

Direction des bibliothèques

AVIS

Ce document a été numérisé par la Division de la gestion des documents et des archives de l'Université de Montréal.

L'auteur a autorisé l'Université de Montréal à reproduire et diffuser, en totalité ou en partie, par quelque moyen que ce soit et sur quelque support que ce soit, et exclusivement à des fins non lucratives d'enseignement et de recherche, des copies de ce mémoire ou de cette thèse.

L'auteur et les coauteurs le cas échéant conservent la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent ce document. Ni la thèse ou le mémoire, ni des extraits substantiels de ce document, ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans l'autorisation de l'auteur.

Afin de se conformer à la Loi canadienne sur la protection des renseignements personnels, quelques formulaires secondaires, coordonnées ou signatures intégrées au texte ont pu être enlevés de ce document. Bien que cela ait pu affecter la pagination, il n'y a aucun contenu manquant.

NOTICE

This document was digitized by the Records Management & Archives Division of Université de Montréal.

The author of this thesis or dissertation has granted a nonexclusive license allowing Université de Montréal to reproduce and publish the document, in part or in whole, and in any format, solely for noncommercial educational and research purposes.

The author and co-authors if applicable retain copyright ownership and moral rights in this document. Neither the whole thesis or dissertation, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms, contact information or signatures may have been removed from the document. While this may affect the document page count, it does not represent any loss of content from the document.

Université de Montréal

Clones sous-maximaux des fonctions monotones
sur l'univers à trois éléments

par

Charles Bariteau

Département de mathématiques et de statistique

Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures

en vue de l'obtention du grade de

Maître ès sciences (M.Sc.)
en Mathématiques

mars 2008

© Charles Bariteau, 2007



Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

**Clones sous-maximaux des fonctions monotones
sur l'univers à trois éléments**

présenté par

Charles Bariteau

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Khalid Benabdallah

(président-rapporteur)

Ivo Rosenberg

(directeur de recherche)

Abraham Broer

(membre du jury)

Mémoire accepté le:

SOMMAIRE

Un clone est un ensemble fermé de fonctions contenant les projections. Dans le treillis de tous les clones à trois éléments, il y a 18 clones maximaux. Nous donnons une brève description de ceux-ci et nous étudions plus particulièrement l'un d'entre eux à savoir le clone O des fonctions monotones (en prenant soin d'avoir un ordre pour les 3 éléments). Ensuite, nous prouvons qu'il y a 13 clones sous-maximaux en-dessous de O . Finalement, nous continuons dans le treillis en regardant l'intervalle entre le clone O et le clone F_p constitué des fonctions polynomiales. Nous prouvons que cet intervalle comporte 7 clones.

Mots clés : Clones, treillis de clone, fonction monotone, opération booléenne, fonction logique à trois valeurs, relations, clones maximaux.

SUMMARY

A clone is a closed set of functions containing all projections. In the lattice of all clones on a 3-elements set, there are 18 maximal clones. We give a brief description of these clones, and we investigate one of them ; the clone of monotone functions (with respect of a given ordering of the 3-elements). Then we prove that there are 13 sub-maximal clones in of the clone O of monotone functions. After, we go a bit further in the lattice by looking at the interval between the clone O and the clone F_p of polynomial functions. We prove that this interval consists of 7 clones.

Key words : Clones, clone lattice, monotone functions, boolean operations, 3-valued logic function, relations, maximal clone.

TABLE DES MATIÈRES

Sommaire	iii
Summary	iv
Liste des figures	vii
Liste des tableaux	viii
Remerciements	1
Introduction	2
Préliminaires	4
Chapitre 1. Clones P_3-maximaux	7
1.1. Clones $D(0), D(1), D(2), D(0,1), D(1,2), D(2,0)$	9
1.2. Clones $O(0), O(1), O(2)$	10
1.3. Clones $C(0), C(1), C(2)$	13
1.4. Clones $E(0), E(1), E(2)$	13
1.5. Clones S	15
1.6. Clone P	17
1.7. Clone L	18
1.8. conclusion.....	19
Chapitre 2. Clones $O(1)$-maximaux	20
2.1. Clones M_{max} et M_{min}	20

2.2.	Théorème principal	22
2.3.	Preuve du théorème principal	24
2.4.	Notion de dual	26
2.5.	Preuve de la condition A	29
2.6.	Preuve de la condition B	42
Chapitre 3. treillis entre le clone des fonctions monotones et le clone des fonctions polynomiales.....		54
3.1.	Fonctions polynomiales	54
3.2.	Générateurs de $F_p, O, M_7, M_9, M_{10}, M_7 \cap M_9, M_7 \cap M_{10}$	55
3.3.	Treillis des clones entre F_p et O	67
Conclusion		71
Bibliographie		72

LISTE DES FIGURES

1.1	relation binaire d'ordre borné	11
1.2	relation binaire centrale	13
1.3	relation d'équivalence non-triviale $E(a)$	14
1.4	relation autoduale	18
1.5	Ensembles P_3 -maximaux	19
2.1	Fonctions $u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2$	30
2.2	Les fonctions v_2, f_0 et $f_0(s_{002}(pr_1^2), s_{002}(pr_2^2))$, telles que $a, b, c \in \{0, 1\}$, $f \in \{1, 2\}$ et $g, h \in \{0, 1, 2\}$	52
3.1	Diagramme de Hasse de $c_0, c_1, c_2, s_{011}, s_{112}, id$	55
3.2	Treillis entre O et F_p	56

LISTE DES TABLEAUX

1.1	Exemple d'une fonction binaire de $D\{0, 1\}$	10
1.2	fonctions de $O^{(1)}$	12
2.1	Fonctions de $M_i \setminus M_j$	40
2.2	Fonctions de $M_i \setminus M_j$, (suite)	41

*A mathematician is a blind man in a dark room
looking for a black cat which isn't there.*

Darwin, Charles R.

*Celui qui, au départ, insiste pour savoir où il va,
quand il part, et par où il passe n'ira pas loin.*

Napoléon

Alea jacta est.

Jules César

REMERCIEMENTS

Merci à mes parents pour m'avoir donné le goût des connaissances et à mes professeurs pour me les avoir transmises. Ces derniers sont nombreux à remercier puisque je pense avoir eu de très bons professeurs tout au long de mes études. Un merci spécial à Ivo Rosenberg qui a été d'une grande aide dans la rédaction de ce mémoire, tant par son savoir que par sa patience à mon égard.

Merci à tout ce qui m'a aidé à passer "à travers" mes études, dans les moments les meilleures comme les pires. Je pense surtout aux très bons amis que je me suis faits à l'université. Le lama, manana, valou, fred, Dello, Steven, vous êtes tous des raisons pour lesquelles je garderai un très bon souvenir de mon passage à l'université. Je savais bien qu'au bout du compte nous y arriverions et que ce serait plus de plaisirs que d'autres choses...

Mais aujourd'hui, alors que je remets ce mémoire, c'est Sophie "les petits fruits" Picard, mon inspiration, qui m'a tant appris sur moi que je remercie le plus au monde.

INTRODUCTION

Les fonctions booléennes sont les fonctions de $\{0, 1\}^n$ dans $\{0, 1\}$ (domaine de cardinalité 2). Leur utilité n'est désormais plus à démontrer et elles se sont avérées capitales dans le développement de l'informatique et de l'électronique, particulièrement dans le codage de l'information. Cependant, ces fonctions logiques ont pris leur importance bien après que leur étude approfondie ait été faite.

Bien que ce soit Boole au milieu du *XIX^{ième}* siècle qui a jeté les bases théoriques de ces fonctions portant maintenant son nom, il en restait encore beaucoup à comprendre pour les années à venir. L'algèbre universelle et ses treillis allaient s'annoncer très utiles à ce développement.

Une des découvertes intéressantes faite sur les fonctions booléennes fut les ensembles de fonctions fermées par l'opération de composition. Après avoir déterminé quelles étaient les ensembles de fonctions fermées, il fut naturel de tenter d'y introduire leur ordre.

On donna le nom de "clones" aux ensembles de fonctions fermées par rapport à la composition et contenant toutes les projections. Ordonnés par l'inclusion ensembliste, les clones forment un treillis algébrique, et c'est à Post[6] que l'on doit l'étude de ce treillis, aujourd'hui appelé treillis de Post. Il en a donné la structure, laquelle est composée d'une infinité dénombrable de clones. On y retrouve par exemple un ordre, un élément maximal, minimal et des clones maximaux et minimaux.

Après que le treillis des clones et des ensembles fermés de fonctions booléennes ait été construit, certains se sont penchés sur le même problème, touchant les fonctions logiques où le domaine a une cardinalité $k \geq 3$, c'est-à-dire les fonctions de $\{0, 1, \dots, k-1\}^n$ dans $\{0, 1, \dots, k-1\}$. Yablonski[11] a d'ailleurs été le premier à formuler l'ensemble des clones maximaux à k -éléments. Ces travaux étaient très longs et l'on doit à Rosenberg [8] une preuve qui utilise la notion des relations, inspirée d'une idée de Kuzmetsov. Nous partirons donc de ces résultats pour $k = 3$ dans le premier chapitre (théorème 1.0.1) et ainsi décrire d'une manière plus détaillée les différents clones maximaux.

Les résultats obtenus à nos jours sont encore partiels, bien que l'on sache que les treillis sont de cardinalité $2^{\mathfrak{N}_0}$. J'expliquerai les résultats de certains chercheurs ayant tenté de compléter la structure de ces treillis.

Par exemple au deuxième chapitre, je revisiterai un article de Machida [4] qui traite spécialement du clone des fonctions monotones en y prouvant le théorème principal (2.2.1). Je reformulerai quelques preuves qui ont été omises lors de l'article original.

Lors du troisième et dernier chapitre, je continuerai l'étude des clones de fonctions monotones en recorrigant un résultat de Marichal et Foldes [5] (théorème 3.2.1) concernant les clones polynomiales de fonctions monotones.

PRÉLIMINAIRES

Afin de mieux comprendre les résultats à venir, quelques définitions et schémas s'avèreront utiles.

Pour $k > 1$, soit $E_k = \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$, et pour $n > 0$ soit $(E_k)^n$ sa puissance cartésienne. On définit $P_k^{(n)}$ comme l'ensemble des fonctions n -aires, c'est-à-dire les applications de $(E_k)^n$ dans E_k , et on pose $P_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_k^{(n)}$, qui constitue l'ensemble de toutes les fonctions sur E_k . Parfois, on pose $P_k^0 = E_k$ et on l'utilise pour des éléments distingués, par exemple pour l'élément neutre d'un groupe. Comme cela peut poser des complications notationnelles, nous ne l'introduirons pas.

Pour $n \geq 1$ et $1 \leq i \leq n$, le symbole pr_i^n est pour sa part la i -ième *projection* n -aire, qui est la fonction envoyant tout $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in (E_k)^n$ sur x_i . De plus, PR_k est l'ensemble de toutes les projections.

Soit $f \in P_k^{(n)}$ (une fonction n -aire) et $g_1, g_2, \dots, g_n \in P_k^{(m)}$ (des fonctions m -aires), alors la *composition* de f et g_1, g_2, \dots, g_n est l'élément de $P_k^{(m)}$, noté par $f(g_1, g_2, \dots, g_n)$, défini pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_m) \in (E_k)^m$ par :

$$f(g_1, \dots, g_n)(x_1, \dots, x_m) = f((g_1(x_1, \dots, x_m), g_2(x_1, \dots, x_m), \dots, g_n(x_1, \dots, x_m))).$$

Définition 0.0.1.

- i) La *fermeture* d'un sous-ensemble F de P_k , notée \overline{F} , est le plus petit (par rapport à \subseteq) sous-ensemble de P_k qui contient toutes les compositions $f(g_1, g_2, \dots, g_n)$, avec $f \in \overline{F} \cap P_k^{(n)}$ et $g_1, g_2, \dots, g_n \in (\overline{F} \cap P_k^{(m)}) \cup (PR_k \cap P_k^{(n)})$.

ii) Un sous-ensemble $F \subseteq P_k$ est **fermé** si $F = \overline{F}$.

Les propriétés suivantes des fermés sont bien connues et se vérifient directement.

Lemme 0.0.1. Soit F et G , des sous-ensembles de P_k . Alors :

- i) $\overline{F} \supseteq F$,
- ii) $F \supseteq G \Rightarrow \overline{F} \supseteq \overline{G}$,
- iii) $\overline{\overline{F}} = \overline{F}$,
- iv) F et G fermés $\Rightarrow F \cap G$ fermé.

Remarque 0.0.1. Si $\{F : i \in I\}$ est une famille des sous-ensembles fermés de P_k , alors $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un sous-ensemble de fermé de P_k . Par conséquent, \overline{F} est le plus petit fermé qui contient F .

Définition 0.0.2. $C \subseteq P_k$ est un **clone** si $PR_k \subseteq C$ et C est fermé.

Définition 0.0.3. Soit H un sous-ensemble fermé de P_k et F un sous-ensemble fermé de H . On dit que F est **H-maximal** si $F \neq H$ et si $F \subset G \subseteq H$, alors $\overline{G} = H$.

Définition 0.0.4. Pour $r \geq 1$, une **relation** r -aire ρ sur E_k est un sous-ensemble de $(E_k)^r$; c'est-à-dire un ensemble des r -uples sur E_k . Nous écrivons les r -uples comme des colonnes.

Définition 0.0.5. On dit d'une fonction $f \in P_k^{(n)}$ qu'elle **préserve une relation** ρ r -aire sur E_k si $(f(a_{11}, \dots, a_{1n}), f(a_{21}, \dots, a_{2n}), \dots, f(a_{r1}, \dots, a_{rn}))^T \in \rho$ lorsque $(a_{1i}, \dots, a_{ri})^T \in \rho$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$. L'ensemble de toutes les fonctions qui préservent une relation ρ est noté $Pol(\rho)$.

Lemme 0.0.2. Soit ρ une relation r -aire sur E_k . Alors $Pol(\rho)$ est un clone.

Démonstration. Il faut montrer la fermeture et l'inclusion de PR_k .

- **Pol(ρ) est fermé :** Considérons la fonction $f \in Pol(\rho)$ n -aire, et $g_1, \dots, g_n \in Pol(\rho)$ m -aires. Montrons $h = f(g_1, \dots, g_n) \in Pol(\rho)$.

Soit $(x_{1j}, \dots, x_{rj})^{\mathbf{T}} \in \rho, \forall j = 1, 2, \dots, m$. Pour $i = 1, \dots, n$ et $l = 1, \dots, r$, on pose $a_{li} = g_i(x_{l1}, \dots, x_{lm})$. Comme $g_i \in Pol(\rho)$ pour tout $i = 1, \dots, n$, on voit que pour tout $i = 1, \dots, n$;

$$(a_{1i}, \dots, a_{ri}) = (g_i(x_{11}, \dots, x_{1m}), \dots, g_i(x_{r1}, \dots, x_{rm}))^{\mathbf{T}} \in \rho.$$

De plus, $f \in Pol(\rho)$ et donc

$$\begin{aligned} (h(x_{11}, \dots, x_{1m}), \dots, h(x_{r1}, \dots, x_{rm}))^{\mathbf{T}} &= (f(g_1(x_{11}, \dots, x_{1m}), \dots, g_n(x_{11}, \dots, x_{1m}))^{\mathbf{T}}, \\ &\quad \dots, (f(g_1(x_{r1}, \dots, x_{rm}), \dots, g_n(x_{r1}, \dots, x_{rm}))^{\mathbf{T}}))^{\mathbf{T}} \\ &= (f(a_{11}, \dots, a_{1n}), \dots, f(a_{r1}, \dots, a_{rn})) \in \rho. \end{aligned}$$

- **$PR_k \subseteq Pol(\rho)$:** Soit $(x_{11}, \dots, x_{1n}), \dots, (x_{r1}, \dots, x_{rn}) \in (E_k)^n$ tel que $(x_{1j}, \dots, x_{rj}) \in \rho$ pour tout $j = 1, 2, \dots, n$ et $pr_i^{(n)} \in PR_k$. Alors la relation $(pr_i^{(n)}(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}), \dots, pr_i^{(n)}(x_{r1}, x_{r2}, \dots, x_{rn})) = (x_{1i}, \dots, x_{ri}) \in \rho$.

□

Toutes ces définitions prennent leurs sens lorsqu'on considère l'ensemble L_3 des clones sur E_k ordonné par l'inclusion \subseteq . Un treillis est tout simplement un ensemble ordonné dans lequel chaque couple d'éléments admet une plus petite borne supérieure et une plus grande borne inférieure. Dans le premier chapitre, nous partirons de P_3 , l'élément le plus grand du treillis L_3 , qui est l'ensemble des fonctions sur $\{0, 1, 2\}$. Nous énumérerons ensuite les clones P_3 -maximaux. La preuve de ce résultat est dû à Yablonski [11] (voir aussi Rosenberg [8]).

Chapitre 1

CLONES P_3 -MAXIMAUX

Dans ce chapitre, nous énumérerons les clones P_3 -maximaux. Ce résultat est dû à Yablonski [11] (un résultat plus général pour P_k , $k \geq 3$ est dans Rosenberg [8]). Nous décrirons ensuite ces clones pour être en mesure de bien les comprendre lorsque nous y ferons appel ultérieurement.

Théorème 1.0.1. [8] *Les 18 sous-ensembles de P_3 suivants sont exactement les clones P_3 -maximaux.*

$$(1) D(0) = Pol\{0\}$$

$$(2) D(1) = Pol\{1\}$$

$$(3) D(2) = Pol\{2\}$$

$$(4) D(0, 1) = Pol\{0, 1\}$$

$$(5) D(1, 2) = Pol\{1, 2\}$$

$$(6) D(2, 0) = Pol\{2, 0\}$$

$$(7) C(0) = Pol\left(\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}\right)$$

$$(8) C(1) = Pol\left(\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right)$$

$$(9) C(2) = Pol\left(\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}\right)$$

$$(10) \quad E(0) = Pol(\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\})$$

$$(11) \quad E(1) = Pol(\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\})$$

$$(12) \quad E(2) = Pol(\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\})$$

$$(13) \quad O(0) = Pol(\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\})$$

$$(14) \quad O(1) = Pol(\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\})$$

$$(15) \quad O(2) = Pol(\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\})$$

$$(16) \quad P = Pol(\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\})$$

$$(17) \quad L = Pol(\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ 2(a+b)(\text{mod } 3) \end{pmatrix} \mid a, b \in E_3 \right\}),$$

$$= Pol(\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\})$$

$$(18) \quad S = Pol(\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in E_3, \text{ et } |\{a, b, c\}| \leq 2 \right\}).$$

Remarque 1.0.2. Dans [8], les clones (7)-(9) et (16)-(19) sont décrits d'une façon différente.

Remarque 1.0.3. Ici, $|\{a, b, c\}|$ représente le nombre d'éléments parmi a, b, c .

Remarque 1.0.4. Pour les clones (1) – (6), les relations sont unaires, c'est-à-dire des sous-ensembles de E_3 . Dans (7) – (16), les relations sont binaires et dans (17) – (18) elles sont ternaires. En particulier, les relations (10) – (12) sont des relations d'équivalence (c'est-à-dire réflexives, symétriques et transitives) sur E_3 , (13) – (15) sont des relations d'ordre linéaire (ou ordre total) et (16) est un cycle orienté sur E_3 . Elles seront toutes définies explicitement dans les prochaines sections de ce chapitre.

Définition 1.0.6. Nous noterons ρ_A , la relation préservée par un sous-ensemble A de P_3 .

1.1. CLONES $D(0)$, $D(1)$, $D(2)$, $D(0,1)$, $D(1,2)$, $D(2,0)$

Les clones du (1) à (6) du théorème précédant sont déterminés par des relations unaires ρ_D . C'est-à-dire qu'une fonction f préservera une relation ρ_D unaire si et seulement si $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \rho_D$ lorsque $x_i \in \rho_D$, pour $i = 1, \dots, n$. En particulier, pour $i \in \{0, 1, 2\}$ une fonction f n -aire est dans $D(\{i\})$ si et seulement si $f(i, i, \dots, i) = i$.

