

Direction des bibliothèques

AVIS

Ce document a été numérisé par la Division de la gestion des documents et des archives de l'Université de Montréal.

L'auteur a autorisé l'Université de Montréal à reproduire et diffuser, en totalité ou en partie, par quelque moyen que ce soit et sur quelque support que ce soit, et exclusivement à des fins non lucratives d'enseignement et de recherche, des copies de ce mémoire ou de cette thèse.

L'auteur et les coauteurs le cas échéant conservent la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent ce document. Ni la thèse ou le mémoire, ni des extraits substantiels de ce document, ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans l'autorisation de l'auteur.

Afin de se conformer à la Loi canadienne sur la protection des renseignements personnels, quelques formulaires secondaires, coordonnées ou signatures intégrées au texte ont pu être enlevés de ce document. Bien que cela ait pu affecter la pagination, il n'y a aucun contenu manquant.

NOTICE

This document was digitized by the Records Management & Archives Division of Université de Montréal.

The author of this thesis or dissertation has granted a nonexclusive license allowing Université de Montréal to reproduce and publish the document, in part or in whole, and in any format, solely for noncommercial educational and research purposes.

The author and co-authors if applicable retain copyright ownership and moral rights in this document. Neither the whole thesis or dissertation, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms, contact information or signatures may have been removed from the document. While this may affect the document page count, it does not represent any loss of content from the document.

Université de Montréal

**Équations différentielles issues
des vecteurs singuliers
des représentations de l'algèbre de Virasoro**

par

Sylvain Eon

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en mathématiques

Orientation mathématiques appliquées

septembre 2008



© Sylvain Eon, 2008

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

**Équations différentielles issues
des vecteurs singuliers
des représentations de l'algèbre de Virasoro**

présenté par

Sylvain Eon

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Véronique Hussin

(président-rapporteur)

Yvan Saint-Aubin

(directeur de recherche)

Abraham Broer

(membre du jury)

Mémoire accepté le:

28/08/2008

SOMMAIRE

L'étude physique des transitions de phase en deux dimensions, et plus particulièrement des phénomènes critiques, a été dominée durant les vingt-cinq dernières années par l'hypothèse d'invariance conforme. Dans cette relativement récente théorie physique qu'est la théorie conforme des champs, le rôle central est joué par l'algèbre de Lie des transformations conformes infinitésimales, l'algèbre de Witt, et de son extension centrale, l'algèbre de Virasoro.

Les fonctions de corrélation des théories étudiées sont fortement contraintes par l'hypothèse d'invariance conforme. Ces contraintes se matérialisent par des équations différentielles que doivent satisfaire ces fonctions de corrélation. On se propose dans ce mémoire d'étudier les propriétés de l'espace de solutions des équations différentielles ordinaires découlant de l'existence des vecteurs singuliers de l'algèbre de Virasoro.

Après un court rappel des groupes et des algèbres de Lie, l'algèbre de Virasoro est définie. Suivent les définitions et théorèmes utiles portant sur les représentations de l'algèbre de Virasoro, les vecteurs singuliers et les modules de Verma. La forme de Shapovalov et les tables de Kac sont également introduites. Les fonctions de corrélation de deux à quatre points sont étudiées. L'identité de Ward de la théorie conforme des champs permet de faire le lien entre les vecteurs singuliers de l'algèbre de Virasoro et des opérateurs différentiels. Ces opérateurs engendrent des équations différentielles lorsqu'ils sont appliqués à des fonctions de corrélations. En se restreignant aux fonctions de corrélation à quatre points, on obtient des équations différentielles ordinaires. C'est ce que nous faisons ici. Les modèles minimaux $\mathcal{M}(4, 3)$ (Ising) et $\mathcal{M}(5, 4)$ (Ising tricritique) font intervenir un nombre fini de représentations de plus haut poids. Nous étudions les équations différentielles découlant des vecteurs singuliers, ainsi que leurs espaces de solutions que nous caractérisons par la méthode de Frobenius. Le résultat

principal du mémoire est une conjecture, dite *du damier*, qui relie les exposants apparaissant par la méthode de Frobenius aux plus haut poids de la table de Kac associée, pour un modèle minimum donné.

Mots-clés : algèbre de Lie, invariance conforme, méthode de Frobenius, modèle d'Ising, modèles minimaux, modules de Verma, phénomènes critiques, table de Kac, théorie des champs conformes.

ABSTRACT

The last twenty-five years have seen the raise of the conformal invariance hypothesis as the central element in the physical study of phase transitions in two dimensions of space, and particularly of critical phenomena. The Lie algebra of infinitesimal conformal transformation is called the Witt algebra. Together with its central extension, the Virasoro algebra, they play the central role in the relatively young physical theory that is known as the conformal field theory.

The conformal invariance hypothesis imposes strong restrictions on the correlation functions of the theories under study. These restrictions take the form of differential equations that the correlation functions must satisfy. This memoir is the study of the properties of the solution spaces of the differential equations linked to the existence of singular vectors in the Virasoro algebra.

A short review of Lie groups and Lie algebra is followed by some useful definitions and examples on the Virasoro algebra representations, singular vectors and Verma modules. The Kac table and the Shapovalov form are also defined. This memoir investigates two, three and four-point correlation functions. The Ward identity links the singular vectors in the Virasoro algebra to some differential operators. These differential operators generate differential functions when applied to correlation functions. When restricted to four points correlation functions, this gives us ordinary differential equations. Minimal models $\mathcal{M}(4, 3)$ (Ising model) and $\mathcal{M}(5, 4)$ (tri-critical Ising model) are concerned with a finite number of highest weight representations. This memoir calculates the ordinary differential equations coming from singular vectors, as well as their solution spaces obtained by the Frobenius method. The main result of this memoir is the *chessboard conjecture* that connect, for a given minimal model, the exponents given by the Frobenius method to the highest weights of the associated Kac table.

Keywords : conformal field theory, conformal invariance, critical phenomena, Frobenius method, Ising model, Kac table, Lie algebra, minimal models, Verma modules.

TABLE DES MATIÈRES

Sommaire	iii
Abstract	v
Liste des tableaux	xi
Liste des figures	xii
Sigles et abréviations	xiii
Remerciements	xvi
Introduction	1
Chapitre 1. Algèbres de Lie et algèbre de Virasoro	6
1.1. Groupes de Lie	6
1.2. Algèbre de Lie	7
1.3. Exemples d'algèbre de Lie	7
1.3.1. $gl(n, \mathbb{R})$	7
1.3.2. $so(3)$	8
1.4. Champs de vecteurs sur le cercle	9
1.4.1. Transformation conforme locale	10
1.4.2. Transformations conformes infinitésimales	15
1.4.3. Champs de vecteurs l_i	16
1.5. Extension centrale	19
1.5.1. Justification	19

1.5.2.	Équation du cocycle.....	20
1.5.3.	Détermination du cocycle $\psi(l_i, l_j)$	20
1.6.	Algèbre de Virasoro.....	22
1.6.1.	Isomorphisme des sous-algèbres de Lie Vir^- et Vir^+	23
1.7.	Graduation de Vir et décomposition triangulaire.....	25
1.7.1.	Décomposition triangulaire.....	25
1.7.2.	Graduation sur Vir	26
Chapitre 2.	Représentations de l'algèbre de Virasoro.....	29
2.1.	Représentations.....	29
2.2.	Exemples de représentations.....	31
2.3.	Modules de Verma.....	34
2.4.	Vecteur singulier.....	37
2.5.	Vecteur singulier et réductibilité des représentations.....	41
2.6.	Forme de Shapovalov et déterminant de Kac.....	42
2.6.1.	Forme de Shapovalov.....	42
2.6.2.	Déterminant de Kac.....	45
2.7.	Tables de Kac et série discrète de Friedan-Qiu-Shenker.....	48
2.7.1.	Tables de Kac.....	48
2.7.2.	Série discrète de Friedan-Qiu-Shenker.....	50
2.8.	Structure des modules irréductibles.....	50
Chapitre 3.	Théorie des champs conformes.....	55
3.1.	Fonctions de corrélation.....	55
3.1.1.	Fonctions de corrélation à deux points.....	55
3.1.2.	Fonctions de corrélation à trois points.....	61

3.1.3.	Fonctions de corrélation à quatre points	62
3.2.	L'identité de Ward	66
3.2.1.	Les fonctions de corrélation et l'identité de Ward	66
3.2.2.	La famille d'opérateurs différentiels \mathcal{L}_r comme représentation de Vir^+	67
3.2.3.	L'invariance conforme en dimension 2 et l'identité de Ward	68
3.3.	EDO pour les fonctions de corrélation à quatre points	70
3.3.1.	De vecteur singulier à EDP	70
3.3.2.	D'EDP à EDO	71
Chapitre 4.	Étude de deux modèles minimaux	73
4.1.	Modèles minimaux unitaires $\mathcal{M}(p, p')$	73
4.2.	Algorithmes	74
4.2.1.	Algorithme de calcul des vecteurs singuliers	74
4.2.2.	Algorithme de calcul des EDO	75
4.3.	Exemples de calcul	75
4.3.1.	Détermination du vecteur singulier de niveau deux $ VS_{(c(m), h_{1,2}(m))}^2\rangle$	76
4.3.2.	EDO associée au vecteur singulier $ VS_{(c(m), h_{1,2}(m))}^2\rangle$	77
4.3.3.	Premier choix de fonction de corrélation	78
4.3.4.	Second choix de fonction de corrélation	81
4.4.	Méthode de Frobenius	82
4.4.1.	Détermination des exposants caractéristiques	83
4.4.2.	Relation entre les exposants caractéristiques d' $EDO_{\frac{1}{2}, \frac{1}{16}}^2$ (i) et (ii)	83
4.5.	Résultats pour deux modèles minimaux	84
4.5.1.	Modèle minimal $\mathcal{M}(4, 3)$	84
4.5.2.	Modèle minimal $\mathcal{M}(5, 4)$	89
4.6.	La conjecture du damier	91

4.6.1. Vérifications explicites	93
Conclusion	98
Bibliographie	100
Annexe A. Listes des vecteurs singuliers	A-i
A.1. Listes de vecteurs singuliers pour le modèle minimal $\mathcal{M}(4, 3)$	A-i
A.2. Listes de vecteurs singuliers pour le modèle minimal $\mathcal{M}(5, 4)$	A-ii
Annexe B. Listes des EDO	B-i
B.1. Listes des EDO pour le modèle minimal $\mathcal{M}(4, 3)$	B-ii
B.2. Listes des EDO pour le modèle minimal $\mathcal{M}(5, 4)$	B-iii

LISTE DES TABLEAUX

1.1	Bases de $[U(\text{Vir}^+)]^{(n)}$, pour n de 0 à 4.....	27
2.1	Fonction $p(n)$: nombre de partitions de l'entier n	44
2.2	Table de Kac de taille $(p-1)(p'-1)$	49
2.3	Table de Kac pour $(p, p') = (4, 3)$	49
2.4	Table de Kac pour $(p, p') = (5, 4)$	49
2.5	Niveaux des vecteurs singuliers permis par la série discrète de Friedan-Qiu-Shenker pour $(p, p') = (4, 3)$, avec $c = \frac{1}{2}$	54
4.1	Tableau de résultats pour $\mathcal{M}(4, 3)$ avec les poids $c = \frac{1}{2}, h = \frac{1}{2}$	86
4.2	Tableau de résultats pour $\mathcal{M}(4, 3)$ avec les poids $c = \frac{1}{2}, h = \frac{1}{16}$	87
4.3	Tableau de résultats pour $\mathcal{M}(4, 3)$ avec les poids $c = \frac{1}{2}, h = 0$	88
4.4	Exposants caractéristiques de $\mathcal{M}(4, 3)$	89
4.5	Exposants caractéristiques de $\mathcal{M}(5, 4)$	91
4.6	Table de Kac étendue pour le poids $h_{r,s}$ (cas r et s pairs).....	92
4.7	Table de Kac étendue pour $m = 3$	92
4.8	Table de Kac étendue pour $m = 4$	93

LISTE DES FIGURES

0.1	Modèle d'Ising en deux dimensions sur réseau carré. Chaque point du réseau (cercle plein) a un spin $\sigma = \pm 1$. Les spins interagissent avec leur plus proches voisins uniquement. La constante d'interaction horizontale est J et la constante d'interaction verticale est J'	2
0.2	Graphes de l'énergie libre et de l'énergie interne en fonction de la température T pour différentes tailles de réseaux	3
0.3	Graphe de la chaleur spécifique C en fonction de la température T pour différentes tailles de réseaux	3
0.4	Chaleur spécifique C fonction de la température T pour le modèle d'Ising sur réseau carré. La chaleur spécifique diverge logarithmiquement de chaque côté de la température critique $T_c = 2.269185J/k_B$ dans la limite thermodynamique	4
1.1	Sphère de Riemann	10
2.1	Règles de commutation $\epsilon(x, y, z)$	32
2.2	Sous-espaces $V^{(0)}$ à $V^{(n)}$	38
2.3	Courbes $C_{1,1}(t)$, $C_{1,2}(t)$ et $C_{2,1}(t)$ dans le plan (c, h)	46
2.4	$V_{(c=\frac{1}{2}, h=0)}$	51
2.5	Intersections multiples des courbes $C_{r,s}$ dans le plan (c, h)	52
2.6	Première intersection de courbes $C_{r,s}$	53

SIGLES ET ABRÉVIATIONS

Abréviation	Signification	Page
(g, x)	Action de $g \in G$ sur x , élément de E	p. 11
$df(v)$	Différentielle d'une fonction f appliquée à un vecteur v	p. 13
A_ϵ	Anneau unitaire d'épaisseur 2ϵ	p. 16
$\mathbb{C}[w, w^{-1}]$	Espace vectoriel des polynômes en (w, w^{-1})	p. 17
$\text{Diff}(w, w^{-1})$	Ensemble des opérateurs différentiels de la forme $p(w, w^{-1})\partial_w$, avec $p \in \mathbb{C}[w, w^{-1}]$	p. 17
\doteq	égal à l'ordre $O(\epsilon)$	p. 18
$\psi(i, j)$	Cocycle $\psi(l_i, l_j)$	p. 20
Vir	Algèbre de Virasoro	p. 22
Vir^-, Vir^0, Vir^+	Sous-espaces vectoriels de Vir	p. 23
$U(Vir^+)$	Algèbre enveloppante de Vir^+	p. 27
$[U(Vir^+)]^{(n)}$	Sous-espaces vectoriels homogène de degré n	p. 27
$End(V)$	les endomorphismes de V	p. 30
$\epsilon(x, y, z)$	Règles de commutation des éléments de base de $so(3)$	p. 32
php	Plus haut poids	p. 34
c	Charge centrale	p. 35
Z^*	$\{0, 1, 2, \dots\}$	p. 36
$V_{(c,h)}$	Module de Verma de php (c, h)	p. 35
$V^{(n)}$	Sous-espace homogène du module de Verma V	p. 36
$M_{(c,h)}$	Module irréductible de php (c, h)	p. 36

Abréviation	Signification	Page
$(* *)$	Forme de Shapovalov sur $V_{(c,h)}$	p. 42
$p(n)$	Nombre de partitions de l'entier n	p. 43
$M^{(n)}$	Matrice de Graham de taille $p(n) \times p(n)$	p. 43
$K_{(c,h)}^n$	Déterminant (det) de Kac	p. 44
$C_{r,s}$	Courbes le long desquelles le déterminant de Kac $K_{(c,h)}$ s'annule	p. 45
$\mathcal{M}(p, p')$	Modèle minimum (p, p')	p. 48
$\chi_{M_{(c,h)}}$	Caractère du module irréductible $M_{(c,h)}$	p. 53
dim	Dimension	p. 54
Φ_i	i ème champ primaire Φ	p. 56
Δ_i ou h_i	Poids conforme caractérisant le champ Φ_i	p. 56
$\left \frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial \mathbf{x}} \right $	Déterminant de la matrice jacobienne d'une transformation conforme	p. 56
γ	Facteur de dilatation	p. 58
\mathbf{x}_{ij}	$ \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j $	p. 60
$\delta_\epsilon \langle X \rangle$	Variation infinitésimale d'une chaîne X de champs primaire	p. 68
T	Transformation conforme	p. 70
EDP	Équation différentielle aux dérivées partielles	p. 70
EDO	Équation différentielle ordinaire	p. 70
\mathbf{x}_{ij}	$\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$	p. 72
$ VS_{(c,h)}^n\rangle$	Vecteur singulier de niveau n dans le module de php (c, h)	p. 73
$EDO_{(c,h)}^n$	EDO de degré n dans le module de php (c, h)	p. 74
$p_{f,m}(\lambda)$	Équation indiciale relative à l'EDO pour f , paramétrée par m , et ayant pour racines les exposants caractéristiques λ	p. 82
\mathcal{H}	Espace de Hilbert	p. 84
S	Ensemble des exposants caractéristiques obtenus avec la méthode de Frobenius	p. 88
$S_{r,s}^{(m)}$	Ensemble des exposants caractéristiques translétés	p. 88

*Ce mémoire est dédié aux trois femmes de ma vie : ma mère, mon épouse et ma fille.
Elles ont été tout à la fois mon support, mon inspiration et ma motivation.*

REMERCIEMENTS

Ce travail de recherche n'aurait pu voir le jour sans Yvan Saint-Aubin, mon directeur de recherche. Je lui suis extrêmement reconnaissant de m'avoir fait bénéficier de son expertise incontestable en la matière, de sa disponibilité et de son sens pédagogique hors pair.

Un grand merci également à ma femme qui m'a toujours soutenu, et un grand pardon à ma petite fille qui ne m'a pas assez vu ces seize derniers mois. Je ne voudrais pas oublier mes collègues du département de mathématiques et statistique qui m'ont aidé, encouragé et ont entretenu avec moi des conversations toujours des plus stimulantes.

Finalement, je tiens aussi à remercier le FQRNT pour la bourse d'étude, et le CRSNG pour la part de subvention octroyée par l'entremise de mon directeur de recherche. Ces généreuses contributions financières se sont avérées inestimables et m'ont permis de me consacrer à ce travail de recherche.

INTRODUCTION

*La plus belle chose que nous puissions éprouver,
c'est le mystère des choses.*

Albert Einstein (1879 – 1955)

On sait grâce à l'étude de systèmes physiques que certaines variables thermodynamiques présentent des discontinuités à la température dite critique. L'étude du comportement de tels systèmes autour de la température critique est une branche active de la physique statistique, celle des phénomènes critiques. Le modèle d'Ising, introduit au début du vingtième siècle par W. Lenz (1888 – 1957) et son étudiant E. Ising (1900 – 1998) pour modéliser les phénomènes ferromagnétiques et antiferromagnétiques est l'archétype des modèles de mécanique statistique et est toujours étudié à ce jour. En chaque point d'un réseau rectangulaire $m \times n$ se trouve une variable, que l'on appellera le spin, pouvant prendre les valeurs ± 1 . L'hamiltonien pour le modèle d'Ising sur un réseau de taille $n \times m$ avec constantes d'interaction J, J' et champs magnétique H est

$$E_{m,n}(\sigma) = -J \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n-1} \sigma_{i,j} \sigma_{i,j+1} - J' \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^n \sigma_{i,j} \sigma_{i+1,j} - H \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sigma_{i,j},$$

et la fonction de partition

$$Z_{m,n} = \sum_{\sigma} \exp[-\beta E_{m,n}(\sigma)],$$

où $\beta = \frac{1}{k_B T}$, $k_B = 1.3806505(24) \times 10^{-23} J/K$ est la constante de Boltzmann, et T est la température (en deg Kelvin.)

La figure 0.1 représente un réseau carré 4×4 . Le tour de force réalisé par L. Onsager (1903 – 1976) fut de trouver une expression analytique à la fonction de partition dans le cas du modèle d'Ising bidimensionnel en l'absence de champ magnétique externe.

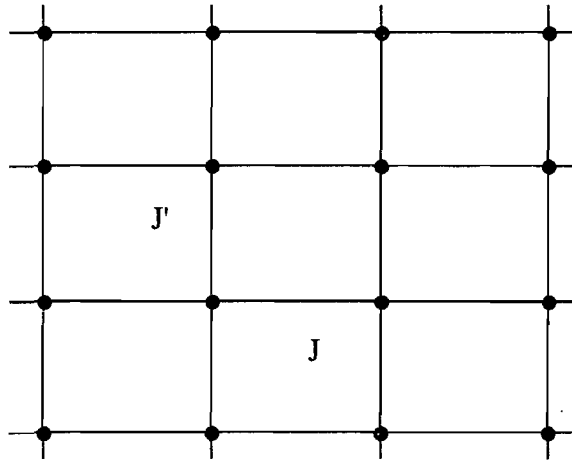


FIG. 0.1. Modèle d'Ising en deux dimensions sur réseau carré. Chaque point du réseau (cercle plein) a un spin $\sigma = \pm 1$. Les spins interagissent avec leur plus proches voisins uniquement. La constante d'interaction horizontale est J et la constante d'interaction verticale est J' .

A partir de là, en posant que $J = J'$ et à l'aide des relations thermodynamiques pour l'énergie interne et la chaleur spécifique :

$$u = -\frac{\partial(\ln Z)}{\partial\beta} \text{ et } C = \frac{\partial u}{\partial T},$$

on peut prouver qu'il existe une température critique $T_c > 0$ où la chaleur spécifique C est singulière et au voisinage de laquelle elle se comporte comme $\ln|T - T_c|$.

L'énergie libre (par site) f est définie dans [Ba82] par une limite, appelée la limite thermodynamique. On lit

$$f(H, T) = -kT \lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1} \ln Z_N(H, T),$$

où k est une constante, N est la taille du réseau carré, et $Z_N(H, T)$ est la fonction de partition sur le réseau carré. Les figures 0.2(a) et 0.2(b) montrent l'évolution de l'énergie libre et de l'énergie interne. Le système en question est le modèle d'Ising en deux dimensions sur un réseau carré quand la taille du réseau varie de 3 à 5. On voit sur la figure 0.3 qu'une singularité semble émerger lorsque l'on trace la chaleur spécifique en fonction de la température. La figure 0.4 tirée de [Th72] confirme la divergence logarithmique de la chaleur spécifique au voisinage de la température critique. Les résultats d'Onsager, bien qu'extraordinaires d'ingénuité et de complexité, sont aussi

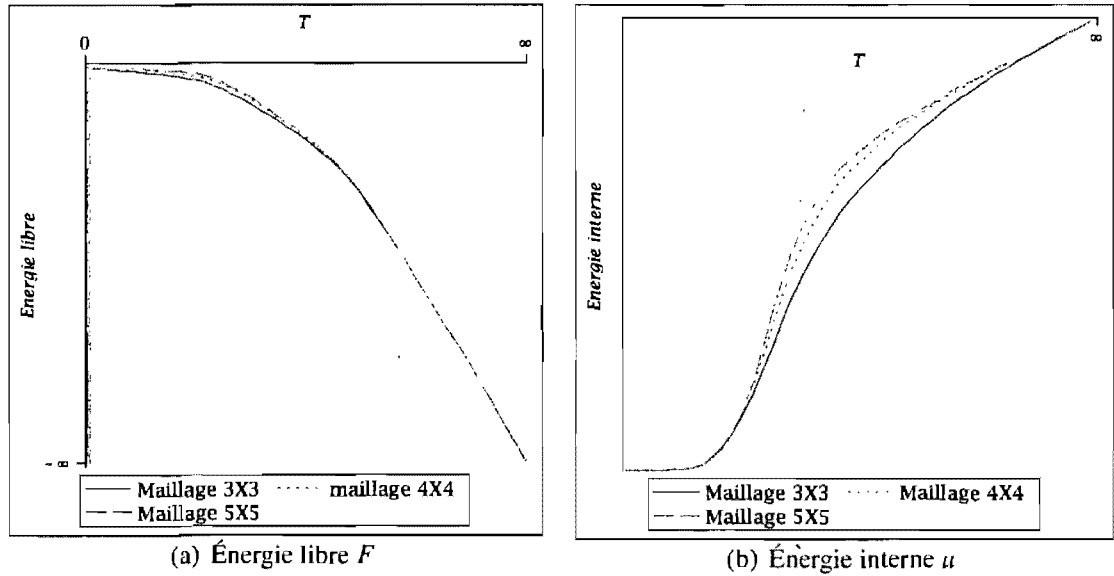


FIG. 0.2. Graphes de l'énergie libre et de l'énergie interne en fonction de la température T pour différentes tailles de réseaux

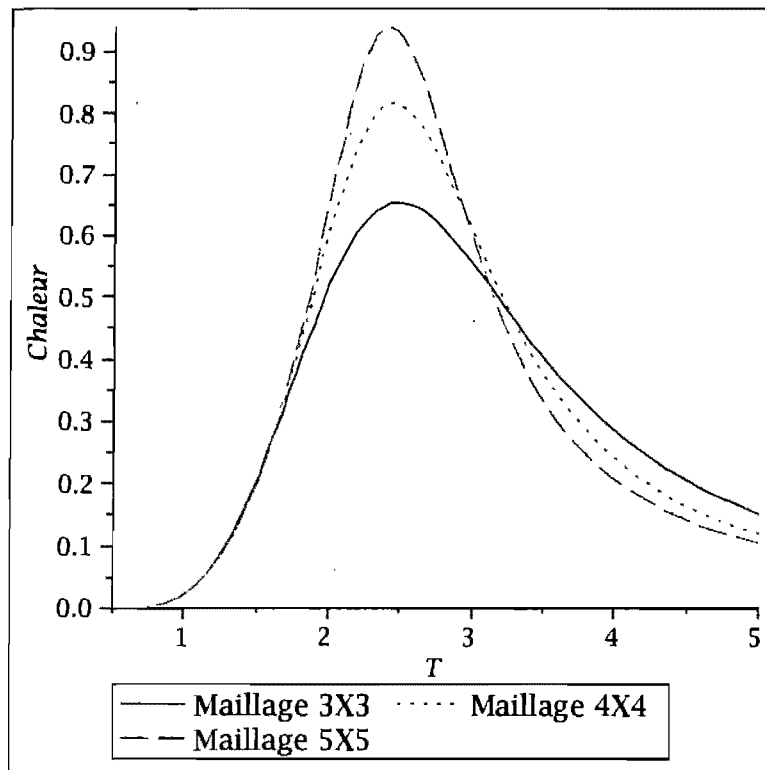


FIG. 0.3. Graphe de la chaleur spécifique C en fonction de la température T pour différentes tailles de réseaux

limités à des conditions bien précises ; par exemple, il n'y a pas à ce jour de solution explicite connue pour le modèle d'Ising à deux dimensions avec un champ magnétique

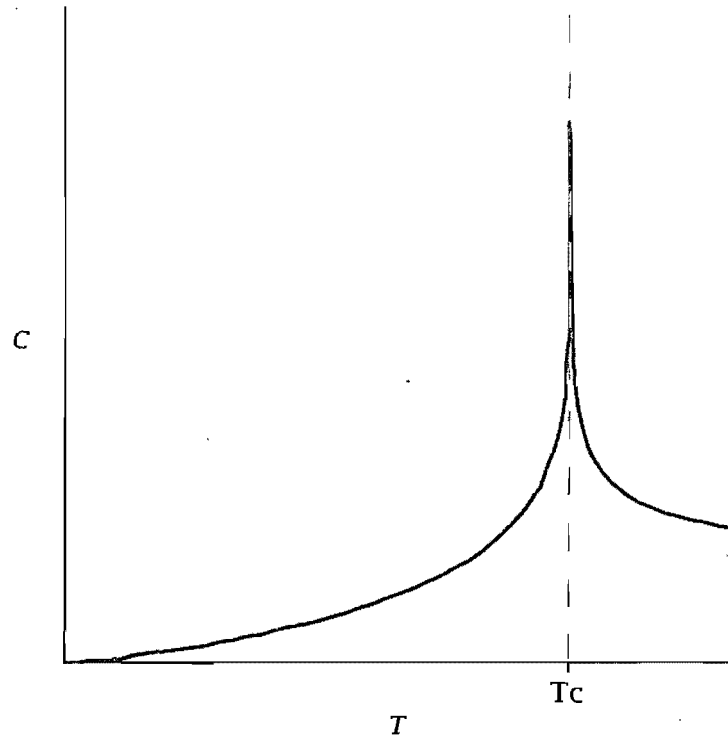


FIG. 0.4. Chaleur spécifique C fonction de la température T pour le modèle d'Ising sur réseau carré. La chaleur spécifique diverge logarithmiquement de chaque côté de la température critique $T_c = 2.269185J/k_B$ dans la limite thermodynamique.

externe non-nul. La question se pose alors de savoir s'il est possible d'abstraire une structure algébrique qui corroborerait les résultats déjà obtenus et permettrait d'en obtenir de nouveaux. La réponse est positive. En effet, le travail des pionniers de la théorie des champs conformes, Belavin, Polyakov et Zamolodchikov (1984), a permis de développer un paradigme physique, utilisant des outils mathématiques fins, qui montre comment les fonctions de corrélation pouvaient être obtenues à partir de l'hypothèse d'invariance conforme. Ce travail remarquable a permis de calculer analytiquement plusieurs quantités décrivant la physique des phénomènes critiques. Avec l'hypothèse d'invariance conforme, l'hypothèse du plus haut poids et l'hypothèse d'unitarité constituent les trois balises qui viennent a priori délimiter le champ d'étude des phénomènes critiques. L'invariance conforme requiert qu'une représentation de l'algèbre conforme ou de son extension centrale, l'algèbre de Virasoro, soit réalisée sur l'espace d'Hilbert

de la théorie des champs. Si l'extension centrale n'est pas triviale, alors les représentations naturelles que sont les modules de Verma possèdent, pour plusieurs valeurs de la charge centrale, des vecteurs singuliers. Ces vecteurs sont de norme nulle et sont orthogonaux à tout autre vecteur de la théorie. Grâce à l'identité de Ward, les retirer mathématiquement de la théorie, c'est-à-dire faire le quotient du module de plus haut poids par le sous-espace (module maximal) que ces vecteurs singuliers engendrent, mène à des équations différentielles ordinaires pour les fonctions de corrélation à quatre points. On observe que, puisqu'il y a plus d'un vecteur singulier par module de Verma, il y aura nécessairement plus d'une équation différentielle pour ces fonctions de corrélation. On peut alors se demander quelle est la relation entre ces équations différentielles, si elle existe.

L'objectif de ce mémoire est de tenter de répondre à cette question. Ceci pourrait permettre ultimement de caractériser l'algèbre engendrée par les opérateurs différentiels découlant des vecteurs singuliers d'une théorie. On se contentera d'effectuer des calculs se rapportant aux modèles minimaux, qui sont les mieux connus. Par exemple, le modèle minimal qui correspond au modèle d'Ising en deux dimensions sera étudié. La méthodologie choisie comporte trois étapes. La première étape consiste à calculer les paires de vecteurs singuliers de plus haut poids appartenant aux modules de Verma qui engendrent le sous-module maximal. La seconde étape consiste à convertir ces vecteurs en équations différentielles. Pour ces deux premières étapes, le langage de manipulation symbolique Maple (version 11) est utilisé. La troisième étape qui est le coeur de ce travail de recherche consiste à tenter de déduire la structure algébrique de tout modèle minimal via la dépendance des espaces solutions des équations différentielles qui en découlent. Ceci m'a amené à formuler une conjecture que j'ai appelée la conjecture du damier.

Chapitre 1

ALGÈBRES DE LIE ET ALGÈBRE DE VIRASORO

Pour autant que les lois des mathématiques se réfèrent à la réalité, elles ne sont pas certaines ; et pour autant qu'elles sont certaines, elles ne se réfèrent pas à la réalité.

Albert Einstein (1879 – 1955), “Geometrie und Erfahrung”

Dans l'article à l'origine de la théorie des champs conformes, Belavin, Polyakov et Zamolodchikov (1984) ont montré comment les fonctions de corrélation pouvaient être obtenues à partir de l'hypothèse d'invariance conforme. Un des éléments clés sur lequel repose leur travail est l'algèbre de Virasoro. L'algèbre de Virasoro est l'unique extension centrale de l'algèbre de Witt, une algèbre de Lie définie à partir des transformations conformes infinitésimales. L'algèbre de Virasoro comporte une graduation naturelle. Ce premier chapitre a pour objet d'expliquer ces concepts.

Groupes de Lie de matrices et algèbres de Lie de dimension finie sont intimement liés. Ainsi à chaque groupe G est associée une algèbre \mathfrak{g} . On regroupe ici les définitions (issues de [Ha03]) sur les groupes de Lie (que l'on suppose connus du lecteur.)

1.1. GROUPES DE LIE

Définition 1.1.1. *Le groupe linéaire général sur \mathbb{C} , que l'on note $GL(n; \mathbb{C})$, est le groupe des matrices carrées inversibles $n \times n$ ayant pour éléments des nombres complexes.*

Définition 1.1.2. *Le groupe linéaire spécial sur \mathbb{C} , que l'on note $SL(n; \mathbb{C})$, est le groupe des matrices carrées inversibles $n \times n$ de déterminant un avec pour éléments des nombres complexes.*

Définition 1.1.3. Soit A_m une suite de matrices complexes dans $M_n(\mathbb{C})$, l'espace des matrices carrées $n \times n$ sur \mathbb{C} . On dit que A_m converge vers une matrice A si chacun des éléments de A_m converge vers l'élément correspondant de A , lorsque $m \rightarrow \infty$.

Définition 1.1.4. Un groupe (de Lie) de matrices est un sous-groupe G de $GL(n; \mathbb{C})$ ayant la propriété suivante : si A_m est une suite de matrices dans G telle que A_m converge vers une matrice A , alors soit $A \in G$, ou bien A n'est pas inversible.

Définition 1.1.5. Soit A une matrice complexe $n \times n$. A est dite unitaire si $A^* = A^{-1}$, où A^* est l'adjoint de A ($(A^*)_{jk} = \overline{A_{kj}}$).

Définition 1.1.6. Le groupe de matrices complexes unitaires de taille $n \times n$ et de déterminant égal à un est un groupe (de Lie) dénoté $SU(n)$.

Définition 1.1.7. Soit la forme bilinéaire $(*, *)$ sur \mathbb{C} définie par $(x, y) = \sum_k x_k y_k$. Soit l'ensemble des matrices $n \times n$ complexes A tel que $(Ax, Ay) = (x, y)$. Alors cet ensemble, noté $O(n, \mathbb{C})$, est un groupe (de Lie) appelé le groupe orthogonal. Si, en plus, le déterminant de A est égal à un, alors on dénote le groupe obtenu par $SO(n, \mathbb{C})$ (S pour spécial).

1.2. ALGÈBRE DE LIE

La définition d'une algèbre de Lie repose sur trois propriétés.

Définition 1.2.1. Une algèbre de Lie sur \mathbb{R} (\mathbb{C}) est un espace vectoriel \mathfrak{g} sur le corps des nombres réels (complexes), muni d'un produit $[\cdot, \cdot]$ de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ dans \mathfrak{g} , qui respecte les propriétés :

- (1) $[\cdot, \cdot]$ est linéaire sur les deux entrées (bilinéarité),
- (2) $[X, Y] = -[Y, X], \forall X, Y \in \mathfrak{g}$ (antisymétrie),
- (3) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0, \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ (identité de Jacobi).

1.3. EXEMPLES D'ALGÈBRE DE LIE

1.3.1. $gl(n, \mathbb{R})$

Définition 1.3.1. Soit \mathbb{F} un corps, $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}, n \geq 1$. Le commutateur de A et B est la matrice appartenant à $\mathbb{F}^{n \times n}$ définie par :

$$[A, B] = AB - BA. \quad (1.3.1)$$

Proposition 1.3.1. $gl(n, \mathbb{R})$ qui dénote $(\mathbb{R}^{n \times n}, [*, *])$ est une algèbre de Lie sur \mathbb{R} .

Démonstration

Soient u, v, w dans $\mathbb{F}^{n \times n}$. Soient α, β dans \mathbb{F} . On vérifie les propriétés de

(1) bilinéarité,

$$\begin{aligned} [u, \alpha v + \beta w] &= u(\alpha v + \beta w) - (\alpha v + \beta w)u \\ &= \alpha uv + \beta uw - \alpha vu - \beta wu = \alpha(uv - vu) + \beta(uw - wu) \\ &= \alpha[u, v] + \beta[u, w] \end{aligned}$$

et de manière similaire

$$[\alpha u + \beta v, w] = \alpha[u, w] + \beta[v, w]$$

(2) antisymétrie,

$$[u, v] = uv - vu = -(vu - uv) = -[v, u]$$

(3) et l'identité de Jacobi

$$\begin{aligned} &[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] \\ &= [u, vw - wv] + [v, wu - uw] + [w, uv - vu] \\ &= u(vw - wv) - (vw - wv)u + v(wu - uw) - (wu - uw)v + w(uv - vu) - (uv - vu)w \\ &= uvw - uvw - uuv + uvv - vwu + vwu + wvu - wvu - vuw + vuw - wuv + wuv \\ &= 0. \end{aligned}$$

Puisque $gl(n, \mathbb{R})$ vérifie la bilinéarité, l'antisymétrie et l'identité de Jacobi, alors, par la définition 1.2.1, $gl(n, \mathbb{R})$ est une algèbre de Lie sur \mathbb{R} . \square

1.3.2. $so(3)$

L'algèbre de Lie $so(3)$ est l'algèbre de Lie qui correspond au groupe de Lie de matrices $SO(3)$.

