Université de Montréal

HOMOLOGIE DE MORSE ET THÉORÈME DE LA SIGNATURE

par

Alexandre St-Pierre

Département de mathématiques et de statistique

Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures

en vue de l'obtention du grade de

Maître ès sciences (M.Sc.)
en mathématiques

février 2009

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

HOMOLOGIE DE MORSE ET THÉORÈME DE LA SIGNATURE

présenté par

Alexandre St-Pierre

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Marlène Frigon

(président-rapporteur)

Octav Cornea

(directeur de recherche)

Abraham Broer

(membre du jury)

Mémoire accepté le:

18 février 2009

SOMMAIRE

On donne dans ce mémoire une démonstration du théorème de la signature en utilisant la théorie de Morse. On parvient à cela en reconstruisant en théorie de Morse le diagramme de Poincaré-Lefschetz. Certains des résultats obtenus du diagramme sont ensuite déduits directement de la géométrie. Dans la présentation des résultats classiques de théorie de Morse utilisés, l'emphase est mise sur les questions d'orientation. On y traite notamment sous cette angle de la dualité de Poincaré, du produit d'intersection et des liens liant l'homologie et la cohomologie sur des variétés à bord.

Mots-clés : Théorie de Morse, espace de modules, dualité de Poincaré, produit d'intersection, produit cup, diagramme de Poincaré-Lefschetz, théorème de la signature.

SUMMARY

The aim of this thesis is to proof the signature theorem by using only Morse theory. To achieve this we reconstruct the Poincaré-Lefschetz diagram in Morse theory. Some of the results obtained from the diagram are then reobtained directly from the geometry. A particular emphasis on the orientation questions was given to the presentation of the classical Morse theory results. It is from that angle, that were studied, among others, the Poincaré duality, the intersection product and the relation between homology and cohomology on manifold with boundary.

Keywords : Morse theory, moduli space, Poincaré duality, intersection product, cup product, Poincaré-Lefschetz diagram, signature theorem.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS

Je remercie d'abord très sincèrement mes parents pour leur confiance et leur soutien tout au long de mon parcours universitaire.

Je ne pourrai remercier assez mon directeur, Octav Cornea, pour tout le temps qu'il m'a consacré et pour m'avoir dirigé de façon exemplaire à travers tout le processus dont ce mémoire est l'aboutissement. Grâce à lui, j'ai pu travailler sur des idées vraiment stimulantes. Merci beaucoup.

Enfin, merci aussi aux gens du département de mathématiques et de statistique de l'Université de Montréal et plus spécialement à Francois Charest et François Charette pour avoir partagé leur connaissance de la topologie avec moi.

INTRODUCTION

La théorie de Morse fut introduite par Marston Morse dans les années 1920. Elle peut être utilisée comme un outil servant à étudier la topologie des variétés différentiables grâce aux fonctions dites de Morse. En particulier, l'étude des points critiques de ces fonctions fournit à travers le lemme de Morse et autres résultats une quantité appréciable d'informations sur la topologie des variétés. Dans leurs travaux, Thom, Smale, Milnor et Witten introduisirent ensuite l'homologie de Morse, qui est isomorphe à l'homologie singulière et donc indépendante de la fonction utilisée, et qui est obtenue d'un complexe appelé *complexe de Morse*, généré à partir des points critiques de la fonction. Le sujet fut par la suite revitalisé par Floer, Witten, Gromov et Kontsevich qui introduisirent des techniques inspirées de la théorie de Morse comme, entre autres, le produit quantique qui est une extension du produit d'intersection. Présentement, la théorie de Morse est souvent utilisée comme modèle simplifié servant à mieux comprendre la topologie symplectique. Toutefois, la théorie de Morse a aussi des applications concrètes comme, par exemple, en physique théorique, en robotique ou en reconnaissance automatique de l'image.

Dans ce mémoire, il sera principalement question du théorème de la signature. Celui-ci fut établi en utilisant la théorie singulière et prouve que si une variété M de dimension $4n$ est le bord d'une variété N, alors la signature de la forme bilinéaire symétrique donnée par le produit cup sur le groupe d'homologie $H^{2n}(M)$ vaut 0. Ceci nous fournit donc, entre autres, un invariant algébrique de la classe de cobordisme des variétés. Le théorème fut démontré par Thom dans sa thèse *Espaces fibrés en sphères et carrés de Steenrod* et ensuite repris par Hirzebruch dans ses travaux sur la conjecture de Todd. C'est un résultat fondamental en topologie. En particulier, il est la base de la théorie des classes et des nombres caractéristiques.

La contribution principale de ce mémoire consiste à donner une preuve du théorème de la signature faisant appel uniquement à la théorie de Morse. Ceci n'a à notre connaissance jamais été écrit et constitue un premier pas vers une possible généralisation à la théorie de Floer (ce que nous ne tentons pas de faire ici). Les difficultés de cette entreprise furent en bonne partie liées au fait qu'il fallut établir en homologie de Morse chacun des résultats existant en homologie singulière et servant à la démonstration du théorème. Les questions d'orientation ont nécessité une attention particulière car leur présentation dans la littérature n'est souvent pas complète.

Le premier chapitre de ce mémoire expose les bases de la théorie de Morse ainsi qu'une partie des constructions qui seront utiles pour démonter les résultats des chapitres subséquents. Notamment, on y définit le complexe de Morse, on y traite les questions liées à l'orientation et on y définit le produit cup à coefficient dans un corps. C'est aussi dans ce chapitre que l'on expose comment on obtient la dualité de Poincaré en homologie de Morse et que l'on développe une méthode de recollement pour les homotopies qui joue un rôle important dans l'obtention de la commutativité du diagramme de Poincaré-Lefschetz au chapitre suivant.

Le deuxième chapitre est consacré à la démonstration du théorème de la signature. Pour ce faire, on commence par construire en homologie de Morse le diagramme de Poincaré-Lefschetz grâce à tout l'attirail développé, puis l'on entreprend d'établir sa commutativité. Une fois la commutativité obtenue, le reste de la preuve du théorème de la signature procède à la manière de **[Br]** comme dans le cas de l'homologie singulière.

Dans le troisième chapitre de ce mémoire, on se propose de donner une démonstration plus géométrique des résultats obtenus du diagramme de Poincaré-Lefschetz qui nous avaient permis de prouver le théorème de la signature au chapitre 2. Cette étape est une nécessité en vue d'une potentielle extension à la théorie de Floer.

Chapitre 1

PRÉLIMINAIRES

Ce chapitre sera dans un premier temps l'occasion de donner les résultats de base de la théorie de Morse et de traiter une première fois des questions liées à l'orientation qui sont un élément récurrent de ce mémoire. Dans un deuxième temps, on y développera des constructions qui nous serons utiles pour la suite des choses. On s'y référera donc fréquemment dans tout le mémoire.

1.1. CONCEPTS GÉNÉRAUX

Les résultats présentés dans cette section sont pour la plupart des résultats classiques. On peut trouver un contenu analogue à ce qui est présenté dans la sous-section 1.1.1 dans [**BaHu**] et [**Mi**], tandis que pour traiter de l'orientation à la sous-section 1.1.2 et du complexe de Morse à la sous-section 1.1.3, nous nous sommes inspirés de l'approche de [**We**].

1.1.1. Définitions et résultats de base

Soit M, une variété fermée de dimension n, on dit que $p \in M$ est un *point régulier* d'une fonction lisse $f : M \to \mathbb{R}$ si l'application $df : T_pM \to \mathbb{R}$ est surjective. Dans le cas contraire, on dit que p est un *point critique* de f. L'ensemble des points critiques de f est noté par $crit(f) := \{p \in M | \, p \text{ est un pt. crit de f}\}$. On dit que $a \in \mathbb{R}$ est une *valeur régulière* de f si $f^{-1}(a) \bigcap crit(f) = \varnothing$.

Un point critique p est dit *non dégénéré* si la matrice hessienne de f est non dégénérée en p, c'est-à-dire :

$$\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\bigg|_p\right) \neq 0 \tag{1.1.1}$$

Cette condition est indépendante du système de coordonnées (voir [**Mi**]). Ces points ont la propriété importante qui suit et dont on trouve la démonstration dans [**Mi**].

Lemme 1.1.1 (Lemme de Morse). *Soit p un point critique non dégénéré de f. Alors il existe un voisinage U de p et un système de coordonnées local $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(p) = 0$ et que*

$$f = f(p) - {x_1}^2 - \ldots - {x_\lambda}^2 + {x_{\lambda+1}}^2 + \ldots + {x_n}^2 \tag{1.1.2}$$

Définition 1.1.2. *Soit un point critique non dégénéré x, on dit que la valeur λ du lemme précédent est l'indice du point critique x.*

Définition 1.1.3. *On appelle fonction de Morse une fonction dont tous les points critiques sont non dégénérés.*

Remarque 1.1.4. *Le lemme précédent implique que les points critiques d'une fonction de Morse sont isolés.*

Ensuite, en munissant M d'une métrique riemannienne $g_x : T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$, on peut définir le champ de vecteurs gradient $\nabla^g f$ associé à la paire (f, g) par l'identité $\forall x \in M < \cdot\,, \nabla^g f(x) >_{g_x} = df_x$. Ce dernier nous permet de définir un groupe de difféomorphismes à un paramètre $\varphi : \mathbb{R} \times M \to M$ à l'aide du négatif gradient :

$$\frac{\partial \varphi_t(x)}{\partial t} = -(\nabla^g f)(\varphi_t(x)) \tag{1.1.3}$$

$$\varphi_0(x) = x \tag{1.1.4}$$

Ainsi, pour un point critique p, on définit $W^s_{(f,g)}(p)$ et $W^u_{(f,g)}(p)$, les variétés stables et instables de p, par

$$W^s_{(f,g)}(p) := \{x \in M \mid \lim_{t\to\infty} \varphi_t(x) = p\} \tag{1.1.5}$$

$$W^u_{(f,g)}(p) := \{x \in M \mid \lim_{t\to-\infty} \varphi_t(x) = p\} \tag{1.1.6}$$

Lorsque le choix de f et g sera clair selon le contexte, on pourra les noter simplement $W^s(p)$ et $W^u(p)$. D'ailleurs, pour le reste de ce mémoire, sauf lors d'indications contraires, on considérera que toutes les variétés utilisées sont munies d'une métrique riemannienne g qui ne varie pas lors des manipulations. Ainsi, on en omettra la mention dans les énoncés et la notation subséquente sauf lorsque nécessaire.

Du fait que chaque $x \in M$ appartient à une unique variété stable et à une unique variété instable, on obtient le résultat suivant

Proposition 1.1.5. *Dans la situation présente, c.a.d. que (M, g) est une variété Riemannienne fermée sur laquelle est définie une fonction de Morse f, on a que M est l'union disjointe des variétés stables ou instables associées à f :*

$$M = \coprod_{p \in crit(f)} W^u(p) \tag{1.1.7}$$

$$M = \coprod_{p \in crit(f)} W^s(p) \tag{1.1.8}$$

Ensuite, on trouve aussi pour $W^u(p)$ et $W^s(p)$ le résultat suivant dans [**BaHu**]

Proposition 1.1.6. *Dans le même contexte que précédemment, si p est un point critique d'indice λ et $\varphi : U \to \mathbb{R}$ une carte de Morse (c.a.d. une carte donnée par le lemme de Morse), en définissant $T_p^u M$ comme le sous-espace de T_pM engendré par $\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_\lambda}$ et de façon analogue en définissant $T_p^s M \subseteq T_pM$ comme l'espace engendré par $\frac{\partial}{\partial x_{\lambda+1}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}$, on obtient que*

$$T_pM = T_p^u M \oplus T_p^s M \tag{1.1.9}$$

et que la hessienne est définie négative sur $T_p^u M$ et définie positive sur $T_p^s M$. De plus, il existe des plongements surjectifs

$$E^u : T_p^u M \to W^u(p) \subseteq M$$

$$E^s : T_p^s M \to W^s(p) \subseteq M$$

de telle sorte que $W^u(p)$ et $W^s(p)$ correspondent à des disques plongés dans M de dimension λ et $n - \lambda$ respectivement.

Nous allons maintenant nous intéresser aux fonctions de Morse dont les variétés stables et instables respectent une condition particulière :

Définition 1.1.7. *Une fonction f est dite Morse-Smale si elle respecte la condition de transversalité de Morse-Smale qui consiste à demander que les variétés stables et instables qui lui sont associées s'intersectent toutes transversalement, c'est-à-dire que $\forall\, p, q \in crit(f)$ on demande que $W^u(p) \pitchfork W^s(q)$.*

La preuve du résultat suivant est faite en grand détail dans **[BaHu]**.

Proposition 1.1.8. *La condition Morse-Smale est une condition générique.*

Maintenant, soit une fonction Morse-Smale f et soit $q, p \in crit(f)$, on définit $\mathcal{M}_{pq}$ par

$$\mathcal{M}_{pq} := W^u(p) \cap W^s(q)$$

et l'on définit $\widehat{\mathcal{M}}^a_{pq}$ par

$$\widehat{\mathcal{M}}^a_{pq} := \{W^u(p) \cap W^s(q)\} \bigcap f^{-1}(a)$$

avec a une valeur régulière de f telle que $f(q) < a < f(p)$ si cela est possible (autrement $\widehat{\mathcal{M}}^a_{pq} := \varnothing$). Ensuite, puisque pour des valeurs régulières a et a' satisfaisant la condition qui vient d'être énoncée on peut identifier $\widehat{\mathcal{M}}^a_{pq}$ et $\widehat{\mathcal{M}}^{a'}_{pq}$ via le flot nous donnant ainsi une relation d'équivalence$\widehat{\mathcal{M}}^a_{pq} \sim \widehat{\mathcal{M}}^{a'}_{pq}$, on dénote par $\widehat{\mathcal{M}}_{pq}$ la classe $\{\widehat{\mathcal{M}}^a_{pq} | a \in (f(q), f(p)\}/\sim$.

Introduisons maintenant la définition suivante.

Définition 1.1.9. *On peut définir un ordre partiel $\succcurlyeq$ sur $crit(f)$ par la relation $p \succcurlyeq q \Leftrightarrow W^u(p) \bigcap W^s(q) \neq \varnothing$*

Remarque 1.1.10. *Ainsi, $p \succcurlyeq p$.*

Cette dernière définition nous permet d'énoncer de la façon suivante les premiers résultats liant la fermeture des variétés stables et instables aux *lignes de flots brisées* **[BaHu]**.

Proposition 1.1.11. *Soit $r, p, q \in crit(f)$ tel que $p \succcurlyeq q$ alors :*

$$\overline{W^u(r)} = \bigcup_{r \succcurlyeq x} W^u(x) \tag{1.1.10}$$

$$\overline{W^s(r)} = \bigcup_{x \succcurlyeq r} W^s(x) \tag{1.1.11}$$

$$\overline{\mathcal{M}}_{pq} = \bigcup_{p \succcurlyeq x \succcurlyeq y \succcurlyeq q} \mathcal{M}_{xy} \tag{1.1.12}$$

1.1.2. Orientation

Afin de pouvoir définir le complexe de Morse à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$ lors de la section suivante, nous traitons dans cette sous-section la question de l'orientation des variétés stables, instables et de l'intersection de celles-ci qui est nécessaire à la définition de la différentielle. Nous y développerons aussi le concept d'orientation cohérente sur lequel nous reviendrons à plus d'une reprise dans ce mémoire. Mais avant toute chose, clarifions la notation utilisée ici.

Définition 1.1.12. *Soit des variétés $A \subset B \subset C \subset M$, alors on note par $N_A^C B$ le fibré normal de B dans C restreint à A. Ainsi, $N^M B$ dénote simplement le fibré normal de B dans M. On notera aussi par $T_A B$ la restriction de TB à A.*

Le processus commence par un choix d'orientation $[W^u(x)]$ pour chacune des variétés instables $W^u(x)$ en présence. Ce choix étant fait, pour chacune des variétés $\mathcal{M}_{xy}$ nous noterons par

$$[\mathcal{M}_{xy}]_{ind}$$

l'orientition induite sur $\mathcal{M}_{xy}$ par la procédure suivante :

Commençons par remarquer qu'au point critique $y \in crit(f)$ on a

$$T_y W^u(y) \oplus T_y W^s(y) \approx N_y^M W^s(y) \oplus T_y W^s(y)$$

On peut donc se servir de $[T_y W^u(y)]$ pour induire une orientation $[N_y^M W^s(y)]$ sur $N_y^M W^s(y)$. Ensuite, $W^s(y)$ étant contractile, $[N_y^M W^s(y)]$ fournit une orientation $[N^M W^s(y)]$ pour $N^M W^s(y)$. On a donc coorienté $W^s(y)$. Maintenant, soit $N_{\mathcal{M}_{xy}}^M W^s(y)$, la restriction de $N^M W^s(y)$ à $\mathcal{M}_{xy}$, ce fibré hérite donc lui aussi d'une orientation $[N_{\mathcal{M}_{xy}}^M W^s(y)]$ induite par $[N^M W^s(y)]$. De même, $[TW^u(x)]$ induit lui aussi une orientation $[T_{\mathcal{M}_{xy}} W^u(x)]$ sur $T_{\mathcal{M}_{xy}} W^u(x)$. Ainsi, puisque

$$T_{\mathcal{M}_{xy}} W^u(x) \approx T\mathcal{M}_{xy} \oplus N_{\mathcal{M}_{xy}}^M W^s(y)$$

on peut définir $[T\mathcal{M}_{xy}]_{ind}$ comme l'orientation qui fasse en sorte qu'en tout point donné $p \in \mathcal{M}_{xy}$, si l'on choisit une base $\beta(N_p^M W^s(y))$ pour $N_p^M W^s(y)$ donnant l'orientation $[N_p^M W^s(y)]$ et une base $\beta(T_p \mathcal{M}_{xy})$ telle que $[\beta(T_p \mathcal{M}_{xy})]$ coïncide avec $[T\mathcal{M}_{xy}]_{ind}$ en p, alors on ait que

$$[T_p W^u(x)] = [(\beta(T_p \mathcal{M}_{xy}), \beta(N_p^M W^s(y)))] \tag{1.1.13}$$

Enfin, l'orientation de $[\widehat{\mathcal{M}}_{xy}]_{ind}$ est donnée en utilisant le flot pour orienter la première composante de la décomposition suivante

$$T_{\widehat{\mathcal{M}}^a_{xy}}\mathcal{M}_{xy} \approx \mathbb{R} \oplus T\widehat{\mathcal{M}}^a_{xy}$$

Nous allons maintenant aborder le concept de l'orientation cohérente. Toutefois, pour traiter ce sujet correctement, nous aurons besoin d'étudier un peu la notion de gluing à travers le résultat suivant que l'on peut retrouver dans [**We**].

Proposition 1.1.13 (Gluing). *Pour tout point régulier q, notons la ligne de flot passant par q par ℓ_q. Soit x, y et z, des points critiques d'indices $\lambda+1$, λ et $\lambda-1$ respectivement (de façon à ce que $\widehat{\mathcal{M}}_{xy}$ et $\widehat{\mathcal{M}}_{yz}$ soient des espaces discrets), pour tout couple (u,v), où u et v sont des composantes connexes de $\mathcal{M}_{xy}$ et $\mathcal{M}_{yz}$ (c.a.d. que u est une ligne de flot de x à y et v est une ligne de flot de y à z), il existe un plongement $p : [\rho_0,\infty) \to \mathcal{M}_{xz}$ tel que $\lim\limits_{\rho\to\infty} p_\rho = y$, $\lim\limits_{\rho\to\infty} \ell_{p_\rho} = u \bigcup v$, que $\forall\ \rho \in [\rho_0,\infty)$ on a que $\frac{d}{d_\rho}p_\rho$ et $\nabla f(p_\rho)$ soient linéairement indépendants et qu'aucune suite dans $\mathcal{M}_{xz}\backslash\{\ell_{p_\rho} | \rho \in [\rho_0,\infty)\}$ ne converge vers $u\bigcup v$. Ainsi, pour les variétés $\widehat{\mathcal{M}}_{xy}$, $\widehat{\mathcal{M}}_{yz}$ et $\widehat{\mathcal{M}}_{xz}$, on obtient l'existence d'un plongement*

$$\#: \widehat{\mathcal{M}}_{xy} \times [\rho_0,\infty) \times \widehat{\mathcal{M}}_{yz} \to \widehat{\mathcal{M}}_{xz} \tag{1.1.14}$$

$$(u,\rho,v) \mapsto u\#_\rho v \tag{1.1.15}$$

tel que $\lim\limits_{\rho\to\infty} u\#_\rho v = (u,v)$ et où aucune suite dans $\widehat{\mathcal{M}}_{xz}\backslash u\#_{[\rho_0,\infty)}v$ ne converge vers (u,v).

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat fondateur du concept d'orientation cohérente dont la preuve est donnée dans [**We**].

Proposition 1.1.14 (Cohérence). *Soit $[\dot{u}]$ et $[\dot{v}]$, l'orientation induite par le flot sur les composantes u et v de $\mathcal{M}_{xy}$ et $\mathcal{M}_{yz}$, avec les conventions sur l'orientation utilisées jusqu'à présent et en définissant l'application $\sigma^\#$ par l'extension de la correspondance suivante*

$$\sigma^\# : Or(u) \times Or(v) \to Or(\mathcal{M}_{xz})$$

$$([\dot{u}],[\dot{v}]) \mapsto \left[(-\nabla f(p_\rho), -\frac{d}{d\rho}p_\rho)\right]$$

On obtient que

$$\sigma^{\#}([u]_{ind},[v]_{ind}) = \left[\mathcal{M}_{xz}\right]_{ind}$$

1.1.3. Complexe de Morse

Dans cette section, nous allons définir le complexe de Morse. Commençons par définir sa différentielle.