Exemple. $D(0)$ est le clone des fonctions avec $f(0, 0, \dots, 0) = 0$.

Dans le cas d'un clone déterminé par une paire $\{i, j\}$, une fonction est dans $D(\{i, j\})$ si et seulement si pour tout $x_1, \dots, x_n \in \{i, j\}$ on a $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \{i, j\}$.

TAB. 1.1. Exemple d'une fonction binaire de $D\{0, 1\}$

	0	1	2
0	0	1	0
1	1	1	1
2	0	0	2

Ici, $f(x_1, x_2)$ est donnée par la table de Cayley : la valeur de $f(x_1, x_2)$ se trouve dans la ligne x_1 et la colonne x_2 . Par exemple, $f(0, 1) = 1$ et $f(2, 0) = 0$.

1.2. CLONES $O(0), O(1), O(2)$

Les ensembles O sont les fonctions qui préservent une relation d'ordre.

Définition 1.2.1. Une *relation d'ordre* sur un ensemble E_3 est une relation binaire ρ_O sur E_3 telle que pour tous $x, y, z \in E_3$:

- i) ρ_O est réflexive : $(x, x) \in \rho_O$
- ii) ρ_O est antisymétrique : $(x, y) \in \rho_O$ et $(y, x) \in \rho_O \Leftrightarrow y = x$
- iii) ρ_O est transitive : (x, y) et $(y, z) \in \rho_O \Rightarrow (x, z) \in \rho_O$
- iv) ρ_O est borné : Une relation d'ordre est bornée s'il existe un élément $M \in E_3$ (le plus grand élément de ρ_O) et $m \in E_3$ (le plus petit élément de ρ_O) tels que $(m, x) \in \rho_O$ et $(x, M) \in \rho_O$.

Remarque 1.2.1. Nous noterons une relation d'ordre sur E_3 par \leq et on écrit $x \leq y$ si $(x, y) \in \leq$. De plus, pour (x_1, \dots, x_n) et (y_1, \dots, y_n) , tous deux dans $E_3^{(n)}$, on écrit $(x_1, \dots, x_n) \leq (y_1, \dots, y_n)$ si $x_i \leq y_i$ pour $i = 1, \dots, n$.

Définition 1.2.2. Une fonction f est *monotone* par rapport à un ordre \leq si $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq f(y_1, y_2, \dots, y_n)$, lorsque $x_i \leq y_i, \forall i = 1, 2, \dots, n$.

Lemme 1.2.1. Pour \leq un ordre sur E_3 , et \geq sa relation inverse, $Pol(\geq) = Pol(\leq)$.

Démonstration. Soit $f \in Pol(\geq)^{(n)}$ et $a_{1j} \leq a_{2j}$ pour tous $j = 1, \dots, n$. Alors $a_{2j} \geq a_{1j}$ pour tous $j = 1, \dots, n$ et donc $f(a_{21}, \dots, a_{2n}) \geq f(a_{11}, \dots, a_{1n})$. Alors $f(a_{11}, \dots, a_{1n}) \leq f(a_{21}, \dots, a_{2n})$ et $f \in Pol(\leq)$. Nous avons montré que $Pol(\geq) \subseteq Pol(\leq)$ et appliquant ce résultat à l'ordre \geq , on obtient $Pol(\leq) \subseteq Pol(\geq)$, donc l'égalité. \square

Le symbole $O(0)$ dénote la relation d'ordre déterminée par $2 < 0 < 1$, le symbole $O(1)$ la relation d'ordre naturelle, déterminée par $0 < 1 < 2$, tandis que l'ordre pour $O(2)$ est déterminé par $1 < 2 < 0$. Par le lemme 1.2.1, ce sont les seules relations d'ordre bornées sur E_3 . Nous pouvons les écrire sous la forme suivante, où $\{a, b, c\} = E_3$ et $a < b < c$;

$$Pol\left(\left\{\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}\right\}\right) \quad (1.2.1)$$

La figure suivante est une représentation pour la relation d'ordre. Pour une relation ρ , on relie une flèche de a à b si $(a, b) \in \rho$, pour $a, b \in E_3$. Si la relation est réflexive alors $(a, a) \in \rho$ pour tout $a \in E_3$, et on inscrit une boucle pour le signifier.

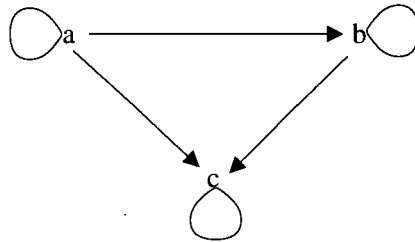


FIG. 1.1. relation binaire d'ordre borné

Remarque 1.2.2. Si on se penche sur la relation de $O(1)$, on remarque que :

$$(x, y)^T \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \iff x < y,$$

dans l'ordre naturel $0 < 1 < 2$.

Lemme 1.2.2. $f \in O(1) \Leftrightarrow f$ est monotone par rapport à \leq .

Démonstration. Évidente des définitions et de la remarque précédente. \square

Nous voyons bien que l'ensemble $O(1)$ consiste des fonctions monotones pour l'ordre naturel. Les preuves sont identiques pour les deux autres ensembles $O(0)$ et $O(2)$, en changeant simplement l'ordre utilisé. Sans perdre de généralité, nous travaillerons toujours avec l'ensemble $O(1)$, qui sera dorénavant noté O , et les sous-ensembles $O \cap P_3^{(n)}$ par $O^{(n)}$, $\forall n = 1, 2, \dots$

Il serait évidemment fastidieux de décrire précisément toutes les fonctions de O en particulier lorsqu'il s'agit de fonctions à plusieurs variables. Mais dans le cas des fonctions à une variable (i.e l'ensemble $O^{(1)}$), il nous sera utile de connaître précisément les fonctions en faisant partie.

Définition 1.2.3. Posons $s_{t(0) t(1) t(2)}$ la représentation de toute fonction t unaire. En particulier, la fonction identité $s_{0,1,2}$ sera notée id , et la fonction constante $s_{a a a}$ sera notée c_a (où $a = 0, 1, 2$).

Nous pouvons alors remarquer qu'il y a 10 fonctions dans $O^{(1)}$, l'ensemble des fonctions monotones à une variable ;

TAB. 1.2. fonctions de $O^{(1)}$.

	0	1	2
c_0	0	0	0
$s_{0 0 1}$	0	0	1
$s_{0 0 2}$	0	0	2
$s_{0 1 1}$	0	1	1
id	0	1	2
$s_{0 2 2}$	0	2	2
c_1	1	1	1
$s_{1 1 2}$	1	1	2
$s_{1 2 2}$	1	2	2
c_2	2	2	2

1.3. CLONES $C(0), C(1), C(2)$

Les ensembles C sont les fonctions qui préservent une relation centrale.

Définition 1.3.1. Une relation binaire ρ_C sur E_3 est **centrale** si :

- i) ρ_C est réflexive : $(x, x) \in \rho \forall x \in E_3$,
- ii) ρ_C est symétrique : $(x, y) \in \rho \Leftrightarrow (y, x) \in \rho \forall x, y \in E_3$,
- iii) Il existe un élément dit **central** $c \in E_3$, c'est-à-dire tel que $(c, x) \in \rho_C$,
 $\forall x \in E_3$,
- iv) $\rho_C \neq E_3^{(2)}$.

Nous voyons dans la figure ci-dessous une relation centrale où c est le seul élément central.

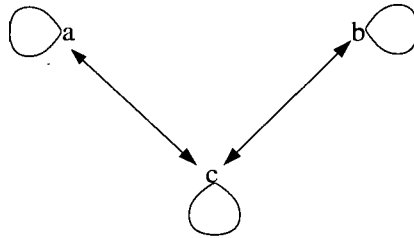


FIG. 1.2. relation binaire centrale

L'ensemble $C(i)$ ($i \in E_3$) est l'ensemble des fonctions préservant la relation centrale ρ_C , dont i est le seul élément central.

1.4. CLONES $E(0), E(1), E(2)$

Définition 1.4.1. Une relation binaire ρ_E sur E_3 est une **relation d'équivalence** si pour tout $x, y, z \in E_3$:

- i) ρ_E est réflexive : $(x, x) \in \rho_E$,
- ii) ρ_E est symétrique : $(x, y) \in \rho_E \Leftrightarrow (y, x) \in \rho_E$,
- iii) ρ_E est transitive : $(x, y) \in \rho_E$ et $(y, z) \in \rho \Rightarrow (x, z) \in \rho$.

Lemme 1.4.1. Soit la relation d'équivalence triviale $\omega_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \mid x \in E_3 \right\}$.

Alors $Pol(\omega_0) = P_3$.

Démonstration. On montre d'abord que $Pol(\omega_0) = P_3$, c'est-à-dire que toutes fonctions $f \in P_3$ préservent ω_0 . Par contraposé, supposons qu'il existe une fonction f n -aire, telle que $(f(a_1, \dots, a_n), f(b_1, \dots, b_n)) \notin \omega_0$, pour $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in E_3$. Dans ce cas, $(f(a_1, \dots, a_n) \neq f(b_1, \dots, b_n))$ et il existe donc (a_i, b_i) tel que $a_i \neq b_i$, pour $i = 1, \dots, n$. Alors $(a_i, b_i) \notin \omega_0$. \square

Lemme 1.4.2. Soit la relation triviale $\omega_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x, y \in E_3 \right\}$. Alors $Pol(\omega_1) = P_3$.

Démonstration. Trivial, puisque ω_1 contient toutes les paires possibles. \square

Remarque 1.4.1. ω_0 et ω_1 sont mises de côté puisque $Pol(\omega_0) = Pol(\omega_1) = P_3$.

Définition 1.4.2. Pour $i \in E_3$ et une relation d'équivalence ρ , si $(i, j) \in \rho$ implique que $i = j$, on dit alors que i est un **singleton** dans la relation ρ .

Nous voyons dans la figure ci-dessous une relation d'équivalence où a est le singleton. L'ensemble $E(i)$, tel que $i \in E_3$, est l'ensemble des fonctions préservant une relation d'équivalence ρ_E , où i est le singleton dans la relation d'équivalence.

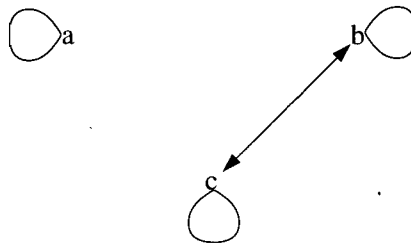


FIG. 1.3. relation d'équivalence non-triviale $E(a)$.

1.5. CLONES S

Rappelons d'abord la définition de la relation ρ_S qui détermine le clone S (dans (18)) :

$$\rho_S = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in E_3, a = b \text{ ou } a = c \text{ ou } b = c \right\}$$

En effet, comme il doit y avoir au plus deux éléments différents dans chaque triplet de la relation ρ_S , au moins deux d'entre eux doivent être le même.

Exemple 1.5.1. *Nous voyons ici deux fonctions binaires, la première faisant partie de S , mais pas la seconde .*

$x \setminus y$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	0	1

$x \setminus y$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	0	2

En effet, soit f , la fonction binaire donnée par le deuxième tableau. Nous observons que

$$(f(1, 0), f(1, 2), f(2, 2)) = (0, 1, 2)$$

On a $(1, 1, 2)^T, (0, 2, 2)^T \in \rho_S$, mais le triplet des valeurs est $(0, 1, 2)^T \notin \rho_S$.

Regardons ce que nous pouvons tirer de la dernière définition de S .

Lemme 1.5.1. $f \in P^{(1)} \Rightarrow f \in S$

Démonstration. Soit $f \in P^{(1)}$ et $(x, y, z)^T \in \rho_S$. Alors $x = y$ ou $x = z$ ou $y = z$, et donc $f(x) = f(y)$ ou $f(x) = f(z)$ ou $f(y) = f(z)$. Ceci entraîne que $(f(x), f(y), f(z)) \in \rho_S$. \square

Remarque 1.5.1. *Ceci est encore plus trivial pour les fonctions f non-surjectives de $P_3^{(n)}$, c'est-à-dire celles dont la cardinalité de l'image n'est pas 3. En effet, pour tout triplet $(x, y, z)^T$, le triplet $(f(x), f(y), f(z))^T$ de valeur de f est automatiquement dans ρ_S .*

Maintenant, nous voulons montrer que pour une fonction dans S , elle est soit essentiellement unaire, soit elle ne prend pas les trois valeurs de E_3 . Nous aurons besoin d'une définition.

Définition 1.5.1. Soit $f \in P_3^{(n)}$ et $1 \leq i \leq n$. On dit que la i -ème variable de f est *essentielle* s'il existe $a_1, \dots, a_n, b \in E_3$ tels que

$$f(a_1, \dots, a_n) \neq f(a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

De plus, on dit que f est *essentiellement unaire* si au plus une de ses variables est essentielle.

Proposition 1.5.1. Le clone S consiste exactement des fonctions non-surjectives et des fonctions essentiellement unaires.

Démonstration. Soit $f \in P_3^{(n)} \cap S$ surjective. Alors f n'est pas constante et possède donc au moins une variable essentielle. Sans perdre de généralité, considérons la première variable essentielle. Dans ce cas, il existe $a_1, \dots, a_n, b \in E_3$ tels que

$$u = f(a_1, \dots, a_n) \neq f(b, a_2, \dots, a_n) = v$$

Soit $x_1, \dots, x_n \in E_3$ arbitraires et $w = f(b, x_2, \dots, x_n)$. Alors

$$(u, w, v)^T = (f(a_1, \dots, a_n), f(a_1, x_2, \dots, x_n), f(b, a_2, \dots, a_n))^T \in \rho_S.$$

Comme $u \neq v$, nécessairement $w \in \{u, v\}$, c'est-à-dire que la fonction f ne prend que les valeurs u et v sur l'ensemble $B_{a_1} = \{(a_1, x_2, \dots, x_n) : x_2, \dots, x_n \in E_3\}$. Les rôles de a_1 et b étant symétriques, on obtient aussi que la fonction f ne prenne que les valeurs u et v sur l'ensemble $B_b = \{(b, x_2, \dots, x_n) : x_2, \dots, x_n \in E_3\}$.

Soit $z \in E_3$ défini par $E_3 = \{0, 1, 2\} = \{u, v, z\}$. La fonction f est surjective et donc $z = f(c_1, \dots, c_n)$ pour certains $c_1, \dots, c_n \in E_3$. On voit que $(a_1, c_2, \dots, c_n) \in B_{a_1}$ et donc $d = f(a_1, c_2, \dots, c_n) \in \{u, v\}$.

Supposons que $d = u$. Par l'argument utilisé plus haut, pour tous $x_2, \dots, x_n \in E_3$,

$$(u, f(a_1, x_2, \dots, x_n), z)^{\mathbf{T}} = (f(a_1, c_2, \dots, c_n), f(a_1, x_2, \dots, x_n), f(c_1, c_2, \dots, c_n))^{\mathbf{T}} \in \rho_S.$$

Ici, $u \neq z$, et donc f ne prend que les valeurs u et z sur B_{a_1} . Avant on a trouvé que f prend seulement les valeurs u et v sur B_{a_1} , et donc f est constante avec la valeur u sur B_{a_1} . Les rôles de a_1 et b étant symétriques, on obtient que f est constante avec la valeur v sur B_b .

Il est à noter que $a_1 \neq c_1 \neq b$ car $f(c_1, \dots, c_n) = z$. Soit $x_2, \dots, x_n \in E_3$ arbitraires et $e = f(c_1, x_2, \dots, x_n)$. Dans ce cas,

$$(e, u, z)^{\mathbf{T}} = (f(c_1, x_2, \dots, x_n), f(a_1, c_2, \dots, c_n), f(c_1, c_2, \dots, c_n))^{\mathbf{T}} \in \rho_S,$$

et $u \neq z$ montre que $e \in \{v, z\}$. Donc $e \in \{u, z\} \cap \{v, z\} = \{z\}$.

La fonction f est donc constante sur B_{c_1} avec la valeur z . On a vérifié que la i -ème variable de f est non-essentielle pour tout $i = 2, \dots, n$. Alors f est essentiellement unaire.

□

Remarque 1.5.2. *La proposition 1.5.1 est étroitement liée au théorème de Slupecki (voir [9]) et au lemme de base de Yablonski [11].*

Ainsi, nous énonçons une caractéristique bien précise aux fonctions de S . Le clone S consiste en effet exactement de toutes les opérations essentiellement unaires et les opérations qui ne prennent pas les trois valeurs de E_3 . Donc, non seulement chaque triplet dans la relation n'a au plus que deux éléments distincts, mais la cardinalité de l'image de toutes fonctions de S le doit aussi, sauf les fonctions essentiellement unaires.

1.6. CLONE P

L'ensemble P est le clone des fonctions dites autoduales. On peut associer avec la relation ρ_P une permutation $s \in S_k$ énoncée dans le tableau suivant ;

x	0	1	2
$s(x)$	1	2	0

On définit alors la relation comme $\rho_P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ s(x) \end{pmatrix} \mid x \in E_3 \right\}$. Par cette définition, on observe que pour toutes fonctions $f \in P$:

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) = \alpha \Rightarrow f(s(a_1), s(a_2), \dots, s(a_n)) = s(\alpha).$$

Alors, $s(f(a_1, a_2, \dots, a_n)) = f(s(a_1), s(a_2), \dots, s(a_n))$ pour tous $a_1, a_2, \dots, a_n \in E_3$. Dans ce cas, P est formé de l'ensemble des fonctions $f \in P_k$ telles que s est un automorphisme de l'algèbre $\langle E_3, \{f\} \rangle$.

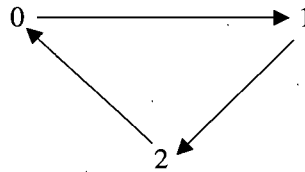


FIG. 1.4. relation autoduale

1.7. CLONE L

La relation ρ_L sur l'ensemble L est défini comme suit :

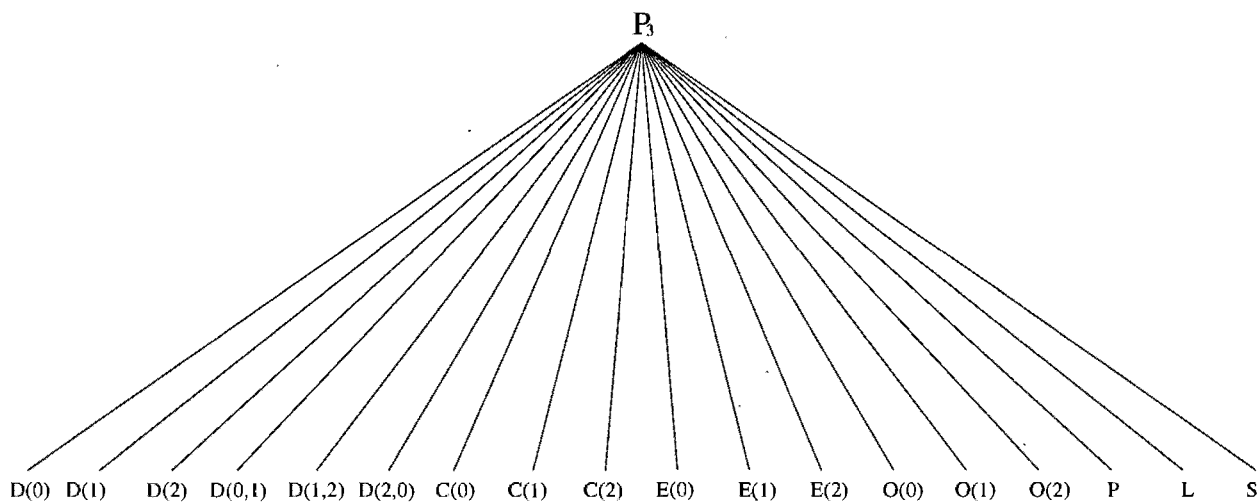
$$\rho_L = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ 2(a+b) \end{pmatrix} \mid a, b \in E_3 \right\},$$

où $2(a+b)$ est l'élément de E_3 congruent *mod* 3 à $2(a+b)$ (formulation de Rosenberg [8]). En fait, nous observons que $f \in L$ si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(a_1, \dots, a_n) = \alpha \\ f(b_1, \dots, b_n) = \beta \end{array} \right. \Rightarrow f(2(a_1 + b_1), \dots, 2(a_n + b_n)) = 2(\alpha + \beta)$$

1.8. CONCLUSION

Nous avons fait dans ce chapitre le premier pas dans le treillis L_3 . Nous avons d'abord identifié le plus grand élément P_3 , pour ensuite décrire les clones P_3 -maximaux. La preuve que ces clones sont exactement les clones maximaux se retrouve dans Yablonski [11] et Rosenberg [8]. En fait, nous continuerons de "descendre" dans le treillis en identifiant et prouvant cette fois quels sont les clones $O(1)$ -maximaux. Nous nous baserons sur le résultat de Machida [4] et en profiterons pour modifier quelques preuves. On aperçoit ci-dessous la représentation graphique de ce que nous avons énoncé jusqu'à maintenant ;

FIG. 1.5. Ensembles P_3 -maximaux

Chapitre 2

CLONES $O(1)$ -MAXIMAUX

Dans ce chapitre, nous allons nous attarder sur le clone $O(1)$ qu'on notera simplement O . Plus précisément, nous voulons énumérer les ensembles O -maximaux pour ainsi continuer à construire le treillis des ensembles fermés. Comme nous l'avons vu, l'ensemble O est exactement l'ensemble des fonctions monotones, ce qui aidera à exprimer O sous une structure plus simple. Ce chapitre sera celui qui demandera le plus d'attention puisqu'il constitue le point central de ce travail en plus d'utiliser un chemin tortueux.

