Université de Montréal

Séries universelles dans $\mathbb{C}^N$ et sur les surfaces de Riemann non compactes

par

Raphaël Clouâtre

Département de mathématiques et de statistique

Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures

en vue de l'obtention du grade de

Maître ès sciences (M.Sc.)

en mathématiques

Orientation mathématiques fondamentales

juillet 2008

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

Séries universelles dans $\mathbb{C}^N$ et sur les surfaces de Riemann non compactes

présenté par

Raphaël Clouâtre

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Richard Duncan
(président-rapporteur)

Paul M. Gauthier
(directeur de recherche)

André Giroux
(membre du jury)

Mémoire accepté le:
25 juillet 2008

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ

Nous établissons premièrement l'existence de séries de puissances dans $\mathbb{C}^N$ dont les sous-suites de la suite des sommes partielles peuvent approcher uniformément n'importe quelle fonction holomorphe sur tout sous-ensemble compact bien choisi en dehors d'un certain ensemble donné.

Ensuite, dans le cadre des surfaces de Riemann non compactes, nous obtenons l'existence de séries de fonctions qui possèdent le même genre de propriété d'approximation. Ces séries sont constituées de fonctions qui se comportent localement comme des solutions fondamentales de l'opérateur de Cauchy-Riemann dans $\mathbb{C}$.

Mots clés : universalité, séries de puissances, plusieurs variables complexes, surfaces de Riemann non compactes, solution fondamentale de l'opérateur de Cauchy-Riemann

ABSTRACT

We first establish the existence of power series in $\mathbb{C}^N$ with the property that the subsequences of the sequence of partial sums uniformly approach any holomorphic function on any well chosen compact subset outside a given set.

We then prove the existence of series of functions on non-compact Riemann surfaces with a similar approximation property. Those functions behave locally like fundamental solutions of the Cauchy-Riemann operator in $\mathbb{C}$.

Keywords : universality, power series, several complex variables, non-compact Riemann surfaces, fundamental solution of the Cauchy-Riemann operator

REMERCIEMENTS

Je voudrais tout d'abord remercier mon directeur Paul M. Gauthier. Sa passion pour l'analyse complexe a sans aucun doute déteint sur moi. Je lui suis particulièrement reconnaissant d'avoir su atteindre un subtil équilibre quant aux problèmes de recherche qu'il m'a suggérés : la possiblité d'aboutir à de nouveaux résultats tout en restant d'un niveau mathématique accessible à une verte recrue naïve comme moi. Sa patience et sa grande disponibilité sont légendaires, nul besoin de les vanter ici.

Il serait odieux de ne pas mentionner les noms d'Isabelle et de Daniel. Sans eux, mon âme mathématique serait perdue depuis longtemps. À leur insu, je crois avoir utilisé une partie de leur talent par osmose mentale durant toutes ces années passées ensemble, et la seule pensée d'entreprendre un doctorat sans leur support me glace le sang.

Je suis également redevable au CRSNG et au FQRNT qui m'ont procuré un soutien financier tout au long de ma maîtrise.

INTRODUCTION

De façon générale, ce mémoire porte sur un phénomène étrange en théorie de l'approximation, l'universalité. Bien que prétentieux en apparence, ce terme décrit pourtant bien le comportement des objets qui possèdent une telle propriété : une divergence tellement erratique qu'un seul membre d'une famille d'objets permet d'approximer la famille entière (voir [**Gro**]). Plusieurs types d'universalité existent, mais nous nous concentrerons sur le phénomène de surconvergence d'une série, c'est-à-dire que nous nous intéresserons aux limites potentielles *en dehors de l'ensemble de convergence de la série* des sous-suites de la suite des sommes partielles.

Ce mémoire est séparé en deux chapitres. Le premier traite de surconvergence de séries de puissances dans $\mathbb{C}^N$, l'autre concerne des séries de fonctions sur les surfaces de Riemann non compactes. Chacun de ces chapitres contient des résultats originaux sous forme de généralisations d'importance variable de théorèmes connus. Nos résultats principaux sont les théorèmes 1.2.3, 1.3.2, 1.3.3 et 2.3.3.

Chapitre 1

SÉRIES UNIVERSELLES DANS $\mathbb{C}^N$

Mentionnons avant tout qu'étant donné un sous-ensemble E d'un espace topologique X, on dénote son intérieur par $int(E)$, sa fermeture par $\overline{E}$ et son complémentaire par $E^c = X \setminus E$. L'ensemble des fonctions continues sur X sera noté $C(X)$. De plus, si X est une surface de Riemann ou si $X = \mathbb{C}^N$, on écrit $\mathcal{O}(E)$ pour l'ensemble des fonctions holomorphes sur un voisinage ouvert de E. Ces notations tiendront tout au long du texte.

1.1. Approximation polynômiale dans $\mathbb{C}^N$

L'approximation polynômiale de fonctions holomorphes de plusieurs variables complexes sera au centre de la discussion des deux prochaines sections. Nous en présentons ici les principaux ingrédients, le plus important étant sans doute la notion de convexité polynômiale.

Définition 1.1.1. *Soit $K \subset \mathbb{C}^N$ un sous-ensemble compact. On définit l'enveloppe polynômiale convexe de K comme étant*

$$\hat{K} = \{z \in \mathbb{C}^N : |p(z)| \leq \sup_K |p| \textit{ pour tout polynôme } p\}.$$

Dans le cas où $\hat{K} = K$, K est dit polynômialement convexe.

Certains ensembles polynômialement convexes ont une forme particulièrement simple :

Définition 1.1.2. *Un polyèdre polynômial est un sous-ensemble compact de $\mathbb{C}^N$ de la forme $\{z \in \mathbb{C}^N : |p_1(z)| \leq 1, \ldots, |p_m(z)| \leq 1\}$ où les p_i sont des polynômes.*

On vérifie aisément que tout polyèdre polynômial est polynômialement convexe. Le résultat qui suit est tiré de **[Hor]** et nous assure qu'on peut souvent se restreindre, pour nos besoins d'approximation, au cas plus simple d'un polyèdre polynômial. À partir de maintenant, et ce tout au long de ce chapitre, nous dirons qu'un polynôme complexe est à coefficients rationnels si les parties réelles et imaginaires de chacun de ses coefficients sont rationnelles.

Lemme 1.1.1. *Soient $K \subset \mathbb{C}^N$ un sous-ensemble compact polynômialement convexe et $U \subset \mathbb{C}^N$ un voisinage ouvert de K. Alors, il existe $p_1, \ldots, p_m$ des polynômes à coefficients rationnels (parties réelle et imaginaire rationnelles) tels que*

$$K \subset \{z \in \mathbb{C}^N : |p_1(z)| \leq 1, \ldots, |p_m(z)| \leq 1\} \subset U.$$

DÉMONSTRATION. Soient $q_1(z) = a_1 z_1, q_2(z) = a_2 z_2, \ldots, q_n(z) = a_n z_n$ où les $a_i > 0$ sont des nombres rationnels choisis tels que $\sup_K |q_i| \leq 1$. Posons $E = U^c \cap \{z \in \mathbb{C}^N : |q_i(z)| \leq 1 \quad i = 1, \ldots, n\}$, qui est fermé et borné, donc compact. Soit $y \in E \subset K^c$ quelconque. Puisque K est polynômialement convexe, il existe p_y un polynôme à coefficients rationnels tel que $|p_y(y)| > 1 \geq \sup_K |p_y|$. Maintenant, comme on a évidemment que $E \subset \bigcup_{y \in E} \{z \in \mathbb{C}^N : |p_y(z)| > 1\}$, la compacité de E nous permet d'écrire $E \subset \bigcup_{k=1}^{M} \{z \in \mathbb{C}^N : |p_k(z)| > 1\} =: F$, où $p_k := p_{y_k}$. Posons

$$G = \{z \in \mathbb{C}^N : |q_1(z)| \leq 1, \ldots, |q_n(z)| \leq 1, |p_1(z)| \leq 1, \ldots, |p_M(z)| \leq 1\}$$

qui contient K. Soit maintenant $z \in U^c$. S'il existe j tel que $|a_j z_j| > 1$, alors clairement on a que $z \in G^c$. Si, au contraire, on a $|a_j z_j| \leq 1$ pour tout $j = 1, \ldots, n$, alors $z \in E \subset F$. Comme $G \subset F^c$, on a nécessairement que $z \in G^c$. Ainsi, $K \subset G \subset U$. □

Finalement, on peut formuler le théorème d'Oka-Weil, une généralisation au cas multi-dimensionnel du théorème de Runge sur l'approximation polynômiale de fonctions holomorphes sur des sous-ensembles compacts simplement connexes de $\mathbb{C}$.

Théorème 1.1.1. *Soit $K \subset \mathbb{C}^N$ un sous-ensemble compact polynômialement convexe, et munissons $\mathcal{O}(K)$ de la topologie de la convergence uniforme. Alors, les polynômes sont denses dans $\mathcal{O}(K)$.*

1.2. Séries de Taylor universelles

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ un sous-ensemble ouvert. La série de Taylor d'une fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ sera dite *universelle* si pour tout sous-ensemble $K \subset \Omega$ compact et polynômialement convexe, pour tout sous-ensemble $L \subset \mathbb{C}^N \backslash \Omega$ compact et polynômialement convexe dont l'enveloppe convexe est disjointe de Ω, et pour toute fonction $g \in \mathcal{O}(L)$, il existe une sous-suite $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$ telle que

$$\max_{y \in K, z \in L} |S_{n_k}(f, y)(z) - g(z)| \to 0$$

lorsque $k \to \infty$. L'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω dont la série de Taylor est universelle sera noté $\mathcal{U}(\Omega)$. Le but de cette section est de montrer l'existence d'une telle fonction, et même d'établir qu'il en existe une très grande quantité. Les travaux de Gauthier et Tamptsé (voir [**GTa**]) sur le cas harmonique dans $\mathbb{R}^N$ nous fournissent une façon de procéder. Il nous suffira donc d'adapter le tout aux fonctions holomorphes dans $\mathbb{C}^N$.

Fixons premièrement un peu de notation. Soit $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pour un multi-indice $\nu \in \mathbb{N}_0^N$, sa longueur sera notée $|\nu| = \nu_1 + \ldots + \nu_N$ et nous écrirons $D^\nu = \frac{\partial^{|\nu|}}{\partial z_1^{\nu_1} \ldots \partial z_N^{\nu_N}}$. Pour un sous-ensemble ouvert $U \subset \mathbb{C}^N$, un point $y \in U$ et une fonction $f \in \mathcal{O}(U)$, posons

$$S_n(f, y)(z) = \sum_{|\nu| \leq n} \frac{D^\nu f(y)}{\nu!}(z - y)^\nu,$$

le polynôme de Taylor de f centré en y de multidegré n. Notons que nous écrirons

$$P(a, r) = \{z \in \mathbb{C}^N : |z - a_1| < r_1, \ldots, |z - a_N| < r_N\}$$

pour le *polydisque* centré en $a = (a_1, \ldots, a_N)$ de multirayon $r = (r_1, \ldots, r_N)$.

Lemme 1.2.1. *Soit $f \in \mathcal{O}(P(a, r))$. Alors, $\{S_n(f, a)(z)\}$ converge vers $f(z)$ pour $z \in P(a, r)$.*

DÉMONSTRATION. Voir [**Ran**] théorème 1.18 p.16. □

Lemme 1.2.2. *Soient $y \in \mathbb{C}^N$ et $f \in \mathcal{O}(P(y,r))$. Alors, pour tout $\nu \in \mathbb{N}_0^N$, on a que*

$$|D^\nu f(y)| \leq \frac{\nu!}{r^\nu} \sup_{P(y,r)} |f|.$$

DÉMONSTRATION. Voir [**Ran**] theorème 1.6 p.9. □

Montrons maintenant un lemme technique qui nous servira dans la preuve du théorème principal de cette section.

Lemme 1.2.3. *Soient $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^N)$, $K, L \subset \mathbb{C}^N$ des sous-ensembles compacts. Alors,*

$$\sup_{z \in L, y \in K} |S_n(f,y)(z) - f(z)| \to 0$$

lorsque $n \to \infty$.

DÉMONSTRATION. Posons $M_j = \sup_{z \in L, y \in K} |z_j - y_j|$. Puisque f est entière, le lemme 1.2.1 nous assure que la suite des sommes partielles $\{S_n(f,y)(z)\}_n$ converge vers $f(z)$ pour tout $z \in P(y,R)$, et ce pour tout multirayon R et tout $y \in \mathbb{C}^N$. Soit donc R tel que $R_j > 2M_j$ pour tout $j = 1, \ldots, N$. Alors, le choix des M_j nous assure que $L \subset P(y,R)$ pour tout $y \in K$. En posant $C = \sup_{z \in \overline{P(y,R)}, y \in K} |f(z)|$ et en utilisant les estimés de Cauchy (lemme 1.2.2), on trouve :

$$|S_n(f,y)(z) - f(z)| \leq \left| \sum_{\nu : |\nu| \geq n+1} \frac{D^\nu f(y)}{\nu!}(z-y)^\nu \right| \leq \sum_{\nu : |\nu| \geq n+1}^{\infty} C \frac{1}{2^{|\nu|}}$$

et ce pour tout $z \in L, y \in K$, ce qui implique le résultat puisque $\sum_{\nu \in \mathbb{N}_0^N} 1/2^{|\nu|} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} 1/2^j\right)^N$ converge. □

Étant donné notre définition de série de Taylor universelle, il nous sera utile de comprendre l'enveloppe polynômiale convexe de la réunion de deux ensembles. Introduisons donc un résultat classique de Kallin, appelé lemme de séparation (voir [**Kal**]).

Théorème 1.2.1. *Soient $X_1, X_2 \subset \mathbb{C}^N$ des sous-ensembles compacts et p un polynôme tel que $\widehat{p(X_1)} \cap \widehat{p(X_2)} = \emptyset$. Alors, $\hat{X}_1 \cup \hat{X}_2 = \widehat{(X_1 \cup X_2)}$.*

DÉMONSTRATION. Soit $y \notin \hat{X}_1 \cup \hat{X}_2$. Distinguons alors deux cas. Si $p(y) \in \widehat{p(X_1)} \cup \widehat{p(X_2)}$, alors sans perte de généralité, disons que $p(y) \in \widehat{p(X_1)}$. Or, puisque $y \notin \hat{X}_1$, par définition de l'enveloppe polynômiale convexe on peut trouver un polynôme q tel que $|q(y)| = \alpha > \sup_{X_1} |q| = \beta$. Posons également $M = \sup_{X_2} |q|$. Puisque $\widehat{p(X_1)} \cap \widehat{p(X_2)} = \emptyset$, le théorème d'Oka-Weil (dans $\mathbb{C}$) nous permet de trouver un polynôme r tel que

$$\sup_{\widehat{p(X_1)}} |r - 1| < \epsilon, \quad \sup_{\widehat{p(X_2)}} |r| < \frac{\alpha}{2M}.$$

Posons maintenant $h := (r \circ p)q$, qui est évidemment un polynôme. On a alors que

$$\big||h(y)| - |q(y)|\big| \leq |r(p(y))q(y) - q(y)| < \alpha\epsilon, \quad (1)$$

$$|h(z)| = |r(p(z))q(z)| \leq \beta |r(p(z))| \leq \beta(|r(p(z)) - 1| + 1) < (1 + \epsilon)\beta$$

pour tout $z \in X_1$, et

$$|h(z)| = |r(p(z))q(z)| \leq \frac{\alpha}{2}$$

pour tout $z \in X_2$. Par (1), on a que $|h(y)| > \alpha(1 - \epsilon)$. Il suffit donc de prendre ϵ assez petit pour que $(1 + \epsilon)\beta < \alpha(1 - \epsilon)$ et $\alpha/2 < \alpha(1 - \epsilon)$ pour montrer que $y \notin (\widehat{X_1 \cup X_2})$.

