Université de Montréal

SUPERSYMÉTRISATION DES ÉQUATIONS DE KDV ET mKDV ET SOLUTIONS SUPERSOLITONIQUES

par

Marie-Josée Bolduc

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en mathématiques

Orientation mathématiques appliquées

juin 2007

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

SUPERSYMÉTRISATION DES ÉQUATIONS DE KDV ET mKDV ET SOLUTIONS SUPERSOLITONIQUES

présenté par

Marie-Josée Bolduc

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Michel Grundland
(président-rapporteur)

Véronique Hussin
(directeur de recherche)

Jean-Marc Terrier
(membre du jury)

Mémoire accepté le:
14 juin 2007

SOMMAIRE

En physique, les équations différentielles non-linéaires de Korteweg-de Vries (KdV) et Korteweg-de Vries modifiées (mKdV) possèdent des applications intéressantes dues à leurs solutions solitoniques. Les nouvelles solutions de ce type provenant des versions supersymétriques (SUSY) de ces équations seront l'objet principal de ce travail.

Notre objectif sera de mettre en évidence différentes procédures de supersymétrisation (certaines connues et une nouvelle) des équations de KdV et mKdV lorsqu'on a une ou deux variables de Grassmann. À partir des supersymétrisations à deux variables de Grassmann, nous appliquerons deux méthodes de réduction par symétrie (une connue et l'autre nouvelle), nous permettant de résoudre partiellement le système associé à la superéquation de KdV et trouver de nouvelles solutions particulières (solitoniques et polynomiales).

Cette stratégie nous amènera à nous pencher sur une méthode élaborée par Ryogo Hirota, plus directe, compacte et efficace pour trouver des solutions solitoniques dans le contexte classique. Cette méthode a été récemment étendue au contexte supersymétrique (SUSY), nous permettant de trouver de nouveaux supersolitons, sans avoir à résoudre un système d'équations. Ainsi, nous pourrons comparer les solutions solitoniques et supersolitoniques obtenues suite à l'application de la méthode Hirota aux équations de KdV et mKdV, dans le contexte classique et supersymétrique.

Mots clés : Équations de Korteweg-de Vries et Korteweg-de Vries modifiée supersymétriques, variables de Grassmann, dérivées covariantes, solutions solitoniques, bilinéarisation de Hirota.

SUMMARY

In physical theory, it is well known that the Korteweg-de Vries (KdV) and modified Korteweg-de Vries (mKdV) non-linear differential equations possess solitonic solutions. New solutions of this type related to the supersymmetric (SUSY) versions of these equations will be the principal subject of this thesis.

Our goal is to study some known and unknown supersymmetric versions of the KdV et mKdV equations with one or two Grassmann variables. We then apply two reduction methods (one known and the other one new) to the supersymmetric equations using two Grassmann variables, which will lead us to a partial resolution of the system obtained. A new solitonic solution and another polynomial one will be found.

Another more efficient method for determining solitonic solutions has been proposed by Ryogo Hirota in 1971. Recently, it has been extended to the supersymmetric context, allowing us to find new supersolitonic solutions, without having to solve the system related to a supersymmetric equation. With this direct method, we can actually obtain a general form for solitonic solutions. Finally, we will compare solitonic solutions obtained by Hirota's method for the KdV and mKdV equations in the classical and supersymmetric contexts.

Keywords : Supersymmetric Korteweg-de vries and modified Korteweg-de Vries equation, Grassmann variables, covariant derivatives, solitonic solutions, Hirota bilinear formalism.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES

REMERCIEMENTS

J'aimerais tout d'abord remercier ma directrice Véronique Hussin pour son enthousiasme, sa grande écoute et surtout sa patience face au chevauchement de mon parcours académique et de ma carrière de professeur. Ce projet unique m'a permis de me valoriser et d'explorer le monde fascinant et sans borne de la recherche. Merci également à Véronique pour son soutien financier qui m'a permis de me plonger sans tracas dans mes longs calculs.

J'aimerais également remercier mes évaluateurs de leur intérêt envers ce mémoire. Merci au département de mathématiques pour son soutien financier, à mes professeurs pour m'avoir transmis leur passion ainsi qu'à tous mes collègues étudiants qui ont partagé avec moi le plaisir des mathématiques. Merci à Francis Forget et Vinal Ramdenee ; vous avez toujours su régler mes pépins informatiques.

Merci enfin à mes parents pour leur soutien moral et financier ; sans connaître le contenu de ce mémoire, vous avez cru en moi. Merci à mon copain Mathieu, toi qui m'a suivie depuis le baccalauréat, qui m'a soutenue dans les moments les plus pénibles et qui a partagé ma joie lorsque finalement, tout fonctionnait.

INTRODUCTION

Plusieurs domaines, dont celui de la physique, bénéficient des applications des équations différentielles non-linéaires de Korteweg-de Vries (KdV) et Korteweg-de Vries modifiées (mKdV), en raison notamment de leurs solutions solitoniques (solitons). Celles-ci sont modélisées par des ondes qui se propagent en conservant leurs propriétés (vitesse, amplitude), même si elles interagissent avec d'autres ondes du même type. Ces types d'ondes présentent entre autres des avantages considérables dans le domaine des communications (transmission de données à très haut débit) puisque cela permet la propagation de plusieurs ondes d'amplitudes différentes sur une même fibre [**HAS**].

Ce mémoire portera donc sur l'analyse de ces deux équations dans le contexte supersymétrique et plus précisément, sur l'obtention de nouvelles solutions supersolitoniques. Pour ce faire, des procédures de supersymétrisation seront mises en évidence, plus particulièrement dans les cas où nous avons une et deux variables de Grassmann. Nous verrons notamment une supersymétrisation à deux variables de Grassmann tout à fait nouvelle pour l'équation de KdV. Notons que plusieurs auteurs se sont intéressés à la résolution d'équations supersymétriques déjà connues; voir, par exemple, Mathieu [**MA1**][**MA2**], Ayari, Hussin & Winternitz [**WIN**] et Ghosh & Sarma [**GHO**].

À partir des supersymétrisations obtenues à deux variables de Grassmann, nous appliquerons deux réductions (une connue et une nouvelle) pour se ramener à une superéquation à une seule variable de Grassmann à laquelle un système de deux équations différentielles à résoudre sera associé. Nous observons que la résolution des équations différentielles associées à une superéquation peut s'avérer fastudieuse, entre autres pour trouver des solutions supersolitoniques.

Pour cette raison, une méthode directe et élégante a été développée par Hirota [**HI1**] en 1971 dans le but de construire des solutions solitoniques pour certaines équations non-linéaires dont KdV et mKdV dans le contexte classique. Plus récemment [**GHO**], cette méthode a été étendue au contexte supersymétrique, faisant ressortir de nouvelles solutions appelées supersolitons (en raison de la combinaison de la contribution bosonique et fermionique de la solution). De manière générale, la méthode de Hirota s'avère intéressante puisqu'elle ne nous oblige pas à développer les équations supersymétriques pour obtenir des équations habituelles à résoudre. Sa mise en application est compacte et simple et nous permet d'obtenir une infinité de solutions solitoniques ou supersolitoniques. Plusieurs auteurs comme Ablowitz [**ABL**], Hietarinta [**HIE**] et Matsuno [**MAS**], discutent de son application à des équations connues de la physique dans le contexte classique tandis que Carstea [**CA1**], [**CA2**], Ghosh [**GHO**] et Liu [**LIU**], discutent de son extension au contexte supersymétrique.

Le contenu du mémoire est donc réparti comme suit. Dans le premier chapitre, un rappel est fait sur les différents éléments nécessaires à la compréhension des chapitres suivants. Nous y donnons les définitions des notions de variable de Grassmann, de supersymétries et de dérivée covariante. Nous voyons également le contexte d'application des équations de KdV et mKdV ainsi que leurs solutions solitoniques connues.

Le second chapitre décrit d'abord les formes courantes de supersymétrisation des équations de KdV et mKdV. Nous considérons les cas où nous avons un superchamp bosonique et un superchamp fermionique à une variable de Grassmann ($N = 1$). Nous décrivons ensuite deux formes de supersymétrisation de l'équation de KdV pour un superchamp bosonique à deux variables de Grassmann ($N = 2$). Une a déjà été étudiée dans la littérature [**WIN**] et consiste à faire intervenir les équations classiques de KdV et mKdV respectivement dans les équations composantes ayant deux variables de Grassmann et aucune variable de Grassmann. L'autre forme est innovatrice et s'inspire de la méthode précédente : nous cherchons à faire intervenir les équations classiques de manière inversée, soit KdV sur l'équation sans variable de Grassmann et mKdV dans l'équation composante ayant deux variables de Grassmann.

Nous procédons ensuite à la réduction des deux superéquations obtenues en appliquant un changement de variables qui permet de réduire le superchamp d'ordre $N = 2$ à un superchamp d'ordre $N = 1$. Pour ce faire, nous comparons deux méthodes : l'une a déjà été abordée par Ayari, Hussin & Winternitz [**WIN**] tandis que l'autre est nouvelle. Enfin, nous procédons à une résolution partielle du système d'équation associé à notre nouvelle supersymétrisation réduite par la méthode déjà connue, faisant ainsi ressortir de nouvelles solutions de type solitoniques et polynomiales.

Dans le troisième chapitre, nous explicitons la méthode proposée par Hirota pour déterminer des solutions solitoniques dans le contexte classique. Nous appliquons cette méthode aux équations de KdV et mKdV afin de décrire les solutions solitoniques connues et d'en trouver de nouvelles. Nous nous penchons ensuite sur l'extension plus récente de la méthode de Hirota au contexte supersymétrique en l'appliquant aux versions SUSY de KdV et mKdV pour trouver de nouveaux supersolitons. Finalement, nous comparons les solutions obtenues dans le contexte classique et supersymétrique pour chacune des équations.

La contribution de ce mémoire peut donc être décrite par les trois réalisations suivantes. Tout d'abord, mettre en évidence une nouvelle supersymétrisation à deux variables de Grassmann pour l'équation de KdV. Puis, à partir de celle-ci, appliquer une méthode de réduction connue et résoudre partiellement le système d'équations obtenu, nous permettant de trouver de nouvelles solutions supersolitoniques. Ces résultats nous mènent à la dernière étape qui consiste à mettre en évidence les avantages de la méthode de Hirota, car celle-ci nous permet de déterminer une forme générale pour les solutions supersolitoniques sans avoir à développer les équations supersymétriques. De cette méthode simple et compacte découle une infinité de supersolitons dans le contexte supersymétrique.

Chapitre 1

PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre, nous survolerons différents concepts théoriques nécessaires à la compréhension du sujet étudié dans le cadre de ce mémoire. Nous y donnerons une brève description des variables de Grassmann et aborderons les notions de supersymétrie et de dérivée covariante. Nous verrons comment ces objets mathématiques sont utilisés dans le contexte particulier des équations de KdV et mKdV.

1.1. Algèbres et variables de Grassmann

L'ouvrage de Cornwell [**COR**] aborde de manière bien détaillée les algèbres de Grassmann dont nous donnerons ici seulement les lignes essentielles. Ainsi, on peut constuire une algèbre de Grassmann à partir d'un ensemble de N générateurs θ_1, θ_2, ..., θ_N en définissant le produit suivant :

$$\theta_i\theta_j = -\theta_j\theta_i, \qquad \forall i, j = 1, 2, ..., N. \tag{1.1.1}$$

On appelle ces générateurs, des variables de Grassmann, et on dit que ce sont des quantités anticommutantes. On les désigne aussi comme des quantités impaires tandis que les variables commutantes sont des quantités paires.

Dans ce mémoire, nous travaillerons avec des superespaces vectoriels faisant intervenir une ou deux variables de Grassmann. Dans le cas d'une seule variable notée θ, on constate par le produit donné ci-haut que $\theta^2 = 0$. En ce qui concerne le cas de deux variables notées θ_1 et θ_2, celles-ci satisfont le produit donné en (1.1.1) et donc, on a $\theta_1^2 = \theta_2^2 = 0$. Notons finalement que les variables de Grassmann anticommutent seulement entre elles, mais pas avec les variables paires.

1.2. SUPERSYMÉTRIES

Nous savons qu'il est possible d'utiliser les groupes de symétries d'une équation différentielle pour déterminer des solutions à cette dernière. On retrouve notamment les détails à ce sujet dans l'ouvrage de Olver [**OLV**]. L'objectif des supersymétries est le même, soit de conserver l'invariance d'une équation, mais en combinant des variables paires et impaires. Les supersymétries sont également appelées symétries non-classiques. Elles font appel au couplage de champs vectoriels décrits à l'aide de variables paires (bosons) avec des champs vectoriels décrits à l'aide de variables impaires (fermions). C'est dans ce contexte qu'interviendront les variables de Grassmann.

Dans le cadre de ce mémoire, nous nous intéressons aux superchamps vectoriels d'ordre $N = 1$ (1 variable fermionique θ ; 2 variables bosoniques x et t) ainsi qu'aux superchamps vectoriels d'ordre $N = 2$ (2 variables fermioniques θ_1 et θ_2 ; 2 variables bosoniques x et t).

1.2.1. Superchamp vectoriel d'ordre $N = 1$

Considérons un champ $u(x,t)$ et introduisons une nouvelle variable de Grassmann θ telle que $u(x,t)$ soit étendu à un superchamp $\Phi(x,t;\theta)$. Ce dernier pourra être choisi comme étant pair ou impair. D'une part, s'il est choisi comme étant pair, il s'écrira sous la forme $\Phi(x,t;\theta) = u(x,t) + \theta\xi(x,t)$ et la fonction $u(x,t)$ sera bosonique tandis que la fonction $\xi(x,t)$ sera fermionique. D'autre part, si Φ est choisi comme étant impair, il s'écrira plutôt sous la forme $\Phi(x,t;\theta) = \xi(x,t) + \theta u(x,t)$ où $u(x,t)$ et $\xi(x,t)$ conservent la même définition.

Afin de comprendre la forme du superchamp $\Phi(x,t;\theta)$, il suffit de calculer son développement en séries de Taylor autour de $\theta = 0$:

$$\Phi(x,t;\theta) = \Phi(x,t;0) + \theta\partial_\theta\Phi(x,t;0). \tag{1.2.1}$$

On remarque qu'il s'agit d'un développement de Taylor exact, car tous les termes faisant intervenir la variable θ à un ordre supérieur ou égal à deux sont nuls puisque $\theta^2 = 0$.

Ainsi, si on définit notre superchamp vectoriel $\Phi(x,t;\theta)$ comme étant pair, son développement de Taylor en θ prend la forme :

$$\Phi(x,t;\theta) = u(x,t) + \theta\xi(x,t). \tag{1.2.2}$$

Si le superchamp est impair, il peut s'écrire comme

$$\Phi(x,t;\theta) = \xi(x,t) + \theta u(x,t). \tag{1.2.3}$$

1.2.2. Superchamp vectoriel d'ordre $N = 2$

Reprenons notre champ bosonique $u(x,t)$ et introduisons deux nouvelles variables fermioniques θ_1 et θ_2. L'extension de $u(x,t)$ vers un superchamp $A(x,t;\theta_1,\theta_2)$ utilise un raisonnement semblable au cas $N = 1$ et on obtient le développement en séries de Taylor exact autour de $\theta_1 = \theta_2 = 0$ suivant :

$$\begin{aligned} A(x,t;\theta_1,\theta_2) &= A(x,t;0,0) + \theta_1\partial_{\theta_1}A(x,t;0,0) + \theta_2\partial_{\theta_2}A(x,t;0,0) \\ &\quad +\theta_1\theta_2\partial_{\theta_1\theta_2}A(x,t;0,0), \\ &= u(x,t) + \theta_1\xi_1(x,t) + \theta_2\xi_2(x,t) + \theta_1\theta_2 v(x,t). \end{aligned} \tag{1.2.4}$$

Dans ce mémoire, nous allons considérer seulement le cas où le superchamp A est pair. On note que dans l'équation 1.2.4, les fonctions $u(x,t)$ et $v(x,t)$ sont paires tandis que $\xi_1(x,t)$ et $\xi_2(x,t)$ sont des fonctions impaires.

1.3. Dérivée covariante

Dans le contexte supersymétrique, on introduit une dérivée covariante qui est une certaine combinaison des dérivées par rapport aux variables paires et impaires. Étudions l'expression de celle-ci pour les superchamps vectoriels d'ordre $N = 1$ et $N = 2$.

1.3.1. Dérivée covariante pour un superchamp d'ordre $N = 1$

Dans le superespace (x, θ), on veut travailler avec une notion de symétrie que l'on appelle supersymétrie. Cette supersymétrie est générée à partir de la transformation :

$$x' = x + \eta\theta, \tag{1.3.1}$$

$$\theta' = \theta - \eta. \tag{1.3.2}$$

Notons que la variable t (temps) reste inchangée. Comme x est pair et que θ est impair, cela force η à être impair ($\eta^2 = 0$). Exprimons le superchamp vectoriel $\Phi(x, t; \theta)$ en fonction des nouvelles variables x' et θ' et trouvons le développement en séries de Taylor autour de $\eta = 0$:

$$\begin{aligned} \Phi(x', t; \theta') &= \Phi(x + \eta\theta, t; \theta - \eta), & (1.3.3)\\ &= \Phi(x, t; \theta) + (\eta\theta)\partial_x\Phi(x, t; \theta) + (-\eta)\partial_\theta\Phi(x, t; \theta), & (1.3.4)\\ &= \Phi(x, t; \theta) + \eta[\theta\partial_x - \partial_\theta]\Phi(x, t; \theta), & (1.3.5)\\ &= (1 + \eta Q)\Phi(x, t; \theta), & (1.3.6) \end{aligned}$$

où $Q = \theta\partial_x - \partial_\theta$. On note que Q est impair et que $Q^2 = -\partial_x$. Rappelons également que les dérivées ∂_x (opérateur dérivée pair) et ∂_θ (opérateur dérivée impair) commutent.

On cherche à remplacer la dérivée ordinaire ∂_x par une dérivée covariante D telle que D anticommute avec Q. Définissons les dérivées covariantes D et D' suivantes :

$$D = \theta\partial_x + \partial_\theta, \tag{1.3.7}$$

$$D' = \theta'\partial_{x'} + \partial_{\theta'}. \tag{1.3.8}$$

On remarque qu'il s'agit à un signe près de Q et que D et D' sont impaires. On peut facilement vérifier que $D = D'$ en utilisant le fait que :

$$\partial_x = \partial_{x'}, \tag{1.3.9}$$

$$\partial_\theta = -\eta\partial_{x'} + \partial_{\theta'}. \tag{1.3.10}$$

On obtient donc que :

$$\begin{aligned} D'\Phi(x',t;\theta') &= D\Phi(x+\eta\theta,t;\theta-\eta), && (1.3.11)\\ &= D(1+\eta Q)\Phi(x,t;\theta), && (1.3.12)\\ &= (1+\eta Q)D\Phi(x,t;\theta). && (1.3.13) \end{aligned}$$

Enfin, on remarque que $D^2 = \partial_x$ et que :

$$\Rightarrow \{D,Q\} = DQ + QD = 0. \quad (1.3.14)$$

Ainsi, on remarque que, tout comme pour le superchamp Φ, la dérivée covariante est invariante sous la transformation donnée par (1.3.1) et (1.3.2). Une équation écrite en fonction de D et du superchamp sera donc invariante sous cette transformation et sera dite supersymétrique. Pour une équation différentielle classique donnée, notre stratégie sera de lui associer une superéquation telle que la contribution bosonique correspond à l'équation originale.

1.3.2. Dérivée covariante pour un superchamp d'ordre $N = 2$

Dans le cas d'un superchamp vectoriel d'ordre $N = 2$, nous utiliserons deux expressions de dérivées covariantes qui seront toutes deux des combinaisons des dérivées par rapport aux variables bosoniques et fermioniques. Leurs expressions seront de la forme :

$$\begin{aligned} D_1 &= \partial_{\theta_1} + \theta_1\partial_x, && (1.3.15)\\ D_2 &= \partial_{\theta_2} + \theta_2\partial_x. && (1.3.16) \end{aligned}$$

Ces deux dérivées sont impaires telles que :

$$\begin{aligned} D_1^2 = D_2^2 &= \partial_x, && (1.3.17)\\ \{D_1, D_2\} &= 0. && (1.3.18) \end{aligned}$$

Dans ce contexte, la supersymétrisation d'une équation différentielle fera intervenir le superchamp $A(x,t;\theta_1,\theta_2)$ donné en (1.2.4) ainsi que l'action de D_1 et D_2 sur ce dernier de manière à ce que l'une des composantes bosonique corresponde à l'équation différentielle originale.

