

Direction des bibliothèques

AVIS

Ce document a été numérisé par la Division de la gestion des documents et des archives de l'Université de Montréal.

L'auteur a autorisé l'Université de Montréal à reproduire et diffuser, en totalité ou en partie, par quelque moyen que ce soit et sur quelque support que ce soit, et exclusivement à des fins non lucratives d'enseignement et de recherche, des copies de ce mémoire ou de cette thèse.

L'auteur et les coauteurs le cas échéant conservent la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent ce document. Ni la thèse ou le mémoire, ni des extraits substantiels de ce document, ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans l'autorisation de l'auteur.

Afin de se conformer à la Loi canadienne sur la protection des renseignements personnels, quelques formulaires secondaires, coordonnées ou signatures intégrées au texte ont pu être enlevés de ce document. Bien que cela ait pu affecter la pagination, il n'y a aucun contenu manquant.

NOTICE

This document was digitized by the Records Management & Archives Division of Université de Montréal.

The author of this thesis or dissertation has granted a nonexclusive license allowing Université de Montréal to reproduce and publish the document, in part or in whole, and in any format, solely for noncommercial educational and research purposes.

The author and co-authors if applicable retain copyright ownership and moral rights in this document. Neither the whole thesis or dissertation, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms, contact information or signatures may have been removed from the document. While this may affect the document page count, it does not represent any loss of content from the document.

Université de Montréal

Une nouvelle mise en œuvre de la méthode IIM
pour les équations de Navier-Stokes en présence
d'une force singulière

par

Marc Conti

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en Discipline

Orientation mathématiques appliquées

janvier 2009

© Marc Conti, 2008



Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

**Une nouvelle mise en œuvre de la méthode IIM
pour les équations de Navier-Stokes en présence
d'une force singulière**

présenté par

Marc Conti

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Pr. Michel Delfour

(président-rapporteur)

Pr. Robert G. Owens

(directeur de recherche)

Pr. Anne Bourlioux

(membre du jury)

Mémoire accepté le:

5 janvier 2009

SOMMAIRE

Dans ce mémoire, nous développons un algorithme numérique pour simuler l'interaction d'un fluide visqueux et incompressible avec une membrane élastique immergée. Inspiré par les travaux de Li et Lai [15], nous utilisons une méthode de projection discrétisant les équations de Navier-Stokes sur un maillage cartésien fixe. La force élastique due à l'étirement de la membrane est incorporée au solveur par l'entremise de termes de correction. La principale différence entre notre approche et les méthodes IIM existantes provient de la dérivation des conditions de saut de la solution. Au lieu de dériver celles-ci à partir des équations exactes, nous intégrons plutôt les équations discrétisées afin d'obtenir directement les sauts des fonctions approximatives qui interviennent dans la méthode de projection. Dans le cas où la viscosité du fluide est continue, nous montrons que ces sauts approximatifs sont équivalents aux sauts exacts trouvés dans la littérature. Afin de tester la performance de notre code, une comparaison entre notre version de la méthode IIM et la méthode IB est présentée pour plusieurs problèmes d'interface.

Mots clés : équations de Navier-Stokes, force singulière, conditions de saut, interaction fluide-structure, méthode de projection, méthode IIM, méthode IB

SUMMARY

In this master's thesis, we develop a numerical algorithm for the simulation of viscous incompressible flows with immersed elastic boundaries. Inspired by the work of Li and Lai [15], we use a projection method to solve the Navier-Stokes equations on a fixed Cartesian grid. The singular force which results from the stretching of the elastic band is incorporated to the solver by means of correction terms. The principal difference between our approach and existing IIM methods comes from the derivation of the jump conditions of the solution. Instead of using the exact equations for this derivation, we preferred integrating the discretized equations in order to obtain directly the correct jumps for the approximate functions which appear in the projection method. In the case of a fluid of continuous viscosity, we show that this approximate form of the jump conditions is equivalent to the exact jumps found in the literature. In order to test the performance of our method, a comparison between our numerical results and those obtained by the IB method is presented for several interface problems.

Key words : Navier-Stokes equations, singular force, jump conditions, fluid-structure interaction, projection method, immersed interface, immersed boundary

TABLE DES MATIÈRES

Sommaire	iii
Summary	iv
Liste des figures	x
Liste des tableaux	xiv
Remerciements	1
Introduction	2
Chapitre 1. Modélisation mathématique	7
1.1. Terminologie et définitions	8
1.1.1. Le choix des maillages discrets	8
1.1.2. Schéma aux différences finies centrées	9
1.1.3. Les points d'intersection	9
1.1.4. Les points irréguliers.....	10
1.1.5. Conditions de saut.....	10
1.2. Équations de Navier-Stokes	11
1.3. Modélisation de l'interface	13
1.3.1. Densité de force pour une membrane élastique	13
1.3.2. Distribution des marqueurs lagrangiens	15
1.3.3. Courbe $\tilde{\Gamma}$ approximative	15
1.4. Méthode IB "immersed boundary"	16
1.4.1. Fonction δ -discrète.....	16

1.4.2.	Schéma d'évolution explicite	16
1.4.3.	Commentaires sur la méthode IB.....	17
1.5.	Méthode IIM "immersed interface".....	18
Chapitre 2.	Problèmes elliptiques avec source singulière	19
2.1.	Description et hypothèses	19
2.1.1.	Reformulation du problème	20
2.2.	Dérivation des conditions de saut	21
2.2.1.	Intégration des équations différentielles.....	21
2.2.2.	Système de coordonnées locales	24
2.2.3.	Différentiation le long de l'interface	25
2.3.	Termes de correction.....	26
2.3.1.	Forme limite des termes de correction	29
2.3.2.	Termes de correction pour le cas limite #1	29
2.3.3.	Termes de correction pour le cas limite #2	30
2.4.	Détails sur l'implémentation de la méthode IIM.....	32
2.4.1.	Interpolation par des splines cubiques.....	32
2.4.2.	Recherche des points d'intersection.....	33
2.5.	Résultats numériques	34
2.5.1.	Premier exemple.....	35
2.5.1.1.	Erreur d'interpolation sur l'interface	35
2.5.1.2.	Résolution par la méthode IIM.....	37
2.5.1.3.	Résolution par la méthode IB.....	41
2.5.2.	Deuxième exemple.....	42
2.5.2.1.	Résolution par la méthode IIM.....	43
2.5.2.2.	Résolution par la méthode IB.....	44
2.6.	Conclusion.....	46

Chapitre 3. Équations de Navier-Stokes avec force singulière.....	47
3.1. Méthode de projection sans pression	47
3.1.1. Discrétisation des opérateurs différentiels.....	49
3.1.2. Conditions frontières pour \mathbf{u}^* et ϕ^{n+1}	51
3.1.3. Résultats numériques pour PMIII	52
3.1.3.1. Le choix des conditions frontières pour \mathbf{u}^*	52
3.1.3.2. Commentaires sur le problème de Poisson pour ϕ^{n+1}	55
3.2. Discussion sur les conditions de saut pour les équations de Navier-Stokes.....	55
3.2.1. Conditions de saut lorsque la viscosité est discontinue.....	56
3.2.1.1. Commentaires sur les sauts couplés	57
3.2.2. Conditions de saut lorsque la viscosité est continue.....	57
3.2.2.1. Relation supplémentaire pour \mathbf{u} à travers $\Gamma(t)$	58
3.2.2.2. Commentaires sur les sauts découplés	58
3.3. Dérivation des conditions de saut approximatives.....	58
3.3.1. Intégration des équations d'Helmholtz	59
3.3.2. Intégration de l'équation de Poisson.....	61
3.3.3. Relations supplémentaires sur l'interface pour \mathbf{u}^*	62
3.3.4. Relations supplémentaires sur l'interface pour ϕ^{n+1}	63
3.4. Équivalence des conditions de saut approximatives.....	63
3.4.1. Simplification des conditions de saut lorsque $[\nu] = 0$	64
3.4.2. Le saut de $p^{n+\frac{1}{2}}$ à travers Γ^n	64
3.4.3. Le saut de $p_\xi^{n+\frac{1}{2}}$ à travers Γ^n	65
3.4.4. Le saut de \mathbf{u}^{n+1} à travers Γ^n	67
3.4.5. Le saut de \mathbf{u}_η^{n+1} à travers Γ^n	67
3.4.6. Le saut de \mathbf{u}_ξ^{n+1} à travers Γ^n	67
3.4.7. Le saut de $\mathbf{u}_{\eta\xi}^{n+1}$ à travers Γ^n	69

3.4.8.	Le saut de $\mathbf{u}_{\eta\eta}^{n+1}$ à travers Γ^n	69
3.4.9.	Le saut de $\mathbf{u}_{\xi\xi}^{n+1}$ à travers Γ^n	69
3.4.10.	Remarques	71
3.5.	Méthode IIM pour les équations de Navier-Stokes	72
3.5.1.	Problèmes d'Helmholtz pour le champ intermédiaire \mathbf{u}^*	72
3.5.1.1.	Remarques concernant l'évaluation de \mathbf{G}^n	73
3.5.2.	Problème de Poisson pour l'approximation de la pression ϕ^{n+1} ..	73
3.5.2.1.	Couplage des systèmes sur la frontière $\partial\Omega$	74
3.5.2.2.	Les nœuds fantômes	76
3.5.2.3.	Singularité du système d'équation	77
3.5.3.	Mise à jour de la pression $p^{n+\frac{1}{2}}$	77
3.5.3.1.	Schéma d'extrapolation sur la frontière	77
3.5.4.	Évolution de l'interface Γ^n	78
3.5.5.	Méthode itérative pour démarrer les calculs	79
3.6.	Cas test : problème d'une membrane élastique immergée dans un fluide visqueux	80
3.6.1.	Description du problème	80
3.6.1.1.	Les types de configurations d'interface	82
3.6.2.	Le problème stationnaire	83
3.6.2.1.	Critère d'arrêt pour le problème stationnaire	84
3.6.3.	Résolution du problème stationnaire avec IIM	85
3.6.3.1.	Solution stationnaire de la vitesse \mathbf{u}^{n+1}	85
3.6.3.2.	Solution stationnaire de la pression $p^{n+1/2}$	85
3.6.3.3.	Ordre de convergence pour la vitesse \mathbf{u}^{n+1}	86
3.6.3.4.	Ordre de convergence pour la pression $p^{n+1/2}$	91
3.6.3.5.	Commentaires concernant les résultats obtenus avec IIM ...	92
3.6.4.	Résolution du problème stationnaire avec IB	93
3.6.4.1.	Solution stationnaire de la vitesse \mathbf{u}^{n+1}	93

3.6.4.2.	Solution stationnaire de la pression $p^{n+\frac{1}{2}}$	96
3.6.4.3.	Ordre de convergence pour la vitesse \mathbf{u}^{n+1}	96
3.6.4.4.	Ordre de convergence pour la pression $p^{n+\frac{1}{2}}$	97
3.6.4.5.	Commentaires concernant les résultats obtenus avec IB.....	97
3.6.5.	Comparaison des performances des méthodes IIM et IB pour le problème stationnaire.....	98
3.6.6.	Oscillations dans la résolution du problème de Poisson	102
3.6.6.1.	Influence de ν et Δt dans l'évaluation des termes de correction	102
3.6.6.2.	Différentes stratégies pour coupler les systèmes linéaires....	104
3.6.6.3.	Une solution miracle existe-t-elle?	105
3.6.7.	Le problème instationnaire.....	105
3.6.7.1.	Instabilité de la méthode IIM.....	105
3.6.7.2.	Résolution avec la méthode IB.....	107
3.7.	Conclusion.....	109
Conclusion.....		111
Bibliographie.....		114
Annexe A. Dérivation des conditions de saut		A-i
A.1.	Saut dans la dérivée tangentielle \mathbf{u}_η	A-i
A.2.	Saut dans la dérivée seconde $\mathbf{u}_{\eta\eta}$	A-ii
A.3.	Saut dans la dérivée seconde $\mathbf{u}_{\eta\xi}$	A-ii
A.4.	Saut dans la dérivée seconde $\mathbf{u}_{\xi\xi}$	A-ii
Annexe B. Justification de l'hypothèse de continuité.....		B-i

LISTE DES FIGURES

1.1	Diagramme illustrant la géométrie des problèmes d'interface considérés dans ce mémoire.	7
1.2	Illustration des points irréguliers $x_{i,j}$ associés à un point d'intersection $\mathbf{X} = (X, Y)$	10
1.3	Diagramme utilisé pour évaluer la densité de force par unité de longueur mesurée dans l'état de repos.	14
2.1	Domaine Ω_ϵ utilisé dans la dérivation des conditions de saut.	22
2.2	Système de coordonnées locales.	24
2.3	Diagramme utilisé pour la démonstration du Lemme 2.3.1.	26
2.4	Deux types de configuration d'interface lorsque $\alpha = 0$	29
2.5	Double intersection sur le segment $[x_i - h, x_i + h]$	31
2.6	Diagrammes utilisés pour illustrer l'algorithme de recherche des points d'intersection entre les marqueurs s_k et s_{k+1}	34
2.7	Graphiques de la solution numérique u de l'exemple 2.5.1 (à gauche) et de l'erreur associée (à droite), obtenues avec la méthode IIM ($N = 96$).	39
2.8	Graphiques de la dérivée partielle $\frac{\partial u}{\partial x}$ de la solution numérique de l'exemple 2.5.1 (à gauche) et de l'erreur associée (à droite), obtenues avec la méthode IIM ($N = 96$).	39
2.9	Graphiques de la dérivée partielle $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ de la solution numérique de l'exemple 2.5.1 (à gauche) et de l'erreur associée (à droite), obtenues avec la méthode IIM ($N = 96$).	39

2.10	Coupes en $y = 0$ des solutions numériques u de l'exemple 2.5.1, obtenues avec les méthodes IB et IIM ($N = 96$).	40
2.11	Coupes en $y = 0$ de la dérivée $\frac{\partial u}{\partial x}$ des solutions numériques de l'exemple 2.5.1, obtenues avec les méthodes IB et IIM ($N = 96$).	40
2.12	Coupes en $y = 0$ de la dérivé seconde $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ des solutions numériques de l'exemple 2.5.1, obtenues avec les méthodes IB et IIM ($N = 96$).	40
2.13	Graphique de la solution de référence U de l'exemple 2.5.2, lorsque $a = 0.35$ et $b = 0.55$	42
2.14	Coupes en $y = 0$ des solutions numériques u de l'exemple 2.5.2, obtenues avec les méthodes IB et IIM ($N = 96, a = 0.35, b = 0.55$).	45
2.15	Coupes en $y = 0$ de la dérivée $\frac{\partial u}{\partial x}$ des solutions numériques de l'exemple 2.5.2, obtenues avec les méthodes IB et IIM ($N = 96, a = 0.35, b = 0.55$).	45
2.16	Coupes en $y = 0$ de la dérivé seconde $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ des solutions numériques de l'exemple 2.5.2, obtenues avec les méthodes IB et IIM ($N = 96, a = 0.35, b = 0.55$).	45
3.1	Graphiques des erreurs associées aux solutions numériques u^{n+1} et $p^{n+\frac{1}{2}}$ du problème (3.1.20), obtenues sur un maillage de 128×128 nœuds et évaluées au temps $t = \frac{\pi}{4}$, lorsque $\nu = 0.25$ et $\Delta t = \frac{h}{2}$	54
3.2	Diagramme illustrant les 4 systèmes découplés pour le problème de Poisson (3.5.9).	75
3.3	Diagramme illustrant le couplage utilisant une discrétisation à 3-points de $\frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial n}$ sur la frontière.	75
3.4	Diagramme des trois configurations d'interface possibles.	82
3.5	Graphiques des composantes x et y de la vitesse u^{n+1} , obtenues avec la méthode IIM pour le problème stationnaire lorsque $\nu = 0.1, N = 128$ et $\Delta t = 1/64$	87

3.6	Graphiques des composantes x et y de la vitesse \mathbf{u}^{n+1} , obtenues avec la méthode IIM pour le problème stationnaire lorsque $\nu = 1$, $N = 128$ et $\Delta t = 1/64$	88
3.7	Graphiques de la distribution stationnaire de la pression $p^{n+\frac{1}{2}}$ et de son erreur, obtenues avec la méthode IIM lorsque $\nu = 0.1$, $N = 128$ et $\Delta t = 1/64$	89
3.8	Graphiques de la distribution stationnaire de la pression $p^{n+\frac{1}{2}}$ et de son erreur, obtenues avec la méthode IIM lorsque $\nu = 1$, $N = 128$ et $\Delta t = 1/64$	90
3.9	Graphiques des composantes x et y de la vitesse \mathbf{u}^{n+1} ; obtenues avec la méthode IB pour le problème stationnaire lorsque $\nu = 0.1$, $N = 128$, $N_s = 256$ et $\Delta t = 1/64$	94
3.10	Graphiques de la distribution stationnaire de la pression $p^{n+\frac{1}{2}}$ et de son erreur, obtenues avec la méthode IB lorsque $\nu = 0.1$, $N = 128$, $N_s = 256$ et $\Delta t = 1/64$	95
3.11	Coupes en $x = 1$ des distributions stationnaires de la pression $p^{n+\frac{1}{2}}$, obtenues avec les méthodes IB et IIM lorsque $\nu = 0.025$	99
3.12	Coupes en $x = 1$ des distributions stationnaires de la pression $p^{n+\frac{1}{2}}$, obtenues avec les méthodes IB et IIM lorsque $\nu = 0.1$	100
3.13	Coupes en $x = 1$ des distributions stationnaires de la pression $p^{n+\frac{1}{2}}$, obtenues avec les méthodes IB et IIM lorsque $\nu = 1$	101
3.14	Graphiques des fonctions sources \mathfrak{F}^{IIM} et \mathfrak{F}^{IB} , apparaissant au membre de droite de l'équation de Poisson (3.5.9) lorsque $\nu = 1$, $N = 128$ et $\Delta t = 0.01$	103
3.15	Graphiques des fonctions sources \mathfrak{F}^{IIM} et \mathfrak{F}^{IB} , apparaissant au membre de droite de l'équation de Poisson (3.5.9) lorsque $\nu = 1$, $N = 128$ et $\Delta t = 0.0001$	103

- 3.16 Graphiques des fonctions sources \mathfrak{F}^{IM} et \mathfrak{F}^{IB} , apparaissant au membre de droite de l'équation de Poisson (3.5.9) lorsque $\nu = 0.1$, $N = 128$ et $\Delta t = 0.0001$ 103
- 3.17 Évolution des petit et grand axes (R_y et R_x) de la membrane $\Gamma(t)$, obtenue avec la méthode IB lorsque $N = 40$, $\Delta t = 0.004$ et $\nu = 0.01$. 107
- 3.18 Évolution de la membrane $\Gamma(t)$ et du champ de vitesse \mathbf{u}^{n+1} , obtenues avec la méthode IB lorsque $N = 40$, $\Delta t = 0.004$ et $\nu = 0.01$ 108
- 3.19 Conservation de l'aire de la région Ω^- au temps $t = 1$ et $t = 2$, lorsque nous raffinons le pas h du maillage. 109

LISTE DES TABLEAUX

2.1	Erreur d'interpolation aux points d'intersection $\mathbf{X} = (X, Y)$	36
2.2	Comportement de l'erreur de la solution numérique u de l'exemple 2.5.1, obtenue avec la méthode IIM.	37
2.3	Comportement de l'erreur de la dérivée $\frac{\partial u}{\partial x}$ de la solution numérique de l'exemple 2.5.1, obtenue avec la méthode IIM.	37
2.4	Comportement de l'erreur de la dérivée $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ de la solution numérique de l'exemple 2.5.1, obtenue avec la méthode IIM.	38
2.5	Comportement de l'erreur de la solution numérique u de l'exemple 2.5.1 et de ses dérivées, obtenues avec la méthode IB lorsque $\omega = h$	41
2.6	Comportement de l'erreur de la solution numérique u de l'exemple 2.5.2 et de ses dérivées premières, obtenues avec la méthode IIM ($a = 0.35, b = 0.55$).	43
2.7	Comportement de l'erreur des dérivées partielles de second degré de la solution numérique u de l'exemple 2.5.2, obtenues avec la méthode IIM ($a = 0.35, b = 0.55$).	43
2.8	Comportement de l'erreur de la solution numérique u de l'exemple 2.5.2 et de ses dérivées, obtenues avec la méthode IB ($a = 0.35, b = 0.55$).	44
3.1	Erreur et ordre de convergence de la solution (\mathbf{u}, p) de l'équation (3.1.20), évalués au temps $t = \frac{\pi}{4}$, lorsque l'approximation $\tilde{\phi}^{n+1} = \phi^n$ est utilisée ($\nu = 0.25$ et $\Delta t = \frac{h}{2}$).	53

3.2	Erreur et ordre de convergence de la solution (\mathbf{u}, p) de l'équation (3.1.20), évalués au temps $t = \frac{\pi}{4}$, lorsque l'approximation $\tilde{\phi}^{n+1} = 0$ est utilisée ($\nu = 0.25$ et $\Delta t = \frac{h}{2}$).	53
3.3	Tableau des conditions de saut approximatives.	64
3.4	Tableau des conditions de saut approximatives lorsque la viscosité est continue ($[\nu] = 0$).	65
3.5	Nomenclature utilisée pour le cas test.	81
3.6	Tableau des erreurs et de l'ordre de convergence de la composante x de la vitesse \mathbf{u}^{n+1} , obtenue avec la méthode IIM lorsque $\nu = 0.1$	86
3.7	Tableau des erreurs et de l'ordre de convergence de la composante x de la vitesse \mathbf{u}^{n+1} , obtenue avec la méthode IIM lorsque $\nu = 1$	86
3.8	Tableau des erreurs et de l'ordre de convergence de la composante x de la vitesse \mathbf{u}^{n+1} , obtenue avec la méthode IIM lorsque $\nu = 4$	91
3.9	Tableau des erreurs et de l'ordre de convergence de la distribution stationnaire de la pression $p^{n+1/2}$, obtenue avec la méthode IIM lorsque $\nu = 0.1$	92
3.10	Tableau des erreurs et de l'ordre de convergence de la distribution stationnaire de la pression $p^{n+1/2}$, obtenue avec la méthode IIM lorsque $\nu = 1$	92
3.11	Tableau des erreurs et de l'ordre de convergence de la distribution stationnaire de la pression $p^{n+1/2}$, obtenue avec la méthode IIM lorsque $\nu = 4$	92
3.12	Tableau des erreurs et de l'ordre de convergence de la composante x de la vitesse \mathbf{u}^{n+1} , obtenue avec la méthode IB lorsque $\nu = 0.1$	97
3.13	Tableau des erreurs et de l'ordre de convergence de la composante x de la vitesse \mathbf{u}^{n+1} , obtenue avec la méthode IB lorsque $\nu = 1$	97

- 3.14 Tableau des erreurs et de l'ordre de convergence de la distribution stationnaire de la pression $p^{n+1/2}$, obtenue avec la méthode IB lorsque $\nu = 0.1$ 98
- 3.15 Tableau des erreurs et de l'ordre de convergence de la distribution stationnaire de la pression $p^{n+1/2}$, obtenue avec la méthode IB lorsque $\nu = 1$ 98

REMERCIEMENTS

Je remercie sincèrement mon directeur de recherche, le professeur Robert G. Owens, pour son soutien constant et ses encouragements multiples lors des moments difficiles. C'est toujours avec un grand plaisir qu'il m'a accordé de son temps pour discuter des différentes stratégies que nous pourrions emprunter pour attaquer le problème du moment. Qu'il sache que son écoute attentive, ses conseils avisés et sa patience sans borne m'ont permis de traverser une dure épreuve.

Je remercie également mes parents qui m'ont soutenu pendant si longtemps. J'en profite pour leur dire à quel point je les aime et j'apprécie à sa juste valeur tous les sacrifices qu'ils ont faits pour moi, depuis ma tendre enfance jusqu'à ce jour. Un autre gros merci pour Yumi, ma douce moitié au passé composé, qui m'a accompagné pendant tant d'années.

Enfin, j'ai quelques mots de gratitude à tous ceux et celles qui m'ont accompagné dans une ou plusieurs aventures aux pays des rêves, ces endroits magiques et grandioses où la beauté de la nature dépasse l'imagination et dissipe la folie quotidienne qui nous entoure pour laisser place à l'espoir d'un monde meilleur.

INTRODUCTION

En mai 2006, mon directeur de recherche m'a proposé un projet ambitieux : développer une méthode numérique pour simuler l'écoulement de fluides incompressibles de différentes viscosités dans un tube flexible. Inconscient de l'ampleur du projet mais fasciné par le défi qu'il présentait, je me suis joint à Robert G. Owens et Annabelle Ballesta dans cette quête d'un nouvel algorithme pour la résolution des équations de Navier-Stokes en présence d'une force singulière.

L'étude des écoulements instationnaires dans un tube flexible et déformable possède une riche histoire. Elle débute vers le milieu des années cinquante avec les travaux de Womersley ([22]-[23]) qui constituent la première description théorique complète pour un écoulement incompressible poussé par un gradient de pression oscillatoire. Cette analyse, valide pour un écoulement dans un long tube étroit muni d'une mince paroi élastique, a été utilisée à plusieurs reprises pour valider des simulations numériques ([8]-[9], [21]). L'étude de ces articles a été le point de départ inspirant les travaux présentés dans ce mémoire.

Dans un premier lieu, j'ai dû me familiariser avec les méthodes de projection. Ces méthodes à pas fractionnaire, développées par Chorin [5] pour intégrer numériquement les équations de Navier-Stokes, utilisent une décomposition des opérateurs différentiels afin de résoudre le système d'équations en plusieurs pas de temps. Elles reposent sur l'observation qu'il est possible de projeter le champ de vitesse intermédiaire sur un champ vectoriel sans divergence. Les articles de Brown et al. ([3]-[4]) comparent la performance et l'efficacité de quelques versions de la méthode de projection, en particulier celle de Bell et al. [2] ainsi que la version de Kim et Moin [14]. Une étude approfondie de la dépendance de l'ordre de convergence aux différentes composantes de ces méthodes y est présentée.

Une version intéressante de la méthode de projection, développée spécifiquement pour les écoulements générés par une différence de pression, a été proposée par Feria et al. [7]. L'originalité de leur approche provient de modifications concernant l'implémentation des conditions frontières sur les régions d'entrée et de sortie du tube. Au lieu de prescrire des conditions de Dirichlet pour les composantes de la vitesse, c'est plutôt la pression qui y est prescrite. Avec les changements proposés, le gradient de pression peut être fixé de manière à ce que le champ de vitesse se développe librement sans l'imposition d'aucune contrainte additionnelle sur l'écoulement. Le point faible de cette version est l'utilisation d'un schéma explicite, ce qui signifie qu'un critère très restrictif sur le pas de temps doit être respecté pour garantir la stabilité des simulations.

Au cours de l'été 2007, nous avons longuement tenté d'obtenir une version implicite qui leverait cette contrainte. Malgré des premiers résultats encourageants pour un écoulement bidimensionnel généré par un gradient de pression oscillatoire, nous n'avons pas réussi à reproduire les données expérimentales de Armally et al. [1] pour le problème de la marche inversée. Suite à cet échec, j'ai graduellement abandonné mes travaux sur les tubes flexibles pour me concentrer sur un cas test pouvant justifier notre algorithme : le problème d'une membrane élastique immergée dans un fluide visqueux.

Une approche répandue pour résoudre ce type de problème d'interaction fluide-structure est la méthode IB ("Immersed Boundary Method") développée par Peskin [19]. Testée sur une grande variété de problèmes biomédicaux, notamment pour simuler les écoulements sanguins dans la chambre cardiaque, cette méthode robuste repose principalement sur l'utilisation de fonctions δ -discrètes pour transmettre la force singulière aux particules de fluide du domaine. Bien qu'assez simple à implémenter, cette méthode produit généralement des solutions dont la précision est seulement de premier ordre. En plus d'atténuer les irrégularités des solutions dans un voisinage de l'interface, l'utilisation de fonctions δ -discrètes dans la méthode de projection introduit une légère perte du fluide contenu à l'intérieur de la membrane. Pour remédier à cette situation qui va à

l'encontre du principe de conservation de masse, des versions implicite et semi-implicite ont été proposées par Peskin et Tu [20].

Développée dans l'intention d'augmenter la précision de la méthode IB et d'obtenir des solutions nettes sur tout le domaine de calcul (principalement dans un voisinage de l'interface), la méthode IIM ("Immersed Interface Method") incorpore les conditions de saut de la solution (connaissances des irrégularités de la solution dans un voisinage de l'interface qui peuvent généralement être déduites des équations différentielles) dans les schémas aux différences finies par l'entremise de termes de correction. Cette méthode a d'abord été utilisée pour résoudre des problèmes elliptiques ayant des coefficients discontinues ou des sources singulières [17]. Des extensions de la méthode IIM ont ensuite permis la modélisation d'écoulements de Stokes où l'ordre de convergence quadratique en norme infinie a été démontré ([12], [18]). Pour les équations complètes de Navier-Stokes, plusieurs variations de la méthode IIM existent ([11], [15]-[16]). La supériorité d'une version sur sa rivale est généralement dictée par le phénomène physique particulier que l'on tente de modéliser.

Actuellement, toutes ces versions de la méthode IIM pour les équations de Navier-Stokes ont été développées sous l'hypothèse d'une viscosité continue. Ceci est dû au fait que les conditions de saut obtenues sans cette restriction sont couplées, donc pratiquement inutilisables d'un point de vue numérique [10]. Malgré l'effort de plusieurs chercheurs pour obtenir des sauts découplés, le problème demeure intact. Afin de contourner cette difficulté, mon directeur a eu la brillante idée d'obtenir les conditions de saut à partir des équations discrétisées que nous résolvons numériquement dans la méthode de projection. En procédant ainsi, un certain découplage des conditions de saut est maintenant possible. Notons qu'une seule méthode, dite "augmentée", utilise les conditions de saut couplés pour résoudre les équations de Stokes lorsque la viscosité est discontinue [12], mais que rien n'a encore été fait pour les équations complètes de Navier-Stokes.

L'objectif ultime de ce mémoire, que nous n'avons malheureusement pas pu atteindre, était la conception d'une méthode IIM utilisant ces conditions de saut approximatives pour résoudre les équations de Navier-Stokes lorsque la viscosité

est discontinue. Il va sans dire que ceci constitue un défi de taille. Comme nous le verrons bientôt, les embûches furent nombreuses, autant au niveau théorique qu'au niveau pratique, et ce même pour le cas plus simple où la viscosité est constante.

Les premières difficultés sont venues lors de la modélisation de l'interface : l'évaluation des points d'intersection de l'interface avec le maillage cartésien fixe, le calcul de certaines quantités géométriques ainsi que le déplacement de la membrane nous ont tous donné quelques maux de tête. L'implémentation des termes de correction a aussi créé des problèmes, car il existe une multitude de configurations possibles et le traitement de certains cas limites est très subtil. Enfin, l'implémentation de la méthode de projection "sans-pression" PMIII (notation de Brown et al. [4]) est relativement complexe et la résolution du problème de Poisson sur un seul maillage cartésien génère souvent des solutions oscillatoires. Voyons maintenant comment nous avons abordé ces difficultés.

Divisé en trois chapitres, ce mémoire débute avec une section préliminaire qui sert à fixer la terminologie et la notation utilisées. Le modèle mathématique décrivant l'interaction d'une interface déformable immergée dans un fluide visqueux et incompressible est ensuite exposé. Nous terminons le premier chapitre avec un résumé de la méthode IB pour un problème d'interface particulier ainsi qu'une discussion des principales différences entre cette approche et la méthode IIM.

Le deuxième chapitre présente toutes les technicalités liées à la mise en œuvre de la méthode IIM pour un problème d'interface elliptique en deux dimensions spatiales. Nous dérivons d'abord les conditions de saut de la solution et expliquons ensuite comment celles-ci peuvent être utilisées pour obtenir des schémas aux différences finies qui tiennent compte des irrégularités de la solution. Nous cloisons ce chapitre avec la présentation d'exemples numériques où nous comparons les performances de chaque approche.

Enfin, le dernier chapitre s'attaque aux équations de Navier-Stokes en présence d'une force singulière. Il s'amorce avec une présentation détaillée de la méthode de projection "sans-pression" de Kim et Moin [14]. Ceci est suivi d'une discussion traitant des irrégularités des solutions aux équations de Navier-Stokes lorsqu'une

force singulière est distribuée le long d'une interface déformable. Nous poursuivons avec une dérivation des conditions de saut approximatives et démontrons ensuite leurs équivalences aux sauts exacts trouvés dans la littérature. À ce stade, nous aurons tout le bagage nécessaire pour présenter les détails de notre implémentation de la méthode IIM. Les dernières pages du mémoire sont consacrées au cas test de référence : le problème d'une membrane élastique immergée dans un fluide visqueux et incompressible. Nous comparons de nouveau les performances des méthodes IIM et IB pour la version stationnaire du problème et explorons les raisons qui ont pu provoquées l'échec de la méthode IIM pour le problème instationnaire.

Chapitre 1

MODÉLISATION MATHÉMATIQUE

Ce premier chapitre explique le modèle mathématique décrivant l'interaction d'une interface déformable $\Gamma(t)$ immergée dans un fluide visqueux et incompressible. Nous supposons que l'interface $\Gamma(t) \in C^2$ peut être représentée par une courbe simple et fermée, entièrement comprise dans l'intérieur du domaine carré $\Omega = [0, H] \times [0, H]$. Cette dernière restriction élimine toute ambiguïté possible sur la frontière $\partial\Omega$. Les régions intérieure et extérieure sont ensuite dénotées par Ω^- et Ω^+ , respectivement. Les vecteurs unitaires orientés dans les directions tangentielle et normale à l'interface sont $\boldsymbol{\tau}$ et \boldsymbol{n} , respectivement, où \boldsymbol{n} pointe vers la région Ω^+ . Soit θ l'angle entre l'axe des x -coordonnées et le vecteur normal \boldsymbol{n} . La Figure 1.1 illustre la géométrie des problèmes d'interface considérés dans ce mémoire.

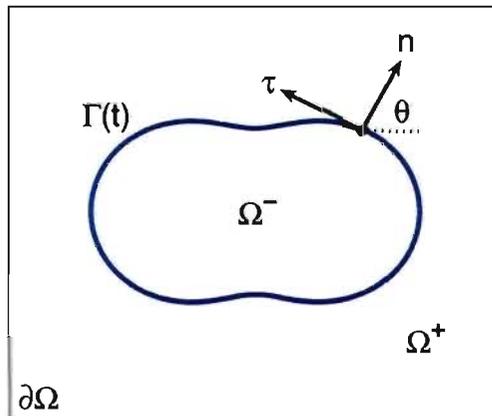


FIG. 1.1. Diagramme illustrant la géométrie des problèmes d'interface considérés dans ce mémoire.

1.1. TERMINOLOGIE ET DÉFINITIONS

Cette section préliminaire est consacrée à l'introduction de la terminologie utilisée dans ce mémoire.

1.1.1. Le choix des maillages discrets

Une caractéristique des méthodes IB et IIM est l'utilisation de deux maillages distincts pour discrétiser le domaine Ω et l'interface $\Gamma(t)$. En premier lieu, un maillage cartésien uniforme est généré sur le domaine carré $\Omega = [0, H] \times [0, H]$ selon la procédure suivante :

$$\begin{aligned} x_i &= ih, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N, \\ y_j &= jh, \quad j = 0, 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

où N représente le nombre de sous-intervalles utilisés pour subdiviser l'intervalle $[0, H]$ et $h = \frac{H}{N}$ est le pas de la discrétisation. Nous réservons les minuscules pour dénoter les nœuds $\mathbf{x}_{i,j} = (x_i, y_j)$ du maillage cartésien, les majuscules pour dénoter les points $\mathbf{X} = (X, Y)$ de l'interface et le caractère gras pour désigner les vecteurs en deux dimensions spatiales.

Nous devons ensuite choisir une représentation appropriée pour modéliser l'interface. Le choix le plus simple est d'utiliser une forme analytique, mais seulement certaines courbes permettent cette représentation et ceci devient pratiquement impossible, lorsque nous considérons un interface $\Gamma(t)$ qui se déplace avec le fluide. Une autre approche répandue dans la littérature ([16], [19]) utilise un ensemble fini de points de contrôle pour suivre le déplacement de l'interface. Les informations géométriques peuvent ensuite être obtenues par interpolation avec des splines cubiques (Section 1.3.3). D'autres représentations sont aussi possibles, notamment l'utilisation de fonction "level-set" et les développements en séries de Fourier, mais nous n'explorerons pas ces avenues dans ce mémoire.

1.1.2. Schéma aux différences finies centrées

Pour une fonction scalaire $u \in C^2(\Omega)$, nous avons les approximations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(\mathbf{x}_{i,j}) &= D_x^1 u_{i,j} + O(h^2), & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\mathbf{x}_{i,j}) &= D_x^2 u_{i,j} + O(h^2), \\ \frac{\partial u}{\partial y}(\mathbf{x}_{i,j}) &= D_y^1 u_{i,j} + O(h^2), & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\mathbf{x}_{i,j}) &= D_y^2 u_{i,j} + O(h^2), \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

où les opérateurs discrets sont définis par

$$\begin{aligned} D_x^1 u_{i,j} &= \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h}, & D_x^2 u_{i,j} &= \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}, \\ D_y^1 u_{i,j} &= \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h}, & D_y^2 u_{i,j} &= \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2}. \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

et $u_{i,j}$ dénote l'évaluation de $u(\mathbf{x})$ au nœud $\mathbf{x}_{i,j}$ du maillage cartésien. Par la suite, nous utiliserons aussi les opérateurs suivants :

$$\begin{aligned} (\nabla_h u)_{i,j} &= (D_x^1 u_{i,j}, D_y^1 u_{i,j}), \\ \nabla_h^2 u_{i,j} &= D_x^2 u_{i,j} + D_y^2 u_{i,j}, \\ (\nabla_h \cdot \mathbf{u})_{i,j} &= D_x^1 u_{i,j} + D_y^1 v_{i,j}, \quad \text{où } \mathbf{u} = (u, v). \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

Une généralisation de ces formules pour une fonction $u(\mathbf{x})$ dont les dérivées partielles sont lisses par morceau sur les régions Ω^- et Ω^+ sera présentée à la Section 2.3.

1.1.3. Les points d'intersection

Lors de l'implémentation de la méthode IIM, nous aurons besoin d'évaluer certaines informations géométriques aux points de l'interface $\Gamma(t)$ qui intersectent le maillage cartésien. Ces points d'intersection sont définis de la façon suivante :

Définition 1.1.1. Soit $\mathbf{X} = (X, Y)$ un point de l'interface $\Gamma(t)$ et $\mathbf{x}_{i,j} = (x_i, y_j)$ un nœud du maillage cartésien. On dit que

- \mathbf{X} est un point de x -intersection s'il existe un nombre $0 \leq \alpha_x < 1$ et des indices i, j tel que, $X = x_i + \alpha_x h$ et $Y = y_j$.

- \mathbf{X} est un point de y -intersection s'il existe un nombre $0 \leq \alpha_y < 1$ et des indices i, j tel que, $X = x_i$ et $Y = y_j + \alpha_y h$.

L'algorithme que nous avons développé pour répertorier les points d'intersection sera présenté à la Section 2.4.2.

1.1.4. Les points irréguliers

Nous identifions ensuite les points du maillage cartésien situés à proximité ou sur l'interface. Ces points irréguliers, illustrés en rouge sur la Figure 1.2, sont définis de la façon suivante :

Définition 1.1.2. On dit que le nœud $\mathbf{x}_{i,j} = (x_i, y_j)$ du maillage cartésien est

- un point x -irrégulier, si l'interface $\Gamma(t)$ intersecte la droite $y = y_j$ au point (X, Y) avec $x_{i-1} < X < x_{i+1}$ et $Y = y_j$.
- un point y -irrégulier, si l'interface $\Gamma(t)$ intersecte la droite $x = x_i$ au point (X, Y) avec $X = x_i$ et $y_{j-1} < Y < y_{j+1}$.

