

Direction des bibliothèques

AVIS

Ce document a été numérisé par la Division de la gestion des documents et des archives de l'Université de Montréal.

L'auteur a autorisé l'Université de Montréal à reproduire et diffuser, en totalité ou en partie, par quelque moyen que ce soit et sur quelque support que ce soit, et exclusivement à des fins non lucratives d'enseignement et de recherche, des copies de ce mémoire ou de cette thèse.

L'auteur et les coauteurs le cas échéant conservent la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent ce document. Ni la thèse ou le mémoire, ni des extraits substantiels de ce document, ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans l'autorisation de l'auteur.

Afin de se conformer à la Loi canadienne sur la protection des renseignements personnels, quelques formulaires secondaires, coordonnées ou signatures intégrées au texte ont pu être enlevés de ce document. Bien que cela ait pu affecter la pagination, il n'y a aucun contenu manquant.

NOTICE

This document was digitized by the Records Management & Archives Division of Université de Montréal.

The author of this thesis or dissertation has granted a nonexclusive license allowing Université de Montréal to reproduce and publish the document, in part or in whole, and in any format, solely for noncommercial educational and research purposes.

The author and co-authors if applicable retain copyright ownership and moral rights in this document. Neither the whole thesis or dissertation, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms, contact information or signatures may have been removed from the document. While this may affect the document page count, it does not represent any loss of content from the document.

Université de Montréal

**Solution de C. Hyltén-Cavallius pour un
problème de P. Turán concernant des polynômes**

par

Félix Tinawi

Département de mathématiques et statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences en mathématiques
(M.Sc. Mathématiques 2-190-1-0)

Dépôt octobre 2008
© Félix Tinawi, 2008



Université de Montréal

Faculté des arts et des sciences

Ce mémoire intitulé :

**Solution de C. Hyltén-Cavallius pour un problème de
P. Turán concernant des polynômes**

présenté par :

Félix Tinawi

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

André Giroux
(président-rapporteur)

Qazi Ibadur Rahman
(directeur de recherche)

Richard Duncan
(membre du jury)

Résumé

En 1955, C. Hyltén-Cavallius publie l'article intitulé "*Some extremal problems for trigonometrical and complex polynomials*" [6] dans lequel il solutionne un problème soulevé par P. Turán [12]. *Étant donné les polynômes de degré n dont la valeur absolue atteint son maximum sur le cercle unité en $z = 1$, quelle est la plus grande région contenant le point $z = 1$ et dans laquelle ces polynômes ne peuvent pas avoir un zéro ?* Hyltén-Cavallius trouve cette région dont la frontière s'avère être un limaçon de Pascal et montre, en outre, que pour tout point ζ sur cette frontière, il existe un polynôme ayant les propriétés mentionnées précédemment et s'annulant en ζ .

La qualité et la profondeur de l'article de Hyltén-Cavallius sont indéniables. Néanmoins, la rédaction plutôt sommaire se traduisant par plusieurs détails écourtés, voire ignorés, rendent une première lecture laborieuse et quelque peu aride. Ceci dit, l'article regorge de nombreuses idées intéressantes et quiconque ayant la patience de se rendre jusqu'au bout en ressortira plus riche en connaissances et en habilités mathématiques.

Sachant d'avance qu'une bonne dose de persévérance et de tenacité serait nécessaire, je me suis tout de même attelé à la tâche afin de produire une version plus accessible de l'article de Hyltén-Cavallius. En comparant la nouvelle version avec le manuscrit original, le lecteur pourra déceler les précisions ajoutées et constater, à l'instar de quelques mathématiciens expérimentés, qu'elles sont loin d'être triviales. Par exemple, mentionnons qu'à la page 9 de son article, Hyltén-Cavallius écrit "En utilisant ce fait, il est possible de montrer qu'on peut soumettre Φ_n à une infinité de variations de telles sortes que Φ_n reste dans $\Pi_n(it, \cos \alpha)$ et que $\Phi_n(x') = -1$. Toutefois, nous ne donnons pas les détails de cette partie de