D'autre part, considérons le cas où $p(y) \notin \widehat{p(X_1)} \cup \widehat{p(X_2)}$. Encore une fois, par le théorème d'Oka-Weil, il existe un polynôme

$$s : \widehat{p(X_1)} \cup \widehat{p(X_2)} \cup \{p(y)\} \to \mathbb{C}$$

tel que

$$\sup_{\widehat{p(X_1)} \cup \widehat{p(X_2)}} |s| < \epsilon$$

et $|s(p(y)) - 1| < \epsilon$. Alors, pour ϵ assez petit, on a que

$$|(s \circ p)(y)| > \sup_{\hat{X}_1 \cup \hat{X}_2} |s \circ p| \geq \sup_{X_1 \cup X_2} |s \circ p|,$$

et ainsi $y \notin (\widehat{X_1 \cup X_2})$.

Ainsi, $(\widehat{X_1 \cup X_2}) \subset \hat{X}_1 \cup \hat{X}_2$. Réciproquement, soit $z \in \hat{X}_1 \cup \hat{X}_2$. Sans perte de généralité, disons que $z \in \hat{X}_1$ et donc

$$|p(z)| \leq \sup_{X_1} |p| \leq \sup_{X_1 \cup X_2} |p|$$

pour tout polynôme p, ce qui montre que $z \in \widehat{(X_1 \cup X_2)}$ et donc que $\hat{X}_1 \cup \hat{X}_2 \subset \widehat{(X_1 \cup X_2)}$. □

Nous utiliserons explicitement le cas particulier suivant du lemme de séparation :

Corollaire 1.2.1. *Soient $A, B \subset \mathbb{C}^N$ des sous-ensembles compacts et polynômialement convexes dont les enveloppes convexes sont disjointes. Alors, $A \cup B$ est polynômialement convexe.*

DÉMONSTRATION. Soient $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ les images respectives de A et B sous l'identification de $\mathbb{C}^N$ avec $\mathbb{R}^{2N}$ suivante : $z_j = x_{2j-1} + ix_{2j}$ pour $j = 1, \ldots, N$. Ainsi, $\tilde{A}, \tilde{B} \subset \mathbb{R}^{2N}$ sont compacts et leurs enveloppes convexes sont disjointes. On a alors qu'il existe un hyperplan réel π qui sépare $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$, c'est-à-dire qu'il existe une fonction linéaire $f : \mathbb{R}^{2N} \to \mathbb{R}$ définie comme $f(x_1, \ldots, x_{2N}) = \sum_{j=1}^{2N} a_j x_j$ telle que $\pi = f^{-1}(0)$, $f(\tilde{A}) \subset \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$ et $f(\tilde{B}) \subset \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Si on pose $F : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}$ telle que $F(z_1, \ldots, z_N) = \sum_{j=1}^{N}(a_{2j-1} - ia_{2j})z_j$, on trouve que $Re(F) = f$. Ainsi, $F(A) \subset \{z \in \mathbb{C} : Re(z) < 0\}$, $F(B) \subset \{z \in \mathbb{C} : Re(z) > 0\}$ et donc $F(A) \cap F(B) = \emptyset$. Puisque F est linéaire et donc polynômiale, elle préserve la convexité polynômiale, ce qui donne que $\widehat{F(A)} \cap \widehat{F(B)} = F(A) \cap F(B) = \emptyset$. Il suffit alors d'appliquer le lemme de séparation. □

Avant d'énoncer notre théorème principal pour cette section, rappelons qu'étant donné un espace topologique X et un sous-ensemble $E \subset X$, E est dit *nulle part dense* si $int(\overline{E}) = \emptyset$. Si E s'écrit comme réunion dénombrable d'ensembles nulle part denses, alors E est dit *de première catégorie*. Autrement, E est *de deuxième catégorie*. Les énoncés suivants sont équivalents :

– l'intersection dénombrable d'ensembles ouverts denses est dense

– tout sous-ensemble ouvert est de deuxième catégorie,

et s'ils sont vrais pour X, alors X est un *espace de Baire*. Notons que tout espace métrique complet est un espace de Baire. Dans de tels espaces, les ensembles de première catégorie peuvent être considérés comme petits par rapport à l'espace total, et le complémentaire de tout ensemble de première catégorie est appelé *ensemble résiduel.* Finalement, E est un sous-ensemble G_δ s'il s'écrit comme intersection dénombrable de sous-ensembles ouverts. Voici une caractérisation des ensembles résiduels (voir [**Oxt**]) :

Théorème 1.2.2. *Dans un espace de Baire, un sous-ensemble est résiduel si et seulement s'il contient un sous-ensemble G_δ dense.*

Notons qu'en munissant $\mathcal{O}(\Omega)$ de la distance usuelle entre deux fonctions, nommément celle induisant la topologie de la convergence uniforme sur les sous-ensembles compacts, nous obtenons un espace métrique complet, donc un espace de Baire. Nous pouvons maintenant montrer le résultat principal de cette section, en adaptant la preuve du théorème 1 de [**GTa**].

Théorème 1.2.3. *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ un sous-ensemble ouvert et convexe. Alors, $\mathcal{U}(\Omega)$ est résiduel dans $\mathcal{O}(\Omega)$.*

DÉMONSTRATION. Considérons $\{p_i\}$ une énumération des polynômes à coefficients rationnels et $\{K_k\}$ une énumération des polyèdres polynômiaux inclus dans Ω définis par des polynômes à coefficients rationnels. Soit $\{L_m\}$ une énumération des polyèdres polynômiaux ayant les propriétés suivantes :

– Chaque polyèdre polynômial est défini par des polynômes à coefficients rationnels.

– L'enveloppe convexe de chaque polyèdre polynômial est disjointe de Ω.

Posons

$$A_{i,j,k,m,n} = \{g \in \mathcal{O}(\Omega) : \max_{z \in L_m, y \in K_k} |S_n(g,y)(z) - p_i(z)| < 1/j \}$$

qui est ouvert. En effet, considérons une suite de fonctions $\{g_r\}_r \subset \mathcal{O}(\Omega) \setminus A_{i,j,k,m,n}$ qui converge vers g dans la topologie de $\mathcal{O}(\Omega)$, c'est-à-dire uniformément sur les sous-ensembles compacts. Puisque les dérivées partielles de tout ordre de la suite $\{g_r\}$ convergeront aussi uniformément sur les parties compactes de Ω, on a que $S_\nu(g_r,y)(z) \to S_\nu(g,y)(z)$ uniformément sur $L_m \times K_k$ lorsque r tend vers l'infini, et ce pour tout ν. Ainsi, si $g \in A_{i,j,k,m,n}$, alors il faut que la suite $\{g_r\}$ se trouve éventuellement dans $A_{i,j,k,m,n}$. Mais puisque $g_r \in \mathcal{O}(\Omega) \setminus A_{i,j,k,m,n}$ pour tout $r \in \mathbb{N}$, on doit avoir que $g \in \mathcal{O}(\Omega) \setminus A_{i,j,k,m,n}$ et donc que $\mathcal{O}(\Omega) \setminus A_{i,j,k,m,n}$ est fermé.

Soient maintenant $f \in \bigcap_{i,j,k,m} \bigcup_n A_{i,j,k,m,n}$, $K \subset \Omega$ compact polynômialement convexe, $L \subset int(\mathbb{C}^N \backslash \Omega)$ compact polynômialement convexe dont l'enveloppe convexe est disjointe de Ω et $g \in \mathcal{O}(L)$. Alors, par le lemme 1.1.1, il existe K_k, L_m disjoints tels que $K \subset K_k, L \subset L_m$. Le lemme 1.1.1 nous assure également que L_m peut être choisi assez petit pour que $g \in \mathcal{O}(L_m)$. Par choix de f, pour chaque $i, j \in \mathbb{N}$ il existe $n = n(i,j,k,m)$ tel que

$$\max_{z \in L_m, y \in K_k} |S_n(f,y)(z) - p_i(z)| < 1/j.$$

Puisque L_m est polynômialement convexe, on peut appliquer le théorème d'Oka-Weil et trouver $\{p_{i_\lambda}\}_\lambda$ telle que

$$\max_{z \in L_m} |g(z) - p_{i_\lambda}(z)| \to 0$$

lorsque $\lambda \to \infty$. On peut donc obtenir une suite $\{n_r\}$ telle que

$$\max_{z \in L_m, y \in K_k} |S_{n_r}(f,y)(z) - g(z)| \to 0$$

lorsque $r \to \infty$. Cela montre que $f \in \mathcal{U}(\Omega)$, et que $\mathcal{U}(\Omega) = \bigcap_{i,j,k,m} \bigcup_n A_{i,j,k,m,n}$, l'autre inclusion étant évidente.

Nous voudrions maintenant montrer que $\bigcup_n A_{i,j,k,m,n}$ est dense dans $\mathcal{O}(\Omega)$ pour tout i,j,k,m. Soient donc $g \in \mathcal{O}(\Omega), \epsilon > 0$ et $K \subset \Omega$ compact. Par hypothèse, l'enveloppe convexe $\hat{K}_{conv} \subset \Omega$ est disjointe de celle de L_m. De plus, les propriétés de séparation de $\mathbb{C}^N$ nous assurent l'existence de deux ensembles ouverts disjoints B_K, B_L tels que $\hat{K}_{conv} \subset B_K$ et $L_m \subset B_L$. Définissons alors $h : B_K \cup B_L \to \mathbb{C}$ telle que

$$h(z) = \begin{cases} g(z) \text{ si } z \in B_K \\ p_i(z) \text{ si } z \in B_L \end{cases}$$

qui est clairement holomorphe. Si on pose $\Pi = \hat{K}_{conv} \cup L_m$, le corollaire 1.2.1 nous assure que Π est polynômialement convexe, car un sous-ensemble compact et convexe de $\mathbb{C}^N$ est polynômialement convexe (voir proposition 2.14.11 p.140 de [**Nar**]). Par le théorème d'Oka-Weil, il existe donc un polynôme θ tel que $\max_{z \in \Pi} |h(z) - \theta(z)| < \epsilon/2$. Or, puisque $\theta \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^N)$, on peut appliquer le lemme

1.2.3 et ainsi trouver n_0 tel que

$$\max_{z\in\Pi, y\in K_k} |S_n(\theta, y)(z) - \theta(z)| < \epsilon/2$$

pour tout $n \geq n_0$, et donc

$$\max_{z\in L_m, y\in K_k} |S_n(\theta, y)(z) - h(z)| < \epsilon$$

pour tout $n \geq n_0$, ce qui montre que $\theta \in \bigcup_n A_{i,j,k,m,n}$, en prenant $\epsilon < 1/j$. Puisqu'on a que, par choix de θ,

$$\max_{z\in K}|\theta(z) - g(z)| \leq \max_{z\in \hat{K}_{conv}} |\theta(z) - g(z)| \leq \max_{z\in\Pi}|\theta(z) - h(z)| < \epsilon,$$

on a bien que $\bigcup_n A_{i,j,k,m,n}$ est dense dans $\mathcal{O}(\Omega)$. Ainsi, $\mathcal{U}(\Omega)$ est un ensemble G_δ dense et est donc résiduel dans $\mathcal{O}(\Omega)$, par le théorème 1.2.2. □

Remarque 1.2.1. *Le cas où $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ est un demi-espace est particulièrement simple, car on a alors évidemment que toutes les parties compactes de $\mathbb{C}^N \setminus \Omega$ ont leurs enveloppes convexes disjointe de Ω.*

1.3. Séries de puissances universelles

Cette section est séparée en deux volets. Premièrement, nous obtenons l'existence d'une série de puissances de plusieurs variables complexes qui converge sur un ensemble et qui est, d'une certaine façon qui reste à définir, universelle en dehors de celui-ci. Ce résultat est très grandement inspiré du théorème suivant, énoncé ici dans sa version améliorée par Nestoridis (voir [**Nes**]), mais démontré d'abord indépendamment par Chui et Parnes (voir [**ChP**]) et Luh (voir [**Luh**]). Soit $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ le disque unité et pour un sous-ensemble $E \subset \mathbb{C}$, dénotons par $A(E)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur l'intérieur de E et continues sur sa frontière.

Théorème 1.3.1. *Il existe une série de puissances S centrée à l'origine et de rayon de convergence un avec la propriété qu'étant donné un sous-ensemble compact $K \subset (\mathbb{C} \setminus \mathbb{D})$ avec complémentaire connexe et une fonction $f \in A(K)$, il existe une sous-suite de la suite des sommes partielles de S qui converge uniformément vers f sur K.*

Dans la deuxième partie, nous démontrons que la série universelle à laquelle nous nous intéressons n'est pas un cas isolé, bien au contraire : dans un certain sens, la plupart des séries de puissances possèdent cette propriété.

1.3.1. Existence d'une série de puissances universelle

Fixons d'abord la notation utilisée tout au long de cette section. Un ensemble $X \subset \mathbb{C}^N$ tel qu'il existe des polynômes $p_1, \ldots, p_J$ avec la propriété que

$$X = \{z \in \mathbb{C}^N : p_j(z) = 0 \ \forall j = 1, \ldots, J\}$$

est appelé *ensemble algébrique.* Nous utiliserons le terme *hypersurface algébrique* pour distinguer le cas où X n'est l'ensemble des zéros que d'un seul polynôme. Notons que tout ensemble algébrique peut s'écrire comme l'intersection d'un nombre fini de surfaces algébriques : $X = \bigcap_{j=1}^{J} H_j$.

Lemme 1.3.1. *Soit $K \subset \mathbb{C}^N$ un sous-ensemble compact polynômialement convexe avec la propriété qu'il existe une hypersurface algébrique H contenant l'origine telle que $K \subset \mathbb{C}^N \backslash H$. Alors, étant donné $k \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{O}(K)$, il existe un polynôme $r(z)$ avec les propriétés suivantes :*

- *le monôme de plus petit degré dans $r(z)$ est de degré au moins k*
- *$r(z)$ s'annule sur H*
- $\sup_K |r(z) - f(z)| < 2^{-(k+1)}$.

DÉMONSTRATION. Posons $H = \{z \in \mathbb{C}^N : p(z) = 0\}$. Par choix de K, on a que pour tout $c \in \mathbb{C}$,

$$\frac{f(z) - c(p(z))^k}{(p(z))^{k+1}} \in \mathcal{O}(K).$$

Posons $M = \sup_K |p(z)| > 0$. Alors, par le théorème d'Oka-Weil, il existe un polynôme q tel que

$$\sup_K \left| q(z) - \frac{f(z) - c(p(z))^k}{(p(z))^{k+1}} \right| \leq \frac{1}{(2M)^{k+1}}.$$

Posons maintenant $r(z) = c(p(z))^k + (p(z))^{k+1} q(z)$, qui s'annule évidemment sur H et qui est de la forme voulue, car p est un polynôme avec coefficient constant nul puisque $0 \in H$. On aura

$$\sup_K |r - f| = \sup_K |c(p(z))^k + (p(z))^{k+1}q(z) - f(z)|$$

$$\leq \sup_K \left|(p(z))^{k+1}\right| \frac{1}{(2M)^{k+1}} \leq \frac{1}{2^{k+1}}.$$

□

Ce lemme permet de construire des séries de puissances avec une propriété d'universalité et convergeant sur des ensembles bien précis. Rappelons que nous dénotons $\mathbb{N} \cup \{0\}$ par $\mathbb{N}_0$ et que pour un multi-indice $\nu \in \mathbb{N}_0^N$, $|\nu| = \nu_1 + \ldots + \nu_N$ est sa longueur.

