

**Direction des bibliothèques**

**AVIS**

Ce document a été numérisé par la Division de la gestion des documents et des archives de l'Université de Montréal.

L'auteur a autorisé l'Université de Montréal à reproduire et diffuser, en totalité ou en partie, par quelque moyen que ce soit et sur quelque support que ce soit, et exclusivement à des fins non lucratives d'enseignement et de recherche, des copies de ce mémoire ou de cette thèse.

L'auteur et les coauteurs le cas échéant conservent la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent ce document. Ni la thèse ou le mémoire, ni des extraits substantiels de ce document, ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans l'autorisation de l'auteur.

Afin de se conformer à la Loi canadienne sur la protection des renseignements personnels, quelques formulaires secondaires, coordonnées ou signatures intégrées au texte ont pu être enlevés de ce document. Bien que cela ait pu affecter la pagination, il n'y a aucun contenu manquant.

**NOTICE**

This document was digitized by the Records Management & Archives Division of Université de Montréal.

The author of this thesis or dissertation has granted a nonexclusive license allowing Université de Montréal to reproduce and publish the document, in part or in whole, and in any format, solely for noncommercial educational and research purposes.

The author and co-authors if applicable retain copyright ownership and moral rights in this document. Neither the whole thesis or dissertation, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms, contact information or signatures may have been removed from the document. While this may affect the document page count, it does not represent any loss of content from the document.

Université de Montréal

# Dimension métrique des graphes

par

**Samuel Bernard**

Département de mathématiques et de statistique

Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures

en vue de l'obtention du grade de

Maître ès sciences (M.Sc.)

en mathématiques

7 janvier 2008

© Samuel Bernard, 2008



Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

**Dimension métrique des graphes**

présenté par

**Samuel Bernard**

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

*M. Ivo Rosenberg*

---

(président-rapporteur)

*M. Gert Sabidussi*

---

(directeur de recherche)

*M. Abraham Broer*

---

(membre du jury)

Mémoire accepté le:

*3 mars 2008*

---

## SOMMAIRE

---

Une application de localisation est un type d'homomorphisme d'un graphe vers une grille forte de dimension  $k$  permettant d'étiqueter chaque sommet du graphe avec un  $k$ -tuplet. Ce mémoire traite des applications de localisation injectives, c'est-à-dire celles permettant d'étiqueter des sommets distincts d'un graphe avec des  $k$ -tuplets distincts. L'étude de ces applications est liée aux ensembles résolvants et doublement résolvants d'un graphe. Dans le cas où celui-ci est fini, il est toujours possible de trouver de tels ensembles et par conséquent, tout graphe fini peut être plongé isomorphiquement dans une grille forte. On présente, entre autres, des résultats concernant les applications de localisation des graphes antipodaux et des produits cartésiens d'un graphe par une chaîne.

### MOTS CLEFS

Application de localisation, ensemble résolvant, ensemble doublement résolvant, graphe antipodal, produit cartésien de graphes.

## SUMMARY

---

A location map is a type of homomorphism from a graph to a strong grid of dimension  $k$  which allows the labelling of each vertex of the given graph with a  $k$ -tuple. This M.Sc. thesis is about injective location maps, that is those which allow the labelling of distinct vertices of a graph with distinct  $k$ -tuples. The study of these applications is linked to the resolving sets and the doubly resolving sets of a graph. In the case of a finite graph, it is always possible to find this kind of sets, and consequently every finite graph can be isomorphically embedded in a strong grid. We present, among other things, results about the location maps of antipodal graphs and the cartesian product of a graph by a chain.

### KEY WORDS

Location map, resolving set, doubly resolving set, antipodal graph, cartesian product of graphs.

## REMERCIEMENTS

---

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur M. Gert Sabidussi. Même si nos horaires respectifs ne nous ont pas permis de se voir avec régularité, les quelques rencontres que nous avons eues furent très fructueuses et stimulantes. Outre ses habiletés à me diriger dans la rédaction de ce mémoire, j'ai particulièrement apprécié son sens de l'humour.

Je tiens aussi à remercier Rachel pour sa grande patience et pour son support moral tout au long de ma maîtrise. Ce fut énormément apprécié.

Finalement, je tiens à remercier mes parents pour leur aide financière tout au long de mes études.

# TABLE DES MATIÈRES

---

<b>Sommaire</b> .....	iii
Mots clefs .....	iii
<b>Summary</b> .....	iv
Key words.....	iv
<b>Remerciements</b> .....	v
<b>Liste des figures</b> .....	viii
<b>Liste des tableaux</b> .....	ix
<b>Introduction</b> .....	1
<b>Chapitre 1. Notions de base</b> .....	5
1.1. Graphes et voisinage .....	5
1.2. Connexité.....	6
1.3. Distance.....	8
1.4. Sous-graphes.....	10
1.5. Ensembles convexes et préfibres.....	10
1.6. Précontractions.....	12
<b>Chapitre 2. Applications de localisation et plongements</b> .....	14
2.1. Produit fort de graphes et grille forte .....	14
2.2. Applications de localisation .....	16

2.3.	Ensembles résolvants.....	17
2.4.	Ensembles doublement résolvants.....	26
<b>Chapitre 3. Localisation dans les graphes antipodaux.....</b>		<b>32</b>
3.1.	Définitions et propriétés.....	32
3.2.	Ensembles résolvants et doublement résolvants.....	35
3.3.	Quelques mots sur les graphes arête-antipodaux.....	39
<b>Chapitre 4. Localisation dans un produit cartésien de graphes ..</b>		<b>42</b>
4.1.	Définitions et propriétés.....	42
4.2.	Ensembles résolvants.....	46
4.2.1.	Le cas général.....	46
4.2.2.	Le cas $G \square P_n$ .....	50
4.3.	Les hypercubes.....	56
4.3.1.	Les éléments de $\mathcal{R}_{Q_2}$ et de $\mathcal{D}_{Q_2}$ .....	58
4.3.2.	Les éléments de $\mathcal{R}_{Q_3}$ et de $\mathcal{D}_{Q_3}$ .....	59
4.3.3.	Les éléments de $\mathcal{R}_{Q_4}$ et de $\mathcal{D}_{Q_4}$ .....	60
4.3.4.	Les éléments de $\mathcal{R}_{Q_5}$ et de $\mathcal{D}_{Q_5}$ .....	61
4.3.5.	Les éléments de $\mathcal{R}_{Q_6}$ et de $\mathcal{D}_{Q_6}$ .....	62
4.3.6.	Quelques mots sur $\mathcal{R}_{Q_n}$ et sur $\mathcal{D}_{Q_n}$ lorsque $n \geq 7$ .....	65
<b>Bibliographie.....</b>		<b>67</b>
<b>Annexe A. Localisation dans les graphes infinis.....</b>		<b>A-i</b>
A.1.	Graphes infinis n'ayant pas d'ensemble résolvant.....	A-i
A.2.	Graphes infinis ayant des ensembles résolvants.....	A-iii

## LISTE DES FIGURES

---

1.2.1	Quelques graphes connexes.....	7
2.1.1	Les graphes $C_3$ , $K_2$ ainsi que $C_3 \boxtimes K_2$ .....	15
2.1.2	Le double rayon et la grille forte de dimension deux. ....	16
2.2.1	$f_U : V(C_3) \rightarrow F^{(1)}$ .....	17
2.3.1	Un ensemble résolvant minimal et un ensemble résolvant minimum de $P_4$ . ....	18
2.3.2	$f_U : V(C_3) \hookrightarrow F^{(2)}$ .....	20
2.3.3	Plongement $G \hookrightarrow F^{(2)}$ tel que $\text{loc}(G) = 3$ . ....	21
2.3.4	Plongements $f_U : G \hookrightarrow F^{(2)}$ et $f_{U'} : G \hookrightarrow F^{(2)}$ tel que $f_U(G)$ et $f_{U'}(G)$ ne sont pas des sous-graphes induits de $F^{(2)}$ . ....	22
2.4.1	Les éléments de $\mathcal{R}_{C_4}$ et $\mathcal{D}_{C_4}$ à automorphisme près. ....	27
2.4.2	Plongement de $C_5$ dans $F^{(2)}$ utilisant $U = \{x_0, x_1\}$ . ....	29
2.4.3	Plongement de $C_5$ dans $F^{(2)}$ utilisant $U' = \{x_0, x_2\}$ . ....	29
3.2.1	Le graphe $P_{3,3}$ . ....	37
3.2.2	Un peigne $G$ tel que $\text{loc}(G) = 2$ et tel que $\text{loc}_a(G) = n$ . ....	37
3.3.1	Un graphe arête-antipodal. ....	40
4.1.1	Les graphes $C_3$ , $K_2$ ainsi que $C_3 \square K_2$ . ....	43
4.2.1	Le graphe $G \square P_n$ . ....	50
4.3.1	Les hypercubes $Q_2$ , $Q_3$ et $Q_4$ . ....	57
A.1.1	Le graphe $C^{(2)}$ . ....	A-ii

## LISTE DES TABLEAUX

---

4.3.1	Les éléments de $\mathcal{R}_{Q_2}$ et de $\mathcal{D}_{Q_2}$ à automorphisme près. ....	58
4.3.2	Les éléments de $\mathcal{R}_{Q_3}$ et de $\mathcal{D}_{Q_3}$ à automorphisme près. ....	59
4.3.3	Les éléments de $\mathcal{R}_{Q_4}$ et de $\mathcal{D}_{Q_4}$ à automorphisme près. ....	60
4.3.4	Les éléments de $\mathcal{R}_{Q_5}$ et de $\mathcal{D}_{Q_5}$ à automorphisme près. ....	62
4.3.5	Les éléments de $\mathcal{R}_{Q_6}$ et de $\mathcal{D}_{Q_6}$ à automorphisme près. ....	63

# INTRODUCTION

---

Un graphe connexe<sup>1</sup>  $G$  est une structure discrète. Munie d'une distance  $\delta_G$ , cette structure est un espace métrique discret. Ainsi, pour un sous-ensemble de sommets  $U = \{u_1, \dots, u_k\}$  de  $G$ , on peut définir pour chaque sommet  $x$  de  $G$  l'application  $f_U(x) = (\delta_G(u_1, x), \dots, \delta_G(u_k, x))$ . Cette application, que l'on nomme application de localisation, permet d'associer à chaque sommet  $x$  de  $G$  un  $k$ -tuplet. Ce mémoire traite d'un type particulier d'applications de localisation. On s'intéresse à celles qui sont injectives et « optimales », c'est-à-dire celles qui permettent d'identifier des sommets distincts de  $G$  avec des  $k$ -tuplets distincts de longueur minimale.

Le premier à s'être intéressé formellement à ces applications est Slater dans les années 1970. Dans un article [SI] publié en 1975, il parle de la façon dont il est possible de localiser un sommet d'un graphe par rapport à un sous-ensemble de sommets de ce graphe. L'idée et la terminologie sont basées sur le fonctionnement du système de localisation **LORAN (LONG RANGE Navigation)**<sup>2</sup>. Ce système de localisation terrestre est un système de navigation radio qui est l'ancêtre du système GPS. Le but est d'avoir un ensemble de stations radio maîtres permettant d'identifier la position géographique des stations radio secondaires. Les stations maîtres sont choisies dans le système de façon à ce que chaque station secondaire soit uniquement identifiable par la distance qui la sépare de chacune des stations maîtres. Un ensemble de stations maîtres est dit localisant s'il permet

---

<sup>1</sup>Les résultats dans ce mémoire ne traitent que des graphes connexes, mais ils peuvent être généralisés pour des graphes non connexes. Les détails concernant ces graphes sont donc omis.

<sup>2</sup><http://en.wikipedia.org/wiki/LORAN>

de distinguer deux stations secondaires distinctes. On dit de plus d'un ensemble localisant qu'il est un ensemble de référence pour le système s'il est de cardinalité minimum. La cardinalité d'un ensemble de référence est ce qu'on appelle le nombre de localisation<sup>3</sup> du système (« location number » en anglais). Ainsi, pour Slater, un sous-ensemble  $U = \{u_1, \dots, u_k\}$  de sommets d'un graphe  $G$  est localisant si pour toute paire de sommets distincts  $x$  et  $y$  de  $G$ , on a que les  $k$ -tuplets  $(\delta_G(u_1, x), \dots, \delta_G(u_k, x))$  et  $(\delta_G(u_1, y), \dots, \delta_G(u_k, y))$  sont distincts. Bref, il a montré qu'une application de localisation  $f_U$  est injective et optimale si et seulement si  $U$  est un ensemble de référence pour  $G$ .

D'autres auteurs comme Cáceres et al. ainsi que Chartrand et al. ont par la suite étudié ce sujet dans la dernière décennie, mais en utilisant un autre vocabulaire. Dans leurs articles respectifs [Ca, Ch], ces auteurs parlent d'ensembles résolvants et de dimension métrique<sup>4</sup> pour parler respectivement d'ensembles localisants et de nombre de localisation. Comme la notion d'ensembles résolvants est celle qui est prédominante dans la littérature, on adopte cette terminologie dans ce mémoire. Par conséquent, on parlera d'ensembles résolvants minimums plutôt que d'ensembles de référence. Cependant, bien que le titre de ce mémoire soit « Dimension métrique des graphes », cela n'a pas de sens de parler de dimension, car les applications de localisation ne permettent généralement pas de reconstruire un graphe  $G$  en se basant uniquement sur les  $k$ -tuplets obtenus. On a choisi ce titre seulement parce que la littérature existante l'impose. Par contre, on n'utilisera pas les notations présentes dans la littérature, car elles font presque toujours référence à un concept de dimension. De plus, comme on a laissé tomber la terminologie d'ensembles de référence de Slater, on se doit d'introduire une nouvelle notation. Ainsi, la cardinalité d'un ensemble résolvant minimum d'un

---

<sup>3</sup>Slater note par  $R(G)$  la cardinalité d'un ensemble de référence dans  $G$ .

<sup>4</sup>Cáceres et al. notent par  $\beta(G)$  la cardinalité d'un ensemble résolvant minimum dans  $G$  et Chartrand et al. la notent par  $\dim(G)$ .

graphe  $G$  sera notée par  $\text{loc}(G)$  (nombre de localisation). Cette notation et terminologie parlent d'elles-mêmes, car elles ramènent le problème à ce qu'il est vraiment, c'est-à-dire un problème de localisation.

L'étude des ensembles résolvents minimums d'un graphe connexe  $G$  n'est pas qu'utile pour la localisation dans un système radio de navigation. Ces ensembles sont aussi utiles en chimie organique. Dans l'article de Chartrand et al. [Ch], les auteurs font un lien entre les ensembles résolvents d'un graphe et les groupes fonctionnels<sup>5</sup> d'une molécule. L'étude des groupes fonctionnels des molécules permettrait de comparer celles-ci dans le but d'analyser leurs effets dans un médicament.

En informatique, les ensembles résolvents jouent un rôle important dans la résolution d'un problème classique, à savoir le problème du policier et du voleur. Fitzpatrick et Nowakowski montrent dans [Fi] que la cardinalité d'un ensemble « fortement » résolvant pour un graphe  $G$  est le nombre minimal de policiers qu'il faut avoir dans un graphe pour coincer le voleur. Cependant, pour un graphe  $G$ , la cardinalité d'un tel ensemble est souvent plus grande que  $\text{loc}(G)$ . Ainsi, on peut commencer par trouver un ensemble résolvant minimum et voir si cet ensemble est suffisant pour résoudre le problème du policier et du voleur. C'est notamment le cas dans les cycles.

Finalement, une autre application des ensembles résolvents est liée aux hypercubes. C'est cette famille de graphes qui a motivé le sujet de ce mémoire. En informatique, plusieurs réseaux d'interconnexion sont construits de façon à être plongeables dans un hypercube de dimension  $n$ , car il s'agit de structures simples où chaque sommet est un nombre binaire. Ainsi, si l'on connaît le nombre de localisation d'un hypercube, on obtient une borne supérieure pour le nombre de localisation du graphe  $G$  modélisant un réseau plongeable dans cet hypercube. On

---

<sup>5</sup>Voir [http://en.wikipedia.org/wiki/Functional\\_group](http://en.wikipedia.org/wiki/Functional_group).

obtient alors une façon de localiser chaque processeur dans le réseau par rapport à un certain ensemble de processeurs.

Ce mémoire est divisé en quatre chapitres. Le premier est consacré aux définitions de base en théorie des graphes. Le second est entre autres dédié aux applications de localisation et aux ensembles résolvents. Le troisième chapitre concerne la localisation dans les graphes antipodaux. Finalement, le dernier chapitre porte sur la localisation dans un produit cartésien de graphes. Les graphes antipodaux et le produit cartésien de graphes sont importants dans l'études des hypercubes, car un hypercube est un graphe antipodal qui est construit à l'aide d'un produit cartésien de graphes. C'est pourquoi, même si notre intérêt est principalement dans ces graphes, les hypercubes n'apparaîtront seulement que dans la dernière section du dernier chapitre de ce mémoire.

# Chapitre 1

---

## NOTIONS DE BASE

Ce chapitre vise à donner au lecteur des notions de base en théorie des graphes. Loin d'être exhaustifs, les concepts présentés ici seront suffisants pour comprendre les idées et les constructions plus complexes qui se retrouvent dans les chapitres subséquents.

### 1.1. GRAPHES ET VOISINAGE

Le premier objet à définir est le graphe. Bien que selon les ouvrages, la définition d'un graphe peut varier, on s'en tiendra à celle ci-dessous.

Un *graphe* est une paire  $G = (V, E)$ , où  $V$  un ensemble quelconque et  $E$  est un sous-ensemble de  $V^{(2)}$ , c'est-à-dire que les éléments de  $E$  sont des paires non ordonnées d'éléments distincts de  $V$ . Les éléments de  $V$  sont appelés des *sommets* et ceux de  $E$  des *arêtes*.

Pour un graphe  $G$ , l'ensemble des sommets de  $G$  est noté  $V(G)$  et la cardinalité de ce dernier est appelée l'*ordre* de  $G$ . Un graphe est dit *fini* si la cardinalité de  $V(G)$  est finie. Il est dit *infini* autrement. Si  $V(G) = \emptyset$ , alors  $G$  est le *graphe vide*.

L'ensemble des arêtes de  $G$  est noté  $E(G)$  et deux sommets  $x, y \in V(G)$  sont *adjacents* s'ils forment une arête dans  $G$ . On notera cette arête par  $e = [x, y]$ . Remarquons que toute paire de sommets distincts de  $V(G)$  forme au plus une

arête et que pour tout  $x \in V(G)$ ,  $[x, x] \notin E(G)$ . Bref, un graphe ne possède ni arête multiple, ni boucle.

Pour un sommet  $x \in V(G)$ , le *voisinage* de celui-ci dans  $G$ , noté  $N_G(x)$ , est l'ensemble des sommets  $\{y \in V(G) \mid [x, y] \in E(G)\}$ . La cardinalité de  $N_G(x)$ , notée  $\deg_G(x)$ , s'appelle le *degré* de  $x$  dans  $G$ . Si pour tout  $x \in V(G)$  on a que  $\deg_G(x) = d$ , alors on dit de  $G$  qu'il est un graphe *d-régulier*.

## 1.2. CONNEXITÉ

Une notion importante en théorie des graphes est celle de la connexité. Un graphe connexe est un graphe où il est possible de partir d'un sommet arbitraire et de voyager le long de ses arêtes vers n'importe quel autre sommet.

Soit  $x, y \in V(G)$  deux sommets d'un graphe  $G$ . Une *xy-chaîne* dans  $G$  est une suite, sans répétition permise, de sommets  $\omega = x_0x_1x_2 \cdots x_{r-1}x_r$ , où  $x_i \in V(G)$  et  $[x_j, x_{j+1}] \in E(G)$ , pour  $i = 0, \dots, r$  et  $j = 0, \dots, r-1$ , avec  $x = x_0$  et  $y = x_r$ . Ainsi, un graphe est dit *connexe* si pour tous  $x, y \in V(G)$ , il existe une *xy-chaîne* dans  $G$ .

La *longueur* d'une *xy-chaîne*  $\omega$ , notée  $l(\omega)$ , est le nombre d'arêtes dans cette chaîne, c'est-à-dire si  $\omega = x_0x_1x_2 \cdots x_{r-1}x_r$  est une *xy-chaîne*, alors  $l(\omega) = r$ .

Pour tous  $x, y \in V(G)$  d'un graphe connexe  $G$ , il existe une famille non vide de *xy-chaînes*. Parmi les *xy-chaînes* de cette famille, certaines sont de longueur minimale. Ces *xy-chaînes* de longueur minimale s'appellent des *xy-géodésiques*.

Voici les définitions de quelques classes de graphes connexes. Celles-ci permettront de donner des exemples tout au long du mémoire. Quelques-uns des graphes mentionnés ci-dessous sont illustrés à la figure 1.2.1.

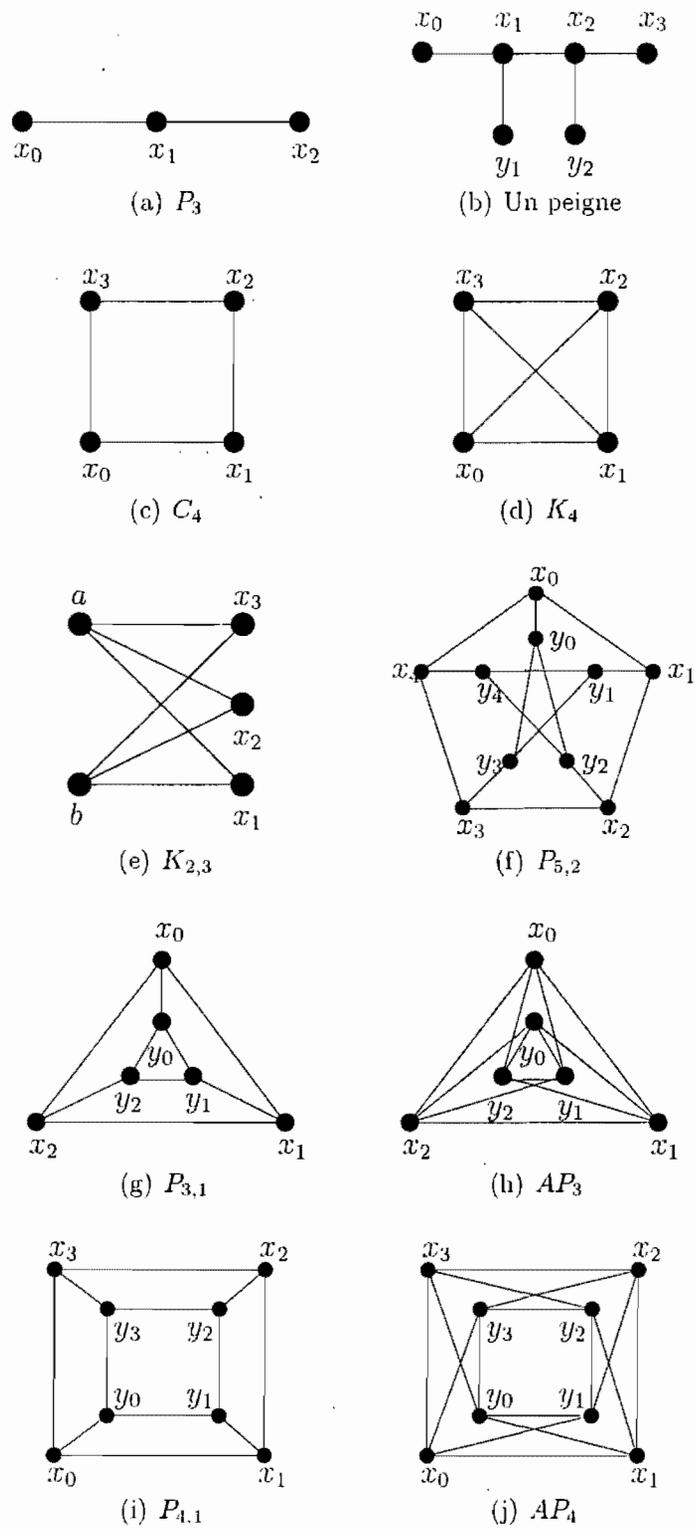


FIG. 1.2.1. Quelques graphes connexes.

Une *chaîne* sur  $n$  sommets ( $n \geq 2$ ), notée  $P_n$ , est le graphe ayant pour sommets  $V(P_n) = \{x_0, \dots, x_{n-1}\}$  et où  $E(P_n) = \{[x_i, x_{i+1}] \mid i = 0, \dots, n-2\}$ .

Pour  $n \geq 3$ , on dit que  $G$  est un *peigne* si  $V(G) = \{x_0, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_{n-2}\}$  et si  $E(G) = \{[x_i, x_{i+1}] \mid i = 0, \dots, n-2\} \cup \{[x_j, y_j] \mid j = 1, \dots, n-2\}$ .

Un *cycle* est un graphe d'ordre d'au moins trois, 2-régulier, fini, connexe et non vide. Le cycle sur  $n$  sommets est noté  $C_n$ .

Un *graphe complet* sur  $n$  sommets, noté  $K_n$ , est un graphe  $(n-1)$ -régulier, fini et connexe tel que  $E(K_n) = \{[x, y] \mid x, y \in V(K_n) \text{ et } x \neq y\}$ .

Soit  $A$  et  $B$  deux ensembles non vides et disjoints tels que  $|A| = m$  et  $|B| = n$ . Le *graphe biparti complet*, noté  $K_{m,n}$ , est le graphe tel que  $V(K_{m,n}) = A \cup B$  et tel que  $E(K_{m,n}) = \{[x, y] \mid x \in A \text{ et } y \in B\}$ .

Le *graphe de Petersen généralisé*, noté  $P_{n,m}$ , est le graphe ayant pour sommets l'ensemble  $V(P_{n,m}) = \{x_0, \dots, x_{n-1}, y_0, \dots, y_{n-1}\}$  et pour arêtes les éléments de l'ensemble  $E(P_{n,m}) = \{[x_i, y_i], [x_i, x_{i+1}], [y_i, y_{i+m}] \mid 0 \leq i < n\}$ , où  $n \geq 3$ ,  $m \geq 1$  et où l'addition en indice est faite modulo  $n$ . Notons que les graphes de la forme  $P_{n,1}$  sont des *prismes*.

Un *antiprisme*, noté  $AP_n$ , est un graphe ayant pour sommets l'ensemble  $V(AP_n) = \{x_0, \dots, x_{n-1}, y_0, \dots, y_{n-1}\}$  et pour arêtes les éléments de l'ensemble  $E(AP_n) = \{[x_i, x_{i+1}], [y_i, y_{i+1}], [x_i, y_{i+1}], [y_i, x_{i+1}] \mid 0 \leq i < n\}$ , où  $n \geq 3$  et où l'addition en indice est faite modulo  $n$ .

### 1.3. DISTANCE

Maintenant que les concepts de connexité et de géodésique ont été introduits, on présente la notion de distance dans un graphe. La distance entre deux sommets d'un graphe jouera un rôle central dans ce mémoire, car la localisation dans un

graphe connexe est définie en fonction de la distance. Ainsi, à partir de ce moment, les graphes seront implicitement considérés comme connexes.