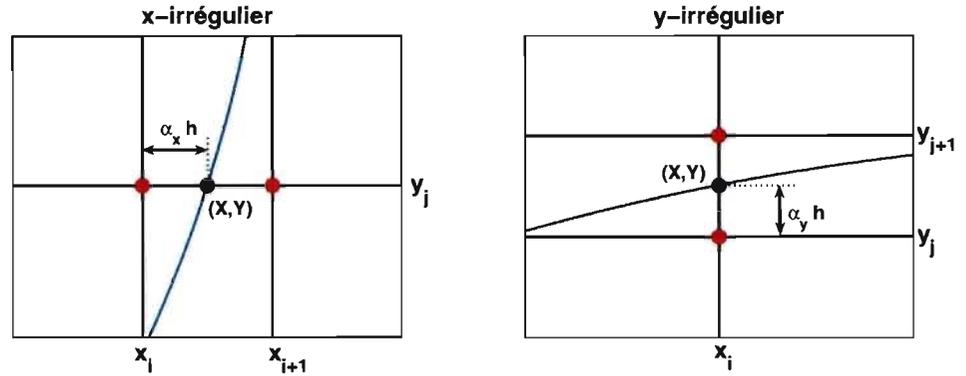


FIG. 1.2. Illustration des points irréguliers $\mathbf{x}_{i,j}$ associés à un point d'intersection $\mathbf{X} = (X, Y)$.

1.1.5. Conditions de saut

Nous définissons les valeurs limites d'une fonction scalaire $u(\mathbf{x})$ en un point \mathbf{X} de l'interface $\Gamma(t)$ comme suit,

$$u^\pm(\mathbf{X}) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{X}, \mathbf{x} \in \Omega^\pm} u(\mathbf{x}). \quad (1.1.5)$$

Les conditions de saut de la fonction $u(\mathbf{x})$ et de sa dérivée normale $u_n(\mathbf{x})$, évaluées en $\mathbf{x} = \mathbf{X}$, sont ensuite définies par,

$$[u] = u^+(\mathbf{X}) - u^-(\mathbf{X}), \quad (1.1.6)$$

$$[u_n] = u_n^+(\mathbf{X}) - u_n^-(\mathbf{X}), \quad (1.1.7)$$

Puisque ces sauts dépendent du point \mathbf{X} de l'interface $\Gamma(t)$, il serait plus juste d'inclure une référence spatiale et temporelle dans notre définition. Nous garderons ainsi à l'esprit que les sauts varient le long de l'interface $\Gamma(t)$ et dépendent ainsi de la paramétrisation de celui-ci.

1.2. ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES

Les équations de Navier-Stokes gouvernant le mouvement d'un fluide newtonien, visqueux et incompressible sont

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{F}, \quad (1.2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1.2.2)$$

avec les conditions frontières et initiales

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{u}_m, \quad (1.2.3)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0, \quad (1.2.4)$$

où $\mathbf{u} = (u, v)$ est le champ de vitesse et p la pression. Ces variables primitives varient en fonction de la position $\mathbf{x} = (x, y)$ et du temps t . Nous supposons que la densité volumique ρ et la viscosité cinétique ν sont constantes. En fait, nous fixons $\rho \equiv 1$ pour toutes les simulations considérées dans ce mémoire.

Dû à l'immersion de l'interface $\Gamma(t)$ dans le fluide, l'équation (1.2.1) contient la contribution d'une force singulière \mathbf{F} , distribuée le long de l'interface et s'annulant partout ailleurs. Utilisant une version bidimensionnelle de la fonction de Dirac $\delta(\mathbf{x}) = \delta_x(x)\delta_y(y)$, il est possible de définir \mathbf{F} en chaque point du domaine

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \int_{\Gamma(t)} \mathbf{f}(s, t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(s, t)) ds, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.2.5)$$

où s est la longueur d'arc, $\mathbf{X} = \mathbf{X}(s, t)$ est l'équation vectorielle de la courbe représentant l'interface $\Gamma(t)$ et $\mathbf{f}(s, t)$ est la densité de force par unité de longueur exercée par l'interface au point $\mathbf{X}(s, t)$. La nature de cette force reflète les propriétés élastiques de l'interface et dépend ainsi du type de problèmes d'interface considérés. Précisons que la présence de la force singulière \mathbf{F} dans l'équation (1.2.1) fait en sorte que les solutions ne sont généralement pas lisses à travers l'interface $\Gamma(t)$. Une discussion détaillée portant sur les irrégularités des solutions pour ce problème d'interface sera présentée à la Section 3.2.

En pratique, il est souvent plus commode d'utiliser une paramétrisation \hat{s} de l'interface qui se déplace avec la fluide. La position de l'interface $\mathbf{X}(\hat{s}, t)$ doit alors satisfaire l'équation suivante

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{X}(\hat{s}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{X}(\hat{s}, t), t). \quad (1.2.6)$$

Notons que la vitesse $\mathbf{u}(\mathbf{X}(\hat{s}, t), t)$ évaluée en chaque point de l'interface est définie de façon unique, puisque la condition de non glissement doit être satisfaite partout sur $\Gamma(t)$. Puisque cette nouvelle paramétrisation \hat{s} n'est généralement pas la longueur d'arc, nous devons modifier l'équation (1.2.5) de la force élastique. Celle-ci devient

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \int_{\Gamma(t)} \hat{\mathbf{f}}(\hat{s}, t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(\hat{s}, t)) d\hat{s}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.2.7)$$

où $\hat{\mathbf{f}}(\hat{s}, t)$ est la densité de force évaluée dans la mesure $d\hat{s}$. La force par unité de longueur est maintenant donnée par

$$\mathbf{f}(s, t) = \frac{\hat{\mathbf{f}}(\hat{s}, t)}{\|\partial \mathbf{X}(\hat{s}, t) / \partial \hat{s}\|_2}. \quad (1.2.8)$$

Enfin, l'utilisation de la fonction de Dirac $\delta(\mathbf{x})$ permet d'exprimer le champ de vitesse \mathbf{u} apparaissant au membre de droite de (1.2.6) sous une forme semblable à (1.2.7) :

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}(\hat{s}, t), t) = \int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(\hat{s}, t)) d\mathbf{x}. \quad (1.2.9)$$

Pour récapituler, les équations (1.2.1)-(1.2.2) sont les équations de Navier-Stokes gouvernant le mouvement d'un fluide newtonien, visqueux et incompressible avec la présence d'une force \mathbf{F} , singulièrement distribuée le long de l'interface $\Gamma(t)$. L'équation (1.2.5) (ou sa version modifiée (1.2.7)) est une équation de connectivité qui permet de transmettre cette force au fluide environnant. Enfin, les équations (1.2.6) et (1.2.9) peuvent être interprétées comme l'imposition de conditions frontières internes, nécessaires pour que la condition de non-glissement soit respectée sur l'interface $\Gamma(t)$. Ce système sera complété suite à l'introduction d'une équation d'élasticité permettant l'évaluation de la densité de force \mathbf{f} .

1.3. MODÉLISATION DE L'INTERFACE

Dans ce qui suit, nous considérons une interface matérielle $\Gamma(t)$ représentant une membrane élastique sous tension immergée dans un fluide visqueux.

1.3.1. Densité de force pour une membrane élastique

Pour ce problème, nous supposons que l'amplitude de la force élastique générée en un point de la membrane dépend linéairement de l'étirement de celle-ci par rapport à sa configuration de repos. En d'autres mots, la tension T de la membrane peut être modélisée par une loi de Hooke linéaire. Par la configuration de repos, nous parlons de la forme circulaire de la membrane que nous obtiendrions ultimement si une fuite du fluide interne était provoquée, permettant ainsi une relaxation complète de la membrane. Précisons que la quantité de fluide contenue dans la région interne Ω^- , délimitée par la membrane sous tension, doit être conservée puisque le fluide est incompressible.

L'évaluation de la densité de force $\hat{\mathbf{f}}$ sera possible suite à l'introduction d'une paramétrisation de l'interface $\Gamma(t)$ en fonction de la longueur d'arc \hat{s} de la membrane dans cette configuration de repos. Laissons le paramètre \hat{s} étiqueter le point matériel situé à une distance \hat{s} d'un point de référence arbitraire $\hat{s}_1 = 0$ sur la membrane au repos. Ainsi, $\mathbf{X}(\hat{s}, t)$ désigne la position au temps t de ce point matériel, étiqueté par \hat{s} , sur la membrane étirée. Le vecteur tangent unitaire $\boldsymbol{\tau}(\hat{s}, t)$

en un point $\mathbf{X}(\hat{s}, t)$ de la membrane s'écrit alors

$$\boldsymbol{\tau}(\hat{s}, t) = \frac{\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \hat{s}}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \hat{s}} \right\|_2} \quad (1.3.1)$$

Nos hypothèses permettent ensuite d'utiliser une loi de Hooke linéaire pour exprimer la tension T de la membrane en ce point

$$T(\hat{s}, t) = T_o \left(\left\| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \hat{s}} \right\|_2 - 1 \right), \quad (1.3.2)$$

où T_o est une constante qui tient compte des propriétés élastiques de la membrane. Nous remarquons que la tension s'annule lorsque $\left\| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \hat{s}} \right\|_2 \equiv 1$, ce qui est vérifié pour tous les points matériels de la membrane dans sa configuration de repos.

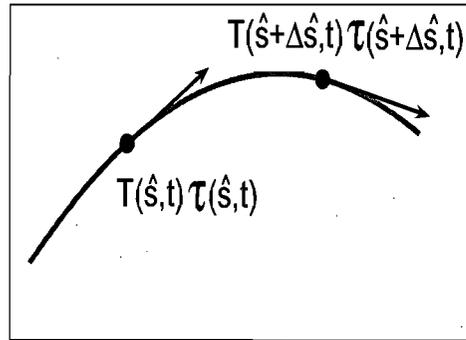


FIG. 1.3. Diagramme utilisé pour évaluer la densité de force par unité de longueur mesurée dans l'état de repos.

La force élastique exercée par la membrane entre deux points lagrangiens $\mathbf{X}(\hat{s}, t)$ et $\mathbf{X}(\hat{s} + \Delta \hat{s}, t)$, séparés par une distance $\Delta \hat{s}$ (voir la Figure 1.3 pour une illustration), se définit approximativement comme la différence de $T\boldsymbol{\tau}$ entre ces points. Nous avons donc l'approximation suivante en $\mathbf{X}(\hat{s}, t)$:

$$\Delta \hat{s} \hat{\mathbf{f}}(\hat{s}, t) \approx T(\hat{s} + \Delta \hat{s}, t) \boldsymbol{\tau}(\hat{s} + \Delta \hat{s}, t) - T(\hat{s}, t) \boldsymbol{\tau}(\hat{s}, t). \quad (1.3.3)$$

Nous obtenons ensuite la densité de force par unité de longueur mesurée dans l'état de repos, qui est exercée par la membrane élastique au point $\mathbf{X}(\hat{s}, t)$, en

prenant la limite $\Delta\hat{s} \rightarrow 0$ de (1.3.3), ce qui donne

$$\hat{\mathbf{f}}(\hat{s}, t) = \frac{\partial}{\partial \hat{s}} (T(\hat{s}, t)\boldsymbol{\tau}(\hat{s}, t)). \quad (1.3.4)$$

Par conséquent, dès que la position de la membrane $\mathbf{X}(\hat{s}, t)$ est connue, les équations (1.3.1)-(1.3.4) permettent l'évaluation de (1.2.8) qui donne la densité de force \mathbf{f} par unité de longueur de la membrane étirée $\Gamma(t)$.

1.3.2. Distribution des marqueurs lagrangiens

Afin de suivre le déplacement de la membrane, nous utilisons un ensemble fini de points de contrôle situés sur l'interface $\Gamma(t)$. Soit $(N_s + 1)$ le nombre de marqueurs lagrangiens \hat{s} utilisés pour représenter la position de la membrane, L_o la longueur totale de celle-ci dans sa configuration de repos et $\hat{s}_1 = 0$ un premier marqueur arbitraire. Nous posons ensuite, pour $k = 1, 2, \dots, N_s$

$$\hat{s}_{k+1} = k\Delta\hat{s} \quad \text{où} \quad \Delta\hat{s} = L_o/N_s. \quad (1.3.5)$$

Par convention, nous empruntons la notation $\mathbf{X}_k^n = \mathbf{X}(\hat{s}_k, t^n)$ pour dénoter la position du k -ième marqueur lagrangien au temps $t^n = n\Delta t$. La courbe $\Gamma^n = \Gamma(t^n)$ étant fermée, nous avons $\mathbf{X}_1^n = \mathbf{X}_{N_s+1}^n$.

1.3.3. Courbe $\tilde{\Gamma}$ approximative

L'approche que nous avons choisie pour représenter l'interface utilise des splines cubiques pour interpoler une courbe lisse approximative $\tilde{\Gamma}^n \in C^2$ à partir des marqueurs lagrangiens ([16], [18]). L'équation vectorielle de la courbe approximative est donnée par

$$\tilde{\Gamma}^n := \tilde{\mathbf{X}}^n(\hat{s}) = \left(\tilde{X}^n(\hat{s}), \tilde{Y}^n(\hat{s}) \right), \quad \hat{s} \in [0, L_o], \quad (1.3.6)$$

où $\tilde{X}^n(\hat{s})$ et $\tilde{Y}^n(\hat{s})$ représentent des splines cubiques interpolés à partir des marqueurs X_k^n et Y_k^n , respectivement. Les détails concernant cette technique d'interpolation seront fournis à la Section 2.4.1.

Nous pouvons ensuite évaluer $\partial\tilde{\mathbf{X}}^n/\partial\hat{s}$ afin d'obtenir une approximation de la tension $\tilde{T}^n(\hat{s})$ et du vecteur tangent $\tilde{\boldsymbol{\tau}}^n(\hat{s})$. La dérivée du produit de ces résultats fournit ensuite une approximation de la densité de force $\tilde{\mathbf{f}}^n(\hat{s})$ définie par (1.3.4).

En plus de permettre l'évaluation de ces quantités en n'importe quel point de l'interface $\tilde{\Gamma}^n$, cette approche facilite aussi le calcul d'autres informations géométriques nécessaires à l'implémentation de la méthode IIM. Plus précisément, nous aurons besoin du vecteur normal unitaire $\tilde{\mathbf{n}}^n(\hat{s})$, de la courbure $\tilde{\kappa}^n(\hat{s})$ et de la dérivée tangentielle de la densité de force $\partial \tilde{\mathbf{f}}^n / \partial \hat{s}$.

1.4. MÉTHODE IB "IMMERSED BOUNDARY"

Nous présentons maintenant un résumé de la méthode IB pour ce problème d'interface particulier ([19]-[20]).

1.4.1. Fonction δ -discrète

Une fois que nous sommes en mesure d'approximer la densité de force élastique $\hat{\mathbf{f}}_k^n = \tilde{\mathbf{f}}^n(\hat{s}_k)$ aux points de contrôle de la membrane, la force singulière \mathbf{F} est calculée à partir de l'approximation suivante :

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t^n) \approx \sum_{k=1}^{N_s} \hat{\mathbf{f}}_k^n \delta_\omega(\mathbf{x} - \mathbf{X}_k^n) \Delta \hat{s}, \quad (1.4.1)$$

où la fonction δ_ω est définie par $\delta_\omega(\mathbf{x}) = \tilde{\delta}_\omega(x) \tilde{\delta}_\omega(y)$ avec la version unidimensionnelle suivante :

$$\tilde{\delta}_\omega(x) = \begin{cases} \frac{1}{4\omega} (1 + \cos(\frac{\pi x}{2\omega})), & |x| \leq 2\omega, \\ 0, & |x| > 2\omega. \end{cases} \quad (1.4.2)$$

En général, le support ω de la fonction $\tilde{\delta}_\omega$ est choisi en fonction du pas h utilisé pour le maillage cartésien. Même s'il existe d'autres choix de fonction δ -discrète dans la littérature, la fonction δ_ω est la plus souvent utilisée dans les applications pour des raisons qui sont mentionnées par Peskin [19].

1.4.2. Schéma d'évolution explicite

Il est maintenant temps d'expliquer l'algorithme utilisé pour faire évoluer la solution numérique au temps t^{n+1} . Nous supposons que le champ de vitesse $\mathbf{u}_{i,j}^n$ et les vecteurs positions \mathbf{X}_k^n des marqueurs lagrangiens sont connus. La première étape pour déterminer $\mathbf{u}_{i,j}^{n+1}$ consiste à évaluer la densité de force $\hat{\mathbf{f}}_k^n$ et de la distribuer aux nœuds $\mathbf{x}_{i,j}$ du maillage cartésien via la formule (1.4.1).

En second lieu, nous utilisons une méthode de projection "sans-pression" (basée sur la version de Kim et Moin [14]) pour résoudre les équations de Navier-Stokes (1.2.1)-(1.2.2), ce qui permet de déterminer le champ de vitesse $\mathbf{u}_{i,j}^{n+1}$. Tous les détails techniques liés à l'implémentation de cette méthode seront présentés à la Section 3.1.

Nous devons enfin nous assurer que la condition de non-glissement (1.2.6) soit satisfaite sur la membrane. Pour ce faire, un schéma d'Euler-avant est utilisé pour obtenir l'approximation suivante :

$$\frac{\mathbf{X}_k^{n+1} - \mathbf{X}_k^n}{\Delta t} = \mathbf{u}^{n+1}(\mathbf{X}_k^n). \quad (1.4.3)$$

La fonction δ_ω définie en (1.4.2) est utilisée de nouveau pour interpoler la vitesse locale du fluide $\mathbf{u}_{i,j}^{n+1}$ aux points de contrôle \mathbf{X}_k^n

$$\mathbf{u}^{n+1}(\mathbf{X}_k^n) = \sum_{i,j} \mathbf{u}_{i,j}^{n+1} \delta_\omega(\mathbf{x}_{i,j} - \mathbf{X}_k^n) \Delta x \Delta y. \quad (1.4.4)$$

Nous avons donc la formule explicite suivante pour déterminer la position des nouveaux points de contrôle sur l'interface Γ^{n+1} :

$$\mathbf{X}_k^{n+1} = \mathbf{X}_k^n + \Delta t \mathbf{u}^{n+1}(\mathbf{X}_k^n). \quad (1.4.5)$$

Ceci termine une itération. Le procédé peut ensuite être répété pour faire évoluer la solution jusqu'au temps t voulu.

1.4.3. Commentaires sur la méthode IB

Bien que la méthode IB soit relativement simple à implémenter, l'utilisation de la fonction δ_ω pour transmettre la force singulière aux nœuds du maillage cartésien atténue les discontinuités de la solution. Cette atténuation fait en sorte que la précision des solutions obtenues par la méthode IB est généralement seulement de premier ordre. D'autre part, l'utilisation d'un schéma explicite pour déplacer l'interface à la fin de chaque itération impose un critère très restrictif sur le pas de temps Δt que l'on doit utiliser. Si un trop grand pas de temps est utilisé, la position de l'interface devient instable et l'algorithme diverge. Pour remédier à cette situation, Peskin et Tu ont proposé des versions semi-implicite et implicite [20].

1.5. MÉTHODE IIM "IMMERSED INTERFACE"

Plusieurs efforts ont été faits pour obtenir une version de la méthode IB avec une précision de second ordre. Leveque et Lee [16] proposent de séparer la force singulière selon ses composantes tangentielle et normale à l'interface. La fonction δ_ω de Peskin, définie par (1.4.2), est d'abord utilisée pour résoudre une équation d'advection-diffusion contenant la composante tangentielle de la force. Par la suite, une équation de Poisson contenant la composante normale de la force est résolue pour déterminer la pression et renforcer la condition d'incompressibilité. La différence entre la méthode IB et leur approche provient de la discrétisation de cette équation de Poisson qui incorpore des termes de correction afin de tenir compte des sauts connus de la pression. Leurs résultats numériques montrent qu'il est possible d'augmenter considérablement la précision de la méthode IB en procédant ainsi.

Li et Lai [15] vont encore plus loin et expliquent comment il est possible de se débarrasser totalement de la fonction δ_ω si toutes les discontinuités de la solution sont incorporées aux schémas de différences finies utilisés pour discrétiser les équations différentielles. La méthode IIM présentée dans les prochains chapitres est basée sur leur approche.

Chapitre 2

PROBLÈMES ELLIPTIQUES AVEC SOURCE SINGULIÈRE

Au chapitre suivant, nous montrerons que la recherche d'une solution numérique aux équations de Navier-Stokes (1.2.1)-(1.2.4) peut être réduite à la résolution de trois équations différentielles elliptiques : deux problèmes d'Helmholtz pour obtenir les composantes d'un champ de vitesse intermédiaire \mathbf{u}^* et un problème de Poisson pour déterminer une approximation ϕ de la pression. Gardant cet objectif en tête, nous présentons ici la méthode IIM pour résoudre un problème d'interface elliptique.

2.1. DESCRIPTION ET HYPOTHÈSES

Dans ce qui suit, nous considérons un interface fixe $\Gamma \in C^2$ entièrement contenu dans l'intérieur du domaine carré $\Omega = [0, H] \times [0, H]$. L'équation à résoudre est :

$$\rho u(\mathbf{x}) - \mu \nabla^2 u(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}) + G(\mathbf{x}), \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.1.1)$$

$$B(u) = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad (2.1.2)$$

où la seconde équation représente certaines conditions frontières (Dirichlet, Neumann ou mixte) prescrites pour la fonction $u(\mathbf{x})$. Selon la nature des problèmes d'interface envisagés, les paramètres se classent dans une ou plusieurs des trois catégories suivantes :

- (1) Les coefficients ρ et μ sont des constantes positives reflétant les propriétés physiques du problème.
- (2) La fonction source G est continue par morceau sur chaque région Ω^\pm du domaine. Elle est donc bornée sur tout le domaine Ω .
- (3) La source singulière F est distribuée le long de l'interface Γ et peut être représentée sur tout le domaine Ω à l'aide de la fonction δ de Dirac comme suit :

$$F(\mathbf{x}) = \int_0^L f(s) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(s)) ds, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.1.3)$$

où s est la longueur d'arc, L est la longueur totale de la courbe représentée par l'équation vectorielle $\mathbf{X} = \mathbf{X}(s)$ et $f(s)$ est la densité par unité de longueur exercée le long de l'interface Γ au point $\mathbf{X}(s)$.

Pour ce type de problème d'interface, l'étude de la régularité de la solution est très ardue. Une discussion sur l'existence et l'unicité de la solution de ce problème peut être trouvée dans [11]. Dans notre cas, il est raisonnable de supposer que la solution $u(\mathbf{x})$ soit bornée et que ses dérivées partielles soient lisses par morceau sur chaque sous-domaine Ω^\pm , les discontinuités apparaissant seulement sur l'interface. Cette hypothèse nous permettra d'utiliser des schémas aux différences finies sur la presque totalité du domaine pour discrétiser l'équation (2.1.1). Une connaissance des discontinuités de la solution permettra ensuite de modifier correctement les approximations aux points irréguliers (voir la Section 1.2) situés à proximité ou sur l'interface.

2.1.1. Reformulation du problème

Dans la prochaine section, nous montrerons que les conditions de saut pour le problème (2.1.1) prennent la forme suivante :

$$[u] = 0, \quad [u_n] = -\frac{1}{\mu} f.$$

Une fois armés de ces conditions de saut, nous pouvons reformuler le problème (2.1.1)-(2.1.2) afin de se débarrasser complètement de la force singulière $F(\mathbf{x})$. La séparation du problème sur chaque sous-domaine Ω^\pm est possible, puisque le

support de la force est restreint à l'interface Γ . Nous avons donc les équations suivantes :

$$\rho u^\pm - \mu \nabla^2 u^\pm = G^\pm, \quad \text{dans } \Omega^\pm, \quad (2.1.4)$$

$$B(u) = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad (2.1.5)$$

$$[u] = 0, \quad \text{sur } \Gamma, \quad (2.1.6)$$

$$[u_n] = -\frac{1}{\mu} f, \quad \text{sur } \Gamma, \quad (2.1.7)$$

où les conditions de saut (2.1.6)-(2.1.7) établissent un couplage implicite des solutions sur chaque région. Nous pouvons maintenant considérer celles-ci comme des conditions frontières internes nécessaires pour que ce nouveau problème soit bien posé.

2.2. DÉRIVATION DES CONDITIONS DE SAUT

Nous présentons maintenant les détails et les technicalités concernant la dérivation des conditions de saut nécessaires à l'implémentation de la méthode IIM. Une approche basée sur l'intégration des équations est utilisée par Lee et Leveque [16] afin d'obtenir les sauts (2.1.6)-(2.1.7). Des relations d'interface supplémentaires sont ensuite dérivées par Li et Lai [15] suite à l'introduction d'un système de coordonnées locales.

2.2.1. Intégration des équations différentielles

L'idée de la dérivation est de multiplier l'équation (2.1.1) par une fonction test arbitraire $\psi \in C^2$ et d'intégrer l'équation résultante sur la région Ω_ϵ , comprise entre les courbes $\Gamma_{\epsilon\pm}$ situées à une distance $\epsilon > 0$ de Γ (voir la Figure 2.1 pour une illustration). Les conditions de saut établissant une relation entre les discontinuités de la solution, les paramètres de l'équation et la fonction de densité $f(s)$ sont ensuite extraites du processus de limite ϵ tend vers zéro. Notre point de départ est l'identité intégrale suivante :

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_\epsilon} \rho u(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \iint_{\Omega_\epsilon} \mu \nabla^2 u(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \\ \iint_{\Omega_\epsilon} F(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \iint_{\Omega_\epsilon} G(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

$$\Gamma_{\epsilon\pm} := \mathbf{X}(s) \pm \epsilon \mathbf{n}(s)$$

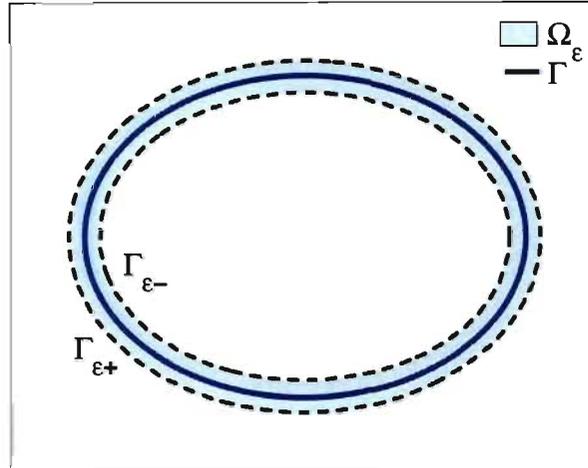


FIG. 2.1. Domaine Ω_ϵ utilisé dans la dérivation des conditions de saut.

Nous pouvons d'abord considérer la source singulière $F(\mathbf{x})$, définie par (2.1.3), comme une distribution agissant sur la fonction test $\psi(\mathbf{x})$, son action étant définie par

$$\iint_{\Omega} F(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} f(s)\psi(\mathbf{X}(s)) ds . \quad (2.2.2)$$

Nous remarquons ensuite que la première intégrale du membre de gauche de (2.2.1) s'annule lorsque nous prenons la limite $\epsilon \rightarrow 0$, car la fonction $u(\mathbf{x})$ est supposée être bornée sur Ω . C'est à dire,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint_{\Omega_\epsilon} \rho u(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0 . \quad (2.2.3)$$

Pour une fonction G bornée sur Ω , le même argument peut être appliqué à la deuxième intégrale du membre de droite de (2.2.1). Ceci mène à

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint_{\Omega_\epsilon} G(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0 . \quad (2.2.4)$$

Enfin, pour la dernière intégrale de (2.2.1), nous utilisons deux fois le théorème de la divergence pour obtenir

$$\begin{aligned}
\iint_{\Omega_\epsilon} \mu \nabla^2 u \psi \, d\mathbf{x} &= \int_{\Gamma_{\epsilon+}} (\mu \nabla u^+ \cdot \mathbf{n}) \psi \, ds + \int_{\Gamma_{\epsilon-}} (\mu \nabla u^- \cdot (-\mathbf{n})) \psi \, ds \\
&\quad - \iint_{\Omega_\epsilon} \mu (\nabla u \cdot \nabla \psi) \, d\mathbf{x} \\
&= \int_{\Gamma_{\epsilon+}} (\mu u_n^+) \psi \, ds - \int_{\Gamma_{\epsilon-}} (\mu u_n^-) \psi \, ds \\
&\quad - \int_{\Gamma_{\epsilon+}} \mu u^+ (\nabla \psi \cdot \mathbf{n}) \, ds - \int_{\Gamma_{\epsilon-}} \mu u^- (\nabla \psi \cdot (-\mathbf{n})) \, ds \\
&\quad + \iint_{\Omega_\epsilon} \mu u \nabla^2 \psi \, d\mathbf{x},
\end{aligned}$$

où les exposants $-$ et $+$ se rapportent aux valeurs des fonctions prises dans les régions Ω^- et Ω^+ , respectivement. Notons que le vecteur normal \mathbf{n} pointe toujours vers Ω^+ , ce qui explique le changement de signe sur la courbe $\Gamma_{\epsilon-}$. Lorsque ϵ tend vers zéro, la dernière intégrale s'annule puisque u et $\nabla^2 \psi$ sont bornées. Nous avons donc

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint_{\Omega_\epsilon} \mu \nabla^2 u \psi \, d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} \mu [u_n] \psi \, ds - \int_{\Gamma} \mu [u] \psi_n \, ds. \quad (2.2.5)$$

Remplaçant chacune des intégrales de l'équation (2.2.1) par leurs limites respectives (2.2.2)-(2.2.5), nous obtenons l'équation

$$- \int_{\Gamma} \mu [u_n] \psi \, ds + \int_{\Gamma} \mu [u] \psi_n \, ds = \int_{\Gamma} f \psi \, ds. \quad (2.2.6)$$

La fonction $\psi(\mathbf{x})$ étant arbitraire, nous déduisons les sauts (2.1.6) et (2.1.7). Nous suivons ensuite l'approche de Li et Lai [15] et introduisons un système de coordonnées locales qui permettra d'obtenir des relations d'interface supplémentaires.

2.2.2. Système de coordonnées locales

Soit $\mathbf{X} = (X, Y)$ un point de l'interface Γ . Les coordonnées locales en ce point sont définies de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\xi &= (x - X) \cos \theta + (y - Y) \sin \theta, \\ \eta &= -(x - X) \sin \theta + (y - Y) \cos \theta,\end{aligned}\tag{2.2.7}$$

où θ représente l'angle entre l'axe des x -coordonnées et le vecteur normal \mathbf{n} (voir la Figure 2.2 pour une illustration). Les vecteurs unitaires orientés dans les directions normale \mathbf{n} et tangentielle $\boldsymbol{\tau}$ au point \mathbf{X} prennent alors la forme suivante :

$$\mathbf{n} = (\cos \theta, \sin \theta),\tag{2.2.8}$$

$$\boldsymbol{\tau} = (-\sin \theta, \cos \theta).\tag{2.2.9}$$

L'interface Γ peut ensuite être représenté dans un voisinage du point ($\xi = 0$, $\eta = 0$) par une fonction $\xi = \chi(\eta)$ satisfaisant les relations suivantes :

$$\chi(0) = 0, \quad \chi'(0) = 0, \quad \chi''(0) = \kappa,\tag{2.2.10}$$

où κ est la courbure de l'interface au point \mathbf{X} . Le saut (2.1.7) peut maintenant être exprimé en fonction de ξ et η pour prendre la forme

$$[u_\xi] = -\frac{1}{\mu} f(\eta).\tag{2.2.11}$$

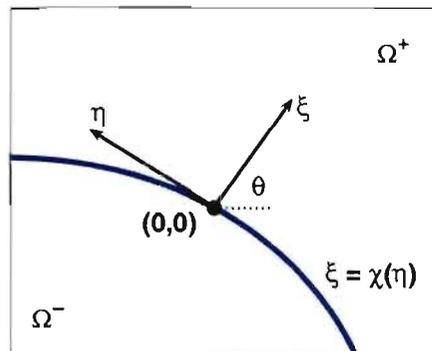


FIG. 2.2. Système de coordonnées locales.

2.2.3. Différentiation le long de l'interface

Dans un voisinage du point ($\xi = 0, \eta = 0$) de l'interface, nous avons les relations suivantes pour les dérivées première et seconde le long de la courbe Γ :

$$\frac{d}{d\eta} = \frac{\partial}{\partial\eta} + \chi' \frac{\partial}{\partial\xi},$$

$$\frac{d^2}{d\eta^2} = \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + 2\chi' \frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + (\chi')^2 \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \chi'' \frac{\partial}{\partial\xi}.$$

Une première dérivation des conditions de saut (2.1.6) et (2.2.11) le long de l'interface mène à

$$\frac{d}{d\eta}[u] = [u_\eta] + \chi'[u_\xi] = 0, \quad (2.2.12)$$

$$\frac{d}{d\eta}[u_\xi] = [u_{\xi\eta}] + \chi'[u_{\xi\xi}] = -\frac{1}{\mu}f'(\eta). \quad (2.2.13)$$

Le procédé est répété de nouveau pour l'équation (2.2.12), ce qui donne

$$\frac{d^2}{d\eta^2}[u] = [u_{\eta\eta}] + 2\chi'[u_{\xi\eta}] + (\chi')^2[u_{\xi\xi}] + \chi''[u_\xi] = 0. \quad (2.2.14)$$

Ces trois relations sont alors évaluées en $\eta = 0$ pour obtenir les conditions de saut au point \mathbf{X} ,

$$[u_\eta] = 0, \quad (2.2.15)$$

$$[u_{\xi\eta}] = -\frac{1}{\mu}f'(\eta), \quad (2.2.16)$$

$$[u_{\eta\eta}] = \frac{\kappa}{\mu}f(\eta). \quad (2.2.17)$$

Finalement, nous exprimons l'équation (2.1.1) dans le système de coordonnées locales (2.2.7)

$$\rho u - \mu(u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}) = F + G.$$

Ce qui permet d'obtenir le dernier saut

$$[u_{\xi\xi}] = -\frac{\kappa}{\mu}f(\eta) - \frac{1}{\mu}[G]. \quad (2.2.18)$$

Pour être utile numériquement, ces conditions de saut exprimées dans le système de coordonnées locales doivent être transformées dans le système cartésien.

Nous utilisons les relations suivantes pour effectuer cette transformation :

$$\begin{aligned}
 [u_x] &= [u_\xi] \cos \theta - [u_\eta] \sin \theta, \\
 [u_y] &= [u_\xi] \sin \theta + [u_\eta] \cos \theta, \\
 [u_{xx}] &= [u_{\xi\xi}] \cos^2 \theta - 2[u_{\xi\eta}] \cos \theta \sin \theta + [u_{\eta\eta}] \sin^2 \theta, \\
 [u_{yy}] &= [u_{\xi\xi}] \sin^2 \theta + 2[u_{\xi\eta}] \cos \theta \sin \theta + [u_{\eta\eta}] \cos^2 \theta.
 \end{aligned} \tag{2.2.19}$$

Voyons maintenant comment les sauts obtenus dans cette section peuvent être incorporés aux schémas aux différences finies (1.1.2) pour que ceux-ci tiennent compte des irrégularités de la solution.

2.3. TERMES DE CORRECTION

Le lemme suivant, tiré de l'article de Li et Lai [15], est le pilier de notre algorithme numérique. Nous le présentons ici dans sa version unidimensionnelle, bien que la généralisation au cas bidimensionnel soit immédiate.

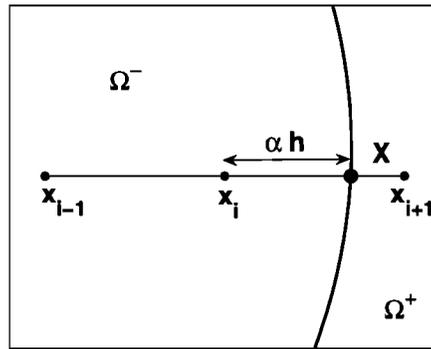


FIG. 2.3. Diagramme utilisé pour la démonstration du Lemme 2.3.1.

Lemme 2.3.1. *Soit $u(x)$ une fonction dont les dérivées partielles sont lisses par morceau sur les régions Ω^- et Ω^+ . Supposons que $u(x)$ et ses dérivées possèdent*

les sauts $[u]$, $[u_x]$ et $[u_{xx}]$ au point de x -intersection $X = x_i + \alpha h$, avec $|\alpha| \in (0, 1)$ et $x_i \in \Omega^-$. Les approximations suivantes sont alors valides au point x_i :

$$u_x(x_i) = \begin{cases} D_x^1 u_i - \frac{1}{2h} C(u, \alpha, h) + O(h^2), & \text{si } \alpha \in (0, 1), \\ D_x^1 u_i + \frac{1}{2h} C(u, \alpha, h) + O(h^2), & \text{si } \alpha \in (-1, 0), \end{cases} \quad (2.3.1)$$

$$u_{xx}(x_i) = D_x^2 u_i - \frac{1}{h^2} C(u, \alpha, h) + O(h), \quad \text{si } |\alpha| \in (0, 1), \quad (2.3.2)$$

où les termes de correction $C(u, \alpha, h)$ sont définis comme suit :

$$C(u, \alpha, h) = \begin{cases} [u] + [u_x](1 - \alpha)h + \frac{1}{2}[u_{xx}](1 - \alpha)^2 h^2, & \text{si } \alpha \in (0, 1), \\ [u] - [u_x](1 - |\alpha|)h + \frac{1}{2}[u_{xx}](1 - |\alpha|)^2 h^2, & \text{si } \alpha \in (-1, 0). \end{cases} \quad (2.3.3)$$

Dans le cas où $x_i \in \Omega^+$, les termes de correction $C(u, \alpha, h)$ sont de signe opposé. Ceci découle de notre définition des sauts de la fonction $u(x)$ au point X .

Preuve Nous démontrons seulement le cas où $\alpha \in (0, 1)$ et $x_i \in \Omega^-$, puisque les autres cas se montrent tous de façon similaire. Utilisant une expansion de Taylor pour $u(x_i + h)$ autour de X , nous obtenons

$$\begin{aligned} u(x_i + h) &= u^+(X) + u_x^+(X)(1 - \alpha)h + \frac{1}{2}u_{xx}^+(X)(1 - \alpha)^2 h^2 + O(h^3), \\ &= [u] + u^-(X) + ([u_x] + u_x^-(X))(1 - \alpha)h \\ &\quad + \frac{1}{2}([u_{xx}] + u_{xx}^-(X))(1 - \alpha)^2 h^2 + O(h^3). \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Nous développons ensuite $u^-(X)$, $u_x^-(X)$ et $u_{xx}^-(X)$ autour de $x_i \in \Omega^-$

$$u^-(X) = u(x_i) + u_x(x_i)\alpha h + \frac{1}{2}u_{xx}(x_i)\alpha^2 h^2 + O(h^3),$$

$$u_x^-(X) = u_x(x_i) + u_{xx}(x_i)\alpha h + O(h^2),$$

$$u_{xx}^-(X) = u_{xx}(x_i) + O(h).$$

Remplaçant ces expansions dans l'équation (2.3.4) et utilisant un développement de $u(x_i - h)$ autour du point x_i , nous obtenons

$$u(x_i + h) = u(x_i) + u_x(x_i)h + u_{xx}(x_i)\frac{h^2}{2} + C(u, \alpha, h) + O(h^3), \quad (2.3.5)$$

$$u(x_i - h) = u(x_i) - u_x(x_i)h + u_{xx}(x_i)\frac{h^2}{2} + O(h^3), \quad (2.3.6)$$

où le terme de correction $C(u, \alpha, h)$ est définie par

$$C(u, \alpha, h) = [u] + [u_x](1 - \alpha)h + \frac{1}{2}[u_{xx}](1 - \alpha)^2h^2,$$

Quelques manipulations supplémentaires des relations (2.3.5)-(2.3.6) permettent d'obtenir les résultats désirés. □

REMARQUES :

- Dans l'éventualité d'une double intersection (voir la Figure 2.5 pour une illustration) sur le segment $[x_i - h, x_i + h]$, c.-à-d. s'il existe deux points de x-intersection $X_1 = x_i + \alpha_1 h$ et $X_2 = x_i + \alpha_2 h$ avec $-1 < \alpha_1 < 0$ et $0 < \alpha_2 < 1$, il suffit d'ajouter un deuxième terme de correction. Par exemple,

$$u_x(x_i) = D_x^1 u_i + \frac{1}{2h}C(u, \alpha_1, h) - \frac{1}{2h}C(u, \alpha_2, h) + O(h^2),$$

$$u_{xx}(x_i) = D_x^2 u_i - \frac{1}{h^2}C(u, \alpha_1, h) - \frac{1}{h^2}C(u, \alpha_2, h) + O(h).$$

- Les termes de correction pour un point de y-intersection $Y = y_j + \alpha_y \Delta y$ s'obtiennent exactement de la même façon. Nous devons simplement utiliser les sauts $[u]$, $[u_y]$ et $[u_{yy}]$ dans le terme de correction $C(u, \alpha_y, \Delta y)$.
- L'erreur de troncature de notre schéma est $O(h^2)$ aux nœuds réguliers du maillage, mais seulement $O(h)$ aux nœuds irréguliers.