la preuve.” De fait, Hyltén-Cavallius ne donne même pas d’indices qui permettraient d’effectuer la démonstration. Je corrige cette lacune en effectuant la preuve complète dans les pages 19–21 de ce manuscrit. En y jetant un coup d’oeil, le lecteur remarquera que l’idée de la preuve requiert certaines connaissances que seuls les spécialistes de la Théorie de l’Approximation sont susceptibles de maîtriser. En outre, d’autres détails ont été écourtés, notamment lors de la preuve du Théorème 1. En effet, Hyltén-Cavallius déclare en page 8 : “Comparons les deux polynômes trigonométriques Ψ_n et Φ_n d’ordre $\leq n$ en considérant les intersections de leurs graphes respectifs. Si $\Delta_n \neq 0$, il suit que Δ_n possède $2n$ zéros dans l’intervalle $-\pi \leq x < \pi$.” Malheureusement, Hyltén-Cavallius n’indique pas la localisation des zéros ni la manière dont les deux graphes s’intersectent. Le lecteur pourrait alors conclure à tort à la simplicité des arguments et par ce fait même passer à côté d’éléments majeurs de la preuve. Ces explications sont incluses dans mon manuscrit avec beaucoup de soins afin que l’on puisse prendre conscience de tous les aspects et les subtilités de la démonstration. Globalement, ce mémoire propose une version améliorée et plus complète du travail de Hyltén-Cavallius en se basant sur une approche plus accessible pour des lecteurs qui ne seraient pas familiers avec le sujet.

De plus, la présence de plusieurs résultats concernant les polynômes (trigonométriques) fait que ce mémoire peut être vu comme un complément au douzième chapitre du livre “*Analytic theory of polynomials*” de Q. I. Rahman et G. Schmeisser [9]. Aussi, les sujets abordés tels que l’inégalité de Bernstein, la localisation des zéros d’un polynôme et le comportement local des polynômes sont sujets à de nombreuses applications en Théorie de l’Approximation et en Théorie des Transformations de Fourier notamment.

Mots-clés : polynômes - polynômes trigonométriques - comportement local - polynômes de Chebyshev de première espèce.

Summary

In 1955, C. Hyltén-Cavallius published an article entitled “*Some extremal problems for trigonometrical and complex polynomials*” [6] in which he gave a complete answer to a question asked by P. Turán [12] which may be stated as follows. *Consider all polynomials of degree n whose maximum modulus on the unit circle is attained at the point $z = 1$. What is the largest region containing the point $z = 1$ inside which no such polynomial can have a zero?* Hyltén-Cavallius found the exact region and noted that its boundary is a “limaçon of Pascal”. He also showed that for any given point ζ of the boundary of that region, there is a polynomial, satisfying the specified properties, which has a zero at ζ .

There is no doubt about the exceptionally high quality of the work of Hyltén-Cavallius. The only problem with the paper is the style of presentation which is quite sketchy at times. Many people have seriously tried to read it but have found it much too lacking in details to stick with it till the end. The paper is so rich in ideas that anybody who has the patience to go through the whole of it can acquire a wealth of knowledge and skill. Although I knew in advance that it would require a good deal of perseverance on my part to come up with a more reader-friendly version of the paper of Hyltén-Cavallius I undertook to do this and I am glad I did. Comparing this manuscript with the original paper of Hyltén-Cavallius the reader will see how certain intricate details were simply omitted by him even though some very experienced mathematicians find them far from trivial. As an example it may be mentioned that at one place on page 9 of his paper Hyltén-Cavallius writes “Using this fact it is possible to show that we can submit Φ_n to infinitely many variations so that Φ_n still belongs to $\Pi_n(it, \cos \alpha)$ and $\Phi_n(x') = -1$. However, we do not write out the details of this part of the proof.” In fact, he does not even give any idea as to how one may proceed. The assertion of Hyltén-Cavallius

has been explained in my manuscript on pages 19–21. Looking into it the reader will notice that the argument requires certain ideas which only specialists of Approximation Theory may be expected to be familiar with. Other details have been shortened drastically. For instance, in the proof of his Theorem 1, he states on page 8 : “Let us compare the two trigonometrical polynomials Ψ_n and Φ_n of order $\leq n$ and count the zeros of the polynomial $\Delta_n = \Psi_n - \Phi_n$ by considering the intersections of the corresponding curves. If $\Delta_n \neq 0$ it follows that Δ_n has $2n$ zeros in the interval $-\pi \leq x < \pi$.” However, Hyltén-Cavallius does not indicate how one has to go about counting the zeros so as to see that there are at least $2n$ zeros in the period $-\pi \leq x < \pi$. In fact, the author’s abbreviated text fails to emphasize some very important points which could be particularly enlightening for the reader. Therefore, those explanations have been included in my manuscript with much accuracy and precision on pages 15–17 enabling the reader to be totally aware of the different issues and subtleties of the proof. In general, this “memoire” proposes a more complete version of Hyltén-Cavallius’ work based on a more accessible approach for an unfamiliar reader.