Soit une variété Reimanienne (M,g) fermée munie d'une fonction Morse-Smale f et soit un corps $\mathbb{K}$. Considérons $< crit(f) > \mathbb{K}$, l'espace vectoriel engendré sur $\mathbb{K}$ par les points critiques de f. Si on dénote les points critiques d'indice k par $crit_k(f)$, on a que $< crit(f) > \mathbb{K}$ est un groupe gradué

$$< crit(f) > \mathbb{K} = \bigoplus_k < crit_k(f) > \mathbb{K}$$

Considérons maintenant deux points critiques x et y d'indices k et $k-1$ respectivement. On associe un signe $n_u(x,y) \in \{+1,-1\}$ à chaque composante $u \in \mathcal{M}_{xy}$ en comparant l'orientation induite $[u]_{ind}$ sur u héritée de $[\mathcal{M}_{xy}]_{ind}$ et l'orientation donnée par le flot de façon à ce que le signe soit positif si les deux orientations coïncident et négatif dans le cas contraire. On définit ensuite $n(x,y)$ par la relation

$$n(x,y) := \sum_{u\in\mathcal{M}_{xy}} n_u(x,y)$$

En posant $C_k(M,f) :=< crit_k(f) > \mathbb{K}$, on peut maintenant définir l'application ∂_{f_k} sur $C_k(M,f)$ en l'étendant par linéarité à partir de sa définition sur les générateurs

$$\partial_{f_k} : \; C_k(M,f) \to C_{k-1}(M,f)$$
$$\partial_{f_k}(x) = \sum_{y\in crit(f)_{k-1}} n(x,y)y$$

On obtient ainsi de façon évidente une application

$$\partial_f : \bigoplus_k C_k(M,f) \to \bigoplus_k C_k(M,f)$$

et on obtient le complexe de Morse $C_*(M,f,\partial_f)$ en le définissant comme la paire

$$C_*(M,f,\partial_f) \equiv \left(\bigoplus_k C_k(M,f)\,,\partial_f\right)$$

que l'on notera parfois simplement $C_*(M,f)$ pour alléger la notation.

Notre prochaine tâche consiste à montrer que $\partial^2 = 0$. Différentes approches peuvent être empruntées pour arriver à ce résultat. Nous utilisons dans ce mémoire une méthode qui consiste à étudier les brisures de $\widehat{\mathcal{M}}_{xy}$ lorsque celui-ci est de dimension 1. La preuve du résultat suivant suit la démonstration faite dans [**We**].

Proposition 1.1.15. *Avec la différentielle telle que définie précédemment, on a que* $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$.

Démonstration. Soit x, y et z, des points critiques d'indices $\lambda+1$, λ et $\lambda-1$ respectivement, alors $\widehat{\mathcal{M}}_{xz}$ est de dimension 1 et est composé de courbes fermées et de segments de courbes. Les résultats de la section précédente nous ont permis d'établir qu'à chacune des extrémités de ces segments de courbes correspond un couple $(u,v) \in \widehat{\mathcal{M}}_{xy} \times \widehat{\mathcal{M}}_{yz}$ et qu'inversement, à chaque couple (u,v) correspond une extrémité de segment de courbe dans $\widehat{\mathcal{M}}_{xz}$. Ainsi, si un segment de courbe donné a pour couples associés à ses extrémités (u,v) et $(\tilde{u},\tilde{v})$, il suffit de montrer que les contributions $n_u n_v$ et $n_{\tilde{u}} n_{\tilde{v}}$ faites à ∂^2 par chacune des extrémités s'annulent :

$$n_u n_v + n_{\tilde{u}} n_{\tilde{v}} = 0$$

Pour démontrer cela, on se sert du résultat 1.1.14 sur la cohérence. Si $\widehat{\mathcal{M}}^i_{xz}$ dénote le segment de courbe en question, on obtient les égalités suivantes pour $\mathcal{M}^i_{xz}$

$$\begin{aligned}
n_u n_v[(\nabla f(p_\rho), \frac{d}{d\rho}p_\rho)] &= n_u n_v \sigma^{\#}([\dot{u}], [\dot{v}]) \\
&= \sigma^{\#}([u]_{ind}, [v]_{ind}) \\
&= [\mathcal{M}^i_{xz}]_{ind} \\
&= \sigma^{\#}([\tilde{u}]_{ind}, [\tilde{v}]_{ind}) \\
&= n_{\tilde{u}} n_{\tilde{v}} \sigma^{\#}([\dot{\tilde{u}}], [\dot{\tilde{u}}]) \\
&= n_{\tilde{u}} n_{\tilde{v}}[(\nabla f(\tilde{p}_\rho), \frac{d}{d\rho}\tilde{p}_\rho)] \\
&= -n_{\tilde{u}} n_{\tilde{v}}[(\nabla f(p_\rho), \frac{d}{d\rho}p_\rho)]
\end{aligned}$$

où la dernière égalité vient du fait que $[\frac{d}{d\rho}p_\rho]$ et $[\frac{d}{d\rho}\tilde{p}_\rho]$ pointent en sens inverse sur $\widehat{\mathcal{M}}^i_{xz}$ $\square$

Corollaire 1.1.16. *On obtient une homologie* $H_*(M,f) \equiv H_*(C_*(M,f,\partial M))$

On appelera l'homologie du corollaire précédent *homologie de Morse associée à la fonction Morse-Smale f.*

1.1.4. Produit d'intersection

Dans cette sous-section, nous définissons le produit d'intersection qui est l'un des objets d'études les plus importants de ce mémoire. Pour ce faire, nous devrons composer avec un espace de modules différent.

Considérons le cas où l'on a une variété orientable M et trois fonctions Morse-Smale $f_i : M \to \mathbb{R}$ qui soient telles que leurs variétés stables et instables soient en position générale. Cette dernière condition est une condition générique. Dans ce cas, soit $x_i \in crit(f_i)$ $(i = 1, 2, 3)$, on note par

$$\mathcal{M}^{x_1,x_2}_{x_3} := W^u(x_1) \cap W^u(x_2) \cap W^s(x_3)$$

la variété d'intersection de dimension $m = ind(x_1) + ind(x_2) - ind(x_3) - n$ ainsi définie. Soit $p \in \mathcal{M}^{x_1,x_2}_{x_3}$, à chaque couple (p, f_i) on peut associer la ligne de flot du gradient négatif de f_i reliant p et x_i. De cette façon, $\mathcal{M}^{x_1x_2}_{x_3}$ peut aussi être vu comme l'ensemble des tripodes où chaque branche est une ligne de flot associée à chacune des fonctions.

Choisissons maintenant une orientation $[M]$ pour M, une orientation $[TW^u(\cdot)]$ pour chacune des variétés instables de f_1 et f_2 et une orientation $[TW^s(\cdot)]$ pour chacune des variétés stables de f_3. À partir de ces orientations, on va orienter $\mathcal{M}^{x_1x_2}_{x_3}$ de la façon suivante :

Soit une base

$$\mathcal{B}^{x_1x_2x_3} = (v_1^{x_1x_2x_3}, \ldots, v_m^{x_1x_2x_3})$$

pour $T_p\mathcal{M}^{x_1x_2}_{x_3}$ où $p \in \mathcal{M}^{x_1x_2}_{x_3}$, puisque l'intersection transverse de deux variétés orientées dans une variété orientée est orientée, on peut choisir ensuite une base $\mathcal{B}^{(x_1,x_2)}$ pour $T_p\{W^u(x_1) \cap W^u(x_2)\}$ qui soit de la forme

$$\mathcal{B}^{(x_1x_2)} = (\mathcal{B}^{x_1x_2x_3}, v_{m+1}^{x_1x_2}, \ldots, v_k^{x_1,x_2})$$

où $k = ind(x_1) + ind(x_2) - n$, de façon à ce qu'elle donne l'orientation positive :

$$[\mathcal{B}^{x_1x_2}] = [T_p\{W^u(x_1) \cap W^u(x_2)\}]$$

Enfin, on choisit des bases de la forme

$$\mathcal{B}^{x_1} = (\mathcal{B}^{x_1x_2}, v_{k+1}^{x_1,x_3}, ..., v_{ind(x_1)}^{x_1,x_3})$$
$$\mathcal{B}^{x_2} = (\mathcal{B}^{x_1x_2}, v_{k+1}^{x_2,x_3}, ..., v_{ind(x_2)}^{x_2,x_3})$$
$$\mathcal{B}_1^{x_3} = (\mathcal{B}^{x_1x_2x_3}, v_{m+1}^{x_3}, ..., v_{ind(x_3)}^{x_3})$$

de façon à ce que $[\mathcal{B}^{x_1}] = [T_pW^u(x_1)], [\mathcal{B}^{x_2}] = [T_pW^u(x_2)]$ et $[\mathcal{B}^{x_3}] = [T_pW^s(x_3)]$ et où $v_i^{x_1,x_3} \in T_p\{W^u(x_1) \cap W^s(x_3)\}$ et $v_i^{x_2,x_3} \in T_p\{W^u(x_2) \cap W^s(x_3)\}$. On peut bel et bien choisir les $v_i^{x_1,x_3}$ dans $T_p\{W^u(x_1) \cap W^s(x_3)\}$ puisque de la condition de transversalité on obtient :

$$\begin{aligned} T_pM &\approx T_p\{W^u(x_1) \cap W^s(x_2)\} \oplus N_p^M\{W^u(x_1) \cap W^s(x_2)\} \\ &\approx T_p\{W^u(x_1) \cap W^s(x_2)\} \oplus N_p^{W^s(x_3)}\{W^u(x_1) \cap W^s(x_2)\} \end{aligned}$$

On obtient ainsi une seconde base pour $T_pW^s(x_3)$ donnée par

$$\mathcal{B}_2^{x_3} := (\mathcal{B}^{x_1x_2x_3}, v_{k+1}^{x_2x_3}, ..., v_{ind(x_2)}^{x_2x_3}, v_{k+1}^{x_1x_3}, ..., v_{ind(x_1)}^{x_1x_3})$$

On oriente finalement $T_p\mathcal{M}_{x_3}^{x_1,x_2}$ à l'aide de la relation suivante

$$\begin{aligned} &[T_p\mathcal{M}_{x_3}^{x_1x_2}]_{ind} = [\mathcal{B}^{x_1x_2x_3}] \\ \Leftrightarrow &[(\mathcal{B}^{x_1x_2x_3}, v_{k+1}^{x_2x_3}, ..., v_{ind(x_2)}^{x_2x_3}, v_{k+1}^{x_1x_3}, ..., v_{ind(x_1)}^{x_1x_3})] = [(\mathcal{B}^{x_1,x_2,x_3}, v_{m+1}^{x_3}, ..., v_{ind(x_3)}^{x_3})] \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$[T_p\mathcal{M}_{x_3}^{x_1x_2}]_{ind} = [\mathcal{B}^{x_1x_2x_3}] \Leftrightarrow [\mathcal{B}_1^{x_3}] = [\mathcal{B}_2^{x_3}] \tag{1.1.16}$$

L'orientation de $\mathcal{M}_{x_3}^{x_1x_2}$ ainsi obtenue est notée $[\mathcal{M}_{x_3}^{x_1x_2}]_{ind}$.

Remarque 1.1.17. *Le choix de l'orientation $[\mathcal{B}^{x_1x_2}]$ pour $\mathcal{B}^{x_1x_2}$ n'influe pas sur la détermination du signe. Puisque c'est le seul endroit où l'on doit utiliser le fait que M est une variété orientable, cette hypothèse n'est en fait pas nécessaire à la définition du produit d'intersection. Par exemple, supposons que l'on ait dans $\mathbb{R}^3$ les variétés $x = 0, y = 0$ et $z = 0$ avec les orientations $[(\vec{y}, \vec{z})], [(\vec{x}, \vec{z})]$ et $[(\vec{x}, \vec{y})]$, alors le choix de $\mathcal{B}^{xy} = (\vec{z})$ nous donne $\mathcal{B}^x = (\vec{z}, -\vec{y})$ et $\mathcal{B}^y = (\vec{z}, -\vec{x})$ et donc* *on obtient que le signe est positif de l'égalité* $[(-\vec{x}, -\vec{y})] = [(\vec{x}, \vec{y})]$. *Or, par une démarche analogue on trouve le même signe si on choisit* $\mathcal{B}^{xy} = (-\vec{z})$.

Remarque 1.1.18. *Si* $dim(\mathcal{M}_{x3}^{x_1x_2}) = 1$, *puisque les fibrés tangents* $T_{\mathcal{M}_{x3}^{x_1x_2}} W^u(x_1)$, $T_{\mathcal{M}_{x3}^{x_1x_2}} W^u(x_2)$ *et* $T_{\mathcal{M}_{x3}^{x_1x_2}} W^s(x_3)$ *sont triviaux, on peut refaire la construction précédente avec des vecteurs*

$$v_1^{x_1x_2x_3}(\rho),\ v_j^{x_1x_2}(\rho),\ v_s^{x_1x_3}(\rho) \quad et \quad v_\ell^{x_2x_3}(\rho)$$

dépendant d'un paramètre ρ *dans un intervalle* (a, b).

Définition 1.1.19. *Lorsque* $dim(\mathcal{M}_{x3}^{x_1,x_2}) = 0$, *et donc que* $\mathcal{B}^{(x_1,x_2,x_3)} = 0$, *les composantes de* $\mathcal{M}_{x_3}^{x_1,x_2}$ *sont des points isolés et de la procédure précédente on obtient simplement un signe, noté* $\mathfrak{n}_q(x_1, x_2, x_3)$, *pour chaque point* $q \in \mathcal{M}_{x_3}^{x_1,x_2}$. *Ainsi, en posant*

$$\mathfrak{n}(x_1, x_2, x_3) := \sum_{q \in \mathcal{M}_{x_3}^{x_1,x_2}} \mathfrak{n}_q(x_1, x_2, x_3)$$

on peut donc définir le produit d'intersection μ *de la façon suivante*

$$\begin{aligned} \mu : C_p(M, f_1) \otimes C_q(M, f_2) &\to C_{p+q-n}(C_*(M, f_3)) \\ x_1 \otimes x_2 &\mapsto \sum_{x_3 \in crit_{p+q-n}(f_3)} \mathfrak{n}(x_1, x_2, x_3) x_3 \end{aligned}$$

Remarque 1.1.20. *De la procédure de détermination du signe, on obtient*

$$\begin{aligned} n_q(x_1, x_2, x_3) &= (-1)^{(ind(x_2)-(ind(x_1)+ind(x_2)-n))(ind(x_1)-(ind(x_2)+ind(x_1)-n))} n_q(x_2, x_1, x_3) \\ &= (-1)^{(n-ind(x_1))(n-ind(x_2))} n_q(x_2, x_1, x_3) \end{aligned}$$

et donc

$$\mu(x_1 \otimes x_2) = (-1)^{(n-ind(x_1))(n-ind(x_2))} \mu(x_2 \otimes x_1)$$

Comme dans le cas de la différentielle de Morse, on peut compactifier $\mathcal{M}_{x_3}^{x_1,x_2}$ en y ajoutant des brisures. Ces brisures se font le long des points critiques des trois foncions f_i. Le résultat suivant, obtenu en analogie avec celui de la proposition 1.1.13 dont on trouve la démonstration dans la littérature (voir [**We**]), rend la chose plus précise.

Proposition 1.1.21 (Gluing pour $\mathcal{M}_{x_3}^{x_1,x_2}$ en dimension 1). *Soit trois fonctions* f_i *comme précédemment, trois points critiques appartenant à chacune d'entre elles* *tels que* $ind(x_3) = ind(x_1) + ind(x_2) - n - 1$ *et soit* $x_1' \in crit(f_1)$ *tel que* $ind(x_1') = ind(x_1) - 1$, *alors il existe un plongement*

$$\#^{f_1} : \widehat{\mathcal{M}}_{x_1 x_1'} \times [\rho_0, \infty) \times \mathcal{M}_{x_3}^{x_1' x_2} \to \mathcal{M}_{x_3}^{x_1 x_2}$$
$$(u, \rho, q) \mapsto u\#_\rho q$$

tel que $\lim_{\rho \to \infty} u\#_\rho q = (u, q)$ *et* $\mathcal{M}_{x_3}^{x_1, x_2} \backslash u\#_{[\rho_0, \infty)} q$ *ne possède pas d'autre suite qui converge vers* (u, q). *De façon analogue, il existe des plongements*

$$\#^{f_2} : \widehat{\mathcal{M}}_{x_2 x_2'} \times [\rho_0, \infty) \times \mathcal{M}_{x_3}^{x_1, x_2'} \to \mathcal{M}_{x_3}^{x_1 x_2}$$
$$\#^{f_3} : \mathcal{M}_{x_3'}^{x_1 x_2} \times [\rho_0, \infty) \times \widehat{\mathcal{M}}_{x_3' x_3} \to \mathcal{M}_{x_3}^{x_1 x_2}$$

avec $ind(x_2') = ind(x_2) - 1$ *et* $ind(x_3') = ind(x_3) + 1$ *et ayant les mêmes propriétés.*

Voyons maintenant comment le concept d'orientation cohérente développé à la section 1.1.2 se généralise dans le contexte ci-présent. Soit un espace de module $\mathcal{M}_{x_3}^{x_1, x_2}$ de dimension 1 comme précédemment et $(u, q) \in \widehat{\mathcal{M}}_{x_1 x_1'} \times \mathcal{M}_{x_3}^{x_1', x_2}$, une brisure de cet espace. En voyant q comme un point de $W^u(x_1') \cap W^u(x_2) \cap W^s(x_3)$ et en voyant $u\#_{[\rho_0, \infty)} q$ comme étant une partie d'une courbe de $W^u(x_1) \cap W^u(x_2) \cap W^s(x_3)$ se compactifiant par l'ajout de q, considérons une paramétrisation γ de cette courbe compactifiée (c.a.d. la courbe donnée par l'union de la courbe $u\#_{[\rho_0, \infty)} q$ et du point d'intersection q en question)

$$\gamma : [0, 1] \to \{u\#_{[\rho_0, \infty)} q\} \bigcup q \; ; \quad 0 \mapsto \#(\rho_0) \text{ et } 1 \mapsto q$$

On peut considérer que $T_{\gamma([0,1])} \overline{W}^u(x_1)$ est trivial. Donc, soit une trivialisation via $ind(x_1)$ sections non nulles qui soit de la forme

$$\left((\frac{d}{d\rho}\gamma)(\rho), v_2(\rho), ..., v_{ind(x_1)}(\rho) \right)$$

où $v_2(\rho), ..., v_{ind(x_1)}(\rho) \in T_{\gamma(\rho)} \overline{W}^u(x_1)$ et $v_2(1), ..., v_{ind(x_1)}(1) \in T_q W^u(x_1')$, alors on peut définir une application

$$\sigma_Y^\# : Or(\dot{u}) \times Or(T_q W^u(x_1')) \to Or(W^u(x_1))$$

donnée par l'extension de la correspondance

$$\Big([\dot{u}], [(v_2(1), ..., v_{ind(x_1)}(1))] \Big) \mapsto [((\frac{d}{d\rho}\gamma)(\rho), v_2(\rho), ..., v_{ind(x_1)}(\rho))] \quad ; \rho \in [0, 1)$$

Donc, en analogie avec la proposition 1.1.14, on obtient le résultat suivant.

Proposition 1.1.22 (Cohérence pour le produit d'intersection). *Dans le contexte qui vient d'être expliqué, on a que*

$$\sigma^{\#} : \Big([\dot{u}], [W^u(x_1')]\Big) = [W^u(x_1)]$$

Notons par d la différentielle du produit tensoriel. Nous sommes maintenant en mesure de prouver le résultat suivant qui nous montrera que le produit d'intersection est bien défini en homologie.

Proposition 1.1.23. *La différentielle commute avec le produit d'intersection, c.a.d.*

$$\partial \circ \mu = \mu \circ d$$

DÉMONSTRATION. Puisque de par la définition de la différentielle du produit tensoriel

$$\begin{aligned}\mu \circ d(x_1 \otimes x_2) &= \mu\big(\partial(x_1) \otimes x_2 + (-1)^{n-ind(x_1)} x_1 \otimes \partial(x_2)\big) \\ &= \mu\big(\partial(x_1) \otimes x_2\big) + (-1)^{n-ind(x_1)} \mu\big(x_1 \otimes \partial(x_2)\big)\end{aligned}$$

on va donc démontrer que

$$\partial \circ \mu(x_1 \otimes x_2) = \mu\big(\partial(x_1) \otimes x_2\big) + (-1)^{n-ind(x_1)} \mu\big(x_1 \otimes \partial(x_2)\big)$$

ÉTAPE 1

Appelons brisure de type 1 les brisures associées à un élément de $\widehat{\mathcal{M}}_{x_1 x_1'} \times \mathcal{M}_{x_3}^{x_1', x_2}$, brisures de type 2 celles associées à un élément de $\widehat{\mathcal{M}}_{x_2 x_2'} \times \mathcal{M}_{x_3}^{x_1, x_2'}$ et brisure de type 3 celles associées à $\mathcal{M}_{x_3'}^{x_1 x_2} \times \widehat{\mathcal{M}}_{x_3' x_3}$. Considérons le cas où les brisures sont du premier type.