Bien que nous ayons délibérément exclu le cas limite $\alpha = 0$ dans le lemme précédent, il est tout de même possible d'obtenir des schémas aux différences finies "uniformes" dans le paramètre α , c.-à-d. définis de façon unique pour toute valeur de $\alpha \in (-1, 1)$. Nous examinons maintenant le comportement des formules (2.3.1)-(2.3.2), lorsque α tend vers zéro.

2.3.1. Forme limite des termes de correction

Nous pouvons d'abord nous questionner sur l'utilité des schémas (2.3.1)-(2.3.2) lorsque le paramètre α est identiquement nul, puisque dans cette situation, la fonction u et ses dérivées u_x, u_{xx} ne sont même pas définies au point x_i . Il serait donc plus juste de parler de la valeur moyenne de la fonction u et de ses dérivées en ce point. Nous définissons ceux-ci par

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2} (u^-(x_i) + u^+(x_i)), \quad (2.3.7)$$

$$\langle u_x \rangle = \frac{1}{2} (u_x^-(x_i) + u_x^+(x_i)), \quad (2.3.8)$$

$$\langle u_{xx} \rangle = \frac{1}{2} (u_{xx}^-(x_i) + u_{xx}^+(x_i)). \quad (2.3.9)$$

Avant de poursuivre, nous distinguons deux types de configuration d'interface possibles lorsque $\alpha = 0$. La première situation (cas limite #1) survient lorsque l'interface intersecte le segment $[x_i - h, x_i + h]$ au point x_i . La deuxième situation (cas limite #2) survient lorsque l'interface a un point de tangence en x_i . La Figure 2.4 illustre ces deux types de configuration d'interface.

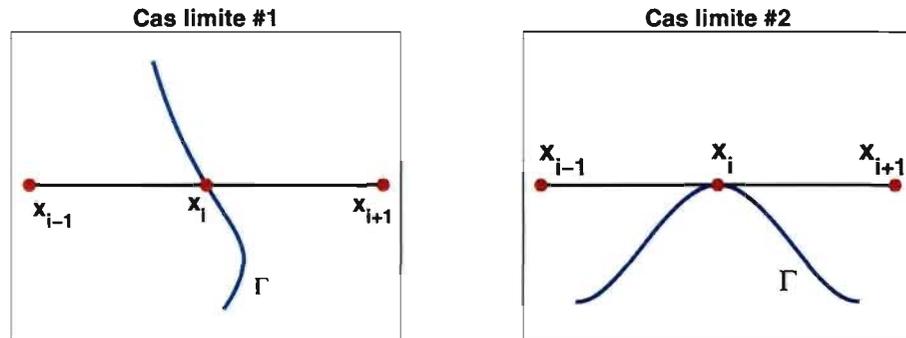


FIG. 2.4. Deux types de configuration d'interface lorsque $\alpha = 0$.

2.3.2. Termes de correction pour le cas limite #1

Dans un premier lieu, nous observons le comportement asymptotique des schémas (2.3.1)-(2.3.2) lorsque le point d'intersection $X = x_i + \alpha h$ tend vers x_i par la droite, c.-à-d. lorsque α tend vers zéro ($\alpha > 0$) et $x_i \in \Omega^-$. Nous avons d'abord

les relations suivantes :

$$u_x^-(x_i) = D_x^1 u_i - \frac{1}{2h} \left([u] + [u_x]h + \frac{1}{2}[u_{xx}]h^2 \right) + O(h^2), \quad (2.3.10)$$

$$u_{xx}^-(x_i) = D_x^2 u_i^- - \frac{1}{h^2} \left([u] + [u_x]h + \frac{1}{2}[u_{xx}]h^2 \right) + O(h), \quad (2.3.11)$$

où

$$D_x^2 u_i^\pm = \frac{u_{i-1} - 2u_i^\pm + u_{i+1}}{h^2}. \quad (2.3.12)$$

Il est ensuite possible de manipuler ces relations pour obtenir une approximation de la valeur moyenne des dérivées partielles de la fonction u en x_i :

$$\langle u_x \rangle = D_x^1 u_i - \frac{1}{2h} \left([u] + \frac{1}{2}[u_{xx}]h^2 \right) + O(h^2), \quad (2.3.13)$$

$$\langle u_{xx} \rangle = \frac{u_{i-1} - 2\langle u \rangle + u_{i+1}}{h^2} - \frac{1}{h}[u_x] + O(h). \quad (2.3.14)$$

Deuxièmement, nous observons le comportement asymptotique des schémas (2.3.1)-(2.3.2), lorsque le point d'intersection $X = x_i + \alpha h$ tend vers x_i par la gauche, c.-à-d. lorsque α tend vers zéro ($\alpha < 0$) et $x_i \in \Omega^+$. Dans ce cas, nous avons les relations suivantes :

$$u_x^+(x_i) = D_x^1 u_i - \frac{1}{2h} \left([u] - [u_x]h + \frac{1}{2}[u_{xx}]h^2 \right) + O(h^2), \quad (2.3.15)$$

$$u_{xx}^+(x_i) = D_x^2 u_i^+ + \frac{1}{h^2} \left([u] - [u_x]h + \frac{1}{2}[u_{xx}]h^2 \right) + O(h). \quad (2.3.16)$$

Encore une fois, quelques manipulations de ces relations permettent d'obtenir les équations (2.3.13)-(2.3.14). Par conséquent, lors d'une configuration d'interface correspondant au cas limite #1, l'utilisation des schémas (2.3.1)-(2.3.2) est justifiée dans la mesure où nous considérons le résultat comme une approximation de la valeur moyenne des dérivées u_x et u_{xx} au point x_i .

2.3.3. Termes de correction pour le cas limite #2

Nous examinons maintenant l'interprétation que nous pouvons donner aux schémas de différences finies du Lemme 2.3.1, lors d'une configuration d'interface correspondant au cas limite #2.

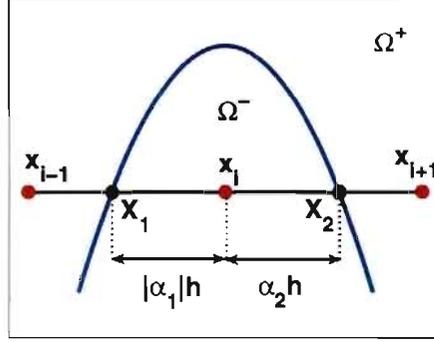


FIG. 2.5. Double intersection sur le segment $[x_i - h, x_i + h]$.

Nous considérons d'abord une double intersection de l'interface Γ sur le segment $[x_i - h, x_i + h]$. Se référant à la Figure 2.5, les points d'intersection sont $X_1 = x_i + \alpha_1 h$ et $X_2 = x_i + \alpha_2 h$ avec $-1 < \alpha_1 < 0$ et $0 < \alpha_2 < 1$. Dénotant les sauts de u et de ses dérivées au point X_k par $[u]_k$, $[u_x]_k$ et $[u_{xx}]_k$ pour $k = 1, 2$, les relations suivantes sont valides au point $x_i \in \Omega^-$:

$$\begin{aligned}
 u_x(x_i) &= D_x^1 u_i - \frac{1}{2h} \left([u]_1 + [u_x]_1(1 - \alpha_1)h + \frac{1}{2}[u_{xx}]_1(1 - \alpha_1)^2 h^2 \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2h} \left([u]_2 - [u_x]_2(1 - |\alpha_2|)h + \frac{1}{2}[u_{xx}]_2(1 - |\alpha_2|)^2 h^2 \right) + O(h^2),
 \end{aligned} \tag{2.3.17}$$

$$\begin{aligned}
 u_{xx}(x_i) &= D_x^2 u_i - \frac{1}{h^2} \left([u]_1 + [u_x]_1(1 - \alpha_1)h + \frac{1}{2}[u_{xx}]_1(1 - \alpha_1)^2 h^2 \right) \\
 &\quad - \frac{1}{h^2} \left([u]_2 - [u_x]_2(1 - |\alpha_2|)h + \frac{1}{2}[u_{xx}]_2(1 - |\alpha_2|)^2 h^2 \right) + O(h).
 \end{aligned} \tag{2.3.18}$$

Dans la mesure où α_1 et α_2 tendent vers zéro simultanément (c.-à-d. lorsque les deux points d'intersection X_1 et X_2 se rapprochent l'un de l'autre pour se rencontrer au point x_i), nous avons les formes limites suivantes :

$$u_x^-(x_i) = D_x^1 u_i - [u_x] + O(h^2), \tag{2.3.19}$$

$$u_{xx}^-(x_i) = D_x^2 u_i - \frac{2}{h^2}[u] - [u_{xx}] + O(h). \tag{2.3.20}$$

Nous pouvons manipuler ces relations pour les réécrire sous la forme suivante :

$$u_x^+(x_i) = D_x^1 u_i + O(h^2), \quad (2.3.21)$$

$$u_{xx}^+(x_i) = D_x^2 u^+(x_i) + O(h). \quad (2.3.22)$$

Par conséquent, deux schémas équivalents permettent de discrétiser les dérivées partielles de la fonction u lorsque nous sommes dans le cas limite #2. Si nous traitons le nœud x_i comme appartenant à la même région que les nœuds x_{i-1} et x_{i+1} , la fonction u et ses dérivées partielles sont alors continues sur le segment (x_{i-1}, x_{i+1}) , ce qui permet l'utilisation de schémas centrés sans termes de correction. D'autre part, nous pouvons traiter le nœud x_i comme appartenant à la région opposée, mais dans ce cas-ci, nous devons ajouter des termes de correction aux schémas standards pour tenir compte des irrégularités de la solution. En pratique, nous empruntons toujours la première approche due à sa simplicité.

2.4. DÉTAILS SUR L'IMPLÉMENTATION DE LA MÉTHODE IIM

Dans cette section, nous présentons des détails supplémentaires concernant certaines facettes de l'implémentation du code numérique IIM.

2.4.1. Interpolation par des splines cubiques

Soit $\mathbf{X}_k = (X(s_k), Y(s_k))$ les vecteurs position des marqueurs lagrangiens définis par

$$s_k = (k-1)\Delta s, \quad \Delta s = L/N_s, \quad k = 1, 2, \dots, N_s + 1,$$

où L désigne la longueur totale de l'interface fixe Γ . La courbe approximative $\tilde{\Gamma} \in C^2$, dont l'équation vectorielle est donnée par $\tilde{\mathbf{X}} = (\tilde{X}(s), \tilde{Y}(s))$, est définie par morceau comme suit,

$$\tilde{X}(s) = P_k^1(s), \quad \tilde{Y}(s) = P_k^2(s), \quad \text{sur } [s_k, s_{k+1}), \quad k = 1, 2, \dots, N_s,$$

où P_k^1 et P_k^2 sont des polynômes de degré 3 qui interpolent exactement la position des marqueurs lagrangiens.

2.4.2. Recherche des points d'intersection

L'algorithme que nous avons développé pour trouver les points d'intersection entre l'interface et le maillage cartésien a pris forme suite à une discussion avec Rodrigue Kéou sur la problématique de la recherche des voisins d'une particule dans la méthode SPH. L'idée principale sur laquelle repose notre approche est d'associer un rectangle (dont les sommets sont formés par quatre nœuds du maillage cartésien) à chaque marqueur s_k situé sur l'interface Γ .

On définit les rectangles $B(i, j) \subseteq \Omega$ comme suit :

$$B(i, j) = \{(x, y) : x_i \leq x < x_{i+1} \text{ et } y_j \leq y < y_{j+1}\},$$

$$i, j = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (2.4.1)$$

Puisque nous avons supposé que l'interface Γ est entièrement contenue dans l'intérieur du domaine Ω , aucun marqueur lagrangien ne se situe sur la frontière $\partial\Omega$. Par conséquent, il est possible d'associer un unique rectangle $B(i, j)$ à chaque marqueur s_k . Pour ce faire, nous cherchons les indices i_k et j_k tel que

$$x_{i_k} \leq X_k < x_{i_k+1}, \quad y_{j_k} \leq Y_k < y_{j_k+1}.$$

Après avoir effectué cette classification, nous pouvons facilement compter le nombre minimal de points d'intersection entre deux marqueurs consécutifs. Se référant à la Figure 2.6A, nous avons $s_k \in B(i-1, j-1)$ et $s_{k+1} \in B(i+1, j)$, il y a donc au moins $(i+1) - (i-1) = 2$ points de y -intersection et $j - (j-1) = 1$ point de x -intersection entre ces deux marqueurs lagrangiens. La courbe étant représentée par $\tilde{X}(s) = P_k^1(s)$ et $\tilde{Y}(s) = P_k^2(s)$ sur l'intervalle $[s_k, s_{k+1})$, nous pouvons utiliser une méthode de Newton pour trouver les paramètres $s_{k1} > s_{k2} > s_{k3}$ tel que

$$\tilde{X}(s_{k1}) = x_i, \quad \tilde{Y}(s_{k2}) = y_j \quad \text{et} \quad \tilde{X}(s_{k3}) = x_{i+1}.$$

En général, nous utilisons $\Delta s \approx h$ ce qui est suffisant pour éviter des intersections multiples entre deux nœuds consécutifs du maillage cartésien. Dans les simulations où la courbure de Γ est grande, nous devons modifier l'algorithme précédent pour vérifier que tout les points d'intersection situés entre deux marqueurs consécutifs se trouvent dans un intervalle donné. Un exemple de ce type

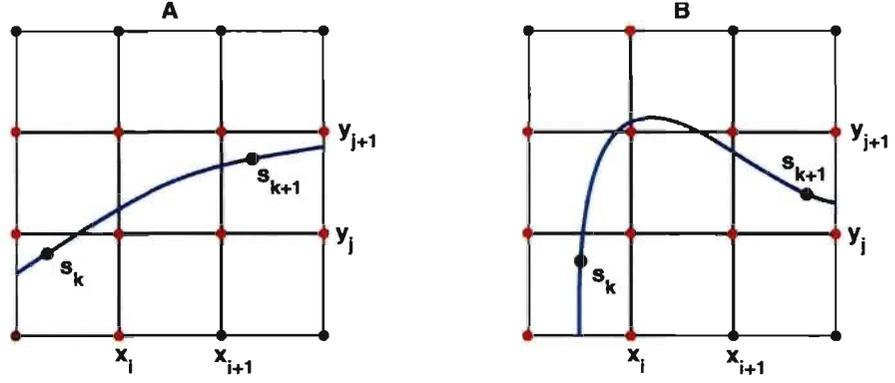


FIG. 2.6. Diagrammes utilisés pour illustrer l'algorithme de recherche des points d'intersection entre les marqueurs s_k et s_{k+1} .

de configuration problématique est illustré sur la Figure 2.6B. Ici, le point de y -intersection avec l'axe $x = x_i$ se trouve dans l'intervalle $[y_{j+1}, y_{j+2}]$. Nous devons ainsi chercher deux points de x -intersection supplémentaires avec l'axe $y = y_{j+1}$.

2.5. RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Pour les exemples suivants, un maillage uniforme $h = \frac{2}{N}$ est utilisé pour discrétiser le domaine carré $\Omega = [0, 2] \times [0, 2]$. Les solutions numériques sont obtenues sur une séquence de maillages raffinés et l'erreur associée à chaque étape du raffinement est évaluée sur le maillage le plus grossier ($N = 32$). Puisque nous sommes intéressés par la précision de la méthode IIM dans un voisinage de l'interface, les erreurs sont évaluées en norme infinie

$$\|E(u)\|_\infty = \max_{i,j} |u_{i,j} - U(\mathbf{x}_{i,j})|, \quad (2.5.1)$$

où $U(\mathbf{x}_{i,j})$ et $u_{i,j}$ représentent respectivement, la solution de référence et la solution numérique, évaluées aux nœuds $\mathbf{x}_{i,j}$ du maillage grossier. L'ordre de convergence de la solution entre deux maillages consécutifs (ayant N^2 et $4N^2$ nœuds respectivement) est ensuite défini par

$$\text{Ordre} = \left| \frac{\log(\|E(u_{N^2})\|_\infty / \|E(u_{4N^2})\|_\infty)}{\log(2)} \right|. \quad (2.5.2)$$

2.5.1. Premier exemple

Nous considérons d'abord une interface circulaire Γ de rayon $R = \frac{3}{4}$ centrée au milieu du domaine $\Omega = [0, 2] \times [0, 2]$ sur laquelle est distribuée une source singulière constante F . L'équation à résoudre est

$$u(\mathbf{x}) - 10\nabla^2 u(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x}) + C \int_{\Gamma} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(s)) ds, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.5.3)$$

$$u = e^{R^2} \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad (2.5.4)$$

où $C = -20R e^{R^2}$. La fonction source G est choisie de façon à ce que la fonction $u(\mathbf{x})$, définie par

$$u(\mathbf{x}) = \begin{cases} e^{R^2}, & \text{dans } \Omega^+, \\ e^{r^2}, & \text{dans } \Omega^-, \end{cases} \quad (2.5.5)$$

satisfasse l'équation précédente. Ceci nécessite que la fonction G soit donnée par :

$$G(\mathbf{x}) = \begin{cases} e^{R^2}, & \text{dans } \Omega^+, \\ e^{r^2} (1 - 40(r^2 + 1)), & \text{dans } \Omega^-, \end{cases} \quad (2.5.6)$$

où $r = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$. Les sauts des dérivées de la solution en un point (X, Y) de l'interface s'obtiennent aisément à partir de (2.5.5) :

$$\begin{aligned} [u_x] &= -2e^{R^2}(X-1), & [u_{xx}] &= 2e^{R^2}(1+2(X-1)^2), \\ [u_y] &= -2e^{R^2}(Y-1), & [u_{yy}] &= 2e^{R^2}(1+2(Y-1)^2). \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

2.5.1.1. Erreur d'interpolation sur l'interface

Nous aimerions premièrement examiner le choix de la représentation de l'interface Γ sur la précision des résultats obtenus avec la méthode IIM. Pour ce faire, nous utilisons d'abord une représentation analytique de l'interface pour évaluer exactement la position des points d'intersection $\mathbf{X} = (X, Y)$. Les conditions de saut (2.5.7) permettent ensuite d'évaluer exactement les termes de correction C en ces points. D'autre part, les points d'intersection approximatifs $\tilde{\mathbf{X}}$ sont déterminés à partir de la courbe $\tilde{\Gamma}$ et de l'algorithme décrit à la Section 2.4.2. Les

données interpolées $\tilde{\mathbf{n}}$ et $\tilde{\kappa}$ servent ensuite au calcul des termes de correction approximatifs \tilde{C} . À fin de comparaison, nous définissons les erreurs d'interpolation commises en ces points d'intersection de la façon suivante :

$$\|E(\mathbf{X})\|_{\infty} = \max \|\mathbf{X} - \tilde{\mathbf{X}}\|_2,$$

$$\|E(\mathbf{n})\|_{\infty} = \max \|\mathbf{n} - \tilde{\mathbf{n}}\|_2,$$

$$\|E(\kappa)\|_{\infty} = \max |\kappa - \tilde{\kappa}|,$$

$$\|E(C)\|_{\infty} = \max |C - \tilde{C}|,$$

où le maximum est pris sur l'ensemble de tout les N_{int} points d'intersection.

Les données du Tableau 2.1 illustrent le comportement des erreurs d'interpolation lorsque nous augmentons le nombre N_s de marqueurs lagrangiens de façon proportionnelle au nombre de nœuds du maillage cartésien. En maintenant $\Delta s \approx h$ pendant le raffinement des maillages, tous les points d'intersection approximatifs sont repérés par notre algorithme et les erreurs d'interpolation demeurent relativement petites. Pour mieux comprendre l'influence de ces erreurs sur la performance de la méthode IIM, nous devons regarder où ils interviennent dans notre discrétisation, soit dans l'évaluation des termes de correction. La dernière colonne du Tableau 2.1 contient les erreurs maximales commises pour évaluer les termes de correction aux nœuds irréguliers.

N	N_s	N_{int}	$\ E(\mathbf{X})\ _{\infty}$	$\ E(\mathbf{n})\ _{\infty}$	$\ E(\kappa)\ _{\infty}$	$\ E(C)\ _{\infty}$
32	40	92	2.6726e-006	3.5634e-006	2.7529e-003	1.3557e-003
64	80	188	1.9181e-007	2.5575e-007	6.8609e-004	3.5133e-004
128	160	380	1.4352e-008	1.9136e-008	1.7139e-004	9.3848e-005
256	320	764	1.7022e-009	2.2696e-009	4.2840e-005	2.3796e-005
512	640	1532	1.6418e-010	2.1893e-010	1.0709e-005	6.2234e-006

TAB. 2.1. Erreur d'interpolation aux points d'intersection $\mathbf{X} = (X, Y)$.

2.5.1.2. Résolution par la méthode IIM

Les Tableaux 2.2, 2.3 et 2.4 affichent les résultats numériques de l'exemple 2.5.1, obtenus avec la méthode IIM lorsque des représentations exacte et approximative de l'interface sont utilisées (les résultats concernant les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial y}$ ont été omis, car la solution est symétrique). Une première constatation est la forte similitude des résultats. Ceci s'explique probablement par la simplicité de la géométrie du problème considéré et le fait que la source singulière F est constante le long de l'interface. Nous concluons que la transmission des erreurs d'interpolation via les termes de correction est relativement limitée dans ce cas-ci.

		Γ exacte		$\tilde{\Gamma}$ approximative	
N	N_s	$\ E(u)\ _\infty$	Ordre	$\ E(u)\ _\infty$	Ordre
32	40	1.4185e-003		1.4210e-003	
64	80	3.9420e-004	1.8473	3.9435e-004	1.8493
128	160	9.9019e-005	1.9932	9.9028e-005	1.9936
256	320	2.6371e-005	1.9087	2.6372e-005	1.9088
512	640	6.4088e-006	2.0408	6.4089e-006	2.0409

TAB. 2.2. Comportement de l'erreur de la solution numérique u de l'exemple 2.5.1, obtenue avec la méthode IIM.

		Γ exacte		$\tilde{\Gamma}$ approximative	
N	N_s	$\ E(u_x)\ _\infty$	Ordre	$\ E(u_x)\ _\infty$	Ordre
32	40	7.1831e-003		7.1909e-003	
64	80	1.9569e-003	1.8760	1.9576e-003	1.8771
128	160	5.2121e-004	1.9087	5.2124e-004	1.9090
256	320	1.3188e-004	1.9826	1.3189e-004	1.9826
512	640	3.4205e-005	1.9469	3.4208e-005	1.9469

TAB. 2.3. Comportement de l'erreur de la dérivée $\frac{\partial u}{\partial x}$ de la solution numérique de l'exemple 2.5.1, obtenue avec la méthode IIM.

		Γ exacte		$\tilde{\Gamma}$ approximative	
N	N_s	$\ E(u_{xx})\ _\infty$	Ordre	$\ E(u_{xx})\ _\infty$	Ordre
32	40	3.1530e-002		3.1402e-002	
64	80	2.1162e-002	0.5752	2.1140e-002	0.5708
128	160	9.7526e-003	1.1176	9.7607e-003	1.1149
256	320	5.5752e-003	0.8067	5.5748e-003	0.8080
512	640	2.9044e-003	0.9408	2.9043e-003	0.9407

TAB. 2.4. Comportement de l'erreur de la dérivée $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ de la solution numérique de l'exemple 2.5.1, obtenue avec la méthode IIM.

En second lieu, nous examinons le comportement des erreurs lorsque le maillage cartésien est raffiné. Nous observons d'abord que l'ordre de convergence des erreurs ne converge pas de façon monotone lorsque l'on réduit le pas h de la discrétisation. Malgré ce phénomène oscillatoire typique aux problèmes d'interface ([11], [15]), nous pouvons clairement discerner un ordre de convergence quadratique pour les erreurs de la solution numérique. Ceci peut être surprenant à première vue, puisque nous avons utilisé un schéma aux différences finies d'ordre $O(h)$ pour discrétiser le laplacien aux nœuds irréguliers. D'après Li et Lai [15], ceci est principalement dû au fait que le nombre de points irréguliers nécessitant l'ajout de termes de correction est de codimension 1 par rapport aux nœuds cartésiens où une formule de quadrature d'ordre $O(h^2)$ est utilisée. En effet, il suffit de regarder le graphique de l'erreur sur la Figure 2.7 pour constater que l'erreur est maximale au centre du domaine et non dans un voisinage de l'interface, comme nous aurions pu nous y attendre. Ceci est probablement dû au fait que la solution est constante sur la région Ω^+ et que les variations sont plus importantes au centre du domaine.

Enfin, nous pouvons observer la précision de la solution IIM dans un voisinage de l'interface en regardant les Figures 2.7, 2.8 et 2.9, lesquelles affichent la solution numérique u et ses dérivées obtenues sur un maillage de 96×96 nœuds. Comme prévu, la méthode IIM capte très bien les irrégularités de la solution u , les sauts des dérivées $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ apparaissant clairement sur les Figures 2.8 et 2.9.

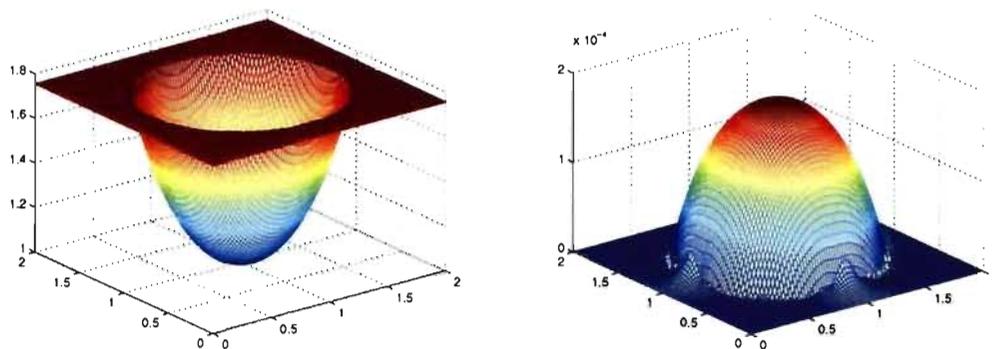


FIG. 2.7. Graphiques de la solution numérique u de l'exemple 2.5.1 (à gauche) et de l'erreur associée (à droite), obtenues avec la méthode IIM ($N = 96$).

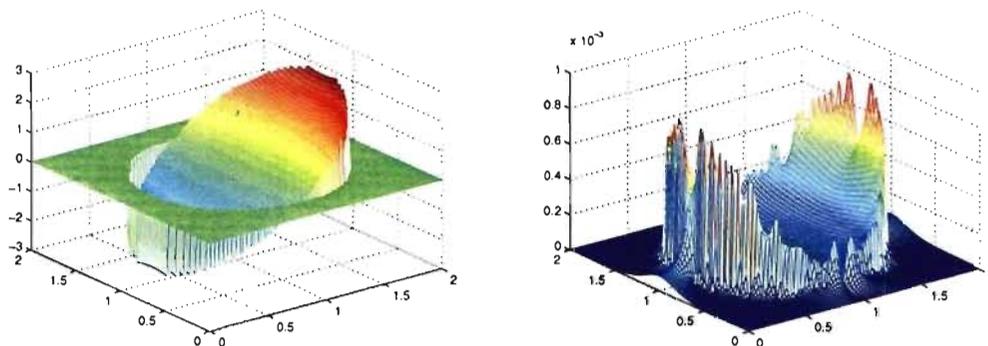


FIG. 2.8. Graphiques de la dérivée partielle $\frac{\partial u}{\partial x}$ de la solution numérique de l'exemple 2.5.1 (à gauche) et de l'erreur associée (à droite), obtenues avec la méthode IIM ($N = 96$).

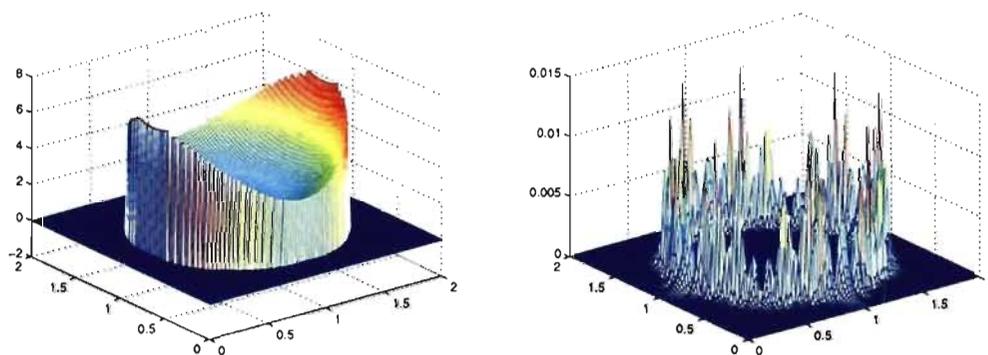


FIG. 2.9. Graphiques de la dérivée partielle $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ de la solution numérique de l'exemple 2.5.1 (à gauche) et de l'erreur associée (à droite), obtenues avec la méthode IIM ($N = 96$).

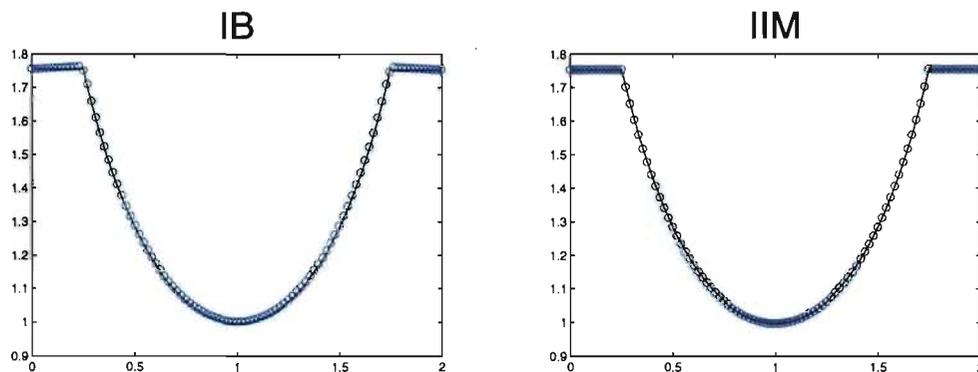


FIG. 2.10. Coupes en $y = 0$ des solutions numériques u de l'exemple 2.5.1, obtenues avec les méthodes IB et IIM ($N = 96$).

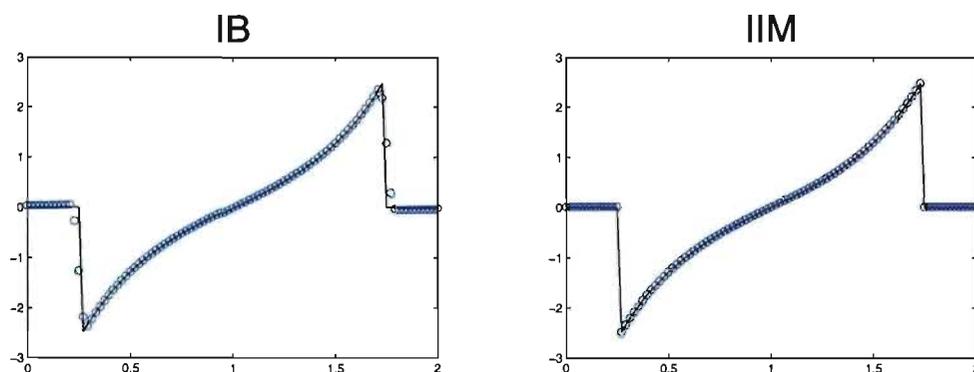


FIG. 2.11. Coupes en $y = 0$ de la dérivée $\frac{\partial u}{\partial x}$ des solutions numériques de l'exemple 2.5.1, obtenues avec les méthodes IB et IIM ($N = 96$).

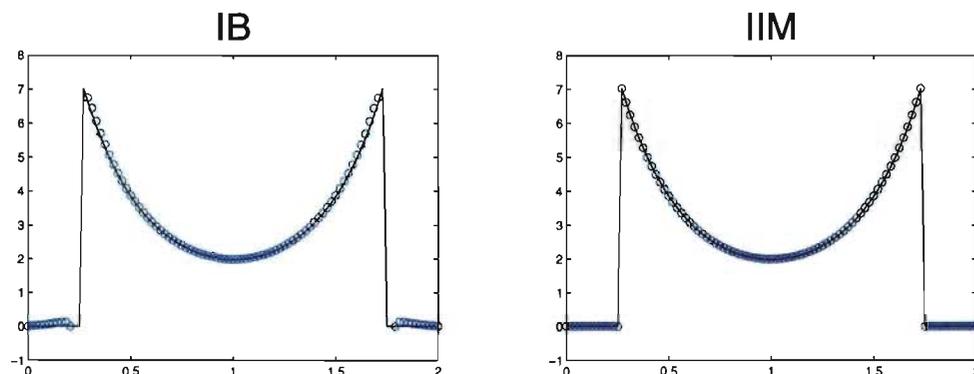


FIG. 2.12. Coupes en $y = 0$ de la dérivé seconde $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ des solutions numériques de l'exemple 2.5.1, obtenues avec les méthodes IB et IIM ($N = 96$).

2.5.1.3. Résolution par la méthode IB

À titre de comparaison, nous présentons aussi les résultats obtenus à l'aide de la méthode IB. La force singulière F est maintenant distribuée aux nœuds situés près de l'interface Γ via la formule (1.4.1), où nous avons utilisé un support $\omega = h$ pour la fonction $\tilde{\delta}_\omega$.

N	N_s	$\ E(u)\ _\infty$	Ordre	$\ E(u_x)\ _\infty$	$\ E(u_{xx})\ _\infty$
32	40	2.7718e-002		1.1523e+000	2.0989e+001
64	80	1.2210e-002	1.1828	1.2404e+000	4.2377e+001
128	160	6.8765e-003	0.8282	1.2822e+000	8.4796e+001
256	320	4.2227e-003	0.7035	1.3015e+000	1.6980e+002
512	640	2.6068e-003	0.6958	1.3106e+000	3.3916e+002

TAB. 2.5. Comportement de l'erreur de la solution numérique u de l'exemple 2.5.1 et de ses dérivées, obtenues avec la méthode IB lorsque $\omega = h$.

D'après les données apparaissant dans le Tableau 2.5, nous constatons que la méthode IIM produit une solution entre 10 et 1000 fois plus précise que la méthode IB. Cette baisse de précision de la méthode IB est principalement liée aux atténuations des irrégularités de la solution près de l'interface. Ces atténuations sont une conséquence directe de l'utilisation de la fonction $\tilde{\delta}_\omega$ et apparaissent clairement sur les Figures 2.10, 2.11 et 2.12. Nous constatons aussi un recul considérable de l'ordre de convergence de cette méthode par rapport aux résultats obtenus avec la méthode IIM. L'ordre linéaire n'est même pas observé, ce qui peut s'expliquer par la présence de la source discontinue G .

2.5.2. Deuxième exemple

Pour ce deuxième exemple, l'équation différentielle à résoudre est

$$\begin{aligned} -\nabla^2 u(\mathbf{x}) &= \int_{\Gamma} n_1(s) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(s)) ds, & \mathbf{x} \in \Omega, \\ u(\mathbf{x}) &= 0, & \mathbf{x} \in \partial\Omega, \end{aligned} \quad (2.5.8)$$

où la position de la courbe Γ est donnée par l'ellipse suivante :

$$\Gamma := \frac{(x-1)^2}{a^2} + \frac{(y-1)^2}{b^2} = 1. \quad (2.5.9)$$

Contrairement à l'exemple précédent, la source singulière F n'est plus constante puisque la densité de force f dépend maintenant de la composante x du vecteur normal $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$. Afin de pouvoir calculer les erreurs commises lors de la résolution numérique de ce problème, une solution de référence U a été obtenue avec la méthode IIM sur un maillage raffiné de 512×512 nœuds, où les informations géométriques exactes ont été utilisées pour évaluer les termes de corrections. La Figure 2.13 affiche le graphe de cette solution de référence U , interpolée sur un maillage de 128×128 nœuds, lorsque $a = 0.35$ et $b = 0.55$.

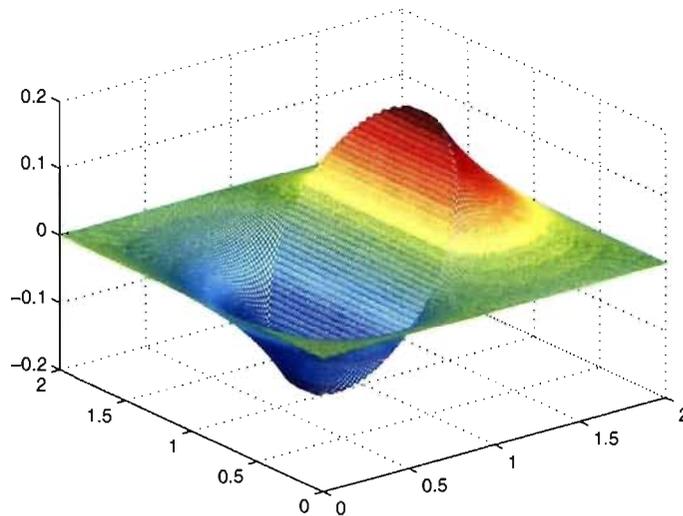


FIG. 2.13. Graphique de la solution de référence U de l'exemple 2.5.2, lorsque $a = 0.35$ et $b = 0.55$.

2.5.2.1. Résolution par la méthode IIM

Les Tableaux 2.6 et 2.7 affichent les résultats numériques obtenus avec la méthode IIM lorsque les termes de corrections \tilde{C} sont évalués à partir des données approximatives : $\tilde{\kappa}$, $\tilde{\mathbf{n}}$, $\partial\tilde{\mathbf{n}}/\partial s$, etc. Encore une fois, l'ordre de convergence quadratique est observé pour la solution numérique et ses dérivées partielles de premier degré $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$. Pour les dérivées partielles de second degré, l'ordre de convergence oscille entre les valeurs 1.3502 et 2.0159, ce qui est considérablement mieux que les prédictions du Lemme 2.3.1.

N	N_s	$\ E(u)\ _\infty$	Ordre	$\ E(u_x)\ _\infty$	Ordre	$\ E(u_y)\ _\infty$	Ordre
32	48	2.9907e-004		8.9065e-003		1.1146e-002	
64	96	6.7479e-005	2.1479	2.0351e-003	2.1298	3.0285e-003	1.8798
128	192	1.6012e-005	2.0753	4.6623e-004	2.1260	6.4222e-004	2.2375
256	384	3.5914e-006	2.1565	9.1234e-005	2.3534	1.3417e-004	2.2590

TAB. 2.6. Comportement de l'erreur de la solution numérique u de l'exemple 2.5.2 et de ses dérivées premières, obtenues avec la méthode IIM ($a = 0.35, b = 0.55$).