Moreover, the presence of many results concerning (trigonometric) polynomials allows this paper to be seen as a complement to Chapter twelve of Q. I. Raĭman and G. Schmeisser’s book “*Analytic theory of polynomials*” [9]. Also, the various ideas approached throughout this manuscript such as Bernstein’s inequality, localisation of polynomials zeros and polynomials local behaviour may find various applications in Approximation Theory and Fourier Transform Theory.

Key words : polynomials - trigonometric polynomials - local behaviour - Chebyshev polynomials of the first kind.

Table des matières

Résumé et mots-clés	i
Summary and key words	iii
Liste des figures	vii
Remerciements	viii
1 Introduction et préliminaires	1
1.1 Énoncé du problème de Turán	1
1.2 Méthode de Hyltén-Cavallius	3
2 À propos des polynômes de Chebyshev	8
2.1 Définition des polynômes de Chebyshev de première espèce	8
2.2 Détails sur la fonction Ψ_n	9
3 Inégalités pour polynômes trigonométriques ayant une valeur donnée en un point de l'axe imaginaire	12
3.1 Théorème 1 : comportement près de l'origine d'un polynôme trigonométrique réel prenant la valeur $\cos \alpha$ en un point it de l'axe imaginaire	12
3.1.1 Preuve de 1(i)	15
3.1.2 Preuve de 1(ii)	18
3.2 Cas particulier : $t = 0$	21
3.3 Valeur donnée non réelle	24
3.4 Théorème 3 : généralisation aux valeurs non réelles	27
3.5 Corollaire	34

4	Conditions sur les racines de polynômes trigonométriques	35
5	Position des racines et des maxima de polynômes	37
5.1	À propos de la courbe c_n	37
5.2	Théorème 5 : solution au problème de Turán	39
5.3	Preuve du Théorème 5	40
6	Conclusion	47
6.1	Récapitulation et contribution personnelle	47
6.2	Autres considérations et ouverture	48
Annexe		I
	Calculs complémentaires	I
	Lemme de Fejér-Riesz	II
Bibliographie		V

Liste des figures

1	Graphique de c_n pour $n = 3$	3
2	Graphique de $T_8(x)$ et de $T_{10}(x)$	10
3	Graphique de T_6 et de τ_6	11
4	Graphique de $T_{2n}(x)$ et de $\Psi_n(x)$	15
5	Graphique de $\Phi_n(x) = T_n(\varphi_\chi(x))$ et de $t_{n,\epsilon}(x)$	19
6	Graphique de $T_{2n}(\cos \frac{\alpha}{2n} \cos \frac{x}{2})$ et de $\Phi_n(x)$	22
7	Graphique de $\cos(nx + \alpha)$ et de $\Phi_n(x)$	23
8	Image d'un rectangle par la fonction cosinus	26
9	Exemple de répartition des points x_k et des intervalles $I_k^{(\nu)}$ dans le cas où $k \leq 3$	30
10	Illustration des régions D et D' de la preuve du Théorème 3 pour $n = 5$	32
11	Ellipse de la preuve du Théorème 3	33
12	Graphique de c_n pour $n = 6$	38

Remerciements

Je tiens à remercier tout particulièrement mon directeur de recherche, Q.I. Rahman, pour sa grande patience, son soutien financier ainsi que ses incroyables compétences pédagogiques et mathématiques. Notons de plus l'apport de René Tinawi et Mohamed Amine Hachani dont les commentaires et suggestions furent fort utiles et appréciés. Finalement, je dédie un merci spécial à mes parents pour leur appui et leurs encouragements indéfectibles.

1 Introduction et préliminaires

Ce mémoire a pour objectif de détailler l'approche de C. Hyltén-Cavallius dans sa résolution d'un problème de P. Turán.

Nous débutons par l'énoncé du problème et donnons une solution partielle basée sur une idée que Turán publia dans son article "*On rational polynomials*" [12]. Nous poursuivrons ensuite en élaborant l'approche de Hyltén-Cavallius.

1.1 Énoncé du problème de Turán

Soient $n \geq 1$ un entier et $P_n(z) := \sum_{\nu=1}^n a_\nu z^\nu$ un polynôme aux coefficients dans \mathbb{C} et de degré au plus n . Supposons que $|P_n(z)|$ atteigne son maximum sur le cercle $|z| = 1$ au point $z = 1$ et que $|P_n(1)| = 1$. La question est alors de savoir où se situent les zéros de P_n les plus près du point $z = 1$. