

AI-1
G
886

Université de Montréal

Modèles markoviens à changements de régimes sur le marché des actions
et étude de la dynamique des asymétries des rendements

par
Sonia Oualha

Directeur de recherche:
M. René Garcia

Département des sciences économiques
Faculté des arts et des sciences

Rapport de recherche présenté à la faculté des études supérieures
En vue de l'obtention du grade de Maîtrise es Sciences (M. Sc.)

Août 2002,

Centre de Documentation
Bibliothèque des Sciences Économiques
Université de Montréal
C.P. 6125, Succ. A
Montréal, Québec H3C 3J7

copyright, Sonia Oualha, 2002

(

(

SOMMAIRE

Dans cette étude, on modélise le comportement de la série des rendements journaliers de l'indice boursier américain Standard & Poor's 500 pour la période de juillet 1962 à décembre 2000. On considère deux approches de modèles markoviens à changements de régimes à deux états: un modèle selon différentes spécifications dont une avec probabilités de transition variables dépendant de variables économiques fondamentales, ainsi qu'un modèle introduisant de l'hétéroscédasticité conditionnelle à l'intérieur même des régimes à l'aide d'un processus GARCH. De plus, on fait l'étude de la dynamique des asymétries des rendements des actions.

L'apport et l'originalité de ce travail par rapport à la littérature existante est que peu d'études sur les rendements des marchés boursiers ont considéré de l'hétéroscédasticité conditionnelle à l'intérieur même des régimes. Par ailleurs, aucune étude antérieure n'a porté sur les asymétries des rendements des actions.

Le modèle markovien à changements de régimes à deux états selon les différentes spécifications caractérise les rendements journaliers de l'indice du S&P 500 par un état optimiste persistant à moyenne élevée et volatilité faible, ainsi qu'un état pessimiste légèrement moins persistant à moyenne faible et volatilité élevée. Nos tests indiquent toutefois la présence d'autocorrélation, d'effets ARCH résiduels ainsi que d'asymétrie et d'aplatissement dans les résidus, une fois que l'on considère les deux distributions distinctes en moyenne et variance.

Le modèle markovien à changements de régimes à deux états avec GARCH(1,1) caractérise bien les rendements des actions. En effet, les différents tests effectués sur les résidus montrent que ceux-ci peuvent être considérés comme des bruits blancs, une fois que l'on considère les deux distributions normales ainsi que l'hétéroscédasticité conditionnelle à l'intérieur des états.

On se base sur les résultats de ce dernier modèle pour étudier les asymétries des rendements des actions. Le coefficient d'asymétrie pour la période s'avère en moyenne négatif, tout comme pour le coefficient d'asymétrie conditionnelle à l'état optimiste. Par contre, le coefficient d'asymétrie conditionnelle à l'état pessimiste est en moyenne positif. L'analyse de la dynamique de ces asymétries montre que celles-ci sont particulièrement influencées par l'écart-type conditionnel et, à un moindre degré, par le rendement.

TABLE DES MATIÈRES

I- INTRODUCTION.....	1
II- INFORMATIONS PERTINENTES: FAITS STYLISES.....	4
III- REVUE DES ETUDES ANTERIEURES	6
1- HAMILTON (1989).....	6
2- NELSON, STARTZ, ET TURNER (1989).....	7
3- SCHALLER ET VAN NORDEN (1997).....	10
4- GARCIA ET PERRON (1996).....	12
5- GRAY (1996).....	14
IV- PRESENTATION DES DONNEES ET ANALYSE DE LA SERIE DES	
RENDEMENTS DU S&P 500.....	17
1- DONNÉES DE L'ÉTUDE	17
2- ÉTUDE DE LA SÉRIE DES RENDEMENTS JOURNALIERS DU S&P 500	18
V- LES MODÈLES MARKOVIENS À CHANGEMENTS DE RÉGIMES	
(SWM).....	21
1- ÉLÉMENTS DE THÉORIE.....	21
2- PRÉSENTATION DU MODÈLE GÉNÉRAL DE SWM ET DE SA PROCÉDURE	
D'ESTIMATION	22
2-1- Présentation du modèle	22
2-2- Procédure d'estimation du modèle	23
3- A PROPOS DE L'ESTIMATION.....	27
4- PRÉSENTATION DES DIFFÉRENTES SPÉCIFICATIONS DU MODÈLE SWM.....	28
4-1- Modèle SWM avec probabilités de transition constantes	28
4-2- Modèle SWM avec probabilités de transition variables	29
5- RÉSULTATS D'ESTIMATION DES DIFFÉRENTES SPÉCIFICATIONS DU MODÈLE	
SWM	31
5-1- Modèle SWM avec probabilités de transition constantes	31

5-2- Modèle SWM avec probabilités de transition variables	37
6- TESTS DE DIAGNOSTIC	37
6-1- Analyse des résidus.....	37
6-2- Tests sur les modèles et tests de robustesse	39
VI-LES MODÈLES MARKOVIENS À CHANGEMENTS DE RÉGIMES	
AVEC GARCH (GRS).....	46
1- ÉLÉMENTS DE THÉORIE	46
2- PRÉSENTATION DU MODÈLE GRS ET DE SA PROCÉDURE D'ESTIMATION	47
2-1- Présentation du modèle	47
2-2- Procédure d'estimation du modèle	49
3- A PROPOS DE L'ESTIMATION.....	51
4- RÉSULTATS D'ESTIMATION ET TESTS DE DIAGNOSTIC DU MODÈLE GRS.....	52
4-1- Résultats d'estimation.....	52
4-2- Analyse des résidus	53
4-2- Test sur le modèle et test de robustness	54
VII- ÉTUDE DES ASYMETRIES DES RENDEMENTS.....	60
1-MESURE DES ASYMÉTRIES DES RENDEMENTS DES ACTIONS	60
1-1- Aspect théorique	60
1-2- Résultats d'estimation.....	61
2- ANALYSE DE LA DYNAMIQUE DES ASYMÉTRIES DES RENDEMENTS	65
VIII- CONCLUSION.....	68
BIBLIOGRAPHIE.....	70
ANNEXES.....	74
Annexe 1-SWM avec probabilités de transition variables	i
Annexe 2-SWM avec probabilités de transition variables et AR(2).....	ii
Annexe 3-Estimation du SWM de base avec des données mensuelles	iii
Annexe 4-Estimation des différents SWM en sous-périodes	iv
Annexe 5-Estimation du GRS GARCH(1,1) avec des données mensuelles.....	v

LISTE DES TABLEAUX

TABLEAU 1: étude de la série des rendements du S&P 500	18
TABLEAU 2: SWM à deux régimes sur la moyenne et sur la variance	33
TABLEAU 3: SWM à deux régimes sur la variance	33
TABLEAU 4: SWM à deux régimes sur la moyenne et sur la variance avec AR1	34
TABLEAU 5: SWM à deux régimes sur la moyenne et sur la variance avec AR2	34
TABLEAU 6: tests de diagnostic pour le SWM sur la moyenne et sur la variance.....	41
TABLEAU 7: tests de diagnostic pour le SWM sur la variance.....	42
TABLEAU 8: tests de diagnostic pour le SWM sur la moyenne et sur la variance avec AR(1)	43
TABLEAU 9: tests de diagnostic pour le SWM sur la moyenne et sur la variance avec AR(2)	44
TABLEAU 10: tests de ratios de vraisemblance pour les modèles SWM et GRS	45
TABLEAU 11: modèle GRS à deux régimes et GARCH(1,1).....	56
TABLEAU 12: tests de diagnostic pour le modèle GRS GARCH(1,1).....	56-57
TABLEAU 13: étude de la série d'asymétrie conditionnelle et inconditionnelle des rendements du S&P 500	62

LISTE DES FIGURES

FIGURE 1: série des rendements journaliers du S&P 500 de 1962 à 2000.....	19
FIGURE 2: probabilités de l'état à volatilité élevée du SWM	35
FIGURE 3: écart-type conditionnel des rendements selon le SWM.....	36
FIGURE 4: probabilités de l'état à volatilité élevée du GRS GARCH(1,1)	58
FIGURE 5: écart-type conditionnel des rendements selon le GRS GARCH(1,1).....	59
FIGURE 6: coefficient d'asymétrie pour la période d'après le GRS GARCH(1,1)	63
FIGURE 7: coefficients d'asymétrie conditionnelle aux deux états d'après le GRS GARCH(1,1)	64

I. INTRODUCTION

Plusieurs variables ont des périodes où le comportement de la série semble changer dramatiquement. De telles variations dans le processus de série chronologique de données macroéconomiques ou financières peuvent survenir lors d'événements tels que paniques financières et variations significatives de politiques gouvernementales. Les modèles markoviens à changements de régimes servent à modéliser ces séries qui comportent de la non-linéarité et où celle-ci survient lors de sauts discrets dans la distribution conditionnelle entre un nombre fini de régimes.

Les rendements des actions ont tellement été étudiés qu'il peut sembler difficile d'ajouter aux connaissances actuelles. Toutefois, on va mettre l'accent sur une autre caractéristique de ces rendements, soit l'asymétrie conditionnelle, en cherchant à améliorer la compréhension de la dynamique de celle-ci. Dans ce but, cette étude va porter sur les rendements journaliers de l'indice boursier américain Standard & Poor's 500 pour la période de juillet 1962 à décembre 2000, que l'on va chercher à caractériser le mieux possible à l'aide de modèles markoviens à changements de régimes. À cet effet, on va modéliser les rendements selon trois approches: un modèle markovien à changements de régimes avec probabilités de transition constantes, un modèle avec probabilités de transition variables dépendant de variables économiques fondamentales, ainsi qu'un autre qui introduit de l'hétéroscédasticité conditionnelle à l'intérieur même des régimes.

Si cette étude pouvait donner des résultats qui améliorent significativement les visions actuelles concernant les caractéristiques des asymétries des rendements des actions, on pourrait envisager dans une autre étude différentes mesures des asymétries de la courbe de volatilité implicite de Black et Scholes. En effet, la distribution de la volatilité implicite est caractérisée par la présence d'asymétries (effet de sourire), ce qui est généralement perçu comme un signal de présence d'asymétrie dans la distribution sous-jacente des probabilités des rendements. L'effet de sourire de volatilité de l'approche objective correspond ainsi à une

distribution de volatilité implicite des prix des options issue de l'approche risque-neutre. Cette approche serait intéressante dans la mesure où s'il s'avérait y avoir des similitudes entre les deux types d'asymétries, on pourrait obtenir une mesure de prévision du prix des options plus robuste et, par conséquent, améliorer les méthodes actuelles de couverture et de gestion des risques.

L'objectif visé de ce rapport est d'abord de déterminer la meilleure caractérisation des rendements des actions, puis de mesurer les coefficients d'asymétrie conditionnelles et d'analyser leur dynamique. A cette fin, on va utiliser les modèles markoviens à changements de régimes de Hamilton (1989) en s'inspirant de l'approche de Nelson, Turner et Startz (1989) ainsi que celle plus récente de Van Norden et Schaller (1997). On va aussi appliquer le modèle markovien à changements de régimes avec GARCH de Gray (1996) au marché des actions, et ce afin de tenir compte le mieux possible des faits stylisés des rendements des actions. Enfin, on va mesurer et analyser les asymétries des rendements des actions à l'aide du coefficient d'asymétrie conditionnelle décrit par Garcia, Luger et Renault (2001).

L'apport et l'originalité de ce travail par rapport à la littérature existante est que peu d'études sur les rendements des marchés boursiers ont considéré de l'hétéroscédasticité conditionnelle à l'intérieur même des régimes¹. Par ailleurs, aucune étude antérieure n'a porté sur les asymétries des rendements des actions.

Les résultats de cette étude démontrent que le modèle markovien à changements de régimes à deux états selon les différentes spécifications caractérise les rendements journaliers de l'indice du S&P 500 par un état optimiste persistant à moyenne élevée et volatilité faible, ainsi qu'un état pessimiste légèrement moins persistant à moyenne faible et volatilité élevée. Cependant, nos tests indiquent la présence d'autocorrélation, d'effets ARCH résiduels ainsi que d'asymétrie et d'aplatissement dans les résidus, une fois que l'on considère les deux distributions

¹ Il n'y a à ma connaissance que Cai (1994), Hamilton et Susmel (1994), ainsi que Fong (2001) qui ont modélisé les rendements des actions à l'aide d'un modèle markovien à changements de régime tenant compte de l'hétéroscédasticité conditionnelle.

distinctes en moyenne et variance. On applique alors le modèle GRS avec GARCH(1,1) pour chercher à tenir compte convenablement de l'hétéroscédasticité conditionnelle à l'intérieur des états. Ce qui est un bon choix vu les résultats des différents tests effectués sur les résidus. Le choix de modèle est confirmé par les tests de ratios de vraisemblance, et nos résultats d'estimations mensuelles et selon différentes périodes supportent nos conclusions sur la distribution des rendements journaliers. Ce modèle est par conséquent adéquat et on va se baser sur ses résultats pour étudier les asymétries des rendements des actions. Le coefficient d'asymétrie pour la période s'avère en moyenne négatif, tout comme pour la série des rendements et pour le coefficient d'asymétrie conditionnelle à l'état optimiste. Par contre, le coefficient d'asymétrie conditionnelle à l'état pessimiste est en moyenne positif. L'analyse de la dynamique de ces asymétries montre que ceux-ci sont particulièrement influencés par l'écart-type conditionnel et, à un moindre degré, par le rendement.

Ce rapport est organisé de la façon suivante. La section II présente des faits stylisés sur le comportement des rendements des actifs financiers. La section III passe en revue les études antérieures sur les modèles à changements de régimes. La section IV présente les données de l'étude ainsi que l'analyse de la série des rendements de l'indice du S&P 500. La section V fait l'analyse théorique des modèles markoviens à changements de régimes en ce qui concerne la modélisation, l'estimation et le filtrage, puis décrit les résultats ainsi que les tests obtenus avec les différentes spécifications des modèles. La section VI fait l'analyse théorique du modèle GRS GARCH, et présente les résultats d'estimation ainsi que les tests reliés. La section VII présente la théorie ainsi que les résultats des mesures d'asymétrie des rendements des actions. Enfin, la section VIII finalise cette étude en présentant la conclusion de ce rapport.

II. INFORMATIONS PERTINENTES: FAITS STYLISES.

La recherche et la sélection d'une spécification de modèle se font toujours à partir de faits stylisés empiriques. En fait, la capacité d'un modèle à reproduire ces faits stylisés est une caractéristique cruciale à sa bonne spécification.

Ghysels, Harvey et Renault (1996) ont décrit, entre autres, les faits stylisés suivants concernant les rendements des actions:

i. Queues de distribution épaisses:

Depuis les années 1960, les chercheurs, notamment Mandelbrot (1963) et Fama (1963, 1965), ont observé que les rendements des actifs avaient des distributions leptokurtiques, c'est-à-dire que la distribution marginale des rendements des actifs se caractérise par la présence de fortes queues. Engle (1982) montre que cette leptokurtosis pourrait s'expliquer par la présence d'hétéroscédasticité conditionnelle. Cependant, tel que décrit dans Gray (1996), de nombreuses études empiriques ont démontré que la modélisation par ARCH ou GARCH n'était pas suffisante pour tenir compte du degré de leptokurtosis dans les données.

ii. Clustering de la volatilité :

Les données de séries financières révèlent de nombreux épisodes de périodes à volatilité faible et d'autres à volatilité élevée. En fait, les phénomènes de clustering de la volatilité et de queues de distribution épaisses sont étroitement liés.

iii. Effets de levier :

En 1976, Black a décrit le phénomène d'effet de levier qui suggère que les mouvements des prix des actions sont négativement corrélés à la volatilité. En fait, comme la baisse du prix des actions implique une hausse de l'effet de levier de la firme, l'incertitude augmente ainsi que la volatilité.

Il est à noter que les évidences empiriques observées par Black (1976), Christie (1982) et Schwert (1989) suggèrent que l'effet de levier à lui seul ne peut expliquer les asymétries empiriques observées dans les prix des actions.

iv. Mémoire longue et persistance :

En général, la volatilité est fortement persistante, particulièrement pour les données à haute fréquence qui sont proches d'un comportement de racine unitaire sur le processus de variance conditionnelle. Il est à noter que la modélisation de la persistance dans le processus de variance conditionnelle reste un sujet de débat.

III. REVUE DES ETUDES ANTERIEURES:

Le modèle markovien à changements de régimes a été développé par Hamilton en 1989. Il constitue un des fondements de la littérature et pour ce, on va inclure cet auteur dans cette revue des études antérieures.

Schwert (1989) ainsi que Nelson, Startz et Turner (1989) ont été parmi les précurseurs de l'utilisation du modèle markovien à changements de régimes appliqué aux rendements des actions, et Schaller et Van Norden en ont fait des extensions en 1997. On va décrire seulement les deux dernières études puisqu'elles sont plus reliées à ce travail.

Garcia et Perron (1996) ont fait l'étude du modèle markovien à changements de régimes sur le taux d'intérêt réel ex-post. Ils ont développé et décrit de nombreux tests de spécification du modèle, d'analyse de sensibilité ainsi que de robustesse. On va donc s'inspirer de leurs procédures dans cette étude.

Hamilton et Susmel (1994) ainsi que Cai (1994) ont été les premiers à modéliser la volatilité sous la forme d'un processus ARCH avec un modèle à changements de régimes. On ne va toutefois pas décrire leurs recherches parce qu'on va plutôt se concentrer sur le modèle de Gray (1996) qui a considéré un modèle markovien à changements de régimes avec un processus GARCH pour modéliser la variance conditionnelle.

1. Hamilton (1989) :

Dans cet article, Hamilton introduit une nouvelle approche à l'analyse économique de séries chronologiques non-stationnaires et du cycle d'affaire. Il développe une méthode de modélisation des séries non-stationnaires en spécifiant que la différence première des séries observées suit un processus stationnaire non-linéaire. Il explique que cette non-linéarité découle de sauts discrets de régime dans le processus, c'est à dire des épisodes à travers lesquels la dynamique de la série est différente.

L'auteur part de l'approche de Goldfeld et Quant (1973) sur les régressions à changements de régimes markoviens afin de caractériser les variations des paramètres d'un processus autorégressif.

Hamilton développe aussi des méthodes de filtrage et de lissage non-linéaires pour obtenir des estimations statistiques optimales de l'état de l'économie basée sur les observations de la série. En fait, ces méthodes fournissent de l'inférence non-linéaire sur la variable d'état discrète non-observée. Hamilton explique que, contrairement à d'autres recherches où l'on a supposé que les états étaient observables, il est possible de faire de l'inférence probabiliste optimale sur ces régimes en se basant sur le comportement observé de la série. En effet, l'auteur maximise la fonction de vraisemblance par rapport aux paramètres de la population et utilise ces paramètres ainsi que les données pour faire de l'inférence statistique optimale sur les régimes non-observables.