1.4. Équations de KdV et mKdV

Comme nous étudions les différentes supersymétrisations des équations de KdV et mKdV, voyons d'abord quelques caractéristiques de ces dernières dans le contexte classique. L'équation de KdV s'écrit :

$$u_t + u_{xxx} + 6uu_x = 0, \tag{1.4.1}$$

tandis que celle de mKdV s'écrit :

$$u_t + u_{xxx} - 6u^2u_x = 0. \tag{1.4.2}$$

Les variables indépendantes x et t correspondent respectivement à la position (dimension $n = 2$) et au temps. On se sert notamment de ces équations pour modéliser les vagues dans les eaux de surfaces. Ces vagues solitaires correspondent à ce qu'on appelle des solutions solitoniques (on utilise également le terme soliton). Elles possèdent plusieurs caractéristiques :

1- Les ondes se propagent sans se déformer dans un milieu non-linéaire.

2- Les lois classiques de la dispersion de l'énergie ne sont plus valides (phénomène d'onde de choc). En plus de la conservation d'énergie, on constate également la conservation de la masse, de la quantité de mouvement.

3- Le principe de superposition n'est plus applicable (la combinaison de deux solutions n'engendre pas une troisième solution).

4- Des vagues de densités différentes se propagent avec des vitesses différentes. On note que plus la densité de la vague est élevée, plus sa vitesse l'est également.

5- Suite à l'interaction de deux ondes solitoniques, ces dernières conservent leurs propriétés.

La provenance de solutions solitoniques est, en fait, due à une combinaison entre l'effet dispersif de la partie linéaire de l'équation u_{xxx} et l'effet focalisant de la partie non-linéaire de l'équation uu_x ou u^2u_x. Mathématiquement, une solution solitonique particulière de l'équation de KdV est donnée par :

$$u(x,t) = \frac{k_1^2}{2\cosh^2(\eta_1)}, \tag{1.4.3}$$

tandis qu'une solution solitonique particulière de mKdV est donnée par :

$$u(x,t) = \frac{k_1}{\sinh(\eta_1)}, \tag{1.4.4}$$

où

$$\eta_1 = k_1 x - k_1^3 t + \eta_1^0. \tag{1.4.5}$$

Pour plus de détails sur les solutions solitoniques de ces deux équations, voir notamment l'ouvrage de Drazin et Johnson [**DRA**].

Afin d'obtenir les versions supersymétriques de l'équation (1.4.1), nous allons d'abord considérer ses supersymétrisations à une variable de Grassmann. À partir soit du superchamp pair (1.2.2) ou du superchamp impair (1.2.3), nous bâtirons une superéquation en fonction du superchamp choisi avec D =(1.3.7) comme opérateur différentiel de manière à ce que la contribution bosonique de la superéquation corresponde à l'équation classique de KdV. Nous appliquerons la même stratégie pour déterminer les versions supersymétriques de l'équation de mKdV avec une contribution bosonique de la superéquation correspondant à l'équation classique (1.4.2).

Nous allons ensuite considérer deux supersymétrisations à deux variables de Grassmann et construirons une superéquation en fonction du superchamp pair (1.2.4) et des deux opérateurs différentiels D_1 =(1.3.15) et D_2 =(1.3.16). La première supersymétrisation est connue [**WIN**] et consiste à faire intervenir l'équation de KdV dans l'équation composante à deux variables de Grassmann et l'équation de mKdV dans l'équation composante n'ayant aucune variable de Grassmann. La seconde et nouvelle supersymétrisation consistera à inverser les équations obtenues sur les équations composantes mentionnées dans la première supersymétrisation.

Chapitre 2

ÉQUATIONS SUPERSYMÉTRIQUES DE KDV ET MKDV

Il existe plusieurs formes de symétrisation pour les équations de KdV et de mKdV. Ces formes dépendent principalement du superchamp utilisé (bosonique ou fermionique) ainsi que des valeurs attribuées aux paramètres arbitraires. Ce chapitre a pour but de décrire la façon dont nous obtenons les différentes formes dans le cadre de superchamps fermioniques et bosoniques d'ordre $N = 1$ et d'appliquer ces méthodes au cas d'un superchamp bosonique d'ordre $N = 2$.

2.1. ÉQUATION SUPERSYMÉTRIQUE DE KDV POUR UN SUPERCHAMP D'ORDRE $N = 1$

En premier lieu, considérons le superchamp fermionique $\Phi(x, t; \theta)$ suivant :

$$\Phi(x, t; \theta) = \xi(x, t) + \theta u(x, t), \tag{2.1.1}$$

où $\xi(x, t)$ est une fonction fermionique et $u(x, t)$ est une fonction bosonique. En faisant agir la dérivée covariante D donnée au premier chapitre par (1.3.7) sur Φ, il faut déterminer l'équation supersymétrique qui permet d'obtenir l'équation de KdV pour la variable $u(x, t)$ dans l'équation composante fermionique. Les quantités Φ_t et $D^6\Phi$ font respectivement intervenir les termes θu_t et θu_{xxx}. À partir des résultats présentés à l'annexe A.1, nous remarquons que seuls les termes suivants font intervenir l'expression non-linéaire $\theta u u_x$:

$$\Phi D^3\Phi = \xi u_x - \theta(\xi\xi_x x + uu_x), \qquad D\Phi D^2\Phi = u\xi_x + \theta uu_x, \tag{2.1.2}$$

ce qui nous permet d'écrire l'équation supersymétrique générale de KdV suivante :

$$\Phi_t + D^6\Phi + a\Phi D^3\Phi + bD\Phi D^2\Phi = 0, \tag{2.1.3}$$

où a et b sont deux constantes arbitraires à déterminer. En utilisant l'égalité :

$$D^2(\Phi D\Phi) = D\Phi D^2\Phi + \Phi D^3\Phi, \tag{2.1.4}$$

l'équation (2.1.3) devient :

$$\Phi_t + D^6\Phi + aD^2(\Phi D\Phi) + (b-a)D\Phi D^2\Phi = 0, \tag{2.1.5}$$

dont les équations composantes sont données par :

$$u_t + u_{xxx} + (a+b)uu_x - a\xi\xi_{xx} = 0, \tag{2.1.6}$$

$$\xi_t + \xi_{xxx} + b\xi_x u + a\xi u_x = 0. \tag{2.1.7}$$

Si nous voulons faire intervenir l'équation de KdV (1.4.1) dans l'équation composante (2.1.6), nous prendrons $b = 6 - a$. Nous débouchons sur l'équation supersymétrique :

$$\Phi_t + D^6\Phi + aD^2(\Phi D\Phi) + (6-2a)D\Phi D^2\Phi = 0, \tag{2.1.8}$$

dont les équations composantes couplées sont :

$$u_t + u_{xxx} + 6uu_x - a\xi\xi_{xx} = 0, \tag{2.1.9}$$

$$\xi_t + \xi_{xxx} + (6-a)\xi_x u + a\xi u_x = 0. \tag{2.1.10}$$

Nous rencontrons cette forme générale dans l'article [**WIN**]. Si nous prenons $a = 0$ dans l'équation (2.1.8), nous obtenons l'équation supersymétrique :

$$\Phi_t + D^6\Phi + 6D\Phi D^2\Phi = 0, \tag{2.1.11}$$

dont les équations composantes sont

$$u_t + u_{xxx} + 6uu_x = 0, \tag{2.1.12}$$

$$\xi_t + \xi_{xxx} + 6\xi_x u = 0. \tag{2.1.13}$$

Nous remarquons notamment que la fonction $\xi(x,t)$ n'intervient plus dans la première équation composante, nous donnant ainsi un système de deux équations découplées ; nous parlons alors de supersymétrisation triviale. L'équation (2.1.11) correspond à l'équation KdV B dans l'article [**GHO**].

Une autre forme pour l'équation supersymétrique de KdV est obtenue en prenant $a = 3$ dans l'équation (2.1.8) qui devient

$$\Phi_t + D^6\Phi + 3D^2(\Phi D\Phi) = 0, \tag{2.1.14}$$

dont les équations composantes sont

$$\begin{aligned} u_t + u_{xxx} + 6uu_x - 3\xi\xi_{xx} &= 0, &(2.1.15)\\ \xi_t + \xi_{xxx} + 3\xi_x u + 3\xi u_x &= 0. &(2.1.16)\end{aligned}$$

L'équation (2.1.14) porte le nom de KdV Manin-Radul-Mathieu dans [**GHO**]. Cette équation est particulièrement intéressante, car elle s'écrit :

$$\Phi_t + D^2\left[D^4\Phi + 3\Phi D\Phi\right] = 0, \tag{2.1.17}$$

avec $D^2 = \partial_x$.

En second lieu, considérons plutôt un superchamp bosonique $A(x,t;\theta)$ donné par :

$$A(x,t;\theta) = u(x,t) + \theta\xi(x,t), \tag{2.1.18}$$

et observons l'action de la dérivée covariante D sur le superchamp A de manière à obtenir l'équation de KdV dans une des équations composantes. Nous constatons tout d'abord que l'équation de KdV devra apparaître dans l'équation composante bosonique. Nous remarquons que la seule combinaison de D et A faisant intervenir l'expression uu_x est AD^2A. Il en résulte l'équation supersymétrique générale :

$$A_t + D^6A + aAD^2A = 0, \tag{2.1.19}$$

où a est une constante arbitraire, et dont les équations composantes sont

$$\begin{aligned} u_t + u_{xxx} + auu_x &= 0, &(2.1.20)\\ \xi_t + \xi_{xxx} + a(\xi u_x + u\xi_x) &= 0. &(2.1.21)\end{aligned}$$

Comme pour l'équation supersymétrique (2.1.11), il s'agit d'un système de deux équations découplées étant donné l'absence de la fonction $\xi(x,t)$ dans la première équation composante. Nous parlons encore de supersymétrisation triviale qui est cependant différente de (2.1.12) et (2.1.13) même lorsque $a = 6$.

2.2. Équation supersymétrique de mKdV pour un superchamp d'ordre $N = 1$

Reprenons un superchamp fermionique $\Phi(x,t;\theta) = \xi(x,t) + \theta u(x,t)$ et déterminons quelle devrait être la forme de l'équation supersymétrique permettant d'obtenir l'équation de mKdV pour la variable $u(x,t)$ dans l'équation composante fermionique. En utilisant à nouveau les résultats de l'annexe A.1, nous constatons que les expressions faisant intervenir $\theta u^2 u_x$ sont $\Phi D^3\Phi D\Phi$ et $(D\Phi)^2 D^2\Phi$, ce qui engendre l'équation supersymétrique générale

$$\Phi_t + D^6\Phi + a\Phi D^3\Phi D\Phi + b(D\Phi)^2 D^2\Phi = 0, \tag{2.2.1}$$

où a et b sont deux constantes arbitraires, et dont les équations composantes sont

$$u_t + u_{xxx} + (a+b)u^2 u_x - a(u\xi\xi_x)_x = 0, \tag{2.2.2}$$

$$\xi_t + \xi_{xxx} + a\xi u u_x + bu^2\xi_x = 0. \tag{2.2.3}$$

Si nous considérons l'équation de mKdV (1.4.2), nous obtenons la condition $a + b = -6$. L'équation (2.2.1) devient

$$\Phi_t + D^6\Phi + a\Phi D^3\Phi D\Phi - (6+a)(D\Phi)^2 D^2\Phi = 0, \tag{2.2.4}$$

qui s'écrit en composantes :

$$\begin{aligned} u_t + u_{xxx} - 6u^2 u_x - a(u\xi\xi_x)_x &= 0, & (2.2.5)\\ \xi_t + \xi_{xxx} + a\xi u u_x - (6+a)u^2\xi_x &= 0. & (2.2.6)\end{aligned}$$

L'article de Ghosh [**GHO**] propose l'équation supersymétrique

$$\Phi_t + D^6\Phi - 3\Phi D^3\Phi D\Phi - 3(D\Phi)^2 D^2\Phi = 0, \tag{2.2.7}$$

correspondant au cas particulier $a = -3$. Les équations composantes sont

$$\begin{aligned} u_t + u_{xxx} - 6u^2 u_x + 3(u\xi\xi_x)_x &= 0, & (2.2.8)\\ \xi_t + \xi_{xxx} - 3\xi u u_x - 3u^2\xi_x &= 0. & (2.2.9)\end{aligned}$$

D'autres formes de supersymétrisation sont également possibles si nous considérons l'équation de mKdV sous la forme

$$u_t + u_{xxx} + 6u^2 u_x = 0, \tag{2.2.10}$$

ou encore sous la forme

$$u_t + u_{xxx} + 24u^2 u_x = 0. \tag{2.2.11}$$

Il s'agit d'imposer les conditions nécessaires sur les paramètres a et b. Les cas les plus intéressants sont ceux qui nous permettent d'obtenir une équation supersymétrique où il est possible de mettre en évidence un facteur $D^2 = \partial_x$, comme c'est le cas pour l'équation (2.1.17). Voyons quelle condition est imposée aux paramètres a et b pour satisfaire cette propriété pour l'équation (2.2.1). Comme

$$D^2[\Phi(D\Phi)^2] = (D\Phi)^2 D^2\Phi + 2\Phi D\Phi D^2\Phi, \tag{2.2.12}$$

l'équation devient :

$$\Phi_t + D^2[D^4\Phi + b\Phi(D\Phi)^2] + (a-2b)\Phi D\Phi D^3\Phi = 0. \tag{2.2.13}$$

Nous obtenons la forme voulue lorsque $a - 2b = 0$. En combinant cette condition avec $a + b = -6$ obtenue préalablement, cela impose les valeurs $a = -4$ et $b = -2$ dans (2.2.1) et nous obtenons l'équation :

$$\Phi_t + D^2[D^4\Phi - 2\Phi(D\Phi)^2] = 0. \tag{2.2.14}$$

Considérons maintenant un superchamp bosonique :

$$A(x, t; \theta) = u(x, t) + \theta\xi(x, t), \tag{2.2.15}$$

et observons l'action de la dérivée covariante D sur le superchamp A de manière à obtenir l'équation de mKdV sur l'une des équations composantes. Tout comme pour le cas de KdV, nous constatons que l'équation de mKdV peut seulement apparaître dans l'équation composante bosonique. Nous remarquons que la seule combinaison de D et A faisant intervenir l'expression $u^2 u_x$ est $A^2 D^2 A$. Il en résulte l'équation supersymétrique

$$A_t + D^6 A + aA^2 D^2 A = 0, \tag{2.2.16}$$

où a est une constante arbitraire. Les équations composantes sont

$$u_t + u_{xxx} + au^2u_x = 0, \tag{2.2.17}$$

$$\xi_t + \xi_{xxx} + a\xi_x u^2 + 2a\xi u u_x = 0. \tag{2.2.18}$$

Une fois encore, il s'agit d'un système de deux équations découplées étant donné l'absence de la fonction $\xi(x,t)$ dans la première équation composante. Le cas où $a = -6$ correspond d'ailleurs à la superéquation mKdV B dans l'article [**GHO**].

2.3. Équation supersymétrique de KdV pour un superchamp bosonique d'ordre $N = 2$

Utilisons maintenant les stratégies vues à la section précédente pour un superchamp bosonique d'ordre 2 :

$$A(x,t;\theta_1,\theta_2) = u(x,t) + \theta_1\xi^1(x,t) + \theta_2\xi^2(x,t) + \theta_1\theta_2 v(x,t), \tag{2.3.1}$$

où $u(x,t)$ et $v(x,t)$ sont deux fonctions bosoniques et $\xi^1(x,t)$ et $\xi^2(x,t)$ sont deux fonctions fermioniques. Voyons comment il est possible de supersymétriser l'équation de KdV en la faisant intervenir dans l'une des quatre équations composantes. Pour ce faire, nous allons dans un premier temps tenter de l'obtenir sur la fonction $v(x,t)$ dans l'équation composante faisant intervenir des termes exclusivement du type $\theta_1\theta_2$. Par la même occasion, nous chercherons également à obtenir l'équation de mKdV sur la fonction $u(x,t)$ dans l'équation composante ne comportant aucun terme du type θ_1, θ_2 ou $\theta_1\theta_2$. Nous retrouvons d'ailleurs cette stratégie dans l'article [**WIN**].

Dans un second temps, nous tenterons une nouvelle approche, tout à fait originale et innovatrice, qui consiste à inverser les équations obtenues sur chacune des fonctions, soit d'obtenir l'équation de mKdV sur $v(x,t)$ dans l'équation composante faisant uniquement intervenir des termes du type $\theta_1\theta_2$ et l'équation de KdV sur $u(x,t)$ dans l'équation composante ne comportant aucun terme du type θ_1, θ_2 ou $\theta_1\theta_2$.

2.3.1. Obtention de KdV sur $v(x,t)$ et mKdV sur $u(x,t)$

À partir des résultats de l'annexe A.2, les termes faisant intervenir l'expression $\theta_1\theta_2 vv_x$ sont AD_1D_2A, $D_2AD_1^3A$, $D_1AD_2^3A$ et $D_1D_2AD_1^2A$ où nous faisons intervenir les dérivées covariantes D_1 et D_2 introduites au premier chapitre par les expressions (1.3.15) et (1.3.16). De la même façon, nous trouvons que les termes faisant intervenir u^2u_x sont $A^2D_1^2A$ et $AD_1^2A^2$. Nous obtenons ainsi l'équation supersymétrique générale suivante :

$$\begin{aligned} A_t &= -A_{xxx} + bA(D_1D_2A) + cD_2AD_1^3A + dD_1AD_2^3A \\ &\quad + eD_1D_2AD_1^2A + fA^2D_1^2A + gAD_1^2A^2. \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

où b, c, d, e, f et g sont des paramètres arbitraires.