Théorème 1.3.2. *Soit $X = \bigcap_{j=1}^J H_j \subset \mathbb{C}^N$ un ensemble algébrique contenant l'origine. Il existe une série $\sum_{\nu \in \mathbb{N}_0^N} a_\nu z^\nu$ qui converge sur X et qui possède la propriété qu'étant donné un sous-ensemble $K \subset \mathbb{C}^N$ compact polynômialement convexe disjoint d'au moins un des H_j et étant donné une fonction $f \in \mathcal{O}(K)$, il existe une suite $\{d_s\} \subset \mathbb{N}$ telle que $\sum_{|\nu| \leq d_s} a_\nu z^\nu \to f$ uniformément sur K lorsque $s \to \infty$.*

Démonstration. Considérons $\{K_m^j\}_m$ une énumération des polyèdres polynômiaux disjoints de H_j et définis par des polynômes à coefficients rationnels, ainsi que $\{\theta_i\}$ une énumération des polynômes à coefficients rationnels. Soit maintenant $\{(g_n, L_n)\}$ une énumération des paires (θ_i, K_m^j) où $j = 1, \ldots, J$ et $i, m \in \mathbb{N}$, et où chaque paire apparaît une infinité de fois. Posons

$$\sigma_1(z) = g_1(z) = \sum_{|\nu| \leq d_1} a_\nu z^\nu,$$

qui est évidemment telle que

$$\sup_{L_1} |\sigma_1 - g_1| < 1.$$

En prenant $k = d_1 + 1$, le lemme 1.3.1 nous donne qu'il existe

$$\sigma_2(z) = \sum_{d_1+1 \leq |\nu| \leq d_2} a_\nu z^\nu$$

s'annulant sur X tel que

$$\sup_{L_2} |\sigma_2 - (g_2 - \sigma_1)| < 1/2.$$

Similairement, on trouve

$$\sigma_n(z) = \sum_{d_{n-1}+1 \leq |\nu| \leq d_n} a_\nu z^\nu$$

s'annulant sur X tel que

$$\sup_{L_n} |\sigma_n - (g_n - \sigma_1 - \ldots - \sigma_{n-1})| < 1/n.$$

Considérons maintenant $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n(z)$. Sur X, on a que $\sigma_n(z) = 0$ pour tout $n \geq 2$ et donc la série converge évidemment partout sur cet ensemble.

Montrons la propriété d'approximation annoncée. Soient $K \subset \mathbb{C}^N \setminus H_{j_0}$ compact polynômialement convexe et $f \in \mathcal{O}(K)$. Par le théorème d'Oka-Weil, il existe $\{q_r\}$ une suite de polynômes telle que

$$\sup_K |f - q_r| < 1/r.$$

De plus, il existe une sous-suite $\{\theta_{i_r}\}$ de l'énumération des polynômes rationnels telle que

$$\sup_K |\theta_{i_r} - q_r| < 1/r.$$

D'autre part, puisque $f \in \mathcal{O}(K)$, il existe un ouvert U tel que $K \subset U \subset \mathbb{C}^N \setminus H_{j_0}$ et $f \in \mathcal{O}(U)$. Par le lemme 1.1.1, il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que $K \subset K_{m_0}^{j_0} \subset U$ et donc $f \in \mathcal{O}(K_{m_0}^{j_0})$. Puisqu'on sait que la paire $(\theta_{i_r}, K_{m_0}^{j_0})$ apparaît une infinité de fois dans $\{(g_n, L_n)\}$, on a que $g_{n_1} = \ldots = g_{n_s} = \ldots = \theta_{i_r}$ et $L_{n_1} = \ldots = L_{n_s} = \ldots = K_{m_0}^{j_0}$. On a donc que

$$\sup_{K_{m_0}^{j_0}} \left| \sum_{n=1}^{n_s} \sigma_n - \theta_{i_r} \right| = \sup_{L_{n_s}} \left| \sum_{n=1}^{n_s} \sigma_n - g_{n_s} \right| \leq 1/n_s$$

pour tout s et ainsi,

$$\begin{aligned}
\sup_K \left| \sum_{n=1}^{n_s} \sigma_n - f \right| &\leq \sup_K \left| \sum_{n=1}^{n_s} \sigma_n - \theta_{i_r} \right| + \sup_K |\theta_{i_r} - q_r| + \sup_K |q_r - f| \\
&\leq \sup_{K_{m_0}^{j_0}} \left| \sum_{n=1}^{n_s} \sigma_n - \theta_{i_r} \right| + 1/r + 1/r \\
&\leq 1/n_s + 2/r \to 0
\end{aligned}$$

lorsque $s, r \to \infty$. Notons que cela a comme conséquence que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n(z)$ diverge en dehors de X. En effet, si $z \notin X$, alors il existe p_{j_0} tel que $p_{j_0}(z) \neq 0$ et ainsi $\{z\} \subset \mathbb{C}^N \setminus H_{j_0}$ est un sous-ensemble compact polynômialement convexe. On peut donc évidemment trouver deux sous-suites de la suite des sommes partielles de $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n(z)$ convergeant vers deux limites différentes sur $\{z\}$. □

Avant de poursuivre, établissons une propriété des ensembles polynômialement convexes.

Lemme 1.3.2. *Soit $K \subset \mathbb{C}^N \setminus \{0\}$ un sous-ensemble compact polynômialement convexe. Alors, il existe une hypersurface algébrique $H_K = \{z \in \mathbb{C}^N : q(z) = 0\}$ contenant l'origine telle que $H_K \cap K = \emptyset$, où q est un polynôme à coefficients rationnels.*

DÉMONSTRATION. Puisque $0 \notin K$ et K est polynômialement convexe, il existe un polynôme p tel que $|p(0)| > \sup_K |p|$. Posons $\epsilon = |p(0)| - \sup_K |p| > 0$ et $L = K \cup \{0\}$. Il est alors facile de trouver un polynôme p_1 à coefficients rationnels tel que $\sup_L |p_1 - p| < \epsilon/2$. On aura $|p_1(0)| > |p(0)| - \epsilon/2$ et $\sup_K |p_1| \leq \sup_K |p| + \epsilon/2$. Donc $|p_1(0)| > \sup_K |p_1|$ par choix de ϵ. Or, $p_1(z) = p_1(0) + q(z)$ où $q(0) = 0$. On veut montrer que $H_K := \{z \in \mathbb{C}^N : q(z) = 0\}$ fait l'affaire. Puisqu'il est clair que $0 \in H_K$, il suffit de vérifier que $H_K \cap K = \emptyset$. Pour cela, remarquons que $p_1|_{H_K} = p_1(0)$ et donc l'inégalité $|p_1(0)| > \sup_K |p_1|$ nous permet de conclure. □

Le résultat suivant n'est pas sans rappeler un théorème classique de Seleznev (voir [**Sel**]), qui correspond au cas où le rayon de convergence est nul dans le théorème 1.3.1.

Théorème 1.3.3. *Il existe une série $\sum_{\nu \in \mathbb{N}_0^N} a_\nu z^\nu$ possédant la propriété qu'étant donné un sous-ensemble $K \subset \mathbb{C}^n$ compact polynômialement convexe disjoint de l'origine et étant donné une fonction $f \in \mathcal{O}(K)$, il existe une suite $\{d_s\} \subset \mathbb{N}$ telle que $\sum_{|\nu| \leq d_s} a_\nu z^\nu \to f$ uniformément sur K lorsque $s \to \infty$.*

DÉMONSTRATION. Considérons $\{A_l\}$ une énumération des hypersurfaces algébriques dans $\mathbb{C}^N$ contenant l'origine et définies par des polynômes rationnels, c'est-à-dire que $A_l = \{z \in \mathbb{C}^N : q_l(z) = 0\}$, où q_l est un polynôme dont les coefficients sont tous rationnels. Considérons également $\{K_k^l\}_k$ une énumération des polyèdres polynômiaux définis par des polynômes à coefficients rationnels et ne rencontrant pas A_l, et finalement $\{\theta_i\}$ une énumération des polynômes à coefficients rationnels. Soit maintenant $\{(g_n, L_n)\}$ une énumération des paires (θ_i, K_k^l) pour $i, k, l \in \mathbb{N}$, où chaque paire apparaît une infinité de fois. Posons

$$\sigma_1(z) = g_1(z) = \sum_{|\nu| \leq d_1} a_\nu z^\nu,$$

qui est évidemment tel que

$$\sup_{L_1} |\sigma_1 - g_1| < 1.$$

En prenant $k = d_1 + 1$, le lemme 1.3.1 nous donne qu'il existe

$$\sigma_2(z) = \sum_{d_1+1 \leq |\nu| \leq d_2} a_\nu z^\nu$$

s'annulant en $z = 0$ tel que

$$\sup_{L_2} |\sigma_2 - (g_2 - \sigma_1)| < 1/2.$$

Similairement, on trouve

$$\sigma_n(z) = \sum_{d_{n-1}+1 \leq |\nu| \leq d_n} a_\nu z^\nu$$

s'annulant en $z = 0$ tel que

$$\sup_{L_n} |\sigma_n - (g_n - \sigma_1 - \ldots - \sigma_{n-1})| < 1/n.$$

Ainsi, $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n(z)$ converge en $z = 0$, car $\sigma_n(0) = 0$ pour tout $n \geq 2$.

Montrons maintenant la propriété d'approximation annoncée pour cette série. Soient $K \subset \mathbb{C}^N$ compact polynômialement convexe disjoint de l'origine et $f \in \mathcal{O}(K)$. Par le théorème d'Oka-Weil, il existe $\{q_r\}$ une suite de polynômes telle que

$$\sup_K |f - q_r| < 1/r.$$

De plus, il existe une sous-suite $\{\theta_{i_r}\}$ de l'énumération des polynômes rationnels telle que

$$\sup_K |\theta_{i_r} - q_r| < 1/r.$$

D'autre part, le lemme 1.3.2 nous donne l'existence d'une hypersurface algébrique A_{l_0} telle que $K \subset \mathbb{C}^N \backslash A_{l_0}$ et puisque $f \in \mathcal{O}(K)$, il existe un ouvert U tel que $K \subset U \subset \mathbb{C}^N \backslash A_{l_0}$ et $f \in \mathcal{O}(U)$. Par le lemme 1.1.1, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $K \subset K_{k_0}^{l_0} \subset U$ et donc $f \in \mathcal{O}(K_{k_0}^{l_0})$. Puisqu'on sait que la paire $(\theta_{i_r}, K_{k_0}^{l_0})$ apparaît une infinité de fois dans $\{(g_n, L_n)\}$, on a que $g_{n_1} = \ldots = g_{n_s} = \ldots = \theta_{i_r}$ et $L_{n_1} = \ldots = L_{n_s} = \ldots = K_{k_0}^{l_0}$. On a donc que

$$\sup_{K_{k_0}^{l_0}} \left| \sum_{n=1}^{n_s} \sigma_n - \theta_{i_r} \right| = \sup_{L_{n_s}} \left| \sum_{n=1}^{n_s} \sigma_n - g_{n_s} \right| \leq 1/n_s$$

pour tout s et ainsi,

$$\begin{aligned}
\sup_K \left| \sum_{n=1}^{n_s} \sigma_n - f \right| &\leq \sup_K \left| \sum_{n=1}^{n_s} \sigma_n - \theta_{i_r} \right| + \sup_K |\theta_{i_r} - q_r| + \sup_K |q_r - f| \\
&\leq \sup_{K_{k_0}^{l_0}} \left| \sum_{n=1}^{n_s} \sigma_n - \theta_{i_r} \right| + 1/r + 1/r \\
&\leq 1/n_s + 2/r \to 0
\end{aligned}$$

lorsque $s, r \to \infty$. Notons que cela a comme conséquence que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n(z)$ diverge en dehors de $\{0\}$. En effet, si $z \neq 0$, alors il existe j_0 tel que $z_{j_0} \neq 0$ et ainsi $\{z\} \subset \mathbb{C}^N \backslash \{z \in \mathbb{C}^N : z_{j_0} = 0\}$ est un sous-ensemble compact polynômialement convexe. On peut donc évidemment trouver deux sous-suites de la suite des sommes partielles de $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n(z)$ convergeant vers deux limites différentes sur $\{z\}$.

□

Remarquons que les preuves des deux théorèmes précédents nous donnent de l'information supplémentaire sur les séries construites : on peut exercer un contrôle sur les puissances de $z_1, \ldots, z_N$ qui apparaissent dans celles-ci.

1.3.2. Taille de l'ensemble des séries de puissances universelles

Maintenant que nous avons établi l'existence de telles séries universelles, il est naturel de se demander s'il existe beaucoup de séries jouissant d'une ou l'autre des propriétés d'universalité considérées. Comme c'est souvent le cas pour ce genre de phénomène (voir [**Gro**]), la réponse est oui, et nous allons le démontrer dans deux cadres différents : premièrement en identifiant ces séries avec des suites de nombres complexes, puis en les voyant comme familles de nombres complexes indicées par les multi-indices.

Soit X un espace vectoriel complexe muni d'une métrique compatible avec les opérations et invariante sous translation. Pour une suite $x = \{x_n\} \subset X$, on définit l'ensemble $U(x)$ comme le sous-ensemble des suites complexes $\{a_n\}$ telles que l'ensemble des sommes partielles $\{\sum_{k=1}^{n} a_k x_k, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans X. Munissons $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, l'espace vectoriel des suites de nombres complexes, de la métrique induisant la topologie produit : pour deux suites $r = \{r_k\}_k, s = \{s_k\}_k \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, on définit

$$\delta(r,s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|r_k - s_k|}{1 + |r_k - s_k|}.$$

$(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \delta)$ est alors un espace vectoriel métrique complet, et donc un espace de Baire. Nous nous proposons d'abord de présenter une caractérisation abstraite de l'universalité (voir le théorème 2.1 de [**Ste**], ou encore la proposition 7 de [**Gro**] et le théorème 1.2 de [**NPa**]).

Théorème 1.3.4. *Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

- $U(x) \neq \emptyset$
- *span*$\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$ *est dense dans* X *pour tout* $n \in \mathbb{N}$
- $U(x)$ *est un* G_δ *dense dans* $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *et contient un sous-espace vectoriel dense de* $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$*, sauf zéro.*

Notre stratégie consiste à choisir soigneusement l'espace vectoriel X auquel on applique ce théorème. Remarquons pour cela que les séries des théorèmes 1.3.2 et 1.3.3 sont complètement et uniquement déterminées par le choix des nombres $\{a_\nu\}$. Afin de pouvoir utiliser le théorème précédent, choisissons une énumération $\{\nu_\lambda\}_\lambda$ des multi-indices $\nu \in \mathbb{N}_0^N$ avec la propriété suivante : pour tout $d \in \mathbb{N}_0$, il existe $d' \in \mathbb{N}$ tel que $\{\nu : |\nu| \leq d\} = \{\nu_\lambda\}_{\lambda=1}^{d'}$. Il est facile de voir qu'une telle énumération existe en énumérant d'abord les multi-indices de longueur 0, puis ceux de longueur 1, etc. Attention : si on interchange les rôles de d et d', il n'existe pas nécessairement de telle énumération.

Soit U l'ensemble des suites $\{a_\lambda\}_\lambda$ avec la propriété qu'étant donné un sous-ensemble compact polynômialement convexe $K \subset \mathbb{C}^N$ disjoint de l'origine et étant donné une fonction $f \in \mathcal{O}(K)$, il existe une suite $\{d_s\} \subset \mathbb{N}$ telle que $\sum_{\lambda=1}^{d_s} a_\lambda z^{\nu_\lambda} \to f$ uniformément sur K lorsque $s \to \infty$. Remarquons que pour chaque suite $\{a_\lambda\} \in U$, la série associée $\sum_{\lambda=1}^{\infty} a_\lambda z^{\nu_\lambda}$ converge évidemment à l'origine.

Théorème 1.3.5. *L'ensemble U est un G_δ dense dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.*

DÉMONSTRATION. Comme dans la preuve du théorème 1.3.3, soient $\{A_l\}_l$ une énumération des hypersurfaces algébriques dans $\mathbb{C}^N$ contenant l'origine et définies par des polynômes à coefficients rationnels et $\{K_k^l\}_k$ une énumération des polyèdres polynômiaux définis par des polynômes à coefficients rationnels et ne rencontrant pas A_l. Définissons $U_{l,k}$ comme étant l'ensemble des suites $\{b_\lambda\}_\lambda$ de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telles que $\{\sum_{\lambda=1}^{n} b_\lambda z^{\nu_\lambda} : n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathcal{O}(K_k^l)$. En utilisant le théorème 1.3.4 appliqué à $X = \mathcal{O}(K_k^l)$ et $x = \{z^{\nu_\lambda}\}_\lambda$, on trouve que $U_{l,k}$ est un G_δ dense dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ puisque $U_{l,k} \neq \emptyset$ par le théorème 1.3.3 et par choix de l'énumération $\{\nu_\lambda\}$. Le résultat suivra donc du fait que $U = \bigcap_{l,k} U_{l,k}$, car $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est un espace de Baire.

Soit $\{a_\lambda\}_\lambda \in \bigcap_{l,k} U_{l,k}$, et considérons $K \subset \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \setminus \{0\}$ compact et polynômialement convexe, ainsi que $f \in \mathcal{O}(K)$. En invoquant, comme dans la preuve du théorème 1.3.3, le lemme 1.1.1, on peut trouver K_k^l tel que $K \subset K_k^l$ et $f \in \mathcal{O}(K_k^l)$. Mais alors, on sait qu'il existe une suite $\{d_s\}$ de $\mathbb{N}$ telle que

$$\sup_K \left| \sum_{\lambda=1}^{d_s} a_\lambda z^{\nu_\lambda} - f \right| \leq \sup_{K_k^l} \left| \sum_{\lambda=1}^{d_s} a_\lambda z^{\nu_\lambda} - f \right| \to 0$$

lorsque $s \to \infty$. Cela montre que $\{a_\lambda\}_\lambda \in U$ et complète la preuve, l'autre inclusion étant évidente. □

L'approche proposée ici pour obtenir de l'information sur la taille de l'ensemble des séries universelles ne s'adapte pas facilement au cas où on exigerait que la série universelle converge sur un certain ensemble algébrique X. Toutefois, il existe une version plus générale du théorème 1.3.4 nous permettant, sous certaines conditions, de remplacer $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ par un sous-espace vectoriel A muni d'une métrique par rapport à laquelle il est complet (voir [**NPa**]). Ainsi, on pourrait poser $A = \{\{a_\lambda\} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_\lambda z^{\nu_\lambda}$ converge sur $X\}$ et espérer appliquer ce théorème. Malheureusement, A n'est pas complet pour la métrique induite par celle de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, et en fait, nous ne sommes pas arrivés à en définir une nous assurant la complétude. Cette difficulté explique pourquoi nous n'avons traité que des séries du type du théorème 1.3.3, en ignorant ici celles du type du théorème 1.3.2.

Maintenant, on remarque que contrairement aux séries obtenues aux théorèmes 1.3.2 et 1.3.3, nous ne contrôlons pas la longueur des multi-indices apparaissant dans les séries associées aux suites de U : la correspondance entre les séries de la forme $\sum_{|\nu|\leq d} b_\nu z^\nu$ et celles de la forme $\sum_{\lambda=1}^{d'} a_\lambda z^{\nu_\lambda}$ n'est pas biunivoque. Pour retrouver ce contrôle sur les multi-indices, il est nécessaire d'introduire une version modifiée du théorème 1.3.4 mieux adaptée à nos besoins. Considérons donc l'espace vectoriel $\prod_\nu \mathbb{C}_\nu = \{\{a_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}_0^N} : a_\nu \in \mathbb{C}\,\forall\nu\}$ et munissons-le de la métrique

$$\rho(a,b) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{N_j 2^j} \sum_{|\nu|=j} \frac{|a_\nu - b_\nu|}{1+|a_\nu - b_\nu|},$$

où N_j est le nombre de multi-indices de longueur j. $(\prod_\nu \mathbb{C}_\nu, \rho)$ est alors un espace vectoriel métrique complet, donc un espace de Baire. Si X est un espace vectoriel muni d'une métrique invariante sous translation et compatible avec les opérations, et si $x = \{x_\nu\} \in \prod_\nu X_\nu$, posons $\tilde{U}(x)$ comme étant le sous-ensemble des suites $\{a_\nu\}$ de $\prod_\nu \mathbb{C}_\nu$ telles que l'ensemble des sommes partielles $\{\sum_{|\nu|\leq n} a_\nu x_\nu, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans X. On obtient alors le résultat suivant (voir [**Tam**]).

Théorème 1.3.6. *$\tilde{U}(x) \neq \emptyset$ si et seulement si $\tilde{U}(x)$ est un G_δ dense dans $\prod_\nu \mathbb{C}_\nu$.*

Nous pouvons maintenant obtenir le résultat désiré : soit $\tilde{U}$ l'ensemble des suites $\{a_\nu\}_\nu$ avec la propriété qu'étant donné un sous-ensemble compact polynômialement convexe $K \subset \mathbb{C}^N$ disjoint de l'origine et étant donné une fonction $f \in \mathcal{O}(K)$, il existe une suite $\{d_s\} \subset \mathbb{N}$ telle que $\sum_{|\nu|\leq d_s} a_\nu z^\nu \to f$ uniformément sur K lorsque $s \to \infty$. En adaptant la preuve du théorème 1.3.5 et en utilisant le théorème ci-dessus, on trouve

Théorème 1.3.7. *$\tilde{U}$ est un G_δ dense dans $\prod_\nu \mathbb{C}_\nu$.*

Chapitre 2

SÉRIES UNIVERSELLES SUR UNE SURFACE DE RIEMANN NON COMPACTE

Dans un article récent à paraître (voir [**Ste**]), Stefanopoulos établit l'existence de séries de solutions fondamentales de l'opérateur de Cauchy-Riemann qui sont universelles sur certains sous-ensembles du plan complexe. En particulier, il montre :

Théorème 2.0.8. *Soit K un sous-ensemble compact de $\mathbb{C}$ dont le complémentaire est connexe et soit $\{s_n\}_n$ un sous-ensemble dénombrable de $\mathbb{C} \setminus K$ s'y accumulant. Alors, il existe une suite $\{c_n\}_n$ dans $\mathbb{C}$ avec la propriété qu'étant donné une fonction $f \in \mathcal{O}(K)$, il existe une sous-suite $\{n_k\}_k$ de $\mathbb{N}$ telle que*

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{z\in K} \left| f(z) - \sum_{j=1}^{n_k} c_j \frac{1}{z - s_j} \right| = 0.$$

De plus, l'ensemble de telles séries $\{c_n\}_n$ est un G_δ dense dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, muni de la topologie produit, et contient un sous-espace vectoriel dense de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, sauf zéro.

Théorème 2.0.9. *Pour $a \in \mathbb{R}$, soit $\sigma = [a, \infty)$ et posons $\mathbb{C}_\sigma = \mathbb{C} \setminus \sigma$. Soit $\{a_n\}_n$ un sous-ensemble dénombrable de σ s'y accumulant. Alors, il existe une suite $\{c_n\}_n$ dans $\mathbb{C}$ avec la propriété qu'étant donné une fonction $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}_\sigma)$, il existe une sous-suite $\{n_k\}_k$ de $\mathbb{N}$ telle que pour tout sous-ensemble compact $K \subset \mathbb{C}_\sigma$,*

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{z\in K} \left| f(z) - \sum_{j=1}^{n_k} c_j \frac{1}{z - a_j} \right| = 0.$$

De plus, l'ensemble de telles séries $\{c_n\}_n$ est un G_δ dense dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, muni de la topologie produit, et contient un sous-espace vectoriel dense de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, sauf zéro.

Outre la caractérisation abstraite de l'universalité présentée au théorème 1.3.4, un autre élément clé de la démonstration de ces résultats est un théorème sur l'approximation par des solutions fondamentales d'un opérateur différentiel, que nous citons ici dans le cas particulier qui nous intéresse (voir **[Tar]**).

Théorème 2.0.10. *Soient $K \subset \mathbb{C}$ compact et $\sigma \subset \mathbb{C} \setminus K$ s'y accumulant. Alors,*

$$span\{\frac{1}{z-y} : y \in \sigma\}$$

est dense dans $\mathcal{O}(K)$.

Le but de ce chapitre est de généraliser les théorèmes 2.0.8 et 2.0.9 au cas des surfaces de Riemann non compactes, via l'obtention d'une version du théorème précédent qui soit valide pour de tels espaces.

2.1. Généralités sur les surfaces de Riemann

Tout au long du texte, nous entendrons par une surface de Riemann M une variété complexe de dimension 1 connexe et sans bord. Le prochain résultat, dû à Radó, nous assure que M satisfait au *deuxième axiome de dénombrabilité.*

Théorème 2.1.1. *Toute surface de Riemann est séparable, c'est-à-dire que M possède une base de topologie dénombrable.*

Nous avons même un peu plus :

Lemme 2.1.1. *Toute surface de Riemann admet une base de topologie dénombrable $\{V_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ telle que chaque V_j est relativement compact et connexe.*

Démonstration. Soit $\{U_i\}$ une base dénombrable de la topologie de M, dont le théorème 2.1.1 nous assure l'existence. Soit $\{V_j\}_j$ la sous-suite des ensembles U_j qui sont relativement compacts. Soit un sous-ensemble ouvert $V \subset M$. Puisque M est une variété et que $V \subset M$ est ouvert, pour chaque $x \in V$ on peut trouver un voisinage $W_x \subset V$ de x qui soit relativement compact. Puisque $\{U_i\}$ est une base, il existe $i_x \in \mathbb{N}$ tel que $x \in U_{i_x} \subset W_x$, et donc U_{i_x} est relativement compact. Ainsi, $U_{i_x} = V_{j_x}$ pour un certain $j_x \in \mathbb{N}$. Mais on a alors que $V = \bigcup_{x \in V} V_{j_x}$, ce qui montre que $\{V_j\}$ est une base de la topologie de M.

Il reste donc à montrer qu'on peut prendre chaque V_j connexe. Pour cela, remarquons que chaque composante connexe P de V_j est ouverte, et contient donc un U_i, ce qui montre que chaque V_j ne possède qu'une quantité dénombrable de composantes connexes (qui sont évidemment relativement compactes), disons $\{P_k^j\}_{k\in\mathbb{N}}$. Il suffit alors de remplacer $\{V_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ par une énumération de $\{P_k^j\}_{j,k\in\mathbb{N}}$.

$\square$

Un théorème classique d'Urysohn (voir [**KoF**]) nous assure que

Théorème 2.1.2. *Un espace topologique séparable est normal si et seulement s'il est métrisable.*

Or, en tant qu'espace topologique, M est paracompact et régulier, et donc normal (voir [**War**] p.8). Ainsi, toute surface de Riemann est métrisable, et nous utiliserons parfois ce fait dans les arguments des sections à venir.

Le lemme qui suit nous permettra d'approcher une surface de Riemann par une suite de sous-ensembles compacts que nous comprenons relativement bien. Mentionnons d'abord que pour un sous-ensemble $E \subset M$, nous dénoterons par $h_M(E)$ la réunion de E et de toutes les composantes connexes relativement compactes de $M \setminus E$.

Lemme 2.1.2. *Soit M une surface de Riemann. Alors, il existe $\{K_j\}_j$ une suite de sous-ensembles compacts et connexes de M telle que*

- $\bigcup_j K_j = M$
- $K_j \subset int(K_{j+1})$
- $h_M(K_j) = K_j$
- *Si $K \subset M$ est compact, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $K \subset K_n$.*

DÉMONSTRATION. Par le lemme 2.1.1, il existe $\{V_j\}_j$ une base dénombrable de la topologie de M telle que chaque V_j est relativement compact et connexe. Posons $C_1 = V_1$. Supposons qu'on ait déjà défini C_j relativement compact et connexe. Puisque M est connexe, on peut trouver facilement un sous-ensemble ouvert $C_{j+1} \subset M$ qui soit relativement compact, connexe et tel que $V_j \cup C_j \subset C_{j+1}$. En posant $L_j = \overline{C_j}$, on trouve une suite $\{L_j\}_j$ de sous-ensembles compacts et connexes telle que $L_j \subset L_{j+1}$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. De plus, $M = \bigcup_{j=1}^{\infty} V_j \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} L_j$.

Finalement, on pose $K_1 = h_M(L_1)$ qui est clairement connexe et compact (voir théorème 23.5 de [**For**]). Si K_j est défini, on choisit un sous-ensemble compact et connexe E tel que $K_j \cup L_{j+1} \subset int(E)$ et on pose $K_{j+1} = h_M(E)$. Il reste alors à montrer que pour tout $K \subset M$ compact, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $K \subset K_n$. Or, on remarque que $K \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} int(K_j)$. Par compacité de K, il existe $j_1, \ldots, j_N$ tels que $K \subset \bigcup_{l=1}^{N} int(K_{j_l}) = int(K_{j_N}) \subset K_{j_N}$. □

Pour un ouvert $\Omega \subset M$, le corollaire 23.6 de [**For**] nous assure l'existence d'une suite de sous-ensembles compacts possédant toutes les propriétés du lemme précédent, sauf la connexité. Autrement dit, la connexité de Ω n'est nécessaire que pour assurer la connexité de chaque K_j.

Introduisons maintenant le concept de *compactification* d'une surface de Riemann, qui permet de pouvoir se tourner vers le cas familier d'une surface compacte (voir [**AhS**]).

Définition 2.1.1. *Soient M une surface de Riemann et N un espace topologique. Soit $\Psi : M \to N$ un homéomorphisme sur le sous-ensemble $\Psi(M)$ de N. On appelle Ψ une compactification de M et l'espace N un compactifié de M si*

- *N est compact*
- *$\Psi(M) \subset N$ est ouvert*
- *$\Psi(M)$ est dense dans N.*

On pose $\beta = N \setminus \Psi(M)$.

Théorème 2.1.3. *Soit M une surface de Riemann. Alors, il existe un et un seul compactifié $\overline{M}$ de M tel que*

- *$\overline{M}$ est un espace de Hausdorff localement connexe*
- *β est totalement disconnexe*
- *β ne sépare pas $\overline{M}$: pour tout ouvert connexe $G \subset \overline{M}$, $G \setminus \beta$ est connexe.*

En utilisant cet outil, on peut comprendre un peu mieux les composantes connexes complémentaires d'un sous-ensemble relativement compact.