2.1. CLONES M_{max} ET M_{min}

Dans l'énoncé du prochain théorème, nous rencontrerons deux nouveaux clones M_{max} et M_{min} . Les fonctions $max(x, y)$ et $min(x, y)$ sont des fonctions à deux variables qui prennent respectivement comme valeur le plus grand et le plus petit élément, parmi x, y , et ce par rapport à l'ordre naturel $0 < 1 < 2$ sur E_3 . Par l'associativité de ces fonctions, nous pouvons étendre $max(x, y)$ et $min(x, y)$ comme fonctions à n -variables, où $max(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est alors la plus grande valeur entre x_1, \dots, x_n , tandis que $min(x_1, x_2, \dots, x_n)$ prend la plus petite valeur parmi x_1, \dots, x_n .

L'ensemble M_{max} sera généré à partir de la fonction max , et de toutes les fonctions unaires monotones à une variable ($O(1)$), c'est-à-dire :

$$M_{max} = \overline{\{max\} \cup O(1)}.$$

Quant à M_{min} , il sera généré par la fonction min , et les fonctions de $O^{(1)}$:

$$M_{min} = \overline{\{min\} \cup O^{(1)}}$$

Lemme 2.1.1.

(i) M_{max} consiste des fonctions de $O^{(1)}$ et $max(t_1(x_1), \dots, t_n(x_n))$, avec $n \geq 2$ et $t_1, \dots, t_n \in O^{(1)}$.

(ii) M_{min} consiste des fonctions de $O^{(1)}$ et $min(t_1(x_1), \dots, t_n(x_n))$, avec $n \geq 2$ et $t_1, \dots, t_n \in O^{(1)}$.

Démonstration. (i) Évidemment, $max(t_1(x_1), \dots, t_n(x_n)) \in M_{max}$ pour tout $n \geq 2$ et $t_1, \dots, t_n \in O^{(1)}$. Pour montrer que chaque fonction de M_{max} peut être représentée sous cette forme nous montrerons d'abord que pour tout $n \geq 2$, $t \in O^{(1)}$ et $x_1, \dots, x_n \in E_3$

$$t(max(x_1, \dots, x_n)) = max(t(x_1), \dots, t(x_n)). \quad (*)$$

En effet, soit $max(x_1, \dots, x_n) = x_i$, pour un $1 \leq i \leq n$. Alors $x_i \geq x_j$ pour tout $j = 1, \dots, n$ et $t(x_i) \geq t(x_j)$ car t est monotone. On obtient

$$t(max(x_1, \dots, x_n)) = t(x_i) = max(t(x_1), \dots, t(x_n)).$$

On voit que dans n'importe quelle formule composée de max , min et $O^{(1)}$, l'identité (*) permet de "pousser" les $t \in O^{(1)}$ à l'intérieur de max . Par exemple, pour $t_1, t_2, t_3 \in O^{(1)}$:

$$\begin{aligned} t_1(max(t_2(x_1), max(x_2, t_3(x_3)))) &= max(t_1(t_2(x_1)), t_1(max(x_2, t_3(x_3)))) \\ &= max(t_1(t_2(x_1)), max(t_1(x_2), t_1(t_3(x_3)))) \\ &= max(t_1(t_2(x_1)), t_1(x_2), t_1(t_3(x_3))), \end{aligned}$$

où $t_1(t_2)$, $t_1(t_3) \in O^{(1)}$. Comme $O^{(1)}$ est fermé pour la composition, ceci donne la forme citée plus haut.

(ii) Le même raisonnement s'applique au M_{min} .

□

2.2. THÉORÈME PRINCIPAL

Théorème 2.2.1. *Les 13 sous-clones de O suivants sont O -maximaux et ils sont les seuls à l'être (voir figure 2.1).*

- | | |
|------|-------------------------|
| (1) | $M_1 = O \cap D(0),$ |
| (2) | $M_2 = O \cap D(2),$ |
| (3) | $M_3 = O \cap D(0, 1),$ |
| (4) | $M_4 = O \cap D(1, 2),$ |
| (5) | $M_5 = O \cap D(2, 0),$ |
| (6) | $M_6 = O \cap C(0),$ |
| (7) | $M_7 = O \cap C(1),$ |
| (8) | $M_8 = O \cap C(2),$ |
| (9) | $M_9 = O \cap E(0),$ |
| (10) | $M_{10} = O \cap E(2),$ |
| (11) | $M_{11} = O \cap S,$ |
| (12) | $M_{12} = M_{max},$ |
| (13) | $M_{13} = M_{min},$ |

Remarque 2.2.1. *Les 13 ensembles mentionnés précédemment sont des clones. En effet, chacun des 11 premiers est l'intersection de deux clones maximaux, tandis que M_{max} et M_{min} sont fermés par définition.*

Pour nous aider dans la preuve de ce théorème, nous aurons besoin de quelques résultats :

Lemme 2.2.1. *Soit $G = \{max, min, c_1, s_{002}, s_{022}\}$, où les fonctions max et $min \in P^{(2)}$. Alors $\overline{G} = O$.*

Démonstration. D'abord, $c_2 = s_{022}(c_1)$. Posons

$$j_a(x) = \begin{cases} x & \text{si } a = 0, \\ s_{022} & \text{si } a = 1, \\ s_{002} & \text{si } a = 2. \end{cases}$$

Notons que $j_a(x) \in \overline{G}$ pour tout $a \in E_3$. Soit $f \in O^{(n)}$ arbitraire. Établisons une forme normale pour f . Pour $i = 1, 2$, soit $A_i = \{(a_1, \dots, a_n) \in E_3^n : f(a_1, \dots, a_n) = i\}$. Si $A_1 = A_2 = \emptyset$, alors f est la constante 0 n-aire et $f = s_{002}(c_1)$. Donc soit $A_1 \cup A_2 \neq \emptyset$. Pour $i \in \{1, 2\}$ et $a = (a_1, \dots, a_n) \in A_i$, posons

$$g_a^i(x_1, \dots, x_n) = \min(c_i, j_{a_1}(x_1), \dots, j_{a_n}(x_n)). \quad (2.2.1)$$

Évidemment $g_a^i \in \overline{G}$ et $g_a^i(b_1, \dots, b_n) = i$ si $b_1 \geq a_1, \dots, b_n \geq a_n$ et $g_a^i(b_1, \dots, b_n) = 0$ sinon. Posons

$$h(x_1, \dots, x_n) = \max\{g_a^i(x_1, \dots, x_n) : i \in \{1, 2\}, a \in A_i\}$$

(où \max est appliqué au $|A_1| + |A_2|$ fonctions g_a^i). Une vérification directe montre que $h = f$.

□

Exemple 2.2.1. Pour $n=2$, soit $f \in O^{(2)}$ donnée par :

$x_1 \setminus x_2$	0	1	2
0	0	1	1
1	0	1	2
2	1	2	2

Pour $x = (x_1, x_2)$,

$$f(x) = \max(g_{(0,1)}^1(x), g_{(0,2)}^1(x), g_{(2,0)}^1(x), g_{(1,1)}^1(x), g_{(2,1)}^2(x), g_{(1,2)}^2(x), g_{(2,2)}^2(x)).$$

Cette formule peut être simplifiée à $\max(g_{(0,1)}^1(x), g_{(2,0)}^1(x), g_{(2,1)}^2(x), g_{(1,2)}^2(x))$, mais dans le lemme précédent, on ne veut que $f \in \overline{G}$.

2.3. PREUVE DU THÉORÈME PRINCIPAL

Nous entrons dans la section où nous énoncerons les conditions pour prouver que les clones M_1, \dots, M_{13} du théorème 2.2.1 sont précisément les clones O -maximaux. Nous aurons besoin d'un théorème général, duquel découlera une remarque essentielle dans la démarche.

Remarque 2.3.1. *Soit H un sous-ensemble fermé de P_k , et F et G des ensembles H -maximaux. Si $F \subseteq G$, alors $F = G$.*

Définition 2.3.1. *Soit H un sous-ensemble fermé et $G \subseteq H$. On dit que G est H -complet, si $\overline{G} = H$. On dit que H est **finiment engendré** s'il existe un ensemble H -complet fini.*

Remarque 2.3.2. *Dans le prochain théorème, le terme **AC** est utilisé pour désigner l'axiome du choix.*

Théorème 2.3.1. (AC) *Soit H un ensemble fermé finiment engendré de P_k . Alors*

- i) Pour tout $F \subsetneq H$ fermé, il existe un fermé H -maximal M tel que $F \subseteq M$*
- ii) $G \subseteq H$ est H -complet si et seulement si G n'est pas inclus dans aucun ensemble H -maximal.*

Démonstration. La preuve est divisée en deux, prouvant *i)* et *ii)* séparément :

- i) Soit $K = \{f_1, \dots, f_m\}$ fini et H -complet, et $F \subsetneq H$, un fermé. Nous montrons l'existence d'un ensemble H -maximal M , tel que $K \subseteq M$. Supposons par l'absurde que ce n'est pas le cas. Alors par **(AC)** il existe une chaîne infinie (J, \preceq) et des fermés C_j , ($j \in J$), tels que pour tous $i, j \in J$:*

- a) $F \subseteq C_j \subsetneq H$,
- b) $i \preceq j$ entraîne que $C_i \subsetneq C_j$,
- c) $\bigcup_{j \in J} C_j = H$.

Par c), il existe $j_1, \dots, j_m \in J$ tels que $f_i \in C_{j_i}$ pour tous $j = 1, \dots, m$. Dans la chaîne (J, \preceq) , l'ensemble fini $\{j_1, \dots, j_m\}$ possède le plus grand élément j_k . Du fait que $C_{j_i} \subseteq C_{j_k}$ pour tous $i = 1, \dots, m$, on obtient que $F \subseteq C_{j_k}$. Maintenant F étant H -complet entraîne $C_{j_k} = H$, ce qui contredit le point a).

- ii) (\Rightarrow) Par la contraposée, soit $G \subsetneq M$ pour un fermé H -maximal M . Alors $\overline{G} \subsetneq M$ et donc G n'est pas H -complet.

(\Leftarrow) Encore par la contraposée, supposons que G n'est pas H -complet. Alors \overline{G} est un ensemble fermé tel que $\overline{G} \subsetneq H$. Par ce fait et i), il existe un fermé H -maximal M qui contient \overline{G} . Ceci montre que $G \subsetneq M$. □

Remarque 2.3.3. *Il est connu que pour un fermé H finiment engendré, le nombre des fermés H -maximaux est fini (c'est un résultat qui n'est pas encore publié spécifique pour les treillis de clones sur un univers fini).*

Ce théorème peut sembler s'éloigner de ce que nous voulons démontrer, mais en y regardant de plus près nous verrons que le théorème nous donne deux conditions pour affirmer qu'une famille d'ensembles fermés est maximale par rapport à un autre ensemble. La remarque suivante est une reformulation du théorème 2.3.1 appliquée aux ensembles du théorème 2.2.1.

Remarque 2.3.4. *Soit $\mathfrak{M} = \{M_1, \dots, M_{13}\}$, les 13 ensembles du théorème 2.2.1.*

Si nous montrons que ;

(A) *Pour $i, j \in \{1, 2, \dots, 13\}$ donné, si $i \neq j$, alors $M_i \not\subseteq M_j$.*

(B) Tout ensemble $G \subseteq O$, avec $G \not\subseteq M_i \forall i \in \{1, 2, \dots, 13\}$ satisfait $\overline{G} = O$,

alors \mathfrak{M} est bien la famille des ensembles O – maximaux.

Dans les deux prochaines sections, nous prouverons les conditions A et B . Mais avant, l'introduction de la notion de dual nous sera utile.

2.4. NOTION DE DUAL

Dans les prochaines sections, la notion de dual sera rencontrée. En effet, plusieurs fonctions et même plusieurs ensembles déjà mentionnés sont duaux l'un de l'autre. Nous les utiliserons pour simplifier les formules. Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in E_3^{(n)}$ et s une permutation de E_3 , on écrira $s(x) = (s(x_1), \dots, s(x_n))$.

Définition 2.4.1. On dénote s_{210} par s . Pour une fonction $f \in P_3^{(n)}$, le **dual** f^* de f est la fonction de $P^{(n)}$ définie comme suit : Pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E_3^{(n)}$

$$f^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = s(f(s(x_1), s(x_2), \dots, s(x_n))).$$

Définition 2.4.2. Pour un sous-ensemble F de P , le **dual** F^* de F est l'ensemble $\{f^* \in P \mid f \in F\}$.

Par les précédentes définitions, $(f^*)^* = f$ et $(F^*)^* = F$. En effet, il suffit de constater que $s(s(x)) = x$ pour tout $x \in E$. Alors, pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in E_3^n$;

$$(f^*)^*(x) = s(f^*(s(x))) = s(s(f(s(s(x)))))) = s(s(f(x))) = f(x).$$

Exemple 2.4.1. On considère la i -ème projection n -aire pr_i^n . Alors $(pr_i^n)^* = pr_i^n$. En effet pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in E_3^n$, on a

$$(pr_i^n)^*(x) = s(pr_i^n(s(x))) = s(s(x_i)) = x_i = pr_i^n(x).$$

Lemme 2.4.1. L'auto-application $\varphi : f \mapsto f^*$ de P_3 , est une involution (c'est-à-dire $\varphi^2(f) = \varphi(\varphi(f)) = f$) de P_3 qui respecte la composition, c'est-à-dire $f(g_1, \dots, g_n)^* = f^*(g_1^*, \dots, g_n^*)$, pour tout $f \in P_3^{(n)}$ et $g_1, \dots, g_m \in P_3^{(m)}$.

Démonstration. Soit $x \in E_3^m$ arbitraire. Alors :

$$\begin{aligned}
 f(g_1, \dots, g_n)^*(x) &= s(f(g_1, \dots, g_n)s(x)) \\
 &= s(f(g_1(s(x)), \dots, g_n(s(x)))) \\
 &= s(f(s(s(g_1(s(x))))), \dots, s(s(g_n(s(x)))))) \\
 &= f^*(g_1^*(x), \dots, g_n^*(x)).
 \end{aligned}$$

□

Corollaire 2.4.1. *L'application φ ci-dessus étendue aux sous-ensembles de P_3 est une involution entre les fermés (clones) qui respectent les inclusions.*

Démonstration. Avec l'exemple précédent, le corollaire est trivial.

□

Il n'est pas connu si pour $k > 2$, il existe d'autres automorphismes du treillis L_k .

Définition 2.4.3. *Pour une relation ρ h -aire sur E_3 , on note par $s(\rho)$ l'image $\{(s(a_1), \dots, s(a_h)) : (a_1, \dots, a_h) \in \rho\}$ de ρ par s .*

Lemme 2.4.2. *Si ρ est une relation h -aire sur E_3 , alors $(Pol(\rho))^* = Pol(s(\rho))$.*

Démonstration. Soit $f \in (Pol(\rho))^*$ n -aire et soit $(a_{1j}, \dots, a_{hj})^T \in s(\rho)$ pour tout $j = 1, \dots, n$. Alors $f = g^*$ pour $g \in Pol(\rho)$, et pour chaque $j = 1, \dots, n$:

$$(a_{1j}, \dots, a_{hj}) = (s(b_{1j}), \dots, s(b_{hj})), \text{ où } (b_{1j}, \dots, b_{hj})^T \in \rho.$$

Maintenant pour tout $i = 1 \dots, h$:

$$f(a_{h1}, \dots, a_{hn}) = g^*(s(b_{h1}), \dots, s(b_{hn})) = s(g(s^2(b_{h1}), \dots, s^2(b_{hn}))) = s(g(b_{h1}, \dots, b_{hn}))$$

Comme $g \in Pol(\rho)$, on a que $(g(b_{11}, \dots, b_{1n}), \dots, g(b_{h1}, \dots, b_{hn}))^T \in \rho$, et donc $(f(a_{11}, \dots, a_{1n}), \dots, f(a_{h1}, \dots, a_{hn})) \in s(\rho)$. Ceci montre que $f \in Pol(s(\rho))$ et $(Pol(\rho))^* \subseteq Pol(s(\rho))$. Appliquant ce résultat à $s(\rho)$, on obtient $(Pol(s(\rho)))^* \subseteq$

$Pol(s^2(\rho)) = Pol(\rho)$. Donc $Pol(s(\rho)) = (Pol(s(\rho)))^{**} \subseteq (Pol(\rho))^*$. Ces deux inclusions montrent $(Pol(\rho))^* = Pol(s(\rho))$. \square

Lemme 2.4.3. *Voici des exemples se rapportant à notre théorème principal :*

$$\begin{aligned} max^* &= min, & O^* &= O, & M_1^* &= M_2, \\ M_3^* &= M_4, & M_5^* &= M_5, & M_6^* &= M_8, \\ M_7^* &= M_7, & M_9^* &= M_{10}, & M_{11}^* &= M_{11}, \\ M_{max}^* &= M_{min}. \end{aligned}$$

Démonstration. D'abord, rappelons le résultat du lemme 1.2.1, c'est-à-dire $Pol(\geq) = Pol(\leq)$. Montrons que $max^* = min$. Il est immédiat que $s = s_{210}$ est antimonotone (c'est-à-dire $a \leq b \Rightarrow s(a) \geq s(b)$). Soit $x_1, x_2 \in E_3$. Par la commutativité de max , on peut, sans perdre de généralité, supposer que $x_1 \leq x_2$. Alors $s(x_1) \geq s(x_2)$ et

$$max^*(x_1, x_2) = s(max(s(x_1), s(x_2))) = s(s(x_1)) = x_1 = min(x_1, x_2).$$

Pour montrer que $O^* = O$, on note que $O = Pol(\leq)$ et donc que par le lemme 2.4.2, aussi $O^* = Pol(s(\leq)) = Pol(\geq) = Pol(\leq)$.

Pour trouver le dual des ensembles M_1 à M_{11} , il faut simplement trouver les duaux $D^*(0), D^*(0, 1), C^*(0), C^*(1), C^*(2), E^*(0)$ et S^* , les clones de O correspondant à chacun des M_i pour $i = 1, \dots, 11$. Pour M_{12}^* , on doit utiliser $max^* = min$ et $O^{(1)*} = O^{(1)}$. \square

Le lemme 2.4.3 sera utile pour éviter de répéter des preuves entre des énoncés comportant des fonctions et des ensembles duaux. Les lemmes de la prochaine section en seront de très bons exemples.