N	N_s	$\ E(u_{xx})\ _\infty$	Ordre	$\ E(u_{yy})\ _\infty$	Ordre
32	48	8.4289e-002		8.4289e-002	
64	96	3.3062e-002	1.3502	3.3062e-002	1.3502
128	192	8.1748e-003	2.0159	8.1748e-003	2.0159
256	384	2.5713e-003	1.6687	2.5713e-003	1.6687

TAB. 2.7. Comportement de l'erreur des dérivées partielles de second degré de la solution numérique u de l'exemple 2.5.2, obtenues avec la méthode IIM ($a = 0.35, b = 0.55$).

2.5.2.2. Résolution par la méthode IB

Les résultats numériques obtenus avec la méthode IB apparaissent dans le Tableau 2.8. Nous remarquons d'abord une amélioration considérable de l'ordre de convergence pour ce problème par rapport à l'exemple 2.5.1. L'absence de fonction discontinue G au membre de droite semble bien restaurer l'ordre linéaire. D'autre part, nous pourrions nous inquiéter à la vue des résultats des dérivées partielles de la solution IB, car l'erreur ne diminue point lorsque l'on raffine le maillage, mais va même en augmentant (voir les deux dernières colonnes de droite du Tableau 2.8). Ceci est dû au fait que nous évaluons l'erreur en norme infini afin de comparer les résultats des deux méthodes et que l'amplitude des erreurs maximales des solutions IB, provenant des atténuations des discontinuités près de l'interface (voir les Figures 2.15 et 2.16), ne change guère lorsqu'on augmente le nombre de nœuds du maillage. En général, l'utilisation d'une norme moins sévère ($\|\cdot\|_1$ ou $\|\cdot\|_2$) est plus appropriée au comportement global des erreurs de solutions numériques obtenues par la méthode IB.

N	N_s	$\ E(u)\ _\infty$	Ordre	$\ E(u_x)\ _\infty$	$\ E(u_{xx})\ _\infty$
32	48	1.3333e-002		3.9694e-001	7.5673e+000
64	96	6.0812e-003	1.1326	3.6893e-001	1.2877e+001
128	192	2.7845e-003	1.1269	3.0804e-001	2.4647e+001
256	384	1.1461e-003	1.2807	2.6304e-001	3.8991e+001

TAB. 2.8. Comportement de l'erreur de la solution numérique u de l'exemple 2.5.2 et de ses dérivées, obtenues avec la méthode IB ($a = 0.35, b = 0.55$).

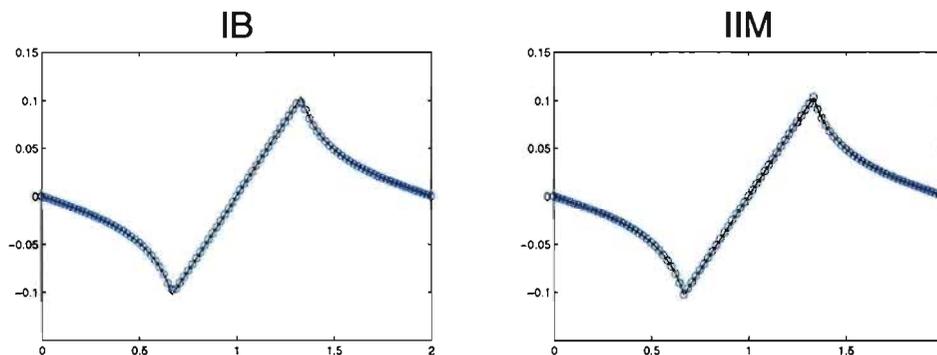


FIG. 2.14. Coupes en $y = 0$ des solutions numériques u de l'exemple 2.5.2, obtenues avec les méthodes IB et IIM ($N = 96, a = 0.35, b = 0.55$).

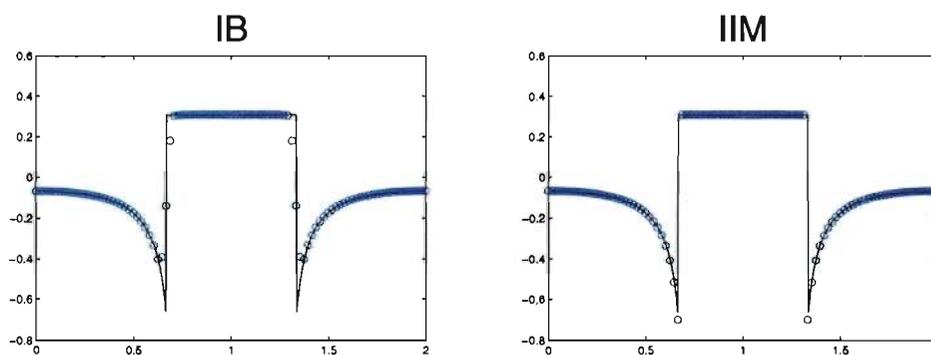


FIG. 2.15. Coupes en $y = 0$ de la dérivée $\frac{\partial u}{\partial x}$ des solutions numériques de l'exemple 2.5.2, obtenues avec les méthodes IB et IIM ($N = 96, a = 0.35, b = 0.55$).

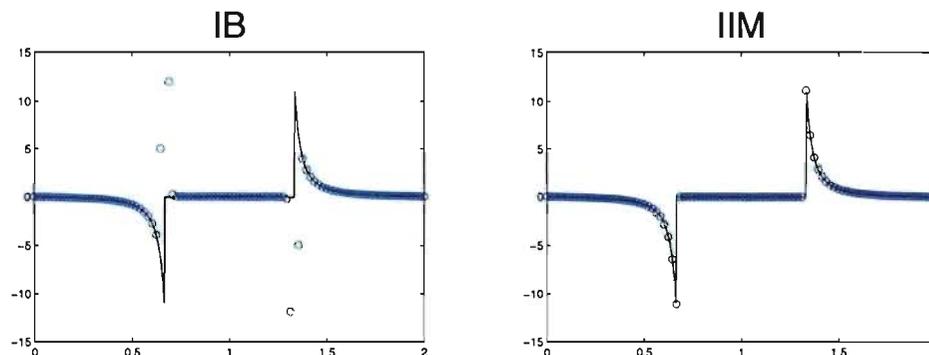


FIG. 2.16. Coupes en $y = 0$ de la dérivé seconde $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ des solutions numériques de l'exemple 2.5.2, obtenues avec les méthodes IB et IIM ($N = 96, a = 0.35, b = 0.55$).

2.6. CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons introduit tous les détails liés à l'implémentation de la méthode IIM pour un problème elliptique bidimensionnel avec une source singulière F et une source discontinue G . Suite à la dérivation des conditions de saut de la solution et à la reformulation du problème, nous avons montré qu'il était possible d'utiliser des schémas centrés pour discrétiser les équations différentielles sur la presque totalité du domaine. Nous avons ensuite expliqué comment modifier les schémas aux différences finies aux nœuds irréguliers en ajoutant des termes de correction évalués à partir du Lemme 2.3.1.

Une des difficultés rencontrées lors de la mise en œuvre de la méthode IIM avec l'utilisation des splines cubiques a été la recherche des points d'intersection entre le maillage cartésien et l'interface. L'algorithme que nous avons développé pour résoudre ce problème a été présenté et des configurations d'interface problématiques ont été signalées. Des tests numériques ont démarqué l'importance d'utiliser un nombre suffisant de marqueurs lagrangiens pour que les erreurs d'interpolation ne dominent pas les calculs. En général, le critère $\Delta s \approx h$ s'est avéré suffisant pour éviter ce type d'ennuis.

Finalement, deux exemples ont été présentés et une comparaison des méthodes IB et IIM a été faite. Les résultats numériques ont confirmé les ordres de convergence théoriques prévus par le Lemme 2.3.1 pour la méthode IIM et un ordre linéaire a été observé pour la méthode IB. Nous concluons que la méthode IIM est plus précise pour ce type de problème et son ordre de convergence supérieur à celui de la méthode IB, car la discrétisation des équations différentielles tient compte des irrégularités de la solution. Ceci permet d'obtenir une solution nette sur tout le domaine et de capter clairement les discontinuités des dérivées de la solution.

Chapitre 3

ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES AVEC FORCE SINGULIÈRE

Dans ce chapitre, nous présentons les détails de notre mise en œuvre de la méthode IIM pour résoudre les équations de Navier-Stokes incompressibles avec la présence d'une force singulière \mathbf{F} .

3.1. MÉTHODE DE PROJECTION SANS PRESSION

Nous considérons d'abord le système d'équations (1.2.1)-(1.2.4) sans la présence de la force singulière \mathbf{F} . Une des principales difficultés lors de la résolution numérique de ce système d'équations provient de la présence de la pression dans l'équation du mouvement (1.2.1). Celle-ci joue un rôle particulier, reliant implicitement l'équation du mouvement à l'équation de continuité. Ce couplage implicite empêche l'usage des schémas traditionnels ADI ("Alternate-Direction-Implicit") pour faire évoluer la solution dans le temps comme dans le cas d'écoulements compressibles. Pour contourner cette difficulté, pratiquement toutes les méthodes numériques s'attaquant à la résolution des équations (1.2.1)-(1.2.4) sous la formulation des variables primitives (\mathbf{u}, p) , utilisent une approche à pas fractionnaire. Dans un premier temps, une équation analogue à (1.2.1) est résolue pour obtenir un champ approximatif \mathbf{u}^* qui généralement ne satisfait pas la condition d'incompressibilité (1.2.2). Ensuite, une décomposition de Hodge permet la projection de ce champ de vitesse approximatif \mathbf{u}^* sur l'espace des champs vectoriels

sans-divergence. Une équation elliptique résulte de cette projection et est résolue pour déterminer une forme approximative de la pression.

La méthode de projection que nous présentons ici est basée sur la version de Kim et Moin [14]. Dénotée par PMIII dans l'article de Brown et al. [4], elle entre dans la catégorie de méthode de projection "sans pression", puisqu'aucune approximation du gradient de pression n'apparaît dans l'équation approximative (3.1.1).

L'algorithme général prend la forme suivante :

- Étape 1 : Déterminer un champ intermédiaire \mathbf{u}^* satisfaisant l'équation approximative

$$\frac{1}{\Delta t} (\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n) + ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u})^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\nu}{2} \nabla^2 (\mathbf{u}^* + \mathbf{u}^n) + \mathbf{F}^n, \quad (3.1.1)$$

$$B(\mathbf{u}^*) = 0, \quad (3.1.2)$$

où $((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u})^{n+\frac{1}{2}}$ est une approximation explicite de second ordre des termes convectifs. Cette formulation est désirable puisqu'elle réduit considérablement la dépendance de la stabilité de la méthode sur la viscosité cinétique ([4], [14]).

- Étape 2 : Effectuer la projection

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^{n+1} + \Delta t \nabla \phi^{n+1}, \quad (3.1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0. \quad (3.1.4)$$

En pratique, nous obtenons une équation elliptique pour ϕ^{n+1} en prenant la divergence de (3.1.3), ce qui donne

$$\nabla^2 \phi^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} (\nabla \cdot \mathbf{u}^*), \quad (3.1.5)$$

$$\tilde{B}(\phi^{n+1}) = 0, \quad (3.1.6)$$

où les conditions frontières pour ϕ^{n+1} doivent être compatibles avec celles utilisées à l'Étape 1 et avec $\mathbf{u}^{n+1}|_{\partial\Omega} = \mathbf{u}_m$.

– Étape 3 : Mise à jour de la pression

$$p^{n+\frac{1}{2}} = \phi^{n+1} - \frac{\nu \Delta t}{2} \nabla^2 \phi^{n+1}. \quad (3.1.7)$$

Cette étape est effectuée seulement si nous avons besoin de la pression et n'intervient point dans la détermination du champ de vitesse.

Ceci termine un pas de temps. Nous pouvons ensuite faire évoluer la solution jusqu'au temps $t_{max} = n_{max} \Delta t$ en répétant ce procédé. Il reste maintenant le choix des conditions frontières (3.1.2) et (3.1.6), sujet que nous aborderons dès que nous aurons discuter des schémas utilisés pour discrétiser les opérateurs différentiels.

3.1.1. Discrétisation des opérateurs différentiels

En vue d'obtenir l'équation semi-implicite (3.1.1), nous utilisons les schémas classiques d'Adams-Bashforth et Crank-Nicolson pour discrétiser l'équation d'advection-diffusion suivante :

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{F}. \quad (3.1.8)$$

Nous soulignons le fait que la solution approximative de cette équation ne satisfait généralement pas la condition d'incompressibilité (1.2.2) en dénotant son évaluation au temps t^{n+1} par \mathbf{u}^* . Un schéma explicite d'Adams-Bashforth de second ordre est d'abord utilisé pour discrétiser les termes convectifs. Reprenant la notation utilisée dans l'équation (3.1.1), nous avons l'approximation suivante :

$$((\mathbf{u} \cdot \nabla_h) \mathbf{u})^{n+\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} (\mathbf{u}^n \cdot \nabla_h) \mathbf{u}^n - \frac{1}{2} (\mathbf{u}^{n-1} \cdot \nabla_h) \mathbf{u}^{n-1}. \quad (3.1.9)$$

Puis, un schéma implicite de Crank-Nicolson de second ordre est utilisé pour discrétiser les termes visqueux. La combinaison de ces schémas évalués au temps t^{n+1} nous donne

$$\frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \frac{3}{2} (\mathbf{u}^n \cdot \nabla_h) \mathbf{u}^n - \frac{1}{2} (\mathbf{u}^{n-1} \cdot \nabla_h) \mathbf{u}^{n-1} = \frac{\nu}{2} \nabla_h^2 (\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^*) + \mathbf{F}^n. \quad (3.1.10)$$

Le schéma résultant est une approximation de l'équation d'advection-diffusion (3.1.8) de second ordre en espace et en temps ([4], [14]). Ensuite, nous discrétisons

les équations (3.1.3)-(3.1.4) de la projection avec des schémas aux différences finies centrés de second ordre. Nous avons donc

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^{n+1} + \Delta t \nabla_h \phi^{n+1}, \quad (3.1.11)$$

$$\nabla_h \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0. \quad (3.1.12)$$

L'évaluation de la divergence discrète du schéma (3.1.11), utilisée conjointement avec le fait que $\nabla_h \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0$, permet d'obtenir la discrétisation suivante pour l'équation elliptique (3.1.5) :

$$\tilde{\nabla}_h^2 \phi^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} (\nabla_h \cdot \mathbf{u}^*), \quad (3.1.13)$$

où l'opérateur différentiel discret $\tilde{\nabla}_h^2 = \nabla_h \cdot (\nabla_h \phi^{n+1})$ est défini par

$$\tilde{\nabla}_h^2 \phi_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{4h^2} (\phi_{i+2,j}^{n+1} + \phi_{i-2,j}^{n+1} + \phi_{i,j+2}^{n+1} + \phi_{i,j-2}^{n+1} - 4\phi_{i,j}^{n+1}). \quad (3.1.14)$$

Finalement, nous montrons comment l'équation discrète (3.1.10) peut être combinée avec l'approximation de la pression ϕ^{n+1} pour discrétiser l'équation (1.2.1). Remplaçant le champ approximatif \mathbf{u}^* par l'expression (3.1.11) dans l'équation (3.1.10), nous obtenons le schéma suivant pour discrétiser les équations (1.2.1)-(1.2.2) :

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + ((\mathbf{u} \cdot \nabla_h) \mathbf{u})^{n+\frac{1}{2}} &= -\nabla_h \left(\phi^{n+1} - \frac{\nu \Delta t}{2} \nabla_h^2 \phi^{n+1} \right) \\ &+ \frac{\nu}{2} \nabla_h^2 (\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n+1}) + \mathbf{F}^n, \end{aligned}$$

$$\nabla_h \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0.$$

Nous déduisons ainsi la formule discrète suivante pour la mise à jour de la pression :

$$p^{n+\frac{1}{2}} = \phi^{n+1} - \frac{\nu \Delta t}{2} \nabla_h^2 \phi^{n+1}. \quad (3.1.15)$$

En pratique, nous évaluons $p^{n+\frac{1}{2}}$ en substituant $\nabla_h^2 \phi^{n+1}$ par sa valeur correspondante tirée de la discrétisation directe de l'équation (3.1.5). Nous avons donc

$$p^{n+\frac{1}{2}} = \phi^{n+1} - \frac{\nu}{2} (\nabla_h \cdot \mathbf{u}^*). \quad (3.1.16)$$

Il faut souligner que l'approximation de la pression doit être évaluée au temps $t^{n+\frac{1}{2}}$ pour être consistante avec le schéma de Crank-Nicolson utilisé précédemment. Si nous évaluons p au temps t^{n+1} , nous obtenons une approximation qui est seulement de premier ordre en temps ([4], [14]).

3.1.2. Conditions frontières pour \mathbf{u}^* et ϕ^{n+1}

Un fait important à souligner est que le choix des conditions frontières pour \mathbf{u}^* doit être compatible avec l'équation (3.1.3) et ce, même si la fonction ϕ^{n+1} n'est pas encore connue lorsque nous devons implémenter celles-ci. Ceci s'avère primordial pour que la précision de la méthode soit de second ordre ([3]-[4]). Une première option consiste à utiliser des conditions de Neumann homogènes pour l'approximation de la pression ϕ^{n+1} sur la frontière $\partial\Omega$:

$$\frac{\partial\phi^{n+1}}{\partial n} = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (3.1.17)$$

Ce choix implique ensuite les conditions frontières suivantes pour \mathbf{u}^* :

$$(\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n})|_{\partial\Omega} = \mathbf{u}_m \cdot \mathbf{n}, \quad (3.1.18)$$

$$(\mathbf{u}^* \cdot \boldsymbol{\tau})|_{\partial\Omega} = \left(\mathbf{u}_m + \Delta t \nabla_h \tilde{\phi}^{n+1}|_{\partial\Omega} \right) \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad (3.1.19)$$

où $\nabla_h \tilde{\phi}^{n+1}$ représente une approximation du gradient de ϕ^{n+1} sur la frontière. D'après Kim et Moin, l'utilisation de la valeur du gradient au temps t^n est une approximation suffisante ($\nabla_h \tilde{\phi}^{n+1} = \nabla_h \phi^n$) pour conserver une précision de second ordre [14]. Une formule d'extrapolation plus précise ($\nabla_h \tilde{\phi}^{n+1} = 2\nabla_h \phi^n - \nabla_h \phi^{n-1}$) dérivée à partir des valeurs ϕ^n et ϕ^{n-1} est suggéré par Brown [4].

Bien que nous soyons libres de choisir les conditions frontières pour \mathbf{u}^* de façon arbitraire, dans la mesure où ceux-ci sont compatibles avec l'équation (3.1.3), ce choix va nécessairement influencer le caractère de \mathbf{u}^* dans un voisinage de la frontière. Un exemple numérique est présenté par Brown et al. [4], où le choix précédent provoque une réduction de l'ordre de convergence de la pression et de la divergence discrète du champ de vitesse \mathbf{u}^{n+1} . Cette baisse de précision est causée par de grandes variations dans la quantité $\nabla_h \cdot \mathbf{u}^*$ près de la frontière, qui sont ensuite transmises à la pression via la relation (3.1.16). Par conséquent, il faut

garder à l'esprit que le choix des conditions frontières pour \mathbf{u}^* peut influencer la précision de la méthode numérique utilisée.

3.1.3. Résultats numériques pour PMIII

Nous présentons maintenant les résultats numériques obtenus avec la méthode de projection PMIII pour un problème bidimensionnel instationnaire. La solution exacte suivante est tirée de l'article de Kim et Moin [14] :

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= -(\cos x \sin y) e^{-2\nu t}, \\ v(x, y, t) &= (\sin x \cos y) e^{-2\nu t}, \\ p(x, y, t) &= -\frac{1}{4}(\cos 2x + \cos 2y) e^{-4\nu t}. \end{aligned} \quad (3.1.20)$$

Les calculs numériques ont été effectués sur le domaine carré $\Omega = [0, \pi] \times [0, \pi]$, lequel est discrétisé avec un maillage uniforme $h = \frac{\pi}{N}$. Le pas de temps a été fixé à $\Delta t = \frac{h}{2}$, ce qui correspond à une constante $CFL = \frac{1}{2}$. Étant donné que l'ordre de grandeur de la solution décroît rapidement en fonction de t , nous évaluons l'erreur comme suit

$$\|E(\mathbf{u})\|_{\infty} = \frac{\max_{i,j} \|\mathbf{u}_{i,j} - \mathbf{U}(\mathbf{x}_{i,j})\|_2}{\max_{i,j} \|\mathbf{U}(\mathbf{x}_{i,j})\|_2}, \quad (3.1.21)$$

où $\mathbf{U}(\mathbf{x}_{i,j})$ représente la solution exacte et $\mathbf{u}_{i,j}$ représente la solution numérique, évaluées aux nœuds $\mathbf{x}_{i,j}$ du maillage cartésien en un temps t prédéterminé. L'erreur commise sur la pression est définie de façon analogue. Les ordres de convergence de la solution sont ensuite calculés à partir de la relation (2.5.2).

Notons que la pression est ajustée de façon à ce que la différence entre la solution exacte et la solution numérique soit nulle au centre du domaine. Ce choix découle de la contrainte supplémentaire (ajout d'une ligne à la matrice de discrétisation pour fixer $\phi^{n+1} = 0$ au centre du domaine) que nous utilisons dans le problème de Poisson pour déterminer l'approximation ϕ^{n+1} , car celle-ci n'est déterminée qu'à une constante additive près.

3.1.3.1. Le choix des conditions frontières pour \mathbf{u}^*

Dans un premier temps, nous examinons le choix de l'approximation $\tilde{\phi}^{n+1}$ dans l'évaluation des conditions frontières (3.1.19). Le Tableau 3.1 affiche les résultats

numériques, obtenus au temps $t = \frac{\pi}{4}$, lorsque l'approximation $\tilde{\phi}^{n+1} = \phi^n$ est utilisée pour calculer les conditions frontières (3.5.5) de la composante tangentielle de \mathbf{u}^* . Comme prévu par l'analyse de Brown et al. [4], l'ordre de convergence quadratique est atteint pour le champ de vitesse \mathbf{u}^{n+1} . Pour la pression $p^{n+\frac{1}{2}}$, l'ordre se situe entre 1.5 et 2.

Ensuite, le même problème a été résolu avec l'approximation $\tilde{\phi}^{n+1} = 0$, ce qui correspond aux conditions frontières $\mathbf{u}^*|_{\partial\Omega} = \mathbf{u}_m$. Les résultats correspondant apparaissent dans le Tableau 3.2. Nous remarquons une nette réduction de l'ordre de convergence pour \mathbf{u}^{n+1} et $p^{n+\frac{1}{2}}$, l'ordre linéaire étant à peine atteint. Ceci est dû au fait que ce choix de conditions frontières est incompatible avec l'équation (3.1.3), ce qui provoque une erreur d'ordre $O(\Delta t) \approx O(h)$ pour la composante tangentielle de \mathbf{u}^{n+1} sur la frontière

$$(\mathbf{u}_m - \mathbf{u}^{n+1}|_{\partial\Omega}) \cdot \boldsymbol{\tau} = \Delta t (\nabla_h \phi^{n+1} \cdot \boldsymbol{\tau})|_{\partial\Omega}.$$

N	$\ E(u)\ _\infty$	Ordre	$\ E(v)\ _\infty$	Ordre	$\ E(p)\ _\infty$	Ordre
32	8.3871e-004		8.3744e-004		1.9477e-002	
64	2.0616e-004	2.0244	2.0612e-004	2.0225	5.7708e-003	1.7549
128	5.1174e-005	2.0103	5.1172e-005	2.0101	1.6634e-003	1.7947

TAB. 3.1. Erreur et ordre de convergence de la solution (\mathbf{u}, p) de l'équation (3.1.20), évalués au temps $t = \frac{\pi}{4}$, lorsque l'approximation $\tilde{\phi}^{n+1} = \phi^n$ est utilisée ($\nu = 0.25$ et $\Delta t = \frac{h}{2}$).

N	$\ E(u)\ _\infty$	Ordre	$\ E(v)\ _\infty$	Ordre	$\ E(p)\ _\infty$	Ordre
32	1.4456e-002		1.4568e-002		1.4769e-001	
64	7.7270e-003	0.9037	7.7569e-003	0.9093	9.5684e-002	0.6263
128	4.0006e-003	0.9497	4.0072e-003	0.9529	5.7402e-002	0.7372

TAB. 3.2. Erreur et ordre de convergence de la solution (\mathbf{u}, p) de l'équation (3.1.20), évalués au temps $t = \frac{\pi}{4}$, lorsque l'approximation $\tilde{\phi}^{n+1} = 0$ est utilisée ($\nu = 0.25$ et $\Delta t = \frac{h}{2}$).

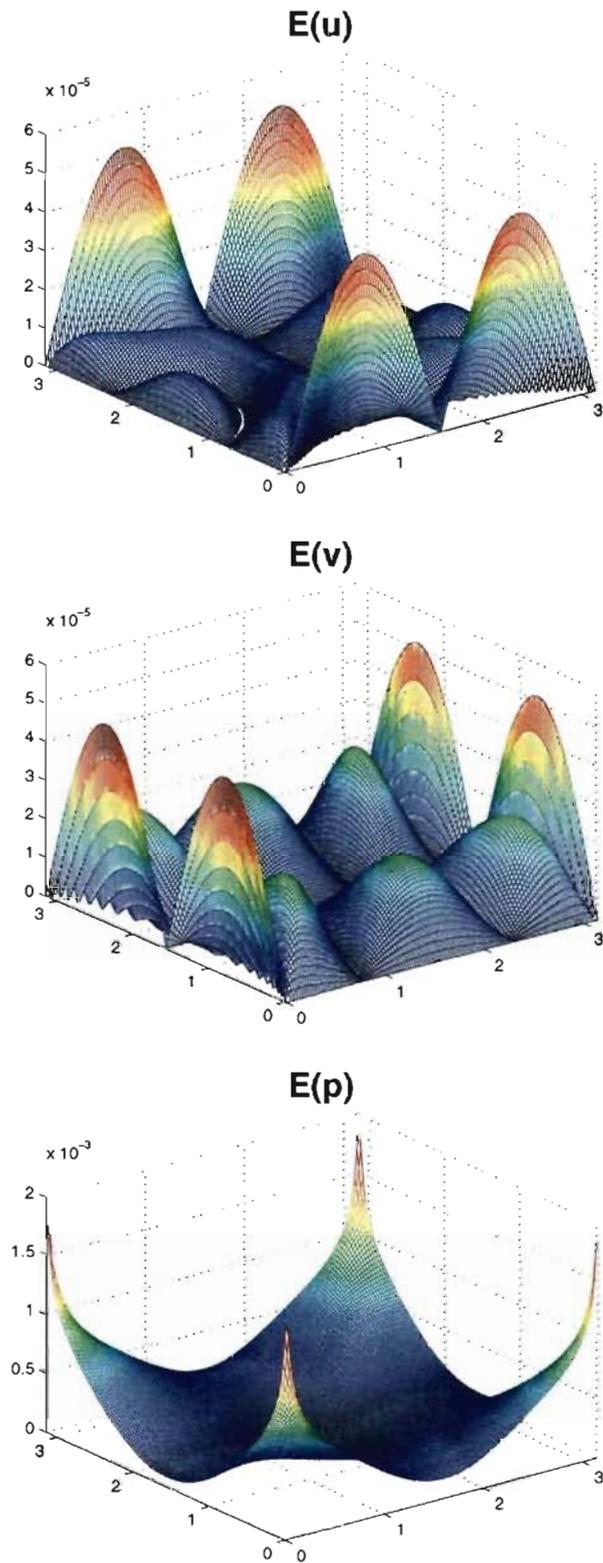


FIG. 3.1. Graphiques des erreurs associées aux solutions numériques u^{n+1} et $p^{n+\frac{1}{2}}$ du problème (3.1.20), obtenues sur un maillage de 128×128 nœuds et évaluées au temps $t = \frac{\pi}{4}$, lorsque $\nu = 0.25$ et $\Delta t = \frac{h}{2}$.

Enfin, le schéma d'extrapolation $\tilde{\phi}^{n+1} = 2\phi^n - \phi^{n-1}$ a aussi été testé. Malgré une certaine réduction de l'amplitude des erreurs, l'ordre de convergence n'a pas été amélioré de façon significative. Nous concluons que le choix des conditions frontières pour le champ intermédiaire \mathbf{u}^* et ceux qui en découle pour ϕ^{n+1} s'avère crucial pour que la précision de la méthode PMIII soit d'ordre deux.

3.1.3.2. Commentaires sur le problème de Poisson pour ϕ^{n+1}

À première vue, nous pourrions être déçus des résultats obtenues par PMIII pour l'approximation de la pression $p^{n+\frac{1}{2}}$, car l'ordre quadratique n'a pas été atteint pour ce problème (voir la dernière colonne du Tableau 3.1). Cherchant une raison pour cette baisse de performance, nous pourrions blâmer la présence d'une couche limite dont l'amplitude est significative près des coins du carré (voir la Figure 3.1). Cette explication semble valable surtout lorsqu'on considère que Li et Lai [15] ont aussi rencontré ce phénomène pour un problème similaire. Mais pourquoi s'attend-t-on à un ordre quadratique pour la pression après tout ?

Bien que Brown et al. [4] aient démontré un ordre de convergence quadratique pour l'approximation de la pression obtenue avec la méthode PMIII, leur preuve est basée sur l'analyse des modes de Fourier dans un canal infini et par conséquent, n'est valide que pour des écoulements dans un canal où des conditions semi-périodiques sont utilisées. En pratique, il est souvent difficile, voir impossible, d'extraire un ordre de convergence quadratique pour la pression avec une méthode à pas fractionnaire lorsqu'un domaine polygonal est considéré [13]. Dans ces situations plus générales, la théorie prédit plutôt un ordre de convergence de $\frac{3}{2}$, ce qui concorde bien avec nos résultats.

3.2. DISCUSSION SUR LES CONDITIONS DE SAUT POUR LES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES

Afin de pouvoir utiliser la méthode IIM pour résoudre les équations de Navier-Stokes avec une force singulière, nous avons besoin des conditions de saut de la

pression p et du champ de vitesse \mathbf{u} . Une fois en possession de ces relations, nous serons en mesure d'expliquer comment les idées présentées au chapitre précédent peuvent être intégrées aux équations elliptiques de la méthode de projection pour obtenir une solution numérique du système d'équations (1.2.1)-(1.2.4). Ayant été motivé par la recherche d'une version de la méthode IIM pour les équations de Navier-Stokes avec une viscosité discontinue, nous présentons les grandes difficultés liées à cette approche.

3.2.1. Conditions de saut lorsque la viscosité est discontinue

La dérivation des conditions de saut pour les équations de Navier-Stokes incompressibles avec une viscosité discontinue comporte elle-même plusieurs technicités. Jusqu'à dernièrement, seuls quelques sauts reflétant un équilibre des forces agissant dans les directions tangentielle et normale à l'interface étaient connus. Des relations additionnelles et nécessaires à la mise en œuvre de la méthode IIM ont récemment été dérivées dans ([10]-[11]). Le théorème suivant résume les conditions de saut pour les équations de Navier-Stokes incompressibles avec la présence d'une force singulière lorsque la viscosité est discontinue :

Théorème 3.2.1 (c.f. Théorème 2 de Ito et Li [10]). *Soient (\mathbf{u}, p) les solutions du système d'équations (1.2.1)-(1.2.2). Nous dénotons les composantes tangentielle et normale de la densité de force $\mathbf{f}(s, t) = (f_1(s, t), f_2(s, t))$ par*

$$f_\tau = -f_1 \sin \theta + f_2 \cos \theta = \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad (3.2.1)$$

$$f_n = f_1 \cos \theta + f_2 \sin \theta = \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}. \quad (3.2.2)$$

Nous avons alors les conditions de saut suivantes à travers l'interface $\Gamma(t)$:

$$[p] = 2 \left[\nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} \cdot \mathbf{n} \right] + f_n, \quad (3.2.3)$$

$$\left[\frac{\partial p}{\partial n} \right] = \frac{\partial f_\tau}{\partial \tau} + 2 \left[\nu \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \right], \quad (3.2.4)$$

$$[\nu \nabla \cdot \mathbf{u}] = 0, \quad (3.2.5)$$

$$\left[\nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} \cdot \boldsymbol{\tau} \right] + \left[\nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tau} \cdot \mathbf{n} \right] + f_\tau = 0. \quad (3.2.6)$$

Bien que ces conditions de saut aient été dérivées à partir des équations de Stokes, les relations correspondantes pour les équations de Navier-Stokes s'obtiennent de la même façon ([10]-[11]). Ceci s'explique par le fait que la dérivée matérielle $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ est continue à travers l'interface $\Gamma(t)$.

3.2.1.1. Commentaires sur les sauts couplés

Une conséquence directe de la discontinuité de la viscosité est l'introduction d'un couplage implicite des conditions de saut de la pression p et des dérivées partielles de la vitesse \mathbf{u} . La première relation (3.2.3) résulte d'un bilan des forces dans la direction normale à l'interface, tandis que la dernière (3.2.6) correspond au bilan obtenu dans la direction tangentielle. Malgré l'effort de plusieurs chercheurs pour découpler ces sauts, nous ne connaissons qu'une seule méthode ([11]-[12]), dite "augmentée", qui incorpore les sauts (3.2.3)-(3.2.6) dans la discrétisation des équations de Stokes. Pour le moment, aucune version de la méthode IIM n'a encore été proposée pour résoudre les équations de Navier-Stokes incompressibles lorsque la viscosité est discontinue.

3.2.2. Conditions de saut lorsque la viscosité est continue

Les conditions des saut (3.2.3)-(3.2.6) sont grandement simplifiées lorsque la viscosité cinétique ν du fluide est continue sur tout le domaine Ω .

$$[p] = f_n, \quad (3.2.7)$$

$$\left[\frac{\partial p}{\partial n} \right] = \frac{\partial f_\tau}{\partial \tau}, \quad (3.2.8)$$

$$[\mathbf{u}] = 0, \quad (3.2.9)$$

$$\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} \right] = -\frac{1}{\nu} f_\tau \boldsymbol{\tau}. \quad (3.2.10)$$

Bien qu'il soit possible d'obtenir ces relations découplées directement à partir des conditions de sauts (3.2.3)-(3.2.6), il s'avère plus facile de suivre l'approche présentée à la Section 2.2.1 et d'intégrer l'équation du mouvement (1.2.1) sur une région appropriée [16].

3.2.2.1. Relation supplémentaire pour \mathbf{u} à travers $\Gamma(t)$

Suite à l'introduction du système de coordonnées locales (2.2.7), des relations supplémentaires peuvent être dérivées à partir des sauts (3.2.7)-(3.2.10). Ceux-ci prennent la forme suivante :

$$\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tau} \right] = \mathbf{0}. \quad (3.2.11)$$

$$\left[\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \tau^2} \right] = \frac{\kappa}{\nu} f_\tau \boldsymbol{\tau}, \quad (3.2.12)$$

$$\left[\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \tau \partial n} \right] = -\frac{1}{\nu} \left(\frac{\partial f_\tau}{\partial \tau} \boldsymbol{\tau} + \kappa f_\tau \mathbf{n} \right), \quad (3.2.13)$$

$$\left[\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial n^2} \right] = \frac{1}{\nu} \left(\frac{\partial}{\partial n} (f_\tau \mathbf{n}) + \frac{\partial f_n}{\partial \tau} \boldsymbol{\tau} \right). \quad (3.2.14)$$

Une dérivation détaillée de ces conditions de saut peut être trouvée dans l'Annexe A.

3.2.2.2. Commentaires sur les sauts découplés

Contrairement au cas où la viscosité était discontinue ($[\nu] \neq 0$), il existe quelques versions de la méthode IIM utilisant les sauts découplés (3.2.7)-(3.2.14) pour résoudre les équations de Navier-Stokes incompressibles avec une viscosité continue ([11], [15]-[16]). Une question, qui demeure subtile dans la mise en œuvre de ces méthodes, concerne l'évaluation des termes de correction associés aux quantités \mathbf{u}^* et ϕ^{n+1} . Bien qu'il soit possible d'interpoler ces valeurs à partir des conditions de saut exactes, l'approche que nous proposons ici élimine cette ambiguïté puisque les conditions de saut pour \mathbf{u}^* et ϕ^{n+1} sont dérivées directement à partir des équations discrétisées (3.1.1) et (3.1.5).

3.3. DÉRIVATION DES CONDITIONS DE SAUT APPROXIMATIVES

Notre dérivation des conditions de saut pour les équations de Navier-Stokes suit l'approche empruntée à la Section 2.2. La différence principale avec les stratégies de [15] et [16] provient du fait que nous utilisons les équations approximatives (3.1.1) et (3.1.5) au lieu d'utiliser les équations exactes (1.2.1)-(1.2.2). Cette nouvelle approche permet un certain découplage des sauts puisque la pression ou

plus précisément la fonction approximative ϕ^{n+1} n'est pas présente dans l'équation (3.1.1). De plus, en procédant ainsi nous obtenons directement les sauts pour les fonctions \mathbf{u}^* et ϕ^{n+1} , ce qui élimine le besoin d'interpolation supplémentaire pour déterminer ceux-ci à partir des valeurs exactes. Dans la démonstration qui suit, nous utiliserons les hypothèses suivantes :

- (1) La courbe $\Gamma^n \in C^2$ est simple, fermée et entièrement comprise dans l'intérieur du domaine Ω .
- (2) Les fonctions \mathbf{u}^* et ϕ^{n+1} peuvent posséder un saut fini à travers l'interface, mais elles demeurent bornées sur le domaine Ω .
- (3) Les fonctions \mathbf{u}^n et \mathbf{u}^{n-1} sont continues sur le domaine Ω .