Soit  $x$  et  $y$  deux sommets d'un graphe  $G$ . La distance de  $x$  à  $y$  dans  $G$ , notée  $\delta_G(x, y)$ , est la longueur d'une  $xy$ -géodésique. Notons qu'il est possible de partitionner les sommets de  $V(G)$  en classes de distance par rapport à un sommet  $x$  en posant

$$N_G^i(x) = \{y \in V(G) \mid \delta_G(x, y) = i\}.$$

L'intervalle entre  $x$  et  $y$ , noté  $I_{xy}$ , est la réunion des ensembles de sommets de toutes les  $xy$ -géodésiques de  $G$ . En fait, il équivaut de dire que

$$I_{xy} = \{z \in V(G) \mid \delta_G(x, y) = \delta_G(x, z) + \delta_G(z, y)\}.$$

La définition équivalente en termes de la distance s'applique plus généralement à tous les espaces métriques.

L'excentricité de  $x$ , notée  $\varepsilon(x)$ , est la longueur d'une géodésique de longueur maximale dans  $G$  et ayant  $x$  à l'une de ses extrémités. Ceci revient à dire que  $\varepsilon(x) = \max\{\delta_G(x, y) \mid y \in V(G)\}$ .

Le diamètre de  $G$ , noté  $\text{diam}(G)$ , est la longueur d'une géodésique de longueur maximale dans  $G$ . En d'autres termes,  $\text{diam}(G) = \max_{x \in V(G)} \varepsilon(x) = \max_{x, y \in V(G)} \delta_G(x, y)$ .

**Remarque 1.3.1.** Pour un graphe  $G$ , la distance possède ces quatre propriétés :

- (1)  $\forall x, y \in V(G), \delta_G(x, y) \in \mathbb{N}$ ;
- (2)  $\forall x, y \in V(G), \delta_G(x, y) = 0 \iff x = y$ ;
- (3)  $\forall x, y \in V(G), \delta_G(x, y) = \delta_G(y, x)$ ;
- (4)  $\forall x, y, z \in V(G), \delta_G(x, y) \leq \delta_G(x, z) + \delta_G(z, y)$ .

Bref,  $(V(G), \delta_G)$  est un espace métrique discret.

## 1.4. SOUS-GRAPHE

Dans cette section, on définit différents types de sous-graphes auxquels on fera référence dans les sections et les chapitres suivants.

Soit  $G = (V, E)$  et  $H = (V', E')$  des graphes. On dit de  $H$  qu'il est un *sous-graphe* de  $G$ , noté  $H \subseteq G$ , si  $V' \subseteq V$  et  $E' \subseteq E$ .

On dit d'un sous-graphe  $H \subseteq G$  qu'il est *partiel* si  $V(H) = V(G)$ .

On dit d'un sous-graphe  $H \subseteq G$  qu'il est *induit* si toutes les arêtes de  $G$  reliant des sommets de  $H$  appartiennent à  $H$ .

Si  $H \subseteq G$  et que ces deux graphes sont connexes, alors la distance est bien définie à la fois dans  $H$  et dans  $G$ . Pour  $x, y \in V(H) \subseteq V(G)$ , soit  $\omega_H$  une  $xy$ -géodésique dans  $H$  et soit  $\delta_H(x, y) = l(\omega_H)$ . Le fait que  $\omega_H$  soit une  $xy$ -géodésique dans  $H$  n'implique pas nécessairement qu'elle en soit une dans  $G$ , c'est-à-dire que  $\delta_G(x, y) \leq l(\omega_H)$ . C'est pourquoi, en général, on a que pour tous  $x, y \in V(H)$ ,  $\delta_G(x, y) \leq \delta_H(x, y)$ .

Pour certains sous-graphes d'un graphe  $G$ , il se peut cependant que l'inégalité ci-haut soit en fait une égalité. Ainsi,  $H$  est un *sous-graphe isométrique* de  $G$  si pour tous  $x, y \in V(H)$ , on a que  $\delta_H(x, y) = \delta_G(x, y)$ .

## 1.5. ENSEMBLES CONVEXES ET PRÉFIBRES

On définit dans cette section ce qu'est un ensemble convexe et une préfibre. On donnera quelques propriétés de ces ensembles, car les sous-graphes induits par les préfibres d'un graphe  $G$  permettront, dans le prochain chapitre, de donner une borne inférieure pour le nombre de localisation de  $G$ . Les définitions et les propriétés ci-dessous, ainsi que la preuve du lemme 1.5.1, se retrouvent dans le mémoire de maîtrise de C. Tardif [Ta].

**Définition 1.5.1.** Soit  $X$  un espace métrique. Un ensemble  $A \subseteq X$  est *convexe* dans  $X$  si pour tous  $a, b \in A$ , on a que  $I_{ab} \subseteq A$ .

**Proposition 1.5.1.** Soit  $G$  un graphe et  $A \subseteq V(G)$  un ensemble convexe dans  $G$ . Alors le sous-graphe  $H \subseteq G$  induit par l'ensemble  $A$  est un sous-graphe isométrique de  $G$ .

DÉMONSTRATION. Si tel n'était pas le cas, il existerait dans  $V(H)$  deux sommets distincts  $x$  et  $y$  tel que  $\delta_G(x, y) < \delta_H(x, y)$ . Ceci impliquerait l'existence d'un sommet  $z$  qui serait sur une  $xy$ -géodésique dans  $G$  et qui ne serait pas dans  $V(H)$ , ce qui est impossible,  $A$  étant convexe dans  $G$ .  $\square$

**Définition 1.5.2.** Soit  $(X, \delta)$  un espace métrique. Un sous-ensemble  $A \subseteq X$  est une *préfibres* de  $X$  si pour tout  $x \in X$ , il existe un élément  $a_x \in A$  tel que pour tout  $y \in A$ , on a que  $\delta(x, y) = \delta(x, a_x) + \delta(a_x, y)$ .

Rappelons qu'à la remarque 1.3.1, on a mentionné que pour un graphe  $G$ ,  $(V(G), \delta_G)$  est un espace métrique. Ainsi, la définition précédente s'applique aux graphes. On notera donc par  $\mathcal{P}_G$  la famille des préfibres de  $G$ .

**Proposition 1.5.2.** Soit  $A$  une préfibres d'un espace métrique  $(X, \delta)$ . Alors pour tout  $x \in X$ , l'élément  $a_x \in A$  mentionné à la définition 1.5.2 est unique. Par conséquent, on peut définir une application  $p_A : X \longrightarrow A$  en posant  $p_A(x) := a_x$ .

DÉMONSTRATION. Supposons qu'il existe  $x \in X$  ayant deux éléments  $a_x, b_x \in A$  satisfaisant la définition 1.5.2. Comme  $A$  est une préfibres de  $X$ , on a que

$$\delta(x, b_x) = \delta(x, a_x) + \delta(a_x, b_x)$$

$$\delta(x, a_x) = \delta(x, b_x) + \delta(b_x, a_x).$$

En remplaçant la deuxième équation dans la première, on obtient que

$$\delta(x, b_x) = \delta(x, b_x) + 2\delta(a_x, b_x),$$

ce qui implique que  $\delta(a_x, b_x) = 0$ . On obtient donc que  $a_x = b_x$ .  $\square$

**Lemme 1.5.1.** *Soit  $A$  une préfibres d'un espace métrique  $(X, \delta)$ . Alors,  $A$  est un ensemble convexe dans  $X$ .*

DÉMONSTRATION. Soit  $a, b \in A$  et  $x \in X$  tel que  $\delta(a, b) = \delta(a, x) + \delta(x, b)$ , c'est-à-dire  $x \in I_{ab}$ . Comme  $A$  est une préfibres de  $X$ , on a que

$$\begin{aligned} \delta(a, b) &= [\delta(a, p_A(x)) + \delta(p_A(x), x)] + [\delta(x, p_A(x)) + \delta(p_A(x), b)] \\ &= \delta(a, p_A(x)) + \delta(p_A(x), b) + 2\delta(x, p_A(x)) \\ &\geq \delta(a, b) + 2\delta(x, p_A(x)) \end{aligned}$$

par l'inégalité du triangle. On a donc nécessairement que  $\delta(x, p_A(x)) = 0$ , c'est-à-dire que  $x = p_A(x) \in A$ . Ainsi,  $I_{ab} \subseteq A$  et  $A$  est convexe.  $\square$

## 1.6. PRÉCONTRACTIONS

On présente ici les derniers concepts de base. En autres, on donne la définition d'une précontraction et d'un homomorphisme de graphe. Ces applications permettront de définir adéquatement ce qu'est une application de localisation dans le prochain chapitre.

Soit  $G$  et  $H$  deux graphes. Une *précontraction* de  $G$  vers  $H$  est une application  $f : V(G) \longrightarrow V(H)$  tel que

$$\forall x, y \in V(G), [x, y] \in E(G) \implies [f(x), f(y)] \in E(H) \text{ ou } f(x) = f(y).$$

En termes métriques, une précontraction entre deux graphes connexes est donc une application non expansive.

Une application  $f : V(G) \longrightarrow V(H)$  est un *homomorphisme* de  $G$  vers  $H$  si

$$\forall x, y \in V(G), [x, y] \in E(G) \implies [f(x), f(y)] \in E(H).$$

Un homomorphisme est donc une précontraction qui préserve l'adjacence. Si l'homomorphisme  $f$  de  $G$  vers  $H$  est injectif, alors ce dernier est appelé un *plongement* de  $G$  dans  $H$  et on le note  $f : V(G) \hookrightarrow V(H)$ .

Finalement, un homomorphisme  $f : V(G) \longrightarrow V(G)$  est un *automorphisme* si  $f$  est bijectif et si pour tous  $x, y \in V(G)$ , on a que

$$[x, y] \in E(G) \iff [f(x), f(y)] \in E(G).$$

Bref, un automorphisme de graphe est une permutation des sommets de ce dernier qui préserve l'adjacence et dont l'inverse préserve aussi l'adjacence. Notons pour terminer que l'ensemble des automorphismes d'un graphe  $G$ , noté  $\text{Aut}(G)$ , muni de la composition de permutations est un groupe.

## Chapitre 2

---

# APPLICATIONS DE LOCALISATION ET PLONGEMENTS

Ce chapitre est une introduction à la notion de localisation dans un graphe fini  $G$ . On veut trouver un système de coordonnées dans lequel plonger  $G$  de manière optimale par rapport à certaines exigences. Comme un graphe est une structure discrète, la façon de faire sera d'utiliser un homomorphisme injectif de  $G$  vers un graphe  $H$  convenablement choisi ayant  $\mathbb{Z}^k$  comme sommets. En fait, on veut étiqueter chaque sommet de  $G$  avec des  $k$ -tuplets distincts. Pour réussir cela, on utilisera une grille forte comme système de coordonnées car, comme on le verra, tout graphe connexe fini peut être plongé dans une telle grille.

### 2.1. PRODUIT FORT DE GRAPHES ET GRILLE FORTE

Dans cette section, on explique ce qu'est un produit fort de graphes, pour ainsi bien définir ce qu'est une grille forte.

Soit  $G$  et  $H$  deux graphes. Le *produit fort* de  $G$  et  $H$ , noté  $G \boxtimes H$ , est le graphe ayant pour sommets  $V(G \boxtimes H) = V(G) \times V(H)$  et dont l'élément  $[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] \in E(G \boxtimes H)$  si l'une des trois conditions suivantes est satisfaite :

- (1)  $x_1 = x_2$  et  $[y_1, y_2] \in E(H)$  ;
- (2)  $[x_1, x_2] \in E(G)$  et  $y_1 = y_2$  ;
- (3)  $[x_1, x_2] \in E(G)$  et  $[y_1, y_2] \in E(H)$ .

**Remarque 2.1.1.** Le produit fort de graphes est associatif et commutatif à isomorphisme près, c'est-à-dire que  $(G_1 \boxtimes G_2) \boxtimes G_3 \cong G_1 \boxtimes (G_2 \boxtimes G_3) \cong G_1 \boxtimes G_2 \boxtimes G_3$  et que  $G_1 \boxtimes G_2 \cong G_2 \boxtimes G_1$ . Ainsi, pour les graphes  $G_1, \dots, G_n$ , il est possible de définir le graphe  $G_1 \boxtimes \dots \boxtimes G_n$  récursivement.

**Exemple 2.1.1.** Voici le produit fort du graphe  $C_3$  et du graphe  $K_2$ . Les arêtes rouges dans  $C_3 \boxtimes K_2$  sont les arêtes « diagonales », c'est-à-dire celles qui correspondent au point (3) de la définition ci-haut.

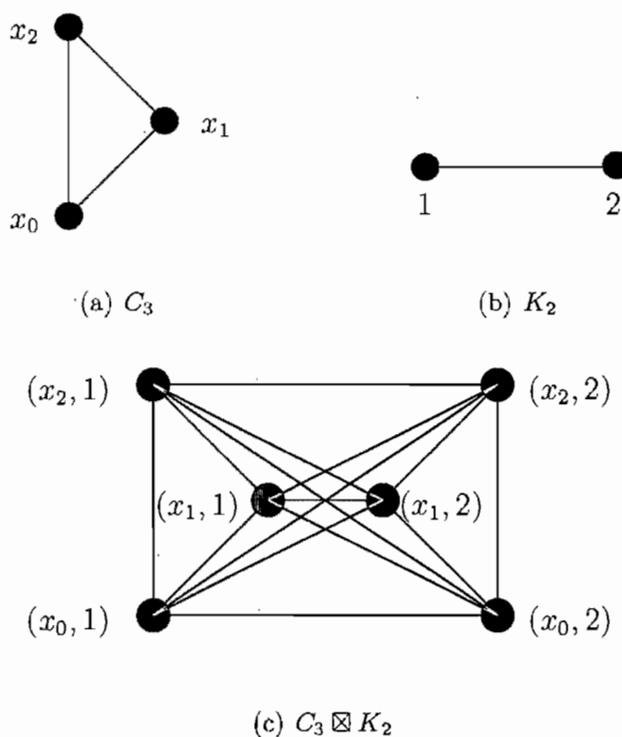


FIG. 2.1.1. Les graphes  $C_3$ ,  $K_2$  ainsi que  $C_3 \boxtimes K_2$ .

Avant d'introduire la définition d'une grille forte, on a besoin de définir le graphe  $D = (\mathbb{Z}, E)$ , nommé *double rayon*. Ce graphe possède comme arêtes les

éléments de l'ensemble  $E(D) = \{[a, b] \mid |a - b| = 1, a, b \in \mathbb{Z}\}$ . Bref, le graphe  $D$  est ni plus ni moins l'axe des entiers.

La *grille forte* de dimension  $k$ , notée  $F^{(k)}$ , est le graphe ayant pour sommets  $V(F^{(k)}) = \mathbb{Z}^k$  et tel que deux sommets  $x = (x_1, \dots, x_k)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{Z}^k$  sont adjacents dans  $F^{(k)}$  si et seulement si  $|x_i - y_i| \leq 1$  pour  $i = 1, \dots, k$ , avec égalité pour au moins un  $i$ . En d'autres termes,  $F^{(k)}$  est le produit fort de  $k$  copies du double rayon, c'est-à-dire que  $F^{(k)} = \boxtimes_{i=1}^k D_i$ , où  $D_i = D$  pour  $i = 1, \dots, k$ .

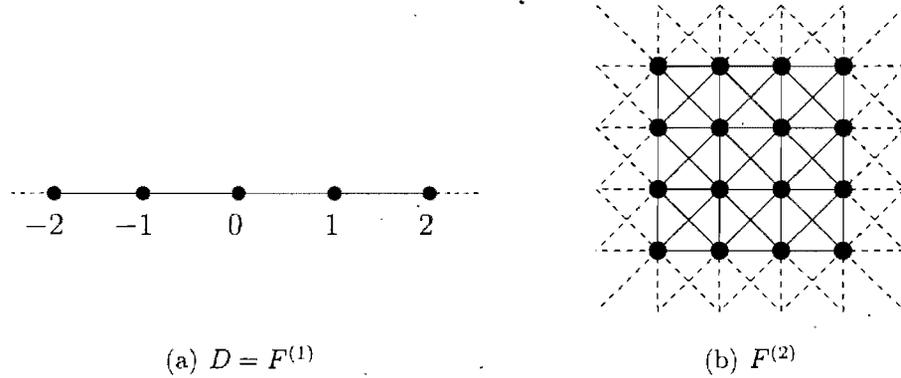


FIG. 2.1.2. Le double rayon et la grille forte de dimension deux.

## 2.2. APPLICATIONS DE LOCALISATION

Soit  $G$  un graphe et  $U = \{u_1, \dots, u_k\}$  un sous-ensemble non vide et fini de sommets de  $G$ . Posons  $F = \boxtimes_{i=1}^k D_{u_i}$ , où  $D_{u_i} = D$ . Notons que  $F = F^{(k)}$ . Définissons maintenant l'application

$$f_U : V(G) \longrightarrow F$$

$$x \longmapsto (\delta_G(x, u_1), \dots, \delta_G(x, u_k))$$

et définissons aussi la projection de  $f_U(x)$  dans  $D_{u_i}$  par  $\text{pr}_{u_i}(f_U(x)) = \delta_G(x, u_i)$ . Comme pour tout  $[x, y] \in E(G)$  on a que  $|\delta_G(x, u_i) - \delta_G(y, u_i)| \leq 1$ , ce qui implique que

$$\forall u_i \in U, \text{pr}_{u_i}(f_U(x)) = \text{pr}_{u_i}(f_U(y)) \text{ ou } [\text{pr}_{u_i}(f_U(x)), \text{pr}_{u_i}(f_U(y))] \in E(D_{u_i}).$$

Ceci revient à dire que ou bien  $f_U(x) = f_U(y)$ , ou bien  $[f_U(x), f_U(y)] \in V(F^{(k)})$ . Ainsi,  $f_U$  est une précontraction. Ce type d'application se nomme *application de localisation*.

**Exemple 2.2.1.** Considérons le graphe  $C_3$  de la figure 2.1.1 et posons  $U = \{x_0\}$ . L'application de localisation  $f_U : V(C_3) \longrightarrow F^{(1)}$  est illustrée ci-dessous.

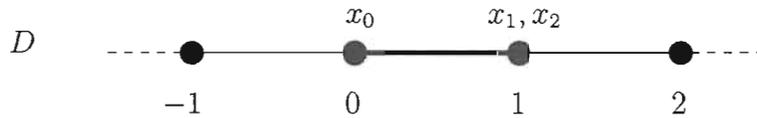


FIG. 2.2.1.  $f_U : V(C_3) \longrightarrow F^{(1)}$

### 2.3. ENSEMBLES RÉSOVANTS

Les applications de localisation étant des précontractions, un problème survient parfois lorsque l'on veut les utiliser comme plongement. En effet, elles ne conservent pas nécessairement la structure du graphe, comme on a pu le constater à l'exemple 2.2.1. Ceci provient du fait que l'ensemble  $U$  fut choisi de façon totalement arbitraire. La restriction que l'on donnera donc aux applications de localisation considérées pour qu'elles conservent la structure du graphe est qu'elles soient injectives. Si tel est le cas, on a alors que  $f_U(x) \neq f_U(y)$  si et seulement si il existe  $u \in U$  tel que  $\text{pr}_u f_U(x) \neq \text{pr}_u f_U(y)$ . Une autre façon de dire serait que  $f_U(x) \neq f_U(y)$  si et seulement si il existe  $u \in U$  tel que  $\delta_G(x, u) \neq \delta_G(y, u)$ .

**Définition 2.3.1.** Soit  $G$  un graphe et soit  $U \subseteq V(G)$  un sous-ensemble fini de sommets de  $G$ . On dit que  $U$  est un *ensemble résolvant* de  $G$  si

$$\forall x, y \in V(G) \text{ distincts, } \exists u \in U \text{ tel que } \delta_G(x, u) \neq \delta_G(y, u).$$

De plus, on dit d'un ensemble résolvent  $U \subseteq V(G)$  qu'il est un *ensemble résolvent minimum* s'il est de cardinalité minimum. On notera par  $\mathcal{R}_G$  la famille des ensembles résolvents minimums d'un graphe  $G$ .

**Remarque 2.3.1.** Un ensemble résolvent peut être minimal par rapport à l'inclusion sans toutefois être minimum. L'ensemble  $U = \{x_1, x_2\}$  est un ensemble résolvent minimal de  $P_4$ , mais il n'est pas minimum. L'ensemble  $U = \{x_0\}$  est un ensemble résolvent minimum de  $P_4$ .

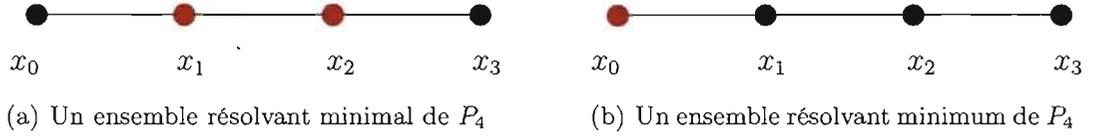


FIG. 2.3.1. Un ensemble résolvent minimal et un ensemble résolvent minimum de  $P_4$ .

Afin d'alléger la notation, on notera par  $\eta_G^{x,y}(u)$  la différence entre la distance de  $x$  à  $u$  et la distance de  $y$  à  $u$  dans un graphe  $G$ . En d'autres termes,

$$\eta_G^{x,y}(u) := \delta_G(x, u) - \delta_G(y, u).$$

Ainsi, un sous-ensemble  $U \subseteq V(G)$  est résolvent si pour toute paire de sommets distincts  $x$  et  $y$  de  $G$ , il existe  $u_i \in U$  tel que  $\eta_G^{x,y}(u_i) \neq 0$ .

**Définition 2.3.2.** Le *nombre de localisation* d'un graphe  $G$ , noté  $\text{loc}(G)$ , est la cardinalité d'un élément de  $\mathcal{R}_G$ .

**Remarque 2.3.2.** Si  $U$  est un ensemble résolvent pour un graphe  $G$ , alors l'ensemble  $\sigma[U]$ , où  $\sigma \in \text{Aut}(G)$ , est aussi résolvent pour  $G$ . Ainsi, pour trouver la famille des ensembles résolvents minimums d'un graphe  $G$ , il suffit de trouver ces ensembles à automorphisme près. De plus, on a que  $\sigma \circ f_U = f_{\sigma[U]}$ . Remarquons

finalement que (dans un graphe ayant au moins une arête) un ensemble résolvant est toujours non vide. On a donc que  $\text{loc}(G) \geq 1$  pour tout graphe  $G$ .

**Remarque 2.3.3.** Lorsque l'on veut montrer qu'un ensemble  $U$  est résolvant pour un graphe  $G$ , il suffit de regarder si cet ensemble est résolvant pour les sommets  $x, y \in V(G) \setminus U$ ,  $x$  et  $y$  distincts. Cela découle du fait que pour tous  $u, v \in U$ , on a que  $\text{pr}_v(f_u) = 0$  si et seulement si  $u = v$ .

Le nombre de localisation est bien défini pour tous les graphes finis<sup>1</sup>. En effet, comme le montre la proposition suivante, un tel graphe possède toujours un ensemble résolvant et donc, il en possède toujours un qui est minimum. Ainsi, à partir de ce moment, les graphes seront implicitement considérés comme finis.

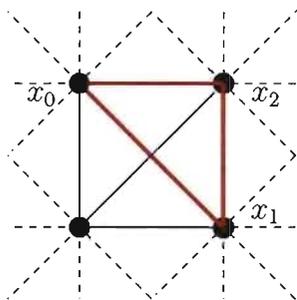
**Proposition 2.3.1.** *Soit  $G$  un graphe. Alors  $G$  possède un ensemble résolvant.*

DÉMONSTRATION. Trivial :  $U = V(G)$  est résolvant,  $G$  étant fini. □

**Exemple 2.3.1.** À l'exemple 2.2.1, l'ensemble  $U$  n'est pas résolvant pour  $C_3$ , car  $f_U(x_1) = f_U(x_2)$ . De plus, l'application  $f_U$  associée à cet ensemble  $U$  n'est pas injective. Posons plutôt  $U = \{x_0, x_1\}$ . La nouvelle application de localisation associée à  $U$  est  $f_U : V(C_3) \hookrightarrow F^{(2)}$  et elle est illustrée à la figure 2.3.2. On voit que cette dernière est injective, car  $f_U(x_0) = (0, 1)$ ,  $f_U(x_1) = (1, 0)$  et  $f_U(x_2) = (1, 1)$ . Ainsi,  $U = \{x_0, x_1\}$  est un ensemble résolvant. Comme aucun sous-ensemble de sommets de cardinalité 1 n'est résolvant pour  $C_3$ ,  $U = \{x_0, x_1\}$  est résolvant minimum et  $\text{loc}(C_3) = 2$ .

---

<sup>1</sup>Le nombre de localisation n'est pas toujours défini dans les graphes infinis. Pour une discussion sur la localisation dans les graphes infinis, voir l'annexe A.

FIG. 2.3.2.  $f_U : V(C_3) \hookrightarrow F^{(2)}$ 

Ainsi, pour un ensemble résolvant  $U$  de  $G$  de cardinalité  $k$ , on obtient que  $f_U : V(G) \rightarrow F^{(k)}$  est un monomorphisme de graphes. En fait,  $f_U$  est un plongement de  $G$  dans une grille forte. Donc, le problème de trouver une application de localisation d'un graphe  $G$  vers une grille forte de dimension  $k$  revient à trouver un ensemble résolvant de  $G$  de cardinalité  $k$ .

Sachant que tous les graphes possèdent au moins un ensemble résolvant, on sait qu'ils peuvent tous être plongés dans une grille forte par l'application de localisation  $f_U$  correspondant à un ensemble résolvant  $U$ . La question qui se pose est de savoir si l'application de localisation est *optimale*, c'est-à-dire qu'elle correspond à un ensemble résolvant minimum. En d'autres termes, l'application de localisation  $f_U$  sera optimale si et seulement si  $U \in \mathcal{R}_G$ .

Formellement, la grille forte  $F$  dans laquelle un graphe est plongé par une application de localisation optimale est de dimension  $\text{loc}(G)$ .

**Remarque 2.3.4.** Le nombre de localisation de  $G$  n'est pas le plus petit  $k$  tel qu'il existe un plongement de  $G$  dans  $F^{(k)}$ , mais bien la cardinalité d'un sous-ensemble fini de sommets de  $G$  qui permet d'obtenir une application de localisation injective optimale de  $G$  dans une grille forte. Ainsi, une grille forte  $F$  de dimension  $\text{loc}(G)$  assure l'existence d'un plongement de  $G$  dans  $F$ , mais il se peut qu'il existe une grille forte de dimension strictement inférieure à celle de  $F$  dans laquelle il est aussi possible de plonger  $G$ .

Les exemples 2.2.1 et 2.3.1 montrent que  $f_U : V(C_3) \hookrightarrow F^{(2)}$  est optimale et qu'il n'existe pas de grille forte de dimension plus petite que 2 dans laquelle il est possible de plonger  $C_3$ . Le prochain exemple montre par contre le plongement d'un graphe  $G$  dans une grille forte de dimension inférieure à  $\text{loc}(G)$ .

**Exemple 2.3.2.** Considérons le graphe  $G$  de la figure 2.3.3 ci-dessous. L'ensemble  $U = \{a, b, c\}$  est un ensemble résolvant minimum de  $G$  et donc  $\text{loc}(G) = 3$ . Cependant, il est possible de plonger  $G$  dans  $F^{(2)}$ .

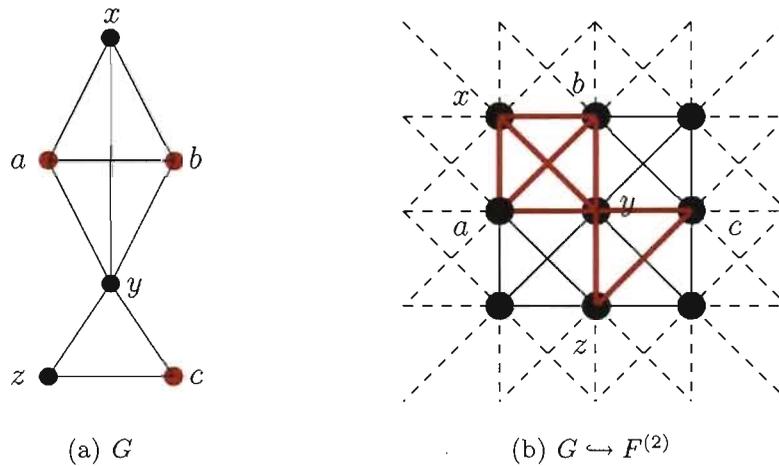


FIG. 2.3.3. Plongement  $G \hookrightarrow F^{(2)}$  tel que  $\text{loc}(G) = 3$ .

En regardant de plus près l'exemple 2.3.2, on remarque que le sous-graphe  $f_U(G)$  dans  $F^{(2)}$  n'est pas induit. En effet, les arêtes  $[a, z]$  et  $[b, c]$  ne font pas partie de  $E(G)$ . On pourrait donc croire que ceci provient du fait que la dimension de la grille forte dans laquelle  $G$  est plongé est inférieure à  $\text{loc}(G)$ . De plus, l'exemple 2.3.1 laisse présager que si l'on plonge un graphe dans une grille forte de même dimension que son nombre de localisation, alors l'image du plongement sera un sous-graphe induit. Malheureusement, il n'en est rien. Le prochain exemple montre le plongement d'un graphe  $G$  dans une grille forte de dimension  $\text{loc}(G)$  tel que l'image de  $G$  n'est pas un sous-graphe induit de la grille forte dans laquelle il est plongé.

**Exemple 2.3.3.** Considérons le graphe  $G$  de la figure 2.3.4 (le plus petit graphe 3-régulier sans automorphisme non trivial). Les deux ensembles  $U = \{a, b\}$  et  $U' = \{c, b\}$  sont les seuls ensembles résolvants minimums de  $G$  et donc on a que  $\text{loc}(G) = 2$ . On remarque que pour les deux plongements, les graphes  $f_U(G)$  et  $f_{U'}(G)$  ne sont pas des sous-graphes induits de  $F^{(2)}$ . Ainsi, l'image d'un graphe sous une application de localisation injective n'est pas nécessairement un sous-graphe induit de la grille forte dans laquelle il est plongé.

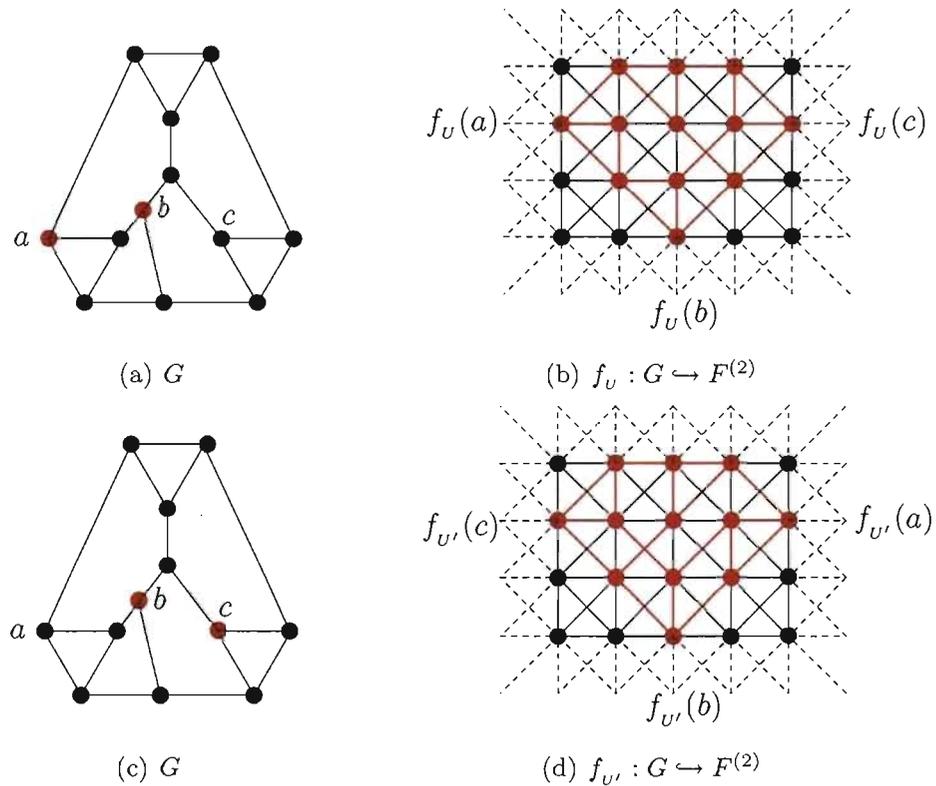


FIG. 2.3.4. Plongements  $f_U : G \hookrightarrow F^{(2)}$  et  $f_{U'} : G \hookrightarrow F^{(2)}$  tel que  $f_U(G)$  et  $f_{U'}(G)$  ne sont pas des sous-graphes induits de  $F^{(2)}$ .

L'exemple 2.3.3 montre que lorsque l'on plonge un graphe  $G$  dans une grille forte au moyen d'une application de localisation injective  $f_U$ , on n'est pas toujours capable de récupérer  $G$  (à isomorphisme près) à partir des coordonnées de ses sommets. En effet, si tel était le cas, on aurait que deux sommets  $x = (x_1, \dots, x_k)$  et  $y = (y_1, \dots, y_k)$  sont adjacents dans  $V(f_U(G))$  si et seulement si  $|x_i - y_i| \leq 1$

pour  $i = 1, \dots, k$ , avec égalité pour au moins un  $i$ . Ceci revient à dire que  $f_v(G)$  est un sous-graphe induit de  $F^{(k)}$ . Ainsi, pour un ensemble résolvant  $U$  de  $G$ , on pourra récupérer le graphe si  $f_v(G)$  est un sous-graphe induit de la grille forte dans laquelle il est plongé. (On peut aussi récupérer  $U$  comme étant l'ensemble des sommets de  $f_v(G)$  ayant une coordonnée zéro.) Comme  $f_v(G)$  n'est pas toujours un sous-graphe induit, c'est-à-dire comme les graphes plongés au moyen d'un ensemble résolvant ne sont pas toujours récupérables, on ne peut pas considérer le nombre de localisation comme une « vraie » dimension. C'est pourquoi on préférera le vocabulaire utilisé par Slater que celui utilisé par les autres auteurs [Ca, Ch, Ha], car les ensembles résolvants ne permettent dans les faits qu'à localiser les sommets d'un graphe.

On termine cette section en donnant quelques bornes sur  $\text{loc}(G)$ . Les deux premières sont des résultats connus et donnent des bornes supérieures élémentaires de  $\text{loc}(G)$ . La troisième est un résultat qui donne une borne inférieure de  $\text{loc}(G)$  et qui est une généralisation de résultats présentés par Cáceres et al. [Ca] ainsi que par Chartrand et al. [Ch].

La proposition 2.3.1 montre que  $V(G)$  est résolvant pour  $G$ . Cependant,  $V(G) \notin \mathcal{R}_G$ . La proposition suivante, démontrée par Chartrand et al. [Ch] ainsi que par Fitzpatrick et Nowakowski [Fi], donne une borne supérieure de  $\text{loc}(G)$ .

**Proposition 2.3.2.** *Soit  $G$  un graphe. Alors  $\text{loc}(G) \leq |V(G)| - \text{diam}(G)$ .*

DÉMONSTRATION. Soit  $u, v \in V(G)$  tel que  $\delta_G(u, v) = \text{diam}(G) = d$  et soit  $ux_1x_2 \cdots x_{d-1}v$  une  $uv$ -géodésique dans  $G$ . Posons  $U = V(G) \setminus \{x_1, \dots, x_{d-1}, v\}$ . Comme  $u \in U$ , on a que  $\delta_G(x_i, u) = i$  pour  $1 \leq i \leq d-1$  et que  $\delta_G(v, u) = d$ . L'ensemble  $U$  est donc résolvant pour  $G$  et  $\text{loc}(G) \leq |U| = |V(G)| - \text{diam}(G)$ .  $\square$

La prochaine proposition [Ch, Fi, Sl] donne une borne inférieure qui, quoique très souvent grossière, donne un argument utile pour calculer  $\text{loc}(G)$  pour certains graphes. Elle dit qu'il n'existe qu'un seul type de graphe  $G$  tel que  $\text{loc}(G) = 1$ .

**Proposition 2.3.3.** *Soit  $G$  un graphe d'ordre  $n \geq 2$ . Alors  $\text{loc}(G) = 1$  si et seulement si  $G = P_n$ .*

DÉMONSTRATION. Soit  $\text{loc}(G) = 1$ . Considérons alors un ensemble résolvant minimum  $U = \{u\}$  de  $G$ . Comme  $G$  est d'ordre  $n$ , on sait que  $\text{diam}(G) \leq n - 1$ . Mais  $U$  étant résolvant minimum et de cardinalité 1, cela implique que l'application  $f_U$  donne une bijection entre  $V(G)$  et l'ensemble  $\{0, \dots, n - 1\}$ . Ainsi, on a nécessairement qu'il existe un  $x \in V(G)$  tel que  $f_U(x) = n - 1$ , ce qui implique que  $\text{diam}(G) = n - 1$ . Le seul graphe d'ordre  $n$  ayant cette propriété est  $P_n$ . Si par contre  $G = P_n$ , alors on sait que  $\text{loc}(P_n) \leq |V(P_n)| - \text{diam}(P_n)$  par la proposition 2.3.2. On obtient donc que  $\text{loc}(P_n) \leq n - (n - 1)$ , c'est-à-dire que  $\text{loc}(P_n) = 1$ .  $\square$

On présente maintenant un théorème et deux corollaires qui donnent une borne inférieure de  $\text{loc}(G)$ . Comme mentionné à la page précédente, il s'agit d'un résultat qui généralise des résultats présentés par Cáceres et al. [Ca] ainsi que par Chartrand et al. [Ch].

**Théorème 2.3.1.** *Soit  $G$  un graphe et  $H \subseteq G$  un sous-graphe induit de  $G$ . Si  $V(H)$  est une préfibres de  $V(G)$  et que  $U$  est un ensemble résolvant de  $G$ , alors l'ensemble  $U' = \{p_{V(H)}(u) \mid u \in U\}$  est résolvant pour  $H$ .*

DÉMONSTRATION. L'ensemble  $U$  étant résolvant pour  $G$ , on a que pour tous  $x, y \in V(H) \subseteq V(G)$  et  $x \neq y$ , il existe  $u \in U$  tel que  $\delta_G(u, x) \neq \delta_G(u, y)$ . Comme  $V(H)$  est une préfibres de  $V(G)$ , on a donc que

$$\begin{aligned}
\delta_G(u, p_{V(H)}(u)) + \delta_G(p_{V(H)}(u), x) &= \delta_G(u, x) \\
&\neq \delta_G(u, y) \\
&= \delta_G(u, p_{V(H)}(u)) + \delta_G(p_{V(H)}(u), y),
\end{aligned}$$

ce qui implique que  $\eta_G^{x,y}(p_{V(H)}(u)) \neq 0$ . Par le lemme 1.5.1, on sait que  $V(H)$  est un sous-ensemble convexe de  $V(G)$  et donc,  $H$  est un sous-graphe isométrique de  $G$ . On obtient ainsi que  $\eta_H^{x,y}(p_{V(H)}(u)) \neq 0$ , ce qui montre que  $U'$  est un ensemble résolvant de  $H$ .  $\square$

**Corollaire 2.3.1.** *Soit  $G$  un graphe et  $H \subseteq G$  un sous-graphe induit de  $G$ . Si  $V(H)$  est une préfibres de  $V(G)$ , alors  $\text{loc}(G) \geq \text{loc}(H)$ .*

DÉMONSTRATION. Soit  $U \in \mathcal{R}_G$  et formons  $U'$  comme au théorème 2.3.1. Comme  $V(H)$  est une préfibres de  $V(G)$ , on a que  $U'$  est résolvant pour  $H$ . Par la proposition 1.5.2, on a que pour tout  $u \in U$ , l'élément  $p_{V(H)}(u)$  est unique. Ainsi  $|U| \geq |U'|$ , ce qui implique que  $\text{loc}(G) \geq \text{loc}(H)$ .  $\square$

Le corollaire précédent indique que peu importe l'élément  $X \in \mathcal{P}_G$  que l'on considère, le nombre de localisation du sous-graphe  $H_X$  induit par  $X$  dans  $G$  sera toujours inférieur à  $\text{loc}(G)$ . Ainsi, une façon de trouver une autre borne inférieure de  $\text{loc}(G)$  est de regarder tous les sous-graphes induits par les préfibres de  $G$  distinctes de  $V(G)$ .

**Corollaire 2.3.2.** *Soit  $G$  un graphe et soit  $H_X$  le sous-graphe induit par  $X \in \mathcal{P}_G$ .*

*Alors  $\text{loc}(G) \geq \max_{\substack{X \in \mathcal{P}_G \\ X \neq V(G)}} \text{loc}(H_X)$ .*

DÉMONSTRATION. Trivial : Cela découle directement du corollaire 2.3.1.  $\square$

## 2.4. ENSEMBLES DOUBLEMENT RÉSOLVANTS

On présente ici un autre type d'ensembles résolvents qui seront utiles quand viendra le temps de calculer le nombre de localisation d'un graphe. Il s'agit des ensembles doublement résolvents.

**Définition 2.4.1.** Soit  $G$  un graphe et soit  $U \subseteq V(G)$  un sous-ensemble fini de sommets de  $G$ . Ce sous-ensemble de  $G$  est dit *doublement résolvent* si pour tous  $x, y \in V(G)$  distincts, il existe  $u_1, u_2 \in U$  (nécessairement distincts) tel que

$$\delta_G(x, u_1) - \delta_G(y, u_1) \neq \delta_G(x, u_2) - \delta_G(y, u_2).$$

En d'autres termes, un sous-ensemble  $U \subseteq V(G)$  est doublement résolvent si pour tous  $x, y \in V(G)$  distincts,  $\eta_G^{x,y}$  n'est pas constant sur  $U$ .

De façon similaire à la définition d'un ensemble résolvent minimum, un ensemble doublement résolvent est *doublement résolvent minimum* s'il est de cardinalité minimum. On notera par  $\mathcal{D}_G$  la famille des ensembles doublement résolvents minimums d'un graphe  $G$ .

**Définition 2.4.2.** Le *nombre de double localisation* d'un graphe  $G$ , noté  $\text{loc}_d(G)$ , est la cardinalité d'un élément de  $\mathcal{D}_G$ .

Notons que pour expliciter les éléments de  $\mathcal{D}_G$ , il suffit de trouver les ensembles doublement résolvents minimums de  $G$  à automorphismes près<sup>2</sup>.

Une propriété d'un ensemble doublement résolvent est d'être un ensemble résolvent. En effet, si  $U \in \mathcal{D}_G$ , alors pour tous  $x, y \in V(G)$  distincts,  $\eta_G^{x,y}(u)$  n'est pas constant sur  $U$ . Ainsi, pour tous  $x, y \in V(G)$  distincts, il existe nécessairement un élément  $v \in U$  tel que  $\eta_G^{x,y}(v) \neq 0$  et donc  $U$  est un ensemble résolvent de  $G$ . Cette dernière observation permet d'énoncer la proposition suivante.

---

<sup>2</sup>Voir la remarque 2.3.2. Elle s'applique également aux ensembles doublement résolvents.

**Proposition 2.4.1.** *Soit  $G$  un graphe. Alors  $\text{loc}_d(G) \geq \text{loc}(G)$ .*

Remarquons que si  $\text{loc}_d(G) = \text{loc}(G)$ , alors  $\mathcal{D}_G \subseteq \mathcal{R}_G$ . Sinon, c'est-à-dire si  $\text{loc}_d(G) > \text{loc}(G)$ , alors on a que  $\mathcal{D}_G \cap \mathcal{R}_G = \emptyset$ .

Avant de donner un exemple illustrant la dernière proposition, remarquons que tous les graphes possèdent au moins un ensemble doublement résolvant, à savoir  $V(G)$  lui-même. En effet, on a toujours que  $\eta_G^{x,y}(x) \neq \eta_G^{x,y}(y)$ . Ainsi, comme  $G$  est fini, il possède nécessairement un ensemble doublement résolvant minimum.

**Exemple 2.4.1.** Considérons le graphe  $C_4$ . On a que  $U = \{x_0, x_1\}$  est le seul élément de  $\mathcal{R}_{C_4}$ , à automorphisme près. On a donc que  $\text{loc}(C_4) = 2$ . De plus, l'ensemble  $U = \{x_0, x_1, x_2\}$  est le seul élément de  $\mathcal{D}_{C_4}$  à automorphisme près. Ainsi,  $\text{loc}(C_4) < \text{loc}_d(C_4)$  et on voit que la borne de la proposition 2.4.1 n'est pas toujours atteinte. En regardant cependant l'application de localisation définie à

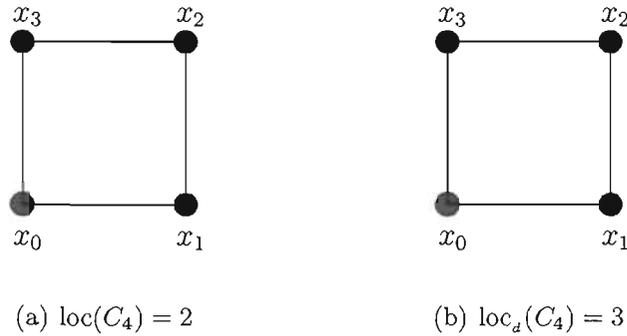


FIG. 2.4.1. Les éléments de  $\mathcal{R}_{C_4}$  et  $\mathcal{D}_{C_4}$  à automorphisme près.

l'exemple 2.3.1 pour le graphe  $C_3$ , on remarque que l'ensemble résolvant minimum  $U$  qui y est présenté est aussi un ensemble doublement résolvant minimum. Ainsi,  $C_3$  est un exemple de graphe qui montre que la borne de la proposition 2.4.1 est atteignable. En fait, on a, pour  $n \geq 2$ , que  $\text{loc}(C_{2n}) < \text{loc}_d(C_{2n})$  et que  $\text{loc}(C_{2n-1}) = \text{loc}_d(C_{2n-1})$ . Supposons que  $i < j < k$  et considérons un cycle paire  $C_{2n}$ . On a que  $\{x_i, x_j\} \in \mathcal{R}_{C_{2n}}$  si et seulement si  $j \neq i + n$ . Ainsi, on obtient que  $\eta_G^{x_{j+1}, x_j}(x_j) = 1$  et que  $\eta_G^{x_{j+1}, x_j}(x_i) = 1$ , ce qui revient à dire que  $\eta_G^{x_{j+1}, x_j}$

est constant sur  $\{x_i, x_j\}$ . On a de plus que  $\{x_i, x_j, x_k\} \in \mathcal{D}_{C_{2n}}$  si et seulement si  $j \neq i + n$  et si  $k = i + n$  ou si  $k = j + n$ . On obtient donc que  $\text{loc}(C_{2n}) = 2$  et que  $\text{loc}_d(C_{2n}) = 3$ . Pour ce qui est des cycles impairs, on a que  $\{x_i, x_j\} \in \mathcal{R}_{C_{2n-1}}$  si et seulement si  $i \neq j$  et on a que  $\{x_i, x_j\} \in \mathcal{D}_{C_{2n-1}}$  si et seulement si  $j = i + n - 1$  ou si  $j = i + n$ . Ainsi,  $\text{loc}(C_{2n-1}) = \text{loc}_d(C_{2n-1}) = 2$ .

**Remarque 2.4.1.** Lorsque l'on veut montrer qu'un ensemble  $U$  est doublement résolvent pour  $G$ , il suffit de regarder si  $\eta_G^{x,y}$  est non constant sur  $U$  pour tous les sommets  $x, y \in V(G) \setminus U$ ,  $x$  et  $y$  distincts. Cela découle du fait que pour tous  $u, v \in U$  distincts, on a que  $\eta_G^{u,v}(u) = -\eta_G^{u,v}(v)$ .

Bien que l'application  $f_U$  associée à un ensemble doublement résolvent minimum soit une application de localisation, cette dernière n'est optimale que lorsque l'on a  $\text{loc}(G) = \text{loc}_d(G)$ . On pourrait cependant penser que les ensembles doublement résolvents sont mieux que les ensembles résolvents pour récupérer un graphe après l'avoir plongé dans une grille forte, mais il n'en est rien. L'exemple suivant montre en fait que les applications de localisation associées aux ensembles doublement résolvents d'un graphe peuvent faire pire que celles associées aux ensembles résolvents. Ainsi, l'intérêt pour les ensembles doublement résolvents minimums réside essentiellement dans le fait qu'ils donnent une borne supérieure pour  $\text{loc}(G)$ .

**Exemple 2.4.2.** Considérons le graphe  $C_5$  aux figures 2.4.2 et 2.4.3. On a que les ensembles  $U = \{x_0, x_1\}$  et  $U' = \{x_0, x_2\}$  sont les seuls éléments de  $\mathcal{R}_{C_5}$ , à automorphisme près. De plus,  $U'$  est doublement résolvent. On voit que les sous-graphes  $f_U(G)$  et  $f_{U'}(G)$  ne sont pas induits dans  $F^{(2)}$ . Cependant, dans le premier cas, seule l'arête  $[x_2, x_4]$  fait défaut. Dans le deuxième cas, deux arêtes font défaut, à savoir les arêtes  $[x_1, x_3]$  et  $[x_1, x_4]$ .

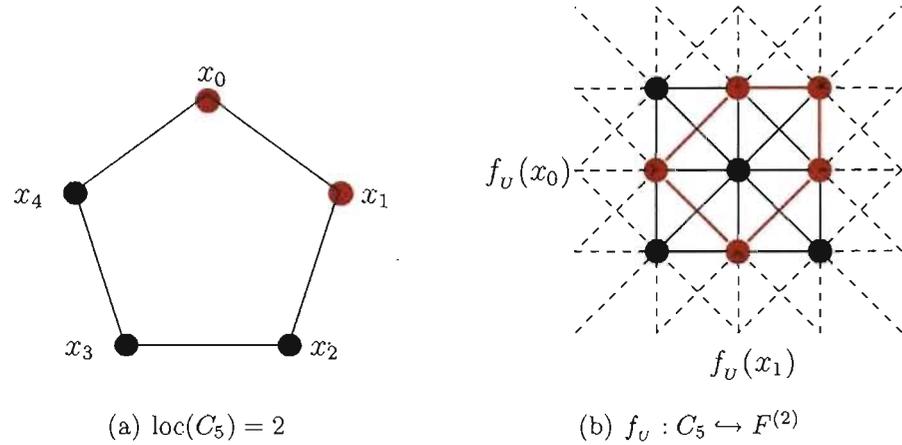


FIG. 2.4.2. Plongement de  $C_5$  dans  $F^{(2)}$  utilisant  $U = \{x_0, x_1\}$ .

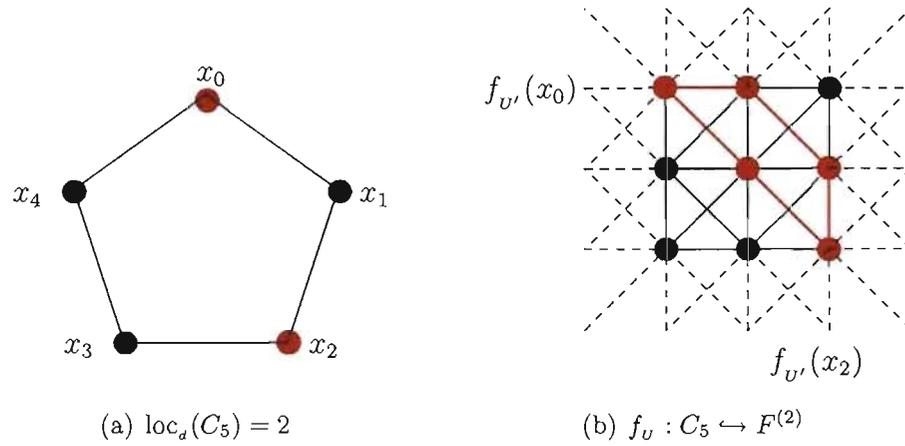


FIG. 2.4.3. Plongement de  $C_5$  dans  $F^{(2)}$  utilisant  $U' = \{x_0, x_2\}$ .

On présente maintenant des résultats analogues au théorème 2.3.1 et aux corollaires 2.3.1 et 2.3.2 qui donnent une borne inférieure de  $\text{loc}_d(G)$ .

**Théorème 2.4.1.** *Soit  $G$  un graphe et  $H \subseteq G$  un sous-graphe induit de  $G$ . Si  $V(H)$  est une préfibres de  $V(G)$  et que  $U$  est un ensemble doublement résolvant de  $G$ , alors l'ensemble  $U' = \{p_{V(H)}(u) \mid u \in U\}$  est doublement résolvant pour  $H$ .*

**DÉMONSTRATION.** L'ensemble  $U$  étant doublement résolvant pour  $G$ , on a que pour tous  $x, y \in V(H) \subseteq V(G)$  et  $x \neq y$ ,  $\eta_G^{x,y}$  n'est pas constante sur  $U$ . Ainsi, on

a que pour tous  $x, y \in V(G)$  et  $x \neq y$ , il existe  $u, v \in U$  tel que  $\eta_G^{x,y}(u) \neq \eta_G^{x,y}(v)$ . Comme  $V(H)$  est une préfibres de  $V(G)$ , on a donc, par un raisonnement similaire à celui fait dans la preuve du théorème 2.3.1, que

$$\delta_G(x, p_{V(H)}(u)) - \delta_G(y, p_{V(H)}(u)) \neq \delta_G(x, p_{V(H)}(v)) - \delta_G(y, p_{V(H)}(v)),$$

ce qui implique que

$$\delta_H(x, p_{V(H)}(u)) - \delta_H(y, p_{V(H)}(u)) \neq \delta_H(x, p_{V(H)}(v)) - \delta_H(y, p_{V(H)}(v)),$$

car  $H$  est un sous-graphe isométrique de  $G$ ,  $V(H)$  étant une préfibres de  $V(G)$ . On obtient donc que  $\eta_H^{x,y}(p_{V(H)}(u)) \neq \eta_H^{x,y}(p_{V(H)}(v))$ , ce qui montre que  $\eta_H^{x,y}$  n'est pas constant sur  $U'$ . Ainsi  $U'$  est doublement résolvent pour  $H$ .  $\square$

**Corollaire 2.4.1.** *Soit  $G$  un graphe et  $H \subseteq G$  un sous-graphe induit de  $G$ . Si  $V(H)$  est une préfibres de  $V(G)$ , alors  $\text{loc}_a(G) \geq \text{loc}_a(H)$ .*

DÉMONSTRATION. La preuve est identique à celle du corollaire 2.3.1.  $\square$

**Corollaire 2.4.2.** *Soit  $G$  un graphe et soit  $H_X$  le sous-graphe induit par  $X \in \mathcal{P}_G$ .*

*Alors  $\text{loc}_a(G) \geq \max_{\substack{X \in \mathcal{P}_G \\ X \neq V(G)}} \text{loc}_a(H_X)$ .*

DÉMONSTRATION. Trivial : Cela découle directement du corollaire 2.4.1.  $\square$

On termine cette section avec un résultat qui dit que les ensembles doublement résolvents d'un graphe  $G$  ne peuvent pas être situés n'importe où dans celui-ci.