L'orientation de $T_{\gamma([0,1))} W^u(x_1)$ et l'orientation de $T\gamma([0,1))$ donnée par $[\mathcal{M}_{x_3}^{x_1 x_2}]$ induisent une orientation $[v_2(\rho), ..., v_{ind(x_1)}(\rho)]$ sur $N^{W^u(x_1)}\gamma([0,1))$ grâce à la décomposition suivante

$$T_{\gamma([0,1))} W^u(x_1) \approx T\gamma([0,1)) \oplus N^{W^u(x_1)}\gamma([0,1))$$

Sans perdre de généralité, on peut considérer que l'on peut étendre la trivialisation du fibré normal donnée par $[v_2(\rho), ..., v_{ind(x_1)}(\rho)]$ à tout $N^{\overline{W^u}(x_1)}\gamma([0,1])$. Ainsi, en identifiant $N_q^{\overline{W}^u(x_1)}\gamma([0,1])$ et $T_qW^u(x_1')$ en $\gamma(1)=q$, on peut définir $n_q \in \{-1,1\}$ par

$$[v_2(1),...,v_{ind(x_1)}(1)] = n_q[W^u(x_1')]$$

Ensuite, toujours avec $k = ind(x_1)+ind(x_2)-n$, en regard du constat fait à la remarque 1.1.18, construisons les bases

$$\mathcal{B}_2^{x_3}(\rho) := (v_1^{x_1x_2x_3}(\rho), v_{k+1}^{x_2x_3}(\rho),...,v_{ind(x_2)}^{x_2x_3}(\rho), v_{k+1}^{x_1x_3}(\rho),...,v_{ind(x_1)}^{x_1x_3}(\rho))$$
$$\mathcal{B}_1^{x_3}(\rho) := (v_1^{x_1x_2x_3}(\rho), v_2^{x_3}(\rho),...,v_{ind(x_3)}^{x_3}(\rho))$$

pour $T_{\gamma(\rho)}W_{x_3}^s$, où $[v_1^{x_1x_2x_3}(\rho)]$ donne l'orientation positive de $\mathcal{M}_{x_3}^{x_1x_2}$ pour $\rho \in [0,1)$, de façon à ce que le choix des vecteurs qui les constituent soit tel qu'elles respectent les conditions établies dans la procédure d'évaluation du signe décrite au début de cette sous-section si $\rho \in [0,1)$ et à la différence près que les vecteurs qui étaient pris dans $TW^u(x_1)$ le soient maintenant dans $T\overline{W}^u(x_1)$ lorsque $\rho = 1$ et qu'en plus

$$v_2^{x_1x_2}(1),...,v_k^{x_1x_2}(1), v_{k+1}^{x_1x_3}(1),...,v_{indx_1}^{x_1x_3}(1) \in T_qW^u(x_1')$$

Puisque $[v_1^{x_1x_2x_3}(\rho)]$ donne l'orientation positive pour $\mathcal{M}_{x_3}^{x_1x_2}$ alors par 1.1.16 on doit avoir que

$$[\mathcal{B}_2^{x_3}(\rho)] = [\mathcal{B}_1^{x_3}(\rho)] \quad ; \quad \rho \in [0,1)$$

Ensuite, considérons le fait que l'on peut étendre l'orientation de $W^u(x_1)$ au point $q \in W^u(x_1') \subseteq \overline{W}^u(x_1)$. Alors, en remplaçant $W^u(x_1)$ par $\overline{W}^u(x_1)$ dans la procédure d'évaluation du signe, les vecteurs constituant $\mathcal{B}_2(1)$ respectent les conditions demandées pour l'évaluation du signe et on obtient aussi que

$$[\mathcal{B}_2^{x_3}(1)] = [\mathcal{B}_1^{x_3}(1)]$$

Supposons $n_q = 1$, alors

$$[(v_2^{x_1x_2}(1),...,v_k^{x_1x_2}(1), v_{k+1}^{x_1x_3}(1),...,v_{ind(x_1)}^{x_1x_3}(1))] = [T_qW^u(x_1')]$$

et on peut poser

$$\begin{aligned}\mathcal{B}^{x_1'} =& (v_1^{x_1'x_2},...,v_{k-1}^{x_1'x_2}, v_k^{x_1'x_3},...,v_{ind(x_1')}^{x_1'x_3})\\ :=& (v_2^{x_1x_2}(1),...,v_k^{x_1x_2}(1), v_{k+1}^{x_1x_3}(1),...,v_{ind(x_1)}^{x_1x_3}(1))\end{aligned}$$

et évaluer le signe du produit en q avec cette base en utilisant la procédure de détermination du signe. Donc, en notant par $\tilde{\mathcal{B}}_1^{x_3}$ et $\tilde{\mathcal{B}}_2^{x_3}$ les bases que l'on doivent comparer dans la procédure pour obtenir le signe en $q \in \mathcal{M}_{x_3}^{x_1' x_2}$, puisque

$$v_1^{x_1x_2x_3}(1) \in T_q\{\overline{W}^u(x_1) \cap W^u(x_2) \cap W^s(x_3)\}$$

mais que

$$v_1^{x_1x_2x_3}(1) \notin T_q\{W^u(x_1') \cap W^u(x_2) \cap W^s(x_3)\}$$

en posant $\tilde{v}_k^{x_2x_3} := v_1^{x_1x_2x_3}(1)$, puis ensuite $\tilde{v}_1^{x_3} := v_1^{x_1x_2x_3}(1)$ et en utilisant 1.1.4, on obtient que

$$\begin{aligned}
[\tilde{\mathcal{B}}_2^{x_3}] =& [(\tilde{v}_k^{(x_2x_3)}, v_{k+1}^{x_2x_3}, \ldots, v_{ind(x_2)}^{x_2x_3}, v_k^{x_1'x_3}, \ldots, v_{ind(x_1')}^{x_1'x_3})] \\
=& [(v_1^{(x_1x_2x_3)}(1), v_{k+1}^{x_2x_3}(1), \ldots, v_{ind(x_2)}^{x_2x_3}(1), v_{k+1}^{x_1x_3}(1), \ldots, v_{ind(x_1)}^{x_1x_3}(1))] \\
=& [\mathcal{B}_2^{x_3}(1)] = [\mathcal{B}_1^{x_3}(1)] \\
=& [(v_1^{(x_1x_2x_3)}(1), v_2^{x_3}(1), \ldots, v_{ind(x_3)}^{x_3}(1))] \\
=& [(\tilde{v}_1^{x_3}, v_2^{x_3}, \ldots, v_{ind(x_3)}^{x_3})] \\
=& [\tilde{\mathcal{B}}_1^{x_3}]
\end{aligned}$$

De ceci, on obtient que $\mathfrak{n}_q = 1$ et donc que

$$\mathfrak{n}_q = n_q \tag{1.1.17}$$

De façon analogue, du fait que pour les brisures de type 2 on doive poser $\tilde{v}_k^{x_1x_3}(1) := v_1^{x_1x_2x_3}(1)$ et qu'ainsi, si l'on reprend l'exercice que l'on vient d'effectuer, on obtient à la deuxième égalité que

$$\begin{aligned}
&[(v_k^{x_2'x_3}, \ldots, v_{ind(x_2')}^{x_2'x_3}, \tilde{v}_k^{x_1x_3}, v_{k+1}^{x_1x_3}, \ldots, v_{ind(x_1)}^{x_1x_3})] \\
=&(-1)^{(ind(x_2)-k)}[(v_1^{x_1x_2x_3}(1), v_{k+1}^{x_2x_3}(1), \ldots, v_{ind(x_2)}^{x_2x_3}(1), v_{k+1}^{x_1x_3}(1), \ldots, v_{ind(x_1)}^{x_1x_3}(1))]
\end{aligned}$$

ce qui implique dans le cas des brisures de type 2 que

$$\mathfrak{n}_q = (-1)^{(ind(x_2)-k)} = (-1)^{(ind(x_2)-(ind(x_1)+ind(x_2)-n))} = (-1)^{n-ind(x_1)}n_q$$

Pour les brisures de type 3, on obtient encore $\mathfrak{n}_q = n_q$.

ÉTAPE 2

Avant de commencer, rappelons que lorsque l'on a traité le cas de la différentielle, on a définit n_u par

$$[\dot{u}] = n_u[u]_{ind}$$

où, comme précédemment, $[\dot{u}]$ est l'orientation donnée par le flot.

Débutons par remarquer que l'espace auquel on s'intéresse est de dimension 1, il est composé de courbes fermées et de segments de courbes. Supposons donc pour simplifier que l'on se restreint à un unique segment de courbe et que celui-ci a pour extrémités deux brisures de type 1 ; $(u,q),(\tilde{u},\tilde{q}) \in \widehat{\mathcal{M}}_{x_1x_1'} \times \mathcal{M}_{x_3}^{x_1',x_2}$. Soit $v_1(\rho)$ un champ de vecteurs qui donne l'orientation positive pour $\mathcal{M}_{x_3}^{x_1x_2}$ et supposons que v_1 pointe dans le même sens que $\frac{d}{d\rho}(u\#_\rho q)$ à l'extrémité (u,q). Alors, soit $[v_1(\rho),v_2(\rho),..,v_{ind(x_1)}(\rho)]$ une orientation positive de $T_{\gamma(\rho)}W^u(x_1)$ on obtient d'une part que

$$\begin{aligned}
[v_1(0),v_2(0),..,v_{ind(x_1)}(0)] &= [\frac{d}{d\rho}\gamma(0),v_2(0),..,v_{ind(x_1)}(0)]\\
&= \sigma^{\#}([\dot{u}],[v_2(1),..,v_{ind(x_1)}(1)])\\
&= n_u n_q \sigma^{\#}([u]_{ind},[W^u(x_1)])\\
&= n_u \mathfrak{n}_q \sigma^{\#}([u]_{ind},[W^u(x_1)])
\end{aligned}$$

Mais puisque

$$\sigma^{\#}([u]_{ind},[W^u(x_1)]) = [W^u(x_1)] = [v_1(\rho),v_2(\rho),..,v_{ind(x_1)}(\rho)] \; ; \; \rho \in [0,1)$$

on a que

$$[\mathcal{M}_{x_3}^{x_1x_2}] = [\frac{d}{d\rho}u\#_\rho q] \Rightarrow n_u\mathfrak{n}_q = 1 \tag{1.1.18}$$

Par une démarche analogue, on trouve pour l'autre extrémité, $(\tilde{u},\tilde{q})$, où v_1 et $\frac{d}{d\rho}\tilde{u}\#_\rho\tilde{q}$ pointent en sens contraire, que $n_{\tilde{u}}\mathfrak{n}_{\tilde{q}} = -1$. On obtient ainsi que

$$n_u\mathfrak{n}_q = -n_{\tilde{u}}\mathfrak{n}_{\tilde{q}}$$

de façon à ce que la contribution des extrémités des segments de courbes à la somme des signes associés aux brisures soit nulle. Par des arguments tout à fait analogues appliqués aux autres types de brisures, on obtient des résultats similaires pour les différentes combinaisons possibles, à la différence près que dans le cas des extrémités où les brisures sont de type 2 on doit multiplier par un facteur $(-1)^{n-ind(x_1)}$. Ainsi, en remarquant que le terme $\mu\big(\partial(x_1)\otimes x_2\big)$ est associé aux brisures de type 1, $\mu\big(x_1\otimes\partial(x_2)\big)$ aux brisures de type 2 et $\partial\circ\mu(x_1\otimes x_2)$ aux brisures de type 3, on déduit que

$$0=-\partial\circ\mu(x_1\otimes x_2)+\mu\big(\partial(x_1)\otimes x_2\big)+(-1)^{n-ind(x_1)}\mu\big(x_1\otimes\partial(x_2)\big)$$

$$\Rightarrow \partial\circ\mu(x_1\otimes x_2)=\mu\big(\partial(x_1)\otimes x_2\big)+(-1)^{n-ind(x_1)}\mu\big(x_1\otimes\partial(x_2)\big)$$

□

On obtient donc le corollaire suivant.

Corollaire 1.1.24. *Le produit d'intersection μ induit en homologie un produit du même nom*

$$\mu_*: H_p(M,f_1)\otimes H_q(M,f_2)\to H_{p+q-n}(M,f_3)$$

Le résultat suivant est démontré dans [**Ch**]

Proposition 1.1.25. *Le produit d'intersection en homologie est indépendant des fonctions utilisées.*

1.2. Fonction de Morse et topologie algébrique

Dans cette section, nous allons traiter de différents résultats pour l'homologie de Morse de façon à pouvoir réutiliser toute cette machinerie pour construire le diagramme de Poincaré-Lefschetz en homologie de Morse au chapitre suivant.

1.2.1. Homologie de Morse et foncteurs homotopique et difféomorphique

Dans la section précédente, on s'est restreint au cas des variétés fermées pour définir le complexe de Morse associé à une fonction de Morse. Toutefois, cette notion peut se généraliser à des variétés avec bord et à des variétés non compactes. Le problème vis-à-vis de la définition du complexe vient en bonne partie du fait que dans ces cas le groupe de difféomorphismes à un paramètre $\varphi_t: M\to M$ n'est pas nécessairement défini pour $t\neq 0$. Dans le cas des variétés avec bord qui sera traité à la section suivante, on peut régler le problème en utilisant des fonctions Morse-Smale qui soient telles que la composante du vecteur gradient qui est normale au bord soit nulle partout sur celui-ci. Pour ce qui est des variétés non compactes, s'il existe une inclusion $i : M \hookrightarrow N$ de M dans une variété compacte N qui soit telle que l'on puisse étendre toute fonction de Morse $f : M \to \mathbb{R}$ à une fonction de Morse $F : N \to \mathbb{R}$ (voir **[Sc]** section 4.2.1), comme ce sera toujours le cas dans ce mémoire, et que l'on peut faire de même pour la métrique, alors on peut définir les variétés stables et instables liées à la fonction f par

$$W^u_{(f,g)} = W^u_{(F,\bar{g})} \bigcap M$$
$$W^s_{(f,g)} = W^s_{(F,\bar{g})} \bigcap M$$

Cela nous permet ainsi de définir la différentielle et nous pouvons donc définir le complexe de Morse dans le cas non compact en stricte analogie avec le cas compact. Certains des résultats présentés à la section 1.1 nécessitent l'ajout de conditions particulières sur le flot pour se généraliser au cas d'une variété qui n'est pas fermée. Ces dernières seront énoncées explicitement lorsque nécessaire.

Nous pouvons donc définir l'homologie $H_k(C_k(M, f, \partial f))$ associée à une fonction de Morse f dans le cas général. Il nous faut maintenant en arriver à une homologie qui soit indépendante de la fonction utilisée. Pour cela, le foncteur homotopique joue un rôle clef. On construit ce dernier de la façon suivante :

Soit $f, g : M \to \mathbb{R}$, deux fonctions Morse-Smale. Considérons l'espace $M \times [0,1]$ muni de la métrique produit. Remarquons qu'il existe une homotopie Morse-Smale

$$h : M \times [0,1] \to \mathbb{R}$$

avec $h(\cdot, 0) = f + k$ et $h(\cdot, 1) = g$, où $k \in \mathbb{R}$ est une constante, qui soit telle que

$$crit(h) = crit(h|_{M\times 0}) \cup crit(h|_{M\times 1})$$

et que partout sur $M \times (0,1)$ on ait

$$\frac{\partial h}{\partial t} < 0$$

(Pour une preuve de cela, se référer par exemple à **[Ro]** p.21.)

Définition 1.2.1. *On appelera homotopie régulière une homotopie qui respecte les conditions qui viennent d'être énoncées.*

Pour la suite des choses, toutes les homotopies utilisées dans ce mémoire seront régulières et on les appelera le plus souvent simplement homotopie pour alléger le texte.

Alors, soit h une homotopie telle que précédemment, en identifiant les complexes $C_*(M\times 0, h|_{M\times 0})$ et $C_*(M,f)$ et les complexes $C_*(M\times 1, h|_{M\times 1})$ et $C_*(M,g)$ on a donc que

$$C_*(M\times[0,1],h)\approx C_{*-1}(M,f)\oplus C_*(M,g)$$

de façon à ce que l'on puisse écrire la différentielle sous la forme

$$\partial_h = \begin{pmatrix} \partial_f & 0 \\ \Phi^h & \partial_g \end{pmatrix} \tag{1.2.1}$$

où

$$\Phi^h : C_*(M,f)\approx C_{*+1}(M\times[0,\epsilon),h|_{M\times[0,\epsilon)})\longrightarrow C_*(M\times(\epsilon,1],h|_{M\times(1-\epsilon,1]})\approx C_*(M,g)$$

est donné par

$$\Phi^h(x)=\sum_{y\in crit_k(h|_{M\times(1-\epsilon,1]})} n(x,y)y \quad ; \quad x\in crit_{k+1}(h|_{M\times[0,\epsilon)})$$

Nous obtenons facilement grâce à la relation suivante que Φ^h commute avec les différentielles

$$\partial_h^2 = \begin{pmatrix} \partial_f^2 & 0 \\ \Phi^h\circ\partial_f+\partial_g\circ\Phi^h & \partial_g^2 \end{pmatrix} \tag{1.2.2}$$

$\Rightarrow \Phi^h\circ\partial_f = -\partial_g\circ\Phi^h$.

La démonstration des deux résultats suivants est présentée dans plusieurs ouvrages dont **[Sc]**.

Proposition 1.2.2. *L'application induite par Φ^h en homologie*

$$\Phi^h{}_* : H_*(M,f)\longrightarrow H_*(M,g)$$

est un isomorphisme de groupes.

Proposition 1.2.3. *Soit des fonctions Morse-Smale f, g, $\ell : M \to \mathbb{R}$ et des homotopies Morse-Smale h de f vers g, h' de g vers ℓ et h'' de f vers ℓ alors on a que*

$$\Phi_*^{h'} \circ \Phi_*^{h} = \Phi_*^{h''} : H_*(M, f) \to H_*(M, \ell)$$

De plus, si γ est une homotopie Morse-Smale allant de f vers f, alors on a

$$\Phi_*^{\gamma} = id_{H*(M,f)}$$

Corollaire 1.2.4. *L'isomorphisme ${\Phi^h}_* : H_*(M, f) \to H_*(M, g)$ est indépendant de l'homotopie h choisie.*

Bref, on vient d'obtenir la fonctorialité de Φ_*^h. Ainsi, soit deux fonctions Morse-Smale $f, g : M \to \mathbb{R}$, une homotopie régulière $h : M \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ entre les deux et soit $[a]_f \in H(M, f)$ et $[b]_g \in H(M, g)$, on peut définir une relation d'équivalence entre les classes d'homologie par

$$[a]_f \sim [b]_g \Leftrightarrow \Phi_*^h([a]_f) = [b]_g$$

pour ensuite définir l'homologie de M comme étant le groupe ayant pour élément ces classes d'équivalences et obtenir ainsi une homologie, notée $H(M)$, indépendante de la fonction.

Nous allons maintenant résumer brièvement quelques propriétés des difféomorphismes vis-à-vis de l'homologie. Les preuves et les détails de tout ce qui suit dans cette sous-section se trouvent dans le livre de Schwarz **[Sc]**.

Considérons d'abord un difféomorphisme $\psi : M \to N$ entre deux variétés. Donc, si f est une fonction Morse-Smale sur M, $f \circ \psi^{-1}$ est une fonction M-S sur N et ψ fait correspondre les points critiques de ces deux fonctions induisant ainsi une application de $< crit(f) > \mathbb{K}$ vers $< crit(f \circ \psi^{-1}) > \mathbb{K}$. De plus, si on choisit sur N la métrique $\tilde{g} := (\delta\psi^{-1})g$, induite par ψ^{-1} et la métrique g sur M, alors on a que $d\psi(\nabla^g f(x)) = \nabla^{\tilde{g}}(f \circ \psi^{-1})(\psi(x))$. Ainsi, puisque $d\psi(\frac{d}{dt}\varphi_t(x)) = \frac{d}{dt}(\psi \circ \varphi_t(x))$, on obtient que si $\varphi_t(x)$ est une courbe solution de 1.1.3 sur M, alors $\psi \circ \varphi_t(x)$ est également une courbe solution de l'équation du flot sur N. Donc, l'application induite par ψ entre les complexes commute avec la différentielle. Nous avons donc obtenu un isomorphisme de complexes chaînes

$$\psi_\bullet : C_*(M,f) \to C_*(N, f\circ\psi^{-1})$$

De celui-ci on obtient donc un isomorphisme

$$\psi_* : H_*(M,f) \to H_*(N, f\circ\psi^{-1})$$

induit en homologie par $\psi_\bullet$. Cette application possède les propriétés suivantes ([**Sc**]).

Proposition 1.2.5. *Soit $\psi_0 \in C^\infty(M,N)$, $\psi_1 \in C^\infty(M,N)$ et $\psi_2 \in C^\infty(N,L)$, on a évidemment que $\psi_{2*}\circ\psi_{1*} = (\psi_2\circ\psi_1)_*$. Si les difféomorphismes ψ_0 et ψ_1 sont homotopes, alors $\psi_{0*} = \psi_{1*}$.*

Supposons maintenant une seconde fonction M-S $g : M \to \mathbb{R}$ et une homotopie régulière $h : M\times[0,1] \to \mathbb{R}$ entre f et g. On a donc que

$$h\circ(\psi\times id)^{-1} : N\times[0,1] \to \mathbb{R}$$

est une homotopie entre $f\circ\psi^{-1}$ et $g\circ\psi^{-1}$. De plus, il est évident que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} C_*(M,f) & \xrightarrow{\psi_\bullet} & C_*(N, f\circ\psi^{-1}) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \Phi^h} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \Phi^{h\circ(\psi\times id)^{-1}}} \\ C_*(M,g) & \xrightarrow{\psi_\bullet} & C_*(N, g\circ\psi^{-1}) \end{array} \tag{1.2.3}$$

On obtient donc que l'application ψ_* est bien définie en homologie sans égard à la fonction et nous donne un foncteur de la paire des variétés et des classes d'homotopies de difféomorphismes vers la paire des groupes abéliens et des isomorphismes.

Enfin, de façon plus générale, si $\psi : M \to N$ est un plongement, alors on obtient de façon analogue une fonction $\psi_f \equiv f\circ\psi^{-1}$ sur l'image du plongement. Sous certaines restrictions, notamment si $\psi(M)$ est fermée, cette dernière peut être étendue à une fonction Morse-Smale $\overline{\psi_f}$ sur toute la variété qui soit telle qu'aucune ligne de flot ne quitte $\psi(M)$ ([**Sc**] corollaire 4.17) et on obtient ainsi une application $\psi_\bullet : C_*(M,f) \to C_*(N,\overline{\psi_f})$ qui passe en homologie. On peut pour ce morphisme démontrer les mêmes résultats de fonctorialité qui viennent d'être énoncés dans le cas des applications induites par des difféomorphismes et obtenir ainsi un foncteur aux propriétés équivalentes qui va de la paire des variétés et des classes d'homotopies de plongements vers la paire des groupes abéliens et des homomorphismes.

1.2.2. Liens avec l'homologie singulière

L'homologie de Morse telle que définie dans la section précédente est isomorphe à l'homologie singulière dès que la variété M considérée est fermée. Ceci peut s'obtenir de différentes façons. L'une de ces approches est d'associer à une fonction de Morse-Smale un CW-complexe en associant une cellule à chaque point critique puis de montrer que la différentielle du complexe de Morse et la différentielle du CW-complexe correspondent.

Dans le cas d'une variété avec bord, on peut aussi obtenir un isomorphisme entre l'homologie $H_*(M, f)$ associée à une fonction Morse-Smale et l'homologie singulière. Considérons la définition suivante.

Définition 1.2.6. *Une fonction Morse-Smale sur une variété M à bord ∂M est une fonction $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ dont les variétés stables et instables s'intersectent transversalement et qui est telle que sur la frontière on ait :*

$$\nabla f(x) \in T_x \partial M \quad \forall x \in \partial M$$

Le résultat suivant lie l'homologie de Morse et l'homologie singulière dans le cas d'une variété à bord (voir [**CoRa**]).

Proposition 1.2.7. *Soit une variété compacte M avec bord ∂M et une fonction Morse-Smale $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, en notant $f_0 := f|_{\partial M}$, si l'inclusion évidente*

$$crit(f_0) \hookrightarrow crit(f)$$

ne change pas l'indice des points critiques (c.a.d. $ind_{f_0}(x) = ind_f(x)\ \forall x \in crit(f_0)$) alors

$$H_*(M, f) \approx H_*(M)_{sing}$$

Si l'inclusion $crit(f_0) \hookrightarrow crit(f)$ *augmente l'indice des points critiques (c.a.d.* $ind_{f_0}(x) + 1 = ind_f(x) \ \ \forall x \in crit(f_0)$*) alors*

$$H_*(M, f) \approx H_*(M, \partial M)_{sing}$$

1.2.3. Homologie relative

Pour débuter, considérons la définition suivante.

