  $f \in \text{Hom}_{\mathbb{C}G}(D, L \oplus N)$  définie par  $f(d) = (f_1(d), f_2(d))$  constitue un homomorphisme injectif de  $\text{Hom}_{\mathbb{C}G}(D, L) \oplus \text{Hom}_{\mathbb{C}G}(D, N)$  vers  $\text{Hom}_{\mathbb{C}G}(D, L \oplus N)$ , ce qui démontre (1). La démonstration de (2) est similaire.  $\square$

<sup>4</sup>voir Dummit & Foote, *Abstract Algebra*, 3e ed., section 10.2, p.349.

**Lemme 2.2.13.** Soit  $V$  un  $\mathbb{C}G$ -module (complètement réductible) de dimension finie et  $W$  un  $\mathbb{C}G$ -module irréductible. Alors  $W$  apparaît dans la décomposition de  $V$  comme somme directe de modules irréductibles avec une multiplicité notée  $(V : W)$  et donnée par

$$(V : W) = \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W) = \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathbb{C}G}(W, V) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

**Preuve.** Soit  $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_s$  une décomposition de  $V$  comme somme directe de modules irréductibles. Si  $V_i$  n'est pas isomorphe à  $W$ , alors par le lemme de Schur  $\text{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_i, W) = 0 = \text{Hom}_{\mathbb{C}G}(W, V_i)$ . Mais si  $V_i \cong W$ ,  $\text{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_i, W) \cong \text{Hom}_{\mathbb{C}G}(W, W) = \{\lambda 1 \mid \lambda \in \mathbb{C}\} \cong \text{Hom}_{\mathbb{C}G}(W, V_i)$  et par le lemme 2.2.12,  $\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W) = \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathbb{C}G}(W, V) = (V : W)$ .  $\square$

**Théorème 2.2.14.** Soit  $G$  un groupe fini et  $W_1, W_2, \dots, W_r$  les  $\mathbb{C}G$ -modules irréductibles (à isomorphisme près). Alors  $(\mathbb{C}G : W_i) = \dim_{\mathbb{C}} W_i$  et

$$|G| = \sum_{i=1}^r (\dim_{\mathbb{C}} W_i)^2.$$

**Preuve.** Pour tout  $i$ , définissons l'application

$$\begin{aligned} \psi : \text{Hom}_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}G, W_i) &\rightarrow W_i \\ \phi &\mapsto \phi(e) \end{aligned}$$

(où  $e$  est l'identité dans  $G$ ). Soit à présent l'application  $\sigma : w \mapsto \phi_w$ , où  $\phi_w(g) := \varphi(g) \cdot w$  ( $\varphi$  étant la représentation de  $G$  que  $W_i$  admet). Puisque  $\phi_w(e) = w$  et  $\phi_{\phi(e)} = \phi$ , on obtient que  $\sigma = \psi^{-1}$ , ce qui montre que  $\psi$  est un isomorphisme. En vertu du lemme 2.2.13, nous obtenons  $(\mathbb{C}G : W_i) = \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}G, W_i) = \dim_{\mathbb{C}} W_i$ . Par conséquent,

$$|G| = \sum_i (\mathbb{C}G : W_i) \dim_{\mathbb{C}} W_i = \sum_i (\dim_{\mathbb{C}} W_i)^2.$$

$\square$

**Théorème 2.2.15 (théorème de Wedderburn).** Soit  $G$  un groupe fini et  $W_1, W_2, \dots, W_r$  les  $\mathbb{C}G$ -modules irréductibles (à isomorphisme près). Alors

$$\mathbb{C}G \cong M_{n_1}(\mathbb{C}) \times M_{n_2}(\mathbb{C}) \times \dots \times M_{n_r}(\mathbb{C})$$

en tant que  $\mathbb{C}$ -algèbres, où  $M_{n_i}(\mathbb{C}) \cong \text{Hom}_{\mathbb{C}}(W_i, W_i)$  est l'anneau des matrices inversibles  $n_i \times n_i$  à coefficients dans  $\mathbb{C}$  et où  $n_i = \dim_{\mathbb{C}} W_i$ .

**Preuve.** La dimension de  $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(W_i, W_i)$  comme  $\mathbb{C}$ -espace est  $(\dim_{\mathbb{C}} W_i)^2$ . Par le théorème 2.2.14, les deux côtés de l'isomorphisme sont donc de même dimension en tant qu'espaces vectoriels sur  $\mathbb{C}$ .

Pour montrer le théorème de Wedderburn, il suffit alors de montrer que l'application

$$(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_r) : \mathbb{C}G \rightarrow \bigoplus_{i=1}^r \text{Hom}_{\mathbb{C}}(W_i, W_i)$$

est injective.

Soit  $\tau \in \mathbb{C}G$  dans le noyau de  $(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_r)$ , alors  $\tau$  est dans le noyau de chaque  $\rho_i$ .  $\tau$  agit donc trivialement dans chaque  $\mathbb{C}G$ -module irréductible et par le théorème de Maschke,  $\tau$  agit trivialement dans chaque  $\mathbb{C}G$ -module. En particulier,  $\tau$  agit trivialement sur  $\mathbb{C}G$ , donc  $\tau \cdot e = 0$ . Mais  $\tau \cdot e = \tau$ , ce qui implique  $\tau = 0$  et conséquemment  $\text{Ker}(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_r) = 0$ . On en conclut que l'application est injective.  $\square$

**Théorème 2.2.16.** *Le nombre  $r$  de classes d'isomorphismes de  $\mathbb{C}G$ -modules irréductibles (c'est-à-dire le nombre de représentations complexes irréductibles inéquivalentes de  $G$ ), est égal au nombre de classes de conjugaison de  $G$ .*

**Preuve.** Afin de mieux voir cela, remarquons d'abord qu'il est possible de montrer que le centre de chaque  $M_{n_i}(\mathbb{C})$ ,

$$Z(M_{n_i}(\mathbb{C})) = \{a \in M_{n_i}(\mathbb{C}) \mid ab = ba, \forall b \in M_{n_i}(\mathbb{C})\},$$

est constitué de l'ensemble des matrices scalaires  $\alpha I$  où  $I$  est la matrice identité  $n_i \times n_i$  et  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Nous pouvons donc en conclure que le centre de  $\mathbb{C}G$  est de dimension  $r$  :  $\dim_{\mathbb{C}} Z(\mathbb{C}G) = r$ . Mais calculons cette dimension d'une autre façon.

Soit  $K_1, \dots, K_s$  les différentes classes de conjugaison de  $G$ . Pour chaque classe de conjugaison  $K_i$  de  $G$ , définissons

$$X_i = \sum_{g \in K_i} g \in \mathbb{C}G.$$

Notons que  $X_i$  et  $X_j$  n'ont aucun terme en commun pour  $i \neq j$ , de sorte qu'ils sont des éléments linéairement indépendants de  $\mathbb{C}G$ . De plus, puisque l'opération de conjugaison ne fait que permuter entre eux les éléments d'une même classe,  $h^{-1}X_i h = X_i$ , c'est-à-dire que  $X_i$  commute avec tous les éléments de  $G$ . Ceci prouve que  $X_i \in Z(\mathbb{C}G)$ .

Montrons à présent que les  $X_i$  forment une base de  $Z(\mathbb{C}G)$ , ce qui prouvera du même coup que  $s = \dim_{\mathbb{C}} Z(\mathbb{C}G) = r$ . Les  $X_i$  étant linéairement indépendants, il ne reste plus qu'à démontrer qu'il engendrent  $Z(\mathbb{C}G)$ . Soit  $X = \sum_{g \in G} \alpha_g g$ , un élément arbitraire de  $Z(\mathbb{C}G)$ . Puisque  $h^{-1}Xh = X$ ,

$$\sum_{g \in G} \alpha_g h^{-1}gh = \sum_{g \in G} \alpha_g g.$$

Comme les éléments de  $G$  forment une base de  $\mathbb{C}G$ , les coefficients dans les deux sommes précédentes sont égaux :

$$\alpha_{hgh^{-1}} = \alpha_g.$$

Puisque  $h$  est un élément arbitraire, tous les éléments appartenant à la même classe de conjugaison ont le même coefficient dans  $X$ , et donc  $X$  peut s'écrire comme une combinaison linéaire des  $X_i$ .  $\square$

**Exemple 2.2.17.** Soit  $G = S_3$ . Par le théorème 2.2.16, le nombre de représentations irréductibles de  $G$  est 3 (c'est-à-dire le nombre de classes de conjugaison de  $S_3$ ). D'après le théorème 2.2.14, la somme des carrés des degrés de ces représentations est 6. Ces degrés doivent donc être 1, 1 et 2. Les deux représentations de degré 1 s'obtiennent immédiatement : ce sont les représentations triviale (voir exemple 2.2.2 (1)) et alternée (voir exemple 2.2.2 (2)) de  $S_3$ . La représentation de degré 2 peut être trouvée en décomposant la représentation de l'exemple 2.2.2 (4) en représentations irréductibles de la manière suivante : laissons  $S_3$  agir sur les vecteurs de base  $e_1, e_2, e_3$  d'un espace vectoriel  $V$  en permutant les indices. Le vecteur  $t = e_1 + e_2 + e_3$  est invariant sous l'action de  $S_3$  et engendre donc un sous-espace unidimensionnel  $\varphi(G)$ -invariant  $T$  (qui est une copie de la représentation identité). Par le théorème de Maschke, il existe un sous-espace  $\varphi(G)$ -invariant  $I$  complémentaire à  $T$ . Remarquons que la représentation de  $S_3$  sur  $V$  n'est pas une somme de représentations de degré 1, sinon elle pourrait être représentée par des matrices diagonales et les permutations commuteraient entre elles, ce qui est impossible puisque la représentation de l'exemple 2.2.2 (4) est fidèle et que  $S_3$  n'est pas abélien. Par conséquent,  $I$  ne peut être décomposé davantage et admet donc l'action de la représentation irréductible de degré 2. En fait,

$$I = \left\{ w \in V \mid w = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 \text{ avec } \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \right\}.$$

Il est possible de former une base de  $I$  en trouvant deux vecteurs linéairement indépendants, par exemple  $e_1 - e_2$  et  $e_2 - e_3$ . Nous pouvons ensuite obtenir une représentation matricielle de  $S_3$  dans cette base de  $I$  ; par exemple,  $(1\ 2)$  et  $(2\ 3)$  qui engendrent tout  $S_3$  y sont représentés par :

$$(1\ 2) \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2\ 3) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

## 2.2.4 Représentations induites

Soit  $G$  un groupe fini,  $H$  un sous-groupe de  $G$  et  $\varphi$  une représentation du sous-groupe  $H$  définie sur un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$ . Nous allons montrer dans cette sous-section comment obtenir une représentation de  $G$ , appelée la représentation induite, à partir de la représentation  $\varphi$  de son sous-groupe  $H$ .

Remarquons d'abord qu'il peut ne pas être possible de réaliser l'extension d'une représentation  $\varphi$  d'un sous-groupe  $H$  en une représentation  $\Phi$  de  $G$  telle que  $\Phi|_H = \varphi$ . Par exemple, le sous-groupe

$A_3$  des permutations paires de  $S_3$  possède une représentation fidèle de degré 1 :

$$\{e, (123), (132)\} \mapsto \{1, e^{i\pi/3}, e^{i2\pi/3}\}.$$

Puisque toute représentation de  $S_3$  de degré 1 contient  $A_3$  dans son noyau, cette représentation de  $A_3$  ne peut être étendue en une représentation de  $S_3$ . Nous verrons que la méthode des représentations induites produit des représentations  $\Phi$  de  $G$  à partir d'une représentation  $\varphi$  de son sous-groupe  $H$ , mais que  $\Phi|_H \neq \varphi$  en général (en fait, à moins que  $G = H$ , le degré de  $\Phi$  sera supérieur à celui de  $\varphi$ ).

**Définition 2.2.18.** Soit  $H$  un sous-groupe d'un groupe fini  $G$  et soit  $V$  un  $\mathbb{C}H$ -module admettant une représentation  $\varphi$  de  $H$ . Le  $\mathbb{C}G$ -module  $W = \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} V$  est appelé le **module induit** de  $V$ . Les éléments de  $W$  sont des tenseurs de la forme  $s \otimes v$  (où  $s \in \mathbb{C}G$  et  $v \in V$ ) satisfaisant les relations

$$\begin{aligned} (s_1 + s_2) \otimes v &= s_1 \otimes v + s_2 \otimes v, \\ s \otimes (v_1 + v_2) &= s \otimes v_1 + s \otimes v_2, \\ s\tau \otimes v &= s \otimes \tau v, \end{aligned}$$

pour  $\tau \in \mathbb{C}H$ . La représentation de  $G$  que  $W$  admet est appelé la **représentation induite** de  $\varphi$ .

**Théorème 2.2.19.** Soit  $H$  un sous-groupe d'un groupe fini  $G$  et  $g_1, \dots, g_m$  des représentants des différentes classes résiduelles à gauche de  $H$  dans  $G$ . Soit  $V$  un  $\mathbb{C}H$ -module admettant la représentation matricielle  $\varphi$  de  $H$  de degré  $n$ . Le  $\mathbb{C}G$ -module  $W = \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} V$  est de dimension  $nm$  sur  $\mathbb{C}$  et il existe une base de  $W$  telle que  $W$  admet la représentation matricielle  $\Phi$  définie pour chaque  $g \in G$  par

$$\Phi(g) = \begin{pmatrix} \varphi(g_1^{-1}gg_1) & \dots & \varphi(g_1^{-1}gg_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi(g_m^{-1}gg_1) & \dots & \varphi(g_m^{-1}gg_m) \end{pmatrix}$$

où chaque  $\varphi(g_i^{-1}gg_j)$  est un bloc  $n \times n$  apparaissant à la position du bloc  $i, j$  de  $\Phi(G)$ , et où  $\varphi(g_i^{-1}gg_j) = 0$  lorsque  $g_i^{-1}gg_j \notin H$ .