**Théorème 2.4.2.** *Soit  $G$  un graphe,  $U$  un ensemble doublement résolvent de  $G$  et  $X$  une préfibres de  $V(G)$ . Alors  $U \subseteq X$  si et seulement si  $X = V(G)$ .*

DÉMONSTRATION. Si  $U = V(G)$  ou si  $X = V(G)$ , alors il n'y a rien à montrer. Supposons donc que  $U \neq V(G)$  et que  $X \neq V(G)$ . Il existe donc un sommet  $a$  qui est dans  $V(G) \setminus X$ . Si  $U \subseteq X$ , alors  $\eta_G^{a, p_X(a)}(u) = \delta_G(a, p_X(a))$  pour tout  $u \in U$ , car  $X$  est une préfibres de  $V(G)$ . Ceci revient à dire que  $\eta_G^{a, p_X(a)}$  est constant sur  $U$ , ce qui est impossible,  $U$  étant doublement résolvant pour  $G$ . Ainsi donc, on a que  $U \not\subseteq X$ .  $\square$

# Chapitre 3

---

## LOCALISATION DANS LES GRAPHES ANTIPODAUX

Ce chapitre concerne les graphes antipodaux. Après avoir donné les définitions d'usage, on donnera quelques caractéristiques des ensembles résolvants minimums et doublement résolvants minimums pour de tels graphes. L'étude de cette classe de graphes donnera des outils pour résoudre un problème au chapitre suivant.

### 3.1. DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS

**Définition 3.1.1.** On dit d'un graphe  $G$  qu'il est *antipodal* s'il a au moins deux sommets et si pour tout  $a \in V(G)$ , il existe  $b \in V(G)$  tel que  $I_{ab} = V(G)$ . Ceci est équivalent à dire que pour tout  $x \in V(G)$ , on a que  $\delta_G(a, b) = \delta_G(a, x) + \delta_G(x, b)$ .

La classe des graphes antipodaux est assez vaste. En effet,  $K_2$ , les cycles pairs  $C_{2n}$ , les prismes pairs  $P_{2n,1}$ , les antiprismes impairs  $AP_{2n+1}$  ainsi que les graphes de tous les solides platoniques à l'exception du tétraèdre sont des graphes antipodaux. De plus, si  $G$  et  $H$  sont des graphes antipodaux, alors leur produit cartésien  $G \square H^1$  est aussi un graphe antipodal<sup>2</sup>.

---

<sup>1</sup>Pour une définition du produit cartésien de graphes, voir la section 4.1.

<sup>2</sup>Voir la proposition 4.1.3.

**Proposition 3.1.1.** *Soit  $G$  un graphe antipodal et soit  $a \in V(G)$ . Alors, le sommet  $b \in V(G)$  tel que  $I_{ab} = V(G)$  est unique.*

DÉMONSTRATION. Supposons qu'il existe  $b_1, b_2 \in V(G)$  tel que  $I_{ab_i} = V(G)$ ,  $i = 1, 2$ . Alors, on a

$$\delta_G(a, b_1) = \delta_G(a, b_2) + \delta_G(b_2, b_1)$$

$$\delta_G(a, b_2) = \delta_G(a, b_1) + \delta_G(b_1, b_2)$$

ce qui implique que  $\delta_G(a, b_1) + \delta_G(a, b_2) = \delta_G(a, b_2) + \delta_G(a, b_1) + 2\delta_G(b_1, b_2)$ . On a ainsi que  $\delta_G(b_1, b_2) = 0$  et donc que  $b_1 = b_2$ .  $\square$

Dans un graphe antipodal, on dénote l'unique sommet  $b \in V(G)$  tel que  $I_{ab} = V(G)$  par  $\bar{a}$ . On appelle ce sommet l'*antipode* de  $a$ .

**Remarque 3.1.1.** Dans un graphe antipodal, chaque sommet est couplé à un unique antipode différent. Ainsi, l'ordre d'un graphe antipodal est toujours pair.

**Lemme 3.1.1.** *Dans un graphe antipodal  $G$ , l'application*

$$\alpha : V(G) \longrightarrow V(G)$$

$$x \longmapsto \bar{x}$$

*est un automorphisme de graphe.*

DÉMONSTRATION. Soit  $G$  un graphe antipodal et soit  $x, y \in V(G)$ . Alors on a que

$$\delta_G(x, y) + \delta_G(y, \bar{x}) = \delta_G(x, \bar{y}) + \delta_G(\bar{y}, \bar{x})$$

$$\delta_G(y, x) + \delta_G(x, \bar{y}) = \delta_G(y, \bar{x}) + \delta_G(\bar{x}, \bar{y}).$$

En additionnant ces deux équations, on obtient que

$$2\delta_G(x, y) + \delta_G(y, \bar{x}) + \delta_G(x, \bar{y}) = \delta_G(x, \bar{y}) + \delta_G(y, \bar{x}) + 2\delta_G(\bar{y}, \bar{x}),$$

ce qui implique que  $\delta_G(x, y) = \delta_G(\bar{y}, \bar{x})$ . Ainsi, pour tous  $x, y \in V(G)$ , on a que  $[x, y] \in E(G)$  implique que  $[\bar{x}, \bar{y}] \in E(G)$ . On obtient donc que l'application  $\alpha$  est un homomorphisme, car elle préserve l'adjacence. De plus, par la remarque 3.1.1, on a que  $\alpha \circ \alpha(x) = \alpha(\bar{x}) = x$  et on a donc que  $\alpha = \alpha^{-1}$ . Ainsi, pour  $x, y \in V(G)$ , on a que  $\alpha(x) = \alpha(y)$  implique que  $\alpha \circ \alpha(x) = \alpha \circ \alpha(y)$ , ce qui implique à son tour que  $x = y$ . On a donc que l'homomorphisme  $\alpha$  est injectif et comme  $G$  est fini, on a aussi que  $\alpha$  est bijectif. Finalement, comme  $\alpha = \alpha^{-1}$ , on a que  $\alpha^{-1}$  est un homomorphisme bijectif, ce qui implique que  $\alpha$  est un automorphisme.  $\square$

**Proposition 3.1.2.** *Soit  $G$  un graphe antipodal. Alors, pour tout  $a \in V(G)$ , on a que  $\delta_G(a, \bar{a}) = \text{diam}(G)$ .*

DÉMONSTRATION. Si tel n'était pas le cas, il existerait  $x, y \in V(G)$  tels que  $\delta_G(x, y) > \delta_G(a, \bar{a})$ . Comme  $G$  est antipodal et que tout graphe satisfait à l'inégalité du triangle, on obtiendrait que

$$\delta_G(x, a) + \delta_G(a, y) \geq \delta_G(x, y) > \delta_G(a, \bar{a}) = \delta_G(a, x) + \delta_G(x, \bar{a})$$

$$\delta_G(x, \bar{a}) + \delta_G(\bar{a}, y) \geq \delta_G(x, y) > \delta_G(a, \bar{a}) = \delta_G(a, y) + \delta_G(y, \bar{a})$$

ce qui permettrait de dire que  $\delta_G(a, y) > \delta_G(x, \bar{a})$  et que  $\delta_G(x, \bar{a}) > \delta_G(a, y)$ , ce qui est bien sûr impossible.  $\square$

**Lemme 3.1.2.** *Soit  $G$  un graphe antipodal. Alors  $\eta_G^{x,y}(a) = -\eta_G^{x,y}(\bar{a})$  pour tout  $a \in V(G)$ .*

DÉMONSTRATION. On a, pour tout  $a \in V(G)$ , que  $\eta_G^{x,y}(a) = \delta_G(x, a) - \delta_G(y, a)$ . Par la proposition 3.1.2, on sait que  $\delta_G(a, \bar{a}) = \text{diam}(G)$ . Ainsi, on obtient que

$$\begin{aligned} \eta_G^{x,y}(a) &= (\delta_G(x, a) - \text{diam}(G)) - (\delta_G(y, a) - \text{diam}(G)) \\ &= (\delta_G(x, a) - \delta_G(a, \bar{a})) - (\delta_G(y, a) - \delta_G(a, \bar{a})) \\ &= -\delta_G(x, \bar{a}) + \delta_G(y, \bar{a}), \end{aligned}$$

car  $G$  est antipodal. On a donc que  $\eta_G^{x,y}(a) = -\delta_G(x, \bar{a}) + \delta_G(y, \bar{a})$ , ce qui revient à dire que  $\eta_G^{x,y}(a) = -\eta_G^{x,y}(\bar{a})$ .  $\square$

### 3.2. ENSEMBLES RÉSOVANTS ET DOUBLEMENT RÉSOVANTS

On donne dans cette section des propriétés que possèdent les ensembles résolvents minimums ainsi que des propriétés des ensembles doublement résolvents minimums d'un graphe antipodal  $G$ . On constatera que pour cette classe de graphes, la cardinalité d'un élément de  $\mathcal{D}_G$  est étroitement liée à  $\text{loc}(G)$ .

On débute par une proposition donnant une caractérisation des ensembles résolvents minimums d'un graphe antipodal  $G$ . Cette proposition sera suivie d'un corollaire qui donne une borne supérieure pour  $\text{loc}(G)$ .

**Proposition 3.2.1.** *Soit  $G$  un graphe antipodal et soit  $U \in \mathcal{R}_G$ . Alors,  $U$  ne contient aucune paire d'antipodes.*

DÉMONSTRATION. Considérons un sommet  $a \in U$ . Comme  $U$  est résolvant minimum pour  $G$ , alors il existe  $x, y \in V(G)$  tel que  $\eta_G^{x,y}(a) \neq 0$  et tel que  $\eta_G^{x,y}(u) = 0$  pour tout  $u \in U \setminus \{a\}$ . Comme  $G$  est antipodal, on a, par le lemme 3.1.2, que  $\eta_G^{x,y}(\bar{a}) \neq 0$ . Ainsi, on conclut que  $\bar{a} \notin U$ , car  $U$  est un ensemble résolvant minimum de  $G$ .  $\square$

**Corollaire 3.2.1.** *Si  $G$  est un graphe antipodal d'ordre  $n \geq 2$ , alors  $\text{loc}(G) \leq \frac{n}{2}$ .*

DÉMONSTRATION. Soit  $U$  un ensemble résolvent de  $G$ . Si  $a \in U$ , alors on sait par la proposition 3.2.1 que  $\bar{a} \notin U$ . La remarque 3.1.1 termine la preuve.  $\square$

**Remarque 3.2.1.** La borne du corollaire 3.2.1 est très grossière. Par exemple, elle donne que  $\text{loc}(C_{2n}) \leq n$ , alors que  $\text{loc}(C_{2n}) = 2$ , comme montré à l'exemple 2.4.1. La borne est cependant atteinte dans le cas où  $n = 2$ .

On poursuit maintenant avec un théorème et un corollaire qui donnent un résultat portant sur les ensembles doublement résolvent d'un graphe antipodal.

**Théorème 3.2.1.** *Soit  $G$  un graphe antipodal,  $U$  un ensemble résolvent de  $G$  et  $a \in U$ . Alors, l'ensemble  $U_a := U \cup \{\bar{a}\}$  est doublement résolvent pour  $G$ .*

DÉMONSTRATION. Soit  $x$  et  $y$  deux sommets distincts de  $G$ . Si  $\eta_G^{x,y}$  n'est pas constant sur  $U$ , alors la paire  $\{x, y\}$  est doublement résolue par  $U$  et donc, elle l'est aussi par  $U_a$ . Sinon, on sait que pour tout  $u \in U$ ,  $\eta_G^{x,y}(u)$  est une constante non nulle, disons  $\eta_G^{x,y}(u) = \beta$ , car  $U$  est résolvent pour  $G$ . En particulier, on a que  $\eta_G^{x,y}(a) = \beta$ , car  $a \in U$ . Comme  $G$  est antipodal, on a que  $\eta_G^{x,y}(\bar{a}) = -\beta$ , par le lemme 3.1.2. On obtient donc que  $\eta_G^{x,y}$  n'est pas constant sur  $U_a$  et donc,  $U_a$  est doublement résolvent pour  $G$ .  $\square$

**Corollaire 3.2.2.** *Si  $G$  est antipodal, alors  $\text{loc}(G) \leq \text{loc}_a(G) \leq \text{loc}(G) + 1$ .*

DÉMONSTRATION. Soit  $U \in \mathcal{R}_G$  et  $a \in U$ . Formons  $U_a$  comme au théorème 3.2.1. L'ensemble  $U_a$  étant doublement résolvent pour  $G$ , on a que  $\text{loc}_a(G) \leq |U_a|$ . Comme  $a \in U$  et que  $U \in \mathcal{R}_G$ , on sait que  $\bar{a} \notin U$ , par la proposition 3.2.1. Ainsi, on obtient que  $|U_a| = \text{loc}(G) + 1$ , ce qui montre la borne supérieure. La borne inférieure, quant à elle, a été prouvée à la proposition 2.4.1.  $\square$

**Remarque 3.2.2.** La réciproque du corollaire 3.2.2 n'est cependant pas vraie. On peut voir à la figure 3.2.1 que le graphe de Petersen généralisé  $P_{8,3}$  n'est pas un graphe antipodal, mais que  $\text{loc}_d(P_{8,3}) = \text{loc}(P_{8,3}) + 1$ . En fait, le graphe  $P_{8,3}$  est presque un graphe antipodal. En effet, tout sommet  $x \in V(P_{8,3})$  possède un unique sommet  $\bar{x}$  tel que  $\delta_{P_{8,3}}(x, \bar{x}) = \text{diam}(P_{8,3}) = 4$ . De plus, on a que l'application  $\alpha : x \mapsto \bar{x}$  est un automorphisme de  $P_{8,3}$ . Cependant,  $I_{x\bar{x}} = V(P_{8,3}) \setminus \{z, \bar{z}\}$ .

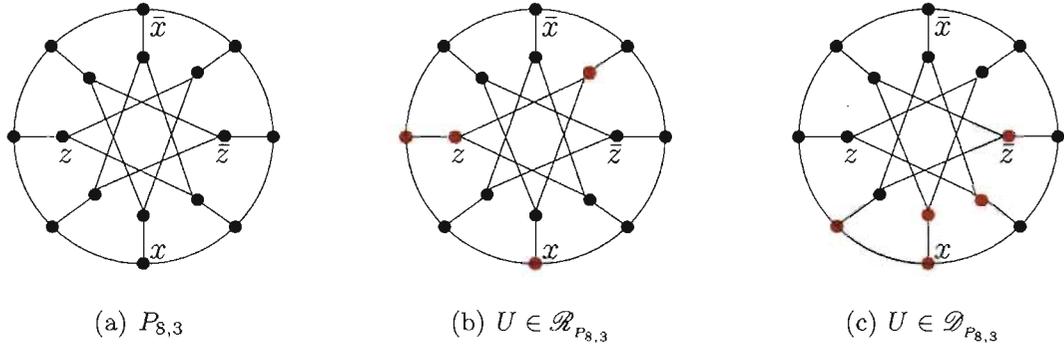


FIG. 3.2.1. Le graphe  $P_{8,3}$ .

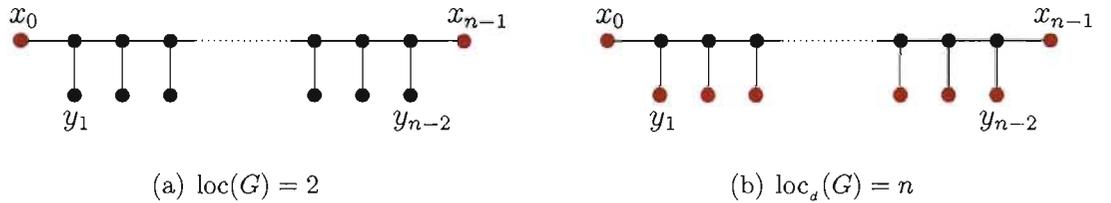


FIG. 3.2.2. Un peigne  $G$  tel que  $\text{loc}(G) = 2$  et tel que  $\text{loc}_d(G) = n$ .

**Remarque 3.2.3.** Sans l'hypothèse que  $G$  est un graphe antipodal, l'écart entre  $\text{loc}(G)$  et  $\text{loc}_d(G)$  peut être arbitrairement grand. Considérons un peigne ayant pour sommets  $V(G) = \{x_0, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_{n-2}\}$ , comme illustré à la figure 3.2.2. On a que  $\mathcal{R}_G = \{\{x_0, x_{n-1}\}, \{x_0, y_{n-2}\}, \{y_1, x_{n-1}\}, \{y_1, y_{n-2}\}\}$ . Par contre,  $G$  ne possède qu'un seul ensemble doublement résolvant, à savoir l'ensemble  $\{x_0, x_{n-1}, y_1, \dots, y_{n-2}\}$ . Ainsi, on obtient que  $\text{loc}(G) = 2$  et que  $\text{loc}_d(G) = n$ .

Au théorème 3.2.1, on a créé un ensemble doublement résolvant en ajoutant à un ensemble résolvant l'antipode d'un de ses éléments. La proposition suivante est un résultat qui prouve qu'un ensemble doublement résolvant minimum possède au plus une paire d'antipodes.

**Proposition 3.2.2.** *Soit  $G$  un graphe antipodal et soit  $U \in \mathcal{D}_G$ . Alors,  $U$  contient au plus une paire d'antipodes.*

DÉMONSTRATION. Supposons que  $U$  possède deux paires de sommets antipodaux. Soit  $\{a, \bar{a}\}$  et  $\{b, \bar{b}\}$  ces paires et posons  $U' = U \setminus \{\bar{b}\}$ . Comme  $U$  est de cardinalité minimum,  $U'$  n'est pas doublement résolvant. Ainsi, il existe  $x, y \in V(G)$  tel que  $\eta_G^{x,y}$  est constant sur  $U'$ . En particulier, on a que  $\eta_G^{x,y}(a) = \eta_G^{x,y}(\bar{a})$ . Par le lemme 3.1.2, on a forcément que  $\eta_G^{x,y}(a) = 0$ . On obtient donc que  $\eta_G^{x,y}(u) = 0$  pour tout  $u \in U'$ . Comme  $U$  est un ensemble résolvant de  $G$ , alors il existe  $u \in U$  tel que  $\eta_G^{x,y}(u) \neq 0$ . Ceci implique que  $u = \bar{b}$  et que  $\eta_G^{x,y}(\bar{b}) \neq 0$ . Ainsi, comme  $\eta_G^{x,y}(\bar{b}) = -\eta_G^{x,y}(b)$ , on a aussi que  $\eta_G^{x,y}(b) \neq 0$ ,  $G$  étant antipodal. Mais comme  $\eta_G^{x,y}(a) = 0$ , cela veut dire que  $\eta_G^{x,y}$  n'est pas constant sur  $U'$ , une contradiction. Ainsi  $U$  possède au plus une paire d'antipodes.  $\square$

Pour les graphes antipodaux, la proposition 3.2.2, le théorème 3.2.1 ainsi que le corollaire 3.2.2 montrent que si  $\text{loc}_a(G) = \text{loc}(G) + 1$ , alors on peut trouver plusieurs éléments de  $\mathcal{D}_G$  explicitement si l'on connaît les éléments de  $\mathcal{R}_G$ . En effet, si  $\text{loc}_a(G) = \text{loc}(G) + 1$ , alors pour  $U \in \mathcal{R}_G$  et  $a \in U$ , l'ensemble  $U_a$  du théorème 3.2.1 fait partie de la famille  $\mathcal{D}_G$ .

Le prochain théorème est un résultat qui donne un critère pour savoir quand les éléments de  $\mathcal{D}_G$  sont de cardinalité  $\text{loc}(G)$ .

**Théorème 3.2.2.** *Soit  $G$  un graphe antipodal. Alors  $\text{loc}_a(G) = \text{loc}(G)$  si et seulement si pour tout  $U \in \mathcal{D}_G$ ,  $U$  ne possède aucune paire d'antipodes.*

DÉMONSTRATION. Si l'on a que  $\text{loc}_a(G) = \text{loc}(G)$ , alors  $\mathcal{D}_G \subseteq \mathcal{R}_G$ . Comme  $G$  est un graphe antipodal, alors, par la proposition 3.2.1, on sait que pour tout  $U \in \mathcal{R}_G$ ,  $U$  ne possède aucune paire d'antipodes. En particulier, les éléments de  $\mathcal{D}_G$  ne possèdent aucune paire d'antipodes. Si, par contre, on a que les éléments de  $\mathcal{D}_G$  ne possèdent aucune paire d'antipodes et si l'on suppose que  $\text{loc}_a(G) \neq \text{loc}(G)$ , alors on a par le corollaire 3.2.2 que  $\text{loc}_a(G) = \text{loc}(G) + 1$ . Soit  $U \in \mathcal{R}_G$  et  $a \in U$ . Formons l'ensemble  $U_a$  comme au théorème 3.2.1. L'ensemble  $U_a$  est un ensemble doublement résolvant de cardinalité  $\text{loc}(G) + 1$ . Ainsi,  $U_a$  est forcément de cardinalité minimum, ce qui implique que  $U_a \in \mathcal{D}_G$ . Ceci est une contradiction, car les éléments de  $\mathcal{D}_G$  ne possèdent aucune paire d'antipodes. Cela veut donc dire que  $\text{loc}_a(G) = \text{loc}(G)$ .  $\square$

### 3.3. QUELQUES MOTS SUR LES GRAPHES ARÊTE-ANTIPODAUX

Cette section porte sur des graphes qui ressemblent beaucoup aux graphes antipodaux. Il s'agit des graphes arête-antipodaux. Le résultat que l'on présente ici concerne le nombre de double localisation de ces graphes.

**Définition 3.3.1.** On dit d'un graphe  $G$  qu'il est *arête-antipodal* si pour tout sommet  $a$  de  $V(G)$ , on a que  $N_G^{\text{diam}(G)}(a) = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2\}$ , que  $[\bar{a}_1, \bar{a}_2] \in E(G)$  et que  $I_{a\bar{a}_1} \cup I_{a\bar{a}_2} = V(G)$ .

Contrairement à un graphe antipodal, on a que chaque sommet  $a$  d'un graphe arête-antipodal possède exactement deux antipodes  $\bar{a}_1$  et  $\bar{a}_2$  qui forment une arête dans  $G$ .

La classe des graphes arête-antipodaux est elle aussi assez vaste. En effet, les cycles impairs  $C_{2n+1}$ , les prismes impairs  $P_{2n+1,1}$  ainsi que les antiprismes pairs  $AP_{2n}$  sont des graphes arête-antipodaux. De plus, si  $G$  est un graphe arête-antipodal, alors le produit cartésien  $G \square P_n$ <sup>3</sup> est aussi un graphe arête-antipodal. La figure 3.3.1 montre un graphe arête-antipodal général où  $V(G)$  est partitionné en classes de distance.

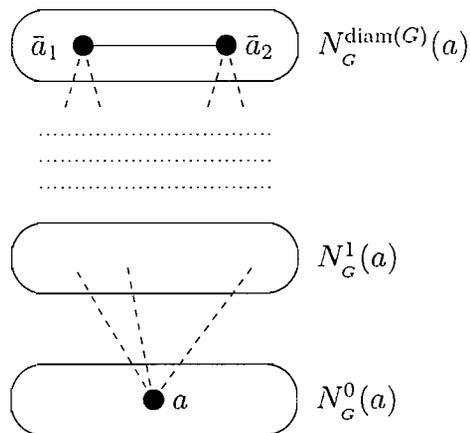


FIG. 3.3.1. Un graphe arête-antipodal.

Plusieurs résultats de la section précédente ne tiennent pas pour les graphes arête-antipodaux. C'est le cas de la proposition 3.2.1. En effet, si l'on considère le cycle impair  $C_{2n+1}$ , les ensembles  $\{x_0, x_n\}$  et  $\{x_0, x_{n+1}\}$  sont des éléments de  $\mathcal{R}_{C_{2n+1}}$ . Comme  $x_n$  et  $x_{n+1}$  sont les deux antipodes de  $x_0$ , on voit que cette proposition ne s'applique pas aux graphes arête-antipodaux. Conséquemment, le théorème 3.2.2 ne s'applique pas à ces graphes.

Cependant, il existe un analogue au théorème 3.2.1 pour les graphes arête-antipodaux, ainsi qu'un analogue au corollaire 3.2.2.

**Théorème 3.3.1.** *Soit  $G$  un graphe arête-antipodal,  $U$  un ensemble résolvant de  $G$  et  $a \in U$ . Alors, l'ensemble  $U_a := U \cup \{\bar{a}_1\}$  est doublement résolvant pour  $G$ .*

<sup>3</sup>Pour une définition du produit cartésien de graphes, voir la section 4.1.

DÉMONSTRATION. Soit  $x$  et  $y$  deux sommets distincts de  $G$ . Si  $\eta_G^{x,y}$  n'est pas constant sur  $U$ , alors la paire  $\{x, y\}$  est doublement résolue par  $U$  et donc elle l'est aussi par  $U_a$ . Sinon, on sait que pour tout  $u \in U$ ,  $\eta_G^{x,y}(u)$  est une constante non nulle, disons  $\eta_G^{x,y}(u) = \beta$ , car  $U$  est résolvant pour  $G$ . En particulier, on a que  $\eta_G^{x,y}(a) = \beta$ , car  $a \in U$ . Si  $x$  et  $y$  sont sur des  $a\bar{a}_1$ -géodésiques, on a alors que  $\eta_G^{x,y}(\bar{a}_1) = (\text{diam}(G) - \delta_G(x, a)) - (\text{diam}(G) - \delta_G(y, a)) = -\eta_G^{x,y}(a) = -\beta$  et donc  $\eta_G^{x,y}$  n'est pas constant sur  $U_a$ . Si  $x$  et  $y$  sont sur des  $a\bar{a}_2$ -géodésiques, on a alors que  $\eta_G^{x,y}(\bar{a}_1) = (\text{diam}(G) + 1 - \delta_G(x, a)) - (\text{diam}(G) + 1 - \delta_G(y, a)) = -\eta_G^{x,y}(a) = -\beta$  et donc  $\eta_G^{x,y}$  n'est pas constant sur  $U_a$ . Si  $x$  est sur une  $a\bar{a}_1$ -géodésique et si  $y$  est sur une  $a\bar{a}_2$ -géodésique, on a alors que  $\eta_G^{x,y}(\bar{a}_1) = -\eta_G^{x,y}(a) - 1$ . Si l'on suppose que  $\eta_G^{x,y}$  est constant sur  $U_a$ , on a donc que  $\eta_G^{x,y}(a) = \eta_G^{x,y}(\bar{a}_1)$ , ce qui implique que  $2\eta_G^{x,y}(a) = -1$ . Ceci revient à dire que  $\beta = -\frac{1}{2}$ , ce qui est impossible. Ainsi, on obtient que  $\eta_G^{x,y}$  n'est pas constant sur  $U_a$ .  $\square$

**Corollaire 3.3.1.** *Soit  $G$  un graphe arête-antipodal. On a alors que*

$$\text{loc}(G) \leq \text{loc}_a(G) \leq \text{loc}(G) + 1.$$

DÉMONSTRATION. Soit  $U \in \mathcal{R}_G$  et  $a \in U$ . Formons  $U_a$  comme au théorème 3.3.1. L'ensemble  $U_a$  étant doublement résolvant pour  $G$ , on a que  $\text{loc}_a(G) \leq |U_a|$ . Comme  $|U_a| \leq |U| + 1$ , on obtient que  $|U_a| \leq \text{loc}(G) + 1$ , ce qui montre la borne supérieure. La borne inférieure a été prouvée à la proposition 2.4.1.  $\square$

# Chapitre 4

---

## LOCALISATION DANS UN PRODUIT CARTÉSIEN DE GRAPHERS

Ce chapitre concerne le calcul du nombre de localisation dans un produit cartésien de graphes. On débutera en donnant les définitions d'usage ainsi que quelques propriétés des graphes qui sont un produit cartésien. Ensuite, on présentera un théorème publié par Cáceres et al. [Ca] qui donne une borne supérieure pour le nombre de localisation du produit cartésien d'un graphe  $G$  et d'un graphe  $H$ . Ce théorème se veut une généralisation du cas particulier où  $H = P_n$ , cas qui fut étudié par Chartrand et al. [Ch]. Par la suite, on donnera une méthode pour trouver les éléments de  $\mathcal{R}_{G \square P_n}$  connaissant les éléments de  $\mathcal{R}_G$  et de  $\mathcal{D}_G$ . Finalement, on conclura ce chapitre avec une section sur les hypercubes. Ces graphes étant à la fois des produits cartésiens et des graphes antipodaux, on pourra leur appliquer tous les résultats de ce chapitre ainsi que ceux du chapitre précédent.