L'auteur applique cette technique aux données trimestrielles du PNB réel américain de la période de 1952 à 1984 en supposant que le taux de croissance de la série subit des sauts discrets autocorrélés.

D'après ses résultats empiriques, le cycle d'affaire est mieux caractérisé par un schéma récursif des sauts entre un état de récession ainsi qu'un état d'expansion. De plus, les périodes de récession estimées par le modèle coïncident bien avec celles établies par le NBER. Les résultats d'estimations de Hamilton confirment la supposition que la dynamique d'une récession économique est distincte de celle d'une expansion.

2. Nelson, Sartz et Turner (1989)

Les auteurs introduisent dans cet article un modèle markovien d'hétéroscédasticité, de risque, et d'apprentissage sur le marché boursier. Ils emploient à cette fin un modèle markovien à changements de régimes sur les rendements mensuels excédentaires, soient les rendements de l'indice boursier

américain du S&P 500 moins le taux sans risque, pour la période de janvier 1946 à décembre 1987.

Ces rendements excédentaires sont distribués comme une mixture de deux normales et la condition du marché boursier à chaque période va déterminer de quelle distribution ceux-ci vont provenir. Les états sont ainsi caractérisés par les variances de leur densité et sont générés par un processus markovien d'ordre 1.

Le modèle développé dans cet article permet à la variance conditionnelle d'être une fonction stochastique de la variance des périodes précédentes et examine l'hétéroscédasticité des rendements excédentaires ainsi que leur dépendance temporelle.

Nelson, Startz et Turner considèrent deux approches de leur modèle initial. La première suppose que les agents économiques connaissent la réalisation du processus markovien qui génère les états, même si l'économètre ne les observe pas. La deuxième consiste à ce que ni les agents économiques, ni l'économètre n'observent directement les états. Pour chaque période, ces derniers établissent des probabilités sur l'état de la prochaine période conditionnelles aux observations actuelles et passées des rendements excédentaires, et utilisent celles-ci pour choisir leur portefeuille de la période. Le paramètre d'intérêt est donc la hausse requise des rendements qui compense l'agent économique pour une augmentation donnée de la probabilité de l'état à volatilité élevée.

Les auteurs font aussi l'estimation, par l'algorithme E.M, de trois spécifications différentes des deux approches décrites précédemment, leur objectif étant d'analyser la relation entre la prime de risque et la volatilité des rendements qui varie selon le temps.

Dans la première spécification, l'état est connu avec certitude et par conséquent, il s'agit d'estimer un modèle markovien à changements de régimes à deux états sur la moyenne et sur la variance où les moyennes constituent des primes de risque. Les résultats démontrent clairement l'existence de ces deux états avec des moyennes et des variances distinctes. De plus, les deux états sont persistants avec

une dominance de l'état à volatilité faible. Les auteurs obtiennent des résultats qui infirment que la prime de risque soit croissante avec la volatilité. En effet, les estimations montrent que cette prime de risque a tendance à baisser si le niveau de risque augmente et même qu'elle est négative pour l'état à volatilité élevée. Ce résultat est toutefois expliqué par une mauvaise spécification du modèle.

La deuxième spécification tient compte du fait que les agents économiques ne connaissent pas avec certitude l'état de l'économie et dans ce cas, ils ne peuvent transiger sur des actifs qu'une seule fois par période. Les résultats d'estimation supportent le fait que la prime de risque soit croissante avec le niveau anticipé du risque mesuré par la probabilité d'être à l'état à volatilité élevée. Malgré le fait que les résultats d'estimation de cette spécification soient consistants avec la théorie, ils n'expliquent qu'une faible portion de la volatilité des rendements excédentaires. Ils prévoient aussi que le rendement soit toujours positif, ce qui peut s'expliquer par le fait que cette spécification ne tient pas compte de l'effet de nouvelles, soit que l'état à volatilité faible est une bonne nouvelle et que celui à volatilité élevée en est une mauvaise.

La spécification précédente est cependant remise en question parce que les données mensuelles de l'étude font en sorte que les agents transigent plusieurs fois sur le marché boursier et qu'il y a un phénomène d'apprentissage à considérer. Les auteurs formulent alors une troisième spécification qui consiste à modéliser le comportement de ces agents économiques en utilisant la vraie valeur de l'état comme un proxy du choix de leur distribution ultérieure et qui tient compte aussi de l'effet d'apprentissage. Ils expliquent ce choix par le fait qu'au début du temps t , les agents valorisent leurs actifs en fonction de la distribution antérieure des états tout en continuant à observer les transactions pendant la période. Dans ce cas, la distribution ultérieure de l'état basée sur ces données va affecter le prix ainsi que le rendement des actifs et comme on ne peut l'observer qu'en fin de période, on ne peut certainement pas l'inclure dans la modélisation de Y_t . Les résultats d'estimations de cette troisième spécification permettent de distinguer la prime de risque de l'effet de nouvelles et montrent que l'état à

volatilité élevée consiste en une très mauvaise nouvelle. De plus, la considération de l'effet de nouvelles a significativement amélioré la caractérisation des rendements excédentaires du S&P 500.

Enfin, les auteurs concluent que l'hétéroscédasticité engendrée par la mixture de distribution implique une forte dépendance temporelle, ce qui peut suggérer que la volatilité conditionnelle du marché boursier est prévisible. Ainsi, la prime de risque évolue dans le temps en fonction de la perception des agents économiques concernant le risque du marché.

3. Schaller et Van Norden (1997)

Dans cet article, Schaller et Van Norden utilisent les modèles markoviens à changements de régimes sur les rendements excédentaires mensuels des actions pondérés par la valeur et incluant les dividendes, pour la période de janvier 1929 à décembre 1989.

Les auteurs décrivent leur étude comme une extension des recherches antérieures, dont l'approche de Hamilton (1989), dans la mesure où elle inclut une plus longue période d'étude, cherche à vérifier si les rendements des actions sont prévisibles une fois que l'effet de changements de régimes est considéré, et examine la formulation de probabilités de transition variables dans le temps selon des variables économiques informatives.

En première partie, les auteurs adoptent l'approche univariée et considèrent quatre spécifications différentes de la distribution des rendements afin de confirmer l'évidence de changements de régimes dans le marché des actions. Ainsi, la première suppose que les rendements sont tirés d'une seule distribution gaussienne, la deuxième d'une mixture de distributions avec différentes moyennes et variance constante, la troisième d'une mixture de distributions avec différentes variances et moyenne constante, et la quatrième d'une mixture de distributions à moyennes et variances différentes pour les deux distributions.

Ils utilisent les tests de Hansen (1992) et de Garcia (1992) afin de vérifier que l'hypothèse des changements de régimes est statistiquement significative, et appliquent ces procédures à leurs données ainsi qu'à celles de Nelson, Startz et Turner puisqu'à l'époque de l'étude de ces derniers, ces tests n'avaient pas encore été développés. Les auteurs testent l'hypothèse nulle d'un seul régime contre l'hypothèse alternative de deux régimes, selon les trois spécifications mentionnées ci-dessus, en utilisant le test de ratio de vraisemblance et les valeurs critiques de Garcia (1992).

Schaller et Van Norden trouvent que l'hypothèse nulle d'un seul régime est fortement rejetée pour les trois hypothèses alternatives et concluent qu'il y a une forte évidence de changements de régime sur le marché boursier américain, cette évidence étant robuste aux différentes spécifications et à la période d'estimation. Ils distinguent aussi les faits suivants concernant les différentes spécifications. D'abord, pour la première spécification, il y a un état persistant dans lequel le rendement excédentaire est positif et un état rare caractérisé par des crises importantes du marché boursier. Ensuite, pour la deuxième spécification, il y a deux régimes persistants avec un état à volatilité faible, et un état à volatilité élevée qui survient entre autres entre 1929 et 1933 ainsi qu'entre 1937 et 1940. Enfin, pour la troisième spécification, le marché des actions est caractérisé par un état de rendement excédentaire positif et de risque faible, ainsi que par un état de rendement moyen négatif et de risque élevé.

Les auteurs procèdent aussi à une série de tests sur les résidus des trois spécifications précédentes afin de vérifier l'hypothèse de normalité. Les résultats de ces tests ne montrent aucune évidence de corrélation sérielle, ni d'effets ARCH résiduels. De plus, il y a peu d'évidence d'effet markovien d'ordre plus élevé, ce qui signifie que les données sont bien caractérisées par un processus markovien d'ordre 1.

En deuxième partie, Shaller et Van Norden adoptent l'approche multivariée afin d'analyser la prédictabilité des rendements des actions à l'aide de variables

économiques. A cette fin, ils modélisent les changements de régimes sur la moyenne et sur la variance en incluant le ratio cours-dividendes dans la formulation de la moyenne, ce qui permet de considérer la prédictabilité des rendements. Les auteurs considèrent aussi le cas où les probabilités de transition varient dans le temps et sont déterminées par le ratio cours-dividendes.

Leurs résultats montrent une forte évidence de prédictabilité des rendements à l'aide du ratio cours-dividendes et suggèrent que l'effet de ce dernier est distinct entre les deux régimes. Ils concluent aussi que, d'une part le pouvoir prédictif du ratio cours-dividendes sur les rendements n'est pas attribuable à l'hypothèse de probabilités de transition constantes, et que d'autre part, il est difficile de prédire l'état à volatilité élevée en se basant sur ce ratio.

4. Garcia et Perron (1996)

Garcia et Perron font l'analyse du taux d'intérêt réel en fonction de changements de régimes. Ils utilisent à cette fin la méthodologie de Hamilton et décrivent statistiquement le comportement temporel du taux d'intérêt réel ex-post en considérant de la non-stationnarité sous forme de changements occasionnels de la moyenne et de la variance. Ils utilisent un modèle markovien à changements de régimes avec un nombre arbitraire de changements d'états qui surviennent à des dates inconnues.

Leur étude porte sur le taux d'intérêt réel américain trimestriel et mensuel pour la période de 1961 à 1986. Ils utilisent le bons du trésor américain à 3 mois comme taux d'intérêt nominal ainsi que l'indice des prix à la consommation américain comme mesure de l'inflation.

Les auteurs concluent qu'un modèle markovien à trois régimes qui ne surviennent qu'une seule fois caractérise le mieux le taux d'intérêt réel. En effet, les résultats d'estimations du modèle montrent que les probabilités de transition pour chaque

régime sont très proches de 1, ce qui explique que chaque état n'apparaisse qu'une seule fois.

Ces résultats ne doivent toutefois pas être considérés d'un point de vue statistique comme un modèle du taux d'intérêt réel ex-post permettant de faire des prévisions à moyen et long termes. Ils indiquent plutôt la présence de trois états à différentes moyennes, celles-ci étant engendrées par des sauts occasionnels causés par des événements économiques structurels importants. Ainsi, le premier saut coïncide avec la hausse du prix du pétrole en 1973 et le second au déficit budgétaire fédéral américain du milieu de l'année 1981.

Garcia et Perron développent de nombreux tests et procèdent à des analyses de sensibilité pour vérifier la bonne spécification du modèle ainsi que sa robustesse. Ils utilisent d'abord les tests de Davies (1987) et de Gallant (1977) afin de voir la pertinence de l'utilisation de trois états par rapport à celle de un, deux ou quatre états. Les résultats démontrent alors clairement que le taux d'intérêt réel ex-post suit un modèle markovien à changements de régimes à trois états et qu'il n'y a aucune évidence de la présence d'un quatrième.

Ensuite, ils testent la structure autorégressive du modèle soit en permettant aux paramètres autorégressifs de varier selon l'état, soit en ajoutant de l'inflation retardée au modèle initial. Ces deux procédures démontrent qu'il n'y a plus d'autocorrélation dans la série du taux d'intérêt réel ex-post une fois que les changements dans la moyenne et la variance sont considérés.

Les auteurs testent aussi la présence d'effets ARCH résiduels dans les résidus du modèle markovien à changements de régimes à trois états afin de vérifier s'il reste de l'hétéroscédasticité conditionnelle, une fois que l'hétéroscédasticité dépendant des états est considérée. Ils en concluent que le taux d'intérêt réel peut être considéré comme un bruit blanc une fois que l'on tient compte des changements dans la moyenne et la variance, puisqu'aucun effet ARCH résiduel n'a été détecté.

Enfin, ils utilisent des extensions aux procédures de Banerjee, Lumsdaine et Stock (1992) et de Andrews (1993), afin de détecter la présence de changements structurels et de déterminer leur date. Leurs résultats indiquent un premier changement de moyenne au troisième trimestre de 1972, ainsi qu'un deuxième au premier trimestre de 1980, ce qui est confirmé par l'estimation des données mensuelles. Le rejet de l'hypothèse nulle d'absence de changement structurel ainsi que les dates estimées pour ces changements confirment les résultats obtenus par le modèle markovien à changements de régimes.

5. Gray (1996)

Dans cet article, Gray modélise la distribution conditionnelle du taux d'intérêt comme un processus markovien à changements de régimes, en utilisant les rendements mensuels et hebdomadaires des bons du trésor américain de janvier 1970 à avril 1994.

Il part de l'idée que la structure de base des modèles de taux d'intérêts existants offrent une bonne caractérisation du processus du taux court mais que la variation dans le temps de la valeur des paramètres peut parfois produire des résultats non conformes à la théorie ou simplement mauvais. Il développe alors un modèle généralisé de changements de régimes (GRS) qui pourrait combler les lacunes des modèles antérieurs.

Son modèle GRS est construit de façon à permettre à la valeur des paramètres de non seulement varier dans le temps mais aussi avec les changements de régimes. Les coefficients des paramètres sont différents dans chaque régime afin de tenir compte de la possibilité que les mécanismes économiques générant le taux court subissent un nombre fini de changements pour une période de temps donnée. D'autre part, les probabilités de transition peuvent être variables et dépendre du niveau des taux d'intérêt.

Il est à noter que son modèle, dit généralisé, englobe plusieurs modèles existants du taux d'intérêt dont la version discrète du modèle de diffusion avec un processus racine carrée et d'autres modèles tels que le modèle markovien à changements de régimes et le modèle GARCH.

Il se distingue toutefois de la littérature existante à plusieurs niveaux. D'abord, dans la plupart des modèles à changements de régimes existants, les moments conditionnels aux régimes sont constants. La moyenne et la variance du taux d'intérêt sont maintenues constantes dans chaque régime, ce qui ne permet pas la considération de phénomènes tels que le retour vers la moyenne et l'hétéroscédasticité conditionnelle à l'intérieur de chaque régime.

Ensuite, son modèle GRS dépasse les modèles ARCH avec changements de régimes de Cai (1994) et de Hamilton et Susmel (1994) dans la mesure où les variances conditionnelles sont plus flexibles et permettent d'incorporer de la persistance temporelle importante (associée aux effets GARCH). Enfin, contrairement aux modèles précédents, tous les paramètres du GARCH dépendent du régime. Ceci est très important dans la mesure où la persistance des chocs individuels est plus faible durant les périodes d'extrême volatilité.

Gray fait en sorte que la variance conditionnelle de chaque régime puisse dépendre du niveau des taux d'intérêt de façon à ce que le processus de la variance conditionnelle considère à la fois les effets de clustering de volatilité et de dépendance au niveau du taux d'intérêt. L'auteur utilise la nature récursive des probabilités des régimes décrite par Hamilton (1994) et par Gray (1995) pour simplifier la construction de la fonction de vraisemblance. Il cherche aussi un moyen de résoudre le problème de dépendance des séquences des régimes (path-dependance) soulevé par Cai (1994) et par Hamilton et Susmel (1994) en ce qui concerne les problèmes liés à l'estimation des modèles à changements de régimes avec GARCH.

L'auteur a procédé à l'estimation de plusieurs modèles. D'abord, il a estimé le modèle markovien à changements de régimes avec variance constante à chaque

état. Ses résultats montrent que ce modèle capte une grande partie de la volatilité stochastique du taux d'intérêt et qu'il ne reste pas de corrélation sérielle dans le carré des résidus standardisés, toutefois la variance conditionnelle réplique les probabilités de l'état à volatilité élevée. Ensuite, l'auteur a estimé un modèle à changements de régimes avec une variance conditionnelle suivant un processus GARCH(1,1) dont les résultats montrent l'absence de corrélation sérielle dans le carré des résidus standardisés. Le modèle permet de la flexibilité supplémentaire par l'effet GARCH ainsi qu'une caractérisation plus riche de la variance conditionnelle. Enfin, l'auteur construit un processus de variance conditionnelle qui tient compte à la fois de l'effet niveau et de l'effet GARCH et les résultats d'estimations montrent que les deux effets sont statistiquement significatifs.

De plus, Gray introduit des probabilités de transition variables et en conclut que cela améliore la performance de son modèle. Il trouve que le niveau des taux d'intérêt est un élément important dans la prédiction des changements entre les régimes.

En conclusion, Gray montre, en établissant l'importance économique de considérer les changements entre différents régimes, que le modèle GRS offre de meilleures prévisions hors-échantillon et permet d'avoir de meilleures évaluations des prix des titres financiers qui sont sensibles au taux d'intérêt.

IV. PRESENTATION DES DONNEES ET ANALYSE DE LA SERIE DES RENDEMENTS DU S&P 500

1. Données de l'étude

Cette étude porte sur les rendements quotidiens de l'indice boursier américain du Standard & Poor's 500, pour la période du 3 juillet 1962 au 29 décembre 2000, avec un total de 9694 observations. Les rendements mensuels du même indice boursier ont été utilisés à des fins de tests sur la période de juillet 1962 à décembre 2000, pour un total de 462 observations.

Ces deux séries de l'indice boursier pondéré par la valeur incluant les dividendes (VWRETD) proviennent des bases de données du CRSP (Center for Research in Security Prices). On va étudier les rendements du S&P 500, Y_t , tels que:

$Y_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$ où P_t est le prix de l'action à la période t , incluant les dividendes.

Les variables économiques utilisées dans le modèle sont les bons du trésor à trois mois, la prime de défaut qui est la différence entre les rendements des obligations corporatives Baa et Aaa, ainsi que la prime de terme, soit l'écart entre les rendements à 10 ans et à 1 an.

- Les rendements des Bons du Trésor à 3 mois proviennent de la base de données FRED du site web de la réserve fédérale de Saint-Louis et ont été utilisés comme taux sans risque, soit un proxy des chocs sur la croissance anticipée réelle de l'activité économique.
- Les rendements des obligations corporatives de Moody's Aaa et Baa proviennent de la base de données Datastream et servent de prime de défaut afin de traquer les variations cycliques de la prime de risque des actions.
- Les rendements des obligations gouvernementales de 10 ans et 1 an proviennent de la base de données du CRSP et sont utilisés comme prime de terme afin de prendre en considération l'échéance.