Définition 1.3.2. $so(3) := (\{l_x, l_y, l_z\}, [*, *])$ avec l_x, l_y et l_z , les trois matrices 3×3 de $gl(3, \mathbb{R})$ définies par

$$l_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, l_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, l_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.3.2)$$

Proposition 1.3.2. $so(3)$ est une sous-algèbre de Lie de $gl(3, \mathbb{R})$ sur le corps des réels.

Démonstration

On vérifie aisément que

$$\begin{aligned} [l_x, l_y] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= l_z, \end{aligned}$$

et de la même manière que $[l_y, l_z] = l_x$ et $[l_z, l_x] = l_y$. D'autre part, $[l_i, l_i] = 0$ pour i dans $\{x, y, z\}$ grâce à la propriété d'antisymétrie. Soient v, w deux éléments de $so(3)$, avec $v = al_x + bl_y + cl_z$, $w = a'l_x + b'l_y + c'l_z$ pour a, b, c, a', b', c' dans \mathbb{R} . La fermeture de $so(3)$ se vérifie à l'aide des identités précédentes. Par la proposition (1.3.1), on en conclut que le sous-espace vectoriel de $gl(3, \mathbb{R})$ qu'est $so(3)$ est une algèbre de Lie. \square

Définition 1.3.3. L'algèbre de Lie $so(3, \mathbb{C})$ est définie sur le corps \mathbb{C} . Sa base (l_x, l_y, l_z) et son crochet $[\cdot, \cdot]$ coïncident avec ceux de $so(3)$. L'algèbre de Lie $so(3, \mathbb{C})$ est la complexification de $so(3)$.

La preuve que $so(3, \mathbb{C})$ est une algèbre de Lie est similaire à la proposition (1.3.2).

Définition 1.3.4. L'algèbre de Lie $su(n)$ est l'espace des matrices complexes carrées X de format $n \times n$ tel que $X^* = -X$ et $\text{trace}(X) = 0$.

On va maintenant s'intéresser à des algèbres de Lie agissant sur des ensembles familiers.

1.4. CHAMPS DE VECTEURS SUR LE CERCLE

Puisque la présente étude traite de symétrie pour des phénomènes physiques en deux dimensions, il est naturel d'introduire des outils ramenant \mathbb{R}^2 à \mathbb{C} . On va donc définir les notions nécessaires pour traiter des transformations conformes locales puis préciser ce que sont les transformations conformes infinitésimales. On pourra par la suite définir les champs de vecteurs sur le cercle.

1.4.1. Transformation conforme locale

On commence par identifier \mathbb{R}^2 et \mathbb{C} au moyen de l'application $(x, y) \longrightarrow z = x + iy$. On utilise ensuite la projection stéréographique Π de la sphère unité sur $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (la sphère de Riemann).

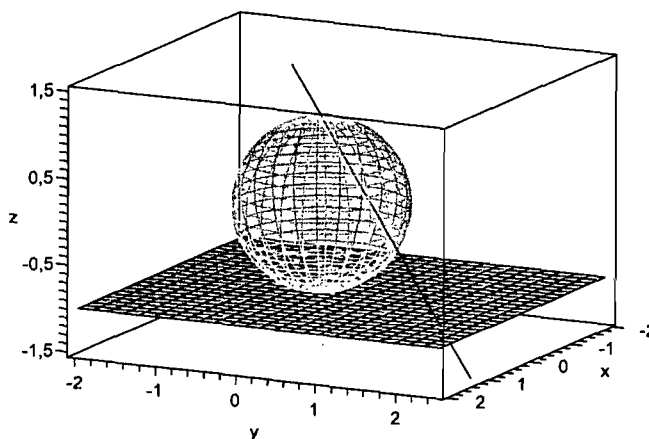


FIG. 1.1. Sphère de Riemann

Définition 1.4.1. On appelle projection stéréographique Π , l'application bijective et continue :

$$\Pi : S^2 \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

L'application Π est obtenue en plaçant le centre de la sphère de rayon unité S^2 à l'origine de \mathbb{R}^3 , comme sur la figure (1.1). On définit $\Pi(X, Y, Z) = (x, y)$ comme étant l'intersection avec le plan d'équation $Z = -1$ de la droite passant par le pôle nord (c'est-à-dire le point $(0,0,1)$) et le point (X,Y,Z) sur S^2 . On définit également $\Pi(0, 0, 1) = \infty$.

La notion d'action de groupe va grandement alléger la notation, simplifiant ainsi les calculs à venir.

Définition 1.4.2. Soit G un groupe. Soit E un ensemble non-vidé. La fonction

$$\begin{aligned} A : G \times E &\longrightarrow E \\ (g, x) &\longmapsto A(g, x) \end{aligned}$$

est une action de groupe si $A(e, x) = x$ et $A(g_1, A(g_2, x)) = A(g_1 g_2, x)$, pour e l'élément neutre de G , pour tout g_1, g_2 dans G , et pour tout x dans E .

Proposition 1.4.1. Soit $G = SL(2, \mathbb{C})$ (définition 1.1.2), soit $E = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, la sphère de Riemann. La fonction

$$\begin{aligned} A : G \times E &\longrightarrow E \\ \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z \right) &\longmapsto \frac{az + b}{cz + d} \text{ si } z \in \mathbb{C} \text{ et } \frac{a}{c} \text{ si } z = \infty \end{aligned}$$

est une action de groupe.

Démonstration

On vérifie sans peine les deux conditions de l'action. Tout d'abord

$$A(e, z) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, z \right) = \frac{1z + 0}{0z + 1} = z,$$

et

$$\begin{aligned} A(g, A(g', z)) &= A \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, A \left(\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}, z \right) \right) \\ &= \frac{a \left(\frac{a'z + b'}{c'z + d'} \right) + b}{c \left(\frac{a'z + b'}{c'z + d'} \right) + d} \\ &= \frac{aa'z + ab' + bc'z + bd'}{a'cz + cb' + c'dz + dd'} \\ &= A \left(\begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ a'c + c'd & cb' + dd' \end{pmatrix}, z \right) \\ &= A(gg', z). \end{aligned}$$

□

La notation demeure cohérente si l'on note $A(g, x)$ par gx .

Définition 1.4.3. On va maintenant identifier des sous-ensembles de $SL(2, \mathbb{C})$, à savoir

$$R := \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix} \middle| \theta \in \mathbb{R} \right\}, \text{ (R pour rotation),} \quad (1.4.1)$$

$$T := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a + ib \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}, \text{ (T pour translation),} \quad (1.4.2)$$

$$D := \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \middle| \lambda > 0 \right\}, \text{ (D pour dilatation),} \quad (1.4.3)$$

$$C := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a + ib & 1 \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\} \text{ (et C pour conforme).} \quad (1.4.4)$$

Proposition 1.4.2. Les quatre sous-ensembles R, T, D et C de la définition 1.4.3 sont des sous-groupes de $SL(2, \mathbb{C})$.

Démonstration

Il suffit de prouver que chacun des sous-groupes est stable par rapport à l'opération de multiplication du groupe et sous l'inversion de ses éléments. On prouve explicitement que R est un sous-groupe. La démonstration pour les trois autres sous-groupes est similaire.

Quels que soient g, h dans R ,

$$\begin{aligned} gh^{-1} &= \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi/2} \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\phi/2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{i(\theta-\phi)/2} & 0 \\ 0 & e^{-i(\theta-\phi)/2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

est dans R .

□

On explore maintenant la notion de transformation conforme en deux dimensions.

Définition 1.4.4. Soit γ , une courbe définie sur l'intervalle $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}$ dans \mathbb{R}^2 , telle que $\gamma(0) = (x_0, y_0)$. Soit $\gamma'(0) = v$, le vecteur tangent de la courbe γ en (x_0, y_0) . Soit une fonction différentiable $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}'$, où \mathcal{O} et \mathcal{O}' sont deux ouverts de \mathbb{R}^2 , avec (x_0, y_0)

dans \mathcal{O} , alors l'image de v par df , la différentielle de f , notée $df(v)$, est définie par :

$$df(v) = \left. \frac{d}{dt} f \circ \gamma \right|_{t=0}.$$

Définition 1.4.5. *Transformations conformes.* Soient \mathcal{O} et \mathcal{O}' , deux ouverts de \mathbb{R}^2 . Une transformation conforme est une fonction bijective différentiable $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}'$ qui préserve les angles. Dans ce qui suit, le produit scalaire et la norme sont le produit et la norme usuels euclidiens. La condition de préserver les angles pour f se lit

$$\frac{(v, w)}{|v||w|} = \frac{(V, W)}{|V||W|}, \quad (1.4.5)$$

pour tous vecteurs v, w tangents en $P = (x, y)$, pour tout P dans \mathcal{O} , avec V, W les images de v, w par la différentielle df .

Proposition 1.4.3. Soit $\{e_1, e_2\}$ une base orthonormée de vecteurs tangents en $P = (x, y)$ et soient $E_1 = df(e_1)$ et $E_2 = df(e_2)$ leurs images par df . La condition (1.4.5) est équivalente à

$$(E_1, E_2) = 0 \text{ et } (E_1, E_1) = (E_2, E_2). \quad (1.4.6)$$

Démonstration

Soient deux vecteurs de norme non nulle $v = ae_1 + be_2$ et $w = ce_1 + de_2$. Les images de v, w par la différentielle df sont $V = aE_1 + bE_2$ et $W = cE_1 + dE_2$. Puisque la condition (1.4.5) doit être vérifiée pour tout a, b, c et d , alors, en choisissant $a = d = 1, b = c = 0$ dans (1.4.5), on obtient

$$(e_1, e_2) = 0 = \frac{(E_1, E_2)}{|E_1||E_2|} \text{ ce qui implique que } (E_1, E_2) = 0. \quad (1.4.7)$$

De la même manière, choisir $a = c = b = -d = 1$ dans (1.4.5) donne

$$\frac{(e_1, e_1) - (e_2, e_2)}{2} = 0 = \frac{(E_1, E_1) - (E_2, E_2)}{|E_1 + E_2||E_1 - E_2|} \text{ ce qui implique que } (E_1, E_1) = (E_2, E_2). \quad (1.4.8)$$

Les conditions (1.4.6) sont donc nécessaires. Prouvons maintenant qu'elles sont aussi suffisantes.

$$\begin{aligned}
\frac{(V, W)}{|V||W|} &= \frac{(aE_1 + bE_2, cE_1 + dE_2)}{|aE_1 + bE_2||cE_1 + dE_2|} \\
&= \frac{ac(E_1, E_1) + ad(E_1, E_2) + bc(E_2, E_1) + bd(E_2, E_2)}{\sqrt{(aE_1 + bE_2, aE_1 + bE_2)} \sqrt{(cE_1 + dE_2, cE_1 + dE_2)}} \\
&= \frac{ac(E_1, E_1) + bd(E_2, E_2)}{\sqrt{(a^2(E_1, E_1) + b^2(E_2, E_2))} \sqrt{(c^2(E_1, E_1) + d^2(E_2, E_2))}} \\
&= \frac{(ac + bd)(E_1, E_1)}{\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \sqrt{(E_1, E_1)^2}} \\
&= \frac{(ac + bd)}{\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}} \\
&= \frac{(ae_1 + be_2, ce_1 + de_2)}{\sqrt{(a^2 + b^2)} \sqrt{(c^2 + d^2)}} \\
&= \frac{(v, w)}{|v||w|}.
\end{aligned}$$

□

Il existe un lien étroit entre la théorie des fonctions analytiques et la théorie des transformations conformes, comme le montre la proposition suivante.

Proposition 1.4.4. *Soit la transformation conforme f , vue comme une fonction d'une variable complexe z :*

$$f : \mathcal{O} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{O}' \subset \mathbb{C} \quad (1.4.9)$$

$$z = x + iy \simeq (x, y) \mapsto f(z) = f_1 + if_2 \simeq (f_1, f_2). \quad (1.4.10)$$

Alors f est conforme si et seulement si f est analytique ou anti-analytique.

Démonstration

Puisque $f(x_0, y_0)$ est dans \mathbb{R}^2 , c'est un objet à deux composantes. Si l'on choisit dans \mathbb{R}^2 les courbes particulières $\gamma_1 = (x_0 + t, y_0)$ et $\gamma_2 = (x_0, y_0 + t)$, on calcule $\frac{d}{dt}\gamma_1 \Big|_{t=0} = (1, 0)$ et $\frac{d}{dt}\gamma_2 \Big|_{t=0} = (0, 1)$. Ces deux vecteurs sont un choix possible pour la base orthonormée $\{e_1, e_2\}$. Avec une telle paramétrisation, et en faisant usage de la définition (1.4.4), on calcule

$$E_1 = df(e_1) = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma_1) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}[f_1(x_0 + t, y_0) + if_2(x_0 + t, y_0)] = \frac{\partial f_1}{\partial x} + i \frac{\partial f_2}{\partial x}$$

par la règle de dérivation d'une fonction composée. On en conclut que

$$E_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{1,x} \\ f_{2,x} \end{pmatrix}, \text{ et similairement } E_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{1,y} \\ f_{2,y} \end{pmatrix}. \quad (1.4.11)$$

Soient maintenant $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, deux vecteurs de \mathbb{R}^2 non-nuls et de même

longueur. On va prouver que v et w sont orthogonaux si et seulement si $w = \pm \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$.

Puisque $(v, w) = 0$, on doit avoir $ac + bd = 0$. La seule solution possible avec une constante α à déterminer est $c = \alpha b$ et $d = -\alpha a$. La contrainte $|v|^2 = |w|^2$ impose que

$a^2 + b^2 = \alpha^2 a^2 + \alpha^2 b^2$ et donc que $\alpha = \pm 1$. On a bien prouvé que $w = \pm \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$. Mais,

si l'on applique ce qui précède à E_1 et E_2 tels que définis par l'équation (1.4.11), on obtient alors les deux fameuses équations

$$\begin{cases} f_{1,y} = f_{2,x} \text{ et } f_{2,y} = -f_{1,x} & (\text{anti-Cauchy-Riemann}) \\ \text{ou} \\ f_{1,y} = -f_{2,x} \text{ et } f_{2,y} = f_{1,x} & (\text{Cauchy-Riemann}) \end{cases} \quad (1.4.12)$$

Ceci revient à dire par la proposition (1.4.4), que f est (anti-) holomorphe, ou (anti-) analytique si et seulement si f est une transformation conforme. \square

Corollaire 1.4.1. La transformation $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ si $z \in \mathbb{C}$ et $\frac{a}{c}$ si $z = \infty$ que décrit la proposition 1.4.1 en terme d'action de groupe est une transformation conforme. Par voie de conséquence, toutes les transformations représentées par les matrices appartenant aux sous-groupes de $SL(2, \mathbb{C})$ définis en 1.4.3, avec $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ et $ad - bc = 1$ sont également des transformations conformes.

On est maintenant en mesure de pouvoir raffiner quelque peu l'étude des transformations conformes, définies jusqu'ici en toute généralité.

1.4.2. Transformations conformes infinitésimales

Le but à présent est de définir dans le plan les transformations conformes infinitésimales. Ceci passe par l'étude des fonctions analytiques dans un voisinage aussi étroit que désiré du *cercle unité*. D'après la section précédente, on sait que toute fonction

analytique $f = f(z)$ définit justement une transformation conforme. Ceci est aussi valable dans un ouvert tel qu'un voisinage du cercle $|z| = 1$. On peut se convaincre que cette transformation conforme sera localement biunivoque sur l'anneau ouvert défini par :

Définition 1.4.6. *L'anneau unitaire A_ϵ est défini par*

$$A_\epsilon = \{z \in \mathbb{C} : 1 - \epsilon < |z| < 1 + \epsilon\}. \quad (1.4.13)$$

Soit une fonction f définie sur une boucle ouverte \mathcal{O} centrée en 0 et contenant A_ϵ . Si f est analytique sur \mathcal{O} à l'exception possible d'un pôle en l'origine, alors f possède une série de Laurent dont on peut trouver l'expression, par exemple, dans [Ma65] :

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n \quad (z \in A_\epsilon), \quad (1.4.14)$$

pour un certain m dans \mathbb{Z} et

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (1.4.15)$$

où γ_ρ est le cercle $|z| = \rho$, avec $(1 - \epsilon < \rho < 1 + \epsilon)$. On remarque que l'infinité de coefficients a_n sont indépendants.

1.4.3. Champs de vecteurs l_i

On restreint maintenant les transformations conformes à l'anneau A_ϵ . Pour pouvoir introduire les champs de vecteurs sur le cercle, il va falloir d'abord définir différents objets mathématiques. On commence par l'espace vectoriel de dimension infinie suivant :

Définition 1.4.7. *On définit l'espace vectoriel des polynômes en (w, w^{-1}) par $\mathbb{C}[w, w^{-1}]$.*

Définition 1.4.8. *Soit l_i l'opérateur différentiel suivant :*

$$l_i = -w^{i+1} \partial_w. \quad (1.4.16)$$

Agissant sur la série (1.4.14), cet opérateur engendre donc un champ de vecteurs sur l'anneau unitaire A_ϵ .

On considère ensuite l'ensemble des opérateurs différentiels sur $\mathbb{C}[w, w^{-1}]$.

Définition 1.4.9. Soit l'ensemble des opérateurs différentiels de la forme $p(w, w^{-1})\partial_w$ où p est dans $\mathbb{C}[w, w^{-1}]$. On note cet ensemble $\text{Diff}(w, w^{-1})$.

En vérifiant les axiomes définissant un espace vectoriel, on peut montrer sans difficulté que $\text{Diff}(w, w^{-1})$ est aussi un espace vectoriel. On va maintenant s'attacher à trouver une base pour $\text{Diff}(w, w^{-1})$, et souligner le lien existant avec les transformations conformes infinitésimales. En fait, les vecteurs $l_i, i \in \mathbb{Z}$ forment une base de $\text{Diff}(w, w^{-1})$. En effet, si g est dans $\text{Diff}(w, w^{-1})$, alors il existe $\{i_1, i_2, \dots, i_n\} \in \mathbb{Z}$ et $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \in \mathbb{C}$ tels que $g = (a_1 w^{i_1} + a_2 w^{i_2} + \dots + a_n w^{i_n})\partial_w$.

On définit un commutateur $[\ast, \ast]$ sur $\text{Diff}(w, w^{-1})$ en faisant agir $l_i l_j - l_j l_i$ sur une fonction arbitraire f , obtenant

$$\begin{aligned}
[l_i, l_j]f &= [-w^{i+1}\partial_w, -w^{j+1}\partial_w]f \\
&= w^{i+1}\partial_w(w^{j+1}\partial_w f) - w^{j+1}\partial_w(w^{i+1}\partial_w f) \\
&= w^{i+1}(j+1)w^j\partial_w f + w^{i+j+2}\partial_w^2 f - w^{j+1}(i+1)w^i\partial_w f - w^{i+j+2}\partial_w^2 f \\
&= (j-i)w^{i+j+1}\partial_w f \\
&= -(i-j)w^{(i+j)+1}\partial_w f \\
&= (i-j)l_{i+j}f.
\end{aligned}$$

On peut démontrer que $\text{Diff}(w, w^{-1})$ muni de ce commutateur est une algèbre de Lie.

Proposition 1.4.5. Algèbre de Witt.

La paire $(\text{Diff}(w, w^{-1}), [\ast, \ast])$, où $\text{Diff}(w, w^{-1})$ est l'espace vectoriel sur \mathbb{C} défini en 1.4.9 et où $[\ast, \ast]$ est le commutateur

$$[l_i, l_j] = (i-j)l_{i+j}, \quad (1.4.17)$$

est une algèbre de Lie, appelée l'algèbre de Witt.

Démonstration

La preuve est similaire à celle de la proposition 1.3.1. Puisque le calcul précédent de $[l_i, l_j]$ nous assure de l'antisymétrie, et que la bilinéarité est triviale, on vérifiera

simplement l'identité de Jacobi :

$$\begin{aligned}
& [p\partial_w, [q\partial_w, r\partial_w]] + [q\partial_w, [r\partial_w, p\partial_w]] + [r\partial_w, [p\partial_w, q\partial_w]] \\
&= [p\partial_w, (qr_w - rq_w)\partial_w] + [q\partial_w, (rp_w - pr_w)\partial_w] + [r\partial_w, (pq_w - qp_w)\partial_w] \\
&= p(qr_w - rq_w)_w - (qr_w - rq_w)p_w + q(rp_w - pr_w)_w \\
&\quad - (rp_w - pr_w)q_w + r(pq_w - qp_w)_w - (pq_w - qp_w)r_w \\
&= p(q_w r_w + q r_{ww} - r_w q_w - r q_{ww}) - q r_w p_w + r q_w p_w \\
&\quad + q(r_w p_w + r p_{ww} - p_w r_w - p r_{ww}) - r p_w q_w + p r_w q_w \\
&\quad + r(p_w q_w + p q_{ww} - q_w p_w - q p_{ww}) - p q_w r_w + q p_w r_w \\
&= 0,
\end{aligned}$$

ce qui complète la preuve. □

Définition 1.4.10. Soit f la fonction identité. On définit l'action de la transformation infinitésimale $1 + \epsilon l_i$ sur la fonction identité par

$$[(1 + \epsilon l_i)f](w) = f((1 - \epsilon l_i)(w)) = (1 - \epsilon l_i)w = w - \epsilon l_i w = w + \epsilon w^{i+1}.$$

On justifie la première des égalités précédentes en profitant du fait que

$$(1 + \epsilon l_i)(1 - \epsilon l_i) = (1 + \epsilon l_i - \epsilon l_i - \epsilon^2 l_i) = 1 + O(\epsilon^2) \approx 1 \text{ (à l'ordre 1 en } \epsilon).$$

On constate que les vecteurs l_i forment une base pour les transformations conformes infinitésimales. Par exemple, un calcul similaire montre que l_0 est l'opérateur de dilatation infinitésimal, puisque

$$[(1 + \epsilon l_0)f](w) = w + \epsilon w^{0+1} = (1 + \epsilon)w.$$

Remarque 1.4.1. Dans le reste de ce chapitre, on se restreindra aux transformations conformes infinitésimales engendrées par les vecteurs l_i et leurs combinaisons linéaires.

Remarque 1.4.2. Par souci de simplicité, tous les champs de vecteurs à venir seront holomorphes. On obtiendrait un résultat similaire avec les champs de vecteurs anti-holomorphes de la forme $\bar{l}_i = -\bar{w}^{i+1} \partial_{\bar{w}}$.

Pour définir l'algèbre de Virasoro, qui est l'objet principal de ce chapitre, on devra étendre l'algèbre de Witt. C'est le sujet de la prochaine section qui traite (très superficiellement) des extensions centrales.

1.5. EXTENSION CENTRALE

1.5.1. Justification

L'état physique d'un système est une classe d'équivalence de fonctions d'onde éléments d'un espace de Hilbert, lequel est habituellement de dimension infinie. Cette classe d'équivalence, appelée rayon, prend la forme $r_\psi = \{\lambda\psi, \lambda \in \mathbb{C}^*\}$, pour $\psi \neq 0$ dans l'espace d'Hilbert. Puisqu'un état physique est représenté par un rayon dans cet espace de Hilbert, alors la multiplication par une phase (ou une constante non-nulle) revient à choisir un autre représentant dans la classe d'équivalence, et ceci laisse le rayon inchangé. La physique est donc invariante par rapport à la multiplication des rayons par une constante. Supposons connue une action d'un groupe de symétrie G d'un système de mécanique classique. La description quantique de ce système mènera à une action du même groupe sur les rayons de l'espace d'Hilbert contenant les états du système. Puisque ce sont les rayons qui décrivent l'état du système, il est possible d'étendre le groupe G en un groupe \widehat{G} modifiant les phases. Les éléments de \widehat{G} seront de la forme (α, g) , où α est dans \mathbb{C} et g est dans G , et leur action sur un représentant w du rayon $[w]$ se fera par

$$w \mapsto e^{i\alpha} U_g w,$$

où U_g est une représentation (unitaire) de G . Le produit du groupe \widehat{G} peut être plus compliqué que celui du produit direct $(\alpha, g)(\beta, g') = (\alpha + \beta, gg')$. En effet, il est possible d'avoir

$$(\alpha, g)(\beta, g') = (\alpha + \beta + f(g, g'), gg') \quad (1.5.1)$$

pour certaines fonctions f . La sous-section suivante donne les conditions sur cette fonction f .

1.5.2. Équation du cocycle

L'extension \widehat{G} du groupe G aura comme algèbre de Lie l'algèbre étendue $\widehat{\mathfrak{g}} = Z \oplus \mathfrak{g}$. Cette algèbre $\widehat{\mathfrak{g}}$ est la somme directe (d'espaces vectoriels) de Z , une algèbre de Lie abélienne (supposée être de dimension 1), et de \mathfrak{g} , l'algèbre de Lie de G . Dans le calcul ci-dessous, on emploiera $[\ast, \ast]_{\widehat{\mathfrak{g}}}$ quand les éléments sont pris dans $\widehat{\mathfrak{g}}$ par opposition à $[\ast, \ast]$ quand les éléments appartiennent à \mathfrak{g} . L'action infinitésimale compatible avec (1.5.1) est

$$[e_1 + h_1, e_2 + h_2]_{\widehat{\mathfrak{g}}} = \psi(h_1, h_2) + [h_1, h_2], \forall h_1, h_2 \in \mathfrak{g}, \forall e_1, e_2, \psi(h_1, h_2) \in Z.$$

L'antisymétrie du crochet requiert que $\psi(h_1, h_2) = -\psi(h_2, h_1)$. L'identité de Jacobi impose sur ψ la contrainte que

$$\begin{aligned} 0 &= [(e_1 + h_1), [(e_2 + h_2), (e_3 + h_3)]_{\widehat{\mathfrak{g}}}]_{\widehat{\mathfrak{g}}} + [(e_2 + h_2), [(e_3 + h_3), (e_1 + h_1)]_{\widehat{\mathfrak{g}}}]_{\widehat{\mathfrak{g}}} + \\ &\quad [(e_3 + h_3), [(e_1 + h_1), (e_2 + h_2)]_{\widehat{\mathfrak{g}}}]_{\widehat{\mathfrak{g}}} \\ &= [(e_1 + h_1), (\psi(h_2, h_3) + [h_2, h_3])_{\widehat{\mathfrak{g}}}]_{\widehat{\mathfrak{g}}} + [(e_2 + h_2), (\psi(h_3, h_1) + [h_3, h_1])_{\widehat{\mathfrak{g}}}]_{\widehat{\mathfrak{g}}} + \\ &\quad [(e_3 + h_3), (\psi(h_1, h_2) + [h_1, h_2])_{\widehat{\mathfrak{g}}}]_{\widehat{\mathfrak{g}}} \\ &= \psi(h_1, [h_2, h_3]) + \psi(h_2, [h_3, h_1]) + \psi(h_3, [h_1, h_2]) + \\ &\quad [h_1, [h_2, h_3]] + [h_2, [h_3, h_1]] + [h_3, [h_1, h_2]] \end{aligned}$$

Pour que cette égalité soit vérifiée, il suffit que la première composante de la somme (d'espaces vectoriels) $Z \oplus \mathfrak{g}$ soit nulle, soit :

$$0 = \psi(h_1, [h_2, h_3]) + \psi(h_2, [h_3, h_1]) + \psi(h_3, [h_1, h_2]), \forall h_1, h_2, h_3 \in \mathfrak{g}. \quad (1.5.2)$$

Avec l'antisymétrie de ψ , l'équation (1.5.2), dite *équation du cocycle*, est la seule contrainte à vérifier pour l'obtention d'extensions centrales d'une algèbre de Lie \mathfrak{g} .

1.5.3. Détermination du cocycle $\psi(l_i, l_j)$

L'équation (1.5.2) est toujours vraie si on la multiplie par une constante. Déterminer le cocycle revient donc à trouver l'expression du terme d'extension centrale $c\psi$, avec c dans \mathbb{C} . Pour complètement déterminer Vir , il reste donc à calculer les valeurs

possibles de ψ . La fonction ψ prendra ses arguments dans l'algèbre de Witt. Les indices inférieurs *Vir* et *Witt* indiquent quand les crochets sont pris dans les algèbres de Virasoro ou de Witt respectivement.

Notation 1.5.1. On notera $\psi(l_i, l_j)$ par $\psi(i, j)$.

Comme mentionné à la fin de la sous-section précédente, le cocycle doit respecter les propriétés de la définition (1.2.1). La linéarité est évidemment satisfaite. Les deux autres propriétés imposent des contraintes sur ψ . En terme de la notation adoptée pour ψ , la condition d'antisymétrie donne une première contrainte :

$$\psi(i, j) + \psi(j, i) = 0. \quad (1.5.3)$$

Finalement, les équations (1.5.2) et (1.4.17) permettent de calculer

$$\begin{aligned} 0 &= \psi(l_i, [l_j, l_k]_{Witt}) + \psi(l_j, [l_k, l_i]_{Witt}) + \psi(l_k, [l_i, l_j]_{Witt}) \\ &= \psi(l_i, (j-k)l_{j+k}) + \psi(l_j, (k-i)l_{k+i}) + \psi(l_k, (i-j)l_{i+j}) \\ &= (j-k)\psi(i, j+k) + (k-i)\psi(j, k+i) + (i-j)\psi(k, i+j), \end{aligned}$$

ce qui nous donne la seconde contrainte

$$(k-j)\psi(i, j+k) + (i-k)\psi(j, k+i) + (j-i)\psi(k, i+j) = 0. \quad (1.5.4)$$

De la condition d'antisymétrie, on conclut immédiatement que $\psi(i, i) = 0$ et que $f(i) := \psi(i, -i) = -\psi(-i, i) = -f(-i)$. Donc f est une fonction impaire. Il est possible par un changement de base, lorsque $i + j \neq 0$, de poser $\psi(i, j) = 0$. Ceci permet de limiter la recherche de l'extension centrale à une fonction de la forme $\psi(i, j) = f(i)\delta_{(i+j,0)}$. La condition $i = -j$ force $i + j + k = 0$ lorsqu'on l'applique à (1.5.4) qui devient alors

$$(k-j)f(j+k) + (j+2k)f(j) - (2j+k)f(k) = 0,$$

ce qui donne pour $k = 1$, l'équation de récurrence

$$f(j+1) = \frac{1}{(j-1)}((j+2)f(j) - (2j+1)f(1)), \text{ pour } j \geq 2. \quad (1.5.5)$$

Cette équation permet d'obtenir la valeur de $f(k)$ pour tout $k \geq 3$, avec $f(1)$ et $f(2)$ supposés connus.

La solution de (1.5.5) dépend alors de deux paramètres. La plus simple des fonctions impaires à deux paramètres est le polynôme $ai^3 + bi$. On vérifie que la fonction $f(i) = ai^3 + bi$ est effectivement une solution de (1.5.5).

$$\begin{aligned} \frac{1}{(j-1)} \{ (j+2)f(j) - (2j+1)f(1) \} &= \frac{1}{(j-1)} \{ (j+2)(aj^3 + bj) - (2j+1)(a+b) \} \\ &= \frac{a(j^4 + 2j^3 - 2j - 1)}{(j-1)} + \frac{b(j^2 + 2j - 2j - 1)}{(j-1)} \\ &= a(j^3 + 3j^2 + 3j + 1) + b(j+1) \\ &= a(j+1)^3 + b(j+1) \\ &= f(j+1) \end{aligned}$$

Il est possible de fixer un des deux paramètres a et b par un autre changement de base¹. Néanmoins le choix de paramètres $\{a = \frac{1}{12}, b = -\frac{1}{12}\}$, qui donne $f(1) = 0$ et $f(2) = \frac{1}{2}$, s'avère très simplificateur pour les calculs à venir. Avec ce choix le cocycle est déterminé et le terme d'extension centrale de l'algèbre de Virasoro prend la forme

$$cf(i)\delta_{(i+j,0)} = \frac{c}{12}(i^3 - i)\delta_{(i+j,0)}. \quad (1.5.6)$$

1.6. ALGÈBRE DE VIRASORO

Il est clair que pour tout l_n dans l'algèbre de Virasoro on a la relation de commutation

$$[l_n, c]_{Vir} = 0. \quad (1.6.1)$$

Avec le résultat de la section précédente, on est en mesure de donner une définition de la fameuse algèbre de Virasoro. On va par la suite étudier un de ses anti-automorphismes.

Notation 1.6.1. L'algèbre de Virasoro sera dénoté par *Vir*.

Définition 1.6.1. *Vir* est définie à l'aide des règles de commutation

$$[l_n, l_m] = (n-m)l_{n+m} + \frac{c}{12}n(n^2-1)\delta_{(n+m,0)}, \quad (1.6.2)$$

$$[l_n, c] = [c, l_n] = 0. \quad (1.6.3)$$

Remarque 1.6.1. Le générateur c dans (1.6.2) représente la charge centrale de la théorie et engendre le centre de *Vir*.

¹Le lecteur intéressé par ces changements de base est référé à [MP95] sect. 1.9.

Puisque le cocycle ψ vérifie (1.5.3) et (1.5.4) par construction de l'extension centrale, $[\ast, \ast]_{Vir}$ est un crochet de Lie et Vir est une algèbre de Lie.

1.6.1. Isomorphisme des sous-algèbres de Lie Vir^- et Vir^+

Définition 1.6.2. On définit trois sous-espaces vectoriels de Vir : Vir^- , Vir^+ et Vir^0 .

$$\begin{aligned} Vir^+ &= \bigoplus_{i=1}^{\infty} Cl_i \\ Vir^0 &= Cl_0 + \mathbb{C}c \\ Vir^- &= \bigoplus_{i=1}^{\infty} Cl_{-i}. \end{aligned}$$

Remarque 1.6.2. Les Vir^\pm sont des sous-espaces de l'algèbre de Virasoro. On observe que ce sont aussi des sous-algèbres de Lie. En effet, si les indices de l_i, l_j sont $\geq +1$ (resp. ≤ -1), alors l'indice de l_{i+j} est aussi $\geq +1$ (resp. ≤ -1).

Définition 1.6.3. Un anti-automorphisme σ d'une algèbre de Lie A est une application linéaire bijective $\sigma : A \rightarrow A$ satisfaisant :

$$\sigma([x, y]) = [\sigma(y), \sigma(x)], \forall x, y \in A.$$

Proposition 1.6.1. L'application linéaire $\Pi : Vir \rightarrow Vir$:

$$\begin{aligned} l_i &\mapsto l_{-i}, \forall i \in \mathbb{Z} \\ c &\mapsto c, \end{aligned}$$

est un anti-automorphisme d'algèbre de Lie.

Démonstration

$$\begin{aligned} [\Pi(l_j), \Pi(l_i)] &= [l_{-j}, l_{-i}]_{Vir} \\ &= (-j+i)l_{-j-i} + \frac{c}{12}((-j)^3 - (-j))\delta_{(-j-i,0)} \\ &= (i-j)l_{-(i+j)} + \frac{c}{12}((i)^3 - (i))\delta_{(i+j,0)} \\ &= \Pi\left((i-j)l_{(i+j)} + \frac{c}{12}((i)^3 - (i))\delta_{(i+j,0)}\right) \\ &= \Pi([l_i, l_j]) \end{aligned}$$

Le passage à la troisième ligne est justifié par le fait que le deuxième terme de la somme est différent de zéro uniquement si $i = -j$. Par la définition 1.6.3, il s'ensuit que Π est bien un anti-automorphisme d'algèbres de Lie. \square

Remarque 1.6.3. Puisque pour tout v dans Vir , $\Pi \circ \Pi(v) = v$, Π est un anti-automorphisme de période 2, ou anti-involution.

Remarque 1.6.4. On remarque également que Π est bijective, envoie Vir^+ sur Vir^- , et est l'identité pour le centre de Vir .

Proposition 1.6.2. L'application linéaire $\phi = -\Pi$ est un isomorphisme entre les sous-algèbres Vir^- et Vir^+ .

Démonstration

On commence par montrer que ϕ est un homomorphisme en utilisant la définition (1.6.2) pour effectuer les commutations.

$$\begin{aligned} [\phi(l_n), \phi(l_m)] &= [-\Pi(l_n), -\Pi(l_m)] \\ &= [\Pi(l_n), \Pi(l_m)] \\ &= \Pi[l_m, l_n] \\ &= -\Pi[l_n, l_m] \\ &= \phi([l_n, l_m]) \end{aligned}$$

On remarque que ϕ envoie la base de Vir^+ sur la base de Vir^- . Puisque ϕ est un homomorphisme et une application bijective, on peut conclure que ϕ est bien un isomorphisme entre Vir^- et Vir^+ . \square

Si l'on calcule explicitement la valeur du crochet $[\Pi(l_n), \Pi(l_m)]$, on obtient $(m - n)\Pi(l_{n+m}) + \frac{\Pi(c)}{12}m(m^2 - 1)\delta_{(n+m,0)}$. On pourrait par exemple rebaptiser $\Pi(l_n) = L_{-n}$ par L_n , mais étant donné que les calculs subséquents n'en sont pas affectés, on conservera tout bonnement le symbole l . Ainsi, l'algèbre de Lie Vir_2 définie à l'aide de la même base que Vir , mais ayant les règles de commutation (1.6.4) données ci-après est isomorphe à Vir . On continuera à employer Vir pour désigner l'algèbre de Virasoro, même si en

toute rigueur les calculs ont été effectués dans l'algèbre de Lie Vir_2 , dont les règles de commutation sont

$$[l_n, l_m] = (m - n)l_{n+m} + \frac{c}{12}m(m^2 - 1)\delta_{(n+m,0)},$$

$$[l_n, c] = [c, l_n] = 0, \forall n, m \in \mathbb{Z}.$$

(1.6.4)

Remarque 1.6.5. Les règles de commutation (1.6.4) seront celles utilisés dans tous les calculs à venir. Ces règles sont notamment utilisées par Saint-Aubin dans [YSA90, YSA87]. On note que ces règles donnent évidemment les mêmes résultats lors des calculs de vecteurs singuliers (voir section 4.2.1), que les règles (1.6.2) et (1.6.3) dans [FMS97].