### 4.1. DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS

Le *produit cartésien* du graphe  $G$  et du graphe  $H$ , noté  $G \square H$ , est le graphe ayant pour sommets  $V(G \square H) = V(G) \times V(H)$  et ayant pour arêtes les paires  $[(x_1, y_1), (x_2, y_2)]$  vérifiant une des deux conditions suivantes :

- (1)  $x_1 = x_2$  et  $[y_1, y_2] \in E(H)$  ;
- (2)  $[x_1, x_2] \in E(G)$  et  $y_1 = y_2$ .

**Remarque 4.1.1.** Le produit cartésien de graphes est associatif et commutatif à isomorphisme près, c'est-à-dire que  $(G_1 \square G_2) \square G_3 \cong G_1 \square (G_2 \square G_3) \cong G_1 \square G_2 \square G_3$  et que  $G_1 \square G_2 \cong G_2 \square G_1$ . Ainsi, pour les graphes  $G_1, \dots, G_n$ , il est possible de définir le graphe  $G_1 \square \dots \square G_n$  récursivement.

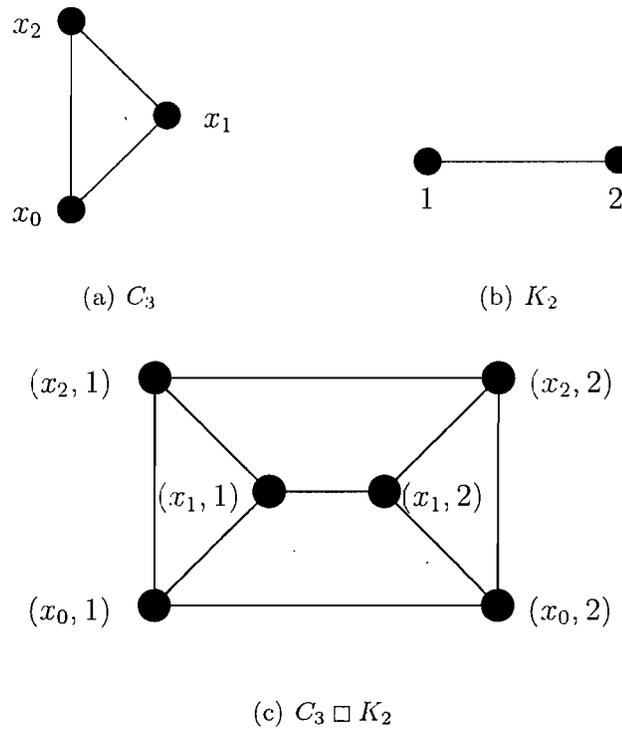


FIG. 4.1.1. Les graphes  $C_3$ ,  $K_2$  ainsi que  $C_3 \square K_2$ .

**Exemple 4.1.1.** La figure 4.1.1 montre le produit cartésien du graphe  $C_3$  et du graphe  $K_2$ . On peut comparer les graphes  $C_3 \square K_2$  et  $C_3 \boxtimes K_2$  en se référant à la figure 2.1.1.

**Définition 4.1.1.** Soit  $G$  et  $H$  deux graphes et soit  $h_0 \in V(H)$ . Le sous-graphe induit par  $V(G) \times \{h_0\}$  dans  $G \square H$  s'appelle une  $G$ -fibre de  $G \square H$ .

**Remarque 4.1.2.** On note que toute  $G$ -fibre est isomorphe à  $G$ . En effet, l'application

$$\begin{aligned} \varphi : V(G) \times \{h_0\} &\longrightarrow V(G) \\ (x, h_0) &\longmapsto x \end{aligned}$$

est un isomorphisme de graphes.

Les deux prochaines propositions donnent des propriétés d'un produit cartésien de graphes<sup>1</sup>.

**Proposition 4.1.1.** *Le produit cartésien de deux graphes connexes est connexe.*

DÉMONSTRATION. Soit  $G$  et  $H$  deux graphes connexes et considérons deux sommets  $(a_1, b_1)$  et  $(a_2, b_2)$  de  $G \square H$ . Comme  $G$  est connexe, il existe dans  $G$  une  $a_1 a_2$ -géodésique  $\omega_G = a_1 x_1 \cdots x_r a_2$ . De même, il existe dans  $H$  une  $b_1 b_2$ -géodésique  $\omega_H = b_1 y_1 \cdots y_s b_2$ . À partir de ces deux géodésiques, on peut former dans  $G \square H$  la chaîne  $\omega = (a_1, b_1)(x_1, b_1) \cdots (x_r, b_1)(a_2, b_1)(a_2, y_1) \cdots (a_2, y_s)(a_2, b_2)$  allant du sommet  $(a_1, b_1)$  au sommet  $(a_2, b_2)$ . Ainsi,  $G \square H$  est connexe.  $\square$

**Proposition 4.1.2.** *Soit  $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in V(G \square H)$ . Alors*

$$\delta_{G \square H}((a_1, b_1), (a_2, b_2)) = \delta_G(a_1, a_2) + \delta_H(b_1, b_2).$$

DÉMONSTRATION. Considérons la géodésique  $\omega_G$  ainsi que la chaîne  $\omega$  de la proposition 4.1.1. On a que  $\delta_{G \square H}((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \leq l(\omega) = \delta_G(a_1, a_2) + \delta_H(b_1, b_2)$ , car  $\omega$  est une chaîne dans  $G \square H$ . Si on suppose que l'inégalité peut être stricte,

---

<sup>1</sup>Pour une preuve plus détaillée de la proposition 4.1.2, voir W. Imrich et S. Klavžar [Im], corollaire 1.35.

ceci impliquerait, sans perdre de généralités, que  $\delta_G(a_1, a_2) < l(\omega_G)$ , ce qui est impossible,  $\omega_G$  étant une  $a_1 a_2$ -géodésique dans  $G$ .  $\square$

**Lemme 4.1.1.** *Soit  $(x, u), (y, v) \in V(G \square H)$ . Alors  $I_{(x,u)(y,v)} = I_{xy} \times I_{uv}$ .*

DÉMONSTRATION. Soit  $(a, b) \in I_{(x,u)(y,v)}$ . La proposition 4.1.2 donne que

$$\begin{aligned} \delta_G(x, y) + \delta_H(u, v) &= \delta_{G \square H}((x, u), (y, v)) \\ &= \delta_{G \square H}((x, u), (a, b)) + \delta_{G \square H}((a, b), (y, v)) \\ &= \delta_G(x, a) + \delta_H(u, b) + \delta_G(a, y) + \delta_H(b, v) \\ &= \delta_G(x, a) + \delta_G(a, y) + \delta_H(u, b) + \delta_H(b, v). \end{aligned}$$

Ceci implique donc que  $\delta_G(x, y) = \delta_G(x, a) + \delta_G(a, y)$ , car si on suppose que  $\delta_G(x, y) < \delta_G(x, a) + \delta_G(a, y)$ , alors on obtient que  $\delta_H(u, v) > \delta_H(u, b) + \delta_H(b, v)$ , ce qui est impossible. On a ainsi que  $\delta_H(u, v) = \delta_H(u, b) + \delta_H(b, v)$ , que  $a \in I_{xy}$  et que  $b \in I_{uv}$ . Ceci implique que  $(a, b) \in I_{xy} \times I_{uv}$  et donc que  $I_{(x,u)(y,v)} \subseteq I_{xy} \times I_{uv}$ . Par un raisonnement similaire, on montre que  $I_{xy} \times I_{uv} \subseteq I_{(x,u)(y,v)}$ , ce qui termine la preuve.  $\square$

**Proposition 4.1.3.** *Le produit cartésien de deux graphes antipodaux  $G$  et  $H$  est un graphe antipodal.*

DÉMONSTRATION. Soit  $x, \bar{x} \in V(G)$  et  $y, \bar{y} \in V(H)$ . On a alors que  $(x, y)$  et  $(\bar{x}, \bar{y})$  sont des sommets de  $G \square H$ . Par le lemme 4.1.1, on obtient que  $I_{(x,y)(\bar{x},\bar{y})} = I_{x\bar{x}} \times I_{y\bar{y}}$ . Comme  $G$  et  $H$  sont des graphes antipodaux, on a que  $I_{x\bar{x}} = V(G)$  et que  $I_{y\bar{y}} = V(H)$ . Ainsi, on a que  $I_{(x,y)(\bar{x},\bar{y})} = V(G) \times V(H) = V(G \square H)$ , ce qui montre que  $G \square H$  est un graphe antipodal.  $\square$

## 4.2. ENSEMBLES RÉSOVANTS

Cette section comporte deux sujets. Dans un premier temps, on donnera un résultat montrant que si  $H$  n'est pas une chaîne, alors tout ensemble résolvant de  $G \square H$  intersecte au moins deux  $G$ -fibres. On donnera aussi des bornes sur  $\text{loc}(G \square H)$ . Par la suite, on donnera une méthode pour trouver des éléments de  $\mathcal{R}_{G \square P_n}$  connaissant les éléments de  $\mathcal{R}_G$  et de  $\mathcal{D}_G$ .

### 4.2.1. Le cas général

**Théorème 4.2.1.** *Les  $G$ -fibres de  $G \square H$  sont des préfibres.*

DÉMONSTRATION. Soit  $(a, b) \in V(G \square H)$ ,  $h \in V(H)$ ,  $A$  la  $G$ -fibre de  $G \square H$  induite par  $V(G) \times \{h\}$  et soit  $(a', h)$  un sommet quelconque de  $A$ . Alors

$$\begin{aligned} \delta_{G \square H}((a, b), (a', h)) &= \delta_H(b, h) + \delta_G(a, a') \\ &= \delta_{G \square H}((a, b), (a, h)) + \delta_{G \square H}((a, h), (a', h)) \\ &= \delta_{G \square H}((a, b), p_A((a, b))) + \delta_{G \square H}(p_A((a, b)), (a', h)) \end{aligned}$$

ce qui montre que  $A$  est une préfibre de  $G \square H$  et que  $p_A((a, b)) = (a, h)$ .  $\square$

Le corollaire suivant donne une borne inférieure pour  $\text{loc}(G \square H)$ . C'est un résultat qui est présenté par Cáceres et al. [Ca] ainsi que par Chartrand et al. [Ch], mais on donne une nouvelle preuve de celui-ci utilisant les  $G$ -fibres et les  $H$ -fibres de  $G \square H$ . Notons que ce corollaire est un cas particulier du corollaire 2.3.2.

**Corollaire 4.2.1.** *Soit  $G$  et  $H$  deux graphes. Alors*

$$\text{loc}(G \square H) \geq \max\{\text{loc}(G), \text{loc}(H)\}.$$

DÉMONSTRATION. Par le théorème 4.2.1, on sait que toute  $G$ -fibre de  $G \square H$  est une préfibre. Ainsi, par le corollaire 2.3.1, on sait que le nombre de localisation d'une  $G$ -fibre est une borne inférieure pour  $\text{loc}(G \square H)$ . Comme toute  $G$ -fibre de  $G \square H$  est isomorphe à  $G$ , alors le nombre de localisation d'une  $G$ -fibre est égale à  $\text{loc}(G)$ . On a donc que  $\text{loc}(G \square H) \geq \text{loc}(G)$ . Par un raisonnement identique, on obtient aussi que  $\text{loc}(G \square H) \geq \text{loc}(H)$ . Le corollaire 2.3.2 complète la preuve.  $\square$

Le corollaire ci-dessous est un résultat donnant une base pour la recherche d'ensembles résolvants dans un produit cartésien de graphes.

**Corollaire 4.2.2.** *Soit  $G$  et  $H$  deux graphes. Si  $H$  n'est pas une chaîne et si  $U$  est un ensemble résolvant de  $G \square H$ , alors  $U$  intersecte au moins deux  $G$ -fibres.*

DÉMONSTRATION. Soit  $U$  un ensemble résolvant de  $G \square H$ . Par le théorème 4.2.1, on sait que le sous-graphe  $A$  induit par une  $H$ -fibre est une préfibre de  $G \square H$ . Par le théorème 2.3.1, on a que l'ensemble  $U' = \{p_A((g_i, h_j)) \mid (g_i, h_j) \in U\}$  est résolvant pour  $A$ . Comme  $A \cong H$ , on obtient que  $|U'| \geq \text{loc}(H)$  et comme  $H$  n'est pas une chaîne, ceci implique que  $|U'| \geq 2$ . Ceci veut dire qu'il existe deux sommets  $(g_i, h_j)$  et  $(g_{i'}, h_{j'})$  dans  $U$  tel que  $h_j \neq h_{j'}$ . On obtient donc que  $U$  intersecte au moins deux  $G$ -fibres.  $\square$

Le théorème suivant est un résultat donnant une méthode permettant de savoir si  $\text{loc}(G \square H) = \max\{\text{loc}(G), \text{loc}(H)\}$  et ce en ne regardant que les ensembles résolvants de  $G$  et de  $H$ .

**Théorème 4.2.2.** *Soit  $G$  et  $H$  deux graphes. Si  $\text{loc}(G \square H) = \text{loc}(G)$ , alors pour tout  $U \in \mathcal{R}_{G \square H}$  il existe des ensembles résolvants  $U_G \in \mathcal{R}_G$  et  $U_H$  de  $H$  vérifiant :*

- i)  $|U_H| \leq |U_G|$ ;
- ii)  $U$  est inclus dans  $U_G \times U_H$ ;
- iii) pour tout  $u \in U_G$  il existe un  $v \in U_H$  tel que  $(u, v) \in U$ .

DÉMONSTRATION. Soit  $U \in \mathcal{R}_{G \square H}$  et soit  $A$  et  $B$  respectivement une  $G$ -fibre et une  $H$ -fibre de  $G \square H$ . Posons  $U_G = \{p_A(u) \mid u \in U\}$  et  $U_H = \{p_B(u) \mid u \in U\}$ . Par les théorèmes 4.2.1 et 2.3.1, on a que  $U_G$  est résolvant pour  $G$  et que  $U_H$  est résolvant pour  $H$ . De plus, on a que  $|U| \geq |U_H|$  et que  $|U| \geq |U_G| \geq \text{loc}(G)$ . Comme  $U \in \mathcal{R}_{G \square H}$  et que  $\text{loc}(G \square H) = \text{loc}(G)$ , on a donc que  $|U| = \text{loc}(G)$ . Ceci implique que  $\text{loc}(G) \geq |U_H|$  et que  $|U_G| = \text{loc}(G)$ . Comme  $U_G$  est résolvant pour  $G$ , on a que  $U_G \in \mathcal{R}_G$ , ce qui termine la preuve.  $\square$

On présente maintenant un théorème et un corollaire de Cáceres et al. [Ca] qui donnent une borne supérieure pour  $\text{loc}(G \square H)$ . Le théorème 4.2.3 donne une façon de construire un ensemble résolvant pour  $G \square H$  à partir d'un ensemble résolvant de  $G$  et d'un ensemble doublement résolvant de  $H$ . Le corollaire 4.2.3 donne une borne supérieure pour  $\text{loc}(G \square H)$ . Ceux-ci, ainsi que le corollaire 4.2.1, donnent une généralisation d'un théorème présenté par Chartrand et al. [Ch] qui dit que pour tout graphe  $G$ , on a que  $\text{loc}(G) \leq \text{loc}(G \square K_2) \leq \text{loc}(G) + 1$ .

**Théorème 4.2.3.** *Soit  $G$  et  $H$  des graphes,  $U_G$  un ensemble résolvant de  $G$  avec  $u_G \in U_G$  et  $U_H$  un ensemble doublement résolvant de  $H$  avec  $u_H \in U_H$ . Alors, l'ensemble  $U = (U_G \times \{u_H\}) \cup (\{u_G\} \times U_H)$  est résolvant pour  $G \square H$ .*

DÉMONSTRATION. Soit  $(a_1, b_1)$  et  $(a_2, b_2)$ , deux sommets distincts de  $G \square H$ . Si ces deux sommets sont dans la même  $G$ -fibre, alors on a nécessairement que  $\eta_{G \square H}^{(a_1, b_1), (a_2, b_2)}((x, u_H)) = \eta_G^{a_1, a_2}(x)$  pour tout  $x \in V(G)$ . Ainsi, comme il existe  $u \in U_G$  tel que  $\eta_G^{a_1, a_2}(u) \neq 0$ , on a que  $\eta_{G \square H}^{(a_1, b_1), (a_2, b_2)}((u, u_H)) \neq 0$  et donc  $U$  résout les deux sommets. Par un raisonnement similaire et en utilisant le fait que  $U_H$  est résolvant pour  $H$ , on obtient que  $U$  résout les deux sommets si ceux-ci sont dans la même  $H$ -fibre. Supposons donc que  $a_1 \neq a_2$  et que  $b_1 \neq b_2$ . Comme  $U_H$  est doublement résolvant pour  $H$ , il existe  $x, y \in U_H$  tel que  $\eta_H^{b_1, b_2}(x) \neq \eta_H^{b_1, b_2}(y)$ . Ceci implique, sans perdre de généralités, que  $\eta_H^{b_1, b_2}(x) \neq \eta_G^{a_2, a_1}(u_G)$ . Ceci revient à dire que  $\delta_H(b_1, x) + \delta_G(a_1, u_G) \neq \delta_G(a_2, u_G) + \delta_H(b_2, x)$ , ce qui est la même chose

que de dire que  $\delta_{G \square H}((a_1, b_1), (u_G, x)) \neq \delta_{G \square H}((a_2, b_2), (u_G, x))$ . Comme  $x \in U_H$ , alors  $(u_G, x) \in U$  et ainsi  $U$  résout les deux sommets. On obtient donc que  $U$  est un ensemble résolvant pour  $G \square H$ .  $\square$

**Corollaire 4.2.3.** *Soit  $G$  et  $H$  des graphes. Alors*

$$\text{loc}(G \square H) \leq \min\{\text{loc}(G) + \text{loc}_d(H), \text{loc}_d(G) + \text{loc}(H)\} - 1.$$

DÉMONSTRATION. Soit  $U_G \in \mathcal{R}_G$ ,  $U_H \in \mathcal{D}_H$  et construisons l'ensemble  $U$  comme au théorème 4.2.3. On obtient que

$$\begin{aligned} |U| &= |U_G \times \{u_H\}| + |\{u_G\} \times U_H| - |(U_G \times \{u_H\}) \cap (\{u_G\} \times U_H)| \\ &= |U_G| + |U_H| - |\{(u_G, u_H)\}| \\ &= \text{loc}(G) + \text{loc}_d(H) - 1 \end{aligned}$$

et comme  $U$  est résolvant pour  $G \square H$ , on a que  $\text{loc}(G \square H) \leq |U|$ , ce qui implique que  $\text{loc}(G \square H) \leq \text{loc}(G) + \text{loc}_d(H) - 1$ . En prenant  $U_H \in \mathcal{R}_H$  et  $U_G \in \mathcal{D}_G$ , on obtient, de façon similaire, que  $\text{loc}(G \square H) \leq \text{loc}(H) + \text{loc}_d(G) - 1$ , ce qui termine la preuve.  $\square$

Bien que le corollaire 4.2.3 donne une borne supérieure pour  $\text{loc}(G \square H)$ , celle-ci n'est pas aussi convenable qu'espérée. En effet, elle dépend de deux paramètres dont l'un d'eux est le nombre de *double* localisation de  $H$ . Une borne convenable en serait une ne faisant intervenir qu'un seul paramètre, préférablement le nombre de localisation des graphes  $G$  et  $H$ . Le théorème suivant, qui découle des corollaires 4.2.3 et 3.2.2, est un résultat qui donne une condition suffisante sur un graphe  $H$  pour que  $\text{loc}(G \square H) \leq \text{loc}(G) + \text{loc}(H)$ .

**Théorème 4.2.4.** *Soit  $G$  un graphe quelconque et  $H$  un graphe antipodal. Alors,*

$$\text{loc}(G \square H) \leq \text{loc}(G) + \text{loc}(H).$$

DÉMONSTRATION. On a que  $\text{loc}(G \square H) \leq \text{loc}(G) + \text{loc}_d(H) - 1$  par le corollaire 4.2.3. De plus, par le corollaire 3.2.2, on a que  $\text{loc}_d(H) \leq \text{loc}(H) + 1$ . On obtient ainsi que  $\text{loc}(G \square H) \leq \text{loc}(G) + \text{loc}(H)$ .  $\square$

#### 4.2.2. Le cas $G \square P_n$

Un cas particulier de produit cartésien de graphes est celui où  $H = P_n$ . Comme  $\text{loc}_d(P_n) = 2$ , on obtient par le corollaire 4.2.3 que  $\text{loc}(G \square P_n) \leq \text{loc}(G) + 1$ , c'est-à-dire que  $\text{loc}(G \square P_n) \leq \text{loc}(G) + \text{loc}(P_n)$ . Comme  $P_n$  n'est pas antipodal si  $n \geq 3$ , on a que la condition que  $H$  soit antipodal dans le théorème 4.2.4 n'est pas une condition nécessaire.

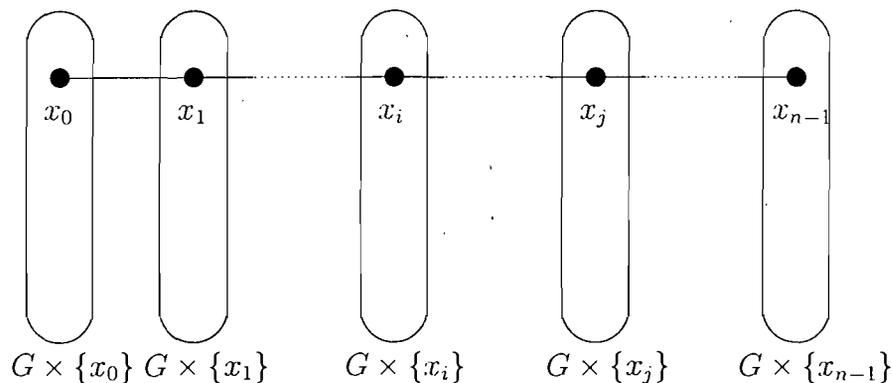


FIG. 4.2.1. Le graphe  $G \square P_n$ .

Le théorème 4.2.3 donne une façon de construire des ensembles résolvents pour le graphe  $G \square P_n$ . En effet, si  $U_G = \{u_1, \dots, u_k\}$  est un ensemble résolvent de  $G$ , alors l'ensemble  $U = \{(u_1, x_0), \dots, (u_k, x_0), (u_1, x_{n-1})\}$  est résolvent pour  $G \square P_n$ . Cependant, même si  $U_G \in \mathcal{R}_G$ , on ne sait pas si  $U \in \mathcal{R}_{G \square P_n}$ . Les théorèmes suivant permettront de donner une méthode pour trouver les éléments de  $\mathcal{R}_{G \square P_n}$  connaissant les éléments de  $\mathcal{R}_G$  et de  $\mathcal{D}_G$ .

**Théorème 4.2.5.** *Soit  $G$  un graphe. Alors*

$$\text{loc}(G) \leq \text{loc}(G \square P_n) \leq \min\{\text{loc}(G) + 1, \text{loc}_d(G)\}.$$

DÉMONSTRATION. On sait que  $\text{loc}(P_n) = 1$ . Ainsi, on a nécessairement que  $\max\{\text{loc}(G), \text{loc}(P_n)\} = \text{loc}(G)$ . De plus, comme on a que  $\text{loc}_d(P_n) = 2$ , on obtient que  $\min\{\text{loc}(G) + \text{loc}_d(P_n), \text{loc}(P_n) + \text{loc}_d(G)\} - 1 = \min\{\text{loc}(G) + 1, \text{loc}_d(G)\}$ . Les corollaires 4.2.1 et 4.2.3 terminent la preuve.  $\square$

On remarque donc que si  $\text{loc}(G) = \text{loc}_d(G)$ , alors on a nécessairement que  $\text{loc}(G) = \text{loc}(G \square P_n)$ . Le théorème et le corollaire suivants sont des résultats qui montrent que dans un tel cas, les éléments de  $\mathcal{D}_G$  permettent de trouver facilement plusieurs éléments de  $\mathcal{R}_{G \square P_n}$ .

**Théorème 4.2.6.** *Soit  $G$  un graphe et  $U$  un ensemble doublement résolvant de  $G$ . Alors  $U \times \{x_0\}$  est résolvant pour  $G \square P_n$ .*

DÉMONSTRATION. Soit  $(a_1, b_1)$  et  $(a_2, b_2)$  deux sommets distincts de  $G \square P_n$ ,  $U$  un ensemble doublement résolvant de  $G$  et supposons que  $U \times \{x_0\}$  ne résout pas  $(a_1, b_1)$  et  $(a_2, b_2)$ . Ceci implique que pour tout  $(u, x_0) \in U \times \{x_0\}$ , on a que  $\eta_{G \square P_n}^{(a_1, b_1), (a_2, b_2)}((u, x_0)) = 0$ , c'est-à-dire que pour tout  $(u, x_0) \in U \times \{x_0\}$ , on a que  $\delta_{G \square P_n}((a_1, b_1), (u, x_0)) = \delta_{G \square P_n}((a_2, b_2), (u, x_0))$ . Ceci revient donc à dire que  $\delta_G(a_1, u) - \delta_G(a_2, u) = \delta_{P_n}(b_2, x_0) - \delta_{P_n}(b_1, x_0)$ . Si les deux sommets étaient dans la même  $G$ -fibre, on obtiendrait que  $\delta_{P_n}(b_2, x_0) - \delta_{P_n}(b_1, x_0) = 0$ , ce qui est impossible, car  $b_1 \neq b_2$ . On obtient donc que  $\eta_G^{a_1, a_2}(u) = \delta_{P_n}(b_2, x_0) - \delta_{P_n}(b_1, x_0)$  pour tout  $u \in U$ , ce qui implique que  $\eta_G^{a_1, a_2}$  est constant sur  $U$ . Ceci est une contradiction, car  $U$  est un ensemble doublement résolvant de  $G$ .  $\square$

**Corollaire 4.2.4.** *Soit  $G$  un graphe. Si  $\mathcal{D}_G \subseteq \mathcal{R}_G$ , alors pour tout  $U \in \mathcal{D}_G$ ,  $U \times \{x_0\} \in \mathcal{R}_{G \square P_n}$ .*

DÉMONSTRATION. Si  $U \in \mathcal{D}_G$ , alors on a que  $U \times \{x_0\}$  est résolvant pour  $G \square P_n$ , par le théorème 4.2.6. Comme  $\mathcal{D}_G \subseteq \mathcal{R}_G$ , on a que  $|U \times \{x_0\}| = \text{loc}(G)$ . Le théorème 4.2.5 complète la preuve.  $\square$

**Remarque 4.2.1.** Soit  $U \in \mathcal{D}_G$  et supposons que  $\text{loc}(G) = \text{loc}_d(G)$ . Comme  $\text{Aut}(G) \times \mathbb{Z}_2 \leq \text{Aut}(G \square P_n)$ , on a aussi que  $U \times \{x_{n-1}\} \in \mathcal{R}_{G \square P_n}$ .