Étape 1 : Mise en évidence d'un ∂_x

En premier lieu, nous pouvons réunir les termes $A^2D_1^2A$ et $AD_1^2A^2$ grâce à l'égalité suivante obtenue en développant l'expression de $D_1^2A^2$:

$$AD_1^2A^2 = 2A^2D_1^2A. \tag{2.3.3}$$

L'équation (2.3.2) devient

$$\begin{aligned} A_t &= -A_{xxx} + bA(D_1D_2A) + cD_2AD_1^3A + dD_1AD_2^3A \\ &\quad + eD_1D_2AD_1^2A + (f+2g)A^2D_1^2A. \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

Pour obtenir la forme voulue, nous utilisons les égalités suivantes obtenues en développant $(AD_1D_2A)_x$ et $(D_1D_2A^2)_x$:

$$(AD_1D_2A)_x = D_1^2AD_1D_2A + AD_1^3D_2A, \tag{2.3.5}$$

$$(D_1D_2A^2)_x = 2[D_1^3AD_2A + D_1^2AD_1D_2A + D_1AD_2^3A + AD_1^3D_2A] \tag{2.3.6}$$

En introduisant ces expressions dans (2.3.4) nous obtenons :

$$\begin{aligned} A_t &= -A_{xxx} + (b-d)(AD_1D_2A)_x + \frac{d}{2}(D_1D_2A^2)_x \\ &\quad + (e-b)D_1^2AD_1D_2A - (c+d)D_1^3AD_2A + (f+2g)A^2D_1^2A. \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

Nous trouvons alors deux conditions afin d'annuler les termes $D_1^2AD_1D_2A$ et $D_1^3AD_2A$:

$$\begin{aligned} e-b &= 0, && (2.3.8) \\ c+d &= 0. && (2.3.9) \end{aligned}$$

L'équation (2.3.7) dépend maintenant de quatre paramètres b, d, f et g :

$$A_t = -A_{xxx} + (b-d)(AD_1D_2A)_x + \frac{d}{2}(D_1D_2A^2)_x + \frac{(f+2g)}{3}(A^3)_x. \quad (2.3.10)$$

Étape 2 : Réduction de paramètres

Afin de diminuer le nombre de paramètres arbitraires, nous imposons la condition

$$3a = f + 2g. \quad (2.3.11)$$

Il ne nous reste qu'une équation comprenant trois paramètres b, d, et a :

$$A_t = [-A_{xx} + (b-d)AD_1D_2A + \frac{d}{2}D_1D_2A^2 + aA^3]_x. \quad (2.3.12)$$

Étape 3 : Présence de KdV et mKdV

La dernière étape consiste à faire intervenir KdV et mKdV dans les équations composantes. En premier lieu, l'équation composante faisant intervenir des termes du type $\theta_1\theta_2$ est donnée par

$$\begin{aligned} &v_t + v_{xxx} + 2(b-d)vv_x - (b+2d)u_xu_{xx} - buu_{xxx} \\ &+(d-b)\xi^1\xi^1_{xx} + (d-b)\xi^2\xi^2_{xx} - 3a[(u^2v)_x - 2(\xi^1\xi^2u)_x] = 0. \quad (2.3.13) \end{aligned}$$

Imposer l'équation de KdV (1.4.1) nous donne la condition

$$b - d = 3. \quad (2.3.14)$$

L'équation supersymétrique devient

$$A_t = [-A_{xx} + 3AD_1D_2A + \frac{b-3}{2}D_1D_2A^2 + aA^3]_x. \quad (2.3.15)$$

Enfin, faisons de même avec l'équation composante ne faisant intervenir aucun terme du type θ_1, θ_2 ou $\theta_1\theta_2$:

$$u_t + u_{xxx} - 3au^2u_x + b(uv)_x - (b-3)(\xi^1\xi^2)_x = 0. \quad (2.3.16)$$

Pour obtenir l'équation de mKdV écrite sous la forme (2.2.10), dans le but d'obtenir des équations similaires à celles obtenues dans [**WIN**], nous obtenons la condition $a = -2$. Pour se débarasser du terme bosonique $b(uv)_x$ absent de l'équation de mKdV, posons simplement

$$b = a + 2. \tag{2.3.17}$$

De cette façon, l'équation composante (2.3.16) ne dépendra pas de $u(x,t)$ lorsque $a = -2$. En tenant compte de la condition (2.3.17) sur b, l'équation supersymétrique dépend maintenant d'un seul paramètre a arbitraire :

$$\begin{aligned} A_t &= [-A_{xx} + 3AD_1D_2A + \frac{a-1}{2}D_1D_2A^2 + aA^3]_x \\ &= -A_{xxx} + 3(AD_1D_2A)_x + \frac{a-1}{2}(D_1D_2A^2)_x + 3aA^2A_x, \end{aligned} \tag{2.3.18}$$

dont les quatre équations composantes sont

$$\begin{aligned} u_t + u_{xxx} - 3au^2u_x + (a+2)(uv)_x - (a-1)(\xi^1\xi^2)_x &= 0, \\ v_t + v_{xxx} + 6vv_x - 3au_xu_{xx} - (a+2)uu_{xxx} - 3(\xi^2\xi^2_{xx} + \xi^1\xi^1_{xx}) & \\ -3a(u^2v_x + 2uu_xv - 2u\xi^1\xi^2_x + 2u\xi^2\xi^1_x - 2u_x\xi^1\xi^2) &= 0, \\ \xi^1_t + \xi^1_{xxx} + (a+2)(\xi^1v)_x - (a-1)(\xi^1v)_x - (a+2)u\xi^2_{xx} & \\ -(2a+1)u_x\xi^2_x - (a-1)\xi^2u_{xx} - 3a(u^2\xi^1_x + 2uu_x\xi^1) &= 0, \\ \xi^2_t + \xi^2_{xxx} + (a+2)(\xi^2v)_x - (a-1)(\xi^2v)_x + (a+2)u\xi^1_{xx} & \\ +(2a+1)u_x\xi^1_x + (a-1)\xi^1u_{xx} - 3a(u^2\xi^2_x + 2uu_x\xi^2) &= 0. \end{aligned}$$

Notons que la première équation du système précédent fait apparaître l'équation classique de mKdV (trois premiers termes) tandis que la seconde équation du système fait apparaître l'équation classique de KdV (trois premiers termes). Nous retrouvons l'équation supersymétrique (2.3.18) dans plusieurs références comme [**AYA**], [**LAB**] et [**WIN**].

2.3.2. Obtention de mKdV sur $v(x,t)$ et KdV sur $u(x,t)$

Reprenons le superchamp bosonique $A(x,t;\theta_1,\theta_2)$ d'ordre $N = 2$ donné par (2.3.1) et inversons les équations obtenues sur chacune des fonctions. Nous cherchons à obtenir l'équation de mKdV sur $v(x,t)$ dans l'équation composante faisant uniquement intervenir des termes du type $\theta_1\theta_2$ et l'équation de KdV sur $u(x,t)$ dans l'équation composante ne comportant aucun terme du type θ_1, θ_2 ou $\theta_1\theta_2$.

En utilisant les résultats de l'annexe A.2, les termes de la forme uu_x sont : AD_1^2A et $D_1^2A^2$ tandis que les termes de la forme $\theta_1\theta_2 v^2 v_x$ sont : $AD_1D_2AD_1^3D_2A$, $D_2AD_1AD_1^3D_2A$, $D_2AD_1D_2AD_1^3A$, $D_1^2A(D_1D_2A)^2$ et $D_2^3AD_1AD_1D_2A$. L'équation la plus générale possible s'écrit donc de la manière suivante :

$$\begin{aligned} A_t &= -A_{xxx} + aAD_1^2A + bD_1^2A^2 + c(A)(D_1D_2A)(D_1^3D_2A) \\ &\quad + d(D_2A)(D_1A)(D_1^3D_2A) + e(D_2A)(D_1D_2A)(D_1^3A) \\ &\quad + f(D_2^3A)(D_1A)(D_1D_2A) + g(D_1^2A)(D_1D_2A)^2, \end{aligned} \tag{2.3.19}$$

où a, b, c, d, e, f et g sont des paramètres arbitraires.

Étape 1 : Mise en évidence d'un ∂_x

À partir des équivalences

$$\begin{aligned} D_1^2A^2 &= 2AD_1^2A, \\ (D_2AD_1AD_1D_2A)_x &= D_2^3AD_1AD_1D_2A + D_2AD_1D_2AD_1^3A + D_2AD_1AD_1^3D_2A, \\ (A(D_1D_2A)^2))_x &= (D_1^2A)(D_1D_2A)^2 + 2A(D_1D_2A)(D_1^3D_2A), \end{aligned}$$

Nous réduisons l'équation (2.3.19) à une la forme presque voulue :

$$\begin{aligned} A_t &= -A_{xxx} + (a+2b)AA_x + d(D_2AD_1AD_1D_2A)_x \\ &\quad + g(A(D_1D_2A)^2)_x + (f-d)D_2^3AD_1AD_1D_2A \\ &\quad + (e-d)D_2AD_1D_2AD_1^3A + (c-2g)AD_1D_2AD_1^3D_2A. \end{aligned} \tag{2.3.20}$$

Nous imposons alors les 2 conditions :

$$f = e = d, \tag{2.3.21}$$

$$c = 2g. \tag{2.3.22}$$

L'équation supersymétrique résultante devient :

$$A_t = [-A_{xx} + \frac{(a+2b)}{2}A^2 + dD_2AD_1AD_1D_2A + gA(D_1D_2A)^2]_x. \tag{2.3.23}$$

Étape 2 : Présence de KdV et mKdV

En développant les équations composantes et en imposant KdV sur la variable $u(x,t)$ dans l'équation ne faisant intervenir aucun θ_1, θ_2 ou $\theta_1\theta_2$ et en imposant mKdV sur la variable $v(x,t)$ dans l'équation en $\theta_1\theta_2$, nous obtenons deux autres conditions :

$$\begin{aligned} a+2b &= -6, && (2.3.24)\\ d+g &= -2. && (2.3.25)\end{aligned}$$

L'équation supersymétrique devient alors

$$\begin{aligned} A_t &= [-A_{xx}-3A^2+dD_2AD_1AD_1D_2A-(d+2)A(D_1D_2A)^2]_x, \quad (2.3.26)\\ &= -A_{xxx}-6AA_x+d(D_2AD_1AD_1D_2A)_x-(d+2)(A(D_1D_2A)^2)_x \end{aligned}$$

où le paramètre d demeure arbitraire. Le système suivant :

$$\begin{aligned} u_t+u_{xxx}+6uu_x-d(\xi^1\xi^2v)_x+(d+2)(v^2u)_x &= 0,\\ v_t+v_{xxx}+6v^2v_x+6(uv)_x+6(\xi^1\xi^2)_x-4(\xi^1\xi^1_xv)_x &\\ -4(\xi^2\xi^2_xv)_x-d(\xi^1\xi^2u_{xx})_x-d(\xi^2\xi^1_xu_x)_x+d(\xi^1\xi^2_xu_x)_x &\\ +d(v(u_x)^2)_x-2(d+2)(\xi^2_x\xi^1_xu)_x+2(d+2)(uvu_{xx})_x &= 0,\\ \xi^1_t+\xi^1_{xxx}+6(\xi^1u)_x+2(\xi^1v^2)_x &\\ -d(\xi^2\xi^1\xi^2_x)_x-d(\xi^2vu_x)_x-2(d+2)(\xi^2_xuv)_x &= 0,\\ \xi^2_t+\xi^2_{xxx}+6(\xi^2u)_x+2(\xi^2v^2)_x &\\ +d(\xi^2\xi^1\xi^1_x)_x+d(\xi^1vu_x)_x+2(d+2)(\xi^1_xuv)_x &= 0, \end{aligned}$$

correspond aux quatre équations composantes. Nous observons que la première équation du système précédent fait apparaître l'équation classique de KdV (trois premiers termes) tandis que la seconde équation du système fait apparaître l'équation classique de mKdV (trois premiers termes).

2.4. Réduction de l'équation supersymétrique de KdV d'un superchamp d'ordre $N = 2$ à un superchamp d'ordre $N = 1$

À partir d'un changement de variable approprié, il est possible de réduire les équations supersymétriques (2.3.18) et (2.3.26) en des équations supersymétriques d'ordre $N = 1$ dont les équations composantes sont des équations aux dérivées ordinaires (EDO's). Deux transformations sont proposées dans les sous-sections qui suivent : la première a été explorée dans [**AYA**], [**WIN**] et la deuxième constitue une alternative nouvelle menant à des superéquations connues.

2.4.1. Méthode de réduction proposée dans l'article [WIN]

Si nous cherchons des solutions du type onde qui se propage qui sont de plus invariantes sous une supersymétrie (voir [**AYA**]), nous effectuons le changement de variables :

$$y = x + ct + i\theta_1\theta_2, \tag{2.4.1}$$

$$\tilde{\theta} = \theta_1 + i\theta_2, \tag{2.4.2}$$

et nous supposons que le superchamp bosonique $A(x, t; \theta_1, \theta_2)$ s'exprime en fonction des nouvelles variables y (bosonique) et $\tilde{\theta}$ (fermionique), sous la forme :

$$A(y; \tilde{\theta}) = u(y) + \tilde{\theta}\rho(y), \tag{2.4.3}$$

où $u(y)$ est bosonique et $\rho(y)$ est fermionique. En développant le superchamp A de manière à ce que ses composantes soient des fonctions de l'expression $x + ct$, nous obtenons :

$$A = u(x + ct) + i\theta_1\theta_2 \frac{du}{d\xi} |_{\xi = x+ct} + (\theta_1 + i\theta_2)\rho(x + ct), \tag{2.4.4}$$

et cela nous impose deux conditions sur les composantes : $v = i\frac{du}{d\xi} |_{\xi=x+ct}$ et $\xi^2 = i\xi^1$. Si nous appliquons le changement de variable donné par (2.4.1) et (2.4.2) à l'équation (2.3.18), il en résulte le système

$$u_{yy} - au^3 + i(a + 2)uu_y + cu + c_1 = 0, \tag{2.4.5}$$

$$\rho_{yy} - i(a + 2)u\rho_y + \left(c - 3au^2 + i(4 - a)u_y\right)\rho = k. \tag{2.4.6}$$

Comme la démarche menant à ces équations est décrite en détail dans [**WIN**], nous ne la décrirons pas ici. Une démarche semblable peut être appliquée à l'équation supersymétrique (2.3.26) nous permettant d'obtenir le système

$$u_{yy} + 3u^2 - (a+2)u_y^2 u + cu + c_1 = 0, \qquad (2.4.7)$$

$$\rho_{yy} + 2(a+2)uu_y\rho_y + \left(c + 6u + (a-2)u_y^2\right)\rho = k, \qquad (2.4.8)$$

où le paramètre arbitraire d original a été remplacé par a afin de faciliter la comparaison avec le système donné par les équations (2.4.5) et (2.4.6). Dans les deux cas, les paramètres c, c_1 et a sont des constantes bosoniques tandis que k est une constante fermionique.

2.4.2. Méthode de réduction alternative

Considérons à nouveau le superchamp bosonique $A(x,t;\theta_1,\theta_2) = (2.3.1)$ et procédons au changement de variables suivant :

$$\bar{\theta} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_1 - i\theta_2), \qquad (2.4.9)$$

$$\hat{\theta} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_1 + i\theta_2), \qquad (2.4.10)$$

$$\bar{D} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_{\hat{\theta}} + \bar{\theta}\partial_x), \qquad (2.4.11)$$

$$\hat{D} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_{\bar{\theta}} + \hat{\theta}\partial_x). \qquad (2.4.12)$$

Comme $D_1 = \partial_{\theta_1} + \theta_1\partial_x$ et $D_2 = \partial_{\theta_2} + \theta_2\partial_x$, ce changement entraîne les relations suivantes :

$$\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\theta} + \hat{\theta}), \qquad (2.4.13)$$

$$\theta_2 = \frac{i}{\sqrt{2}}(\bar{\theta} - \hat{\theta}), \qquad (2.4.14)$$

$$D_1 = \bar{D} + \hat{D}, \qquad (2.4.15)$$

$$D_2 = i(\bar{D} - \hat{D}). \qquad (2.4.16)$$

Nous pouvons alors vérifier que

$$\{\bar{D}, \hat{D}\} = \partial_x, \qquad (2.4.17)$$

$$\bar{D}^2 = \hat{D}^2 = 0. \qquad (2.4.18)$$

Par conséquent, le superchamp $A(x,t;\theta_1,\theta_2)$ exprimé en fonction des nouvelles variables $\bar{\theta}$ et $\hat{\theta}$ s'écrit comme

$$\begin{aligned} A(x,t;\bar{\theta},\hat{\theta}) &= u(x,t) + \frac{\bar{\theta}}{\sqrt{2}}(\xi^1(x,t) + i\xi^2(x,t)) + \frac{\hat{\theta}}{\sqrt{2}}(\xi^1(x,t) - i\xi^2(x,t)) \\ &\quad -i\bar{\theta}\hat{\theta}v(x,t). \end{aligned} \tag{2.4.19}$$

Voyons comment ce changement permet de réduire les équations (2.3.18) et (2.3.26).

CAS 1 : $A_t = -A_{xxx} + 3(AD_1D_2A)_x + \frac{a-1}{2}(D_1D_2A^2)_x + 3aA^2A_x$

En procédant au changement de variables sur l'équation (2.3.18), nous obtenons :

$$\begin{aligned} A_t &= -(\bar{D}\hat{D})^3A - (\hat{D}\bar{D})^3A + i(a+2)(\hat{D}\bar{D}A)^2 - i(a+2)(\bar{D}\hat{D}A)^2 \\ &\quad +i(a+2)(A(\hat{D}\bar{D})^2A) - i(a+2)(A(\bar{D}\hat{D})^2A) + 2i(a-1)\hat{D}A\bar{D}\hat{D}\bar{D}A \\ &\quad -2i(a-1)\bar{D}A\hat{D}\bar{D}\hat{D}A + 3aA^2\bar{D}\hat{D}A + 3aA^2\hat{D}\bar{D}A \end{aligned} \tag{2.4.20}$$

Afin d'obtenir la réduction, nous supposons que $\hat{D}A = 0$, ce qui est équivalent à :

$$A_{\bar{\theta}} + \hat{\theta}A_x = 0. \tag{2.4.21}$$

En appliquant cette condition au superchamp $A(x,t;\bar{\theta},\hat{\theta})$ donné par (2.4.19), nous obtenons l'égalité

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi^1 + i\xi^2) + \hat{\theta}(u_x - iv) + \hat{\theta}\bar{\theta}\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi^1 + i\xi^2) = 0, \tag{2.4.22}$$

ce qui impose les deux conditions

$$\xi^2 = i\xi^1, \tag{2.4.23}$$

$$v = -iu_x. \tag{2.4.24}$$

Le superchamp A devient alors

$$A = u(x,t) + \sqrt{2}\hat{\theta}\xi^1(x,t) - i\bar{\theta}\hat{\theta}u_x(x,t). \tag{2.4.25}$$

L'équation supersymétrique (2.4.20) se réduit à

$$A_t = -A_{xxx} + i(a+2)A_x^2 + i(a+2)AA_{xx} + 2i(a-1)\bar{D}A_x\bar{D}A + 3aA^2A_x. \quad (2.4.26)$$

Elle s'écrit en composantes :

$$\begin{aligned} u_t + u_{xxx} - (a+2)i(uu_x)_x - a(u^3)_x &= 0, & (2.4.27)\\ \xi_t^1 + \xi_{xxx}^1 - (a+2)i(\xi^1 u)_{xx} - 3a(\xi^1 u^2)_x &= 0. & (2.4.28) \end{aligned}$$

Notons que lorsque $a = -2$, nous obtenons alors les deux équations particulières

$$\begin{aligned} u_t + u_{xxx} + 6u^2u_x &= 0, & (2.4.29)\\ \xi_t^1 + \xi_{xxx}^1 + 6\xi_x^1 u^2 + 12\xi^1 uu_x &= 0. & (2.4.30) \end{aligned}$$

Ce système d'équations découplées est de la même forme que les équations composantes de la superéquation de mKdV d'ordre $N = 1$ donnée par l'équation (2.2.16).

Cas 2 : $A_t = -A_{xxx} - 6AA_x + a(D_2AD_1AD_1D_2A)_x - (a+2)(A(D_1D_2A)^2)_x$

Cette fois-ci, l'équation supersymétrique obtenue après le changement de variables est

$$\begin{aligned} A_t \;=\; & -(\bar{D}\hat{D})^3A - (\hat{D}\bar{D})^3A - 6A\bar{D}\hat{D}A - 6A\hat{D}\bar{D}A + \\ & 2a\hat{D}\bar{D}\hat{D}A\bar{D}A\hat{D}\bar{D}A - 2a\hat{D}\bar{D}\hat{D}A\bar{D}A\bar{D}\hat{D}A - 2a\bar{D}\hat{D}\bar{D}A\hat{D}A\hat{D}\bar{D}A + \\ & 2a\bar{D}\hat{D}\bar{D}A\hat{D}A\bar{D}\hat{D}A - a\bar{D}A\hat{D}A(\hat{D}\bar{D})^2A + a\bar{D}A\hat{D}A(\bar{D}\hat{D})^2A \\ & + a\hat{D}A\bar{D}A(\hat{D}\bar{D})^2A - a\hat{D}A\bar{D}A(\bar{D}\hat{D})^2A - (a+2)(\bar{D}\hat{D}A)(\hat{D}\bar{D}A)^2 \\ & -(a+2)(\hat{D}\bar{D}A)(\bar{D}\hat{D}A)^2 + (a+2)(\bar{D}\hat{D}A)^3 + (a+2)(\hat{D}\bar{D}A)^3 \\ & +2(a+2)A\hat{D}\bar{D}A(\hat{D}\bar{D})^2A - 2(a+2)A\hat{D}\bar{D}A(\bar{D}\hat{D})^2A \\ & -2(a+2)A\bar{D}\hat{D}A(\hat{D}\bar{D})^2A + 2(a+2)A\bar{D}\hat{D}A(\bar{D}\hat{D})^2A. \qquad (2.4.31) \end{aligned}$$

Après avoir posé $\hat{D}A = 0$, nous obtenons de nouveau la forme donnée par (2.4.25) pour le superchamp A. Nous obtenons donc la superéquation

$$A_t = -A_{xxx} - 6AA_x + (a+2)(A_x)^3 + 2(a+2)AA_xA_{xx}, \quad (2.4.32)$$

dont les équations composantes associées sont

$$u_t + u_{xxx} + 6uu_x - (a+2)(u(u_x)^2)_x = 0 \quad (2.4.33)$$

$$\xi^1_t + \xi^1_{xxx} + 6(\xi^1 u)_x - 2(a+2)(\xi^1_x u u_x)_x - (a+2)(\xi^1(u_x)^2)_x = 0. \quad (2.4.34)$$

Nous pouvons vérifier que dans le cas particulier où $a = -2$, nous obtenons un système de la même forme que celui de la superéquation de KdV d'ordre $N = 1$ donnée par l'équation (2.1.19).