1.7. GRADUATION DE Vir ET DÉCOMPOSITION TRIANGULAIRE

Pour clore ce chapitre, il reste à introduire les concepts de décomposition triangulaire et de graduation d'algèbres de Lie.

1.7.1. Décomposition triangulaire

On adoptera la définition suivante d'une décomposition triangulaire :

Définition 1.7.1. Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie sur un corps \mathbb{F} . Une décomposition triangulaire de \mathfrak{g} est composée d'une sous-algèbre commutative non-triviale \mathfrak{g}_0 et de deux sous-algèbres non-triviales \mathfrak{g}_- et \mathfrak{g}_+ qui respectent les conditions

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_+,$$

$$[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_-] \subset \mathfrak{g}_- \text{ et } [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_+] \subset \mathfrak{g}_+,$$

$$\text{Il existe } \sigma \text{ tel que } \sigma(\mathfrak{g}_+) = \mathfrak{g}_- \text{ et } \sigma(\mathfrak{g}_0) = \mathfrak{g}_0$$

où \oplus indique ici une somme directe d'espaces vectoriels. L'application σ doit être un antiautomorphisme de période 2, c'est-à-dire que $\sigma(\sigma(\mathfrak{g}_+)) = \sigma(\mathfrak{g}_-) = \mathfrak{g}_+$.

On considère par exemple l'algèbre $sl(2, \mathbb{C})$ munie de la base suivante

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.7.1)$$

Il n'est pas difficile de montrer que la décomposition $sl(2, \mathbb{C}) = g_- \oplus g_0 \oplus g_+$ où $g_- := \mathbb{C}X$, $g_0 := \mathbb{C}H$ et $g_+ := \mathbb{C}Y$ est une décomposition triangulaire.

Proposition 1.7.1. *Les trois sous-algèbres définies en 1.6.2 et l'anti-automorphisme σ défini en 1.6.3 forment ensemble une décomposition triangulaire de Vir .*

Démonstration

On commence par montrer la première des deux conditions de la définition 1.7.1. On sait que Vir contient les trois sous-algèbres Vir^- , Vir^+ et Vir^0 , que ces sous-algèbres contiennent tous les générateurs de Vir , et que l'intersection de ces sous-algèbres est l'origine. Il s'ensuit que $Vir = Vir^- \oplus Vir^0 \oplus Vir^+$.

Ensuite, puisque

$$[l_0, l_i] \in Vir^+, [l_0, l_{-i}] \in Vir^- \text{ et } [c, l_i] = 0 \in Vir^\pm, \text{ pour } i \in \mathbb{N},$$

alors

$$[Vir^0, Vir^-] \subset Vir^- \text{ et } [Vir^0, Vir^+] \subset Vir^+,$$

ce qui prouve la deuxième condition de la définition 1.7.1. La troisième condition découle des remarques 1.6.3 et 1.6.4. On en conclut que $\{Vir^-, Vir^0, Vir^+\}$ est une triangulation de Vir . \square

1.7.2. Graduation sur Vir

Intuitivement, l'algèbre enveloppante U d'une algèbre de Lie est l'ensemble des polynômes de variables l_i dans \mathbb{Z} , où les $\{l_i\}$ forment une base de \mathfrak{g} et où le produit est le produit des polynômes modulo la règle de commutation (1.6.4). On illustre cette idée à l'aide du monôme l_3l_5 de l'algèbre enveloppante de Vir .

$$\begin{aligned} l_3l_5 &= [l_3, l_5] + l_5l_3 \\ &= 2l_8 + l_3l_5. \end{aligned}$$

Ainsi l_3l_5 et $2l_8 + l_3l_5$ sont deux représentants dans la classe du polynôme l_3l_5 .

Plus formellement on choisit une base l_i de \mathfrak{g} et on nomme C_{ij}^k les constantes définissant

le crochet dans cette base : $[l_i, l_j] = \sum_k C_{ij}^k l_k$. Soit E l'ensemble des polynômes dans les variables l_i . L'ensemble E est donc un anneau pour le produit usuel des polynômes. Soit $A = \{l_i l_j - l_j l_i - \sum_k C_{ij}^k l_k, \forall i, j\}$, un sous-ensemble de l'ensemble E , et soit I , le plus petit idéal de E contenant A . Alors l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$ de \mathfrak{g} est E/I . On peut montrer que cette construction ne dépend pas de la base $\{l_i\}$.

Soit maintenant $\mathcal{B} = \{l_1, l_2, \dots\}$, une base ordonnée de Vir^+ . Le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt indique que les polynômes $\{l_{i_1} l_{i_2} \dots l_{i_k} \mid i_1 \geq i_2 \geq \dots \geq i_k, k \in \mathbb{N}\}$ constituent une base de $U(Vir^+)$. On établit une graduation sur Vir en assignant un degré à chaque élément l_i de la base de Vir égal à la valeur de l'index i . Ainsi $deg(l_5) = 5$. L'élément central c sera de degré nul. Cette graduation peut-être étendue aux monômes de l'algèbre enveloppante $U(Vir)$ par

$$deg(l_{i_1} l_{i_2} \dots l_{i_k}) = \sum_{j=1}^k i_j.$$

On remarquera que cette \mathbb{Z} -graduation est compatible avec l'opération $[\ast, \ast]$, puisque les deux membres de la première des égalités de (1.6.4) ont pour degré $n + m$.

1.7.2.1. Bases de $[U(Vir^+)]^{(n)}$

On va donner dans la seconde colonne du tableau ci-dessous la liste des éléments des bases générant les cinq premiers $[U(Vir^+)]^{(n)}$, les sous-espaces vectoriels homogènes de degré n , avec n dans $\mathbb{N} \cup \{0\}$:

n	Vecteurs des bases $U(Vir^+)^{(n)}$	Dimension de $U(Vir^+)^{(n)}$
0	1	1
1	l_1	1
2	l_2, l_1^2	2
3	$l_3, l_2 l_1, l_1^3$	3
4	$l_4, l_3 l_1, l_2^2, l_2 l_1^2, l_1^4$	5

TAB. 1.1. Bases de $[U(Vir^+)]^{(n)}$, pour n de 0 à 4

Le choix d'ordonner les monômes par ordre décroissant pour ces bases est arbitraire.

On introduira les vecteurs singuliers au chapitre suivant. Les bases illustrées dans le tableau 1.1 génèrent donc les sous-espaces vectoriels $[U(\text{Vir}^+)]^n$. Ces bases seront naturellement celles dans lesquelles les vecteurs singuliers seront exprimés.

Le concept de gradation sera utile au chapitre suivant lorsqu'on traitera des représentations de plus haut poids en général et des modules de Verma en particulier. En effet, comme en algèbre linéaire, le fait de pouvoir associer un degré aux polynômes $\{l_1, l_2, \dots, l_k\}$ permet de prouver certains résultats de manière simple et élégante.

On peut maintenant étudier la deuxième théorie utilisée avec ingénuité par Belavin, Polyakov et Zamolodchikov dans leur papier avant-gardiste de 1984, soit la théorie de la représentation. L'objectif du prochain chapitre est de développer suffisamment de connaissance sur les représentations de Vir pour pouvoir procéder avec les deux derniers chapitres.

Chapitre 2

REPRÉSENTATIONS DE L'ALGÈBRE DE VIRASORO

C'est probablement une exigence de l'esprit humain d'avoir une représentation du monde qui soit unifiée et cohérente. Faute de quoi apparaissent anxiété et schizophrénie... la science ne vise pas d'emblée à une explication complète et définitive de l'univers. Elle n'opère que localement. Elle procède par une expérimentation détaillée sur des phénomènes qu'elle parvient à circonscrire et définir.

François Jacob (1920 –)

Dans ce chapitre, on va explorer les représentations de l'algèbre de Virasoro. Pour cela on va tout d'abord définir et donner quelques exemples de représentations. Pour aller ensuite plus loin dans la compréhension des représentations de l'algèbre de Virasoro, et plus particulièrement des représentations irréductibles de plus haut poids, on introduira les modules de Verma, les vecteurs singuliers, et la forme de Shapovalov. Des outils tels que le déterminant et les tables de Kac seront aussi définis. Mais en premier lieu, qu'est-ce qu'une représentation ?

2.1. REPRÉSENTATIONS

Quelques définitions devraient permettre de répondre adéquatement à cette question.

Définition 2.1.1. Soit $(V, [*, *]_V)$, une algèbre de Lie sur un corps \mathbb{F} . Une application linéaire

$$\rho : V \rightarrow \mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$$

est une représentation (linéaire de dimension finie) de V si

$$\rho([u, v]_V) = [\rho(u), \rho(v)], \forall u, v \in V$$

où le crochet $[*, *]$ (sans indice) est le commutateur matriciel (1.3.1). La dimension de la représentation ρ est donnée par l'entier n du groupe $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$.

Définition 2.1.2. Une représentation $\rho : V \rightarrow \mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$ est fidèle si ρ est injective. Dans ce cas, l'homomorphisme ρ est aussi un isomorphisme sur l'image.

Dans les exemples qui vont suivre, la dimension des représentations est finie, par contraste avec les représentations de l'algèbre de Virasoro qui, en général, sont de dimension infinie. Dans le cas de représentations de dimension infinie, la définition 2.1.1 est remplacée par la suivante :

Définition 2.1.3. Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie et V un espace vectoriel sur un corps \mathbb{F} . Une représentation de \mathfrak{g} sur V est une application linéaire $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V)$ (les endomorphismes de V) satisfaisant

$$\pi([x, y])(v) = \pi(x)\pi(y)(v) - \pi(y)\pi(x)(v), \forall x, y \in \mathfrak{g} \text{ et } \forall v \in V$$

En d'autres termes, \mathfrak{g} agit sur V à travers l'opérateur linéaire $\pi(x)$, pour tout x dans \mathfrak{g} .

Quel est l'intérêt d'étudier les représentations ? En premier lieu, l'étude de l'action d'un groupe sur un ensemble peut souvent être ramenée à celle de l'algèbre linéaire, ce qui simplifie énormément les calculs. De plus, cette façon de procéder permet d'étudier les symétries à l'aide des outils de l'algèbre linéaire. Si, par exemple, une équation différentielle en trois dimensions possède des symétries de rotation, alors l'espace solution de cette équation sera invariant sous rotation, ou se décomposera en sous-espaces invariants sous rotation. On en conclut que l'espace des solutions de l'équation différentielle en question va constituer une représentation du groupe de rotation $SO(3)$. La connaissance de toutes les représentations irréductibles de $SO(3)$ (la notion d'irréductibilité sera définie à la prochaine section) permet alors de faciliter la recherche de solutions de l'équation différentielle originale.

2.2. EXEMPLES DE REPRÉSENTATIONS

Si l'on considère l'algèbre de Lie $so(3)$, on peut immédiatement exhiber la représentation triviale de dimension un : $\rho(u) = (0)$, où (0) est la matrice nulle de format 1×1 . On vérifie ensuite que ρ est bien une représentation :

$$[\rho(u), \rho(v)] = [(0), (0)] = (0) = \rho([u, v]_V), \forall u, v \in V.$$

On note également que $\rho(l_x) = (0) = \rho(l_y)$, mais que $l_x \neq l_y$; ainsi ρ n'est pas un isomorphisme. Cette représentation n'est donc pas une représentation fidèle de $so(3)$ d'après la définition 2.1.2. Un autre exemple de représentation est donné par la définition 1.3.2 ; il s'agit d'une représentation, de dimension 3 de l'algèbre de Lie $so(3)$.

La notion de *réductibilité* est extrêmement importante en théorie des représentations.

Définition 2.2.1. Soit Π une représentation réelle ou complexe de \mathfrak{g} , une algèbre de Lie de matrices avec action sur un espace vectoriel V . Un sous-espace W de V est dit invariant si $\Pi(g)w$ est dans W pour tout w dans W et tout g dans \mathfrak{g} . Le sous-espace W sera non-trivial (ou propre) si il est différent de $\{0\}$ et de V . Une représentation sans sous-espace invariant propre est dite irréductible. Elle est dite réductible dans le cas contraire.

On va maintenant, toujours à titre d'exemple, s'intéresser à des représentations de $so(3)$, l'algèbre de Lie définie en 1.3.2. On rappelle tout d'abord les règles de commutation des éléments de base de $so(3)$, et on introduit la notation $\epsilon(x, y, z)$ qu'illustre la figure (2.1)¹ pour désigner ces règles ; $\epsilon(x, y, z)$ effectue la permutation cyclique des trois symboles $\{x, y, z\}$ décrite par les six égalités suivantes :

$$\begin{cases} [l_x, l_y] = l_z = -[l_y, l_x], \\ [l_y, l_z] = l_x = -[l_z, l_y], \\ [l_z, l_x] = l_y = -[l_x, l_z]. \end{cases} \quad (2.2.1)$$

La figure 2.1 condense les six égalités précédentes, tout en servant d'aide-mémoire. Elle se comprend comme suit : si l'on prend le crochet des deux premiers éléments

¹On utilisera dans tous les graphiques à venir la notation l_x au lieu de l_x , etc

rencontrés en parcourant le cercle dans le sens anti-horaire, alors le résultat sera égal au troisième élément ; si l'on prend le crochet des deux premiers éléments rencontrés en parcourant le cercle dans le sens horaire, alors le résultat sera égal à l'opposé du troisième élément.

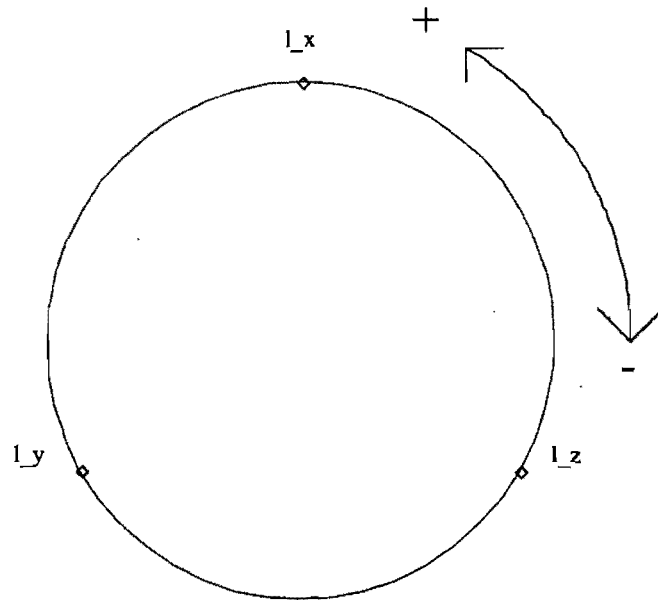


FIG. 2.1. Règles de commutation $\epsilon(x, y, z)$

Proposition 2.2.1. *Il existe une représentation fidèle de dimension deux de $so(3)$.*

Démonstration

Soit $su(2)$, l'algèbre de Lie réelle définie en 1.3.4. Le crochet $[\ast, \ast]_{su(2)}$ est le commutateur matriciel de la définition 1.3.1. Soit

$$E_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, E_y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, E_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.2.2)$$

une base de $su(2)$. On peut prouver que $(\{E_x, E_y, E_z\}, [*, *]_{su(2)})$ est une algèbre de Lie.

On calcule par exemple

$$\begin{aligned} [E_x, E_y] &= \frac{1}{4} \left[\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ &= E_z. \end{aligned}$$

Il est aisé de vérifier que la base $\{E_x, E_y, E_z\}$ respecte $\epsilon(x, y, z)$ en procédant de manière similaire avec les autres égalités de (2.2.1). On sait par la proposition 1.3.2 que la base $\{l_x, l_y, l_z\}$ de matrices 3×3 respecte également $\epsilon(x, y, z)$. Donc l'application

$$\pi : so(3) \rightarrow End(\mathbb{C}^2) \quad (2.2.3)$$

$$l_i \mapsto \pi(l_i) = E_i, \quad i \in \{x, y, z\}, \quad (2.2.4)$$

est un homomorphisme d'algèbre de Lie. Puisque $\{E_x, E_y, E_z\}$ respecte $\epsilon(x, y, z)$, alors $\text{Span}\{E_x, E_y, E_z\}$ est de dimension 3, et π est un isomorphisme entre $so(3)$ et $su(2)$. Par la définition d'un isomorphisme, π est la représentation recherchée. \square

Remarque 2.2.1. On constate ici une différence notable entre les groupes de Lie et les algèbres de Lie. Ainsi, si $su(2) \simeq so(3)$, il en va autrement pour les groupes de Lie correspondants : $SU(2)$ n'est pas isomorphe à $SO(3)$. (En fait, $SO(3) \simeq SU(2)/\{I, -I\}$.)

Proposition 2.2.2. La représentation π de la proposition 2.2.1 est une représentation irréductible de $so(3)$.

Démonstration

La preuve est par contradiction. On suppose qu'il existe un sous-espace invariant propre W de $su(2)$. Alors $\dim(W)$ doit être égale à 1. On pose ensuite $w = ae_1 + be_2$ dans W , avec $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Si a et b sont non-nuls, alors $E_x w$ et w sont linéairement indépendants et W est de dimension deux. Pour que W soit de dimension un, il

faut donc que a ou b soit nul. Si $a = 0$, alors w est dans $\text{Span}\{e_2\}$. On calcule ensuite

$$E_2 w = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} = \frac{ib}{2} e_1,$$

et l'on constate que W n'est pas invariant. On obtient le même résultat si on suppose que $b = 0$. Puisqu'il n'existe pas de sous-espace invariant de dimension un, alors par la définition 2.2.1, π est irréductible. \square

Remarque 2.2.2. La démonstration précédente a mis en évidence des représentations irréductibles d'algèbres de Lie. La simplification de calcul que cela apporte est importante. On considère par exemple la complexification $sl(2, \mathbb{C})$ de $su(2)$, munie de la base (1.7.1) que l'on rappelle ci-dessous :

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ces matrices de base respectent les règles de commutation :

$$[H, X] = 2X, \quad [H, Y] = -2Y, \quad [X, Y] = H.$$

Toute représentation complexe irréductible τ de $sl(2, \mathbb{C})$ offre alors l'avantage d'avoir des opérateurs représentés par des matrices triangulaires pour les opérateurs d'échelle $\tau(X)$ et $\tau(Y)$. Mieux encore, dans la base où $\tau(X)$ et $\tau(Y)$ sont triangulaires, la matrice $\tau(H)$ est diagonale. De la même manière, on va rechercher dans Vir des représentations appelées "modules de Verma", où un générateur (l_0) sera diagonal comme l'est ici $\tau(H)$. La principale différence sera que ces représentations seront de dimension infinie.

2.3. MODULES DE VERMA

La théorie des représentations des algèbres de Lie est très riche. On optera pour une présentation sommaire des modules (ou représentations) de Verma et des représentations irréductibles, soulignant les aspects utiles pour la suite.

Notation 2.3.1. On utilisera dorénavant l'abréviation *php* pour signifier "plus haut poids".

Une des conséquences du théorème du php du chapitre 7 de [Ha03] est que deux représentations irréductibles avec le même php sont équivalentes. Son traitement est

restreint aux algèbres et aux représentations de dimension finie. Une des méthodes constructives classiques pour trouver de telles représentations est purement algébrique et utilise les modules de Verma. Avant de donner la définition desdits modules de Verma, on pourrait se demander ce qu'un poids représente physiquement dans ce contexte.

Les fonctions de corrélation seront étudiées plus en détail dans le chapitre suivant. Pensons simplement pour l'instant à la fonction de corrélation à deux points comme à une fonction dépendant de deux points du plan complexe. Une des hypothèses de la physique statistique est la suivante :

Hypothèse: plus haut poids.

Les fonctions de corrélation peuvent être approximées aux petites distances par une loi de puissance inverse semblable à

$$f(z_1, z_2) \sim \frac{1}{|z_1 - z_2|^\Delta}, \quad \Delta \geq 0. \quad (2.3.1)$$

L'exposant Δ dans cette hypothèse caractérise l'interaction comme l'exposant 2 caractérise la loi de l'attraction universelle de la mécanique classique. Cet exposant Δ ou plus exactement sa moitié $\frac{\Delta}{2}$, puisque l'on doit prendre en compte le secteur holomorphe et le secteur anti-holomorphe, sera le php d'une des représentations intervenant dans la description du modèle statistique étudié.

Après ces préambules, on définit les modules (ou représentations) de php de *Vir*.

Définition 2.3.1. *Soit Vir l'algèbre de Lie définie en 1.6.4. Cette algèbre possède la décomposition triangulaire de $\{Vir^\pm, Vir^0\}$ que l'on avait définie en 1.6.2. Une représentation de php $V_{(z,h)}$, avec pour poids les constantes complexes z et h , est une représentation $\rho : Vir \rightarrow End(V_{(z,h)})$ telle qu'il existe dans $V_{(z,h)}$ un vecteur non-nul v satisfaisant les conditions*

$$\boxed{Vir^- v = 0, \quad l_0 v = h v, \quad c v = (z \mathbb{1})v, \quad U(Vir^+) v = V_{(z,h)}} \quad (2.3.2)$$

Le vecteur v est appelé "vecteur de php".

Remarque 2.3.1. *La constante z est la charge centrale de la théorie, et la constante h est la valeur propre de l'opérateur de dilatation infinitésimale l_0 . Il est usuel de noter la constante z par le même symbole utilisé pour le générateur c du centre de *Vir*. Dès maintenant, on adoptera cet abus et l'on écrira $V_{(c,h)}$ plutôt que $V_{(z,h)}$.*

Remarque 2.3.2. On notera, et continuera d'utiliser, l'abus de notation dans (2.3.2) (c 'est $\rho(l_0) \in \text{End}(V)$ qui agit sur v et pas l_0).

Notation 2.3.2. On notera \mathbb{Z}^* l'ensemble des entiers non-négatifs $\{0, 1, 2, \dots\}$.

Définition 2.3.2. Un module de php $V_{(c,h)}$ est appelé un module de Verma si tout module $M_{(c,h)}$ de php (c, h) est un quotient de $V_{(c,h)}$ par un de ses sous-modules. Ainsi, parmi les modules de php (c, h) , le module de Verma $V_{(c,h)}$ est un objet universel dans le sens que chaque module de php ayant le même php en est une image par un homomorphisme.

Les modules de php peuvent être décomposés en une somme directe de leur sous-espaces de poids : $V = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}^*} V^{(n)}$ où les sous-espaces $V^{(n)}$ sont définis par :

Définition 2.3.3. On définit les sous-espaces de poids $V^{(n)}$ de $V_{(c,h)}$ par

$$V^{(n)} = \{w \in V_{(c,h)} \mid l_0 w = (h + n)w, \text{ pour } n \in \mathbb{Z}^*\}$$

En particulier, puisque $V^{(0)} = \mathbb{C}v$, le vecteur v de php est unique à une constante non-nulle près.

On admettra sans preuve la proposition suivante :

Proposition 2.3.1. (i) Pour chaque paire (c, h) dans \mathbb{C}^2 , le module de Verma $V_{(c,h)}$ existe et est unique, à un isomorphisme près.

(ii) En tant qu'espace vectoriel, $V_{(c,h)} \simeq U(\text{Vir}^+)$.

(iii) Il existe un unique sous-module maximal propre $V'_{(c,h)}$ contenu dans $V_{(c,h)}$.

(iv) Pour chaque paire (c, h) dans \mathbb{C}^2 , il existe un unique module irréductible de php $M_{(c,h)}$.

Les représentations irréductibles garanties par le point (iv) de cette proposition sont celles auxquelles on va s'intéresser. On va chercher les représentations irréductibles unitaires $M_{(c,h)}$ qui, par définition 2.3.2, sont le quotient des modules de Verma de même poids par leur sous-module propre maximal (une contrainte supplémentaire, celle sur l'unitarité de la représentation est un choix arbitraire motivé par des considérations d'ordre physique). La pertinence de ce choix est remise en question par de récents développements, comme par exemple l'étude d'observables ayant un comportement régi par des exposants différents des trois exposants critiques que sont les php des représentations unitaires associés au modèle d'Ising (voir [Ar02, p. 66]). On va

cependant s'en tenir au paradigme usuel de la théorie des champs conforme, et se restreindre aux représentations unitaires. Les dernières sections qui traitent de la forme de Shapovalov, des tables de Kac, et de la série discrète de Friedan-Qiu-Shenker vont montrer comment identifier les représentations irréductibles unitaires parmi toutes les représentations irréductibles possibles.

Remarque 2.3.3. *Les modules de Verma $V_{(c,h)}$ sont toujours de dimension infinie. C'est également vrai des modules irréductibles $M_{(c,h)} = V_{(c,h)}/V'_{(c,h)}$, où $V'_{(c,h)}$ est le sous-module maximal propre de $V_{(c,h)}$, à l'exception du quotient trivial de modules $M_{(c=0,h=0)}$, qui est de dimension un.*

Les méthodes algébriques qui ont mené aux résultats précédents sont exactes et rigoureuses. Malheureusement, on ne peut pas les utiliser pour construire facilement des exemples concrets de représentations qui permettraient de comparer les modèles prévus par la théorie des champs conformes avec des modèles existants de physique statistiques (modèle d'Ising, de Potts, percolation, etc). Pour contourner cette difficulté, on va dans la section suivante passer de la quête de représentations irréductibles à la quête de vecteurs singuliers.

2.4. VECTEUR SINGULIER

Définition 2.4.1. *Soit un module $V_{(c,h)}$ de php (c, h) . Un vecteur non-nul w est dit singulier si il est annihilé par Vir^- , c'est-à-dire si*

$$Vir^-(w) = 0. \quad (2.4.1)$$

On rappelle qu'il existe une graduation sur Vir . Pour se donner une idée de la relation qui existe entre un vecteur singulier et les vecteurs de niveau plus profond dans un module de php donné, on considère le module ayant vecteur de php v . La figure 2.2 permet de se représenter la structure des sous-espaces $V^{(0)}$ à $V^{(n)}$. Au dessous du niveau 0 se tiennent les niveaux plus profonds contenant possiblement d'autres vecteurs singuliers. Chaque point au niveau i représente un élément de la base de $V^{(i)}$, pour $0 \leq i \leq n$. Au sommet de la figure (le niveau 0) se trouve le vecteur de php v qui, selon l'ensemble de conditions (2.3.2), est un vecteur singulier du sous-espace $V^{(0)}$.

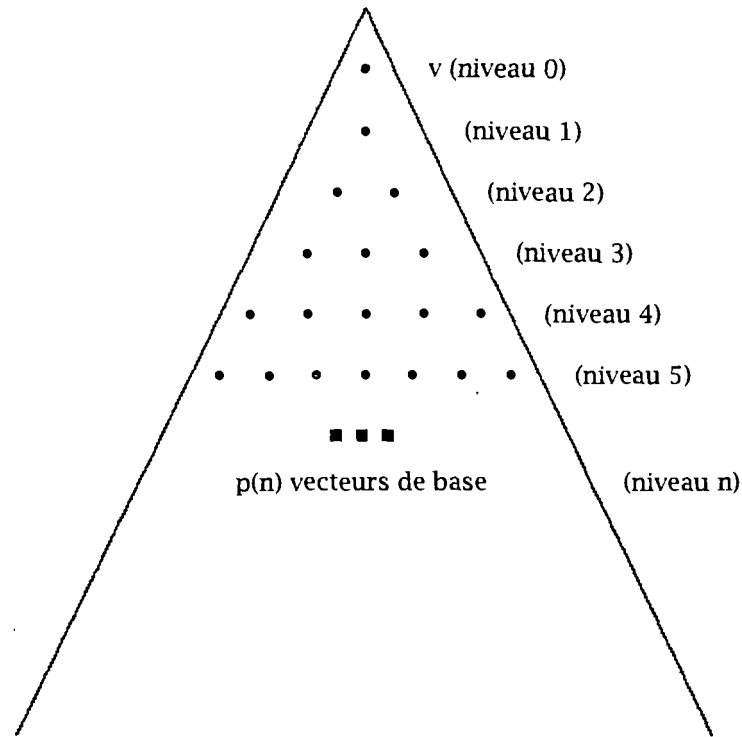


FIG. 2.2. Sous-espaces $V^{(0)}$ à $V^{(n)}$

2.4.0.2. Caractérisation des vecteurs singuliers

Déterminer si w est singulier en utilisant la définition 2.4.1 est difficile. Il faudrait vérifier que tout élément appartenant à l'algèbre enveloppante de Vir^- agissant sur w l'annihile. Heureusement, la proposition suivante va fournir un moyen plus efficace, et de plus facile à programmer, pour caractériser les vecteurs singuliers.

Proposition 2.4.1. *Le vecteur w est un vecteur singulier si et seulement si $L_{-1} w = L_{-2} w = 0$.*

Démonstration

On suppose tout d'abord que w est un vecteur singulier. Alors $L_{-1} w = L_{-2} w = 0$ puisque, par la définition 2.4.1, L_{-1} et L_{-2} sont dans Vir^- .

Supposons ensuite que $L_{-1} w = L_{-2} w = 0$, et raisonnons par induction. On vérifie tout

d'abord que $l_{-3} w = 0$ en calculant à l'aide des règles de commutation (1.6.4).

$$\begin{aligned}
 l_{-2}l_{-1} w - l_{-1}l_{-2} w &= [l_{-2}, l_{-1}] w \\
 &= \left\{ (-1 + 2)l_{-3} + \frac{c}{12}((-1)^3 + 1)\delta_{(-3,0)} \right\} w \\
 &= l_{-3} w \\
 &= 0, \text{ puisque par hypothèse, le membre de gauche est nul.}
 \end{aligned}$$

On suppose ensuite que $l_{-j} w = 0$ pour tout j tel que $3 \leq j \leq i$, et on vérifie que cela implique bien que $l_{-(j+1)} w = 0$.

$$\begin{aligned}
 l_{-1}l_{-j} w - l_{-j}l_{-1} w &= [l_{-1}, l_{-j}] w \\
 &= \left\{ (-j + 1)l_{-j-1} + \frac{c}{12}((-j)^3 + j)\delta_{(-(j+1),0)} \right\} w \\
 &= (-j + 1)l_{-j-1} w \\
 &= 0, \text{ puisque par hypothèse, le membre de gauche est nul,}
 \end{aligned}$$

donc $l_{-j-1} w = 0$, et la preuve est complète. \square

On verra au chapitre 4 comment cette proposition a été exploitée pour concevoir le programme *vs*. Ce programme calcule les vecteurs singuliers à un niveau n prédéterminé dans une représentation donnée. On va dès maintenant se familiariser avec les calculs sur des vecteurs singuliers homogènes de faible degré.

2.4.0.3. Deux exemples de vecteurs singuliers

On fait usage ici de la proposition 2.4.1 pour vérifier que des vecteurs donnés sont singuliers.

Proposition 2.4.2. *Les vecteurs homogènes $v_2 = (4l_2 - 3l_1^2)v$ et $v_3 = (3l_3 - 12l_2l_1 + 4l_1^3)v$, de degré 2 et 3 respectivement, sont singuliers dans le module ayant pour poids $c = h = \frac{1}{2}$.*

Démonstration

On commence avec v_2 . On vérifie tout d'abord que $L_{-1}v_2 = 0$

$$\begin{aligned}
 L_{-1}v_2 &= L_{-1}(4l_2 - 3l_1^2)v \\
 &= 4(l_2l_{-1} + 3l_1)v - 3(l_1l_{-1} + 2l_0)l_1v \\
 &= 12l_1v - 3l_1(l_{-1}l_1)v - 6(l_0l_1)v \\
 &= 12l_1v - 3l_1(l_1l_{-1} + 2l_0)v - 6(l_1l_0 + l_1)v \\
 &= 6l_1v - 12l_1l_0v \\
 &= (6 - 12h)l_1v \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

On vérifie ensuite que $L_{-2}v_2 = 0$

$$\begin{aligned}
 L_{-2}v_2 &= L_{-2}(4l_2 - 3l_1^2)v \\
 &= 4(L_{-2}l_2)v - 3(L_{-2}l_1)l_1v \\
 &= 4(4l_0 + \frac{c}{2})v - 3(l_1L_{-2} + 3L_{-1})l_1v \\
 &= 16hv + 2cv - 3l_1(L_{-2}l_1)v - 9(l_1L_{-1} + 2l_0)v \\
 &= 16hv + 2cv - 18hv \\
 &= 2(c - h)v \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

On peut accélérer les calculs en profitant du fait que $l_0(lv) = (h + n)(lv)$, n étant le degré de l dans $U(\text{Vir}^+)$ (définition 2.3.3). On calcule ainsi pour v_3 que

$$\begin{aligned}
 L_{-1}v_3 &= L_{-1}(3l_3 - 12l_2l_1 + 4l_1^3)v \\
 &= 3(l_3l_{-1} + 4l_2)v - 12(l_2l_{-1} + 3l_1)l_1v + 4(l_1l_{-1} + 2l_0)l_1^2v \\
 &= 12l_2v - 12l_2(l_1l_{-1} + 2l_0)v - 36l_1^2v + 4l_1l_{-1}l_1^2v + 8l_0l_1^2v \\
 &= 12l_2v - 24hl_2v - 36l_1^2v + 4l_1(l_1l_{-1} + 2l_0)l_1v + 8l_0l_1^2v \\
 &= (12 - 24h)l_2v - 36l_1^2v + 4l_1^2(l_1l_{-1} + 2l_0)v + 8l_1l_0l_1v + 8l_0l_1^2v \\
 &= -36l_1^2v + 8(h + h + 1 + h + 2)l_1^2v \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

et que

$$\begin{aligned}
L_{-2}v_3 &= L_{-2}(3l_3 - 12l_2l_1 + 4l_1^3)v \\
&= 3(l_3l_{-2} + 5l_1)v - 12(l_2l_{-2} + 4l_0 + \frac{c}{12}(6))l_1v + 4(l_1l_{-2} + 3l_{-1})l_1^2v \\
&= 15l_1v - 48l_0l_1v - 6cl_1v + 4[l_1(l_1l_{-2} + 3l_{-1}) + 3(l_1l_{-1} + 2l_0)]l_1v \\
&= (15 - 6c)l_1v - 48l_0l_1v + 4[6l_1(l_1l_{-1} + 2l_0) + 6l_0l_1]v \\
&= (15 - 6c)l_1v - 48l_0l_1v + 48l_1l_0v + 24l_0l_1v \\
&= (15 - 6c + 48h - 24(h + 1))l_1v \\
&= 0,
\end{aligned}$$

ce qui complète la preuve. □

La proposition précédente montre comment vérifier la singularité de vecteurs connus. C'est un tout autre problème de calculer automatiquement dans une base donnée (construite comme illustré par le tableau 1.1) les coefficients d'un vecteur singulier de niveau n donné. C'est précisément la fonction du programme `vs` dont on va détailler l'algorithme au chapitre 4.

2.5. VECTEUR SINGULIER ET RÉDUCTIBILITÉ DES REPRÉSENTATIONS

Quel lien existe-t-il entre vecteurs singuliers et représentations irréductibles de l'algèbre de Virasoro ? On va montrer par la proposition 2.5.1 qu'ils sont intimement liés. On aura besoin pour cela du lemme suivant, que l'on cite sans preuve.

Lemme 2.5.1. *Tout sous-module W dans $V_{(c,h)}$ de $php(c, h)$ contient un vecteur singulier. (On remarque que si $W = V_{(c,h)}$, alors le vecteur de php de $V_{(c,h)}$ est lui-même un vecteur singulier de W .)*

Proposition 2.5.1. *Soit $V_{(c,h)}$, un module de $php(c, h)$, que l'on notera simplement V pour alléger l'écriture. Ce module V est irréductible si et seulement si tout vecteur singulier de V est dans $V^{(0)}$.*

Démonstration

Supposons que W soit un sous-module propre de V . On sait par le lemme 2.5.1 que W doit contenir un vecteur singulier w . Mais puisque l'on suppose que W est un sous-module propre de V , alors w ne peut être dans $V^{(0)}$. Par contraposition, si tout vecteur

singulier de V est dans $V^{(0)}$, alors le module V est irréductible.

On prouve ensuite l'implication inverse. On suppose que V est irréductible. Soit w un vecteur singulier non-nul de V . Puisque w est singulier, alors nécessairement chaque composante homogène $w^{(n)}$ de degré n de w est aussi un vecteur nul. Par définition de Vir , il s'ensuit que $U(\text{Vir}^+)w^{(n)}$ sera un sous-module de php de V . Puisque par hypothèse V est irréductible, alors $U(\text{Vir}^+)w^{(n)} = V$ forçant $w^{(n)}$ à être dans $V^{(0)}$ pour tout n . On a donc prouvé que si le module V est irréductible, alors tout vecteur singulier de V est dans $V^{(0)}$, complétant ainsi la preuve. \square

Remarque 2.5.1. Si V (de $\text{php}(c, h)$) est irréductible, alors par la proposition 2.3.1, V est isomorphe à $M_{(c, h)}$.