Le corollaire 4.2.4 donne la première étape pour trouver les éléments de  $\mathcal{R}_{G \square P_n}$  dans le cas où  $\mathcal{D}_G \subseteq \mathcal{R}_G$ . La deuxième étape est de regarder les éléments qui se trouvent dans  $\mathcal{R}_G \setminus \mathcal{D}_G$ , peu importe que  $\mathcal{D}_G \subseteq \mathcal{R}_G$  ou que  $\mathcal{D}_G \cap \mathcal{R}_G = \emptyset$ . En effet, il se peut qu'il existe un ensemble  $U \in \mathcal{R}_G \setminus \mathcal{D}_G$  tel que  $U \times \{x_0\} \in \mathcal{R}_{G \square P_n}$  pour certaines valeurs de  $n$ . Voici comment trouver si  $G$  possède de tels ensembles.

Pour  $U \in \mathcal{R}_G \setminus \mathcal{D}_G$  et pour  $x, y \in V(G)$ , posons  $\eta_G^{x,y}(U) := \min_{u \in U} |\eta_G^{x,y}(u)|$ . Comme  $U$  n'est pas doublement résolvant, alors il existe  $x, y \in V(G)$  tel que  $\eta_G^{x,y}(U) \geq 1$ . Posons maintenant  $\eta_G(U) := \min_{x,y \in V(G)} \{\eta_G^{x,y}(U) \mid \eta_G^{x,y}(U) \neq 0\}$ . On obtient donc que  $\eta_G(U) \geq 1$ .

Le théorème et le corollaire suivants sont des résultats qui donnent les valeurs de  $n$  pour lesquelles l'ensemble  $U \times \{x_0\}$  est résolvant pour  $G \square P_n$ .

**Théorème 4.2.7.** *Soit  $G$  un graphe et  $U$  un ensemble résolvant de  $G$ . Si on a que  $2 \leq n \leq k$ , où  $k = \eta_G(U)$ , alors  $U \times \{x_0\}$  est résolvant pour  $G \square P_n$ .*

DÉMONSTRATION. Soit  $(a_1, b_1)$  et  $(a_2, b_2)$  deux sommets distincts de  $G \square P_n$ ,  $U$  un ensemble résolvant de  $G$  et supposons que l'ensemble  $U \times \{x_0\}$  ne résout pas  $(a_1, b_1)$  et  $(a_2, b_2)$ . Par un raisonnement identique à celui fait lors de la preuve du théorème 4.2.6, on obtient que  $\delta_G(a_1, u) - \delta_G(a_2, u) = \delta_{P_n}(b_2, x_0) - \delta_{P_n}(b_1, x_0)$  pour tout  $(u, x_0) \in U \times \{x_0\}$ . Si les deux sommets étaient dans la même  $G$ -fibre, on obtiendrait que  $\delta_{P_n}(b_2, x_0) - \delta_{P_n}(b_1, x_0) = 0$ , ce qui est impossible, car  $b_1 \neq b_2$ . On

obtient donc que  $\eta_G^{a_1, a_2}(u) = \delta_{P_n}(b_2, x_0) - \delta_{P_n}(b_1, x_0)$  pour tout  $u \in U$ . Toutefois,  $\delta_{P_n}(b_2, x_0) - \delta_{P_n}(b_1, x_0) \leq n - 1 < k$ , car  $\text{diam}(P_n) = n - 1$ . Ceci revient à dire qu'il existe  $a_1, a_2 \in V(G)$  tel que  $\eta_G^{a_1, a_2}(u) < k$  pour tout  $u \in U$ , ce qui contredit l'hypothèse que  $\eta_G(U) = k$ . Ainsi, l'ensemble  $U \times \{x_0\}$  résout  $G \square P_n$ .  $\square$

**Corollaire 4.2.5.** *Soit  $G$  un graphe et  $U \in \mathcal{R}_G$ . Si on a que  $2 \leq n \leq k$  et que  $k = \eta_G(U)$ , alors  $\text{loc}(G \square P_n) = \text{loc}(G)$ .*

DÉMONSTRATION. Si  $U \in \mathcal{R}_G$  et si  $\eta_G(U) = k$ , alors, par le théorème 4.2.7, on a que  $U \times \{x_0\}$  est résolvant pour  $G \square P_n$  si  $2 \leq n \leq k$ . Le théorème 4.2.5 termine la preuve.  $\square$

La troisième étape permettant de trouver les éléments de l'ensemble  $\mathcal{R}_{G \square P_n}$  est de construire tous les autres ensembles  $U$  du théorème 4.2.2 et de voir ceux qui sont résolvants pour  $G \square P_n$ . Pour que l'un de ces ensembles  $U$  ait une chance d'être résolvant pour  $G \square P_n$ , il faut absolument que  $U$  possède un élément dans la  $G$ -fibre  $G \times \{x_0\}$  ou dans la  $G$ -fibre  $G \times \{x_{n-1}\}$ . Si tel n'était pas le cas, on aurait alors que  $U$  ne résoudrait pas tous les sommets d'une même  $P_n$ -fibre.

Si aucun élément de  $\mathcal{R}_{G \square P_n}$  n'a été trouvé après la troisième étape, cela implique que  $\text{loc}(G \square P_n) = \text{loc}(G) + 1$ . Dans cette situation, les ensembles construits au théorème 4.2.3 sont des éléments de  $\mathcal{R}_{G \square P_n}$ . D'autres éléments de  $\mathcal{R}_{G \square P_n}$  peuvent aussi être facilement construits à partir de certains éléments de  $\mathcal{R}_G$ . Le résultat suivant montre comment y parvenir.

**Théorème 4.2.8.** *Soit  $G$  un graphe,  $U_G$  un ensemble résolvant de  $G$  et  $u_1 \in U_G$ . Supposons que  $\eta_G(U_G) = k \geq 2$  et que  $n > k$ . Alors,  $U = U_G \times \{x_0\} \cup \{(u_1, x_j)\}$  est résolvant pour  $G \square P_n$  si  $n - k \leq j \leq n - 1$ .*

DÉMONSTRATION. Soit  $(a_1, b_1)$  et  $(a_2, b_2)$  deux sommets distincts de  $G \square P_n$  tel que  $(a_1, b_1)$  est dans la  $G$ -fibre  $G \times \{x_l\}$  et tel que  $(a_2, b_2)$  est dans la  $G$ -fibre  $G \times \{x_{l'}\}$ . Si  $x_l = x_{l'}$ , alors les deux sommets sont résolus par  $U_G \times \{x_0\}$ . Si  $0 \leq l < l' \leq j$ , alors on sait, par le théorème 4.2.3, qu'ils sont résolus par  $U$ . Si  $0 \leq l < j$  et si  $j \leq l' \leq n - 1$ , alors les sommets  $(u_1, x_0)$  et  $(u_1, x_j)$  de  $U$  résolvent  $(a_1, b_1)$  et  $(a_2, b_2)$ . En effet, si l'on suppose le contraire, on obtient que  $\eta_{G \square P_n}^{(a_1, b_1), (a_2, b_2)}((u_1, x_0)) = \eta_{G \square P_n}^{(a_1, b_1), (a_2, b_2)}((u_1, x_j)) = 0$ . Ceci implique que

$$\begin{aligned} \delta_{P_n}(b_1, x_0) - \delta_{P_n}(b_2, x_0) &= \delta_{P_n}(b_1, x_j) - \delta_{P_n}(b_2, x_j) \\ l - l' &= (j - l) - (l' - j) \end{aligned}$$

ce qui implique que  $l = j$ , une contradiction. Si  $j \leq l < l' \leq n - 1$ , alors les sommets de  $U_G \times \{x_0\}$  résolvent  $(a_1, b_1)$  et  $(a_2, b_2)$ . En effet, si l'on suppose le contraire, on obtient que  $\eta_{G \square P_n}^{(a_1, b_1), (a_2, b_2)}((u_i, x_0)) = 0$  pour tout  $u_i \in U_G$ . Ceci implique que

$$\begin{aligned} \delta_G(a_1, u_i) - \delta_G(a_2, u_i) &= \delta_{P_n}(b_2, x_0) - \delta_{P_n}(b_1, x_0) \\ &= l' - l \\ &\leq (n - 1) - j \\ &\leq (n - 1) - (n - k) \\ &= k - 1 \end{aligned}$$

pour tout  $u_i \in U_G$ , ce qui implique que  $\eta_G(U_G) < k$ , une contradiction.  $\square$

Le théorème précédent dit que si  $\text{loc}(G \square P_n) = \text{loc}(G) + 1$  et s'il existe  $U \in \mathcal{R}_G$  tel que  $\eta_G(U) = k < n$ , alors l'élément que l'on ajoute à  $U \times \{x_0\}$  pour former un

ensemble résolvant de  $G \square P_n$  n'est pas nécessairement dans la dernière  $G$ -fibre de  $G \square P_n$ . En effet, on peut l'ajouter dans n'importe quelle des  $k$  dernières  $G$ -fibres.

Ainsi donc, les ensembles formés aux théorèmes 4.2.3 et 4.2.8 donnent la quatrième étape de notre méthode pour trouver les éléments de  $\mathcal{R}_{G \square P_n}$ .

Finalement, la cinquième étape consiste à trouver les ensembles résolvents  $U_G$  de cardinalité  $\text{loc}(G) + 1$  et à former tous les ensembles  $U$  comme au théorème 4.2.2 en vérifiant lesquels de ces derniers sont résolvents pour  $G \square P_n$ . Connaissant les éléments de  $\mathcal{R}_G$ , on peut former plusieurs ensembles résolvents de cardinalité  $\text{loc}(G) + 1$  en ajoutant à un ensemble  $U \in \mathcal{R}_G$  un sommet  $x \in V(G) \setminus U$ . Les seuls ensembles de cardinalité  $\text{loc}(G) + 1$  que l'on n'obtiendra pas de cette façon sont ceux qui sont minimaux par rapport à l'inclusion, mais qui ne sont pas minimums. En particulier, si un ensemble  $U$  de cardinalité  $\text{loc}(G) + 1$  satisfait aux conditions du théorème 4.2.7, alors  $U \times \{x_0\} \in \mathcal{R}_{G \square P_n}$ . De plus, si  $\text{loc}_d(G) = \text{loc}(G) + 1$ , on obtient que pour tout  $U \in \mathcal{D}_G$ ,  $U \times \{x_0\} \in \mathcal{R}_{G \square P_n}$ .

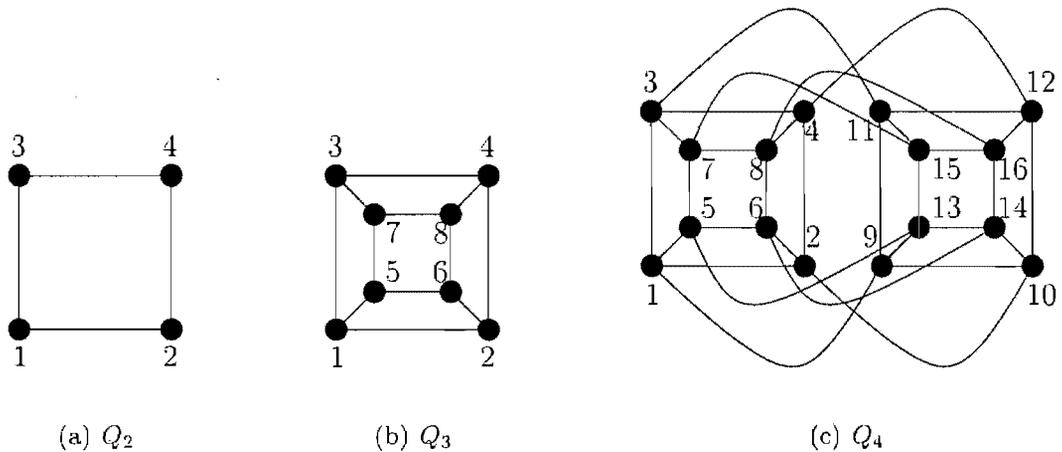
Dans le cas où  $G$  est un graphe antipodal, il est encore plus facile de trouver des éléments de  $\mathcal{R}_{G \square P_n}$ . Comme pour un graphe quelconque, on essaie tout d'abord de trouver les éléments de  $\mathcal{R}_{G \square P_n}$  en passant au travers des trois premières étapes décrites plus haut. Si rien n'est trouvé après les trois premières étapes, alors on sait que les ensembles construits au théorème 4.2.3 sont des éléments de  $\mathcal{R}_{G \square P_n}$  et que  $\text{loc}(G \square P_n) = \text{loc}(G) + 1$ . De plus, on sait aussi que pour tout  $U \in \mathcal{D}_G$ , on a que  $U \times \{x_0\} \in \mathcal{R}_{G \square P_n}$ . En effet, par le théorème 4.2.6, on sait que  $U \times \{x_0\}$  est résolvant pour  $G \square P_n$ . Puisque les trois premières étapes ont échoué, cela veut dire que  $\mathcal{D}_G \cap \mathcal{R}_G = \emptyset$ . Comme  $G$  est antipodal, on obtient, par le corollaire 3.2.2, que  $\text{loc}_d(G) = \text{loc}(G) + 1$ . Ainsi,  $|U \times \{x_0\}| = \text{loc}(G) + 1 = \text{loc}(G \square P_n)$ , ce qui implique que  $U \times \{x_0\} \in \mathcal{R}_{G \square P_n}$ . Comme mentionné ci-haut, il se peut cependant qu'il existe un ensemble résolvant  $U_G$  de cardinalité  $\text{loc}(G) + 1$  tel que l'ensemble  $U$  du théorème 4.2.2, formé à partir de  $U_G$ , soit lui aussi un élément de  $\mathcal{R}_{G \square P_n}$ .

### 4.3. LES HYPERCUBES

On termine ce mémoire avec la présentation des hypercubes. Comme le produit cartésien de graphes antipodaux est antipodal (proposition 4.1.3) et comme  $Q_n$  est le produit cartésien de plusieurs copies de  $K_2$  qui est antipodal, il s'ensuit que les hypercubes sont à la fois des graphes antipodaux et un produit cartésien de graphes.

L'*hypercube* de dimension  $n$ , noté  $Q_n$ , est le graphe obtenu par le produit cartésien de  $n$  arêtes. En d'autres termes,  $Q_n = \underbrace{K_2 \square K_2 \square \cdots \square K_2}_{n \text{ fois}} = \square_{i=1}^n K_2$  et on a que  $Q_n$  est un graphe  $n$ -régulier d'ordre  $2^n$ . Notons que si l'on pose  $V(K_2) = \{0, 1\}$ , alors les sommets de  $Q_n$  sont des  $n$ -uplets composés de 0 et de 1. Ainsi, chaque sommet de  $Q_n$  est représenté par un nombre binaire. Comme on déterminera par la suite les ensembles résolvants et doublement résolvants de  $Q_n$  à automorphisme de  $Q_n$  près, voici une description de  $\text{Aut}(Q_n)$  : En représentant les sommets de  $Q_n$  comme suites binaires  $(x_1, \dots, x_n)$ , une permutation  $\alpha$  de  $V(Q_n)$  est un automorphisme de  $Q_n$  si et seulement si il existe une permutation  $(\begin{smallmatrix} 1 & \dots & n \\ i_1 & \dots & i_n \end{smallmatrix}) \in S_n$  telle que  $\alpha : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (y_{i_1}, \dots, y_{i_n})$  où  $y_{i_j} = x_{i_j}$  ou  $1 - x_{i_j}$ , pour  $j = 1, \dots, n$ .

Afin d'alléger la notation, on représentera chaque sommet de  $Q_n$  par un nombre en base 10 de la façon suivante : si  $x_{[2]}$  est un nombre binaire sur  $n$  bits, alors sa représentation en base 10 sera  $x_{[10]} + 1$ . On ajoute 1 à  $x_{[10]}$  pour ainsi avoir des nombres allant de 1 à  $2^n$  et non des nombres de 0 à  $2^n - 1$ . Par exemple, pour un sommet  $x_{[2]} = 0110$  de  $\square_{i=1}^4 K_2$ , on aura que  $x_{[10]} + 1 = 6 + 1 = 7$  est le sommet correspondant dans  $V(Q_4)$ . De plus, comme  $Q_n$  est constitué de deux  $Q_{n-1}$ -fibres, on dira que les sommets  $1, \dots, 2^{n-1}$  seront les sommets composant la fibre  $Q_{n-1} \times \{0\}$  et que les sommets  $2^{n-1} + 1, \dots, 2^n$  seront les sommets composant la fibre  $Q_{n-1} \times \{1\}$ .

FIG. 4.3.1. Les hypercubes  $Q_2$ ,  $Q_3$  et  $Q_4$ .

Comme mentionné à la remarque 4.1.1, le produit cartésien est associatif. Ainsi, si  $n = r_1 + r_2$  et que  $r_1, r_2 \geq 1$ , on a que

$$Q_n = \underbrace{K_2 \square K_2 \cdots \square K_2}_{r_1 \text{ fois}} \square \underbrace{K_2 \square K_2 \cdots \square K_2}_{r_2 \text{ fois}} = Q_{r_1} \square Q_{r_2}.$$

Plus généralement, si  $n = r_1 + r_2 + \cdots + r_s$  pour  $r_i \geq 1$  et  $1 \leq s \leq n$ , alors on a que  $Q_n = Q_{r_1} \square Q_{r_2} \square \cdots \square Q_{r_s}$ . Ceci permet d'énoncer le théorème suivant qui est une généralisation d'un théorème de Chartrand et al. [Ch].

**Théorème 4.3.1.** *Soit  $n \in \mathbb{N}$  et soit  $\mathcal{P}(n)$  l'ensemble des partitions de  $n$ . Alors*

$$\text{loc}(Q_{n-1}) \leq \text{loc}(Q_n) \leq \min\{\text{loc}_d(Q_{n-1}), \min_{X \in \mathcal{P}(n)} \sum_{i \in X} \text{loc}(Q_i)\}.$$

DÉMONSTRATION. Pour montrer la borne inférieure, il ne suffit de remarquer que  $Q_n = Q_{n-1} \square K_2$ . Ainsi, on obtient que  $\text{loc}(Q_n) \geq \max\{\text{loc}(Q_{n-1}), \text{loc}(K_2)\}$ , par le corollaire 4.2.1. Comme  $\text{loc}(K_2) = 1$ , on a que  $\text{loc}(Q_n) \geq \text{loc}(Q_{n-1})$ . La borne supérieure est, quant à elle, une conséquence directe des théorèmes 4.2.4 et 4.2.5 ainsi que de l'associativité du produit cartésien de graphes. En effet, pour

$n = r_1 + r_2 + \cdots + r_s$  une partition quelconque de  $n$ , on a

$$\begin{aligned}
\text{loc}(Q_n) &= \text{loc}(Q_{r_1} \square Q_{r_2} \square Q_{r_3} \square \cdots \square Q_{r_s}) \\
&\leq \text{loc}(Q_{r_1}) + \text{loc}(Q_{r_2} \square Q_{r_3} \square \cdots \square Q_{r_s}) \\
&\leq \text{loc}(Q_{r_1}) + \text{loc}(Q_{r_2}) + \text{loc}(Q_{r_3} \square \cdots \square Q_{r_s}) \\
&\leq \cdots \\
&\leq \sum_{i=1}^s \text{loc}(Q_{r_i})
\end{aligned}$$

ce qui implique que  $\text{loc}(Q_n) \leq \min_{X \in \mathcal{P}(n)} \sum_{i \in X} \text{loc}(Q_i)$ , par le théorème 4.2.4. De plus, comme  $K_2 = P_2$ , le théorème 4.2.5 donne que  $\text{loc}(Q_n) \leq \text{loc}_d(Q_{n-1})$ , ce qui termine la preuve.  $\square$

Dans l'article présenté par Cáceres et al. [Ca], les auteurs donnent le nombre de localisation pour les hypercubes de dimension 2 à 8, mais sans donner d'ensembles résolvants minimums et sans donner d'indications pour les trouver. Voici donc des tableaux présentant les éléments de  $\mathcal{R}_{Q_n}$  et  $\mathcal{D}_{Q_n}$  pour  $2 \leq n \leq 8$ . Ils ont été trouvés en utilisant la méthode en cinq étapes présentée à la section précédente et à l'aide du logiciel MAGMA. Notons que comme  $Q_1 = K_2$ , on a que  $\text{loc}(Q_1) = 1$  et que  $\text{loc}_d(Q_1) = 2$ .

#### 4.3.1. Les éléments de $\mathcal{R}_{Q_2}$ et de $\mathcal{D}_{Q_2}$

On a que  $Q_2 = K_2 \square K_2 \cong C_4$ . Ainsi, on sait que  $\text{loc}(Q_2) = 2$  et aussi que  $\text{loc}_d(Q_2) = 3$ . La figure 4.3.1(a) représente  $Q_2$  et la tableau 4.3.1 contient les éléments de  $\mathcal{R}_{Q_2}$  et de  $\mathcal{D}_{Q_2}$ .

$\mathcal{R}_{Q_2}$	{1, 2}
$\mathcal{D}_{Q_2}$	{1, 2, 3}

TAB. 4.3.1. Les éléments de  $\mathcal{R}_{Q_2}$  et de  $\mathcal{D}_{Q_2}$  à automorphisme près.

### 4.3.2. Les éléments de $\mathcal{R}_{Q_3}$ et de $\mathcal{D}_{Q_3}$

Comme  $Q_3 = Q_2 \square Q_1 = \square_{i=1}^3 Q_1$ , le théorème 4.3.1 donne que

$$\text{loc}(Q_2) \leq \text{loc}(Q_3) \leq \min\{\text{loc}_d(Q_2), \text{loc}(Q_2) + \text{loc}(Q_1), 3\text{loc}(Q_1)\}$$

c'est-à-dire que  $2 \leq \text{loc}(Q_3) \leq 3$ . Soit  $U = \{1, 2\} \in \mathcal{R}_{Q_2}$ . Comme  $U \notin \mathcal{D}_{Q_2}$  et comme  $\eta_{Q_2}(U) = 1$ , les étapes 1 et 2 de la méthode ne donnent aucun résultat. À l'étape 3, on construit les ensembles du théorème 4.2.2. Ceci donne, à automorphisme près, les ensembles  $\{1, 2\}$  et  $\{1, 6\}$ . Comme ils ne sont pas résolvents pour  $Q_3$ , on a donc que  $\text{loc}(Q_3) = 3$  et que  $\mathcal{D}_{Q_2} \subseteq \mathcal{R}_{Q_3}$ . De plus, les ensembles du théorème 4.2.3 sont aussi des éléments de  $\mathcal{R}_{Q_3}$ , c'est-à-dire que  $\{1, 2, 5\}, \{1, 2, 6\} \in \mathcal{R}_{Q_3}$ . Cependant, les ensembles  $\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 5\}$  et  $\{1, 2, 6\}$  sont tous dans la même orbite. Comme  $\{1, 2, 3\}$  est le seul ensemble résolvant de 3 sommets de  $Q_2$  à automorphisme près, il ne reste qu'à appliquer le théorème 4.2.2 sur cet ensemble pour trouver les derniers ensembles résolvents de  $Q_3$ . On obtient de cette façon les éléments de l'orbite  $\text{Aut}(Q_3)(\{2, 3, 5\})$ .

En ce qui concerne  $\mathcal{D}_{Q_3}$  et  $\text{loc}_d(Q_3)$ , on a que  $\text{loc}_d(Q_3) = 4$ , car aucun des éléments de  $\mathcal{R}_{Q_3}$  n'est doublement résolvant. S'il existe un ensemble  $U \in \mathcal{D}_{Q_3}$  tel que  $\{1, 2, 3\} \subset U$ , alors, par le théorème 2.4.2, on sait que  $U$  doit être de la forme  $U = \{1, 2, 3, i\}$  avec  $i = 5, 6, 7, 8$ . Ceci donne les ensembles  $\{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 3, 7\}$  et  $\{1, 2, 3, 8\}$ , à automorphisme près. De ceux-ci, on obtient que les deux premiers sont doublement résolvents. Comme l'ensemble résolvant minimum  $\{2, 3, 5\}$  n'est pas contenu dans une unique  $Q_2$ -fibre de  $Q_3$ , on ne peut pas utiliser le dernier argument avec cet ensemble pour trouver d'autres éléments de  $\mathcal{D}_{Q_3}$ . On les obtient donc à l'aide de MAGMA.

$\mathcal{R}_{Q_3}$	$\{1, 2, 3\}, \quad \{2, 3, 5\}$
$\mathcal{D}_{Q_3}$	$\{1, 2, 3, 5\}, \quad \{1, 2, 3, 7\}, \quad \{2, 3, 5, 7\}, \quad \{2, 3, 5, 8\}$

TAB. 4.3.2. Les éléments de  $\mathcal{R}_{Q_3}$  et de  $\mathcal{D}_{Q_3}$  à automorphisme près.

### 4.3.3. Les éléments de $\mathcal{R}_{Q_4}$ et de $\mathcal{D}_{Q_4}$

Comme  $Q_4 = Q_3 \square Q_1 = Q_2 \square Q_2 = Q_2 \square Q_1 \square Q_1 = \square_{i=1}^4 Q_1$ , le théorème 4.3.1 donne que  $3 \leq \text{loc}(Q_4) \leq 4$ . On procède comme avec  $Q_3$  et on constate que les étapes 1 à 3 de la méthode ne donnent aucun résultat. Ainsi, on obtient que  $\text{loc}(Q_4) = 4$  et donc que  $\mathcal{D}_{Q_3} \subseteq \mathcal{R}_{Q_4}$ . Posons  $U_1 = \{1, 2, 3, 5\}$ ,  $U_2 = \{1, 2, 3, 7\}$ ,  $U_3 = \{2, 3, 5, 7\}$  et  $U_4 = \{2, 3, 5, 8\}$ . En appliquant le théorème 4.2.2 à chacun de ces ensembles, on obtient les résultats suivants. Premièrement, à partir de  $U_1$ , on forme l'ensemble résolvant  $U'_1 = \{2, 3, 5, 9\}$ . On constate que  $\eta_{Q_4}(U'_1) = 2$ . Ainsi, par le théorème 4.2.7, cet ensemble est résolvant pour  $Q_4 \square P_n$  si  $n \leq 2$ , ce qui revient à dire que  $U'_1$  est résolvant pour  $Q_4 \square P_2 = Q_5$  et donc que  $\text{loc}(Q_5) = 4$ . Deuxièmement, à partir de  $U_2$  et de  $U_3$ , on forme les ensembles résolvants  $\{1, 2, 7, 11\}$  et  $\{2, 3, 7, 13\}$ . Finalement, à partir de  $U_4$ , on forme l'ensemble résolvant  $U'_4 = \{2, 3, 8, 13\}$ . On constate que  $U'_4$  est doublement résolvant. Ainsi,  $\text{loc}(Q_4) = \text{loc}_d(Q_4)$  et donc  $U'_4$  est résolvant pour  $Q_4 \square P_n$ , par le théorème 4.2.6. En particulier, cet ensemble est résolvant pour  $Q_5$ . Notons que  $Q_4$  est le plus petit hypercube tel que son nombre de double localisation est le même que son nombre de localisation.