2.4.3. Comparaison des équations obtenues par les deux méthodes de réduction

Les deux méthodes de réduction vues à la section précédente ne sont pas exactement équivalentes. Nous remarquons que toutes deux mènent à des équations similaires, à un changement de variable près, en ce qui a trait à la contribution bosonique du superchamp, mais que ce n'est pas le cas pour la contribution fermionique.

En effet, comparons les équations (2.4.5) et (2.4.27). En considérant le changement de variables suivant :

$$y = x + ct \quad (2.4.35)$$

l'équation (2.4.27) devient l'EDO :

$$cu_y + u_{yyy} - i(a+2)(uu_y)_y - a(u^3)_y = 0. \quad (2.4.36)$$

En intégrant une première fois et en posant $u = -w$, nous obtenons alors l'équation

$$-w_{yy} - i(a+2)ww_y + aw^3 - cw + c_2 = 0, \quad (2.4.37)$$

où c_2 est une constante arbitraire. Cette équation correspond essentiellement à l'équation (2.4.5), à un signe près si nous considérons que $c_1 = -c_2$.

Comparons maintenant les équations (2.4.6) et (2.4.28) en appliquant à nouveau le changement de variables donné en (2.4.35). L'EDO associée à l'équation (2.4.28) après une intégration par rapport à y est :

$$\xi^1_{yy} - i(a+2)u\xi^1_y + (c - 3au - i(a+2)u_y)\xi^1 = k_2, \quad (2.4.38)$$

où k_2 est une constante arbitraire. Or, il n'existe aucune valeur pour a telle que cette équation corresponde à (2.4.6), ce qui nous confirme que les deux réductions ne sont pas équivalentes.

Nous pouvons également appliquer le même processus pour comparer les équations (2.4.7) et (2.4.33). En utilisant (2.4.35) dans (2.4.33) et en intégrant une première fois, nous obtenons exactement l'équation (2.4.7). Comparons enfin les équations (2.4.8) et (2.4.34) pour se convaincre qu'il s'agit une fois de plus de deux réductions différentes. En appliquant le changement donné en (2.4.35) à l'équation (2.4.34) puis en intégrant une fois par rapport à y, nous obtenons l'EDO suivante :

$$\xi^1_{yy} - 2(a+2)uu_y\xi^1_y + (c + 6u - (a+2)u_y^2)\xi^1 = k_3, \tag{2.4.39}$$

où k_3 est une constante d'intégration. Or, *a priori*, il n'existe pas de valeur pour a qui permette d'avoir une équation équivalente à (2.4.8) puisque la seule valeur faisant concorder les termes ξ^1_y est $a = -2$ tandis que la seule valeur faisant concorder les termes en ξ^1 est $a = 0$.

2.5. Solutions de l'équation supersymétrique de KdV

Dans cette section, nous ferons la résolution de l'équation (2.4.7) et verrons une solution de (2.4.8). La résolution des équations (2.4.5) et (2.4.6), composantes de (2.3.18), est élaborée en détail dans l'article **[AYA]** et nous ne l'exposerons pas ici. Celui-ci utilise notamment la classification proposée par Ince **[INC]** pour d'abord déterminer des solutions pour (2.4.5) et ensuite, en déduire des solutions pour (2.4.6). Nous utiliserons une approche différente pour résoudre les équations (2.4.7) et (2.4.8).

2.5.1. Solution pour l'équation bosonique

Nous allons d'abord procéder à la résolution de l'équation différentielle non-linéaire d'ordre 2 :

$$u_{yy} + 3u^2 - (a+2)u(u_y)^2 + cu + c_1 = 0, \tag{2.5.1}$$

où c et c_1 sont des paramètres constants réels. Traitons d'abord le cas où $a \neq -2$. En premier lieu, substituons à la variable $u(y)$ la nouvelle variable $z(u(y))$ telle que

$$z(u(y)) = \frac{du}{dy}, \tag{2.5.2}$$

de telle sorte que $u_{yy} = z\frac{dz}{du}$. L'équation (2.5.1) devient donc

$$z\frac{dz}{du} - (a+2)uz^2 + 3u^2 + cu + c_1 = 0. \tag{2.5.3}$$

En posant

$$f(u) = [z(u)]^2, \tag{2.5.4}$$

l'équation (2.5.3) devient une équation linéaire du premier ordre :

$$f'(u) - 2(a+2)uf(u) = -6u^2 - 2cu - 2c_1. \tag{2.5.5}$$

Nous allons d'abord déterminer la solution générale de l'équation homogène correspondante :

$$f_h'(u) - 2(a+2)uf_h(u) = 0. \tag{2.5.6}$$

Elle est facilement obtenue comme

$$f_h(u) = A_1 e^{(a+2)u^2}, \tag{2.5.7}$$

où A_1 est une constante arbitraire. Pour résoudre l'équation inhomogène, il suffit de trouver une solution particulière à l'équation (2.5.5) et de l'ajouter à la solution générale (2.5.7) de l'équation homogène. Pour ce faire, nous remarquons que le terme $-6u^2 - 2cu - 2c_1$ donné en (2.5.5) nous indique une solution polynomiale potentielle. Postulons une solution de la forme :

$$f_p(u) = \alpha u^2 + \beta u + \gamma,$$

où α, β et γ sont des constantes réelles à déterminer. En substituant cette solution générale dans l'équation (2.5.5), nous obtenons

$$-2(a+2)\alpha u^3 + 2(3-(a+2)\beta)u^2 + 2(c-(a+2)\gamma+\alpha)u + \beta + 2c_1 = 0. \tag{2.5.8}$$

En annulant les coefficients de chaque puissance de u, nous obtenons les conditions suivantes pour α, β et γ :

$$\alpha = 0, \tag{2.5.9}$$

$$\beta = \frac{3}{(a+2)} = -2c_1, \tag{2.5.10}$$

$$\gamma = \frac{c}{(a+2)}. \tag{2.5.11}$$

On note que la solution particulière est en fait un polynôme de degré un et qu'une restriction est imposée à la constante c_1 :

$$3 + 2(a+2)c_1 = 0. \tag{2.5.12}$$

La solution particulière est donc :

$$f_p(u) = \frac{3u+c}{(a+2)}. \tag{2.5.13}$$

Enfin, nous concluons que l'expression

$$f(u) = f_h + f_p = A_1 e^{(a+2)u^2} + \frac{3u+c}{(a+2)},$$

est une solution de l'équation différentielle (2.5.5) pour c_1 satisfaisant (2.5.12). À partir de cette solution pour $f(u)$, déterminons la forme pour $u(y)$. À partir de (2.5.4) et (2.5.2), nous obtenons

$$\left(\frac{du}{dy}\right)^2 = f(u) = A_1 e^{(a+2)u^2} + \frac{3u+c}{(a+2)}. \tag{2.5.14}$$

Lorsque $A_1 = 0$, nous obtenons

$$\sqrt{\frac{3u+c}{(a+2)}}du = \pm dy, \tag{2.5.15}$$

qui s'intègre facilement. Il en ressort donc la solution particulière suivante pour $u(y)$:

$$u(y) = \frac{3}{4(a+2)}y^2 + \frac{6B_1}{4(a+2)}y + \frac{3B_1^2}{4(a+2)} - \frac{c}{3}, \tag{2.5.16}$$

où B_1 est la constante d'intégration provenant de l'équation (2.5.15). Lorsque $A \neq 0$, la solution soit satisfaire :

$$\frac{du}{\sqrt{A_1 e^{(a+2)u^2} + \frac{3u+c}{a+2}}} = \pm dy, \tag{2.5.17}$$

qui ne s'intègre pas facilement à cause du terme $e^{(a+2)u^2}$. Traitons maintenant le cas où $a = -2$. L'équation (2.5.1) devient

$$u_{yy} + 3u^2 + cu + c_1 = 0. \tag{2.5.18}$$

À première vue, la présence d'un polynôme de degré 2 en u nous amène à postuler la solution suivante

$$u(y) = \alpha_1 y^2 + \alpha_2 y + \alpha_3, \tag{2.5.19}$$

où α_1, α_2 et α_3 sont des constantes arbitraires. En substituant (2.5.19) dans (2.5.18), nous obtenons

$$3\alpha_1^2 y^4 + 6\alpha_1\alpha_2 y^3 + (6\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2^2 + c\alpha_1)y^2 + (6\alpha_2\alpha_3 + c\alpha_2)y + 2\alpha_1 + \alpha_3^2 + c\alpha_3 + c_1 = 0. \tag{2.5.20}$$

L'annulation des coefficients de chaque puissance de y impose

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0, && (2.5.21) \\ \alpha_2 &= 0, && (2.5.22) \\ \alpha_3 &= \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 12c_1}}{6}. && (2.5.23) \end{aligned}$$

La solution triviale résultante de (2.5.18) est donc

$$u(y) = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 12c_1}}{6}. \tag{2.5.24}$$

Il serait intéressant d'obtenir une solution autre que la solution triviale (2.5.24), une solution solitonique par exemple. Nous remarquons qu'en posant $y = x + ct$, l'équation classique de KdV (1.4.1) devient :

$$u_{yyy} + cu_y + 6uu_y = 0. \tag{2.5.25}$$

En intégrant une première fois par rapport à y, nous obtenons l'équation (2.5.18) où c_1 est la constante d'intégration. Étant donné ce lien entre l'équation classique de KdV et l'équation que nous tentons de résoudre, nous constatons que la solution

$$u(y) = \frac{2k_1^2}{\cosh^2[k_1 y]}, \tag{2.5.26}$$

satisfait l'équation (2.5.18) lorsque $c_1 = 0$ et cette solution est de la même forme que (1.4.3) qui est déjà connue.

2.5.2. Solution pour l'équation fermionique

Maintenant que nous connaissons deux solutions particulières pour l'équation bosonique lorsque $a = -2$, nous sommes en mesure de déterminer des solutions pour l'équation :

$$\rho_{yy} + 2(a+2)uu_y\rho_y + (c + 6u + (a-2)(u_y)^2)\rho = k. \tag{2.5.27}$$

Sous les conditions données par la solution triviale (2.5.24), l'équation à résoudre pour $\rho(y)$ devient

$$\rho_{yy} \pm \sqrt{c^2 - 12c_1}\rho = k. \tag{2.5.28}$$

Il s'agit d'une EDO d'ordre deux linéaire dont nous trouvons aisément les solutions. Tout d'abord, nous obtenons une solution exponentielle dans le cas où nous devons résoudre

$$\rho_{yy} - \sqrt{c^2 - 12c_1}\rho = k, \tag{2.5.29}$$

et cette solution s'écrit comme

$$\rho(y) = \frac{-k}{\sqrt{c^2 - 12c_1}} + A_1 e^{(c^2-12c_1)^{1/4}y} + A_2 e^{-(c^2-12c_1)^{1/4}y}. \tag{2.5.30}$$

Dans le cas où nous devons résoudre

$$\rho_{yy} + \sqrt{c^2 - 12c_1}\rho = k, \tag{2.5.31}$$

la solution s'écrit alors comme

$$\rho(y) = \frac{-k}{\sqrt{c^2 - 12c_1}} + A_1 \cos[(c^2 - 12c_1)^{1/4}y] + A_2 \sin[(c^2 - 12c_1)^{1/4}y]. \tag{2.5.32}$$

Dans le cas particulier où $c^2 - 12c_1 = 0$, l'équation à résoudre pour ρ devient simplement :

$$\rho_{yy} = k, \tag{2.5.33}$$

dont la solution est facilement obtenue

$$\rho = ky^2 + \beta_1 y + \beta_2, \tag{2.5.34}$$

où β_1 et β_2 sont des constantes arbitraires.

Bien que les deux méthodes de réductions utilisées au chapitre précédent ne sont pas équivalentes, nous pouvons observer que les solutions $u = (2.5.24)$ et $\xi = (2.5.30)$ substituées dans (2.4.39) satisfont l'équation. Cela résulte du fait que u est une solution constante et donc que les deux équations (2.4.8) et (2.4.34) se ramènent à la forme suivante lorsque $a = -2$ (nous posons également $\rho = \xi^1$ ainsi que $k = k_3$) :

$$\xi^1_{yy} + (c + 6u)\xi^1 = k_3. \tag{2.5.35}$$

Reprenons maintenant l'équation (2.5.27) et remplaçons u par la solution solitonique (2.5.26). L'équation inhomogène à résoudre pour ρ devient :

$$\rho_{yy} + \left(-4u_y^2 + 6u - 4k_1^2\right) \rho = k, \tag{2.5.36}$$

équation difficile à résoudre, même si elle est linéaire en ρ. Nous remarquons donc que l'obtention de solutions supersolitoniques ne se fait pas aisément lorsque nous tentons de résoudre les équations composantes. Cela nous amène ainsi à considérer une autre approche dont nous exposons les détails dans le chapitre qui suit.

Chapitre 3

BILINÉARISATION DE HIROTA ET SOLUTIONS SOLITONIQUES DE SUSY KDV ET MKDV

Voyons maintenant une description de la méthode de bilinéarisation de Hirota et son application aux équations de KdV et mKdV. Nous verrons ensuite comment cette méthode s'adapte aux équations supersymétriques sKdV et smKdV.

3.1. Description de la méthode de Hirota

La méthode de Hirota peut être décrite de la façon suivante :

1- Nous commençons par introduire une transformation de la variable dépendante afin de bilinéariser l'équation originale, c'est-à-dire convertir cette équation en une équation de forme quadratique.

On dit qu'une équation est de forme quadratique lorsque tous ses termes sont le produit d'exactement deux facteurs pris parmi la variable dépendante elle-même ou encore ses dérivées.

Il n'existe pas, *a priori*, une méthode systématique pour déterminer le changement de variables qui permet de bilinéariser une équation. De plus, nous ne connaissons pas d'avance le nombre de variables dépendantes nécessaires à ce changement. Voici donc une ligne directrice proposée par Hietarinta [**HIE**] pour trouver la transformation :

Soit une EDP non-linéaire : $F(x, t, u(x,t), u(x,t)_t, u(x,t)_x, u(x,t)_{xx}, ...) = 0$. Si nous supposons la transformation suivante de la variable dépendante $u(x,t) =$

$\partial_x^n w(x,t)$, l'ordre n de la dérivée doit être tel que, dans l'équation exprimée en termes de w et ses dérivées, le nombre total d'apparition de l'opérateur ∂_x dans le terme non-linéaire doit correspondre à l'ordre de l'équation, c'est-à-dire le degré maximal de différentiation auquel la variable w est soumise.

Par exemple, considérons l'équation de KdV donnée par

$$u_t + u_{xxx} + 6uu_x = 0. \tag{3.1.1}$$

En supposant la transformation donnée pour u, l'équation (3.1.1) devient :

$$\partial_t \partial_x^n w + \partial_x^{n+3} w + 6\partial_x^n w \partial_x^{n+1} w = 0. \tag{3.1.2}$$

En faisant correspondre l'ordre des dérivées en x du terme d'ordre le plus élevé et du terme non-linéaire, nous obtenons :

$$n + 3 = 2n + 1, \tag{3.1.3}$$

égalité vraie seulement lorsque $n = 2$. La transformation s'écrit comme :

$$u = \partial_x^2 w, \tag{3.1.4}$$

et l'équation (3.1.1) devient :

$$w_{xxt} + w_{xxxxx} + 6w_{xx}w_{xxx} = 0. \tag{3.1.5}$$

En principe, l'équation peut ensuite être bilinéarisée en introduisant un nouveau changement de la variable dépendante. Hirota [**HI1**] propose trois formes classiques : une transformation rationnelle du type $w = F/G$, une transformation logarithmique du type $w = \alpha \log F$ et une transformation bi-logarithmique du type $w = \alpha \log(F/G)$. La valeur du paramètre arbitraire α sera judicieusement choisie afin de pouvoir exprimer l'équation en fonction de l'opérateur de Hirota qui sera présenté un peu plus loin.

2- Nous substituons finalement une forme de solution de type série de puissances de la forme

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n f_n, \tag{3.1.6}$$

avec

$$f_1 = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i e^{\eta_i} \qquad \eta_i = k_i x + \omega_i t + \eta_i^0, \tag{3.1.7}$$

pour la ou les nouvelles variables dépendantes dans les équations bilinéaires. Les solutions solitoniques sont des séries tronquées et engendrent des solutions exactes de l'équation étudiée.

Il est important de noter qu'il n'y a pas de façon unique de bilinéariser une équation.

3.2. Bilinéarisation de Hirota appliquée à KdV

Si nous considérons l'équation (3.1.1), nous connaissons déjà la solution solitonique donnée en (1.4.3) et nous remarquons que

$$u(x,t) = \frac{k_1^2}{2\cosh^2(\eta_1/2)} = 2\partial_x^2 \log(1+e^{\eta_1}), \tag{3.2.1}$$

où nous nous rappellons que

$$\eta_1 = k_1 x - k_1^3 t + \eta_1^0. \tag{3.2.2}$$

On devrait la retrouver en suivant la procédure décrite dans l'introduction de ce chapitre. Reprenons l'équation (3.1.5) que l'on peut intégrer une fois par rapport à x :

$$w_{xt} + w_{xxxx} + 3w_{xx}^2 = 0, \tag{3.2.3}$$

où la constante d'intégration vaut zéro. L'équation (3.2.3) peut être bilinéarisée grâce une transformation logarithmique :

$$w = \alpha \log F, \tag{3.2.4}$$

où α est une constante arbitraire. Le cas $\alpha = 2$ est celui pour lequel l'équation (3.2.3) devient quadratique :

$$F_{xt}F - F_xF_t + 3F_{xx}^2 + F_{xxxx}F - 4F_{xxx}F_x = 0. \tag{3.2.5}$$

Sous cette condition sur α, nous pouvons combiner (3.1.4) et (3.2.4) et nous retrouvons le changement de variables indiqué par (3.2.1), où $F = 1 + e^{\eta_1}$. Il faut maintenant exprimer l'équation (3.2.5) en fonction de l'opérateur bilinéaire de Hirota dont l'expression est donnée par :

$$\mathbf{D}_t^n\mathbf{D}_x^m(a \cdot b) = (\partial/\partial t - \partial/\partial t')^n\,(\partial/\partial x - \partial/\partial x')^m\, a(x,t)b(x',t')\,|_{x'=x,t'=t}, \tag{3.2.6}$$

où n et m sont des entiers arbitraires positifs. En fonction de cet opérateur, nous observons notamment les résultats suivants :

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_x\mathbf{D}_t\,(F\cdot F) &= 2\,(FF_{xt}-F_xF_t)\,,\\ \mathbf{D}_x^4\,(F\cdot F) &= 2\left(F_{xxxx}F-4F_xF_{xx}+3F_{xx}^2\right).\end{aligned}$$

En utilisant les résultats de l'annexe A.4, il est alors possible d'écrire l'équation (3.2.5) sous la forme compacte :

$$\mathbf{D}_x(\mathbf{D}_t+\mathbf{D}_x^3)(F\cdot F)=0. \tag{3.2.7}$$

L'étape de bilinéarisation est maintenant complétée.