2. Etude de la série des rendements du S&P 500

Tableau 1

Données quotidiennes du 3 juillet 1962 au 29 décembre 2000

Statistiques descriptives

Nombre d'observations	9694
Moyenne	0.0005
Écart-type	0.0091
Coefficient d'asymétrie	-1.5421
Coefficient d'aplatissement *	38.8209
Minimum	-0.2164
Maximum	0.0845

Tests d'autocorrélation

Statistique de Ljung-Box $L=5$	113.44
Statistique de Ljung-Box $L=10$	122.79

Tests de ratios de variance

Ratio de variance $L=5$ (statistique phi)	1.11 (2,121014)
Ratio de variance $L=10$ (statistique phi)	1.08 (0,987857)
Ratio de variance $L=15$ (statistique phi)	1.05 (0,540499)
Ratio de variance $L=20$ (statistique phi)	1.05 (0,504090)

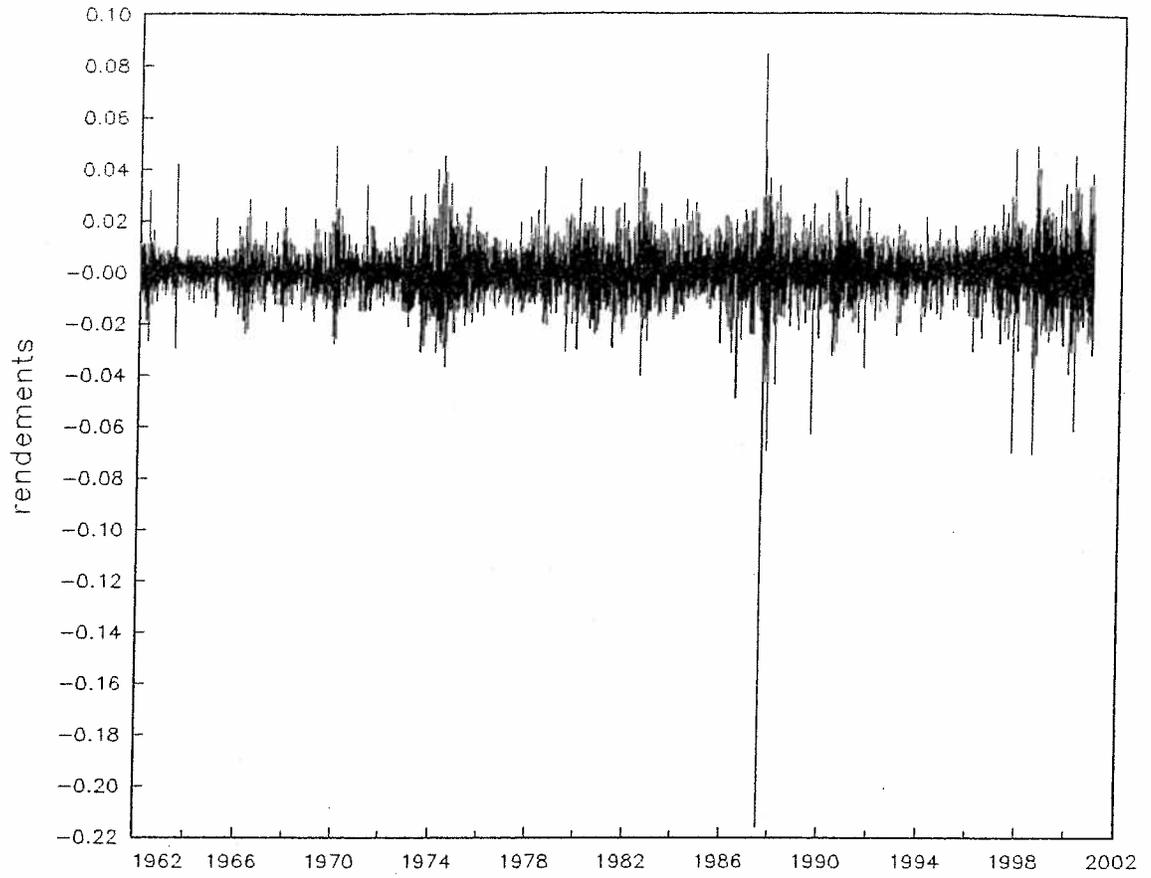
Tests de racine unitaire

Test de Dickey-Fuller $L=0$	-8699.71
Test t	-88.82
Test de Dickey-Fuller augmente $L=1$	-9314.50
Test t	-68.23
Test de Phillips-Perron $L=1$	-8716.24
Test t	-88.84

Remarque: le nombre de lags est indiqué en indice.

*en excédent de la valeur de la loi Normale (Excess Kurtosis)

FIGURE 1
Série des rendements journaliers du S&P 500 de 1962 à 2000



Le tableau 1 résume l'étude de la série des rendements journaliers de l'indice du S&P 500.

Les rendements du S&P 500 ont un coefficient d'asymétrie très différent de celui correspondant à la loi normale (de 0) et de plus en valeur négative, c'est-à-dire qu'une grande baisse des rendements serait plus probable qu'une grande hausse de ces derniers.

Le coefficient d'aplatissement est très largement supérieur à 3; les queues de distribution des rendements sont donc plus épaisses que celles de la loi normale et la distribution est leptokurtique.

On teste la marche aléatoire (RW) avec l'hypothèse nulle d'absence d'autocorrélation, en utilisant la statistique de Ljung-Box ainsi que le ratio de variance, et on rejette largement l'hypothèse nulle de marche aléatoire. L'autocorrélation des rendements est clairement très élevée.

On vérifie la présence de racine unitaire dans le processus par les tests de Dickey-Fuller, de Dickey-Fuller augmenté, et de Philips Perron. Les résultats démontrent que l'hypothèse de racine unitaire est largement rejetée, même en corrigeant pour l'autocorrélation.

Les rendements des actions sont donc stationnaires mais fortement corrélés, de distribution asymétrique et leptokurtique, tel qu'anticipé.

V. LES MODELES MARKOVIENS A CHANGEMENTS DE REGIMES (SWM)

1. Éléments de théorie

Le modèle markovien à changements de régime, développé par Hamilton (1989) à partir de l'idée initiale de régression à changements de régimes de Goldfeld et Quandt (1973), permet de modéliser la variation du processus de la série, et de faire ainsi de la prévision en tenant compte de cette variation éventuelle possible. En fait, la variation elle-même ne va pas être déterministe mais plutôt aléatoire et les changements de régime vont être déterminés non par le niveau du processus, mais plutôt par une variable d'état de l'économie aléatoire et non observée, qui sera modélisée comme une chaîne de Markov.

Dans notre cas, les modèles markoviens à changements de régime à deux états avec des moyennes et variances variables dans le temps et des poids différents sont appliqués afin de considérer les variations du cycle d'affaire à la fois dans la distribution de probabilités et dans les moments de plus grand ordre des rendements des actions. Ce qui permet de donner une caractérisation plus compréhensive du risque qui va plus loin que les deux premiers moments.

La littérature montre qu'il est utile de modéliser les rendements des actions avec deux états, soit l'état d'expansion et l'état de récession. Ainsi, entre autres, Perez-Quiroz et Timmermann (2000) expliquent que les formulations classiques qui spécifient les rendements des actions avec un seul état, en utilisant le même modèle en périodes de récession et d'expansion sont mal spécifiées et entraînent de mauvais résultats et interprétations. Ils trouvent aussi que même les modèles markoviens à changements de régime les plus simples présentent un moyen très flexible de modéliser les dynamiques complexes des séries financières. En fait, l'utilisation des modèles markoviens à changements de régime permet, de par la mixture de probabilités, de générer une variété de faits stylisés des rendements des actions, c'est-à-dire introduire de la corrélation sérielle, du clustering de

volatilité, de l'asymétrie et de l'aplatissement. On a donc une mixture de normales qui va augmenter l'ampleur des asymétries et générer une distribution à plus fortes queues, à la fois dans les distributions conditionnelles et inconditionnelles des rendements des actions.

2. Présentation du modèle général de SWM et de sa procédure d'estimation

2-1. Présentation du modèle

Le modèle assume que l'on ne peut pas connaître l'état de l'économie avec certitude, mais que les états évoluent comme un processus markovien d'ordre 1.

$$Y_t = \mu_0(1 - S_t) + \mu_1 S_t + (\sigma_0(1 - S_t) + \sigma_1 S_t) \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim N(0,1) \quad (1)$$

où S_t est la variable d'état non observée et $S_t \in \{0,1\}$.

Si on considère deux états de l'économie, soient les états 0 et 1, le processus stochastique de S_t va être représenté par la matrice de probabilités de transition constantes suivante:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{10} \\ P_{01} & P_{11} \end{bmatrix} \quad (2)$$

où $P_{ij} = \Pr(S_t = j \mid S_{t-1} = i)$ est la probabilité de passer de l'état i à l'état j ,
et $\sum_{j=0}^1 P_{ij} = 1$ pour $i = 0,1$.

Les probabilités de transition vont prendre la forme logistique suivante:

$$\Pr(S_t = 0 \mid S_{t-1} = 0) = P_{00} = \frac{\exp(\theta_{p_{00}})}{1 + \exp(\theta_{p_{00}})}$$

$$\Pr(S_t = 1 \mid S_{t-1} = 1) = P_{11} = \frac{\exp(\theta_{p_{11}})}{1 + \exp(\theta_{p_{11}})} \quad (3)$$

$$\Pr(S_t = 0 \mid S_{t-1} = 1) = P_{10} = 1 - P_{11}$$

$$\Pr(S_t = 1 \mid S_{t-1} = 0) = P_{01} = 1 - P_{00}$$

Étant donné que l'on a supposé la normalité conditionnelle pour chaque régime, on a :

$$Y_t \mid I_{t-1} \sim \begin{cases} N(\mu_0, \sigma_0) & \text{avec prob. } \pi_0 \\ N(\mu_1, \sigma_1) & \text{avec prob. } 1 - \pi_0 \end{cases} \quad (4)$$

avec $\pi_0 = \Pr(S_t = 0 \mid I_{t-1})$, où I_{t-1} représente toute l'information disponible au temps $t-1$.

2-2. Procédure d'estimation du modèle

Les paramètres de l'équation (1) ainsi que les probabilités de transition de l'équation (2) sont conjointement estimés par la méthode de Maximum de vraisemblance pour une mixture de normales.

a) Fonction de vraisemblance

Afin d'obtenir la fonction de vraisemblance, il faut suivre la démarche suivante :

i. La fonction de densité conditionnelle de Y_t sachant S_t est :

$$f(Y_t \mid S_t = j; \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_j} \exp\left(\frac{-(Y_t - \mu_j)^2}{2\sigma_j^2}\right) \quad \text{pour } j = 0, 1. \quad (5)$$

ii. La probabilité inconditionnelle que l'on soit dans l'état j à la période t , soit $S_t = j$ est :

$$\Pr\{S_t = j; \theta\} = \pi_j \quad \text{pour } j = 0, 1. \quad (6)$$

où $\theta \equiv (\mu_0, \mu_1, \sigma_0^2, \sigma_1^2, \pi_0, \pi_1)$ est le vecteur des paramètres.

iii. Pour obtenir la fonction de densité jointe de Y_t et S_t , on utilise la règle de Bayes :

$$\begin{aligned} \Pr\{ Y_t, S_t ; \theta \} &= f (Y_t | S_t=j ; \theta) . \pi_j && \text{pour } j = 0,1 \\ &= \frac{\pi_j}{\sqrt{2\pi} \sigma_j} \exp\left(\frac{-(Y_t - \mu_j)^2}{2\sigma_j^2} \right) && \text{pour } j = 0,1 \end{aligned} \quad (7)$$

iv. Pour obtenir la fonction de densité inconditionnelle de Y_t ,

$$f (Y_t ; \theta) = \Pr\{ Y_t, S_t=0 ; \theta \} + \Pr\{ Y_t, S_t=1 ; \theta \} \quad (8)$$

v. On utilise la fonction de densité de l'équation (8) et on obtient alors la fonction de vraisemblance suivante :

$$L(\theta) = \sum_{t=1}^T \log f (Y_t ; \theta) \quad (9)$$

sous contraintes $\pi_0 + \pi_1 = 1$ et $\pi_j \geq 0$ pour $j = 0,1$.

Comme on n'observe pas S_t mais seulement Y_t du temps 0 au temps T , on doit trouver une méthode optimale d'inférence sur l'état actuel en se basant sur l'historique des valeurs observées de Y_t . En fait, il s'agit de classifier les observations dans les deux états et d'estimer conjointement les paramètres $\theta \equiv (\mu_0, \mu_1, \sigma_0^2, \sigma_1^2, \pi_0, \text{ et } \pi_1)$ du modèle ainsi que les probabilités de transition P_{ij} , sachant les deux états, afin d'estimer la fonction de vraisemblance.

On va avoir recours à la méthode de filtrage selon l'idée de filtre non-linéaire et récursif de Hamilton. Celle-ci, décrite par Kim et Nelson (1999), consiste à faire de l'inférence de probabilités sur la variable d'état non observée S_t étant données les observations de Y_t .

b) Méthode de filtrage

Étape 1

On va considérer $\Pr(S_{t-1} = i | I_{t-1}) = \pi_i$ au début du temps t (ou à la t^e itération)

et on va calculer le terme de pondération $\Pr(S_t = j | I_{t-1})$ tel que :

$$\begin{aligned}\Pr(S_t = j | I_{t-1}) &= \sum_{i=0}^1 \Pr(S_t = j, S_{t-1} = i | I_{t-1}) \\ &= \sum_{i=0}^1 \Pr(S_t = j | S_{t-1} = i) \Pr(S_{t-1} = i | I_{t-1})\end{aligned}\quad (10)$$

où $\Pr(S_t = j | S_{t-1} = i) = P_{ij}$ sont les probabilités de transition, avec $i, j = 0, 1$.

Étape 2

Une fois que Y_t est observé à la fin du temps t (ou de la t^e itération), on peut mettre à jour le terme de probabilité de la façon suivante:

$$\begin{aligned}\Pr(S_t = j | I_t) &= \Pr(S_t = j | I_{t-1}, Y_t) = \frac{f(S_t = j, Y_t | I_{t-1})}{f(Y_t | I_{t-1})} \\ &= \frac{f(Y_t | S_t = j, I_{t-1}) \Pr(S_t = j | I_{t-1})}{\sum_{j=0}^1 f(Y_t | S_t = j, I_{t-1}) \Pr(S_t = j | I_{t-1})}\end{aligned}\quad (11)$$

où $I_t = \{ I_{t-1}, Y_t \}$.

Ces deux étapes peuvent être itérées afin d'obtenir $\Pr(S_t = j | I_{t-1})$, $t = 1, 2, \dots, T$.

On a toutefois besoin d'une valeur initiale de $\Pr(S_1 | I_0)$ afin de débiter le filtre.

On peut utiliser à cette fin les probabilités inconditionnelles de S_t pour chaque état proposées par Chiang (1980), soient :

$$\begin{aligned}\pi_0 &= \Pr\{ S_1 = 0 \mid I_0 \} = \frac{1 - P_{11}}{2 - P_{11} - P_{00}} \\ \pi_1 &= \Pr\{ S_1 = 1 \mid I_0 \} = \frac{1 - P_{00}}{2 - P_{11} - P_{00}}\end{aligned}\quad (12)$$

Les probabilités filtres donnent de l'information sur le régime dans lequel la série des rendements se situe le plus probablement à chaque période de l'échantillon, ce qui est utile afin de détecter les changements de régime.

c) Méthode de lissage selon l'algorithme de Kim (1999)

Une fois que les paramètres du modèle sont estimés, on peut faire de l'inférence sur S_t en utilisant toute l'information disponible dans l'échantillon. On peut alors se servir de Y_T afin de trouver la probabilité lissée $\Pr(S_t = j \mid I_T)$ qui est encore plus précise puisque basée sur plus d'information que la probabilité filtre.

On a la probabilité jointe suivante:

$$\Pr(S_t = j, S_{t+1} = k \mid I_T) = \frac{\Pr(S_{t+1} = k \mid I_T) \cdot \Pr(S_t = j \mid I_t) \cdot \Pr(S_{t+1} = k \mid S_t = j)}{\Pr(S_{t+1} = k \mid I_t)}, \quad (13)$$

et

$$\Pr(S_t = j \mid I_T) = \sum_{k=0}^1 \Pr(S_t = j, S_{t+1} = k \mid I_T), \quad (14)$$

En ayant $\Pr(S_T \mid I_T)$ provenant de la dernière itération du filtre, les expressions (13) et (14) peuvent être itérées pour $t = T-1, T-2, \dots, 1$, afin d'obtenir les probabilités lissées $\Pr(S_t \mid I_T)$ pour $t = T-1, T-2, \dots, 1$.

3. A propos de l'estimation

Les modèles markoviens à changements de régime (SWM) selon les différentes spécifications sont tous estimés à l'aide de la procédure OPTIMUM du logiciel GAUSS en utilisant l'algorithme numérique de Broyden, Fletcher, Goldfarb et Shanno (BFGS). Il est à mentionner que plusieurs algorithmes ont été essayés pour vérifier la robustesse de l'estimation. L'algorithme BFGS a été choisi parce qu'il permet de minimiser le temps d'estimation tout en obtenant les mêmes résultats.

Différentes valeurs initiales arbitraires et provenant de recherches ou d'estimations antérieures² ont été utilisées au début du processus d'optimisation pour s'assurer que les estimations finales soient robustes.

On a imposé différentes contraintes sur les paramètres lors de l'estimation: la forme logistique des probabilités a permis de situer les probabilités entre 0 et 1 et une contrainte de positivité a été imposée sur la variance.

Les erreurs standards des paramètres ont été estimées à l'aide de la matrice de variance-covariance de White qui reste consistante en présence d'hétéroscédasticité.

² dont les valeurs estimées de Schaller et Van Norden (1997), et de Nelson, Startz et Turner (1989), ainsi que les statistiques descriptives des échantillons en données positives et négatives.

4. Présentation des différentes spécifications du modèle SWM

On va commencer par voir si la modélisation en deux régimes selon le modèle SWM simple et d'après différentes spécifications va être adéquat pour tenir compte des caractéristiques des rendements dont l'hétéroscédasticité conditionnelle.

4-1. Modèles SWM avec probabilités de transition constantes

i. Modèle SWM à deux régimes sur la moyenne et sur la variance

Cette spécification coïncide avec le cas général décrit à la section 2-1.