Ainsi, chaque vecteur singulier (autre que celui de php) à l'intérieur d'un module engendre un sous-module propre. Pour quotienter par les représentations irréductibles $M_{(c, h)}$, il faut donc trouver tous les vecteurs singuliers présents dans un module $V_{(c, h)}$ puis "retirer" les sous-modules qu'ils engendrent. La tâche paraît énorme, mais est réalisable. Pour faciliter les calculs que cela implique, on introduit une forme bilinéaire, la forme de Shapovalov.

2.6. FORME DE SHAPOVALOV ET DÉTERMINANT DE KAC

Les résultats qui suivent sont dûs à B. Feigin et D. Fuchs ainsi que V. Kac (voir [YSA90]).

2.6.1. Forme de Shapovalov

Définition 2.6.1. Soit v un vecteur de php non nul du module de Verma $V_{(c, h)}$. Soient les deux conditions :

$$(v|v) = 1, \quad (2.6.1)$$

$$(w_1|l_i w_2) = (L_{-i} w_1|w_2), \quad (2.6.2)$$

pour tous vecteurs w_1 et w_2 dans le module de Verma $V_{(c, h)}$, pour tout i dans \mathbb{Z} . Ces deux conditions définissent une unique forme bilinéaire sur le module de Verma $V_{(c, h)}$. L'école russe appelle $(*|*)$ la forme de Shapovalov.

Proposition 2.6.1. *La forme de Shapovalov $(*|*)$ sur $V_{(c,h)}$ possède les deux propriétés suivantes :*

(a) $(V_{(c,h)}^n | V_{(c,h)}^m) = 0$ si $n \neq m$

(b) $(*|*)$ est symétrique.

Démonstration

On pose $w_1 = l_{i_1} l_{i_2} \dots l_{i_k} v$, un vecteur homogène de degré $n = \sum_p i_p$ dans $V_{(c,h)}^n$, et $w_2 = l_{j_1} l_{j_2} \dots l_{j_l} v$, un vecteur homogène de degré $m = \sum_k j_k$ dans $V_{(c,h)}^m$, alors

$$\begin{aligned} (w_1 | w_2) &= (l_{i_1} l_{i_2} \dots l_{i_k} v | l_{j_1} l_{j_2} \dots l_{j_l} v) \\ &= (v | l_{-i_k} \dots l_{-i_2} l_{-i_1} l_{j_1} l_{j_2} \dots l_{j_l} v) = 0 \text{ si } n > m \\ &= (l_{-j_l} \dots l_{-j_2} l_{-j_1} l_{i_1} l_{i_2} \dots l_{i_k} v | v) = 0 \text{ si } n < m, \end{aligned}$$

ce qui prouve (a).

Pour montrer (b), on suppose que les vecteurs w_1 et w_2 définis comme en (a) ont degré identique n . Alors on a

$$\begin{aligned} (w_1 | w_2) &= (l_{i_1} l_{i_2} \dots l_{i_k} v | l_{j_1} l_{j_2} \dots l_{j_l} v) \\ &= (v | l_{-i_k} \dots l_{-i_2} l_{-i_1} l_{j_1} l_{j_2} \dots l_{j_l} v). \end{aligned}$$

Puisque $l_{-i_k} \dots l_{-i_2} l_{-i_1} l_{j_1} l_{j_2} \dots l_{j_l}$ est un monôme de degré 0, après commutation et usage du fait que v est un vecteur de php , on obtient :

$$\begin{aligned} &= (v | (\text{polynôme } p(h,c) \text{ de degré } n) v) \\ &= ((\text{polynôme identique } p(h,c)) v | v) \\ &= (l_{-i_k} \dots l_{-i_2} l_{-i_1} l_{j_1} l_{j_2} \dots l_{j_l} v | v) \\ &= (l_{j_1} l_{j_2} \dots l_{j_l} v | l_{i_1} l_{i_2} \dots l_{i_k} v) \\ &= (w_2 | w_1) \end{aligned}$$

□

Un théorème s'avère nécessaire pour caractériser certaines représentations de *Vir* à l'aide de la forme de Shapovalov.

Théorème 2.6.1. *Si il existe un vecteur w non-nul dans le module de Verma V tel que*

$$(w | w') = 0$$

pour tout w' dans V , alors w est un vecteur singulier. On dit alors que la forme de Shapovalov $(*|*)$ est singulière.

On sait par la proposition 2.5.1 que l'existence de vecteurs singuliers au sein d'un module de Verma revient à la réductibilité du dit module. Par conséquent, on peut utiliser la forme de Shapovalov pour discriminer parmi les représentations de $V_{(c,h)}$ celles qui sont irréductibles. Avant d'expliquer plus en détail ce procédé, il est nécessaire d'introduire $p(n)$, le nombre de partitions d'un entier n . Par exemple, les partitions de 3 par des entiers décroissants étant $\{3, 2+1, 1+1+1\}$, alors $p(3)$ est égal à 3. Le tableau 2.1 ci-dessous donne le nombre de partitions de quelques entiers positifs.

n	0	1	2	3	4	5	...	10	11	12	...	18	19	20	...
$p(n)$	1	1	2	3	5	7	...	42	56	77	...	385	490	697	...

Tab. 2.1. Fonction $p(n)$: nombre de partitions de l'entier n

L'étude de l'irréductibilité des modules de Verma passe par celle de matrices carrées de taille $p(n) \times p(n)$ appelées matrices de Graham $M^{(n)}$. Chaque élément de ces matrices est donné par la forme de Shapovalov prise entre les vecteurs de la base $B_n = \{l_{i_1} l_{i_2} \dots l_{i_k} : i_1 \geq i_2 \geq \dots \geq i_k \geq 1 \text{ et } i_1 + i_2 + \dots + i_k = n\}$ de $V_{(c,h)}^n$. On calcule par exemple un des éléments sur la diagonale de la matrice de Graham de taille $p(n) \times p(n)$:

$$(l_n v | l_n v) = (v | l_{-n} l_n v) \quad (2.6.3)$$

$$= (v | l_{-n} l_n + 2nl_0 + \frac{c}{12} n(n^2 - 1) \delta_{(n-n,0)} v) \quad (2.6.4)$$

$$= 2nh + \frac{c}{12} n(n^2 - 1). \quad (2.6.5)$$

Ce calcul est utile pour l'identification des représentations *unitaires*, c'est-à-dire pour lesquelles la forme de Shapovalov est un produit scalaire (défini positif). Si c est négatif alors la norme de $l_n v$ donnée par (2.6.5) sera négative pour n assez grand. Dans le cas où $n = 1$, on note également que, puisque (2.6.5) est négative pour h négatif, alors les représentations avec h négatif seront aussi réductibles. On en conclut que les représentations unitaires doivent être localisées dans le premier quadrant du plan (c, h) .

Mais les matrices de Graham $M^{(n)}$ sont aussi utiles pour identifier les $V_{(c,h)}$ réductibles. En fait, $V_{(c,h)}$ sera réductible si et seulement si il existe un vecteur singulier de niveau ≥ 1 , et donc, si et seulement si une des matrices $M^{(n)}$, $n \geq 1$, est singulière.

2.6.2. Déterminant de Kac

La factorisation donnant le déterminant des matrices de Graham $M^{(n)}$ et qui porte le nom de *déterminant de Kac*, a été d'abord conjecturé par Victor Kac ([Ka79]). La première preuve de cette conjecture a été publiée par Feigin and Fuchs ([FF82]).

Théorème 2.6.2. *Le déterminant de Kac est donné par*

$$K_{(h,c)}^n := \det M^{(n)} = \alpha_n \prod_{r,s \geq 1 \text{ et } rs \leq n} [h - h_{r,s}(c)]^{p(n-rs)}. \quad (2.6.6)$$

La constante α_n ne dépend que de n . Dans l'expression (2.6.6), r et s sont des entiers, et $p(n-rs)$ est le nombre de partitions de l'entier positif $n-rs$. Les poids $h_{r,s}$ sont donc les racines de $K_{(h,c)}^n$. Plusieurs paramétrisations de h et c sont possibles. Par exemple,

$$\begin{cases} c(t) = 13 - 6\left(t + \frac{1}{t}\right), \\ h_{r,s}(t) = \frac{1}{4}(r^2 - 1)t + \frac{1}{4}(s^2 - 1)\frac{1}{t} - \frac{1}{2}(rs - 1), \end{cases} \quad (2.6.7)$$

où le paramètre t est un nombre réel donné en fonction de c par la relation $t = 1 + \frac{1}{12} \left\{ 1 - c \pm \sqrt{(1-c)(25-c)} \right\}$, lorsque $0 \leq c \leq 1$. Une autre paramétrisation à un paramètre est donnée par :

$$\begin{cases} c(m) = 1 - \frac{6}{m(m+1)}, \\ h_{r,s}(m) = \frac{((m+1)r - ms)^2 - 1}{4m(m+1)}. \end{cases} \quad (2.6.8)$$

La relation entre les paramètres m et t est $t = \frac{m}{m+1}$ ou $t = \frac{m+1}{m}$.

Puisque, pour une charge centrale c donnée, les poids $h_{r,s}$ sont les racines de $K_{(h,c)}^n$, ils donnent les valeurs des paires (h, c) pour lesquelles la matrice $M^{(n)}$ est singulière, ou de manière équivalente, la forme de Shapovalov est singulière. Mais avec la définition du déterminant de Kac en termes des entiers r et s , trouver pour quelles valeurs de h et c le module $V_{(c,h)}^n$ comporte des vecteurs singuliers va correspondre à trouver pour lesquelles le déterminant de Kac s'annule. Par la proposition 2.5.1 et la remarque 2.5.1, ceci revient donc à déterminer quand $V_{(c,h)}^n$ est réductible. La figure 2.3 montre des courbes instructives à cet égard. On utilisera la notation suivante pour désigner ces courbes.

Notation 2.6.1. On va noter par $C_{r,s}$ les courbes le long desquelles $K_{(h,c)}^n = 0$.

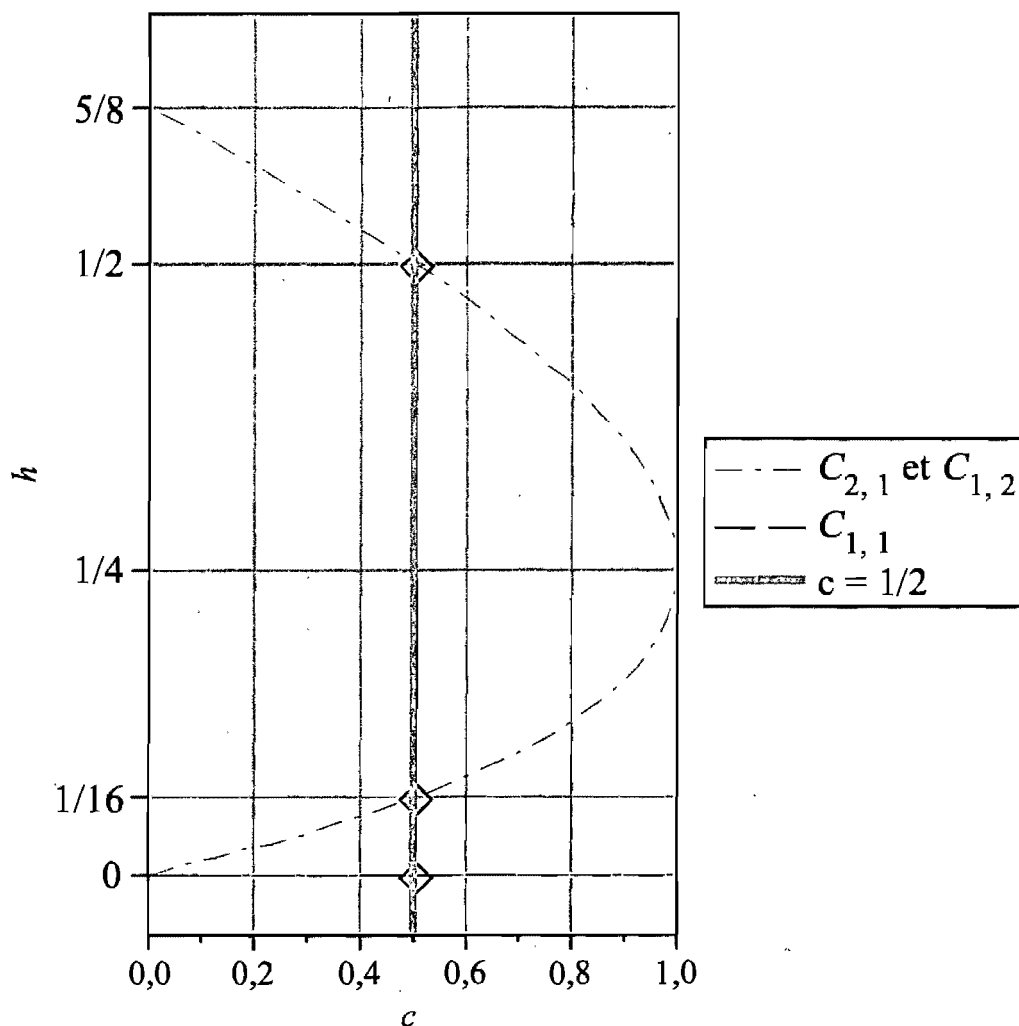


FIG. 2.3. Courbes $C_{1,1}(t)$, $C_{1,2}(t)$ et $C_{2,1}(t)$ dans le plan (c, h)

On peut voir sur la figure 2.3 que la droite verticale $c = \frac{1}{2}$ coupe la courbe $C_{2,1}$ en $\frac{1}{16}$ ainsi que la courbe $C_{1,2}$ en $\frac{1}{2}$. Ces courbes donnent des valeurs de h qui vont annuler le déterminant de Kac avec $c = \frac{1}{2}$ fixé. On en conclut que les modules de Verma $V_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{16})}$ et $V_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}$ doivent tous deux comporter un vecteur singulier au niveau entier $rs = 2$. On peut aussi déduire de cette figure l'existence d'un vecteur singulier situé au niveau $rs = 1$ appartenant à $V_{(\frac{1}{2}, 0)}$, puisque l'on a aussi intersection de la droite verticale $c = \frac{1}{2}$ avec la courbe $C_{1,1}$ qui est la droite d'équation $h = 0$. Ces courbes ont un pendant symétrique selon la transformation c vers $26-c$ et h vers $1-h$, mais on va s'intéresser ici uniquement aux points dans le domaine $0 \leq c \leq 1$ et $0 \leq h$. Ces points correspondent à des niveaux entiers pour lesquels les modules de Verma ont des vecteurs singuliers.

Les courbes de la figure 2.3 sont loin d'être uniques ; il existe en effet une infinité de courbes $C_{r,s}$ interceptant $c = \frac{1}{2}$. On va revenir sur ce point dans la dernière section en abordant la structure des modules irréductibles de Verma.

Avant de conclure cette section avec les tables de Kac, il est instructif de calculer explicitement les déterminants de Kac pour n de zéro à trois. Ceci permet d'apprécier la puissance du théorème 2.6.6 qui donne les racines $h_{r,s}$ pour tout n .

$$K_{(h,c)}^0 = \det(M^{(0)}) = |(v|v)| = 1 \text{ (constante par définition)} \quad (2.6.9)$$

$$\begin{aligned} K_{(h,c)}^1 &= \det(M^{(1)}) = |(l_1 v|l_1 v)| = |(v|L_{-1}l_1 v)| \\ &= |(v|(2l_0 + l_1 L_{-1})v)| \\ &= 2h \end{aligned} \quad (2.6.10)$$

$$\begin{aligned} K_{(h,c)}^2 &= \det(M^{(2)}) = \begin{vmatrix} (l_2 v|l_2 v) & (l_2 v|l_1^2 v) \\ (l_1^2 v|l_2 v) & (l_1^2 v|l_1^2 v) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 4h + \frac{c}{2} & 6h \\ 6h & 4h(2h+1) \end{vmatrix} \\ &= 4h \left\{ 8h^2 + (c-5)h + \frac{c}{2} \right\} \end{aligned} \quad (2.6.11)$$

$$\begin{aligned} K_{(h,c)}^3 &= \det(M^{(3)}) = \begin{vmatrix} (l_3 v|l_3 v) & (l_3 v|l_2 l_1 v) & (l_3 v|l_1^3 v) \\ (l_2 l_1 v|l_3 v) & (l_2 l_1 v|l_2 l_1 v) & (l_2 l_1 v|l_1^3 v) \\ (l_1^3 v|l_3 v) & (l_1^3 v|l_2 l_1 v) & (l_1^3 v|l_1^3 v) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 6h + 2c & 10h & 24h \\ 10h & h(8h + c + 8) & 12h(3h + 1) \\ 24h & 12h(3h + 1) & 24h(h + 1)(2h + 1) \end{vmatrix} \\ &= 48h^2 \left\{ 16h^2 + 2h(c-5) + c \right\} \left\{ 3h^2 + h(c-7) + c + 2 \right\} \end{aligned} \quad (2.6.12)$$

Remarque 2.6.1. Les déterminants (2.6.10), (2.6.11) et (2.6.12) montrent que les modules de Verma de php $h = 0$ possèdent tous un vecteur singulier.

Pour simplifier la modélisation de théories physiques, on va avoir besoin de la série discrète de Friedan-Qiu-Shenker.

2.7. TABLES DE KAC ET SÉRIE DISCRÈTE DE FRIEDAN-QIU-SHENKER

Les théories des champs conformes décrivant les phénomènes critiques seront construites à partir de représentations irréductibles de \mathfrak{php} . Pour obtenir une théorie complète, il faut habituellement combiner plus d'une représentation irréductible de \mathfrak{php} ; toutes doivent cependant avoir la même charge centrale c qui régit le comportement du tenseur énergie-impulsion. Les physiciens font la distinction entre deux types de théories conformes : celles faisant intervenir un nombre fini de représentations irréductibles de \mathfrak{php} et celles nécessitant un nombre infini de telles représentations. Les premières, nommées minimales, sont de loin les plus simples, les plus étudiées et les mieux connues. On se limitera dans le cadre de ce mémoire à l'étude des modèles minimaux $\mathfrak{M}(4, 3)$ et $\mathfrak{M}(5, 4)$.

Soient p et p' des entiers relativement premiers tels que

$$p\alpha_- + p'\alpha_+ = 0$$

$$\text{avec } \alpha_{\pm} = \frac{\sqrt{1-c} \pm \sqrt{25-c}}{\sqrt{24}}.$$

Les équations des paires (c, h)

$$c = 1 - 6 \frac{(p - p')^2}{pp'}, \quad (2.7.1)$$

$$h_{r,s} = \frac{(pr - p's)^2 - (p - p')^2}{4pp'}, \quad (2.7.2)$$

décrivent les représentations de \mathfrak{php} d'une famille discrète. Puisque les paramètres r et s dans le déterminant de Kac (2.6.6) ont permis l'étiquetage des vecteurs singuliers présents au sein des modules de Verma, il est tentant de les utiliser pour tabuler les valeurs de $h_{r,s}$ données par cette famille discrète. Les tableaux ainsi obtenus portent le nom de *tables de Kac*.

2.7.1. Tables de Kac

Les entrées des tables de Kac sont les valeurs de $h_{r,s}$ données par la série discrète (2.7.2) pour c fixé. Les lignes et les colonnes sont indicés par s et r . Le rectangle $1 \leq r < p', 1 \leq s < p$ qui contient dans chaque case repérée par les entiers r et s le poids $h_{r,s}$ est donc la table de Kac, représentée au tableau 2.2 ci-dessous. Par convention, $p > p'$.

	$r = 1$	$r = 2$	\dots	$r = p' - 1$
$s = p - 1$	$h_{1,p-1}$	$h_{2,p-1}$	\dots	$h_{p'-1,p-1}$
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
$s = 2$	$h_{1,2}$	$h_{2,2}$	\dots	$h_{p'-1,2}$
$s = 1$	$h_{1,1}$	$h_{2,1}$	\dots	$h_{p'-1,1}$

TAB. 2.2. Table de Kac de taille $(p - 1)(p' - 1)$

A titre d'exemples, le tableau 2.3 donne la table de Kac pour $(p, p') = (4, 3)$ et le tableau 2.4 donne la table de Kac pour $(p, p') = (5, 4)$. Ces deux tables correspondent aux deux modèles minimaux étudiés au chapitre quatre.

	$r = 1$	$r = 2$
$s = 3$	$\frac{1}{2}$	0
$s = 2$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
$s = 1$	0	$\frac{1}{2}$

TAB. 2.3. Table de Kac pour $(p, p') = (4, 3)$

	$r = 1$	$r = 2$	$r = 3$
$s = 4$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{16}$	0
$s = 3$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{80}$	$\frac{1}{10}$
$s = 2$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{80}$	$\frac{3}{5}$
$s = 1$	0	$\frac{7}{16}$	$\frac{3}{2}$

TAB. 2.4. Table de Kac pour $(p, p') = (5, 4)$

Enfin, on note que les valeurs $h_{r,s}$ apparaissent toutes en double dans les tables de Kac. Ceci s'explique par le fait que $h_{p'-r,p-s} = h_{r,s}$. On vérifie en effet à l'aide de (2.7.2) que

$$\begin{aligned}
 h_{p'-r,p-s} &= \frac{(p(p' - r) - p'(p - s))^2 - (p - p')^2}{4pp'} \\
 &= \frac{(pp' - pr - p'p + p's)^2 - (p - p')^2}{4pp'} \\
 &= \frac{(-(pr - p's))^2 - (p - p')^2}{4pp'} \\
 &= h_{r,s}.
 \end{aligned} \tag{2.7.3}$$

2.7.2. Série discrète de Friedan-Qiu-Shenker

Tout d'abord, on note que le choix particulier de $p' = m$ et $p = m + 1$ (p, p' relativement premiers) donne lieu à la paramétrisation 2.6.8 des couples $\{c, h\}$ en fonction d'un unique paramètre m , entier et > 2 que l'on rappelle ici. Cette famille est une sous-famille de la série discrète (2.7.1) et (2.7.2) (correspondant aux représentations unitaires), nommée *famille de Friedan-Qiu-Shenker*. On calcule (voir [FMS97]) cette série explicitement avec

$$c(m) = 1 - \frac{6}{m(m+1)}, \quad m = 2, 3, 4, \dots \quad (2.7.4)$$

$$h_{r,s}(m) = \frac{((m+1)r - ms)^2 - 1}{4m(m+1)}, \quad 1 \leq r < m, 1 \leq s \leq m. \quad (2.7.5)$$

Remarques 2.7.1. *Les tables de Kac 2.3 et 2.4 correspondent en fait à $m = 3$ et $m = 4$ respectivement. Les trois courbes continues de la figure 2.3 correspondent à un déterminant de Kac nul. La série ci-dessus pour $m = 3$ est elle-même une sous-famille de la série de Friedan-Qiu-Shenker et sélectionne sur ces trois courbes l'ensemble fini de points $(\frac{1}{2}, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{16}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Ces couples de valeurs sont les poids des trois représentations irréductibles correspondants au premier modèle minimal.*

2.8. STRUCTURE DES MODULES IRRÉDUCTIBLES

On a en main tous les éléments nécessaires pour clarifier la structure des modules irréductibles. Le module $V_{(c(p,p'),h_{r,s}(p,p'))}$ de $\text{php } h_{r,s}$ possède un premier vecteur singulier au niveau rs . Il doit également en avoir un autre au niveau $(p' - r)(p - s)$ puisque l'égalité (2.7.3) assure que les paires (c, h) correspondantes se trouvent sur la courbe $C_{r,s}$. La somme des deux sous-modules $V_{(c(p,p'),h_{r,s}+rs)}$ et $V_{(c(p,p'),h_{r,s}+(p'-r)(p-s))}$ est un sous-module propre maximal (voir [YSA90]). Par la proposition 2.3.1, le module

$$M_{r,s} = V_{(c(p,p'),h_{r,s}(p,p'))} / \left(V_{(c(p,p'),h_{r,s}+rs)} \cup V_{(c(p,p'),h_{r,s}+(p'-r)(p-s))} \right)$$

constitue un module irréductible de php .

La structure de ce sous-module maximal est assez complexe. En effet, chaque paire de sous-modules $V_{(c(p,p'),h_{r,s}+rs)}$ et $V_{(c(p,p'),h_{r,s}+(p'-r)(p-s))}$ a en commun deux autres sous-modules non-triviaux, et ainsi de suite à l'infini. La figure 2.4 illustre cette structure

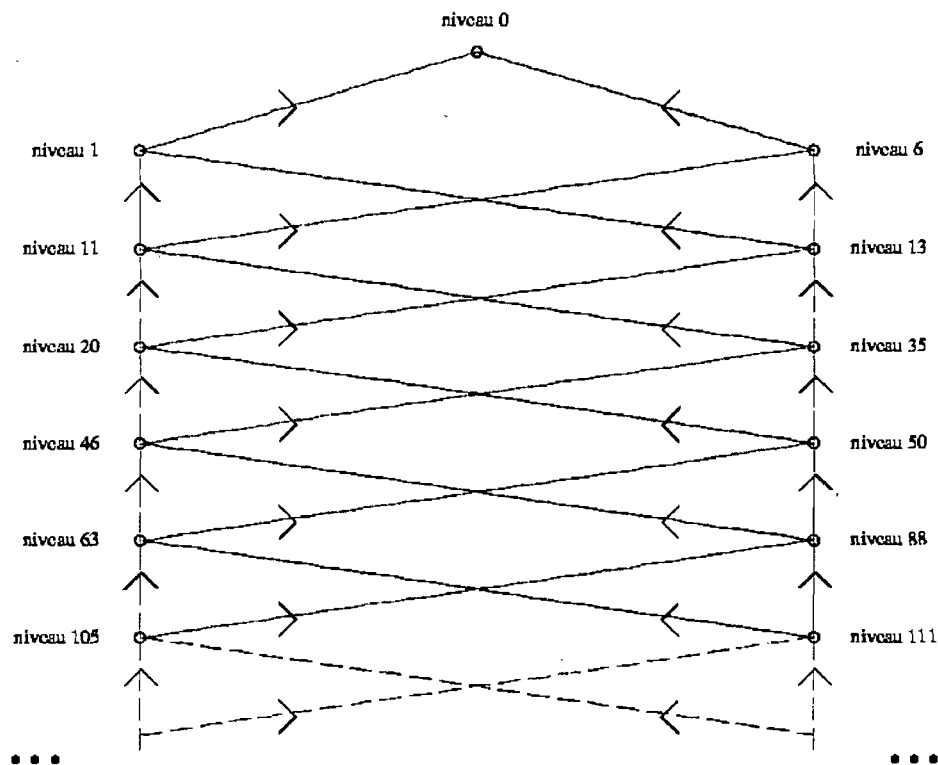
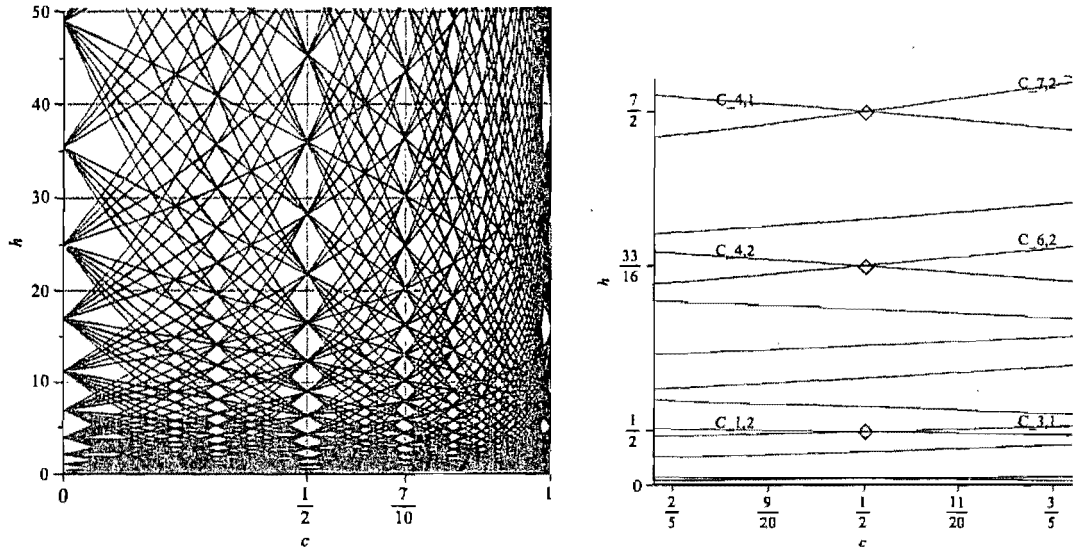


FIG. 2.4. $V_{(c=\frac{1}{2}, h=0)}$

d'inclusions dans le cas du module irréductible $V_{(c=\frac{1}{2}, h=0)}$. Les flèches reliant deux niveaux signifient que le module de Verma engendré par le vecteur singulier au niveau inférieur est inclus dans le module de Verma engendré par le vecteur singulier au niveau supérieur. C'est cette structure particulière qui explique les courbes illustrées à la figure 2.5; on a représenté sur la figure 2.5(a) les courbes $C_{r,s}$ pour $1 \leq r \leq 20$ et $1 \leq s \leq 15$. On peut constater qu'un grand nombre de ces courbes s'intersectent sur les droites verticales $c = \frac{1}{2}$ et $c = \frac{7}{10}$, les deux chargés centraux des modèles minimaux $\mathcal{M}(4, 3)$ et $\mathcal{M}(5, 4)$ que l'on va étudier au chapitre quatre.

La figure 2.5(b), un agrandissement de la figure 2.5(a), montre plus clairement les intersections des premières courbes $C_{r,s}$. Les produits rs donnent le niveau des vecteurs singuliers présents dans les sous-modules inférieurs. On peut se demander quelle est la relation entre cette multitude de courbes d'annulation et les trois courbes d'annulation de la figure 2.3. Les équations (2.7.4) et (2.7.5) permettent de répondre à cette question de manière explicite : pour un entier m plus grand que deux, elles donnent la série



(a) Courbes $C_{r,s}$, $1 \leq r \leq 20$, $1 \leq s \leq 15$, $0 \leq c \leq 1$ (b) Courbes $C_{r,s}$, $1 \leq r \leq 7$, $1 \leq s \leq 2$, $0,40 \leq c \leq 0,60$

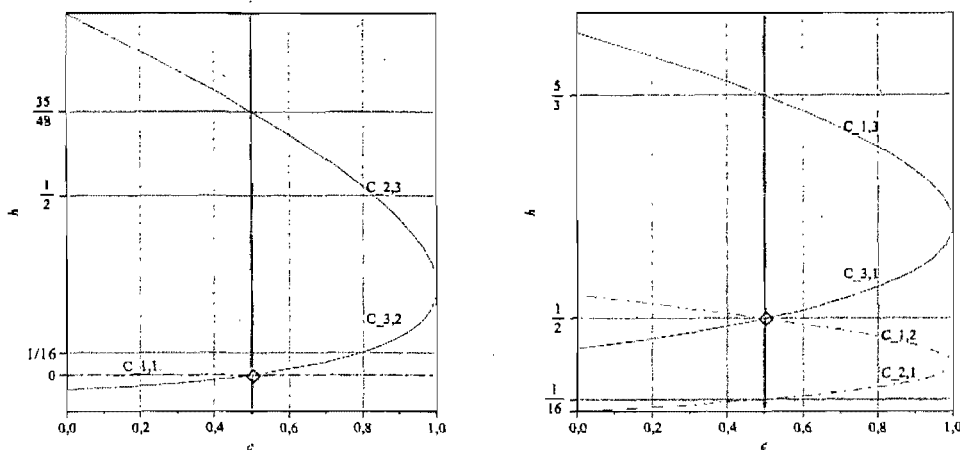
FIG. 2.5. Intersections multiples des courbes $C_{r,s}$ dans le plan (c, h)

des paires $(c(m), h_{r,s}(m))$ qui constituent, on le rappelle, une sous-famille de la série discrète (2.7.1) et (2.7.2). Si on limite les paramètres r et s aux valeurs permises par la table de Kac, à savoir $1 \leq r < p'$ et $1 \leq s < p$, ces paires coïncident alors avec les *premières intersections* des courbes $C_{r,s}$ dans le premier quadrant du plan (c, h) . Ainsi, le tableau 2.5 permet de vérifier la concordance entre les niveaux rs et $(p' - r)(p - s)$ d'une part, et les trois points particuliers $(c = \frac{1}{2}, h = 0)$, $(c = \frac{1}{2}, h = \frac{1}{2})$, $(c = \frac{1}{2}, h = \frac{1}{16})$ représentés par un losange à la figure 2.6 ((a) à (c)) d'autre part. Ces points sont issus des premières intersections des courbes $C_{r,s}$. On vérifie que les niveaux rs des courbes $C_{r,s}$ de premières intersections sont bien ceux prévus par les bornes r et s des équations (2.7.4) regroupés dans le tableau 2.5 ci-dessous.

Définition 2.8.1. *Les représentations unitaires de Vir sont les représentations ne contenant pas de vecteurs ayant une norme négative ou nulle par rapport à la forme de Shapovalov.*

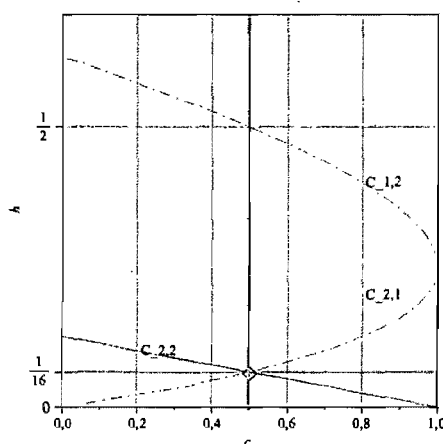
Hypothèse :Unitarité.

Les représentations de Vir intervenant dans la description des phénomènes critiques sont unitaires. (Il est maintenant connu que cette hypothèse est trop restrictive, mais on se limitera à l'étude de modèles pour lesquels elle est vraie).



(a) Première intersection des courbes $C_{1,1}$ et $C_{2,3}$ en $\left\{c = \frac{1}{2}, h = 0\right\}$

(b) Première intersection des courbes $C_{2,1}$ et $C_{1,3}$ en $\left\{c = \frac{1}{2}, h = \frac{1}{2}\right\}$



(c) Première intersection des courbes $C_{1,2}$ et $C_{2,2}$ en $\left\{c = \frac{1}{2}, h = \frac{1}{16}\right\}$

FIG. 2.6. Première intersection de courbes $C_{r,s}$

Remarques 2.8.1. *Tout d'abord, il a été prouvé que les représentations irréductibles de la série discrète de Friedan-Qiu-Shenker lorsque $0 < c < 1$ sont toujours unitaires, et que ce sont les seules à l'être. On note ensuite que la moitié du tableau 2.5 est redondant, ce que corrobore l'équation (2.7.3). Pour finir, les vecteurs singuliers issus des premières intersections sont les vecteurs de $\text{ph}p$ d'une représentation qui contient à son tour un vecteur singulier, et ainsi de suite. La paire de vecteurs singuliers de niveau rs et $(p-r)(p-s)$ donne donc de l'information sur la structure du sous-module irréductible $M_{(r,s)}$. La fonction génératrice $\chi_{M_{(c,h)}}^{(i)}$ des dimensions des sous-espaces $M_{r,s}^{(i)}$ que*

r	1	1	2	2	3	3
s	1	2	1	2	1	2
$h_{r,s}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2}$	0
rs	1	2	2	4	3	6
$(p' - r)(p - s)$	6	3	4	2	2	1

TAB. 2.5. Niveaux des vecteurs singuliers permis par la série discrète de Friedan-Qiu-Shenker pour $(p, p') = (4, 3)$, avec $c \approx \frac{1}{2}$

l'on appelle le caractère (voir [FMS97]) caractérise justement la structure complète des modules $M_{r,s}$. Cette fonction est définie pour z dans \mathbb{C} par

$$\chi_{M_{(c,h)}}(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} z^{h+n} \dim(M_{(c,h)}^{(n)}), \quad (2.8.1)$$

où \dim est l'abréviation de dimension.

On portera notre attention sur les vecteurs singuliers de niveau rs et $(p' - r)(p - s)$. En effet, ce sont ces paires de vecteurs singuliers que l'on va rechercher activement au chapitre 4. La connaissance de ces vecteurs permettra de faire le lien entre certains modèles classiques de physique statistique et les premiers modèles minimaux de la théorie des champs conformes.

Pour pouvoir pousser plus loin l'étude des modèles explorés, un dernier outils est nécessaire. La théorie des champs conformes et l'identité de Ward vont fournir le moyen de calculer des équations différentielles provenant de vecteurs singuliers.

Chapitre 3

THÉORIE DES CHAMPS CONFORMES

*Lorsque quelque chose a été dit et bien dit, n'aie pas de scrupules.
Prends-le et copie-le.*

Mark Twain (1835 – 1910)

On va étudier les fonctions de corrélation à 2, 3 et 4 points. L'identité de Ward permet de construire des opérateurs différentiels qui, lorsqu'ils sont appliqués à une fonction de corrélation à 4 points, donnent naissance à des équations différentielles.

3.1. FONCTIONS DE CORRÉLATION

En mécanique statistique, l'étude des fonctions de corrélation permet de mieux apprécier le comportement près du point critique d'un système comportant un très grand nombre de particules. En théorie des champs conformes, ces fonctions de corrélation sont fortement contraintes par les structures algébriques. En utilisant l'invariance sous les transformations conformes en deux dimensions, on va déterminer précisément la forme des fonctions de corrélation à deux et trois points. Les fonctions de corrélation à quatre points étant quant à elles sous-déterminées, on se contentera de donner l'une des formes possibles qu'elles peuvent prendre.