3.3.1. Intégration des équations d'Helmholtz

Reprenant l'approche vue à la Section 2.2.1, nous multiplions l'équation (3.1.1) par une fonction test $\psi \in C^2$ arbitraire pour obtenir l'identité intégrale suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \iint_{\Omega_\epsilon} (\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n) \psi \, d\mathbf{x} + \iint_{\Omega_\epsilon} ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u})^{n+\frac{1}{2}} \psi \, d\mathbf{x} = \\ \frac{\nu}{2} \iint_{\Omega_\epsilon} (\nabla^2 (\mathbf{u}^* + \mathbf{u}^n)) \psi \, d\mathbf{x} + \iint_{\Omega_\epsilon} \mathbf{F}^n \psi \, d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

Nous déduisons d'abord que la première intégrale s'annule lors du procédé de limite ϵ tend vers zéro, puisque les fonctions \mathbf{u}^* , \mathbf{u}^n et ψ sont bornées sur Ω par hypothèse. Nous avons donc

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \iint_{\Omega_\epsilon} (\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n) \psi \, d\mathbf{x} = 0. \quad (3.3.2)$$

Dans ce qui suit, nous utiliserons les sous-indices $\{i, j\}$ pour dénoter les composantes d'un vecteur, ce qui correspond à $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ pour le vecteur vitesse, à $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ pour le vecteur position et à $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ pour le vecteur normal. Par convention, la répétition d'un indice est utilisée pour représenter la sommation sur chacune des composantes de la quantité désignée. Sous cette notation, la j -ième composante des termes inertiels s'écrit sous la forme $((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u})_j = u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$. Laissant

tomber les indices temporels, nous avons donc pour la j -ième composante de la deuxième intégrale de (3.3.1)

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_\epsilon} ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u})_j \psi \, d\mathbf{x} &= \iint_{\Omega_\epsilon} \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i u_j) \psi \, d\mathbf{x} \\ &= \iint_{\Omega_\epsilon} \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i u_j \psi) \, d\mathbf{x} - \iint_{\Omega_\epsilon} u_i u_j \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\partial \Omega_\epsilon} (u_i n_i) u_j \psi \, ds - \iint_{\Omega_\epsilon} u_i u_j \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \, d\mathbf{x}, \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

L'intégrale curviligne peut maintenant être exprimée comme la somme d'intégrales le long des courbes $\partial \Omega_{\epsilon-}$ et $\partial \Omega_{\epsilon+}$

$$\int_{\partial \Omega_\epsilon} (u_i n_i) u_j \psi \, ds = \int_{\partial \Omega_{\epsilon+}} (u_i^+ n_i) u_j^+ \psi \, ds + \int_{\partial \Omega_{\epsilon-}} (u_i^- (-n_i)) u_j^- \psi \, ds, \quad j = 1, 2.$$

La continuité des champs de vitesse \mathbf{u}^{n-1} et \mathbf{u}^n permet alors d'obtenir les limites suivantes :

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial \Omega_\epsilon} (u_i^k n_i) u_j^k \psi \, ds &= \int_{\Gamma^n} [(u_i^k n_i) u_j^k] \psi \, ds = 0, \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint_{\Omega_\epsilon} u_i^k u_j^k \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \, d\mathbf{x} &= 0, \quad j = 1, 2, \quad k = n-1, n. \end{aligned}$$

Par conséquent, nous concluons que les termes inertiels sont continues à travers l'interface Γ^n

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint_{\Omega_\epsilon} ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u})^{n+\frac{1}{2}} \psi \, d\mathbf{x} = 0. \quad (3.3.3)$$

Pour évaluer les limites des expressions apparaissant au membre de droite de l'équation (3.3.1), nous reprenons les calculs qui ont été faits à la Section 2.2.1. En calquant la démarche qui a conduit à la formule (2.2.5), nous arrivons à la limite suivante pour l'intégrale des termes visqueux.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint_{\Omega_\epsilon} \frac{\nu}{2} \nabla^2 (\mathbf{u}^* + \mathbf{u}^n) \psi \, d\mathbf{x} = \int_{\Gamma^n} \left[\frac{\nu}{2} (\mathbf{u}^* + \mathbf{u}^n) \right] \psi \, ds - \int_{\Gamma^n} \left[\frac{\nu}{2} (\mathbf{u}^* + \mathbf{u}^n) \right] \psi_n \, ds. \quad (3.3.4)$$

Finalement, nous utilisons la formule (2.2.2) pour chacune des composantes de la force singulière. La dernière intégrale donne alors

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_\epsilon} \mathbf{F}^n(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= \int_{\Gamma^n} \mathbf{f}^n(s, t) \iint_{\Omega_\epsilon} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(s)) \psi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \, ds \\ &= \int_{\Gamma^n} \mathbf{f}^n(s, t) \psi(\mathbf{X}(s)) \, ds. \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

Remplaçant chacune des intégrales de l'équation (3.3.1) par leurs limites respectives (3.3.2)-(3.3.5), nous obtenons l'équation

$$\int_{\Gamma^n} \left[\frac{\nu}{2} (\mathbf{u}_n^* + \mathbf{u}_n^n) \right] \psi ds - \int_{\Gamma^n} \left[\frac{\nu}{2} (\mathbf{u}^* + \mathbf{u}^n) \right] \psi_n ds + \int_{\Gamma^n} \mathbf{f}^n(s, t) \psi(\mathbf{X}(s)) ds = 0. \quad (3.3.6)$$

La fonction test ψ étant arbitraire, nous déduisons les sauts suivants :

$$\left[\frac{\nu}{2} (\mathbf{u}^* + \mathbf{u}^n) \right] = 0, \quad (3.3.7)$$

$$\left[\frac{\nu}{2} (\mathbf{u}_n^* + \mathbf{u}_n^n) \right] = -\mathbf{f}^n. \quad (3.3.8)$$

3.3.2. Intégration de l'équation de Poisson

La procédure précédente est ensuite appliquée à l'équation elliptique (3.1.5). Multipliant celle-ci par une fonction test $\psi \in C^2$ arbitraire et intégrant l'équation résultante sur la région Ω_ϵ , nous obtenons l'identité suivante :

$$\iint_{\Omega_\epsilon} (\nabla^2 \phi^{n+1}) \psi d\mathbf{x} = \frac{1}{\Delta t} \iint_{\Omega_\epsilon} (\nabla \cdot \mathbf{u}^*) \psi d\mathbf{x}. \quad (3.3.9)$$

Nous reprenons les calculs qui ont mené à la formule (2.2.5) pour déduire la limite suivante

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint_{\Omega_\epsilon} (\nabla^2 \phi^{n+1}) \psi d\mathbf{x} = \int_{\Gamma^n} [\phi_n^{n+1}] \psi ds - \int_{\Gamma^n} [\phi^{n+1}] \psi_n ds. \quad (3.3.10)$$

Pour le membre de droite de l'équation (3.3.9), nous avons

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \iint_{\Omega_\epsilon} (\nabla \cdot \mathbf{u}^*) \psi d\mathbf{x} &= \frac{1}{\Delta t} \left(\iint_{\Omega_\epsilon} \nabla \cdot (\mathbf{u}^* \psi) d\mathbf{x} - \iint_{\Omega_\epsilon} \mathbf{u}^* \cdot \nabla \psi d\mathbf{x} \right) \\ &= \frac{1}{\Delta t} \left(\int_{\partial\Omega_\epsilon} (\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n}) \psi ds - \iint_{\Omega_\epsilon} \mathbf{u}^* \cdot \nabla \psi d\mathbf{x} \right). \end{aligned}$$

L'intégrale curviligne peut maintenant être exprimée comme la somme d'intégrales le long des courbes $\partial\Omega_{\epsilon-}$ et $\partial\Omega_{\epsilon+}$

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{\partial\Omega_\epsilon} (\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n}) \psi ds = \frac{1}{\Delta t} \left(\int_{\partial\Omega_{\epsilon+}} (\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n})^+ \psi^+ ds + \int_{\partial\Omega_{\epsilon-}} (\mathbf{u}^* \cdot (-\mathbf{n}))^- \psi^- ds \right).$$

Utilisant ce résultat conjointement avec l'hypothèse stipulant que la fonction \mathbf{u}^* est bornée sur Ω , nous obtenons la limite suivante :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \iint_{\Omega_\epsilon} (\nabla \cdot \mathbf{u}^*) \psi \, dx = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Gamma^n} [\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n}] \psi \, ds. \quad (3.3.11)$$

Remplaçant les deux intégrales de l'équation (3.3.9) par leurs limites respectives (3.3.10)-(3.3.11), nous obtenons l'équation

$$\int_{\Gamma^n} [\phi_n^{n+1}] \psi \, ds - \int_{\Gamma^n} [\phi_n^{n+1}] \psi_n \, ds = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Gamma^n} [\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n}] \psi \, ds. \quad (3.3.12)$$

La fonction test ψ étant arbitraire, nous déduisons les sauts suivants pour la fonction ϕ^{n+1} :

$$[\phi^{n+1}] = 0, \quad (3.3.13)$$

$$[\phi_n^{n+1}] = \frac{1}{\Delta t} [\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n}]. \quad (3.3.14)$$

3.3.3. Relations supplémentaires sur l'interface pour \mathbf{u}^*

Nous pouvons maintenant obtenir des relations de saut additionnelles en dérivant les sauts connus (3.3.7)-(3.3.8) le long de l'interface (voir les Sections 2.2 et 2.2.3 pour plus de détails). Les conditions de saut pour \mathbf{u}^* et \mathbf{u}^n obtenues par cette approche sont alors

$$\left[\frac{\nu}{2} (\mathbf{u}_\eta^* + \mathbf{u}_\eta^n) \right] = 0, \quad (3.3.15)$$

$$\left[\frac{\nu}{2} (\mathbf{u}_{\xi\eta}^* + \mathbf{u}_{\xi\eta}^n) \right] = -\frac{d\mathbf{f}^n}{d\eta}, \quad (3.3.16)$$

$$\left[\frac{\nu}{2} (\mathbf{u}_{\eta\eta}^* + \mathbf{u}_{\eta\eta}^n) \right] = \kappa \mathbf{f}^n. \quad (3.3.17)$$

La dernière relation d'interface pour \mathbf{u}^* et \mathbf{u}^n est obtenue en prenant le saut de l'équation approximative (3.1.1) exprimée dans le système de coordonnées locales (2.2.7). Le Laplacien étant invariant sous cette transformation, nous obtenons

$$\frac{1}{\Delta t} [\mathbf{u}^*] = \left[\frac{\nu}{2} (\mathbf{u}_{\xi\xi}^* + \mathbf{u}_{\xi\xi}^n) \right] + \left[\frac{\nu}{2} (\mathbf{u}_{\eta\eta}^* + \mathbf{u}_{\eta\eta}^n) \right].$$

Remplaçant le saut $[\frac{\nu}{2}(\mathbf{u}_{\eta\eta}^* + \mathbf{u}_{\eta\eta}^n)]$ par (3.3.17), l'expression précédente devient

$$\left[\frac{\nu}{2}(\mathbf{u}_{\xi\xi}^* + \mathbf{u}_{\xi\xi}^n)\right] = -\kappa \mathbf{f}^n + \frac{1}{\Delta t}[\mathbf{u}^*]. \quad (3.3.18)$$

3.3.4. Relations supplémentaires sur l'interface pour ϕ^{n+1}

La même stratégie est ensuite utilisée afin d'obtenir les sauts correspondants pour la fonction ϕ^{n+1} . Dérivant les équations (3.3.13) et (3.3.14) le long de l'interface, nous obtenons les relations suivantes :

$$[\phi_{\eta}^{n+1}] = 0, \quad (3.3.19)$$

$$[\phi_{\xi\eta}^{n+1}] = \frac{1}{\Delta t}[\mathbf{u}^*] \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \eta}, \quad (3.3.20)$$

$$[\phi_{\eta\eta}^{n+1}] = -\frac{\kappa}{\Delta t}[\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n}]. \quad (3.3.21)$$

L'équation elliptique (3.1.5) est ensuite exprimée dans le système de coordonnées locales (2.2.7)

$$\phi_{\xi\xi}^{n+1} + \phi_{\eta\eta}^{n+1} = \frac{1}{\Delta t}(\mathbf{u}_{\xi}^* \cdot \mathbf{n} + \mathbf{u}_{\eta}^* \cdot \boldsymbol{\tau}).$$

Finalement, nous prenons le saut de cette équation pour obtenir la dernière relation d'interface pour ϕ^{n+1} :

$$[\phi_{\xi\xi}^{n+1}] + [\phi_{\eta\eta}^{n+1}] = \frac{1}{\Delta t}([\mathbf{u}_{\xi}^* \cdot \mathbf{n}] + [\mathbf{u}_{\eta}^* \cdot \boldsymbol{\tau}]).$$

Remplaçant le saut $[\phi_{\eta\eta}^{n+1}]$ par le membre de droite de (3.3.21), l'expression précédente devient

$$[\phi_{\xi\xi}^{n+1}] = \frac{1}{\Delta t}((\kappa[\mathbf{u}^*] + [\mathbf{u}_{\xi}^*]) \cdot \mathbf{n} + [\mathbf{u}_{\eta}^*] \cdot \boldsymbol{\tau}). \quad (3.3.22)$$

3.4. ÉQUIVALENCE DES CONDITIONS DE SAUT APPROXIMATIVES

Nous démontrons maintenant qu'il est possible d'obtenir une version discrète des conditions de saut (3.2.7)-(3.2.13) et (3.2.14) à partir des sauts approximatifs dérivés à la Section 3.3.

3.4.1. Simplification des conditions de saut lorsque $[\nu] = 0$

Voyons maintenant comment les conditions de saut approximatives affichées dans le Tableau 3.3 peuvent être simplifiées lorsque la viscosité est continue. Pour ce faire, nous supposons que la fonction \mathbf{u}^n et ses dérivées partielles sont continues à travers l'interface Γ^n . La justification de cette hypothèse (voir l'Annexe B pour plus de détails) repose directement sur le schéma numérique IIM que nous présenterons à la Section 3.5.

$[\nu(\mathbf{u}^* + \mathbf{u}^n)] = 0$	$[\phi^{n+1}] = 0$
$[\nu(\mathbf{u}_\tau^* + \mathbf{u}_\tau^n)] = 0$	$[\phi_\tau^{n+1}] = 0$
$[\nu(\mathbf{u}_n^* + \mathbf{u}_n^n)] = -2\mathbf{f}^n$	$[\phi_n^{n+1}] = \frac{1}{\Delta t}[\mathbf{u}^*] \cdot \mathbf{n}$
$[\nu(\mathbf{u}_{\tau n}^* + \mathbf{u}_{\tau n}^n)] = -2\frac{\partial \mathbf{f}^n}{\partial \tau}$	$[\phi_{\tau n}^{n+1}] = \frac{1}{\Delta t}[\mathbf{u}^*] \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \tau}$
$[\nu(\mathbf{u}_{\tau\tau}^* + \mathbf{u}_{\tau\tau}^n)] = 2\kappa \mathbf{f}^n$	$[\phi_{\tau\tau}^{n+1}] = -\frac{\kappa}{\Delta t}[\mathbf{u}^*] \cdot \mathbf{n}$
$[\nu(\mathbf{u}_{nn}^* + \mathbf{u}_{nn}^n)] = 2(-\kappa \mathbf{f}^n + \frac{1}{\Delta t}[\mathbf{u}^*])$	$[\phi_{\xi\xi}^{n+1}] = \frac{1}{\Delta t}(\kappa[\mathbf{u}^*] + [\mathbf{u}_n^*]) \cdot \mathbf{n}$ $+ \frac{1}{\Delta t}[\mathbf{u}_\tau^*] \cdot \boldsymbol{\tau}$

TAB. 3.3. Tableau des conditions de saut approximatives.

Reprenant la relation (3.3.7), les propriétés des limites et la continuité de \mathbf{u}^n permettent d'écrire

$$[\nu(\mathbf{u}^* + \mathbf{u}^n)] = \nu[\mathbf{u}^*] + \nu[\mathbf{u}^n] = \nu[\mathbf{u}^*] = 0. \quad (3.4.1)$$

Nous déduisons que le champ de vitesse intermédiaire \mathbf{u}^* est continue à travers Γ^n , ce qui utilisé conjointement avec notre hypothèse permet d'obtenir les conditions de saut simplifiées apparaissant dans le Tableau 3.4.

3.4.2. Le saut de $p^{n+\frac{1}{2}}$ à travers Γ^n

Le saut de la pression (3.2.7) s'obtient facilement à partir de l'équation (3.1.7) utilisée lors de la mise à jour de la pression. Évaluant le saut de (3.1.7), nous

$[\mathbf{u}^*] = 0$	$[\phi^{n+1}] = 0$
$[\mathbf{u}_\tau^*] = 0$	$[\phi_\tau^{n+1}] = 0$
$[\mathbf{u}_n^*] = -\frac{2}{\nu} \mathbf{f}^n$	$[\phi_n^{n+1}] = 0$
$[\mathbf{u}_{\tau n}^*] = -\frac{2}{\nu} \frac{\partial \mathbf{f}^n}{\partial \tau}$	$[\phi_{\tau n}^{n+1}] = 0$
$[\mathbf{u}_{\tau\tau}^*] = \frac{2\kappa}{\nu} \mathbf{f}^n$	$[\phi_{\tau\tau}^{n+1}] = 0$
$[\mathbf{u}_{nn}^*] = -\frac{2\kappa}{\nu} \mathbf{f}^n$	$[\phi_{nn}^{n+1}] = -\frac{2}{\nu \Delta t} \mathbf{f}_n^n$

TAB. 3.4. Tableau des conditions de saut approximatives lorsque la viscosité est continue ($[\nu] = 0$).

obtenons directement

$$[p^{n+\frac{1}{2}}] = [\phi^{n+1}] - \frac{\nu \Delta t}{2} ([\phi_{\xi\xi}] + [\phi_{\eta\eta}]) = f_n^n. \quad (3.4.2)$$

3.4.3. Le saut de $p_\xi^{n+\frac{1}{2}}$ à travers Γ^n

Un peu plus de travail est nécessaire à l'obtention du saut (3.2.8) de la dérivée normale de la pression. Nous utilisons d'abord l'équation (3.1.5) pour remplacer $\nabla^2 \phi^{n+1}$ par $\frac{1}{\Delta t} (\nabla \cdot \mathbf{u}^*)$ dans l'équation (3.1.7). Puis, nous dérivons l'équation résultante par rapport aux variables x et y , ce qui donne

$$\begin{aligned} p_x^{n+\frac{1}{2}} &= \phi_x^{n+1} - \frac{\nu \Delta t}{2} (\phi_{\xi\xi x}^{n+1} + \phi_{\eta\eta x}^{n+1}) \\ &= \phi_x^{n+1} - \frac{\nu}{2} (u_{xx}^* + v_{yx}^*), \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

$$\begin{aligned} p_y^{n+\frac{1}{2}} &= \phi_y^{n+1} - \frac{\nu \Delta t}{2} (\phi_{\xi\xi y}^{n+1} + \phi_{\eta\eta y}^{n+1}) \\ &= \phi_y^{n+1} - \frac{\nu}{2} (u_{xy}^* + v_{yy}^*). \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

Multipliant la première expression par $\cos \theta$, la deuxième par $\sin \theta$ et additionnant le tout, nous obtenons

$$[p_\xi^{n+\frac{1}{2}}] = [\phi_\xi^{n+1}] - \frac{\nu}{2} (([u_{xx}^*] + [v_{yx}^*]) \cos \theta + ([u_{xy}^*] + [v_{yy}^*]) \sin \theta). \quad (3.4.5)$$

Les relations (2.2.19) sont alors utilisées conjointement avec les sauts des dérivées secondes de u^* pour écrire

$$\begin{aligned} \frac{\nu}{2}[u_{xx}^*] &= \frac{\nu}{2} ([u_{\xi\xi}^*] \cos^2 \theta - 2[u_{\xi\eta}^*] \cos \theta \sin \theta + [u_{\eta\eta}^*] \sin^2 \theta), \\ &= f_1^n \kappa (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) + 2 \frac{df_1^n}{d\eta} \cos \theta \sin \theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\nu}{2}[u_{xy}^*] &= \frac{\nu}{2} (([u_{\xi\xi}^*] - [u_{\eta\eta}^*]) \cos \theta \sin \theta + [u_{\xi\eta}^*] (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)), \\ &= -2f_1^n \kappa \cos \theta \sin \theta - \frac{df_1^n}{d\eta} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\nu}{2}[v_{xy}^*] &= \frac{\nu}{2} (([v_{\xi\xi}^*] - [v_{\eta\eta}^*]) \cos \theta \sin \theta + [v_{\xi\eta}^*] (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)), \\ &= -2f_2^n \kappa \cos \theta \sin \theta - \frac{df_2^n}{d\eta} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\nu}{2}[v_{yy}^*] &= \frac{\nu}{2} ([v_{\xi\xi}^*] \sin^2 \theta + 2[v_{\xi\eta}^*] \cos \theta \sin \theta + [v_{\eta\eta}^*] \cos^2 \theta), \\ &= f_2^n \kappa (-\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) - 2 \frac{df_2^n}{d\eta} \cos \theta \sin \theta. \end{aligned}$$

Quelques manipulations mènent à

$$\begin{aligned} -\frac{\nu}{2} ([u_{xx}^*] + [v_{yx}^*]) \cos \theta &= \left(f_1^n \kappa + \frac{df_2^n}{d\eta} \right) (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \cos \theta \\ &\quad + 2 \left(-\frac{df_1^n}{d\eta} + f_2^n \kappa \right) \cos^2 \theta \sin \theta, \\ -\frac{\nu}{2} ([u_{xy}^*] + [v_{yy}^*]) \sin \theta &= \left(\frac{df_1^n}{d\eta} - f_2^n \kappa \right) (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \sin \theta \\ &\quad + 2 \left(f_1^n \kappa + \frac{df_2^n}{d\eta} \right) \cos \theta \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Nous remplaçons enfin ces deux expressions dans l'équation (3.4.5) pour obtenir

$$\begin{aligned} [p_{\xi}^{n+\frac{1}{2}}] &= (f_1^n \kappa \cos \theta + f_2^n \kappa \sin \theta) + \left(-\frac{df_1^n}{d\eta} \sin \theta + \frac{df_2^n}{d\eta} \cos \theta \right), \\ &= \mathbf{f}^n \cdot \kappa \mathbf{n} + \frac{d\mathbf{f}^n}{d\eta} \cdot \boldsymbol{\tau} = \frac{d}{d\eta} (\mathbf{f}^n \cdot \boldsymbol{\tau}) = \frac{df_{\boldsymbol{\tau}}^n}{d\eta}, \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

où nous avons utilisé le fait que $d\boldsymbol{\tau}/d\eta = \kappa \mathbf{n}$.

3.4.4. Le saut de \mathbf{u}^{n+1} à travers Γ^n

Pour obtenir le saut (3.2.9) du champ \mathbf{u}^{n+1} sur l'interface Γ^n , nous utilisons les relations (2.2.19) pour exprimer chacune des composantes de l'équation (3.1.3) dans le système de coordonnées (2.2.7). Nous évaluons ensuite le saut des expressions obtenues en $(0, 0)$, ce qui donne

$$[\mathbf{u}^{n+1}] = [\mathbf{u}^*] - \Delta t ([\phi_\xi^{n+1}] \cos \theta - [\phi_\eta^{n+1}] \sin \theta) = 0, \quad (3.4.7)$$

$$[\mathbf{v}^{n+1}] = [\mathbf{v}^*] - \Delta t ([\phi_\xi^{n+1}] \sin \theta + [\phi_\eta^{n+1}] \cos \theta) = 0. \quad (3.4.8)$$

Nous déduisons que le champ de vitesse discret \mathbf{u}^{n+1} est continue à travers la membrane Γ^n , c.a.d que

$$[\mathbf{u}^{n+1}] = 0. \quad (3.4.9)$$

3.4.5. Le saut de \mathbf{u}_η^{n+1} à travers Γ^n

Nous dérivons d'abord le saut (3.4.9) dans la direction tangentielle pour obtenir

$$\frac{d}{d\eta} [\mathbf{u}^{n+1}] = [\mathbf{u}_\eta^{n+1}] + \chi' [\mathbf{u}_\xi^{n+1}] = 0, \quad (3.4.10)$$

ce qui veut dire qu'en $(0, 0)$, nous avons

$$[\mathbf{u}_\eta^{n+1}] = 0. \quad (3.4.11)$$

3.4.6. Le saut de \mathbf{u}_ξ^{n+1} à travers Γ^n

La condition de saut (3.2.10) de la dérivée normale du champ de vitesse \mathbf{u}^{n+1} est obtenue en dérivant chacune des composantes de l'équation (3.1.3) par rapport aux variables x et y

$$[\mathbf{u}_x^{n+1}] = [\mathbf{u}_x^* - \Delta t \phi_{xx}^{n+1}], \quad [\mathbf{u}_y^{n+1}] = [\mathbf{u}_y^* - \Delta t \phi_{xy}^{n+1}], \quad (3.4.12)$$

$$[\mathbf{v}_x^{n+1}] = [\mathbf{v}_x^* - \Delta t \phi_{yx}^{n+1}], \quad [\mathbf{v}_y^{n+1}] = [\mathbf{v}_y^* - \Delta t \phi_{yy}^{n+1}]. \quad (3.4.13)$$

Puis, nous exprimons ces expressions dans le système de coordonnées locales (2.2.7) et évaluons le saut des expressions obtenues en $(0, 0)$

$$\begin{aligned}
 [u_\xi^{n+1}] &= [u_x^{n+1}] \cos \theta + [u_y^{n+1}] \sin \theta, \\
 &= [u_\xi^*] - \Delta t \left([\phi_{xx}^{n+1}] \cos \theta + [\phi_{xy}^{n+1}] \sin \theta \right), \\
 &= [u_\xi^*] - \Delta t [\phi_{\xi\xi}^{n+1}] \cos \theta,
 \end{aligned} \tag{3.4.14}$$

$$\begin{aligned}
 [v_\xi^{n+1}] &= [v_x^{n+1}] \cos \theta + [v_y^{n+1}] \sin \theta, \\
 &= [v_\xi^*] - \Delta t \left([\phi_{xy}^{n+1}] \cos \theta + [\phi_{yy}^{n+1}] \sin \theta \right), \\
 &= [v_\xi^*] - \Delta t [\phi_{\xi\xi}^{n+1}] \sin \theta.
 \end{aligned} \tag{3.4.15}$$

Remplaçant les sauts $[u^*]$ et $[\phi_{\xi\xi}^{n+1}]$ par leurs valeurs respectives et utilisant les définitions (3.2.1)-(3.2.2) des composantes tangentielle et normale de la densité de force f^n , les expressions précédentes peuvent alors s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned}
 [u_\xi^{n+1}] &= \frac{2}{\nu} (-f_1^n + f_\xi^n \cos \theta), \\
 &= \frac{2}{\nu} (-f_1^n + (f_1^n \cos \theta + f_2^n \sin \theta) \cos \theta), \\
 &= \frac{2}{\nu} (f_1^n (-1 + \cos^2 \theta) + f_2^n \cos \theta \sin \theta), \\
 &= \frac{2}{\nu} (-f_1^n \sin \theta + f_2^n \cos \theta) \sin \theta, \\
 &= \frac{2}{\nu} f_\tau^n \sin \theta, \\
 [v_\xi^{n+1}] &= \frac{2}{\nu} (-f_2^n + f_\xi^n \sin \theta), \\
 &= \frac{2}{\nu} (-f_2^n + (f_1^n \cos \theta + f_2^n \sin \theta) \sin \theta), \\
 &= \frac{2}{\nu} (f_1^n \cos \theta \sin \theta + f_2^n \sin^2 \theta (-1 + \sin^2 \theta)), \\
 &= \frac{2}{\nu} (-f_1^n \sin \theta + f_2^n \cos \theta) \cos \theta, \\
 &= -\frac{2}{\nu} f_\tau^n \cos \theta.
 \end{aligned}$$

Sous forme vectorielle, nous avons donc

$$[u_\xi^{n+1}] = -\frac{2}{\nu} f_\tau^n \tau. \tag{3.4.16}$$

3.4.7. Le saut de $u_{\eta\xi}^{n+1}$ à travers Γ^n

Nous dérivons le saut $[u_{\xi}^{n+1}] = -\frac{2}{\nu} f_{\tau}^n \tau$ dans la direction tangentielle pour obtenir

$$\frac{d}{d\eta} [u_{\xi}^{n+1}] = [u_{\eta\xi}^{n+1}] + \chi' [u_{\xi\xi}] = -\frac{2}{\nu} \frac{d}{d\eta} (f_{\tau}^n \tau), \quad (3.4.17)$$

ce qui implique qu'en $(0, 0)$, nous avons

$$[u_{\eta\xi}^{n+1}] = -\frac{2}{\nu} \frac{d}{d\eta} (f_{\tau}^n \tau) = -\frac{2}{\nu} \left(\frac{df_{\tau}^n}{d\eta} \tau + \kappa f_{\tau}^n n \right). \quad (3.4.18)$$

3.4.8. Le saut de $u_{\eta\eta}^{n+1}$ à travers Γ^n

De la continuité du champ de vitesse u^{n+1} , nous avons $[u^{n+1}] = 0$ donc

$$\frac{d^2}{d\eta^2} [u^{n+1}] = [u_{\eta\eta}^{n+1}] + \kappa [u_{\xi}^{n+1}] = 0, \quad (3.4.19)$$

ce qui veut dire qu'en $(0, 0)$, la condition de saut s'écrit

$$[u_{\eta\eta}^{n+1}] = \frac{2\kappa}{\nu} f_{\tau}^n \tau. \quad (3.4.20)$$

3.4.9. Le saut de $u_{\xi\xi}^{n+1}$ à travers Γ^n

Notre point de départ pour la dérivation de ce saut est l'équation de mise à jour du champ de vitesse u^{n+1} :

$$u^{n+1} = u^* - \Delta t \nabla \phi^{n+1}.$$

Chaque composante de cette équation vectorielle est dérivée deux fois par rapport à ξ . Le saut de ce résultat est alors évalué en $(0, 0)$ afin d'obtenir le système suivant :

$$[u_{\xi\xi}^{n+1}] = [u_{\xi\xi}^*] - \Delta t [\phi_{\xi\xi\xi}^{n+1}], \quad (3.4.21)$$

$$[v_{\xi\xi}^{n+1}] = [v_{\xi\xi}^*] - \Delta t [\phi_{\xi\xi\eta}^{n+1}]. \quad (3.4.22)$$

Utilisant le fait que $[p_\xi^{n+\frac{1}{2}}] = \frac{df_\tau^n}{d\eta}$ et $[p_\eta^{n+\frac{1}{2}}] = \frac{df_n^n}{d\eta}$ en $(0, 0)$, les équations (3.4.3)-(3.4.4) permettent de déduire que

$$\begin{aligned} [p_x^{n+\frac{1}{2}}] &= [p_\xi^{n+\frac{1}{2}}] \cos \theta - [p_\eta^{n+\frac{1}{2}}] \sin \theta \\ &= \frac{df_\tau^n}{d\eta} \cos \theta - \frac{df_n^n}{d\eta} \sin \theta = -\frac{\nu \Delta t}{2} ([\phi_{\xi\xi x}^{n+1}] + [\phi_{\eta\eta x}^{n+1}]), \end{aligned} \quad (3.4.23)$$

et que

$$\begin{aligned} [p_y^{n+\frac{1}{2}}] &= [p_\xi^{n+\frac{1}{2}}] \sin \theta + [p_\eta^{n+\frac{1}{2}}] \cos \theta \\ &= \frac{df_\tau^n}{d\eta} \sin \theta + \frac{df_n^n}{d\eta} \cos \theta = -\frac{\nu \Delta t}{2} ([\phi_{\xi\xi y}^{n+1}] + [\phi_{\eta\eta y}^{n+1}]). \end{aligned} \quad (3.4.24)$$

Ces deux relations vont ensuite servir au calcul des quantités $[\phi_{\xi\xi x}^{n+1}]$ et $[\phi_{\xi\xi y}^{n+1}]$, mais nous devons d'abord obtenir $[\phi_{\eta\eta x}^{n+1}]$ et $[\phi_{\eta\eta y}^{n+1}]$. Du Tableau 3.4, nous savons que $[\phi_x^{n+1}] = [\phi_y^{n+1}] = 0$ partout le long de Γ^n . Donc,

$$\frac{d^2}{d\eta^2} [\phi_x^{n+1}] = [\phi_{\eta\eta x}^{n+1}] + \kappa [\phi_{x\xi}^{n+1}] = 0,$$

et par conséquent,

$$\begin{aligned} [\phi_{\eta\eta x}^{n+1}] &= -\kappa [\phi_{x\xi}^{n+1}] = -\kappa ([\phi_{\xi\xi}^{n+1}] \cos \theta - [\phi_{\xi\eta}^{n+1}] \sin \theta) \\ &= -\kappa [\phi_{\xi\xi}^{n+1}] \cos \theta. \end{aligned} \quad (3.4.25)$$

De façon similaire,

$$\frac{d^2}{d\eta^2} [\phi_y^{n+1}] = [\phi_{\eta\eta y}^{n+1}] + \kappa [\phi_{y\xi}^{n+1}] = 0,$$

et par conséquent,

$$\begin{aligned} [\phi_{\eta\eta y}^{n+1}] &= -\kappa [\phi_{y\xi}^{n+1}] = -\kappa ([\phi_{\xi\xi}^{n+1}] \sin \theta + [\phi_{\xi\eta}^{n+1}] \cos \theta) \\ &= -\kappa [\phi_{\xi\xi}^{n+1}] \sin \theta, \end{aligned} \quad (3.4.26)$$

où nous avons utilisé le résultat $[\phi_{\xi\eta}^{n+1}] = 0$ du Tableau 3.4.

Nous savons aussi que

$$[\phi_{\xi\xi}^{n+1}] = -\frac{2}{\nu \Delta t} f_n^n,$$

de sorte qu'en substituant (3.4.25) et (3.4.26) dans (3.4.23) et (3.4.24) respectivement, nous pouvons obtenir $[\phi_{\xi\xi x}^{n+1}]$ et $[\phi_{\xi\xi y}^{n+1}]$. Ceci permet de déduire que

$$[u_{\xi\xi}^{n+1}] = \frac{2\kappa}{\nu} f_{\tau}^n \sin \theta + \frac{2}{\nu} \left(\frac{df_{\tau}^n}{d\eta} \cos \theta - \frac{df_n^n}{d\eta} \sin \theta \right), \quad (3.4.27)$$

$$[v_{\xi\xi}^{n+1}] = \frac{2\kappa}{\nu} f_{\tau}^n \cos \theta + \frac{2}{\nu} \left(\frac{df_{\tau}^n}{d\eta} \sin \theta + \frac{df_n^n}{d\eta} \cos \theta \right). \quad (3.4.28)$$

C'est à dire, en forme vectorielle,

$$\begin{aligned} [\mathbf{u}_{\xi\xi}^{n+1}] &= -\frac{2\kappa}{\nu} f_{\tau}^n \boldsymbol{\tau} + \frac{2}{\nu} \left(\frac{df_{\tau}^n}{d\eta} \mathbf{n} + \frac{df_n^n}{d\eta} \boldsymbol{\tau} \right) \\ &= \frac{2}{\nu} \left(\frac{d}{d\eta} (f_{\tau}^n \mathbf{n}) + \frac{df_n^n}{d\eta} \boldsymbol{\tau} \right), \end{aligned} \quad (3.4.29)$$

où nous avons utilisé le résultat

$$\frac{d\mathbf{n}}{d\eta} = -\kappa \boldsymbol{\tau}.$$

3.4.10. Remarques

Nous constatons d'abord que les sauts approximatifs (3.4.2) et (3.4.6) pour la pression discrète $p^{n+\frac{1}{2}}$ correspondent bien aux conditions de saut (3.2.7)-(3.2.8), dérivées à partir des équations exactes. D'autre part, pour le champ de vitesse discret \mathbf{u}^{n+1} , les membres de droite de (3.4.16), (3.4.18), (3.4.20) et de (3.4.29) sont tous le double du membre de droite des équations correspondantes (3.2.10), (3.2.12), (3.2.13) et (3.2.14). Ceci est une conséquence de notre hypothèse voulant que \mathbf{u}^n et toutes ses dérivées soient continues à travers Γ^n (voir l'Annexe B) et du fait que $\frac{1}{2}(\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n+1})$ est une approximation numérique de la solution \mathbf{U} , évaluée au temps $t^{n+\frac{1}{2}} = (n + \frac{1}{2})\Delta t$.

Ainsi pour calculer l'ordre de convergence de la vitesse numérique vers la vitesse exacte au temps T , il faut utiliser la formule

$$\text{Ordre} = \frac{\log(\|E_N(T)\|_{\infty} / \|E_{2N}(T)\|_{\infty})}{\log 2}, \quad (3.4.30)$$

où l'erreur E_N est définie sur un maillage de $N \times N$ nœuds par

$$E_N(t^{n+\frac{1}{2}}) := \mathbf{U}_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{i,j}^n + \mathbf{u}_{i,j}^{n+1}), \quad (3.4.31)$$

avec $U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}$, la solution de référence évaluée au temps $t^{n+\frac{1}{2}}$ et \mathbf{u}^n et \mathbf{u}^{n+1} , les solutions numériques évaluées au temps t^n et t^{n+1} , respectivement.

3.5. MÉTHODE IIM POUR LES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES

Nous sommes maintenant en mesure de présenter notre version de la mise en œuvre de la méthode IIM pour résoudre le système d'équations (1.2.1)-(1.2.4).

3.5.1. Problèmes d'Helmholtz pour le champ intermédiaire \mathbf{u}^*

Premièrement, nous utilisons les champs de vitesse connus \mathbf{u}^{n-1} et \mathbf{u}^n pour évaluer la fonction source $\mathbf{G}_{i,j}^n$ aux nœuds intérieurs. Celle-ci est définie comme suit :

$$\mathbf{G}_{i,j}^n = \mathbf{u}_{i,j}^n + \lambda \nabla_h^2 \mathbf{u}_{i,j}^n - \Delta t ((\mathbf{u} \cdot \nabla_h) \mathbf{u})^{n+\frac{1}{2}}, \quad \text{où } \lambda = \frac{\nu \Delta t}{2}. \quad (3.5.1)$$

Le schéma (3.1.10) prend alors la forme

$$\mathbf{u}_{i,j}^* - \lambda \nabla_h^2 \mathbf{u}_{i,j}^* = \mathbf{G}_{i,j}^n + \Delta t \mathbf{F}_{i,j}^n. \quad (3.5.2)$$

L'arsenal développé au Chapitre 2 sert ensuite à l'élimination de la force singulière \mathbf{F}^n . Comme auparavant, ceci est effectué par l'ajout de termes de correction \mathbf{C}^* qui sont évalués à partir du Lemme 2.3.1 et des conditions de saut du champ intermédiaire \mathbf{u}^* . Les équations à résoudre pour déterminer \mathbf{u}^* s'écrivent alors sous la forme

$$\mathbf{u}_{i,j}^* - \lambda \nabla_h^2 \mathbf{u}_{i,j}^* = \mathbf{G}_{i,j}^n + \mathbf{C}_{i,j}^*, \quad (3.5.3)$$

avec $i, j = 1, 2, \dots, N-1$. Les conditions frontières sont de type Dirichlet :

$$(\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n})|_{\partial\Omega} = (\mathbf{u}_m \cdot \mathbf{n})|_{\partial\Omega}, \quad (3.5.4)$$

$$(\mathbf{u}^* \cdot \boldsymbol{\tau})|_{\partial\Omega} = \left(\mathbf{u}_m + \Delta t \nabla_h \tilde{\phi}^{n+1} \right) |_{\partial\Omega} \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad (3.5.5)$$

où nous utilisons $\tilde{\phi}^{n+1} = \phi^n$ pour obtenir une approximation du gradient $\nabla_h \phi^{n+1}$ sur la frontière. Ces deux problèmes d'Helmholtz sont résolus avec les outils présentés au chapitre précédent.

3.5.1.1. Remarques concernant l'évaluation de G^n

À la Section 3.4.1, nous avons supposé que la fonction u^n et ses dérivées partielles étaient continues à travers l'interface Γ^n . Le raisonnement utilisé pour justifier cette hypothèse (voir l'Annexe B) peut aussi s'appliquer à la fonction u^{n-1} et ses dérivées partielles. Cette ligne de pensée nous a d'abord laissé croire que les fonctions u^n et u^{n-1} étaient lisses partout sur le domaine Ω , mais en fait il ne faut pas être dupe. La subtilité provient du fait que les irrégularités des fonctions u^n et u^{n-1} ne sont pas à travers l'interface Γ^n , mais plutôt à travers les interfaces Γ^{n-1} et Γ^{n-2} , respectivement. Ainsi, pour vraiment être consistant lors de l'évaluation de la fonction source G^n , nous devrions ajouter des termes de correction C^n et C^{n-1} pour tenir compte des irrégularités des fonctions u^n et u^{n-1} , respectivement. Notons que ces modifications ne sont pas nécessaires lorsque la force singulière agit purement dans la direction normale à l'interface (voir les Sections 3.4.4 à 3.4.9 pour les conditions de saut approximatives de u^{n+1} à travers Γ^n).