**Preuve.** Notons d'abord que  $\mathbb{C}G$  est un  $\mathbb{C}H$ -module à droite de la forme :

$$\mathbb{C}G = g_1\mathbb{C}H \oplus g_2\mathbb{C}H \oplus \dots \oplus g_m\mathbb{C}H.$$

Puisqu'il est possible de montrer que le produit tensoriel commute avec les sommes directes, nous avons en tant que groupes abéliens

$$W = \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} V \cong (g_1 \otimes V) \oplus (g_2 \otimes V) \oplus \dots \oplus (g_m \otimes V).$$

Étant donné que  $\mathbb{C}$  est dans le centre de  $\mathbb{C}G$ , il s'ensuit qu'il s'agit aussi d'un isomorphisme d'espaces vectoriels. Par conséquent, si  $v_1, v_2, \dots, v_n$  est une base de  $V$  admettant une représentation matricielle

$\varphi$ , alors  $\{g_i \otimes v_j \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$  est une base de  $W$ . Ceci montre que la dimension de  $W$  est  $mn$ . Ordonnons cette base en  $m$  ensembles de  $n$  éléments comme suit

$$g_1 \otimes v_1, g_1 \otimes v_2, \dots, g_1 \otimes v_n, g_2 \otimes v_1, \dots, g_2 \otimes v_n, \dots, g_m \otimes v_n.$$

Nous allons construire dans cette base la représentation matricielle de  $\Phi(g)$  pour chaque  $g$  agissant sur  $W$ . Fixons  $j$  et  $g$  puis supposons que  $gg_j = g_i h$  pour un certain indice  $i$  et un certain  $h \in H$ . Alors, pour tout  $k$

$$\begin{aligned} g(g_j \otimes v_k) &= (gg_j) \otimes v_k = g_i \otimes \varphi(h)v_k \\ &= \sum_{t=1}^n a_{tk}(h)(g_i \otimes v_t) \end{aligned}$$

où  $a_{tk}$  est le coefficient  $t, k$  de la matrice de  $\varphi(h)$  agissant sur  $V$  dans la base  $\{v_1, \dots, v_n\}$ . En d'autres mots,  $g$  agit sur  $W$  en appliquant le  $j^e$  bloc de  $n$  vecteurs de base de  $W$  sur le  $i^e$  bloc, et agit ensuite comme la représentation matricielle  $\varphi(h)$  sur ce bloc. Comme  $h = g_i^{-1}gg_j$ , ceci décrit bien la matrice par bloc  $\Phi(g)$  du théorème.  $\square$

## 2.3 Éléments de la théorie des représentations des groupes symétriques

Dans l'exemple 2.2.17 de la section précédente, nous sommes parvenus à trouver (à un isomorphisme près) les représentations irréductibles de  $S_3$  en recourant à notre intuition ainsi qu'à un usage approprié des théorèmes. Il est cependant difficile de voir comment une telle procédure pourrait se généraliser à des groupes symétriques d'ordre arbitraire. La théorie des représentations des groupes symétriques, qui fait l'objet de la présente section, nous fournit en l'occurrence une méthode systématique pour construire les représentations irréductibles de  $S_n$ <sup>5</sup>. Les résultats que nous exposerons ici sont tirés de [15].

### 2.3.1 Les représentations de $S_n$

**Définition 2.3.1.**  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots)$  est une **partition** de  $n$  si  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$  sont des entiers positifs ou nuls tels que  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots$  et  $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = n$ .

<sup>5</sup>Rappelons que nous limitons les résultats présentés dans cette section au cas des représentations sur  $\mathbb{C}$ , mais que la théorie peut être formulée pour un corps  $F$  arbitraire.

On dit d'une permutation  $\pi$  qu'elle est de *type-cyclique*  $\lambda$  si les permutations cycliques indépendantes qui la composent sont de longueur  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots$ . Par exemple,  $(2\ 5\ 6\ 8)(1\ 3)(4\ 9)(7)$  est de type-cyclique  $(4, 2, 2, 1) = (4, 2^2, 1)$ .

Puisque deux permutations dans  $S_n$  sont conjuguées si et seulement si elles sont de même type-cyclique,

**Proposition 2.3.2.** *Le nombre de classes de conjugaison de  $S_n$  est égal au nombre de partitions de  $n$ .*

Maintenant, on sait par le théorème 2.2.16 que pour tout groupe fini  $G$ , le nombre de représentations complexes irréductibles inéquivalentes est égal au nombre de classes de conjugaison de  $G$ , alors

**Proposition 2.3.3.** *Le nombre de représentations complexes irréductibles de  $S_n$  est égal au nombre de partitions de  $n$ .*

Par conséquent, notre premier objectif devrait être de construire une représentation de  $S_n$  pour chaque partition de  $n$ . Commençons d'abord par un exemple :

**Exemple 2.3.4.** *Il existe une représentation naturelle de  $S_n$  découlant directement du fait que  $S_n$  permute les nombres  $1, 2, \dots, n$  : prenons un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$  de dimension  $n$  avec les éléments de base  $\bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n}$ , et définissons l'action de  $S_n$  sur cette base par  $\pi \bar{i} = \overline{\pi(i)}$ ,  $\pi \in S_n$ . Nous allons dénoter cette représentation par  $M^{(n-1,1)}$ . Remarquons qu'il s'agit de la représentation décrite à l'exemple 2.2.2 (4). On peut facilement identifier un sous-module de  $M^{(n-1,1)}$ . En effet, l'espace  $T$  engendré par  $\bar{1} + \bar{2} + \dots + \bar{n}$  est un sous-module sur lequel  $S_n$  agit trivialement (il s'agit en fait d'une généralisation en dimension  $n$  de l'espace  $T$  de l'exemple 2.2.17). Le théorème de Maschke suggère que nous construisions un produit scalaire  $S_n$ -invariant sur  $M^{(n-1,1)}$  afin de trouver un complémentaire  $S_n$ -invariant  $T^\perp$ . La forme bilinéaire  $\langle \bar{i}, \bar{j} \rangle = \delta_{ij}$  définit un tel produit. Alors*

$$T^\perp = \left\{ \sum_i a_i \bar{i} \mid a_i \in \mathbb{C}, \quad a_1 + \dots + a_n = 0 \right\}$$

(ici encore, il s'agit d'une généralisation en dimension  $n$  de l'espace  $I$  de l'exemple 2.2.17). Soit  $S^{(n-1,1)} = S_n(\bar{2} - \bar{1})$ <sup>6</sup>. Alors  $S^{(n-1,1)}$  est certainement un sous-module de  $T^\perp$  et il est aisé de s'assurer qu'il y a en fait égalité. Ainsi,

$$M^{(n-1,1)} = S^{(n-1,1)} \oplus T.$$

$S^{(n-1,1)}$  est un module de Specht.

*Existe-t-il d'autres façons simples de construire des  $\mathbb{C}S_n$ -modules ? Considérons l'espace vectoriel  $M^{(n-2,2)}$*

<sup>6</sup>Nous employons, par abus de notation, les symboles  $S_n(\bar{2} - \bar{1})$  pour désigner l'espace vectoriel engendré par cet ensemble fini de vecteurs

de dimension  $\binom{n}{2}$  engendré par les paires non-ordonnées  $\overline{ij}$  ( $i \neq j$ ). Nous pouvons munir cet espace d'une structure de  $\mathbb{C}S_n$ -module en définissant  $\pi \overline{ij} = \overline{\pi(i), \pi(j)}$ . Notons que cette représentation est réductible puisque  $\sum \{\overline{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$  est un sous-module trivial de  $M^{(n-2,2)}$ .

De façon plus générale, si  $n, m \in \mathbb{N}^*$  tel que  $n - m \geq m$ , alors nous pouvons définir un espace vectoriel  $M^{(n-m, m)}$  engendré par les  $m$ -tuples non-ordonnés  $\overline{i_1 \dots i_m}$  (où  $i_j \neq i_k$  sauf si  $j = k$ ). Cela signifie que pour toute partition de  $n$  de type  $(n - m, m)$ , nous avons un  $\mathbb{C}S_n$ -module (réductible) à notre disposition.

Essayons à présent de généraliser ce résultat pour toute partition de  $n$ . Soit  $M^{(n-2, 1^2)}$  l'espace vectoriel engendré par les paires ordonnées

$$\overline{\begin{matrix} i \\ j \end{matrix}} \quad (i \neq j).$$

Alors nous pouvons définir l'action de  $S_n$  sur cette base par

$$\pi \overline{\begin{matrix} i \\ j \end{matrix}} = \overline{\begin{matrix} \pi(i) \\ \pi(j) \end{matrix}}.$$

Soit  $M^{(n-3, 2, 1)}$  l'espace vectoriel engendré par les vecteurs de base consistant en un 2-tuple  $\overline{ij}$  suivi d'un 1-tuple  $\overline{k}$ , où  $i, j$  et  $k$  sont tous les trois distincts. Ces vecteurs peuvent être dénotés par

$$\overline{\begin{matrix} i & j \\ k \end{matrix}},$$

mais il est préférable de changer cette notation et prendre plutôt

$$\overline{\begin{matrix} i_1 & \dots & i_{n-3} \\ i_{n-2} & i_{n-1} \\ i_n \end{matrix}},$$

pour vecteur de base de  $M^{(n-3, 2, 1)}$ , avec  $i_{n-2} = i$ ,  $i_{n-1} = j$  et  $i_n = k$ . Il devient ainsi évident que la dimension du module  $M^{(n-3, 2, 1)}$  est  $\frac{n!}{(n-3)! 2! 1!}$ .

Il devrait être clair à présent comment construire un module  $M^\lambda$  pour chaque partition  $\lambda$  de  $n$ . Soulignons maintenant que  $M^\lambda$  est réductible (à moins que  $\lambda = n$ ), mais contient un module  $S^\lambda$  qui s'avère quant à lui irréductible. L'objectif sera d'extraire les modules irréductibles  $S^\mu$  et les outils nécessaires pour réaliser ce travail sont introduits dans la prochaine section.

### 2.3.2 Diagrammes, tableaux et tabloïdes

**Définition 2.3.5.** Soit  $\lambda$  une partition de  $n$ . Le **diagramme**  $[\lambda]$  associé à la partition  $\lambda$  correspond à l'ensemble  $\{(i, j) \mid i, j \in \mathbb{N}^*, 1 \leq i, 1 \leq j \leq \lambda_i\}$ . Si  $(i, j) \in [\lambda]$ , alors  $(i, j)$  est appelé un **noeud** de  $[\lambda]$ .



Les diagrammes seront représentés comme dans l'exemple suivant :

$$\lambda = (4, 2^2, 1) \quad [\lambda] = [4, 2^2, 1] = \begin{array}{cccc} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & & \\ \times & \times & & \\ \times & & & \end{array}$$

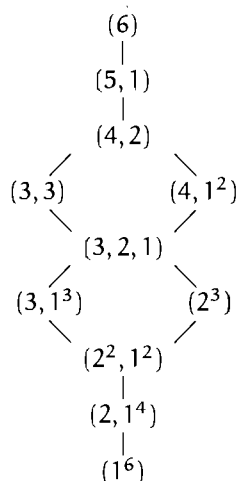
Nous allons définir un ordre partiel sur l'ensemble des partitions de  $n$  :

**Définition 2.3.6.** Soit  $\lambda$  et  $\mu$  deux partitions de  $n$ , on dit que  $\lambda$  **domine**  $\mu$  et on écrit  $\lambda \trianglerighteq \mu$  lorsque

$$\sum_{i=1}^j \lambda_i \geq \sum_{i=1}^j \mu_i, \quad \forall j.$$

Si  $\lambda \trianglerighteq \mu$  et  $\lambda \neq \mu$ , on écrit  $\lambda \triangleright \mu$ .

**Exemple 2.3.7.** La relation de dominance sur l'ensemble des partitions de  $n = 6$  peut être représentée par le diagramme arborescent ci-dessous (dans lequel on a placé  $\lambda$  au-dessus de  $\mu$  lorsque  $\lambda \triangleright \mu$ ) :



**Définition 2.3.8.** Soit  $[\lambda]$  un diagramme. On obtient le **diagramme conjugué**  $[\lambda']$  en transposant  $[\lambda]$  et on dit  $\lambda'$  est la partition de  $n$  conjuguée à  $\lambda$ .

Le prochain concept que nous avons besoin d'introduire est celui de  $\lambda$ -tableau, lequel consiste essentiellement en une bijection de  $[\lambda]$  vers  $\{1, 2, \dots, n\}$ . De façon moins formelle,

**Définition 2.3.9.** Un  $\lambda$ -tableau est un des  $n!$  tableaux de nombres entiers obtenus en remplaçant chaque noeud dans  $[\lambda]$  par un entier différent parmi  $1, 2, \dots, n$ .

**Exemple 2.3.10.**

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 7 & \\ 8 & & & \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} 4 & 5 & 7 & 3 \\ 2 & 1 & 8 & \\ 6 & & & \end{array} \quad \text{sont des } (4, 3, 1)\text{-tableaux.}$$

$S_n$  agit de façon naturelle sur l'ensemble des  $\lambda$ -tableaux ; ainsi, la permutation  $(1\ 4\ 7\ 8\ 6)(2\ 5\ 3)$  envoie le premier des précédents tableaux sur le second.

Toute formulation de la théorie des représentations de  $S_n$  repose sur une forme ou une autre du prochain résultat, qui relie la relation de dominance entre partitions à une propriété des tableaux.

**Lemme 2.3.11 (Le lemme combinatoire).** *Soient  $\lambda$  et  $\mu$  deux partitions de  $n$ , et supposons que  $t_1$  soit un  $\lambda$ -tableau et  $t_2$ , un  $\mu$ -tableau. Supposons de plus que, pour tout  $i$ , les entiers de la  $i$ -ème ligne de  $t_2$  appartiennent à des colonnes différentes de  $t_1$ . Alors  $\lambda \supseteq \mu$ .*

**Preuve.** Supposons que l'on puisse disposer les  $\mu_1$  entiers de la première ligne de  $t_2$  dans  $[\lambda]$  de telle façon qu'aucun ne se retrouve placé dans la même colonne. Alors  $[\lambda]$  doit avoir minimalement  $\mu_1$  colonnes ; c'est-à-dire,  $\lambda_1 \geq \mu_1$ . Insérons ensuite les  $\mu_2$  entiers de la seconde ligne de  $t_2$  dans des colonnes distinctes de  $[\lambda]$ . Afin que cela puisse être réalisé, on exige que  $\lambda_1 + \lambda_2 \geq \mu_1 + \mu_2$ . En poursuivant ainsi, on obtient  $\lambda \supseteq \mu$ .  $\square$

**Définition 2.3.12.** *Soit  $t$  un tableau. Le stabilisateur-ligne  $R_t$  est le sous-groupe de  $S_n$  laissant invariant les ensembles d'entiers de chaque ligne de  $t$ , c'est-à-dire*

$$R_t = \{ \pi \in S_n \mid \forall i, i \text{ et } \pi(i) \text{ appartiennent à la même ligne de } t \}.$$

Le stabilisateur-colonne  $C_t$  de  $t$  est défini de façon similaire.