Si l'on forme tous les ensembles comme au théorème 4.2.2, on ne trouve pas de nouveaux éléments de  $\mathcal{R}_{Q_4}$  ni de  $\mathcal{D}_{Q_4}$ . Il en est de même avec la recherche de nouveaux ensembles à l'aide de MAGMA. Ainsi, on a trouvé tous les éléments de  $\mathcal{R}_{Q_4}$  et de  $\mathcal{D}_{Q_4}$ . Ceux-ci sont présentés dans le tableau 4.3.3.

$\mathcal{R}_{Q_4} \setminus \mathcal{D}_{Q_4}$	$\{1, 2, 3, 5\}, \quad \{1, 2, 3, 7\}, \quad \{2, 3, 5, 7\}, \quad \{2, 3, 5, 8\},$ $\{2, 3, 5, 9\}, \quad \{1, 2, 7, 11\}, \quad \{2, 3, 7, 13\}$
$\mathcal{D}_{Q_4}$	$\{2, 3, 8, 13\}$

TAB. 4.3.3. Les éléments de  $\mathcal{R}_{Q_4}$  et de  $\mathcal{D}_{Q_4}$  à automorphisme près.

#### 4.3.4. Les éléments de $\mathcal{R}_{Q_5}$ et de $\mathcal{D}_{Q_5}$

Comme  $\text{loc}(Q_4) \leq \text{loc}(Q_5) \leq \text{loc}_d(Q_4)$  et que  $\text{loc}(Q_4) = \text{loc}_d(Q_4)$ , l'étape 1 de la méthode donne que  $\mathcal{D}_{Q_4} \subseteq \mathcal{R}_{Q_5}$ . De plus, comme  $\eta_{Q_4}(\{2, 3, 5, 9\}) = 2$ , l'étape 2 donne que  $\{2, 3, 5, 9\} \in \mathcal{R}_{Q_5}$ . Finalement, l'étape 3 donne que l'ensemble  $\{2, 7, 11, 17\} \in \mathcal{R}_{Q_5}$ . Cet ensemble fut trouvé à l'aide du théorème 4.2.2 appliqué sur l'ensemble  $\{1, 2, 7, 11\}$  de  $\mathcal{R}_{Q_4}$ . Ainsi, comme au moins une des trois premières étapes de la méthode a porté fruits, on a obtenu tous les éléments de  $\mathcal{R}_{Q_5}$ , à automorphisme près.

En ce qui concerne  $\mathcal{D}_{Q_5}$  et  $\text{loc}_d(Q_5)$ , on a que  $\text{loc}_d(Q_5) = 5$ , car aucun des éléments de  $\mathcal{R}_{Q_5}$  n'est doublement résolvant. S'il existe un ensemble  $U \in \mathcal{D}_{Q_5}$  tel que  $\{2, 3, 8, 13\} \subset U$ , alors, par le théorème 2.4.2, on sait que  $U$  doit être de la forme  $U = \{2, 3, 8, 13, i\}$  avec  $17 \leq i \leq 32$ . De tous les ensembles que ceci donne, ceux présentés dans les deux premières lignes du tableau 4.3.4 dans la case  $\mathcal{D}_{Q_5}$ , à automorphisme près, sont doublement résolvents. Par un raisonnement identique, mais cette fois avec l'ensemble résolvant minimum  $\{2, 3, 5, 9\}$ , on trouve deux nouveaux éléments de  $\mathcal{D}_{Q_5}$  à automorphisme près, à savoir les ensembles  $\{2, 3, 5, 9, 31\}$  et  $\{2, 3, 5, 9, 32\}$ . Comme l'ensemble résolvant minimum  $\{2, 7, 11, 17\}$  n'est pas contenu dans une unique  $Q_4$ -fibre de  $Q_5$ , on ne peut pas utiliser le dernier argument avec cet ensemble pour trouver d'autres éléments de  $\mathcal{D}_{Q_5}$ . On les obtient donc à l'aide de MAGMA. On remarque deux choses. La première est qu'il existe un élément  $U \in \mathcal{D}_{Q_5}$  tel que  $\{2, 7, 11, 17\} \subset U$ , à savoir l'ensemble  $U = \{2, 7, 11, 17, 30\}$ . La seconde chose que l'on observe est que les quatre éléments sur la dernière ligne du tableau 4.3.4 ressemblent aux sept premiers éléments énumérés pour  $\mathcal{D}_{Q_5}$ . En effet, on a que ces ensembles contiennent chacun trois sommets de l'ensemble résolvant minimum  $\{2, 3, 8, 13\}$  auxquels on leur a ajouté deux sommets provenant d'une  $Q_4$ -fibre différente. Ainsi, ceci laisse croire qu'il est possible de former des éléments de  $\mathcal{D}_{Q_n}$  à partir de sous-ensembles d'ensembles résolvents de  $Q_n$  si les sommets de ces sous-ensembles sont dans une même  $Q_{n-1}$ -fibre et qu'on leur ajoute un nombre suffisant de sommets provenant de l'autre  $Q_{n-1}$ -fibre de  $Q_n$ .

$\mathcal{R}_{Q_5}$	$\{2, 3, 8, 13\}$ ,	$\{2, 3, 5, 9\}$ ,	$\{2, 7, 11, 17\}$
$\mathcal{D}_{Q_5}$	$\{2, 3, 8, 13, 17\}$ ,	$\{2, 3, 8, 13, 18\}$ ,	$\{2, 3, 8, 13, 21\}$ , $\{2, 3, 8, 13, 26\}$ ,
	$\{2, 3, 8, 13, 28\}$ ,	$\{2, 3, 8, 13, 29\}$ ,	$\{2, 3, 8, 13, 31\}$ ,
	$\{2, 3, 5, 9, 31\}$ ,	$\{2, 3, 5, 9, 32\}$ ,	$\{2, 7, 11, 17, 30\}$ ,
	$\{2, 3, 8, 18, 29\}$ ,	$\{2, 3, 13, 18, 24\}$ ,	$\{2, 3, 13, 22, 32\}$ , $\{2, 3, 13, 24, 32\}$

TAB. 4.3.4. Les éléments de  $\mathcal{R}_{Q_5}$  et de  $\mathcal{D}_{Q_5}$  à automorphisme près.

#### 4.3.5. Les éléments de $\mathcal{R}_{Q_6}$ et de $\mathcal{D}_{Q_6}$

Le théorème 4.3.1 donne que  $4 \leq \text{loc}(Q_6) \leq 5$ . À l'aide d'un raisonnement similaire à celui fait à la section 4.3.2, on obtient que  $\text{loc}(Q_6) = 5$ . Ainsi, on a que  $\mathcal{D}_{Q_5} \subseteq \mathcal{R}_{Q_6}$ . On trouve les autres éléments de  $\mathcal{R}_{Q_6}$  à l'aide des étapes 4 et 5 de la méthode présentée à la section 4.2 ainsi qu'à l'aide du logiciel MAGMA.

En ce qui concerne  $\mathcal{D}_{Q_6}$  et  $\text{loc}_a(Q_6)$ , on a que  $\text{loc}_a(Q_6) = 6$ , car aucun des éléments de  $\mathcal{R}_{Q_6}$  n'est doublement résolvant. Pour construire quelques éléments de  $\mathcal{D}_{Q_6}$ , considérons les ensembles  $U \in \mathcal{D}_{Q_5}$ . S'il existe un ensemble  $U' \in \mathcal{D}_{Q_6}$  tel que  $U \subset U'$ , alors, par le théorème 2.4.2, on sait que  $U'$  doit être de la forme  $U' = U \cup \{i\}$  avec  $33 \leq i \leq 64$ . On peut aussi utiliser cette procédure avec les ensembles  $\{2, 3, 5, 9, 17\}$ ,  $\{2, 3, 5, 9, 18\}$  et  $\{2, 3, 5, 10, 25\}$ , car ils sont tous trois contenus dans une unique  $Q_5$ -fibre de  $Q_6$ . Comme les autres éléments de  $\mathcal{R}_{Q_6}$  ne sont pas contenus dans une unique  $Q_5$ -fibre, on ne peut pas utiliser le dernier argument avec ces ensembles pour trouver les autres éléments de  $\mathcal{D}_{Q_6}$ . On les obtient donc à l'aide de MAGMA.

TAB. 4.3.5. Les éléments de  $\mathcal{R}_{Q_6}$  et de  $\mathcal{D}_{Q_6}$  à automorphisme près.

$\mathcal{R}_{Q_6}$	{2, 3, 8, 13, 17},	{2, 3, 8, 13, 18},	{2, 3, 8, 13, 21},	{2, 3, 8, 13, 26},	
	{2, 3, 8, 13, 28},	{2, 3, 8, 13, 29},	{2, 3, 8, 13, 31},		
	{2, 3, 5, 9, 31},	{2, 3, 5, 9, 32},	{2, 7, 11, 17, 30},		
	{2, 3, 8, 18, 29},	{2, 3, 13, 18, 24},	{2, 3, 13, 22, 32},	{2, 3, 13, 24, 32},	
	{2, 3, 5, 9, 17},	{2, 3, 5, 9, 18},	{2, 3, 5, 10, 25},	{2, 3, 5, 25, 41},	
	{2, 3, 5, 25, 42},	{2, 3, 5, 25, 44},	{2, 3, 5, 25, 48},	{2, 3, 5, 28, 48},	
	{2, 3, 5, 32, 48},	{2, 3, 6, 25, 41},	{2, 3, 6, 25, 45},	{2, 3, 6, 29, 45},	
	{2, 3, 13, 21, 40},	{2, 3, 13, 21, 48},	{2, 3, 13, 22, 39},	{2, 3, 13, 22, 48},	
	{2, 3, 13, 24, 46},	{2, 3, 13, 24, 48},	{2, 3, 13, 24, 57},		
{2, 3, 13, 32, 53},	{2, 3, 13, 32, 54},	{2, 3, 13, 32, 56}			
$\mathcal{D}_{Q_6}$	{2, 3, 8, 13, 17, 33},	{2, 3, 8, 13, 17, 34},	{2, 3, 8, 13, 17, 36},	{2, 3, 8, 13, 17, 37},	{2, 3, 8, 13, 17, 38},
	{2, 3, 8, 13, 17, 40},	{2, 3, 8, 13, 17, 41},	{2, 3, 8, 13, 17, 42},	{2, 3, 8, 13, 17, 44},	{2, 3, 8, 13, 17, 45},
	{2, 3, 8, 13, 17, 46},	{2, 3, 8, 13, 17, 48},	{2, 3, 8, 13, 17, 49},	{2, 3, 8, 13, 17, 50},	{2, 3, 8, 13, 17, 52},
	{2, 3, 8, 13, 17, 53},	{2, 3, 8, 13, 17, 54},	{2, 3, 8, 13, 17, 56},	{2, 3, 8, 13, 17, 57},	{2, 3, 8, 13, 17, 58},
	{2, 3, 8, 13, 17, 60},	{2, 3, 8, 13, 17, 61},	{2, 3, 8, 13, 17, 62},	{2, 3, 8, 13, 17, 64},	{2, 3, 8, 13, 18, 34},
	{2, 3, 8, 13, 18, 36},	{2, 3, 8, 13, 18, 37},	{2, 3, 8, 13, 18, 40},	{2, 3, 8, 13, 18, 41},	{2, 3, 8, 13, 18, 42},
	{2, 3, 8, 13, 18, 43},	{2, 3, 8, 13, 18, 44},	{2, 3, 8, 13, 18, 45},	{2, 3, 8, 13, 18, 47},	{2, 3, 8, 13, 18, 50},
	{2, 3, 8, 13, 18, 51},	{2, 3, 8, 13, 18, 52},	{2, 3, 8, 13, 18, 53},	{2, 3, 8, 13, 18, 54},	{2, 3, 8, 13, 18, 55},
	{2, 3, 8, 13, 18, 57},	{2, 3, 8, 13, 18, 58},	{2, 3, 8, 13, 18, 59},	{2, 3, 8, 13, 18, 60},	{2, 3, 8, 13, 18, 61},
	{2, 3, 8, 13, 18, 63},	{2, 3, 8, 13, 21, 36},	{2, 3, 8, 13, 21, 37},	{2, 3, 8, 13, 21, 45},	{2, 3, 8, 13, 21, 47},
	{2, 3, 8, 13, 21, 50},	{2, 3, 8, 13, 21, 52},	{2, 3, 8, 13, 21, 59},	{2, 3, 8, 13, 21, 60},	{2, 3, 8, 13, 21, 61},
	{2, 3, 8, 13, 21, 62},	{2, 3, 8, 13, 26, 36},	{2, 3, 8, 13, 26, 42},	{2, 3, 8, 13, 26, 44},	{2, 3, 8, 13, 26, 45},
	{2, 3, 8, 13, 26, 46},	{2, 3, 8, 13, 26, 47},	{2, 3, 8, 13, 26, 48},	{2, 3, 8, 13, 26, 49},	{2, 3, 8, 13, 26, 50},
	{2, 3, 8, 13, 26, 52},	{2, 3, 8, 13, 26, 53},	{2, 3, 8, 13, 26, 55},	{2, 3, 8, 13, 26, 56},	{2, 3, 8, 13, 26, 58},
	{2, 3, 8, 13, 26, 60},	{2, 3, 8, 13, 26, 61},	{2, 3, 8, 13, 26, 62},	{2, 3, 8, 13, 26, 63},	{2, 3, 8, 13, 26, 64},
	{2, 3, 8, 13, 28, 36},	{2, 3, 8, 13, 28, 44},	{2, 3, 8, 13, 28, 45},	{2, 3, 8, 13, 28, 46},	{2, 3, 8, 13, 28, 49},
	{2, 3, 8, 13, 28, 50},	{2, 3, 8, 13, 28, 52},	{2, 3, 8, 13, 28, 53},	{2, 3, 8, 13, 28, 60},	{2, 3, 8, 13, 28, 61},
	{2, 3, 8, 13, 28, 62},	{2, 3, 8, 13, 28, 64},	{2, 3, 8, 13, 29, 36},	{2, 3, 8, 13, 29, 45},	{2, 3, 8, 13, 29, 47},
	{2, 3, 8, 13, 29, 49},	{2, 3, 8, 13, 29, 51},	{2, 3, 8, 13, 29, 52},	{2, 3, 8, 13, 29, 53},	{2, 3, 8, 13, 29, 60},
	{2, 3, 8, 13, 29, 61},	{2, 3, 8, 13, 29, 62},	{2, 3, 8, 13, 29, 64},	{2, 3, 8, 13, 31, 36},	{2, 3, 8, 13, 31, 46},
	{2, 3, 8, 13, 31, 47},	{2, 3, 8, 13, 31, 49},	{2, 3, 8, 13, 31, 50},	{2, 3, 8, 13, 31, 51},	{2, 3, 8, 13, 31, 52},
	{2, 3, 8, 13, 31, 53},	{2, 3, 8, 13, 31, 55},	{2, 3, 8, 13, 31, 58},	{2, 3, 8, 13, 31, 60},	{2, 3, 8, 13, 31, 61},
	{2, 3, 8, 13, 31, 62},	{2, 3, 8, 13, 31, 63},	{2, 3, 8, 13, 31, 64},	{2, 3, 5, 9, 31, 33},	{2, 3, 5, 9, 31, 34},
	{2, 3, 5, 9, 31, 36},	{2, 3, 5, 9, 31, 44},	{2, 3, 5, 9, 31, 48},	{2, 3, 5, 9, 31, 50},	{2, 3, 5, 9, 31, 52},
	{2, 3, 5, 9, 31, 56},	{2, 3, 5, 9, 31, 64},	{2, 3, 5, 9, 32, 33},	{2, 3, 5, 9, 32, 35},	{2, 3, 5, 9, 32, 43},
	{2, 3, 5, 9, 32, 48},	{2, 3, 5, 9, 32, 49},	{2, 3, 5, 9, 32, 53},	{2, 3, 5, 9, 32, 59},	{2, 3, 5, 9, 32, 63},
	{2, 3, 5, 9, 32, 64},	{2, 7, 11, 17, 30, 33},	{2, 7, 11, 17, 30, 34},	{2, 7, 11, 17, 30, 35},	{2, 7, 11, 17, 30, 36},
	{2, 7, 11, 17, 30, 37},	{2, 7, 11, 17, 30, 42},	{2, 7, 11, 17, 30, 43},	{2, 7, 11, 17, 30, 44},	{2, 7, 11, 17, 30, 45},

Suite du tableau 4.3.5 à la page suivante ...

... Suite du tableau 4.3.5

	{2, 7, 11, 17, 30, 46},	{2, 7, 11, 17, 30, 47},	{2, 7, 11, 17, 30, 48},	{2, 7, 11, 17, 30, 50},	{2, 7, 11, 17, 30, 52},
	{2, 7, 11, 17, 30, 56},	{2, 7, 11, 17, 30, 58},	{2, 7, 11, 17, 30, 62},	{2, 7, 11, 17, 30, 64},	{2, 3, 8, 18, 29, 34},
	{2, 3, 8, 18, 29, 36},	{2, 3, 8, 18, 29, 38},	{2, 3, 8, 18, 29, 39},	{2, 3, 8, 18, 29, 40},	{2, 3, 8, 18, 29, 42},
	{2, 3, 8, 18, 29, 44},	{2, 3, 8, 18, 29, 45},	{2, 3, 8, 18, 29, 46},	{2, 3, 8, 18, 29, 47},	{2, 3, 8, 18, 29, 48},
	{2, 3, 8, 18, 29, 49},	{2, 3, 8, 18, 29, 50},	{2, 3, 8, 18, 29, 51},	{2, 3, 8, 18, 29, 52},	{2, 3, 8, 18, 29, 53},
	{2, 3, 8, 18, 29, 55},	{2, 3, 8, 18, 29, 58},	{2, 3, 8, 18, 29, 60},	{2, 3, 8, 18, 29, 61},	{2, 3, 8, 18, 29, 62},
	{2, 3, 8, 18, 29, 63},	{2, 3, 8, 18, 29, 64},	{2, 3, 13, 18, 24, 33},	{2, 3, 13, 18, 24, 34},	{2, 3, 13, 18, 24, 35},
	{2, 3, 13, 18, 24, 36},	{2, 3, 13, 18, 24, 37},	{2, 3, 13, 18, 24, 38},	{2, 3, 13, 18, 24, 39},	{2, 3, 13, 18, 24, 40},
	{2, 3, 13, 18, 24, 41},	{2, 3, 13, 18, 24, 42},	{2, 3, 13, 18, 24, 43},	{2, 3, 13, 18, 24, 44},	{2, 3, 13, 18, 24, 45},
	{2, 3, 13, 18, 24, 46},	{2, 3, 13, 18, 24, 47},	{2, 3, 13, 18, 24, 48},	{2, 3, 13, 18, 24, 49},	{2, 3, 13, 18, 24, 50},
	{2, 3, 13, 18, 24, 51},	{2, 3, 13, 18, 24, 52},	{2, 3, 13, 18, 24, 53},	{2, 3, 13, 18, 24, 54},	{2, 3, 13, 18, 24, 55},
	{2, 3, 13, 18, 24, 56},	{2, 3, 13, 18, 24, 57},	{2, 3, 13, 18, 24, 58},	{2, 3, 13, 18, 24, 59},	{2, 3, 13, 18, 24, 60},
	{2, 3, 13, 18, 24, 61},	{2, 3, 13, 18, 24, 62},	{2, 3, 13, 18, 24, 63},	{2, 3, 13, 18, 24, 64},	{2, 3, 13, 22, 32, 33},
	{2, 3, 13, 22, 32, 35},	{2, 3, 13, 22, 32, 37},	{2, 3, 13, 22, 32, 38},	{2, 3, 13, 22, 32, 39},	{2, 3, 13, 22, 32, 40},
	{2, 3, 13, 22, 32, 41},	{2, 3, 13, 22, 32, 42},	{2, 3, 13, 22, 32, 43},	{2, 3, 13, 22, 32, 44},	{2, 3, 13, 22, 32, 45},
	{2, 3, 13, 22, 32, 47},	{2, 3, 13, 22, 32, 50},	{2, 3, 13, 22, 32, 52},	{2, 3, 13, 22, 32, 54},	{2, 3, 13, 22, 32, 56},
	{2, 3, 13, 22, 32, 57},	{2, 3, 13, 22, 32, 58},	{2, 3, 13, 22, 32, 59},	{2, 3, 13, 22, 32, 60},	{2, 3, 13, 24, 32, 33},
	{2, 3, 13, 24, 32, 35},	{2, 3, 13, 24, 32, 36},	{2, 3, 13, 24, 32, 37},	{2, 3, 13, 24, 32, 39},	{2, 3, 13, 24, 32, 40},
	{2, 3, 13, 24, 32, 41},	{2, 3, 13, 24, 32, 42},	{2, 3, 13, 24, 32, 44},	{2, 3, 13, 24, 32, 45},	{2, 3, 13, 24, 32, 47},
$\mathcal{D}_{Q_6}$	{2, 3, 13, 24, 32, 48},	{2, 3, 13, 24, 32, 49},	{2, 3, 13, 24, 32, 51},	{2, 3, 13, 24, 32, 52},	{2, 3, 13, 24, 32, 53},
	{2, 3, 13, 24, 32, 55},	{2, 3, 13, 24, 32, 56},	{2, 3, 13, 24, 32, 57},	{2, 3, 13, 24, 32, 58},	{2, 3, 13, 24, 32, 60},
	{2, 3, 13, 24, 32, 61},	{2, 3, 13, 24, 32, 63},	{2, 3, 13, 24, 32, 64},	{2, 3, 5, 9, 17, 64},	{2, 3, 5, 9, 18, 63},
	{2, 3, 5, 9, 18, 64},	{2, 3, 5, 10, 25, 55},	{2, 3, 5, 10, 25, 56},	{2, 3, 5, 10, 25, 63},	{2, 3, 5, 10, 25, 64},
	{2, 3, 5, 25, 41, 64},	{2, 3, 5, 25, 42, 64},	{2, 3, 5, 25, 37, 44},	{2, 3, 5, 25, 44, 55},	{2, 3, 5, 25, 44, 64},
	{2, 3, 5, 25, 39, 48},	{2, 3, 5, 25, 48, 49},	{2, 3, 5, 25, 48, 53},	{2, 3, 5, 25, 48, 57},	{2, 3, 5, 25, 48, 59},
	{2, 3, 5, 25, 48, 64},	{2, 3, 5, 20, 28, 48},	{2, 3, 5, 28, 48, 53},	{2, 3, 5, 28, 48, 61},	{2, 3, 5, 32, 48, 49},
	{2, 3, 5, 32, 48, 53},	{2, 3, 5, 32, 48, 57},	{2, 3, 5, 32, 48, 63},	{2, 3, 5, 32, 48, 64},	{2, 3, 6, 25, 41, 56},
	{2, 3, 6, 25, 41, 64},	{2, 3, 6, 25, 45, 56},	{2, 3, 6, 25, 45, 64},	{2, 3, 6, 29, 45, 52},	{2, 3, 6, 29, 45, 60},
	{2, 3, 6, 29, 45, 63},	{2, 3, 13, 21, 29, 40},	{2, 3, 13, 21, 40, 64},	{2, 3, 13, 19, 21, 48},	{2, 3, 13, 21, 29, 48},
	{2, 3, 13, 21, 48, 49},	{2, 3, 13, 21, 48, 51},	{2, 3, 13, 21, 48, 61},	{2, 3, 13, 21, 48, 64},	{2, 3, 13, 22, 39, 53},
	{2, 3, 13, 22, 39, 60},	{2, 3, 13, 18, 22, 48},	{2, 3, 13, 20, 22, 48},	{2, 3, 13, 22, 25, 48},	{2, 3, 13, 22, 29, 48},
	{2, 3, 13, 22, 30, 48},	{2, 3, 13, 22, 48, 50},	{2, 3, 13, 22, 48, 51},	{2, 3, 13, 22, 48, 52},	{2, 3, 13, 22, 48, 62},
	{2, 3, 13, 22, 48, 64},	{2, 3, 13, 24, 38, 46},	{2, 3, 13, 24, 44, 46},	{2, 3, 13, 24, 46, 50},	{2, 3, 13, 24, 46, 51},
	{2, 3, 13, 24, 46, 52},	{2, 3, 13, 24, 46, 57},	{2, 3, 13, 24, 46, 58},	{2, 3, 13, 24, 46, 59},	{2, 3, 13, 24, 46, 61},
	{2, 3, 13, 24, 46, 62},	{2, 3, 13, 20, 24, 48},	{2, 3, 13, 24, 26, 48},	{2, 3, 13, 24, 30, 48},	{2, 3, 13, 24, 48, 52},
	{2, 3, 13, 24, 48, 63},	{2, 3, 13, 24, 48, 64},	{1, 2, 3, 13, 24, 57},	{2, 3, 4, 13, 24, 57},	{2, 3, 13, 14, 24, 57},
	{2, 3, 13, 16, 24, 57},	{2, 3, 13, 21, 24, 57},	{2, 3, 13, 22, 24, 57},	{2, 3, 13, 24, 34, 57},	{2, 3, 13, 24, 36, 57},
	{2, 3, 13, 24, 38, 57},	{2, 3, 13, 24, 40, 57},	{2, 3, 13, 24, 41, 57},	{2, 3, 13, 24, 42, 57},	{2, 3, 13, 24, 44, 57},
	{2, 3, 13, 24, 45, 57},	{2, 3, 13, 24, 49, 57},	{2, 3, 13, 24, 52, 57},	{2, 3, 13, 24, 56, 57},	{2, 3, 13, 24, 57, 58},

Suite du tableau 4.3.5 à la page suivante ...