3.5.2. Problème de Poisson pour l'approximation de la pression ϕ^{n+1}

Nous avons vu à la Section 3.3 que les irrégularités du champ intermédiaire u^* , causées par la présence de la force singulière F^n dans l'équation (3.1.1), sont transmises à l'approximation de la pression ϕ^{n+1} par la quantité $\nabla \cdot u^*$ apparaissant au membre de droite de l'équation (3.1.5). Nous devons donc être vigilant lors de la discrétisation d'équations qui contiennent des opérateurs différentiels agissant sur ϕ^{n+1} . L'utilisation du schéma centré (2.3.1) pour discrétiser le gradient ϕ^{n+1} aux nœuds intérieurs permet d'obtenir les approximations suivantes pour chacune des composantes de l'équation (3.1.3) :

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^* - \Delta t \left(\frac{\phi_{i+1,j}^{n+1} - \phi_{i-1,j}^{n+1}}{2h} + B_{i,j}^1 \right), \quad (3.5.6)$$

$$v_{i,j}^{n+1} = v_{i,j}^* - \Delta t \left(\frac{\phi_{i,j+1}^{n+1} - \phi_{i,j-1}^{n+1}}{2h} + B_{i,j}^2 \right), \quad (3.5.7)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, N - 1,$$

où les termes de correction $B_{i,j}^1$ et $B_{i,j}^2$ sont évalués à partir des conditions de saut approximatives pour ϕ^{n+1} . Les expressions précédentes sont ensuite substituées dans l'équation de la divergence discrète du champ de vitesse \mathbf{u}^{n+1} :

$$(\nabla_h \cdot \mathbf{u}^{n+1})_{i,j} = \frac{u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n+1}}{2h} + \frac{v_{i,j+1}^{n+1} - v_{i,j-1}^{n+1}}{2h} + C_{i,j}^{n+1} = 0, \quad (3.5.8)$$

où $C_{i,j}^{n+1}$ sont les termes de correction que l'on doit ajouter pour tenir compte des irrégularités de \mathbf{u}^{n+1} à travers Γ^n . Notons que ceux-ci s'annulent lorsque la densité de force élastique agit purement dans la direction normale ($f_\tau = 0$).

Suite à cette substitution, l'équation à résoudre pour déterminer l'approximation de la pression ϕ^{n+1} s'écrit

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_h^2 \phi_{i,j}^{n+1} = & \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{u_{i+1,j}^* - u_{i-1,j}^*}{2h} + \frac{v_{i,j+1}^* - v_{i,j-1}^*}{2h} \right) \\ & + \left(\frac{B_{i+1,j}^1 - B_{i-1,j}^1}{2h} + \frac{B_{i,j+1}^2 - B_{i,j-1}^2}{2h} \right) + C_{i,j}^{n+1}, \\ & i, j = 1, 2, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (3.5.9)$$

avec les conditions frontières de type Neumann homogènes suivantes :

$$\frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial n} = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (3.5.10)$$

3.5.2.1. Couplage des systèmes sur la frontière $\partial\Omega$

L'utilisation du stencil à 9-points $\tilde{\nabla}_h^2$ (seulement 5 valeurs non-nulles) dans le schéma (3.5.9) fait en sorte que nous résolvons 4 systèmes découplés au lieu d'un seul. Afin de mieux visualiser ce découplage, nous réferrons le lecteur au graphique de la Figure 3.2, où les symboles "carré", "cercle", "diamant" et "croix" sont associés aux nœuds cartésiens appartenant à chaque système. Nous remarquons que la résolution du système "carré" est indépendante des nœuds cartésiens associés aux autres symboles ; il en va de même pour les systèmes "cercle", "diamant" et "croix". Nous devons alors trouver un moyen de coupler ces systèmes afin d'obtenir une solution pour ϕ^{n+1} sur tout le domaine Ω .

La stratégie que nous proposons utilise l'implémentation de la condition frontière (3.5.10) pour coupler les systèmes sur la frontière $\partial\Omega$. En effet, l'utilisation

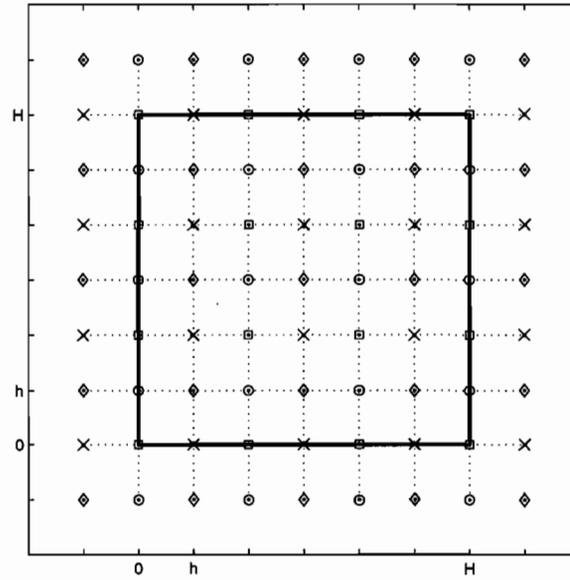


FIG. 3.2. Diagramme illustrant les 4 systèmes découplés pour le problème de Poisson (3.5.9).

d'un schéma à 3-points pour discrétiser la dérivée normale de ϕ^{n+1} sur la frontière permet d'exprimer les nœuds frontaliers comme une combinaison linéaire des nœuds intérieurs situés à une distance h et $2h$.

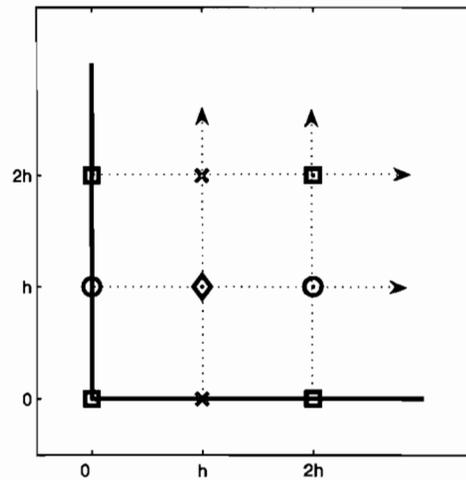


FIG. 3.3. Diagramme illustrant le couplage utilisant une discrétisation à 3-points de $\frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial n}$ sur la frontière.

Par exemple sur la frontière $x = 0$, nous avons l'approximation suivante :

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{0,j}^{n+1} = \frac{-3\phi_{0,j}^{n+1} + 4\phi_{1,j}^{n+1} - \phi_{2,j}^{n+1}}{2h} + O(h^2) = 0,$$

d'où

$$\phi_{0,j}^{n+1} = \frac{1}{3}(4\phi_{1,j}^{n+1} - \phi_{2,j}^{n+1}) + O(h^3). \quad (3.5.11)$$

Ainsi l'évaluation du schéma (3.5.9) aux nœuds situés en $x = 2h$ permet d'effectuer le couplage "carré-croix" et "cercle-diamant". Une version semblable au schéma (3.5.11) est ensuite utilisée pour discrétiser la dérivée normale de ϕ^{n+1} sur les frontières $y = 0$ et $y = H$, couplant ainsi les systèmes "croix-diamant" et "carré-cercle".

3.5.2.2. Les nœuds fantômes

L'évaluation du schéma à 9-points aux nœuds situés à une distance h de la frontière fait intervenir des nœuds situés à l'extérieur du domaine Ω (voir la Figure 3.2 pour une illustration). Par exemple, en $x = h$, nous avons

$$\tilde{\nabla}_h^2 \phi_{1,j}^{n+1} = \frac{\phi_{-1,j}^{n+1} + \phi_{3,j}^{n+1} + \phi_{1,j+2}^{n+1} + \phi_{1,j-2}^{n+1} - 4\phi_{1,j}^{n+1}}{4h^2},$$

où $\phi_{-1,j}^{n+1}$ représente l'évaluation de ϕ^{n+1} au point $(-h, jh)$. Une discrétisation centrée de $\frac{\partial\phi}{\partial x}^{n+1}$ sur la frontière $x = 0$ permet alors d'écrire $\phi_{-1,j}^{n+1}$ en fonction des valeurs intérieures

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{0,j}^{n+1} = \frac{\phi_{1,j}^{n+1} - \phi_{-1,j}^{n+1}}{2h} + O(h^2) = 0,$$

d'où

$$\phi_{-1,j}^{n+1} = \phi_{1,j}^{n+1} + O(h^3). \quad (3.5.12)$$

3.5.2.3. Singularité du système d'équation

Précisons que la matrice de discrétisation associée à ce système d'équation est singulière. Ceci reflète le fait que la solution du système (3.1.5)-(3.1.6) n'est déterminée qu'à une constante près. En pratique, la matrice de discrétisation est augmentée (ajout d'une ligne supplémentaire à la matrice de discrétisation) pour satisfaire une contrainte additionnelle qui fixe cette constante arbitraire ($\phi^{n+1} = 0$) au milieu du domaine.

3.5.3. Mise à jour de la pression $p^{n+\frac{1}{2}}$

En dernier lieu, nous modifions la formule de mise à jour de la pression (3.1.16) pour tenir compte des irrégularités de \mathbf{u}^* . Nous obtenons alors

$$p_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = \phi_{i,j}^{n+1} - \frac{\nu}{2} \left(\frac{u_{i+1,j}^* - u_{i-1,j}^*}{2h} + D_{i,j}^1 + \frac{v_{i,j+1}^* - v_{i,j-1}^*}{2h} + D_{i,j}^2 \right),$$

$$i, j = 1, 2, \dots, N-1, \quad (3.5.13)$$

où les termes de correction $D_{i,j}^1$ et $D_{i,j}^2$ sont évalués à partir des conditions de saut de \mathbf{u}^* . Ceux-ci prennent des valeurs non-nulles qu'aux nœuds irréguliers situés près de l'interface. Pour le moment, la pression $p^{n+\frac{1}{2}}$ ne peut être déterminée qu'à l'intérieur du domaine Ω . Voyons comment procéder pour déterminer celle-ci sur la frontière $\partial\Omega$.

3.5.3.1. Schéma d'extrapolation sur la frontière

Près de la frontière $\partial\Omega$, les schémas centrés aux différences finies ne peuvent pas être utilisés, puisqu'ils nécessitent de l'information provenant de l'extérieur du domaine. Ainsi, les valeurs de la quantité $(\nabla_h \cdot \mathbf{u}^*)|_{\partial\Omega}$, nécessaires à l'évaluation de $p^{n+\frac{1}{2}}$ sur la frontière, sont obtenues à partir d'un schéma d'extrapolation qui fait intervenir les trois premières valeurs intérieures. Par exemple, nous avons l'approximation suivante en $x = 0$:

$$(\nabla_h \cdot \mathbf{u}^*)_{0,j} = 3(\nabla_h \cdot \mathbf{u}^*)_{1,j} - 3(\nabla_h \cdot \mathbf{u}^*)_{2,j} + (\nabla_h \cdot \mathbf{u}^*)_{3,j},$$

$$j = 1, 2, \dots, N-1.$$

3.5.4. Évolution de l'interface Γ^n

Une fois que le champ de vitesse \mathbf{u}^{n+1} est connu sur tout le domaine Ω , nous devons déplacer les marqueurs lagrangiens (dont les vecteurs position sont donnés par \mathbf{X}_k^n) afin d'obtenir la nouvelle position de l'interface $\Gamma(t)$ au temps t^{n+1} . Pour ce faire, nous utilisons le schéma d'Euler-avant (1.4.3) présenté à la Section 1.4.2. La seule distinction notable pour la méthode IIM provient de la manière d'interpoler la vitesse \mathbf{u}^{n+1} aux points lagrangiens \mathbf{X}_k^n dans l'équation (1.4.4). Au lieu d'utiliser une fonction δ -discrète, nous utilisons l'interpolation bilinéaire pour obtenir l'approximation $\mathbf{u}_k^{n+1} \approx \mathbf{u}^{n+1}(\mathbf{X}_k^n)$.

REMARQUES :

- Notons qu'à cause des irrégularités des dérivées partielles du champ de vitesse sur Γ^n , l'approximation \mathbf{u}_k^{n+1} est généralement seulement d'ordre h . Ito et Li [11] ont démontré qu'il était possible d'obtenir une approximation de second ordre lorsque des termes de correction, évalués à partir des sauts de \mathbf{u}^{n+1} , sont incorporés aux formules d'interpolation bilinéaire.
- Soulignons aussi que le schéma d'Euler-avant (1.4.3) est seulement de premier ordre en temps. Afin d'obtenir une méthode de second ordre, il est possible d'utiliser la mise à jour implicite suivante :

$$\mathbf{X}^{n+1} = \mathbf{X}^n + \frac{1}{2} \Delta t (\mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{u}^n) . \quad (3.5.14)$$

- D'autre part, un critère restrictif sur le pas de temps Δt doit être respecté pour garantir la stabilité du schéma d'Euler-avant (1.4.3). Afin de lever cette contrainte, il est possible d'utiliser le schéma (3.5.14) pour obtenir une méthode IIM implicite plus stable (voir [16],[20] pour les détails de la mise en œuvre d'une telle méthode). Le prix à payer pour ces modifications est une augmentation considérable du temps de calcul.

Tous les résultats présentés dans ce mémoire ont été obtenus avec le schéma d'Euler-avant (1.4.3). Bien que nous ayons aussi fait des simulations utilisant le schéma implicite (3.5.14) lors de la mise à jour de la position des marqueurs lagrangiens, cette stratégie n'a pas éliminé les problèmes d'instabilités rencontrés

lors de la résolution du problème instationnaire par la méthode IIM (voir la Section 3.6.7.1).

3.5.5. Méthode itérative pour démarrer les calculs

Dans l'algorithme que nous venons de présenter, l'extrapolation dans le temps est utilisé lors de l'évaluation de l'approximation (3.1.9) des termes convectifs ainsi que dans le calcul de la composante tangentielle des conditions frontières (3.1.2). Au premier pas de temps, nous ne pouvons pas appliquer l'algorithme tel que présenté, puisque certaines informations ne sont pas encore disponibles. Nous utilisons alors le schéma itératif suggéré par Brown [3].

Pour $k = 1, 2, \dots, M$

- Étape 1 : Déterminer le champ intermédiaire $\mathbf{u}^{*,k}$ satisfaisant l'équation

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{u}^{*,k} - \mathbf{u}^0) + ((\mathbf{u} \cdot \nabla_h) \mathbf{u})^{\frac{1}{2},k} &= \frac{\nu}{2} \nabla_h^2 (\mathbf{u}^{*,k} - \mathbf{u}^0) + \mathbf{C}^0, \\ (\mathbf{u}^{*,k} \cdot \mathbf{n})|_{\partial\Omega} &= \mathbf{u}_m \cdot \mathbf{n}, \\ (\mathbf{u}^{*,k} \cdot \boldsymbol{\tau})|_{\partial\Omega} &= (\mathbf{u}_m + \Delta t \nabla_h \phi^{1,k}|_{\partial\Omega}) \cdot \boldsymbol{\tau}, \end{aligned}$$

où nous utilisons la valeur initiale $\phi^{1,1} = 0$ pour déterminer les conditions frontières lors de la première itération. L'approximation $((\mathbf{u} \cdot \nabla_h) \mathbf{u})^{\frac{1}{2},k}$ est obtenue à partir de la moyenne du schéma évalué à partir de \mathbf{u}^0 et $\mathbf{u}^{1,k}$.

- Étape 2 : Résoudre le problème elliptique pour $\phi^{1,k}$

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_h^2 \phi^{1,k} &= \frac{1}{\Delta t} (\nabla_h \cdot \mathbf{u}^{*,k}), \\ \frac{\partial \phi^{1,k}}{\partial n} &= 0, \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

- Étape 3 : Mise à jour du champ de vitesse itéré $\mathbf{u}^{1,k}$

$$\mathbf{u}^{1,k} = \mathbf{u}^{*,k} - \Delta t \nabla_h \phi^{1,k}.$$

End.

Lorsque $n = 0$, ce procédé itératif est répété $M = 5$ fois afin de déterminer les quantités $\mathbf{u}^1 = \mathbf{u}^{1,5}$ et $\phi^1 = \phi^{1,5}$. Nous pouvons ensuite appliquer l'algorithme général pour les pas de temps consécutifs $n = 1, 2, \dots, n_{max}$.

3.6. CAS TEST : PROBLÈME D'UNE MEMBRANE ÉLASTIQUE IMMERGÉE DANS UN FLUIDE VISQUEUX

Le problème d'interface choisi pour tester notre implémentation de la méthode IIM est celui d'une membrane élastique immergée ; l'analogie bidimensionnel du ballon élastique immergé dans un fluide visqueux dont les propriétés physiques sont les mêmes à l'intérieur et à l'extérieur. Ce problème a d'abord été abordé par Tu et Peskin [20], où l'emphase a été portée sur l'étude de la stabilité de la méthode IB lorsqu'un algorithme explicite versus un algorithme implicite est utilisé pour déplacer l'interface.

Par la suite, Leveque et Li [18] ont utilisé ce modèle pour valider leur version de la méthode IIM pour les équations de Stokes. Bien que leur implémentation utilise une fonction δ -discrète pour transmettre la composante tangentielle \mathbf{f}_τ de la force élastique lors de la résolution de l'équation approximative du mouvement, leur discrétisation de l'équation de Poisson incorpore des conditions de saut pour la pression, ce qui leur permet d'obtenir des solutions beaucoup plus précises qu'avec la version originale de la méthode IB.

Enfin, la solution du problème stationnaire (interface fixe) a été présentée par Li et Lai [15], où les équations complètes de Navier-Stokes ont été résolues. Leur implémentation de la méthode IIM élimine tout recours aux fonctions δ -discrètes, ce qui leur a permis d'extraire un ordre de convergence quadratique pour le champ de vitesse \mathbf{u}^{n+1} ainsi que pour la pression $p^{n+\frac{1}{2}}$.

3.6.1. Description du problème

Dans l'expérience envisagée, nous considérons un système fermé où seules les forces élastiques emmagasinées dans la membrane, dues à l'étirement de celle-ci par rapport à sa configuration de repos (voir la Section 3.6.1.1), agissent sur le fluide. Le domaine de computation est le carré $\Omega = [0, 2] \times [0, 2]$ et la frontière $\partial\Omega$

est constituée de quatre murs solides. Le Tableau 3.5 introduit la notation que nous utiliserons par la suite.

a	Longueur du demi-grand axe de l'ellipse Γ_i
b	Longueur du demi-petit axe de l'ellipse Γ_i
Γ_i	Membrane élastique dans la configuration initiale
Γ_e	Membrane élastique dans la configuration d'équilibre
Γ_o	Membrane élastique dans la configuration de repos
L_o	Longueur de la membrane dans la configuration de repos
R_e	Rayon de la membrane circulaire dans la configuration d'équilibre
R_o	Rayon de la membrane circulaire dans la configuration de repos
R_x	Distance maximale entre 2 points de la membrane sur l'axe $y = 1$
R_y	Distance maximale entre 2 points de la membrane sur l'axe $x = 1$
T_o	Constante représentant les propriétés élastiques de la membrane
Q_e	Aire de la région interne Ω^- dans la configuration d'équilibre

TAB. 3.5. Nomenclature utilisée pour le cas test.

Sous ces hypothèses, nous nous attendons à ce que l'écoulement engendré par les forces restauratrices entraîne progressivement la déformation de la membrane jusqu'à ce que celle-ci retrouve un état d'équilibre caractérisé par une forme circulaire. Dans cette progression vers l'état stationnaire, deux scénarios sont envisageables. Une fois que la rigidité de la membrane (exprimée par T_o) a été fixée, ils dépendent uniquement de la viscosité cinétique ν du fluide.

Lorsque la viscosité est suffisamment grande, le fluide absorbe assez d'énergie élastique de façon à ralentir progressivement le mouvement de la membrane vers son état stationnaire. Dans ce cas-ci, la convergence vers R_e est monotone. D'autre part, lorsque ν est petite, la convergence de la position de la membrane vers son état d'équilibre se fait de façon oscillatoire, alternant entre un ellipse orienté le long de l'axe horizontal ($y=1$) et un ellipse orienté le long de l'axe vertical ($x=1$), jusqu'à ce que les grand et petit axes tendent enfin vers R_e .

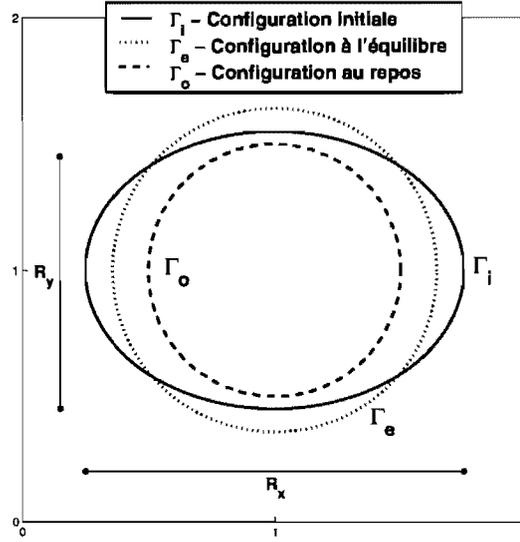


FIG. 3.4. Diagramme des trois configurations d'interface possibles.

3.6.1.1. Les types de configurations d'interface

Dans ce qui suit, nous distinguons trois types de configuration d'interface possibles (voir la Figure 3.4 pour une illustration). L'état de repos est caractérisé par l'absence de toute force élastique exercée par la membrane sur le fluide et dépend seulement des propriétés physiques de la membrane. Dans cette configuration, le fluide est immobile, la pression est constante sur tout le domaine et la membrane a une forme circulaire dont la position est donnée par l'équation suivante :

$$\Gamma_o := \left(1 + R_o \cos\left(\frac{\hat{s}}{R_o}\right), 1 + R_o \sin\left(\frac{\hat{s}}{R_o}\right) \right), \quad \hat{s} \in [0, L_o], \quad (3.6.1)$$

où R_o est le rayon et $L_o = 2\pi R_o$ est la longueur de la membrane au repos. Nous vérifions aisément que la tension définie par (1.3.2) s'annule partout, puisque $\|\partial \mathbf{X}(\hat{s}, t)/\partial \hat{s}\|_2 \equiv 1$, et par conséquent, nous avons $\hat{\mathbf{f}} \equiv 0$ sur tout Γ_o (voir la définition de la densité de force $\hat{\mathbf{f}}$ introduite pour ce problème d'interface particulier à la Section 1.3.1).

À l'état d'équilibre, la membrane Γ_e est un cercle de rayon $R_e > R_o$ dont la position est donnée par

$$\Gamma_e := \left(1 + R_e \cos\left(\frac{\hat{s}}{R_o}\right), 1 + R_e \sin\left(\frac{\hat{s}}{R_o}\right) \right), \quad \hat{s} \in [0, L_o]. \quad (3.6.2)$$

La membrane génère ainsi une force élastique qui agit purement dans la direction normale. Ceci s'explique par le fait qu'à l'état d'équilibre, la tension T est une fonction constante et par conséquent, la densité de force $\hat{\mathbf{f}}$ (évaluée dans la mesure $d\hat{s}$) est la dérivée d'un vecteur tangent $\boldsymbol{\tau}$ de norme constante (voir (1.3.4)). Pour conserver cet équilibre, le fluide doit être immobile et la pression doit avoir une distribution uniforme, autant à l'intérieur qu'à l'extérieur de la membrane, avec un saut à travers l'interface qui contrebalance la force élastique exercée par la membrane sur le fluide. La magnitude de ce saut dépend des propriétés élastiques (plus grande lorsque la constante T_o est grande) ainsi que du déplacement de la membrane (ratio entre R_o et R_e) par rapport à sa configuration au repos. En fait, en utilisant (3.2.7) on peut montrer que le saut de pression prend la forme suivante :

$$[p] = -\frac{T_o}{R_o} \left(\frac{R_e}{R_o} - 1 \right). \quad (3.6.3)$$

Dû à l'incompressibilité du fluide, l'aire Q_e contenu à l'intérieur de la membrane doit toujours être conservé. Ainsi, toute configuration initiale Γ_i de la membrane peut être interprétée comme une perturbation d'un cercle de rayon $R_e = Q_e/2\pi$ en état d'équilibre. Pour des fins de simplicité, nous considérons seulement des configurations initiales de formes elliptiques dont la position est donnée par l'équation suivante :

$$\Gamma_i := \left(1 + a \cos \left(\frac{\hat{s}}{R_o} \right), 1 + b \sin \left(\frac{\hat{s}}{R_o} \right) \right), \quad \hat{s} \in [0, L_o], \quad (3.6.4)$$

où les constantes positives a et b satisfont $R_e = \sqrt{ab} > R_o$.

3.6.2. Le problème stationnaire

Dans un premier lieu, nous aimerions voir si notre implémentation de la méthode IIM conserve bien l'état d'équilibre du problème de la membrane élastique. Pour ce faire, nous considérons une membrane fixe Γ_e ayant les propriétés suivantes : $R_o = 0.5$, $R_e = 0.6$, $T_o = 2.5$. Les composantes tangentielle et normale de la densité de force \mathbf{f} par unité de longueur sont alors données par $f_\tau = 0$ et

$f_n = 1$, respectivement. Le système à résoudre est donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \end{aligned} \quad (3.6.5)$$

avec $\mathbf{u}_m = 0$, $\mathbf{u}_0 = 0$ et les conditions de saut suivantes :

$$[\mathbf{u}] = 0, \quad [\mathbf{u}_n] = 0, \quad [p] = -1, \quad [p_n] = 0. \quad (3.6.6)$$

La solution stationnaire de ce système est connue et prend la forme suivante :

$$\mathbf{u} = 0, \quad p = \begin{cases} 1 - C, & \text{dans } \Omega^- \\ C, & \text{dans } \Omega^+, \end{cases} \quad (3.6.7)$$

où C est une constante arbitraire que nous fixons égale à zéro ($C = 0$).

3.6.2.1. Critère d'arrêt pour le problème stationnaire

Avant de lancer les simulations numériques, nous devons choisir un critère d'arrêt qui met un terme aux calculs lorsqu'une solution stationnaire a été obtenue. Un critère nécessaire pour déterminer si la solution est stationnaire est que le rapport en norme 1 de la solution évaluée en deux pas de temps consécutifs convergent vers 1,

$$\text{Lim}(u) = \left| \frac{\|\mathbf{u}^{n+1}\|_1}{\|\mathbf{u}^n\|_1} - 1 \right| < \text{tol}_u. \quad (3.6.8)$$

Évidemment, un critère semblable est utilisé lorsque la distribution stationnaire de la pression est la solution qui nous intéresse,

$$\text{Lim}(p) = \left| \frac{\|p^{n+1/2}\|_1}{\|p^{n-1/2}\|_1} - 1 \right| < \text{tol}_p. \quad (3.6.9)$$

Afin d'éviter de se perdre dans une boucle infinie dans l'éventualité d'une tolérance non-respectée, un nombre maximal d'itération a été prescrit ($\text{itermax} = 3000$).

3.6.3. Résolution du problème stationnaire avec IIM

Nous présentons maintenant les solutions numériques obtenues avec la méthode IIM pour le problème stationnaire (3.6.5)-(3.6.6).

3.6.3.1. Solution stationnaire de la vitesse \mathbf{u}^{n+1}

Les graphiques des composantes x et y de la vitesse stationnaire \mathbf{u}^{n+1} sont présentés sur les Figures 3.5 et 3.6. Ces solutions ont été obtenues pour des viscosités cinétiques prenant les valeurs $\nu = 0.1$ et $\nu = 1$, respectivement. Nous remarquons d'abord que l'amplitude de l'erreur de la solution \mathbf{u}^{n+1} augmente lorsque la viscosité est réduite, ce qui est raisonnable puisque un fluide visqueux emmagasine plus d'énergie cinétique. Notons aussi que la solution est plus régulière lorsque la viscosité est élevée (on peut observer la présence de pics dans un voisinage de l'interface lorsque $\nu = 0.1$). Nous examinerons plus en détail l'influence de la viscosité sur les solutions obtenues avec la méthode IIM à la Section 3.6.6.

Pour ces solutions stationnaires, une discrétisation de $N = 128$ nœuds cartésiens a été utilisée dans chaque direction x et y , ce qui correspond à un pas $h = \frac{1}{64}$. La membrane a été modélisée par des splines cubiques construits à partir de $N_s = 192$ marqueurs lagrangiens distribués uniformément sur le cercle Γ_e . Un pas de temps $\Delta t = h$ a été prescrit, ce qui correspond à une constante $CFL = 1$. Nous considérons que l'état stationnaire a été atteint lorsque le critère (3.6.8) est satisfait avec $tol_u = 5e - 5$.

3.6.3.2. Solution stationnaire de la pression $p^{n+1/2}$

Les graphiques des solutions stationnaires de la pression $p^{n+1/2}$, obtenues avec la méthode IIM lorsque $\nu = 0.1$ et $\nu = 1$, sont présentés sur les Figures 3.7 et 3.8, respectivement. Pour ces solutions, les données utilisées sont les mêmes que celles prescrites à la Section 3.6.3.1, seule la tolérance utilisée pour déterminer l'état stationnaire de la pression est différente ($tol_p = 1e - 6$).

Nous voyons d'abord que le saut constant de pression est capté avec précision par la méthode IIM. Ensuite, il est de nouveau possible d'observer le rôle de

la viscosité sur le comportement de la pression. Non seulement l'amplitude de l'erreur est environ 10 fois plus importante lorsque $\nu = 0.1$, mais nous constatons aussi que des changements surviennent dans le profil de la solution $p^{n+\frac{1}{2}}$ dans la région Ω^- . Celui-ci prend une forme de plus en plus concave lorsque nous réduisons la viscosité (voir aussi les Figures 3.11 et 3.12). Enfin, la présence d'oscillations dans la solution devient visible à l'oeil nu lorsque la viscosité passe sous le seuil de 0.25.

3.6.3.3. Ordre de convergence pour la vitesse \mathbf{u}^{n+1}

Les Tableaux 3.6, 3.7 et 3.8 affichent l'ordre de convergence obtenu pour la solution stationnaire de la composante x de la vitesse \mathbf{u}^{n+1} pour des viscosités cinétiques prenant les valeurs $\nu = 0.1$, $\nu = 1$ et $\nu = 4$, respectivement. Les résultats obtenus pour la composante y de la vitesse ont été omis, puisqu'ils sont identiques à ceux présentés (dû à la symétrie du problème).

N	N_s	$Lim(u)$	Itér.	$\ E(u)\ _\infty$	Ordre(u)
32	48	2.1410e-005	23	2.3375e-002	
64	96	4.6339e-005	41	1.2789e-002	0.8700
128	192	4.9553e-005	73	5.1424e-003	1.3144

TAB. 3.6. Tableau des erreurs et de l'ordre de convergence de la composante x de la vitesse \mathbf{u}^{n+1} , obtenue avec la méthode IIM lorsque $\nu = 0.1$.

N	N_s	$Lim(u)$	Itér.	$\ E(u)\ _\infty$	Ordre(u)
32	48	4.8990e-005	205	5.8713e-004	
64	96	4.8352e-005	204	2.1764e-004	1.4318
128	192	1.2577e-005	25	7.1625e-005	1.6034

TAB. 3.7. Tableau des erreurs et de l'ordre de convergence de la composante x de la vitesse \mathbf{u}^{n+1} , obtenue avec la méthode IIM lorsque $\nu = 1$.

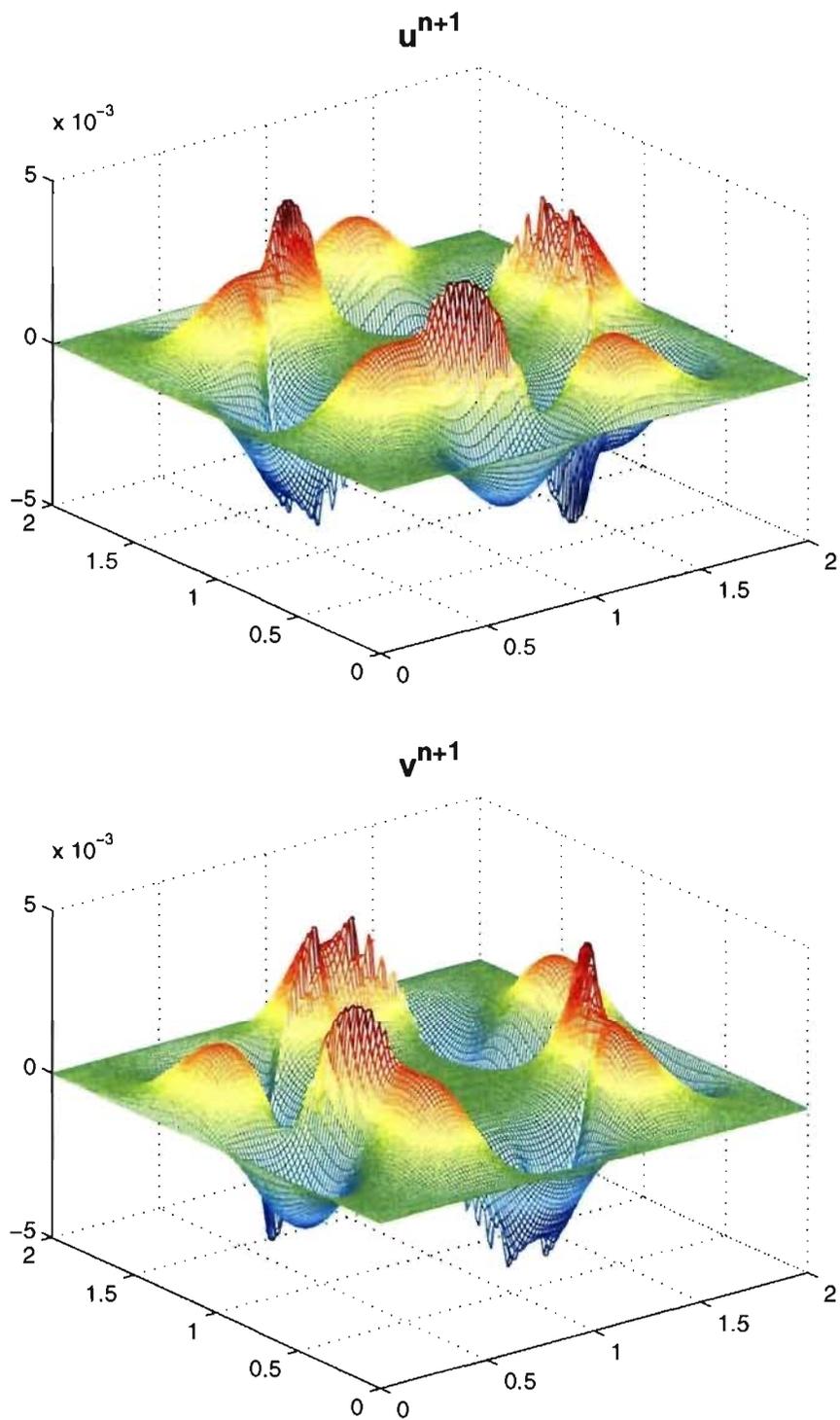


FIG. 3.5. Graphiques des composantes x et y de la vitesse \mathbf{u}^{n+1} , obtenues avec la méthode IIM pour le problème stationnaire lorsque $\nu = 0.1$, $N = 128$ et $\Delta t = 1/64$.

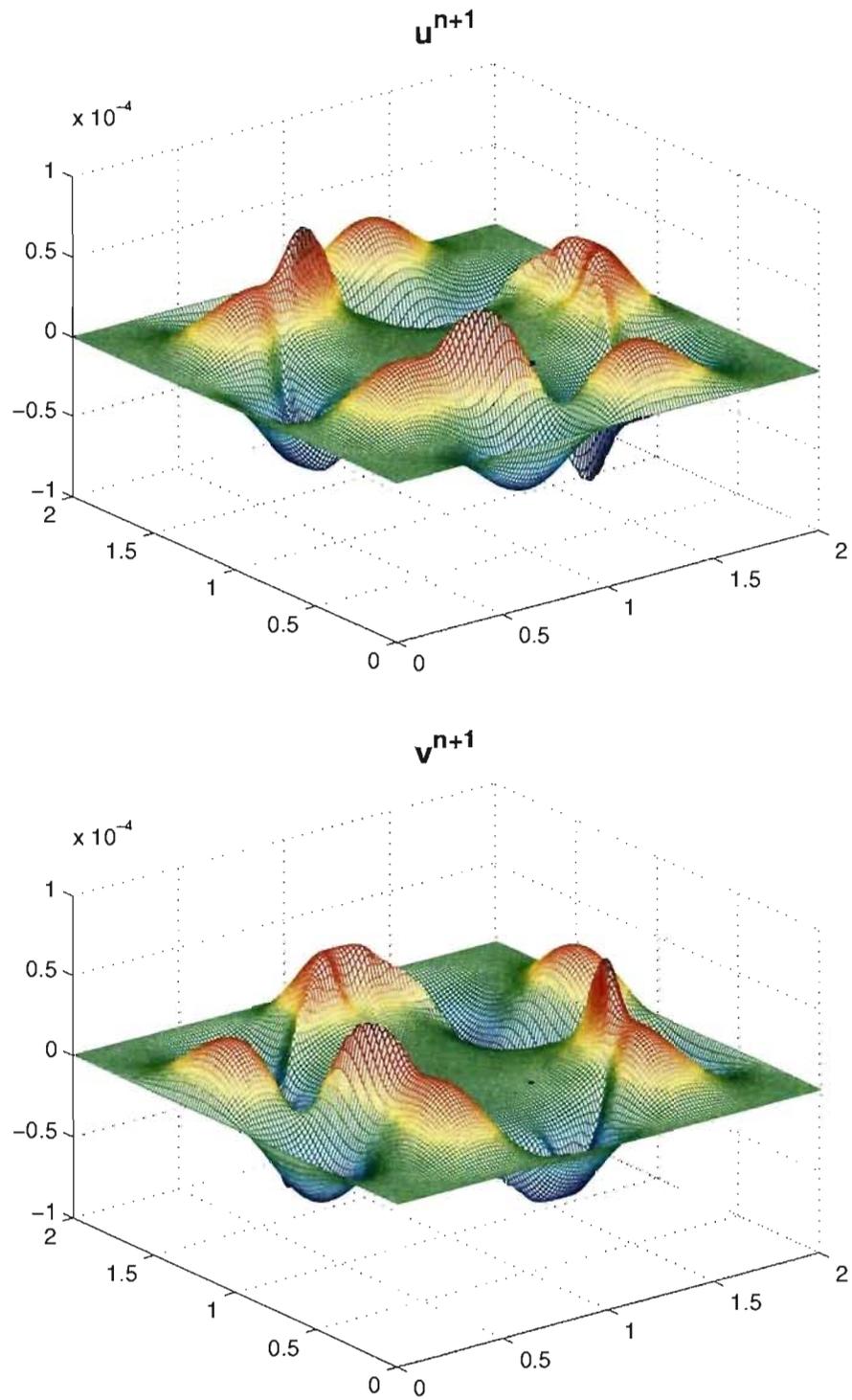


FIG. 3.6. Graphiques des composantes x et y de la vitesse \mathbf{u}^{n+1} , obtenues avec la méthode IIM pour le problème stationnaire lorsque $\nu = 1$, $N = 128$ et $\Delta t = 1/64$.