Par exemple,

$$\text{lorsque } t = \begin{array}{ccccc} & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 7 & & \\ 8 & & & & \end{array}, \quad R_t = S_{\{1\ 2\ 4\ 5\}} \times S_{\{3\ 6\ 7\}} \times S_{\{8\}} \quad \text{et} \quad |R_t| = 4! 3! 1!$$

Notons que  $R_{\pi t} = \pi R_t \pi^{-1}$  et  $C_{\pi t} = \pi C_t \pi^{-1}$ .

**Définition 2.3.13.** *Définissons une relation d'équivalence  $\sim$  sur l'ensemble des  $\lambda$ -tableaux par  $t_1 \sim t_2$  si et seulement si  $\pi t_1 = t_2$  pour un certain  $\pi \in R_{t_1}$ . Le **tabloïde**  $\{t\}$  contenant  $t$  est la classe d'équivalence de  $t$  sous cette relation d'équivalence.*

Il est préférable de se représenter un tabloïde comme un tableau aux lignes non-ordonnées. Dans les exemples qui suivront, nous allons dénoter  $\{t\}$  en traçant des lignes entre les lignes de  $t$ . Ainsi,

$$\begin{array}{c} \overline{3\ 4\ 5} \\ \underline{1\ 2} \end{array} \quad \begin{array}{c} \overline{2\ 4\ 5} \\ \underline{1\ 3} \end{array} \quad \begin{array}{c} \overline{1\ 4\ 5} \\ \underline{2\ 3} \end{array} \quad \begin{array}{c} \overline{2\ 3\ 5} \\ \underline{1\ 4} \end{array} \quad \begin{array}{c} \overline{1\ 3\ 5} \\ \underline{2\ 4} \end{array} \quad \begin{array}{c} \overline{1\ 2\ 5} \\ \underline{3\ 4} \end{array} \quad \begin{array}{c} \overline{2\ 3\ 4} \\ \underline{1\ 5} \end{array} \quad \begin{array}{c} \overline{1\ 3\ 4} \\ \underline{2\ 5} \end{array} \quad \begin{array}{c} \overline{1\ 2\ 4} \\ \underline{3\ 5} \end{array} \quad \begin{array}{c} \overline{1\ 2\ 3} \\ \underline{4\ 5} \end{array}$$

sont les différents (3, 2)-tabloïdes, et

$$\frac{\overline{132}}{54} = \frac{\overline{123}}{45}.$$

$S_n$  agit sur l'ensemble des  $\lambda$ -tabloïdes par  $\pi\{t\} = \{\pi t\}$ . Cette action est bien définie, puisque  $\{t_1\} = \{t_2\}$  implique  $t_2 = \sigma t_1$  pour une certaine permutation  $\sigma \in R_{t_1}$ . Alors  $\pi \sigma \pi^{-1} \in \pi R_{t_1} \pi^{-1} = R_{\pi t_1}$ , et donc

$$\pi\{t_1\} = \{\pi t_1\} = \{(\pi \sigma \pi^{-1}) \pi t_1\} = \{\pi \sigma t_1\} = \{\pi t_2\} = \pi\{t_2\}.$$

### 2.3.3 Modules de Specht

**Définition 2.3.14.** À chaque partition  $\mu$  de  $n$  correspond un sous-groupe de Young  $S_\mu$  de  $S_n$  défini par

$$S_\mu = S_{\{1, 2, \dots, \mu_1\}} \times S_{\{\mu_1+1, \dots, \mu_1+\mu_2\}} \times S_{\{\mu_1+\mu_2+1, \dots, \mu_1+\mu_2+\mu_3\}} \times \dots$$

L'étude des représentations de  $S_n$  débute par l'étude des modules  $M^\lambda$  définis à l'exemple 2.3.4. On peut vérifier que l'action de  $\pi \in S_n$  sur les éléments de base de  $M^\lambda$  équivaut à une permutation des classes résiduelles du sous-groupe de Young  $S_\lambda$  dans  $S_n$  et c'est pour cette raison que l'on dit, dans un langage plus technique, que  $M^\lambda$  correspond au module induit  $\mathbb{C}S_n \otimes_{\mathbb{C}S_\lambda} 1_{S_\lambda}$  (où  $1_{S_\lambda}$  est le module trivial de  $S_\lambda$ ).

Le **module de Specht**  $S^\lambda$  correspond à un sous-module irréductible de  $M^\lambda$ . Nous montrerons dans cette section qu'en faisant varier  $\lambda$  sur l'ensemble des partitions de  $n$ , les différents modules de Specht fournissent la totalité des représentations irréductibles de  $S_n$ .

**Définition 2.3.15.** Soit  $t$  un  $\lambda$ -tableau et soit l'opérateur

$$\kappa_t = \sum_{\pi \in C_t} (\text{sgn } \pi) \pi \in \mathbb{C}S_n.$$

Le **polytabloïde**  $e_t$  associé au tableau  $t$  est donné par

$$e_t = \kappa_t \{t\}.$$

Le **module de Specht**  $S^\lambda$  correspond au sous-module de  $M^\lambda$  engendré par les polytabloïdes.

Remarquons qu'un polytabloïde dépend du tableau  $t$  et non seulement du tabloïde  $\{t\}$ .

**Exemple.**

$$\text{Si } t = \begin{array}{cc} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{array} 1 \text{ alors } \kappa_t = (1 - (23))(1 - (45)) .$$

(où 1 dénote l'identité). Aussi

$$e_t = \frac{\overline{251}}{\overline{34}} - \frac{\overline{351}}{\overline{24}} - \frac{\overline{241}}{\overline{35}} + \frac{\overline{341}}{\overline{25}} .$$

Comme nous l'avons déjà mentionné,  $C_{\pi t} = \pi C_t \pi^{-1}$ , ce qui peut encore s'écrire  $C_{\pi t} \pi = \pi C_t$ . Par conséquent,  $\kappa_{\pi t} \pi = \pi \kappa_t$  et donc  $\pi e_t = e_{\pi t}$ . Nous en déduisons que le module de Specht  $S^\lambda$  est engendré par l'action de  $S_n$  sur n'importe quel polytabloïde ; c'est-à-dire

$$S^\lambda = S_n e_t, \quad \forall \lambda\text{-tableau } t .$$

Nous allons maintenant utiliser le lemme combinatoire 2.3.11 afin de démontrer le résultat suivant.

**Lemme 2.3.16.** *Soit  $\lambda$  et  $\mu$  deux partitions de  $n$ . Supposons que  $t$  est un  $\lambda$ -tableau,  $t^*$  un  $\mu$ -tableau, et que  $\kappa_t \{t^*\} \neq 0$ . Alors  $\lambda \supseteq \mu$ , et si  $\lambda = \mu$  alors  $\kappa_t \{t^*\} = \pm \kappa_t \{t\}$  ( $= \pm e_t$ ).*

**Preuve.** Soit  $a$  et  $b$  deux nombres dans la même ligne de  $t^*$ . Alors

$$(1 - (a b)) \{t^*\} = \{t^*\} - \{(a b) t^*\} = 0 .$$

$a$  et  $b$  ne peuvent pas appartenir à la même colonne de  $t$ , sinon nous pourrions choisir des représentants  $\sigma_1, \dots, \sigma_k$  pour les classes résiduelles du sous-groupe de  $C_t$  composé de 1 et  $(a b)$  et obtenir

$$\kappa_t = \left( \sum_{i=1}^k (\text{sgn } \sigma_i) \sigma_i \right) (1 - (a b)) .$$

Il s'en suivrait que  $\kappa_t \{t^*\} = 0$ , ce qui contredirait notre hypothèse. Nous avons donc montré que pour tout  $i$ , les nombres de la  $i$ -ème ligne de  $t^*$  appartiennent à des colonnes différentes de  $t$  et, par le lemme 2.3.11, nous obtenons que  $\lambda \supseteq \mu$ . De plus, si  $\lambda = \mu$ , alors  $\{t^*\}$  est un des tabloïdes dans  $\kappa_t \{t\}$ . Dans ce cas,  $\{t^*\} = \pi \{t\}$  pour une certaine permutation  $\pi \in C_t$ , et  $\kappa_t \{t^*\} = \kappa_t \pi \{t\} = \pm \kappa_t \{t\}$ .  $\square$

**Corollaire 2.3.17.** *Si  $u$  est un élément de  $M^\mu$  et  $t$  est un  $\mu$ -tableau, alors  $\kappa_t u$  est un multiple de  $e_t$ .*

**Preuve.**  $u$  est une combinaison linéaire de  $\mu$ -tabloïdes  $\{t^*\}$  et  $\kappa_t \{t^*\}$  est un multiple de  $e_t$  par le lemme 2.3.16.  $\square$

À présent, soit  $\langle , \rangle$  l'unique forme bilinéaire sur  $M^\mu$  telle que

$$\langle \{t_1\}, \{t_2\} \rangle = 1 \text{ si } \{t_1\} = \{t_2\}, \quad 0 \text{ si } \{t_1\} \neq \{t_2\} .$$

La forme bilinéaire  $\langle , \rangle$  est symétrique,  $S_n$ -invariante, non-singulière et clairement définie positive.

Nous aurons besoin de l'astuce suivante pour démontrer le prochain théorème : soit  $u, v \in M^\mu$ ,

$$\begin{aligned} \langle \kappa_t u, v \rangle &= \sum_{\pi \in C_t} \langle (\text{sgn } \pi) \pi u, v \rangle \\ &= \sum_{\pi \in C_t} \langle u, (\text{sgn } \pi) \pi^{-1} v \rangle \\ &\quad (\text{puisque } \langle , \rangle \text{ est } S_n\text{-invariante}) \\ &= \sum_{\pi \in C_t} \langle u, (\text{sgn } \pi) \pi v \rangle \\ &= \langle u, \kappa_t v \rangle \end{aligned}$$

**Théorème 2.3.18.** *Si  $U$  est un sous-module  $M^\mu$ , alors soit  $U \supseteq S^\mu$  ou  $U \subseteq S^{\mu \perp}$ .*

**Preuve.** Supposons que  $u \in U$  et  $t$  est un  $\mu$ -tableau. Alors par le corollaire 2.3.17,  $\kappa_t u$  est un multiple de  $e_t$ . Si nous pouvons choisir  $u$  et  $t$  de telle sorte que ce multiple soit non-nul, alors  $e_t \in U$ . Puisque  $S^\mu$  est engendré par  $e_t$ , nous avons  $U \supseteq S^\mu$ . Si pour tout  $u$  et  $t$ ,  $\kappa_t u = 0$ , alors pour tout  $u$  et  $t$

$$0 = \langle \kappa_t u, \{t\} \rangle = \langle u, \kappa_t \{t\} \rangle = \langle u, e_t \rangle ;$$

c'est-à-dire,  $U \subseteq S^{\mu \perp}$ . □

**Théorème 2.3.19.** *Les modules de Specht donnent toutes les représentations irréductibles de  $S_n$ .*

**Preuve.** Par le théorème 2.3.18, tout sous-module d'un module de Specht  $S^\mu$  est soit 0 soit  $S^\mu$  lui-même, ce qui démontre l'irréductibilité de  $S^\mu$ . Puisque les modules de Specht sont en correspondance biunivoque avec les partitions de  $S_n$ , le théorème découle alors de la proposition 2.3.3. □

Le lemme suivant et son corollaire prouvent le théorème 2.3.22, lequel constitue un résultat clé permettant d'élucider partiellement la composition des modules  $M^\lambda$  comme somme directe de modules de Specht.

**Lemme 2.3.20.** *Si  $\psi$  est un homomorphisme de  $\mathbb{C}S_n$ -modules de  $M^\lambda$  vers  $M^\mu$  et  $S^\lambda \not\subseteq \text{Ker } \psi$ , alors  $\lambda \triangleright \mu$ . Si  $\lambda = \mu$ , la restriction de  $\psi$  à  $S^\lambda$  est un multiple de l'identité.*

**Preuve.** Soit  $t$  un  $\lambda$ -tableau. Puisque  $e_t \notin \text{Ker } \psi$ ,

$$\begin{aligned} 0 \neq \psi(e_t) &= \psi(\kappa_t \{t\}) = \kappa_t \psi(\{t\}) \\ &= \kappa_t (\text{une combinaison linéaire de } \mu\text{-tabloïdes}) \end{aligned}$$

Par le lemme 2.3.16,  $\lambda \supseteq \mu$ , et si  $\lambda = \mu$ , alors  $\psi(e_t)$  est un multiple de  $e_t$ .  $\square$

**Corollaire 2.3.21.** *Si  $\psi$  est un élément non-nul de  $\text{Hom}_{\mathbb{C}S_n}(S^\lambda, M^\mu)$ , alors  $\lambda \supseteq \mu$ . Si  $\lambda = \mu$ , alors  $\psi$  est un multiple de l'identité.*

**Preuve.** Puisque  $M^\lambda = S^\lambda \oplus S^{\lambda^\perp}$ , tout homomorphisme défini sur  $S^\lambda$  peut être étendu à un homomorphisme défini sur  $M^\lambda$  en le posant nul sur  $S^{\lambda^\perp}$ . Il suffit alors d'appliquer le lemme 2.3.20.  $\square$

Par conséquent, on obtient immédiatement le théorème suivant :

**Théorème 2.3.22.** *Les sous-modules irréductibles de  $M^\mu$  sont  $S^\mu$  (une seule fois) et certains modules de Specht parmi  $\{S^\lambda \mid \lambda \supseteq \mu\}$  (possiblement avec répétitions).*

$S^\mu$  n'est effectivement compris qu'une seule fois dans  $M^\mu$  puisque par le lemme 2.2.13, la multiplicité de  $S^\mu$  dans  $M^\mu$  est donnée par  $\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathbb{C}S_n}(S^\mu, M^\mu)$  qui est 1 par le corollaire 2.3.21.

**Exemple 2.3.23.** *Décomposons le  $\mathbb{C}S_4$ -module  $M^{(3,1)}$  en une somme directe de modules de Specht. D'après le théorème 2.3.22, nous savons que  $M^{(3,1)}$  contient  $S^{(3,1)}$  une fois. Afin de déterminer la dimension de ce module irréductible, notons que  $S^{(3,1)}$  est engendré par les polytabloïdes  $e_t$  où  $t$  est un  $(3,1)$ -tableau. Soit  $t_1 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array}$ , alors  $\kappa_{t_1} = e - (14)$  et  $e_{t_1} = \kappa_{t_1}\{t_1\} = \frac{123}{4} - \frac{234}{1}$ .*

*Tout autre polytabloïde est nécessairement identique (à un signe près) à un des suivants :*

$$e_{t_2} = \frac{134}{2} - \frac{234}{1} \quad \text{pour } t_2 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}$$

$$e_{t_3} = \frac{124}{3} - \frac{234}{1} \quad \text{pour } t_3 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}$$

$$e_{t_4} = \frac{124}{3} - \frac{134}{2} \quad \text{pour } t_4 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 4 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}$$

$$e_{t_5} = \frac{123}{4} - \frac{134}{2} \quad \text{pour } t_5 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 3 \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array}$$

$$e_{t_6} = \frac{123}{4} - \frac{124}{3} \quad \text{pour } t_6 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 1 & 2 \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array}$$

*On remarque que les trois polytabloïdes linéairement indépendants  $e_{t_2}$ ,  $e_{t_4}$  et  $e_{t_6}$  forment une base de  $S^{(3,1)}$  :*

$$e_{t_2} + e_{t_4} + e_{t_6} = e_{t_1}$$

$$e_{t_2} + e_{t_4} = e_{t_3}$$

$$e_{t_4} + e_{t_6} = e_{t_5}$$

Le module de Specht  $S^{(3,1)}$  est donc de dimension 3. À présent, comme  $M^{(3,1)}$  est de dimension  $\frac{4!}{3!1!} = 4$ , le théorème de Maschke nous indique qu'il reste un module irréductible de dimension 1 à trouver. Or, par le théorème 2.3.22, nous savons que ce module ne peut être que

$$\begin{aligned} S^{(4)} &= \left\{ w \overline{1234} \mid w \in \mathbb{C} \right\} \\ &\cong \left\{ w \left( \frac{\overline{123}}{4} + \frac{\overline{124}}{3} + \frac{\overline{134}}{2} + \frac{\overline{234}}{1} \right) \mid w \in \mathbb{C} \right\} \end{aligned}$$

(correspondant à la représentation triviale de  $S_4$ ), puisque seul  $(4) \supseteq (3,1)$ . On obtient donc la **décomposition de Specht** de  $M^{(3,1)}$  (c'est-à-dire la décomposition de  $M^{(3,1)}$  en modules de Specht) suivante :

$$M^{(3,1)} \cong S^{(4)} \oplus S^{(3,1)}.$$

De façon plus générale, nous avons

$$M^{(n-1,1)} \cong S^{(n)} \oplus S^{(n-1,1)}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

En effet, il est possible de montrer que le module de Specht

$$\begin{aligned} S^{(n-1,1)} &= \mathbb{C}S_n(\bar{2} - \bar{1}) \\ &= \left\{ \sum_i a_i \bar{i} \mid a_i \in \mathbb{C}, a_1 + \dots + a_n = 0 \right\} \end{aligned}$$

(où nous avons emprunté la notation initiale de l'exemple 2.3.4) est de dimension  $n - 1$ . Comme  $M^{(n-1,1)}$  est de dimension  $n$ , nous n'avons qu'à appliquer le théorème 2.3.22 pour obtenir la décomposition recherchée.

**Exemple 2.3.24.** Examinons à présent le  $\mathbb{C}S_5$ -module  $M^{(3,2)}$ . Notons d'abord qu'un  $(3,2)$ -tabloïde est entièrement déterminé par la paire non-ordonnée d'entiers  $\bar{i}\bar{j}$  correspondant à sa seconde ligne. Si l'on nomme respectivement  $t_1, t_2, t_3, t_4$  et  $t_5$  les cinq  $(3,2)$ -tableaux

$$\begin{array}{cc} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & \end{array}, \quad \begin{array}{cc} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & \end{array}, \quad \begin{array}{cc} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & \end{array}, \quad \begin{array}{cc} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & \end{array}, \quad \begin{array}{cc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & \end{array}$$

et si l'on définit sur l'ensemble des 10 tabloïdes  $\bar{i}\bar{j}$  possibles l'ordre suivant :

$$\bar{12} < \bar{13} < \bar{23} < \bar{14} < \bar{24} < \bar{34} < \bar{15} < \bar{25} < \bar{35} < \bar{45},$$

on constate que les plus grands tabloïdes impliqués dans les polytabloïdes  $e_{t_1}, \dots, e_{t_5}$  sont respectivement  $\bar{24}, \bar{34}, \bar{25}, \bar{35}, \bar{45}$  (correspondant aux tabloïdes  $\{t_1\}, \dots, \{t_5\}$ ). Puisque ces tabloïdes sont tous différents, les polytabloïdes  $e_{t_1}, \dots, e_{t_5}$  sont linéairement indépendants. Montrons maintenant qu'ils forment une base de  $S^{(3,2)}$ .

Définissons  $\psi_0 \in \text{Hom}_{\mathbb{C}S_5}(M^{(3,2)}, M^{(5)})$  et  $\psi_1 \in \text{Hom}_{\mathbb{C}S_5}(M^{(3,2)}, M^{(4,1)})$  par

$$\begin{aligned} \psi_0 : \frac{\overline{abc}}{\overline{de}} &\rightarrow \overline{abcde} \\ \psi_1 : \frac{\overline{abc}}{\overline{de}} &\rightarrow \frac{\overline{abce}}{\overline{d}} + \frac{\overline{abcd}}{\overline{e}} \quad (\text{c'est-à-dire } \overline{de} \rightarrow \overline{d} + \overline{e}) \end{aligned}$$

Si  $t = \begin{smallmatrix} a & b & c \\ d & e & \end{smallmatrix}$ , alors  $\kappa_t = e - (ad) - (be) + (ad)(be)$  et donc

$$e_t = \kappa_t\{t\} = \frac{\overline{abc}}{\overline{de}} - \frac{\overline{bcd}}{\overline{ae}} - \frac{\overline{ace}}{\overline{bd}} + \frac{\overline{cde}}{\overline{ab}}.$$

Nous laissons le soin au lecteur de s'assurer que  $e_t \in \text{Ker}\psi_0 \cap \text{Ker}\psi_1$  pour tout  $(3,2)$ -tableau  $t$ , ce qui implique  $\mathcal{S}^{(3,2)} \subseteq \text{Ker}\psi_0 \cap \text{Ker}\psi_1$ . Mais nous désirons prouver qu'il y a en fait égalité.

Écrivons  $\mathcal{S}^{(3,1),(3,2)}$  pour désigner l'espace engendré par les éléments de la forme  $\overline{ij} - \overline{ik}$ . Nous constatons alors que  $\mathcal{S}^{(3,1),(3,2)} \subseteq \text{Ker}\psi_0$  et que  $\psi_1$  applique  $\mathcal{S}^{(3,1),(3,2)}$  sur  $\mathcal{S}^{(4,1)}$  (puisque  $\psi_1 : \overline{ij} - \overline{ik} \rightarrow \overline{i+j} - \overline{i+k} = \overline{j} - \overline{k}$ ). Nous avons donc la série suivante pour  $M^{(3,2)}$  :

$$0 \subseteq \mathcal{S}^{(3,2)} \subseteq \mathcal{S}^{(3,1),(3,2)} \cap \text{Ker}\psi_1 \subseteq \mathcal{S}^{(3,1),(3,2)} \subseteq \text{Ker}\psi_0 \subseteq M^{(3,2)}.$$

Or,

$$M^{(3,2)}/\text{Ker}\psi_0 \cong \mathcal{S}^{(5)}$$

et comme la restriction de l'application  $\psi_1$  de  $\mathcal{S}^{(3,1),(3,2)}$  vers  $\mathcal{S}^{(4,1)}$  est surjective<sup>7</sup> :

$$\mathcal{S}^{(3,1),(3,2)}/(\mathcal{S}^{(3,1),(3,2)} \cap \text{Ker}\psi_1) \cong \mathcal{S}^{(4,1)}.$$

Par conséquent, puisque  $\dim_{\mathbb{C}}M^{(3,2)} = 10$ ,  $\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{S}^{(5)} = 1$ ,  $\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{S}^{(4,1)} = 4$  et  $\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{S}^{(3,2)} \geq 5$ , on a forcément  $\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{S}^{(3,2)} = 5$ , ce qui prouve que  $e_{t_1}, \dots, e_{t_5}$  est bien une base de  $\mathcal{S}^{(3,2)}$ . Nous pouvons donc écrire la décomposition de Specht

$$M^{(3,2)} \cong \mathcal{S}^{(5)} \oplus \mathcal{S}^{(4,1)} \oplus \mathcal{S}^{(3,2)}.$$

Le caractère laborieux de l'exemple précédent rend évidente la nécessité de développer une méthode plus simple et plus efficace afin de trouver la décomposition de Specht des modules  $M^\lambda$ . Nous verrons plus loin que cette méthode est donnée par la règle de Young (voir théorème 2.3.42). La section suivante présente un résultat qui s'avérera utile dans la démonstration de cette règle. (Nous désirons avertir le lecteur que les développements des deux prochaines sections sont relativement techniques et que celui-ci peut, s'il le désire, passer directement à la section 2.3.6 qui contient le résultat mathématique principal dont nous nous servirons dans la suite de ce mémoire.)

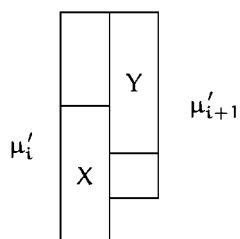
### 2.3.4 Les éléments de Garnir

Soit  $t$  un  $\mu$ -tableau. Nous désirons obtenir les éléments  $\mathcal{G}$  de l'anneau de groupe  $\mathbb{C}\mathcal{S}_n$  qui annihilent le polytabloïde  $e_t$  (c'est-à-dire tels que  $\mathcal{G}e_t = 0$ ).

<sup>7</sup>En effet, à tout polytabloïde  $\overline{j} - \overline{k}$  dans  $\mathcal{S}^{(4,1)}$  correspond un élément  $\overline{ij} - \overline{ik}$  dans  $\mathcal{S}^{(3,1),(3,2)}$



Soit  $X$  un sous-ensemble de la  $i^e$  colonne de  $t$ , et  $Y$  un sous-ensemble de la  $(i + 1)^e$  colonne de  $t$ .



Soit  $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ , des représentants de chacune des classes résiduelles de  $S_X \times S_Y$  dans  $S_{X \cup Y}$ , et soit

$$\mathcal{G}_{X,Y} = \sum_{j=1}^k (\text{sgn} \sigma_j) \sigma_j .$$

$\mathcal{G}_{X,Y}$  est appelé un **élément de Garnir**. Avant d'énoncer le théorème suivant, rappelons que  $\mu'$  est la partition de  $n$  conjuguée à  $\mu$  (voir définition 2.3.8).

**Théorème 2.3.25.** *Si  $|X \cup Y| > \mu'_i$ , alors  $\mathcal{G}_{X,Y} e_t = 0$ .*

**Preuve.** Soit

$$S_X^- S_Y^- = \sum_{\sigma \in S_X \times S_Y} (\text{sgn} \sigma) \sigma$$

$$S_{X \cup Y}^- = \sum_{\sigma \in S_{X \cup Y}} (\text{sgn} \sigma) \sigma .$$

Puisque  $|X \cup Y| > \mu'_i$ , pour toute permutation  $\tau$  dans le stabilisateur-colonne de  $t$ , il existe une paire de nombre dans  $X \cup Y$  qui sont dans la même ligne de  $\tau t$ . Par conséquent,  $S_{X \cup Y}^- \{\tau t\} = 0$  et donc  $S_{X \cup Y}^- \kappa_t \{t\} = 0$ .

En remarquant à présent que  $S_X^- S_Y^-$  est un facteur de  $\kappa_t$  et que  $S_{X \cup Y}^- = \mathcal{G}_{X,Y} S_X^- S_Y^-$ , on en conclut que  $0 = S_{X \cup Y}^- \kappa_t \{t\} = |X|! |Y|! \mathcal{G}_{X,Y} \kappa_t \{t\}$ .

Donc  $\mathcal{G}_{X,Y} e_t = 0$ . □

### 2.3.5 La règle de Young

On sait par le lemme 2.2.13 que  $(\mathcal{S}^\lambda : M^\mu)$ , la multiplicité de  $\mathcal{S}^\lambda$  dans la décomposition de Specht de  $M^\mu$ , est égale à  $\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathbb{C}S_n}(\mathcal{S}^\lambda, M^\mu)$ . En trouvant une base de  $\text{Hom}_{\mathbb{C}S_n}(\mathcal{S}^\lambda, M^\mu)$ , il sera donc possible de calculer  $(\mathcal{S}^\lambda : M^\mu)$  et de donner une description explicite de la décomposition de Specht de  $M^\mu$ .

À cette fin, il sera utile de construire une nouvelle copie du  $\mathbb{C}S_n$ -module  $M^\mu$ . Ceci requiert l'introduction de tableaux  $T$  dont les coefficients peuvent se répéter. Plus précisément,

**Définition 2.3.26.** Soit  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots)$  une partition de  $n$ . Un **tableau T de type  $\mu$**  est un tableau dans lequel le nombre  $i$  apparaît  $\mu_i$  fois pour tout  $i$ .

Par exemple,  $\begin{array}{cccc} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & & & \end{array}$  est un  $(4, 1)$ -tableau de type  $(3, 2)$ .

**Définition 2.3.27.**

$$\mathcal{T}(\lambda, \mu) = \left\{ T \mid T \text{ est un } \lambda\text{-tableau de type } \mu \right\}.$$

Pour le restant de cette sous-section  $t$  désignera un  $\lambda$ -tableau de type  $(1^n)$  (c'est-à-dire un  $\lambda$ -tableau au sens de la définition 2.3.9).