Cherchons à présent à écrire une solution solitonique. La méthode de Hirota propose un développement en série de puissances pour F de la forme

$$\begin{aligned}F &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n f_n, &(3.2.8)\\ &= 1+\varepsilon f_1+\varepsilon^2 f_2+..., &(3.2.9)\end{aligned}$$

où le paramètre ε est arbitraire. En substituant (3.2.8) dans (3.2.7), nous obtenons

$$\begin{aligned}&\mathbf{D}_x(\mathbf{D}_t+\mathbf{D}_x^3)(1\cdot 1)\\ +\;&\varepsilon\mathbf{D}_x(\mathbf{D}_t+\mathbf{D}_x^3)(f_1\cdot 1+1\cdot f_1)\\ +\;&\varepsilon^2\mathbf{D}_x(\mathbf{D}_t+\mathbf{D}_x^3)(f_2\cdot 1+f_1\cdot f_1+1\cdot f_2)\\ +\;&\varepsilon^3\mathbf{D}_x(\mathbf{D}_t+\mathbf{D}_x^3)(f_3\cdot 1+f_2\cdot f_1+f_1\cdot f_2+1\cdot f_3)\\ +\;&...\\ +\;&\varepsilon^n\mathbf{D}_x(\mathbf{D}_t+\mathbf{D}_x^3)\left(\sum_{j=0}^{n}f_{n-j}\cdot f_n\right)+...=0.\end{aligned}$$

En annulant les coefficients de chaque puissance de ε, nous obtenons l'ensemble infini d'équations suivant (dont nous écrivons seulement les quatre premières) :

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_x(\mathbf{D}_t+\mathbf{D}_x^3)(1\cdot 1) &= 0, &(3.2.10)\\ \mathbf{D}_x(\mathbf{D}_t+\mathbf{D}_x^3)(f_1\cdot 1+1\cdot f_1) &= 0, &(3.2.11)\\ \mathbf{D}_x(\mathbf{D}_t+\mathbf{D}_x^3)(f_2\cdot 1+f_1\cdot f_1+1\cdot f_2) &= 0, &(3.2.12)\\ \mathbf{D}_x(\mathbf{D}_t+\mathbf{D}_x^3)(f_3\cdot 1+f_2\cdot f_1+f_1\cdot f_2+1\cdot f_3) &= 0, &(3.2.13)\end{aligned}$$

qu'il faut résoudre. Notons que l'équation (3.2.10) est triviale. À partir de ces équations, il s'agit de déterminer les expressions des f_n. La méthode de Hirota propose une forme de type somme de fonctions exponentielles linéaires en x et t pour f_1 :

$$f_1 = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i e^{\eta_i} \qquad \eta_i = k_i x + \omega_i t + \eta_i^0, \tag{3.2.14}$$

où k_i, γ_i, ω_i et η_i^0 sont des constantes arbitraires. Pour un N fixé, cela donnera l'expression de f_1 correspondant à ce qu'on appelle le N-soliton. Nous verrons qu'une des propriétés des équations admettant des solutions solitoniques est que le développement en série de puissances est tronqué et donc que chaque soliton est une solution exacte de l'équation étudiée.

Afin de mieux comprendre la méthode, étudions d'abord le cas du 1-soliton. Nous avons la fonction

$$f_1 = \gamma_1 e^{\eta_1}. \tag{3.2.15}$$

où η_1 est donné en (3.2.2). En substituant (3.2.15) dans (3.2.11) et en utilisant les propriétés de l'opérateur bilinéaire données à l'annexe A.4, nous obtenons la condition

$$\omega_1 = -k_1^3. \tag{3.2.16}$$

Avec une telle solution pour f_1, l'équation (3.2.12) devient

$$\mathbf{D}_x(\mathbf{D}_t + \mathbf{D}_x^3)(f_2 \cdot 1) = 0. \tag{3.2.17}$$

La solution $f_2 = 0$ respecte cette équation et nous pouvons utiliser le même processus pour annuler tous les f_i, $i \geq 2$, pour les équations (3.2.13) et suivantes. Nous obtenons donc le 1-soliton :

$$F \;=\; 1 + \varepsilon\gamma_1 e^{\eta_1} = 1 + M e^{\eta_1},. \tag{3.2.18}$$

Cela correspond à la solution solitonique (3.2.1) lorsque $\varepsilon\gamma_1 = M = 1$. Voici une représentation graphique d'une telle solution :

Le paramètre arbitraire k_1 correspond à l'amplitude et le paramètre η_1^0 détermine la position de la bosse.

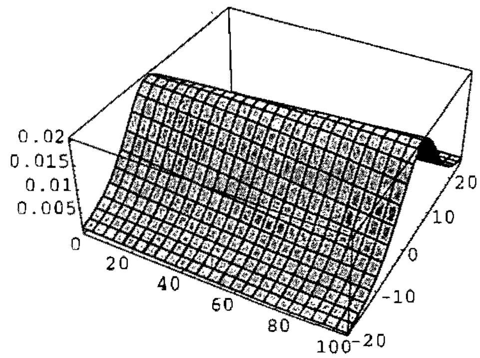


FIG. 3.1. 1-soliton KdV : $k_1 = 0.2$, $x \in [-20, 25]$, $t \in [0, 100]$, $\eta_1^0 = 0$.

Voyons maintenant quelle solution la méthode de Hirota propose pour le 2-soliton. Cette fois-ci, f_1 et f_2 seront non-nuls tandis que $f_3 = f_4 = \ldots = 0$. La fonction f_1 prend la forme

$$f_1 = \gamma_1 e^{\eta_1} + \gamma_2 e^{\eta_2}, \tag{3.2.19}$$

où

$$\eta_i = k_i x + \omega_i t + \eta_i^0, \tag{3.2.20}$$

et où les constantes $k_i \neq k_j$ et $\omega_i \neq \omega_j$ pour $i \neq j$. En substituant (3.2.19) dans (3.2.11), nous obtenons des conditions semblables à (3.2.16). En effet, nous avons

$$\omega_i = -k_i^3 \qquad i = 1, 2. \tag{3.2.21}$$

La condition (3.2.21) reviendra à de nombreuses reprises par la suite ainsi que l'expression donnée en (3.2.20). En substituant (3.2.19) dans (3.2.12), nous obtenons, en résolvant pour f_2, la solution suivante :

$$f_2 = \gamma_1 \gamma_2 A_{12} e^{\eta_1 + \eta_2}, \tag{3.2.22}$$

avec

$$A_{12} = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2. \tag{3.2.23}$$

Enfin, en substituant $f_1 = (3.2.19)$ et $f_2 = (3.2.22)$ dans (3.2.13), nous remarquons que l'équation à résoudre devient

$$\mathbf{D}_x(\mathbf{D}_t + \mathbf{D}_x^3)(f_3 \cdot 1) = 0, \tag{3.2.24}$$

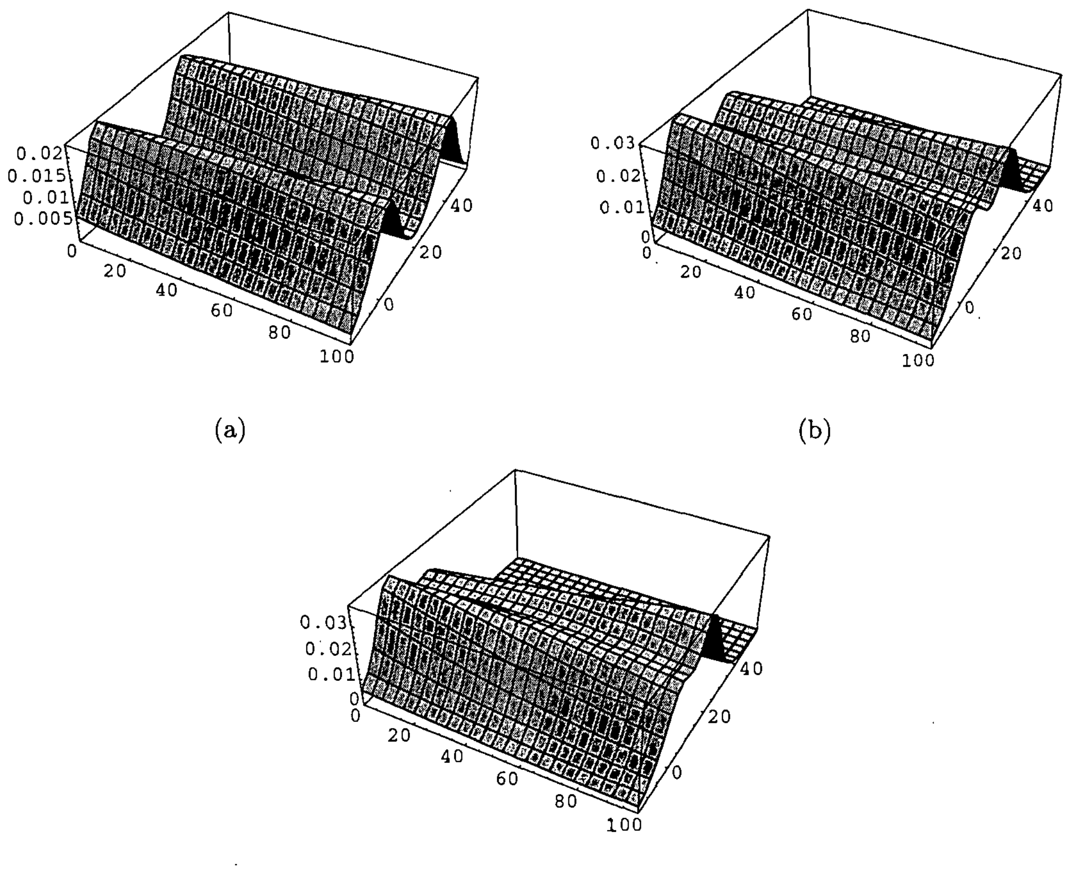
ce qui nous permet de poser $f_3 = 0$. Ainsi, toutes les autres équations disparaissent en prenant tous les f_i d'ordre supérieur à 2 égaux à 0. La série (3.2.8) qui correspond au 2-soliton s'écrit comme la solution solitonique suivante :

$$F = 1 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 = 1 + \varepsilon\gamma_1 e^{\eta_1} + \varepsilon\gamma_2 e^{\eta_2} + \varepsilon^2\gamma_1\gamma_2 A_{12} e^{\eta_1+\eta_2}. \tag{3.2.25}$$

Ainsi, il est possible de vérifier que lorsque $\varepsilon = \gamma_1 = \gamma_2 = 1$, la solution suivante :

$$u = 2\left(\frac{k_1^2 e^{\eta_1} + k_2^2 e^{\eta_2} + 2(k_1 - k_2)^2 e^{\eta_1+\eta_2} + A_{12} k_2^2 e^{2\eta_1+\eta_2} + A_{12} k_1^2 e^{\eta_1+2\eta_2}}{(1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + A_{12} e^{\eta_1+\eta_2})^2}\right) \tag{3.2.26}$$

est une solution satisfaisant l'équation de KdV. La figure 3.2 illustre trois solutions différentes obtenues en faisant varier k_1 et k_2.



(a)

(b)

(c)

FIG. 3.2. 2-soliton KdV : (a) $k_1 = 0.20$, $k_2 = 0.22$, (b) $k_1 = 0.20$, $k_2 = 0.28$, (c) $k_1 = 0.20$, $k_2 = 0.31$.

On constate ainsi la présence de deux ondes solitoniques et nous remarquons que plus la valeur de k_2 est près de k_1, pour k_1 fixé, plus les deux ondes tendent à devenir parallèles l'une à l'autre. Lorsque le paramètre k_2 augmente, la vague de derrière gagne en amplitude et tend à submerger la vague de devant. Lorsqu'un des deux paramètres s'annule, la seule onde résultante est celle centrée en $x = 0$. Notons que lorsque $k_1 = k_2$, le coefficient A_{12} s'annule et les deux ondes se superposent pour donner l'allure d'un seul soliton.

Ce processus peut-être généralisé et donne lieu à des solutions solitoniques du type N-soliton. Les preuves peuvent notamment être trouvées dans [**ABL**] et [**MAS**]. Nous ne les exposerons pas ici.

3.3. Bilinéarisation de Hirota appliquée à mKdV

Voyons maintenant comment s'applique la méthode de bilinéarisation de Hirota [**HI1**] à l'équation de mKdV

$$u_t + u_{xxx} - 6u^2 u_x = 0. \tag{3.3.1}$$

Mettons en application la même procédure que pour l'équation de KdV. En posant à nouveau $u = \partial_x^n w$, l'équation (3.3.1) devient :

$$\partial_t \partial_x^n w + \partial_x^{n+3} w + (\partial_x^n w)^2 \, \partial_x^{n+1} w = 0. \tag{3.3.2}$$

Cette fois-ci, en faisant correspondre l'ordre des dérivées en x du terme d'ordre le plus élevé et du terme non-linéaire, nous obtenons :

$$n + 3 = 3n + 1, \tag{3.3.3}$$

égalité vraie seulement lorsque $n = 1$. La transformation s'écrit comme :

$$u = w_x, \tag{3.3.4}$$

et l'équation (3.3.1) devient :

$$w_{xt} + w_{xxxx} - 6(w_x)^2 w_{xx} = 0. \tag{3.3.5}$$

En intégrant une première fois par rapport à x, nous obtenons

$$w_t + w_{xxx} - 2(w_x)^3 = 0. \tag{3.3.6}$$

La bilinéarisation nécessite l'utilisation de 2 variables dépendantes pour le changement de variables car l'utilisation d'une seule variable dépendante ne permet pas d'obtenir une équation quadratique. En effet, si nous proposons un changement de variables de la forme $w = \alpha \log F$, l'équation (3.3.6) devient :

$$\alpha[F^3 F_t + F^3 F_{xxx} - 3F_{xx}F_x F^2 + 2(1-\alpha^2)F_x^3 F] = 0. \tag{3.3.7}$$

On remarque que seul le premier terme fait intervenir une dérivée d'ordre 1 par rapport t, donc l'équation ne peut pas être exprimée en fonction de l'opérateur bilinéaire donné par (3.2.6). Nous considérons donc deux variables dépendantes et la transformation bilogarithmique suivante :

$$w = \log F/G. \tag{3.3.8}$$

En substituant (3.3.8) dans l'équation (3.3.6), nous obtenons l'équation "biquadratique" en F et G :

$$\begin{aligned} &F_t F G^2 - G_t F^2 G + F_{xxx} F G^2 - G_{xxx} F^2 G \\ &-3F_{xx}F_x G^2 + 3G_{xx}G_x F^2 + 6F_x^2 G_x G - 6F_x G_x^2 F = 0. \end{aligned} \tag{3.3.9}$$

Cette équation peut être exprimée en fonction de l'opérateur bilinéaire de la manière suivante :

$$FG(\mathbf{D}_t + \mathbf{D}_x^3)(F \cdot G) - 3\mathbf{D}_x(F \cdot G)\mathbf{D}_x^2(F \cdot G) = 0, \tag{3.3.10}$$

ce qui nous amène à choisir la bilinéarisation :

$$(\mathbf{D}_t + \mathbf{D}_x^3)(F \cdot G) = 0, \tag{3.3.11}$$

$$\mathbf{D}_x^2(F \cdot G) = 0. \tag{3.3.12}$$

Notons qu'un autre choix de bilinéarisation est donné par les équations :

$$(\mathbf{D}_t + \mathbf{D}_x^3)(F \cdot G) = 0, \tag{3.3.13}$$

$$\mathbf{D}_x(F \cdot G) = 0, \tag{3.3.14}$$

mais celui-ci ne nous permet pas d'obtenir des solutions solitoniques. En effet, dans le but d'obtenir des solutions solitoniques, nous prenons un développement en série de puissances pour les deux variables dépendantes F et G :

$$F = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n f_n \qquad G = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n g_n, \tag{3.3.15}$$

où

$$f_1 = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i e^{\eta_i} \qquad g_1 = \sum_{i=1}^{N} \beta_i e^{\eta_i}. \tag{3.3.16}$$

où η_i est donné par (3.2.20). Les expressions de f_1 et g_1 associées à un N particulier permettent de développer le N-soliton. Notons que la substitution de (3.3.15) dans (3.3.14) impose la condition

$$\alpha_i = \beta_i. \tag{3.3.17}$$

Cette condition impose donc que $F = G$ et la variable w s'annule dans (3.3.8). Nous rejettons donc la bilinéarisation donnée par (3.3.13) et (3.3.14) et nous retenons plutôt celle donnée par (3.3.11) et (3.3.12). En substituant (3.3.15) dans celles-ci et en annulant les coefficients de chaque puissance de ε, nous obtenons les deux ensembles infinis d'équations suivants (dont nous écrivons les quatre premières pour chacun) :

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_x^2(1 \cdot 1) &= 0, &(3.3.18)\\
\mathbf{D}_x^2(f_1 \cdot 1 + 1 \cdot g_1) &= 0, &(3.3.19)\\
\mathbf{D}_x^2(f_2 \cdot 1 + f_1 \cdot g_1 + 1 \cdot g_2) &= 0, &(3.3.20)\\
\mathbf{D}_x^2(f_3 \cdot 1 + f_2 \cdot g_1 + f_1 \cdot g_2 + 1 \cdot g_3) &= 0, &(3.3.21)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
(\mathbf{D}_t + \mathbf{D}_x^3)(1 \cdot 1) &= 0, &(3.3.22)\\
(\mathbf{D}_t + \mathbf{D}_x^3)(f_1 \cdot 1 + 1 \cdot g_1) &= 0, &(3.3.23)\\
(\mathbf{D}_t + \mathbf{D}_x^3)(f_2 \cdot 1 + f_1 \cdot g_1 + 1 \cdot g_2) &= 0, &(3.3.24)\\
(\mathbf{D}_t + \mathbf{D}_x^3)(f_3 \cdot 1 + f_2 \cdot g_1 + f_1 \cdot g_2 + 1 \cdot g_3) &= 0. &(3.3.25)
\end{aligned}$$

Cette fois-ci, la substitution de (3.3.16) dans (3.3.19) impose la condition

$$\alpha_i = -\beta_i, \tag{3.3.26}$$

tandis que sa substitution dans (3.3.23) impose la condition (3.2.21). Ainsi, le 1-soliton s'écrit comme

$$F = 1 + \varepsilon \alpha_1 e^{\eta_1}, \tag{3.3.27}$$

$$G = 1 - \varepsilon \alpha_1 e^{\eta_1}, \tag{3.3.28}$$

où ε et α_1 sont des constantes arbitraires et $\eta_1 =$ (3.2.2). Nous obtenons pour u la solution suivante (on a posé $\varepsilon = \alpha_1 = 1$) :

$$u = \log\left(\frac{1+e^{\eta_1}}{1-e^{\eta_1}}\right)_x, \tag{3.3.29}$$

qui après quelques calculs, devient

$$u = -\frac{k_1}{\sinh(\eta_1)}, \tag{3.3.30}$$

ce qui correspond à la solution solitonique connue de l'équation de mKdV. La figure 3.3 nous donne l'allure graphique d'une telle solution.

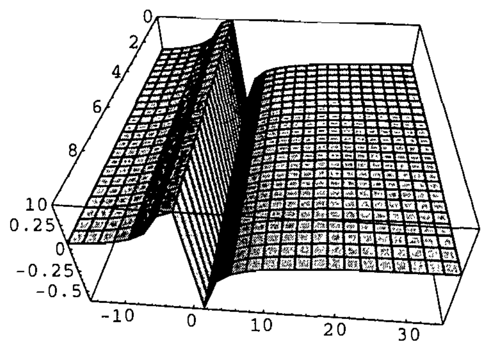


FIG. 3.3. 1-soliton mKdV : $k_1 = 0.05$, $x \in [-15, 35]$, $t \in [0, 10]$, $\eta_1^0 = 0$.