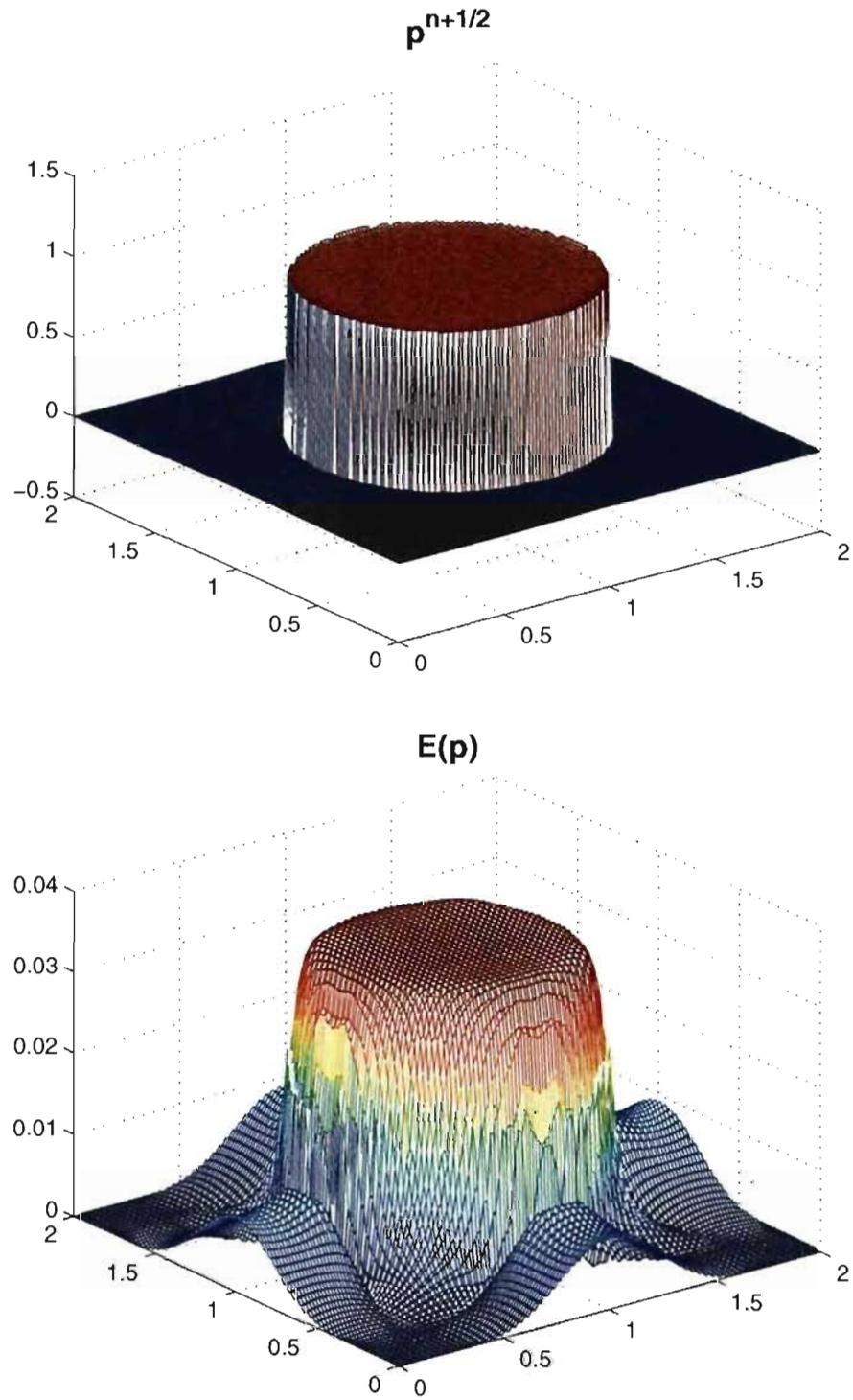


FIG. 3.7. Graphiques de la distribution stationnaire de la pression $p^{n+\frac{1}{2}}$ et de son erreur, obtenues avec la méthode IIM lorsque $\nu = 0.1$, $N = 128$ et $\Delta t = 1/64$.

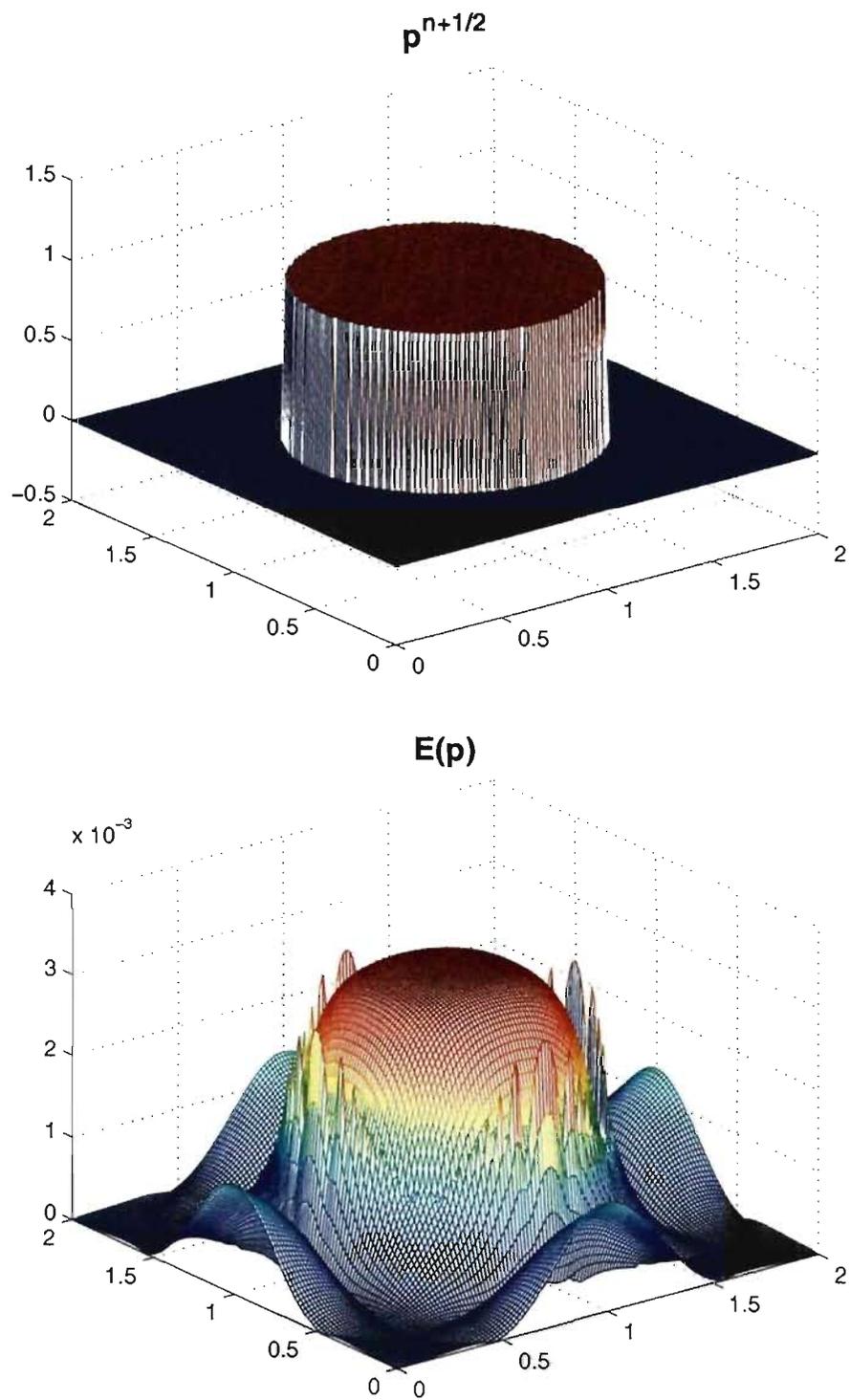


FIG. 3.8. Graphiques de la distribution stationnaire de la pression $p^{n+\frac{1}{2}}$ et de son erreur, obtenues avec la méthode IIM lorsque $\nu = 1$, $N = 128$ et $\Delta t = 1/64$.

N	N_s	$Lim(u)$	Itér.	$\ E(u)\ _\infty$	Ordre(u)
32	48	4.8990e-005	205	1.2164e-004	
64	96	4.9892e-005	814	4.1978e-005	1.5349
128	192	4.9996e-005	2110	1.3639e-005	1.6219

TAB. 3.8. Tableau des erreurs et de l'ordre de convergence de la composante x de la vitesse \mathbf{u}^{n+1} , obtenue avec la méthode IIM lorsque $\nu = 4$.

Nous observons d'abord que l'ordre de convergence pour \mathbf{u}^{n+1} n'est pas quadratique, mais si situe plutôt entre 1.3 et 1.5, selon la valeur de ν prescrite. Ces résultats sont un peu décevants, surtout lorsque nous les comparons avec ceux obtenus par Li et Lai [15] pour ce même problème. Par contre, il ne faut pas être trop surpris par cette performance de PMIII, puisque Brown et al. [4] ont déjà présenté un exemple simple (voir les résultats de leur Table IV) où l'ordre de convergence de la solution numérique \mathbf{u}^{n+1} obtenue avec la méthode de projection PMIII n'était que linéaire! En effet, il est concevable que l'ajout de la force singulière aux équations de Navier-Stokes influence la précision de la méthode de projection (Ordre de 1.5 au lieu de 2).

3.6.3.4. Ordre de convergence pour la pression $p^{n+1/2}$

Les Tableaux 3.9, 3.10 et 3.11 affichent l'ordre de convergence obtenu pour la solution de la distribution stationnaire de la pression $p^{n+1/2}$ pour des viscosités cinétiques prenant les valeurs $\nu = 0.1$, $\nu = 1$ et $\nu = 4$, respectivement.

Étant donné les résultats précédents, nous aurions été surpris d'obtenir un ordre de convergence quadratique pour la pression $p^{n+1/2}$ du problème stationnaire. En effet, l'ordre linéaire obtenu pour la pression concorde assez bien avec l'analyse de Shen [13] qui garantit un ordre maximal de $\frac{3}{2}$ pour des méthodes de projection comme PMIII, où la différence de $1/2$ peut s'expliquer encore une fois

N	N_s	$Lim(p)$	Itér.	$\ E(p)\ _\infty$	Ordre(p)
32	48	6.2708e-007	22	1.3236e-001	
64	96	9.0017e-007	30	8.1312e-002	0.7029
128	192	8.0119e-007	27	3.5134e-002	1.2106

TAB. 3.9. Tableau des erreurs et de l'ordre de convergence de la distribution stationnaire de la pression $p^{n+1/2}$, obtenue avec la méthode IIM lorsque $\nu = 0.1$.

N	N_s	$Lim(p)$	Itér.	$\ E(p)\ _\infty$	Ordre(p)
32	48	2.7602e-007	24	1.2205e-002	
64	96	5.3019e-007	12	6.8519e-003	0.8328
128	192	6.1242e-007	9	3.3157e-003	1.0472

TAB. 3.10. Tableau des erreurs et de l'ordre de convergence de la distribution stationnaire de la pression $p^{n+1/2}$, obtenue avec la méthode IIM lorsque $\nu = 1$.

N	N_s	$Lim(p)$	Itér.	$\ E(p)\ _\infty$	Ordre(p)
32	48	5.4852e-007	19	8.5143e-003	
64	96	3.6621e-007	21	3.5055e-003	1.2803
128	192	8.6384e-007	21	1.5249e-003	1.2009

TAB. 3.11. Tableau des erreurs et de l'ordre de convergence de la distribution stationnaire de la pression $p^{n+1/2}$, obtenue avec la méthode IIM lorsque $\nu = 4$.

par l'effet de la force singulière dans les équations de Navier-Stokes (Ordre de 1 au lieu de 1.5).

3.6.3.5. Commentaires concernant les résultats obtenus avec IIM

Comparativement aux résultats publiés par Li et Lai [15] pour ce problème stationnaire, nous constatons un certain recul de l'ordre de convergence pour

notre implémentation de la méthode IIM et ce, autant pour la solution de la vitesse \mathbf{u}^{n+1} que pour la distribution de la pression $p^{n+\frac{1}{2}}$. Nous croyons que la source d'erreur qui vient compromettre l'ordre de convergence provient lors de la résolution de l'équation de Poisson (3.1.5). En effet, la solution numérique pour ϕ^{n+1} , obtenue sur un seul maillage cartésien par des méthodes de projection comme PMIII, est souvent oscillatoire ([6], [15]). Il est raisonnable de croire que ces oscillations, présentes dans la pression approximative ϕ^{n+1} et transmises à \mathbf{u}^{n+1} lors de la mise à jour (3.1.3), viennent contaminer l'ordre de convergence des solutions numériques.

Un autre fait important à souligner est la dépendance du comportement des solutions \mathbf{u}^{n+1} et $p^{n+\frac{1}{2}}$ à la viscosité ν et au pas de temps Δt . Pour un pas de temps fixé ($\Delta t = h$), non seulement l'amplitude des oscillations augmente lorsque la viscosité ν est réduite (voir les Figures 3.7 et 3.8), mais aucune solution stationnaire n'a été obtenue pour des valeurs de $\nu \leq 0.025$. En général, une réduction du pas de temps Δt améliore la stabilité des méthodes numériques, mais dans notre cas, c'est plutôt l'effet contraire qui se produit, ce qui est inquiétant. Nous discuterons plus amplement des causes et des conséquences de ce phénomène oscillatoire pour notre version de la méthode IIM à la Section 3.6.6.

3.6.4. Résolution du problème stationnaire avec IB

Afin de comparer la performance des méthodes IIM et IB, nous présentons les solutions stationnaires \mathbf{u}^{n+1} et $p^{n+\frac{1}{2}}$, obtenues lorsque la force singulière \mathbf{F} est transmise au fluide par l'entremise de la fonction δ_ω définie par (1.4.2).

3.6.4.1. Solution stationnaire de la vitesse \mathbf{u}^{n+1}

Les graphiques des composantes x et y de la vitesse stationnaire \mathbf{u}^{n+1} , obtenues avec la méthode IB lorsque $\nu = 0.1$, sont présentés sur la Figure 3.9. Afin de comparer les solutions obtenues avec chaque méthode, nous avons repris les données utilisées lors de la résolution avec la méthode IIM (voir la Section 3.6.3.1). Seul le nombre de marqueurs lagrangiens a été augmenté ($N_s = 2N$) afin de garantir la stabilité de la méthode IB.

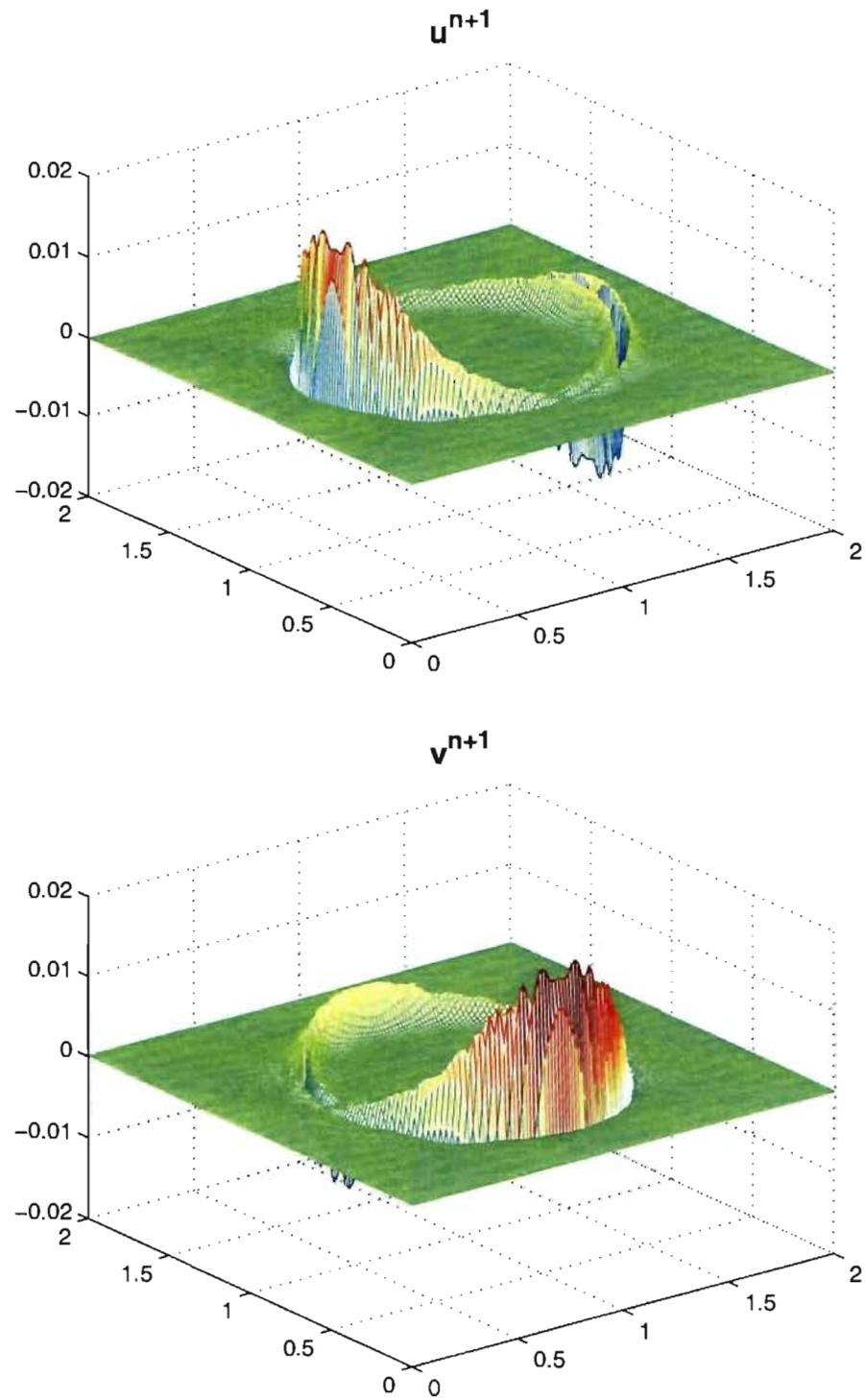


FIG. 3.9. Graphiques des composantes x et y de la vitesse \mathbf{u}^{n+1} , obtenues avec la méthode IB pour le problème stationnaire lorsque $\nu = 0.1$, $N = 128$, $N_s = 256$ et $\Delta t = 1/64$.

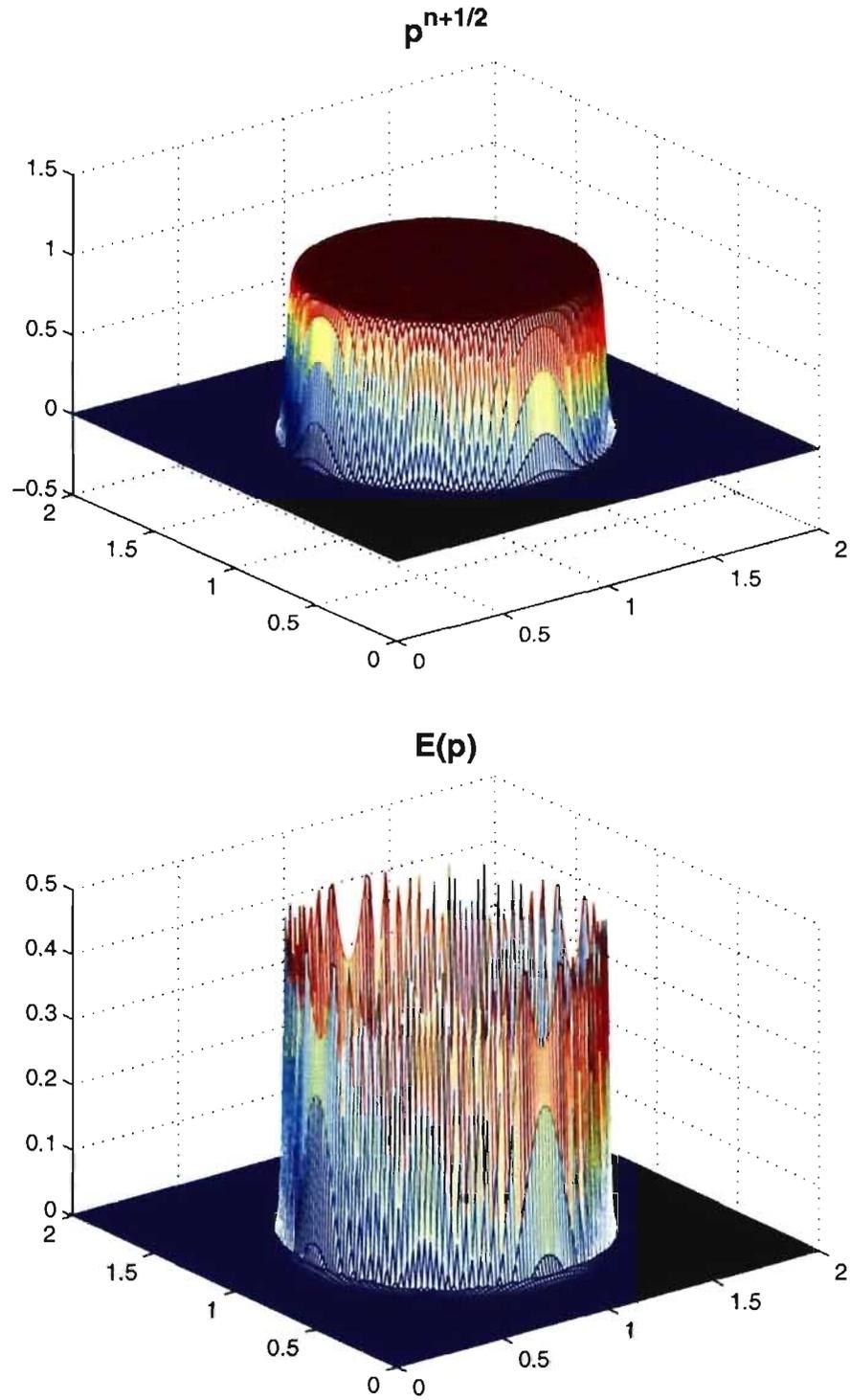


FIG. 3.10. Graphiques de la distribution stationnaire de la pression $p^{n+1/2}$ et de son erreur, obtenues avec la méthode IB lorsque $\nu = 0.1$, $N = 128$, $N_s = 256$ et $\Delta t = 1/64$.

Contrairement à la solution IIM où l'erreur est non-négligeable sur la presque totalité du domaine (voir la Figure 3.5), l'erreur de la solution \mathbf{u}^{n+1} obtenue avec la méthode IB est restreinte aux nœuds du maillage cartésien qui sont sollicités par l'évaluation de la fonction δ_ω lors de la transmission de la force singulière. Nous remarquons aussi une légère augmentation de l'erreur $E(\mathbf{u})$ de la solution IB lorsque $\nu = 0.1$.

3.6.4.2. Solution stationnaire de la pression $p^{n+\frac{1}{2}}$

Le graphique de la distribution stationnaire de la pression $p^{n+\frac{1}{2}}$, obtenue avec la méthode IB lorsque $\nu = 0.1$, est présenté sur la Figure 3.10. Mise à part la tolérance utilisée ($tol_p = 1e - 6$) dans le critère d'arrêt (3.6.9), nous avons repris toutes les données de la Section 3.6.4.1.

Pour la solution $p^{n+\frac{1}{2}}$ obtenue avec la méthode IB, l'atténuation du saut de pression est clairement visible. Ceci est une conséquence directe de l'utilisation de la fonction δ_ω qui provoque des erreurs dont la magnitude est proportionnelle à la hauteur du saut de pression. Ainsi, l'erreur $E(p)$ de la solution IB se concentre dans un voisinage de l'interface, contrairement à celle obtenue par la méthode IIM qui était dominante sur la région Ω^- . Notons aussi l'absence d'oscillations dans la solution $p^{n+\frac{1}{2}}$ obtenue avec la méthode IB lorsque $\nu = 0.1$.

3.6.4.3. Ordre de convergence pour la vitesse \mathbf{u}^{n+1}

Les Tableaux 3.12 et 3.13 affichent l'ordre de convergence obtenu pour la solution stationnaire de la composante x de la vitesse \mathbf{u}^{n+1} pour des viscosités cinétiques prenant les valeurs $\nu = 0.1$ et $\nu = 1$, respectivement. Les résultats obtenus pour la composante y de la vitesse ont été omis, puisqu'ils sont identiques à ceux présentés (dû à la symétrie du problème).

N	N_s	$Lim(u)$	Itér.	$\ E(u)\ _\infty$	Ordre(u)
32	64	3.2986e-005	19	8.5119e-003	
64	128	4.5760e-005	29	5.2402e-003	0.6998
128	256	4.2341e-005	67	3.2240e-003	0.7007

TAB. 3.12. Tableau des erreurs et de l'ordre de convergence de la composante x de la vitesse \mathbf{u}^{n+1} , obtenue avec la méthode IB lorsque $\nu = 0.1$.

N	N_s	$Lim(u)$	Itér.	$\ E(u)\ _\infty$	Ordre(u)
32	64	4.9253e-005	153	8.5589e-004	
64	128	4.9175e-005	323	5.2399e-004	0.7078
128	256	4.9500e-005	673	3.2240e-004	0.7006

TAB. 3.13. Tableau des erreurs et de l'ordre de convergence de la composante x de la vitesse \mathbf{u}^{n+1} , obtenue avec la méthode IB lorsque $\nu = 1$.

3.6.4.4. Ordre de convergence pour la pression $p^{n+\frac{1}{2}}$

Pour la méthode IB, il a été impossible d'extraire un ordre de convergence en norme infini pour la pression $p^{n+\frac{1}{2}}$, puisque l'erreur maximale demeure relativement constant ($\|E(p)\|_\infty \approx 0.5$) pour tous les pas de discrétisation utilisés ($h = 1/32, 1/64, 1/128$). En effet, l'erreur des solutions obtenues par la méthode IB est généralement évalué en norme 1. Les Tableaux 3.14 et 3.15 affichent l'ordre de convergence de la pression, évalué dans cette norme, lorsque $\nu = 0.1$ et $\nu = 1$, respectivement.

3.6.4.5. Commentaires concernant les résultats obtenus avec IB

Nous remarquons d'abord que l'ordre de convergence (évalué en norme infini) de la solution \mathbf{u}^{n+1} obtenue avec la méthode IB est plutôt linéaire (Ordre ≈ 0.7). De son côté, l'ordre de convergence pour la distribution stationnaire de la pression

N	N_s	$Lim(p)$	Itér.	$\ E(p)\ _\infty$	$\ E(p)\ _1$	Ordre(p)
32	64	6.0486e-007	12	4.6162e-001	3.7392	
64	128	6.1798e-007	8	4.8555e-001	2.2661	0.7225
128	256	7.4888e-007	9	4.8536e-001	1.0345	1.1313

TAB. 3.14. Tableau des erreurs et de l'ordre de convergence de la distribution stationnaire de la pression $p^{n+1/2}$, obtenue avec la méthode IB lorsque $\nu = 0.1$.

N	N_s	$Lim(p)$	Itér.	$\ E(p)\ _\infty$	$\ E(p)\ _1$	Ordre(p)
32	64	9.8256e-007	77	4.6995e-001	3.9632	
64	128	7.8504e-007	20	4.8280e-001	2.4402	0.6997
128	256	2.7096e-007	60	4.8304e-001	1.1402	1.0977

TAB. 3.15. Tableau des erreurs et de l'ordre de convergence de la distribution stationnaire de la pression $p^{n+1/2}$, obtenue avec la méthode IB lorsque $\nu = 1$.

$p^{n+\frac{1}{2}}$ est $O(1)$ lorsqu'évalué en norme infini et $O(h)$ lorsqu'évalué en norme 1. Ceci est dû au fait que l'utilisation de la fonction δ -discrète (1.4.2) pour transmettre la force singulière \mathbf{F} atténue la discontinuité de la pression, créant ainsi des erreurs dont la magnitude est proportionnelle au saut $\|E(p)\|_\infty \approx \frac{1}{2}[p]$ et ce, peu importe le nombre de nœuds cartésiens utilisé dans la discrétisation.

3.6.5. Comparaison des performances des méthodes IIM et IB pour le problème stationnaire

Afin de comparer la performance de chaque méthode, les Figures 3.11, 3.12 et 3.13 présentent des coupes en $x = 1$ de la distribution de la pression $p^{n+\frac{1}{2}}$, obtenue pour trois différents coefficients de viscosité : $\nu = 0.025$, $\nu = 0.1$ et $\nu = 1$, respectivement.

Pour la solution obtenue par la méthode IB, nous remarquons que les graphiques sont relativement semblables pour ces trois valeurs de ν , l'atténuation du

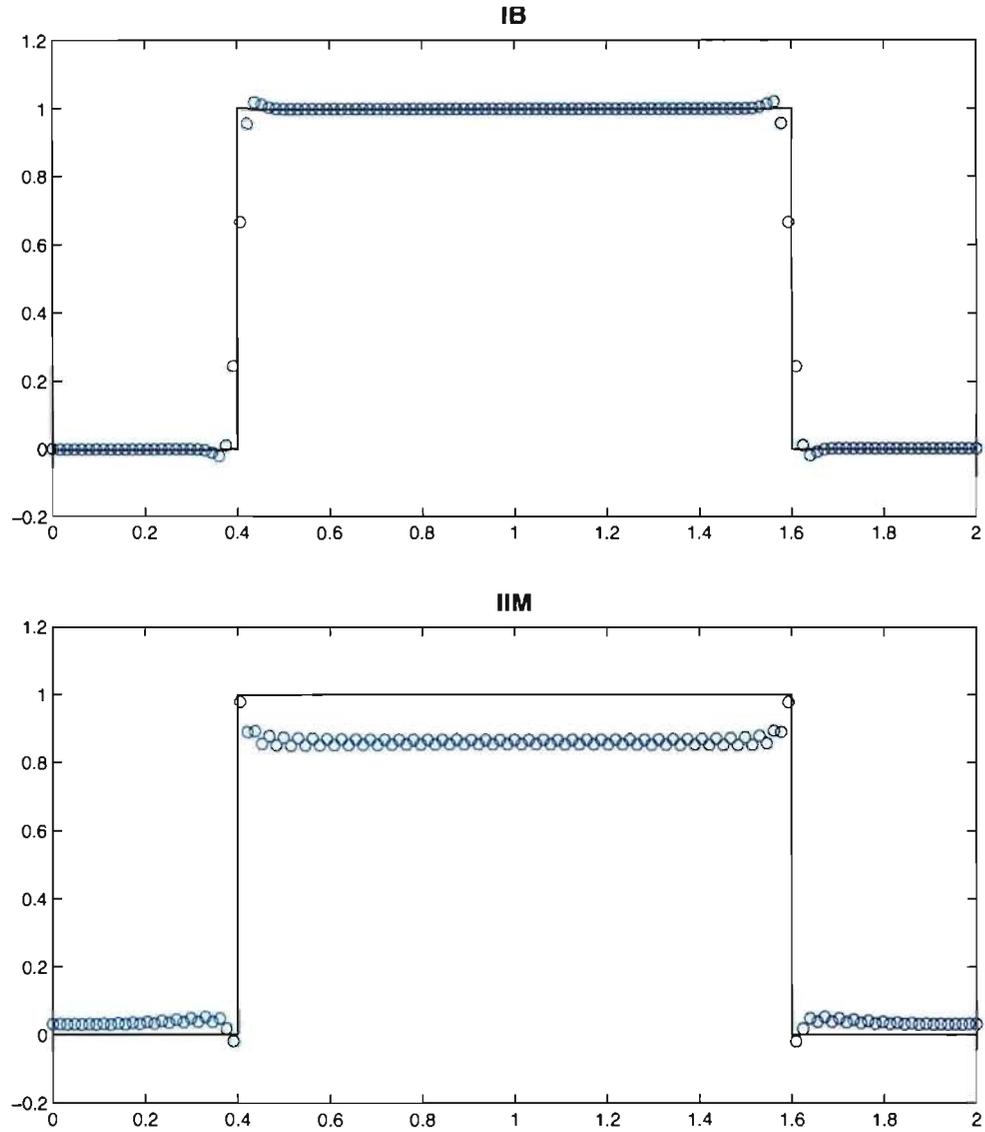


FIG. 3.11. Coupes en $x = 1$ des distributions stationnaires de la pression $p^{n+\frac{1}{2}}$, obtenues avec les méthodes IB et IIM lorsque $\nu = 0.025$.

saut de la pression se produisant toujours sur la même région ($0.3 < y < 0.5$ et $1.5 < y < 1.7$). Loin de l'interface, la convergence de la solution numérique (IB) vers la distribution exacte de la pression a été confirmée pour toutes les valeurs de ν testées. En effet, comme le démontrent les résultats des Tableaux 3.12-3.13, et 3.14-3.15, la magnitude de la viscosité influence très peu la performance de

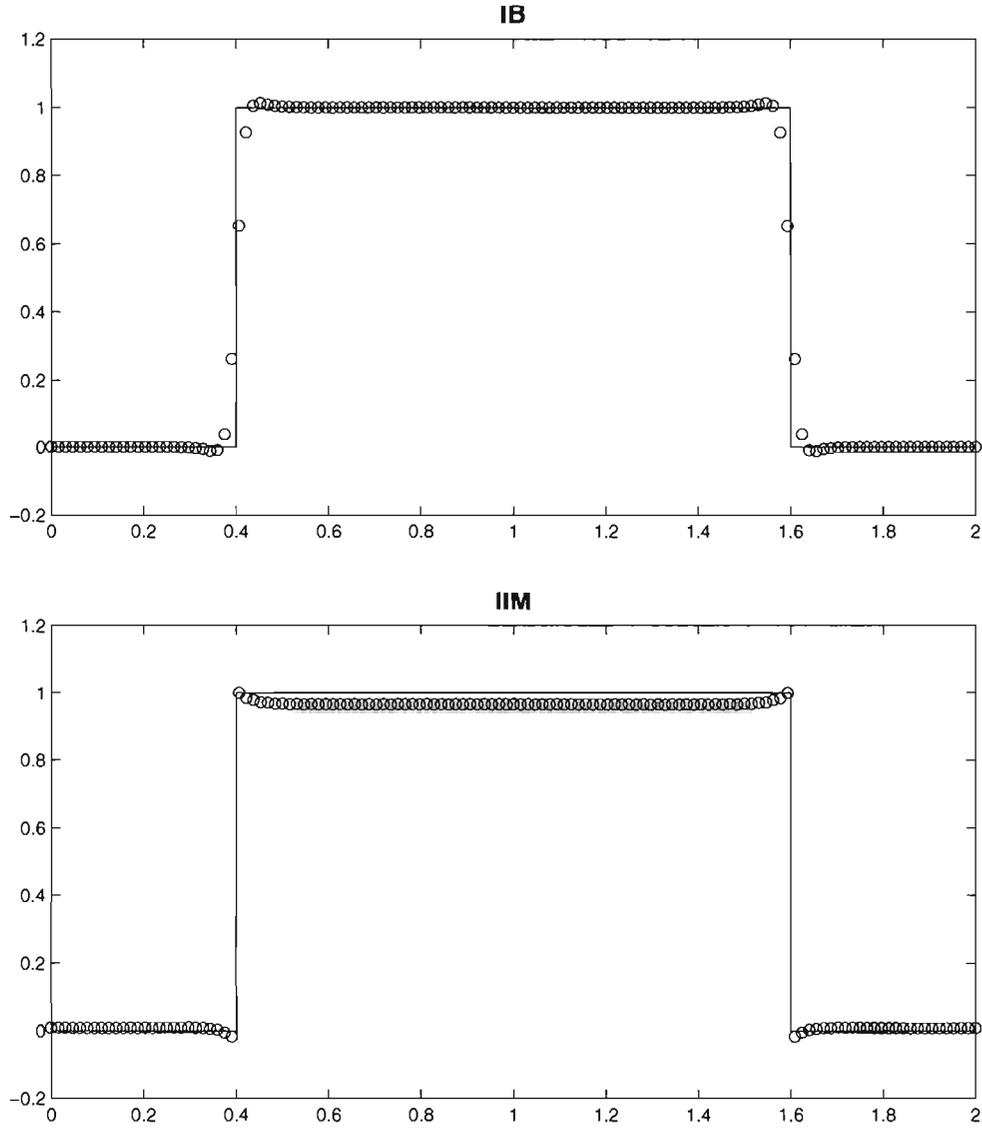


FIG. 3.12. Coupes en $x = 1$ des distributions stationnaires de la pression $p^{n+\frac{1}{2}}$, obtenues avec les méthodes IB et IIM lorsque $\nu = 0.1$.

la méthode IB, car bien que l'erreur augmente en grandeur lorsqu'on diminue la viscosité, l'ordre de convergence demeure relativement stable.

D'autre part, la viscosité influence beaucoup les résultats numériques obtenus avec notre implémentation de la méthode IIM. Lorsque la viscosité est suffisamment grande ($\nu > 0.25$), le saut de pression est très bien capté (voir le graphique de la Figure 3.13) et l'ordre de convergence pour \mathbf{u}^{n+1} est quasiment quadratique.

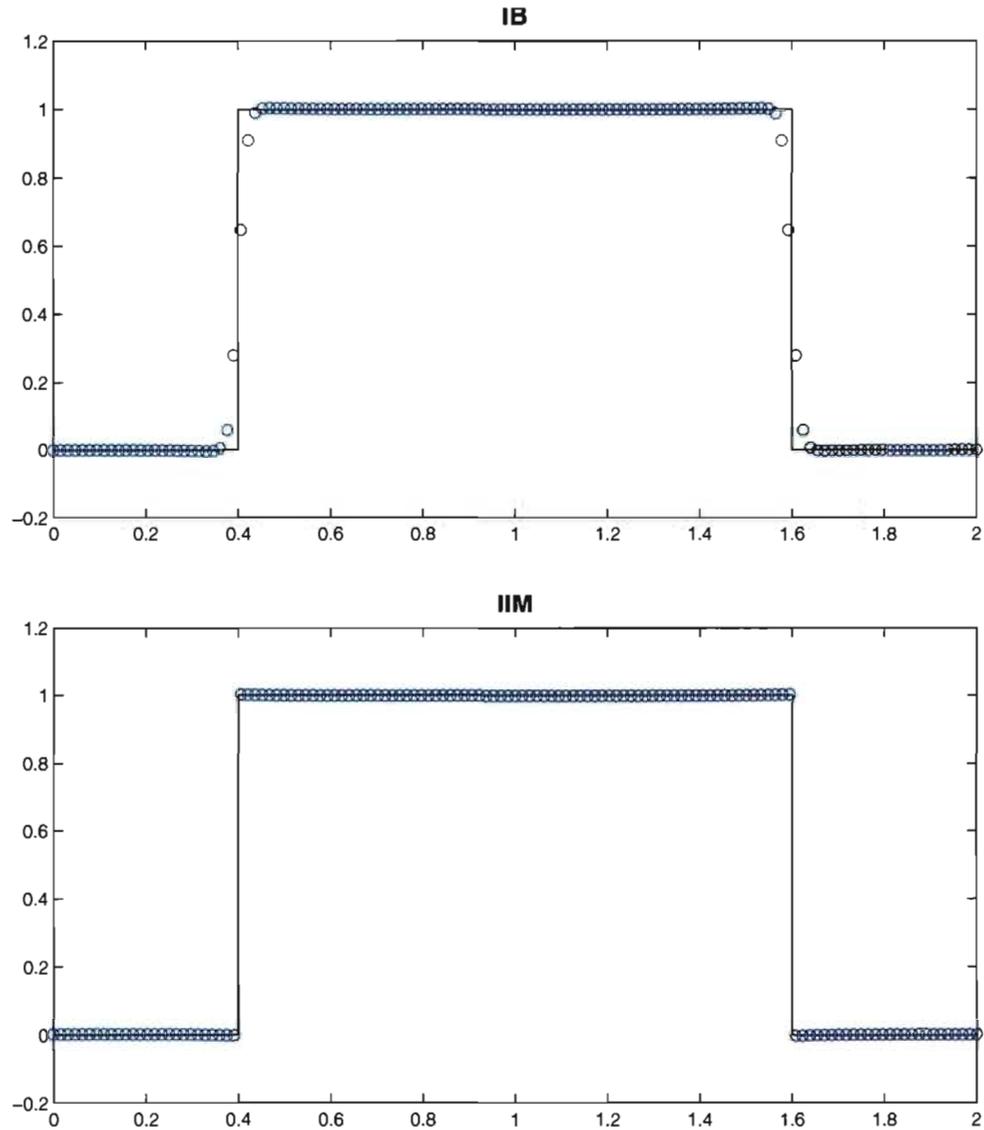


FIG. 3.13. Coupes en $x = 1$ des distributions stationnaires de la pression $p^{n+\frac{1}{2}}$, obtenues avec les méthodes IB et IIM lorsque $\nu = 1$.

Malheureusement, nous constatons avec regret une perte de la convergence vers la distribution stationnaire (arrondissement du profil de la pression dans la région Ω^- et erreur non-négligeable en Ω^+) lorsque $\nu < 0.25$. Notons que cette détérioration de la solution IIM est accompagnée d'oscillations de la pression entre deux nœuds consécutifs du maillage (voir la coupe de la pression sur la Figure 3.11 et le profil de l'erreur $E(p)$ sur la Figure 3.7) qui ne semblent pas être présentes

dans la solution IB ni dans la solution du problème instationnaire de la Section 3.1.3. Nous examinons maintenant les causes et les conséquences de ce phénomène oscillatoire présent dans les solutions IIM.