Si  $T \in \mathcal{T}(\lambda, \mu)$ , alors définissons  $T(i)$  comme étant l'élément de  $T$  apparaissant à la même position que  $i$  dans  $t$ . Considérons alors la représentation suivante de  $S_n$  sur  $\mathcal{T}(\lambda, \mu)$  :

$$\pi T(i) = T(\pi^{-1}(i)) \quad (1 \leq i \leq n, T \in \mathcal{T}(\lambda, \mu), \pi \in S_n).$$

L'action de  $\pi$  consiste alors en une permutation de sites, et nous sommes forcés de prendre  $\pi^{-1}$  dans sa définition afin d'avoir une action de  $S_n$  bien définie ; c'est-à-dire, afin d'avoir  $(\sigma\pi)T = \sigma(\pi T)$ ,  $\forall \sigma, \pi \in S_n$ .

**Exemple 2.3.28.** Si  $t = \begin{array}{ccccc} 1 & 3 & 4 & 5 & \\ 2 & & & & \end{array}$  et  $T = \begin{array}{cccc} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & & & \end{array}$  alors

$$(12)T = \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & & & \end{array} \quad \text{et} \quad (132)T = \begin{array}{cccc} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & & & \end{array}.$$

On vérifie sans peine que

**Proposition 2.3.29.**  $\kappa_t T = 0$  si et seulement si une colonne de  $T$  contient deux nombres identiques.

Puisque la représentation de  $S_n$  sur  $\mathcal{T}(\lambda, \mu)$  est transitive<sup>b</sup> et que le stabilisateur d'un élément dans  $\mathcal{T}(\lambda, \mu)$  est un sous-groupe de Young  $S_\mu$ , on peut redéfinir  $M^\mu$  comme l'espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$  engendré par les tableaux  $T \in \mathcal{T}(\lambda, \mu)$ . La raison pour laquelle nous avons défini  $M^\mu$  de tel sorte qu'il dépende à la fois de  $\lambda$  et de  $\mu$  apparaîtra bientôt évidente.

**Définition 2.3.30.** Si  $T_1$  et  $T_2$  appartiennent à  $\mathcal{T}(\lambda, \mu)$ , on dit que  $T_1$  et  $T_2$  sont **ligne-équivalents (colonne-équivalents)** si  $T_2 = \pi T_1$  pour une certaine permutation  $\pi$  dans le stabilisateur-ligne (stabilisateur-colonne) du  $\lambda$ -tableau  $t$ .

<sup>b</sup>définition : Soit  $G$  un groupe qui agit sur un ensemble  $A$ . L'action de  $G$  sur  $A$  est dite *transitive* si pour toute paire d'éléments  $a, b \in A$  il existe un certain  $g \in G$  tel que  $a = g \cdot b$

**Définition 2.3.31.** Soit  $T \in \mathcal{T}(\lambda, \mu)$  et  $S \in \mathbb{CS}_n$ . Définissons l'application

$$\theta_T : S\{t\} \rightarrow S \sum_i T_i,$$

où la somme porte sur les éléments  $T_i$  ligne-équivalents à  $T$ .

Il est aisé de s'assurer que  $\theta_T \in \text{Hom}_{\mathbb{CS}_n}(M^\lambda, M^\mu)$ .

**Exemple 2.3.32.** Si  $t = \begin{smallmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 \end{smallmatrix}$  et  $T = \begin{smallmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 \end{smallmatrix}$ , alors

$$\begin{aligned} \theta_T(\{t\}) &= \begin{smallmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \\ \theta_T(\{(123)\{t\}\}) &= \begin{smallmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 \end{smallmatrix}. \end{aligned}$$

Si nous définissons  $\hat{\theta}_T$  par

$$\hat{\theta}_T = \text{la restriction de } \theta_T \text{ à } S^\lambda,$$

alors 2.3.29 suggère que  $\hat{\theta}_T$  est parfois 0 puisque  $\hat{\theta}_t(e_t) = \kappa_t \hat{\theta}_T(\{t\})$ . Afin d'éliminer de tels éléments triviaux de  $\text{Hom}_{\mathbb{CS}_n}(S^\lambda, M^\mu)$  nous énonçons la définition suivante :

**Définition 2.3.33.** Un tableau  $T$  est dit **semi-standard** si les nombres sont non-décroissants de gauche à droite le long des lignes de  $T$  et strictement croissants du haut vers le bas des colonnes de  $T$ . L'ensemble des tableaux semi-standards dans  $\mathcal{T}(\lambda, \mu)$  est noté  $\mathcal{T}_0(\lambda, \mu)$ .

**Exemple 2.3.34.** Si  $\lambda = (4, 1)$  et  $\mu = (2, 2, 1)$ , alors  $\mathcal{T}_0(\lambda, \mu)$  est constitué des deux tableaux  $\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 \end{smallmatrix}$  et  $\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 \end{smallmatrix}$ .

Nous allons à présent démontrer que les homomorphismes  $\hat{\theta}_T$  avec  $T \in \mathcal{T}_0(\lambda, \mu)$  forment une base de  $\text{Hom}_{\mathbb{CS}_n}(S^\lambda, M^\mu)$ . Ces homomorphismes seront appelés **homomorphismes semi-standards**. Afin de prouver qu'ils sont linéairement indépendants, il sera utile de définir une relation de dominance sur les classes de colonne-équivalence  $[T] \subset \mathcal{T}(\lambda, \mu)$ .

**Définition 2.3.35.** On écrit  $[T_1] \triangleleft [T_2]$  si  $[T_2]$  peut être obtenu de  $[T_1]$  en échangeant  $w$  et  $x$ , où  $w$  appartient à une colonne plus à droite de  $T_1$  que  $x$  et  $w < x$ .

**Exemple 2.3.36.**

$$\left| \begin{smallmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix} \right| \triangleleft \left| \begin{smallmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix} \right| \triangleleft \left| \begin{smallmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{smallmatrix} \right| \triangleleft \left| \begin{smallmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{smallmatrix} \right| \triangleleft \left| \begin{smallmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{smallmatrix} \right| \triangleleft \left| \begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{smallmatrix} \right|$$

**Proposition 2.3.37.** Si  $T$  est semi-standard et  $T'$  est ligne-équivalent à  $T$ , alors  $[T'] \triangleleft [T]$ , à moins que  $T' = T$ .

**Lemme 2.3.38.**  $\{\hat{\theta}_T \mid T \in \mathcal{T}_0(\lambda, \mu)\}$  est un sous-ensemble linéairement indépendant de  $\text{Hom}_{\mathbb{C}S_n}(\mathcal{S}^\lambda, \mathcal{M}^\mu)$ .

**Preuve.** Soit  $\sum a_T \theta_T$  une combinaison linéaire d'homomorphismes avec  $T \in \mathcal{T}_0(\lambda, \mu)$  où les coefficients  $a_T$  ne sont pas tous nuls. Choisissons  $T_1$  tel que  $a_{T_1} \neq 0$ , mais  $a_T = 0$  si  $[T_1] \triangleleft [T]$ . Alors par la définition de  $\theta_T$  et 2.3.37

$$\left(\sum a_T \theta_T\right)\{t\} = a_{T_1} T_1 + \left(\text{une combinaison linéaire de tableaux}_{T_2 \text{ satisfaisant } [T_1] \not\triangleleft [T_2]}\right).$$

Puisque le stabilisateur-colonne de  $t$  préserve les classes de colonne-équivalence et que  $\kappa_t T_1 \neq 0$ , ceci montre que

$$\left(\sum a_T \theta_T\right)(e_t) = \left(\sum a_T \theta_T\right)(\kappa_t \{t\}) = \kappa_t \left(\sum a_T \theta_T\right)(\{t\}) \neq 0.$$

Par conséquent,  $\sum a_T \hat{\theta}_T$  est un élément non-nul de  $\text{Hom}_{\mathbb{C}S_n}(\mathcal{S}^\lambda, \mathcal{M}^\mu)$ .  $\square$

**Lemme 2.3.39.** Supposons que  $\hat{\theta}$  est un élément non-nul de  $\text{Hom}_{\mathbb{C}S_n}(\mathcal{S}^\lambda, \mathcal{M}^\mu)$  et écrivons

$$\hat{\theta}(\kappa_t \{t\}) = \sum c_T T \quad (c_T \in \mathbb{C}, T \in \mathcal{T}(\lambda, \mu))$$

où  $t$  est un  $\lambda$ -tableau. Alors

- (i)  $c_{T^*} = 0$  pour tout tableau  $T^*$  contenant des éléments répétés dans une même colonne,
- (ii)  $c_{T_1} \neq 0$  pour un certain tableau semi-standard  $T_1$ .

**Preuve.** Partie (i): Supposons que  $i \neq j$  sont dans la même colonne de  $t$  et que  $T^*(i) = T^*(j)$ . Puisque  $(ij)\kappa_t = -\kappa_t$ ,

$$(ij) \sum c_T T = (ij) \hat{\theta}(\kappa_t \{t\}) = - \sum c_T T.$$

Comme  $(ij)T^* = T^*$ , il s'ensuit que  $c_{T^*} = 0$ .

Partie (ii): Si  $\pi$  est un élément du stabilisateur-colonne de  $t$ , alors

$$(1 - (\text{sgn}\pi)\pi) \kappa_t \{t\} = 0.$$

Par conséquent,

$$\sum c_T T = \sum c_T (\text{sgn}\pi) \pi T,$$

et donc  $c_{T_1} = \pm c_{T_2}$  lorsque  $T_1$  et  $T_2$  sont colonne-équivalents.

Puisque  $\hat{\theta} \neq 0$ , nous pouvons choisir un tableau  $T_1$  tel que  $c_{T_1} \neq 0$  et  $c_T = 0$  si  $[T_1] \triangleleft [T]$ . Le paragraphe précédent et la partie (i) du lemme nous montrent que l'on peut supposer que les nombres sont strictement croissants du haut vers le bas des colonnes de  $T_1$ .

Nous aurons démontré le lemme si nous parvenons à débusquer une contradiction en supposant que pour un certain  $j$ ,  $a_1 < a_2 < \dots < a_r$  sont les éléments de la  $j^{\text{e}}$  colonne de  $T_1$ ,  $b_1 < b_2 < \dots < b_s$  les éléments de la  $(j+1)^{\text{e}}$  colonne de  $T_1$  et  $a_q > b_q$  pour un certain  $q$ .

Soit  $x_{ij}$  l'élément en position  $(i, j)$  du tableau  $t$  et soit  $\sum (\text{sgn} \sigma) \sigma$ , un élément de Garnir pour les ensembles  $\{x_{qj}, \dots, x_{rj}\}$  et  $\{x_{1,j+1}, \dots, x_{q,j+1}\}$ . Alors

$$\sum (\text{sgn} \sigma) \sigma \left( \sum c_T T \right) = \hat{\theta} \left( \sum (\text{sgn} \sigma) \sigma (\kappa_t \{t\}) \right) = 0.$$

Pour tout tableau  $T$ ,  $\left( \sum (\text{sgn} \sigma) \sigma \right) T$  est une combinaison linéaire de tableaux identiques à  $T$  sauf en positions  $(1, j+1), (2, j+1), \dots, (q, j+1), (q, j), \dots, (r, j)$ . Tous les tableaux impliqués dans  $\sum (\text{sgn} \sigma) \sigma (T_1)$  ont pour coefficients  $\pm c_T$ , et, puisque  $\sum (\text{sgn} \sigma) \sigma \left( \sum c_T T \right) = 0$ , il doit y avoir un tableau  $T \neq T_1$  avec  $c_T \neq 0$  tel que les éléments de  $T$  concordent avec ceux de  $T_1$  en toutes les positions sauf celles énoncées précédemment. Puisque  $b_1 < b_2 < \dots < b_q < a_q < \dots < a_r$ , nous devons avoir  $[T_1] \triangleleft [T]$ , ce qui contredit notre choix initial de  $T_1$ .

□

**Théorème 2.3.40.**  $\{\hat{\theta}_T \mid T \in \mathcal{T}_0(\lambda, \mu)\}$  forme une base de  $\text{Hom}_{\mathbb{C}S_n}(S^\lambda, M^\mu)$ .

**Preuve.** Supposons que  $\theta$  soit un élément non-nul de  $\text{Hom}_{\mathbb{C}S_n}(S^\lambda, M^\mu)$ . Par le lemme 2.3.39,

$$\theta(\kappa_t \{t\}) = \sum c_T T,$$

où  $c_T \neq 0$  pour un certain  $T_1 \in \mathcal{T}_0(\lambda, \mu)$ . Nous pouvons supposer que  $c_T = 0$  si  $T \in \mathcal{T}_0(\lambda, \mu)$  et  $[T_1] \triangleleft [T]$ . Alors par 2.3.37,  $(\theta - c_{T_1} \hat{\theta}_{T_1})(\kappa_t \{t\})$  est une combinaison linéaire de tableaux  $T_2$  avec  $[T_1] \not\triangleleft [T_2]$ . Par induction,  $\theta - c_{T_1} \hat{\theta}_{T_1}$  est une combinaison linéaire d'homomorphismes semi-standards, et la même chose est vrai de  $\theta$ . Le théorème découle alors du lemme 2.3.38. □

**Corollaire 2.3.41.**  $\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathbb{C}S_n}(S^\lambda, M_\mu)$  est égal au nombre de  $\lambda$ -tableaux semi-standards de type  $\mu$ .

**Théorème 2.3.42 (La règle de Young).** La multiplicité de  $S^\lambda$  dans la décomposition de Specht  $M^\mu$  est égale au nombre de  $\lambda$ -tableaux semi-standards de type  $\mu$ .

**Preuve.** Par le lemme 2.2.13,  $(S^\lambda : M^\mu) = \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathbb{C}S_n}(S^\lambda, M^\mu)$ . Mais, par le corollaire 2.3.41, ceci est égal au nombre de  $\lambda$ -tableaux semi-standards de type  $\mu$ . □

**Exemple 2.3.43.** Calculons la décomposition de Specht de  $M^{(3,2)}$ . Les tableaux semi-standards de type  $(3, 2)$  sont

$$11122 \quad \begin{array}{c} 1112 \\ 2 \end{array} \quad \begin{array}{c} 111 \\ 22 \end{array},$$

donc  $M^{(3,2)} = S^{(5)} \oplus S^{(4,1)} \oplus S^{(3,2)}$  (en accord avec le résultat de l'exemple 2.3.24).