Définition 1.2.8. *Supposons une paire de variétés* (A, M) *;* $A \subseteq M$*, avec* M *compacte, et supposons une fonction de Morse* $f : M \to \mathbb{R}$*, alors le flot est dit entrant dans* A *si aucune trajectoire ne quitte* A*. De façon analogue, on dit que le flot est sortant de* A *si aucune trajectoire ne quitte* $M \backslash A$ *pour entrer dans* A*.*

Supposons une fonction Morse-Smale $f : (A, M) \to \mathbb{R}$ dont le flot soit entrant dans A tel que décrit dans la dernière définition. Puisqu'aucune ligne de flot ne sort de A, alors $C_*(A, f|_A)$ est bel et bien un sous-complexe de $C_*(M, f)$ et alors

$$\frac{C_*(M, f, \partial_f)}{C_*(A, f|_A, \partial_{f|_A})} := \Big(\bigoplus_k \frac{< crit_k f > \mathbb{K}}{< crit_k f|_A > \mathbb{K}}, \overline{\partial}_f\Big) \tag{1.2.4}$$

où $\overline{\partial}_{f_k}[a] := [\partial_{f_k}(a)]$, est bien défini. Pour la suite des choses, on notera le plus souvent : $C_*(M, A, f, \overline{\partial_f}) \equiv \frac{C_*(M,f,\partial_f)}{C_*(A,f|_A,\partial_{f|_A})}$. On a donc la courte suite exacte

$$0 \to C_*(A, f|_A) \xrightarrow{i_*} C_*(M, f) \xrightarrow{q} C_*(M, A, f, \overline{\partial}_f) \to 0$$

dont on obtient la longue suite exacte suivante en homologie

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{f_*}} H_k(A, f|_A) \xrightarrow{i_*} H_k(M, f) \xrightarrow{q_*} H_k(M, A, f) \xrightarrow{\partial_{f_*}} H_{k-1}(A, f) \xrightarrow{i_*} \cdots$$

où ∂_{f_*} est l'application du lemme du serpent. Nous voudrions maintenant vérifier que l'on puisse définir $H_k(M, A)$ indépendamment de la fonction. Pour ce faire, supposons une seconde fonction g remplissant les mêmes conditions que f, alors on peut garantir l'existence d'une homotopie h entre f et g qui soit telle que pour toute valeur fixe de t le flot associé à la fonction $h(\cdot, t) \to \mathbb{R}$ soit entrant dans A (**[Sc]** lemme 4.34). Donc, puisque $\Phi^h : C_*(M, f) \to C_*(M, g)$ est donné via ∂_h associé au flot, alors on a que

$$\Phi^h(a) \in < crit(g)|_A > \mathbb{K} \quad \forall\, a \in < crit(f)|_A > \mathbb{K}$$

ce qui implique que Φ^h induit de façon canonique une application

$$\overline{\Phi}^h : C_*(M, A, f, \overline{\partial_f}) \to C_*(M, A, g, \overline{\partial_g})$$

entre les quotients. Ensuite, du diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
\cdots H_k(A, f|_A) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "\Phi_*^{h|_A}"] & H_k(M, f) \arrow[r, "q_*"] \arrow[d, "\Phi_*^h"] & H_k(M, A, f) \arrow[r, "\partial_{f*}"] \arrow[d, "\overline{\Phi}_*^h"] & H_{k-1}(A, f|_A) \cdots \arrow[d, "\Phi_*^{h|_A}"] \\
\cdots H_k(A, g|_A) \arrow[r, "i_*"] & H_k(M, g) \arrow[r, "q_*"] & H_k(M, A, g) \arrow[r, "\partial_{g*}"] & H_{k-1}(A, g|_A) \cdots
\end{tikzcd}$$

nous pouvons obtenir que $\overline{\Phi}_*^h$ est un isomorphisme en appliquant le five lemma. Du fait que Φ_*^h est indépendant de l'homotopie utilisée, on peut obtenir algébriquement que $\overline{\Phi}_*^h$ est aussi indépendant du choix de h. Ainsi, on peut procéder à l'identification et obtenir une homologie relative $H_*(M, A)$ indépendante de la fonction. Toutefois, il y a aussi une autre façon d'obtenir ce résultat. On aurait pu tout aussi bien identifier $C_*(M, A, f, \overline{\partial_f})$ avec le complexe $C_*(M\backslash A, f|_{M\backslash A})$ (ce qui sera fait explicitement à la section 2.1.2 à travers le morphisme 2.1.3) pour ensuite utiliser des homotopies d'homotopies entre les homotopies de la forme $\Phi^{h|_{M\backslash A}} : M\backslash A \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ et donc conclure aux propriétés de fonctorialités de ces dernières menant ainsi au résultat par une méthode analogue à celle utilisée dans le cas non relatif.

1.2.4. Dualité de Poincaré et produit cup

On peut définir le complexe de cochaînes associé à une fonction Morse-Smale par

$$C^*(M, f, \delta_f) = \Big(\bigoplus_k Hom(< crit_k f >, \mathbb{K}), \delta_f\Big) \tag{1.2.5}$$

$$\text{où } \delta_{f_k}\xi(a) \equiv \xi(\partial_{f_{k+1}}(a)) \tag{1.2.6}$$

On va maintenant s'intéresser à l'une des principales relations existant entre les groupes d'homologie et de cohomologie, à savoir, la dualité de Poincaré. Grossièrement, dans le cas d'une variété fermée M de dimension n, cette dernière consiste en une application $P : H_n(M) \to H^{n-k}(M)$, ou inversement, permettant d'établir un isomorphisme entre ces deux groupes. Pour l'obtenir, on commence par définir un isomorphisme de complexe de chaînes $\lambda : C_*(M,f) \to C^{n-*}(M,-f)$ de la façon suivante

Considérons un point critique p d'indice k de la fonction f, remarquons que f et $-f$ ont les mêmes points critiques et donc que p est un point critique d'indice $n-k$ de la fonction $-f$. Nous pouvons donc définir l'application

$$\lambda : crit_k(f) \to Hom(crit_{n-k}(-f), \mathbb{K})$$

par la correspondance

$$\lambda(p) := \xi_p$$

où $\xi_p \in Hom(crit_{n-k}(-f), \mathbb{K})$ est donné par $\xi_p(p) = 1$ et $\xi_p(x) = 0; x \neq p$. Puisque les fonctions de type ξ_x engendrent $C^*(M,-f)$ comme groupe abélien libre et que c'était aussi le cas pour $C_*(M,f)$ avec les points critiques et puisque λ est une bijection entre les générateurs de chacun de ces groupes, alors λ peut donc être étendu isomorphiquement sur tout $C_*(M,f)$. Il nous faut maintenant vérifier que λ est un morphisme de chaînes en montrant qu'il commute avec la différentielle.

Pour en arriver à cela, on aura besoin d'un résultat liant $n_f(x,y)$ et $n_{-f}(y,x)$ où x et y sont des points critiques de f d'indices k et $k-1$ respectivement.

Proposition 1.2.9. *Soit M, une variété orientée, alors on peut orienter les variétés instables liées à f et $-f$ de façon à ce que $n_f(x,y) = (-1)^k n_{-f}(y,x)$.*

DÉMONSTRATION. Pour alléger la notation, ici on notera $W_x^u \equiv W^u(x)$.
Choisissons des orientations pour les variétés instables de f. On obtient par le fait même une orientation induite $[\mathcal{M}_{xy}]_{ind}$ sur $\mathcal{M}_{xy}$. Soit $x \in crit_k(f)$ et $y \in crit_{k-1}(f)$ et soit $p \in \mathcal{M}_{xy}$, alors choisissons des bases donnant l'orientation positive $\mathcal{B}(T_p\mathcal{M}_{xy})$, $\mathcal{B}(T_pM)$, $\mathcal{B}(T_pW_x^u)$ et $\mathcal{B}(N_p^M W_y^s)$ pour $T_p\mathcal{M}_{xy}$, T_pM, $T_pW_x^u$ et $N_p^M W_y^s$. Soit $z \in crit(f)$, puisque

$$T_zM = T_zW_z^u \oplus T_zW_z^s \tag{1.2.7}$$

on peut se servir de l'orientation des variétés instables et de l'orientation globale sur M pour orienter les variétés stables.

Ensuite, l'orientation de $T_pW_x^s$ induit une orientation sur $N_p^MW_x^u$. Choisissons une base $\mathcal{B}(N_p^MW_x^u)$ donnant l'orientation positive pour ce dernier. On établit une convention pour obtenir une orientation $[T_p\mathcal{M}_{xy}]_{ind_2}$ sur $T_p\mathcal{M}_{xy}$ à l'aide de l'orientation des variétés stables grâce à la relation

$$T_pW_y^s = T_p\mathcal{M}_{xy} \oplus N_p^MW_x^u \tag{1.2.8}$$

de façon complètement analogue à celle utilisant l'orientation des variétés instables explicitée à la section 1.1.2. En se servant justement de la convention pour l'orientation expliquée à la section 1.1.2, utilisant les variétés instables, notons d'abord que l'on doive avoir que

$$[T_pW_x^u] = [(\mathcal{B}(T_p\mathcal{M}_{xy}), \mathcal{B}(N_p^MW_y^s))] \tag{1.2.9}$$

Choisissons maintenant des vecteurs $\{v_{ind(x)+1}, ..., v_n\}$; $v_i \in T_pW_y^s\ \forall i$, tels que

$$[T_pM] = [(\mathcal{B}(T_p\mathcal{M}_{xy}), \mathcal{B}(N_p^MW_y^s), v_{ind(x)+1}, ..., v_n)] \tag{1.2.10}$$

On a donc

$$[T_pM] = [(\mathcal{B}(T_p\mathcal{M}_{xy}), \mathcal{B}(N_p^MW_y^s), v_{ind(x)+1}, ..., v_n)] \tag{1.2.11}$$

$$= (-1)^{k-1}[\mathcal{B}(N_p^MW_y^s), \mathcal{B}(T_p\mathcal{M}_{xy}), v_{ind(x)+1}, ..., v_n)] \tag{1.2.12}$$

Ainsi, puisque $[N^MW_y^s]$ est induite à l'aide de $[T_yW_y^u]$, on déduit de la relation 1.2.7 que

$$[T_pW_y^s] = (-1)^{k-1}[(\mathcal{B}(T_p\mathcal{M}_{xy}), v_{ind(x)+1}, ..., v_n)] \tag{1.2.13}$$

Mais, de 1.2.9, 1.2.10 et de la relation 1.2.7 conjuguées au fait que $[N^MW_x^u]$ est induite à l'aide de $[T_xW_x^s]$, on obtient que

$$[N_p^MW_x^u] = [(v_{ind(x)+1}, ..., v_n)] \tag{1.2.14}$$

Ainsi, en regard de ces deux dernières équations (1.2.13 et 1.2.14), on obtient

$$[T_pW_y^s] = (-1)^{k-1}[(\mathcal{B}(T_p\mathcal{M}_{xy}), \mathcal{B}(N_p^MW_x^u)] \tag{1.2.15}$$

et, en utilisant la convention 1.2.8 pour orienter $T_p\mathcal{M}_{xy}$ à l'aide des variétés stables, on obtient donc une orientation $[T_p\mathcal{M}_{xy}]_{ind_2}$ donnée par

$$[T_p\mathcal{M}_{xy}]_{ind_2} = (-1)^{k-1}[\mathcal{B}(T_p\mathcal{M}_{xy})] = (-1)^{k-1}[T_p\mathcal{M}_{xy}]_{ind}$$

Les variétés stables de f correspondant aux variétés instables de $-f$, on peut utiliser la convention 1.2.7 pour orienter les variétés instables de $-f$ et obtenir finalement que

$$n_f(x,y) = (-1)(-1)^{k-1}n_{-f}(y,x) = (-1)^k n_{-f}(y,x) \tag{1.2.16}$$

où la multiplication par -1 dans $(-1)(-1)^{k-1}n_{-f}(y,x)$ vient du fait que le flot de $-f$ est en sens contraire de celui de f ce qui change le signe associé à la ligne de flot. $\square$

On peut maintenant démontrer le résultat souhaité.

Proposition 1.2.10. *Si M est orientable et $x \in crit_k(f)$, avec le choix d'orientation pour les variétés instables de $-f$ fait comme précédemment, on a que*

$$\lambda \circ \partial_f(x) = (-1)^k \delta_{-f} \circ \lambda(x)$$

DÉMONSTRATION. Soit $p \in crit_{n-k+1}(-f)$ et $q \in crit_{n-k}(-f)$, on a que

$$\begin{aligned}(\delta_{-f}\xi_q)(p) &= \xi_q(\partial_{-f}p) \\ &= \xi_q\Big(\sum_{x \in crit_{n-k}(-f)} n_{-f}(p,x)x\Big) \\ &= n_{-f}(p,q)\end{aligned}$$

D'où

$$\delta_{-f}\xi_q = \sum_{y \in crit_{n-k+1}(-f)} n_{-f}(y,q)\xi_y$$

Et donc, en utilisant 1.2.16, on obtient

$$\begin{aligned}
(-1)^k\delta_{-f}(\lambda(q)) &= (-1)^k\delta_{-f}\xi_q \\
&= \sum_{y\in crit_{n-k+1}(-f)} (-1)^k n_{-f}(y,q)\xi_y \\
&= \sum_{y\in crit_{k-1}(f)} n_f(q,y)\xi_y \\
&= \sum_{y\in crit_{k-1}(f)} \lambda(n_f(q,y)y) \\
&= \lambda\Big(\sum_{y\in crit_{k-1}(f)} n_f(q,y)y\Big) \\
&= \lambda(\partial_f q)
\end{aligned}$$

□

Il nous faut maintenant vérifier que λ_* est bien défini en homologie sans égard à la fonction. Soit h une homotopie entre deux fonctions M-S f et g, alors le résultat découle de la commutativité du diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc}
C_k(M,f) & \xrightarrow{\Phi^h} & C_k(M,g) \\
\downarrow \lambda_f & (-1)^{k+1} & \downarrow \lambda_g \\
C^{n-k}(M,-f) & \xrightarrow{\Phi^{-h^*}} & C^{n-k}(M,-g)
\end{array} \tag{1.2.17}$$

qui, elle, est évidente en considérant que Φ^h est donné via ∂_h, que Φ^{-h^*} l'est via δ_{-h} et que l'on peut donc appliquer la proposition précédente aux fonctions $h, -h : M \times [0,1] \to \mathbb{R}$ de façon à obtenir $\lambda_h \circ \partial_h = (-1)^k\delta_{-h} \circ \lambda_h$. Le fait que le signe soit $(-1)^{k+1}$ au lieu de $(-1)^k$ dans le diagramme s'explique par le fait que l'inclusion évidente $i : crit_k(f) \hookrightarrow crit_{k+1}(h)$ augmente l'indice des points critiques de 1.

On est donc maintenant en mesure de définir la dualité de Poincaré comme suit.

Définition 1.2.11. *Soit H, une homotopie de f vers $-f$, on définit la dualité de Poincaré $P_f : H_k(M,f) \to H^{n-k}(M,f)$ de la façon suivante*

$$P_f \equiv \lambda_{f*} \circ \Phi_*^H \tag{1.2.18}$$

La dualité de Poincaré nous permet de donner une définition du produit cup.

Définition 1.2.12. *Le produit cup* $\cup : H^p(M) \otimes H^q(M) \to H^{p+q}(M)$ *est donné par*

$$[x] \cup [y] = P\Big(\mu_*(P^{-1}([x]), P^{-1}([y]))\Big)$$

Schwarz donne dans [**Sc**] (section 5.3) la définition alternative mais équivalente[1] suivante pour le produit cup :

$$H^p(M,f) \otimes H^q(M,f) \xrightarrow{\tau} H^{p+q}(M \times M, f \oplus f) \xrightarrow{\Delta^*} H^{p+q}(M,f)$$

où Δ^* est induit par $\Delta : M \to M \times M$ et où τ est donné grâce à l'application du théorème de Künneth (voir [**Br**]) suivi du morphisme

$$\gamma^{-1^*} : H^{p+q}(C_*(M,f) \otimes C_*(M,f)) \to H^{p+q}(M \times M, f \oplus f)$$

où γ^{-1^*} s'obtient du morphisme canonique de complexe

$$\gamma : C_*(M,f) \otimes C_*(M,f) \to C_*(M \times M, f \oplus f)$$

induit par l'identification

$$crit_k(f \oplus f) = \bigcup_{i+j=k} crit_i(f) \times crit_j(f)$$

De la naturalité des morphismes Δ^* et γ^{-1^*} on obtient que si l'on a une inclusion $i : A \hookrightarrow M$ et une fonction M-S $f : M \to \mathbb{R}$ qui soit telle que le flot soit entrant dans A alors

$$i^*([x]) \cup i^*([y]) = i^*([x] \cup [y]) \tag{1.2.19}$$

1.3. Recollement et variétés à bord

L'objectif de cette section consiste à expliquer une procédure pour obtenir une fonction Morse-Smale sur une variété à bord à partir d'une fonction M-S choisie génériquement sur le bord. La sous-section 1.3.1 présente une méthode élémentaire de recollement de fonctions de Morse dont on se sert pour obtenir le résultat final présenté à la sous-section 1.3.3. Dans la sous-section 1.3.2, on développera le matériel théorique servant à garantir que l'on peut obtenir génériquement de ce

[1] L'objectif dans [**Sc**] est de construire un produit cup qui soit isomorphe au produit d'intersection singulier à travers la dualité de Poincaré.

recollement des fonctions remplissant la condition Morse-Smale. Finalement, la sous-section 1.3.4 consiste en une application du recollement aux homotopies.

1.3.1. Une méthode de recollement

Considérons une variété riemannienne fermée B de dimension $n-1$ et deux variétés connexes, N_1 et N_2, de dimension n, possédant chacune une région A_i difféomorphe à $B \times (0,1)$ via un difféomorphisme $\varphi_i : A_i \to B \times (0,1)$ avec pour métrique sur cette région la métrique induite par la métrique produit. On demande aussi que l'on ait que $N_i \backslash A_i$ soit compact et que $N_i \backslash \{\varphi_i^{-1}(B \times (0,\epsilon))\}$ soit connexe avec $\epsilon < 1$ (cette dernière condition obligeant A_i à être un "*bout d'extrémité* $B \times 0$"). Supposons que sur N_1 et N_2 l'on ait respectivement les fonctions réelles f_1 et f_2 respectant les conditions suivantes sur les régions A_1 et A_2 :

$$\frac{\partial f_1 \circ \varphi_1^{-1}}{\partial t} > 0 \tag{1.3.1}$$

$$\frac{\partial f_2 \circ \varphi_2^{-1}}{\partial t} < 0 \tag{1.3.2}$$

Alors, soit $\gamma : A_2 \to A_1$, donné via les φ_i par $\gamma = \varphi_1^{-1} \circ \gamma' \circ \varphi_2$ où $\gamma'(x,t) = (x, 1-t)$. Nous voulons obtenir sur l'espace $M \equiv N_1 \bigcup_\gamma N_2$ une fonction $f : M \to \mathbb{R}$ qui ne possède pas de point critique sur la zone de recollement et qui soit telle que $f|_{M-N_1} = f_2 + k$ et $f|_{M-N_2} = f_1$, avec $k \in \mathbb{R}$. Pour ce faire, il suffit d'utiliser une partition de l'unité $\{\rho'_u, \rho'_v\}$ subordonnée à $\{U, V\}$, où $U = [0, \frac{2}{3})$ et $V = (\frac{1}{3}, 1]$ puis d'étendre ensuite cette partition de la façon évidente à une partition sur $\partial M \times [0,1]$ en posant $\rho''_u := \rho'_u \oplus id$ et $\rho''_v := \rho'_v \oplus id$ et enfin de définir ρ_v par $\rho_v|_{M \backslash N_1} := 0$, $\rho_v|_{M \backslash N_2} := 1$, $\rho_v|_{N_1 \bigcap N_2} := \rho''_v \circ \varphi_1$, puis de façon analogue ρ_u par $\rho_u|_{M \backslash N_2} := 0$, $\rho_u|_{M \backslash N_1} := 1$ et $\rho_u|_{N_1 \bigcap N_2} := \rho''_u \circ \varphi_1$ pour ensuite définir f de la façon suivante :

Étendons préalablement $f_1 : N_1 \to \mathbb{R}$ et $f_2 : N_2 \to \mathbb{R}$ de façon arbitraire à des fonctions $\tilde{f}_1 : M \to \mathbb{R}$ et $\tilde{f}_2 : M \to \mathbb{R}$ sur tout M. Nous définissons f par

$$f := \rho_v \tilde{f}_1 + \rho_u(\tilde{f}_2 + k)$$

$$\text{avec } k = -Max\{\underset{A_1}{Sup}\{(f_2 \circ \gamma^{-1} - f_1\}, 0\}$$

De cette façon, on obtient sur la zone de recollement que $f_2 \circ \gamma^{-1} + k < f_1$ et donc, de façon équivalente, que $\tilde{f}_2(x) < \tilde{f}_1(x)$ pour tout x dans la zone de recollement. De plus, en remarquant que

$$\frac{\partial \rho_v \circ \varphi_0^{-1}}{\partial t} = -\frac{\partial \rho_u \circ \varphi_0^{-1}}{\partial t}$$

où $\varphi_0^{-1} := i_{A_1} \circ \varphi_1^{-1}$, avec $i_{A_1} : A_1 \hookrightarrow M$, et en demandant que ρ_v soit tel que

$$\frac{\partial \rho_v \circ \varphi_0^{-1}}{\partial t}(x,t) > 0 \quad \forall\, (x,t) \in \partial M \times (0,1)$$

on obtient que

$$\frac{\partial \rho_u \circ \varphi_0^{-1}}{\partial t} \cdot (\tilde{f}_2 \circ \varphi_0^{-1} + k) + \frac{\partial \rho_v \circ \varphi_0^{-1}}{\partial t} \cdot \tilde{f}_1 \circ \varphi_0^{-1} > 0$$

Ce fait conjugué à celui que par 1.3.1 et 1.3.2

$$\rho_v \circ \varphi_0^{-1} \cdot \frac{\partial \tilde{f}_1 \circ \varphi_0^{-1}}{\partial t} > 0$$

et

$$\rho_u \circ \varphi_0^{-1} \cdot \frac{\partial \tilde{f}_2 \circ \varphi_0^{-1}}{\partial t} > 0$$

(puisque $\dfrac{\partial (f_2 \circ \gamma^{-1} \circ \varphi_1^{-1})}{\partial t} > 0$) nous assure que $\dfrac{\partial f \circ \varphi_0^{-1}}{\partial t} > 0$ après le recollement sur la zone où celui-ci est effectué et que nous n'avons donc bel et bien généré aucun point critique sur celle-ci.