Les rendements du S&P 500 sont tirés de deux distributions qui diffèrent à la fois par les moyennes et les variances.

$$Y_t = \mu_0 (1 - S_t) + \mu_1 S_t + (\sigma_0 (1 - S_t) + \sigma_1 S_t) \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim N(0,1) \quad (15)$$

ii. Modèle SWM à deux régimes sur la variance, moyenne constante

Les rendements sont tirés de deux distributions qui diffèrent seulement par leur variance, la moyenne étant constante dans l'échantillon.

$$Y_t = \mu + (\sigma_0 (1 - S_t) + \sigma_1 S_t) \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim N(0,1) \quad (16)$$

iii. Modèle SWM à deux régimes sur la moyenne et sur la variance, avec AR(1)

Les rendements suivent un modèle autorégressif d'ordre 1, le paramètre autorégressif ne dépendant pas de l'état. Ils sont aussi tirés de deux distributions qui diffèrent à la fois par les moyennes et les variances

$$Y_t = \mu_0 (1 - S_t) + \mu_1 S_t + Q_t$$
$$Q_t = \phi_1 \cdot Q_{t-1} + (\sigma_0 (1 - S_t) + \sigma_1 S_t) \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim N(0,1) \quad (17)$$

iv. Modèle markovien à deux régimes sur la moyenne et sur la variance, avec AR(2)

Les rendements suivent un modèle autorégressif d'ordre 2, les paramètres autorégressifs ne dépendant pas de l'état. Ils sont tirés de deux distributions qui diffèrent à la fois par les moyennes et les variances.

$$\begin{aligned} Y_t &= \mu_0(1 - S_t) + \mu_1 S_t + Q_t \\ Q_t &= \phi_1 \cdot Q_{t-1} + \phi_2 \cdot Q_{t-2} + (\sigma_0(1 - S_t) + \sigma_1 S_t) \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim N(0,1) \end{aligned} \quad (18)$$

4-2. Modèles SWM avec probabilités de transition variables

On fait donc une extension au modèle markovien à changement de régime non linéaire de Hamilton par l'introduction de probabilités de transition variables dans le temps selon l'approche de Filardo (1994).

On va estimer deux spécifications de SWM à probabilités de transition variables. D'abord on considère un SWM à deux régimes sur la moyenne et sur la variance selon l'équation (15). Ensuite, on modélise les rendements selon un modèle autorégressif d'ordre 2, les paramètres autorégressifs ne dépendant pas de l'état, de la même façon que l'équation (18).

La variable d'état S_t va être représentée par la matrice de probabilités de transition variables dépendant des variables économiques Z_{t-1} de la façon suivante:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} P_{00}(Z_{t-1}) & P_{10}(Z_{t-1}) \\ P_{01}(Z_{t-1}) & P_{11}(Z_{t-1}) \end{bmatrix} \quad \text{où } Z_{t-1} = \{ Z_{t-1}, Z_{t-2}, \dots \} \quad (19)$$

Les probabilités de transition vont prendre la forme logistique suivante :

$$\begin{aligned} \Pr(S_t = 0 \mid S_{t-1} = 0, Z_{t-1}) &= P_{00}(Z_{t-1}) = \frac{\exp(\theta_{p_{00}} + \beta'_{p_{00}} Z_{t-1})}{1 + \exp(\theta_{p_{00}} + \beta'_{p_{00}} Z_{t-1})} \\ \Pr(S_t = 1 \mid S_{t-1} = 1, Z_{t-1}) &= P_{11}(Z_{t-1}) = \frac{\exp(\theta_{p_{11}} + \beta'_{p_{11}} Z_{t-1})}{1 + \exp(\theta_{p_{11}} + \beta'_{p_{11}} Z_{t-1})} \end{aligned} \quad (20)$$

$$\Pr(S_t = 0 \mid S_{t-1} = 1, Z_{t-1}) = P_{10}(Z_{t-1}) = 1 - P_{11}(Z_{t-1})$$

$$\Pr(S_t = 1 \mid S_{t-1} = 0, Z_{t-1}) = P_{01}(Z_{t-1}) = 1 - P_{00}(Z_{t-1})$$

On va considérer pour Z_{t-1} le taux sans risque comme proxy des chocs sur la croissance anticipée réelle de l'activité économique, la prime de défaut comme indicateur des variations cycliques de la prime de risque des actions, ainsi que la prime de terme pour prendre en considération l'échéance³.

Ce modèle a l'avantage de permettre aux probabilités de transition de dépendre des variables économiques pertinentes qui peuvent informer sur l'état de l'économie ainsi que sur le mouvement éventuel du niveau des rendements. On a alors de l'information additionnelle importante sur le fait qu'un état ou qu'un point tournant survienne, ce qui peut aider à prévoir le moment où l'état de l'économie va éventuellement changer. Ce modèle est donc plus flexible et contient plus d'information, ce qui améliore le pouvoir prévisionnel de celui-ci.

Concernant les variables économiques pertinentes employées dans ce modèle, elles ont été largement utilisées dans la littérature dans d'autres contextes.

On n'a toutefois pas encore trouvé les variables qui expliqueraient la majeure partie de la variation des rendements des actions. En effet, tel que décrit dans Fong (2001), de nombreuses études ont démontré que les variables économiques fondamentales ne peuvent expliquer qu'une petite fraction de la variation des rendements des actions et que le pouvoir explicatif de ces variables diminue à mesure que la fréquence des données ~~baisse~~.

augmente.

³ Il est à noter que ces variables ont été utilisées en différence première pour assurer leur stationnarité.

5. Résultats d'estimations des différentes spécifications du modèle SWM

5-1. Modèles SWM avec probabilités de transition constantes

Les résultats des estimations des différentes spécifications du modèle SWM sont présentés dans les tableaux 2 à 5.

La moyenne estimée pour l'état 0 est de 0.0007 pour le SWM de base (tableau 2), et de 0.0006 pour le SWM avec AR(1) (tableau 4) ainsi que pour le SWM avec AR(2) (tableau 5). La moyenne estimée pour l'état 1 est de -0.00002 pour le SWM de base (tableau 2), de 0 pour le SWM avec AR(1) (tableau 4) et de 0.00002 pour le SWM avec AR(2) (tableau 5). Les valeurs estimées des paramètres ne sont pas significativement différentes de 0 à 5%. On a donc une moyenne plus élevée pour l'état 0 que pour l'état 1.

La moyenne constante du modèle SWM sur variances est de 0.0006 (tableau 3).

La variance estimée pour l'état 0 est de 0.00004 et celle de l'état 1 est de 0.0002, et ce pour toutes les spécifications de SWM. La variance des rendements à l'état 1 est donc 5 fois supérieure à la variance des rendements à l'état 0.

On voit bien, par ces résultats, l'évidence de changements de régimes distincts dans les rendements des actions. On a donc un état optimiste à moyenne élevée et volatilité faible, ainsi qu'un état pessimiste à moyenne faible et volatilité élevée. Des rendements faibles sont donc associés aux périodes de volatilité élevée, ce qui pourrait être expliqué par l'effet de levier décrit à la section II. La spécification de SWM sur variances n'est cependant pas appropriée puisqu'elle n'a aucun ajout comparativement aux autres.

Le paramètre estimé ϕ_1 du SWM avec AR(1) est de 0.126 alors que pour le SWM avec AR(2), les paramètres estimés ϕ_1 et ϕ_2 sont de 0.13 et -0.03 respectivement, tous les paramètres étant significativement différents de 0. La spécification du modèle SWM avec AR(2) est donc justifiée.

Les probabilités de transition estimées sont de 0.988 pour l'état 0 et de 0.968 pour l'état 1, et ce pour toutes les spécifications de SWM. On a donc deux états très persistants puisque P_{00} et P_{11} sont supérieurs à 0.5, avec une légère dominance pour l'état 0 (optimiste).

Ces estimations de P_{00} et P_{11} suggèrent que, pour tout l'échantillon, les probabilités inconditionnelles des états sont de 0.7273 et de 0.2737, pour l'état 0 (optimiste) et l'état 1 (pessimiste) respectivement. Ainsi, pour un échantillon quelconque donné, près de 27% des observations devraient se situer dans l'état pessimiste. On a aussi une duration anticipée conditionnelle à l'état 0 de 81.96 jours par rapport à une duration conditionnelle à l'état 1 de 31.15 jours. Ainsi, on peut s'attendre à ce qu'en moyenne, une période de volatilité élevée dure près d'un mois.

La figure 2 illustre l'évolution des probabilités filtres et lissées de l'état 1 à volatilité élevée⁴. On voit que la probabilité est proche de 1 pour toutes les périodes très volatiles des rendements du S&P 500, comme par exemple lors de la crise pétrolière de 1973, de la hausse des taux d'intérêts ainsi que de la récession du début des années 80, lors du crash boursier d'octobre 1987, et de la chute des prix des titres technologiques en 2000. Pour les autres périodes où les rendements sont moins volatiles, les probabilités sont souvent plus proches de 0 et inférieures à 0.5. On remarque aussi à la figure 3 que l'écart-type conditionnel est une réplique des probabilités de l'état 1, ce qui pourrait être causé par le fait que seulement deux niveaux de volatilité sont considérés, et donc que le modèle ne capte pas suffisamment l'hétéroscédasticité conditionnelle des rendements.

Les résultats montrent qu'on peut déterminer clairement un état optimiste persistant à moyenne élevée et volatilité faible, ainsi qu'un état pessimiste légèrement moins persistant à moyenne faible et volatilité élevée; les différentes spécifications de SWM confirmant ces résultats.

⁴ Le graphique des probabilités filtres et lissées de l'état à volatilité élevée ainsi que celui de l'écart-type conditionnel (figures 2 et 3 respectivement) correspondent au modèle SWM de base. Les graphiques des autres spécifications étant identiques à ceux présentés, ils n'ont pas été inclus.

Tableau 2**SWM à deux régimes sur la moyenne et sur la variance**

Paramètres	Valeurs estimées	erreurs standards
P_{00}	0.9878	(0,0019)
P_{11}	0.9679	(0,0051)
$(\sigma_0)^2$	0.00004	(0,0000)
$(\sigma_1)^2$	0.0002	(0,00001)
μ_0	0.0007	(0,00008)
μ_1	-0.00002	(0,00029)*
Log-likelihood	33057.92	

Tableau 3**SWM à deux régimes sur la variance, moyenne constante**

Paramètres	Valeurs estimées	Erreurs standards
P_{00}	0.9877	(0,00196)
P_{11}	0.9680	(0,00509)
$(\sigma_0)^2$	0.00004	(0,0000)
$(\sigma_1)^2$	0.0002	(0,00001)
μ	0.00059	(0,00007)
Log-likelihood	33055.49	

* indique que le paramètre n'est pas significativement différent de 0 à un niveau d'au moins 5% (d'après p-value du test-t).

Tableau 4**SWM à deux régimes sur la moyenne et sur la variance, avec AR(1)**

Paramètres	Valeurs estimées	Erreurs standards
P_{00}	0.9879	(0,00194)
P_{11}	0.9686	(0,00514)
ϕ_1	0.1262	(0,01044)
$(\sigma_0)^2$	0.00004	(0,00000)
$(\sigma_1)^2$	0.0002	(0,00001)
μ_0	0.0006	(0,00009)
μ_1	0.0000	(0,00033)*
Log-likelihood	33127.63	

Tableau 5**SWM à deux régimes sur la moyenne et sur la variance, avec AR(2)**

Paramètres	Valeurs estimées	Erreurs standards
P_{00}	0.9877	(0,00195)
P_{11}	0.9683	(0,00508)
ϕ_1	0.1304	(0,01049)
ϕ_2	-0.0297	(0,01171)
$(\sigma_0)^2$	0.00004	(0,0000)
$(\sigma_1)^2$	0.0002	(0,00001)
μ_0	0.0006	(0,00009)
μ_1	0.00002	(0,00031)*
Log-likelihood	33127.78	

* indique que le paramètre n'est pas significativement différent de 0 à un niveau d'au moins 5% (d'après p-value du test-t).

FIGURE 2
Probabilités de l'état à volatilité élevée du SWM

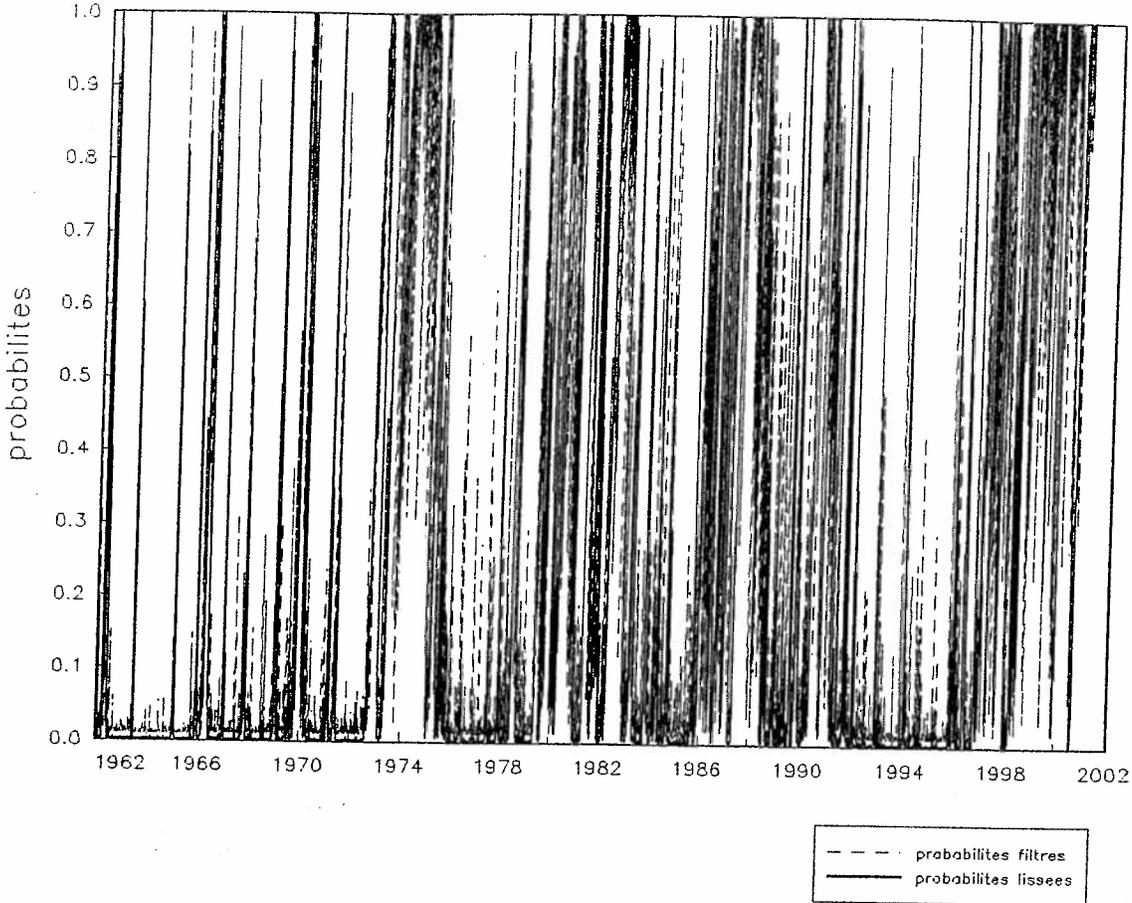
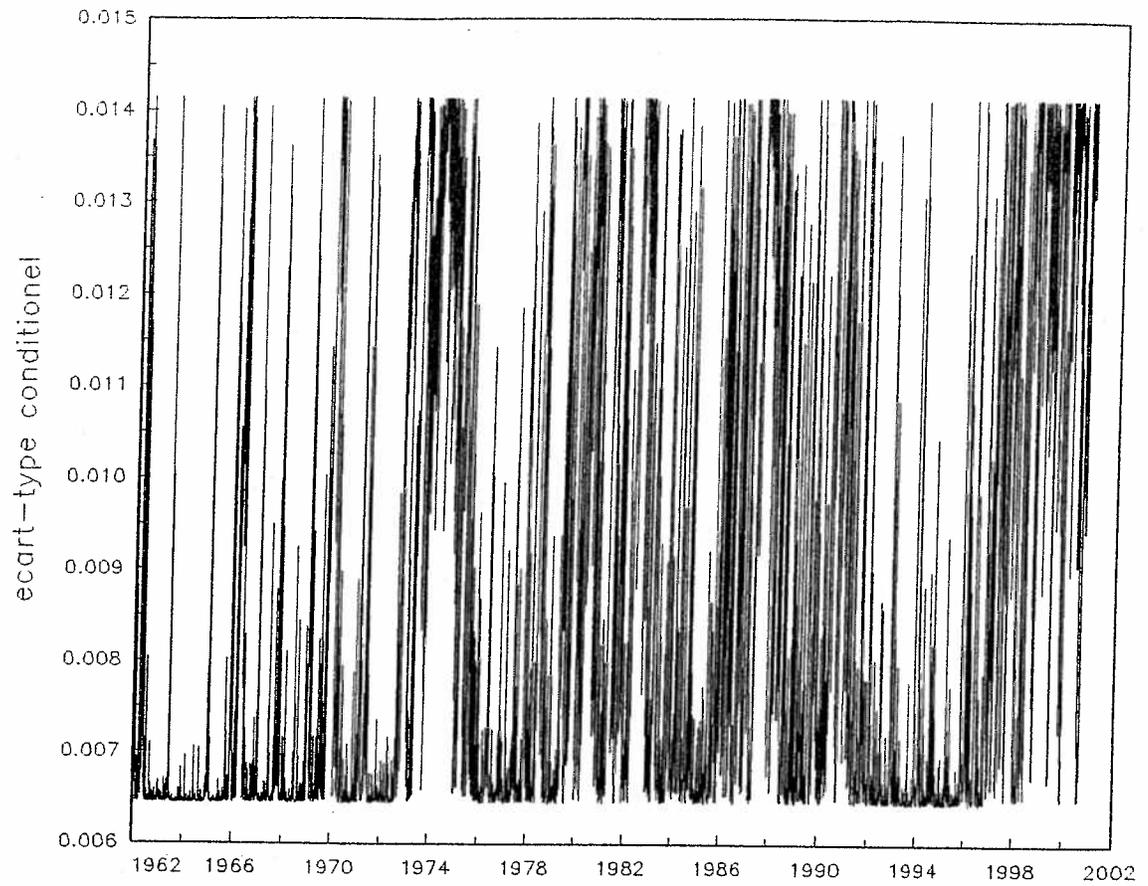


FIGURE 3
Écart-type conditionnel des rendements selon le SWM



5-2. Modèles SWM avec probabilités de transition variables

Les résultats des estimations de ce modèle n'ont pas été concluants pour les deux spécifications (voir annexes 1 et 2).

On a trouvé de nombreux maxima locaux et les valeurs estimées des paramètres sont très sensibles aux valeurs initiales. Le choix des variables est peut-être à améliorer et, comme décrit dans Cramer (1986), ces problèmes d'estimation pourraient indiquer une mauvaise spécification du modèle.

Il serait intéressant de revoir dans une autre étude le choix des variables économiques Z_{t-1} ainsi que la formulation de ces probabilités de transition variables.

6. Tests de diagnostic

6-1. Analyse des résidus

Tous les modèles estimés sont basés sur l'hypothèse que $\varepsilon_t \sim N(0,1)$, on va donc faire différents tests afin de vérifier si cette hypothèse tient et donc si les différentes spécifications du modèle SWM sont adéquates pour la série des rendements des actions.