Lemme 2.1.3. *Soit M une surface de Riemann. Alors, pour tout sous-ensemble relativement compact $E \subset M$, $M \backslash E$ ne possède qu'un nombre fini de composantes connexes non relativement compactes.*

DÉMONSTRATION. Soient $\{D_\alpha\}_{\alpha \in A}$ les composantes connexes non relativement compactes de $M \setminus E$. Considérons $\Psi : M \to \overline{M}$ l'unique compactification de M du théorème 2.1.3. Puisque $\overline{M}$ est compact et localement connexe et que E est relativement compact, il existe des sous-ensembles ouverts connexes $V_1, \ldots, V_N$ de $\overline{M}$ tels que $\beta \subset \bigcup_{i=1}^N V_i$ et $\Psi(E) \cap V_i = \emptyset$ pour tout i. Supposons que $\Psi(D_\alpha) \subset \overline{M} \setminus \bigcup_{i=1}^N V_i$. Comme $\overline{M}$ est compact, $\Psi(D_\alpha)$ est relativement compact dans $\overline{M}$. Or, puisque $\overline{M} \setminus \bigcup_{i=1}^N V_i$ est fermé, on trouve $\overline{\Psi(D_\alpha)} \subset \overline{M} \setminus \bigcup_{i=1}^N V_i \subset \Psi(M)$. Mais alors D_α est relativement compact dans M, car Ψ est un homéomorphisme sur l'ouvert $\Psi(M)$. Cette contradiction montre que pour tout $\alpha \in A$, il existe i_α tel que $\Psi(D_\alpha) \cap (V_{i_\alpha} \setminus \beta) \neq \emptyset$. De plus, $V_i \setminus \beta \subset \Psi(M \setminus E)$ est connexe pour tout i, car β ne sépare pas $\overline{M}$, et donc $\Psi^{-1}(V_i \setminus \beta) \subset D_\alpha$. Ainsi, deux composantes connexes $D_{\alpha_1}, D_{\alpha_2}$ contenant $\Psi^{-1}(V_i \setminus \beta)$ doivent être contenues dans la même composante connexe, ce qui montre que $|A| \leq N$.

□

2.2. UNE FORMULE INTÉGRALE DE TYPE CAUCHY

L'objectif de cette section est l'obtention d'une formule intégrale qui sera utile pour montrer notre résultat principal. Nous nous intéresserons ici aux surfaces de Riemann non compactes sur lesquelles on connaît l'existence d'une fonction bien particulière, due à [**GuN**].

Théorème 2.2.1. *Soit M une surface de Riemann non compacte. Alors, il existe une fonction $\Phi \in \mathcal{O}(M)$ qui est un homéomorphisme local.*

En dénotant le disque ouvert de centre $a \in \mathbb{C}$ et de rayon $\rho > 0$ par $B(a, \rho)$, définissons le rayon d'univalence r_y de Φ en y comme $r_y = \sup A_y$, où A_y est l'ensemble des $\rho > 0$ tels que $B(\Phi(y), \rho)$ est l'image biholomorphe par Φ d'un voisinage de y. Pour chaque $y \in M$, on choisit $s_y \in A_y$ et on pose $U_y =$

$\Phi^{-1}(B(\Phi(y), s_y))$. Alors, $\overline{U_y}$ est compact et $\{U_y\}_{y\in M}$ est un recouvrement ouvert de M tel que Φ est biholomorphe sur un voisinage de chaque U_y.

Lemme 2.2.1. *Pour chaque $y \in M$, soit f_y une fonction méromorphe sur $\Phi(U_y)$ telle que $f_{y_1} = f_{y_2}$ sur $\Phi(U_{y_1}) \cap \Phi(U_{y_2})$. Alors, il existe une unique (1,0)-forme méromorphe ω sur M telle que $(\Phi^{-1})^*\omega = f_y d\zeta$ sur $\Phi(U_y)$.*

DÉMONSTRATION. On remarque que sur $\Phi(U_{y_1}) \cap \Phi(U_{y_2})$, on a que $(\Phi|_{U_{y_2}} \circ (\Phi|_{U_{y_1}})^{-1})^*(f_{y_2}d\zeta) = (Id)^*(f_{y_2}d\zeta) = f_{y_2}d\zeta = f_{y_1}d\zeta$. Ainsi, on peut définir ω comme $(\Phi|_{U_y})^*(f_y d\zeta)$ sur U_y. $\square$

Nous utiliserons aussi le lemme précédent dans la forme suivante.

Lemme 2.2.2. *Pour chaque $y_1, y_2 \in M$, soit f_{y_1,y_2} une fonction méromorphe sur $\Phi(U_{y_1}) \times \Phi(U_{y_2})$ telle que $f_{y_1,y_2} = f_{y_3,y_4}$ sur $\Phi(U_{y_1}) \times \Phi(U_{y_2}) \cap \Phi(U_{y_3}) \times \Phi(U_{y_4})$. Alors, il existe une unique (1,0)-forme méromorphe ω sur $M \times M$ telle que $(\Phi^{-1} \times \Phi^{-1})^*\omega = f_{y_1,y_2}d\zeta_1$ sur $\Phi(U_{y_1}) \times \Phi(U_{y_2})$, où ζ_1, ζ_2 sont les coordonnées sur $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$.*

DÉMONSTRATION. On remarque que sur $\Phi(U_{y_1}) \times \Phi(U_{y_2}) \cap \Phi(U_{y_3}) \times \Phi(U_{y_4})$, on a que

$$\left((\Phi|_{U_{y_3}} \circ (\Phi|_{U_{y_1}})^{-1}) \times (\Phi|_{U_{y_4}} \circ (\Phi|_{U_{y_2}})^{-1})\right)^* (f_{y_1,y_2}d\zeta_1)$$
$$= (Id \times Id)^*(f_{y_1,y_2}d\zeta_1) = f_{y_1,y_2}d\zeta_1 = f_{y_3,y_4}d\zeta_1.$$

Ainsi, on peut définir ω comme $(\Phi|_{U_{y_1}} \times \Phi|_{U_{y_2}})^*(f_{y_1,y_2}d\zeta_1)$ sur $U_{y_1} \times U_{y_2}$. $\square$

Pour un recouvrement ouvert $\{V_i\}_i$ de M, une *distribution de Mittag-Leffler* est la donnée d'un ensemble de fonctions méromorphes f_i définies sur V_i telles que $f_i - f_j \in \mathcal{O}(V_i \cap V_j)$ pour tout i, j. On dit que la distribution admet une solution s'il existe une fonction méromorphe f sur M telle que $f - f_i \in \mathcal{O}(V_i)$ pour tout i. Le prochain résultat est une combinaison du théorème 5.5.1 de [**Hor**] et du corollaire 26.8 de [**For**].

Théorème 2.2.2. *Sur une surface de Riemann non compacte, tout problème de Mittag-Leffler admet une solution.*

Considérons $\{U_y = \Phi^{-1}(B(\Phi(y), s_y))\}_y$, qui est un recouvement ouvert de M. Soit aussi $\{V_\alpha\}$ un recouvrement ouvert de $M \times M \setminus \{ (p,p) : p \in M\}$, c'est-à-dire un recouvrement du produit $M \times M$ sans sa diagonale, où chaque V_α est disjoint de la diagonale et s'exprime comme un produit d'ouverts de M sur lesquels Φ est biholomorphe. Il est clair qu'il existe un tel recouvrement, car $M \times M \setminus \{\ (p,p) : p \in M\}$ est ouvert dans $M \times M$ et les produits d'ouverts de M forment une base de la topologie de $M \times M$. Il suffit ensuite de prendre des ouverts assez petits pour que Φ y soit biholomorphe.

Alors $\{U_y \times U_y, V_\alpha\}_{y,\alpha}$ est un recouvrement de $M \times M$. Posons $f_y = \frac{1}{\Phi(p)-\Phi(q)}$ qui est méromorphe sur $U_y \times U_y$ et $f_\alpha = 0$ sur V_α. Vérifions que cela constitue une distribution de Mittag-Leffler. Pour $y_1 \neq y_2$ on a que

$$f_{y_1}(p,q) - f_{y_2}(p,q) = 0 \in \mathcal{O}(U_{y_1} \times U_{y_1} \cap U_{y_2} \times U_{y_2}).$$

Aussi,

$$f_y(p,q) - f_\alpha(p,q) = \frac{1}{\Phi(p)-\Phi(q)} - 0 = \frac{1}{\Phi(p)-\Phi(q)} \in \mathcal{O}(U_y \times U_y \cap V_\alpha)$$

car les seuls pôles de $\frac{1}{\Phi(p)-\Phi(q)}$ sur $U_y \times U_y$ se trouvent sur la diagonale (que V_α ne rencontre pas!) puisque Φ est injective sur U_y. Finalement, on a clairement que $f_{\alpha_1} - f_{\alpha_2} = 0$ est holomorphe sur $V_{\alpha_1} \cap V_{\alpha_2}$.

Maintenant, toute distribution de Mittag-Leffler sur $M \times M$ admet une solution (voir [**Gau**] et le théorème 5.5.1 de [**Hor**]). Soit donc $C(p,q)$ une telle solution, qui est méromorphe sur $M \times M$. Cette fonction C, qui a le même comportement local qu'une solution fondamentale de l'opérateur de Cauchy-Riemann dans le plan, sera notre candidate pour remplacer les fonctions du type $\frac{1}{z-a}$ dans nos énoncés analogues à 2.0.8 et 2.0.9.

Lemme 2.2.3. *Soient f_1 et f_2 des fonctions méromorphes sur M toutes deux solutions de la même distribution de Mittag-Leffler $\{(V_i, g_i)\}$ définie pour un recouvrement par des cartes. Alors, $f_1 - f_2 \in \mathcal{O}(M)$.*

DÉMONSTRATION. Soit (V_i, θ) une carte de M. Alors, sur V_i, on a que $f_1 - f_2 = f_1 - g_i + g_i - f_2 = (f_1 - g_i) - (f_2 - g_i) = h_1 - h_2$ où $h_1, h_2 \in \mathcal{O}(V_i)$. □

Si on considère la distribution $g_y(p,q) = f_y(q,p) = -f_y(p,q)$ sur $U_y \times U_y$ et $g_\alpha = 0$ sur V_α, alors $C(q,p)$ et $-C(p,q)$ sont des solutions de cette nouvelle distribution.

Par le lemme 2.2.3, on trouve que $C(p,q) = -C(q,p)+h(p,q)$ avec $h \in \mathcal{O}(M\times M)$. Cette relation nous sera très utile plus loin. Maintenant, par le lemme 2.2.2, il existe une (1,0)-forme que nous noterons dorénavant $\gamma(p,q)$ qui s'écrit localement comme

$$C \circ (\Phi^{-1} \times \Phi^{-1}) d\zeta.$$

Il est alors clair que $\gamma(p,q)$ est holomorphe en dehors de la diagonale $\{(p,p) : p \in M\}$, par construction de $C(p,q)$. Avec cette forme $\gamma(p,q)$ en notre possession, la formule intégrale tant convoitée est à notre portée.

Théorème 2.2.3. *Soient* $f \in C_c^\infty(M)$, $y \in M$ *et* $U = \Phi^{-1}(B(\Phi(y), s_y))$. *Pour* $0 < \epsilon < 1$, *définissons* $U_\epsilon = \{p \in U : |\Phi(p) - \Phi(y)| < \epsilon s_y\}$ *et posons* $M_\epsilon = M \setminus U_\epsilon$. *Alors*

$$-2\pi i f(y) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{M_\epsilon} \gamma(\cdot, y) \wedge \overline{\partial} f.$$

DÉMONSTRATION. Remarquons d'abord que $\gamma(\cdot, y)$ est holomorphe sur M_ϵ. De plus, $\partial(\gamma(\cdot,y) \wedge f) = 0$ sur M_ϵ, car $\gamma(\cdot,y) \wedge f$ est une (1,0)-forme et M est de dimension complexe 1. Ainsi, $d(\gamma(\cdot,y) \wedge f) = \partial(\gamma(\cdot,y) \wedge f) + \overline{\partial}(\gamma(\cdot,y) \wedge f) = \overline{\partial}(\gamma(\cdot,y) \wedge f) = \overline{\partial}\gamma(\cdot,y) \wedge f + \gamma(\cdot,y) \wedge \overline{\partial} f = \gamma(\cdot,y) \wedge \overline{\partial} f$ sur M_ϵ. Par le théorème de Stokes,

$$\int_{\partial M_\epsilon} \gamma(\cdot,y) \wedge f = \int_{M_\epsilon} d(\gamma(\cdot,y) \wedge f) = \int_{M_\epsilon} \gamma(\cdot,y) \wedge \overline{\partial} f.$$

D'autre part, sur $\Phi(U)$ on a que

$$(\Phi|_U^{-1})^*(\gamma(\cdot,y)) = \left(C(\cdot,y) \circ \Phi|_U^{-1}\right) d\zeta = (\frac{1}{\zeta - \Phi(y)})d\zeta + g(\zeta,y)d\zeta$$

avec g holomorphe en ζ et donc :

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\partial U_\epsilon} \gamma(\cdot,y) \wedge f$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|\zeta - \Phi(y)| = \epsilon s_y} \left(\frac{(f \circ \Phi^{-1})(\zeta)}{\zeta - \Phi(y)} + g(\zeta,y)(f \circ \Phi^{-1})(\zeta) \right) d\zeta$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \int_0^{2\pi} (f \circ \Phi^{-1})(\Phi(y) + \epsilon s_y e^{i\theta}) i (1 + \epsilon s_y e^{i\theta} g(\Phi(y) + \epsilon s_y e^{i\theta}, y)) d\theta$$

$$= 2\pi i (f \circ \Phi^{-1})(\Phi(y)) = 2\pi i f(y).$$

Finalement, on obtient que :

$$-2\pi i f(y) = -\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\partial U_\epsilon}\gamma(\cdot,y)\wedge f$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\partial M_\epsilon}\gamma(\cdot,y)\wedge f = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{M_\epsilon}\gamma(\cdot,y)\wedge\overline{\partial}f.$$

□

2.3. Approximation par des solutions fondamentales de l'opérateur de Cauchy-Riemann

Dans cette section, nous démontrerons une version du théorème 2.0.10 adaptée à nos besoins. Soit $\Omega \subset M$ un sous-ensemble ouvert et prenons une exhaustion $\{K_n\}$ de Ω avec les quatre propriétés du lemme 2.1.2 (voir la remarque suivant le lemme). Pour $f, g \in C(\Omega)$, définissons

$$d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{\sup_{K_n}|f(z)-g(z)|}{1+\sup_{K_n}|f(z)-g(z)|}.$$

Munissons maintenant $C(\Omega)$ de cette métrique et notons que la convergence dans $(C(\Omega), d)$ est équivalente à la convergence uniforme sur tout sous-ensemble compact de M. Un élément $G \in (C(\Omega))'$ est une fonctionnelle linéaire qui est continue par rapport à la topologie induite par d. On dit d'une telle fonctionnelle linéaire G qu'elle s'annule sur un ouvert E si $G(f) = 0$ pour toute fonction continue f dont le support est inclus dans E. Le support de G est le complément de l'ensemble ouvert maximal sur lequel G s'annule. Avant de présenter notre version du théorème d'approximation, il est nécessaire de démontrer quelques lemmes préliminaires. Les deux premiers sont évidents et utilisent le fait que toute surface de Riemann est métrisable. Soit dA la mesure d'aire usuelle sur $\mathbb{C}$.

Lemme 2.3.1. *Soient $K_1 \subset \mathbb{C}$ compact, $K_2 \subset M$ compact et $f \in C(K_1 \times K_2)$. Alors, les sommes de Riemann de $\int_{K_1} f(z,y)dA(z)$ convergent vers l'intégrale uniformément sur K_2.*

Démonstration. Puisque M est métrisable, on a que f est uniformément continue sur $K_1 \times K_2$, et alors on sait qu'il existe $\delta > 0$ tel que $|x_1 - x_2| < \delta$ implique

que $|f(x_1, y) - f(x_2, y)| < \frac{\epsilon}{Aire(K_1)}$, et ce pour tout $y \in K_2$. Prenons $P = \{K_{1,j}\}_{j=1}^{n}$ une partition de K_1 telle que $|P| < \delta$, et soit $T(f(\cdot, y), P)$ la somme de Riemann associée aux choix de $x_j \in K_{1,j}$. Donc :

$$\left| \int_{K_1} f(\cdot, y) - T(f(\cdot, y), P) \right|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} \int_{K_{1,j}} |f(\cdot, y) - f(x_j, y)| < \sum_{j=1}^{n} \frac{\epsilon}{Aire(K_1)} Aire(K_{1,j}) = \epsilon$$

si $|P| < \delta$, et ce pour tout $y \in K_2$.