**Notation :** Nous interpréterons les équations de la forme  $[3][2] = [5] + [4, 1] + [3, 2]$  comme signifiant que  $M^{(3,2)} = S^{(5)} \oplus S^{(4,1)} \oplus S^{(3,2)}$ . En général, si  $\lambda$  est une partition de  $n$ ,

$$[\lambda_1][\lambda_2][\lambda_3]\dots = \sum_{\mu} m_{\lambda\mu}[\mu]$$

signifiera que  $M^{\lambda}$  contient  $S^{\mu}$  avec multiplicité  $m_{\lambda\mu}$ .

**Exemple 2.3.44.** Les tableaux semi-standards de type  $(3, 2, 2)$  sont :

$$\begin{array}{ccccc} \begin{array}{c} 1112233 \\ 22 \\ 3 \end{array} & \begin{array}{c} 111223 \\ 3 \end{array} & \begin{array}{c} 111233 \\ 2 \end{array} & \begin{array}{c} 11122 \\ 33 \end{array} & \begin{array}{c} 11123 \\ 23 \end{array} \\ \begin{array}{c} 11133 \\ 22 \\ 3 \end{array} & \begin{array}{c} 11123 \\ 3 \end{array} & \begin{array}{c} 1112 \\ 233 \end{array} & \begin{array}{c} 1113 \\ 223 \end{array} & \begin{array}{c} 1112 \\ 23 \\ 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1113 \\ 22 \\ 3 \end{array} & \begin{array}{c} 111 \\ 223 \\ 3 \end{array} & \begin{array}{c} 111 \\ 22 \\ 33 \end{array} & & \end{array}$$

Par conséquent,

$$[3][2][2] = [7] + 2[6, 1] + 3[5, 2] + 2[4, 3] + [5, 1^2] + 2[4, 2, 1] + [3^2, 1] + [3, 2^2].$$

Notons que la règle de Young donne  $S^{\mu}$  comme facteur de  $M^{\lambda}$  avec multiplicité 1, et que les autres modules de Specht  $S^{\lambda}$  dans  $M^{\mu}$  satisfont  $\lambda \supseteq \mu$  en accord avec le théorème 2.3.22. Maintenant, nous pouvons utiliser la règle de Young afin d'exprimer un module de Specht donné  $[\mu]$  comme une combinaison linéaire de termes de la forme  $[\lambda_1][\lambda_2]\dots[\lambda_j]$ . La méthode requise pour réaliser cela est donnée par la *forme déterminantale* qui est explicitée à la section suivante.

### 2.3.6 La forme déterminantale

Comme nous l'avons vu à la section précédente, la règle de Young implique que pour une partition  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots)$  avec  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots$ ,

$$[\lambda_1][\lambda_2][\lambda_3]\dots = \sum_{\mu} m_{\lambda\mu}[\mu]$$

où la matrice  $m = (m_{\lambda\mu})$  est triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale et les autres éléments non-nuls sont des entiers. Il s'ensuit que

$$[\lambda] = \sum_{\mu} (m^{-1})_{\lambda\mu} [\mu_1][\mu_2][\mu_3]\dots$$

où  $m^{-1}$  est aussi triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale. Puisque le déterminant de  $m$  est 1, la règle de Cramer nous assure que les éléments de la matrice  $m^{-1}$  sont également des entiers. Ces

derniers peuvent être calculés directement à l'aide du théorème suivant que nous ne démontrerons pas<sup>9</sup> :

**Théorème 2.3.45 (La forme déterminantale).** *Si  $\lambda$  est une partition non-triviale de  $n$ , alors  $[\lambda] = \left| [\lambda_i - i + j] \right|$  où l'on définit  $[m] = 0$  si  $m < 0$ .*

Une façon simple d'écrire le déterminant pour  $[\lambda]$  est de disposer  $[ \lambda_1 ], [ \lambda_2 ] \dots$  en ordre le long de la diagonale et de laisser ensuite les nombres augmenter d'une unité en se déplaçant vers la droite d'un terme à l'autre dans chaque ligne. Il est important de bien faire la distinction entre  $[0]$  (qui se comporte l'identité pour la multiplication) et  $0$  (qui est l'élément absorbant).

**Exemple 2.3.46.**

$$\begin{vmatrix} [3] & [4] \\ [0] & [1] \end{vmatrix} = [3][1] - [4] = [3, 1] + [4] - [4] = [3, 1]$$

$$\begin{vmatrix} [3] & [4] \\ [1] & [2] \end{vmatrix} = [3][2] - [4][1] = [3, 2] + [4, 1] + [5] - [4, 1] - [5] = [3, 2]$$

où nous avons fait usage des décompositions de Specht de  $[n-1][1]$  et  $[3][2]$  calculées respectivement en 2.3.23 et 2.3.24. En guise de dernier exemple, la forme déterminantale pour  $[3, 2^2]$  nous donne

$$\begin{vmatrix} [3] & [4] & [5] \\ [1] & [2] & [3] \\ [0] & [1] & [2] \end{vmatrix} = [3][2][2] - [4][2][1] - [3][3][1] + [4][3] + [5][1][1] - [5][2].$$

À présent, souvenons-nous que nous avons calculé à l'exemple 2.3.44 la décomposition de Specht de  $[3][2][2]$  en utilisant la règle de Young. En appliquant la même procédure aux autres termes de l'expression précédente, le lecteur pourra s'assurer que le résultat est bien  $[3, 2^2]$ .

Il convient de souligner l'emploi inusité de l'opération de soustraction d'espaces vectoriels intervenant dans la forme déterminantale. Précisons à cet effet que l'expression  $[3, 1] + [4] - [4] = [3, 1]$  ne doit pas être considérée au même titre qu'une simple soustraction de nombres, mais plutôt comme un quotient de  $\mathbb{C}S_n$ -modules (dans le sens du *Second Théorème d'Isomorphisme de Modules*), c'est-à-dire

$$\left\{ [3, 1] + [4] - [4] = [3, 1] \right\} \equiv \left\{ (\mathcal{S}^{(3,1)} \oplus \mathcal{S}^{(4)}) / \mathcal{S}^{(4)} \cong \mathcal{S}^{(3,1)} \right\}.$$

<sup>9</sup>Pour une preuve de ce théorème, voir [15] p.74.

**Corollaire 2.3.47.**  $\dim S^\mu = n! \left| \frac{1}{(\lambda_i - i + j)!} \right|$  où  $\frac{1}{r!} = 0$  si  $r < 0$ .

**Preuve.**  $[\mu_1][\mu_2] \dots [\mu_k]$  est de dimension  $\frac{n!}{\mu_1! \mu_2! \dots \mu_k!}$ . □



## Chapitre 3

# Le spectre de la matrice $\mathbf{R}$

Nous avons à présent en notre possession tous les outils requis de la théorie des représentations du groupe symétrique pour aborder l'étude du spectre de la matrice  $\mathbf{R}$ . Dans ce chapitre, nous considérerons une généralisation  $\mathbf{R}_n(\alpha)$  de  $\mathbf{R}$  dont les éléments sont des puissances d'un paramètre  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ , et définie de telle sorte que  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_n(1/2)$ . Le spectre de  $\mathbf{R}_n(\alpha)$  est décrit dans la proposition suivante qui constitue le résultat principal du présent mémoire.

**Proposition.** Soit  $0 < \alpha < 1$  et considérons les matrices  $\mathbf{R}_n(\alpha)$  de dimension  $n! \times n!$  dont les éléments sont  $[\mathbf{R}_n(\alpha)]_{\sigma\rho} = \alpha^{\ell(\sigma\rho^{-1})}$  avec  $\sigma, \rho \in S_n$  et où  $\ell(\pi)$  dénote le nombre de cycles dans  $\pi \in S_n$ .

(a) Les valeurs propres de  $\mathbf{R}_n(\alpha)$  sont en correspondance biunivoque avec les partitions de  $n$  et la valeur propre  $\lambda_\mu$  correspondant à la partition  $\mu = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_l\}$  est égale à

$$\lambda_\mu = (-1)^{l(1-1)/2} \prod_{1 \leq i \leq l} \frac{\Gamma(\mu_i - i + 1 + \alpha)}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(i - \alpha)}{\Gamma(1 - \alpha)}$$

et est dégénérée au moins  $(\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{S}^\mu)^2$  fois où  $\mathcal{S}^\mu$  est le module de Specht associé à la partition  $\mu$ .

(b) Soit  $|\lambda_0| > |\lambda_1|$  les deux plus grandes valeurs propres de  $\mathbf{R}_n(\alpha)$  en valeur absolue. Alors, pour tout  $\alpha$ ,

$$\left| \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right| \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty.$$

Bien que les matrices  $\mathbf{R}_n(\alpha)$  soient issues à l'origine d'un problème de mécanique statistique, la preuve de la proposition n'en tient aucunement compte et repose entièrement sur les propriétés des représentations du groupe symétrique. Elle se déroule en trois étapes : (i) la formulation des valeurs propres de  $\mathbf{R}_n(\alpha)$  comme un quotient de deux déterminants en utilisant la forme déterminantale (théorème (2.3.45)), (ii) le calcul des deux déterminants et (iii) la mise en évidence d'une relation d'ordre entre les valeurs propres de  $\mathbf{R}_n(\alpha)$  menant à la démonstration de (b).

### 3.1 Les valeurs propres de $\mathbf{R}_n(\alpha)$ comme un quotient de deux déterminants

Dans la présente section, nous exposons le raisonnement de Langlands [9] permettant de reformuler la recherche des valeurs propres de  $\mathbf{R}_n(\alpha)$  en un calcul de deux déterminants. L'argument repose d'abord sur l'idée que la matrice  $\mathbf{R}_n(\alpha)$  peut s'exprimer comme une combinaison linéaire des matrices de la représentation régulière de  $S_n$ . Afin de mieux voir cela, remarquons que pour une permutation  $\pi \in S_n$  donnée, il existe précisément  $n!$  paires  $(\sigma, \rho)$  dont le produit  $\sigma\rho^{-1}$  est  $\pi$  et tous les éléments de matrice  $[\mathbf{R}_n(\alpha)]_{\sigma\rho}$ , où  $(\sigma, \rho)$  est une de ces paires, seront identiques et égaux à  $\alpha^{\ell(\pi)}$ . Ces éléments sont situés au même endroit que les 1 dans la matrice de la représentation régulière de  $\pi$ . Par conséquent,

$$\mathbf{R}_n(\alpha) = \sum_{\pi \in S_n} \alpha^{\ell(\pi)} \pi,$$

(où  $\pi$  dénote à la fois l'élément dans  $S_n$  et la matrice de la représentation régulière de  $\pi$ ). On vérifie alors aisément que  $\mathbf{R}_n(\alpha)$  appartient au centre de  $\mathbb{C}S_n$ . En effet, pour toute permutation  $\sigma \in S_n$ ,

$$\begin{aligned} \sigma \mathbf{R}_n(\alpha) &= \sigma \left( \sum_{\pi} \alpha^{\ell(\pi)} \pi \right) \\ &= \sigma \left( \sum_{\sigma^{-1}\pi\sigma} \alpha^{\ell(\sigma^{-1}\pi\sigma)} \sigma^{-1}\pi\sigma \right) \\ &= \left( \sum_{\sigma^{-1}\pi\sigma} \alpha^{\ell(\sigma^{-1}\pi\sigma)} \pi \right) \sigma \\ &= \mathbf{R}_n(\alpha) \sigma, \end{aligned}$$

la dernière égalité découlant du fait que des éléments conjugués (en l'occurrence  $\sigma^{-1}\pi\sigma$  et  $\pi$ ) sont composés d'un même nombre de cycles. Puisque la matrice  $\mathbf{R}_n(\alpha)$  est un élément du centre de  $\mathbb{C}G$ , le lemme de Schur<sup>1</sup> implique qu'elle sera une matrice scalaire dans chacun de ses blocs irréductibles lorsqu'exprimée dans la base du corollaire 2.2.9. Le scalaire associé au bloc irréductible correspondant au module de Specht  $\mathcal{S}^\mu$  est une valeur propre de  $\mathbf{R}_n(\alpha)$  et sera dénoté  $\lambda_\mu$ . Cette valeur propre  $\lambda_\mu$  est

$$\lambda_\mu = \frac{\text{tr}(\mathcal{S}^\mu(\mathbf{R}_n))}{\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{S}^\mu},$$

<sup>1</sup>Il s'agit ici d'une version du lemme de Schur différente de celle présentée en 2.2.11 : Si  $\varphi : G \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$  est une représentation matricielle irréductible et  $A$  une matrice  $n \times n$  commutant avec  $\varphi(g)$  pour tout  $g \in G$ , alors  $A$  est une matrice scalaire. **Preuve :** Soit  $v$  un vecteur propre de  $A$  de valeur propre  $\lambda$ . Alors, de  $A(\varphi(g)v) = \varphi(g)(Av) = \lambda(\varphi(g)v)$  on conclut que, pour tout  $g \in G$ ,  $\varphi(g)v$  est un vecteur propre de  $A$  de même valeur propre que  $v$ . Soit à présent  $\{g_1, g_2, \dots, g_s\}$  les éléments de  $G$ , alors l'ensemble  $\{\varphi(g_1)v, \varphi(g_2)v, \dots, \varphi(g_s)v\}$  de vecteurs propres de  $A$  (de même valeur propre) engendre un sous-espace propre  $\varphi(G)$ -invariant  $V$  de  $A$ . Or, puisque  $\varphi$  est irréductible,  $V$  est de dimension  $n$  et tous les vecteurs propres de  $A$  sont de même valeur propre. Q.E.D.

où  $S^\mu(\mathbf{R}_n) = \sum_{\pi} \alpha^{\ell(\pi)} S^\mu(\pi)$  et  $S^\mu(\pi)$  est la matrice de  $\pi$  dans la représentation de  $S^\mu$ . Par le théorème 2.2.14,  $\mathbb{C}S_n \cong \bigoplus_{\mu} (\dim_{\mathbb{C}} S^\mu) S^\mu$ , et donc  $\lambda_{\mu}$  sera dégénérée  $(\dim_{\mathbb{C}} S^\mu)^2$  fois (ou plus si  $\lambda_{\mu} = \lambda_{\nu}$  pour  $\mu \neq \nu$ ).