3.1.1. Fonctions de corrélation à deux points

Une des hypothèses à la base de la théorie des champs conformes posée par Belavin, Polyakov et Zamolodchikov est la suivante :

Hypothèse: *invariance conforme.*

Les phénomènes critiques sont invariants sous les transformations conformes.

En deux dimensions, la transformation conforme (bijective) de la sphère de Riemann sur elle-même appliquée à un point \mathbf{x} peut être représentée par une matrice carrée comme on l'a vu proposition 1.4.1

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.1.1)$$

Ceci peut aussi s'exprimer en prenant le rapport des éléments des vecteurs colonnes :

$$\mathbf{x}' = \frac{\mathbf{x}'}{1} = \frac{a\mathbf{x} + b}{c\mathbf{x} + d}. \quad (3.1.2)$$

On va utiliser la notation compacte $\left| \frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial \mathbf{x}} \right| = \left| \frac{\partial(x'_1, x'_2)}{\partial(x_1, x_2)} \right|$ pour désigner le déterminant de la matrice jacobienne d'une transformation conforme. On trouve ainsi que pour une translation $\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{z}' + \mathbf{t} = x_1 + t_1 + i(x_2 + t_2)$, le déterminant de la matrice jacobienne est égal à un, puisque

$$\left| \frac{\partial \mathbf{z}'}{\partial \mathbf{z}} \right| = \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 1$$

On peut par la suite mettre à profit l'équation (4.48) dans [FMS97], qui est une conséquence directe de l'hypothèse d'invariance conforme. Cette équation décrit la loi de transformation d'une fonction de corrélation à deux points qui, si les champs Φ_1, Φ_2 sont respectivement de poids conformes Δ_1, Δ_2 , se lit

$$\langle \Phi_1(\mathbf{x}_1) \Phi_2(\mathbf{x}_2) \rangle = \left| \frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_1}^{\frac{\Delta_1}{2}} \left| \frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_2}^{\frac{\Delta_2}{2}} \langle \Phi_1(\mathbf{x}'_1) \Phi_2(\mathbf{x}'_2) \rangle. \quad (3.1.3)$$

Dans le cas de la translation, on obtient donc $\langle \Phi_1(\mathbf{x}_1) \Phi_2(\mathbf{x}_2) \rangle = (1)(1) \langle \Phi_1(\mathbf{x}'_1) \Phi_2(\mathbf{x}'_2) \rangle$. On en conclut que la fonction de corrélation à deux points ne dépend que de la différence entre ces points, c'est-à-dire : $\langle \Phi_1(\mathbf{x}_1) \Phi_2(\mathbf{x}_2) \rangle = f(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$.

Le déterminant de la matrice jacobienne d'une rotation $\mathbf{z} \rightarrow e^{i\theta} \mathbf{z}$ est lui aussi égal à un, puisque

$$\left| \frac{\partial \mathbf{z}'}{\partial \mathbf{z}} \right| = \left| \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \right| = 1.$$

On constate alors que

$$f(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \langle \Phi_1(\mathbf{x}_1) \Phi_2(\mathbf{x}_2) \rangle = (1)(1) \langle \Phi_1(\mathbf{x}'_1) \Phi_2(\mathbf{x}'_2) \rangle = f(e^{i\theta}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)),$$

et on conclut cette fois que la fonction de corrélation à deux points ne dépend que de la distance entre ces points. Si l'on choisit $\langle \Phi_1(\mathbf{x}_1)\Phi_2(\mathbf{x}_2) \rangle = f(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|)$, on impose une contrainte additionnelle compatible avec la contrainte précédente.

Le déterminant de la matrice jacobienne d'une transformation d'échelle (dilatation ou rétrécissement) $\mathbf{z} \rightarrow k\mathbf{z}$ pour $k > 0$ est différent de 1 en général. En effet,

$$\left| \frac{\partial \mathbf{z}'}{\partial \mathbf{z}} \right| = \left| \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \right| = k^2.$$

La condition d'invariance (3.1.3) pour cette famille de transformation se lit

$$\begin{aligned} f(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|) &= \langle \Phi_1(\mathbf{x}_1)\Phi_2(\mathbf{x}_2) \rangle \\ &= \left| \frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_1}^{\Delta_1} \left| \frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_2}^{\Delta_2} \langle \Phi_1(\mathbf{x}'_1)\Phi_2(\mathbf{x}'_2) \rangle \\ &= k^{\Delta_1 + \Delta_2} f(k|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|). \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

Ainsi, f est une fonction homogène de son argument, ce qui force la fonction de corrélation à être de la forme

$$\langle \Phi_1(\mathbf{x}_1)\Phi_2(\mathbf{x}_2) \rangle = \frac{C_{12}}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^{\Delta_1 + \Delta_2}}, \quad (3.1.5)$$

où C_{12} est une constante qui dépend des deux points $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$. On note que cette condition est aussi compatible avec les contraintes précédentes.

Pour exprimer les relations qui lient les fonctions de corrélation sur les champs primaires subissant une transformation conforme, il reste à considérer les transformations conformes spéciales. Si l'on fixe $a = d = 1$ et $b = 0$ dans (3.1.2), obtenant

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (3.1.6)$$

la transformation conforme spéciale se lit alors

$$\mathbf{x}' = \frac{\mathbf{x}}{c\mathbf{x} + 1}. \quad (3.1.7)$$

Il faut aussi calculer le déterminant de la matrice jacobienne de cette transformation. Quelques définitions vont être nécessaires avant de pouvoir procéder au calcul.

Définition 3.1.1. Le facteur de dilatation γ est donné par $(1 - 2 \mathbf{B} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B}^2 \mathbf{x}^2)$ où

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{B} \cdot \mathbf{x} = b_1 x_1 + b_2 x_2 \text{ (le produit scalaire de } \mathbf{B} \text{ et } \mathbf{x}\text{),} \\ \mathbf{x}^2 = x_1^2 + x_2^2 \text{ et } \mathbf{B}^2 = b_1^2 + b_2^2. \end{array} \right.$$

On définit finalement c le nombre complexe de la transformation conforme spéciale (3.1.7) par $c = -b_1 + ib_2$.

Proposition 3.1.1. Le déterminant de la matrice jacobienne d'une transformation conforme spéciale dans un espace physique de dimension deux est égal à l'inverse du carré du facteur de dilatation γ , ce qui se lit

$$\left| \frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial \mathbf{x}} \right| = \left| \frac{\partial(x'_1, x'_2)}{\partial(x_1, x_2)} \right| = \frac{1}{\gamma^2}. \quad (3.1.8)$$

Démonstration

L'équation (4.15) dans [FMS97] donne l'expression des composantes de \mathbf{x} après une transformation conforme. Dans le cas d'une transformation conforme spéciale, on lit

$$\mathbf{x}'^\mu = \frac{\mathbf{x}^\mu - \mathbf{B}^\mu \mathbf{x}^2}{(1 - 2 \mathbf{B} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B}^2 \mathbf{x}^2)}. \quad (3.1.9)$$

Passant de la notation tensorielle à une notation avec des indices inférieurs, on obtient les deux fonctions pour les composantes

$$\left\{ \begin{array}{l} x'_1 = \frac{x_1 - b_1 \mathbf{x}^2}{(1 - 2 \mathbf{B} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B}^2 \mathbf{x}^2)} \\ x'_2 = \frac{x_2 - b_2 \mathbf{x}^2}{(1 - 2 \mathbf{B} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B}^2 \mathbf{x}^2)} \end{array} \right. \quad (3.1.10)$$

On calcule la dérivée partielle

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} &= \frac{1 - 2b_1 x_1}{1 - 2b_1 x_1 - 2b_2 x_2 + (b_1^2 + b_2^2)(x_1^2 + x_2^2)} \\
 &= \frac{(x_1 - b_1(x_1^2 + x_2^2))(-2b_1 + 2(b_1^2 + b_2^2)x_1)}{(1 - 2b_1 x_1 - 2b_2 x_2 + (b_1^2 + b_2^2)(x_1^2 + x_2^2))^2} \\
 &= \frac{(b_1 x_1 + b_2 x_1 - 1 - b_1 x_2 + b_2 x_2)(b_1 x_1 - b_2 x_1 - 1 + b_1 x_2 + b_2 x_2)}{(1 - 2b_1 x_1 - 2b_2 x_2 + b_1^2 x_1^2 + b_1^2 x_2^2 + b_2^2 x_1^2 + b_2^2 x_2^2)^2} \\
 &= \frac{(b_1 x_1 + b_2 x_1 - 1 - b_1 x_2 + b_2 x_2)(b_1 x_1 - b_2 x_1 - 1 + b_1 x_2 + b_2 x_2)}{\gamma^2}.
 \end{aligned}$$

Les trois autres dérivées partielles se calculent de manière similaire. On peut alors calculer le déterminant de la matrice déterminant de la matrice jacobienne :

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial \mathbf{x}} \right| &= \frac{1}{(1 - 2b_1 x_1 - 2b_2 x_2 + b_1^2 x_1^2 + b_1^2 x_2^2 + b_2^2 x_1^2 + b_2^2 x_2^2)^2} \\
 &= \frac{1}{(1 - 2\mathbf{B} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B}^2 \mathbf{x}^2)^2} \\
 &= \frac{1}{\gamma^2}.
 \end{aligned} \tag{3.1.11}$$

□

Remarque 3.1.1. En fait, il est possible de montrer que (3.1.8) s'écrit dans le cas général

$$\left| \frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial \mathbf{x}} \right| = \frac{1}{(1 - 2\mathbf{B} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B}^2 \mathbf{x}^2)^d}, \tag{3.1.12}$$

où d représente la dimension de l'espace physique. On retrouve bien $d = 2$ dans le cas qui nous intéresse.

Utilisant (3.1.3), (3.1.5) et (3.1.11), on calcule

$$\begin{aligned}
\frac{C_{12}}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^{\Delta_1 + \Delta_2}} &= \langle \Phi_1(\mathbf{x}_1) \Phi_2(\mathbf{x}_2) \rangle \\
&= \left| \frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_1}^{\frac{\Delta_1}{2}} \left| \frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_2}^{\frac{\Delta_2}{2}} \langle \Phi_1(\mathbf{x}'_1) \Phi_2(\mathbf{x}'_2) \rangle \\
&= \left| \frac{1}{\gamma^2} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_1}^{\frac{\Delta_1}{2}} \left| \frac{1}{\gamma^2} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_2}^{\frac{\Delta_2}{2}} \langle \Phi_1(\mathbf{x}'_1) \Phi_2(\mathbf{x}'_2) \rangle \\
&= \frac{1}{\gamma_1^{\Delta_1} \gamma_2^{\Delta_2}} \langle \Phi_1(\mathbf{x}'_1) \Phi_2(\mathbf{x}'_2) \rangle \\
&= \frac{C_{12}}{\gamma_1^{\Delta_1} \gamma_2^{\Delta_2} |\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}'_2|^{\Delta_1 + \Delta_2}}.
\end{aligned} \tag{3.1.13}$$

Si l'on identifie \mathbf{x} dans \mathbb{R}^2 avec $x_1 + ix_2$ dans \mathbb{C} , d'une part, et que l'on utilise la définition pour c donnée en 3.1.1 ($c = -b_1 + ib_2$) d'autre part, on calcule alors que

$$\begin{aligned}
c\mathbf{x} &= (-b_1 + ib_2)(x_1 + ix_2) \\
&= -b_1x_1 - b_2x_2 + i(-b_1x_2 + b_2x_1),
\end{aligned}$$

et donc que

$$\begin{aligned}
|c\mathbf{x} + 1|^2 &= (1 - (b_1x_1 + b_2x_2))^2 + (-b_1x_2 + b_2x_1)^2 \\
&= 1 - 2(b_1x_1 + b_2x_2) + (b_1x_1)^2 + 2b_1b_2x_1x_2 \\
&\quad + (b_2x_2)^2 + (b_1x_2)^2 - 2b_1b_2x_1x_2 + (b_2x_1)^2 \\
&= 1 - 2(b_1x_1 + b_2x_2) + (b_1^2 + b_2^2)(x_1^2 + x_2^2) \\
&= 1 - 2\mathbf{B} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B}^2 \mathbf{x}^2 \\
&= \gamma
\end{aligned} \tag{3.1.14}$$

Avec \mathbf{x}' donné par la transformation conforme spéciale (3.1.7), le résultat (3.1.14) permet d'obtenir l'égalité

$$\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}'_2 = \frac{\mathbf{x}_1}{c\mathbf{x}_1 + 1} - \frac{\mathbf{x}_2}{c\mathbf{x}_2 + 1} = \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{(c\mathbf{x}_1 + 1)(c\mathbf{x}_2 + 1)} = -\frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{\gamma_1^{\frac{1}{2}} \gamma_2^{\frac{1}{2}}}, \tag{3.1.15}$$

ou bien, en considérant les distances

$$|\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}'_2| = \left| \frac{\mathbf{x}_1}{c\mathbf{x}_1 + 1} - \frac{\mathbf{x}_2}{c\mathbf{x}_2 + 1} \right| = \left| \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{(c\mathbf{x}_1 + 1)(c\mathbf{x}_2 + 1)} \right| = \frac{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|}{\gamma_1^{\frac{1}{2}} \gamma_2^{\frac{1}{2}}}. \tag{3.1.16}$$

Combinant finalement (3.1.13) et (3.1.16), on obtient une contrainte supplémentaire sur la fonction de corrélation à deux points :

$$\frac{C_{12}}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^{\Delta_1 + \Delta_2}} = \frac{C_{12}(\gamma_1 \gamma_2)^{\frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2}}}{\gamma_1^{\Delta_1} \gamma_2^{\Delta_2} |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^{\Delta_1 + \Delta_2}}. \quad (3.1.17)$$

On trouve finalement que la forme de la fonction de corrélation à deux points est

$$\langle \Phi_1(\mathbf{x}_1) \Phi_2(\mathbf{x}_2) \rangle = \begin{cases} \frac{C_{12}}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^{2\Delta_1}}, & \text{si } \Delta_1 = \Delta_2, \\ 0, & \text{si } \Delta_1 \neq \Delta_2. \end{cases} \quad (3.1.18)$$

3.1.2. Fonctions de corrélation à trois points

En suivant la ligne directrice de la section précédente, on va chercher la forme d'une fonction de corrélation à trois points. On introduit pour cela la notation $x_{ij} = |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|$. Si l'on impose l'invariance sous translation et rotation avec trois points x_1, x_2 et x_3 , on voit que la forme de la fonction de corrélation doit être

$$\langle \Phi_1(\mathbf{x}_1) \Phi_2(\mathbf{x}_2) \Phi_3(\mathbf{x}_3) \rangle = f(x_{12}, x_{13}, x_{23}).$$

Si l'on ajoute l'invariance sous dilatation, on aboutit alors à une contrainte pour une fonction à trois points similaire à (3.1.4) :

$$f(x_{12}, x_{13}, x_{23}) = k^{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3} f(kx_{12}, kx_{13}, kx_{23}).$$

On en conclut qu'à une constante C_{123}^{abc} près, toute fonction de corrélation à trois points de la forme

$$\langle \Phi_1(\mathbf{x}_1) \Phi_2(\mathbf{x}_2) \Phi_3(\mathbf{x}_3) \rangle = \frac{C_{123}^{abc}}{x_{12}^a x_{23}^b x_{13}^c} \quad (3.1.19)$$

fonctionnera avec la condition supplémentaire que le triplet $\{a, b, c\}$ soit tel que $a + b + c = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3$, avec Δ_1, Δ_2 et Δ_3 les poids conformes des champs Φ_1, Φ_2 et Φ_3 respectivement.

Considérant enfin les transformations conformes spéciales, on trouve en procédant comme pour (3.1.17) l'égalité

$$\frac{C_{123}^{abc}}{x_{12}^a x_{23}^b x_{13}^c} = \frac{C_{123}^{abc}}{\gamma_1^{\Delta_1} \gamma_2^{\Delta_2} \gamma_3^{\Delta_3}} \frac{(\gamma_1 \gamma_2)^{\frac{a}{2}} (\gamma_2 \gamma_3)^{\frac{b}{2}} (\gamma_1 \gamma_3)^{\frac{c}{2}}}{x_{12}^a x_{23}^b x_{13}^c}. \quad (3.1.20)$$

L'équation (3.1.20) impose le système de contraintes :

$$\begin{cases} a + c = 2\Delta_1 \\ a + b = 2\Delta_2 \\ b + c = 2\Delta_3. \end{cases} \quad (3.1.21)$$

dont l'unique solution est

$$\begin{cases} a = \Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 \\ b = -\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 \\ c = \Delta_1 - \Delta_2 + \Delta_3. \end{cases} \quad (3.1.22)$$

Ainsi, comme dans le cas de la fonction de corrélation à deux points, on obtient pour la fonction de corrélation à trois points une forme explicite :

$$\langle \Phi_1(\mathbf{x}_1)\Phi_2(\mathbf{x}_2)\Phi_3(\mathbf{x}_3) \rangle = \frac{C_{123}^{\Delta_1+\Delta_2-\Delta_3, -\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3, \Delta_1-\Delta_2+\Delta_3}}{x_{12}^{\Delta_1+\Delta_2-\Delta_3} x_{23}^{-\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3} x_{13}^{\Delta_1-\Delta_2+\Delta_3}}. \quad (3.1.23)$$

3.1.3. Fonctions de corrélation à quatre points

S'il est possible de déterminer explicitement la forme des fonctions de corrélation à deux et trois points, il en va différemment pour les fonctions de corrélation à quatre points. On va introduire la fonction de rapport croisé et étudier son impact sur les fonctions de corrélation à quatre points. On donnera ensuite une forme possible de fonction de corrélation à quatre points.

3.1.3.1. Invariance sous transformation conforme et fonction de rapport croisé

On va utiliser ici la notation (g, \mathbf{x}_n) pour dénoter l'action de groupe $SL(2; \mathbb{C}) \times (\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ introduite à la proposition 1.4.1. Par exemple, si r est la matrice de rotation $\begin{bmatrix} e^{\frac{i\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\theta}{2}} \end{bmatrix}$ de $SL(2; \mathbb{C})$, son action sur \mathbf{x}_n est alors notée

$$(r, \mathbf{x}_n) = \left(\begin{bmatrix} e^{\frac{i\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\theta}{2}} \end{bmatrix}, \mathbf{x}_n \right) = \frac{e^{\frac{i\theta}{2}} \mathbf{x}_n}{e^{-\frac{i\theta}{2}}} = e^{i\theta} \mathbf{x}_n. \quad (3.1.24)$$

On calcule ensuite la différence $(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m)$ entre deux points après une transformation de rotation :

$$(r, \mathbf{x}_n) - (r, \mathbf{x}_m) = e^{i\theta} (\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m). \quad (3.1.25)$$

Soit (t, \mathbf{x}_n) l'action de la matrice de translation $t = \begin{bmatrix} 1 & a + ib \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ sur le point \mathbf{x}_n . Le calcul

$$(t, \mathbf{x}_n) - (t, \mathbf{x}_m) = (\mathbf{x}_n + a + ib) - (\mathbf{x}_m + a + ib) = \mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m \quad (3.1.26)$$

permet de vérifier l'invariance sous translation de la différence entre deux points.

Le changement d'échelle – dilatation – est obtenu par l'action de la matrice $d = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$. La différence entre deux points n'est pas invariante sous dilatation. Pour obtenir un objet invariant, il suffit de prendre le rapport des deux différences. On vérifie aisément que

$$\frac{(d, \mathbf{x}_i) - (d, \mathbf{x}_j)}{(d, \mathbf{x}_k) - (d, \mathbf{x}_l)} = \frac{\lambda^2 \mathbf{x}_i - \lambda^2 \mathbf{x}_j}{\lambda^2 \mathbf{x}_k - \lambda^2 \mathbf{x}_l} = \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j}{\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_l}. \quad (3.1.27)$$

Finalement, on notera tcs la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}$ qui génère les transformations conformes spéciales. En utilisant (3.1.15), on peut exprimer $\mathbf{x}'_n - \mathbf{x}'_m$, la différence entre deux points \mathbf{x}_n et \mathbf{x}_m transformés par tcs sous la forme

$$\mathbf{x}'_n - \mathbf{x}'_m = -\frac{\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m}{\gamma_n^{\frac{1}{2}} \gamma_m^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.1.28)$$

On va maintenant se servir de (3.1.28) pour montrer qu'il existe une fonction, appelée de rapport croisé, invariante sous toutes les transformations incluses dans $SL(2; \mathbb{C})$, y compris donc les transformations conformes spéciales. On réalise par inspection qu'il faut au moins quatre points distincts pour construire une telle fonction, ce qui est pourquoi elle n'entre en jeu que maintenant. La fonction de rapport croisé est donnée explicitement par

$$\mathbf{z} := \mathbf{z}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) = \frac{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_4)}{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_4)(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2)}. \quad (3.1.29)$$

On note que cette fonction n'est pas unique et que cinq autres candidates sont obtenues en permutant les indices au numérateur et au dénominateur, et en considérant les inverses multiplicatifs. On se restreindra à (3.1.29) pour les calculs à venir. On vérifie

l'invariance du rapport croisé (3.1.29) sous transformation conforme spéciale :

$$\begin{aligned} \frac{((tcs, \mathbf{x}_1) - (tcs, \mathbf{x}_2))((tcs, \mathbf{x}_3) - (tcs, \mathbf{x}_4))}{((tcs, \mathbf{x}_1) - (tcs, \mathbf{x}_4))((tcs, \mathbf{x}_3) - (tcs, \mathbf{x}_2))} &= \frac{\gamma_1^{\frac{1}{2}} \gamma_4^{\frac{1}{2}} \gamma_3^{\frac{1}{2}} \gamma_2^{\frac{1}{2}} (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_4)}{\gamma_1^{\frac{1}{2}} \gamma_2^{\frac{1}{2}} \gamma_3^{\frac{1}{2}} \gamma_4^{\frac{1}{2}} (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_4)(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2)} \\ &= \frac{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_4)}{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_4)(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2)}. \end{aligned} \quad (3.1.30)$$

On remarque aussi que le rapport croisé donne aussi l'invariance sous rotation, puisque les coefficients $e^{i\theta}$ de (3.1.25) se simplifient lorsqu'on les applique à (3.1.29).

3.1.3.2. Une fonction de corrélation à quatre points parmi d'autres

On vient de constater qu'à partir de quatre points, les fonctions de corrélation peuvent présenter une dépendance arbitraire au rapport croisé. Les fonctions de corrélation peuvent donc s'écrire sous la forme

$$\langle \Phi_1(\mathbf{x}_1) \Phi_2(\mathbf{x}_2) \Phi_3(\mathbf{x}_3) \Phi_4(\mathbf{x}_4) \rangle = \prod_{1 \leq i < j \leq 4} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)^{\mu_{ij}} f(\mathbf{z}), \quad (3.1.31)$$

où la fonction f tient le rôle joué par la constante C des fonctions à deux et trois points étudiées lors des deux sections précédentes. La fonction f est quelconque et ne dépend que du rapport croisé \mathbf{z} . On a choisi ici d'écrire le préfacteur $\prod_{1 \leq i < j \leq 4} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)^{\mu_{ij}}$ au numérateur par commodité de notation. En procédant comme pour les équations (3.1.17) et (3.1.20), on obtient en imposant l'invariance sous les transformations conformes à la fonction de corrélation à quatre points, la condition :

$$\prod_{1 \leq i < j \leq 4} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)^{\mu_{ij}} f(\mathbf{z}) = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq 4} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)^{\mu_{ij}} f(\mathbf{z})}{\prod_{i=1}^4 \gamma_i^{\Delta_i} \prod_{1 \leq i < j \leq 4} (\gamma_i \gamma_j)^{\frac{\mu_{ij}}{2}}}. \quad (3.1.32)$$

Pour que l'équation (3.1.32) soit vérifiée, il va nous falloir égaliser les exposants des γ . On obtient alors le système sous déterminé

$$\begin{cases} \mu_{12} + \mu_{13} + \mu_{14} = -2\Delta_1 \\ \mu_{12} + \mu_{23} + \mu_{24} = -2\Delta_2 \\ \mu_{13} + \mu_{23} + \mu_{34} = -2\Delta_3 \\ \mu_{14} + \mu_{24} + \mu_{34} = -2\Delta_4. \end{cases} \quad (3.1.33)$$

La somme des quatre équations ainsi obtenues donne $2 \sum_{j<i} \mu_{ij} = -2 \sum_{i=1}^4 \Delta_i$. On va définir

$$\Delta = \sum_{i=1}^4 \Delta_i. \quad (3.1.34)$$

Si l'on impose une condition supplémentaire à (3.1.33), on trouve alors des solutions paramétrées par l'ensemble des Δ_i . A titre d'exemple, la contrainte $\mu_{ij} = \frac{\Delta}{3} - \Delta_i - \Delta_j$ donne une solution à (3.1.33) une fois les Δ_i fixés. On calcule le cas $i = 1$ explicitement

$$\begin{cases} \mu_{12} = \frac{\Delta}{3} - \Delta_1 - \Delta_2, \\ \mu_{13} = \frac{\Delta}{3} - \Delta_1 - \Delta_3, \\ \mu_{14} = \frac{\Delta}{3} - \Delta_1 - \Delta_4, \end{cases} \quad (3.1.35)$$

$$\mu_{12} + \mu_{13} + \mu_{14} = \Delta - 3\Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3 - \Delta_4 = -2\Delta_1$$

et l'on constate que la première des équations de (3.1.33) est vérifiée : on confirme les trois autres équations de manière similaire. La fonction

$$\langle \Phi_1(\mathbf{x}_1) \Phi_2(\mathbf{x}_2) \Phi_3(\mathbf{x}_3) \Phi_3(\mathbf{x}_4) \rangle = \prod_{1 \leq i < j \leq 4} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)^{\frac{\Delta}{3} - \Delta_i - \Delta_j} f \left(\frac{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_4)}{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_4)(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2)} \right). \quad (3.1.36)$$

est donc une fonction de corrélation à quatre points possible. On traitera une telle fonction à la section 4.3.3, et une autre fonction de corrélation calculée avec d'autres choix d'exposants μ_{ij} à la section 4.3.4.

Remarque 3.1.2. Lorsque l'on abordera les calculs sur ces fonctions, on suivra les notations en vigueur dans le domaine. Ainsi, le symbole Δ_i , caractérisant le champ Φ_i , provenant de l'hypothèse d'invariance conforme sera remplacé par la notation h_i désignant le poids de la représentation de \mathfrak{sl}_2 caractérisant le champ Φ_i .

On connaît maintenant la forme que peut prendre une fonction de corrélation à quatre points. Pour calculer des équations différentielles sur cette fonction, il va falloir un opérateur, qui sera donné par l'identité de Ward. C'est l'objet de la prochaine section.

3.2. L'IDENTITÉ DE WARD

L'existence des vecteurs singuliers contraint beaucoup les fonctions de corrélation des théories physiques. Ces fonctions de corrélation sont invariantes sous les transformations conformes. Le lien entre vecteurs singuliers et fonctions de corrélation, deux objets a priori éloignés, se fait par l'entremise de l'identité de Ward.

3.2.1. Les fonctions de corrélation et l'identité de Ward

La section précédente a permis de montrer comment les fonctions de corrélation à 2, 3 et 4 points sont contraintes par l'invariance sous les transformations conformes $z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc = 1$, qui incluent translation, dilatation, rotation et transformation conforme spéciale.

Un argument physique basé sur la théorie des champs quantiques dans la formulation des intégrales de chemin (voir [FMS97], section 2.4.3) permet de généraliser ce résultat aux fonctions à n points $\langle \Phi_1(\mathbf{x}_1)\Phi_2(\mathbf{x}_2)\dots\Phi_n(\mathbf{x}_n) \rangle$, $n \geq 4$, et à toutes les transformations conformes infinitésimales l_i . Le résultat est encore plus fin, car il s'applique au cas où un seul des champs de la fonction à n points est transformé. Soient $\Phi_i, i = 1, 2, \dots, n+1$, des champs primaires de poids conformes h_i , le résultat, connu sous le nom d'*identité de Ward*, prend alors la forme

$$\langle (l_r \Phi_1)(\mathbf{z}_1)\Phi_2(\mathbf{z}_2)\dots\Phi_{n+1}(\mathbf{z}_{n+1}) \rangle = \mathcal{L}_r \langle \Phi_1(\mathbf{z}_1)\Phi_2(\mathbf{z}_2)\dots\Phi_{n+1}(\mathbf{z}_{n+1}) \rangle, \quad (3.2.1)$$

où \mathcal{L}_r est l'opérateur différentiel

$$\mathcal{L}_r = \sum_{i=2}^{n+1} \left\{ \frac{(r-1)h_i}{(z_i - z_1)^r} - \frac{1}{(z_i - z_1)^{r-1}} \partial_{z_i} \right\}, \quad \text{si } r \geq 0. \quad (3.2.2)$$

Remarques 3.2.1. *Tout d'abord les fonctions de corrélation dans (3.2.1) sont à $n+1$ points. Puisque le premier point est singularisé, ce choix est naturel. On note ensuite que les h_i intervenant dans (3.2.2) sont les poids conformes des champs $\Phi_i(z_i), i = 1, \dots, n$. On note également que la forme (3.2.1) n'est valide que pour les champs quantiques "primaires", une notion que l'on ne définira pas de façon formelle (le concept de champ primaire est défini dans [FMS97]). On supposera néanmoins que tous les champs intervenant dans ce qui suit sont primaires. Finalement, l'identité de Ward (3.2.1) n'est valide que pour les générateurs de $Vir^- = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{C}l_{-i}$ et l_0 .*

3.2.2. La famille d'opérateurs différentiels \mathcal{L}_r , comme représentation de Vir^+

L'argument menant aux équations (3.2.1) et (3.2.2) repose sur les intégrales de chemin ; il mènerait fort loin du sujet de ce mémoire. Plutôt que de reproduire cet argument, on se limitera à constater que la forme (3.2.1) induit une représentation de Vir^+ sur un espace fonctionnel. La proposition suivante, bien que ne donnant pas la provenance physique de (3.2.1) et (3.2.2), les justifie mathématiquement.

Proposition 3.2.1. *Soient h_2, h_3, \dots, h_{n+1} , des constantes, et \mathcal{O} dans \mathbb{C}^{n+1} un ouvert contenant les points z_1, z_2, \dots, z_{n+1} . Soit $C^2(\mathcal{O}' \rightarrow \mathbb{C})$ l'espace des fonctions deux fois dérivables sur l'ensemble ouvert \mathcal{O}' obtenu en retirant de \mathcal{O} les hyperplans où deux des coordonnées coïncident. Alors l'application ρ telle que $l_r \mapsto \rho(l_r) = \mathcal{L}_r$, pour tout n dans \mathbb{N} , est une représentation de Vir^+ sur l'espace vectoriel $C^2(\mathcal{O}' \rightarrow \mathbb{C})$.*

Démonstration

L'application ρ est clairement linéaire. Il reste à vérifier que $[\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m] = (m - n)\mathcal{L}_{m+n}$, pour $n \neq m$. On suppose que le commutateur agit sur une fonction de corrélation à k champs. Alors,

$$\begin{aligned}
[\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m] &= \sum_{i=2}^{k+1} \left\{ \frac{(n-1)h_i}{(z_i - z_1)^n} - \frac{1}{(z_i - z_1)^{n-1}} \partial_{z_i} \right\} \sum_{j=2}^{k+1} \left\{ \frac{(m-1)h_j}{(z_j - z_1)^m} - \frac{1}{(z_j - z_1)^{m-1}} \partial_{z_j} \right\} \\
&\quad - \sum_{j=2}^{k+1} \left\{ \frac{(m-1)h_j}{(z_j - z_1)^m} - \frac{1}{(z_j - z_1)^{m-1}} \partial_{z_j} \right\} \sum_{i=2}^{k+1} \left\{ \frac{(n-1)h_i}{(z_i - z_1)^n} - \frac{1}{(z_i - z_1)^{n-1}} \partial_{z_i} \right\} \\
&= \sum_{i,j} \left\{ \frac{\partial_{z_i}}{(z_i - z_1)^{n-1}} \left(\frac{\partial_{z_j}}{(z_j - z_1)^{m-1}} - \frac{(m-1)h_j}{(z_i - z_1)^m} \right) \right\} \\
&\quad - \sum_{i,j} \left\{ \frac{\partial_{z_j}}{(z_j - z_1)^{m-1}} \left(\frac{\partial_{z_i}}{(z_i - z_1)^{n-1}} - \frac{(n-1)h_i}{(z_i - z_1)^n} \right) \right\} \\
&= \sum_{i,j} \left\{ \frac{\delta_{ij}}{(z_i - z_1)^{n-1}} \left(\frac{-m+1}{(z_j - z_1)^m} \partial_{z_j} + \frac{m(m-1)h_j}{(z_i - z_1)^{m+1}} \right) \right\} \\
&\quad - \sum_{i,j} \left\{ \frac{\delta_{ij}}{(z_j - z_1)^{m-1}} \left(\frac{-n+1}{(z_i - z_1)^n} \partial_{z_i} - \frac{n(n-1)h_i}{(z_i - z_1)^{n+1}} \right) \right\} \\
&= \sum_i \left\{ \frac{h_i[m^2 - m - n^2 + n]}{(z_i - z_1)^{n+m}} + \frac{-m+n}{(z_i - z_1)^{n+m-1}} \partial_{z_i} \right\} \\
&= (m-n) \sum_i \left\{ \frac{(m+n-1)h_i}{(z_i - z_1)^{n+m}} - \frac{1}{(z_i - z_1)^{n+m-1}} \partial_{z_i} \right\}
\end{aligned}$$

$$[\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m] = (m - n)\mathcal{L}_{m+n}$$

□

3.2.3. L'invariance conforme en dimension 2 et l'identité de Ward

Le but de ce mémoire n'est pas de couvrir l'ensemble du cours de théorie des champs conformes. On peut néanmoins faciliter l'enchaînement des idées à l'aide d'un exemple. L'identité de Ward (3.2.1) et (3.2.2) valide pour les transformations conformes proches de l'identité donne naissance à un ensemble de contraintes qui reflètent l'invariance sous translation, dilatation et transformation conforme spéciale. On va s'intéresser à l'invariance sous translation pour mettre en évidence le lien entre l'invariance conforme et l'identité de Ward. Les physiciens affirment que l'on peut exprimer la variation infinitésimale d'une chaîne $\langle X \rangle$ de k champs primaires sous une transformation conforme infinitésimale $z \mapsto z' = z + \epsilon(z)$ par

$$\delta_\epsilon \langle X \rangle = - \sum_{i=1}^k (\epsilon(w_i) \partial_{w_i} + (\partial_{w_i} \epsilon(w_i)) h_i) \langle X \rangle. \quad (3.2.3)$$

Proposition 3.2.2. *La variation infinitésimale d'une transformation conforme globale $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc = 1$ est de la forme $\epsilon(z) = \beta + 2\alpha z - \gamma z^2$, pour α, β, γ trois constantes arbitraires.*

Démonstration

On va tout simplement obtenir le développement au premier ordre (en α, β , et γ) de la forme d'une transformation conforme globale :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{(1 + \alpha)z + \beta}{\gamma z + (1 - \alpha)} \\ &= ((1 + \alpha)z + \beta) \times \frac{1}{(1 - \alpha)} \times \frac{1}{1 + \frac{\gamma z}{(1 - \alpha)}} \\ &= ((1 + \alpha)z + \beta) \times (1 + \alpha + \dots) \times \left(1 - \frac{\gamma z}{(1 - \alpha)} + \dots\right) \\ &= (z + 2\alpha z + \beta + \dots) \times (1 - \gamma(1 + \alpha + \dots)z + \dots) \\ &= (z + 2\alpha z + \beta + \dots) \times (1 - \gamma z + \dots) \\ &\cong z + 2\alpha z + \beta - \gamma z^2 \\ &\cong z + \epsilon(z), \end{aligned}$$

ce qui est bien le résultat escompté. On note que la transformation $f(z)$ vérifie bien la condition $ad - bc = 1$ au premier ordre en α, β , et γ . \square

Maintenant, pour $\alpha = \gamma = 0$, et β non-nul, on note que la transformation infinitésimale $f(z) = z + \beta$ est de toute évidence une translation, et que $\epsilon(z) = \beta$. Avec ce choix des constantes α, β, γ , la relation (3.2.3) devient

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon \langle X \rangle &= - \sum_i (\epsilon(w_i) \partial_{w_i} + (\partial_{w_i} \epsilon(w_i)) h_i) \langle X \rangle \\ &= - \sum_i (\beta \partial_{w_i} + (\partial_{w_i} \beta) h_i) \langle X \rangle \\ &= -\beta \sum_i \partial_{w_i} \langle X \rangle, \end{aligned}$$

Étant donné que l'hypothèse d'invariance conforme a pour conséquence que

$$\delta_\epsilon \langle X \rangle = 0, \quad (3.2.4)$$

le calcul précédent mène alors à la contrainte

$$\sum_{i=1,2,\dots} \partial_{z_i} \langle \Phi_1(z_1) \Phi_2(z_2) \dots \rangle = 0. \quad (3.2.5)$$

Il va être utile par la suite de noter le fait suivant : \mathcal{L}_1 correspond à ∂_{z_1} . En utilisant l'équation (3.2.5) on obtient pour une fonction de corrélation à quatre points :

$$\{\partial_{z_1} + \partial_{z_2} + \partial_{z_3} + \partial_{z_4}\} \langle \Phi(z_1) \Phi(z_2) \Phi(z_3) \Phi(z_4) \rangle = 0 \quad (3.2.6)$$

ou encore

$$\partial_{z_1} \langle \Phi(z_1) \Phi(z_2) \Phi(z_3) \Phi(z_4) \rangle = - \sum_{i=2}^4 \partial_{z_i} \langle \Phi(z_1) \Phi(z_2) \Phi(z_3) \Phi(z_4) \rangle \quad (3.2.7)$$

$$= \mathcal{L}_1 \langle \Phi(z_1) \Phi(z_2) \Phi(z_3) \Phi(z_4) \rangle, \quad (3.2.8)$$

où la deuxième ligne est obtenue pour $n = 3$ (fonction de corrélation à 4 points) en utilisant (3.2.2) avec $r = 1$. Puisque l'on obtient le même résultat pour tout $n \geq 2$, on peut conclure que \mathcal{L}_1 correspond à ∂_{z_1} . La même démarche avec $\beta = \gamma = 0$, et α non-nul donne une contrainte reflétant l'invariance sous les transformations de dilatation liée à l'opérateur \mathcal{L}_0 . En procédant avec $\alpha = \beta = 0$, et γ non-nul, on obtient une contrainte exprimant cette fois l'invariance sous les transformations conformes spéciales liée à l'opérateur \mathcal{L}_{-1} . Chacune de ces contraintes vérifie, à partir de (3.2.4), l'identité de Ward (3.2.1).