□

Lemme 2.3.2. *Soient M, N des surfaces de Riemann , $G \in (C(M))'$ et $f \in C(M \times N)$. Alors $G(f(\cdot, q))$ est continue en q.*

DÉMONSTRATION. La fonction $F : N \to C(M)$ définie par $[F(q)](p) = f(p, q)$ est continue. En effet, soit d_N la distance sur N. Alors, pour $q_0 \in N$ fixé, considérons L la boule ouverte autour de q_0 de rayon $r > 0$ assez petit pour qu'elle soit compacte. Soit maintenant $K \subset M$ un sous-ensemble compact arbitraire. Pour $q \in L$,

$$\sup_K |f(p, q_0) - f(p, q)| \to 0$$

lorsque $d_N(q_0, q) \to 0$, car f est uniformément continue sur $K \times L$. Ainsi, $F(q) \to F(q_0)$ uniformément sur les parties compactes de M lorsque $d_N(q_0, q)$ tend vers 0, et donc $d(F(q_0), F(q)) \to 0$ lorsque $d_N(q_0, q) \to 0$, ce qui montre que F est continue sur N, puisque q_0 est arbitraire. Puisque par définition $G : C(M) \to \mathbb{C}$ est continue, on trouve que $G \circ F$ est continue sur N, avec $G \circ F(q) = G(f(\cdot, q))$.

□

On voudrait obtenir le même genre de résultat dans le cas où l'hypothèse de continuité est remplacée par celle d'holomorphie. Rappelons d'abord un théorème classique.

Théorème 2.3.1. *Soient $U \subset \mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$ dérivable. Si le segment $[x_1, x_2]$ est complètement inclus dans U, alors il existe $x^* \in [x_1, x_2]$ tel que*

$$f(x_2) - f(x_1) = < \nabla f(x^*), x_2 - x_1 >,$$

où $<\cdot,\cdot>$ dénote le produit scalaire entre deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

La lourdeur de l'énoncé et de la preuve du résultat qui suit masque malheureusement la simplicité et la légitimité de ce qu'on veut démontrer.

Lemme 2.3.3. *Soient $K \subset M$ compact, $G \in (C(M))'$ dont le support est inclus dans K et $g \in C^\infty(K \times (M \setminus K))$ holomorphe en la deuxième variable. Soit $\rho \in C_c^\infty(M)$ telle que $0 \leq \rho \leq 1$, $\rho = 1$ sur $supp(G)$ et $supp(\rho) \subset K$. En prolongeant $\rho(\cdot)g(\cdot,q)$ par zéro en dehors du support de ρ, on a que $G\left[\rho(\cdot)g(\cdot,q)\right]$ est holomorphe en la deuxième variable pour $q \notin K$.*

DÉMONSTRATION. Soit (U,Φ) une carte telle que $U \cap K = \emptyset$. Alors, il faut montrer que $G_p(\rho(p)g(p,\Phi^{-1}(\zeta)))$ est holomorphe en $\zeta = \Phi(q)$ sur $\Phi(U)$. On a que

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\frac{G_p(\rho(p)g(p,\Phi^{-1}(\zeta+h))) - G_p(\rho(p)g(p,\Phi^{-1}(\zeta)))}{h}\\&= \lim_{h\to 0} G_p\left(\rho(p)\frac{g(p,\Phi^{-1}(\zeta+h)) - g(p,\Phi^{-1}(\zeta))}{h}\right).\end{aligned}$$

On voudrait utiliser la continuité de G. Pour cela, il faut avoir la convergence uniforme sur les compacts. Soit donc $A \subset M$ un compact et considérons

$$\begin{aligned}&\sup_{p\in A}\left|\rho(p)\frac{g(p,\Phi^{-1}(\zeta+h)) - g(p,\Phi^{-1}(\zeta))}{h} - \rho(p)\frac{\partial g}{\partial\zeta}(p,\Phi^{-1}(\zeta))\right|\\&\leq \sup_{p\in supp(\rho)} \rho(p)\left|\frac{g(p,\Phi^{-1}(\zeta+h)) - g(p,\Phi^{-1}(\zeta))}{h} - \frac{\partial g}{\partial\zeta}(p,\Phi^{-1}(\zeta))\right|\\&\leq \sup_{p\in K}\left|\frac{g(p,\Phi^{-1}(\zeta+h)) - g(p,\Phi^{-1}(\zeta))}{h} - \frac{\partial g}{\partial\zeta}(p,\Phi^{-1}(\zeta))\right|.\end{aligned}$$

Posons $g(p,\Phi^{-1}(\zeta)) = u(p,\xi,\eta) + iv(p,\xi,\eta)$, $\zeta = \xi + i\eta$ et $h = h_1 + ih_2$. En appliquant le théorème 2.3.1 aux fonctions $u(p,\xi,\eta)$ et $v(p,\xi,\eta)$, on trouve que pour h assez petit,

$$u(p,\xi+h_1,\eta+h_2) - u(p,\xi,\eta) = \frac{\partial u}{\partial\xi}(p,\theta_1)h_1 + \frac{\partial u}{\partial\eta}(p,\theta_1)h_2$$

$$v(p,\xi+h_1,\eta+h_2) - v(p,\xi,\eta) = \frac{\partial v}{\partial\xi}(p,\theta_2)h_1 + \frac{\partial v}{\partial\eta}(p,\theta_2)h_2$$

pour $\theta_1,\theta_2 \in [\zeta,\zeta+h]$. Alors,

$$\frac{g(p,\Phi^{-1}(\zeta+h)) - g(p,\Phi^{-1}(\zeta))}{h} = \frac{1}{h}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}(p,\theta_1)h_1 + \frac{\partial u}{\partial\eta}(p,\theta_1)h_2\right)$$

$$+\frac{i}{h}\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}(p,\theta_2)h_1+\frac{\partial v}{\partial \eta}(p,\theta_2)h_2\right),$$

mais en utilisant le fait que g est holomorphe en la deuxième variable sur $U \subset M \setminus K$ et donc que

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}(p,\xi,\eta)=\frac{\partial v}{\partial \eta}(p,\xi,\eta), \frac{\partial v}{\partial \xi}(p,\xi,\eta)=-\frac{\partial u}{\partial \eta}(p,\xi,\eta),$$

on trouve que

$$\frac{g(p,\Phi^{-1}(\zeta+h))-g(p,\Phi^{-1}(\zeta))}{h}=\frac{1}{h}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}(p,\theta_1)h_1-\frac{\partial v}{\partial \xi}(p,\theta_1)h_2\right)$$

$$+\frac{i}{h}\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}(p,\theta_2)h_1+\frac{\partial u}{\partial \xi}(p,\theta_2)h_2\right)$$

$$=\frac{1}{h}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}(p,\theta_1)h_1+i\frac{\partial u}{\partial \xi}(p,\theta_2)h_2\right)+\frac{i}{h}\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}(p,\theta_2)h_1+i\frac{\partial v}{\partial \xi}(p,\theta_1)h_2\right).$$

Ainsi, puisque

$$\frac{\partial g}{\partial \zeta}(p,\Phi^{-1}(\zeta))=\frac{\partial u}{\partial \xi}(p,\xi,\eta)+i\frac{\partial v}{\partial \xi}(p,\xi,\eta),$$

on a que

$$\sup_{p\in A}\left|\rho(p)\frac{g(p,\Phi^{-1}(\zeta+h))-g(p,\Phi^{-1}(\zeta))}{h}-\rho(p)\frac{\partial g}{\partial \zeta}(p,\Phi^{-1}(\zeta))\right|$$

$$\leq \sup_{p\in K}\left|\frac{1}{h}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}(p,\theta_1)h_1+i\frac{\partial u}{\partial \xi}(p,\theta_2)h_2\right)-\frac{\partial u}{\partial \xi}(p,\xi,\eta)\right|$$

$$+\sup_{p\in K}\left|\frac{i}{h}\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}(p,\theta_2)h_1+i\frac{\partial v}{\partial \xi}(p,\theta_1)h_2\right)-i\frac{\partial v}{\partial \xi}(p,\xi,\eta)\right|$$

$$=\sup_{p\in K}\left|\frac{1}{h}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}(p,\theta_1)-\frac{\partial u}{\partial \xi}(p,\xi,\eta)\right)h_1+\frac{i}{h}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}(p,\theta_2)-\frac{\partial u}{\partial \xi}(p,\xi,\eta)\right)h_2\right|$$

$$+\sup_{p\in K}\left|\frac{1}{h}\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}(p,\theta_2)-\frac{\partial v}{\partial \xi}(p,\xi,\eta)\right)h_1+\frac{i}{h}\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}(p,\theta_1)-\frac{\partial v}{\partial \xi}(p,\xi,\eta)\right)h_2\right|$$

$$\leq \sup_{K}\left|\frac{\partial u}{\partial \xi}(p,\theta_1)-\frac{\partial u}{\partial \xi}(p,\xi,\eta)\right|+\sup_{p\in K}\left|\frac{\partial u}{\partial \xi}(p,\theta_2)-\frac{\partial u}{\partial \xi}(p,\xi,\eta)\right|$$

$$+\sup_{p\in K}\left|\frac{\partial v}{\partial \xi}(p,\theta_2)-\frac{\partial v}{\partial \xi}(p,\xi,\eta)\right|+\sup_{p\in K}\left|\frac{\partial v}{\partial \xi}(p,\theta_1)-\frac{\partial v}{\partial \xi}(p,\xi,\eta)\right|$$

car $|h_1|, |h_2| \leq |h|$. Supposons maintenant que h est assez petit pour que $\zeta+h$ se trouve dans un voisinage compact L de ζ. Or, puisque g est lisse sur le produit $K\times(M\setminus K)$, on a que

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}(p,\xi,\eta), \frac{\partial v}{\partial \xi}(p,\xi,\eta)$$

sont uniformément continues sur $K \times L$, où on a identifié L et son image dans $\mathbb{R}^2$. Ainsi, le membre de droite de l'inégalité tend vers 0 lorsque $h \to 0$. On a donc bien la convergence uniforme sur les sous-ensembles compacts de M. Donc, par continuité,

$$\lim_{h\to 0} G_p\left(\rho(p)\frac{g(p,\Phi^{-1}(\zeta+h)) - g(p,\Phi^{-1}(\zeta))}{h}\right) = G_p(\rho(p)\frac{\partial g}{\partial \zeta}(p,\Phi^{-1}(\zeta))),$$

ce qui montre que $G_p(g(p,\Phi^{-1}(\zeta)))$ est holomorphe en ζ. $\square$

Remarque 2.3.1. *Une preuve presque identique à la précédente permet de montrer que si $h \in \mathcal{O}(M \times M)$, alors $G[h(p,\cdot)]$ est holomorphe sur M.*

Bien qu'elle soit quelque peu technique, la prochaine étape est primordiale pour la suite.

Lemme 2.3.4. *Soient $G \in (C(M))'$ de support inclus dans $K \subset M$ compact, W un voisinage ouvert relativement compact de K et $f \in C_c^\infty(M) \cap \mathcal{O}(\overline{W})$. Si $\theta \in C_c^\infty(M)$ est telle que $\theta = 1$ sur K et supp$(\theta) \subset W$, alors*

$$G\left(\theta(y)\int_{M\setminus\overline{W}} \gamma(\cdot,y)\wedge\overline{\partial}f\right) = -\int_{M\setminus\overline{W}} \alpha\wedge\overline{\partial}f$$

pour une certaine forme α.

Démonstration. Notons d'abord que G agit ici sur les fonctions dépendant de y, ce que nous noterons par G_y. De plus, la fonction $y \mapsto \theta(y)\int_{M\setminus\overline{W}}\gamma(\cdot,y)\wedge\overline{\partial}f$ est continue sur M lorsque prolongée par zéro en dehors du support de θ. Prenons $\{U_i\}$ un recouvrement ouvert de $M\setminus\overline{W}$ tel que :

- U_i est localement fini pour tout i
- $U_i \subset M\setminus\overline{W}$ pour tout i, ce qui implique entre autres que $\overline{U_i}\cap supp(\theta) = \emptyset$ pour tout i
- pour tout i il existe $y_i \in M$ et $s_{y_i} \in A_{y_i}$ tels que

$$U_i = \Phi^{-1}(B(\Phi(y_i), s_{y_i}))$$

et soit $\{\rho_i\}$ une partition de l'unité subordonnée à $\{U_i\}$. On trouve alors

$$G_y\left(\theta(y)\int_{M\setminus\overline{W}}\gamma(\cdot,y)\wedge\overline{\partial}f\right)$$

$$= G_y\left(\sum_{i\in I}\int_{\Phi(U_i)}(\Phi^{-1})^*(\rho_i(p)\theta(y)C(p,y))\frac{\partial(f\circ\Phi^{-1})}{\partial\overline{\zeta}}d\zeta d\overline{\zeta}\right)$$
$$= \sum_{i\in I}G_y\left(\int_{\Phi(U_i)}(\Phi^{-1})^*(\rho_i(p)\theta(y)C(p,y))\frac{\partial(f\circ\Phi^{-1})}{\partial\overline{\zeta}}d\zeta d\overline{\zeta}\right)$$

où la dernière égalité vient du fait que la somme est finie : f est holomorphe sur un voisinage de $\overline{W}$ et est à support compact dans M, donc $\overline{\partial}f$ est à support compact dans $M\setminus\overline{W}$ et il suffit d'intégrer sur ledit support. Par choix des U_i, on a que $\overline{\Phi(U_i)}$ est compact et que Φ est injective sur un voisinage V_i de $\overline{U_i}$. On peut donc intégrer sur $\Phi(\overline{U_i})=\overline{\Phi(U_i)}$ plutôt que sur $\Phi(U_i)$, ce qui ne changera pas la valeur de l'intégrale, car la frontière de cet ensemble est de mesure nulle. On obtient

$$G\left(\theta(y)\int_{M\setminus\overline{W}}\gamma(\cdot,y)\wedge\overline{\partial}f\right)$$
$$= \sum_{i\in I}G_y\left(\int_{\overline{\Phi(U_i)}}(\Phi^{-1})^*(\rho_i(p)\theta(y)C(p,y))\frac{\partial(f\circ\Phi^{-1})}{\partial\overline{\zeta}}d\zeta d\overline{\zeta}\right)$$
$$= \sum_{i\in I}\int_{\overline{\Phi(U_i)}}(\Phi^{-1})^*(\rho_i(p))G_y\left[(\Phi^{-1})^*(\theta(y)C(p,y))\right]\frac{\partial(f\circ\Phi^{-1})}{\partial\overline{\zeta}}d\zeta d\overline{\zeta}$$

où, encore une fois, on prolonge $(\Phi^{-1})^*(\theta(y)C(p,y))$ par zéro en dehors du support de θ afin qu'elle soit continue en y sur M. Le lemme 2.3.2 nous assure que l'intégrande est continue sur $\overline{\Phi(U_i)}$, donc la dernière égalité suit de la linéarité et de la continuité de G et du lemme 2.3.1. En utilisant la relation entre $C(p,y)$ et $C(y,p)$ donnée par le lemme 2.2.3, on peut écrire

$$G\left(\theta(y)\int_{M\setminus\overline{W}}\gamma(\cdot,y)\wedge\overline{\partial}f\right)$$
$$= \sum_{i\in I}\int_{\overline{\Phi(U_i)}}(\Phi^{-1})^*(\rho_i(p))G_y\left[(\Phi^{-1})^*(-\theta(y)C(y,p))\right]\frac{\partial(f\circ\Phi^{-1})}{\partial\overline{\zeta}}d\zeta d\overline{\zeta}$$
$$+\sum_{i\in I}\int_{\overline{\Phi(U_i)}}(\Phi^{-1})^*(\rho_i(p))G_y\left[(\Phi^{-1})^*(\theta(y)h(p,y))\right]\frac{\partial(f\circ\Phi^{-1})}{\partial\overline{\zeta}}d\zeta d\overline{\zeta}$$
$$= \sum_{i\in I}\int_{\Phi(U_i)}(\Phi^{-1})^*(\rho_i(p))G_y\left[(\Phi^{-1})^*(-\theta(y)C(y,p))\right]\frac{\partial(f\circ\Phi^{-1})}{\partial\overline{\zeta}}d\zeta d\overline{\zeta}$$
$$+\sum_{i\in I}\int_{\Phi(U_i)}(\Phi^{-1})^*(\rho_i(p))G_y\left[(\Phi^{-1})^*(h(p,y))\right]\frac{\partial(f\circ\Phi^{-1})}{\partial\overline{\zeta}}d\zeta d\overline{\zeta}$$

car $h \in \mathcal{O}(M \times M)$ et donc

$$G_y\left[(\Phi^{-1})^*(\theta(y)h(p,y))\right] = G_y\left[(\Phi^{-1})^*(h(p,y))\right],$$

puisque $supp(G_y) \subset supp(\theta)$.