Nous avons vu à la section 2.3.6 que le module de Specht  $S^\mu$  pouvait s'exprimer comme une combinaison linéaire de modules induits  $M^\lambda$  :

$$S^\mu = \sum_{\lambda} (m^{-1})_{\mu\lambda} M^\lambda,$$

où les éléments de  $m^{-1}$  sont donnés par la *forme déterminantale*. Nous allons utiliser ce résultat afin d'exprimer  $\text{tr}(S^\mu(\mathbf{R}_n))$  sous la forme

$$\text{tr}(S^\mu(\mathbf{R}_n)) = \sum_{\lambda} (m^{-1})_{\mu\lambda} \text{tr}(M^\lambda(\mathbf{R}_n)),$$

où  $M^\lambda(\mathbf{R}_n) = \sum_{\pi} \alpha^{\ell(\pi)} M^\lambda(\pi)$  et  $M^\lambda(\pi)$  est la matrice de  $\pi$  dans la représentation du module  $M^\lambda$ .

Rappelons que pour une partition  $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l\}$ ,  $M^\lambda$  correspond au module induit  $\mathbb{C}S_n \otimes_{\mathbb{C}S_{\lambda}} 1_{S_{\lambda}}$  (où  $1_{S_{\lambda}}$  est le module trivial associé au sous-groupe de Young  $S_{\lambda} = S_{\lambda_1} \times S_{\lambda_2} \times \dots \times S_{\lambda_l}$ ). Par conséquent, si  $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r\}$  est un ensemble de représentants des classes résiduelles de  $S_{\lambda}$  dans  $S_n$  (avec  $r = |S_n|/|S_{\lambda}|$ ), alors par le théorème 2.2.19,  $\text{tr}(M^\lambda(\pi)) = \sum_{1 \leq i \leq r} 1_{S_{\lambda}}(\sigma_i^{-1} \pi \sigma_i)$  et donc

$$\text{tr}(M^\lambda(\mathbf{R}_n)) = \sum_{i=1}^r \sum_{\pi \in S_n} \alpha^{\ell(\pi)} 1_{S_{\lambda}}(\sigma_i^{-1} \pi \sigma_i),$$

où  $1_{S_{\lambda}}(\rho)$  vaut 1 si  $\rho \in S_{\lambda}$  et 0 autrement. Remarquons que la somme intérieure dans l'expression précédente s'avère être indépendante de  $i$ . En effet, si  $\rho = \sigma_j \sigma_i^{-1}$ , la reformulation de la somme sur  $\pi$  en une somme sur  $\pi' = \rho \pi \rho^{-1}$  transforme alors la somme intérieure pour  $i$  en celle pour  $j$ . Étant donné que les deux sommes doivent être égales

$$\text{tr}(M^\lambda(\mathbf{R}_n)) = \frac{|S_n|}{|S_{\lambda}|} \sum_{\pi \in S_n} \alpha^{\ell(\pi)} 1_{S_{\lambda}}(\pi) = \frac{n!}{\lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_r!} \sum_{\pi \in S_{\mu}} \alpha^{\ell(\pi)}.$$

Puisque toute permutation  $\pi \in S_{\lambda}$  peut s'écrire comme  $\pi = \pi_{\lambda_1} \times \dots \times \pi_{\lambda_l}$  (où  $\pi_{\lambda_i} \in S_{\lambda_i}$ ) et qu'ainsi  $\ell(\pi) = \ell(\pi_{\lambda_1}) + \dots + \ell(\pi_{\lambda_l})$ , il est possible de factoriser la dernière somme en  $\sum_{\pi \in S_{\mu}} \alpha^{\ell(\pi)} = \prod_{1 \leq i \leq l} \sum_{\pi \in S_{\lambda_i}} \alpha^{\ell(\pi)}$  et si on écrit  $x_{\lambda_i} = \sum_{\pi \in S_{\lambda_i}} \alpha^{\ell(\pi)}$ , on obtient

$$\text{tr}(M^\lambda(\mathbf{R}_n)) = n! \prod_{i=1}^l \left( \frac{x_{\lambda_i}}{\lambda_i!} \right).$$

Il ne reste donc plus qu'à calculer  $x_n$ .

Soit  $i_j$ , le nombre de cycles de longueur  $j$  dans la permutation  $\pi \in S_n$ . Le nombre de façons de distribuer les éléments de l'ensemble  $\{1, 2, \dots, n\}$  en  $\sum_j i_j$  cycles est  $n! / \prod_j i_j! (j!)^{i_j}$ . (Le facteur  $i_j!$  assure

l'indiscernabilité des répartitions sous permutation des cycles de même longueur.) Pour chacune de ces répartitions, le premier élément de chaque cycle peut être choisi arbitrairement. L'arrangement des  $(j-1)$  éléments restant dans chaque cycle nous fournit l'ensemble des permutations  $\pi$  possédant  $i_j$  cycles de longueur  $j$  et leur nombre est

$$n! \prod_j \frac{((j-1)!)^{i_j}}{i_j!(j!)^{i_j}} = n! \prod_j \frac{1}{i_j! j^{i_j}}.$$

Chacune de ces permutations contribue par un terme  $\alpha^{\ell(\pi)} = \prod_j \alpha^{i_j}$  à la somme  $x_n = \sum_{\pi} \alpha^{\ell(\pi)}$ . La dernière étape dans le calcul de la somme  $x_n$  peut être réalisée en recourant à une fonction génératrice  $f_\alpha(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n t^n / n!$ . Une expression simple pour  $f_\alpha$  peut être trouvée de la façon suivante :

$$\begin{aligned} f_\alpha(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} x_n \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{\pi \in S_n} \alpha^{\ell(\pi)} \right) \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{\{(i_j): n = \sum j i_j\}} \left( n! \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{i_j! j^{i_j}} \right) \left( \prod_j \alpha^{i_j} \right) \right) \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\{(i_j): n = \sum j i_j\}} \prod_{j=1}^{\infty} \left( \frac{\alpha t^j}{j} \right)^{i_j} \frac{1}{i_j!} \\ &= \prod_{j=1}^{\infty} \sum_{i_j=0}^{\infty} \left( \frac{\alpha t^j}{j} \right)^{i_j} \frac{1}{i_j!} \\ &= \prod_{j=1}^{\infty} \exp(\alpha t^j / j) \\ &= \exp(-\alpha \ln(1-t)) \\ &= \frac{1}{(1-t)^\alpha}. \end{aligned}$$

Les  $x_n$  sont extraits de  $f_\alpha$  en prenant sa  $n^e$  dérivée en  $t = 0$  :

$$x_n = f_\alpha^{(n)}(t=0) = \prod_{i=0}^{n-1} (i + \alpha),$$

ce qui conclut le calcul de  $\text{tr}(M^\lambda(\mathbf{R}_n))$  :

$$\text{tr}(M^\lambda(\mathbf{R}_n)) = \frac{n!}{\lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_l!} \prod_{k=1}^l \prod_{i=0}^{\lambda_k-1} (i + \alpha).$$

La forme déterminantale présentée au théorème 2.3.45 suggère alors d'exprimer  $\text{tr}(\mathcal{S}^\mu(\mathbf{R}_n))$  comme le déterminant

$$n! \left| \frac{\prod_{k=0}^{\mu_i - i + j - 1} (k + \alpha)}{(\mu_i - i + j)!} \right|_{1 \leq i, j \leq l}$$

La dimension du module de Specht  $\mathcal{S}^\mu$  étant donnée par le corollaire 2.3.47 comme

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{S}^\mu = n! \left| \frac{1}{(\mu_i - i + j)!} \right|_{1 \leq i, j \leq l},$$

on obtient finalement l'expression recherchée pour la valeur propre  $\lambda_\mu$  :

$$\lambda_\mu = \frac{\left| \frac{\prod_{k=0}^{\mu_i - i + j - 1} (k + \alpha)}{(\mu_i - i + j)!} \right|_{1 \leq i, j \leq l}}{\left| \frac{1}{(\mu_i - i + j)!} \right|_{1 \leq i, j \leq l}}. \quad (3.1)$$

Conformément à la règle de la forme déterminantale, les éléments de déterminant pour lesquels  $(\mu_i - i + j) < 0$  sont 0 et ceux pour lesquels  $(\mu_i - i + j) = 0$  sont 1.

### 3.2 Le calcul du quotient des deux déterminants

En utilisant la fonction Gamma, nous pouvons récrire (3.1) comme

$$\lambda_\mu = \frac{\left| \frac{\Gamma(\mu_i - i + j + \alpha)/\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\mu_i - i + j + 1)} \right|_{1 \leq i, j \leq l}}{\left| \frac{1}{\Gamma(\mu_i - i + j + 1)} \right|_{1 \leq i, j \leq l}}. \quad (3.2)$$

Nous allons montrer à présent qu'il existe une suite d'opérations permettant d'extraire  $\lambda_\mu$  du numérateur  $N_\mu$  de ce quotient de déterminants en exprimant ce dernier sous la forme  $N_\mu = \lambda_\mu \cdot D_\mu$  où  $D_\mu$  est le dénominateur. Cette procédure consiste en  $(l - 1)$  étapes impliquant chacune plusieurs opérations sur les colonnes de  $N_\mu$ . Ces opérations sont choisies de telle sorte que la valeur des facteurs  $\Gamma(\mu_i - i + j + \alpha)/\Gamma(\alpha)$  dans la colonne  $C_j$  de  $N_\mu$  soit successivement réduite jusqu'à la valeur des facteurs  $\Gamma(\mu_i - i + 1 + \alpha)/\Gamma(\alpha)$  dans la colonne  $C_1$ . L'étape  $m$  de cette procédure consiste à appliquer les  $(l - m)$  opérations suivantes dans cet ordre

$$\begin{aligned} C_l &\rightarrow C_l - C_{l-1} \\ C_{l-1} &\rightarrow C_{l-1} - C_{l-2} \\ &\vdots \\ C_{m+1} &\rightarrow C_{m+1} - C_m. \end{aligned}$$

Le symbole  $C_j$  est utilisé afin de dénoter la  $j^e$  colonne de  $N_\mu$  et, de façon similaire, le symbole  $N_i$  sera utilisé afin de dénoter la  $i^e$ -ligne de  $N_\mu$ . Notons que  $(N_\mu)_{ij} = (C_j)_i$ . *A priori*, des complications peuvent sembler survenir lors de ces manipulations en raison de la règle particulière accompagnant la forme déterminantale et en vertu de laquelle les éléments de  $N_\mu$  et  $D_\mu$  pour lesquels  $\mu_i - i + j$  sont non-positifs se voient attribuer une valeur spéciale, en l'occurrence 1 si  $\mu_i - i + j = 0$  et 0

autrement. Cependant, nous parviendrons, en recourant à une astuce, à montrer que ces difficultés ne sont qu'apparentes.

Remarquons à cette fin que la règle particulière dont il vient d'être question est implicite dans la formulation (3.2) de l'expression donnant  $\lambda_\mu$  puisque, d'une part, la valeur de la fonction Gamma est infinie lorsque son argument est un entier négatif et que, d'autre part, il est clair que les éléments des déterminants sont 1 lorsque  $\mu_i - i + j = 0$ . L'astuce consiste alors à appliquer plutôt la procédure à l'expression

$$\mathcal{N}_\mu = \left| \frac{\Gamma(\mu_i - i + j + \alpha)/\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\mu_i - i + j + 1 + \epsilon)} \right|_{1 \leq i, j \leq l},$$

où  $\epsilon$  est une quantité non-entière<sup>2</sup> et à faire ensuite l'identification  $N_\mu = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{N}_\mu$ .

On peut calculer sans difficulté l'effet produit à l'étape 1 sur les colonnes du déterminant  $\mathcal{N}_\mu$ . La colonne  $C_1$  est inchangée et  $C_j, j > 1$ , devient

$$\begin{aligned} (C_j)_i \rightarrow (C_j)_i - (C_{j-1})_i &= \frac{\Gamma(\mu_i - i + j + \alpha)/\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\mu_i - i + j + 1 + \epsilon)} - \frac{\Gamma(\mu_i - i + j - 1 + \alpha)/\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\mu_i - i + j + \epsilon)} \\ &= -(1 - \alpha + \epsilon) \cdot \frac{\Gamma(\mu_i - i + j - 1 + \alpha)/\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\mu_i - i + j + 1 + \epsilon)} \\ &= -\frac{\Gamma(2 - \alpha + \epsilon)}{\Gamma(1 - \alpha + \epsilon)} \cdot \frac{\Gamma(\mu_i - i + j - 1 + \alpha)/\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\mu_i - i + j + 1 + \epsilon)}. \end{aligned}$$

Tel que mentionné précédemment, on constate qu'au terme de cette première étape, la valeur du facteur  $\Gamma(\mu_i - i + j + \alpha)/\Gamma(\alpha)$  dans  $(C_j)_i$  s'est rapprochée de la valeur du facteur  $\Gamma(\mu_i - i + 1 + \alpha)/\Gamma(\alpha)$  dans  $(C_1)_i$ . Toutefois, il s'est avéré nécessaire d'introduire un facteur  $-\Gamma(2 - \alpha + \epsilon)/\Gamma(1 - \alpha + \epsilon)$  qui, par chance, est commun à tous les éléments dans  $(C_j)$  et que l'on pourra éventuellement factoriser à l'extérieur du déterminant.