Voyons maintenant comment s'exprime le 2-soliton. En utilisant les expressions $f_1 = \alpha_1 e^{\eta_1} + \alpha_2 e^{\eta_2}$ et $g_1 = -f_1$ dans (3.3.20), nous obtenons

$$g_{2xx} + f_{2xx} = 2\alpha_1\alpha_2(k_1 - k_2)^2 e^{\eta_1+\eta_2}. \tag{3.3.31}$$

On peut donc supposer que les fonctions f_2 et g_2 ont la forme générale suivante :

$$f_2 = J_1 e^{\eta_1+\eta_2}, \tag{3.3.32}$$

$$g_2 = J_2 e^{\eta_1+\eta_2}, \tag{3.3.33}$$

où J_1 et J_2 sont deux constantes à déterminer. En annulant tous les f_i et g_i d'ordre supérieur à 2 et en utilisant les expressions données en (3.3.32) et (3.3.33) dans l'équation (3.3.21), nous obtenons la condition $J_1 = J_2$. L'équation (3.3.31) nous permet alors de trouver l'expression

$$f_2 = g_2 = \alpha_1\alpha_2 A_{12} e^{\eta_1+\eta_2}. \tag{3.3.34}$$

Les fonctions F et G s'écrivent donc comme :

$$F = 1 + \varepsilon\alpha_1 e^{\eta_1} + \varepsilon\alpha_2 e^{\eta_2} + \varepsilon^2\alpha_1\alpha_2 A_{12} e^{\eta_1+\eta_2}, \tag{3.3.35}$$

$$G = 1 - \varepsilon\alpha_1 e^{\eta_1} - \varepsilon\alpha_2 e^{\eta_2} + \varepsilon^2\alpha_1\alpha_2 A_{12} e^{\eta_1+\eta_2}, \tag{3.3.36}$$

où A_{12} est donné par (3.2.23) et η_i par (3.2.20) avec (3.2.21). Lorsque $\varepsilon = \alpha_1 = \alpha_2 = 1$, il en résulte la solution :

$$u(x,t) = 2\frac{k_1 e^{\eta_1} + k_2 e^{\eta_2} - A_{12}k_2 e^{2\eta_1+\eta_2} - A_{12}k_1 e^{\eta_1+2\eta_2}}{(1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + A_{12}e^{\eta_1+\eta_2})(1 - e^{\eta_1} - e^{\eta_2} + A_{12}e^{\eta_1+\eta_2})}. \tag{3.3.37}$$

Nous sommes en présence de deux ondes solitaires ayant l'allure de la figure 3.4. Une fois de plus, le facteur A_{12} joue un rôle sur l'orientation des ondes. Plus le coefficient k_2 s'éloigne de k_1, plus les ondes tendent à se rapprocher l'une de l'autre, comme nous pouvons l'observer à la figure 3.4. Éventuellement, celles-ci se croisent et se superposent afin de résulter en un seul soliton.

D'autres façons de bilinéariser l'équation de mKdV apparaissent dans la littérature. Elles consistent au départ à choisir un autre changement de variables pour la variable dépendante. Par exemple, si nous prenons le changement de variables donné par

$$v = \log\left(\frac{F}{G}\right)_x, \tag{3.3.38}$$

alors nous pouvons montrer que l'on débouche sur la bilinéarisation suivante

$$\begin{aligned} (\mathbf{D}_x^4 + \mathbf{D}_x\mathbf{D}_t)(F\cdot F) &= 0, && (3.3.39)\\ (\mathbf{D}_x^4 + \mathbf{D}_x\mathbf{D}_t)(G\cdot G) &= 0, && (3.3.40)\\ (\mathbf{D}_x^2)(F\cdot G) &= 0. && (3.3.41) \end{aligned}$$

La démarche pour trouver le N-soliton demeure la même que pour le cas précédent. En effet, en supposant les mêmes formes (3.3.15) pour F et G, les

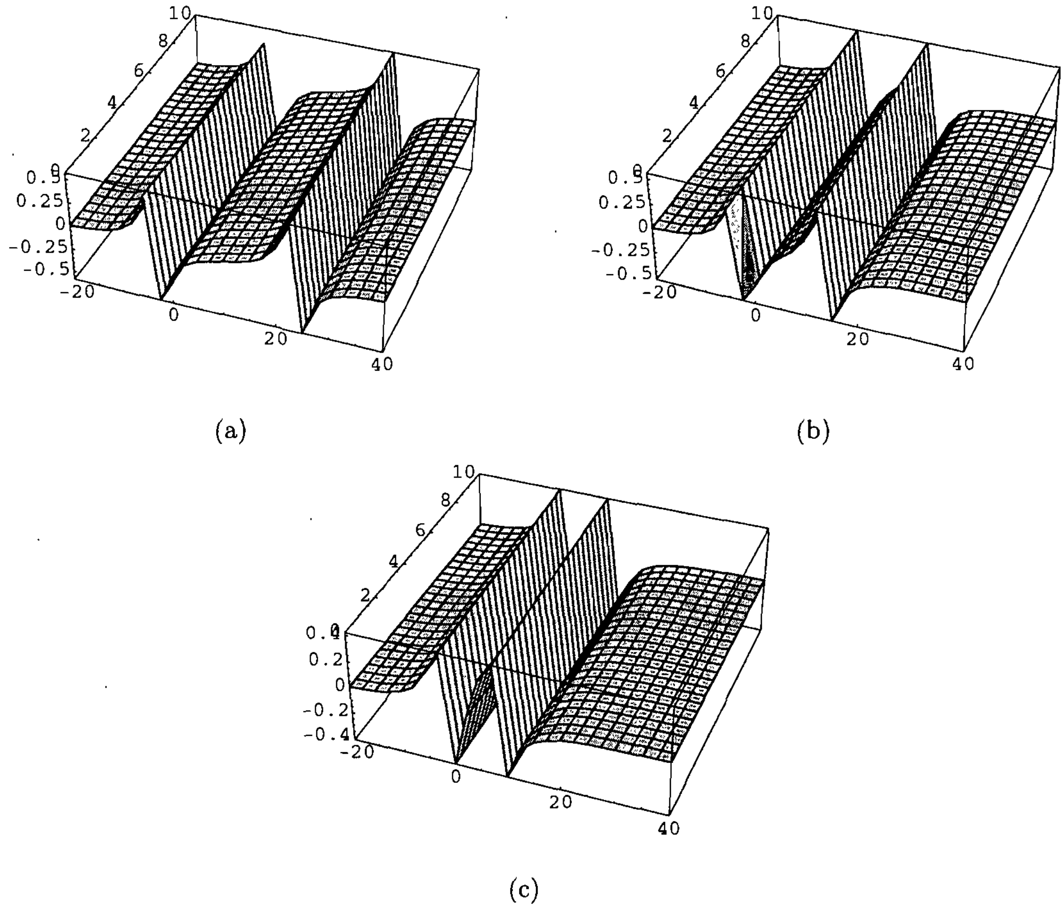


FIG. 3.4. 2-soliton mKdV : (a) $k_1 = 0.20$, $k_2 = 0.25$, (b) $k_1 = 0.20$, $k_2 = 0.35$, (c) $k_1 = 0.20$, $k_2 = 0.5$.

mêmes conditions ressortent lorsqu'on susbtitue ces expressions dans les équations (3.3.39), (3.3.40) et (3.3.41).

3.4. Bilinéarisation de Hirota dans le cadre supersymétrique ($N = 1$)

Voyons comment s'étend la méthode originale de Hirota dans le cadre d'équations supersymétriques avec une variable de Grassmann θ. Pour ce faire, Hirota **[GHO]** définit l'opérateur bilinéaire supersymétrique :

$$\mathbf{SD}_x^n(f \cdot g) = (D_{\Theta_1} - D_{\Theta_2})(\partial_{x_1} - \partial_{x_2})^n f(x_1, \Theta_1) g(x_2, \Theta_2) \mid_{x_1 = x_2 = x, \Theta_1 = \Theta_2 = \theta}, \quad (3.4.1)$$

où D_{Θ_i} est la dérivée covariante :

$$D_{\Theta_i} = \partial_{\Theta_i} + \Theta_i \partial_{x_i}. \tag{3.4.2}$$

En gros, la procédure pour trouver les solutions supersolitoniques demeure la même que pour le cas non-supersymétrique. Nous déterminons d'abord le changement sur la variable dépendante qui permet de bilinéariser l'équation. Ensuite, nous écrivons cette équation en fonction de l'opérateur bilinéaire supersymétrique. Puis, nous résolvons la ou les équations bilinéaires en supposant une solution de type série de puissances qui fait maintenant intervenir la variable grassmannienne.

3.5. Super-Bilinéarisation de SUSY KdV

Rappelons la forme de l'équation supersymétrique de KdV donnée en (2.1.14) :

$$\Phi_t + D^6\Phi + 3D^2(\Phi D\Phi) = 0, \tag{3.5.1}$$

où $\Phi(x,t;\theta) = \xi(x,t) + \theta u(x,t)$ est un superchamp fermionique et $D = \partial_\theta + \theta\partial_x$. Afin de la bilinéariser, nous devons déterminer le changement de variables approprié. Pour ce faire, nous pouvons nous inspirer du changement de variables (3.1.4) utilisé dans le cas non-supersymétrique.

Comme le changement de variables fait intervenir une dérivée seconde par rapport à x, il faut faire intervenir la dérivée covariante D à l'ordre trois ($D^3 = \partial_\theta\partial_x + \theta\partial_x^2$) ou à l'ordre quatre ($D^4 = \partial_x^2$). Par contre, pour conserver la caractéristique impaire de Φ, nous devons prendre D^3 et nous écrivons :

$$\Phi(x,t;\theta) = 2D^3 \log \tau(x,t;\theta), \tag{3.5.2}$$

où la fonction τ est choisie bosonique [**CA3**]. En introduisant (3.5.2) dans l'équation supersymétrique (3.5.1), puis en intégrant par rapport à x, nous obtenons l'équation :

$$2D\partial_t \log\tau + 2D^7 \log\tau + 3\left[(2D^3\log\tau)(2\partial_x^2\log\tau)\right] = 0. \tag{3.5.3}$$

Puis, en utilisant les propriétés suivantes [**CA3**] :

$$\begin{aligned} D\log\tau &= \frac{D\tau}{\tau}, && (3.5.4)\\ 2D^3\log\tau &= \frac{\mathbf{SD}_x(\tau\cdot\tau)}{\tau^2}, && (3.5.5)\\ 2D^4\log\tau &= \frac{\mathbf{D}_x^2(\tau\cdot\tau)}{\tau^2}, && (3.5.6)\\ 2D\partial_t\log\tau &= \frac{\mathbf{SD}_t(\tau\cdot\tau)}{\tau^2}, && (3.5.7)\end{aligned}$$

l'équation (3.5.3) devient

$$\frac{\mathbf{SD}_t(\tau\cdot\tau)}{\tau^2}+2\partial_x^3\left(\frac{D\tau}{\tau}\right)+3\left(\frac{\mathbf{SD}_x(\tau\cdot\tau)}{\tau^2}\right)\left(\frac{\mathbf{D}_x^2(\tau\cdot\tau)}{\tau^2}\right)=0. \qquad (3.5.8)$$

En utilisant la propriété suivante [**HI1**] de l'opérateur de Hirota dans le contexte classique :

$$\partial_x^3\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{\mathbf{D}_x^3(a\cdot b)}{b^2}-3\left(\frac{\mathbf{D}_x(a\cdot b)}{b^2}\right)\left(\frac{\mathbf{D}_x^2(a\cdot b)}{b^2}\right), \qquad (3.5.9)$$

pour $a=D\tau$ et $b=\tau$, nous pouvons vérifier que :

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_x(D\tau\cdot\tau) &= \frac{1}{2}\mathbf{SD}_x(\tau\cdot\tau), && (3.5.10)\\ \mathbf{D}_x^2(D\tau\cdot\tau) &= \frac{1}{2}\mathbf{D}_x^2(\tau\cdot\tau), && (3.5.11)\\ \mathbf{D}_x^3(D\tau\cdot\tau) &= \frac{1}{2}\mathbf{SD}_x^3(\tau\cdot\tau), && (3.5.12)\end{aligned}$$

et nous obtenons :

$$2\partial_x^3\left(\frac{D\tau}{\tau}\right)=\frac{\mathbf{SD}_x^3(\tau\cdot\tau)}{\tau^2}-3\left(\frac{\mathbf{SD}_x(\tau\cdot\tau)}{\tau^2}\right)\left(\frac{\mathbf{D}_x^2(\tau\cdot\tau)}{\tau^2}\right). \qquad (3.5.13)$$

L'équation (3.5.8) s'écrit finalement sous la forme bilinéaire suivante :

$$\left(\mathbf{SD}_t+\mathbf{SD}_x^3\right)(\tau\cdot\tau)=0. \qquad (3.5.14)$$

Cette forme bilinéaire s'apparente grandement à la forme (3.2.7) obtenue dans le cas non-supersymétrique pour l'équation de KdV puisqu'il s'agit de sa version supersymétrique. Le développement en série de puissances de la fonction τ sera de nouveau pris sous la forme :

$$\tau=1+\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n\tau_n, \qquad (3.5.15)$$

avec

$$\tau_1 = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i e^{\chi_i}, \tag{3.5.16}$$

où

$$\chi_i = k_i x + \omega_i t + \theta\zeta_i + \eta_i^0, \tag{3.5.17}$$

avec ζ_i une constante fermionique tandis que k_i, ω_i et η_i^0 sont des constantes bosoniques. Une fois de plus, le nombre N dans la somme (3.5.16) correspond au N-supersoliton. De manière analogue aux équations (3.2.10) à (3.2.13), il faut maintenant résoudre, pour τ_i, un système infini d'équations dont les quatre premières sont :

$$\begin{aligned}
\left(\mathbf{SD}_t + \mathbf{SD}_x^3\right)(1 \cdot 1) &= 0, & (3.5.18)\\
\left(\mathbf{SD}_t + \mathbf{SD}_x^3\right)(\tau_1 \cdot 1 + 1 \cdot \tau_1) &= 0, & (3.5.19)\\
\left(\mathbf{SD}_t + \mathbf{SD}_x^3\right)(\tau_2 \cdot 1 + \tau_1 \cdot \tau_1 + 1 \cdot \tau_2) &= 0, & (3.5.20)\\
\left(\mathbf{SD}_t + \mathbf{SD}_x^3\right)(\tau_3 \cdot 1 + \tau_2 \cdot \tau_1 + \tau_1 \cdot \tau_2 + 1 \cdot \tau_3) &= 0. & (3.5.21)
\end{aligned}$$

Voyons quelles conditions ressortent dans les cas des 1-supersoliton et 2-supersoliton. Pour le 1-supersoliton, la fonction τ_1 s'écrit comme :

$$\tau_1 = \alpha_1 e^{\chi_1}. \tag{3.5.22}$$

En substituant cette expression dans (3.5.19), nous obtenons :

$$\tau_{1t\theta} + \tau_{1xxx\theta} + \theta\left[\tau_{1xt} + \tau_{1xxxx}\right] = 0, \tag{3.5.23}$$

ce qui impose la condition (3.2.21). Puis, en substituant τ_1 dans (3.5.20), l'expression $\left(\mathbf{SD}_t + \mathbf{SD}_x^3\right)(\tau_1 \cdot \tau_1)$ s'annule et nous pouvons poser $\tau_2 = 0$. En faisant de même pour les τ_i suivants, nous obtenons une série tronquée et nous avons :

$$\tau^{(1)} = 1 + \varepsilon\alpha_1 e^{k_1 x - k_1^3 t + \theta\zeta_1 + \eta_1^0}. \tag{3.5.24}$$

En substituant cette forme explicite dans l'expression du superchamp Φ (en posant $\varepsilon = \alpha_1 = 1$) et en utilisant le développement en séries de Taylor de e^{χ_1} autour de $\theta = 0$:

$$e^{\chi_1} = (1 + \theta\zeta_1)e^{\eta_1}, \tag{3.5.25}$$

cela nous donne une solution supersolitonique de la forme :

$$\Phi(x,t;\theta) = \frac{k_1\zeta_1}{2\cosh^2(\eta_1/2)} + \theta\frac{k_1^2}{2\cosh^2(\eta_1/2)}, \tag{3.5.26}$$

où $\eta_1 =$ (3.2.2). Nous constatons donc que la contribution bosonique (terme avec θ) de la solution Φ correspond exactement au 1-soliton donné par (3.2.1) de l'équation de KdV dans le contexte classique. L'allure graphique de la contribution fermionique (terme sans θ) de Φ est donnée à la figure 3.5. On remarque une

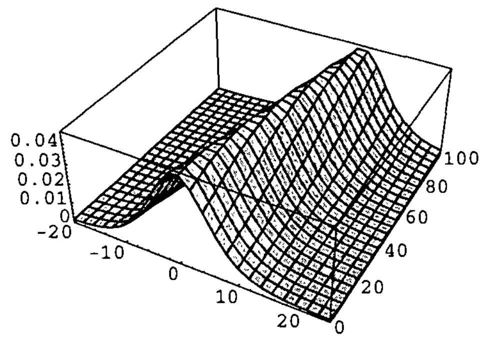


FIG. 3.5. 1-spersoliton sKdV (contribution fermionique) : $k_1 = 0.2$, $x \in [-20, 25]$, $t \in [0, 100]$, $\eta_1^0 = 0$.

similitude entre cette figure et 3.1 puisqu'il s'agit de la même fonction, à une constante $1/k_1$ près.

Pour le 2-supersoliton, la fonction τ_1 s'écrit comme :

$$\tau_1 = \alpha_1 e^{\chi_1} + \alpha_2 e^{\chi_2}. \tag{3.5.27}$$

En substituant (3.5.27) dans (3.5.19), nous obtenons à nouveau la condition (3.2.21). En explicitant (3.5.20), nous obtenons deux équations :

$$\begin{aligned} &\tau_{2t\theta} + \tau_{2xxx\theta} + \tau_{1t\theta}\tau_1 - \tau_{1t}\tau_{1\theta} \\ +\tau_{1xxx\theta}\tau_1 - 3\tau_{1xx\theta}\tau_{1x} - \tau_{1\theta}\tau_{1xxx} + 3\tau_{1xx}\tau_{1x\theta} &= 0, \qquad (3.5.28) \\ &\tau_{2xt} + \tau_{2xxxx} + \tau_{1xt}\tau_1 - \tau_{1x}\tau_{1t} \\ +\tau_{1xxxx}\tau_1 - 4\tau_{1xxx}\tau_{1x} + 3\tau_{1xx}^2 &= 0. \qquad (3.5.29) \end{aligned}$$

En substituant (3.5.27) dans ces équations, nous devons résoudre, pour τ_2 :

$$\tau_{2t\theta} + \tau_{2xxx\theta} + 3\alpha_1\alpha_2 k_1 k_2 (k_1 - k_2)(\zeta_2 - \zeta_1)e^{\chi_1+\chi_2} = 0, \quad (3.5.30)$$

$$\tau_{2xt} + \tau_{2xxxx} - 3\alpha_1\alpha_2 k_1 k_2 (k_1 - k_2)^2 e^{\chi_1+\chi_2} = 0. \quad (3.5.31)$$

En supposant que τ_2 prend la forme $\tau_2 = \alpha_1\alpha_2 A_{12} e^{\chi_1+\chi_2}$ (comme dans le cas non-supersymétrique) et en remplaçant dans (3.5.31), nous obtenons la condition (3.2.23). À partir de ce résultat, la substitution de τ_2 dans (3.5.30) impose la condition :

$$k_1\zeta_2 - k_2\zeta_1 = 0. \quad (3.5.32)$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\tau^{(2)} = 1 + \varepsilon\alpha_1 e^{\chi_1} + \varepsilon\alpha_2 e^{\chi_2} + \varepsilon^2\alpha_1\alpha_2 A_{12} e^{\chi_1+\chi_2}, \quad (3.5.33)$$

où χ_i est défini en (3.5.17). Lorsque $\varepsilon = \alpha_1 = \alpha_2 = 1$, il en résulte la solution supersolitonique :

$$\Phi(x,t;\theta) = R(x,t) + \theta S(x,t), \quad (3.5.34)$$

où

$$\begin{aligned} R(x,t) &= \frac{k_1\zeta_1 e^{\eta_1} + k_2\zeta_2 e^{\eta_2} + k_1\zeta_1 A_{12} e^{\eta_1+2\eta_2} + k_2\zeta_2 A_{12} e^{2\eta_1+\eta_2}}{(1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + A_{12}e^{\eta_1+\eta_2})^2} \quad (3.5.35) \\ &+ \frac{[(k_1-k_2)(\zeta_1-\zeta_2) + (k_1+k_2)(\zeta_1+\zeta_2)A_{12}]e^{\eta_1+\eta_2}}{(1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + A_{12}e^{\eta_1+\eta_2})^2}, \end{aligned}$$

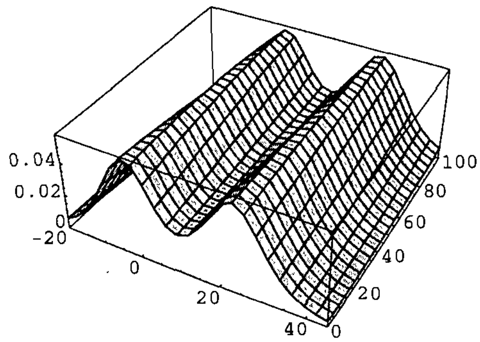
et

$$S(x,t) = \frac{k_1^2 e^{\eta_1} + k_2^2 e^{\eta_2} + 2(k_1-k_2)^2 e^{\eta_1+\eta_2} + A_{12}k_2^2 e^{2\eta_1+\eta_2} + A_{12}k_1^2 e^{\eta_1+2\eta_2}}{(1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + A_{12}e^{\eta_1+\eta_2})^2}. \quad (3.5.36)$$

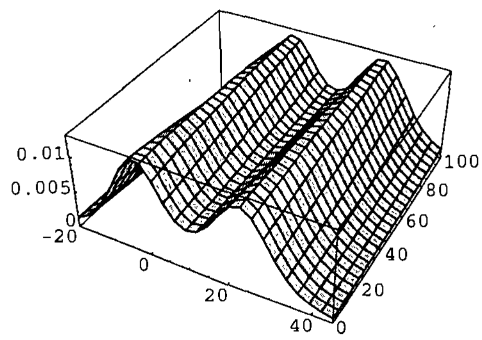
Si nous posons $\zeta_1 = \zeta_2$, l'allure graphique de la contribution fermionique $R(x,t)$ et bosonique $S(x,t)$ est donnée à la figure 3.6.