A cette fin, on a utilisé:

- les coefficients d'asymétrie et d'aplatissements des résidus pour voir si la distribution des résidus reste asymétrique et leptokurtique,
- la statistique de Ljung-Box pour vérifier s'il reste de l'autocorrélation des résidus (celle-ci suit une $\chi^2(m)$ où m est le nombre de retards à considérer),
- le test d'effets ARCH résiduels pour voir s'il reste de l'hétéroscédasticité conditionnelle, une fois que l'hétéroscédasticité dépendant de l'état est considérée (puisque'il y a σ_0^2 et σ_1^2 dépendant des régimes 0 et 1 respectivement).

⇒ Pour tester la présence d'effets ARCH résiduels dans les résidus des modèles SWM, on procède à l'estimation des deux régressions suivantes:

- 1) On régresse le carré des résidus sur les probabilités filtrées pour tenir compte de l'hétéroscédasticité reliée aux deux régimes,
- 2) On ajoute à la régression précédente deux retards des résidus au carré.

On calcule ensuite une statistique F de la significativité jointe des coefficients des retards des résidus au carré, qui suit une $F_{(J, T-k)}$ où J est le nombre de contraintes, T le nombre d'observations et k le nombre de paramètres du modèle non contraint.

Les résultats des différents tests pour chaque spécification du modèle SWM sont présentés dans les tableaux 6 à 9.

On remarque que pour tous les modèles SWM, le coefficient d'asymétrie des résidus est négatif et largement inférieur à celui de la loi normale. Le coefficient d'aplatissement des résidus est largement supérieur à celui de la distribution normale. Les résidus présentent donc encore une distribution asymétrique et leptokurtique, pour toutes les spécifications de SWM.

Les résidus des rendements sont encore corrélés comme l'indique la statistique de Ljung-Box pour des retards de 5 et 10 jours. On remarque toutefois dans les tableaux 8.b et 9.b que les résultats s'améliorent en considérant un AR(1), puis un AR(2). Le modèle AR(2) est meilleur.

Les tests des effets ARCH indiquent qu'il reste de l'hétéroscédasticité conditionnelle une fois qu'on a considéré les changements de régimes et qu'aucune spécification n'a réussi à l'éliminer.

On peut conclure que le modèle SWM selon toutes ces spécifications ne caractérise pas bien les rendements du S&P 500. Les résidus sont corrélés et la

distribution des résidus standardisés reste asymétrique et leptokurtique alors qu'on fait l'hypothèse de résidus bruits blancs. Ainsi, ces résultats montrent qu'un modèle permettant de considérer de la volatilité conditionnelle variable dans le temps serait préférable pour modéliser les rendements du S&P 500.

6-2. Tests sur les modèles et tests de robustesse

On va employer le test du ratio de vraisemblance (LR) qui permet de vérifier la validité d'utiliser le modèle SWM, c'est-à-dire un modèle non-linéaire par rapport à un modèle linéaire sans changement de régime.

Dans le cas des modèles markoviens à changements de régime, les tests usuels tels que le multiplicateur de Lagrange (LM), le test de Wald ainsi que le ratio de vraisemblance (LR) n'ont pas la distribution asymptotique standard soit la distribution de χ^2 . En effet, sous l'hypothèse nulle les probabilités de transition ne sont pas identifiées et les scores sont identiquement nulles. Hansen (1992) a suggéré une méthode de calcul de la distribution asymptotique non standard que Garcia (1992) a utilisée dans le contexte des problèmes de tests de modèles markoviens à changements de régimes. Ce dernier a dérivé analytiquement la distribution asymptotique sous l'hypothèse nulle du test LR pour certaines spécifications de modèles markoviens à changements de régimes à deux états.

Le tableau 10 présente les valeurs des logarithmes des vraisemblances de l'hypothèse nulle ainsi celles de l'hypothèse alternative et les valeurs du test LR, pour toutes les spécifications de SWM. Ces valeurs sont largement supérieures à la valeur critique de Garcia (92) à 1% alors on rejette fortement l'hypothèse nulle d'un seul régime. Il est à noter que pour les différents LR estimés, il n'existe pas de valeurs critiques de distribution asymptotique sous l'hypothèse nulle étant donnée la spécification des modèles, mais comme le test donne des valeurs extrêmement élevées par rapport aux valeurs critiques de Garcia (1992), on peut considérer que les résultats de ce test restent bien informatifs.

Il y a donc une forte évidence de changements de régime sur le marché des actions américaines d'autant plus que ce résultat est robuste à toutes les spécifications de SWM.

Enfin, afin de vérifier la robustesse des estimations, on a procédé à l'estimation des modèles SWM sur les rendements mensuels du S&P 500 ainsi que sur des sous-périodes des données journalières. Les résultats, présentés aux annexes 3 et 4 respectivement, sont qualitativement dans le même ordre que les résultats d'estimations des rendements quotidiens pour toute la période, et impliquent la même interprétation. Ils sont donc robustes.

SWM à deux régimes sur la moyenne et sur la variance

Tableau 6.a

Diagnostic sur les résidus	
Statistiques	SWM de base
Moyenne	-0,00004
Coefficient d'asymétrie	-1,45
Coefficient d'aplatissement *	38.58
Statistique de Ljung-Box $L=5$	112.28
Statistique de Ljung-Box $L=10$	122.69

**coefficient en excess kurtosis*

Tableau 6.b

Test des effets ARCH résiduels		
Paramètres	1^{ère} régression	2^e régression
Constante	0.000010 (0,000007)	0.000007 (0,000006)
Pr(St=1 It)	0.000269 (0,000015)	0.000221 (0,000015)
ϵ_{t-1}^2		0.070563 (0,010060)
ϵ_{t-2}^2		0.127455 (0,010044)
R^2	0.033	0.055
F		113.48

SWM à deux régimes sur la variance, moyenne constante

Tableau 7.a	
Diagnostic sur les résidus	
Statistiques	SWM sur variances
Moyenne	-0,00013
Coefficient d'asymétrie	-1,54
Coefficient d'aplatissement *	38.82
Statistique de Ljung-Box $L=5$	113.43
Statistique de Ljung-Box $L=10$	122.78

**coefficient en excess kurtosis*

Tableau 7.b		
Test des effets ARCH résiduels		
Paramètres	1 ^{ère} régression	2 ^e régression
Constante	0.000010 (0,000007)	0.000006 (0,000007)
Pr(St=1 It)	0.000268 (0,000015)	0.000220 (0,000015)
ϵ_{t-1}^2		0.070405 (0,010062)
ϵ_{t-2}^2		0.126205 (0,010047)
R^2	0.033	0.054
F		111.59

SWM à deux régimes sur la moyenne et sur la variance, avec AR(1)

Tableau 8.a	
Diagnostic sur les résidus	
Statistiques	SWM de base et AR1
Moyenne	-0,00003
Coefficient d'asymétrie	-1,28
Coefficient d'aplatissement *	35.51
Statistique de Ljung-Box $L=5$	21.47
Statistique de Ljung-Box $L=10$	28.53

**coefficient en excess kurtosis*

Tableau 8.b		
Test des effets ARCH résiduels		
Paramètres	1^{ère} régression	2^e régression
Constante	0.000009 (0,000006)	0.000006 (0,000006)
Pr(St=1 It)	0.000265 (0,000014)	0.000205 (0,000014)
ϵ_{t-1}^2		0.134937 (0,010085)
ϵ_{t-2}^2		0.108511 (0,010069)
R^2	0.036	0.069
F		174.16

SWM à deux régimes sur la moyenne et sur la variance, avec AR(2)

Tableau 9.a

Diagnostic sur les résidus	
Statistiques	SWM de base et AR2
Moyenne	-0,00002
Coefficient d'asymétrie	-1,33
Coefficient d'aplatissement *	35.81
Statistique de Ljung-Box $L=5$	11.43
Statistique de Ljung-Box $L=10$	18.92

**coefficient en excess kurtosis*

Tableau 9.b

Tests des effets ARCH résiduels		
Paramètres	1^{ère} régression	2^e régression
Constante	0.000009 (0,000006)	0.000006 (0,000006)
Pr(St=1 It)	0.000265 (0,000014)	0.000210 (0,000014)
ϵ_{t-1}^2		0.134778 (0,010105)
ϵ_{t-2}^2		0.089499 (0,010089)
R^2	0.036	0.065
F		149.71

Tableau 10**Tests des ratios de vraisemblance (LR)
sur les différents modèles estimés****Modèles sans changement de régime**

	log likelihood
Modèle linéaire, μ et σ constants	31849.87
Modèle AR(1), μ et σ constants	31901.03
Modèle AR(2), μ et σ constants	31906.69
GARCH(1,1)	33404.01

Modèles à changements de régime

	log likelihood
SWM de base, $\mu(\text{St})$ et $\sigma(\text{St})$	33057.92
SWM sur variances, μ constant et $\sigma(\text{St})$	33055.49
SWM AR(1), $\mu(\text{St})$ et $\sigma(\text{St})$	33127.63
SWM AR(2), $\mu(\text{St})$ et $\sigma(\text{St})$	33127.78
GRS garch(1,1)	34330.84

Test de likelihood ratio (LR)**SWM par rapport aux modèles linéaires**

LR du SWM de base	2416.10
LR du SWM sur variances	2411.24
LR du SWM AR(1)	2453.20
LR du SWM AR(2)	2442.18

GRS GARCH(1,1) par rapport au GARCH(1,1)

LR du GRS GARCH(1,1)	1853.67
----------------------	---------

Valeurs critiques de Garcia (92) :

13.68 à 5% et 17.52 à 1%.

cas du SWM à deux états avec résidus hétéroscédastiques et non corrélés.

VI. LES MODELES MARKOVIENS A CHANGEMENTS DE REGIME AVEC GARCH (GRS).

1. Éléments de théorie

Le modèle GRS est un modèle général développé par Gray (1996) qui consiste en un modèle markovien à changements de régime avec un GARCH, mais qui peut prendre comme cas particuliers soit le modèle SWM, soit un modèle GARCH classique.

Gray a formulé son modèle GRS de façon à ce que la variance conditionnelle ne soit pas dépendante de tout l'historique des séquences des régimes (soit en n'étant pas path-dépendant) en agrégeant les variances conditionnelles provenant de chaque régime à chaque période. De plus, il a permis à tous les paramètres du GARCH de varier selon l'état. Les moments conditionnels vont pouvoir être dépendants du temps dans chaque état contrairement au modèle SWM qui ne permet d'avoir que des moments constants pour chaque état. Cette caractéristique permet de mieux définir les moments conditionnels des rendements en considérant de l'hétéroscédasticité conditionnelle dans chaque régime et donc en tenant mieux compte du clustering de volatilité. De plus, la forme considérée de la volatilité conditionnelle permet aussi de tenir compte de la persistance des rendements (décrite à la section II).

Ce modèle GRS pourrait combler les lacunes du modèle SWM et mieux caractériser les rendements du S&P500, en obtenant des résultats conformes à l'hypothèse de résidus bruits blancs. Ceci nous permettrait d'obtenir une mesure plus adéquate du coefficient d'asymétrie conditionnelle, ce qui constitue un des principaux objectifs de ce rapport.

2. Présentation du modèle GRS et de sa procédure d'estimation :

2-1. Présentation du modèle

Le modèle GRS assume que les états évoluent comme un processus markovien d'ordre 1 et prend la forme suivante :

$$Y_t = \mu_{it} + \sqrt{h_{it}} \cdot Z_t \quad \text{avec } Z_t \sim \text{IID } N(0,1), \quad (21)$$

$$\text{et } S_t = i, \quad i = 0,1.$$

$$Y_t | I_{t-1} \sim \left\{ \begin{array}{l} N(\mu_{0t}, h_{0t}) \text{ avec prob. } P_{0t} \\ N(\mu_{1t}, h_{1t}) \text{ avec prob. } 1 - P_{0t} \end{array} \right\}, \quad (22)$$

$$\text{où } P_{0t} = \Pr(S_t = 0 | I_{t-1})$$

et I_{t-1} représente toute l'information disponible au temps $t-1$.

Le processus stochastique de S_t va être représenté par la matrice de probabilités de transition constantes suivante:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{10} \\ P_{01} & P_{11} \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\text{où } P_{ij} = \Pr(S_t = j | S_{t-1} = i) \text{ et } \sum_{j=0}^1 P_{ij} = 1 \text{ pour } i = 0,1.$$

Les probabilités de transition vont prendre la forme logistique suivante :

$$\Pr(S_t = 0 | S_{t-1} = 0) = P_{00} = \frac{\exp(\theta_{p_{00}})}{1 + \exp(\theta_{p_{00}})}$$

$$\Pr(S_t = 1 | S_{t-1} = 1) = P_{11} = \frac{\exp(\theta_{p_{11}})}{1 + \exp(\theta_{p_{11}})} \quad (24)$$

$$\Pr(S_t = 0 | S_{t-1} = 1) = P_{10} = 1 - P_{11}$$

$$\Pr(S_t = 1 | S_{t-1} = 0) = P_{01} = 1 - P_{00}$$

La moyenne conditionnelle dépend de l'état et considère le niveau des rendements de la période précédente:

$$\mu_{it} = \alpha_i + \beta_i Y_{t-1}, \quad \text{où } i = 0,1. \quad (25)$$

De par la nature récursive du modèle GARCH, la variance conditionnelle va dépendre de tout l'historique des données alors $I_{t-1} = \{ Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots \}$.

Gray (1996) a suggéré une formulation de la variance conditionnelle des rendements à la période t qui permet de résoudre le problème de dépendance des séquences des régimes (path-dependance). En effet, il évite celle-ci en agrégrant les variances conditionnelles provenant de chaque régime à chaque période. Ainsi, en supposant la normalité conditionnelle pour chaque régime, on évite que la variance conditionnelle en t dépende de la séquence entière des régimes, soit S_{t-1}, S_{t-2}, \dots , en utilisant l'expression suivante:

$$\begin{aligned} h_t &= E[Y_t^2 | I_{t-1}] - E[Y_t | I_{t-1}]^2 \\ &= P_{0t} \cdot [\mu_{0t}^2 + h_{0t}] + (1 - P_{0t}) \cdot [\mu_{1t}^2 + h_{1t}] - [P_{0t} \cdot \mu_{0t} + (1 - P_{0t}) \cdot \mu_{1t}]^2, \end{aligned} \quad (26)$$

h_t peut alors être utilisée en tant que variance conditionnelle retardée afin de déterminer h_{0t+1} et h_{1t+1} , qui suivent un processus GARCH. On a alors:

$$h_{it} = c_i + a_i \cdot \varepsilon_{t-1}^2 + b_i \cdot h_{i,t-1}, \quad \text{où } i = 0,1. \quad (27)$$

avec

$$h_{t-1} = P_{0,t-1} \cdot [\mu_{0,t-1}^2 + h_{0,t-1}] + (1 - P_{0,t-1}) \cdot [\mu_{1,t-1}^2 + h_{1,t-1}] - [P_{0,t-1} \cdot \mu_{0,t-1} + (1 - P_{0,t-1}) \cdot \mu_{1,t-1}]^2 \quad (28)$$

et

$$\varepsilon_{t-1} = Y_{t-1} - [P_{0,t-1} \cdot \mu_{0,t-1} + (1 - P_{0,t-1}) \cdot \mu_{1,t-1}]. \quad (29)$$

2-2. Procédure d'estimation du modèle

En considérant les deux régimes 0 et 1, on a la fonction de densité de Y_t suivante:

$$\begin{aligned}
 f(Y_t | I_{t-1}) &= \sum_{i=0}^1 f(Y_t, S_t = i | I_{t-1}) \\
 &= \sum_{i=0}^1 f(Y_t | S_t = i, I_{t-1}) \cdot \Pr(S_t = i | I_{t-1}) \\
 &= \sum_{i=0}^1 f(Y_t | S_t = i, I_{t-1}) \cdot P_{ii}
 \end{aligned} \tag{30}$$

En supposant la normalité conditionnelle sur toute l'information disponible et sur le régime, on obtient:

$$f(Y_t | S_t = i, I_{t-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot h_{it}}} \cdot \exp\left(\frac{-(Y_t - \mu_{it})^2}{2h_{it}}\right) \quad \text{pour } i = 0, 1. \tag{31}$$

Étant donné que le processus markovien est d'ordre 1,

$P_{0t} = \Pr(S_t = 0 | \tilde{Y}_{t-1})$ où $\tilde{Y}_{t-1} = \{Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots\}$ va dépendre seulement du régime du processus en t-1.

En conditionnant sur le régime en t-1, on a:

$$\Pr(S_t = 0 | \tilde{Y}_{t-1}) = \sum_{i=0}^1 \Pr(S_t = 0 | S_{t-1} = i, \tilde{Y}_{t-1}) \cdot \Pr(S_{t-1} = i | \tilde{Y}_{t-1}) \tag{32}$$

et grâce à la structure markovienne des probabilités de transition,

$$\Pr(S_t = 0 | S_{t-1} = i, \tilde{Y}_{t-1}) = \Pr(S_t = 0 | S_{t-1} = i) \tag{33}$$

On obtient:

$$\Pr(S_t = 0 | \tilde{Y}_{t-1}) = P_{00} \cdot \Pr(S_{t-1} = 0 | \tilde{Y}_{t-1}) + (1 - P_{11}) \cdot [1 - \Pr(S_{t-1} = 0 | \tilde{Y}_{t-1})] \tag{34}$$

En appliquant la loi de Bayes, on a:

$$\begin{aligned} \Pr(S_{t-1}=0|\tilde{Y}_{t-1}) &= \Pr(S_{t-1}=0|Y_{t-1},\tilde{Y}_{t-2}) \\ &= \frac{f(Y_{t-1}|S_{t-1}=0,\tilde{Y}_{t-2}) \cdot \Pr(S_{t-1}=0|\tilde{Y}_{t-2})}{\sum_{i=0}^1 f(Y_{t-1}|S_{t-1}=i,\tilde{Y}_{t-2}) \cdot \Pr(S_{t-1}=i|\tilde{Y}_{t-2})} \end{aligned} \quad (35)$$

avec

$$\begin{aligned} f(Y_{t-1}|S_{t-1}=i,\tilde{Y}_{t-2}) &= f(Y_{t-1}|S_{t-1}=i) \quad \text{où } i = 0,1. \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot h_{it-1}}} \cdot \exp\left(\frac{-(Y_t - \mu_{it-1})^2}{2h_{it-1}}\right) \end{aligned} \quad (36)$$

Ainsi, $P_{0t} = \Pr(S_t = 0 | \tilde{Y}_{t-1})$ peut suivre le schéma récursif non-linéaire simple suivant:

$$\begin{aligned} P_{0t} &= (1 - P_{11}) \cdot \left[\frac{g_{1t-1} \cdot (1 - P_{0t-1})}{g_{0t-1} \cdot P_{0t-1} + g_{1t-1} \cdot (1 - P_{0t-1})} \right] \\ &\quad + P_{00} \cdot \left[\frac{g_{0t-1} \cdot P_{0t-1}}{g_{0t-1} \cdot P_{0t-1} + g_{1t-1} \cdot (1 - P_{0t-1})} \right] \end{aligned} \quad (37)$$

avec $g_{0t} = f(Y_t | S_t = 0)$ et

$$g_{1t} = f(Y_t | S_t = 1).$$

On a donc défini la moyenne conditionnelle, la variance conditionnelle ainsi que la dynamique du changement de régimes.