On démontre aisément par induction qu'après l'étape  $m$ , les éléments dans la colonne  $(C_j)$  sont

$$(C_j)_i = (-1)^m \frac{\Gamma(m + 1 - \alpha + \epsilon)}{\Gamma(1 - \alpha + \epsilon)} \cdot \frac{\Gamma(\mu_i - i + j - m + \alpha)/\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\mu_i - i + j + 1 + \epsilon)}, \quad \text{si } j > m.$$

la condition  $j > m$  caractérisant les colonnes  $C_j$  participant à chaque étape de la procédure jusqu'à l'étape  $m$  (inclusivement). La dernière étape à laquelle participe une colonne  $C_j$  donnée est l'étape  $(j - 1)$ . Au terme des  $(l - 1)$  étapes de la procédure, les colonnes de  $\mathcal{N}_\mu$  s'écrivent alors

$$(C_j)_i = (-1)^{j-1} \frac{\Gamma(j - \alpha + \epsilon)}{\Gamma(1 - \alpha + \epsilon)} \cdot \frac{\Gamma(\mu_i - i + 1 + \alpha)/\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\mu_i - i + j + 1 + \epsilon)}.$$

Tous les éléments dans chaque colonne  $C_j$  ont un facteur commun  $(-1)^{j-1} \Gamma(j - \alpha + \epsilon)/\Gamma(1 - \alpha + \epsilon)$  et tous les éléments dans chaque ligne  $N_i$  ont un facteur commun  $\Gamma(\mu_i - i + 1 + \alpha)/\Gamma(\alpha)$ . Si l'on extrait

<sup>2</sup>Puisque pour toute partition  $\mu$  de  $n$ ,  $\Gamma(\mu_i - i + j + 1 + \epsilon) \neq \infty$ , on ne trouve plus aucun élément nul dans le déterminant  $\mathcal{N}_\mu$ , ce qui nous permet de procéder aux manipulations sur les colonnes sans se soucier de la règle particulière qui accompagne ordinairement la forme déterminantale.

ces facteurs du déterminant,  $\mathcal{N}_\mu$  prend alors la forme

$$\mathcal{N}_\mu = \prod_{i=1}^l (-1)^{j-1} \frac{\Gamma(j - \alpha + \epsilon)}{\Gamma(1 - \alpha + \epsilon)} \prod_{i=1}^l \frac{\Gamma(\mu_i - i + 1 + \alpha)}{\Gamma(\alpha)} \cdot \left| \frac{1}{\Gamma(\mu_i - i + j + 1 + \epsilon)} \right|_{1 \leq i, j \leq l},$$

et si l'on prend la limite lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ , la précédente expression devient alors  $N_\mu = \lambda_\mu \cdot D_\mu$  avec

$$\lambda_\mu = (-1)^{l(l-1)/2} \prod_{i=1}^l \frac{\Gamma(\mu_i - i + 1 + \alpha)}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(i - \alpha)}{\Gamma(1 - \alpha)},$$

ce qui termine la démonstration de la partie (a) de la proposition.

### 3.3 La relation d'ordre entre les valeurs propres

Afin de compléter la preuve de la proposition, nous devons parvenir à identifier les deux plus grandes valeurs propres (en valeur absolue). À cette fin, nous allons démontrer le lemme suivant.

**Lemme.** Soit  $\mu$  une partition de  $n$  en  $m$  éléments avec  $m \geq 2$  et écrivons explicitement les  $\mu_i$  égaux à 1 :  $\mu = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_l, 1, 1, \dots, 1\}$  où 1 est répété  $(m - l)$  fois et  $m \geq l \geq 2$ ,  $\mu_l \geq 2$ . Soit à présent  $\nu = \{\nu_1 = \mu_1, \nu_2 = \mu_2, \dots, \nu_{l-1} = \mu_{l-1}, 1, 1, \dots, 1\}$  où 1 est maintenant répété  $(m + \mu_l - l)$  fois. Alors

$$|\lambda_\mu| < |\lambda_\nu|.$$

**Preuve :** Si l'on simplifie les termes communs dans le quotient  $|\lambda_\nu/\lambda_\mu|$ , celui-ci peut alors s'écrire

$$\begin{aligned} \left| \frac{\lambda_\nu}{\lambda_\mu} \right| &= \left| \frac{\Gamma(2 - l + \alpha)}{\Gamma(\mu_l - l + 1 + \alpha)} \cdot \prod_{i=m+1}^{m+\mu_l-1} \frac{\Gamma(i - \alpha)\Gamma(2 - i + \alpha)}{\Gamma(1 - \alpha)\Gamma(\alpha)} \right| \\ &= \left| \prod_{i=1}^{\mu_l-1} \frac{1}{(i - l + 1 + \alpha)} \cdot \prod_{i=m+1}^{m+\mu_l-1} (i - l - \alpha) \frac{\Gamma(i - l - \alpha)\Gamma(2 - i + \alpha)}{\Gamma(1 - \alpha)\Gamma(\alpha)} \right| \end{aligned}$$

et puisque  $\Gamma(i - l - \alpha)\Gamma(2 - i + \alpha) = (-1)^i \Gamma(1 - \alpha)\Gamma(\alpha)$

$$\begin{aligned} &= \left| \prod_{i=1}^{\mu_l-1} \frac{1}{(i - l + 1 + \alpha)} \cdot \prod_{i=m+1}^{m+\mu_l-1} (i - l - \alpha) \right| \\ &= \prod_{i=1}^{\mu_l-1} \frac{(i + m - l - \alpha)}{|i - l + 1 + \alpha|}. \end{aligned}$$

Chacun des termes de ce produit sera plus grand que 1 si

$$i + m - l - \alpha > |i - l + 1 + \alpha|$$

ou de façon équivalente :

$$m + l > 2(1 + \alpha) \quad \text{et} \quad 2i + (m - l) > 0$$

pour  $i = 1, \dots, \mu_l - 1$ . Puisque  $m, l \geq 2$  et  $2 > 1 + \alpha$ , la première inégalité est satisfaite. Quant à la seconde,  $i > 0$  et  $(m - l) \geq 0$ . Ceci termine la preuve du lemme.  $\square$

Il s'ensuit que  $|\lambda_\mu| < |\lambda_{\{1,1,\dots,1\}}|$  pour toute partition  $\mu$  satisfaisant les hypothèses du lemme à l'exception de  $\mu = \{n\}$  (car  $m = 1 \not\geq 2$ ),  $\mu = \{n - 1, 1\}$  (car  $l = 1 \not\geq 2$ ) et  $\mu = \{1, 1, \dots, 1\}$ . D'après la partie (a) de la proposition, les trois valeurs propres associées à ces partitions sont

$$\lambda_{\{n\}} = \Gamma(n + \alpha) / \Gamma(\alpha)$$

$$\lambda_{\{n-1,1\}} = -(1 - \alpha) \cdot \Gamma(n - 1 + \alpha) / \Gamma(\alpha)$$

$$\lambda_{\{1,1,\dots,1\}} = (-1)^{n-1} \alpha \cdot \Gamma(n - \alpha) / \Gamma(1 - \alpha)$$

et

$$\left| \frac{\lambda_{\{n-1,1\}}}{\lambda_{\{n\}}} \right| = \frac{1 - \alpha}{n}$$

$$\left| \frac{\lambda_{\{1,1,\dots,1\}}}{\lambda_{\{n\}}} \right| = \frac{\Gamma(1 + \alpha)}{\Gamma(1 - \alpha)} \cdot \frac{\Gamma(n - \alpha)}{\Gamma(n + \alpha)}$$

Le premier de ces quotients tend clairement vers 0 lorsque  $n \rightarrow \infty$  et il est possible de s'assurer, en utilisant l'approximation de Stirling, qu'il en va de même pour le second. Par ailleurs, le fait que  $\lambda_0 = \lambda_{\{n\}}$  soit non-dégénérée peut être vu aussi bien comme une conséquence du théorème de Frobenius (puisque les éléments de la matrice  $R_n(\alpha)$  sont tous strictement positifs) que comme une conséquence du fait que  $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{S}^{(n)} = 1$ . Ceci termine la preuve de la partie (b) de la proposition.



## Chapitre 4

# Conclusion

Le résultat principal du présent mémoire a été de démontrer que la valeur propre maximale  $\lambda_0$  de la matrice  $\mathbf{R}$  domine toutes les autres à la limite thermodynamique ( $n \rightarrow \infty$ ). Ce travail était motivé initialement par l'espoir que la matrice  $\mathbf{R} = \sum_i \lambda_i \mathbf{V}_i$  puisse être correctement approximée par  $\mathbf{R} \sim \lambda_0 \mathbf{V}_0$ , ce qui rendrait alors possible la factorisation de la mesure  $\mu_C^\Pi(X, Y)$  telle qu'exprimée par l'équation (1.128). Toutefois, la prééminence de  $\lambda_0$  ne peut assurer à elle seule la validité de cette approximation. En effet, puisque l'on impose que la condition

$$\sum_{(X, Y)} \mu_C^\Pi(X, Y) = 1$$

soit préservée à la limite thermodynamique alors que le nombre de termes dans la somme tend vers l'infini avec  $n$ , il est nécessaire que, pour toute paire  $(X, Y)$ , le comportement limite de  $\mu_C^\Pi(X, Y) = \mathbf{x}^t \mathbf{R} \mathbf{y}$  et de son approximation  $\mathbf{x}^t \lambda_0 \mathbf{V}_0 \mathbf{y}$  soient le même. Autrement dit, l'erreur relative entre les deux termes doit tendre vers zéro lorsque  $n \rightarrow \infty$  :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\mathbf{x}^t \mathbf{R} \mathbf{y} - \mathbf{x}^t \lambda_0 \mathbf{V}_0 \mathbf{y}}{\mathbf{x}^t \mathbf{R} \mathbf{y}} \right| \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty).$$

Or, il s'avère possible de trouver une paire  $(X, Y)$  pour laquelle cette limite n'est pas vérifiée. Soit, pour  $n$  fixé, une distribution des  $x$  et des  $y$  de  $(X, Y)$  telle que tous les  $x$  soient contigus et que, par conséquent, les  $y$  le soient également. Il n'y a alors qu'un seul pairage des  $x$  et des  $y$  qui soit physiquement réalisable (c'est-à-dire qui soit associé à des lignes de contour qui ne se croisent pas) :  $\{(x_1, y_n), (x_2, y_{n-1}), \dots, (x_n, y_1)\}$ . Soit  $\rho$  la permutation correspondante. Alors, tant sur  $S_l$  que sur  $S_r$ , nous aurons cette unique permutation, de sorte que  $x_\pi = y_\pi = \alpha \delta_{\pi\rho}$  où  $\alpha$  est le poids de Boltzmann (de  $\sigma_l$  ou  $\sigma_r$ ) et  $\mathbf{x}^t \mathbf{R} \mathbf{y} = 2^{-n} \alpha_l \alpha_r$  puisque  $\rho$  contient  $n$  cycles. D'après l'équation (1.126),  $\mathbf{x}^t \lambda_0 \mathbf{V}_0 \mathbf{y}$

peut s'écrire comme  $\lambda_0 \alpha_l \alpha_r / n!$  et

$$\left| \frac{\mathbf{x}^t \mathbf{R} \mathbf{y} - \mathbf{x}^t \lambda_0 \mathbf{V}_0 \mathbf{y}}{\mathbf{x}^t \mathbf{R} \mathbf{y}} \right| = \frac{\lambda_0 / n! - 2^{-n}}{2^{-n}}.$$

Puisque  $\lambda_0 = \Gamma(n + 1/2) / \Gamma(1/2)$ , pour un  $n$  donné, la limite est bornée inférieurement par

$$\frac{2^n \Gamma(n + 1/2)}{n! \Gamma(1/2)} \sim \frac{2^n}{\sqrt{\pi n}}$$

et va donc à l'infini.

Tout n'est pas perdu cependant, car on remarque que la mesure  $\mu_C^\Pi(X, Y) = 2^{-n} \alpha_l \alpha_r$  du précédent contre-exemple tend vers zéro lorsque  $n \rightarrow \infty$  et, comme nous l'avons souligné en §1.3.3, il est permis de supposer qu'il soit suffisant que l'approximation  $\mathbf{x}^t \mathbf{R} \mathbf{y} \sim \mathbf{x}^t \lambda_0 \mathbf{V}_0 \mathbf{y}$  soit valide excepté pour un certain ensemble de  $(X, Y)$  dont la mesure tend vers 0 à la limite thermodynamique. Nous n'aurions alors qu'à exclure ces paires  $(X, Y)$  de notre ensemble statistique.

Cette possibilité que l'approximation  $R \sim \lambda_0 \mathbf{V}_0$  ne soit valide que sur un sous-ensemble de mesures nécessite de mieux comprendre la mesure induite par les poids de Boltzmann sur l'ensemble des paires  $(X, Y)$ . Cette exploration constitue la prochaine étape logique du projet entrepris dans ce mémoire.

# Bibliographie

- [1] Binney, J. J. & Dowrick, N. J. & Fisher, A. J. & Newman, M. E. J., *The Theory of Critical Phenomena. An introduction to the renormalization group*, Oxford Science Publications, Oxford University Press (1992).
- [2] Huang, K., *Statistical Mechanics*, 2<sup>e</sup> édition, Wiley (1987).
- [3] Reichl, L. E., *A Modern Course in Statistical Physics*, 2<sup>e</sup> édition, Wiley-Interscience (1998).
- [4] Domb, C., *The Critical Point*, A historical introduction to the modern theory of critical phenomena, Taylor & Francis (1996).
- [5] Wilson, K. G., *The renormalization group*, Rev. Mod. Phys. **47**, 773 (1975).
- [6] Kesten, H., *Percolation theory for mathematicians*, Birkhäuser, 1982.
- [7] Langlands, R.P., Pouliot P., Saint-Aubin Y., *Conformal invariance in two-dimensional percolation*, Bulletin of the AMS, **30**, No 1, Janvier 1994. (Peut être téléchargé sur [sunsite.ubc.ca/DigitalMathArchive/Langlands/intro.html](http://sunsite.ubc.ca/DigitalMathArchive/Langlands/intro.html).)
- [8] Langlands, R.P., Lafortune, M.-A., *Finite Models for Percolation*, AMS, Contemporary Mathematics, **117** (1991). (Peut être téléchargé sur [sunsite.ubc.ca/DigitalMathArchive/Langlands/intro.html](http://sunsite.ubc.ca/DigitalMathArchive/Langlands/intro.html).)
- [9] Langlands, R. P., *The renormalization fixed point as a mathematical object*, dans Proceedings of the Workshop on Geometric Methods in Physics of Bielowieza, World Scientific (2004). (Peut être téléchargé sur [sunsite.ubc.ca/DigitalMathArchive/Langlands/intro.html](http://sunsite.ubc.ca/DigitalMathArchive/Langlands/intro.html).)
- [10] Langlands, R.P., Lewis, M.-A., Saint-Aubin, Y., *Universality and conformal invariance for the Ising model in domain with boundary*, J. Stat. Phys. **98**, (2000) 131-244. (Peut être téléchargé sur [sunsite.ubc.ca/DigitalMathArchive/Langlands/intro.html](http://sunsite.ubc.ca/DigitalMathArchive/Langlands/intro.html).)
- [11] Bacry, H., *Leçons sur la théorie des groupes et les particules élémentaires*, Chapitre 1., N.Y., Gordon and Breach (1967).
- [12] Broer, A., *Algèbre 1*, notes de cours, Université de Montréal (2004).

- [13] Dummit, D. S. & Foote, R., *Abstract Algebra*, Chapitres 18-19, Wiley (2004).
- [14] Broer, A., *Théorie des représentations*, notes de cours, Université de Montréal (2006).
- [15] James, G. D., *The Representation Theory of the Symmetric Groups*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 682, Springer (1978).