... Suite du tableau 4.3.5

$\mathcal{D}_{Q_6}$	{2, 3, 13, 24, 57, 60},	{2, 3, 13, 24, 57, 64},	{2, 3, 13, 32, 33, 53},	{2, 3, 13, 32, 34, 53},	{2, 3, 13, 32, 36, 53},
	{2, 3, 13, 32, 41, 53},	{2, 3, 13, 32, 43, 53},	{2, 3, 13, 32, 44, 53},	{2, 3, 13, 32, 45, 53},	{2, 3, 13, 32, 46, 53},
	{2, 3, 13, 32, 48, 53},	{2, 3, 13, 32, 49, 53},	{2, 3, 13, 32, 50, 53},	{2, 3, 13, 32, 52, 53},	{2, 3, 13, 32, 53, 61},
	{2, 3, 13, 32, 53, 62},	{2, 3, 13, 32, 53, 64},	{2, 3, 13, 32, 33, 54},	{2, 3, 13, 32, 34, 54},	{2, 3, 13, 32, 35, 54},
	{2, 3, 13, 32, 36, 54},	{2, 3, 13, 32, 41, 54},	{2, 3, 13, 32, 42, 54},	{2, 3, 13, 32, 43, 54},	{2, 3, 13, 32, 44, 54},
	{2, 3, 13, 32, 45, 54},	{2, 3, 13, 32, 46, 54},	{2, 3, 13, 32, 47, 54},	{2, 3, 13, 32, 50, 54},	{2, 3, 13, 32, 51, 54},
	{2, 3, 13, 32, 52, 54},	{2, 3, 13, 32, 54, 57},	{2, 3, 13, 32, 54, 58},	{2, 3, 13, 32, 54, 59},	{2, 3, 13, 32, 54, 61},
	{2, 3, 13, 32, 54, 62},	{2, 3, 13, 32, 54, 63},	{2, 3, 13, 32, 54, 64},	{2, 3, 13, 32, 33, 56},	{2, 3, 13, 32, 35, 56},
	{2, 3, 13, 32, 36, 56},	{2, 3, 13, 32, 41, 56},	{2, 3, 13, 32, 43, 56},	{2, 3, 13, 32, 44, 56},	{2, 3, 13, 32, 45, 56},
	{2, 3, 13, 32, 47, 56},	{2, 3, 13, 32, 48, 56},	{2, 3, 13, 32, 49, 56},	{2, 3, 13, 32, 51, 56},	{2, 3, 13, 32, 52, 56},
	{2, 3, 13, 32, 56, 57},	{2, 3, 13, 32, 56, 59},	{2, 3, 13, 32, 56, 60},	{2, 3, 13, 32, 56, 61},	{2, 3, 13, 32, 56, 63},
	{2, 3, 13, 32, 56, 64},	{1, 2, 3, 13, 21, 60},	{1, 2, 3, 13, 22, 59},	{1, 2, 3, 13, 22, 60},	{1, 2, 3, 13, 24, 58},
	{1, 2, 3, 14, 22, 59},	{1, 2, 3, 14, 22, 60},	{1, 2, 3, 14, 23, 57},	{1, 2, 3, 14, 23, 58},	{1, 2, 3, 14, 23, 60},
	{1, 2, 3, 14, 24, 57},	{1, 2, 3, 14, 24, 58},	{1, 2, 3, 14, 24, 59},	{1, 2, 3, 16, 24, 57},	{1, 2, 3, 29, 45, 56},
	{1, 2, 3, 29, 46, 55},	{1, 2, 3, 29, 46, 56},	{1, 2, 3, 29, 48, 56},	{1, 2, 3, 30, 46, 55},	{1, 2, 3, 30, 46, 56},
	{1, 2, 3, 30, 47, 56},	{1, 2, 15, 24, 44, 53},	{1, 2, 15, 24, 47, 60},	{1, 2, 15, 24, 59, 62},	{2, 3, 5, 9, 20, 64},
	{2, 3, 5, 10, 19, 64},	{2, 3, 5, 10, 27, 56},	{2, 3, 5, 10, 27, 64},	{2, 3, 5, 12, 22, 57},	{2, 3, 5, 12, 22, 58},
	{2, 3, 5, 12, 22, 59},	{2, 3, 5, 12, 29, 54},	{2, 3, 5, 12, 29, 64},	{2, 3, 5, 12, 29, 56},	{2, 3, 5, 26, 42, 55},
	{2, 3, 5, 26, 43, 54},	{2, 3, 5, 26, 43, 64},	{2, 3, 5, 26, 44, 64},	{2, 3, 5, 26, 47, 64},	{2, 3, 5, 26, 48, 58},
	{2, 3, 5, 26, 48, 59},	{2, 3, 5, 26, 48, 57},	{2, 3, 5, 26, 48, 64},	{2, 3, 5, 28, 44, 61},	{2, 3, 5, 28, 46, 55},
	{2, 3, 5, 28, 46, 58},	{2, 3, 5, 28, 46, 59},	{2, 3, 6, 11, 21, 60},	{2, 3, 6, 11, 21, 64},	{2, 3, 6, 11, 29, 52},
	{2, 3, 6, 11, 29, 56},	{2, 3, 6, 11, 29, 64},	{2, 3, 6, 13, 23, 60},	{2, 3, 6, 15, 25, 52},	{2, 3, 6, 15, 25, 64},
	{2, 3, 6, 15, 29, 52},	{2, 3, 6, 15, 29, 60},	{2, 3, 6, 15, 29, 64},	{2, 3, 6, 25, 42, 55},	{2, 3, 6, 25, 43, 54},
	{2, 3, 6, 25, 43, 55},	{2, 3, 6, 25, 43, 64},	{2, 3, 6, 25, 44, 61},	{2, 3, 6, 25, 46, 55},	{2, 3, 6, 25, 46, 64},
	{2, 3, 6, 25, 47, 64},	{2, 3, 6, 25, 48, 57},	{2, 3, 6, 25, 48, 64},	{2, 3, 6, 25, 48, 61},	{2, 3, 6, 26, 43, 53},
	{2, 3, 6, 26, 45, 55},	{2, 3, 6, 27, 45, 60},	{2, 3, 6, 27, 45, 64},	{2, 3, 6, 29, 47, 60},	{2, 3, 6, 29, 48, 57},
	{2, 3, 6, 29, 48, 61},	{2, 3, 13, 21, 42, 60},	{2, 3, 13, 21, 60, 64},	{2, 3, 13, 22, 44, 60},	{2, 3, 13, 22, 28, 40},
	{2, 3, 13, 22, 44, 55},	{2, 3, 13, 22, 45, 59},	{2, 3, 13, 22, 47, 51},	{2, 3, 13, 22, 47, 60},	{2, 3, 13, 22, 51, 56},
	{2, 3, 13, 22, 51, 60},	{2, 3, 13, 22, 59, 60},	{2, 3, 13, 22, 59, 64},	{2, 3, 13, 24, 45, 64},	{2, 3, 13, 24, 58, 61},
	{2, 3, 13, 29, 50, 56},	{2, 3, 13, 29, 54, 59},	{2, 3, 13, 29, 54, 64},	{2, 3, 13, 29, 56, 60},	{2, 3, 13, 29, 56, 64},
	{2, 3, 13, 30, 51, 56},	{2, 3, 14, 23, 29, 60},	{2, 3, 14, 23, 57, 60},	{2, 3, 14, 23, 57, 64},	{2, 3, 29, 30, 47, 56}

#### 4.3.6. Quelques mots sur $\mathcal{R}_{Q_n}$ et sur $\mathcal{D}_{Q_n}$ lorsque $n \geq 7$

Le théorème 4.3.1 donne que  $5 \leq \text{loc}(Q_7) \leq 6$ , mais les étapes 1 à 3 de la méthode de la section 4.2 ne donnent aucun résultat. Ainsi, on a que  $\text{loc}(Q_7) = 6$  et que  $\mathcal{D}_{Q_6} \subseteq \mathcal{R}_{Q_7}$ . On pourrait trouver les autres éléments de  $\mathcal{R}_{Q_7}$  à l'aide des étapes 4 et 5 de la méthode ainsi qu'à l'aide de MAGMA, mais ceci serait très

fastidieux étant donné le nombre gigantesque de sous-ensembles de six sommets que l'on peut former à partir des  $2^7$  sommets de  $Q_7^2$ .

En ce qui à trait à  $\text{loc}_d(Q_7)$ , on a trouvé à l'aide du logiciel MAGMA que l'ensemble  $U = \{2, 3, 8, 28, 45, 116\}$  est un élément de  $\mathcal{D}_{Q_7}$ . Ceci implique que  $\text{loc}_d(Q_7) = \text{loc}(Q_7) = 6$ , que  $\mathcal{D}_{Q_7} \subseteq \mathcal{R}_{Q_7}$  et que  $U$  est résolvant pour le produit cartésien  $Q_7 \square P_n$  (théorème 4.2.6). En particulier,  $U$  est donc résolvant pour  $Q_8$ . Comme  $\text{loc}(Q_7) \leq \text{loc}(Q_8) \leq \text{loc}_d(Q_7)$ , on obtient ainsi que  $\text{loc}(Q_8) = 6$  et que  $\mathcal{D}_{Q_7} \subseteq \mathcal{R}_{Q_8}$ . Notons que comme on ne connaît pas encore tous les éléments de  $\mathcal{R}_{Q_8}$ , il est impossible pour le moment de savoir si  $\text{loc}_d(Q_8) = 6$  ou si  $\text{loc}_d(Q_8) = 7$ .

En observant les résultats obtenus jusqu'à maintenant pour  $Q_n$ , on constate que  $\mathcal{D}_{Q_n} \subseteq \mathcal{R}_{Q_{n+1}}$  lorsque  $2 \leq n \leq 7$ . Est-ce que ceci est vrai pour toute valeur de  $n$ ? Si tel est le cas, ceci impliquerait que  $\text{loc}(Q_{n+1}) = \text{loc}_d(Q_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Ainsi, on pourrait calculer le nombre de localisation de  $Q_{n+1}$  avec seulement les informations concernant  $Q_n$ .

Cependant, s'il existe un  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathcal{D}_{Q_k} \not\subseteq \mathcal{R}'_{Q_{k+1}}$ , alors on a nécessairement que  $\text{loc}(Q_{k+1}) < \text{loc}_d(Q_k)$ , par le théorème 4.2.6. Comme on a toujours que  $\text{loc}(Q_k) \leq \text{loc}(Q_{k+1}) \leq \text{loc}(Q_k) + 1$  (corollaire 4.2.3) et que  $\text{loc}_d(Q_k) \leq \text{loc}(Q_k) + 1$  (corollaire 3.2.2), on en déduit alors que  $\text{loc}(Q_k) = \text{loc}(Q_{k+1})$ . Le corollaire 3.2.2 donne alors que  $\text{loc}_d(Q_k) = \text{loc}(Q_k) + 1$ , car  $\text{loc}(Q_k) \leq \text{loc}_d(Q_k) \leq \text{loc}(Q_k) + 1$  et  $\text{loc}(Q_{k+1}) < \text{loc}_d(Q_k)$ . Finalement, on obtient que  $\text{loc}_d(Q_{k+1}) = \text{loc}(Q_{k+1}) + 1$ . En effet, en supposant le contraire, on obtiendrait que

$$\text{loc}_d(Q_{k+1}) = \text{loc}(Q_{k+1}) = \text{loc}(Q_k) = \text{loc}_d(Q_k) - 1,$$

ce qui impliquerait que  $\text{loc}_d(Q_{k+1}) < \text{loc}_d(Q_k)$ , contredisant le corollaire 2.4.1. Bref, s'il existe un  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathcal{D}_{Q_k} \not\subseteq \mathcal{R}_{Q_{k+1}}$ , alors on doit nécessairement avoir que  $\text{loc}(Q_k) = \text{loc}(Q_{k+1}) < \text{loc}_d(Q_{k+1}) = \text{loc}_d(Q_k)$ .

---

<sup>2</sup>Le Département de mathématiques et de statistique de l'Université de Montréal n'a eu sa possession que la version étudiante de MAGMA. Celle-ci ne dispose que d'une mémoire de 10 MB, ce qui est insuffisant pour expliciter les éléments de  $\mathcal{R}_{Q_n}$  et de  $\mathcal{D}_{Q_n}$  lorsque  $n \geq 7$ .

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [Ca] CÁCERES, J., HERNANDO, C., MORA, M., PELAYO, I. M., PUERTAS, M. L., SEARA, C., WOOD, D. R., *On the Metric Dimension of Cartesian Products of Graphs*, ArXiv Mathematics e-prints, math/0507527 (2005).
- [Ch] CHARTRAND, G., EROH, L., JOHNSON, M. A., OELLERMANN, O. R., *Resolvability in graphs and the metric dimension of a graph*, Discrete Appl. Math. **105** (2000), no. 1-3, 99-113.
- [Ha] HARARY, F., MELTER, R. A., *On the metric dimension of a graph*, Ars Combin. **2** (1976), 191-195.
- [Im] IMRICH, W., KLAVŽAR, S., *Product graphs*, Wiley-Interscience, New York (2000).
- [Fi] FITZPATRICK, S. L., NOWAKOWSKI, R. J., *The strong isometric dimension of finite reflexive graphs*, Discuss. Math. Graph Theory **20** (2000), no. 1, 23-38.
- [Sl] SLATER, P. J., *Leaves of trees*, Proceedings of the Sixth Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing (Florida Atlantic University), Congr. Numer. 14 (1975), 549-559.
- [Ta] TARDIF, C., *Le produit cartésien de graphes*, Mémoire de maîtrise (Université de Montréal, 1990).

# Annexe A

---

## LOCALISATION DANS LES GRAPHES INFINIS

On rappelle qu'un graphe  $G$  est infini si la cardinalité de  $V(G)$  n'est pas finie. Dans un tel graphe, l'existence d'un ensemble résolvant n'est pas certaine, contrairement au cas où  $G$  est fini<sup>1</sup>. On débutera par montrer l'existence de graphes infinis ne possédant pas d'ensembles résolvents. Par la suite, on donnera des exemples de graphes infinis  $G$  tel que  $\text{loc}(G)$  est bien défini et on donnera des conditions suffisantes qui assureront l'existence d'ensembles résolvents pour  $G$ .

### A.1. GRAPHES INFINIS N'AYANT PAS D'ENSEMBLE RÉSOLOVANT

La grille cartésienne de dimension  $k$ , notée  $C^{(k)}$ , est le graphe ayant pour sommets l'ensemble  $V(C^{(k)}) = \mathbb{Z}^k$  et tel que  $[x, y] \in E(C^{(k)}) \iff |x_i - y_i| \leq 1$  pour  $i = 1, \dots, k$ , avec égalité pour exactement un  $i$ . En d'autres termes,  $C^{(k)}$  est le produit cartésien de  $k$  copies du double rayon<sup>2</sup>, c'est-à-dire que  $C^{(k)} = \prod_{i=1}^k D_i$ , où  $D_i = D$  pour  $i = 1, \dots, k$ .

Le théorème et les corollaires suivants sont des résultats qui montrent que  $\text{loc}(C^{(k)})$  n'existe pas si  $k \geq 2$ , car  $C^{(k)}$  ne possède aucun ensemble résolvant. Ceci est en soi quelque chose d'aberrant, car il est toujours possible de plonger  $C^{(k)}$  dans la grille forte  $F^{(k)}$ ,  $C^{(k)}$  étant un sous-graphe partiel de  $F^{(k)}$ .

---

<sup>1</sup>Voir la proposition 2.3.1.

<sup>2</sup>Voir la section 2.1 pour une définition du graphe  $D$ . Pour une figure représentant  $D$ , voir la figure 2.1.2.

**Théorème A.1.1.** *Le graphe  $C^{(2)}$  ne possède aucun ensemble résolvant.*

DÉMONSTRATION. Supposons le contraire, c'est-à-dire que  $C^{(2)}$  possède un ensemble résolvant  $U = \{(u_1, u'_1), \dots, (u_k, u'_k)\}$ . Comme  $U \subset V(C^{(2)}) = \mathbb{Z}^2$  et parce qu'il est résolvant, on a que  $U$  est un ensemble fini de couples d'entiers. Ainsi,  $m = (m_1, m_2) = \left( \max_{1 \leq i \leq k} u_i, \max_{1 \leq i \leq k} u'_i \right)$  est un sommet de  $C^{(2)}$ . Ce sommet possède comme voisins  $x = (m_1, m_2 + 1)$  et  $y = (m_1 + 1, m_2)$ . Pour un sommet quelconque  $u = (u_i, u'_i) \in U$ , on a que

$$\begin{aligned} \eta_{C^{(2)}}^{x,y}(u) &= (\delta_{C^{(2)}}(x, m) + \delta_{C^{(2)}}(m, u)) - (\delta_{C^{(2)}}(y, m) + \delta_{C^{(2)}}(m, u)) \\ &= (1 + \delta_{C^{(2)}}(m, u)) - (1 + \delta_{C^{(2)}}(m, u)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

et donc on a que  $\eta_{C^{(2)}}^{x,y}(u) = 0$  pour tout  $u \in U$ . Ceci contredit le fait que  $U$  est résolvant pour  $C^{(2)}$ .  $\square$

Le théorème précédent est illustré à la figure A.1.1. Les sommets rouges sont les sommets formant l'ensemble  $U$ . Ainsi, si  $C^{(2)}$  possédait un ensemble résolvant, il serait possible de le borner par un rectangle.

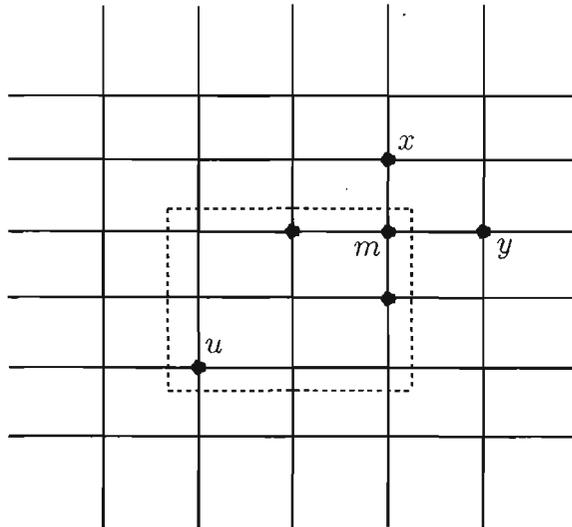


FIG. A.1.1. Le graphe  $C^{(2)}$ .

**Corollaire A.1.1.** *Le graphe  $C^{(k)}$  ne possède aucun ensemble résolvent si  $k \geq 2$ .*

DÉMONSTRATION. Si tel était le cas, c'est-à-dire si  $C^{(k)}$  possédait un ensemble résolvent  $U$ , alors l'ensemble  $U' = \{p_{C^{(2)}}(u) \mid u \in U\}$  serait résolvent pour  $C^{(2)}$  par le théorème 2.3.1, car  $C^{(2)}$  est une préfibère de  $C^{(k)}$ . Ceci contredirait le théorème A.1.1  $\square$

**Corollaire A.1.2.** *Le graphe  $C^{(k)}$  ne possède aucun ensemble doublement résolvent si  $k \geq 2$ .*

DÉMONSTRATION. Si tel n'était pas le cas, ceci contredirait le corollaire précédent, car un ensemble doublement résolvent est aussi résolvent.  $\square$

## A.2. GRAPHES INFINIS AYANT DES ENSEMBLES RÉSOVANTS

Le premier graphe infini que l'on va considérer dans cette section est un sous-graphe induit du graphe  $D$ . Le graphe *rayon*  $R = (\mathbb{N}, E)$  possède comme arêtes les éléments de l'ensemble  $E(R) = \{[a, b] \mid |a - b| = 1, a, b \in \mathbb{N}\}$ . Comme dans le cas de  $P_n$ , on obtient que  $\text{loc}(R) = 1$ . Cependant,  $R$  ne possède qu'un seul ensemble résolvent, à savoir l'ensemble  $\{1\}$ . On remarque de plus que  $\mathcal{D}_R = \emptyset$ . En effet, supposons que  $R$  possède un ensemble doublement résolvent  $U$ . Par définition, cet ensemble est de cardinalité finie. Posons  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$  et supposons que les éléments de  $U$  sont ordonnés, c'est-à-dire que  $u_1 < u_2 < \dots < u_k$ . Pour deux sommets distincts  $a, b \in V(R)$  tel que  $a > u_k$  et  $b > u_k$ , on obtient que  $\eta_R^{a,b}(u_i) = a - b$  pour tout  $i = 1, 2, \dots, k$ , ce qui veut dire que  $\eta_R^{a,b}$  est constant sur  $U$ . Ainsi,  $R$  ne possède aucun ensemble doublement résolvent et donc  $\mathcal{D}_R = \emptyset$ . Rappelons que cette situation est impossible dans le cas d'un graphe fini<sup>3</sup>.

---

<sup>3</sup>Voir la section 2.4.

Mis à part le fait que  $R$  ne possède pas d'ensemble doublement résolvent, ce graphe infini ne semble pas avoir des propriétés étranges. Il n'en est pas de même pour le graphe  $D$ . Dans la section précédente, on a montré qu'il n'existait aucune application de localisation injective de  $C^{(k)}$  vers  $F^{(k)}$  si  $k \geq 2$ , alors que celui-ci est un sous-graphe partiel de  $F^{(k)}$ . La situation est différente avec  $D$ , car il existe des applications de localisation de  $D$  vers des grilles fortes  $F$ . Cependant, la dimension de ces grilles fortes doit être d'au moins deux. En effet, on constate que  $\text{loc}(D) > 1$ , car pour tout ensemble  $U = \{n\} \subset \mathbb{Z}$ , on a que  $\eta_D^{n-1, n+1}(n) = 0$ . Ceci veut dire que les éléments de  $\mathcal{R}_D$  sont de cardinalité au moins deux. Ainsi, il n'existe aucune application de localisation injective  $f_U : D \hookrightarrow F^{(1)}$ . La chose est quelque peu absurde, car  $D = F^{(1)}$  et parce que

$$\begin{aligned} \text{id} : D &\longrightarrow F^{(1)} \\ n &\longmapsto n \end{aligned}$$

est un isomorphisme de graphes. On constate aussi que pour tout sous-ensemble  $U \subset \mathbb{Z}$  de cardinalité deux,  $U$  est résolvent. Soit  $U = \{u_1, u_2\}$  avec  $u_1 < u_2$  et soit  $a, b \in V(D)$  deux sommets distincts de  $D$ . Si  $a < u_1$  et  $b < u_1$  ou si  $a > u_1$  et  $b > u_1$ , alors un raisonnement identique à celui fait dans l'exemple du graphe  $R$  ci-haut montre que  $\eta_D^{a,b}(u_1) \neq 0$ . Sinon, supposons, sans perdre de généralités, que  $a < u_1$  et que  $b > u_1$ . Si  $b < u_2$ , on a que  $a < u_1 < b < u_2$  et alors  $\eta_D^{a,b}(u_2) \neq 0$ . Si  $b > u_2$  et si  $\eta_D^{a,b}(u_1) = 0$ , alors on a que  $\eta_D^{a,b}(u_2) = \delta_D(a, u_1) + \delta_D(u_1, u_2) - \delta_D(b, u_2)$ , ce qui revient à dire que  $\eta_D^{a,b}(u_2) = \delta_D(a, u_1) + \delta_D(u_1, u_2) - (\delta_D(b, u_1) - \delta_D(u_2, u_1))$ , ce qui implique que  $\eta_D^{a,b}(u_2) = 2\delta_D(u_1, u_2) \neq 0$  et donc  $U \in \mathcal{R}_D$ . Ainsi, on obtient que  $\text{loc}(D) = 2$ . Pour ce qui est de  $\mathcal{D}_D$ , on a que  $\mathcal{D}_D = \emptyset$ . Cette conclusion est obtenue par un raisonnement identique à celui fait ci-haut lorsque l'on a montré que  $\mathcal{D}_R = \emptyset$ .

Jusqu'à présent, tous les graphes infinis rencontrés ne possèdent pas d'ensemble doublement résolvent. En fait, on ne connaît aucun graphe infini possédant de tels ensembles. Cependant, si un tel graphe existe, le corollaire 4.2.3

donne une borne pour le produit cartésien de graphes infinis. En effet, ce théorème de Cáceres et al. [Ca] est applicable à des graphes infinis  $G$  et  $H$ , car la construction qui y est faite ne dépend pas de la finitude de  $G$  ou de  $H$ . Ainsi, si  $G$  et  $H$  sont des graphes infinis tel que  $\mathcal{R}_G \neq \emptyset$  et tel que  $\mathcal{D}_H \neq \emptyset$ , alors  $\text{loc}(G \square H) \leq \text{loc}(G) + \text{loc}_d(H) - 1$ .

Une autre façon d'obtenir un graphe infini est de faire le produit cartésien d'un graphe fini  $G$  avec un graphe infini  $H$ . Si le graphe  $H$  possède des ensembles résolvants, alors on a que  $\text{loc}(G \square H) \leq \text{loc}(H) + \text{loc}_d(G) - 1$ . En particulier, on obtient les résultats suivants.

**Théorème A.2.1.** *Soit  $G$  un graphe fini. Alors  $\text{loc}(G \square R) = \text{loc}_d(G)$*

DÉMONSTRATION. Soit  $U_G \in \mathcal{D}_G$ . Par le théorème 4.2.3, l'ensemble  $U_G \times \{1\}$  est résolvant pour  $G \square R$  et donc  $\text{loc}(G \square R) \leq \text{loc}_d(G)$ . Soit  $U$  un ensemble résolvant de  $G \square R$  et supposons que  $|U| < |U_G|$ . Comme  $U$  est fini, on sait qu'il est contenu dans un nombre fini de  $G$ -fibres. Ainsi, il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $U \subseteq \bigcup_{i=1}^n G \times \{i\}$ . Comme  $U$  est résolvant pour  $G \square R$ , il est nécessairement doublement résolvant pour le sous-graphe  $G'$  induit par les sommets de  $\bigcup_{i=1}^n G \times \{i\}$ . En effet, si tel n'était pas le cas, on aurait qu'il existe deux sommets distincts  $(x, j_1)$  et  $(y, j_2)$  de  $G'$  tel que  $\eta_{G'}^{(x, j_1), (y, j_2)}(u) = \beta$  pour tout  $u \in U$ , avec  $\beta \geq 1$ . Ceci impliquerait que  $\eta_{G \square R}^{(x, j_1), (y, j_2 + \beta)}(u) = 0$  pour tout  $u \in U$ , ce qui contredirait le fait que  $U$  est résolvant pour  $G \square R$ . Ainsi, comme  $U$  est doublement résolvant pour  $G'$ , on a, par le théorème 2.4.1, que l'ensemble  $U' = \{p_{G \times \{1\}}(u) \mid u \in U\}$  est doublement résolvant pour la  $G$ -fibre  $G \times \{1\}$ . Ceci implique que  $|U'| \leq |U| < |U_G|$ , ce qui est une contradiction, car  $U_G \in \mathcal{D}_G$ . On obtient ainsi que  $\text{loc}(G \square R) \geq \text{loc}_d(G)$ , ce qui complète la preuve.  $\square$

Le prochain théorème est en quelque sorte l'analogue du théorème 4.2.5 pour les graphes infinis.

**Théorème A.2.2.** *Soit  $G$  un graphe fini. Alors*

$$\text{loc}_d(G) \leq \text{loc}(G \square D) \leq \text{loc}_d(G) + 1.$$

DÉMONSTRATION. Soit  $U_G \in \mathcal{D}_G$  et soit  $U$  l'ensemble résolvant formé au théorème 4.2.3. Le corollaire 4.2.3 donne la borne supérieure. Pour ce qui est de la borne inférieure, elle vient du fait que  $G \square R \subset G \square D$ . En effet, on peut supposer, sans perdre de généralités, que  $U \subseteq \bigcup_{i=1}^n G \times \{i\}$  pour un  $n \in \mathbb{N}$ . Ainsi, si  $U$  est résolvant pour  $G \square D$ , il doit aussi l'être pour le sous-graphe  $G \square R$  et par un raisonnement similaire à celui fait dans la preuve du théorème A.2.1, on obtient que  $|U| \geq |U_G| = \text{loc}_d(G)$ .  $\square$

**Corollaire A.2.1.** *Soit  $G$  un graphe fini. Si  $G$  est un graphe antipodal, alors*  
 $\text{loc}(G) \leq \text{loc}(G \square D) \leq \text{loc}(G) + 2$ .

DÉMONSTRATION. Si  $G$  est un graphe antipodal, alors le corollaire 3.2.2 donne que  $\text{loc}(G) \leq \text{loc}_d(G) \leq \text{loc}(G) + 1$ . Le théorème A.2.2 termine la preuve.  $\square$

Handwritten text at the bottom right of the page, possibly a signature or date.