On peut maintenant écrire la fonction de vraisemblance comme suit:

$$L(\theta) = \sum_{t=1}^T \log \left[\begin{array}{l} p_{0t} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi h_{0t}}} \cdot \exp\left\{ \frac{-(Y_t - \mu_{0t})^2}{2h_{0t}} \right\} \\ + (1 - p_{0t}) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi h_{1t}}} \cdot \exp\left\{ \frac{-(Y_t - \mu_{1t})^2}{2h_{1t}} \right\} \end{array} \right] \quad (38)$$

Pour obtenir les probabilités filtres, la démarche est similaire à celle des modèles SWM. D'ailleurs, on observe le schéma récursif des probabilités dans l'équation (37).

3. A propos de l'estimation

La fonction de vraisemblance est construite de la même façon récursive que le modèle GARCH habituel. En fait, la variance conditionnelle et la série des probabilités P_{0t} suivent ce schéma récursif, en partant de valeurs de départ. On va donc obtenir un vecteur (Tx1) de valeurs de fonction de vraisemblance ainsi qu'un vecteur (Tx1) de probabilités P_{0t} .

Le modèle markovien à changements de régime avec GARCH (GRS) est estimé à l'aide de la procédure OPTIMUM du logiciel gauss en utilisant l'algorithme numérique de Broyden, Fletcher, Goldfarb et Shanno (BFGS). Il est à mentionner que plusieurs algorithmes ont été essayés afin de vérifier la robustesse des estimations. L'algorithme BFGS a été choisi parce qu'il permet de minimiser le temps d'estimation tout en obtenant les mêmes résultats.

Différentes valeurs initiales arbitraires, provenant des modèles SWM estimés, ou de recherches et d'estimations antérieures⁵ ont été utilisées au début du processus d'optimisation afin de s'assurer que les estimations finales soient robustes.

⁵ dont les valeurs estimées d'un GARCH de Dueker(1997) et de Van Djick et Franses (2000) ainsi que d'un SWARCH de Hamilton et Susmel (1994).

On a imposé différentes contraintes sur les paramètres lors de l'estimation: la forme logistique des probabilités a permis de situer les probabilités entre 0 et 1; des contraintes de stationnarité ont été imposées sur les paramètres du GARCH; et une contrainte de positivité a été imposée sur la constante du GARCH.

Les erreurs standards des paramètres ont été estimées à l'aide de la matrice de variance-covariance de White qui reste consistante en présence d'hétéroscédasticité.

4. Résultats d'estimation et tests de diagnostic du modèle GRS GARCH

4-1. Résultats d'estimation

Les résultats d'estimation du modèle GRS GARCH sont présentés dans le tableau 11.

Les probabilités de transition estimées sont de 0.958 pour l'état 0 et de 0.913 pour l'état 1. On a donc deux états très persistants puisque P_{00} et P_{11} sont supérieurs à 0.5, avec une dominance de l'état 0 (optimiste), comme pour les modèles SWM.

Les moyennes ainsi que les variances conditionnelles estimées pour les états 0 et 1 sont les suivantes:

$$\begin{aligned} \mu_{0t} &= 0.0024 + 0.0587 Y_{t-1} & \mu_{1t} &= -0.0078 + 0.0326 Y_{t-1} \\ h_{0t} &= 0.12 e_{t-1}^2 + 0.64 h_{t-1} & h_{1t} &= 0.30 e_{t-1}^2 + 0.62 h_{t-1} \end{aligned}$$

La moyenne est plus élevée pour l'état 0 que pour l'état 1 et la variance conditionnelle de l'état 1 est supérieure à celle de l'état 0. On a donc un état optimiste plus persistant où des rendements élevés sont associés à une volatilité faible ainsi qu'un état pessimiste avec rendements faibles et volatilité élevée, ce qui correspond aux résultats précédents des modèles SWM.

Dans chaque régime, les processus GARCH sont stationnaires ($a_i + b_i < 1$) de par la contrainte imposée. De plus, l'état à volatilité élevée (état 1) est caractérisé par une sensibilité plus grande aux chocs récents ($a_1 > a_0$), ainsi qu'une persistance plus faible ($b_1 < b_0$) que l'état à volatilité faible (état 0). Ainsi, les effets des chocs individuels disparaissent plus rapidement lors de périodes à volatilité très élevée mais ont des effets plus persistants lors de période à volatilité faible.

Gray (1996) décrit deux sources de persistance de volatilité. D'abord, si on a un régime à variance faible ainsi qu'un régime à variance élevée, et que les régimes sont persistants alors la volatilité va être persistante: nos valeurs estimées des paramètres suggèrent que cette source de persistance de volatilité va être importante, les deux états étant persistants. Ensuite, si l'effet d'un choc individuel prend beaucoup de temps à disparaître, retournant au niveau de la variance moyenne dans ce régime, il y a persistance à l'intérieur même du régime: nos valeurs estimées des paramètres montrent que les deux régimes sont très persistants mais qu'il y a moins de persistance à l'intérieur du régime à volatilité élevée.

La figure 4 illustre l'évolution des probabilités filtres de l'état 1 à volatilité élevée. On voit que celles-ci ne répliquent plus les rendements de l'indice du S&P 500 comme c'était le cas pour le SWM. Enfin, la flexibilité additionnelle résultant de la considération d'un effet GARCH dans chaque régime donne une meilleure caractérisation de la variance conditionnelle. Ainsi, on voit dans la figure 5 que l'écart-type conditionnel estimé n'est plus une réplique des probabilités de volatilité élevée. Il y a seulement un pic correspondant à la volatilité associée au crash boursier du 19 octobre 1987.

4-2. Analyse des résidus

Le modèle GRS GARCH se base sur l'hypothèse que $Z_t \sim \text{IID } N(0,1)$, on va donc faire différents tests afin de vérifier si cette hypothèse tient. On va voir si la

caractérisation des rendements du S&P 500 est meilleure avec ce modèle qu'avec le modèle SWM.

Les résultats de diagnostic sur les résidus standardisés sont présentés dans les tableaux 12.a et 12.b.

Les statistiques de Ljung-Box reliées au carré des résidus standardisés ont été dramatiquement réduites de telle sorte qu'aucune corrélation n'apparaît jusqu'au retard de 5 jours.

La distribution des résidus standardisés est relativement proche de celle de la normale. En effet, le coefficient d'asymétrie est de 0.34 et le coefficient d'aplatissement excédentaire est de 3.46, par rapport à -1.45 et 38.58 respectivement pour le modèle SWM. Le modèle GRS GARCH a donc permis de considérer adéquatement l'hétéroscédasticité conditionnelle puisqu'il a bien caractérisé l'asymétrie et la leptokurtosis de la distribution des rendements. Ce qui est confirmé par le test des effets ARCH résiduels présenté au tableau 12.b qui indique qu'il ne reste plus d'hétéroscédasticité conditionnelle une fois qu'on a considéré les changements de régimes.

Finalement, le modèle GRS est relativement performant pour modéliser les rendements du S&P 500. Les résidus ne sont pas corrélés et la distribution des résidus standardisés n'est plus asymétrique ni leptokurtique. On peut maintenant considérer que les résidus sont probablement bruits blancs.

4-3. Tests sur le modèle et test de robustesse

Le test de ratio de vraisemblance (LR) présenté dans le tableau 10 indique la pertinence d'utiliser un modèle à changements de régimes avec GARCH par rapport à un modèle GARCH classique⁶.

⁶voir section 6.2 pour la description du test LR et du problème de distribution asymptotique de la statistique.

En effet, la valeur du test LR pour le modèle GRS GARCH est largement supérieure à la valeur critique de Garcia (92) à 1%, ce qui implique que l'on rejette fortement l'hypothèse nulle d'un seul régime. Il est à noter qu'il n'existe pas de valeurs critiques de distribution asymptotique sous l'hypothèse nulle étant donnée la spécification du modèle, mais comme le test donne des valeurs extrêmement élevées par rapport aux valeurs critiques de Garcia (1992), on peut considérer que les résultats de ce test restent bien informatifs. On peut remarquer aussi la supériorité du modèle GRS GARCH par rapport au modèle SWM.

Afin de vérifier la robustesse des résultats des estimations, on a procédé à l'estimation du GRS GARCH sur les rendements mensuels du S&P 500. Les résultats, présentés à l'annexe 5, montrent que les estimations des rendements mensuels sont qualitativement dans le même ordre que les résultats d'estimations des rendements quotidiens et impliquent la même interprétation. Les résultats sont donc robustes.

Les conclusions de ces tests montrent que le choix du modèle GRS est bien justifié. De plus, il caractérise mieux la série des rendements du S&P 500 en tenant compte adéquatement de la volatilité conditionnelle variable dans le temps à l'intérieur des régimes. On peut maintenant faire l'hypothèse que les résidus sont probablement bruits blancs. On va donc procéder aux mesures des asymétries des rendements du S&P 500.

Tableau 11**Modèle markovien à deux régimes avec GARCH(1,1) (GRS)**

Paramètres	Valeurs estimées	erreurs standards
P_{00}	0.9575	(0,002667)
P_{11}	0.9129	(0.006946)
α_0	0.0024	(0,000096)
α_1	-0.0078	(0,000256)
β_0	0.0587	(0,011196)
β_1	0.0326	(0,015787)
C_0	0.0000	(0,000000) *
C_1	0.0000	(0,000000) *
A_0	0.1170	(0,01143)
A_1	0.3012	(0,026967)
B_0	0.6429	(0,012402)
B_1	0.6206	(0,022308)
Log-likelihood	34330.8448	

* indique que le paramètre n'est pas significativement différent de 0 à un niveau d'au moins 5% (d'après p-value du test-t).

Tableau 12.a**Diagnostic sur les résidus standardisés**

Statistiques	GRS GARCH(1,1)
Moyenne de $\varepsilon_t / H_t^{1/2}$	0.0460
Moyenne de ε_t^2 / H_t	0.9041
Coefficient d'asymétrie	0.34
Coefficient d'aplatissement *	3.46
Pour $\varepsilon_t / H_t^{1/2}$	
LB₁	0.14
LB₂	28.45
LB₃	46.83
LB₄	52.65
LB₅	54.44
LB₁₀	62.91
Pour ε_t^2 / H_t	
LB₁	0.10
LB₂	0.34
LB₃	0.72
LB₄	7.94
LB₅	12.59
LB₁₀	37.80

LB = Statistique de Ljung-Box avec en indice le nombre de retards considérés.

**coefficient en excess kurtosis*

Tableau 12.b

Test des effets ARCH résiduels		
Paramètres	1^{ère} régression	2^e régression
Constante	0.7640 (0,030684)	0.7642 (0,033139)
Pr(St=1 It)	0.6133 (0,095878)	0.6144 (0,095966)
ϵ_{t-1}^2		-0.0045 (0,010141)
ϵ_{t-2}^2		0.0041 (0,010139)
R²	0.00421	0.00425
F		0.21

FIGURE 4
Probabilités filtrées de l'état à volatilité élevée du GRS GARCH(1,1)

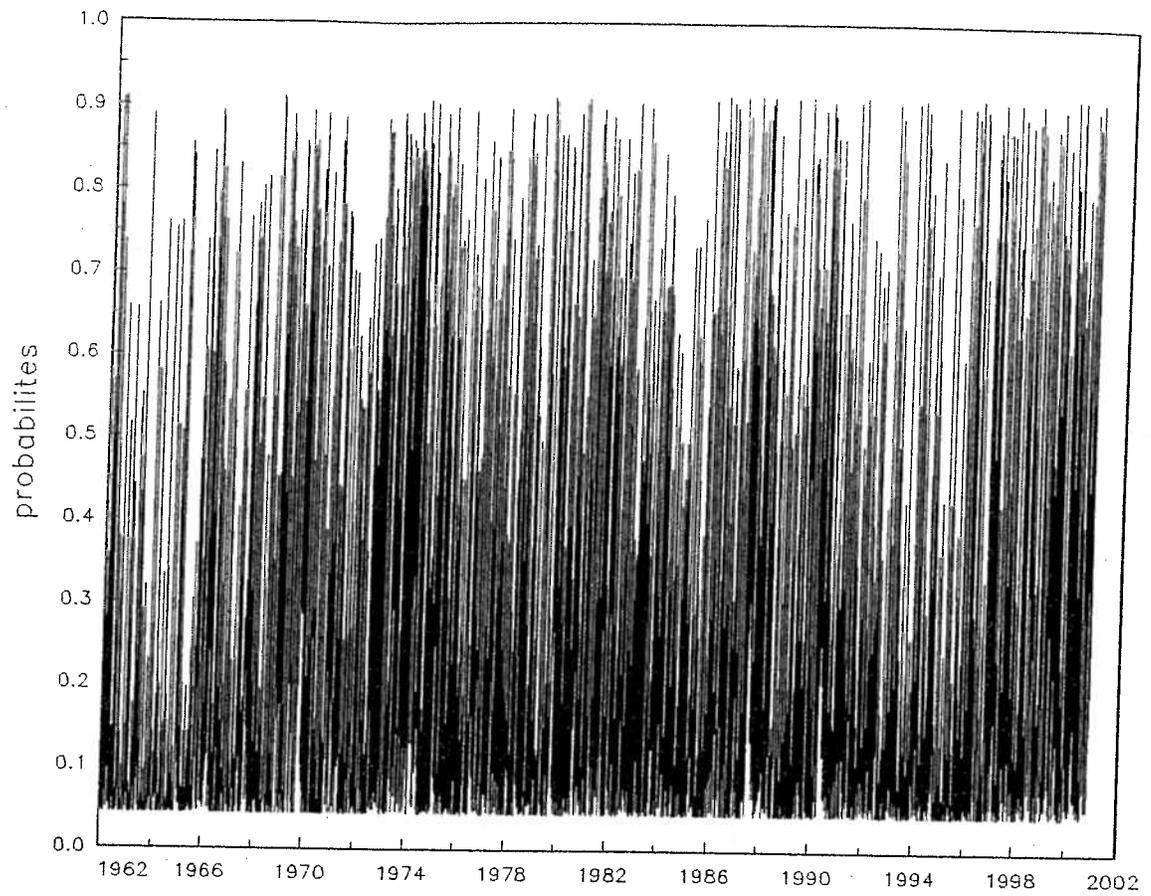
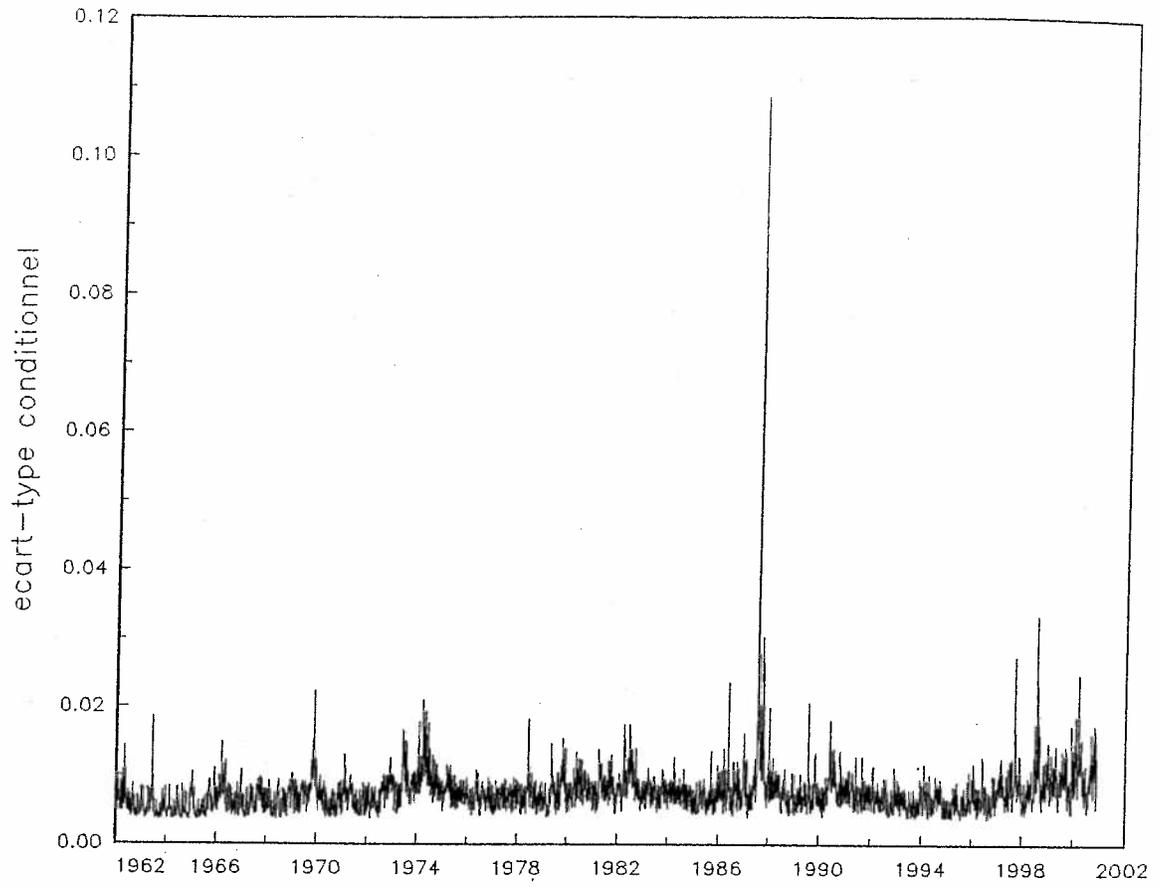


FIGURE 5
Écart-type conditionnel des rendements selon le GRS GARCH(1,1)



VII. ÉTUDE DES ASYMETRIES DES RENDEMENTS

1. Mesure des asymétries des rendements des actions :

1-1. Aspect théorique

Une fois que les paramètres et les probabilités sont estimés à l'aide du modèle GRS garch(1,1), on obtient, pour chaque période t , μ_{it} et h_{it} (voir équations 22, 25 et 27), ainsi que les probabilités de transition P_{00} et P_{11} (voir équation 23).

On mesure alors les asymétries des rendements des actions à l'aide du coefficient d'asymétrie conditionnelle de la façon décrite dans Garcia, Luger et Renault (2001).