1.3.2. Une relation pour les variétés stables et instables

Soit $\beta : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$, une fonction Morse-Smale possédant comme unique point critique un minimum en 0 sur l'intervalle $(-\delta, \delta)$ et $f_0 : \partial M \to \mathbb{R}$ une fonction Morse-Smale sur une variété fermée ∂M. Considérons la variété produit $\partial M \times (-\delta, \delta)$ munie de la métrique produit. On a que $F(x,s) := f_0(x) + \beta(s)$ est aussi une fonction Morse-Smale sur $\partial M \times (-\delta, \delta)$. Dans ce cas, étant donné le choix de la métrique, on obtient pour le gradient que

$$\nabla F(x,s) = (\nabla f_0(x), \nabla \beta(s)) \tag{1.3.3}$$

Ainsi, le groupe de difféomorphismes à un paramètre associé à F prend la forme particulière suivante :

$$\varphi_t^F(x,s) = \varphi_t^{f_0}(x) \times \varphi_t^{\beta}(s) \tag{1.3.4}$$

On est maintenant en mesure d'expliquer le lien entre les variétés stables et instables de ∂M et celles de $\partial M \times (-\delta, \delta)$.

Proposition 1.3.1. *Soit la situation telle que décrite ci-haut et soit $z \in crit(f_0)$, alors on a la relation suivante entre $W^s(z) \subseteq \partial M$ et $W^s((z,0)) \subseteq \partial M \times (-\delta, \delta)$*

$$W^s((z,0)) = W^s(z) \times (-\delta, \delta) \tag{1.3.5}$$

De plus, pour les variétés instables on a

$$W^u((z,0)) = W^u(z) \times 0 \tag{1.3.6}$$

DÉMONSTRATION. Soit $s \in (-\delta, \delta)$ et $y \in W^s(z)$ où $z \in crit(f_0)$. De 1.3.2 on obtient facilement l'égalité :

$$\begin{aligned} &\lim_{t \to \infty} \varphi_t^F(y,s) = (z,0) \\ \Rightarrow &(y,s) \in W^s((z,0)) \\ \Rightarrow &W^s(z) \times (-\delta, \delta) \subseteq W^s((z,0)) \end{aligned}$$

Mais, puisque $\bigcup_{z \in crit f_0} W^s(z) \times (-\delta, \delta) = \partial M \times (-\delta, \delta) = \bigcup_{\substack{disj. \\ z \in crit f_0}} W^s((z,0))$, on obtient alors que $W^s((z,0)) = W^s(z) \times (-\delta, \delta)$. La deuxième égalité est évidente.

□

Il est clair que le résultat précédent se généralise facilement. Notamment, supposons que l'on se retrouve comme dans le cas précédent à l'exception près de la mulitiplication de f_0 par une une fonction $\alpha(s) : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$, c'est-à-dire que nous sommes dans la situation où la fonction Morse-Smale s'exprime comme :

$$F(x,s) = \alpha(s) f_0(x) + \beta(s) \tag{1.3.7}$$

Alors, pour que les résultats de la proposition 1.3.1 s'appliquent, les trois conditions suivantes sur α sont suffisantes :

$$1)\quad crit(\alpha(s)f_0(x)+\beta(s))\bigcap \partial M\times\{(-\delta,\delta)\backslash 0\}=\phi \tag{1.3.8}$$

$$2)\quad \exists \quad \epsilon>0 \quad \text{t.q.} \quad \frac{\partial\alpha}{\partial s}(s_0)=0 \quad \forall s_0\in(-\epsilon,\epsilon) \tag{1.3.9}$$

$$3)\quad \alpha(0)>0 \tag{1.3.10}$$

En effet, les deux premières conditions garantissent que $\lim_{t\to\infty}\varphi_t^F(\cdot,s)=(\cdot,0)$, ce qui implique en regard de la dernière condition que, avec y et z comme dans la proposition 1.3.1, on a $\lim_{t\to\infty}\varphi_t^F(y,s)=(z,0)$, nous permettant ainsi de conclure de façon identique.

1.3.3. Fonctions de Morse et variétés à bord

Nous allons maintenant nous intéresser au cas d'une variété à bord et montrer comment on peut utiliser les résultats des deux sections précédentes pour obtenir une fonction Morse-Smale sur celui-ci (voir la définition 1.2.6). Pour faire cette construction, nous aurons besoin du lemme suivant.

Définition 1.3.2. *Soit a, une valeur régulière d'une fonction de Morse f et z un point critique de cette dernière, définissons*

$$S_z^{u,a}=W^u(z)\bigcap f^{-1}(a)$$

et

$$S_z^{s,a}=W^s(z)\bigcap f^{-1}(a)$$

Lemme 1.3.3. *Soit f, une fonction de Morse, $\Lambda=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ un ensemble de cardinalité maximale de points critiques de f parmi ceux qui sont tels que $f(x_1)<f(x_2)<\cdots<f(x_n)$ et $\{a_1,\cdots,a_{n-1}\}$ des valeurs régulières de f telles que $f(x_i)<a_i<f(x_{i+1})$. Alors f respecte la condition Morse-Smale si et seulement si $\forall\, i<n$ on a que $S_{z_k}^{u,a_i}\pitchfork S_{z_\ell}^{s,a_i}$ dans $f^{-1}(a_i)$ quel que soit $z_k,z_\ell\in crit(f)$.*

DÉMONSTRATION. $\Rightarrow$) Évident.

$\Leftarrow$) La condition de transversalité étant trivialement respectée aux points critiques, il suffit de vérifier celle-ci aux points réguliers. Considérons $f^{-1}(a_i)$, celle-ci étant une surface de niveau associée à une valeur régulière, il est clair que $S^{u,a_i}_{z_k} \pitchfork S^{s,a_i}_{z_\ell}$ dans $f^{-1}(a_i) \Rightarrow T_xW^u(z_k) \oplus T_xW^s(z_\ell) = T_xM \quad \forall x \in f^{-1}(a_i)$. Ensuite, soit q un point régulier tel que $f(x_i) \leq f(q) \leq f(x_{i+1})$, $\exists\, y \in f^{-1}(a_i)$ et t_0 tel que $\varphi^f_{t_0}(y) = q$, mais puisque $\varphi^f_{t_0}(W^u(z_k)) = W^u(z_k)$ et $\varphi^f_{t_0}(W^s(z_\ell)) = W^s(z_\ell)$ et que $\varphi^f_{t_0}$ est un difféomorphisme, on obtient forcément que $T_yW^u(z_k) \oplus T_yW^s(z_\ell) = T_yM$, ce qui implique que $T_qW^u(z_k) \oplus T_qW^s(z_\ell) = T_qM$, d'où le résultat. $\square$

Considérons donc une variété M avec bord ∂M. On a que $M\backslash\partial M$ possède une région A difféomorphe à $\partial M \times (0,1)$. On peut choisir génériquement sur $M\backslash\partial M$ une fonction Morse-Smale $f'' : M\backslash\partial M \longrightarrow \mathbb{R}$ qui soit telle que le flot soit tel que $\frac{\partial f''}{\partial t} > 0$ sur la région $A \approx \partial M \times (0,1)$. Étant donné cette condition sur le flot, il est clair, en regard de ce qui a été fait à la section 1.3.1, que l'on peut facilement modifier f'' sur A, et uniquement sur A, de façon à obtenir une nouvelle fonction $f' : M\backslash\partial M \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $f'|_{\partial M\times(0,0.9)} = s + c$. Cette procédure ne générant pas de nouveau point critique, la fonction ainsi obtenue est aussi Morse-Smale. En choisissant ensuite également une fonction Morse-Smale $f_0 : \partial M \longrightarrow \mathbb{R}$ sur ∂M et en considérant la fonction étendue sur la variété produit $\partial M \times [0,1)$ comme décrit à la section 1.3.2, avec disons $\beta(s) = s^2$, ceci nous donne une fonction $f_1 : \partial M \times [0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ de la forme $f_1(x,s) = f_0(x) + s^2$ sur cet espace. On peut alors appliquer encore une fois la méthode de recollement discutée en 1.3.1 et obtenir ainsi sur M une fonction $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ ayant la forme suivante sur une région $\approx \partial M \times [0, 0.9)$

$$\begin{aligned} f(x,s) &= \rho_u(s)(f_0(x) + s^2 + k) + \rho_v(s)(s+c) \\ &= \rho_u(s)(f_0(x) + k) + \rho_u(s)s^2 + \rho_v(s)(s+c) \\ &= \alpha(s)(f_0(x) + k) + \beta'(s); \end{aligned}$$

$$\text{avec} \quad \alpha := \rho_u \quad et \quad \beta' := \rho_v \cdot (s+c) + \rho_u s^2.$$

Ainsi, les conditions 1.3.9 et 1.3.10 évoquées plus haut sont donc clairement satisfaites tandis que le fait que le recollement fait en 1.3.1 ne génère pas de nouveau point critique nous assure que la condition 1.3.8 est aussi satisfaite et (en changeant l'intervalle $(-\delta, \delta)$ par $[0, 0.9)$) nous sommes donc dans une situation où la proposition 1.3.1 peut s'appliquer. La prochaine étape consistera à tirer avantage de ce fait pour montrer que f_0 peut être choisie génériquement de façon à ce que la fonction f obtenue du recollement respecte la condition Morse-Smale.

Dans la situation décrite ci-haut, il est clair en regard du lemme 1.3.3 que pour s'assurer que la fonction obtenue respecte la condition Morse-Smale il suffit que la condition de transversalité soit vérifiée pour les sphères stables et instables dans une surface de niveau comprise à l'intérieur de la zone de recollement. Choisissons donc la surface de niveau $f^{-1}(\frac{4}{5}+c)$ qui correspond à la tranche $\partial M \times \frac{4}{5}$ (rappelons-nous qu'à la section 1.3.1 la partition de l'unité utilisée est subordonnée à $[0, \frac{2}{3})$ et $[\frac{1}{3}, 1)$, impliquant ainsi que $f|_{\partial M \times (\frac{2}{3}, 0.9)} = s + c$). Soit $z_\circ \in crit(f|_{M \backslash \partial M \times [0,1)})$, on voudrait que $W^u(z_\circ) \bigcap \{\partial M \times \frac{4}{5}\}$ soit transverse à $W^u(z) \bigcap \{\partial M \times \frac{4}{5}\}$ dans $\partial M \times \frac{4}{5} \quad \forall z \in crit(f|_{\partial M})$. En utilisant la proposition 1.3.1, on ramène le problème à trouver f_0 Morse-Smale tel que ses variétés stables intersectent transversalement $i(W^u(z_\circ) \bigcap \{\partial M \times \frac{4}{5}\}) \subseteq \partial M$ où $i : \partial M \times \frac{4}{5} \hookrightarrow \partial M$ est l'inclusion évidente. Or ceci est une condition générique. On peut donc choisir génériquement la fonction f_0 désirée qui satisfasse cette condition pour tous les points critiques de $crit(f|_{M \backslash \partial M \times (0,1)})$.

1.3.4. Application aux homotopies

Nous allons maintement montrer comment l'on construit une homotopie Morse-Smale entre deux fonctions M-S sur une variété à bord obtenues par la méthode expliquée à la sous-section précédente.

Soit M, notre variété à bord, et soit deux fontions Morse-Smale $f : M \to \mathbb{R}$ et $g : M \to \mathbb{R}$ obtenues comme à la sous-section 1.3.3 à partir des fonctions $f_0 : \partial M \to \mathbb{R}$, $g_0 : \partial M \to \mathbb{R}$, $f' : M \backslash \partial M \to \mathbb{R}$ et $g' : M \backslash \partial M \to \mathbb{R}$. Puisque le flot généré par f' et g' est entrant dans la région $\partial M \times (0, 1)$, alors il existe une homotopie régulière $h' : M \backslash \partial M \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ entre f' et $g' + b'$, où b' est une constante, pour laquelle le flot généré par $h'(x,t) : M\backslash\partial M \to \mathbb{R}$ est entrant dans $\partial M \times (0,1)$ pour toute valeur fixe t (**[Sc]**). Ensuite, on peut choisir une homotopie $h'_0 : \partial M \times [0,1] \to \mathbb{R}$ entre f_0 et $g_0 + b$ et l'étendre comme à la sous-section 1.3.2 avec $\beta = s^2$ pour obtenir une nouvelle homotopie $h_0 : \partial M \times [0,1) \times [0,1] \to \mathbb{R}$ entre les fonctions $f_0 + s^2$ et $g_0 + s^2 + b$. Si l'on effectue le recollement de ces deux homotopies à la manière discutée en 1.3.3, on obtiendra une homotopie $h : M \times [0,1] \to \mathbb{R}$, pas nécessairement Morse-Smale, et la procédure "restreinte à $t = 0$ et à $t = 1$" étant identique à celle faite pour obtenir f et g, il est clair que $h(x,0) = f$ et que $h(x,1) = g + b$. [2]

Ensuite, pour obtenir la condition Morse-Smale, remarquons qu'il ne nous reste qu'à faire en sorte que les variétés instables des points critiques de la tranche $M \times 0$ intersectent traversalement les varitétés stables des points critiques de la tranche $M \times 1$. Considérons donc la région $\partial M \times [0,1) \times [0,1] \subset M$, le fait que $h|_{\partial M \times 0 \times [0,1]} = h_0$ soit Morse-Smale nous assure qu'il $\exists\ \epsilon$ tel que les variétés stables et instables s'intersectent toutes transversalement dans $\partial M \times [0,\epsilon) \times [a,b]$ avec a et b tels que $0 < a < b < 0$. On peut donc perturber h uniquement dans une région $\partial M \times (\epsilon_2, 1) \times [a,b]$, où $0 < \epsilon_2 < \epsilon$, pour obtenir la transversalité des variétés stables et instables dans une région $\partial M \times [0,1) \times [a_2, b_2]$ avec $a < a_2 < b_2 < b$. La preuve garantissant que l'on puisse procéder ainsi est analogue à celle présentée dans **[BaHu]** (lemme 6.10), aussi nous ne la referons pas ici. La région $\partial M \times [0,1) \times [a_2, b_2]$ ne contient en général pas nécessairement de surface de niveau, mais toute tranche de la forme $\partial M \times [0,1) \times a$, avec $a \in (a_2, b_2)$, constitue une hypersurface de codimension 1 à travers laquelle le flot doit passer et à laquelle on peut supposer que le négatif gradient n'est jamais parallèle. Ainsi, on peut refaire une démonstration semblable en tout point à celle du lemme 1.3.3 pour obtenir que la nouvelle fonction obtenue de la perturbation est Morse-Smale. Nous avons donc obtenu une homotopie Morse-Smale $H : M \times [0,1] \to \mathbb{R}$ entre les fonctions f et $g + b$ qui soit égale à h_0 lorsque restreinte au bord.

[2] Remarquons que l'on peut choisir préalablement les constantes utilisées dans la construction 1.3.3 de f et g de façon à ce que $c_f = c_g + b = c_h$, $k_f = k_g = k_h$ et $b = b'$.

Chapitre 2

THÉORÈME DE LA SIGNATURE

2.1. Diagramme de Poincaré-Lefschetz en homologie de Morse

Dans cette section nous construirons le diagramme de Poincaré-Lefschetz. Toutefois, avant de procéder à cela, nous devrons expliquer un peu plus le contexte et la notation utilisée dans la démonstration. Aussi, on devra dévopper les relations liant l'homologie et la cohomologie des variétés à bord qui nous manquent encore.

2.1.1. Notation et mise en contexte

Le théorème de la signature s'applique à une variété ∂M lorsque celle-ci est le bord d'une variété M'. Dans cette situation, on a donc que ∂M possède dans celle-ci un voisinage difféomorphe à $\partial M \times [0,1)$. On peut donc munir M' d'un collier $\partial M \times (-1,0)$ pour obtenir une nouvelle variété M. On identifiera donc ∂M et $\partial M \times 0$ et on utilisera ces deux notations à des fins de clarté dépendamment du contexte. Afin de simplifier les manipulations, c'est principalement avec M plutôt qu'avec M' que nous travaillerons pour établir les résultats servant à prouver le théorème de la signature. Cela est possible pour la raison mise en lumière dans le paragraphe suivant.

Considérons l'inclusion évidente

$$i : \partial M \times (-1,1) \hookrightarrow M$$

Pour la suite des choses nous noterons

$$M_s \equiv M \backslash i(\partial M \times (-1, s])$$

$$A \equiv i(\partial M \times (-1, 0.3])$$

et $B \equiv M_{0.3}$. Faisons le choix générique d'une fonction Morse-Smale

$$f_0 + \beta : \partial M \times (-1, 1) \to \mathbb{R}$$

à la manière de la section 1.3.3, avec $\beta : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ une fonction Morse-Smale avec pour unique point critique un minimum en 0 et $f_0 : \partial M \to \mathbb{R}$ une autre fonction M-S, de façon à ce que la fonction obtenue du recollement fait tel qu'en 1.3.3 avec une fonction M-S $f' : M_0 \to \mathbb{R}$ soit une fonction M-S $f : M \to \mathbb{R}$. Remarquons que $C_*(A, f|_A) = C_*(\partial M, f_0)$, on va donc en arriver à nos fins en prouvant le résultat voulu pour $H_*(A, f|_A)$ et ainsi l'obtenir pour $H_*(\partial M)$.

Pour prouver le théorème de la signature, nous allons bâtir un diagramme appellé *diagramme de Poincaré-Lefschetz* en homologie de Morse. Ce sera le but principal de ce chapitre, puisqu'une fois ceci fait la preuve se déduit algébriquement de la même façon que dans le cas de l'homologie singulière (pour celle-ci voir [**Br**]). Avant de débuter vraiment, expliquons encore un peu plus la notation à venir.

Définition 2.1.1. *Soit un complexe de chaînes A_*, si on définit le complexe A'_* à l'aide de $A'_k := A_{k-1}$, alors la suspension est définie comme étant l'identification canonique*

$$susp : A_* \to A'_{*+1}$$

Notamment, avec β et f_0 comme précédemment, la suspension peut être vue comme nous fournissant l'identification évidente

$$susp : C_*(\partial M \times (-1, 1), f_0 + \beta) \to C_{*+1}(\partial M \times (-1, 1), f_0 - \beta)$$

Toujours avec $\beta : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ une fonction Morse-Smale avec pour unique point critique un minimum en 0, si $f_0, g_0 : \partial M \to \mathbb{R}$ sont des fonctions M-S, en considérant les fonctions Morse-Smale $f_0 + \beta$ et $g_0 - \beta$, on a une identification canonique entre $C_*(\partial M, f_0)$ et $C_*(\partial M \times (-1, 1), f_0 + \beta)$ et entre $C_*(\partial M, g_0)$ et

$C_{*+1}(\partial M\times(-1,1), g_0-\beta)$. Donc, en supposant une homotopie $h_0 : \partial M \times [0,1] \to \mathbb{R}$ de f_0 vers g_0 et son morphisme de chaînes associé

$$\Phi^{h_0} : C_*(\partial M, f_0) \to C_*(\partial M, g_0)$$

on a que ce dernier induit un morphisme

$$\hat{\Phi}^{h_0} : C_*(\partial M \times (-1,1), f_0 + \beta) \to C_{*+1}(\partial M \times (-1,1), g_0 - \beta)$$

dont la définiton est donnée par

$$\hat{\Phi}^{h_0} \equiv susp. \circ \iota_\bullet \circ \Phi^{h_0} \circ \iota_\bullet^{-1}$$

où $\iota : \partial M \times 0 \hookrightarrow \partial M \times (-1,1)$ est l'inclusion évidente. De façon analogue on définit

$$\check{\Phi}^{h_0} : C_*(\partial M \times (-1,1), f_0 - \beta) \to C_{*-1}(\partial M \times (-1,1), g_0 + \beta)$$

par $\check{\Phi}^{h_0} \equiv \iota_\bullet \circ \Phi^{h_0} \circ \iota_\bullet^{-1} \circ susp.^{-1}$.