2.5. PREUVE DE LA CONDITION A

Cette section est uniquement consacrée à démontrer la condition (A) de la remarque 2.3.4 :

(A) Pour $i, j \in \{1, 2, \dots, 13\}$ donné, si $i \neq j$, alors $M_i \not\subseteq M_j$.

Nous pouvons également écrire cette condition de la manière suivante :

(A) Pour $i, j \in \{1, 2, \dots, 13\}$ donné, si $i \neq j$, alors $M_i \setminus M_j \neq \emptyset$.

Il faudra donc trouver une fonction pour tous les couples d'ensembles $M_i \setminus M_j$ possibles, ce qui en fait $13 \times 12 = 156$. Il est facile de le faire en grande partie avec des fonctions de $O^{(1)}$, mais il sera nécessaire d'introduire quelques fonctions de $O^{(2)}$ pour compléter le tableau. Voici donc les fonctions $u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2$, toutes des fonctions monotones à deux variables, qui seront utiles pour montrer la condition A :

$$u_1(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_1 < 2 \text{ et } x_2 < 2, \\ 2 & \text{si } x_1 = 2 \text{ ou } x_2 = 2. \end{cases}$$

$$u_2(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_1 = x_2 = 0, \\ 2 & \text{si } x_1 > 0 \text{ ou } x_2 > 0. \end{cases}$$

$$v_1(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_1 = 0 \text{ ou } x_2 = 0, \\ 2 & \text{si } x_1 > 0 \text{ et } x_2 > 0. \end{cases}$$

$$v_2(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_1 < 2 \text{ ou } x_2 < 2, \\ 2 & \text{si } x_1 = x_2 = 2. \end{cases}$$

$$w_1(x_1, x_2) = \begin{cases} x_2 & \text{si } x_1 < 2, \\ 2 & \text{si } x_1 = 2. \end{cases}$$

$$w_2(x_1, x_2) = \begin{cases} x_2 & \text{si } x_1 > 0, \\ 0 & \text{si } x_1 = 0. \end{cases}$$

Pour nous donner une idée de leur représentation, la figure suivante montre les six fonctions dans un graphique.

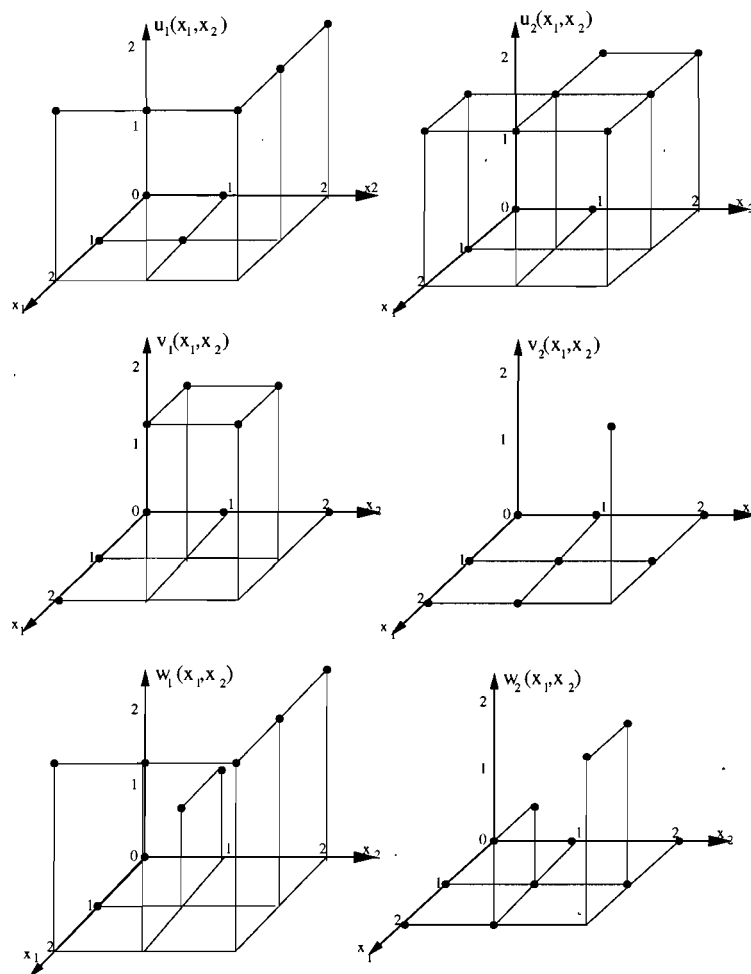


FIG. 2.1. Fonctions $u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2$.

Remarque 2.5.1. Avec la représentation graphique, il est plus facile de réécrire ces fonctions sous une forme canonique plus usuelle :

$$u_1(x_1, x_2) = \max(s_{002}(x_1), s_{002}(x_2)),$$

$$u_2(x_1, x_2) = \max(s_{022}(x_1), s_{022}(x_2)),$$

$$v_1(x_1, x_2) = \min(s_{022}(x_1), s_{022}(x_2)),$$

$$v_2(x_1, x_2) = \min(s_{002}(x_1), s_{002}(x_2)),$$

$$w_1(x_1, x_2) = \max(s_{002}(x_1), s_{012}(x_2)),$$

$$w_2(x_1, x_2) = \min(s_{022}(x_1), s_{012}(x_2)).$$

De cette manière, il sera plus facile de travailler avec ces fonctions, ce qui sera utile pour les exprimer l'une en fonction de l'autre dans le lemme suivant.

Lemme 2.5.1. $u_1^* = v_1$ et $u_2^* = v_2$, $w_1^* = w_2$.

Démonstration. Nous vérifions que $u_1^* = v_1$. En effet, soit $x = (x_1, x_2) \in E_3$. Alors

$$\begin{aligned} u_1^*(x) = s(u_1(s(x_1), s(x_2))) = 0 &\Leftrightarrow u_1(s(x_1), s(x_2)) = 2 \\ &\Leftrightarrow s(x_1) = 2 \text{ ou } s(x_2) = 2 \\ &\Leftrightarrow x_1 > 0 \text{ ou } x_2 > 0. \end{aligned}$$

L'image de u_1 est $\{0, 2\}$ ce qui montre que $u_1^* = v_1$. La preuve est similaire pour $u_2^* = v_2$ et $w_1^* = w_2$. \square

Remarque 2.5.2. Pour tout $x_1 \in E_3$, on a que $s_{002}^*(x_1) = s(s_{002}(s(x_1))) = s_{022}(x_1)$.

Lemme 2.5.2. Soit les fonctions u_1 et u_2 énoncées précédemment. Alors

$$u_1(x_1, x_2) = u_2(s_{002}(x_1), s_{002}(x_2))$$

$$u_2(x_1, x_2) = u_1(s_{022}(x_1), s_{022}(x_2)).$$

Démonstration. • $\mathbf{u}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \mathbf{u}_2(s_{002}(\mathbf{x}_1), s_{002}(\mathbf{x}_2))$: Nous n'avons qu'à substituer u_1 par ce qu'on a trouvé à la remarque 2.5.1 et utiliser $s_{002} = s_{022}(s_{002})$. Donc pour $x = (x_1, x_2)$:

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \max(s_{002}(x_1), s_{002}(x_2)) \\ &= \max(s_{022}(s_{002}(x_1)), s_{022}(s_{002}(x_2))) \\ &= u_2(s_{002}(x_1), s_{002}(x_2)). \end{aligned}$$

• $\mathbf{u}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \mathbf{u}_1(s_{022}(\mathbf{x}_1), s_{022}(\mathbf{x}_2))$: Nous n'avons qu'à substituer u_2 par ce qu'on a trouvé à la remarque 2.5.1 et utiliser $s_{022} = s_{002}(s_{022})$. Donc pour $x = (x_1, x_2)$:

$$\begin{aligned} u_2(x_1, x_2) &= \max(s_{022}(x_1), s_{022}(x_2)) \\ &= \max(s_{002}(s_{022}(x_1)), s_{002}(s_{022}(x_2))) \\ &= u_1(s_{022}(x_1), s_{022}(x_2)). \end{aligned}$$

□

Lemme 2.5.3. *Soit les fonctions v_1 et v_2 énoncées précédemment. Alors*

$$\begin{aligned} v_1(x_1, x_2) &= v_2(s_{022}(x_1), s_{022}(x_2)) \\ v_2(x_1, x_2) &= v_1(s_{002}(x_1), s_{002}(x_2)). \end{aligned}$$

Démonstration. Comme $u_1^* = v_1$, et $u_2^* = v_2$ la preuve est tout simplement duale à la précédente :

• $\mathbf{v}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \mathbf{v}_2(s_{022}(\mathbf{x}_1), s_{022}(\mathbf{x}_2))$:

$$\begin{aligned} v_1(x_1, x_2) &= u_1^*(x_1, x_2) \\ &= u_2^*(s_{002}^*(x_1), s_{002}^*(x_2)) \\ &= v_2(s_{022}(x_1), s_{022}(x_2)). \end{aligned}$$

- $v_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = v_1(s_{002}(\mathbf{x}_1), s_{002}(\mathbf{x}_2))$: Même procédé pour v_1 :

$$\begin{aligned} v_2(x_1, x_2) &= u_2^*(x_1, x_2) \\ &= u_1^*(s_{022}^*(x_1), s_{022}^*(x_2)) \\ &= v_1(s_{002}(x_1), s_{002}(x_2)). \end{aligned}$$

□

Lemme 2.5.4. *Soit une fonction $f_0 \in O^{(2)}$, telle que*

$$f_0(0, 0) = 0$$

$$f_0(0, 2) = 1$$

$$f_0(2, 2) = 2.$$

Alors, les deux conditions suivantes sont vraies :

$$(1) \max(x_1, x_2) = f_0(u_1(x_1, x_2), u_2(x_1, x_2)),$$

$$(2) \min(x_1, x_2) = f_0(v_2(x_1, x_2), v_1(x_1, x_2)).$$

Démonstration. Il faut d'abord se rendre compte que l'image des fonctions u_1, u_2, v_1, v_2 est l'ensemble $\{0, 2\}$, et que si $u_1(x, y) = 2$, alors $u_2(x, y) = 2$ automatiquement, de même que si $v_2(x, y) = 2$, alors $v_1(x, y) = 2$ aussi. Ceci et $u_1(x) \leq u_2(x)$, $v_2(x) \leq v_1(x)$ pour tout $x = (x_1, x_2) \in E_3^{(2)}$ ont pour effet que les fonctions $f_0(u_1, u_2)$ et $f_0(v_2, v_1)$ peuvent seulement prendre comme valeur dans $\{f_0(0, 0), f_0(0, 2), f_0(2, 2)\}$, et respectent bien l'énoncé du lemme. Prouvons maintenant un à un les énoncés :

(1) $\mathbf{max}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \mathbf{f}_0(\mathbf{u}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \mathbf{u}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2))$ Pour $x = (x_1, x_2) \in E_3$:

$$\max(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0 \Leftrightarrow u_1(x) = u_2(x) = 0 \Leftrightarrow f_0(u_1, u_2)(x) = 0,$$

$$\max(x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 < 2 \text{ et } x_2 = 1 \\ x_1 = 1 \text{ et } x_2 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow u_1(x) = 0 \text{ et } u_2(x) = 2 \Leftrightarrow f_0(u_1, u_2)(x) = 1,$$

$$\max(x) = 2 \Leftrightarrow x_1 = 2 \text{ ou } x_2 = 2 \Leftrightarrow u_1(x) = u_2(x) = 2 \Rightarrow f_0(u_1, u_2)(x) = 2.$$

Donc il est juste d'affirmer que $max = f_0(u_1, u_2)$.

(2) $\min(x_1, x_2) = f_0(v_2(x_1, x_2), v_1(x_1, x_2))$ Pour $x = (x_1, x_2) \in E_3$:

$$\min(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \text{ ou } x_2 = 0 \quad \Leftrightarrow v_1(x) = 0 \Leftrightarrow f_0(v_1, v_2)(x) = 0,$$

$$\min(x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \text{ et } x_2 \neq 0 \\ x_1 = 2 \text{ et } x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow v_2(x) = 0, v_1(x) = 2 \Leftrightarrow f_0(v_1, v_2)(x) = 1,$$

$$\min(x) = 2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 2 \quad \Leftrightarrow v_1(x) = v_2(x) = 2 \Rightarrow f_0(v_1, v_2)(x) = 2.$$

D'après les propriétés de f_0 , il est donc juste d'affirmer que $\min(x) = f_0(v_1(x), v_2(x))$.

□

Lemme 2.5.5. *Les fonctions max, u_1, u_2 ne sont pas dans M_{min} .*

Démonstration. Nous montrerons d'abord que la fonction max n'est pas dans M_{min} , puisque ceci nous aidera pour le reste de la preuve :

- $\max \notin \mathbf{M}_{min}$: Supposons par l'absurde que $max \in M_{min}$. Dans ce cas, par le lemme 2.1.1 nous pouvons écrire $max(x_1, x_2)$ de la façon suivante :

$$max(x_1, x_2) = \min(t_1(x_1), t_2(x_2))$$

telle que t_1 et t_2 sont des fonctions de $O^{(1)}$. Puisque $\min(t_1(0), t_2(2)) = max(0, 2) = 2$, alors $t_1(0) = 2$. Comme t_1 est une fonction monotone, elle prend toujours la valeur 2, donc $t_1 = c_2$. Ceci nous indique la chose suivante ;

$$max(x_1, x_2) = \min(c_2(x_1), t_2(x_2)) = \min(2, t_2(x_2)) = t_2(x_2).$$

Ce qui fait de max une fonction essentiellement à une variable, qui nous mène à une contradiction.

- $u_1, u_2 \notin \mathbf{M}_{min}$: Supposons par l'absurde que $u_i \in M_{min}$ pour $i \in \{1, 2\}$. Alors pour tous $x_1, x_2 \in E_3$,

$$u_i(x_1, x_2) = \min(t_1(x_1), t_2(x_2))$$

où $t_1, t_2 \in O^{(1)}$ satisfont $t_1(0) \leq t_2(0)$. Alors $0 = u_i(0, 0) = t_1(0)$ et $2 = u_i(0, 2) = \min(t_1(0), t_2(2)) = \min(0, t_2(2)) = 0$, une contradiction.

□

Lemme 2.5.6. *Les fonctions \min, v_1, v_2 ne sont pas dans M_{max} .*

Démonstration. Par la dualité du lemme précédent : $\max \notin M_{min} \Rightarrow \max^* \notin M_{min}^* \Rightarrow \min \notin M_{max}$. Le fait que $v_i \notin M_{max}$ pour $i = 1, 2$ aussi s'obtient par dualité.

□

Les prochains lemmes répertorieront d'autres fonctions nécessaires à la preuve de la condition A . Pour faciliter la compréhension, elles seront ensuite mises dans un tableau.

Lemme 2.5.7.

$$c_1, c_2 \notin M_1 = O \cap D(0), \quad c_0, s_{002} \notin M_4 = O \cap D(1, 2).$$

Démonstration. Par la définition de l'ensemble $D(0)$, donnée dans une section précédente :

$$c_1(0), c_2(0) \neq 0 \Rightarrow c_1, c_2 \notin D(0) \Rightarrow c_1, c_2 \notin M_1,$$

$$c_0(1), c_0(2) \notin \{1, 2\} \Rightarrow c_0 \notin D(1, 2) \Rightarrow c_0 \notin M_4,$$

$$s_{002}(1) \notin \{1, 2\} \Rightarrow s_{002} \notin D(1, 2) \Rightarrow s_{002} \notin M_4.$$

□

Remarque 2.5.3. *En procédant de la même manière, on obtient :*

$$c_0, c_1 \notin M_2 = O \cap D(2),$$

$$s_{001}, s_{112}, c_1 \notin M_5 = O \cap D(2, 0),$$

$$c_2, s_{022} \notin M_3 = O \cap D(0, 1).$$

Lemme 2.5.8. $c_0, c_1, c_2 \in M_i$ pour $i = 6, \dots, 13$.

Démonstration. Comme toutes les relations binaires définissant M_i pour $i = 6, 7, \dots, 10$ sont réflexives, alors $c_0, c_1, c_2 \in M_i$ pour $i = 6, 7, \dots, 10$. Par définition, toutes les fonctions unaires monotones sont dans S , M_{max} , M_{min} et alors $c_0, c_1, c_2 \in M_{11} \cap M_{12} \cap M_{13}$. \square

Lemme 2.5.9. $c_0 \in M_1 \cap M_3$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer les propriétés des clones M_1 et M_3 .

$$c_0(0) = 0 \Rightarrow c_0 \in D(0) \Rightarrow c_0 \in M_1,$$

$$c_0(0) = c_0(1) = 0 \Rightarrow c_0 \in D(0, 1) \Rightarrow c_0 \in M_3.$$

\square

Remarque 2.5.4. *En procédant de la même manière, on obtient les énoncés suivants :*

$$c_0, c_2 \in M_5, \quad c_2, s_{002}, s_{112} \in M_2, \quad c_1, c_2 \in M_4,$$

$$s_{022}, s_{001} \in M_1, \quad c_1 \in M_3.$$

Lemme 2.5.10. $u_1, u_2, v_1, v_2 \in M_6 \cap M_8$.

Démonstration. Les fonctions u_1, u_2, v_1, v_2 sont des fonctions monotones et alors il ne reste à démontrer que $u_1, u_2, v_1, v_2 \in C(0) \cap C(2)$. Comme $\{(0, 0), (0, 2), (2, 0), (2, 2)\} \in \rho_{C(0)} \cap \rho_{C(2)}$, l'image des fonctions u_1, u_2, v_1, v_2 est l'ensemble $\{0, 2\}$. \square

Lemme 2.5.11.

$$min \in M_1 \cap \dots \cap M_7 \cap M_9 \cap M_{10},$$

$$max \in M_1 \cap \dots \cap M_5 \cap M_7 \cap M_8 \cap \dots \cap M_{10}.$$

Démonstration. Il faut montrer que min et max font partie des ensembles de type D, C et E , à deux exceptions près.

- **min, max** $\in M_j$ pour $j = 1, 2, \dots, 5$: Il suffit de constater que $\min(i, i) = \max(i, i)$ pour tous $i \in E_3$ et donc $\min, \max \in M_j$ pour $j = 1, 2$. De plus, pour tout $A \subseteq E_3$ tel que $|A| = 2$, et tout $x, y \in A$, on a $\max(x, y) \in A$, $\min(x, y) \in A$.
- **min** $\in M_6 \cap M_7$: Par contraposée, montrons que $\min \in C(j)$ pour tous $j \in \{0, 1\}$. Soit $(a, b) = (\min(x_1, y_1), \min(x_2, y_2)) \notin \rho_{C(j)}$. Alors $(a, b) \in \{(j, 2), (2, 1 - j)\}$ et sans perdre de généralité nous pouvons supposer $a = 1 - j$ et $b = 2$. Alors $x_2 = y_2 = 2$ et, par la symétrie de \min nous pouvons supposer $x_1 = 1 - j$. Dans ce cas, $(x_1, x_2) = (1 - j, 2) \notin \rho_{C(j)}$.
- **max** $\in M_7 \cap M_8$: Par la dualité (lemme 2.4.3) et le fait que $\min \in M_6 \cap M_7$, on obtient $\max = \min^* \in M_6^* \cap M_7^* = M_8 \cap M_7$.
- **min, max** $\in M_9 \cap M_{10}$: Par la contraposée, montrons que $\max \in E(0)$. Soit $(a, b) = (\max(x_1, y_1), \max(x_2, y_2)) \notin \rho_{E(0)}$. Alors $(a, b) \in \{(0, 1)(0, 2)(1, 0)(2, 0)\}$. Comme $\rho_{E(0)}$ est symétrique, on peut supposer $0 = a = \max(x_1, y_1)$ et $\max(x_2, y_2) = b > 0$. Alors $\max, x_1 = 0 = y_1$ par la symétrie et on peut supposer que $x_2 > 0$. Donc $(x_1, x_2) \in (0, 1), (0, 2)$ montre que $(x_1, x_2) \notin \rho_{E(0)}$. De façon similaire, montrons $\min \in E(0)$. Soit $(a, b) = (\min(x_1, y_1), \min(x_2, y_2)) \notin \rho_{E(0)}$. On peut supposer que $a = 0, b > 0$ et $x_1 = 0$. Comme $x_2 > 0$ ceci montre que $(x_1, x_2) \notin \rho_{E(0)}$.
Par dualité, $\min = \max^* \in M_9^* = M_{10}$ et $\max = \min^* \in M_9^* = M_{10}$.

□

Remarque 2.5.5. Outre M_{\max} et M_{\min} , on observe qu'il y a deux autres clones M_i où \max et \min ne sont pas tous les deux inclus. En effet, \min n'est pas inclus dans M_8 et \max n'est pas dans M_6 .

Lemme 2.5.12. $\min, \max \notin M_{11}$.

Démonstration. Comme $M_{11} = O \cap S$, il faut montrer que $\max, \min \notin S$. En effet, même si $\{(0, 1, 1), (0, 0, 2), (0, 2, 2), (1, 1, 2)\} \in \rho_S$, on observe

$$(\max(0, 0), \max(1, 0), \max(1, 2))^{\mathbf{T}} = (0, 1, 2)^{\mathbf{T}} \notin \rho_S$$

$$(\min(0, 1), \min(2, 1), \min(2, 2))^{\mathbf{T}} = (0, 1, 2)^{\mathbf{T}} \notin \rho_S$$

□

Lemme 2.5.13. $w_1 \notin M_6 \cup M_9$ et $w_2 \notin M_8 \cup M_{10}$.

Démonstration. Nous trouvons des exemples où les relations ne sont pas préservées.

$$\{(0, 2), (1, 0)\} \in \rho_{C(0)} \text{ mais } (w_1(0, 1), w_1(2, 0)) = (1, 2) \notin \rho_{C(0)}, \text{ alors } w_1 \notin M_6.$$

$$\{(2, 1), (0, 0)\} \in \rho_{E(0)} \text{ mais } (w_1(2, 0), w_1(1, 0)) = (2, 0) \notin \rho_{E(0)}, \text{ alors } w_1 \notin M_9.$$

Par dualité, $w_2 = w_1^* \notin M_6^* \cup M_9^* = M_8 \cup M_{10}$.

□

Lemme 2.5.14.

$$s_{112} \notin M_6, \quad s_{002}, s_{022} \notin M_7, \quad s_{001}, s_{011} \notin M_8,$$

$$s_{002}, s_{001} \notin M_9, \quad s_{122}, s_{022} \notin M_{10}.$$

Démonstration. D'abord $s_{112} \notin M_6$ car $(0, 2) \in \rho_{C(0)}$, mais $(s_{112}(0), s_{112}(2)) = (1, 2) \notin \rho_{C(0)}$. Maintenant $s_{011} = s_{112}^* \notin M_6^* = M_8$. Aussi $s_{002} \notin M_7$ car $(1, 2) \in \rho_{C(1)}$, mais $(s_{002}(1), s_{002}(2)) = (0, 2) \notin \rho_{C(1)}$. Par dualité $s_{022} = s_{002}^* \notin M_7^* = M_7$. De plus, $s_{001} \notin M_8$ car $(1, 2) \in \rho_{C(1)}$, mais $(s_{001}(1), s_{001}(2)) = (0, 2) \notin \rho_{C(1)}$. Aussi $(1, 2) \in \rho_{E(0)}$ et $(s_{002}(1), s_{002}(2)) = (0, 2) \notin \rho_{E(0)}$ montre que $s_{002} \notin M_9$. Finalement, $s_{122} = s_{002}^* \notin M_9^* = M_{10}$.

□

Lemme 2.5.15. $w_2 \in M_1 \cap \dots \cap M_5$ et $w_1 \in M_1 \cap \dots \cap M_5$.

Démonstration.

$$w_1(0, 0) = 0, \Rightarrow w_1 \in D(0) \Rightarrow w_1 \in M_1,$$

$$w_1(2, 2) = 2, \Rightarrow w_2 \in D(2) \Rightarrow w_1 \in M_2,$$

$$\{w_1(x, y) | x, y \in \{0, 1\}\} = \{0, 1\} \Rightarrow w_1 \in D(0, 1) \Rightarrow w_1 \in M_3,$$

$$\{w_1(x, y) | x, y \in \{1, 2\}\} = \{1, 2\} \Rightarrow w_1 \in D(1, 2) \Rightarrow w_1 \in M_4,$$

$$\{w_1(x, y) | x, y \in \{2, 0\}\} = \{2, 0\} \Rightarrow w_1 \in D(2, 0) \Rightarrow w_1 \in M_5.$$

Pour w_2 , la preuve est duale. En effet, $w_2 = w_1^* \in M_1^* \cap \dots \cap M_5^* = M_1 \cap \dots \cap M_5$. \square

Proposition 2.5.1. *Pour tous $i, j \in \{1, 2, \dots, 13\}$ tels que $i \neq j$, il existe $f \in M_i \setminus M_j$. Alors la condition (A) est vérifiée.*

Démonstration. Pour montrer qu'il n'y a pas d'inclusion entre M_i et M_j , pour $i, j \in \{1, \dots, 13\}$ il faut trouver une fonction $f_{ij} \in M_i \setminus M_j$. Pour plusieurs paires (i, j) , les lemmes 2.5.5 à 2.5.15 donnent de telles fonctions. Pour les quelques entrées restantes, les deux tableaux suivants indiquent les fonctions f_{ij} correspondantes. \square

TAB. 2.1. Fonctions de $M_i \setminus M_j$.

$M_i \setminus M_j$	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9	M_{10}
M_1	X	c_0	s_{022}	c_0	s_{001}	w_1	s_{002}	s_{001}	s_{001}	s_{022}
M_2	c_2	X	c_2	s_{002}	s_{112}	s_{112}	s_{002}	w_2	s_{002}	s_{022}
M_3	c_1	c_0, c_1	X	c_0	c_1	s_{112}	s_{002}	s_{001}	s_{001}	w_2
M_4	c_1, c_2	c_1	c_2	X	c_1	s_{112}	s_{022}	s_{011}	w_1	s_{022}
M_5	c_2	c_0	c_2	c_0	X	w_1	s_{002}	w_2	s_{002}	s_{022}
M_6	c_1, c_2	c_0, c_1	c_2	c_0	c_1	X	s_{002}	s_{001}	s_{001}	s_{022}
M_7	c_1, c_2	c_0, c_1	c_2	c_0	c_1	s_{112}	X	s_{001}	s_{001}	s_{122}
M_8	c_1, c_2	c_0, c_1	c_2	c_0	c_1	s_{112}	s_{002}	X	s_{002}	s_{022}
M_9	c_1, c_2	c_0, c_1	c_2	c_0	c_1	s_{112}	s_{022}	s_{011}	X	s_{022}
M_{10}	c_1, c_2	c_0, c_1	c_2	c_0	c_1	s_{112}	s_{002}	s_{001}	s_{001}	X
M_{11}	c_1, c_2	c_0, c_1	c_2	c_0	c_1	s_{112}	s_{002}	s_{001}	s_{002}	s_{022}
M_{12}	c_1, c_2	c_0, c_1	c_2	c_0	c_1	s_{112}	s_{002}	s_{001}	s_{002}	s_{022}
M_{13}	c_1, c_2	c_0, c_1	c_2	c_0	c_1	s_{112}	s_{002}	s_{001}	s_{002}	s_{022}

TAB. 2.2. Fonctions de $M_i \setminus M_j$, (suite).

$M_i \setminus M_j$	M_{11}	M_{12}	M_{13}
M_1	max, min	min	max
M_2	max, min	min	max
M_3	max, min	min	max
M_4	max, min	min	max
M_5	max, min	min	max
M_6	min	min	u_1, u_2
M_7	max, min	min	max
M_8	max	v_1, v_2	max
M_9	max, min	min	max
M_{10}	max, min	min	max
M_{11}	X	v_1, v_2	u_1, u_2
M_{12}	max	X	max
M_{13}	min	min	X

La condition (A) étant montrée, il faut maintenant s'attarder à la condition (B), dans l'optique de terminer la preuve du théorème 2.2.1

2.6. PREUVE DE LA CONDITION B

La condition (A) dans la remarque 2.3.4 affirme qu'aucun clone de \mathfrak{M} n'est inclus dans un autre et montre ainsi que les ensembles de \mathfrak{M} sont O -maximaux. Pour sa part, la condition (B) énonce que O est le seul clone qui n'est inclus dans aucun clone de \mathfrak{M} est O – maximal. Rappelons donc ce que nous voulons maintenant prouver de la remarque 2.3.4 :

(B) Pour un ensemble $G \subseteq O$, si $G \not\subseteq M_i$ pour tous $i \in \{1, 2, \dots, 13\}$, alors $\overline{G} = O$.

D'abord \overline{G} est inclus dans O puisque G est inclus dans O et que O est fermé. Étant donné que $O = \overline{\{max, min\} \cup O^{(1)}}$, il ne reste seulement qu'à montrer que $\{max, min\} \cup O^{(1)} \subseteq \overline{G}$. Autrement dit que les fonctions max, min et celles de $O^{(1)}$ sont incluses dans \overline{G} . C'est exactement ce que les prochains lemmes montreront.

Lemme 2.6.1. *Pour tout sous-ensemble G de O , si $G \not\subseteq M_i$ pour $i = 1, 2, \dots, 5$, alors c_0, c_1, c_2 sont dans \overline{G} .*

Démonstration. En trouvant certaines fonctions à partir des informations de l'énoncé, nous construirons les fonctions c_0, c_1, c_2 , tout en étant dans \overline{G} .

- $c_2 \in \overline{G}$: Nous avons que $G \not\subseteq M_1 = O \cap D(0)$, donc G contient f_1 telle que $f_1(0, 0, \dots, 0) > 0$. Posons $f_2(x_1) = f_1(x_1, \dots, x_1)$. Ici f_2 est alors une fonction appartenant à \overline{G} dépendant d'une seule variable. On remarque aussi que $f_2(0) > 0$, et donc $f_2 \in \{c_1, s_{112}, s_{122}, c_2\}$.

D'un autre côté, comme $G \not\subseteq M_3 = O \cap D(0, 1)$, il existe une fonction $f_3 \in G$ telle que $f_3(a_1, a_2, \dots, a_m) = 2$, pour certains $a_1, a_2, \dots, a_m \in \{0, 1\}$. Maintenant f_3 étant une fonction monotone, $f_3(b_1, b_2, \dots, b_m) = 2$, pour tous $b_1, b_2, \dots, b_m \in \{1, 2\}$.

Dans ce cas on voit que $f_3(f_2, f_2, \dots, f_2)$ est une fonction d'une seule variable qui est toujours égale à 2 :

$$\begin{aligned} f_3(f_2, f_2, \dots, f_2)(x) &= f_3(f_2(x, x, \dots, x), f_2(x, x, \dots, x), \dots, f_2(x, x, \dots, x)) \\ &= f_3(x_1, \dots, x_m) = 2, \end{aligned}$$

où $x_i \in \{1, 2\}$ pour $i = 1, \dots, m$. Nous pouvons donc conclure que c_2 est générée par les trois fonctions f_1, f_2, f_3 , qui sont incluses dans G , c'est-à-dire $c_2 \in \overline{G}$.

Du fait que $G \not\subseteq M_2 = O \cap D(2)$, il existe $f_4 \in G$ telle que $f_4(2, \dots, 2) < 2$. Alors $f_5(x_1) = f_4(c_2(x_1), \dots, c_2(x_1)) \in \overline{G}$ est la constante c_0 ou la constante c_1 . Il y a deux possibilités :

- (i) Soit $c_1 \in \overline{G}$. Par l'hypothèse, $G \not\subseteq M_4 = O \cup D(1, 2)$ et donc il existe $f_6 \in G$ telle que $f_6(a_1, \dots, a_m) = 0$ pour certains $a_1, \dots, a_m \in \{1, 2\}$. Par monotonie, $f_6(1, \dots, 1) = 0$ et donc $c_0 = f_6(c_1, \dots, c_m) \in \overline{G}$. Alors $c_0, c_1, c_2 \in \overline{G}$.
- (ii) Soit $c_2 \in \overline{G}$. Du fait que $G \not\subseteq M_5 = O \cup D(0, 2)$, il existe $f_7 \in G$ telle que $f_7(a_1, \dots, a_m) = 1$ pour certains $a_1, \dots, a_m \in \{0, 2\}$. Pour $i = 1, \dots, m$, soit $g_i = c_0$ si $a_i = 0$ et $g_i = c_2$ si $a_i = 2$. Alors $c_1 = f_7(g_1, \dots, g_m) \in \overline{G}$ et $c_0, c_1, c_2 \in \overline{G}$.

□

Lemme 2.6.2. *Pour tout sous-ensemble G de O , si $G \not\subseteq M_i$ pour $i = 1, 2, \dots, 5, 6, 10$, alors s_{122} est dans \overline{G} .*

Démonstration. D'abord, comme nous sommes dans les mêmes conditions que le lemme précédent, c_0, c_1 et c_2 sont dans la fermeture de G . Ensuite, comme $G \not\subseteq M_6 = O \cap C(0)$, il existe une fonction $f_1 \in G$ telle que

$$(f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_1(y_1, y_2, \dots, y_n)) = (1, 2),$$

pour certains $(x_i, y_i) \in \rho_{C(0)} = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (0, 1), (1, 0), (0, 2), (2, 0)\}$. Par monotonie, nous pouvons substituer toutes les paires $(0, 1)$ par $(0, 2)$. Il en est

de même pour les paires $(2, 0)$ et $(1, 0)$, qui peuvent être remplacées par $(2, 2)$ et $(1, 1)$ respectivement. Nous pouvons dire qu'il existe une fonction $f_1 \in G$ telle que

$$(f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_1(y_1, y_2, \dots, y_n)) = (1, 2),$$

pour certains $(x_i, y_i) \in \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (0, 2)\}$.

À partir de ces paires qui indiquent lorsque f_1 vaut 1 et 2, nous pouvons créer une fonction qui dépendra seulement des variables où $(x_i, y_i) = (0, 2)$. Les autres paires ne changent en rien la valeur de la fonction puisqu'elles sont composées d'éléments identiques. Il est à noter qu'il doit y avoir au moins une apparition de la paire $(0, 2)$ dans les couples (x_i, y_i) sinon des composantes identiques ne donneront pas des valeurs différentes dans la fonction f_1 .

Soit alors f_2 la fonction déterminée par $f_1(w_1, w_2, \dots, w_n)$, telle que

$$w_i(x_i) = \begin{cases} c_0(x_i) & \text{si } (x_i, y_i) = (0, 0), \\ c_1(x_i) & \text{si } (x_i, y_i) = (1, 1), \\ c_2(x_i) & \text{si } (x_i, y_i) = (2, 2), \\ x_i & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ici f_2 est une fonction d'une variable composée des fonctions f_1, c_0, c_1 et c_2 , toutes quatre dans \overline{G} . Par les propriétés de f_1 , il est clair que $f_2(0) = 1$ et $f_2(2) = 2$. Comme f_2 est monotone, $f_2(1) \in \{1, 2\}$. Nous voyons que s_{122} ou s_{112} sont contenues dans la fermeture de G . Dans la première éventualité, la preuve est terminée. Supposons alors que s_{112} est dans \overline{G} .

Comme $G \notin M_{10} = O \cap E(2)$, il existe une fonction $g_1 \in G$ telle que

$$(g_1(x_1, x_2, \dots, x_n), g_1(y_1, y_2, \dots, y_n)) \in \{(0, 2), (1, 2)\},$$

pour certains $(x_i, y_i) \in \rho_{E(2)} = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (0, 1), (1, 0)\}$.

Étant donné que g_1 est monotone, nous pouvons substituer toutes les paires $(1, 0)$ par $(1, 1)$. Dans ce cas, nous pouvons maintenant dire qu'il existe une fonction $g_1 \in G$ telle que

$$(g_1(x_1, x_2, \dots, x_n), g_1(y_1, y_2, \dots, y_n)) \in \{(0, 2), (1, 2)\},$$

pour certaines paires $(x_i, y_i) \in \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (0, 1)\}$.

De la même manière que précédemment, nous pouvons créer une fonction à une variable qui dépendra seulement des apparitions du couple $(0, 1)$ dans le domaine de définition. Soit $g_3 = g_1(w_1, w_2, \dots, w_n)$, telle que

$$w_i(x_i) = \begin{cases} c_0(x_i) & \text{si } (x_i, y_i) = (0, 0), \\ c_1(x_i) & \text{si } (x_i, y_i) = (1, 1), \\ c_2(x_i) & \text{si } (x_i, y_i) = (2, 2), \\ x_i & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction g_3 est bien dans la fermeture de G et comme $g_3(0) \in \{0, 1\}$, $g_3(1) = 2$, $g_3(2) = 2$, la fonction g_3 est soit la fonction s_{022} ou s_{122} . Puisque $s_{112}(s_{022}) = s_{122}$, dans un cas comme dans l'autre, le lemme est démontré. \square

Lemme 2.6.3. *Pour tout sous-ensemble G de O , si $G \not\subseteq M_i$ pour $i = 1, 2, \dots, 5, 8, 9$, alors s_{001} est dans \overline{G} .*

Démonstration. Par dualité. Par hypothèse, $G \not\subseteq M_8$. Alors $G^* \not\subseteq M_8^* = M_6$ et donc par le lemme 2.6.2, $s_{122} \in \overline{G^*}$. Ceci entraîne que $s_{001} = s_{122}^* \in \overline{G^{**}} = \overline{G}$. \square

Lemme 2.6.4. *Pour tout sous-ensemble G de O , si $G \not\subseteq M_i$ pour $i = 1, 2, \dots, 5, 6, 8, 9, 10$, alors s_{011} et s_{112} sont dans \overline{G} .*

Démonstration. Par le lemme 2.6.2 et 2.6.3, s_{001} et s_{122} sont dans \overline{G} . Comme nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} s_{011} &= s_{001}(s_{122}) \\ s_{112} &= s_{122}(s_{001}), \end{aligned}$$

le lemme devient trivial. □

Lemme 2.6.5. *Pour tout sous-ensemble G de O , si $G \not\subseteq M_i$, pour $i = 1, 2, \dots, 10$, alors $O^{(1)} \subseteq \overline{G}$.*

Démonstration. De toutes les fonctions de $O^{(1)}$, il reste seulement à démontrer que s_{002} et s_{022} appartiennent à \overline{G} . Mais comme

$$\begin{aligned} s_{002} &= s_{022}(s_{001}) \\ s_{022} &= s_{002}(s_{122}), \end{aligned}$$

il suffit de montrer qu'une des deux fonctions soit dans \overline{G} pour que l'autre le soit aussi. Pour ce faire, nous utiliserons l'hypothèse que $G \not\subseteq M_7 = O \cap C(1)$. Ainsi il existe une fonction $h_1 \in G$ tel que

$$(h_1(x_1, x_2, \dots, x_n), h_1(y_1, y_2, \dots, y_n)) = (0, 2), \quad (*)$$

pour certains $(x_i, y_i) \in \rho_{C(1)} = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1), (1, 0), (0, 1)\}$.

Ici, $(2, 1)$ et $(1, 0)$ peuvent être remplacés par $(0, 1)$ et $(1, 2)$, respectivement, sans changer les valeurs de la fonction h_1 dans $(*)$. À partir de h_1 nous construisons une fonction h_2 à deux variables qui dépendra seulement des apparitions des couples $(0, 1)$ ou $(1, 2)$. Pour les couples (x_i, y_i) dont les éléments sont identiques, c'est-à-dire $x_i = y_i$, la i -ème variable sera remplacée par la fonction constante c_{x_i} .

Posons donc $h_2 = h_1(w_1, w_2, \dots, w_n)$, telle que

$$w_i(x, y) = \begin{cases} c_0(x) & \text{si } (x_i, y_i) = (0, 0), \\ c_1(x) & \text{si } (x_i, y_i) = (1, 1), \\ c_2(x) & \text{si } (x_i, y_i) = (2, 2), \\ x & \text{si } (x_i, y_i) = (0, 1), \\ y & \text{si } (x_i, y_i) = (1, 2). \end{cases}$$

Par (*), il faut que $(0, 1)$ ou $(1, 2)$ soit dans les couples (x_i, y_i) . Il se peut qu'aucun $(0, 1)$ ne soit dans les couples (x_i, y_i) . Dans ce cas, la fonction h_2 devient une fonction essentiellement dépendante d'une seule variable qu'on peut identifier avec s_{002} . D'un autre côté, s'il n'y a pas de $(1, 2)$ dans les couples (x_i, y_j) , la fonction h_2 est une fonction essentiellement d'une seule variable qu'on peut identifier avec s_{022} . Finalement, il se peut aussi que $(0, 1)$ et $(1, 2)$ soient dans les (x_i, y_i) . Dans ce dernier cas, il suffit de composer la fonction h_2 de la manière suivante :

$$h_2(s_{001}, s_{112}) = s_{002}$$

Comme h_2 , s_{001} et s_{112} sont dans \overline{G} , alors s_{002} l'est aussi. Le résultat désiré est donc obtenu. \square

La dernière étape pour compléter la preuve de la condition B , et par le fait même celle du théorème 2.2.1, est de montrer l'inclusion des fonctions *max* et *min* dans la fermeture de tout ensemble G , lorsque G n'est pas dans M_i pour $i = 1, 2, \dots, 13$. Pour commencer, il faudra extraire quelques fonctions de $O \setminus M_{11}$.

Lemme 2.6.6. *Pour toute fonction $f \in O \setminus M_{11}$, il existe une fonction $f_0 \in O^{(2)}$ appartenant à $\overline{\{f\} \cup O^{(1)}}$ et qui satisfait à*

$$f_0(0, 0) = 0,$$

$$f_0(0, 2) = 1,$$

$$f_0(2, 2) = 2.$$

Démonstration. Avant tout, comme $O^{(1)} \subseteq M_{11}$ et que $f \notin M_{11}$, on peut supposer que f est une fonction qui dépend essentiellement de n -variables (en enlevant les variables non-essentiels si nécessaire), où $n \geq 2$. Soit $A = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in E_3, a = b \text{ ou } b = c \text{ ou } a = c\}$, l'ensemble de tous les triplets de $E_3^{(3)}$ avec au plus deux éléments distincts, et $B = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in E_3, a \leq b \leq c\}$, l'ensemble de tous les triplets de E_3 qui sont ordonnés. Par hypothèse, $f \notin M_{11} = O \cap S$. Alors par ce que nous savons sur l'ensemble S , il existe des triplets $(x_i, y_i, z_i) \in A$, où $1 \leq i \leq n$, tels que

$$(f(x_1, x_2, \dots, x_n), f(y_1, y_2, \dots, y_n), f(z_1, z_2, \dots, z_n)) = (0, 1, 2) \quad (*).$$

Les triplets $(x_i, y_i, z_i) \in A \setminus B$ sont de la forme :

- (i) (a, a, b) ,
- (ii) (a, b, a) ,
- (iii) (a, b, b) ,

avec $a > b$. Par la monotonie de f , nous pouvons les remplacer par

- (i) $(a, a, 2) \in A \cap B$,
- (ii) $(b, b, a) \in A \cap B$,
- (iii) $(0, b, b) \in A \cap B$.

sans changer la validité de $(*)$.

Nous pouvons donc supposer que $x_i \leq y_i \leq z_i$, $\{x_i, y_i, z_i\} \leq 2$ pour tous $i = 1, \dots, n$. Les triplets sont donc dans B . Nous pouvons maintenant associer chacun des triplets (x_i, y_i, z_i) à une fonction h_i de $O^{(1)}$ qui lui correspond. Si $x_i = y_i = z_i$, nous remplaçons la i -ème variable par $h_i = c_{x_i}$, la fonction constante. Pour les autres variables, on les remplace suivant le tableau :

(x_i, y_i, z_i)	$(0, 0, 1)$	$(0, 0, 2)$	$(0, 1, 1)$	$(0, 2, 2)$	$(1, 1, 2)$	$(1, 2, 2)$
h_i	$s_{001}(x_1)$	x_1	$s_{011}(x_2)$	x_2	$s_{112}(x_1)$	$s_{122}(x_2)$

Une vérification directe montre que $f(h_1, \dots, h_n)$ donne f_0 . Donc $f_0 \in \overline{\{f\} \cup O^{(1)}}$.

□

Proposition 2.6.1. Si $f \in O \setminus M_{min}$, alors $u_i \in \overline{\{f\} \cup O^{(1)}}$ pour $i = 1, 2$.

Démonstration. Soit $f \in O^{(n)} \setminus M_{min}$ arbitraire. Posons $d = f(2, \dots, 2)$. Comme $O^{(1)} \subseteq M_{min}$, la fonction f est n -aire avec $n \geq 2$. On peut supposer que toutes les variables sont essentielles. Nous avons besoin de la propriété suivante de chaque fonction $g \in M_{min}$ n -aire ($n \geq 2$) :

Pour tout $a = (a_1, \dots, a_n) \in E_3^{(n)}$, il existe $1 \leq i \leq n$ tel que

$$g(a) = (2, \dots, 2, a_i, 2, \dots, 2) \quad (*).$$

En effet, d'après le lemme 2.1.1, il existe $t_1, \dots, t_n \in O^{(1)}$ tels que

$$g(a) = \min(t_1(a_1), \dots, t_n(a_n)).$$

Soit $t_i(a)$ la valeur minimale parmi $t_1(a), \dots, t_n(a)$. Alors par la monotonie des $t_j \in O^{(1)}$

$$g(a) = t_i(a_i) = \min(t_1(2), \dots, t_{i-1}(2), t_i(2), t_{i+1}(2), \dots, t_n(2)) = g(2, \dots, 2, a_i, 2, \dots, 2).$$

Notre fonction $f \notin M_{min}$ et donc la négation de la propriété (*) affirme qu'il existe $(a_1, \dots, a_n) \in E_3^{(n)}$ tel que

$$a = f(a_1, \dots, a_n) < d \quad (\text{I})$$

et pour tout $i = 1 \dots, n$,

$$b_i = f(2, \dots, 2, a_i, 2, \dots, 2) > a \quad (\text{II}_i)$$

(où a_i est la i -ème place). On peut permuter les variables de f de façon que la nouvelle fonction f' satisfasse $a_1 \leq \dots \leq a_n$. Nous avons besoin des lemmes suivants :

Lemme 2.6.7. $a_2 < 2$.

Démonstration. Par (II₁) nous avons $f(a_1, 2, \dots, 2) > a = f(a_1, \dots, a_n)$, ce qui montre $a_2 < 2$. □

Lemme 2.6.8. Soit $a_1 = \dots = a_k = 0$, $a_{k+1} = \dots = a_{k+l} = 1$, $a_{k+l+1} = \dots = a_n = 2$ avec $k \geq 0$, $l \geq 0$ et $n \geq k + l \geq 2$. Alors

$$f'(x_1, \dots, x_n) = f'(x_1, \dots, x_k, s_{112}(x_{k+1}), \dots, s_{112}(x_{k+l}), x_{k+l+1}, \dots, x_n)$$

appartient à $\overline{\{f\} \cup O^{(1)}}$ et satisfait

$$a = f'(0, \dots, 0, 2, \dots, 2) < d \quad (\text{I}')$$

(avec $(k + l)$ zéros) et

$$f'(2, \dots, 2, 0, 2, \dots, 2) > a \quad (\text{II}')$$

(avec 0 à la i -ème place).

Démonstration. Vérification directe. □

Lemme 2.6.9. Il existe $f'' \in \overline{\{f\} \cup O^{(1)}}$, f'' m -aire telle que

(i) $m \geq 2$ et $\text{im}(f'') = \{0, 2\}$ et

(ii) $f''(0, \dots, 0) = 0$, $f''(0, 2, \dots, 2) = f''(2, 0, 2, \dots, 2) = f''(2, \dots, 2, 0) = f''(2, \dots, 2) = 2$.

Démonstration. Il suffit de poser $m = k + l$ et

$$f''(x_1, \dots, x_m) = s_{022}(f'(x_1, \dots, x_m, c_2, \dots, c_2)).$$

□

Lemme 2.6.10. Si $f'' \in O^{(2)} \setminus M_{\min}$ satisfait les conditions du dernier lemme, alors $\{u_1, u_2\} \cap \overline{\{f\} \cup O^{(1)}} \neq \emptyset$.

Démonstration. Posons $b = f''(1, 1)$, $c = f''(0, 1)$, $d = f''(1, 0)$ et remarquons que $b, c, d \in \{0, 2\}$ par (i). Si $b = 0$, alors par monotonie et (ii), on obtient $f'' = u_1$. Donc soit $b = 2$. Sans perdre de généralité, nous pouvons supposer que $c \leq d$ car si $c > d$, nous pouvons remplacer f'' par $f''(x_2, x_1)$. Si $c = 2 = d$, alors $f'' = u_2$ et donc il reste le cas $c = 0$. On peut vérifier que $f''(s_{002}(x_1), x_2) = u_1$, ce qui démontre le lemme. □

Preuve de la proposition 2.6.1 :

Nous montrons par récurrence sur $m \geq 2$ la vérité de l'énoncé suivant :

(E_m) Si $f \in O^{(m)}$ satisfait (i) et (ii), alors $\{u_1, u_2\} \cap \overline{\{f\} \cup O^{(1)}} \neq \emptyset$.

L'énoncé E_2 est le dernier lemme. Pour l'étape de récurrence, supposons que $m \geq 2$ et (E_i) est vrai pour tous $2 \leq i \leq m$. Supposons que $f \in O^{(m+1)}$ satisfasse aux conditions (i) et (ii). Nous avons deux cas.

- A. Supposons que $f(a_1, \dots, a_{m+1}) = 0$ pour certains $a_1, \dots, a_m \in \{0, 2\}$ avec $l \geq 2$ zéros et $m + 1 - l$ deux. Pour la simplicité de notation, soit $a_1 = \dots = a_l = 0$ et $a_{l+1} = \dots = a_{m+1} = 2$. Posons $h(x_1, \dots, x_l) = f(x_1, \dots, x_l, c_2, \dots, c_2)$. Du lemme 2.6.9, il est facile de vérifier que $h \in \overline{\{f\} \cup O^{(1)}}$ et que f satisfait (i) et (ii). Alors par l'hypothèse d'induction, $\{u_1, u_2\} \cap \overline{\{f\} \cup O^{(1)}} \neq \emptyset$.
- B. Donc soit $f(a_1, \dots, a_{m+1}) = 2$ si au moins un $a_i \neq 0$. Posons $h(x_1, x_2) = f(x_1, x_2, \dots, x_2)$. Alors $h = u_2 \in \overline{\{f\} \cup O^{(1)}}$. Par l'hypothèse d'induction, $\{u_1, u_2\} \cap \overline{\{f\} \cup O^{(1)}} \neq \emptyset$.

□

Proposition 2.6.2. *Soit une fonction $f_0 \in O^{(2)}$ satisfaisant la condition suivante :*

$$f_0(0, 0) = 0,$$

$$f_0(0, 2) = 1,$$

$$f_0(2, 2) = 2.$$

Alors au moins un des deux cas suivants est vérifié ;

(1) Si $f_0(2, 0) \neq 0$, alors :

- $\max \in \overline{\{f_0\} \cup O^{(1)}}$ et
- Pour $g \in O \setminus M_{\max}$ quelconque, $\min \in \overline{\{f_0, g\} \cup O^{(1)}}$.

(2) Si $f_0(2, 0) \neq 2$, alors :

- $\min \in \overline{\{f_0\} \cup O^{(1)}}$ et
- Pour $g \in O \setminus M_{\min}$ quelconque, $\max \in \overline{\{f_0, g\} \cup O^{(1)}}$.

Remarque 2.6.1. *Les deux cas seront vérifiés si $f_0(2, 0) = 1$.*

Démonstration. Le premier et le deuxième cas sont quasiment duaux l'un de l'autre. Nous pouvons donc seulement prouver le cas (2) et par dualité, prouver ainsi le cas (1).

- Nous voulons d'abord montrer que $\min \in \overline{\{f_0\} \cup O^{(1)}}$. Nous sommes dans les mêmes conditions que le lemme 2.5.4, c'est-à-dire $\min = f_0(v_2, v_1)$ et par le lemme 2.5.3,

$$v_1(x_1, x_2) = v_2(s_{022}(x_1), s_{022}(x_2)).$$

$$v_2(x_1, x_2) = v_1(s_{002}(x_1), s_{002}(x_2)).$$

C'est-à-dire que v_2 peut s'écrire comme une composition de v_1 et de $O^{(1)}$, et vice-versa. Il reste donc seulement à montrer que v_1 ou v_2 est dans $\overline{\{f_0\} \cup O^{(1)}}$. Nous ne connaissons les valeurs de f_0 que pour les trois couples $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 2)$ et nous savons par l'hypothèse que pour $(2, 0)$, la fonction f_0 n'égale pas 2. Alors, nous devons composer f_0 avec les fonctions s_{002} ou s_{022} pour être en mesure d'obtenir v_2 . En prenant la fonction $f_0(s_{002}(pr_1^2), s_{002}(pr_2^2))$, nous voyons que nous sommes bien près de v_2 . Il ne reste qu'à envoyer les valeurs 0 ou 1 (de $f_0(s_{002}(pr_1^2), s_{002}(pr_2^2))$) sur 0 et les autres sur 2 pour obtenir v_2 . Donc,

$$v_2 = s_{002}(f_0(s_{002}(pr_1^2), s_{002}(pr_2^2))).$$

Le tableau de la figure 2.2 montre un aperçu de la table des valeurs des fonctions utilisées.

		v_2			f_0			$f_0(s_{002}(pr_1^2), s_{002}(pr_2^2))$				
		0	1	2								
$x \backslash y$		0	1	2	$x \backslash y$	0	1	2	$x \backslash y$	0	1	2
0		0	0	0	0	0	c	1	0	0	0	1
1		0	0	0	1	a	g	f	1	0	0	1
2		0	0	2	2	b	h	2	2	b	b	2

FIG. 2.2. Les fonctions v_2 , f_0 et $f_0(s_{002}(pr_1^2), s_{002}(pr_2^2))$, telles que $a, b, c \in \{0, 1\}$, $f \in \{1, 2\}$ et $g, h \in \{0, 1, 2\}$.

Nous pouvons maintenant écrire

$$\min = f_0(s_{002}(f_0(s_{002}(pr_1^2), s_{002}(pr_2^2))), s_{002}(f_0(s_{002}(s_{022}(pr_1^2)), s_{002}(s_{022}(pr_2^2)))))).$$

- Pour montrer l'inclusion de la fonction \max , nous appliquons la proposition 2.6.1. Nous pouvons alors affirmer que $u_1, u_2 \in \overline{\{g\} \cup O^{(1)}}$. Comme nous l'avons vu au lemme 2.5.4, $\max \in \overline{\{u_1, u_2\} \cup \{f_0\}}$. Alors, il est maintenant clair que pour une fonction $g \in O \setminus M_{\min}$ quelconque, $\max \in \overline{\{f_0, g\} \cup O^{(1)}}$. \square

Faisons maintenant le lien entre la dernière proposition et le dernier lemme pour prouver la condition (B).

Corollaire 2.6.1. *Pour tout sous-ensemble $G \subseteq O$, si $G \not\subseteq M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_{13}$, alors \min et \max sont dans \overline{G} .*

Démonstration. Soit G un sous-ensemble de O , tel que $G \not\subseteq M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_{13}$.

- Par le lemme 2.6.5, $O^{(1)}$ est inclus dans \overline{G} .
- Comme $G \not\subseteq M_{11}$ nous pouvons appliquer le lemme 2.6.6 et dire que pour toutes fonctions f dans G , il existe une fonction $f_0 \in \overline{\{f\} \cup O^{(1)}}$. f_0 est donc inclus dans \overline{G} .
- De plus f_0 respecte les conditions de la proposition 2.6.2. Dans ce cas, nous pouvons conclure que $\min, \max \in \overline{\{f_0, g\} \cup O^{(1)}}$, pour une fonction quelconque g dans $O \setminus M_{\min, \max}$. Une telle fonction g existe dans G puisque $G \not\subseteq M_i$ pour $i = 12, 13$.

Comme f_0, g et $O^{(1)}$ sont tous dans \overline{G} , alors \min et \max le sont aussi. \square

Nous avons maintenant tous les éléments nécessaires pour démontrer le théorème 2.2.1.

Démonstration du théorème 2.2.1.

La preuve des conditions A et B du corollaire 2.3.1 sont des conditions suffisantes. La condition A est démontrée par la proposition 2.5.1 tandis que la condition B l'est par le lemme 2.6.5 et le corollaire 2.6.1. \square

Chapitre 3

TREILLIS ENTRE LE CLONE DES FONCTIONS MONOTONES ET LE CLONE DES FONCTIONS POLYNOMIALES

3.1. FONCTIONS POLYNOMIALES

À partir de ce que nous savons sur les clones maximaux de P_3 et de O , nous établissons le treillis des clones entre le clone des fonctions monotones et celui des fonctions polynomiales.

Soit F_p la classe des fonctions polynomiales. F_p est en fait le clone engendré par les fonctions max , min , c_0 , c_1 et c_2 .

Définition 3.1.1. $F_p = \overline{\{min, max, c_0, c_1, c_2\}}$.

Lemme 3.1.1. *Les fonctions s_{122} , s_{001} , s_{022} , s_{002} sont les seules fonctions unaires monotones qui ne sont pas dans F_p .*

Démonstration. Les fonctions suivantes sont dans F_p :

- id (projection unaire);
- c_0 ;
- c_1 ;
- c_2 ;
- $s_{112} = max(id, c_1)$;
- $s_{011} = min(id, c_1)$.

Ordonnons ces fonctions par composantes (c'est-à-dire $f \preceq g$ si $f(x) \leq g(x) \forall x \in \{0, 1, 2\}$). Dans ce cas, le diagramme de Hasse est le suivant :

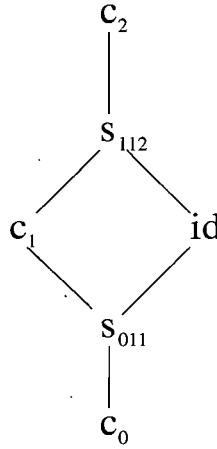


FIG. 3.1. Diagramme de Hasse de $c_0, c_1, c_2, s_{011}, s_{112}, id$.

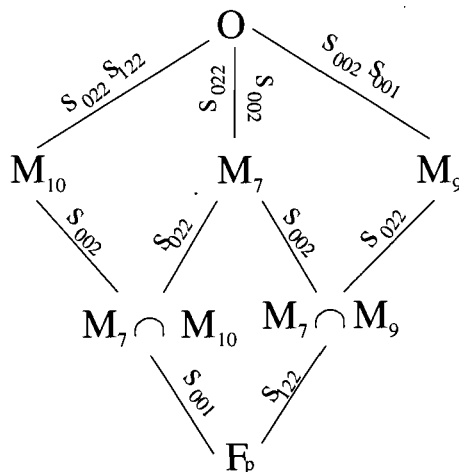
Nous voyons bien que $\{id, c_0, c_1, c_2, s_{011}, s_{112}\}$ est un ensemble fermé sous les opérations min et max . L'ensemble F_p étant engendré par les fonctions constantes, la fonction identité et min et max , l'ensemble ci-haut représente toutes les fonctions unaires dans F_p . \square

Remarque 3.1.1. Rappelons qu'il existe dix fonctions unaires monotones. Observons les compositions suivantes :

- $s_{022} \circ s_{001} = s_{002}$;
- $s_{002} \circ s_{122} = s_{022}$;
- $s_{122} = max(s_{022}, c_1)$;
- $s_{001} = min(s_{002}, c_0)$.

3.2. GÉNÉRATEURS DE $F_p, O, M_7, M_9, M_{10}, M_7 \cap M_9, M_7 \cap M_{10}$.

Les sept clones $F_p, O, M_7, M_9, M_{10}, M_7 \cap M_9, M_7 \cap M_{10}$ sont tous distincts par ce que nous avons fait au chapitre précédent. Les inclusions entre ceux-ci sont illustrées dans le diagramme suivant et seront prouvées à la prochaine section (les fonctions sur les lignes indiquent qu'elles sont incluses dans le clone supérieur mais pas dans le clone inférieur).

FIG. 3.2. Treillis entre O et F_p .

Pour entreprendre la démonstration du diagramme, nous aurons besoin de connaître les générateurs de chacun des clones qui en font parti. Certaines démonstrations ont déjà été faites dans le présent travail, tandis que d'autres sont expliquées en détail dans l'article de Marichal/Foldes [5].

Définition 3.2.1. Soit A un sous-ensemble de $E_3^{(n)}$. On dit que $x = (x_1, \dots, x_n) \in A$ est un **élément minimal** de A s'il n'existe aucun $a = (a_1, \dots, a_n) \in A$ tel que $a \leq x$ (c'est-à-dire avec $a_1 \leq x_1, \dots, a_n \leq x_n$). Lorsque x est le seul élément minimal de A , on l'appelle le **plus petit élément** de A .

Définition 3.2.2. Soit A un sous-ensemble de $E_3^{(n)}$. On dit que $x = (x_1, \dots, x_n) \in A$ est un **élément maximal** de A s'il n'existe aucun $a = (a_1, \dots, a_n) \in A$ tel que $a \geq x$. Lorsque x est le seul élément maximal de A , on l'appelle le **plus grand élément** de A .

Définition 3.2.3. Soit f une fonction de $O^{(n)}$. Posons $f^{-1}(i)$, la pré-image de la fonction pour une valeur $i \in E_3$. La fonction f est dite **1-principale** si $f^{-1}(2)$ est vide ou possède un plus petit élément. Une fonction f est **principale**, si en plus d'être 1-principale, $f^{-1}(0)$ est vide ou possède un plus grand élément.

Définition 3.2.4. Pour éviter des répétitions, nous désignerons l'ensemble des fonctions $f \in M_i$ 1-principales et principales par Ψ_{M_i} et Π_{M_i} respectivement.

Lemme 3.2.1. $M_7 = \overline{\{max, min\}} \cup \Pi_{M_7}$.

Démonstration.

(\supseteq) Trivial, puisque les fonctions min , max et l'ensemble Π_{M_7} sont dans M_7 .

(\subseteq) Montrons d'abord que pour $f \in M_7$, $f \in \overline{\{max\}} \cup \Psi_{M_7}$. Posons

$$A = \{a \in E_3^{(n)} \mid f(a) = 2\}$$

et $B = \{b_1, \dots, b_m\}$, l'ensemble des éléments minimaux de A . Si f est une fonction 1-principale, le résultat est prouvé. Supposons donc que f n'est pas 1-principale. Dans ce cas, A n'est pas vide et $|B| > 1$. Pour $x \in E_3^{(n)}$, soit la fonction

$$g_{b_i}(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \geq b_i, \\ 1 & \text{si } x \geq b_j \text{ et } x \not\geq b_i \text{ pour } i \neq j, \\ f(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme $(1, 2) \in \rho_{M_7}$, on remarque que pour $i = 1, \dots, m$, on a que $g_{b_i} \in M_7$ et que $f = max(g_{b_1}, \dots, g_{b_m})$.

Soit maintenant $g \in \Psi_{M_7}$. Montrons finalement que $g \in \overline{\{min\}} \cup \Pi_{M_7}$.

Posons

$$C = \{c \in E_3^{(n)} \mid g(c) = 0\}$$

et $D = \{d_1, \dots, d_m\}$, l'ensemble des éléments maximaux de C . Si g est une fonction principale, le résultat est prouvé. Supposons donc que g n'est pas principale. Dans ce cas, C n'est pas vide et $|D| > 1$. Pour $x \in E_3^{(n)}$, soit la

fonction

$$h_{d_i}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq d_j, \\ 1 & \text{si } x \leq d_j \text{ et } x \not\leq d_i \text{ pour } i \neq j, \\ g(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme $(0, 1) \in \rho_{M_7}$, on remarque que pour $1 = 1, \dots, m$, $h_{d_j} \in M_7$ et que $g = \min(h_{d_1}, \dots, h_{d_m})$. Nous pouvons donc conclure que pour une fonction $f \in M_7$, $f \in \overline{\{\min, \max\} \cup \Pi_{M_7}}$.

□

Rappel. (lemme 2.2.1) $O = \overline{F_p \cup \{s_{022}, s_{002}\}}$

Proposition 3.2.1. $M_7 = \overline{F_p \cup \{s_{122}, s_{001}\}}$.

Démonstration. Par le lemme 3.2.1, nous savons que $M_7 = \overline{\{\max, \min\} \cup \Pi_{M_7}}$. Il sera donc suffisant de montrer que chaque $f \in C(1)$ n -aire principale appartient à $\overline{F_p \cup \{s_{122}, s_{001}\}}$. C'est évident si f est constante et donc $|\text{image}(f)| \geq 2$. Puisque f préserve la relation $\rho_{C(1)}$, $\text{image}(f) \neq \{0, 2\}$.

(i) Soit $\text{image}(f) = \{1, 2\}$ et $c = (c_1, \dots, c_n)$ le plus petit élément de $f^{-1}(2)$.

On peut vérifier que $f(x) = \min\{s_{1(3-c_i)2}(x_i) : c_i \geq 1\}$, où $s_{112}(x_i) = \max(x_i, c_1) \in F_p$. Donc, $f \in \overline{F_p \cup \{s_{122}\}}$.

(ii) Soit $\text{image}(f) = \{0, 1\}$. Par dualité, on obtient que $f \in \overline{F_p \cup \{s_{001}\}}$.

(iii) Donc soit $\text{image}(f) = E_3$, soit $c = (c_1, \dots, c_n)$ le plus petit élément de $f^{-1}(2)$ et $d = (d_1, \dots, d_n)$ le plus grand élément de $f^{-1}(0)$. Nous pouvons supposer que $c_1 \geq \dots \geq c_n$.

Montrons que $c_1 = 2$. Supposons par l'absurde que $c_1 = 1$. Alors par la monotonie $f(0, \dots, 0) = 0$ et $(f(0, \dots, 0), f(c_1, \dots, c_n)) = (0, 2) \notin \rho_{C(1)}$ tandis que $(0, c_i) \in \rho_{C(1)}$ pour $i = 1, \dots, n$. Cette contradiction montre que

$c_1 = 2$. Soit k le plus grand index tel que $c_k = 2$. Nous pouvons réarranger les variables de f de façon à ce que $d_1 \leq \dots \leq d_k$. Nous montrons que $d_1 = 0$. Supposons par l'absurde que $d_1 \geq 1$. Par la monotonie de f , $(f(d_1, \dots, d_k, 0, \dots, 0), f(c_1, \dots, c_n)) = (0, 2) \notin \rho_{C(1)}$, tandis que $(d_i, c_i) \in \{(1, 2), (2, 2)\} \subseteq \rho_{C(1)}$ pour $i = 1, \dots, k$ et $(d_j, c_j) \in \{(0, 1), (0, 0)\} \subseteq \rho_{C(1)}$ pour $j = k + 1, \dots, n$. Cette contradiction montre que $d_1 = 0$. Pour tout $i \in E_3$, on définit $f_i \in O^{(n-1)}$ par $f_i(x_1, \dots, x_n) = f(c_i, x_1, \dots, x_{n-1})$. À noter que f_1 est constante avec valeur 1, $\text{image}(f_0) = \{0, 1\}$ et $\text{image}(f_2) = \{1, 2\}$. Alors $f_i \in \overline{F_p \cup \{s_{122}, s_{001}\}}$ par (i) et (ii). Finalement, montrons que pour tous $x = (x_1, \dots, x_n) \in E_3$,

$$f(x) = \min(\max(x_1, f_0(x_2, \dots, x_n)), f_2(x_2, \dots, x_n)). \quad (*)$$

- (a) En effet, soit $f(x) = 0$. Alors $x_1 = 0 = f_0(x_2, \dots, x_n)$ et (*) est vrai.
 (b) Soit $f(x) = 1$. Si $x_1 = 0$, alors $1 = f(0, x_2, \dots, x_n) \leq f(2, x_2, \dots, x_n)$ et la partie de droite prend la valeur 1. Si $x_1 = 1$, alors $f(0, x_2, \dots, x_n) \leq 1 = f(1, x_2, \dots, x_n) \leq f(2, x_2, \dots, x_n)$ et la partie de droite prend la valeur 1.
 (c) Finalement, soit $f(x) = 2$. Alors $x_1 = 2 = f(2, x_2, \dots, x_n)$ et (*) est vrai.

□

Lemme 3.2.2. Soit $f \in O^{(n)}$ et $c = (c_1, \dots, c_n)$ un élément maximal de $f^{-1}(2)$.

Alors

- (i) si $f \in M_{10}$, alors $c_1, \dots, c_n \in \{0, 2\}$ et
 (ii) si f est 1-principale et $c_1, \dots, c_n \in \{0, 2\}$, alors $f \in M_{10}$.

Démonstration.

- (i) Soit $f \in M_{10}$. Supposons par absurde qu'un $c_i = 1$, disons $c_1 = 1$. Alors $d = f(0, c_2, \dots, c_n) \in \{0, 1\}$ par la minimalité de c et

$$(f(0, c_2, \dots, c_n), f(1, c_2, \dots, c_n))^{\mathbf{T}} = (d, 2)^{\mathbf{T}} \notin \rho_{C(2)},$$

ce qui contredit $(0, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 2) \in \rho_{C(2)}$.

(ii) Soit f 1-principale et $c_1, \dots, c_n \in \{0, 2\}$. Si $c_1 = \dots = c_n = 2$ alors f est constante avec valeur 2 et $f \in M_{10}$. En échangeant les variables, nous pouvons supposer que $c_1 = \dots = c_k = 2$, $c_{k+1} = \dots = c_n = 0$ pour un $1 \leq k \leq n$. Pour montrer que $f \in M_{10}$, soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in f^{-1}(2)$ et $b = (b_1, \dots, b_n) \in E_3^{(n)} \setminus f^{-1}(2)$. Alors $a_1 = \dots = a_k = 2$ car c est le plus petit élément de $f^{-1}(2)$. Du fait que $f(b) \in \{0, 1\}$, on obtient que $b_i \in \{0, 1\}$, pour un $1 \leq i \leq k$. Alors $(a_i, b_i)^{\mathbf{T}} = (2, b_i)^{\mathbf{T}} \notin \rho_{C(2)}$, ce qui montre que $f \in M_{10}$. □

Lemme 3.2.3. $M_{10} = \overline{\{max, min\} \cup \Pi_{M_{10}}}$.

Démonstration. (\supseteq) Trivial, puisque les fonctions min , max et l'ensemble $\Pi_{M_{10}}$ sont dans M_{10} .

(\subseteq) Montrons d'abord que pour $f \in M_{10}$, $f \in \overline{\{max\} \cup \Psi_{M_{10}}}$. Pour une fonction $f \in M_{10}$, posons

$$A = \{a \in E_3^{(n)} \mid f(a) = 2\}$$

et $B = \{b_1, \dots, b_m\}$, l'ensemble des éléments minimaux de A . Par le même procédé de la démonstration du lemme 3.2.1, nous construisons pour chaque minimum b_i de f une fonction g_{b_i} 1-principale dont le minimum est b_i . Par le lemme 3.2.2, ces fonctions 1-principales sont bien dans M_{10} puisqu'aucune composante de b_i ne contient des 1. Nous pouvons établir ainsi que $f = max(g_{b_1}, \dots, g_{b_m})$.

Soit maintenant $g \in \Psi_{M_{10}}$. Montrons finalement que $g \in \overline{\{min\} \cup \Pi_{M_{10}}}$. Posons

$$C = \{c \in E_3^{(n)} \mid g(c) = 0\}$$

et $D = \{d_1, \dots, d_m\}$, l'ensemble des éléments maximaux de C . Par le même procédé de la démonstration du lemme 3.2.1, nous construisons pour chaque maximum d_i de g une fonction h_{d_i} principale dont le maximum est d_i . Comme $(0, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 1) \in \rho_{M_{10}}$, chacune des fonctions $h_{d_i} \in M_{10}$ et

$g = \min(h_{d_1}, \dots, h_{d_m})$. Nous pouvons donc conclure que pour une fonction $f \in M_{10}$, $f \in \overline{\{min, max\} \cup \Pi_{M_{10}}}$.

□

Lemme 3.2.4. $M_7 \cap M_{10} = \overline{\{max, min\} \cup \Pi_{M_7 \cap M_{10}}}$.

Démonstration. En se basant directement sur les propriétés et les fonctions construites dans le lemme 3.2.1, 3.2.2 et 3.2.3, on montre directement le résultat.

□

Lemme 3.2.5. Soit $f \in O^{(n)}$ principale et telle que $image(f) = \{0, 1\}$ (c'est-à-dire $f^{-1}(2) = \emptyset$). Alors $f \in M_7 \cap M_{10}$ et $f \in \overline{F_p \cup \{s_{001}\}}$.

Démonstration. Comme $\{0, 1\}^2 \subseteq \rho_{C(1)} \cap \rho_{E(2)}$, on obtient que $f \in M_7 \cap M_{10}$. Soit $c = \{c_1, \dots, c_n\}$ le plus grand élément de $f^{-1}(0)$. Alors pour tout $x = (x_1, \dots, x_n)$,

$$f(x) = \max\{\max\{s_{001}(x_i) : c_i = 1\}, \max\{s_{011}(x_i) : c_i = 0\}\}.$$

□

Proposition 3.2.2. $M_7 \cap M_{10} = \overline{F_p \cup \{s_{001}\}}$.

Démonstration. Par le lemme 3.2.4, il suffit de montrer que chaque fonction principale $f \in M_7 \cap M_{10}$, n -aire et non constante est dans $\overline{F_p \cup \{s_{001}\}}$. Si $image(f) = \{0, 1\}$, alors l'énoncé résulte du lemme 3.2.5. Nous avons donc deux cas.

(i) Soit $image(f) = \{1, 2\}$ et soit $c = (c_1, \dots, c_n)$ le plus petit élément de $f^{-1}(2)$. Par le lemme 3.2.2, on obtient que $c_1, \dots, c_n \in \{0, 2\}$. Par un échange de variables (si nécessaire), on peut avoir $c_1 = \dots, c_k = 2$, $c_{k+1} = \dots = c_n = 0$ pour un $1 \leq k < n$. Alors pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in E_3^{(n)}$,

$$f(x) = \min(s_{112}(x_1), \dots, s_{112}(x_k)) \tag{1}.$$

En effet, le côté droit de (1) égale 2 si et seulement si $x_1 = \dots = x_k = 2$. Ceci est équivalent à $f(x) = 2$. Si au moins un $x_i < 2$ (avec $1 \leq i < k$), alors le côté droit égale 1 et le côté gauche égale $1 = f(x)$.

(ii) Soit $\text{image}(f) = E_3$, c'est-à-dire que $f^{-1}(0) \neq \emptyset \neq f^{-1}(2)$. Soit $c = (c_1, \dots, c_n)$ le plus petit élément de $f^{-1}(2)$ et $d = (d_1, \dots, d_n)$ le plus grand élément de $f^{-1}(0)$. Comme $f \in M_{10}$, on peut encore supposer que $c_1 = \dots, c_k = 2, c_{k+1} = \dots = c_n = 0$ pour un $1 \leq k < n$. En réarrangeant les variables on peut supposer que $d_1 \leq \dots \leq d_k$. On a trois cas:

(a) Supposons par absurde que $d_i = 2$. Alors $d_1 = \dots = d_k = 2$ et

$$2 = f(d_1, \dots, d_n) \leq f(c_1, \dots, c_n) = 0.$$

(b) Supposons que par absurde que $d_i = 1$. Alors $c_i \in \{1, 2\}$ pour $i = 1, \dots, k$ et donc $(d_i, c_i)^{\mathbf{T}} = (2, c_i)^{\mathbf{T}} \in \rho_{C(1)}$ pour $i = 1, \dots, k$. Étant donné que $c_{k+1} = \dots = c_n = 0$, $(f(d_1, \dots, d_n), f(c_1, \dots, c_k, 0, \dots, 0))^{\mathbf{T}} = (2, 0)^{\mathbf{T}} \notin \rho_{C(1)}$ même si $(d_j, c_j)^{\mathbf{T}} \in \rho_{C(1)}$, pour $j = 1, \dots, n$. Ceci contredit $f \in M_7$.

(c) Alors si $d_1 = 0$, on obtient

$$\text{image}(f(0, x_2, \dots, x_n)) \subseteq \{0, 1\},$$

$$\text{image}(f(0, x_2, \dots, x_n)) = \{1\},$$

$$\text{image}(f(2, x_2, \dots, x_n)) \subseteq \{1, 2\}.$$

On peut représenter f par

$$f(x) = \min(\max(x_1, f(0, x_2, \dots, x_n)), f(2, x_2, \dots, x_n)).$$

□

Proposition 3.2.3. $M_{10} = \overline{F_p \cup \{s_{002}\}}$.

Démonstration. Par le lemme 3.2.3, il suffit de montrer que chaque fonction n -aire de M_{10} principale non constante appartient à $\overline{F_p \cup \{s_{002}\}}$. Soit $c = (c_1, \dots, c_n)$

le plus petit élément de $f^{-1}(2)$ et $d = (d_1, \dots, d_n)$ le plus grand élément de $f^{-1}(0)$. D'après le lemme 3.2.2 et le fait que f est non constante, on a que $c_1, \dots, c_n \in \{0, 2\}$. Si on réarrange les variables, on peut supposer que $c_1 = \dots = c_k = 2$, $c_{k+1} = \dots = c_n = 0$ pour un $1 \leq k \leq n$. On réclame que $d_i < 2$ pour un $1 \leq i \leq k$. En effet, $d_1 = \dots = d_n = 2$ mène à $0 = f(d) = 2$. On peut supposer que $d_1 < 2$. Alors,

$$(x_1, \dots, x_n) \in f^{-1}(2) \Rightarrow x_1 = 2, \quad (1)$$

$$(x_1, \dots, x_n) \in f^{-1}(0) \Rightarrow x_1 = d_1 < 2. \quad (2)$$

De (1), il découle que $\text{image}(f(0, x_2, \dots, x_n)) \subseteq \{0, 1\}$ et de (2) que $\text{image}(f(2, x_2, \dots, x_n)) \subseteq \{1, 2\}$. Nous avons deux cas.

(i) Soit $d_1 = 0$. Alors de (1) on obtient que la fonction $f(1, x_2, \dots, x_n)$ est constante avec la valeur 1. On réclame que pour chaque $x = (x_1, \dots, x_n) \in E_3^{(n)}$, on ait que

$$f(x) = \min(\max(x_1, f(0, x_2, \dots, x_n)), f(2, x_2, \dots, x_n)). \quad (3)$$

(a) Soit $x \in f^{-1}(0)$. De (2) et par la monotonie, il suit que

$$x_1 = 0 \leq f(0, x_2, \dots, x_n) \leq f(2, x_2, \dots, x_n)$$

et donc le côté droit de (3) est $f(0, x_2, \dots, x_n) = f(x) = 0$.

(b) Soit $x \in f^{-1}(2)$. Alors par (2),

$$x_1 = 2 \geq f(0, x_2, \dots, x_n),$$

$$f(2, x_2, \dots, x_n) = f(x) = 2$$

et (3) est vrai.

(c) Finalement, soit $x \in f^{-1}(1)$. Si $x_1 = 1$, alors

$$x_1 = 1 \geq f(0, x_2, \dots, x_n)$$

$$1 = f(1, x_2, \dots, x_n) \leq f(2, x_2, \dots, x_n)$$

montrent la validité de (3).