On s'intéresse à la distribution conditionnelle des rendements Y_t sachant I_{t-1} , soit toute l'information disponible au temps $(t-1)$. On peut écrire les moments de $Y_t | I_{t-1}$ de la façon suivante:

$$E [Y_t | I_{t-1}] = m_{it}^{(1)} \text{ si } S_{t-1} = i \quad (39)$$

$$E \{ [Y_t - E(Y_t | I_{t-1})]^n | I_{t-1} \} = m_{it}^{(n)} \text{ si } S_{t-1} = i \quad (40)$$

Étant donné les distributions de Y_t et S_{t-1} , on a les trois premiers moments suivants:

$$\begin{aligned} m_{it}^{(1)} &= P_{00} \mu_{0t} + (1 - P_{00}) \mu_{1t} & \text{si } i = 0 \\ &= (1 - P_{11}) \mu_{0t} + P_{11} \mu_{1t} & \text{si } i = 1 \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} m_{it}^{(2)} &= P_{00} h_{0t} + (1 - P_{00}) h_{1t} + P_{00} (1 - P_{00}) (\mu_{1t} - \mu_{0t})^2 & \text{si } i = 0 \\ &= (1 - P_{11}) h_{0t} + P_{11} h_{1t} + P_{11} (1 - P_{11}) (\mu_{1t} - \mu_{0t})^2 & \text{si } i = 1 \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} m_{it}^{(3)} &= P_{00}(1 - P_{00})(\mu_{0t} - \mu_{1t}) [3 (h_{0t} - h_{1t}) + (1 - 2P_{00}) (\mu_{1t} - \mu_{0t})^2] & \text{si } i = 0 \\ &= P_{11}(1 - P_{11})(\mu_{1t} - \mu_{0t}) [3 (h_{1t} - h_{0t}) + (1 - 2P_{11}) (\mu_{1t} - \mu_{0t})^2] & \text{si } i = 1 \end{aligned} \quad (43)$$

On va donc calculer le coefficient d'asymétrie conditionnelle de la façon suivante:

$$sk_{it} = \frac{m_{it}^{(3)}}{[m_{it}^{(2)}]^{\frac{3}{2}}} \quad (44)$$

Il est à noter que le coefficient d'asymétrie conditionnelle dépend des valeurs de P_{00} , P_{11} , μ_{0t} , μ_{1t} , h_{0t} , h_{1t} .

Quant au coefficient d'asymétrie de la période, il est estimé en faisant la moyenne pondérée des coefficients d'asymétrie conditionnelle, les poids étant les probabilités filtrées correspondantes des états.

1-2. Résultats d'estimation

Les coefficients d'asymétrie pour la période ainsi que les coefficients d'asymétrie conditionnels aux états 0 et 1 ont été estimés de la façon décrite en 2-1 et sont représentés graphiquement dans les figures 6 et 7 respectivement.

On a aussi analysé ces 3 séries dont les résultats sont présentés au tableau 13.

On remarque d'abord que le coefficient d'asymétrie pour la période ainsi que celui de l'asymétrie conditionnelle à l'état optimiste sont en moyenne négatifs, comme pour la série des rendements des actions. Quant au coefficient d'asymétrie conditionnelle à l'état pessimiste, il est en moyenne positif. On pourrait expliquer ce résultat par le fait que l'état pessimiste est caractérisé par une moyenne faible, une volatilité élevée ainsi qu'une forte persistance ($P_{11} = 0.9129$), et, comme décrit dans l'équation (43), $m_{1t}^{(3)}$ va avoir tendance à être positif d'où le fait que sk_{1t} soit lui aussi positif. On peut considérer le même argument pour l'état optimiste caractérisé par une moyenne élevée, une volatilité faible ainsi qu'une forte persistance ($P_{00} = 0.9575$). On obtient alors $m_{0t}^{(3)}$ qui a tendance à être négatif d'où le fait que sk_{0t} soit lui aussi négatif.

Il est à noter que l'écart-type du coefficient d'asymétrie conditionnelle à l'état pessimiste est plus élevé que celui de l'état optimiste ainsi que celui de la période, ce qui va dans le sens des conclusions trouvées précédemment.

Les statistiques de Ljung-Box des trois séries montrent une très forte présence d'autocorrélation et les tests de Dickey-Fuller, de Dickey-Fuller augmenté ainsi que de Phillips Perron indiquent que les séries ne comportent aucune racine unitaire.

Tableau 13

**Etude de la série des coefficients d'asymétrie conditionnel et
inconditionnel
des rendements de l'indice du S&P 500**

	Coeff. d'asymétrie de la période	Coeff. d'asymétrie Conditionnel à l'état optimiste	Coeff. d'asymétrie Conditionnel à l'état pessimiste
Statistiques descriptives			
Nombre d'observations	9693	9693	9693
Moyenne	-0.1543	-0.2192	0.2371
Écart-type	0.1691	0.1609	0.2138
Coefficient d'asymétrie	-1.078	-1.4474	1.1967
Coefficient d'aplatissement	1.1561	1.8631	1.1874
Minimum	-0.8074	-0.8923	-0.0738
Maximum	0.4079	0.0005	1.0702
Tests d'autocorrélation			
Statistique de Ljung-Box $L=5$	21682	28705	20936
Statistique de Ljung-Box $L=10$	28739	41106	31816
Tests de racine unitaire			
Test de Dickey-Fuller $L=0$	-1295.69	-699.88	-2240.73
Test t	-26.35	-19.05	-35.59
Test de Dickey-Fuller augmente $L=1$	-1458.03	-1013.22	-1291.34
Test t	-26.96	-22.49	-25.41
Test de Phillips-Perron $L=1$	-1360.55	-814.56	-1831.75
Test t	-26.95	-20.50	-32.66

Remarque: le nombre de lags est indiqué en indice.

FIGURE 6
Coefficient d'asymétrie pour la période d'après le GRS GARCH(1,1)

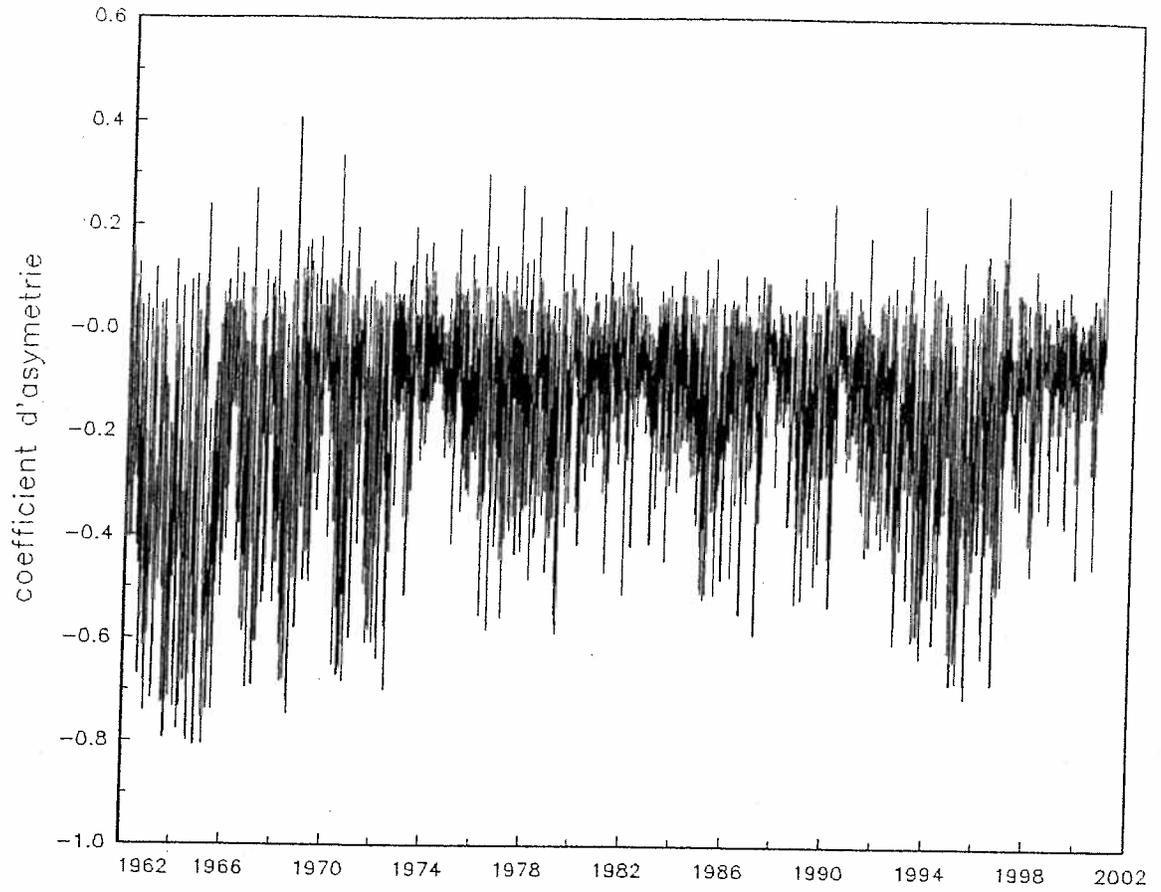
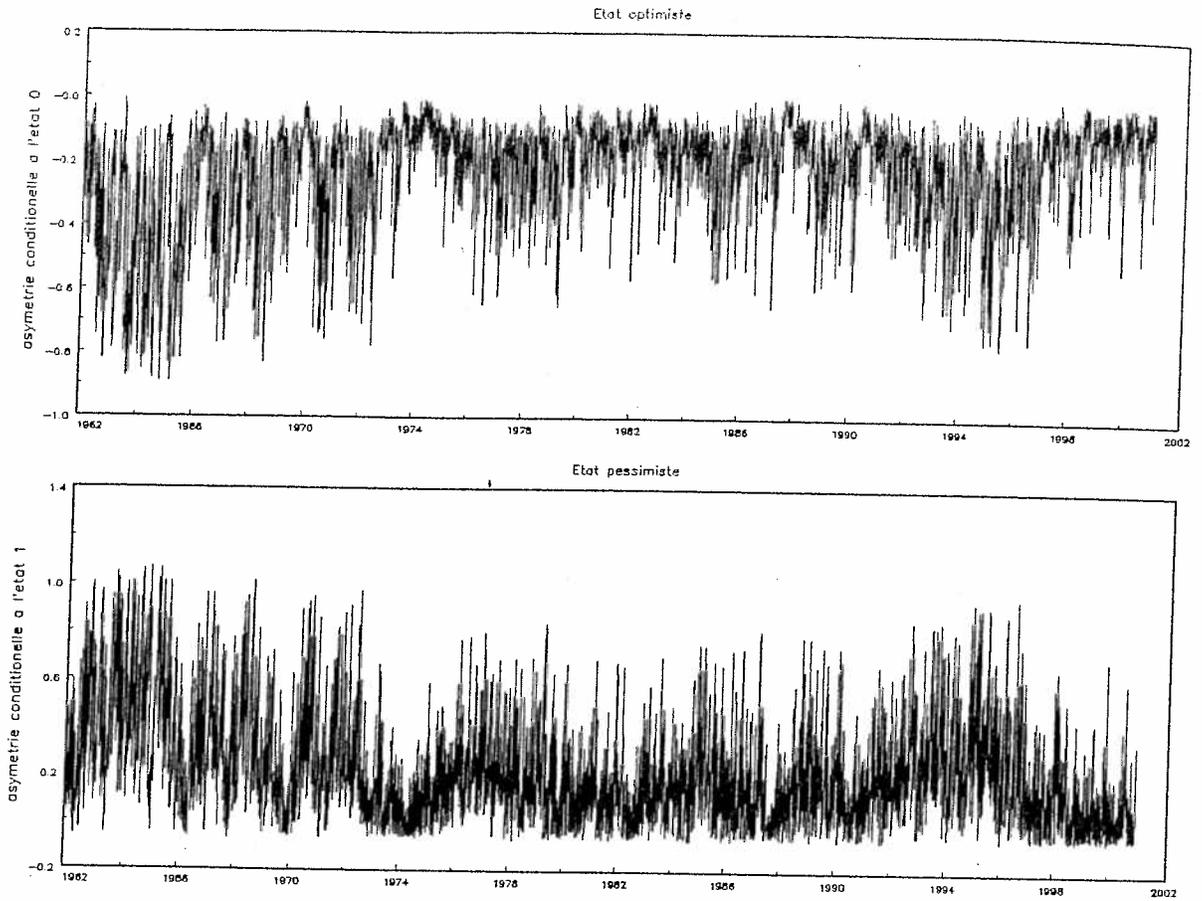


FIGURE 7
Coefficients d'asymétrie conditionnels aux deux états
d'après le GRS GARCH(1,1)



2. Analyse de la dynamique des asymétries des rendements des actions

On observe dans les figures des coefficients d'asymétrie de la période et conditionnelle qu'il y a des périodes où celles-ci sont presque nulles et d'autres où elles tendent vers des valeurs élevées. On peut chercher à expliquer la dynamique du coefficient d'asymétrie conditionnelle en le reliant aux rendements du S&P 500 ainsi qu'à l'écart-type conditionnel.

On procède alors aux régressions suivantes pour la période totale de l'échantillon ainsi que pour la période d'après 1987:

- **Régression du coefficient d'asymétrie de la période sur le rendement et sur l'écart-type conditionnel**

période 1962-2000	période 1987-2000
$\text{SKEW}_t = -0.37 - 2.82 Y_t + 29.44 h_t^{1/2}$	$\text{SKEW}_t = -0.38 - 2.15 Y_t + 29.97 h_t^{1/2}$
(0.0037) (0.1562) (0.4497)	(0.0052) (0.1931) (0.6172)

où $h_t^{1/2}$ est l'écart-type conditionnel et SKEW le coefficient d'asymétrie de la période.

Les résultats de ces estimations montrent que les paramètres estimés sont tous significativement différents de 0. Les rendements des actions ainsi que l'écart-type conditionnel expliquent 34.1% de la variation du coefficient d'asymétrie de la période. On a aussi procédé à des régressions séparées qui ont montré que le rendement explique seulement 5% de cette variation tandis que l'écart-type conditionnel en explique 31.9%. Quant aux résultats d'estimation pour la période 1987 à 2000, ils confirment ces résultats avec un R^2 plus élevé, soit de 38.3%.

- **Régression du coefficient d'asymétrie conditionnel à l'état 0 sur le rendement et sur l'écart-type conditionnel de l'état 0**

période 1962-2000	période 1987-2000
$SK_{0t} = -0.44 - 0.68 Y_t + 33.92 h_{0t}^{1/2}$	$SK_{0t} = -0.44 - 0.51 Y_t + 35.09 h_{0t}^{1/2}$
<p>(0.0032) (0.1451) (0.4556)</p>	<p>(0.0046) (0.1784) (0.6195)</p>

où $h_{0t}^{1/2}$ est l'écart-type conditionnel et SK_{0t} le coefficient d'asymétrie conditionnelle à l'état 0 (optimiste).

Les résultats de ces estimations montrent que les paramètres estimés sont tous significativement différents de 0. Les rendements des actions ainsi que l'écart-type conditionnel expliquent 37.3% de la variation du coefficient d'asymétrie conditionnelle à l'état 0. On a aussi procédé à des régressions séparées qui ont montré que le rendement explique seulement 1.5% de cette variation tandis que l'écart-type conditionnel en explique 37.2%. Quant aux résultats d'estimation pour la période 1987-2000, ils confirment ces résultats avec un R^2 plus élevé, soit de 49.6%.

- **Régression du coefficient d'asymétrie conditionnel à l'état 1 sur le rendement et sur l'écart-type conditionnel de l'état 1**

période 1962-2000	période 1987-2000
$SK_{1t} = 0.51 + 0.36 Y_t - 38.55 h_{1t}^{1/2}$	$SK_{1t} = 0.5 + 0.45 Y_t - 39.65 h_{1t}^{1/2}$
<p>(0.0038) (0.1892) (0.49)</p>	<p>(0.0056) (0.2448) (0.6885)</p>

où $h_{1t}^{1/2}$ est l'écart-type conditionnel et SK_{1t} le coefficient d'asymétrie conditionnelle à l'état 1 (pessimiste).

Les résultats de ces estimations montrent que les coefficients des rendements estimés ne sont pas significativement différents de 0. Les rendements des actions

ainsi que l'écart-type conditionnel expliquent 39.6% de la variation du coefficient d'asymétrie conditionnelle à l'état 1. On a aussi procédé à des régressions séparées qui ont montré que le rendement explique seulement 0.9% de cette variation tandis que l'écart-type conditionnel en explique 39.5%. Quant aux résultats d'estimation pour la période 1987-2000, ils confirment ces résultats avec un R^2 plus élevé, soit de 50.3%.

On peut conclure que l'écart-type conditionnel a un impact déterminant sur les trois coefficients d'asymétrie et que ceux-ci sont aussi influencés à un moindre degré par le rendement. Cet effet est encore plus prononcé pour l'état pessimiste. D'ailleurs, ces résultats confirment aussi les signes des différents coefficients d'asymétrie. Il est à noter que ces interprétations sont aussi en accord avec le fait que les indices boursiers sur les actions sont négativement asymétriques, soit qu'une grande chute des prix est plus probable qu'une grande hausse de ces derniers.

VIII. CONCLUSION

L'objectif visé de ce rapport était d'obtenir une bonne caractérisation des rendements des actions à l'aide d'un modèle markovien à changements de régimes.

A cette fin, on a utilisé différentes spécifications du modèle SWM de Hamilton à probabilités constantes et variables. Nos résultats ont montré que les rendements sont caractérisés par un état optimiste persistant à moyenne élevée et volatilité faible, ainsi qu'un état pessimiste légèrement moins persistant à moyenne faible et volatilité élevée, les différentes spécifications de SWM confirmant ces résultats. Toutefois, nos tests ont indiqué la présence d'autocorrélation, d'effets ARCH résiduels ainsi que d'asymétrie et d'aplatissement, une fois que l'on considère les deux distributions distinctes en moyenne et variance. Ce modèle n'est donc pas adéquat pour les rendements journaliers des actions.

On a alors appliqué le modèle markovien à changements de régimes avec GARCH(1,1) de Gray afin de tenir compte de l'hétéroscédasticité conditionnelle à l'intérieur des régimes. Ce modèle GRS s'est avéré relativement performant pour caractériser les rendements du S&P 500. En effet, les résidus standardisés ne sont pas corrélés et leur distribution n'est plus asymétrique ni leptokurtique. On peut maintenant considérer que l'hypothèse de résidus bruits blancs est probablement justifiée. Le choix de ce modèle est aussi confirmé par les tests de ratios de vraisemblance, et nos résultats d'estimations mensuelles supportent nos conclusions sur la distribution des rendements journaliers.