2.1.2. Quelques relations pour l'homologie et la cohomologie

Tout d'abord, selon les définitions discutées à la section 1.1, on a que

$$C_*(M, f, \partial_f) = \Big(\bigoplus_k < crit_k(f) > \mathbb{K}, \partial_f\Big) \tag{2.1.1}$$

$$\approx \Big(\bigoplus_k \big(< crit_k(f|_A) > \mathbb{K} \oplus < crit_k(f|_B) > \mathbb{K}\big), \partial_f\Big) \tag{2.1.2}$$

Ainsi, toujours en utilisant la notation $C_*(M, A, f, \overline{\partial_f}) \equiv \frac{C_*(M,f,\partial_f)}{C_*(A,f|_A,\partial_{f|_A})}$ et en se souvenant que le flot est entrant dans A, on peut définir un isomorphisme de complexe de chaînes ϕ_1 de la façon suivante

$$\phi_1 : C_*(M, A, f, \overline{\partial_f}) \xrightarrow{\sim} C_*(B, f|_B, \partial_{f|_B}) \tag{2.1.3}$$

$$[(a,b)] \longmapsto b \tag{2.1.4}$$

De façon analogue on peut définir

$$\phi_2 : C_*(M, B, -f, \overline{\partial_{-f}}) \xrightarrow{\sim} C_*(A, -f|_A, \partial_{-f|_A}) \tag{2.1.5}$$

$$[(a,b)] \longmapsto a \tag{2.1.6}$$

Remarque 2.1.2. *Si g est une seconde fonction possédant les mêmes propriétés que f et si h est une homotopie entre les deux telle que le flot associé à $h(\cdot,t) : M \to \mathbb{R}$ est entrant sur A pour tout temps fixe t, alors la commutativité des diagrammes suivants est évidente :*

$$\begin{array}{ccc} H_k(M,A,f) & \xrightarrow{\phi_{1*}} & H_k(B,f|_B) \\ \downarrow \Phi_*^h & & \downarrow \Phi_*^{h|_B} \\ H_k(M,A,g) & \xrightarrow{\phi_{1*}} & H_k(B,g|_B) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} H_k(M,B,-g) & \xrightarrow{\phi_{2*}} & H_k(A,-g|_A) \\ \downarrow \Phi_*^{-h} & & \downarrow \Phi_*^{-h|_A} \\ H_k(M,B,-f) & \xrightarrow{\phi_{2*}} & H_k(A,-f|_A) \end{array}$$

Donc, en définissant q_1^{-1}: $C_*(M,A,f,\overline{\partial_f}) \to C_*(M,f,\partial_f)$ par $q_1^{-1}([(a,b)]) = (0,b)$, on peut comparer les deux applications suivantes où ι_1 et p_1 sont l'inclusion (sans égard à la différentielle) et la projection évidentes

$$\begin{array}{lccccccc} 1) & Ker\overline{\partial_f} & \xrightarrow{q_1^{-1}} & C_*(M,f,\partial_f) & \xrightarrow{\partial_f} & C_{*-1}(M,f,\partial_f) & \xrightarrow{i_1^{-1}} & C_{*-1}(A,f|_A,\partial_{f|_A}) \\ & [(a,b)] & \longmapsto & (0,b) & \mapsto & (c,0) & \mapsto & c \end{array}$$

$$\begin{array}{lccccccccc} 2) & Ker\overline{\partial_f} & \xrightarrow{\phi_1} & C_*(B,f|_B,\partial_{f|_B}) & \xrightarrow{\iota_1} & C_*(M,f,\partial_f) & \xrightarrow{\partial_f} & C_{*-1}(M,f,\partial_f) & \xrightarrow{p_1} & C_{*-1}(A,f|_A,\partial_{f|_A}) \\ & [(a,b)] & \longmapsto & b & \mapsto & (0,b) & \mapsto & (c,0) & \mapsto & c \end{array}$$

On a donc que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} Ker\overline{\partial_f} & \xrightarrow{i_1^{-1}\circ\partial_f\circ q_1^{-1}} & C_{*-1}(A,f|_A,\partial_{f|_A}) \\ \downarrow \phi_1 & & \downarrow id \\ C_*(B,f|_B,\partial_{f|_B}) & \xrightarrow{p_1\circ\partial_f\circ\iota_1} & C_{*-1}(A,f|_A,\partial_{f|_A}) \end{array} \tag{2.1.7}$$

Comme la suite du haut est précisément celle utilisée dans le lemme du serpent, nous venons d'obtenir le résultat suivant

Lemme 2.1.3. *L'application $p_1 \circ \partial_f \circ \iota_1$ peut être vue comme induisant l'application $\partial_{f*} : H_k(C_*(M,A,f)) \longrightarrow H_{k-1}(C_*(A,f|_A))$ en homologie via le morphisme*

ϕ_1. De façon analogue les applications

$$1) p_2 \circ \partial_{-f} \circ \iota_2 : C_*(A, -f|_A) \to C_{*-1}(B, -f|_B)$$
$$2) p_3 \circ \delta_f \circ \iota_3 : C^*(A, f|_A) \to C^{*+1}(B, f|_B)$$
$$3) p_4 \circ \delta_{-f} \circ \iota_4 : C^*(B, -f|_B) \to C^{*+1}(A, -f|_A)$$

où ι_3 et ι_4 sont les extensions évidentes et p_3 et p_4 sont les restrictions évidentes, induisent

$$1) \partial_{-f*} : H_k(C_*(M, B, -f)) \longrightarrow H_{k-1}(C_*(B, -f|_B))$$
$$2) \delta_f^* : H^k(C^*(A, f|_A)) \longrightarrow H^{k+1}(C^*(M, A, f))$$
$$3) \delta_{-f}^* : H^k(C^*(B, -f|_B)) \longrightarrow H^{k+1}(C^*(M, B, -f))$$

via les morphismes ϕ_2, ϕ_1^* et ϕ_2^* respectivement.

Nous allons terminer cette section par la démonstration d'un petit lemme qui sera essentiel pour la démonstration du théorème principal de la prochaine section.

Lemme 2.1.4. *Le diagramme suivant, où les applications verticales sont données par la seconde application (λ) de la dualité de Poincaré décrite à la section 1.2.4, commute.*

$$\begin{tikzcd}
\to C^{n-k}(B, f|_B) \arrow[r, "q_1^* \circ \phi_1^*"] \arrow[d, "\lambda_{f|_B}^{-1}"] & C^{n-k}(M, f) \arrow[r, "i_1^*"] \arrow[d, "\lambda_f^{-1}"] & C^{n-k}(A, f|_A) \arrow[r, "p_3 \circ \delta_f \circ \iota_3"] \arrow[d, "\lambda_{f|_A}^{-1}"] \arrow[dr, phantom, "-1^k"] & C^{n-k+1}(B, f|_B) \to \arrow[d, "\lambda_{f|_B}^{-1}"] \\
\to C_k(B, -f|_B) \arrow[r, "i_2"] & C_k(M, -f) \arrow[r, "\phi_2 \circ q_2"] & C_k(A, -f|_A) \arrow[r, "p_2 \circ \partial_{-f} \circ \iota_2"] & C_{k-1}(B, -f|_B) \to
\end{tikzcd}$$

DÉMONSTRATION. Pour la commutativité du premier carré, considérons $\alpha \in C_*(B, -f|_B)$ associé au point critique $a \in crit(-f|_B)$ et la fonction donnée par $\xi_\alpha = \lambda_{f|_B}(\alpha)$. Soit α', l'élément associé à $a \in crit(f)$ dans le complexe $C_*(M, f)$, toujours avec la décomposition par la relation 2.1.2, testons $q_1^* \circ \phi_1^*(\xi_\alpha) = q_1^*(\xi_{[0,\alpha]}) = \xi_{[(0,\alpha)]} \circ q_1(\cdot)$ sur les générateurs de $C_*(M, f)$. On a que $q_1(\alpha') = [(0, \alpha)]$

et donc que $\xi_{[(0,\alpha)]} \circ q_1(x) = 1$ si $x = \alpha'$ et $\xi_{[(0,\alpha)]} \circ q_1(x) = 0$ si $x \neq \alpha'$ (on s'est restreint aux générateurs, c.a.d. que $x \in C_*(M,f)$ est associé à un point critique donné). Bref, $q_1^* \circ \phi_1^*(\xi_\alpha) = \xi_{\alpha'} \in C^*(M,f)$ et donc $\lambda_f^{-1} \circ q_1^* \circ \phi_1^*(\xi_\alpha) = \alpha' = i_2 \circ \lambda_{f|_B}^{-1}(\xi_\alpha)$. La commutativité du deuxième carré se prouve de façon analogue tandis que celle du troisième découle directement de la démonstration faite à la section 1.2.4 sur la commutativité de la différentielle avec l'application λ. □

Des lemmes 2.1.4 et 2.1.3, on peut tirer directement le résultat qui suit.

Proposition 2.1.5. *Le diagramme suivant commute*

$$\begin{tikzcd}
H^{n-k}(M,A,f) \arrow[r, "q_1^*"] \arrow[d, "(\lambda^{-1}_{f|_B})_* \circ (\phi_1^{-1})^*"] & H^{n-k}(M,f) \arrow[r, "i_1^*"] \arrow[d, "(\lambda_f^{-1})_*"] & H^{n-k}(A,f|_A) \arrow[r, "\delta_f^*"] \arrow[d, "(\phi_2^{-1})_* \circ (\lambda^{-1}_{f|_A})_*"] \arrow[dr, phantom, "-1^k"] & H^{n-k+1}(M,A,f) \arrow[d, "(\lambda^{-1}_{f|_B})_* \circ (\phi_1^{-1})^*"] \\
H_k(B,-f|_B) \arrow[r, "i_{2*}"] & H_k(M,-f) \arrow[r, "q_{2*}"] & H_k(M,B,-f) \arrow[r, "\partial_{-f*}"] & H_{k-1}(B,-f|_B)
\end{tikzcd}$$

2.1.3. Diagramme de Poincaré-Lefschetz

Dans cette sous-section, on construit le diagramme de Poincaré-Lefschetz en utilisant uniquement la théorie de Morse. Pour la démonstration du théorème de la signature, seul le troisième carré du diagramme nous sera utile. Ainsi, seule la commutativité de ce carré sera démontrée en grand détail. Le résultat s'énonce comme suit :

Théorème 2.1.6. *Il existe des applications verticales qui sont des isomorphismes tels que le diagramme suivant, appelé diagramme de Poincaré-Lefschetz, commute*

$$\begin{tikzcd}
H^{n-k}(M,A,f) \arrow[r, "q_1^*"] \arrow[d, "\wr"] & H^{n-k}(M,f) \arrow[r, "i_1^*"] \arrow[d, "\wr"] & H^{n-k}(A,f|_A) \arrow[r, "\delta_f^*"] \arrow[d, "\wr"] \arrow[dr, phantom, "-1^k"] & H^{n-k+1}(M,A,f) \arrow[d, "\wr"] \\
H_k(M,f) \arrow[r, "q_{1*}"] & H_k(M,A,f) \arrow[r, "\partial_{f*}"] & H_{k-1}(A,f|_A) \arrow[r, "i_{1*}"] & H_{k-1}(M,f)
\end{tikzcd}$$

DÉMONSTRATION. Soit un difféomorphisme $\psi : B \to M$ choisi dans la classe d'homotopies $[i_B]$, où $i_B : B \hookrightarrow M$ est l'inclusion de B dans M, et soit des homotopies h_0, h_1 et h_2 de $-f_0$ vers f_0, de $-f|_B$ vers $f \circ \psi$ et de $-f \circ \psi$ vers $f|_B$

respectivement, alors on obtient le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
H^{n-k}(M,A,f) \arrow[r, "q_1^*"] \arrow[d, "(\lambda^{-1}_{f|_B})_* \circ (\phi_1^{-1})^*"] & H^{n-k}(M,f) \arrow[r, "i_1^*"] \arrow[d, "(\lambda_f^{-1})_*"] & H^{n-k}(A,f|_A) \arrow[r, "\delta_f^*"] \arrow[d, "(\phi_2^{-1})_* \circ (\lambda^{-1}_{f|_A})_*"] \arrow[dr, phantom, "-1^k"] & H^{n-k+1}(M,A,f) \arrow[d, "(\lambda^{-1}_{f|_B})_* \circ (\phi_1^{-1})^*"] \\
H_k(B,-f|_B) \arrow[r, "i_{2*}"] \arrow[d, "\psi_* \circ \Phi_*^{h_1}"] & H_k(M,-f) \arrow[r, "q_{2*}"] \arrow[d, "(\phi_1^{-1})_* \circ \Phi_*^{h_2} \circ (\psi^{-1})_*"] & H_k(M,B,-f) \arrow[r, "\partial_{-f*}"] \arrow[d, "\check{\Phi}_*^{h_0} \circ (\phi_2)_*"] & H_{k-1}(B,-f|_B) \arrow[d, "\psi_* \circ \Phi_*^{h_1}"] \\
H_k(M,f) \arrow[r, "q_{1*}"] & H_k(M,A,f) \arrow[r, "\partial_{f*}"] & H_{k-1}(A,f|_A) \arrow[r, "i_{1*}"] & H_{k-1}(M,f)
\end{tikzcd}$$

Remarque 2.1.7. *Les deux premières applications verticales nous fournissent des versions relatives de la dualité de Poincaré :*

$$P_{1\ f}^{rel} : H^{n-*}(M,f) \to H_*(M,A,f)$$

$$P_{2\ f}^{rel} : H^{n-*}(M,A,f) \to H_*(M,f)$$

données par

$$P_{1\ f}^{rel} \equiv (\phi_1^{-1})_* \circ \Phi_*^{h_2} \circ (\psi^{-1})_* \circ (\lambda_f^{-1})_* \tag{2.1.8}$$

$$P_{2\ f}^{rel} \equiv \psi_* \circ \Phi_*^{h_1} \circ (\lambda^{-1}_{f|_B})_* \circ (\phi_1^{-1})^* \tag{2.1.9}$$

Puisque le corollaire 2.1.5 nous donne la commutativité des carrés du haut, il ne reste maintenant qu'à démontrer la commutativité des carrés du bas pour achever la preuve du théorème. Comme expliqué plus haut, on se limitera à la démonstration du troisième carré. Attaquons-nous donc à la démontration du troisième carré du bas à travers le lemme suivant.

Lemme 2.1.8. *Avec les applications verticales telles que précédemment, le diagramme suivant commute*

$$\begin{tikzcd}
H_k(M,B,-f) \arrow[r, "\partial_{-f*}"] \arrow[d, "\check{\Phi}_*^{h_0} \circ (\phi_2)_*"] & H_{k-1}(B,-f|_B) \arrow[d, "\psi_* \circ \Phi_*^{h_1}"] \\
H_{k-1}(A,f|_A) \arrow[r, "i_{1*}"] & H_{k-1}(M,f)
\end{tikzcd}$$

DÉMONSTRATION. Nous allons dans une première étape définir les difféomorphismes et les homotopies qui seront utiles à la démonstration.

ÉTAPE 1

Soit une fonction M-S $\ell : B \to \mathbb{R}$ et l'inclusion $i_B : B \hookrightarrow M$, le prolongement $\overline{i_{B\ell}}$ sur tout M peut dans ce cas particulier évidemment être choisi de façon à ce que ce dernier n'ait aucun point critique sur $M \backslash B$ et ainsi i_{B*} nous fournit une identification naturelle $i_{B*} : H_*(B) \to H_*(M)$.

Nous allons maintenant construire un difféomorphisme ψ homotope à i_B de façon à ce que le morphisme $\psi_* : H_*(B) \to H_*(M)$ nous fournisse la même identification que i_{B_*} (c.a.d. $\psi_* = i_{B*}$) en accord avec la discussion sur la fonctorialité des classes d'homotopies de plongements faite à la suite de la proposition 1.2.5. Considérons l'application $\alpha : [0,1] \to [0,1]$ donnée par $\alpha(s) = \frac{\eta(s-\frac{1}{3})}{\eta(s-\frac{1}{3})+\eta(\frac{2}{3}-s)}$ où $\eta(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $\eta(x) = exp(-x^{-1})$ si $x > 0$. Elle possède les propriétés suivantes

$$\begin{aligned} \alpha(s) = 0 \quad & \text{si} \quad s \in [0, \tfrac{1}{3}] \\ \alpha(s) = 1 \quad & \text{si} \quad s \in [\tfrac{2}{3}, 1] \\ \tfrac{\partial \alpha}{\partial s}(s) > 0 \quad & \text{si} \quad s \in [\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}] \end{aligned}$$

(voir **[Mi2]**). Donc soit $\psi' : [0.3, 1] \to [-1, 1]$ défini par

$$\psi' := 1 - ((1.3) \cdot \alpha(\frac{1}{0.7}(1-s)) + (1-s))$$

On a que ψ' est un difféomorphisme tel que $\psi'(0.3) = -1$ et $\psi'(s) = id$ pour s dans un voisinage de 1. On peut donc définir $\psi : B \to M$ par

$$\psi := \begin{cases} id & \text{sur } M_1 \\ id \times \psi' & \text{sur } B \backslash M_1 \approx \partial M \times [0.3, 1] \end{cases}$$

Maintenant, rappelons que la fonction $f : M \to \mathbb{R}$ avec laquelle nous travaillons fut obtenue du recollement 1.3.3 des fonctions $f_0 + \beta : \partial M \times (-1,1) \to \mathbb{R}$ et $f' : M_0 \to \mathbb{R}$ en utilisant une partition de l'unité donnée par ρ_u et ρ_v sur M. Ainsi, on peut ramener cette construction sur B en utilisant le difféomorphisme $\psi : B \to M$. Explicitement, en identifiant $M \backslash \overline{M}_1$ et $\partial M \times (-1,1)$ et en dénotant les inclusions $i_{M \backslash \overline{M}_1} : M \backslash \overline{M}_1 \hookrightarrow M$ et $i_{M_0} : M_0 \hookrightarrow M$, on peut voir la fonction $\widetilde{f} := f \circ \psi$ sur B comme le fruit du recollement entre $\widetilde{f_0} := f_0 + \widetilde{\beta}$ sur $\psi^{-1}(M \backslash \overline{M}_1)$

et $\widetilde{f'} := f' \circ i_{M_0}^{-1} \circ \psi|_{\psi^{-1}(M_0)}$ sur $\psi^{-1}(M_0)$, où $\widetilde{\beta} := \beta \circ i_{M\backslash\overline{M}_1}^{-1} \circ \psi|_{\psi^{-1}(M\backslash\overline{M}_1)}$ en utilisant la partition de l'unité $\widetilde{\rho_u} := \rho_u \circ \psi$ et $\widetilde{\rho_v} := \rho_v \circ \psi$. [1]

Ensuite, construisons une fonction $-\widetilde{F}$ sur M de la façon suivante. Commençons par considérer la fonction $-f_0 + \beta : \partial M \times (-1,1) \to \mathbb{R}$. Nous pouvons choisir génériquement une fonction $-f'' : M_0 \to \mathbb{R}$ de façon à obtenir du recollement 1.3.3 de ces deux fonctions une fonction $-F : M \to \mathbb{R}$ qui soit Morse-Smale. Ensuite, par la même procédure qu'au paragraphe précédent, on obtient une fonction $-\widetilde{F'} := F \circ \psi$ sur B pouvant être vue comme le fruit du recollement entre $-\widetilde{f'}_0 := -f_0 + \widetilde{\beta}$ sur $\psi^{-1}(M\backslash\overline{M}_1)$ et $-\widetilde{f''} := -f'' \circ i_{M_0}^{-1} \circ \psi|_{\psi^{-1}(M_0)}$ sur $\psi^{-1}(M_0)$. Enfin, étendons $-\widetilde{F'} : B \to \mathbb{R}$ à M de façon à ce que sur $M\backslash\overline{M}_1 \approx \partial M \times (-1,1)$ la fonction $-\widetilde{F} : M \to \mathbb{R}$ obtenue soit de la forme $-f_0 - \beta' : \partial M \times (-1,1) \to \mathbb{R}$ avec $\beta' : (-1,1) \to \mathbb{R}$ telle que sur un voisigage de zéro $\beta'|_{(-\epsilon,\epsilon)} = \beta + k_1$ où k_1 est une constante réelle.

Nous allons maintenant construire une homotopie $\widetilde{h}$ sur $B \times [0,1]$ entre les fonctions que l'on vient de construire ; c.a.d. $-\widetilde{F}|_B$, $\widetilde{f} : B \to \mathbb{R}$. Pour ce faire, nous utiliserons la méthode de recollement s'appliquant aux homotopies discutées à la section 1.3.4. Débutons par choisir une homotopie $h_0 : \partial M \times [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $h_0(x,0) = -f_0$ et $h_0(x,1) = f_0 + k$. On peut ensuite à l'aide de cette dernière induire une homotopie sur $\psi^{-1}(M\backslash\overline{M}_1) \times [0,1] \approx \partial M \times (0.3,1) \times [0,1]$ en posant $\widetilde{h_0} := h_0 + \widetilde{\beta}$. Choisissons ensuite sur $\psi^{-1}(M_0) \times [0,1]$ une homotopie $\widetilde{h'} : \psi^{-1}(M_0) \times [0,1] \to \mathbb{R}$ de façon à ce que le flot qu'elle génère soit tel que $\frac{\partial \widetilde{h'}(\cdot,t)}{\partial s} > 0$ sur la région $\psi^{-1}(M_0\backslash\overline{M}_1) \approx \partial M \times (c,1)$ pour tout temps fixe t et que $\widetilde{h'}(x,0) = -\widetilde{F'}$ et $\widetilde{h'}(x,1) = \widetilde{f'} + k$. On peut maintenant utiliser le recollement élaboré à la section 1.3.4 pour recoller $\widetilde{h_0}$ et $\widetilde{h'}$ afin d'obtenir une homotopie M-S $\widetilde{h} : B \times [0,1] \to \mathbb{R}$ entre $-\widetilde{F}|_B$ et $\widetilde{f} + k$ qui soit telle que $\widetilde{h}|_{\partial M \times c \times [0,1]} = h_0$.