3.6.6. Oscillations dans la résolution du problème de Poisson

Nous avons déjà remarqué que l'utilisation d'un seul maillage cartésien pour discrétiser l'équation de Poisson (3.1.5) pouvait provoquer des oscillations dans la solution de ϕ^{n+1} . Nous tentons maintenant de comprendre pourquoi ce phénomène oscillatoire, connu sous le nom de "checkerboard oscillations" [6], est plus influent dans notre implémentation de la méthode IIM que dans la méthode IB.

3.6.6.1. Influence de ν et Δt dans l'évaluation des termes de correction

Il est raisonnable de croire que les oscillations présentes dans les solutions obtenues par la méthode IIM soient principalement causées par l'ajout des termes de correction, puisque ceux-ci n'apparaissent pas dans la discrétisation IB de l'équation (3.1.5). Revenant à la discrétisation (3.5.9) de l'équation de Poisson, nous avons

$$\bar{\nabla}_h^2 \phi_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{u_{i+1,j}^* - u_{i-1,j}^*}{2h} + \frac{v_{i,j+1}^* - v_{i,j-1}^*}{2h} \right) + C_{i,j}$$

avec $C_{i,j} = \frac{1}{2h} (B_{i+1,j}^1 - B_{i-1,j}^1 + B_{i,j+1}^2 - B_{i,j-1}^2) + C_{i,j}^{n+1}$.

où les termes de correction $C_{i,j}^{n+1}$, évalués à partir des conditions de saut de \mathbf{u}^{n+1} , sont tous nuls puisque $f_\tau = 0$ partout sur Γ_e . Se référant aux conditions de saut de ϕ^{n+1} du Tableau 3.4, nous voyons que $[\phi_{\xi\xi}^{n+1}] \equiv -\frac{2}{\nu\Delta t}$, car $f_n \equiv 1$ pour ce problème stationnaire. Par conséquent, la magnitude des termes de correction $C_{i,j}$ varie de façon inversement proportionnelle au produit $\nu\Delta t$.

Les graphiques des Figures 3.14, 3.14 et 3.16 permettent d'observer l'influence de $\nu\Delta t$ sur les fonctions sources \mathfrak{F}^{IIM} et \mathfrak{F}^{IB} apparaissant au membre de droite de la discrétisation (3.5.9) de l'équation de Poisson. Celles-ci étant définies comme

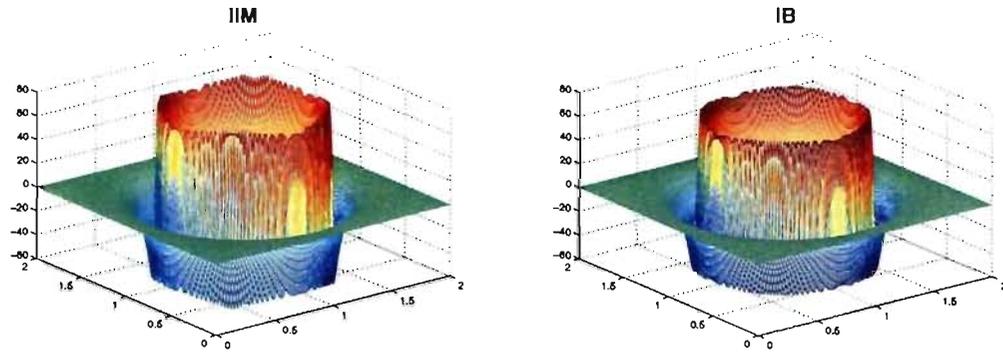


FIG. 3.14. Graphiques des fonctions sources \mathfrak{F}^{IIM} et \mathfrak{F}^{IB} , apparaissant au membre de droite de l'équation de Poisson (3.5.9) lorsque $\nu = 1$, $N = 128$ et $\Delta t = 0.01$.

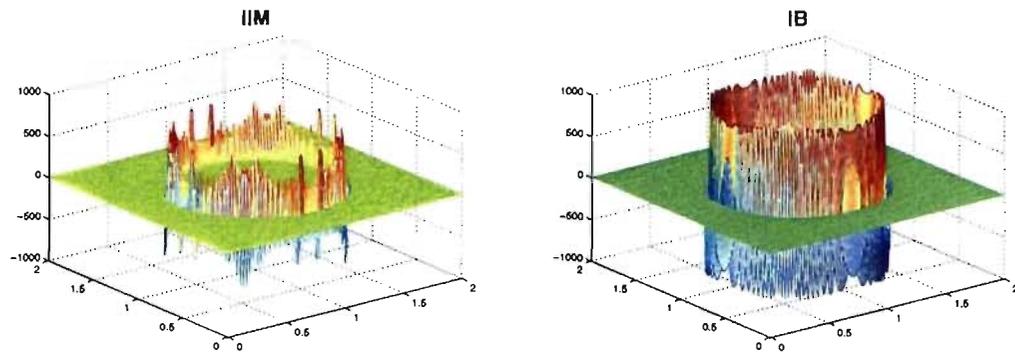


FIG. 3.15. Graphiques des fonctions sources \mathfrak{F}^{IIM} et \mathfrak{F}^{IB} , apparaissant au membre de droite de l'équation de Poisson (3.5.9) lorsque $\nu = 1$, $N = 128$ et $\Delta t = 0.0001$.

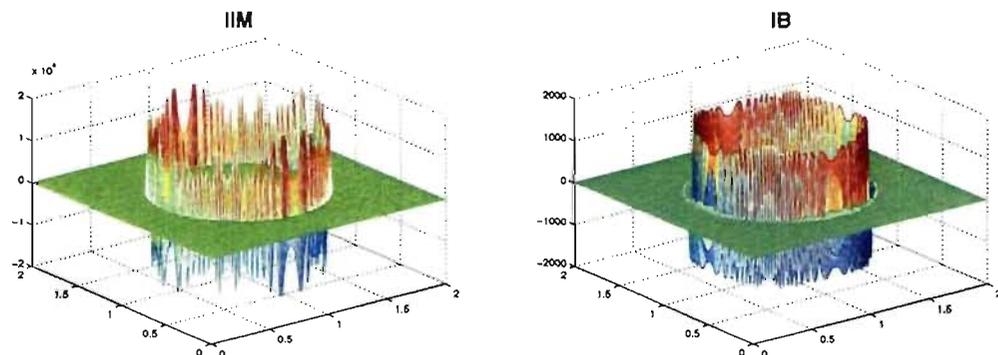


FIG. 3.16. Graphiques des fonctions sources \mathfrak{F}^{IIM} et \mathfrak{F}^{IB} , apparaissant au membre de droite de l'équation de Poisson (3.5.9) lorsque $\nu = 0.1$, $N = 128$ et $\Delta t = 0.0001$.

suit :

$$\text{Fonction Source IIM : } \mathfrak{F}_{i,j}^{IIM} = \frac{1}{\Delta t} (\nabla_h \cdot \mathbf{u}_{i,j}^*) + C_{i,j}, \quad (3.6.10)$$

$$\text{Fonction Source IB : } \mathfrak{F}_{i,j}^{IB} = \frac{1}{\Delta t} (\nabla_h \cdot \mathbf{u}_{i,j}^*), \quad (3.6.11)$$

Nous constatons d'abord qu'aucun changement au profil de \mathfrak{F}^{IB} n'est visible à l'oeil nu lorsque nous réduisons $\nu\Delta t$, seule la magnitude de cette fonction augmente. Notons aussi que l'influence de la viscosité ν sur la fonction source \mathfrak{F}^{IB} est minime (\mathbf{u}^* varie avec ν donc $\nabla_h \cdot \mathbf{u}^*$ aussi) comparativement au poids de $\frac{1}{\Delta t}$ qui apparait comme multiplicateur.

Ces remarques ne tiennent plus pour la méthode IMM, puisqu'en plus d'influencer la magnitude de \mathfrak{F}^{IIM} , la viscosité affecte aussi le comportement global de cette fonction source. Afin de réduire l'amplitude des oscillations présentes dans la solution ϕ^{n+1} , non seulement nous devons utiliser un coefficient de viscosité suffisamment grand ($\nu > 0.25$), mais l'utilisation d'un pas de temps Δt trop petit peut aussi faire échouer l'algorithme IIM (aucune solution stationnaire n'a été obtenue lorsque $\nu = 1$ et $\Delta t = 0.0001$). Il va sans dire que nous avons testé plusieurs avenues afin de lever cette contrainte qui handicape grandement l'usage potentiel de notre code IIM.

3.6.6.2. Différentes stratégies pour coupler les systèmes linéaires

Nous avons d'abord essayé d'autres façons de coupler les systèmes linéaires "carré", "cercle", "diamant" et "croix" (voir la Section 3.5.2.1), résultants de l'utilisation du stencil à 9-points $\tilde{\nabla}_{2h}^2$ dans la discrétisation (3.5.9) de l'équation de Poisson.

Une approche alternative tentait de résoudre les quatres systèmes séparément, le couplage entre deux solutions étant effectué à chaque étape de la résolution par l'ajout d'une contrainte supplémentaire (imposition de $\nabla_h^2 \phi^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \nabla_h \cdot \mathbf{u}^*$ au centre du domaine). Faute d'améliorations notables, nous avons poussé l'idée plus loin, résolvant les quatres systèmes de façon indépendante avec l'imposition

d'une contrainte additionnelle pour chaque problème singulier. Un schéma d'interpolation nous permettait ensuite d'ajuster la constante de chaque solution de façon à obtenir la solution ϕ^{n+1} en chaque noeud du domaine.

Pour ces deux stratégies utilisant un couplage des systèmes au centre du domaine, nous n'avons pas constaté une réduction notable des oscillations, mais seulement un déplacement de ceux-ci vers la frontière du domaine (les oscillations sont plus importantes au centre du domaine lorsque le couplage est effectué sur la frontière). Ceci laisse croire qu'une stratégie mixte, utilisant un couplage partiel des solutions au centre ainsi que sur la frontière du domaine, pourrait possiblement réduire les oscillations.

3.6.6.3. *Une solution miracle existe-t-elle ?*

Une solution à ce problème oscillatoire semble s'imposer d'elle même, soit l'utilisation d'un maillage décalé de type MAC. Mais ceci est une tâche ardue puisque pratiquement toutes les routines de notre code IIM ont été construites sur le même squelette : l'utilisation d'un seul maillage cartésien. Cette décision s'est fait naturellement puisque les fondations de notre algorithme repose solidement sur la méthode IIM proposée par Li et Lai ([11], [15]).

3.6.7. **Le problème instationnaire**

Pour le problème instationnaire, nous considérons toujours une membrane élastique ayant un rayon $R_o = \frac{1}{2}$ dans sa configuration de repos. Au début de la simulation, la position initiale de la membrane est donnée par l'équation (3.6.4) où $a = 0.75$ et $b = 0.55$. Les autres paramètres physiques influençant le comportement de la solution numérique sont la viscosité ν du fluide et la constante T_o qui reflète les propriétés élastiques de la membrane.

3.6.7.1. *Instabilité de la méthode IIM*

Pour la résolution du problème instationnaire de la membrane avec la méthode IIM, différentes combinaisons des paramètres ν et Δt ont été testées pour chaque valeur de T_o choisie. Dans pratiquement tous les cas, la solution numérique IIM a

divergé (explosion de la membrane) avant d'atteindre l'état d'équilibre associé à Γ_e . En effet, l'algorithme utilisé à la fin de chaque itération pour déplacer l'interface Γ^n semble très sensible aux oscillations présentes dans la solution. Les erreurs d'interpolation dans la détermination de la position de l'interface créent d'abord de grandes variations dans la direction et dans la magnitude de la force élastique \mathbf{f} , puisque celle-ci est évaluée directement à partir de Γ^n . Ces fluctuations influencent ensuite le comportement du champ de vitesse \mathbf{u}^{n+1} dans un voisinage de l'interface. Dans les cas testés, cet effet en chaîne entraîne généralement l'explosion de la membrane en seulement quelques itérations.

La seule simulation n'ayant pas totalement échouée est celle associée au cas où $\nu = 10$, $\Delta t = h/10$ et $T_o = 1$. Bien que la solution numérique soit demeurée stable dans ce cas extrême, l'état stationnaire n'a jamais été atteint puisque la membrane s'est à peine déplacée et ce, même après 15 000 itérations! Ceci était prévisible puisque la force élastique nécessaire pour générer un mouvement dans un fluide d'une telle viscosité (celui-ci se comporte quasiment comme un solide) est bien supérieure à celle que nous avons prescrite.

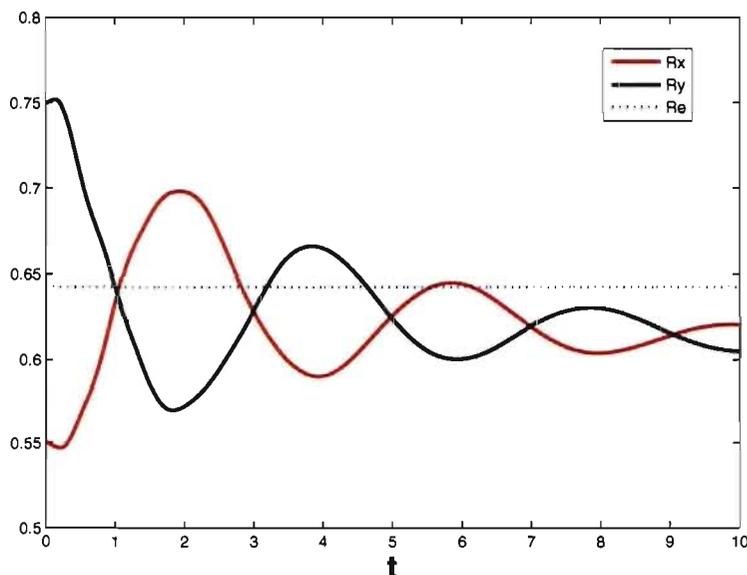


FIG. 3.17. Évolution des petit et grand axes (R_y et R_x) de la membrane $\Gamma(t)$, obtenue avec la méthode IB lorsque $N = 40$, $\Delta t = 0.004$ et $\nu = 0.01$.

3.6.7.2. Résolution avec la méthode IB

À titre complémentaire, nous présentons maintenant les résultats obtenus avec la méthode IB pour le problème instationnaire associé au cas $\nu = 0.01$ et $T_o = 1$. Afin de garantir la stabilité de l'algorithme explicite (1.4.5), un pas de temps suffisamment petit a été utilisé $\Delta t = 0.004$.

La Figure 3.17 illustre l'évolution des grand et petit axe (R_x et R_y) de la membrane Γ^n lorsque $N = 40$. L'évolution de la position de la membrane Γ^n et du champ vectoriel \mathbf{u}^{n+1} apparaissent sur les graphiques de la Figure 3.18. Nous constatons d'abord une convergence oscillatoire de R_x et R_y vers le rayon d'équilibre $R_e = \sqrt{ab} = 0.6423$ associé à Γ_e . Cette relaxation oscillatoire de la membrane se produit lorsque la viscosité du fluide est insuffisante pour diffuser toute l'énergie élastique de manière à ce que la convergence vers l'état d'équilibre soit monotone. Pour une constante $T_o = 1$ fixée, nos simulations ont démontré que la relaxation de la membrane devient monotone lorsque la viscosité dépasse $\nu > 0.1$.

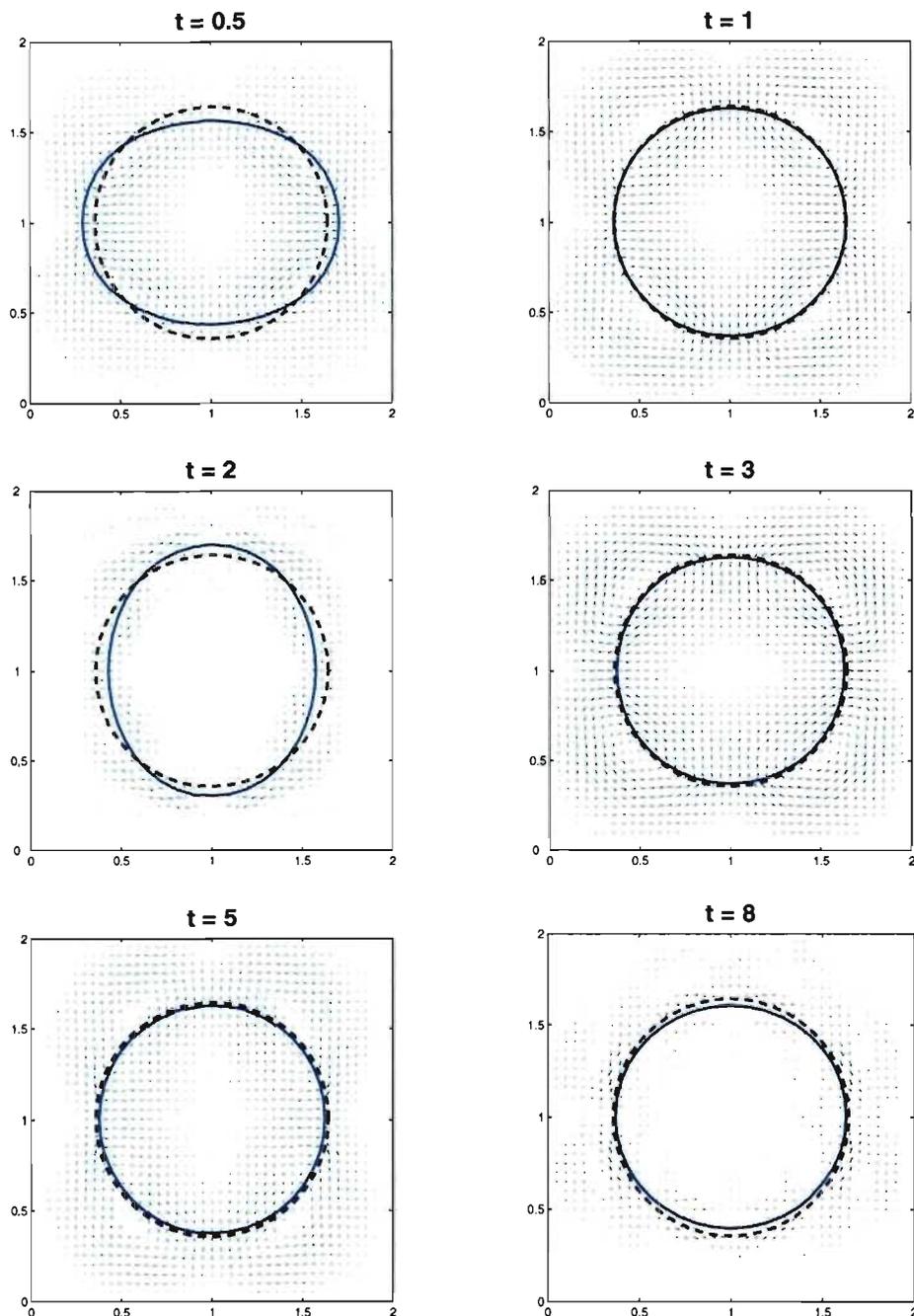


FIG. 3.18. Évolution de la membrane $\Gamma(t)$ et du champ de vitesse \mathbf{u}^{n+1} , obtenues avec la méthode IB lorsque $N = 40$, $\Delta t = 0.004$ et $\nu = 0.01$.

D'autre part, nous pouvons clairement observer sur les Figures 3.17 et 3.18, une perte de la conservation de l'aire Q_e qui est délimitée par la région interne Ω^- . Les graphiques de la Figure 3.19 illustrent le comportement *loglog*

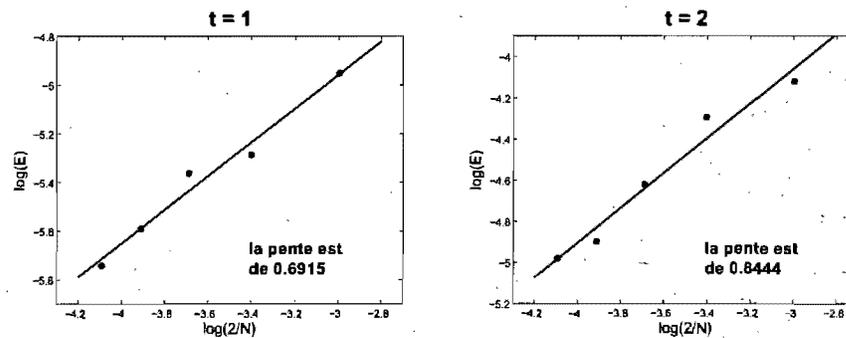


FIG. 3.19. Conservation de l'aire de la région Ω^- au temps $t = 1$ et $t = 2$, lorsque nous raffinons le pas h du maillage.

de l'erreur associée à l'aire interne Q_e , lorsque le pas du maillage h est réduit ($N = 40, 60, 80, 100, 120$). Comme prévu, l'ordre de convergence de cette erreur est approximativement linéaire.

3.7. CONCLUSION

Ce dernier chapitre a débuté avec une présentation de la méthode de projection sans pression de Kim et Moin [14]. Suite à un résumé de l'algorithme général pour PMIII, nous avons introduit la discrétisation des opérateurs différentiels utilisés pour résoudre les équations de Navier-Stokes. Une discussion sur le choix des conditions frontières pour le champ de vitesse intermédiaire u^* et ceux qui découle pour l'approximation ϕ^{n+1} a suivi. Des résultats numériques sont ensuite venus souligner l'importance de ce choix dans la construction d'une méthode de projection de second ordre.

Par la suite, nous avons discuté des difficultés liées au couplage des conditions de saut pour les équations de Navier-Stokes lorsque la viscosité du fluide est discontinue à travers l'interface. Afin de contourner ce problème de couplage, nous avons suggéré une nouvelle dérivation basée sur l'intégration des équations discrétisées, c'est à dire les équations qui sont réellement résolues par PMIII. Une démonstration de l'équivalence des conditions de saut approximatives avec les conditions de saut exactes apparaissant dans la littérature a ensuite été présentée.

Une fois le bagage théorique en main, nous avons expliqué tous les détails techniques concernant notre implémentation de la méthode IIM. Suite à une description du problème de la membrane élastique immergée dans un fluide visqueux, nous avons présenté les résultats numériques obtenus avec les méthodes IB et IIM pour la version stationnaire du problème. Bien que la méthode IIM soit généralement plus précise ($O(h^{\frac{3}{2}})$ pour \mathbf{u}^{n+1} et $O(h)$ pour $p^{n+\frac{1}{2}}$) et capte mieux la discontinuité de la pression, nous avons constaté que la méthode IB est plus robuste, car elle produit une solution stationnaire pour toutes les valeurs de ν testées. En effet, nous avons souligné la présence d'oscillations dans la solution IIM lorsque le ratio $\nu\Delta t$ est trop petit. Nous croyons que ce phénomène est la cause principale des instabilités rencontrées lors de la résolution du problème instationnaire avec la méthode IIM. Enfin, une solution IB du problème instationnaire a été fournie à titre complémentaire.

CONCLUSION

Dans de ce mémoire, les équations mathématiques modélisant l'interaction d'un fluide incompressible et visqueux avec une membrane élastique déformable ont été présentées. Les équations de Navier-Stokes décrivant le mouvement du fluide sont d'abord discrétisées sur un maillage cartésien fixe. Ensuite, un ensemble fini de points de contrôle permet de suivre la position de l'interface immergée. Afin de simuler ce type de problème d'interface, deux stratégies de résolution ont été envisagées. La méthode IB utilise une fonction δ -discrète pour modéliser la force élastique résultant de l'étirement de la membrane. D'autre part, la méthode IIM utilise plutôt une connaissance des irrégularités de la solution, provenant de la présence de la force singulière dans les équations différentielles, pour modifier adéquatement les schémas aux différences finies. Ces deux méthodes numériques ont été évaluées sur quelques problèmes d'interface pour comparer la performance de chacune.

L'objectif ultime de mes travaux de maîtrise était le développement d'une méthode IIM pour modéliser l'écoulement de deux fluides de différentes viscosités séparés par une membrane élastique. Nous rappelons ici les grandes difficultés liées à la conception d'une telle méthode ainsi que les différentes stratégies que nous avons empruntées pour progresser vers ce but.

Dans un premier lieu, nous avons présenté tous les détails techniques concernant l'implémentation de la méthode IIM pour résoudre un problème d'interface elliptique bidimensionnel. L'algorithme que nous avons développé pour rechercher les points d'intersection entre les deux maillages discrets a été décrit et des suggestions ont été faites afin d'éviter certaines configurations d'interface problématiques. Pour l'évaluation des termes de correction, des explications détaillées

ont été fournies pour tous les scénarios possibles. Deux exemples numériques sont ensuite venus illustrer la supériorité de la méthode IIM pour ce type de problème d'interface.

Ensuite, nous avons attaqué le problème lié au couplage des conditions de saut obtenues à partir des équations de Navier-Stokes lorsque la viscosité du fluide est discontinue à travers l'interface. Face à ce problème, nous avons opté pour une nouvelle dérivation des conditions de saut basée sur l'intégration des équations discrétisées. Pour ce faire, l'utilisation d'une méthode de projection sans-pression a permis un certain découplage des sauts. Dans le cas où la viscosité est continue, nous avons démontré que ces sauts approximatifs sont équivalents aux sauts exacts. La particularité de notre mise en œuvre de la méthode IIM provient justement de l'utilisation de ces sauts approximatifs lors du calcul des termes de correction.

En dernier lieu, nous avons présenté notre algorithme numérique pour résoudre les équations de Navier-Stokes lorsque la viscosité est constante. Le cas test que nous avons considéré pour tester notre version de la méthode IIM est celui d'une membrane élastique étirée et immergée dans un fluide visqueux. Pour la version stationnaire de ce problème, nous avons constaté un certain recul sur l'ordre de convergence prévu pour la solution \mathbf{u}^{n+1} et $p^{n+\frac{1}{2}}$. Nous avons aussi observé la présence d'oscillations dans la solution ϕ^{n+1} , phénomène qui semble s'intensifier lorsque le ratio $\nu\Delta t$ diminue. Bien que nous ayons testé différentes stratégies pour remédier à cette situation, aucune alternative viable éliminant cette contrainte n'a été trouvée. Enfin, à défaut de pouvoir obtenir une solution IIM stable pour le problème instationnaire, nous avons présenté à titre complémentaire des résultats obtenus avec la méthode IB.

Nous avons évidemment laissé plusieurs questions en suspens. Nous aurions d'abord aimé voir si l'utilisation d'un maillage de type MAC dans la discrétisation des équations peut réduire les oscillations de la solution IIM lorsque le ratio $\nu\Delta t$ est petit. D'autre part, comme mentionné à la Section 3.5.1.1, nous avons négligé les irrégularités des champs de vitesse \mathbf{u}^{n-1} et \mathbf{u}^n à travers les interfaces Γ^{n-2} et Γ^{n-1} dans la discrétisation des termes inertiels. Bien que ceci n'ait eu aucune

influence sur la solution IIM du problème stationnaire, il serait intéressant de voir si l'ajout de termes de correction C^n (qui tiennent comptes de ces irrégularités) dans la discrétisation de l'équation (3.5.3) améliore la solution IIM pour le problème instationnaire. Une autre avenue à explorer pour améliorer la stabilité de notre algorithme est l'utilisation d'une méthode IIM implicite comme celle suggérée par Lee et Leveque [16] et Tu et Peskin [20]. Enfin, le problème clé qui demeure sans solution concerne le découplage de la condition de saut approximatif pour $\mathbf{u}_{\xi\xi}^*$ lorsque la viscosité est discontinue. Une fois découplé, il serait peut être possible d'utiliser des schémas d'interpolation pour évaluer les sauts approximatifs de ϕ^{n+1} à partir des sauts de \mathbf{u}^* et d'obtenir enfin une méthode IIM pour les équations de Navier-Stokes avec la présence d'une force singulière lorsque la viscosité est discontinue.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] B.F.ARMALLY, F.DURST, J.C.F PEREIRA ET B.SCHÖNUNG, *Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow*, J. Fluid Mech. **127**, 473-496, (1983).
- [2] J.B. BELL, P. COLELLA ET H.M. GLAZ, *A second order projection method for the incompressible Navier-Stokes equations*, J. Comput. Phys. **85**, 257-283, (1989).
- [3] D.L. BROWN, *Accurate projection methods for the incompressible Navier-Stokes equations*, Workshop on numerical simulation of incompressible flows, Half Moon Bay, Ca (2001).
- [4] D.L. BROWN, R. CORTEZ ET M.L. MINION, *Accurate projection methods for the incompressible Navier-Stokes equations*, J. Comput. Phys. **168**, 464-499, (2001).
- [5] A.J. CHORIN, *A numerical method for solving incompressible viscous flow problems*, J. Comput. Phys. **2**, 12-26, (1967).
- [6] J.T. CHUNG, *Computational Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, (2002).
- [7] R. FERNANDEZ-FERIA ET E. SANMIGUEL-ROJAS, *An explicit projection method for solving incompressible flows driven by a pressure difference*, Computers & Fluids **33**, 463-483, (2004).
- [8] J.B.GROTBERG ET O.E.JENSEN, *Biofluid mechanics in flexible tubes*, Annu. Rev. Fluid Mech. **36**, 121-147,(2004).
- [9] A.G.HOEKSTRA, J.V. HOFF, A.M. ARTOLI ET P.M.A SLOOT, *Unsteady flow in a 2D elastic tube with the LBGK method*, Future Generation Computer System **20**, 917-924, (2004).

- [10] K. ITO ET Z. LI, *Interface conditions for Stokes equations with a discontinuous viscosity and surface sources*, Applied Mathematics Letters **19**, 229-234, (2006).
- [11] Z. LI ET K. ITO, *The Immersed Interface Method : Numerical Solutions of PDEs Involving Interface and Irregular Domain*, SIAM Frontiers in Applied Mathematics, Philadelphia, (2006)
- [12] Z. LI, K. ITO ET M.C. LAI, *An augmented approach for Stokes equations with discontinuous viscosity and singular forces*, Computers & Fluids **35**, 622-635, (2007).
- [13] J.L.GUERMOND, P.MINEV ET J. SHEN, *An overview of projection methods for incompressible flows*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **195**, 6011-6045, (2006).
- [14] J.KIM ET P.MOIN, *Application of a fractional-step method to incompressible Navier-Stokes equations*, J. Comput. Phys. **59**, 308-323, (1985).
- [15] Z. LI ET M.C. LAI, *The immersed interface method for the Navier-Stokes equations*, J. Comput. Phys. **171**, 822-842, (2001).
- [16] L. LEE ET R.J. LEVEQUE, *An immersed interface method for incompressible Navier-Stokes equations*, SIAM J. Sci. Comput. **25**, 832-856, (2003).
- [17] R.J. LEVEQUE ET Z. LI, *The immersed interface method for elastic equations with discontinuous coefficients and singular source*, SIAM J. Numer. Anal. **31**, 1019-1044, (1994).
- [18] R.J. LEVEQUE ET Z. LI, *Immersed interface methods for Stokes flow with elastic boundaries or surface tension*, SIAM J. Sci. Comput. **18**, 709-735, (1997).
- [19] C.S. PESKIN, *The immersed boundary method*, Acta Numer. **11**, 479-517, (2002)
- [20] C.S. PESKIN ET C. TU , *Stability and instability in the computation of flows with moving immersed boundaries : A comparaisn of three methods*, SIAM J. Sci. Comput. **13**, 1361-1376, (1992).
- [21] C.C VESIER ET A.P. YOGANATHAN, *A computer method for cardiovascular flow fields : a validation of approach*, J. Comput. Phys. **99**, 271-287, (1992).

- [22] J.R. WOMERSLEY, *Oscillatory motion of a viscous liquid in a thin-walled elastic tube I : The linear approximation for long waves*, Philosophical Magazine **46**, 199-221, (1955).
- [23] J.R. WOMERSLEY, *Method for the calculation of velocity, rate of flow and viscous drag in arteries when the pressure gradient is known*, J. Physiol. **127**, 553-563, (1955).

Annexe A

DÉRIVATION DES CONDITIONS DE SAUT

Utilisant le système de coordonnées locales (2.2.7), les conditions de saut (3.2.7)-(3.2.10) peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$[p] = f_n, \quad (\text{A.0.1})$$

$$[p_\xi] = \frac{df_\tau}{d\eta}, \quad (\text{A.0.2})$$

$$[\mathbf{u}] = 0, \quad (\text{A.0.3})$$

$$[\mathbf{u}_\xi] = -\frac{1}{\nu} f_\tau \boldsymbol{\tau}. \quad (\text{A.0.4})$$

A.1. SAUT DANS LA DÉRIVÉE TANGENTIELLE \mathbf{u}_η

Nous débutons par dériver (A.0.3) le long de la direction tangentielle, ce qui donne

$$\frac{d}{d\eta}[\mathbf{u}] = [\mathbf{u}_\eta] + \chi'[\mathbf{u}_\xi] = 0. \quad (\text{A.1.1})$$

L'évaluation de ce résultat en $(0, 0)$ permet d'obtenir

$$[\mathbf{u}_\eta] = 0, \quad (\text{A.1.2})$$

ce qui correspond à l'équation (3.2.11).

A.2. SAUT DANS LA DÉRIVÉE SECONDE $\mathbf{u}_{\eta\eta}$

Nous calculons maintenant la dérivée seconde $\frac{d^2}{d\eta^2}$ de l'équation (A.0.3), ce qui donne

$$\frac{d^2}{d\eta^2}[\mathbf{u}] = [\mathbf{u}_{\eta\eta}] + 2\chi'[\mathbf{u}_{\eta\xi}] + (\chi')^2[\mathbf{u}_{\xi\xi}] + \chi''[\mathbf{u}_\xi] = 0. \quad (\text{A.2.1})$$

L'évaluation de ce résultat en $(0,0)$ utilisé conjointement avec le saut (A.0.4) permet d'obtenir

$$[\mathbf{u}_{\eta\eta}] = -\kappa[\mathbf{u}_\xi] = \frac{\kappa}{\nu}f_\tau\boldsymbol{\tau}, \quad (\text{A.2.2})$$

ce qui correspond à l'équation (3.2.12)

A.3. SAUT DANS LA DÉRIVÉE SECONDE $\mathbf{u}_{\eta\xi}$

Une dérivation du saut (A.0.4) le long de la direction tangentielle donne

$$\frac{d}{d\eta}[\mathbf{u}_\xi] = [\mathbf{u}_{\eta\xi}] + \chi'[\mathbf{u}_{\xi\xi}] = -\frac{1}{\nu}\frac{d}{d\eta}(f_\tau\boldsymbol{\tau}). \quad (\text{A.3.1})$$

L'évaluation de ce résultat en $(0,0)$ permet d'obtenir

$$[\mathbf{u}_{\eta\xi}] = -\frac{1}{\nu}\frac{d}{d\eta}(f_\tau\boldsymbol{\tau}), \quad (\text{A.3.2})$$

ce qui correspond à l'équation (3.2.13).

A.4. SAUT DANS LA DÉRIVÉE SECONDE $\mathbf{u}_{\xi\xi}$

La condition de saut (3.2.14) nécessite un peu plus de travail. Les relations (3.2.7)- (3.2.8) permettent d'abord d'obtenir le saut pour le gradient de pression.

Nous voyons que

$$[p_x] = [p_\xi \cos \theta - p_\eta \sin \theta], \quad (\text{A.4.1})$$

$$[p_y] = [p_\xi \sin \theta + p_\eta \cos \theta], \quad (\text{A.4.2})$$

et donc que

$$[\nabla p] := [(p_x, p_y)] = \frac{df_\tau}{d\eta}\mathbf{n} + \frac{df_n}{d\eta}\boldsymbol{\tau}, \quad (\text{A.4.3})$$

où nous avons utilisé le fait que $[p_\eta] = \frac{df_n}{d\eta}$.

Or, l'évaluation du saut de l'équation (1.2.1) donne

$$\left[\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \xi^2} \right] + \left[\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \eta^2} \right] = \frac{1}{\nu} [\nabla p] = \frac{1}{\nu} \left(\frac{df_\tau}{d\eta} \mathbf{n} + \frac{df_n}{d\eta} \boldsymbol{\tau} \right),$$

ce qui combiné avec (A.2.2) et le fait que $\frac{dn}{d\eta} = -\kappa \boldsymbol{\tau}$ permet d'obtenir

$$\left[\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \xi^2} \right] = \frac{1}{\nu} \left(\frac{d}{d\eta} (f_\tau \mathbf{n}) + \frac{df_n}{d\eta} \boldsymbol{\tau} \right), \quad (\text{A.4.4})$$

ce qui correspond à l'équation (3.2.14).

Annexe B

JUSTIFICATION DE L'HYPOTHÈSE DE CONTINUITÉ

À la Section 3.4, nous avons supposé que le champ de vitesse \mathbf{u}^{n+1} et ses dérivées partielles étaient continues à travers l'interface Γ^{n+1} , ce qui a permis d'obtenir la simplification des conditions de saut approximatif du Tableau 3.3. Afin de comprendre le bien-fondé de cette hypothèse, nous analysons maintenant le rôle des données qui entrent dans le calcul du champ discret \mathbf{u}^{n+1} lors de la $(n + 1)$ -ième itération du schéma numérique IIM présenté à la Section 3.5.

Au temps $t^n = n\Delta t$, l'algorithme prend la forme suivante :

- Étape 1 : Évaluer le champ intermédiaire \mathbf{u}^* à partir de l'équation (3.5.3). Lors de la résolution de cette équation, les fonctions \mathbf{u}^{n-1} et \mathbf{u}^n sont utilisées pour évaluer la fonction source \mathbf{G}^n définie par (3.5.1). La fonction ϕ^n joue un rôle dans l'évaluation de la composante tangentielle des conditions frontières (3.5.5) de \mathbf{u}^* . Enfin, la position des marqueurs lagrangiens \mathbf{X}_k^n situés sur l'interface influence aussi la solution \mathbf{u}^* , car elle permet d'obtenir l'approximation de la densité de force $\tilde{\mathbf{f}}_k^n$ qui est utilisée pour évaluer les termes de correction \mathbf{C}^* .
- Étape 2 : Évaluer la fonction approximative ϕ^{n+1} à partir de l'équation (3.5.9). Les données utilisées pour résoudre ce problème de Poisson sont le champ intermédiaire \mathbf{u}^* (déterminé à l'Étape 1) ainsi que la position des

marqueurs lagrangiens \mathbf{X}_k^n qui sert à l'évaluation des termes de correction B^1 et B^2 .

- Étape 3 : Évaluer le champ de vitesse \mathbf{u}^{n+1} à partir des équations (3.5.6) et (3.5.7). Toutes les données précédentes (\mathbf{u}^{n-1} , \mathbf{u}^n , ϕ^n , ϕ^{n+1} et \mathbf{X}_k^n) interviennent dans cette mise à jour.
- Étape 4 : Calcul de la position des marqueurs lagrangiens \mathbf{X}_k^{n+1} situés sur l'interface Γ^{n+1} via l'équation

$$\mathbf{X}_k^{n+1} = \mathbf{X}_k^n + \Delta t \mathbf{u}^{n+1}(\mathbf{X}_k^n).$$

Nous remarquons que le champ de vitesse \mathbf{u}^{n+1} déterminé à l'Étape 3 ne peut être influencé que par les données : \mathbf{u}^{n-1} , \mathbf{u}^n , ϕ^n , ϕ^{n+1} et \mathbf{X}_k^n . Ainsi, \mathbf{u}^{n+1} est calculé sans aucune connaissance à priori de la position de l'interface Γ^{n+1} , puisque celle-ci n'est calculée qu'à l'Étape 4. Par conséquent, il est raisonnable de supposer que les irrégularités du champ de vitesse \mathbf{u}^{n+1} (causées uniquement par la présence de la force singulière \mathbf{F}^n qui est évaluée à partir des marqueurs lagrangiens \mathbf{X}_k^n) n'apparaissent que sur l'interface Γ^n .