Une fois encore, nous remarquons que $S(x,t)$ correspond à la solution (3.2.26) obtenue pour le 2-soliton de KdV dans le contexte classique.

On trouve la généralisation pour le N-supersoliton dans plusieurs références dont [**CA1**] et [**CA2**]. En général, nous remarquons donc que la bilinéarisation de KdV et sKdV est assez semblable étant donné le changement de variables analogue. La même stratégie est utilisée pour l'équation supersymétrique de mKdV.



(a)



(b)

FIG. 3.6. 2-supersoliton sKdV $k_1 = 0.20$, $k_2 = 0.25$: (a) contribution fermionique $R(x,t)$, (b) contribution bosonique $S(x,t)$.

3.6. SUPER-BILINÉARISATION DE SUSY MKDV

Les résultats présentés dans cette section proviennent de [**GHO**] et [**LIU**]. En premier lieu, nous allons voir comment s'applique la bilinéarisation de Hirota pour l'équation supersymétrique de mKdV donnée par :

$$\Phi_t + D^6\Phi - 3\Phi D^3\Phi D\Phi - 3(D\Phi)^2 D^2\Phi = 0, \tag{3.6.1}$$

où $\Phi(x,t;\theta) = \xi(x,t) + \theta u(x,t)$ est encore un superchamp fermionique. Rappelons que le changement de variables considéré dans le cas non-supersymétrique est de la forme $\left[\log\left(\frac{F}{G}\right)\right]_x$. La forme proposée dans le cas supersymétrique est assez similaire :

$$\Phi = D\left(\log\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right) = \left(\log\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)_\theta + \theta\left(\log\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)_x. \tag{3.6.2}$$

On voit, en effet, que cette forme permet de conserver la caractéristique impaire de Φ et fait intervenir une dérivée d'ordre 1 par rapport à x. De plus, σ_1 et σ_2 sont des fonctions bosoniques. Lorsqu'on substitue $\Phi = D\left(\log\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)$ dans l'équation (3.6.1), nous obtenons :

$$D\partial_t \log\frac{\sigma_1}{\sigma_2} + D^7\log\frac{\sigma_1}{\sigma_2} - 3\left(D\log\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)\left(D^4\log\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)\left(D^2\log\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)$$
$$-3\left(D^2\log\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)^2\left(D^3\log\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right) = 0. \tag{3.6.3}$$

En utilisant les mêmes stratégies que pour la bilinéarisation de KdV supersymétrique, nous utilisons les identités (3.5.7), (3.5.13) ainsi que les identités **[GHO]** :

$$D^4\log(\sigma_1\sigma_2)+\left(D^2\left(\log\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)\right)^2 = \frac{\mathbf{D}_x^2\sigma_1\cdot\sigma_2}{\sigma_1\sigma_2}, \tag{3.6.4}$$

$$D^3\log(\sigma_1\sigma_2)+D^2\left(\log\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)D\left(\log\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right) = \frac{\mathbf{SD}_x\sigma_1\cdot\sigma_2}{\sigma_1\sigma_2}, \tag{3.6.5}$$

et l'équation (3.6.3) devient

$$\begin{aligned}
&\frac{\left(\mathbf{SD}_t+\mathbf{SD}_x^3\right)(\sigma_1\cdot\sigma_1)}{2\sigma_1^2}-\frac{\left(\mathbf{SD}_t+\mathbf{SD}_x^3\right)(\sigma_2\cdot\sigma_2)}{2\sigma_2^2} \qquad (3.6.6)\\
-\;& 3\left(D^4\log\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)\left(\frac{\mathbf{SD}_x(\sigma_1\cdot\sigma_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right)-3\left(D^3\log\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)\left(\frac{\mathbf{D}_x^2(\sigma_1\cdot\sigma_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right)\\
+\;& \frac{3}{2}\left(\frac{\mathbf{SD}_x(\sigma_2\cdot\sigma_2)}{\sigma_2^2}\right)\left(\frac{\mathbf{D}_x^2(\sigma_2\cdot\sigma_2)}{\sigma_2^2}\right)-\frac{3}{2}\left(\frac{\mathbf{SD}_x(\sigma_1\cdot\sigma_1)}{\sigma_1^2}\right)\left(\frac{\mathbf{D}_x^2(\sigma_1\cdot\sigma_1)}{\sigma_1^2}\right)\\
+\;& 3\left(D^4\log\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)\left(D^3\log(\sigma_1\sigma_2)\right)+3\left(D^4\log(\sigma_1\sigma_2)\right)\left(D^3\log\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)=0.
\end{aligned}$$

En développant, nous obtenons le résultat suivant :

$$\begin{aligned}
&3\left(D^4\log\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)\left(D^3\log(\sigma_1\sigma_2)\right)+3\left(D^4\log(\sigma_1\sigma_2)\right)\left(D^3\log\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right) \qquad (3.6.7)\\
=\;& 6(\log\sigma_1)_{xx}\left[(\log\sigma_1)_{x\theta}+\theta(\log\sigma_1)_{xx}\right]-6(\log\sigma_2)_{xx}\left[(\log\sigma_2)_{x\theta}+\theta(\log\sigma_2)_{xx}\right],\\
=\;& \frac{3}{2}\left(\frac{\mathbf{D}_x^2(\sigma_1\cdot\sigma_1)}{\sigma_1^2}\right)\left(\frac{\mathbf{SD}_x(\sigma_1\cdot\sigma_1)}{\sigma_1^2}\right)-\frac{3}{2}\left(\frac{\mathbf{D}_x^2(\sigma_2\cdot\sigma_2)}{\sigma_2^2}\right)\left(\frac{\mathbf{SD}_x(\sigma_2\cdot\sigma_2)}{\sigma_2^2}\right).
\end{aligned}$$

L'équation (3.6.6) devient finalement :

$$\begin{aligned}
&\frac{\left(\mathbf{SD}_t+\mathbf{SD}_x^3\right)(\sigma_1\cdot\sigma_1)}{2\sigma_1^2}-\frac{\left(\mathbf{SD}_t+\mathbf{SD}_x^3\right)(\sigma_2\cdot\sigma_2)}{2\sigma_2^2} \qquad (3.6.8)\\
-\;& 3\left(D^4\log\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)\left(\frac{\mathbf{SD}_x(\sigma_1\cdot\sigma_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right)-3\left(D^3\log\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)\left(\frac{\mathbf{D}_x^2(\sigma_1\cdot\sigma_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right)=0,
\end{aligned}$$

ce qui engendre la bilinéarisation :

$$\left(\mathbf{SD}_t+\mathbf{SD}_x^3\right)(\sigma_1\cdot\sigma_1) = 0, \tag{3.6.9}$$

$$\left(\mathbf{SD}_t+\mathbf{SD}_x^3\right)(\sigma_2\cdot\sigma_2) = 0, \tag{3.6.10}$$

$$\mathbf{D}_x^2(\sigma_1\cdot\sigma_2) = 0, \tag{3.6.11}$$

$$\mathbf{SD}_x(\sigma_1\cdot\sigma_2) = 0. \tag{3.6.12}$$

Comparons brièvement ce système avec celui obtenu dans le cas non-supersymétrique. Nous remarquons une forme similaire entre (3.3.39) et (3.6.9), entre

(3.3.40) et (3.6.10) de même qu'entre (3.3.41) et (3.6.11). En ce qui concerne (3.6.12), cette équation joue un rôle semblable à (3.6.11), mais elle apporte une condition supplémentaire au système en imposant une relation faisant intervenir les variables fermioniques. En fait, l'équation (3.6.12) implique (3.6.11) car la condition imposée par celle-ci est également imposée par la partie bosonique de l'opérateur de l'équation (3.6.12).

Nous supposons, à présent, que les fonctions σ_1 et σ_2 prennent la forme :

$$\sigma_1 = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n P_n, \tag{3.6.13}$$

$$\sigma_2 = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n Q_n, \tag{3.6.14}$$

avec

$$P_n = \sum_{i=1}^{N}\alpha_i e^{\chi_i}, \qquad Q_n = \sum_{i=1}^{N}\beta_i e^{\chi_i}, \tag{3.6.15}$$

où χ_i est donné par (3.5.17). En substituant ces expressions dans les équations (3.6.9) et (3.6.10), nous obtenons à nouveau la condition (3.2.21). De plus, en substituant ces mêmes expressions dans (3.6.12), nous obtenons les conditions :

$$\alpha_i = -\beta_i, \tag{3.6.16}$$

$$k_i\zeta_j = k_j\zeta_i, \qquad i \neq j. \tag{3.6.17}$$

Le 1-supersoliton s'écrit donc de la manière suivante :

$$\sigma_1 = 1+\varepsilon\alpha_1 e^{\chi_1}, \tag{3.6.18}$$

$$\sigma_2 = 1-\varepsilon\alpha_1 e^{\chi_1}. \tag{3.6.19}$$

En substituant cette forme explicite dans l'expression du superchamp Φ (en posant $\varepsilon = \alpha_1 = 1$) et en utilisant à nouveau le développement en séries de Taylor de e^{χ_1} autour de $\theta = 0$ donné par (3.5.25), nous trouvons :

$$\Phi = D\log\left[\frac{1+e^{\chi_1}}{1-e^{\chi_1}}\right], \tag{3.6.20}$$

$$= \frac{2(-\zeta_1+\theta k_1)}{e^{-\eta_1}-(1+2\zeta_1\theta)e^{\eta_1}}, \tag{3.6.21}$$

où η_1 = (3.2.2). En multipliant le numérateur et dénominateur par le facteur $(1 - 2\zeta_1\theta)e^{\eta_1} - e^{-\eta_1}$, la fonction Φ devient finalement :

$$\Phi = \frac{2(\zeta_1 - \theta k_1)}{e^{\eta_1} - e^{-\eta_1}} = \frac{\zeta_1 - \theta k_1}{\sinh(\eta_1)}. \tag{3.6.22}$$

On retrouve ainsi la solution donnée dans l'article de Ghosh & Sarma [**GHO**]. Nous constatons que la contribution bosonique (terme avec θ) du superchamp Φ correspond exactement à la solution (3.3.30) obtenue pour le 1-soliton de mKdV dans le contexte classique. La contribution fermionique (terme sans θ) de Φ correspond à la même fonction, à un facteur $1/k_1$ près. De la même façon, nous trouvons que le 2-supersoliton s'écrit de la manière suivante :

$$\sigma_1 = 1 + \varepsilon\alpha_1 e^{\chi_1} + \varepsilon\alpha_2 e^{\chi_2} + \varepsilon^2\alpha_1\alpha_2 A_{12} e^{\chi_1+\chi_2}, \tag{3.6.23}$$

$$\sigma_2 = 1 - \varepsilon\alpha_1 e^{\chi_1} - \varepsilon\alpha_2 e^{\chi_2} + \varepsilon^2\alpha_1\alpha_2 A_{12} e^{\chi_1+\chi_2}, \tag{3.6.24}$$

où χ_i = (3.5.17) et $k_1\zeta_2 = k_2\zeta_1$. Lorsque $\varepsilon = \alpha_1 = \alpha_2 = 1$ et en considérant à nouveau les développements en séries de Taylor de e^{χ_1} et e^{χ_2} autour de $\theta = 0$, les fonctions σ_1 et σ_2 deviennent :

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \left[1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + A_{12}e^{\eta_1+\eta_2}\right] + \theta\left[\zeta_1 e^{\eta_1} + \zeta_2 e^{\eta_2} + A_{12}(\zeta_1+\zeta_2)e^{\eta_1+\eta_2}\right], \\
&= b_1 + \theta f_1, \qquad (3.6.25)\\
\sigma_2 &= \left[1 - e^{\eta_1} - e^{\eta_2} + A_{12}e^{\eta_1+\eta_2}\right] + \theta\left[-\zeta_1 e^{\eta_1} - \zeta_2 e^{\eta_2} + A_{12}(\zeta_1+\zeta_2)e^{\eta_1+\eta_2}\right], \\
&= b_2 + \theta f_2. \qquad (3.6.26)
\end{aligned}$$

Le superchamp Φ peut donc s'écrire sous la forme suivante :

$$\Phi = D\left(\log\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right) = \frac{(f_1 b_2 - b_1 f_2)(b_1 b_2) + \theta(b_{1x}b_2 - b_1 b_{2x})}{b_1 b_2 + \theta(b_1 f_2 + f_1 b_2)}. \tag{3.6.27}$$

En multipliant le numérateur et dénominateur de la fraction par le conjugué $b_1 b_2 - \theta(b_1 f_2 + f_1 b_2)$, nous éliminons la présence de θ au dénominateur et Φ devient :

$$\Phi = \frac{f_1 b_2 - b_1 f_2}{b_1 b_2} + \theta\frac{b_{1x}b_2 - b_1 b_{2x}}{b_1 b_2}. \tag{3.6.28}$$

En substituant les expressions correspondantes provenant de (3.6.25) et (3.6.26), nous obtenons enfin la solution supersolitonique :

$$\begin{aligned}\Phi &= 2\frac{\zeta_1 e^{\eta_1} + \zeta_2 e^{\eta_2} - A_{12}\zeta_2 e^{2\eta_1+\eta_2} - A_{12}\zeta_1 e^{\eta_1+2\eta_2}}{(1+e^{\eta_1}+e^{\eta_2}+A_{12}e^{\eta_1+\eta_2})(1-e^{\eta_1}-e^{\eta_2}+A_{12}e^{\eta_1+\eta_2})} \\ &+ 2\theta\frac{k_1 e^{\eta_1} + k_2 e^{\eta_2} - A_{12}k_2 e^{2\eta_1+\eta_2} - A_{12}k_1 e^{\eta_1+2\eta_2}}{(1+e^{\eta_1}+e^{\eta_2}+A_{12}e^{\eta_1+\eta_2})(1-e^{\eta_1}-e^{\eta_2}+A_{12}e^{\eta_1+\eta_2})}. \qquad (3.6.29)\end{aligned}$$

On constate que la contribution bosonique (terme avec θ) correspond exactement à la solution (3.3.37) obtenue pour le 2-soliton de mKdV dans le contexte classique. La figure 3.7 nous illustre la contribution fermionique lorsque $\zeta_1 = \zeta_2$.

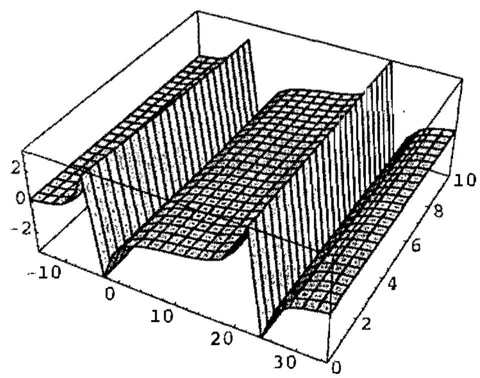


FIG. 3.7. 2-supersoliton smKdV (contribution fermionique) : $k_1 = 0.20$, $k_2 = 0.25$

Il est possible de généraliser les expressions de σ_1 et σ_2 pour le N-supersoliton. Nous retrouvons celles-ci dans plusieurs références dont [**GHO**].

Finalement, voyons la forme bilinéaire associée à l'équation supersymétrique de mKdV introduite au chapitre 2 :

$$A_t + D^6 A - 6A^2 D^2 A = 0, \qquad (3.6.30)$$

où $A(x, t; \theta) = u(x, t) + \theta\xi(x, t)$ est un superchamp bosonique. Bien qu'il s'agisse d'une équation supersymétrique, celle-ci ne fait apparaître que D à l'ordre pair. Dans la bilinéarisation de l'équation, nous ne verrons donc pas l'opérateur **SD**. Cette fois-ci, afin de conserver le caractère bosonique de A et faire intervenir une dérivée par rapport à x d'ordre 1, la transformation bi-logarithmique sera de la forme suivante :

$$A = D^2 \left(\log \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) = \left(\log \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)_x , \tag{3.6.31}$$

où σ_1 et σ_2 sont à nouveau des fonctions bosoniques.

On remarque que ce changement de variable est la dérivée covariante de celui donné par (3.6.2). Notons néanmoins que l'équation (3.6.30) n'est pas la dérivée covariante de l'équation (3.6.1) ; les deux équations supersymétriques mènent donc à des bilinéarisations et à des solutions différentes. En substituant (3.6.31) dans (3.6.30), nous obtenons :

$$\partial_x \partial_t \log \frac{\sigma_1}{\sigma_2} + \partial_x^4 \log \frac{\sigma_1}{\sigma_2} - 6 \left(\partial_x \log \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)^2 \left(\partial_x^2 \log \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) = 0. \tag{3.6.32}$$

Nous utiliserons cette fois-ci l'identité donnée par (3.6.4) ainsi que l'identité suivante [**HIE**] :

$$\partial_x^4 \log \sigma = \frac{\mathbf{D}_x^4(\sigma \cdot \sigma)}{2\sigma^2} - 3 \frac{\left(\mathbf{D}_x^2(\sigma \cdot \sigma)\right)^2}{2\sigma^4}, \tag{3.6.33}$$

puisque nous pouvons écrire $\partial_x^4 \log \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \partial_x^4 \log \sigma_1 - \partial_x^4 \log \sigma_2$. On peut alors appliquer la même stratégie que pour la bilinéarisation de KdV et mKdV dans le contexte supersymétrique avec un superchamp fermionique. L'équation (3.6.32) devient :

$$\begin{aligned} &\frac{(\mathbf{D}_x\mathbf{D}_t + \mathbf{D}_x^4)(\sigma_1 \cdot \sigma_1)}{2\sigma_1^2} - \frac{(\mathbf{D}_x\mathbf{D}_t + \mathbf{D}_x^4)(\sigma_2 \cdot \sigma_2)}{2\sigma_2^2} - 3\frac{\left(\mathbf{D}_x^2(\sigma_1 \cdot \sigma_1)\right)^2}{2\sigma_1^4} \\ &+3\frac{\left(\mathbf{D}_x^2(\sigma_2 \cdot \sigma_2)\right)^2}{2\sigma_2^4} - 6 \left(\frac{\mathbf{D}_x^2(\sigma_1 \cdot \sigma_2)}{\sigma_1\sigma_2} - D^4 \log(\sigma_1\sigma_2) \right) \left(\partial_x^2 \log \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) = 0. \end{aligned} \tag{3.6.34}$$

En utilisant le fait que

$$3\frac{\left(\mathbf{D}_x^2(\sigma_1 \cdot \sigma_1)\right)^2}{2\sigma_1^4} + 3\frac{\left(\mathbf{D}_x^2(\sigma_2 \cdot \sigma_2)\right)^2}{2\sigma_2^4} + 6D^4 \log(\sigma_1\sigma_2) \left(\partial_x^2 \log \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) = 0, \tag{3.6.35}$$

l'équation (3.6.34) s'écrit finalement de la manière suivante :

$$\frac{(\mathbf{D}_x\mathbf{D}_t + \mathbf{D}_x^4)(\sigma_1 \cdot \sigma_1)}{2\sigma_1^2} - \frac{(\mathbf{D}_x\mathbf{D}_t + \mathbf{D}_x^4)(\sigma_2 \cdot \sigma_2)}{2\sigma_2^2} - 6 \left(\frac{\mathbf{D}_x^2(\sigma_1 \cdot \sigma_2)}{\sigma_1\sigma_2} \right) \left(\partial_x^2 \log \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) = 0, \tag{3.6.36}$$

et nous trouvons la forme bilinéaire :

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{D}_x\mathbf{D}_t + \mathbf{D}_x^4)(\sigma_1 \cdot \sigma_1) &= 0, && (3.6.37)\\
(\mathbf{D}_x\mathbf{D}_t + \mathbf{D}_x^4)(\sigma_2 \cdot \sigma_2) &= 0, && (3.6.38)\\
\mathbf{D}_x^2(\sigma_1 \cdot \sigma_2) &= 0. && (3.6.39)
\end{aligned}
$$

Cette forme bilinéaire ressemble grandement à celle obtenue pour l'équation supersymétrique de mKdV ((3.6.9) à (3.6.12)). En supposant les mêmes formes que précédemment pour σ_1 et σ_2, nous obtenons les mêmes conditions sur les paramètres k_i, ω_i, α_i et β_i. Ainsi, tous les supersolitons s'écrivent de la même manière que pour l'équation (3.6.1). En substituant les formes (3.6.18) et (3.6.19) obtenues pour σ_1 et σ_2 dans (3.6.31) pour le 1-supersoliton, nous obtenons :

$$
A = \frac{-2k_1(1+\zeta_1\theta)}{(1+2\zeta_1\theta)e^{\eta_1} - e^{-\eta_1}}. \qquad (3.6.40)
$$

En utilisant la même stratégie que précédemment, c'est-à-dire multiplier au numérateur et au dénominateur par le conjugué $(1-2\zeta_1\theta)e^{\eta_1} - e^{-\eta_1}$, nous obtenons la solution :

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{-2k_1}{e^{\eta_1} - e^{-\eta_1}} - \theta\frac{2k_1\zeta(e^{\eta_1} + e^{-\eta_1})}{(e^{\eta_1} - e^{-\eta_1})^2} && (3.6.41)\\
&= -\frac{k_1}{\sinh(\eta_1)} - \theta\frac{k_1\zeta_1\cosh(\eta_1)}{\sinh^2(\eta_1)}. && (3.6.42)
\end{aligned}
$$

ce qui correspond à la solution mentionnée par Ghosh & Sarma [**GHO**]. La figure 3.8 illustre les contributions bosoniques et fermioniques de cette solution.