ÉTAPE 2

Avec cela maintenant en main, nous allons entreprendre de montrer la commutativité du diagramme à proprement parler. Pour en arriver à nos fins, démontrons

[1] Notons que pour alléger la notation nous avons utilisé β pour dénoter ce qui aurait formellement dû s'écrire $id \oplus \beta : \partial M \times (-1,1) \to \mathbb{R}$.

d'abord la commutativité du diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} H_k(M,B,-\widetilde{F}) & \xrightarrow{\partial_{-\widetilde{F}*}} & H_{k-1}(B,-\widetilde{F}|_B) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \check{\Phi}^{h_0}_* \circ (\phi_2)_*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \psi_* \circ \Phi^{\widetilde{h}}_*} \\ H_{k-1}(A, f|_A) & \xrightarrow{i_{1*}} & H_{k-1}(M,f) \end{array} \tag{2.1.10}$$

Donc, soit une homotopie h_0' telle que $h_0'(x,0) = f$ et $h_0'(x,1) = -f$, par le lemme 2.1.3 et puisque $\check{\Phi}^{h_0} \circ \hat{\Phi}^{h_0'} \simeq id$, la commutativité peut s'obtenir de la commutativité de

$$\begin{array}{ccc} C_k(A,-\widetilde{F}|_A) & \xrightarrow{p_2 \circ \left(\partial_{-\widetilde{F}}\right) \circ \iota_2} & C_{k-1}(B,-\widetilde{F}|_B) \\ \Big\uparrow{\scriptstyle \hat{\Phi}^{h_0'}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \psi_\bullet \circ \Phi^{\widetilde{h}}} \\ C_{k-1}(A, f|_A) & \xrightarrow{i_{1\bullet} \circ \check{\Phi}^{h_0} \circ \hat{\Phi}^{h_0'}} & C_{k-1}(M,f) \end{array} \tag{2.1.11}$$

Pour obtenir cette dernière, on va se servir des particularités de $-\widetilde{F}$. Remarquons que $-\widetilde{F}|_{\partial M \times 0} + k_1 = -f_0 = -\widetilde{F}|_{\partial M \times c}$ (toujours avec $c = \psi'^{-1}(0)$) et que $-\widetilde{F}|_{\partial M \times [0,c]}$ peut être vu comme une homotopie triviale allant de $-f_0$ vers $-f_0$. Bref, on a donc que

$$\begin{aligned} C_k(A, -\widetilde{F}|_A) &\approx C_{k-1}(\partial M \times 0, -\widetilde{F}|_{\partial M \times 0}) \\ &\approx C_{k-1}(\partial M, -f_0) \\ &\approx C_{k-1}(\partial M \times c, -\widetilde{F}|_{\partial M \times c}) \\ &\approx C_{k-1}(\partial M \times (c+\epsilon, c-\epsilon), -\widetilde{F}|_{\partial M \times (c+\epsilon, c-\epsilon)}) \end{aligned}$$

et que

$$(p_2 \circ \partial_{-\widetilde{F}} \circ \iota_2)|_{Ker(\partial_{-\widetilde{F}|_A})} = \Phi^{-\widetilde{F}|_{\partial M \times [0,c]}} \circ susp^{-1} = susp^{-1} \tag{2.1.12}$$

Ensuite $\widetilde{h}|_{\partial M \times c \times [0,1]} = h_0$ et $\widetilde{h}$ est de la forme $h_0 + \widetilde{\beta}$ sur une région difféomorphe à $\partial M \times (c-\epsilon, c+\epsilon) \times [0,1]$. Ainsi, puisque $\widetilde{\beta}$ possède un minimum local en c, on a que $\Phi^{\widetilde{h}}(x) \in < crit(\widetilde{f}|_{\partial M \times c}) > \mathbb{K} \subseteq C_*(B, \widetilde{f}) \quad \forall x \in < crit(-\widetilde{F}|_{\partial M \times c}) > \mathbb{K}$ et donc

$$\Phi^{\widetilde{h}}|_{<crit - \widetilde{F}|_{\partial M \times c} > \mathbb{K}} = i_\bullet \circ \Phi^{h_0} \circ i_\bullet^{-1} \tag{2.1.13}$$

où $i_\bullet$ est l'inclusion induite par $i : \partial M \times c \hookrightarrow B$. Enfin, des deux équations précédentes, (2.1.12 et 2.1.13), on obtient

$$\begin{aligned}
\psi_\bullet \circ \Phi^{\widetilde{h}} \circ (p_2 \circ \partial_{\widetilde{F}} \circ \iota_2)|_{<crit-\widetilde{F}|_A>\mathbb{K}} &= \psi_\bullet \circ i_\bullet \circ \Phi^{h_0} \circ {i_\bullet}^{-1} \circ susp^{-1} \\
&= \psi_\bullet \circ \check{\Phi}^{h_0} \\
&= i_{1\bullet} \circ \check{\Phi}^{h_0}
\end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\psi_\bullet \circ \Phi^{\widetilde{h}} \circ (p_2 \circ \partial_{\widetilde{F}} \circ \iota_2)|_{<crit-\widetilde{F}|_A>\mathbb{K}} \circ \hat{\Phi}^{h_0'} = i_{1\bullet} \circ \check{\Phi}^{h_0} \circ \hat{\Phi}^{h_0'}$$

d'où la commutativité de 2.1.11 et donc celle de 2.1.10.

Ensuite, considérons $H : M \times [0,1] \to \mathbb{R}$ une homotopie régulière entre $-f$ et $-\widetilde{F}$ dont le flot de $H(\cdot, t) : M \to \mathbb{R}$ est entrant sur $B \subset M$ pour tout temps fixe t. Grâce au recollement 1.3.4, on peut demander que H soit telle que sur $A \times [0,1] \approx \partial M \times (-1,1) \times [0,1]$ on ait que $H|_{\partial M \times (-\epsilon,\epsilon) \times [0,1]}$ soit de la forme

$$H|_{\partial M \times (-\epsilon,\epsilon) \times [0,1]} = -f(x) - \beta(s) + k(t)$$

où $k(t) : [0,1] \to \mathbb{R}$ est une fonction réelle appropriée. Notons que d'après les choix faits dans la construction de $-f$ et $-\widetilde{F}$ ceci est clairement vérifié pour $H(x,0) = -f$ et $H(x,1) = -\widetilde{F}$ rendant ainsi la chose possible.

Considérons maintenant le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
H_k(M,B,-f) \arrow[r, "\partial_{-f_*}"] \arrow[d, "\overline{\Phi}_*^H"] & H_{k-1}(B,-f|_B) \arrow[d, "\Phi_*^{H|_B}"] \\
H_k(M,B,-\widetilde{F}) \arrow[r, "\partial_{-\widetilde{F}_*}"] \arrow[d, "\check{\Phi}_*^{h_0} \circ \phi_{2*}"] & H_{k-1}(B,-\widetilde{F}|_B) \arrow[d, "\psi_* \circ \Phi_*^{\widetilde{h}}"] \\
H_{k-1}(A,f|_A) \arrow[r, "i_{1*}"] & H_{k-1}(M,f)
\end{tikzcd} \tag{2.1.14}$$

La commutativité du carré du bas vient d'être démontrée tandis que celle du carré du haut découle de la naturalité de la longue suite exacte en homologie telle qu'exposée à la section 1.2.3. Ainsi, en utilisant le résutat présenté dans la remarque 2.1.2 et la fonctorialité des morphismes induits par les homotopies, on obtient que

$$\begin{aligned}\check{\Phi}_*^{h_0} \circ \phi_{2*} \circ \overline{\Phi}_*^H &= \check{\Phi}_*^{h_0} \circ \phi_{2*} \circ \phi_{2*}^{-1} \circ \Phi_*^{H|_A} \circ \phi_{2*} \\ &= \check{\Phi}_*^{h_0} \circ \Phi_*^{H|_A} \circ \phi_{2*} \\ &= \check{\Phi}_*^{h_0} \circ id_{H(A,-f|_A)} \circ \phi_{2*} \\ &= \check{\Phi}_*^{h_0} \circ \phi_{2*}\end{aligned}$$

et que $\psi_* \circ \Phi_*^{\widetilde{h}} \circ \Phi_*^{H|_B} = \psi_* \circ \Phi_*^{h_1}$ où h_1 est une homotopie entre $-f|_B$ et $\widetilde{f}$. Bref, on obtient le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} H_k(M,B,-f) \arrow[r, "\partial_{-f*}"] \arrow[d, "\check{\Phi}_*^{h_0}\circ(\phi_2)_*"] & H_{k-1}(B,-f|_B) \arrow[d, "\psi_*\circ\Phi_*^{h_1}"] \\ H_{k-1}(A,f|_A) \arrow[r, "i_{1*}"] & H_{k-1}(M,f) \end{tikzcd} \tag{2.1.15}$$

prouvant ainsi le résultat. □

Ceci conclut la démonstration du théorème 2.1.6. □

2.2. Théorème de la signature

L'objectif de la présente section est de donner une démonstration du théorème de la signature. Le diagramme de Poincaré-Lefschetz étant maintenant construit en homologie de Morse, la preuve donnée à la sous-section 2.2.2 procède essentiellement comme dans [**Br**]. Toutefois, nous aurons besoin des quelques résultats intermédiaires qui suivent pour la démonstration.

2.2.1. Non dégénérescence du produit d'intersection et autres relations

Considérons une fonction Morse-Smale $f : M \to \mathbb{R}$ sur une variété fermée, connexe et orientée M de dimension n. Remarquons que puisque les variétés stables de f correspondent aux variétés instables de $-f$ et que f respecte la condition Morse-Smale, alors les variétés instables de f intersectent transversalement celles de $-f$. De plus, nous pouvons choisir une orientation pour les variétés instables de f et se servir de l'orientation globale pour obtenir une orientation sur les variétés stables de f et finalement prendre cette orientation comme orientation des variétés instables de $-f$ comme on l'a fait précédemment dans la section sur la dualité de Poincaré. Ensuite, choisissons une troisième fonction $g : M \to \mathbb{R}$ ne comportant qu'un unique minimum $z_0 \in crit_0(g)$ qui soit telle que ses variétés stables soient en position générale vis-à-vis des variétés instables de f et $-f$ et choisissons une orientation des variétés stables liées à g qui soit telle que $[W^s(z_0)] = [M]$. On peut obtenir de cette façon le produit d'intersection suivant

$$\mu : C_p(M, f) \otimes C_{n-p}(M, -f) \to C_0(M, g)$$

En général, le choix des fonctions intervenant dans le produit d'intersection est moins restrictif, mais ce choix nous facilitera la démonstration de la non dégénérescence.

Maintenant, si $\alpha \in C_p(M, f)$ et $\alpha' \in C_{n-p}(M, -f)$ sont les éléments associés à un point critique $a \in crit_p(f)$ dans les complexes associés à f et $-f$, alors il est clair que $\mu(\alpha, \alpha') = z_0$. De plus, puisque le degré $n - p$ des points critiques de $-f$ correspond au degré p de f pour les points critiques correspondants, alors la condition Morse-Smale, qui garantit en particulier qu'aucune ligne de flot ne lie deux points critiques de même indice, implique que $\mu(\alpha, x) = 0$ si $x \neq \alpha'$. De cela, on obtient donc que

$$\mu(\alpha, x) = \begin{cases} z_0 & \text{si } x = \alpha' \\ 0 & \text{si } x \neq \alpha' \end{cases}$$

Ensuite, il est clair que dans ce cas le pairing $\mu(\cdot, \cdot) \to < z_0 > \mathbb{K} \approx \mathbb{K}$ nous donne une application

$$\lambda : C_p(M, f) \to C^{n-p}(M, -f)$$

qui est exactement la même que celle utilisée pour obtenir la dualité de Poincaré et commute donc avec la différentielle (voir 1.2.10). Le fait que le produit d'intersection passe en homologie nous fournit un pairing $\mu_*(\cdot, \cdot)$ en homologie et une application associée

$$\gamma : H_p(M, f) \to Hom(H_{n-p}(M, -f), \mathbb{K})$$

et les deux applications précédentes doivent correspondre dans le sens suivant

$$\big(\gamma([x])\big)([y]) = \big(\lambda(x)\big)(y)$$

Mais puisque par la définition de l'application $\beta : H^*(M) \longrightarrow Hom(H_*(M), \mathbb{K})$ du théorème des coefficients universels on a que

$$\big(\beta([\lambda(x)])\big)([y]) = \big(\lambda(x)\big)(y)$$

alors on obtient que

$$\gamma = \beta \circ \lambda_*$$

Puisque $\mathbb{K}$ est un corps, alors cette dernière relation implique que γ est un isomorphisme. Pour cette raison, le pairing $\mu_*(\cdot, \cdot)$ est non dégénéré. On vient donc d'obtenir le résultat suivant

Proposition 2.2.1. *Le produit d'intersection, et donc également le produit cup, fournissent des formes bilinéaires non dégénérées* $\mu_* : H_p(M) \otimes H_{n-p}(M) \longrightarrow \mathbb{K}$ *et* $\mu_* : H^{n-p}(M) \otimes H^p(M) \longrightarrow \mathbb{K}$.

Pour terminer, on aura besoin d'un dernier petit résultat intermédiaire pour pouvoir démontrer le théorème de la signature. Considérons une inclusion de complexe $i : C_*(A) \hookrightarrow C_*(M)$ et les applications du théorème des coefficients universels

$$\beta_M : H^*(M) \longrightarrow Hom(H_*(M), \mathbb{K})$$
$$\beta_A : H^*(A) \longrightarrow Hom(H_*(A), \mathbb{K})$$

De la naturalité de l'application du théorème des coefficients universels on obtient que $\beta_A \circ i^* = (i_*)^* \circ \beta_M$. Donc, si les complexes sont définis avec des coefficients dans un corps, alors β_A et β_M sont des isomorphismes et on a donc forcément que

$$\dim \operatorname{Im}(i^*) = \dim \operatorname{Im}((i_*)^*) \tag{2.2.1}$$

2.2.2. Théorème de la signature

Le matériel théorique nécessaire à la démonstration du théorème de la signature ayant maintenant été obtenu de la théorie de Morse, le reste de la démonstration procède comme dans **[Br]**.

Théorème 2.2.2 (Théorème de la signature). *Soit une variété fermée et connexe ∂M qui soit le bord d'une variété orientée M de dimension $4n+1$. Supposons que les groupes d'homologie et de cohomogie considérés sont à coefficients dans $\mathbb{Q}$, alors la signature de la forme bilinéaire symétrique donnée par*

$$\cup : H^{2n}(\partial M) \otimes H^{2n}(\partial M) \to \mathbb{Q}$$

est 0.

DÉMONSTRATION. Dans le même contexte que précédemment et avec la même notation, considérons la portion suivante du diagramme de Poincaré-Lefschetz

$$\begin{tikzcd} H^{2n}(M,f) \arrow[r, "i_1^*"] & H^{2n}(A,f|_A) \arrow[r, "\delta_f^*"] \arrow[d, "\wr"] \arrow[dr, phantom, "-1"] & H^{2n+1}(M,A,f) \arrow[d, "\wr"] \\ & H_{2n}(A,f|_A) \arrow[r, "i_{1*}"] & H_{2n}(M,f) \end{tikzcd}$$

Remarquons d'abord que de l'égalité 2.2.1, du fait que $(i_{1*})^*$ est l'application duale de i_{1*}, de la commutativité du diagramme et de l'exactitude de la suite en cohomologie, on obtient dans l'ordre la série d'égalités suivantes

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{Im}(i_1^*) &= \dim \operatorname{Im}((i_{1*})^*) \\ &= \dim \operatorname{Im}(i_{1*}) \\ &= \dim \operatorname{Im}(\delta_f^*) \\ &= \dim(H^{2n}(A,f|_A)) - \dim \operatorname{Im}(i_1^*) \end{aligned}$$

Ainsi, on a que

$$\dim(H^{2n}(A,f|_A)) = 2\dim \operatorname{Im}(i_1^*) \tag{2.2.2}$$

Ensuite, puisque ∂M est connexe, on a que A est connexe et on obtient donc que $i_{1*} : H_0(A,f|_A) \to H_0(M,f)$ est un monomorphisme. On doit donc avoir que $\delta_f^* : H^{4n}(A,f|_A) \to H^{4n+1}(M,A,f)$ soit injectif. Ainsi, soit α_1, $\alpha_2 \in H^{2n}(M,f)$, de l'exactitude de la suite en homologie on obtient que

$$i_1^*(\alpha_1 \cup \alpha_2) = 0 \tag{2.2.3}$$

Ce qui, vu la naturalité du produit cup, implique que

$$i_1^*(\alpha_1) \cup i_1^*(\alpha_2) = 0 \tag{2.2.4}$$

Donc, si on pose $W = H^{2n}(A, f|_A)$ et $\dim(H(A, f|_A)) = 2k$, alors grâce aux résultats 2.2.2 et 2.2.4, on obtient qu'il existe un sous-espace $W' \subset W$ de dimension k sur lequel la forme bilinéaire donnée par le produit cup s'annule, c.a.d. $\alpha \cup \beta = 0 \quad \forall\ \alpha, \beta \in W'$. Ensuite, si on dénote par W^+ le sous-espace sur lequel cette forme est définie positive et par W^- le sous-espace où elle est définie négative et que l'on pose $\dim(W^+) = r$, alors de par la proposition 2.2.1 on doit avoir que $\dim(W^-) = 2k - r$, mais puisque $W^+ \cap W' = \{0\}$ et $W^- \cap W' = \{0\}$ ceci implique donc que $r \leq k$ et $2k - r \leq k$ et donc que $r = k$. Bref, $\dim(W^+) = \dim(W^-)$ et la signature est donc zéro. Le fait que l'on puisse identifier canoniquement $C^*(\partial M, f_0)$ et $C^*(A, f|_A)$ termine la démonstration. □

Chapitre 3

GÉOMÉTRIE DU THÉORÈME DE LA SIGNATURE

Dans ce chapitre, nous allons donner une preuve du théorème de la signature en homologie de Morse qui fait plus appel à la géométrie et moins à l'algèbre. Plus précisément, puisque le théorème de la signature découle essentiellement des relations 2.2.2 et 2.2.4 , nous allons dans ce chapitre obtenir un équivalent de chacune de celles-ci de la façon la plus géométrique possible. Par de "façon géométrique", on entend de manière à utiliser les propriétés géométriques des espaces de modules $\mathcal{M}_{x_3}^{x_1x_2}$ et $\mathcal{M}_{xy}$. Ceci se comprend puisque ceux-ci ont servi à définir deux de nos principaux objets d'études : le produit d'intersection et la différentielle. Ainsi, on s'attardera aux propriétés de ces deux espaces et on cherchera à travailler avec le produit d'intersection au lieu du produit cup.

3.1. Un premier équivalent géométrique

Le but de cette section est d'obtenir avec le produit d'intersection un équivalent géométrique de la démonstration de la relation 2.2.4.

Considérons une variété fermée, connexe et orientée ∂M et replaçons-nous dans le même contexte que celui expliqué au début de la section 2.1.1 du chapitre précédent. Reprenons exactement la même notation que celle qui y est expliquée et notons par ∂M la tranche $\partial M \times 0$ de la variété avec collier dont il était question. Supposons que f, g et h soient trois fonctions ayant les mêmes propriétés que la fonction f dont il était question et qu'elles soient choisies de façon à ce que les variétés stables et instables de $f_0, g_0, h_0 : \partial M \to \mathbb{R}$ soient en position générale dans ∂M. Du fait que les fonctions f, g et h soient de la forme

$$f_0 + \beta, g_0 + \beta, h_0 + \beta : \partial M \times (-1, 1) \to \mathbb{R}$$

sur la région $A \approx \partial M \times (-1, 1)$ avec β possédant comme unique point critique un minimum en 0, on ne peut pas demander que les variétés stables et instables associées aux trois fonctions f, g et h soient toutes en position générale dans M. Notamment, si $x \in crit(f_0)$ et $y \in crit(g_0)$, alors $W^u(x)$ et $W^u(y)$ ne peuvent s'intersecter transversalement dans M si elles ont des points en commun (voir proposition 1.3.1). Toutefois, on peut demander que toutes les variétés stables et instables associées à ces trois fonctions soient en position générale en excluant de cette condition les couples de variétés instables associées à des points critiques dans ∂M. Pour la suite des choses, on supposera que f, g et h respectent les propriétés que l'on vient d'énoncer.

Choisissons ensuite une orientation pour les variétés instables de f. Pour ce faire, débutons par choisir une orientation pour chacune des variétés instables des points critiques qui sont dans la région B. Si pour $x \in crit_k(f|_B)$ et pour $x' \in crit_{k-1}(f_0)$ on a $W^s(x') \cap W^u(x) \neq \varnothing$ alors par le résultat 1.1.10 on a que

$$W^u(x') \subset \overline{W^u}(x)$$

Prolongeons l'orientation de $W^u(x)$ à $\overline{W^u}(x)$. Dû aux conditions particulières que respecte f dans un voisinage du bord, on peut dans ce cas bien précis orienter $W^u(x')$ comme le bord de $\overline{W^u}(x)$ avec la convention que le vecteur normal au bord occupe la première composante de la base et que celui-ci doit pointer vers l'extérieur (en faisant abstraction du collier).

Orientons ensuite les variétés instables de g de la même manière que pour celles de f et choisissons une orientation arbitraire pour les variétés stables de h. Enfin, servons-nous de l'orientation globale de M pour orienter la variété ∂M comme le bord de M avec la même convention (toujours en faisant abstaction du collier).

Avec ces choix d'orientation, on a le résultat suivant qui sera utile à la démonstration de la proposition 3.1.3.

Lemme 3.1.1. *Avec les choix d'orientation qui viennent d'être fait et avec x et x' comme précédemment, on a que si $u \in \mathcal{M}_{xx'}$ alors $n_u(x, x') = 1$.*

DÉMONSTRATION. Soit $p \in u$, considérons $[\dot{u}]$, l'orientation donnée par le flot, et $\mathcal{B}(N_pW^s(x'))$, une base donnant l'orientation positive de $N_pW^s(x')$. Puisque selon notre convention d'orientation $[N_pW^s(x')]$ est induite par l'indentification entre $N_{x'}W^s(x')$ et $T_{x'}W^u(x')$ et que $T_{x'}W^u(x')$ a été orienté grâce à $[T_{x'}\overline{W}^u(x)]$ avec le vecteur normal pointant vers l'extérieur, donc dans le même sens que l'orientation de $[\dot{u}]$ prolongée sur $\overline{u}$, on a forcément que

$$[T_pW^u(x)] = [(\dot{u}, \mathcal{B}(N_pW^s(x')))]$$

et donc par 1.1.13 on a que $[u]_{ind} = [\dot{u}]$ et donc que $n_u(x, x') = 1$ $\square$

Avant d'énoncer le résultat 3.1.2, remarquons qu'avec les fonctions f, g et h comme précédemment on obtient de façon analogue au gluing 1.1.13 qui est décrit dans la littérature un gluing particulier sur le bord.

Proposition 3.1.2 (Gluing sur le bord lorsque dim$\mathcal{M}_z^{xy}$=1). *Soit les trois fonctions f, g et h que l'on vient de décrire et des points critiques $x \in crit_{k_1}(f|_B)$, $x' \in crit_{k_1-1}(f_0)$, $y \in crit_{k_2}(g|_B)$, $y' \in crit_{k_2-1}(g_0)$ et $z \in crit_{k_1+k_2-dimM-1}(h_0)$, alors il existe un plongement :*

$$\# : [\rho_0, \infty) \times \widehat{\mathcal{M}}_{xx'} \times \mathcal{M}_z^{x'y'} \times \widehat{\mathcal{M}}_{yy'} \longrightarrow \mathcal{M}_z^{xy}$$
$$(\rho, u, q, v) \longmapsto u\#_\rho q\#_\rho v$$

tel que $\lim_{\rho\to\infty} u\#_\rho q\#_\rho v = (u, q, v)$ et $\mathcal{M}_z^{xy}\backslash u\#_{[\rho_0,\infty)}q\#_{[\rho_0,\infty)}v$ ne possède pas de suites qui convergent vers (u, q, v).

Pour la suite des choses, nous allons imposer des conditions supplémentaires sur M et sur les points critiques $x \in crit(f|_B)$ et $y \in crit(f|_B)$. Nous demanderons que dim$M = 4n + 1$, que $ind(x) = ind(y) = 2n + 1$ et que M ne possède qu'un unique minimum, noté z_0, dont la variété stable $W^s(z_0)$ est orientée de façon à ce qu'elle donne l'orientation globale, c.a.d. $[T_{z_0}W^s(z_0)] = [T_{z_0}M]$. C'est dans ce contexte que l'on obtient le résultat important suivant.