Le lien étroit existant entre l'invariance sous transformation conforme locale et l'identité de Ward ayant été quelque peu éclairé, on va s'intéresser au moyen d'appliquer cette identité aux vecteurs singuliers des représentations de *Vir*.

3.3. EDO POUR LES FONCTIONS DE CORRÉLATION À QUATRE POINTS

3.3.1. De vecteur singulier à EDP

L'identité de Ward (3.2.1) et (3.2.2) permet ainsi de transformer une fonction de corrélation, dont le premier champ quantique a été transformé par des opérations conformes infinitésimales \mathcal{L}_r , $r \geq 0$, en une fonction à n points uniquement constituée de champs primaires $\mathcal{L}_r \langle \Phi_1(\mathbf{z}_1) X \rangle$, $n \geq 4$ où $X = \Phi_2(\mathbf{z}_2) \Phi_3(\mathbf{z}_3) \dots \Phi_n(\mathbf{z}_n)$. Si l'on définit

$$\Phi^{(k_1, \dots, k_n)}(\mathbf{z}_1) := (l_{k_1} \dots l_{k_n}) \Phi(\mathbf{z}_1), \quad (3.3.1)$$

on a alors l'égalité

$$\langle \Phi^{(k_1, \dots, k_n)}(\mathbf{z}_1) X \rangle = \mathcal{L}_{k_1} \dots \mathcal{L}_{k_n} \langle \Phi(\mathbf{z}_1) X \rangle. \quad (3.3.2)$$

Plus explicitement dans le cas d'une chaîne X à trois champs primaires

$$\langle \Phi^{(k_1, \dots, k_n)}(\mathbf{z}_1) \Phi_2(\mathbf{z}_2) \Phi_3(\mathbf{z}_3) \Phi_4(\mathbf{z}_4) \rangle = \mathcal{L}_{k_1} \dots \mathcal{L}_{k_n} \langle \Phi(\mathbf{z}_1) \Phi_2(\mathbf{z}_2) \Phi_3(\mathbf{z}_3) \Phi_4(\mathbf{z}_4) \rangle, \quad (3.3.3)$$

C'est exactement de cette manière que le programme *calc* dont on va parler au début du prochain chapitre va calculer les équations différentielles : chaque composante homogène de vecteurs singuliers est convertie en un opérateur différentiel constitué d'une succession d'opérateurs différentiels. Il ne reste plus alors qu'à multiplier chacun des $p(n)$ opérateurs issus du vecteur singulier par son coefficient, à sommer ces $p(n)$ termes et à appliquer l'opérateur à une fonction de corrélation symbolique G pour obtenir une équation aux dérivées partielles.

Notation 3.3.1. On utilisera dorénavant les abréviations usuelles EDO et EDP pour désigner respectivement les équations différentielles ordinaires et les équations différentielles aux dérivées partielles.

Pour simplifier l'étude des espaces solutions de chacune des équations différentielles, on aimerait traiter des EDO plutôt que des EDP. La section prochaine explique comment cela est rendu possible dans le cas particulier des fonctions de corrélation à 4 points.

3.3.2. D'EDP à EDO

Soit la classe des transformations conformes globales : $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc = 1$. C'est un résultat connu d'analyse complexe que, étant donné six points (notés z_2, z_3, z_4 et w_2, w_3, w_4) sur la sphère de Riemann, il existe une unique transformation conforme telle que $T(z_i) = w_i$, $i = 2, 3, 4$. On peut lire dans [Ma65] que le rapport croisé est un invariant conforme. Si on fixe maintenant trois points w_2, w_3 et w_4 sur la sphère de Riemann par

$$T(z_2) = w_2 = 0, T(z_3) = w_3 = 1, T(z_4) = w_4 = \infty, \quad (3.3.4)$$

on peut alors exploiter cette propriété d'invariance du rapport croisé pour calculer explicitement la transformation T qui correspond au choix particulier (3.3.4).

$$\begin{aligned} \frac{(z - z_2)}{(z - z_3)} \times \frac{(z_4 - z_3)}{(z_4 - z_2)} &= \frac{(T(z) - T(z_2))}{(T(z) - T(z_3))} \times \frac{(T(z_4) - T(z_3))}{(T(z_4) - T(z_2))} \\ &= \frac{w}{(w - 1)} \times \frac{(\infty - 1)}{\infty} \\ &= \frac{w}{(w - 1)}. \end{aligned}$$

On trouve finalement la transformation recherchée :

$$\boxed{w = T(z) = \frac{(z - z_2)(z_4 - z_3)}{(z - z_4)(z_2 - z_3)}} \quad (3.3.5)$$

On se rend compte que l'expression du rapport croisé (3.1.29) présente une forme équivalente à (3.3.5).

Considérons maintenant les EDP issues de l'application répétitive des opérateurs \mathcal{L}_r , définis en (3.2.2) sur un corrélateur $\langle \Phi(\mathbf{x}_1)\Phi_2(\mathbf{x}_2)\Phi_3(\mathbf{x}_3)\Phi_4(\mathbf{x}_4) \rangle$. Ces EDP en 4 variables peuvent être transformés en des EDO en une unique variable \mathbf{x} . Pour réaliser cette transformation, il faut fixer trois des quatre points \mathbf{x}_1 à \mathbf{x}_4 . Si l'on choisit encore une fois d'envoyer $\mathbf{x}_2 \rightarrow 0$, $\mathbf{x}_3 \rightarrow 1$ et $\mathbf{x}_4 \rightarrow \infty$, on obtient dans les limites choisies : $T(\mathbf{x}_1) = \mathbf{z}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) \rightarrow \mathbf{x}_1$, que l'on peut rebaptiser \mathbf{x} tout simplement.

À partir de là, on peut illustrer à l'aide d'un exemple comment les dérivées partielles en $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ et \mathbf{x}_4 laissent place à une dérivé ordinaire en la variable \mathbf{x} . On va utiliser la notation suivante pour condenser l'écriture :

Notation 3.3.2. On notera \mathbf{x}_{ij} pour signifier $\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$.

Soit f une fonction différentiable ne dépendant que du rapport croisé. On calcule

$$\begin{aligned}
 \partial_{\mathbf{x}_2}(f(\mathbf{z}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4))) &= \partial_{\mathbf{x}_2} \left[f \left(\frac{\mathbf{x}_{12}\mathbf{x}_{34}}{\mathbf{x}_{14}\mathbf{x}_{32}} \right) \right] \\
 &= \frac{\mathbf{x}_{34}}{\mathbf{x}_{14}} \partial_{\mathbf{x}_2} \left(\frac{\mathbf{x}_{12}}{\mathbf{x}_{32}} \right) f'(\mathbf{z}) \\
 &= \frac{\mathbf{x}_{34}}{\mathbf{x}_{14}} \left(\frac{-\mathbf{x}_{32} + \mathbf{x}_{12}}{\mathbf{x}_{32}^2} \right) f'(\mathbf{z}) \\
 &= \left(\frac{\mathbf{x}_{34}\mathbf{x}_{13}}{\mathbf{x}_{14}\mathbf{x}_{32}^2} \right) f'(\mathbf{z})
 \end{aligned}$$

Après le passage à la limite $\mathbf{x}_2 \rightarrow 0, \mathbf{x}_3 \rightarrow 1, \mathbf{x}_4 \rightarrow \infty$ (et donc $\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}$), on obtient

$$\begin{aligned}
 \lim_{\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{x}, \mathbf{x}_2 \rightarrow 0, \mathbf{x}_3 \rightarrow 1, \mathbf{x}_4 \rightarrow \infty} \partial_{\mathbf{x}_2}(f(\mathbf{z}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4))) &= \lim_{\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{x}, \mathbf{x}_2 \rightarrow 0, \mathbf{x}_3 \rightarrow 1, \mathbf{x}_4 \rightarrow \infty} \left(\frac{\mathbf{x}_{34}\mathbf{x}_{13}}{\mathbf{x}_{14}\mathbf{x}_{32}^2} \right) f'(\mathbf{z}) \\
 &= \lim_{\mathbf{x}_4 \rightarrow \infty} \frac{(1 - \mathbf{x}_4)(\mathbf{x} - 1)}{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_4)(1 - 0)^2} f'(\mathbf{x}) \\
 &= (\mathbf{x} - 1) \frac{d}{d\mathbf{x}} [f(\mathbf{x})]
 \end{aligned}$$

Un exemple plus détaillé de calcul dans le cas d'une EDO du deuxième ordre sera traité au chapitre 4. On choisira d'appeler x tout simplement l'unique variable des EDO.

Chapitre 4

ÉTUDE DE DEUX MODÈLES MINIMAUX

La science ne cherche pas à énoncer des vérités éternelles ou des dogmes immuables ; loin de prétendre que chaque étape est définitive et qu'elle a dit son dernier mot, elle cherche à cerner la vérité par approximations successives.

Bertrand Russell, (1872 – 1970); “ABC de la relativité”

Une présentation des modèles minimaux est suivie d'un bref survol du travail de programmation portant sur les vecteurs singuliers et les EDO et d'un exemple de calcul détaillé. Des résultats complets obtenus sur les deux premiers modèles minimaux sont présentés par la suite. Finalement, la conjecture du damier est énoncée et vérifiée dans quelques cas simples.

4.1. MODÈLES MINIMAUX UNITAIRES $\mathcal{M}(p, p')$

On a un peu abordé la notion de modèle minimal à la fin du chapitre 2, section 2.7.1. La famille de représentations irréductibles donnée par (2.7.4) et (2.7.5) avec $1 \leq r < p'$ et $1 \leq s < p$ sera unitaire si $|p - p'| = 1$. On montrera, section 4.5.1, que le modèle minimal $\mathcal{M}(4, 3)$ présente un lien flagrant avec le modèle d'Ising au point critique. En effet, les représentations de la théorie de ce modèle minimal sont précisément les trois premières représentations irréductibles unitaires non-triviales de Vir permises par la série discrète de Friedan-Quin-Schenker (2.7.4) et (2.7.5).

4.2. ALGORITHMES

Comme il a été expliqué aux chapitres 2 et 3, deux programmes ont été développés à l'aide du logiciel de calcul symbolique Maple (version 11.0) afin de calculer de manière automatique les vecteurs singuliers et les EDO correspondantes.

4.2.1. Algorithme de calcul des vecteurs singuliers

Le programme *vs* retourne le vecteur singulier de niveau n correspondant à une courbe d'annulation $C_{r,s}$ donnée. L'appel à la fonction est $vs(h, c, n)$ et les paramètres d'entrée sont $h = h_{r,s}(m)$, $c = c(m)$ et n . Les deux paramètres complexes sont les php de la représentation : h , le poids conforme, et c , la charge centrale. L'entier positif n quant à lui désigne le niveau du vecteur singulier que l'on cherche à calculer. Les niveaux où se trouvent les vecteurs singuliers sont préalablement calculés à l'aide d'une autre procédure. Les deux autres paramètres sont donnés par les équations (2.7.1) et (2.7.2). La sortie de *vs* est le vecteur $|VS_{(c,h)}^n\rangle$. Les vecteurs calculés dans $\mathcal{M}(4, 3)$ et $\mathcal{M}(5, 4)$ sont listés à l'annexe A.

Pour que *vs* calcule convenablement les vecteurs singuliers en respectant les relations (2.3.2), il a fallu "enseigner" à Maple l'algèbre de Virasoro. Une fois la base choisie (voir tableau 1.1), on a créé un vecteur v de niveau n avec des coefficients indéterminés. On a ensuite imposé les égalités $L_{-1}v = L_{-2}v = 0$. Par la proposition 2.4.1, le vecteur obtenu en résolvant le système de $p(n)$ coefficients, où $p(n)$ est le nombre de partitions de l'entier n , est un vecteur singulier.

Le programme *vs* a permis de calculer tous les vecteurs des modèles minimaux $\mathcal{M}(4, 3)$ et $\mathcal{M}(5, 4)$, qui sont des vecteurs de niveau ≤ 12 . Cette taille de vecteur approche la limite des possibilités de calcul de *vs*. L'étude du modèle $\mathcal{M}(6, 5)$, qui comporte un vecteur singulier au niveau 20 nécessiterait un autre algorithme. Cela se comprend en consultant la table 2.1. On peut y voir que la fonction $p(n)$, le nombre de partition de l'entier n , grandit très rapidement. Par conséquent, la complexité du problème va aussi augmenter drastiquement ; pour calculer un vecteur v dans $\mathbb{C}^{p(20)}$, on doit résoudre $L_{-1}v = L_{-2}v = 0$, et donc solutionner un système de $p(18) + p(19) = 385 + 490 = 875$ équations linéaires en $p(20) = 627$ variables.

4.2.2. Algorithme de calcul des EDO

Le programme *calc* retourne l'EDO de degré n associée à $|VS_{(c,h)}^n\rangle$. L'appel à la fonction est $calc(|VS_{(c,h)}^n\rangle, n, h)$. Les paramètres d'entrée sont : $|VS_{(c,h)}^n\rangle, n, h$, soit le vecteur singulier calculé précédemment par *vs*, le niveau de ce vecteur, et le poids conforme de la représentation. La sortie de *calc* est l'équation différentielle $EDO_{(c,h)}^n$. Les EDO calculées sont listées à l'annexe B.

Le programme *calc* calcule récursivement les opérateurs différentiels \mathcal{L} . Le vecteur homogène $l_5 l_3 l_2$, par exemple, donne naissance à l'opérateur $\mathcal{L}_5(\mathcal{L}_5(\mathcal{L}_2(f)))$. La fonction f qui subit la première action de l'opérateur est la fonction de corrélation. En Maple, ceci se traduit par l'itération par *calc* d'opérateurs aux dérivées partielles $L(n, g)$ ayant deux arguments (un entier et une fonction). On obtient avec l'exemple choisit : $L[5, L[5, L[2, f]]]$. On peut ensuite envoyer z_2 en 0 et z_3 en 1. Prenant la limite quand $z_4 \rightarrow \infty$, on obtient finalement l'EDO sur la fonction de corrélation f en fonction d'une variable $z_1 \rightarrow x$. Si cet algorithme est très rapide pour les vecteurs singuliers de bas niveau, le temps de calcul et l'occupation mémoire augmentent cependant très rapidement avec le niveau. Ainsi, le temps de calcul du terme homogène contenant le plus grand nombre d'itérations, correspondant à l_1^{12} , se compte en heures.

4.3. EXEMPLES DE CALCUL

On va maintenant décrire en détails les étapes de calculs effectués sur un sous-module de Verma particulier. Ceci comporte l'obtention de la forme particulière du vecteur singulier (ce que fait *vs*), une partie du calcul de l'équation différentielle ordinaire (ce que fait *calc*) associée à ce vecteur singulier, et finalement le calcul des exposants caractéristiques selon la méthode de Frobenius. Ces calculs reposent sur deux choix de certains paramètres. Le premier choix de paramètres permet d'illustrer la plupart des calculs menés dans cette étude. On compare explicitement les solutions obtenues si l'on choisit un deuxième ensemble de paramètres. Cette comparaison va permettre de mieux comprendre l'effet de ce deuxième choix de paramètres sur les

solutions des EDO¹. On rappelle la sous-famille de la série discrète de Friedan-Qiu-Shanker donnée par (2.7.4) et (2.7.5) pour les php (c, h) en fonction du paramètre m :²

$$c(m) = 1 - \frac{6}{m(m+1)}, \quad m = 2, 3, 4, \dots$$

$$h_{r,s}(m) = \frac{((m+1)r - ms)^2 - 1}{4m(m+1)}, \quad 1 \leq r < m, 1 \leq s \leq m.$$

On va donc, en se limitant à une sous-classe de cette série discrète restreindre notre étude à la classe de modèles minimaux unitaires notée $\mathcal{M}(m+1, m)$. Le modèle d'Ising en deux dimensions correspond à $\mathcal{M}(4, 3)$. Deux faits sont à noter. Tout d'abord, les paramètres r et s vont couvrir entièrement la table de Kac du modèle minimal $\mathcal{M}(m+1, m)$, pour tout m fixé. Ensuite, le poids conforme h est égal à la dimension des champs primaires $h_{r,s}$. Ainsi, le modèle minimal $\mathcal{M}(4, 3)$ que l'on obtient pour $m = 3$ comporte les trois combinaisons possibles de charge centrale et de poids conformes

$$\begin{cases} (c, h_{1,1}) = (c(m), 0) & = \left(\frac{1}{2}, 0\right), \\ (c, h_{1,2}) = \left(c(m), \frac{1}{4} \frac{m-2}{m+1}\right) & = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{16}\right), \\ (c, h_{2,1}) = \left(c(m), \frac{1}{4} \frac{m+3}{m}\right) & = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). \end{cases} \quad (4.3.1)$$

Chacun des sous-modules du module de Verma $V_{(c,h)}$ sera généré par une paire de vecteurs singuliers de plus haut poids, comme expliqué section 2.8. L'étude complète de $\mathcal{M}(4, 3)$ va donc passer par l'analyse de six vecteurs singuliers et des six EDO en découlant. Le niveau $rs = 2$ étant atteint pour les paires $(r = 1, s = 2)$ et $(r = 2, s = 1)$, les modules $(c, h_{1,2})$ et $(c, h_{2,1})$ doivent donc comporter chacun un vecteur singulier de niveau deux. On choisit de traiter en exemple le cas du vecteur singulier de niveau deux $|VS_{(c(m), h_{1,2}(m))}^2\rangle$ se trouvant dans le module $V(c(m), h_{1,2}(m))$, soit $V(\frac{1}{2}, \frac{1}{16})$ pour $m = 3$.

4.3.1. Détermination du vecteur singulier de niveau deux $|VS_{(c(m), h_{1,2}(m))}^2\rangle$

La première étape du calcul consiste à obtenir l'expression du vecteur singulier $|VS_{(c(m), h_{1,2}(m))}^2\rangle$ en fonction du paramètre h . On pose

$$|VS_{(c(m), h_{1,2}(m))}^2\rangle = [l_2 + \eta l_1^2]|h\rangle \quad (4.3.2)$$

¹Les calculs présentés suivent la méthode exposée par Saint-Aubin dans [YSA87] chap. 4.

²Les équations en références dans ce chapitre sont issues de [FMS97] chap. 4, 7 et 8.

avec η un coefficient dépendant de h . Notons qu'à priori le coefficient de $l_2|h\rangle$ peut être nul, mais que ce n'est pas le cas dans les exemples traités. La forme (4.3.2) est donc la plus générale et répond aux besoins. En posant $L_{-1}|VS_{(c(m),h_{1,2}(m))}^2\rangle = L_{-2}|VS_{(c(m),h_{1,2}(m))}^2\rangle = 0$, on obtient, à l'aide des règles de commutation de l'algèbre de Virasoro, le système d'équations

$$\begin{cases} L_{-1}|VS_{(c(m),h_{1,2}(m))}^2\rangle = [(3 + \eta(4h + 2))l_1]|h\rangle = 0 \\ L_{-2}|VS_{(c(m),h_{1,2}(m))}^2\rangle = [(2h(2 + 3\eta) + \frac{c}{2})|h\rangle = 0. \end{cases} \quad (4.3.3)$$

On résout ce système pour obtenir η et c en fonction de h

$$\begin{cases} \eta = -\frac{3}{2(1 + 2h)}, \\ c = -\frac{2h(-5 + 8h)}{1 + 2h}, \end{cases} \quad (4.3.4)$$

obtenant finalement l'expression recherchée pour le vecteur singulier de niveau 2

$$\boxed{|VS_{(c(m),h_{1,2}(m))}^2\rangle = \left(l_2 - \frac{3}{2(1 + 2h)}l_1^2\right)|h\rangle.} \quad (4.3.5)$$

4.3.2. EDO associée au vecteur singulier $|VS_{(c(m),h_{1,2}(m))}^2\rangle$

La seconde étape consiste à convertir ce vecteur singulier en termes d'opérateurs différentiels en utilisant la représentation de Vir^+ par l'espace des opérateurs différentiels (proposition 3.2.1 à la section 3.2.2.)

En utilisant (4.3.5), on obtient immédiatement l'opérateur différentiel

$$\mathcal{L}_2 - \frac{3}{2(1 + 2h)}\mathcal{L}_1^2. \quad (4.3.6)$$

Maintenant, (2.7.5) avec $r = 1$ et $s = 2$ donne $h_{1,2}(m) = \frac{1}{4}\frac{(m-2)}{(m+1)}$. Avec m un paramètre entier, l'opérateur différentiel (4.3.6) prend alors ses coefficients dans \mathbb{Q} et devient

$$\mathcal{L}_2 - \frac{m+1}{m}\mathcal{L}_1^2. \quad (4.3.7)$$

Cet opérateur différentiel appliqué au corrélateur de la fonction à quatre points $\langle \Phi(z_1)X \rangle = \langle \Phi(z_1)\Phi(z_2)\Phi(z_3)\Phi(z_4) \rangle$, où $X = \Phi(z_2)\Phi(z_3)\Phi(z_4)$ est une chaîne de trois champs primaires, nous conduit à l'équation différentielle

$$\left\{ \mathcal{L}_2 - \frac{m+1}{m} \mathcal{L}_1^2 \right\} \langle \Phi(z_1)\Phi(z_2)\Phi(z_3)\Phi(z_4) \rangle = 0$$

$$\left\{ \sum_{i=2}^4 \left[\frac{1}{z_1 - z_i} \frac{\partial}{\partial z_i} + \frac{h_i}{(z_1 - z_i)^2} \right] - \frac{m+1}{m} \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \right\} \langle \Phi(z_1)\Phi(z_2)\Phi(z_3)\Phi(z_4) \rangle = 0, \quad (4.3.8)$$

où l'on a utilisé pour le calcul de \mathcal{L}_2 l'équation (3.2.2) dans le cas d'une fonction de corrélation à 4 points, et l'équation (3.2.8) pour obtenir directement $\mathcal{L}_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial z_1^2}$.

Pour poursuivre le calcul de cette EDO, il faut maintenant adopter une forme pour la fonction de corrélation à quatre points $\langle \Phi(z_1)\Phi(z_2)\Phi(z_3)\Phi(z_4) \rangle$, et fixer les valeurs h_i dans (4.3.8). On choisit $h_{1,2} = h_i = \frac{1}{16}$. Par la suite, on va présenter deux formes possibles pour la fonction de corrélation $\langle \Phi(z_1)\Phi(z_2)\Phi(z_3)\Phi(z_4) \rangle$, et montrer l'effet de ces choix sur les exposants caractéristiques obtenus par la méthode de Frobenius.

4.3.3. Premier choix de fonction de corrélation

Soit G la fonction de corrélation à quatre points de la forme $\langle \Phi(z_1)\Phi(z_2)\Phi(z_3)\Phi(z_4) \rangle$. Chaque $\Phi(z_i)$ représente un champ de spin primaire, pour i de 1 à 4. On a vu à la section 3.1.3 que cette fonction peut prendre la forme

$$G := \langle \Phi(z_1)\Phi(z_2)\Phi(z_3)\Phi(z_4) \rangle = \prod_{1 \leq i < j \leq 4} (z_i - z_j)^{\mu_{ij}} f(\mathbf{z}). \quad (4.3.9)$$

L'invariance sous translation, dilatation et l'invariance conforme permet de contraindre μ_{ij} dans (4.3.9). On avait vu à la section 3.1.3.2 que l'ajout de la contrainte $\mu_{i,j} = \frac{\Delta}{3} - h_i - h_j$, donnée par l'équation (3.1.35), avec $\Delta = \sum_{i=1}^4 h_i$, permettait de trouver une solution possible au système sous-déterminé

$$\sum_{i \neq j} \mu_{ij} = -2h_i. \quad (4.3.10)$$

En particulier, si l'on fixe $h = h_i = h_{1,2}$, alors tous les exposants μ_{ij} sont égaux à

$$\mu_{ij} = \frac{-2h}{3}, \quad (4.3.11)$$

ce qui restreint partiellement la forme $\langle \Phi(z_1)\Phi(z_2)\Phi(z_3)\Phi(z_4) \rangle$. En effet, l'équation (4.3.10) est explicitement satisfaite avec les valeurs

$$\begin{cases} \mu_{1,2} + \mu_{1,3} + \mu_{1,4} = -2h = -\frac{1}{8}, \\ \mu_{2,3} + \mu_{2,4} + \mu_{2,1} = -2h = -\frac{1}{8}, \\ \mu_{3,4} + \mu_{3,1} + \mu_{3,2} = -2h = -\frac{1}{8}. \end{cases} \quad (4.3.12)$$

Le deuxième élément qui peut faire varier la fonction de corrélation repose sur l'argument de la fonction f intervenant dans (4.3.9). Cet argument est le rapport croisé déjà rencontré au chapitre précédent. Si le rapport croisé peut prendre différentes formes, on avait choisit de garder la forme (3.1.29), soit :

$$\mathbf{z} = \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)},$$

ce qui fait que l'on peut maintenant arrêter une forme pour la fonction de corrélation, où f est une fonction analytique quelconque, et C une fonction de z_1, z_2, z_3 et z_4 définie par :

$$C := \prod_{1 \leq i < j \leq 4} (z_i - z_j)^{\frac{2h(m)}{3}}.$$

La fonction de corrélation G se lit alors

$$\boxed{G(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{1}{C} f\left(\frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)}\right)}. \quad (4.3.13)$$

A partir de ce point, le calcul des EDP est possible. Néanmoins, ce calcul devient très laborieux et nécessite rapidement l'aide d'un logiciel de manipulations symboliques. À titre d'exemple, on va traiter en détail une partie du calcul de l'EDP (4.3.8). Au bout du compte, puisque l'on recherche une solution pour l'équation différentielle (4.3.8), la multiplication par un facteur non-nul (tel que C) ne changera pas cette solution. On continuera à utiliser ce principe lors du calcul qui va suivre. On pose $\alpha = -\frac{2h(m)}{3}$. À l'aide d'une notation similaire à 3.3.2 ($z_{ij} = z_i - z_j$), on calcule ensuite le

premier des termes en dérivées premières de (4.3.8) :

$$\begin{aligned}
\frac{C}{z_{12}} \frac{\partial}{\partial z_2} \left(\frac{f(\mathbf{z})}{C} \right) &= \frac{(z_{12}z_{13}z_{14}z_{23}z_{24}z_{34})^{-a}}{z_{12}} \frac{\partial}{\partial z_2} \left\{ (z_{12}z_{13}z_{14}z_{23}z_{24}z_{34})^a f \left(\frac{z_{12}z_{34}}{z_{14}z_{32}} \right) \right\} \\
&= \frac{(z_{12}z_{13}z_{14}z_{23}z_{24}z_{34})^{-a}}{z_{12}} \frac{\partial}{\partial z_2} \left\{ \left(-\frac{z_{34}}{z_{14}z_{32}} + -\frac{z_{12}z_{34}}{z_{14}z_{32}^2} \right) f'(\mathbf{z}) (z_{12}z_{13}z_{14}z_{23}z_{24}z_{34})^a \right. \\
&\quad + a z_{12}^{a-1} (z_{13}z_{14}z_{23}z_{24}z_{34}) (-1) f(\mathbf{z}) \\
&\quad + a z_{23}^{a-1} (z_{12}z_{13}z_{14}z_{24}z_{34}) f(\mathbf{z}) \\
&\quad \left. + a z_{24}^{a-1} (z_{12}z_{13}z_{14}z_{23}z_{34}) f(\mathbf{z}) \right\} \\
&= \frac{1}{z_{12}} \left\{ \left(-\frac{z_{34}}{z_{14}z_{32}} + \frac{z_{12}z_{34}}{z_{14}z_{32}^2} \right) f'(\mathbf{z}) + a \left(-\frac{1}{z_{12}} + \frac{1}{z_{23}} + \frac{1}{z_{24}} \right) f(\mathbf{z}) \right\}.
\end{aligned}$$

On laisse ensuite $z_1 \rightarrow x, z_2 \rightarrow 0, z_3 \rightarrow 1$ et $z_4 \rightarrow \infty$ comme dans la transformation (3.3.5), obtenant

$$= \frac{1}{x} \left\{ \left(-\frac{(1-\infty)}{(x-\infty)(1)} + \frac{x(1-\infty)}{(x-\infty)(1)^2} \right) f'(x) + a \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{-1} + \frac{1}{-\infty} \right) f(x) \right\}.$$

Il faut comprendre les “ ∞ ” de l'équation ci-dessus comme le processus limite $z_4 \rightarrow \infty$. Puisque toutes les expressions sont des fonctions rationnelles, ce processus limite s'interprète aisément. On obtient après simplifications et multiplication par x^2

$$= x(x-1)f'(x) - a(x+1)f(x).$$

Puisque $h(m) = \frac{1}{4} \frac{m-2}{m+1}$, alors $a = -\frac{(m-2)}{6(m+1)}$. Si l'on multiplie ensuite par $6(m+1)$, on obtient alors

$$= 6(m+1)x(x-1)f'(x) + (m-2)(x+1)f(x),$$

et l'expression polynomiale (4.3.14) ne présente plus alors qu'une dépendance en x :

$$6 \left(x^2 m + x^2 - x m - x \right) \frac{d}{dx} f(x) + (x m + m - 2 x - 2) f(x). \quad (4.3.14)$$

On opère de la même manière avec les deux autres termes contenant des dérivées partielles du premier ordre, les trois termes sans dérivés, et le terme du second ordre, qui seront également multipliés par x^2 puis par $6(m+1)$. On multiplie encore le tout par le plus grand dénominateur commun, soit $9x^4m^2 + 9x^4m - 18x^3m^2 - 18x^3m + 9x^2m^2 +$

$9x^2m$ pour que les coefficients de f et de ses dérivées soient polynomiaux. Le résultat final est une EDO à coefficients polynomiaux dénotée $EDO_{c(m),h(m)}^2$.

$$\begin{aligned} & (-9x^4m^2 - 18x^4m - 9x^4 + 18x^3m^2 + 36x^3m + 18x^3 - 9x^2m^2 - 18x^2m - 9x^2) f''(x) + \\ & (-12x^3m^2 - 24x^3m - 12x^3 + 18x^2m^2 + 36x^2m + 18x^2 - 6xm^2 - 12xm - 6x) f'(x) + \\ & (2x^2m^2 - 5x^2m + 2x^2 - 2xm^2 + 5xm - 2x + 2m^2 - 5m + 2) f(x) = 0. \end{aligned} \quad (4.3.15)$$

On peut maintenant passer à l'étude d'un cas particulier. Pour $m = 3$, l'expression du vecteur singulier $|VS_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{16})}^2\rangle$ est $-\frac{4}{3}l_1^2 + l_2$. On obtient en posant $m = 3$ dans (4.3.15) l'EDO dénotée $EDO_{\frac{1}{2}, \frac{1}{16}}^2(i)$ (le (i) se rapportant au choix G pour la fonction de corrélation). Ces résultats se retrouvent dans les annexes A et B , respectivement.

$$\begin{aligned} & (144x^4 - 288x^3 + 144x^2) \frac{d^2}{dx^2} f(x) \\ & + (192x^3 - 288x^2 + 96x) \frac{d}{dx} f(x) \\ & + (-5x^2 + 5x - 5) f(x) = 0. \end{aligned} \quad (4.3.16)$$

4.3.4. Second choix de fonction de corrélation

La construction de l'équation différentielle (4.3.15) a été faite pour un choix particulier des μ_{ij} satisfaisant (4.3.11). D'autres choix sont possibles; par exemple le produit du facteur $\prod_{1 \leq i < j \leq 4} (z_i - z_j)^{\mu_{ij}}$ par une puissance de z introduira de nouveaux μ'_{ij} qui satisferont également (4.3.11). Ce paragraphe montre les conséquences d'un autre choix des μ_{ij} , toujours dans le cas où $m = 3$. Dans ce cas précis, on a toujours $h = h_i = h_{1,2} = \frac{1}{16}$ et l'équation (4.3.11) peut aussi être satisfaite par le choix des μ_{ij} :

$$\begin{cases} \mu_{1,3} = \mu_{2,4} = \mu_{1,2} = \mu_{3,4} = -\frac{1}{8} \\ \mu_{1,4} = \mu_{3,2} = \frac{1}{8}. \end{cases} \quad (4.3.17)$$

En effet, on vérifie que ce choix satisfait (4.3.11)

$$\begin{cases} \mu_{1,2} + \mu_{1,3} + \mu_{1,4} = -\frac{1}{8} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = -\frac{1}{8} \\ \mu_{2,3} + \mu_{2,4} + \mu_{2,1} = -\frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = -\frac{1}{8} \\ \mu_{3,4} + \mu_{3,1} + \mu_{3,2} = -\frac{1}{8} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = -\frac{1}{8}. \end{cases} \quad (4.3.18)$$

Avec ce choix la fonction de corrélation à quatre points G' , toujours constituée d'une fonction analytique $g(\mathbf{z})$ quelconque, et d'un nouveau préfacteur C' , prend finalement la forme

$$G'(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{1}{C'} g \left(\frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)} \right), \quad (4.3.19)$$

avec

$$C' := (z_1 - z_2)^{-\frac{1}{8}} (z_1 - z_3)^{-\frac{1}{8}} (z_1 - z_4)^{\frac{1}{8}} (z_2 - z_3)^{\frac{1}{8}} (z_2 - z_4)^{-\frac{1}{8}} (z_3 - z_4)^{-\frac{1}{8}}.$$

En appliquant la même méthode de calcul que dans la sous-section précédente, on parvient à

$$\frac{(16x^2 - 16x) \frac{d^2}{dx^2} g(x) + (16x - 8) \frac{d}{dx} g(x) - g(x)}{12x(x-1)} = 0. \quad (4.3.20)$$

Après multiplication de (4.3.20) par $\frac{3}{4}x(1-x)$ et simplification, l'EDO résultante dénotée $EDO_{\frac{1}{2}, \frac{1}{16}}^2$ (le (ii) se rapportant au choix G' pour la fonction de corrélation) est l'équation hypergéométrique

$$\left(-x^2 + x \right) \frac{d^2}{dx^2} g(x) + \left(\frac{1}{2} - x \right) \frac{d}{dx} g(x) + \frac{1}{16} g(x) = 0. \quad (4.3.21)$$

ayant pour solution explicite

$$g(x) = C_1 \sqrt{1 - \sqrt{1-x}} + C_2 \sqrt{1 + \sqrt{1-x}}. \quad (4.3.22)$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes. La solution de l'EDO pour cette forme de la fonction de corrélation G' est donc un peu plus simple.

4.4. MÉTHODE DE FROBENIUS

Soit l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre deux autour de zéro,

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0. \quad (4.4.1)$$

On peut obtenir la solution à l'équation différentielle (4.4.1) autour d'un point singulier régulier x_0 en utilisant la méthode de Frobenius. Rappelons que x_0 est un point régulier singulier s'il est singulier et que $(x-x_0)P(x)$ et $(x-x_0)^2Q(x)$ sont tous deux analytiques en x_0 . Rappelons également que l'on peut toujours à l'aide du changement de variable $t = x - x_0$ ramener la singularité x_0 à l'origine. Puisque dans cette section on traite

d'une équation différentielle d'ordre deux, il est intéressant d'utiliser la méthode de Frobenius décrite dans le théorème suivant pour résoudre (4.4.1).

Théorème 4.4.1. [Br94]. *Si $x = 0$ est un point régulier singulier de l'équation (4.4.1), alors celle-ci admet au moins une solution de la forme*

$$y = x^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (4.4.2)$$

où λ et a_n pour $(n = 0, 1, 2, \dots)$ sont des constantes. Cette solution est valide dans un intervalle $(0, R)$ pour R un nombre réel strictement positif.

Dérivant (4.4.2) deux fois, rassemblant les puissances de x et forçant à zéro le coefficient de x^0 , on obtient avec a_0 arbitraire, une équation quadratique pour λ . Cette équation est l'équation indiciale $p_{y,m}(\lambda)$ et ses solutions λ_1, λ_2 sont les *exposants caractéristiques*. Cette méthode se généralise de façon naturelle à une EDO d'ordre n .