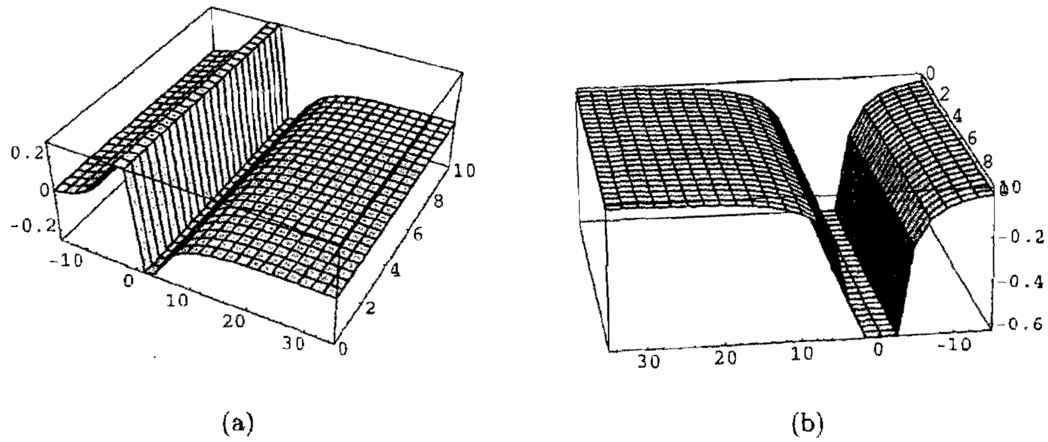


FIG. 3.8. 2-supersoliton smKdV $k_1 = 0.20$: (a) contribution bosonique, (b) contribution fermionique.

Chapitre 4

CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous nous sommes d'abord penchés sur les différentes versions supersymétriques des équations de KdV et mKdV lorsqu'une et deux variables de Grassmann sont utilisées. Pour un superchamp d'ordre $N = 2$, nous avons étudié une supersymétrisation déjà connue de la littérature [**WIN**] et nous sommes intéressés à une nouvelle supersymétrisation dont les équations composantes font intervenir de manière inversée les équations classiques de KdV et mKdV.

À partir de ces deux superéquations, nous avons appliqué une méthode de réduction élaborée dans [**WIN**] ainsi qu'une nouvelle méthode de réduction alternative, ce qui nous a mené à des systèmes faisant intervenir deux équations différentielles ordinaires. Nous nous sommes ensuite convaincu que les deux méthodes de réduction n'étaient pas équivalentes. En effet, pour une même méthode de réduction appliquée aux deux supersymétrisations, il est possible de relier une seule des deux équations des systèmes à l'aide d'un changement de variable.

Nous avons obtenu deux nouvelles solutions particulières (solitoniques et polynomiales) au système d'EDOs résultant de l'application de la réduction vue dans [**WIN**] à notre nouvelle supersymétrisation. Dans le cas particulier de la solution constante, nous avons d'ailleurs constaté que ce système était équivalent à celui lié à l'autre supersymétrisation par la même réduction.

En ce qui concerne la méthode de Hirota, notre objectif était de mettre en évidence les avantages de son approche et comparer les solutions solitoniques obtenues dans le contexte classique et supersymétrique. Notre conclusion est que cette méthode s'avère efficace pour trouver des solutions solitoniques aux équations de KdV et mKdV, tant dans le contexte classique que supersymétrique. Elle est compacte et permet de trouver une infinité de solitons ou supersolitons, donc une infinité de nouvelles solutions. Rappelons que cette méthode ne nous oblige pas à développer les équations supersymétriques pour obtenir des équations habituelles à résoudre, ce qui lui procure un avantage considérable par rapport aux autres méthodes connues pour trouver des solutions solitoniques.

De façon plus spécifique, nous avons d'abord vu en détail l'application de la méthode de Hirota nous permettant d'obtenir un 1-soliton (graphique avec une bosse) et un 2-soliton (graphique faisant intervenir deux bosses) dans le contexte classique. Finalement, nous avons étudié l'extension de la méthode au contexte supersymétrique et avons également obtenu une expression pour le 1-supersoliton et le 2-supersoliton pour les équations supersymétriques sKdV et smKdV. Nous avons ainsi remarqué que la contribution bosonique de la solution correspond exactement au soliton équivalent obtenu dans le contexte classique tandis que la contribution fermionique de la solution nous donne une nouvelle solution solitonique.

BIBLIOGRAPHIE

[ABL] ABLOWITZ J. & SEGUR H., *Solitons and the Inverse Scattering Transform*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1981.

[AYA] AYARI M.A., *Supergroupes de Lie et solutions invariantes pour des équations différentielles non-linéaires à valeurs de Grassmann*, Thèse de doctorat, Université de Montréal, 1997.

[CA1] CARSTEA A. S., Bilinear approach to supersymmetric KdV equation, *Journal of nonlinear mathematical physics* **8**, pp. 48-52, 2001.

[CA2] CARSTEA A. S., Extension of the bilinear formalism to supersymmetric KdV-type equations, *Nonlinearity* **13**, pp. 1645-1656, 2000.

[CA3] CARSTEA A. S., Hirota bilinear formalism and supersymmetry, *Institute of physics and nuclear engineering, Dept. Theor. Physics, Nonlinear Sciences*, Bucharest, 2000.

[COR] CORNWELL J.F., *Group theory in physics Volume III, Supersymmetries and infinite-dimentionnal algebras*, Academic Press, New York, 1989.

[DRA] DRAZIN P.G. AND JOHNSON R.S., *Solitons : an introduction*, Cambridge University Press, New York, 1989.

[GHO] GHOSH S. & SARMA D., Bilinearization of $N = 1$ supersymmetric modified KdV equations, *Nonlinearity*, **16**, pp. 411-418, 2003.

[HAS] HASEGAWA AKIRA, Optical solitons in communications : from integrability to controllability, *Acta Applicandae Mathematicae : An International Survey Journal on Applying Mathematics and Mathematical Applications*, **39**, pp. 85-90, June 1995.

[HI1] HIROTA R., *The direct method in soliton theory*, Cambridge tracts in mathematics (no. 155), Cambridge, New York, 2004.

[HI2] Hirota R., Exact Solution of the modified Korteweg-de Vries equation for multiple collisions of solitons, *Journal of the Physical Society of Japan*, vol 33, no.5, November 1972.

[HIE] Hierarinta J., *Introduction to the Hirota bilinear method*, Lecture Notes in Physics Vol. 495 Springer, New York, pp. 95-103, 1997.

[INC] Ince E.L., *Ordinary Differential Equations*, Dover, New York, 1956.

[LAB] Labelle P. and Mathieu P., A new N=2 superymmetric Korteweg-de Vries equation, *J. Math. Phys.* **32**(4), pp. 923-927, 1991.

[LIU] Liu Q P, Hu Xing-Biao & Zhang Meng-Xia, Supersymmetric modified Korteweg-de Vries equation : bilinear approach, *Nonlinearity* **18**, pp. 1597-1603, 2005.

[MA1] Mathieu P., *Supersymmetric extension of the Korteweg-de Vries equation*, J. Math. Phys. **29**(11), November 1988, 2499-2506.

[MA2] Labelle P. & Mathieu P., *A new $N = 2$ supersymmetric Korteweg-de Vries equation*, J. Math. Phys. **32**(4), April 1991, 923-927.

[MAS] Matsuno Y., *Bilinear Transformation Method*, Academic Press, Orlando, 1984.

[OLV] Olver Peter J., *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, Graduate texts in mathematics (vol 107), Springer, 1993.

[WIN] Ayari M.A., Hussin V. and Winternitz P., Group invariant solutions for the N=2 super Korteweg-de Vries equation, *J. Math. Phys.*, **40**(4), pp. 1951-1965, 1999.

Annexe A

QUELQUES RÉSULTATS

A.1. Action de la dérivée covariante sur un champ fermionique, cas N=1

Résultats de l'action de la dérivée covariante $D = \theta\partial_x + \partial_\theta$ sur le champ fermionique $\Phi = \xi + \theta u$:

$$D\Phi = u + \theta\xi_x \qquad D^2\Phi = \xi_x + \theta u_x$$

$$D^3\Phi = u_x + \theta\xi_{xx} \qquad D^4\Phi = \theta u_{xx} + \xi_{xx}$$

$$D^5\Phi = u_{xx} + \theta\xi_{xxx} \qquad D^6\Phi = \theta u_{xxx} + \xi_{xxx}$$

A.2. Action des dérivées covariantes sur un champ fermionique, cas N=2

Résultats de l'action des dérivées covariantes $D_1 = \partial_{\theta_1} + \theta_1 \partial_x$ et $D_2 = \partial_{\theta_2} + \theta_2 \partial_x$ sur le champ fermionique $A = v(x,t) + \theta_1 \xi^1(x,t) + \theta_2 \xi^2(x,t) + \theta_1\theta_2 u(x,t)$:

$$\begin{aligned}
D_1 A &= \xi^1 + \theta_2 u + \theta_1 v_x + \theta_1\theta_2 \xi^2_x \\
D_2 A &= \xi^2 - \theta_1 u + \theta_2 v_x - \theta_1\theta_2 \xi^1_x \\
D_1^2 A = D_2^2 A &= v_x + \theta_2 \xi^2_x + \theta_1 \xi^1_x + \theta_1\theta_2 u_x \\
D_1 D_2 A &= -u - \theta_2 \xi^1_x + \theta_1 \xi^2_x + \theta_1\theta_2 v_{xx} \\
D_1^3 A = D_1 D_2^2 A &= \xi^1_x + \theta_2 u_x + \theta_1 v_{xx} + \theta_1\theta_2 \xi^2_{xx} \\
D_2^3 A = D_1^2 D_2 A &= \xi^2_x - \theta_1 u_x + \theta_2 v_{xx} - \theta_1\theta_2 \xi^1_{xx} \\
D_1^4 A = D_2^4 A = D_1^2 D_2^2 A &= v_{xx} + \theta_1 \xi^1_{xx} + \theta_2 \xi^2_{xx} + \theta_1\theta_2 u_{xx} \\
D_1^3 D_2 A = D_1 D_2^3 A &= -u_x - \theta_2 \xi^1_{xx} + \theta_1 \xi^2_{xx} + \theta_1\theta_2 v_{xxx} \\
A^2 &= v^2 + 2\theta_1 \xi^1 v + 2\theta_2 \xi^2 v + 2\theta_1\theta_2 (uv - \xi^1\xi^2) \\
D_1 A^2 &= 2\xi^1 v + 2\theta_2 (uv - \xi^1\xi^2) + 2\theta_1 v v_x + 2\theta_1\theta_2 (\xi^2 v)_x \\
D_2 A^2 &= 2\xi^2 v - 2\theta_1 (uv - \xi^1\xi^2) + 2\theta_2 v v_x - 2\theta_1\theta_2 (\xi^1 v)_x \\
D_1^2 A^2 = D_2^2 A^2 &= 2 v v_x + 2\theta_2 (\xi^2 v)_x + 2\theta_1 (\xi^1 v)_x + 2\theta_1\theta_2 (uv - \xi^1\xi^2)_x \\
D_1 D_2 A^2 &= -2(uv - \xi^1\xi^2) - 2\theta_2 (\xi^1 v)_x + 2\theta_1 (\xi^2 v)_x + 2\theta_1\theta_2 (v v_x)_x \\
D_1^3 A^2 = D_1 D_2^2 A^2 &= 2(\xi^1 v)_x + 2\theta_2 (uv - \xi^1\xi^2)_x + 2\theta_1 (v v_x)_x + 2\theta_1\theta_2 (\xi^2 v)_{xx} \\
D_2^3 A^2 = D_2 D_1^2 A^2 &= 2(\xi^2 v)_x - 2\theta_1 (uv - \xi_1\xi_2)_x + 2\theta_2 (v v_x)_x - 2\theta_1\theta_2 (\xi^1 v)_{xx} \\
D_1^4 A^2 = D_2^4 A^2 = D_1^2 D_2^2 A^2 &= 2(v v_x)_x + 2\theta_2 (\xi^2 v)_{xx} + 2\theta_1 (\xi^1 v)_{xx} + 2\theta_1\theta_2 (uv - \xi^1\xi^2)_{xx} \\
D_1 D_2^3 A^2 = D_1^3 D_2 A^2 &= -2(uv - \xi^1\xi^2)_x - 2\theta_2 (\xi_1 v)_{xx} + 2\theta_1 (\xi^2 v)_{xx} + \theta_1\theta_2 (v v_x)_{xx}
\end{aligned}$$

A.3. Action de la dérivée covariante sur la transformation du Miura

Résultats de l'action de la dérivée covariante $D = \theta\partial_x + \partial_\theta$ sur la transformation de Miura $\phi = D^2\psi - \psi D\psi$ avec ϕ et ψ deux champs fermioniques :

$$\begin{aligned}
\phi_t &= D^2\psi_t - \psi_t D\psi - \psi D\psi_t \\
D\phi &= D^3\psi - (D\psi)^2 + \psi D^2\psi \\
D^2\phi &= D^4\psi - D\psi D^2\psi - \psi D^3\psi \\
D^3\phi &= D^5\psi - 2D\psi D^3\psi + \psi D^4\psi \\
D^4\phi &= D^6\psi - 2D^2\psi D^3\psi - D\psi D^4\psi - \psi D^5\psi \\
D^5\phi &= D^7\psi - 2(D^3\psi)^2 + D^2\psi D^4\psi - 2D\psi D^5\psi + \psi D^6\psi \\
D^6\phi &= D^8\psi - 3D^3\psi D^4\psi - 3D^2\psi D^5\psi - D\psi D^6\psi - \psi D^7\psi \\
D^2(\phi D\phi) &= D^3\psi D^4\psi + D^2\psi D^5\psi - D^4\psi(D\psi)^2 - 3D^3\psi D\psi D^2\psi \\
&\quad -\psi(D^3\psi)^2 - \psi D\psi D^5\psi + (D\psi)^3 D^2\psi + 3\psi(D\psi)^2 D^3\psi
\end{aligned}$$

Résultats de l'action de la dérivée covariante $D = \theta\partial_x + \partial_\theta$ sur la transformation de Miura $D\phi = D^2\psi - \psi^2$ avec ϕ et ψ deux champs bosoniques :

$$\begin{aligned}
D\phi_t &= D^2\psi_t - 2\psi\psi_t \\
D\phi &= D^2\psi - \psi^2 \\
D^2\phi &= D^3\psi - 2\psi D\psi \\
D^3\phi &= D^4\psi - 2\psi D^2\psi \\
D^4\phi &= D^5\psi - 2D\psi - 2\psi D^3\psi \\
D^5\phi &= D^6\psi - 2(D^2\psi)^2 - 2\psi D^4\psi \\
D^6\phi &= D^7\psi - 4D^2\psi D^3\psi - 2D\psi D^4\psi - 2\psi D^5\psi \\
D^7\phi &= D^8\psi - 6D^2\psi D^4\psi - 2\psi D^6\psi
\end{aligned}$$

A.4. Propriétés de l'opérateur bilinéaire de Hirota

$$\mathbf{D}_t^n \mathbf{D}_x^m (a \cdot b) = (\partial/\partial t - \partial/\partial t')^n (\partial/\partial x - \partial/\partial x')^m a(x,t) b(x',t') \mid_{x'=x, t'=t}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_x (a \cdot b) &= a_x b - a b_x \\
\mathbf{D}_x^2 (a \cdot b) &= a_{xx} b - 2 a_x b_x + a b_{xx} \\
\mathbf{D}_x^3 (a \cdot b) &= a_{xxx} b - 3 a_{xx} b_x + 3 a_x b_{xx} - a b_{xxx} \\
\mathbf{D}_x^4 (a \cdot b) &= a_{xxxx} b - 4 a_{xxx} b_x + 6 a_{xx} b_{xx} - 4 a_x b_{xxx} + a b_{xxxx} \\
\mathbf{D}_t (a \cdot b) &= a_t b - a b_t \\
\mathbf{D}_x \mathbf{D}_t (a \cdot b) &= a_{xt} b - a_x b_t - a_t b_x + a b_{xt}
\end{aligned}$$

A.5. Propriétés de l'opérateur bilinéaire supersymétrique de Hirota

$$\mathbf{SD}_x^n (a \cdot b) = (D_{\Theta_1} - D_{\Theta_2})(\partial_{x_1} - \partial_{x_2})^n a(x_1, \Theta_1) b(x_2, \Theta_2) \mid_{x_1 = x_2 = x, \Theta_1 = \Theta_2 = \theta},$$

avec

$$D_{\Theta_i} = \partial_{\Theta_i} + \Theta_i \partial_{x_i}.$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{SD}_x (a \cdot b) &= [a_{x\theta} b - a_\theta b_x - a_x b_\theta + a b_{x\theta}] + \theta [a_{xx} b - 2 a_x b_x + a b_{xx}] \\
\mathbf{SD}_x^2 (a \cdot b) &= [a_{xx\theta} b - 2 a_{x\theta} b_x + a_\theta b_{xx} - a_{xx} b_\theta + 2 a_x b_{x\theta} - a b_{xx\theta}] \\
&\quad + \theta [a_{xxx} b - 3 a_{xx} b_x + 3 a_x b_{xx} - a b_{xxx}] \\
\mathbf{SD}_x^3 (a \cdot b) &= [a_{xxx\theta} b - 3 a_{xx\theta} b_x + 3 a_{x\theta} b_{xx} - a_\theta b_{xxx} \\
&\quad - a_{xxx} b_\theta + 3 a_{xx} b_{x\theta} - 3 a_x b_{xx\theta} + a b_{xxx\theta}] \\
&\quad + \theta [a_{xxxx} b - 4 a_{xxx} b_x + 6 a_{xx} b_{xx} - 4 a_x b_{xxx} + a b_{xxxx}] \\
\mathbf{SD}_t (a \cdot b) &= [a_{t\theta} b - a_\theta b_t - a_t b_\theta + a b_{t\theta}] + \theta [a_{xt} b - a_x b_t - a_t b_x + a b_{xt}]
\end{aligned}$$