Proposition 3.1.3. *Considérons deux points critiques, $x \in crit_{2n+1}(f|_B)$ et $y \in crit_{2n+1}(g|_B)$, si $\partial_f(x) \in < crit(f_0) > \mathbb{K}$ et $\partial_g(y) \in < crit(g_0) > \mathbb{K}$ alors on a que le produit d'intersection $\mu(\partial_f(x), \partial_g(y)) = 0$.*

DÉMONSTRATION. Premièrement, on aura besoin du lemme qui suit pour la démonstration

Lemme 3.1.4. *Si $\nu \in \mathcal{M}_{z_0}^{xy}$ est un segment de courbe se brisant sur le bord, disons sur $(u, q, v) \in \widehat{\mathcal{M}}_{xx'} \times \mathcal{M}_{z_0}^{x'y'} \times \widehat{\mathcal{M}}_{yy'}$, alors en notant par $[\overline{\nu}]$ l'orientation induite par $[\nu]$ sur $\overline{\nu}$ et en choisant un vecteur $v^{xyz} \in T_q\overline{\nu}$ tel que $[v^{xyz}] = [\overline{\nu}]$ on obtient que $\mathfrak{n}_q(x', y', z_0) = 1$ si v^{xyz} pointe vers l'extérieur et $\mathfrak{n}_q(x', y', z_0) = -1$ si v^{xyz} pointe vers l'intérieur (rappelons-nous que $q \in \mathcal{M}_{z_0}^{x'y'}$ est vu comme l'intersection de $W^u(x') \cap W^u(y') \cap W^s(z_0) \subset \partial M$)*

DÉMONSTRATION. Supposons que v^{xyz} pointe vers l'extérieur. Commençons par choisir un plongement

$$\gamma : (0, 1] \to \overline{\nu}\,; \quad \text{avec } 1 \mapsto q$$

Et choisissons des bases

$$\mathcal{B}^x(\rho) = (v^{xyz}(\rho), v_2^{xz}(\rho), ..., v_{2n+1}^{xz}(\rho))$$

$$\mathcal{B}^y(\rho) = (v^{xyz}(\rho), v_2^{yz}(\rho), ..., v_{2n+1}^{yz}(\rho))$$

pour $T_{\gamma(\rho)}\overline{W^u}(x)$ et $T_{\gamma(\rho)}\overline{W^u}(y)$, où $[v^{xyz}(\rho)] = [\overline{\nu}]$, à la manière de ce qui a été exprimé à la remarque 1.1.18 et cela de façon à ce que

$$[\mathcal{B}^x(\rho)] = [T_{\gamma(\rho)}\overline{W^u}(x)] \tag{3.1.1}$$

$$[\mathcal{B}^y(\rho)] = [T_{\gamma(\rho)}\overline{W^u}(y)] \tag{3.1.2}$$

Ainsi, de la définition 1.1.16 de l'orientation sur ν, il est clair que

$$[(v^{xyz}(\rho), v_2^{yz}(\rho), ..., v_{2n+1}^{yz}(\rho), v_2^{xz}(\rho), ..., v_{2n+1}^{xz}(\rho))] = [T_{\gamma(\rho)}W^s(z_0)] = [M] \tag{3.1.3}$$

Donc, puisque $v^{xyz}(1)$ pointe vers l'extérieur, de notre convention pour l'orientation du bord et des variétés instables qu'il contient, on obtient des égalités 3.1.1, 3.1.2 et 3.1.3 que :

$$[(v_2^{xz}(1), ..., v_{2n+1}^{xz}(1))] = [W^u(x')], \tag{3.1.4}$$

$$[(v_2^{yz}(1), ..., v_{2n+1}^{yz}(1))] = [W^u(y')] \tag{3.1.5}$$

et que $$[(v_2^{yz}(1), ..., v_{2n+1}^{yz}(1), v_2^{xz}(1), ..., v_{2n+1)}^{xz}(1))] = [\partial M] = [W^s(z_0) \cap \partial M] \tag{3.1.6}$$

Ainsi, de notre définition du signe (1.1.19), on obtient que $\mathfrak{n}_q(x', y', z_0) = 1$. De façon tout à fait analogue, on trouve que $\mathfrak{n}_q(x', y', z_0) = -1$ lorsque v^{xyz} pointe vers l'intérieur. □

Ce résultat en main, on peut démontrer la proposition. Commençons par considérer la variété compacte orientée de dimension 1 donnée par $\overline{\mathcal{M}}_{z_0}^{xy}$. On a que le bord de cette variété est donné par

$$\begin{aligned}
\partial\overline{\mathcal{M}}_{z_0}^{xy} = & \bigcup_{x' \in crit_{2n}(f|_B)} \widehat{\mathcal{M}}_{xx'} \times \mathcal{M}_{z_0}^{x'y} \bigcup_{(x',y') \in crit_{2n}(f_0) \times crit_{2n}(g_0)} \widehat{\mathcal{M}}_{xx'} \times \mathcal{M}_{z_0}^{x'y'} \times \widehat{\mathcal{M}}_{yy'} \\
& \bigcup_{y' \in crit_{2n}(g|_B)} \widehat{\mathcal{M}}_{yy'} \times \mathcal{M}_{z_0}^{xy'} \bigcup_{z' \in crit_1(h|_B)} \mathcal{M}_{z'}^{xy} \times \widehat{\mathcal{M}}_{z'z_0} \\
= & \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2 \bigcup \Gamma_3 \bigcup \Gamma_4
\end{aligned}$$

en posant

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &= \bigcup_{x' \in crit_{2n}(f|_B)} \widehat{\mathcal{M}}_{xx'} \times \mathcal{M}_{z_0}^{x'y} \\
\Gamma_2 &= \bigcup_{(x',y') \in crit_{2n}(f_0) \times crit_{2n}(g_0)} \widehat{\mathcal{M}} \times \mathcal{M}_{z_0}^{x'y'} \times \widehat{\mathcal{M}}_{yy'} \\
\Gamma_3 &= \bigcup_{y' \in crit_{2n}(g|_B)} \widehat{\mathcal{M}}_{yy'} \times \mathcal{M}_{z_0}^{xy'} \\
\Gamma_4 &= \bigcup_{z' \in crit_1 h|_B} \mathcal{M}_{z'}^{xy} \times \widehat{\mathcal{M}}_{z'z_0}
\end{aligned}$$

Chaque composante du bord, qu'elle soit du type $(u, q) \in \Gamma_1$, $(u, q, v) \in \Gamma_2$, $(v, q) \in \Gamma_3$, ou $(q, \ell) \in \Gamma_4$ possède donc un signe noté $[(u, q)]$, $[(u, q, v)]$, $[(v, q)]$ ou $[(q, \ell)]$ donné en orientant $\partial\overline{\mathcal{M}}_{z_0}^{xy}$ comme le bord de $\overline{\mathcal{M}}_{z_0}^{xy}$. Remarquons que, toujours avec la notation de la section 1.1.4, de par le résulat 1.1.18 , on a que $[(u, q)] = n_u \mathfrak{n}_q$, $[(v, q)] = (-1)^{4n+1-2n-1} n_v \mathfrak{n}_q = n_v \mathfrak{n}_q$ et $[(q, \ell)] = n_q \mathfrak{n}_\ell$.

Ensuite, puisque $\partial_f(x) \in < crit(f_0) > \mathbb{K}$ on a que $\sum_{u \in \mathcal{M}xx'} n_u(x,x') = 0 \quad \forall\, x' \in crit(f|_B)$. Ainsi on obtient que

$$\sum_{(u,q)\in \Gamma_1} [(u,q)] = \sum_{x' \in crit_{2n}(f|_B)} \sum_{u \in \mathcal{M}xx'} \sum_{q \in \mathcal{M}_{z_0}^{x'y}} n_u(x,x')\mathfrak{n}_q(x',y,q) = 0 \tag{3.1.7}$$

De même, on a que

$$\sum_{(v,q)\in \Gamma_3} [(v,q)] = 0$$

Aussi, puisque z_0 est l'unique minimum, on doit avoir que

$$\sum_{\ell \in \mathcal{M}z'z_0} n_\ell(z',z_0) = 0 \quad \forall\, z' \in crit(h|_B) \tag{3.1.8}$$

et donc que

$$\sum_{(q,\ell)\in \Gamma_4} [(q,\ell)] = 0$$

Ainsi, on a donc que

$$\sum_{\xi \in \partial\overline{\mathcal{M}}_{z_0}^{xy}} [\xi] = \sum_{(u,q)\in \Gamma_1} [(u,q)] + \sum_{(u,v,q)\in \Gamma_2} [(u,v,q)] + \sum_{(v,q)\in \Gamma_3} [(v,q)] + \sum_{(q,\ell)\in \Gamma_4} [(q,\ell)] \tag{3.1.9}$$

$$= \sum_{(u,v,q)\in \Gamma_2} [(u,v,q)] \tag{3.1.10}$$

Mais puisque $\partial\overline{\mathcal{M}}_{z_0}^{xy}$ est le bord d'une variété de dimension 1, on obtient que $\sum_{\xi \in \partial\overline{\mathcal{M}}_{z_0}^{xy}} [\xi] = 0$ et donc que

$$\sum_{(u,v,q)\in \Gamma_2} [(u,v,q)] = 0$$

Il ne nous reste donc plus qu'à montrer que $\sum_{(u,v,q)\in \Gamma_2} [(u,v,q)]z_0 = \mu(\partial(x),\partial(y))$. Pour obtenir ce résultat, remarquons que grâce aux lemmes 3.1.4 et 3.1.1 on obtient que $[(u,q,v)] = \mathfrak{n}_q = n_u n_v \mathfrak{n}_q$. Ensuite, comme par hypothèse

$\partial_f(x) \in< crit(f_0) > \mathbb{K}$ et $\partial_g(y) \in< crit(g_0) > \mathbb{K}$, on a les égalités suivantes

$$\begin{aligned}
\mu(\partial(x),\partial(y)) &= \mu\Big(\sum_{x'\in crit_{2n}(f_0)} n(x,x')x', \sum_{y'\in crit_{2n}(g_0)} n(y,y')y'\Big)\\
&= \sum_{x'\in crit_{2n}(f_0)}\sum_{y'\in crit_{2n}(g_0)} \mu\Big(n(x,x')x', n(y,y')y'\Big)\\
&= \sum_{x'\in crit_{2n}(f_0)}\sum_{y'\in crit_{2n}(g_0)} \mu\Big(\Big(\sum_{u\in\mathcal{M}xx'} n_u(x,x')\Big)x', \Big(\sum_{v\in\mathcal{M}yy'} n_v(y,y')\Big)y'\Big)\\
&= \sum_{x'\in crit_{2n}(f_0)}\sum_{y'\in crit_{2n}(g_0)}\sum_{u\in\mathcal{M}xx'}\sum_{v\in\mathcal{M}yy'} n_u(x,x')n_v(y,y')\mu(x',y')\\
&= \sum_{x'\in crit_{2n}(f_0)}\sum_{y'\in crit_{2n}(g_0)}\sum_{u\in\mathcal{M}xx'}\sum_{v\in\mathcal{M}yy'} n_u(x,x')n_v(y,y')\mathfrak{n}(x',y',z_0)z_0\\
&= \sum_{x'\in crit_{2n}(f_0)}\sum_{y'\in crit_{2n}(g_0)}\sum_{u\in\mathcal{M}xx'}\sum_{v\in\mathcal{M}yy'} n_u(x,x')n_v(y,y')\Big(\sum_{q\in\mathcal{M}_{z_0}^{x'y'}} \mathfrak{n}_q(x',y',z_0)\Big)z_0\\
&= \sum_{x'\in crit_{2n}(f_0)}\sum_{y'\in crit_{2n}(g_0)}\sum_{u\in\mathcal{M}xx'}\sum_{v\in\mathcal{M}yy'}\sum_{q\in\mathcal{M}_{z_0}^{x'y'}} n_u(x,x')n_v(y,y')\mathfrak{n}_q(x',y',z_0)z_0\\
&= \sum_{x'\in crit_{2n}(f_0)}\sum_{y'\in crit_{2n}(g_0)}\sum_{u\in\mathcal{M}xx'}\sum_{v\in\mathcal{M}yy'}\sum_{q\in\mathcal{M}_{z_0}^{x'y'}} [(u,v,q)]z_0\\
&= \sum_{(u,v,q)\in\Gamma_2} [(u,v,q)]z_0
\end{aligned}$$

□

Corollaire 3.1.5. *Dans le cas général, considérons* $x \in< crit_{2n+1}(f|_B) > \mathbb{K}$ *et* $y \in< crit_{2n+1}(g|_B) > \mathbb{K}$*, supposons* $\partial_f(x) \in< crit(f_0) > \mathbb{K}$*,* $\partial_g(y) \in< crit(g_0) > \mathbb{K}$*, alors on a que le produit d'intersection* $\mu(\partial_f(x), \partial_g(y)) = 0$*.*

DÉMONSTRATION. On a les décompositions

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \quad \text{avec} \quad x_i \in crit_{2n+1}(f|_B), \alpha_i \in \mathbb{K} \tag{3.1.11}$$

$$y = \sum_{i=j}^{m} \beta_j y_j \quad \text{avec} \quad y_j \in crit_{2n+1}(f|_B), \beta_j \in \mathbb{K} \tag{3.1.12}$$

Notons :

$$\Gamma_1(x_i,y_j) = \bigcup_{x'\in crit_{2n}(f|_B)} \widehat{\mathcal{M}}_{x_ix'} \times \mathcal{M}_{z_0}^{x'y_j}$$

$$\Gamma_2(x_i,y_j) = \bigcup_{(x',y')\in crit_{2n}(f_0)\times crit_{2n}(g_0)} \widehat{\mathcal{M}}_{x_ix'} \times \mathcal{M}_{z_0}^{x'y'} \times \widehat{\mathcal{M}}_{y_jy'}$$

$$\Gamma_3(x_i,y_j) = \bigcup_{y'\in crit_{2n}(g|_B)} \widehat{\mathcal{M}}_{y_jy'} \times \mathcal{M}_{z_0}^{x_iy'}$$

$$\Gamma_4(x_i,y_j) = \bigcup_{z'\in crit_1(h)|_B} \mathcal{M}_{z'}^{x_iy_j} \times \widehat{\mathcal{M}}_{z'z_0}$$

En additionnant l'expression 3.1.9 associée à chaque couple (x_i, y_j) multipliée par le coefficient $\alpha_i\beta_j$ on obtient que

$$0 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{(u,q)\in\Gamma_1(x_i,y_j)} \alpha_i\beta_j[(u,q)] + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{(u,v,q)\in\Gamma_2(x_i,y_j)} \alpha_i\beta_j[(u,v,q)]$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{(v,q)\in\Gamma_3(x_i,y_j)} \alpha_i\beta_j[(v,q)] + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{(q,\ell)\in\Gamma_4(x_i,y_j)} \alpha_i\beta_j[(q,\ell)]$$

Mais, puisque par hypothèse $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i n(x_i,x')x' = 0 \quad \forall x' \in crit(f|_B)$, comme à la ligne 3.1.7, on obtient

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{(u,q)\in\Gamma_1(x_i,y_j)} \alpha_i\beta_j[(u,q)] = 0$$

De façon analogue, $\sum_{j=1}^{n} \beta_j n(y_j,y')y' = 0 \ \forall y' \in crit(g|_B)$ implique que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{(v,q)\in\Gamma_3(x_i,y_j)} \alpha_i\beta_j[(v,q)] = 0$$

et la relation 3.1.8 implique comme précédemment que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{(q,\ell)\in\Gamma_4(x_i,y_j)} \alpha_i\beta_j[(q,\ell)] = 0$$

Donc, on obtient finalement des quatre dernières égalités que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{(u,v,q)\in\Gamma_2(x_i,y_j)} \alpha_i\beta_j[(u,v,q)] = 0 \tag{3.1.13}$$

Ainsi, en utilisant la relation

$$\mu(\partial(x_i),\partial(y_i)) = \sum_{(u,v,q)\in\Gamma_2(x_i,y_i)} [(u,v,q)]z_0$$

obtenue lors de la démonstration de 3.1.3 et se servant ensuite de l'égalité 3.1.13, on obtient que

$$\begin{aligned}\mu(\partial(x),\partial(y)) &= \mu(\partial(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i),\partial(\sum_{j=1}^{m}\beta_j y_j)) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{(u,v,q)\in\,\Gamma_2(x_i,y_j)}\alpha_i\beta_j[(u,v,q)]z_0 \\ &= 0\end{aligned}$$

□

Remarque 3.1.6. *Tout au long de cette section, nous avons assumé que ∂M était connexe. Si cette condition n'est pas respectée, on peut définir la signature sur ∂M comme étant la signature de la forme bilinéaire symétrique donnée par la somme des formes associées à chacune des composantes (qui doivent être en nombre fini) ;*

$$\mu_* = \sum \mu_{i*}$$

et l'on peut facilement adapter à ce cas la preuve que l'on vient de donner pour obtenir le même résultat, permettant ainsi de démontrer le théorème de la signature sans demander la connexité de ∂M.

3.2. Géométrie du diagramme de Poincaré-Lefschetz

Nous allons dans cette section traiter le résultat équivalent pour le produit d'intersection de ce qui avait été obtenu au chapitre précédent pour le produit cup à l'égalité 2.2.2, et ce, en mettant l'accent sur l'aspect géométrique de la démonstration. Mais, comme nous le verrons, nous avons déjà presqu'entièrement fait le travail lors du chapitre 2. Ainsi, une bonne partie de la tâche à effectuer sera de décrire où la géométrie intervient.

Soit la fonction f de la section précédente, M une variété de dimension $4n+1$ avec bord ∂M à laquelle on a ajouté un collier et $A \subset M$ la même région qu'au chapitre précédent. Considérons la section de la longue suite exacte en homologie donnée par

$$H_{2n+1}(M,A,f) \xrightarrow{\partial_{f*}} H_{2n}(A,f|_A) \xrightarrow{i_{1*}} H_{2n}(M,f) \tag{3.2.1}$$

Le résultat recherché est l'obtention, à travers des arguments qui soient le plus possible de nature géométrique, de la relation

$$2\text{dim Im}(\partial_{f*}) = \dim(H_{2n}(A, f|_A)) \tag{3.2.2}$$

Comme expliqué dans le lemme 2.1.3 , la suite 3.2.1 en homologie peut s'obtenir de la suite

$$C_{2n+1}(B, f|_B, \partial_{f|_B}) \supset Ker\partial_{f|_B} \xrightarrow{p_1 \circ \partial_f \circ \iota_1} C_{2n}(A, f|_A, \partial_{f|_A}) \xrightarrow{i_{1\bullet}} C_{2n}(M, f, \partial_f)$$

qui peut être vue comme un équivalent plus géométrique du lemme du serpent. Ainsi, l'exactitude de la suite 3.2.1 est évidente d'un point de vue géométrique puisque

$$i_{1\bullet}(p_1 \circ \partial_f \circ \iota_1(Ker\partial_{f|_B})) = \partial_f(X)$$

où $X = \{x \in < crit_k(f|_{M\setminus A}) > \mathbb{K} | \partial_f(x) \in A\}$ et que si $[a] \in H(A, f|_A)$; $[a] \neq 0$, alors $[i_1(a)] = 0 \Leftrightarrow a \in \partial_f(X)$.

Il ne nous reste donc plus qu'à obtenir le plus géométriquement possible que

$$\text{dim Im}(i_{1*}) = \text{dim Im}(\partial_{f*})$$

pour conclure à 3.2.2.

Or, dans la section 2.1.3, on a étudié le diagramme qui suit

$$\begin{tikzcd}
H^{2n}(A, f|_A) \arrow[r, "\delta_f^*"] \arrow[d, "(\phi_2^{-1})_* \circ (\lambda^{-1}_{f|_A})_*"] \arrow[dr, phantom, "-1^k"] & H^{2n+1}(M, A, f) \arrow[d, "(\lambda^{-1}_{f|_B})_* \circ (\phi_1^{-1})^*"] \\
H_{2n+1}(M, B, -f) \arrow[r, "\partial_{-f*}"] \arrow[d, "\check{\Phi}_*^{h_0} \circ (\phi_2)_*"] & H_{2n}(B, -f|_B) \arrow[d, "\psi_* \circ \Phi_*^{h_1}"] \\
H_{2n}(A, f|_A) \arrow[r, "i_{1*}"] & H_{2n}(M, f)
\end{tikzcd}$$

où la commutativité du carré du bas a été obtenue de façon géométrique, tandis que celle du haut a été obtenue de l'identification canonique faite à travers l'application λ de la dualité de Poincaré tel qu'expliqué dans la démonstration du lemme 2.1.4. Ainsi, en remarquant que

$$(\partial_{f_*})^* \circ \beta_A = \beta_{(M,A)} \circ \delta_f^*$$

où

$$\beta_A : H^*(A, f|_A) \to Hom(H_*(A, f|_A), \mathbb{K})$$

$$\beta_{(M,A)} : H^*(M, A, f) \to Hom(H_*(M, A, f), \mathbb{K})$$

sont les applications du théorème des coefficients universels, on obtient que

$$\dim \operatorname{Im}(i_{1*}) = \dim \operatorname{Im}((\partial_{f*})^*) = \dim \operatorname{Im}(\partial_{f*})$$

et on a donc le résultat cherché.

BIBLIOGRAPHIE

[BaHu] A. BANYAGA, D. HURTUBISE, *Lectures on morse homologie*, Kluwer Academic Plublishers, Dordrecht, 2004.

[Br] GLEN E. BREDON, *Topology and Geometry*, Graduate texts in mathematics, Springer-Verlag, New-York, 1993.

[CoRa] OCTAV CORNEA, ANDREW RANICKI, *Rigidity and gluing for Morse and Novikov complexes*, J. Eur. Math. Soc. 5, 343-394 (2004)

[Ch] FRANÇOIS CHARETTE, *Opération d'intersection généralisé en théorie de Morse*, Mémoire de maîtrise, Université de Montréal (2007)

[Mi] JOHN W. MILNOR, *Morse Theory*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1963.

[Mi2] JOHN W. MILNOR, *Topology from the differentiable viewpoint*, The University Press, Princeton, New Jersey,1967.

[Ro] OLIVIER ROUSSEAU, *Quelques propriétés du complexe de Morse-Novikov*, Mémoire de maîtrise, Université de Montréal (2005)

[Sc] MATTHIAS SCHWARZ, *Morse Homology*, PM. 111, Birkhäuser, Basel 1993.

[We] JOA WEBER, *The Morse-Witten complex via dynamical systems*, J. Eur. Math. Soc. 5 (2005), 343-394