4.4.1. Détermination des exposants caractéristiques

Les exposants caractéristiques de l'équation (4.3.15), $EDO_{c(m),h(m)}^2$, paramétrés par m , sont données par l'équation indiciale

$$p_{f,m}(\lambda) := \lambda^2(-9m^2 - 18m - 9) + \lambda(3m^2 + 6m + 3) + (2m^2 - 5m + 2) = 0 \quad (4.4.3)$$

ayant pour racines

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{-m+2}{3(m+1)}, \\ \lambda_2 = \frac{2m-1}{3(m+1)}. \end{cases} \quad (4.4.4)$$

Pour $m = 3$, ces deux racines deviennent $\lambda_1 = -\frac{1}{12}$ et $\lambda_2 = \frac{5}{12}$.

4.4.2. Relation entre les exposants caractéristiques d' $EDO_{\frac{1}{2},\frac{1}{16}}^2$ (i) et (ii)

On considère dans un premier temps $EDO_{\frac{1}{2},\frac{1}{16}}^2$ (i) donnée par l'équation (4.3.16). Le polynôme caractéristique et ses solutions quand $m = 3$ sont

$$\begin{cases} p_{f,3}(\lambda) = -5 - 48\lambda + 144\lambda^2, \\ \lambda_1 = -\frac{1}{12}, \\ \lambda_2 = \frac{5}{12}. \end{cases} \quad (4.4.5)$$

On considère dans un deuxième temps $EDO_{\frac{1}{2}, \frac{1}{16}}^2$ (ii) donné par l'équation (4.3.21). Le polynôme caractéristique et ses solutions sont dans ce cas

$$\begin{cases} p_{g,3}(\lambda) = -\frac{1}{2}\lambda + \lambda^2, \\ \lambda_1 = 0, \\ \lambda_2 = \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (4.4.6)$$

D'un côté, le choix (4.3.11) qui détermine G conduit à l'ensemble d'exposants caractéristiques de (4.4.5). D'un autre côté, le choix (4.3.17) qui détermine G' conduit à l'ensemble de (4.4.6). Il est clair que l'on peut toujours opérer une telle translation des exposants caractéristiques d'un ensemble à l'autre en multipliant la fonction de corrélation de départ par une certaine puissance de z . Cela revient à dire que le changement dans la solution des EDO afférentes est prévisible. Donc l'équation de changement d'un ensemble d'exposants caractéristiques à un autre ensemble d'exposants caractéristiques est calculable. Le calcul donne pour l'exemple du second ordre que l'on a traité jusqu'ici, lorsque l'on veut translater $\{\lambda_1 = -\frac{1}{12}, \lambda_2 = \frac{5}{12}\}$ de (4.4.5) :

$$\left\{ -\min\left(\frac{-1}{12}, \frac{5}{12}\right) + \frac{-1}{12}, -\min\left(\frac{-1}{12}, \frac{5}{12}\right) + \frac{5}{12} \right\} = \left\{ 0, \frac{1}{2} \right\}, \quad (4.4.7)$$

ce qui est bien $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ de (4.4.6). Cette observation sera utilisée pour formuler la conjecture du damier, le résultat principal de cette étude.

4.5. RÉSULTATS POUR DEUX MODÈLES MINIMAUX

Ce qui suit est le résultat de l'étude des deux modèles minimaux les plus simples. Plus précisément, on étudie les exposants caractéristiques calculés à partir des équations différentielles liés aux vecteurs singuliers des représentations de \mathfrak{sl}_2 associées.

4.5.1. Modèle minimal $\mathcal{M}(4, 3)$

4.5.1.1. Description du modèle

Le modèle minimal $\mathcal{M}(4, 3)$ est lié au modèle d'Ising. D'un côté, on a calculé, à la section 4.3, des poids conformes données par l'équation (4.3.1). Il s'agit là des poids caractérisant l'espace de Hilbert (la partie holomorphe et la partie anti-holomorphe

étant citées pour l'exactitude de l'argument) pour $\mathcal{M}(4,3)$. Cet espace est donc

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= (M_{(c,h_{1,1})} \otimes \bar{M}_{(c,h_{1,1})}) \oplus (M_{(c,h_{1,2})} \otimes \bar{M}_{(c,h_{1,2})}) \oplus (M_{(c,h_{2,1})} \otimes \bar{M}_{(c,h_{2,1})}) \\ &= \bigoplus_{h=\bar{h} \in \{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{16}\}} M_{(\frac{1}{2}, h)} \otimes \bar{M}_{(\frac{1}{2}, \bar{h})}. \end{aligned}$$

D'un autre côté, on connaît depuis les travaux d'Onsager le résultat explicite du spectre de la matrice de transfert pour le modèle d'Ising en deux dimensions (voir aussi [Ba82] et [Th72] pour des simplifications du calcul). On peut ainsi exprimer le spectre de la matrice de transfert d'Ising sur le cylindre (avec certaines conditions aux limites) à l'aide des caractères définies par (2.8.1). Le calcul est long et ingénieux, et donne après simplification

$$\sum_{h \in \{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{16}\}} \chi_{M_{(\frac{1}{2}, h)}} \otimes \chi_{\bar{M}_{(\frac{1}{2}, \bar{h})}}$$

L'identification du modèle minimal $\mathcal{M}(4,3)$, charge centrale $c = \frac{1}{2}$, avec le modèle d'Ising en deux dimensions sans champ magnétique externe est donc immédiate.

4.5.1.2. Points pertinents et observations

Le tableau 4.1 réunit des informations concernant la paire de vecteurs singuliers aux niveau $rs = (2)(1)$ dans la première colonne, et $(p' - r)(p - s) = (1)(3)$ dans la seconde colonne. La première ligne donne l'expression des vecteurs singuliers, la seconde l'EDO en découlant et la troisième l'ensemble des exposants caractéristiques. Les lignes suivantes donnent les premiers termes de la solution en série satisfaisant les EDO, avec les exposants caractéristiques associés. Ceci permet de constater que les solutions de l'EDO du second ordre $EDO_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}^2$ ne sont pas toutes incluses dans l'ensemble solution de l'EDO du troisième ordre $|VS_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}^3\rangle$. En effet, la solution en série correspondant à $\lambda = 1$ ne fait pas partie de l'espace solution de $|VS_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}^3\rangle$. On remarque dans un deuxième temps que la solution correspondant à $\lambda = -\frac{1}{6}$ comporte une partie logarithmique, ce qui s'explique par le fait que la différence entre les deux exposants caractéristiques $\frac{11}{6}$ et $-\frac{1}{6}$ est égal à l'entier 2.

²Les vecteurs singuliers et les EDO sont compilés aux annexes A et B sous les formats $|VS_{(c,h)}^n\rangle$ et $EDO_{(c,h)}^n$ respectivement. Seuls les membres de gauche apparaissent dans les EDO, le “ = 0 ” étant sous-entendu.

Sous-module $V(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	Niveau 2	Niveau 3
Vecteurs singuliers ²	$ VS_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}^2\rangle$ = $l_1^2 - \frac{4}{3}l_2$	$ VS_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}^3\rangle$ = $\frac{4}{3}l_1^3 - 4l_2l_1 + l_3$
EDO	$EDO_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}^2$ = $(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}x^2)f(x) +$ $(-\frac{2}{3}x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3)f'(x) +$ $(-x^2 + 2x^3 - x^4)f''(x)$	$EDO_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}^3$ = $(22 - 33x - 33x^2 + 22x^3)f(x) +$ $(153x - 90x^2 - 126x^3 + 63x^4)f'(x) +$ $(-216x^2 + 864x^3 - 1080x^4 + 432x^5)f''(x) +$ $(-108x^3 + 324x^4 - 324x^5 - 108x^6)f'''(x)$
Exposants caractéristiques	$\lambda \in \{\frac{2}{3}, 1\}$	$\lambda \in \{\frac{2}{3}, -\frac{1}{6}, \frac{11}{6}\}$
Solution en série ($\lambda = \frac{2}{3}$)	$x^{\frac{2}{3}}(1 - \frac{1}{3}x + \frac{8}{9}x^2 + \frac{49}{81}x^3 + \dots)$	$x^{\frac{2}{3}}(1 - \frac{1}{3}x + \frac{8}{9}x^2 + \frac{49}{81}x^3 + \dots)$
Solution en série ($\lambda = 1$)	$x(1 + \frac{1}{2}x + \frac{9}{22}x^2 + \frac{4}{11}x^3 + \dots)$	$\{\emptyset\}$
Solution en série ($\lambda = \frac{11}{6}$)	$\{\emptyset\}$	$x^{\frac{11}{6}}(1 + \frac{11}{12}x + \frac{979}{1152}x^2 + \frac{33143}{41472}x^3 + \dots)$
Solution en série ($\lambda = -\frac{1}{6}$)	$\{\emptyset\}$	$x^{-\frac{1}{6}}(-\frac{15}{2} + \frac{5}{8}x - \frac{1}{12}x^2 + \frac{581}{1728}x^3 + \dots)$ $+ x^{-\frac{1}{6}}\ln(x)(\frac{63}{64}x^2 + \frac{231}{256}x^3 + \frac{6853}{8192}x^4 + \dots)$

TAB. 4.1. Tableau de résultats pour $\mathcal{M}(4, 3)$ avec les poids $c = \frac{1}{2}, h = \frac{1}{2}$

On voit au tableau 4.2 que l'ensemble solution de l'EDO du second ordre $EDO_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{16})}^2$ se retrouve complètement dans l'ensemble des solutions de l'EDO du quatrième ordre $EDO_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{16})}^4$.

Sous-module $V(\frac{1}{2}, \frac{1}{16})$	Niveau 2	Niveau 4
Vecteurs singuliers	$ VS^2_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{16})}\rangle$	$ VS^4_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{16})}\rangle$
EDO	$EDO^2_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{16})}$	$EDO^4_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{16})}$
Exposants caractéristiques	$\lambda \in \{-\frac{1}{12}, \frac{5}{12}\}$	$\lambda \in \{-\frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{5}{12}, \frac{19}{12}\}$
Solution en série ($\lambda = -\frac{1}{12}$)	$x^{-\frac{1}{12}}(1 - \frac{1}{24}x - \frac{5}{1152}x^2 + \frac{161}{82944}x^3 + \dots)$	$x^{-\frac{1}{12}}(1 - \frac{1}{24}x - \frac{5}{1152}x^2 + \frac{161}{82944}x^3 + \dots)$
Solution en série ($\lambda = \frac{5}{12}$)	$x^{\frac{5}{12}}(1 + \frac{5}{24}x + \frac{127}{1152}x^2 + \frac{6119}{82944}x^3 + \dots)$	$x^{\frac{5}{12}}(1 + \frac{5}{24}x + \frac{127}{1152}x^2 + \frac{6119}{82944}x^3 + \dots)$
Solution en série ($\lambda = \frac{1}{12}$)	$\{\emptyset\}$	$x^{\frac{1}{12}}(1 + \frac{1}{24}x + \frac{107}{5760}x^2 + \frac{955}{82944}x^3 + \dots)$
Solution en série ($\lambda = \frac{19}{12}$)	$\{\emptyset\}$	$+x^{\frac{19}{12}}(1 + \frac{19}{24}x + \frac{8105}{12672}x^2 + \frac{488351}{912384}x^3 + \dots)$

Tab. 4.2. Tableau de résultats pour $\mathcal{M}(4, 3)$ avec les poids $c = \frac{1}{2}, h = \frac{1}{16}$

On voit au tableau 4.3 que l'ensemble solution de l'EDO du premier ordre $EDO^1_{(\frac{1}{2}, 0)}$ se retrouve complètement dans l'ensemble des solutions de l'EDO du sixième ordre $EDO^6_{(\frac{1}{2}, 0)}$.

Sous-module $V(\frac{1}{2}, 0)$	Niveau 1	Niveau 6
Vecteurs singuliers	$ VS_{(\frac{1}{2}, 0)}^1\rangle$	$ VS_{(\frac{1}{2}, 0)}^6\rangle$
EDO	$EDO_{(\frac{1}{2}, 0)}^1$	$EDO_{(\frac{1}{2}, 0)}^6$
Exposants caractéristiques	$\lambda \in \{0\}$	$\lambda \in \{0, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{5}{3}, \frac{5}{2}\}$
Solution en série ($\lambda = 0$)	constante	constante
Solution en série ($\lambda = \frac{1}{6}$)	$\{\emptyset\}$	$x^{\frac{1}{6}} \left(1 + \frac{1}{12} x + \frac{17}{576} x^2 + \frac{299}{20736} x^3 + \dots\right)$
Solution en série ($\lambda = \frac{1}{6}$)	$\{\emptyset\}$	$x^{\frac{1}{6}} \ln(x) \left(1 + \frac{1}{12} x + \frac{17}{576} x^2 + \frac{299}{20736} x^3 + \dots\right)$ $+ x^{\frac{1}{6}} \left(\frac{1}{2} x + \frac{47}{192} x^2 + \frac{349}{2304} x^3 + \dots\right)$
Solution en série ($\lambda = \frac{1}{2}$)	$\{\emptyset\}$	$x^{1/2} \ln(x) \left(-\frac{35}{1296} x^2 - \frac{175}{5184} x^3 - \frac{225575}{6469632} x^4 - \frac{32725}{958464} x^5 + \dots\right)$ $+ x^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2450}{243} + \frac{1225}{486} x + \frac{11893}{7776} x^2 + \frac{11515}{10368} x^3 + \dots\right)$
Solution en série ($\lambda = \frac{5}{3}$)	$\{\emptyset\}$	$x^{\frac{5}{3}} \left(1 + \frac{5}{6} x + \frac{3340}{4851} x^2 + \frac{2315}{3969} x^3 + \dots\right)$
Solution en série ($\lambda = \frac{5}{2}$)	$\{\emptyset\}$	$x^{\frac{5}{2}} \left(1 + \frac{5}{4} x + \frac{6445}{4992} x^2 + \frac{8415}{6656} x^3 + \dots\right)$

TAB. 4.3. Tableau de résultats pour $\mathcal{M}(4, 3)$ avec les poids $c = \frac{1}{2}, h = 0$

$h = 0$	niveau 1	niveau 6
	$S = \{0\}$ $S_{1,1}^{(3)} = \{0\}$	$S = \left\{0, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{5}{3}, \frac{5}{2}\right\}$ $S_{2,3}^{(3)} = \left\{0, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{5}{3}, \frac{5}{2}\right\}$
$h = \frac{1}{16}$	niveau 2	niveau 4
	$S = \left\{-\frac{1}{12}, \frac{5}{12}\right\}$ $S_{1,2}^{(3)} = \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$	$S = \left\{-\frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{5}{12}, \frac{19}{12}\right\}$ $S_{2,2}^{(3)} = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{5}{3}, \frac{1}{6}\right\}$
$h = \frac{1}{2}$	niveau 2	niveau 3
	$S = \left\{-\frac{2}{3}, 1\right\}$ $S_{2,1}^{(3)} = \left\{0, \frac{5}{3}\right\}$	$S = \left\{-\frac{2}{3}, -\frac{1}{6}, \frac{11}{6}\right\}$ $S_{1,3}^{(3)} = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right\}$

TAB. 4.4. Exposants caractéristiques de $\mathcal{M}(4, 3)$

Le tableau 4.4 ci-dessus regroupe les observations précédentes concernant les relations entre les espaces solutions des trois paires d'équations différentielles (pour un poids h donné) étudiées dans le modèle minimal $\mathcal{M}(4, 3)$. On a convenu de nommer S l'ensemble des exposants caractéristiques obtenus par la méthode de Frobenius, et $S_{r,s}^{(m)}$ (avec $m = 3$), le même ensemble translaté de façon à ce que la plus petite valeur soit zéro selon le principe exposé à la fin de la section précédente.

4.5.2. Modèle minimal $\mathcal{M}(5, 4)$

4.5.2.1. Description du modèle

Le second modèle minimal unitaire le plus simple est $\mathcal{M}(5, 4)$, avec charge centrale $c = \frac{7}{10}$. Ce modèle est associé au modèle d'Ising tricritique au même titre que le modèle minimal $\mathcal{M}(4, 3)$ est associé au modèle d'Ising. Le modèle d'Ising tricritique est défini comme le modèle d'Ising classique, excepté que des sites vides sont permis, et que le nombre de spins peut varier. Comme pour le modèle précédent, les résultats concernant ce modèle sont listés aux appendices A et B.

Remarque 4.5.1. *On peut lire dans [FMS97] (section 7.4.3) qu'il existe une généralisation de Vir qui possède des propriétés de super-symétrie : l'algèbre de Virasoro super-conforme. Il se trouve que le modèle d'Ising tricritique est l'unique modèle qui soit minimal à la fois pour cette algèbre et pour Vir.*

4.5.2.2. *Points pertinents et observations*

Le tableau 4.5 répertorie pour $\mathcal{M}(5, 4)$ l'ensemble S des exposants caractéristiques selon la méthode de Frobenius et l'ensemble $S_{r,s}^{(m)}$ (avec $m = 4$) en suivant les conventions adoptées pour $\mathcal{M}(4, 3)$. Comme pour le modèle précédent, on est amené à comparer les espaces solutions associés aux paires de vecteurs singuliers qui génèrent les modules de php . On s'aperçoit que ces espaces solutions peuvent s'intersecter de trois façons différentes : ils peuvent être inclus l'un dans l'autre (niveaux 2 et 9, 2 et 8, 4 et 6), présenter une intersection non-triviale (3 et 6), ou bien une intersection triviale (1 et 12, 3 et 4).

$h = 0$	niveau 1	niveau 12
	$S = \{0\}$ $S_{1,1}^{(4)} = \{0\}$	$S = \left\{0, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{3}{10}, \frac{3}{10}, \frac{3}{5}, \frac{3}{2}, \frac{21}{10}, \frac{21}{10}, \frac{14}{5}, \frac{11}{2}, \frac{33}{5}\right\}$ $S_{3,4}^{(4)} = \left\{0, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{3}{10}, \frac{3}{10}, \frac{3}{5}, \frac{3}{2}, \frac{21}{10}, \frac{21}{10}, \frac{14}{5}, \frac{11}{2}, \frac{33}{5}\right\}$
$h = \frac{1}{10}$	niveau 2	niveau 9
	$S = \left\{-\frac{2}{15}, \frac{7}{15}\right\}$ $S_{1,2}^{(4)} = \left\{0, \frac{3}{5}\right\}$	$S = \left\{-\frac{2}{15}, -\frac{1}{30}, \frac{1}{6}, \frac{7}{15}, \frac{41}{30}, \frac{59}{30}, \frac{8}{3}, \frac{161}{30}\right\}$ $S_{3,3}^{(4)} = \left\{0, \frac{1}{10}, \frac{3}{10}, \frac{3}{5}, \frac{3}{2}, \frac{21}{10}, \frac{14}{5}, \frac{11}{2}\right\}$
$h = \frac{7}{16}$	niveau 2	niveau 8
	$S = \left\{-\frac{7}{12}, \frac{11}{12}\right\}$ $S_{2,1}^{(4)} = \left\{0, \frac{3}{2}\right\}$	$S = \left\{-\frac{7}{12}, -\frac{29}{60}, -\frac{17}{60}, \frac{1}{60}, \frac{11}{12}, \frac{91}{60}, \frac{133}{60}, \frac{361}{60}\right\}$ $S_{2,4}^{(4)} = \left\{0, \frac{1}{10}, \frac{3}{10}, \frac{3}{5}, \frac{3}{2}, \frac{21}{10}, \frac{14}{5}, \frac{33}{5}\right\}$
$h = \frac{3}{5}$	niveau 3	niveau 6
	$S = \left\{-\frac{4}{5}, -\frac{1}{5}, 2\right\}$ $S_{1,3}^{(4)} = \left\{0, \frac{3}{5}, \frac{14}{5}\right\}$	$S = \left\{-\frac{4}{5}, -\frac{7}{10}, -\frac{1}{5}, \frac{7}{10}, \frac{13}{10}, \frac{47}{10}\right\}$ $S_{3,2}^{(4)} = \left\{0, \frac{1}{10}, \frac{3}{5}, \frac{3}{2}, \frac{21}{10}, \frac{11}{2}\right\}$
$h = \frac{3}{2}$	niveau 3	niveau 4
	$S = \left\{-2, -\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right\}$ $S_{3,1}^{(4)} = \left\{0, \frac{3}{2}, \frac{11}{2}\right\}$	$S = \left\{-2, -\frac{7}{5}, \frac{4}{5}, \frac{23}{5}\right\}$ $S_{1,4}^{(4)} = \left\{0, \frac{3}{5}, \frac{14}{5}, \frac{33}{5}\right\}$
$h = \frac{3}{80}$	niveau 4	niveau 6
	$S = \left\{-\frac{1}{20}, \frac{1}{20}, \frac{11}{20}, \frac{29}{20}\right\}$ $S_{2,2}^{(4)} = \left\{0, \frac{1}{10}, \frac{3}{5}, \frac{3}{2}\right\}$	$S = \left\{-\frac{1}{20}, \frac{1}{20}, \frac{1}{4}, \frac{11}{20}, \frac{29}{20}, \frac{11}{4}\right\}$ $S_{2,3}^{(4)} = \left\{0, \frac{1}{10}, \frac{3}{10}, \frac{3}{5}, \frac{3}{2}, \frac{14}{5}\right\}$

TAB. 4.5. Exposants caractéristiques de $\mathcal{M}(5, 4)$

À la vue des observations précédentes, la question que l'on peut se poser est de savoir si il est possible de connaître à l'avance les espaces solutions pour les équations différentielles nées des vecteurs singuliers d'une représentation de php donnée, ou, au moins, les exposants caractéristiques liés à ces EDO. La réponse à cette question est donnée par la conjecture du damier que l'on va exposer à la section prochaine.

4.6. LA CONJECTURE DU DAMIER

Je suis maintenant en mesure de formuler la conjecture du damier. J'appellerai une table de Kac étendue (tableau 4.6), relativement à un modèle minimal $\mathcal{M}(p, p')$, la table de Kac délimitée par $1 \leq r \leq 2p' - 3, 1 \leq s \leq 2p - 3$. Cette taille de tableau couvre les exposants caractéristiques au niveau le plus élevé, soit $pp' = (p' + 1)p'$.

	$r = 1$	$r = 2$	$r = 3$...	$r = n - 1$	$r = n$	$r = n + 1$...	$r = 2n - 1$
$s = 2m - 1$	$h_{1,2m-1}$		$h_{3,2m-1}$...	$h_{n-1,2m-1}$		$h_{n+1,2m-1}$...	$h_{2n-1,2m-1}$
...
$s = m + 1$	$h_{1,m+1}$		$h_{3,m+1}$...	$h_{n-1,m+1}$		$h_{n+1,m+1}$...	$h_{2n-1,m+1}$
$s = m$...		$h_{r,s}$...	
$s = m - 1$	$h_{1,m-1}$		$h_{3,m-1}$...	$h_{n-1,m-1}$		$h_{n+1,m-1}$...	$h_{2n-1,m-1}$
...
$s = 3$	$h_{1,3}$		$h_{3,3}$...	$h_{n-1,3}$		$h_{n+1,3}$...	$h_{2n-1,3}$
$s = 2$				
$s = 1$	$h_{1,1}$		$h_{3,1}$...	$h_{n-1,1}$		$h_{n+1,1}$...	$h_{2n-1,1}$

TAB. 4.6. Table de Kac étendue pour le poids $h_{r,s}$ (cas r et s pairs)

La conjecture du damier

Soit un modèle minimal $\mathcal{M}(p, p')$ de charge centrale c et dont les $(p - 1)(p' - 1)$ poids $h_{i,j}$ sont répertoriés dans la table de Kac 2.2 page 49. L'ensemble $S_{r,s}^{(m)} = \{h_{i,j} : i = 1, 3, \dots, 2r - 1; j = 1, 3, \dots, 2s - 1\}$, où les $(r)(s)$ poids $h_{i,j}$ sont issus de la table de Kac étendue 4.6, est égal à l'ensemble des exposants caractéristiques de l'équation différentielle $EDO_{(c,h_{r,s})}^m$. On remarque que $h_{r,s}$ ne sera dans $S_{r,s}^{(m)}$ que si r et s sont tous deux impairs.

$m = 3$	$r = 1$	$r = 2$	$r = 3$
$s = 5$	$\frac{5}{2}$	1	$\frac{1}{6}$
$s = 4$	$\frac{21}{16}$	$\frac{5}{16}$	$-\frac{1}{48}$
$s = 3$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{6}$
$s = 2$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{35}{48}$
$s = 1$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{3}$

TAB. 4.7. Table de Kac étendue pour $m = 3$

$m = 4$	$r = 1$	$r = 2$	$r = 3$	$r = 4$	$r = 5$
$s = 7$	$\frac{33}{5}$	$\frac{323}{80}$	$\frac{21}{10}$	$\frac{63}{80}$	$\frac{1}{10}$
$s = 6$	$\frac{9}{2}$	$\frac{39}{16}$	1	$\frac{3}{16}$	0
$s = 5$	$\frac{14}{5}$	$\frac{99}{80}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{80}$	$\frac{3}{10}$
$s = 4$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{16}$	0	$\frac{3}{16}$	1
$s = 3$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{80}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{63}{80}$	$\frac{21}{10}$
$s = 2$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{80}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{143}{80}$	$\frac{18}{5}$
$s = 1$	0	$\frac{7}{16}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{51}{16}$	$\frac{11}{2}$

TAB. 4.8. Table de Kac étendue pour $m = 4$

4.6.1. Vérifications explicites

La vérification de la conjecture du damier, pour les deux modèles minimaux à l'étude, est immédiate en comparant les tables de Kac étendues (4.7) et (4.8) avec les tables (4.4) et (4.5) respectivement. Il est possible d'étendre ces vérifications à des cas plus généraux. On va présenter les vérifications effectuées afin de soutenir la conjecture du damier en ce sens. La démarche adoptée a été de se positionner dans un premier temps sur le bord vertical de la table de Kac en fixant $r = 1$. Le niveau n du vecteur singulier associé à $h_{1,s}$ est alors tout simplement égal à s . En se positionnant dans un deuxième temps sur le bord horizontal de la table de Kac en fixant $s = 1$, le niveau n du vecteur singulier associé à $h_{r,1}$ est alors égal à r .

4.6.1.1. Exposants caractéristiques liés à un vecteur de niveau 2

On va comparer, dans le cas d'un vecteur de niveau $n = 2$, l'expression des exposants caractéristiques $h_{1,1}(m)$ et $h_{1,3}(m)$ prévus par la conjecture du damier avec les exposants caractéristiques obtenus par la méthode de Frobenius.

Pour $c(m) = 1 - \frac{6}{m(m+1)}$ et $h_{1,2}(m) = \frac{1(m-2)}{4(m+1)}$ l'expression du vecteur singulier $|VS_{(c(m), h_{1,2}(m))}^2\rangle$ associé à l'opérateur différentiel (4.3.7) était

$$|VS_{(c(m),h_{1,2}(m))}^2\rangle = l_2 - \frac{m}{m+1}l_1^2.$$

L'opérateur différentiel appliqué à la fonction de corrélation à quatre points donnait l'équation (4.3.8)

$$\left\{ \mathcal{L}_2 - \frac{m+1}{m} \mathcal{L}_1^2 \right\} \langle \Phi(z_1)\Phi(z_2)\Phi(z_3)\Phi(z_4) \rangle = 0,$$

qui se traduisait finalement en l'EDO du second ordre (4.3.15), paramétrée par m . La résolution de celle-ci par la méthode de Frobenius donnait l'ensemble des exposants caractéristiques

$$S = \left\{ -\frac{1(m-2)}{3(m+1)}, \frac{1(2m-1)}{3(m+1)} \right\}$$

après résolution de l'équation indicelle (4.4.3)

$$p_{f,m}(\lambda) := (-9m^2 - 18m - 9)\lambda^2 + (3m^2 + 6m + 3)\lambda + (2m^2 - 5m + 2) = 0.$$

Ceci permet ensuite de calculer $S_{1,2}^{(m)}$, par un calcul similaire à (4.4.7) :

$$\begin{aligned} S_{1,2}^{(m)} &= \left\{ -\min\left(-\frac{1(m-2)}{3(m+1)}, \frac{1(2m-1)}{3(m+1)}\right) - \frac{1(m-2)}{3(m+1)}, \right. \\ &\quad \left. -\min\left(-\frac{1(m-2)}{3(m+1)}, \frac{1(2m-1)}{3(m+1)}\right) + \frac{1(2m-1)}{3(m+1)} \right\} \\ &= \left\{ -\frac{1(m-2)}{3(m+1)} + \frac{1(m-2)}{3(m+1)}, -\frac{1(m-2)}{3(m+1)} + \frac{1(2m-1)}{3(m+1)} \right\} \\ &= \left\{ 0, \frac{m-1}{m+1} \right\} \end{aligned} \quad (4.6.1)$$

On peut alors vérifier à l'aide de l'équation (2.7.5) que $S_{r,s}^{(m)} = \{h_{1,1}(m), h_{1,3}(m)\}$ pour tout m . Pour $h_{1,1}(m)$, on a

$$h_{1,1}(m) = \frac{((m+1) - m)^2 - 1}{4m(m+1)} = 0,$$

et pour $h_{1,3}(m)$

$$\begin{aligned} h_{1,3}(m) &= \frac{((m+1) - 3m)^2 - 1}{4m(m+1)} \\ &= \frac{(2m-1)^2 - 1}{4m(m+1)} \\ &= \frac{4m^2 - 4m}{4m(m+1)} \\ &= \frac{m-1}{m+1}. \end{aligned}$$

Si l'on avait choisi d'effectuer la vérification sur le bord horizontal de la table de Kac, il aurait suffi de fixer $s = 1$. On aurait alors $n = r$. Les charges centrales sont inchangées. On a par contre $h_{2,1}(m) = \frac{1}{4} \frac{(m+3)}{(m)}$. En utilisant la symétrie $h_{1,s} \rightarrow h_{r,1}$ quand $m \rightarrow -m - 1$ on obtient directement la nouvelle équation indicelle

$$\lambda^2(-9m^2) + \lambda(3m^2) + (2m^2 + 9m + 9) = 0,$$

qui donne S et permet de calculer $S_{2,1}^{(m)}$ pour tout $m > 2$, en procédant comme en (4.6.1)

$$S = \left\{ -\frac{1}{3} \frac{(m+3)}{(m)}, \frac{1}{3} \frac{(2m+3)}{(m)} \right\}, \quad (4.6.2)$$

$$S_{2,1}^{(m)} = \left\{ 0, \frac{m+2}{m} \right\}. \quad (4.6.3)$$

Le calcul de $h_{1,1}(m)$ étant déjà fait, il reste à vérifier $h_{3,1}(m)$:

$$\begin{aligned} h_{3,1}(m) &= \frac{(3(m+1) - m)^2 - 1}{4m(m+1)} \\ &= \frac{4m^2 + 12m + 9 - 1}{4m(m+1)} \\ &= \frac{m^2 + 3m + 2}{m(m+1)} \\ &= \frac{m+2}{m}. \end{aligned}$$

4.6.1.2. Exposants caractéristiques liés à un vecteur de niveau 3

On répète le travail précédent pour un vecteur de niveau $n = 3$. Les exposants caractéristiques prévus par la conjecture du damier sont cette fois $h_{1,1}(m)$, $h_{1,3}(m)$ et $h_{1,5}(m)$. On sait que le poids $h_{1,1}(m) = 0$ et le poids $h_{1,3}(m) = \frac{m-1}{m+1}$. L'opérateur différentiel appliqué à la fonction de corrélation à quatre points pour les poids $(c, h_{1,3}(m))$ est

$$\left\{ \mathcal{L}_3 - \frac{2(m+1)}{(m-1)} \mathcal{L}_2 \mathcal{L}_1 + \frac{1}{2} \frac{(m+1)^2}{m(m-1)} \mathcal{L}_1^3 \right\} \langle \Phi(z_1) \Phi(z_2) \Phi(z_3) \Phi(z_4) \rangle = 0,$$

et l'équation indicelle se lit

$$\begin{aligned} &(-27m^3 - 81m^2 - 81m - 27) \lambda^3 + (27m^3 + 81m^2 + 81m + 27) \lambda^2 + \\ &(108m^3 - 18m^2 - 108m + 18) \lambda + (32m^3 - 72m^2 + 48m - 8) = 0. \end{aligned}$$

On calcule comme précédemment S et $S_{1,3}^{(m)}$, pour tout $m > 2$,

$$S = \left\{ -\frac{4(m-1)}{3(m+1)}, -\frac{1(m-1)}{3(m+1)}, \frac{2(4m-1)}{3(m+1)} \right\}, \quad (4.6.4)$$

$$S_{1,3}^{(m)} = \left\{ 0, \frac{m-1}{m+1}, \frac{4m-2}{m+1} \right\}. \quad (4.6.5)$$

Le calcul de $h_{1,5}(m)$ donne

$$\begin{aligned} h_{1,5}(m) &= \frac{((m+1) - 5m)^2 - 1}{4m(m+1)} \\ &= \frac{(-4m+1)^2 - 1}{4m(m+1)} \\ &= \frac{16m^2 - 8m}{4m(m+1)} \\ &= \frac{4m-2}{m+1}. \end{aligned}$$

On vérifie donc effectivement que $S_{1,3}^{(m)}$ est constitué des poids qui se trouvent sur le bord vertical des tables de Kac, pour tout $m > 2$.

La vérification sur le bord horizontal de la table de Kac avec $h_{3,1}(m) = \frac{m+2}{m}$ donne la nouvelle équation indicielle

$$27m^3\lambda^3 - 27m^3\lambda^2 + (-108m^3 - 342m^2 - 252m)\lambda - (32m^3 + 168m^2 + 288m + 160) = 0,$$

qui permet d'obtenir S et $S_{3,1}^{(m)}$ pour tout $m > 2$:

$$S = \left\{ -\frac{4(m+2)}{3(m)}, -\frac{1(m+2)}{3(m)}, \frac{2(4m+5)}{3(m)} \right\}, \quad (4.6.6)$$

$$S_{3,1}^{(m)} = \left\{ 0, \frac{m+2}{m}, \frac{4m+6}{m} \right\}. \quad (4.6.7)$$

Le calcul de $h_{5,1}(m)$ donne

$$\begin{aligned} h_{5,1}(m) &= \frac{(5(m+1) - m)^2 - 1}{4m(m+1)} \\ &= \frac{(4m+5)^2 - 1}{4m(m+1)} \\ &= \frac{16m^2 + 40m + 25 - 1}{4m(m+1)} \\ &= \frac{4m - 10m + 6}{m(m+1)} \\ &= \frac{4m+6}{m}. \end{aligned}$$

Les éléments de $\mathcal{S}_{3,1}^{(m)}$ sont donc bien les poids que l'on trouve sur le bord horizontal de la table de Kac pour tout $m > 2$.

CONCLUSION

*La science peut imposer des limites à la connaissance,
mais ne devrait en imposer aucune à l'imagination.*

Bertrand Russell (1872 – 1970)

L'étude des phénomènes critiques constitue un vaste champ de recherche. Pour l'aborder du point de vue d'un algébriste, il a fallu préciser ce qu'est une algèbre de Lie, étudier en détail l'algèbre de Virasoro, et expliquer à l'aide de l'identité de Ward le lien qui existe entre la théorie des champs conformes et cette algèbre. Les hypothèses d'invariance conforme, du plus haut poids et d'unitarité sont à la base du paradigme qui permet l'étude des phénomènes critiques à l'aide des représentations irréductibles d'un espace de Hilbert. Les modèles minimaux qui sont une sous-classe des modèles irréductibles unitaires présentent des liens manifestes avec la mécanique statistique. La preuve de la conjecture du damier apporterait en ce sens un lien supplémentaire.

Je ne suis pas parvenu à apporter une telle preuve en toute rigueur mathématique. Si l'emploi de la force brute permet de vérifier la conjecture du damier pour les premiers cas, ceci ne constitue évidemment pas une preuve dans tous les cas. Les tentatives pour trouver une telle preuve pour $r = 1$ et m quelconque n'ont pas abouti, même si une expression explicite du vecteur singulier est connue pour cette paire d'indices. De toutes manières, cela n'aurait constitué qu'une preuve partielle, la conjecture devant être valide pour n'importe quel r et s dans la table de Kac, quand $m > 2$.

D'après les spécialistes, la conjecture du damier est fort probablement une conséquence de la fusion. Or, même si les recherches sur la fusion ont déjà produit des résultats tangibles, cette dernière est basée sur le développement de produit d'opérateurs

(*operator product expansion*), un développement qu'il est difficile de rendre rigoureux. Un chapitre de l'algèbre, nommé la théorie des opérateurs *vertex* s'y consacre.

BIBLIOGRAPHIE

- [Ar02] L.-P. Arguin, *Homotopie des amas de Fortuin-Kasteleyn pour le modèle de Potts sur le tore*, J. Stat. Phys., **109**, Nos. 112, (2002), 301–310.
- [Ba82] R.J. Baxter, *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*, Academic Press, New-York (1982).
- [Br94] R. Bronson, *Shaum's Outline of Theory and Problems of Differential Equations*, 2nd Ed., McGraw-Hill, New-York (1994).
- [BPW96] D. L. O'Brien, P.A. Pearce, S. Ole Warnaar, *Finitized conformal spectrum of the Ising model on the cylinder and torus*, Physica A, **228**, (1996), 63–77.
- [DF04] David S. Dummit, Richard M. Foote, *Abstract Algebra*, 2nd Ed., John Wiley and Sons, New-York (2004).
- [FF82] B.L. Feigin, D.B. Fuchs, *Verma Modules over the Virasoro Algebra*, Topology, SLN **1060**, (1982).
- [Fe72] R. P. Feynman, *Statistical Mechanics, a set of lectures*, Add. Wesley, (1972).
- [FMS97] P. di Francesco, P. Mathieu, D. Sénéchal, *Conformal Field Theory*, Springer Science+Business Media, New-York 1997.
- [Ha03] B. C. Hall, *Lie Groups, Lie Algebra, and Representations : an Elementary Introduction*, Springer Science+Business Media, New-York 2003.
- [ID89] C. Itzykson, J. M. Drouffe, *Statistical Field Theory*, Cambridge U. Press (1989).
- [Ka79] V. Kac, *Contravariant Form for Infinite Dimensional Lie Algebras and Subalgebras*, Lecture Notes in Physics, **94**, (1979), 441– 445.
- [Ma65] A.I. Markushevich, *Theory of Functions*, 2nd Ed., Chelsea Publishing Company (1977).
- [MP95] Robert V. Moody et Arturo Pianzola, *Lie Algebras with Triangular Decompositions*, John Wiley and Sons (1995).

- [PR07] P.A. Pearce et J. Rasmussen, *Solvable Critical Dense Polymers*, hep-th/0610273 v2 (2007).
- [Th72] C.J. Thomson, *Mathematical Statistical mechanics*, Mac millan (1972).
- [Yo07] D. Yoshioka, *Statistical Physics : An Introduction*, Springer-Verlag (2007).
- [YSA87] Y. Saint-Aubin, *Phénomènes critiques en deux dimensions et invariance conforme*, Université de Montréal pré tirage CRM-1472; 1987.
- [YSA90] Y. Saint-Aubin, *The Virasoro Algebra and its Representation Theory*, École d'été du Centre de recherches mathématiques, Université de Montréal, 1990.
- [YSA07] Y. Saint-Aubin, *Structure algébrique sous-jacente aux modèles physiques sur réseaux*, Notes manuscrites, Séminaire d'été, Université de Montréal, 2007.
- [ZPR06] J.-B. Zuber, P.A. Pearce, J. Rasmussen, *Logarithmic Minimal Models*, hep-th/0607232 v3 (2006).

Annexe A

LISTES DES VECTEURS SINGULIERS

A.1. LISTES DE VECTEURS SINGULIERS POUR LE MODÈLE MINIMAL $\mathcal{M}(4, 3)$

$$|VS_{(\frac{1}{2}, 0)}^1\rangle = l_1$$

$$|VS_{(\frac{1}{2}, 0)}^6\rangle = l_1^6 - 10 l_2 l_1^4 + \frac{43}{3} l_2^2 l_1^2 - \frac{100}{27} l_2^3 + \frac{17}{2} l_3 l_1^3 + \frac{7}{6} l_3 l_2 l_1 - \frac{775}{144} l_3^2 - \frac{39}{2} l_4 l_1^2 + \frac{275}{18} l_4 l_2 - \frac{41}{36} l_5 l_1 + \frac{25}{4} l_6$$

$$|VS_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{16})}^2\rangle = -\frac{4}{3} l_1^2 + l_2$$

$$|VS_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{16})}^4\rangle = -4 l_1^4 + \frac{50}{3} l_2 l_1^2 - \frac{49}{36} l_2^2 - \frac{27}{3} l_3 l_1 + l_4$$

$$|VS_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}^2\rangle = l_1^2 - \frac{4}{3} l_2$$

$$|VS_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}^3\rangle = \frac{4}{3} l_1^3 - 4 l_2 l_1 + l_3$$

A.2. LISTES DE VECTEURS SINGULIERS POUR LE MODÈLE MINIMAL $\mathcal{M}(5, 4)$

$$|VS_{(\frac{7}{10}, 0)}^1\rangle = l_1$$

$$|VS_{(\frac{7}{10}, 0)}^{12}\rangle = l_1^{12} + \frac{102527464353}{12500000} l_{11} l_1 - \frac{216163436643}{3125000} l_{10} l_2 + \frac{337258221993}{12500000} l_9 l_3 +$$

$$\frac{22083289767}{6250000} l_8 l_4 + \frac{405064578303}{12500000} l_7 l_5 - \frac{217287219303}{6250000} l_6^2 + \frac{49959508167}{625000} l_{10} l_1^2 +$$

$$\frac{1586253797}{312500} l_9 l_2 l_1 + \frac{4442669}{3125} l_8 l_3 l_1 - \frac{76359591}{2500} l_8 l_2^2 + \frac{16112939433}{1562500} l_7 l_4 l_1 -$$

$$\frac{6691309317}{312500} l_7 l_3 l_2 - \frac{5448381491}{625000} l_6 l_5 l_1 - \frac{80185734783}{1562500} l_6 l_4 l_2 + \frac{108336010167}{2500000} l_6 l_3^2 +$$

$$\frac{34504449903}{625000} l_5^2 l_2 - \frac{36666530901}{1562500} l_5 l_4 l_3 + \frac{22903555059}{7812500} l_4^3 - \frac{1366000479}{62500} l_9 l_1^3 +$$

$$\frac{2449222329}{31250} l_8 l_2 l_1^2 + \frac{3077457771}{156250} l_7 l_3 l_1^2 - \frac{302172222}{78125} l_7 l_2^2 l_1 + \frac{154703529}{2500} l_6 l_4 l_1^2 +$$

$$\frac{1050951313}{312500} l_6 l_3 l_2 l_1 + \frac{705005532}{78125} l_6 l_2^3 - \frac{16503456419}{250000} l_5^2 l_1^2 - \frac{1021896521}{312500} l_5 l_4 l_2 l_1 +$$

$$\frac{6816587463}{2500000} l_5 l_3 l_1^2 - \frac{5317797177}{156250} l_5 l_3 l_2^2 - \frac{2376999441}{781250} l_4^2 l_3 l_1 + \frac{50429506743}{1562500} l_4^2 l_2^2 +$$

$$\frac{9623709711}{1250000} l_4 l_3^2 l_2 - \frac{17472899367}{4000000} l_3^4 - \frac{179884719}{12500} l_8 l_1^4 + \frac{59505927}{3125} l_7 l_2 l_1^3 -$$

$$\frac{794734293}{12500} l_6 l_3 l_1^3 - \frac{199144933}{6250} l_6 l_2^2 l_1^2 + \frac{1132223559}{62500} l_5 l_4 l_1^3 + \frac{5225786901}{62500} l_5 l_3 l_2 l_1^2 +$$

$$\frac{43025064}{15625} l_5 l_2^3 l_1 - \frac{2529041493}{31250} l_4^2 l_2 l_1^2 - \frac{9033456597}{1250000} l_4 l_3^2 l_1^2 + \frac{282417197}{156250} l_4 l_3 l_2 l_1 -$$

$$\frac{781845372}{78125} l_4 l_2^4 - \frac{115079801}{250000} l_3^3 l_2 l_1 + \frac{109016523}{31250} l_3^2 l_2^2 - \frac{21624693}{3125} l_7 l_1^5 +$$

$$\frac{76343473}{3125} l_6 l_2 l_1^4 - \frac{18500671}{2500} l_5 l_3 l_1^4 + \frac{131083163}{6250} l_5 l_2^2 l_1^3 + \frac{698408967}{62500} l_4^2 l_1^4 -$$

$$\frac{41115996}{3125} l_4 l_3 l_2 l_1^3 + \frac{150531163}{3125} l_4 l_2^3 l_1^2 + \frac{3216051189}{250000} l_3^3 l_1^3 - \frac{1652935189}{125000} l_3^2 l_2^2 l_1^2 -$$

$$\frac{7346628}{15625} l_3 l_2^4 l_1 + \frac{7683984}{15625} l_6^2 - \frac{149421}{250} l_6 l_1^6 - \frac{12946759}{625} l_5 l_2 l_1^5 +$$

$$\frac{30879003}{6250} l_4 l_3 l_1^5 - \frac{131963831}{3125} l_4 l_2^2 l_1^4 + \frac{5840299}{2500} l_3^2 l_2 l_1^4 - \frac{2588709}{625} l_3 l_2^3 l_1 -$$

$$\frac{2178504}{625} l_2^5 l_1^2 + \frac{547107}{250} l_5 l_1^7 + \frac{1491237}{125} l_4 l_2 l_1^6 - \frac{8446581}{5000} l_3^2 l_1^6 +$$

$$\frac{3951651}{625} l_3 l_2^2 l_1^5 + \frac{3586033}{625} l_2^4 l_1^4 - \frac{109197}{125} l_4 l_1^8 - \frac{33231}{25} l_3 l_2 l_1^7 -$$

$$\frac{78452}{25} l_3^3 l_1^6 + \frac{2277}{25} l_3 l_1^9 + \frac{14982}{25} l_2^2 l_1^8 - 44 l_2 l_1^{10} + \frac{97376727987}{2500000} l_{12}$$

$$|VS_{(\frac{7}{10}, \frac{1}{10})}^2\rangle = -\frac{5}{4} l_1^2 + l_2$$

$$|VS_{(\frac{7}{10}, \frac{1}{10})}^9\rangle = l_1^9 - \frac{123}{5} l_2 l_1^7 - \frac{324}{125} l_3 l_2^3 - \frac{3145257}{10000} l_3^2 l_1^3 - \frac{387211}{3125} l_6 l_3 - \frac{204351}{625} l_7 l_1^2 -$$

$$\frac{293427}{1250} l_4^2 l_1 + \frac{97809}{12500} l_5 l_4 + \frac{133587}{500} l_5 l_1^4 - \frac{2489263}{25000} l_4 l_3 l_2 - \frac{39213}{250} l_3 l_2 l_1^4 +$$

$$\frac{1296}{25} l_2^4 l_1 - \frac{4222183}{50000} l_3^2 l_2 l_1 + \frac{1365369}{5000} l_4 l_3 l_1^2 + \frac{129924}{125} l_4 l_2 l_1^3 - \frac{36121}{125} l_2^3 l_1^3 +$$

$$\frac{44839111}{1000000} l_3^3 - \frac{251327}{1250} l_4 l_2^2 l_1 - \frac{2810797}{2500} l_5 l_2 l_1^2 + \frac{3843}{25} l_2^2 l_1^5 + \frac{21616127}{50000} l_5 l_3 l_1 +$$

$$\frac{91353}{1250} l_5 l_2^2 + \frac{3633}{100} l_3 l_1^6 - \frac{11241}{50} l_4 l_1^5 + \frac{803193}{2500} l_3 l_2^2 l_1^2 + \frac{791199}{12500} l_7 l_2 -$$

$$\frac{33554}{625} l_6 l_2 l_1 + \frac{10518}{25} l_6 l_1^3 + \frac{512289}{12500} l_8 l_1 - \frac{217037}{3125} l_9$$

$$|VS_{(\frac{7}{10}, \frac{7}{16})}^2\rangle = l_1^2 - \frac{5}{4} l_2$$

$$|VS_{(\frac{7}{10}, \frac{7}{16})}^8\rangle = l_1^8 - 21 l_2 l_1^6 + \frac{20979}{200} l_2^2 l_1^4 - \frac{59429}{400} l_2^3 l_1^2 + \frac{1147041}{160000} l_2^4 + \frac{693}{25} l_3 l_1^5 -$$

$$\frac{3609}{50} l_3 l_2 l_1^3 + \frac{1177797}{10000} l_3 l_2^2 l_1 - \frac{470151}{2500} l_3^2 l_1^2 - \frac{137599}{5000} l_3^2 l_2 - \frac{38691}{250} l_4 l_1^4 +$$

$$\frac{275751}{500} l_4 l_2 l_1^2 - \frac{238819}{100000} l_4 l_2^2 + \frac{1086117}{12500} l_4 l_3 l_1 - \frac{19435479}{250000} l_4^2 + \frac{15507}{125} l_5 l_1^3 -$$

$$\frac{1000567}{2500} l_5 l_2 l_1 + \frac{11809259}{100000} l_5 l_3 + \frac{126741}{500} l_6 l_1^2 - \frac{1315349}{50000} l_6 l_2 - \frac{10895457}{100000} l_7 l_1.$$

$$+ \frac{1613787}{50000} l_8$$

$$|VS_{(\frac{7}{10}, \frac{3}{8})}^3\rangle = \frac{25}{24} l_1^3 - \frac{10}{3} l_2 l_1 + l_3$$

$$|VS_{(\frac{7}{10}, \frac{3}{8})}^6\rangle = -\frac{100}{59} l_1^6 + \frac{1240}{59} l_2 l_1^4 - \frac{2692}{59} l_2^2 l_1^2 + \frac{7056}{295} l_2^3 - \frac{1170}{59} l_3 l_1^3 - \frac{214}{59} l_3 l_2 l_1 +$$

$$\frac{8703}{236} l_3^2 + \frac{3990}{59} l_4 l_1^2 - \frac{5970}{59} l_4 l_2 + l_5 l_1 - \frac{2463}{59} l_6$$

$$|VS_{(\frac{7}{10}, \frac{3}{2})}^3\rangle = l_1^3 - 5 l_2 l_1 + \frac{15}{4} l_3$$

$$|VS_{(\frac{7}{10}, \frac{3}{2})}^4\rangle = l_1^4 - 8 l_2 l_1^2 + \frac{144}{25} l_2^2 + \frac{184}{25} l_3 l_1 - \frac{984}{125} l_4$$

$$|VS_{(\frac{7}{10}, \frac{3}{80})}^4\rangle = -\frac{20}{3} l_1^4 + \frac{82}{3} l_2 l_1^2 - \frac{27}{20} l_2^2 - \frac{38}{3} l_3 l_1 + l_4$$

$$|VS_{(\frac{7}{10}, \frac{3}{80})}^6\rangle = -\frac{320}{1521} l_1^6 + \frac{3248}{1521} l_2 l_1^4 - \frac{23884}{7605} l_2^2 l_1^2 + l_2^3 - \frac{1568}{845} l_3 l_1^3 - \frac{21368}{38025} l_3 l_2 l_1 +$$

$$\frac{30904}{21125} l_3^2 + \frac{11488}{2535} l_4 l_1^2 - \frac{52376}{12675} l_4 l_2 + \frac{16816}{38025} l_5 l_1 - \frac{4304}{2535} l_6$$

Annexe B

LISTES DES EDO

Remarque B.0.1. *Seuls les membres de gauche apparaissent dans les EDO ; ainsi le " $= 0$." est sous-entendu.*

B.1. LISTES DES EDO POUR LE MODÈLE MINIMAL $\mathcal{M}(4, 3)$

$$EDO_{(\frac{1}{2}, 0)}^1 = f'(x)$$

$$EDO_{(\frac{1}{2}, 0)}^6 = \begin{aligned} & (-150 - 138x - 2802x^2 + 15588x^3 - 20580x^4 + 8232x^5) f'(x) \\ & + (513x + 8445x^2 - 93339x^3 + 235227x^4 - 226269x^5 + 75423x^6) f''(x) \\ & + (-3328x^2 + 70832x^3 - 304240x^4 + 524336x^5 - 402640x^6 + 115040x^7) f'''(x) \\ & + (-9864x^3 + 82656x^4 - 241848x^5 + 328248x^6 - 212256x^7 + 53064x^8) f^{(4)}(x) \\ & + (-4320x^4 + 25920x^5 - 60480x^6 + 69120x^7 - 38880x^8 + 8640x^9) f^{(5)}(x) \\ & + (-432x^5 + 2160x^6 - 4320x^7 + 4320x^8 - 2160x^9 + 432x^{10}) f^{(6)}(x) \end{aligned}$$

$$EDO_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{16})}^2 = \begin{aligned} & (-5 + 5x - 5x^2) f(x) \\ & + (96x - 288x^2 + 192x^3) f'(x) \\ & + (144x^2 - 288x^3 + 144x^4) f''(x) \end{aligned}$$

$$EDO_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{16})}^4 = \begin{aligned} & (-95 + 190x - 285x^2 + 190x^3 - 95x^4) f(x) \\ & + (-6912x - 16992x^2 + 137088x^3 - 188640x^4 - 75456x^5) f'(x) \\ & + (34272x^2 - 351648x^3 + 883584x^4 - 849312x^5 + 283104x^6) f''(x) \\ & + (82944x^3 - 414720x^4 + 746496x^5 - 580608x^6 + 165888x^7) f'''(x) \\ & + (20736x^4 - 82944x^5 + 124416x^6 - 82944x^7 + 20736x^8) f^{(4)}(x) \end{aligned}$$

$$EDO_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}^2 = \begin{aligned} & \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}x^2 \right) f(x) \\ & + \left(-\frac{2}{3}x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 \right) f'(x) \\ & + (-x^2 + 2x^3 - x^4) f''(x) \end{aligned}$$

$$EDO_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}^3 = \begin{aligned} & (22 - 33x - 33x^2 + 22x^3) f(x) \\ & + (153x - 90x^2 - 126x^3 + 63x^4) f'(x) \\ & + (-216x^2 + 864x^3 - 1080x^4 + 432x^5) f''(x) \\ & + (-108x^3 + 324x^4 - 324x^5 - 108x^6) f'''(x) \end{aligned}$$

B.2. LISTES DES EDO POUR LE MODÈLE MINIMAL $\mathcal{M}(5, 4)$

$$EDO_{(\frac{7}{10}, 0)}^1 = f'(x)$$

$$EDO_{(\frac{7}{10}, 0)}^{12} = (-2178409464 + 9332527456x - 108702942304x^2 + 3075984283056x^3 - 11969767383840x^4 + 16372337368440x^5 - 17306714064360x^6 + 47901254374080x^7 - 93085488194160x^8 + 88316918486280x^9 - 40578752665880x^{10} + 7377955030160x^{11})f'(x) + (2648724596x + 230134827756x^2 - 18421855056884x^3 + 91237706962956x^4 - 98240311347876x^5 + 264957007683924x^6 - 2377106227158816x^7 + 7171132892784264x^8 - 10380102367014600x^9 + 8071551949754480x^{10} - 3270289896191760x^{11} + 545048316031960x^{12})f''(x) + (-82009058444x^2 + 14997923965756x^3 - 90501064303124x^4 - 32100084613104x^5 - 818268711875712x^6 + 13677516723040488x^7 - 55237072623169452x^8 + 110134688490338508x^9 - 125479578340593444x^{10} + 83508749028119656x^{11} - 30347140119460424x^{12} + 4668790787609296x^{13})f'''(x) + (-2410810847645x^3 + 17548004725515x^4 + 136853492727435x^5 + 976123936067695x^6 - 20973734903755185x^7 + 108017376139941495x^8 - 282690868000093495x^9 + 438803719597147185x^{10} - 422442020951995695x^{11} + 248684954589664565x^{12} - 82282131275845515x^{13} + 11754590182263645x^{14})f^{(4)}(x) + (-67232879200x^4 - 43869714756000x^5 - 490548326110400x^6 + 11688944581013600x^7 - 75854043344210400x^8 + 255070559505342400x^9 - 519129415265357600x^{10} + 677298063394749600x^{11} - 572517151932606400x^{12} + 304280872175149600x^{13} - 92657704431156000x^{14} + 12354360590820800x^{15})f^{(5)}(x) + \dots$$

(... suite à la page suivante ...)

(... suite de $EDO_{(m,0)}^{12}$...)

$$\begin{aligned}
 & \dots + (2958264090000 x^5 + 95622705600000 x^6 - 2653649728362000 x^7 + \\
 & 22222615001454000 x^8 - 96235199759712000 x^9 + \\
 & 253000432884690000 x^{10} - 432630658218690000 x^{11} \\
 & + 494098609759152000 x^{12} - 375387224099454000 x^{13} \\
 & + 182641741517322000 x^{14} - 51605998086960000 x^{15} + \\
 & 6450749760870000 x^{16}) f^{(6)}(x) \\
 & + (-5680419920000 x^6 + 240725080120000 x^7 - 2830896861520000 x^8 + \\
 & 16318781591000000 x^9 - 55828677215080000 x^{10} + \\
 & 123747959923000000 x^{11} - 185282668753000000 x^{12} + \\
 & 189898212377720000 x^{13} - 131727830969000000 x^{14} + \\
 & 59269925799280000 x^{15} - 15639830626280000 x^{16} + \\
 & 1839980073680000 x^{17}) f^{(7)}(x) \\
 & + (-6872911100000 x^7 + 147205287900000 x^8 - 1238248349800000 x^9 + \\
 & 5725630790000000 x^{10} - 16631552523300000 x^{11} \\
 & + 32378241395500000 x^{12} - 43543325171500000 x^{13} + \\
 & 40727430219300000 x^{14} - 26090025830000000 x^{15} + \\
 & 10940780573800000 x^{16} - 2710421415900000 x^{17} + \\
 & 301157935100000 x^{18}) f^{(8)}(x) \\
 & + (-2370808000000 x^8 + 38055776000000 x^9 - 262140208000000 x^{10} + \\
 & 1040306080000000 x^{11} - 2669727632000000 x^{12} + \\
 & 4682900992000000 x^{13} - 5755342208000000 x^{14} + \\
 & 4972557568000000 x^{15} - 2967233720000000 x^{16} + \\
 & 1166904992000000 x^{17} - 272606224000000 x^{18} + \\
 & 28695392000000 x^{19}) f^{(9)}(x) \\
 & + \dots
 \end{aligned}$$

(... suite à la page suivante ...)

(... suite de $EDO_{(\frac{7}{10},0)}^{12}$...)

$$\begin{aligned}
 & \dots + (-345180000000 x^9 4661800000000 x^{10} - 279782800000000 x^{11} + \\
 & 989782200000000 x^{12} - 2301142800000000 x^{13} + \\
 & 3700804800000000 x^{14} - 4209004800000000 x^{15} + \\
 & 3390142800000000 x^{16} - 1897282200000000 x^{17} + \\
 & 7032828000000000 x^{18} - 1555180000000000 x^{19} + \\
 & 15551800000000 x^{20}) f^{(10)}(x) \\
 & + (-220000000000 x^{10} + 2640000000000 x^{11} - 14300000000000 x^{12} + \\
 & 46200000000000 x^{13} - 99000000000000 x^{14} + \\
 & 147840000000000 x^{15} - 1570800000000000 x^{16} + \\
 & 1188000000000000 x^{17} - 6270000000000000 x^{18} + \\
 & 2200000000000000 x^{19} - 4620000000000 x^{20} + \\
 & 440000000000 x^{21}) f^{(11)}(x) \\
 & + (-5000000000 x^{11} + 55000000000 x^{12} - 275000000000 x^{13} + \\
 & 825000000000 x^{14} - 1650000000000 x^{15} + \\
 & 2310000000000 x^{16} - 2310000000000 x^{17} + \\
 & 1650000000000 x^{18} - 825000000000 x^{19} + \\
 & 275000000000 x^{20} - 55000000000 x^{21} + \\
 & 5000000000 x^{22}) f^{(12)}(x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
EDO_{\left(\frac{7}{10}, \frac{1}{10}\right)}^2 &= (-14 + 14x - 14x^2)f(x) \\
&+ (150x - 450x^2 + 300x^3)f'(x) \\
&+ (225x^2 - 450x^3 + 225x^4)f''(x) \\
EDO_{\left(\frac{7}{10}, \frac{1}{10}\right)}^9 &= \left(\frac{148096620941}{1230187500} - \frac{293658996101}{273375000}x + \frac{581005110869}{136687500}x^2 - \frac{1604052918943}{164025000}x^3 + \right. \\
&\frac{786815470777}{54675000}x^4 - \frac{3827561641603}{273375000}x^5 + \frac{7335933104773}{820125000}x^6 - \frac{486030387043}{136687500}x^7 + \\
&\frac{41010071759}{54675000}x^8 - \left.\frac{41010071759}{246037500}x^9\right)f(x) \\
&+ \left(-\frac{4253252401}{30375000}x + \frac{2822955107}{2025000}x^2 - \frac{151088891081}{24300000}x^3 + \frac{24273447809}{1500000}x^4 + \right. \\
&\frac{46998525329}{1687500}x^5 + \frac{2073261794051}{60750000}x^6 - \frac{22830347713}{750000}x^7 + \frac{192800346527}{10125000}x^8 - \\
&\frac{185196676793}{24300000}x^9 + \left.\frac{185196676793}{121500000}x^{10}\right)f'(x) \\
&+ \left(\frac{89659}{151875}x^2 - \frac{32036566171}{243000000}x^3 + \frac{687736567997}{243000000}x^4 - \frac{384896652227}{40500000}x^5 - \right. \\
&\frac{215009188009}{121500000}x^6 + \frac{7253943340583}{121500000}x^7 + \frac{620870865929}{5062500}x^8 + \frac{27748215179441}{243000000}x^9 + \\
&\frac{12675355565719}{243000000}x^{10} + \left.\frac{1152305051429}{121500000}x^{11}\right)f''(x) \\
&+ \left(\frac{10415855657}{243000000}x^3 - \frac{85482908057}{405000000}x^4 + \frac{107944858457}{135000000}x^5 + \frac{1429504675681}{486000000}x^6 - \right. \\
&\frac{1209659141743}{5062500}x^7 + \frac{3109819819543}{5062500}x^8 + \frac{39909400924801}{48600000}x^9 + \frac{8312191358743}{13500000}x^{10} - \\
&\frac{9973640321143}{40500000}x^{11} + \left.\frac{9973640321143}{243000000}x^{12}\right)f'''(x) \\
&+ \left(\frac{6950653}{22500}x^4 + \frac{19216177}{22500}x^5 - \frac{219765313}{7500}x^6 + \frac{427672627}{1875}x^7 - \right. \\
&\frac{5596743497}{7500}x^8 + \frac{10169278973}{7500}x^9 - \frac{33202864321}{22500}x^{10} + \frac{10807923833}{11250}x^{11} - \\
&\frac{432748979}{1250}x^{12} + \left.\frac{33288383}{625}x^{13}\right)f^{(4)}(x) \\
&+ \left(\frac{10385227}{90000}x^5 + \frac{650502589}{90000}x^6 - \frac{6237285221}{90000}x^7 + \frac{26876318669}{90000}x^8 - \right. \\
&\frac{10900818997}{15000}x^9 + \frac{16326354997}{15000}x^{10} - \frac{92560556669}{90000}x^{11} + \frac{53980035221}{90000}x^{12} - \\
&\frac{17793819589}{90000}x^{13} + \left.\frac{2541974227}{90000}x^{14}\right)f^{(5)}(x) \\
&+ \left(-\frac{96301}{225}x^6 + \frac{2078299}{300}x^7 + \frac{4308877}{100}x^8 + \frac{5184979}{36}x^9 + \right. \\
&\frac{3519835}{12}x^{10} + \frac{114986723}{300}x^{11} - \frac{291954767}{900}x^{12} + \frac{17253377}{100}x^{13} - \\
&\frac{630653}{12}x^{14} + \left.\frac{630653}{90}x^{15}\right)f^{(6)}(x) \\
&+ \left(-\frac{17703}{100}x^7 + \frac{52206}{25}x^8 - \frac{1050987}{100}x^9 + \frac{2996889}{100}x^{10} - \right. \\
&\frac{5374173}{100}x^{11} + \frac{6314973}{100}x^{12} + \frac{4878489}{100}x^{13} + \frac{2394987}{100}x^{14} + \\
&\frac{169806}{25}x^{15} + \left.\frac{84905}{100}x^{16}\right)f^{(7)}(x) \\
&+ \dots \\
&(\dots \text{ suite à la page suivante } \dots)
\end{aligned}$$

(... suite de $EDO_{(\frac{7}{10}, \frac{7}{10})}^9$...)

$$\begin{aligned}
 &+ (-24 x^8 + 240 x^9 - 1056 x^{10} + 2688 x^{11} - 4368 x^{12} + \\
 &4704 x^{13} - 3360 x^{14} + 1536 x^{15} + x^{16} + 48 x^{17}) f^{(8)}(x) \\
 &+ (-x^9 + 9 x^{10} - 36 x^{11} + 84 x^{12} - 126 x^{13} + \\
 &126 x^{14} - 84 x^{15} + 36 x^{16} - 9 x^{17} + x^{18}) f^{(9)}(x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 EDO_{(\frac{7}{10}, \frac{7}{10})}^2 = & (-77 + 77 x - 77 x^2) f(x) \\
 &+ (96 x - 288 x^2 + 192 x^3) f'(x) + \\
 &+ (144 x^2 - 288 x^3 + 144 x^4) f''(x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 EDO_{(\frac{7}{10}, \frac{7}{10})}^8 = & \left(-\frac{165858555863}{6718464000000} + \frac{165858555863}{1679616000000} x - \frac{19934935943923}{3359232000000} x^2 + \frac{7330474742591}{419904000000} x^3 - \right. \\
 & \frac{155996457878261}{6718464000000} x^4 + \frac{7330474742591}{419904000000} x^5 - \frac{19934935943923}{3359232000000} x^6 + \frac{165858555863}{1679616000000} x^7 + \\
 & \frac{165858555863}{6718464000000} x^8 \Big) f(x) \\
 &+ \left(-\frac{6597631117}{8748000000} x - \frac{46563465529}{11664000000} x^2 - \frac{1279355471521}{17496000000} x^3 + \frac{3878343248287}{8748000000} x^4 \right. \\
 & \frac{4699906643861}{5832000000} x^5 + \frac{2435095004629}{4374000000} x^6 - \frac{493864778047}{8748000000} x^7 - \frac{299206027247}{3888000000} x^8 + \\
 & \left. -\frac{299206027247}{17496000000} x^9 \right) f'(x) \\
 &+ \left(\frac{86149252231}{11664000000} x^2 + \frac{1004273387417}{2332800000} x^3 - \frac{8570521994353}{2332800000} x^4 + \frac{440681524079}{46656000} x^5 - \right. \\
 & \frac{47565954163061}{5832000000} x^6 - \frac{3898561742569}{1166400000} x^7 + \frac{24211781224751}{2332800000} x^8 + \frac{14841666902311}{2332800000} x^9 + \\
 & \left. \frac{14841666902311}{11664000000} x^{10} \right) f''(x) \\
 &+ \left(-\frac{3786189721}{24300000} x^3 + \frac{28639200779}{12150000} x^4 + \frac{195738720439}{24300000} x^5 + \frac{28138578671}{8100000} x^6 + \right. \\
 & \frac{2767786921}{90000} x^7 - \frac{569174688821}{8100000} x^8 + \frac{816923856647}{12150000} x^9 + \frac{23519961014}{759375} x^{10} + \\
 & \left. \frac{4276356548}{759375} x^{11} \right) f'''(x) \\
 &+ \left(-\frac{1620193693}{6480000} x^4 + \frac{1011310493}{1080000} x^5 + \frac{33509164819}{6480000} x^6 - \frac{906085003}{24000} x^7 \right. \\
 & \frac{51666286921}{540000} x^8 - \frac{9170887969}{72000} x^9 + \frac{617899430419}{6480000} x^{10} - \frac{41165767907}{1080000} x^{11} + \\
 & \left. + \frac{41165767907}{6480000} x^{12} \right) f^{(4)}(x) \\
 &+ \left(\frac{190276}{3375} x^5 - \frac{23395151}{13500} x^6 + \frac{39940366}{3375} x^7 - \frac{170217847}{4500} x^8 + \frac{409955}{6} x^9 - \right. \\
 & \frac{334026803}{4500} x^{10} + \frac{162987359}{3375} x^{11} + \frac{234876499}{13500} x^{12} + \frac{18067423}{6750} x^{13} \Big) f^{(5)}(x) \\
 &+ \left(\frac{81991}{900} x^6 - \frac{926737}{900} x^7 + \frac{2136701}{450} x^8 - \frac{10770431}{900} x^9 + \frac{328951}{18} x^{10} + \right. \\
 & \frac{15709631}{900} x^{11} + \frac{4606301}{450} x^{12} - \frac{3043537}{900} x^{13} + \frac{434791}{900} x^{14} \Big) f^{(6)}(x) \\
 &+ \left(\frac{56}{3} x^7 - 168 x^8 + \frac{1960}{3} x^9 - \frac{4312}{3} x^{10} + 1960 x^{11} - \right. \\
 & \frac{5096}{3} x^{12} + \frac{2744}{3} x^{13} - 280 x^{14} + \frac{112}{3} x^{15} \Big) f^{(7)}(x) \\
 &+ (x^8 - 8 x^9 + 28 x^{10} - 56 x^{11} + 70 x^{12} - \\
 &56 x^{13} + 28 x^{14} - 8 x^{15} + x^{16}) f^{(8)}(x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
EDO_{\left(\frac{7}{10}, \frac{3}{5}\right)}^3 &= (8 - 12x - 12x^2 + 8x^3) f(x) \\
&+ (46x - 42x^2 - 8x^3 + 4x^4) f'(x) \\
&+ (-50x^2 + 200x^3 - 250x^4 + 100x^5) f''(x) \\
&+ (-25x^3 + 75x^4 - 75x^5 + 25x^6) f'''(x) \\
EDO_{\left(\frac{7}{10}, \frac{3}{5}\right)}^6 &= (-119756 + 359268x + 4864314x^2 - 10327408x^3 + \\
&4864314x^4 + 359268x^5 - 119756x^6) f(x) \\
&(425450x + 3984600x^2 - 19999300x^3 + 25336750x^4 + \\
&8779500x^5 + 1355200x^6 + 387200x^7) f'(x) \\
&+ (-5473675x^2 + 43434700x^3 - 82309400x^4 + 14956750x^5 + \\
&91270600x^6 - 82505300x^7 + 20626325x^8) f''(x) \\
&+ (-7180000x^3 + 10140000x^4 + 89940000x^5 - 310380000x^6 + \\
&397800000x^7 + 231840000x^8 + 51520000x^9) f'''(x) \\
&+ (3695000x^4 - 43475000x^5 + 165645000x^6 - 301730000x^7 + \\
&290645000x^8 + 143475000x^9 + 28695000x^{10}) f^{(4)}(x) \\
&+ (2500000x^5 - 17500000x^6 + 50000000x^7 - 75000000x^8 + \\
&62500000x^9 - 27500000x^{10} + 5000000x^{11}) f^{(5)}(x) \\
&+ (250000x^6 - 1500000x^7 + 3750000x^8 - 5000000x^9 + \\
&3750000x^{10} - 1500000x^{11} + 250000x^{12}) f^{(6)}(x) \\
EDO_{\left(\frac{7}{10}, \frac{3}{5}\right)}^3 &= (14 - 21x - 21x^2 + 14x^3) f(x) \\
&+ (31x - 54x^2 + 46x^3 - 23x^4) f'(x) \\
&+ (8x^2 + 32x^3 - 40x^4 + 16x^5) f''(x) \\
&+ (-4x^3 + 12x^4 - 12x^5 + 4x^6) f'''(x) \\
EDO_{\left(\frac{7}{10}, \frac{3}{5}\right)}^4 &= (1288 + 2576x + 3864x^2 - 2576x^3 + 1288x^4) f(x) \\
&+ (1936x + 6200x^2 + 5440x^3 + 1960x^4 - 784x^5) f'(x) \\
&+ (-1360x^2 + 2580x^3 - 940x^4 - 420x^5 + 140x^6) f''(x) \\
&+ (500x^3 - 2500x^4 + 4500x^5 - 3500x^6 + 1000x^7) f'''(x) \\
&+ (125x^4 - 500x^5 + 750x^6 - 500x^7 + 125x^8) f^{(4)}(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
EDO_{\left(\frac{7}{10}, \frac{3}{80}\right)}^4 = & \left(-319 + 638x - 957x^2 + 638x^3 + 319x^4\right) f(x) \\
& + \left(-32000x - 207200x^2 + 1148800x^3 - 1516000x^4 + 606400x^5\right) f'(x) \\
& + \left(287200x^2 - 2781600x^3 + 6908800x^4 - 621600x^5 + 2207200x^6\right) f''(x) \\
& + \left(640000x^3 - 3200000x^4 + 5760000x^5 - 4480000x^6 + 1280000x^7\right) f'''(x) \\
& + \left(160000x^4 - 640000x^5 + 960000x^6 - 640000x^7 + 160000x^8\right) f^{(4)}(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
EDO_{\left(\frac{7}{10}, \frac{3}{80}\right)}^6 = & (-3509 + 10527x + 9570x^2 - 36685x^3 + \\
& 9570x^4 + 10527x^5 - 3509x^6) f(x) \\
& + (682208x + 3648576x^2 + 1313408x^3 - 85172960x^4 + \\
& 193177728x^5 - 159108544x^6 + 45459584x^7) f'(x) \\
& + (-6036304x^2 - 23009984x^3 + 534851968x^4 - 1847809760x^5 + \\
& 2648925568x^6 - 1742561984x^7 + 435640496x^8) f''(x) \\
& + (15718400x^3 - 416064000x^4 + 2166297600x^5 - 4834636800x^6 + \\
& 5430988800x^7 - 3037248000x^8 + 674944000x^9) f'''(x) \\
& + (57555200x^4 - 543776000x^5 + 1913107200x^6 - 3365772800x^7 + \\
& 3193107200x^8 - 1567776000x^9 + 313555200x^{10}) f^{(4)}(x) \\
& + (25600000x^5 - 179200000x^6 + 512000000x^7 - 768000000x^8 + \\
& 640000000x^9 - 281600000x^{10} + 51200000x^{11}) f^{(5)}(x) \\
& + (2560000x^6 - 15360000x^7 + 38400000x^8 - 51200000x^9 + \\
& 38400000x^{10} - 15360000x^{11} + 2560000x^{12}) f^{(6)}(x)
\end{aligned}$$