En appliquant le lemme 2.2.1 à $M \setminus \overline{W}$, on obtient une forme α qui peut s'écrire localement comme

$$G_y\left[(\Phi^{-1})^*(\theta(y)C(y,p))\right] d\zeta = G_y\left[\theta(y)C(y,\Phi^{-1}(\zeta))\right] d\zeta$$

sur $\Phi(U_i)$. D'autre part, $G_y\left[(\Phi^{-1})^*h(\cdot,y)\right]$ est holomorphe sur M par la remarque suivant le lemme 2.3.3, donc une autre application du lemme 2.2.1 nous donne l'existence d'une $(1,0)$-forme holomorphe β telle que

$$G\left(\theta(y)\int_{M\setminus\overline{W}}\gamma(\cdot,y)\wedge\overline{\partial}f\right) = -\int_{M\setminus\overline{W}}\alpha\wedge\overline{\partial}f + \int_{M\setminus\overline{W}}\beta\wedge\overline{\partial}f.$$

Puisque f est à support compact, on peut utiliser le théorème de Stokes pour trouver

$$\begin{aligned}0 = \int_M d(\beta\wedge f) = \int_M \overline{\partial}(\beta\wedge f) &= \int_M \overline{\partial}\beta\wedge f + \int_M \beta\wedge\overline{\partial}f\\ &= \int_{M\setminus\overline{W}}\beta\wedge\overline{\partial}f + \int_{\overline{W}}\beta\wedge\overline{\partial}f = \int_{M\setminus\overline{W}}\beta\wedge\overline{\partial}f\end{aligned}$$

et donc

$$G\left(\theta(y)\int_{M\setminus\overline{W}}\gamma(\cdot,y)\wedge\overline{\partial}f\right) = -\int_{M\setminus\overline{W}}\alpha\wedge\overline{\partial}f.$$

$\square$

Rappelons que notre objectif est de généraliser le théorème 2.0.10, où on considère un sous-ensemble compact K et un sous-ensemble σ du complémentaire de K. Les deux résultats topologiques qui suivent mettent en relation K et σ.

Lemme 2.3.5. *Soit $K \subset M$ un sous-ensemble compact avec un nombre fini de composantes connexes complémentaires $P_1, \ldots, P_N$ et soit $\sigma \subset (M \setminus K)$ un ensemble possédant un point d'accumulation x_j dans chaque composante complémentaire P_j. Alors, il existe un sous-ensemble $\sigma' \subset \sigma$ s'accumulant à chaque $x_j \in P_j$ tel que $d(\sigma', K) > 0$.*

DÉMONSTRATION. Par hypothèse, $M \setminus K = \bigcup_{j=1}^{N} P_j$ où chaque P_j est ouvert. Posons $\sigma_j = \sigma \cap P_j$. Puisque P_j est ouvert, $d(x_j, K) > 0$. Mais alors on peut choisir une suite de points σ'_j dans σ_j s'accumulant à x_j telle que $d_j = d(\sigma'_j, K) > 0$. Posons $\sigma' = \bigcup_{i=1}^{N} \sigma'_j$, et on aura que $d(\sigma', K) = \min_{j=1,\ldots,N} d_j > 0$. □

Lemme 2.3.6. *Soient $K \subset M$ un sous-ensemble compact tel que $M \setminus K$ ne possède qu'un nombre fini de composantes connexes, $\sigma \subset M \setminus K$ un sous-ensemble s'accumulant dans chaque composante connexe de $M \setminus K$ et $U \subset M$ un voisinage ouvert relativement compact de K. Alors, il existe $W \subset U$ un voisinage ouvert relativement compact de K tel que $\overline{W} \subset U$ et σ s'accumule dans chaque composante connexe de $M \setminus \overline{W}$.*

DÉMONSTRATION. Soient $P_1, \ldots, P_n$ les composantes connexes de $M \setminus K$, et posons $\sigma_j = \sigma \cap P_j$. Pour chaque $j = 1, \ldots, n$, nous allons trouver un sous-ensemble fermé et connexe $E_j \subset P_j$ tel que σ_j s'accumule dans E_j et $P_j \setminus U \subset E_j$. On posera ensuite $W = M \setminus \bigcup_{j=1}^{n} E_j$, qui possède les propriétés désirées.

Par le lemme 2.1.3, $M \setminus U$ ne possède qu'un nombre fini de composantes connexes non relativement compactes. Puisque $K \subset U$, chaque composante connexe de $M \setminus U$ est incluse dans une composante connexe de $M \setminus K$. En vertu de l'égalité $M \setminus U \cap P_j = P_j \setminus U$, on conclut que chaque composante connexe de $P_j \setminus U$ est une composante connexe de $M \setminus U$ et que $P_j \setminus U$ ne possède qu'un nombre fini de composantes connexes non relativement compactes. Appelons-les $Q_1, \ldots, Q_m$ et soient $\{B_\alpha\}_\alpha$ celles qui sont relativement compactes. Remarquons maintenant que $\bigcup_\alpha B_\alpha \subset P_j \setminus U$, et puisque $K \subset U$ et $P_j \subset (M \setminus K)$, on déduit que $P_j \setminus U$ est fermé, et donc que $\overline{\bigcup_\alpha B_\alpha} \subset P_j \setminus U$. D'autre part, puisque les B_α sont des composantes connexes relativement compactes de $M \setminus U$, on a par définition que $\bigcup_\alpha B_\alpha \subset h_M(U)$. Comme $h_M(U)$ est relativement compact (encore une fois par le théorème 23.5 de [**For**]), on trouve que $\overline{\bigcup_\alpha B_\alpha}$ est compact dans P_j. Par le lemme 2.1.2 appliqué à la surface de Riemann P_j, il existe un sous-ensemble compact et connexe $L \subset P_j$ tel que $\overline{\bigcup_\alpha B_\alpha} \subset int(L)$. Il suffit alors de choisir E_j fermé et connexe dont l'intérieur contient $L, Q_1, \ldots, Q_m$ et un point d'accumulation de σ_j. □

Avec ces outils en notre possession, nous montrerons d'abord notre théorème d'approximation sous des hypothèses assez restrictives concernant les composantes connexes complémentaires de l'ensemble que l'on considère. Notons avant tout que puisque $\mathcal{O}(K) \subset C(K)$, on peut munir $\mathcal{O}(K)$ de la topologie induite par celle de $C(K)$, et ce pour tout $K \subset M$ compact.

Théorème 2.3.2. *Soit M une surface de Riemann non compacte. Soit $K \subset M$ un sous-ensemble compact avec un nombre fini de composantes connexes complémentaires. Soit $\sigma \subset (M \setminus K)$ un sous-ensemble possédant un point d'accumulation dans chaque composante connexe de $M \setminus K$. Alors, on a que $\Sigma = span\{C(\cdot, y) : y \in \sigma\}$ est dense dans $\mathcal{O}(K)$.*

DÉMONSTRATION. Par le lemme 2.3.5, on peut trouver $\sigma' \subset \sigma$ avec un point d'accumulation dans chaque composante connexe de $M \setminus K$ et tel que la distance entre σ' et K est positive. Nous allons montrer que $\Sigma' = span\{C(\cdot, y) : y \in \sigma'\} \subset \Sigma$ est dense dans $\mathcal{O}(K)$.

Soit $g \in (C(K))'$, où $C(K)$ est muni de la norme de la convergence uniforme. On peut définir une fonctionnelle G sur $C(M)$ qui est linéaire, continue, non-nulle et supportée par K. En effet, il suffit de poser que $G(f) = g(f|_K)$. Supposons maintenant que $g|_{\Sigma'} = 0$, c'est-à-dire que $g(C(\cdot, y)) = 0$ pour tout $y \in \sigma'$.

Fixons une fonction arbitraire $\psi \in \mathcal{O}(K)$. On sait alors qu'il existe un voisinage ouvert relativement compact Z de K tel que $\psi \in \mathcal{O}(Z)$. Nous voulons montrer que $g(\psi) = 0$. Puisque $d(K, \sigma') > 0$, on peut trouver un voisinage ouvert relativement compact W de K tel que $\sigma' \cap \overline{W} = \emptyset$, $\overline{W} \subset Z$, et tel que σ' s'accumule dans chaque composante connexe de $M \setminus \overline{W}$, par le lemme 2.3.6. Soit alors $\rho \in C_c^\infty(M)$ telle que $0 \leq \rho \leq 1$, $\rho = 1$ sur un voisinage de K et $supp(\rho) \subset W$. Remarquons que $C(p, y) \in \mathcal{O}(W \times (M \setminus \overline{W}))$ et en prolongeant par zéro en dehors du support de ρ, on a également $\rho(p)C(p, y) \in C^\infty(M \times (M \setminus \overline{W}))$. Puisque $\rho(p)C(p, y)$ est holomorphe en la deuxième variable pour $y \notin \overline{W}$, $G_p(\rho(p)C(p, y))$ est holomorphe pour $y \notin \overline{W}$ par le lemme 2.3.3. Or, $G_p(\rho(p)C(p, y)) = g(C(\cdot, y)) = 0$ pour $y \in \sigma' \subset \sigma$. Donc, $G_p(\rho(p)C(p, y)) = 0$ pour tout $y \in M \setminus \overline{W}$, car σ' s'accumule dans chaque composante connexe de $M \setminus \overline{W}$.

Soit maintenant $\rho_1 \in C_c^\infty(M)$ telle que $0 \leq \rho_1 \leq 1$, $\rho_1 = 1$ sur un voisinage de $\overline{W}$ et $supp(\rho_1) \subset Z$. On remarque alors que $\overline{\partial}(\rho_1\psi) = 0$ sur $\overline{W}$. Puisque $\rho_1\psi \in C_c^\infty(M)$, on utilise le théorème 2.2.3 pour trouver

$$(\rho_1\psi)(y) = -\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{M_\epsilon}\gamma(\cdot,y)\wedge\overline{\partial}(\rho_1\psi)$$

$$= -\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{M_\epsilon\setminus\overline{W}}\gamma(\cdot,y)\wedge\overline{\partial}(\rho_1\psi).$$

Or, il est clair que $M_\epsilon \setminus \overline{W} = M \setminus \overline{W}$ si $y \in W$, donc

$$-\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{M_\epsilon\setminus\overline{W}}\gamma(\cdot,y)\wedge\overline{\partial}(\rho_1\psi) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{M\setminus\overline{W}}\gamma(\cdot,y)\wedge\overline{\partial}(\rho_1\psi)$$

pour $y \in W$. Maintenant, puisque $\rho = 1$ sur un voisinage de $supp(G)$, on a

$$g(\psi) = G(\rho_1\psi) = G(\rho\rho_1\psi) = G_y\left(-\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\rho(y)}{2\pi i}\int_{M_\epsilon\setminus\overline{W}}\gamma(\cdot,y)\wedge\overline{\partial}(\rho_1\psi)\right).$$

En prolongeant la fonction à l'intérieur des dernières parenthèses par zéro en dehors de $supp(\rho) \subset W$, on trouve finalement que

$$g(\psi) = G_y\left(-\frac{\rho(y)}{2\pi i}\int_{M\setminus\overline{W}}\gamma(\cdot,y)\wedge\overline{\partial}(\rho_1\psi)\right).$$

En appliquant le lemme 2.3.4, on obtient que

$$g(\psi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{M\setminus\overline{W}}\alpha\wedge\overline{\partial}(\rho_1\psi).$$

Soient maintenant $p \in M \setminus \overline{W}$ et un ouvert V membre du recouvrement ouvert $\{U_i\}$ utilisé dans la preuve du théorème 2.3.4, contenant p et tel que

$$(\Phi^{-1})^*\alpha = G_y\left[(\Phi^{-1})^*(\rho(y)C(y,p))\right]d\zeta = G_y\left[\rho(y)C(y,\Phi^{-1}(\zeta))\right]d\zeta$$

sur $\Phi(V)$. Puisque $G_y(\rho(y)C(y,p)) = 0$ pour $p \in M \setminus \overline{W}$, on a $supp(\alpha) \subset \overline{W}$ et donc

$$g(\psi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{M\setminus\overline{W}}\alpha\wedge\overline{\partial}(\rho_1\psi) = 0.$$

Par un corollaire du théorème de Hahn-Banach (voir corollaire B.9 p.241 [**For**]), Σ', et à plus forte raison Σ, est dense dans $\mathcal{O}(K)$. $\square$

Il reste maintenant à se défaire de l'hypothèse inutilement restrictive sur le nombre de composantes connexes complémentaires. Pour celles d'entre elles qui sont non relativement compactes, il n'y a rien à faire de plus, par le lemme 2.1.3. Pour les autres, cela nous mène au théorème principal de cette section.

Théorème 2.3.3. *Soit M une surface de Riemann non compacte. Soient $K \subset M$ un sous-ensemble compact et $\sigma \subset (M \setminus K)$ un sous-ensemble possédant un point d'accumulation dans chaque composante connexe de $M \setminus K$. Alors, on a que $\Sigma = span\{C(\cdot, y) : y \in \sigma\}$ est dense dans $\mathcal{O}(K)$. De plus, pour chaque fonction $f \in \mathcal{O}(K)$, il existe une suite $\{f_n\} \subset \Sigma$ telle que $f_n \to f$ uniformément sur K avec la propriété que pour tout point $p \in K$ et pour toute carte ψ autour de p,*

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}(f_n \circ \psi^{-1})(\psi(p)) \to \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}(f \circ \psi^{-1})(\psi(p)),$$

et ce pour tout multi-indice α.

DÉMONSTRATION. Posons $M \setminus K = \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha \cup D_1 \cup \ldots \cup D_N$ où chaque B_α est une composante connexe relativement compacte et chaque D_i est une composante connexe non relativement compacte (voir lemme 2.1.3). Puisque K est compact, $h_M(K) = K \cup \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$ est aussi compact (voir théorème 23.5 de **[For]**) et donc borné. Comme les B_α sont nécessairement tous disjoints, soit il y en a un nombre fini et alors le résultat suit du théorème 2.3.2, soit pour chaque $R > 0$ il n'y a qu'un nombre fini de B_α dont le rayon intérieur

$$r_\alpha := \sup_{x \in B_\alpha} \sup\{r \geq 0 : B(x, r) \subset B_\alpha\}$$

est plus grand ou égal à R. Dans ce cas, posons $K_j = K \cup \bigcup_{r_\alpha \leq 1/j} B_\alpha$, qui ne possède alors qu'un nombre fini de composantes connexes complémentaires.