(ii) Soit $d_1 = 1$. On réclame que $f(0, x_2, \dots, x_n) = f(1, x_2, \dots, x_n)$ pour tous $x_2, \dots, x_n \in E_3$. En effet, si $f(1, x_2, \dots, x_n) = 0$, alors par monotonie $f(0, x_2, \dots, x_n) = 0$. Par contre, si $f(0, x_2, \dots, x_n) = 0$, alors $x_2 \leq c_2, \dots, x_n \leq c_n$ ce qui implique $f(1, x_2, \dots, x_n) = 0$. Nous montrons que pour chaque $x = (x_1, \dots, x_n) \in E_3$,

$$f(x) = \min(\max(s_{002}(x_1), f(0, x_2, \dots, x_n)), f(2, x_2, \dots, x_n)). \quad (4)$$

(a) Soit $x_1 \leq 1$. Alors $s_{002}(x_1) = 0$ et

$$\max(0, f(0, x_2, \dots, x_n)) = f(0, x_2, \dots, x_n) \leq f(2, x_2, \dots, x_n)$$

montrent que le côté droit de (4) est

$$f(0, x_2, \dots, x_n) = f(1, x_2, \dots, x_n) = f(x).$$

(b) Donc soit $x_1 = 2$. Alors $s_{002}(x_1) = 2$ et

$$\max(2, f(0, x_2, \dots, x_n)) = 2 \geq f(2, x_2, \dots, x_n) = f(x).$$

□

Proposition 3.2.4. $M_7 \cap M_9 = \overline{F_p \cup \{s_{122}\}}$.

Démonstration. L'énoncé de cette proposition est dual à la proposition 3.2.2. En effet, comme $M_9^* = M_{10}$, que $M_7^* = M_7$, alors $(M_7 \cap M_9)^* = M_7 \cap M_{10}$. De plus, $s_{001}^* = s_{122}$, donc $M_7 \cap M_9 = \overline{F_p \cup \{s_{122}\}}$.

□

Proposition 3.2.5. $M_9 = \overline{F_p \cup \{s_{022}\}}$.

Démonstration. L'énoncé de cette proposition est dual à la proposition 3.2.3. En effet, comme $M_{10}^* = M_9$ et que $s_{022}^* = s_{002}$, alors $M_9 = \overline{F_p \cup \{s_{022}\}}$.

□

Proposition 3.2.6. $F_p = M_9 \cap M_{10}$.

Démonstration. Évidemment $F_p \subseteq M_9 \cap M_{10}$. Il reste donc à montrer que $F_p \supseteq M_9 \cap M_{10}$. Il suffit de montrer que toutes fonctions principales $f \in M_9 \cap M_{10}$ appartiennent à F_p . Soit f n -aire principale. On peut supposer que $n \geq 2$ et toutes les variables de f sont essentielles.

(I) Supposons que $\text{image}(f) = E_3$. Soit $c = (c_1, \dots, c_n)$ le plus petit élément de $f^{-1}(2)$ et $d = (d_1, \dots, d_n)$ le plus grand élément de $f^{-1}(0)$. Nous aurons besoin des lemmes suivants.

Lemme 3.2.6. $c_1, \dots, c_n, d_1, \dots, d_n \in \{0, 2\}$.

Démonstration. Supposons par absurde que $c_1 = 1$. Comme $(1, 0)^T, (0, 0)^T, (1, 1)^T, (2, 2)^T \in \rho_{E(2)}$ et $f(c) = 2$, nous obtenons $(f(c), f(0, c_2, \dots, c_n))^T = (2, 2)^T$, ce qui contredit la minimalité de c . Le même argument pour d (avec $\rho_{E(0)}$) montre que $d_1, \dots, d_n \in \{0, 2\}$. \square

Lemme 3.2.7. $(c_i, d_i) \neq (0, 2)$ pour tous $i = 1, \dots, n$.

Démonstration. Supposons par contraposée que pour un indice i on a que $(c_i, d_i) = (0, 2)$, disons $(c_1, d_1) = (0, 2)$.

(i) Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in f^{-1}(2)$. Alors $x_1 \geq 0$ et $x_i \geq c_i$ pour $i = 2, \dots, n$.

Alors $(t, x_2, \dots, x_n) \in f^{-1}(2)$ pour chaque $t \in E_3$.

(ii) Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in f^{-1}(0)$. Alors $x_1 \leq 2$ et $x_i \leq d_i$ pour $i = 2, \dots, n$. Alors $(t, x_2, \dots, x_n) \in f^{-1}(0)$ pour chaque $t \in E_3$.

(iii) Par (i) et (ii), nous avons aussi $(t, x_2, \dots, x_n) \in f^{-1}(1)$ pour tous $t \in E_3$. Alors la première variable de f n'est pas essentielle.

\square

Soit $N = \{1, \dots, n\}$, $A = \{i \in N : c_i = 2\}$ et $B = \{i \in N : d_i = 0\}$. À noter que $A \cap B \neq \emptyset$ car sinon $c = d$.

Lemme 3.2.8. Soit $g \in O$ n -aire défini pour chaque $x = (x_1, \dots, x_n) \in E_3^{(n)}$ par

$$g(x) = \max(\min\{x_a : a \in A\}, \max\{s_{011}(x_b) : b \in B\}),$$

alors $f = g$.

Démonstration. Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in E_3^{(n)}$.

(i) Soit $x \in g^{-1}(2)$. Comme $\text{image}(s_{011}) = \{0, 1\}$, on a que $\max\{s_{011}(x_b) : b \in B\} \leq 1$ et donc $\min\{x_a : a \in A\} = 2$. Alors $x_a = 2$ pour tous $a \in A$ et $f(x) = 2$. Ceci montre $g^{-1}(2) \subseteq f^{-1}(2)$. Si $x \in f^{-1}(2)$, alors $x_a = 2$ pour tous $a \in A$ et $\min\{x_a : a \in A\} = 2$ montre que $g(x) = 2$ et donc $f^{-1}(2) \subseteq g^{-1}(2)$. Par conséquent $f^{-1}(2) = g^{-1}(2)$.

(ii) Soit $x \in g^{-1}(0)$. Alors $s_{011}(x_b) = 0$ pour tous $b \in B$, c'est-à-dire $x_b = 0$ pour tous $b \in B$ et $x \in f^{-1}(0)$. Ceci montre que $g^{-1}(0) \subseteq f^{-1}(0)$. Si $x \in f^{-1}(0)$, alors $x_b = 0$ pour tous $b \in B$. Comme $A \cap B \neq \emptyset$, on a aussi que $x_a = 0$ pour un $a \in A$. Alors $g(x) = 0$, donc $f^{-1}(0) \subseteq g^{-1}(0)$ et $f^{-1}(0) = g^{-1}(0)$. Ceci montre que $g = f$.

□

(II) Soit $f \in M_9 \cap M_{10}$ principale n -aire et $\text{image}(f) = \{0, 1\}$. Alors $f^{-1}(0)$ possède le plus grand élément $d = (d_1, \dots, d_n)$. En réarrangeant les variables de f si nécessaire, nous pouvons supposer $d_1 \geq \dots \geq d_n$. Nous montrons que $d_1, \dots, d_n \in \{0, 2\}$. Supposons par contraposée qu'un $d_j = 1$ et soit i le plus grand indice avec $d_i = 1$. Alors

$$(f(d_1, \dots, d_n), f(d_1, \dots, d_{i-1}, 2, d_{i+1}, \dots, d_n))^{\mathbf{T}} = (0, 1)^{\mathbf{T}}.$$

Ici $(d_j, d_j)^{\mathbf{T}} \in \rho_{E(0)}$ pour $1 \leq j \leq n$, $j \neq i$ et $(2, 1)^{\mathbf{T}} \in \rho_{E(0)}$ ce qui mène à $f \notin M_9$. Alors $d_1 = \dots = d_k = 2$, $d_{k+1}, \dots, d_n = 0$ pour un $1 \leq k < n$. Pour chaque $x = (x_1, \dots, x_n) \in E_3^{(n)}$, posons

$$g(x) = \max(s_{011}(x_{k+1}), \dots, s_{011}(x_n)).$$

Il est évident que

$$x \in g^{-1}(0) \Leftrightarrow x_{k+1} = \dots = x_n = 0 \Leftrightarrow x \in f^{-1}(0),$$

ce qui montre que $f = g \in F_p$.

(III) Le cas $\text{image}(f) = \{1, 2\}$ s'obtient de (II) par dualité.

□

3.3. TREILLIS DES CLONES ENTRE F_p ET O

Nous sommes maintenant en mesure d'établir l'intervalle entre les clones F_p et O , en regardant l'inclusion de quelques fonctions de O en lien avec les générateurs de chacun des clones en faisant parti du treillis.

Définition 3.3.1. On dénote par D_f le clone $\overline{F_p \cup \{f\}}$.

Théorème 3.3.1. Soit $f \in O$.

- (i) $f \in M_7 \Leftrightarrow s_{022} \notin D_f$ et $s_{002} \notin D_f$;
- (ii) $f \in M_{10} \Leftrightarrow s_{122} \notin D_f$;
- (iii) $f \in M_9 \Leftrightarrow s_{001} \notin D_f$;
- (iv) $f \in M_7 \cap M_9 \Leftrightarrow s_{022} \notin D_f$ et $s_{002} \notin D_f$;
- (v) $f \in M_7 \cap M_{10} \Leftrightarrow s_{002} \notin D_f$ et $s_{122} \notin D_f$;
- (vi) $f \in F_p \Leftrightarrow s_{122} \notin D_f$ et $s_{001} \notin D_f$.

Démonstration.

- (i) (\Rightarrow) Soit $f \in M_7$. Alors $D_f \subseteq M_7$. Supposons par l'absurde que $s_{022} \in D_f$. Ceci montre que $s_{022} \in M_7$ contredisant ainsi $s_{022}(0) = 0$ et $s_{022}(1) = 2$, puisque $(0, 1)$ est dans la relation ρ_{M_7} , mais $(0, 2)$ ne l'est pas. Donc $s_{022} \notin D_f$. De manière semblable, si on suppose que $s_{002} \in D_f$, alors $s_{002} \in M_7$, mais $s_{002}(1) = 0$ et $s_{002}(2) = 2$ mène à une contradiction.

(\Leftarrow) Par la contraposée, supposons que f est n -aire et $f \notin M_7$. Alors il existe (a_1, \dots, a_n) et (b_1, \dots, b_n) tels que $(a_i, b_i) \in \rho_{M_7}$ pour tous $i = 1 \dots, n$, tandis que $(f(a_1, \dots, a_n), f(b_1, \dots, b_n)) \notin \rho_{M_7}$. Par la symétrie de ρ_{M_7} , on peut supposer que $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ et $f(b_1, \dots, b_n) = 2$. Si $a_i = b_i$ pour $1 \leq i \leq n$, remplaçons la i -ème variable par la constante avec la valeur a_i . On peut donc supposer que $a_i \neq b_i$ pour tous $i = 1 \dots, n$. Alors $(a_i, b_i) \in \{(0, 1), (1, 0), (1, 2), (2, 1)\}$. En identifiant les variables et en les permutant, on peut supposer que $n = 4$ et $f(0, 1, 1, 2) = 0, f(1, 0, 2, 1) = 2$. La fonction f est monotone, Donc $f(0, 0, 1, 2) = 0$ et $f(1, 0, 2, 2) = 2$. Posons $x_2 = c_0$ et $x_4 = c_2$, des constantes fixes.

À partir de f nous obtenons $g \in M$ telle que $g(x_1, x_3) = f(x_1, c_0, x_3, c_2)$ avec $g(0, 1) = 0$ et $g(1, 2) = 2$. Soit $a = g(0, 2)$. Si $a = 0$ alors $s_{022}(x) = g(x, c_2) \in D_f$. Si $a = 1$, alors $s_{122}(x) = g(x, c_2) \in D_f$ et $s_{022}(x) = (x, s_{122}(x)) \in D_f$. Finalement si $a = 2$, alors $s_{022}(x) = g(c_0, x) \in D_f$.

(ii) (\Rightarrow) Similaire au (i).

(\Leftarrow) Par la contraposée, soit $f \in M_{10}$. Alors comme plus haut, D_f contient $g \in O^{(2)}$ avec $g(0, 1) = a < 2$ et $g(1, 0) = 2$. Alors $s_{a22}(x) = g(x, c_1) \in D_f$. Si $a = 1$, on a que $s_{122} \in D_f$. Donc soit $a = 0$. Alors $s_{122}(x) = \max(s_{022}(x), c_1) \in D_f$.

(iii) Ceci découle du (ii), par dualité.

(iv) (\Rightarrow) Conséquence de (i).

(\Leftarrow) Par contraposée, si $f \notin M_7 \cap M_9$, alors $f \notin M_7$ ou $f \notin M_9$ et par (i) et (iii), on a que $s_{022} \in D_f, s_{002} \in D_f$ ou $s_{001} \in D_f$. Ici, $s_{002} \in D_f$ implique $s_{001}(x) = \min(s_{002}(x), c_1) \in D_f$, ce qui mène à $s_{022} \in D_f$ ou $s_{002} \in D_f$.

(v) Ceci découle de (iv), par dualité.

(vi) (\Rightarrow) Ceci découle directement du lemme 3.1.1.

(\Leftarrow) Par la proposition 3.2.6, $F_p = M_9 \cap M_{10}$. Par la contraposée, si $f \notin F_p$, alors $f \notin M_9$ ou $f \notin M_{10}$. Dans ce cas, une des fonctions s_{122} ou s_{001} est dans D_f .

□

Connaissant tous les générateurs des clones, il ne nous reste qu'à regarder tous les cas d'inclusions et d'exclusions des clones de la figure.

Théorème 3.3.2. *Soit C un clone entre F_p et O . Alors,*

- (i) $C = O \Leftrightarrow C \not\subseteq M_7, C \not\subseteq M_9$ et $C \not\subseteq M_{10}$;
- (ii) $C = M_7 \Leftrightarrow C \not\subseteq M_9, C \not\subseteq M_{10}$ et $C \subseteq M_7$;
- (iii) $C = M_{10} \Leftrightarrow C \not\subseteq M_7$ et $C \subseteq M_{10}$;
- (iv) $C = M_9 \Leftrightarrow C \not\subseteq M_7$ et $C \subseteq M_9$;
- (v) $C = M_7 \cap M_{10} \Leftrightarrow C \not\subseteq M_9$ et $C \subseteq M_7 \cap M_{10}$.
- (vi) $C = M_7 \cap M_9 \Leftrightarrow C \not\subseteq M_{10}$ et $C \subseteq M_7 \cap M_9$;

Démonstration.

(\Rightarrow) Trivial pour les six énoncés, du fait que les clones sont tous distincts.

(i) (\Leftarrow) Ceci découle directement du lemme 2.6.5.

(ii) (\Leftarrow) Comme $C \not\subseteq M_9$ et $C \not\subseteq M_{10}$, le théorème 3.3.1 nous indique que $\{s_{122}, s_{001}\} \subseteq D_f \subseteq C$. Donc $F_p \cup \{s_{122}, s_{001}\} \subseteq C$ et par la proposition 3.2.1, $F_p \cup \{s_{122}, s_{001}\}$ génère M_7 . Alors $M_7 \subseteq C$, et comme $C \subseteq M_7$, on obtient $C = M_7$.

(iii) (\Leftarrow) Comme $C \not\subseteq M_7$, le théorème 3.3.1 nous indique que s_{022} ou s_{002} est dans $D_f \subseteq C$. Alors s_{022} ou s_{002} est dans C . Cependant $s_{022} \notin M_{10}$ ($(0, 1) \in \rho_{M_{10}}$, mais $(s_{022}(0), s_{022}(1)) = (0, 2) \notin \rho_{M_{10}}$). Donc $s_{002} \in C$. Par la proposition 3.2.3, $F_p \cup \{s_{002}\}$ génère M_{10} . Alors $M_{10} \subseteq C$, ce qui mène à $C = M_{10}$.

(iv) (\Leftarrow) Même raisonnement qu'en (iii), en utilisant cependant la proposition 3.2.5.

(v) (\Leftarrow) Comme $C \not\subseteq M_9$, le théorème 3.3.1 nous indique que $s_{001} \subseteq D_f \subseteq C$. Comme $C \subseteq M_7 \cap M_{10}$, on voit que $F_p \subseteq C$. Par la proposition 3.2.2, $F_p \cup \{s_{001}\}$ génère $M_7 \cap M_{10}$. Alors $M_7 \cap M_{10} \subseteq C$, ce qui mène à $C = M_7 \cap M_{10}$.

(vi) (\Leftarrow) Même raisonnement qu'en (v), en utilisant cependant la proposition 3.2.4.

□

Nous pouvons maintenant conclure avec le théorème suivant.

Théorème 3.3.3. *Dans le treillis des clones à trois éléments, l'intervalle entre le clone des fonctions polynomiales et monotones est fini et consiste exactement des 7 clones formant le sous-treillis illustré à la figure 3.2.*

Démonstration. Corollaire direct des théorèmes 3.3.1 et 3.3.2.

□

CONCLUSION

Comme nous l'avons vu dans ce mémoire, l'étude d'un treillis de clones peut s'avérer un travail de très longue haleine. Plusieurs méthodes sont utilisées et le travail peut rapidement nous mener à un cul-de-sac. C'est pourquoi les recherches récentes tentent d'élaborer des techniques plus générales permettant des résultats plus systématiques sur les chaînes. Il faut d'abord se demander si un ensemble de clones est dénombrable, pour ensuite vérifier la finitude. La complexité augmente d'autant plus lorsque le nombre d'éléments passe de trois à quatre, voire même plus. Cependant, même si un travail local sur des clones particuliers apparaît comme une méthode "ad-hoc", les résultats nous permettent parfois de tirer un portrait d'un treillis plus compliqué. Les treillis ainsi obtenus comportent toutefois des informations manquantes, des "trous" qu'on tente de remplir au fur et à mesure que les recherches avancent.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Gratzer, G., *Boolean functions on distributive lattices*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 1964, p.195-201.
- [2] LAU, D., *Die maximalen klassen, von $Pol_k(0)$* , (allemand), Math.Kolloq. (19), Rostock, 1982, p. 29-97.
- [3] LAU, D., *Submaximale Klassen von P_3* , (allemand), Elek. Info. Kybernetik, 1982, p.29-47.
- [4] MACHIDA, *Closed classes of three-valued monotone logical functions*, Colloq.Math.Society, J.Bolyai 28, Finite algebra and multiple-valued logic, Szeged (Hungary), 1979, p. 441-467.
- [5] Marichal, J.L.; Foldes, S., *Clones of monotone functions containing all lattice polynomials on the three-element lattice*, Tampere University of Technology and University of Luxembourg, 2007, pp.11.
- [6] MCKENZIE, R.W., McNULTY, G. AND TAYLOR, W., *Algebras, lattices and varieties*, Wadsworth and Brooks/Cole Advanced Books and Software, Monterey, Calif., 1987.
- [6] POST, E.L., *Two-Valued Iterative Systems of Mathematical Logic*, Annals of Mathematical Studies, vol. 5, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1941.
- [7] Rosenberg, I.G., *Über die funktionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken (Struktur der Funktionen von mehreren Veränderlichen auf endlichen Mengen)*, Rozprawy Ceskoslovenske Akad. Ved. Ser. Math, Nat. Sci., 1970, p.3-93.
- [8] Rosenberg, I.G., *Completeness, closed classes and relations in multiple-valued logics*, In Proc. 1974 Int. Symp. on Multiple-valued Logics, p. 1-26, Morgantown, West Virginia , 1974.

- [9] Slupecki, J., *Completeness criterion for systems of many-valued propositional logic (polonais)*, Comptes rendus de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, 1939, p.102-109.
- [10] Szendrei, A., *Clones et relations*, Séminaire de Math. Supérieures, Presses de l'Université de Montréal, vol.100, 1986, p. 45-52.
- [11] Yablonski, S.V., *On functional completeness in a three-valued calculus (russe)*, Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.), 1954, 95, p.1153-1155.
- [12] Yablonski, S.V., *Functionnal constructions in k-valued logic (russe)*, Trudy Mat. Inst. Steklov., vol.50, 1958, p.5-142.