On a alors mesuré les asymétries des rendements des actions à l'aide du coefficient d'asymétrie conditionnelle, en se basant sur les résultats du GRS GARCH(1,1). On a considéré le coefficient d'asymétrie de la période ainsi que ceux de l'asymétrie conditionnelle aux états optimiste et pessimiste. On remarque d'abord que le coefficient d'asymétrie pour la période ainsi que celui de l'asymétrie conditionnelle à l'état optimiste sont en moyenne négatifs, comme

pour la série des rendements des actions. Quant au coefficient d'asymétrie conditionnelle à l'état pessimiste, il est en moyenne positif. Les différents tests ont indiqué que les trois séries présentent une forte autocorrélation mais ne comportent aucune racine unitaire.

Lors de l'analyse de la dynamique de ces asymétries, on a conclu que l'écart-type conditionnel a un impact déterminant sur les trois coefficients d'asymétrie et que ceux-ci sont influencés à un moindre degré par le rendement. Cet effet est encore plus prononcé pour l'état pessimiste. Ces résultats confirment aussi les signes des différents coefficients d'asymétrie et sont en accord avec le fait que les indices boursiers sur les actions sont négativement asymétriques, soit qu'une grande chute des prix est plus probable qu'une grande hausse de ces derniers.

On pourrait dans une autre étude estimer le modèle GRS GARCH avec des probabilités de transition variables afin d'obtenir plus d'information sur les états et faire une étude plus approfondie des asymétries des rendements des actions. On pourrait aussi considérer différentes mesures des asymétries de la courbe de volatilité implicite de Black et Scholes. Il serait alors intéressant de comparer l'asymétrie objective provenant des rendements des actions et l'asymétrie de l'effet de sourire qui découle de la distribution risque-neutre, afin d'en tirer des conclusions sur l'évolution des primes de risque sous-jacentes.

BIBLIOGRAPHIE

1. Andrews, D.W.K., 1993, "Test for Parameter Instability and Structural Change with Unknown Change Point," *Econometrica* 61, 821-856.
2. Bakshi, G., N., Kapadia et D. Madan, 2001, "Stock Returns, Skew Laws and the Differential Pricing of Individual Equity Options," Robert H. Smith School of Business, University of Maryland, et University of Massachusetts-Amherst.
3. Banerjee, A., R.L., Lumsdaine et J.H. Stock, 1992, "Recursive and Sequential Tests of the Unit Root and Trend-Break Hypothesis: Theory and International Evidence," *Journal of Business and Economic Statistics* 10, 271-287.
4. Black, F., 1976, "Studies in the Stock Price Volatility Changes," *Proceedings of the 1976 Business Meeting of the Business and Economic Statistics Section, American Statistical Association*.
5. Cai, J., 1994, "A Markov Model of unconditional Variance in ARCH," *Journal of Business and Economic Statistics* 12, 309-312.
6. Campbell, J.Y., A.W., Lo et A.C. MacKinlay, 1997, *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton University Press.
7. Cecchetti, S.G., P.S., Lam et N.C. Marc, 1990, "Mean Reversion in Equilibrium Asset Prices," *American Economic Review* 80, 398-418.
8. Christie, A.A., 1982, "The Stochastic Behavior of Common Stock Variances: Value, Leverage, and Interest Rate Effects," *Journal of Financial Economics* 10, 407-432.
9. Cramer, J.S., 1986, *Econometrics applications of Maximum Likelihood Methods*, Cambridge University Press.
10. Davies, R. B., 1987, "Hypothesis Testing when a Nuisance Parameter is Present Only Under the Alternative," *Biometrika* 74, 33-43.
11. Dueker, M.J., 1997, "Markov Switching in GARCH Processes and Mean Reverting Stock Market Volatility," *Journal of Business and Economic Statistics* 15, 26-34.
12. Engle, R. F., 1982, "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of U.K. Inflation," *Econometrica* 50, 987-1008.

13. Fama, E. F., 1965, "The Behavior of Stock Market Prices," *Journal of Business* 38, 34-105.
14. Filardo, A. J., 1994, "Business-Cycle Phases and Their Transitional Dynamics," *Journal of Business and Economic Statistics* 12, 299-308.
15. Filardo, A. J, 1998, "Choosing Information Variables for Transition Probabilities in a Time-Varying Transition Probability Markov Switching Model," cahier de recherche, Federal Reserve Bank of Kansas City.
16. Fong, W. M., 2001, "On the Relationship between Interest Rates and Volatility Regimes in Daily Stock Returns," Université Nationale de Singapour.
17. Franses, P. H., et D. Van Dijk, 2000, *Non-linear Time Series Models in Empirical Finance*, Cambridge University Press.
18. Gallant, A. R., 1977, "Testing for a Non-linear Regression Specification: A Nonregular Case," *Journal of the American Statistical Association* 72, 523-530.
19. Garcia, R., 1992, "Asymptotic Null Distribution of the Likelihood Ratio Test in Markov Switching Models," miméo, Université de Montréal.
20. Garcia, R. et P. Perron, 1996, "An Analysis of the Real Interest Rate Under Regime Shifts," *The Review of Economics and Statistics* 78, 111-125.
21. Garcia, R., R., Luger et E. Renault, 2001, "Asymmetric Smiles, Leverage Effects and Structural Parameters," Cahier de recherche du CIRANO, n° 2001s-01.
22. Garcia, R., R., Luger et E. Renault, 2001, "Empirical Assessment of an Intertemporal Option Pricing Model with Latent Variables," Cahier de recherche du CIRANO, n° 2001s -02.
23. Ghysels, E., A., Harvey et E. Renault, 1996, "Stochastic Volatility," dans G.S. Maddala (ed.) *Handbook of statistics 14, Statistical Methods in Finance*, North Holland, Amsterdam.
24. Goldfeld, S.M. et R.E. Quandt, 1973, "A Markov Model for Switching Regressions," *Journal of Econometrics* 1, 3-16.
25. Gray, S.F., 1996, "Modeling the Conditional Distribution of Interest Rates as a Regime-Switching Process," *Journal of Financial Economics* 42, 27-62.
26. Gray, S.F., 1995, "An Analysis of Conditional Regime-Switching Models," cahier de recherche, Fuqua School of Business, Duke University.

27. Hamilton, J.D., 1989, "A new Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle," *Econometrica* 57, 357-384.
28. Hamilton, J.D., 1990, "Analysis of Time Series Subject to Changes in Regime," *Journal of Econometrics* 45, 39-70.
29. Hamilton, J.D., 1994, *Time Series Analysis*, Princeton University Press.
30. Hamilton, J.D., 1996, "Specification Testing in Markov-Switching Time-Series models," *Journal of Econometrics* 70, 127-157.
31. Hamilton, J.D. et R. Susmel, 1994, "Autoregressive conditionnal heteroskedasticity and Changes in Regime," *Journal of Econometrics* 64, 307-333.
32. Hansen, B.E., 1992, "The Likelihood Ratio Test under Non-Standard conditions: Testing for Markov Switching Model of G.N.P.," *Journal of Applied Econometrics*, 7, 561-582.
33. Harvey, C., et A. Siddique, 2000, "Conditionnal Skewness in Asset Pricing Tests," *Journal of Finance* 55, 1263-1295.
34. Kim, C-J, et C.R. Nelson, 1999, *State-Space Models with Regime Switching*, The MIT Press.
35. Mandelbrot, B.B., 1963, "The Variation of Certain Speculative Prices," *Journal of Business* 36, 394-416.
36. Mills, T.C., 1999, *The Econometric Modelling of Financial Time Series*, Cambridge University Press, deuxième edition.
37. Nelson, C.H, R. Startz, et M. Turner, 1989, "A Markov model of heteroskedasticity, risk, and learning in the stock market," *Journal of Financial Economics* 25, 3-22.
38. Perez-Quiros, G. et A. Timmermann, 2000, "Business Cycle Asymmetries in Stock Returns: Evidence from Higher Order Moments and Conditional Densities," Cahier de recherche, University of California, San Diego.
39. Schaller, H. et S. Van Norden , 1997, "Regime Switching in Stock Market Returns," *Applied Financial Economics* 7, 177-191.
40. Schwert, G.W., 1989, "Business Cycles, Financial Crises, and Stock Volatility," *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy* 31, 83-126.

41. Timmermann A., 2000, "Moments of Markov Switching Models," *Journal of Econometrics* 96, 75-111.

ANNEXES

**ANNEXE 1: Modèle SWM avec probabilités de transition
variables**

Données journalières du 3 juillet 1962 au 31 décembre 2000						
valeurs estimées des paramètres selon différentes valeurs de départ						
θ_{p0}	2,8221 (0,2179)	2,8964 (0,2464)	2,8964 ****	2,8132 (0,2309)	2,9424 ****	2,8122 (0,2133)
θ_{q0}	4,5251 (0,2824)	4,5992 (0,2306)	4,5992 ****	4,5297 (0,2352)	4,4055 ****	4,5356 (0,2645)
θ_{p1}	-1,8291 (4,2806) *	0,2811 (0,4184) *	-0,2811 ****	-1,8478 (1,3065) *	1,4928 ****	-1,9074 (0,6299)
θ_{p2}	0,4012 (0,177)	16,52 (6,946)	16,52 ****	2,1346 (3,0548) *	-12,404 ****	1,4183 (1,1314) *
θ_{p3}	1,5949 (3,70357) *	0,68 (1,062) *	0,6799 ****	1,49715 (1,29733) *	0,7406 ****	1,499 (2,1371) *
θ_{q1}	-6,1404 (1,4156)	-6,85 (1,277)	-6,85 ****	-6,2251 (1,3567)	4,9526 ****	-6,268 (1,2715)
θ_{q2}	0,3522 (0,4264) *	7,33 (8,8652) *	7,33 ****	1,6723 (0,2592)	2,25 ****	2,5705 (2,5848) *
θ_{q3}	0,6405 (1,2759) *	0,522 (1,1333) *	0,52 ****	0,6623 (0,6632) *	0,9391 ****	0,65298 (0,6985) *
$(\sigma_0)^2$	0,00005 (0,000002)	0,00005 (0,000002)	0,00005 ****	0,00005 (0,000002)	0,00005 ****	0,00005 (0,000002)
$(\sigma_1)^2$	0,0003 (0,00002)	0,0003 (0,00002)	0,0003 ****	0,0003 (0,00002)	0,0003 ****	0,0003 (0,00002)
μ_0	0,0009 (0,00012)	0,0009 (0,0001)	0,0009 ****	0,0009 (0,0002)	0,0008 ****	0,0009 (0,00012)
μ_1	-0,0005 (0,00057) *	-0,0006 (0,0006) *	-0,0006 ****	-0,0005 (0,0006) *	-0,0002 ****	-0,0005 (0,0006) *
Log-likelihood	17471,8380	17472,8930	17472,8900	17471,8930	17470,2247	17471,8456

Les erreurs standards sont entre parenthèses

* indique que le paramètre n'est pas significativement différent de 0 à un niveau d'au moins 5%

****nombres complexes

**ANNEXE 2: Modèle SWM avec probabilités de transition
variables et AR(2)**

Données journalières du 3 juillet 1962 au 31 décembre 2000						
Valeurs estimées des paramètres selon différentes valeurs de départ						
θ_{p0}	2,8355 (0,2293)	2,9593 ****	2,8368 ****	2,9671 ****	2,8374 ****	2,8359 ****
θ_{q0}	4,5339 (0,2324)	4,4232 ****	4,5326 ****	4,3618 ****	4,5501 ****	4,5321 ****
θ_{p1}	-1,7272 (0,5645)	1,6121 ****	-1,8021 ****	1,1092 ****	-1,7803 ****	-1,8033 ****
θ_{p2}	0,2546 (0,0928)	-12,5258 ****	0,2903 ****	-0,5991 ****	1,0203 ****	0,7244 ****
θ_{p3}	1,7183 (1,1672) *	0,7921 ****	1,6979 ****	0,8099 ****	1,7207 ****	1,6675 ****
θ_{q1}	-6,1965 (1,1790)	4,8981 ****	-6,1988 ****	0,4041 ****	-6,1967 ****	-6,1988 ****
θ_{q2}	0,6565 (0,3877) *	5,5964 ****	0,6641 ****	1,6203 ****	0,6881 ****	0,5139 ****
θ_{q3}	0,7495 (0,6568) *	0,8816 ****	0,6319 ****	0,2424 ****	0,5166 ****	0,5863 ****
ϕ_1	0,05021 (0,0125)	0,0523 ****	0,05 ****	0,0516 ****	0,05018 ****	0,0502 ****
ϕ_2	-0,0216 (0,0125) *	-0,0211 ****	-0,0216 ****	-0,0223 ****	-0,02167 ****	-0,0216 ****
$(\sigma_0)^2$	0,00005 (0,000002)	0,00005 ****	0,00005 ****	0,00005 ****	0,00005 ****	0,00005 ****
$(\sigma_1)^2$	0,0003 (0,00002)	0,0003 ****	0,0003 ****	0,0003 ****	0,0003 ****	0,0003 ****
μ_0	0,0009 (0,00012)	0,0008 ****	0,0009 ****	0,0008 ****	0,0009 ****	0,0009 ****
μ_1	-0,0005 (0,00058) *	-0,0002 ****	-0,0005 ****	-0,0003 ****	-0,0005 ****	-0,0005 ****
Log-likelihood 17473,2852 17472,0750 17473,2935 17468,8085 17473,2852 17473,2896						

Les erreurs standards sont entre parenthèses

* indique que le paramètre n'est pas significativement différent de 0 à un niveau d'au moins 5%

****nombres complexes

**ANNEXE 3: Estimations des différentes spécifications de
SWM avec des données mensuelles**

Données du S&P 500 de juillet 1962 à décembre 2000				
	SWM De base	SWM sur variances	SWM avec AR(1)	SWM Avec AR(2)
Valeurs estimées des paramètres				
P	0,6247 (0,1927)	0,6659 (0,18042)	0,60592 (0,19234)	0,60772 (0,2127)
Q	0,9579 (0,0308)	0,9627 (0,03593)	0,95815 (0,02912)	0,95592 (0,0315)
ϕ_1	---	---	-0,05317 (0,05067)*	-0,05397 (0,05167)*
ϕ_2	---	---	---	-0,03081 (0,04975)*
$(\sigma_0)^2$	0,00129 (0,00017)	0,00131 (0,00022)	0,00129 (0,00016)	0,00128 (0,00016)
$(\sigma_1)^2$	0,0059 (0,00213)	0,0066 (0,00348)*	0,0059 (0,002)	0,00566 (0,00193)
μ_0	0,01238 (0,00211)	0,01076 (0,00187)	0,01255 (0,00206)	0,01275 (0,00205)
μ_1	-0,01735 (0,0206)*	---	-0,02058 (0,02164)*	-0,01936 (0,0215)*
log-likelihood	820,54	818,69	819,27	817,56

Les erreurs standards sont entre parenthèses

* indique que le paramètre n'est pas significativement différent de 0 à un niveau d'au moins 5% (d'après p-value du test-t).

**ANNEXE 4: Estimations des différentes spécifications
de SWM en sous-périodes**

Périodes: 1962-1973 1973-1981 1981-1990 1990-2000

SWM sur les moyennes et les variances

Valeurs estimées des paramètres

P	0,9652	0,9948	0,9197	0,9838
Q	0,9796	0,9896	0,9946	0,9755
$(\sigma_0)^2$	0,00002	0,00016	0,0001	0,00017
$(\sigma_1)^2$	0,00008	0,00005	0,0009	0,00003
μ_0	0,0008	-0,0005	0,0007	0,0002
μ_1	-0,0003	0,0006	-0,0006	0,0008
log-likelihood	10554,16	6496,01	7451,65	8867,46

SWM sur les moyennes et les variances avec AR(1)

Valeurs estimées des paramètres

P	0,9848	0,9943	0,9253	0,9840
Q	0,9673	0,9903	0,9949	0,9776
ϕ_1	0,2625	0,1804	0,0671	0,0246
$(\sigma_0)^2$	0,00009	0,00015	0,00007	0,00017
$(\sigma_1)^2$	0,00002	0,00005	0,00086	0,00003
μ_0	-0,00025	-0,0002	0,00071	0,00022
μ_1	0,00062	0,00053	-0,00061	0,00082
Log-likelihood	10641,93	6522,52	7454,65	8864,71

SWM sur les moyennes et les variances avec AR(2)

Valeurs estimées des paramètres

P	0,9838	0,9941	0,9250	0,9840
Q	0,9655	0,9896	0,9949	0,9774
ϕ_1	0,2723	0,1921	0,0684	0,0253
ϕ_2	-0,0433	-0,0551	-0,0259	-0,0200
$(\sigma_0)^2$	0,00008	0,00015	0,00007	0,00017
$(\sigma_1)^2$	0,00002	0,0005	0,00086	0,00003
μ_0	-0,00027	-0,00018	0,00072	0,00023
μ_1	0,00064	0,00053	-0,00061	0,00082
log-likelihood	10640,60	6522,74	7451,61	8862,12

ANNEXE 5: Estimation et tests de diagnostic du GRS avec des données mensuelles

Modèle GRS avec GARCH(1,1)

Données mensuelles de juillet 1962 à décembre 2000.

Paramètres	Valeurs estimées	erreurs standards
P_{00}	0,9482	(0,015634)
P_{11}	0,9043	(0,033528)
α_0	0,0290	(0,003284)
α_1	-0,0355	(0,004401)
β_0	-0,0823	(0,049478) *
β_1	-0,0271	(0,072083) *
C_0	0,0000	***
C_1	0,0000	***
A_0	0,0302	(0,052625) *
A_1	0,6031	(0,215401)
B_0	0,5706	(0,058039)
B_1	0,3658	(0,095093)

log-likelihood 883,2219

* indique que le paramètre n'est pas significativement différent de 0 à un niveau

d'au moins 5% (d'après p-value du test-t).

*** nombres complexes

Diagnostic sur les résidus standardisés

Statistiques	GRS GARCH(1,1)
Moyenne de $\varepsilon_t / H_t^{1/2}$	-0,0698
Moyenne de ε_t^2 / H_t	0,7650
Coefficient d'asymétrie	0,05
Coefficient d'aplatissement *	2,83
Pour $\varepsilon_t / H_t^{1/2}$	
LB₁	0,23
LB₂	4,64
LB₃	4,78
LB₄	5,08
LB₅	5,65
LB₁₀	12,33
Pour ε_t^2 / H_t	
LB₁	0,55
LB₂	0,56
LB₃	0,78
LB₄	0,89
LB₅	1,33
LB₁₀	6,46

LB = Statistique de Ljung-Box avec en indice le nombre de retards considérés.

**coefficient en excess kurtosis*

Test des effets ARCH résiduels		
Paramètres	1^{ère} régression	2^e régression
Constante	0,6347 (0,126364)	0,6374 (0,033139)
Pr(St=1 It)	0,6724 (0,290242)	0,6803 (0,292105)
ϵ_{t-1}^2		-0,0404 (0,046694)
ϵ_{t-2}^2		0,0364 (0,046623)
R²	0,012	0,015
F		0,71