Ainsi, on peut appliquer le théorème 2.3.2 à K_j et $\sigma_j := \sigma \cap (M \setminus K_j)$ pour obtenir que $\Sigma_j = span\{C(\cdot, y) : y \in \sigma_j\}$ est dense dans $\mathcal{O}(K_j)$, et donc que Σ est dense dans $\mathcal{O}(K_j)$.

Remarquons maintenant que si $f \in \mathcal{O}(K)$, alors il existe un ouvert $W \supset K$ tel que $f \in \mathcal{O}(W)$. On a donc que

$$\delta_f = d(\partial W, K) > 0,$$

car K est compact et disjoint du fermé ∂W. On voit alors que $f \in \mathcal{O}(K_j)$ pour tout j tel que $1/j \leq \delta_f$, autrement dit pour tout $j \geq J = [1/\delta_f] + 1$. Donc $\mathcal{O}(K) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{O}(K_j)$, et Σ est dense dans $\mathcal{O}(K)$.

Maintenant, soit $f \in \mathcal{O}(K)$. On sait alors qu'il existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tel que $f \in \mathcal{O}(K_{j_0})$. Or, comme dans la preuve du théorème 2.3.2, on peut remplacer σ_{j_0} par $\sigma'_{j_0} \subset \sigma_{j_0}$ tel que $d(\sigma'_{j_0}, K_{j_0}) > 0$ et obtenir $\{f_n\} \in \Sigma'_{j_0}$ telle que $f_n \to f$ uniformément sur K. Puisque $d(\sigma'_{j_0}, K_{j_0}) > 0$, il existe un ouvert relativement compact V tel que $K \subset V$, $f \in \mathcal{O}(V)$ et $\sigma'_{j_0} \subset (M \setminus V)$. Ainsi, $f_n \in \mathcal{O}(V)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $p \in K$, soit alors (U, ψ) une carte autour de p telle que $U \subset V$. Par la formule intégrale de Cauchy classique, on trouve que pour tout multi-indice α

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}(f_n \circ \psi^{-1}) \to \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}(f \circ \psi^{-1})$$

uniformément sur les sous-ensembles compacts de $\psi(U)$, et en particulier en $\psi(p)$.

□

Finalement, on peut établir l'existence d'une série de "solutions fondamentales" qui est universelle sur un sous-ensemble compact de M. Autrement dit, on obtient une généralisation du théorème 2.0.8.

Corollaire 2.3.1. *Soient M une surface de Riemann non compacte, $K \subset M$ un sous-ensemble compact et $\{a_j\}_j \subset M \setminus K$ un sous-ensemble avec un point d'accumulation dans chaque composante connexe de $M \setminus K$. Alors, il existe une suite $\{b_j\}_j$ dans $\mathbb{C}$ avec la propriété qu'étant donné une fonction $f \in \mathcal{O}(K)$, il existe une suite $\{n_k\}_k$ dans $\mathbb{N}$ telle que*

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{z\in K} |f(z) - \sum_{j=1}^{n_k} b_j C(z, a_j)| = 0.$$

De plus, l'ensemble de telles séries $\{b_j\}_j$ est un G_δ dense dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ (muni de la topologie produit) et contient un sous-espace vectoriel dense de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, sauf zéro.

DÉMONSTRATION. On applique le théorème 2.3.3 à $\{a_j\}_{j\geq J}$ et on conclut, comme dans la preuve du théorème 3.1 de [**Ste**], grâce au théorème 1.3.4. □

2.4. UNIVERSALITÉ SUR LES SOUS-ENSEMBLES OUVERTS

En travaillant un peu plus fort, il est également possible d'obtenir une généralisation du théorème 2.0.9. La première étape consiste à établir un lemme topologique concernant les composantes connexes complémentaires des sous-ensembles compacts d'un ensemble ouvert $\Omega \subset M$.

Une suite de sous-ensembles compacts de Ω respectant les quatre propriétés du lemme 2.1.2 sera appelée *exhaustion régulière*. Notons qu'on n'exige pas ici que l'ouvert Ω soit connexe, et ainsi les sous-ensembles compacts formant une exhaustion régulière ne sont pas nécessairement connexes.

Soient maintenant $\{K_k\}$ et $\{L_l\}$ deux exhaustions régulières de Ω. Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, soit P_k une composante connexe de $\Omega \setminus K_k$ et pour chaque $l \in \mathbb{N}$, soit Q_l une composante connexe de $\Omega \setminus L_l$. Deux suites de paires $\{K_k, P_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ et $\{L_l, Q_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ telles que $P_{k+1} \subset P_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $Q_{l+1} \subset Q_l$ pour tout $l \in \mathbb{N}$ sont équivalentes si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe $l_k \in \mathbb{N}$ tel que $Q_{l_k} \subset P_k$ et pour tout $l \in \mathbb{N}$ il existe $k_l \in \mathbb{N}$ tel que $P_{k_l} \subset Q_l$. Nous appelerons *bout* de Ω une classe d'équivalence de suites de paires de ce type.

Définition 2.4.1. *Un bout $\mathcal{B}$ de Ω rencontre $E \subset M \setminus \Omega$ s'il existe un point $e \in E$ tel que pour tout représentant $\{K_k, P_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{B}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $e \in \tilde{P}_k$, où $\tilde{P}_k$ est la composante connexe de $M \setminus K_k$ qui contient P_k. Similairement, pour un sous-ensemble compact $K \subset \Omega$, on dit qu'une composante connexe P de $\Omega \setminus K$ rencontre $E \subset M \setminus \Omega$ s'il existe un point $e \in E$ tel que $e \in \tilde{P}$.*

Lemme 2.4.1. *Soient $\Omega \subset M$ un sous-ensemble ouvert, $E \subset M \setminus \Omega$ un sous-ensemble quelconque et $K \subset \Omega$ un sous-ensemble compact tel que $h_\Omega(K) = K$. Si tous les bouts de Ω rencontrent E, alors toute composante connexe de $\Omega \setminus K$ rencontre E.*

DÉMONSTRATION. Supposons qu'il existe P une composante connexe de $\Omega \setminus K$ telle que $\tilde{P}$ est disjoint de E, et considérons $\{K_j\}$ une exhaustion régulière de Ω. Alors, il existe $J_0 \in \mathbb{N}$ tel que $K \subset K_j$ pout tout $j \geq J_0$. On peut donc trouver une composante connexe P_{J_0} de $\Omega \setminus K_{J_0}$ telle que $P_{J_0} \subset P$, car sinon on aurait $P \subset K_{J_0}$ et ainsi P serait relativement compact, ce qui contredirait le fait que $h_\Omega(K) = K$.

Nous voulons maintenant montrer qu'on peut choisir par induction une suite de composantes connexes P_j de $\Omega \setminus K_j$ pour $j \geq J_0$, de façon à ce que $P_{j+1} \subset P_j$. P_{J_0} est déjà choisi. Définissons maitenant P_{j+1} pour $j \geq J_0$ en supposant que P_j est déjà défini. Remarquons d'abord que P_j n'est pas complètement inclus dans K_{j+1}. En effet, si on avait, au contraire, $P_j \subset K_{j+1}$, on aurait que P_j est relativement compact, contrairement à l'hypothèse que $h_\Omega(K_j) = K_j$. Maintenant, posons U une composante connexe de $P_j \cap (\Omega \setminus K_{j+1}) \neq \emptyset$ et définissons $P_{j+1} \subset \Omega \setminus K_{j+1}$ comme étant la composante connexe contenant U. Posons également F comme la composante connexe de $\Omega \setminus K_j$ contenant P_{j+1}. Puisque P_{j+1} contient U, on a que $P_{j+1} \cap P_j \neq \emptyset$, et on trouve donc que $F = P_j$ et finalement que $P_{j+1} \subset P_j$. On peut alors considérer le bout de Ω défini par $\{K_j, P_j\}_{j \geq J_0}$. Par choix de P_{J_0}, ce bout ne rencontre pas E. □

Un analogue au lemme 4.1 de **[Ste]** suit facilement du lemme 2.4.1.

Théorème 2.4.1. *Soient M une surface de Riemann non compacte, $\Omega \subset M$ un sous-ensemble ouvert et $\{a_j\}_j \subset M \setminus \Omega$ un sous-ensemble dénombrable avec la propriété que si on dénote par A l'ensemble des points d'accumulation de $\{a_j\}$, alors chaque bout de Ω rencontre A. Soit aussi $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Alors, pour tout $\epsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $b_1, \ldots, b_n$ tels que $d(f, \sum_{j=1}^n b_j C(\cdot, a_{N+j})) < \epsilon$.*

DÉMONSTRATION. Considérons $\{K_k\}$ une exhaustion régulière de Ω, qui sera telle que chaque composante connexe de $\Omega \setminus K_k$ rencontre A, par le lemme 2.4.1. Soit C une composante connexe de $M \setminus K_k$. On a donc $\partial C \subset \partial K_k \subset K_k \subset \Omega$ et puisque Ω est ouvert, cela signifie que $C \cap \Omega \neq \emptyset$ et donc que C contient une composante connexe de $\Omega \setminus K_k$. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, chaque composante connexe de $M \setminus K_k$ doit contenir une composante connexe de $\Omega \setminus K_k$ et par hypothèse elle doit donc également contenir un élément de A, c'est-à-dire un point d'accumulation de $\{a_j\}_j$. Appliquons donc le théorème 2.3.3 à la suite $\{a_j\}_{j>N}$ et à K_m pour obtenir des nombres $b_1, \ldots, b_n$ tels que

$$\sup_{K_m} \left| f(z) - \sum_{j=1}^n b_j C(z, a_{N+j}) \right| < \frac{\epsilon}{2m},$$

où $m \in \mathbb{N}$ est choisi assez grand pour que $\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \epsilon/2$. En posant $\theta_N^n(z) = \sum_{j=1}^{n} b_j C(z, a_{N+j})$ et en utilisant le fait que $K_l \subset K_m$ pour tout $l \leq m$, on trouve :

$$d(f, \sum_{j=1}^{n} b_j C(\cdot, a_{N+j})) = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2^k} \frac{\sup_{K_k} |f - \theta_N^n|}{1 + \sup_{K_k} |f - \theta_N^n|} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\sup_{K_k} |f - \theta_N^n|}{1 + \sup_{K_k} |f - \theta_N^n|}$$

$$< m \sup_{K_m} |f - \theta_N^n| + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

□

Corollaire 2.4.1. *Soient M, Ω et $\{a_j\}_j$ comme au lemme précédent. Alors, il existe une suite $\{b_j\}_j$ dans $\mathbb{C}$ avec la propriété qu'étant donné une fonction $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, il existe une suite $\{n_k\}_k$ dans $\mathbb{N}$ telle que*

$$\lim_{k \to \infty} d(f, \sum_{j=1}^{n_k} b_j C(\cdot, a_j)) = 0.$$

De plus, l'ensemble de telles séries $\{b_j\}_j$ est un G_δ dense dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ (muni de la topologie produit) et contient un sous-espace vectoriel dense de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, sauf zéro.

DÉMONSTRATION. On utilise le théorème 2.4.1 et le théorème 1.3.4. □

CONCLUSION

Il est évident que nos résultats peuvent être améliorés. L'hypothèse de convexité du théorème 1.2.3 est extrêmement forte. On imagine sans problème qu'elle pourrait être affaiblie. Toutefois, la force de cette hypothèse va de pair avec la difficulté de déterminer si un sous-ensemble compact est polynômialement convexe ou non.

Pour ce qui est du théorème 1.3.2, l'exigence que les sous-ensembles compacts sur lesquels on approxime doivent être disjoints d'au moins une hypersurface algébrique semble artificielle et étrangère au problème. Il serait souhaitable de pouvoir réaliser l'approximation sur des compacts qui ne sont seulement que polynômialement convexes et disjoints de l'ensemble algébrique sur lequel la série converge.

BIBLIOGRAPHIE

[AhS] AHLFORS, LARS V. ET SARIO, LEO, *Riemann Surfaces*, Princeton University Press, Princeton, 1960.

[Boa] BOAS, HAROLD P., *Lecture notes on several complex variables*, Cours MATH 650-600, Texas A and M University.

[Bot] BOTT, RAOUL ET TU, LORING W., *Differential Forms in Algebraic Topology*, Springer-Verlag, New York, 1982.

[ChP] CHUI, CHARLES K. ET PARNES, MILTON N., *Approximation by Overconvergence of a Power Series*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 36 (1971), p. 693-696.

[Con] CONWAY, JOHN B., *Functions of One Complex Variable*, Springer-Verlag, New York, 1978.

[For] FORSTER, OTTO, *Lectures on Riemann Surfaces*, Springer-Verlag, New York, 1981.

[GTa] GAUTHIER, PAUL M. ET TAMPTSÉ, INNOCENT, *Universal overconvergence of homogeneous expansions of harmonic functions*, Analysis (Munich), 26 (2006), no. 3, p. 287-293.

[Gau] GAUTHIER, PAUL M., *Mittag-Leffler Theorems on Riemann Surfaces and Riemannian Manifolds*, Can. J. Math, Vol. 50, 3, 1998, p.547-562.

[Gro] GROSSE-ERDMANN, KARL-GOSWIN, *Universal families and Hypercyclic Operators*, Bull. of Amer. Math. Soc, Vol. 36, no. 3, 23 juin 1999, p.346-371.

[GuN] GUNNING, R. C. ET NARASIMHAN R., *Immersion of open Riemann surfaces*, Math. Ann, 174, 1967, p.103-108.

[Hor] HÖRMANDER, LARS, *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, North-Holland, Amsterdam, 1966.

[Kal] KALLIN, EVA, *Polynomial Convexity : The Three Spheres Problem, Proceedings of the Conference on Complex Analysis Minneapolis 1964*, Springer-Verlag, Berlin, 1965.

[Kap] KAPLAN, WILFRED, *Introduction to analytic functions*, Addison-Wesley, États-Unis d'Amérique, 1966.

[KoF] KOLMOGOROV, A. ET FOMINE, S., *Éléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle*, Ellipses, Paris, 1994.

[Luh] LUH, WOLFGANG, *Approximation analytischer Funktionen durch überconvergente Potenzreiken und deren Matrix-Transformierten*, Mitt. Math. Sem. Giessen, 88, 1970, p.1-56.

[Nar] NARASIMHAN, R., *Analysis on Real and Complex Manifolds*, Advanced studies in Pure Mathematics, North-Holland, Amsterdam, 1968.

[Nes] NESTORIDIS, VASSILI, *Universal Taylor Series*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 46, 1996, p.1293-1306.

[NPa] NESTORIDIS, VASSILI ET PAPADIMITRIPOPOULOS, CHRIS, *Abstract theory of universal series and an application to Dirichlet Series*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341, 2005, p.539-543.

[Oxt] OXTOBY, JOHN C., *Measure and category*, Springer-Verlag, New York, 1971.

[Ran] RANGE, R. MICHAEL, *Holomorphic Functions and Integral Representations in Several Complex Variables*, Springer-Verlag, New York, 1986.

[Sel] SELEZNEV, A.E., *On universal power series*, Mat. Sb. (N.S.), 28, 1951, p.453-460 (Russe).

[Spi] SPIVAK, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Volume I, Publish or Perish, États-Unis d'Amérique, 2005.

[Ste] STEFANOPOULOS, VANGELIS, *Universal Series and Fundamental Solutions of the Cauchy-Riemann Operator*, à paraître.

[Tam] TAMPTSÉ, INNOCENT, *Universal Series from Fundamental Solutions of the Laplace Operator*, à paraître.

[Tar] TARKHANOV, NIKOLAI N., *The Cauchy Problem for Solutions of Elliptic Equations*, Akademie Verlag, Berlin, 1985.

[War] WARNER, FRANK W., *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer-Verlag, New-York, 1983.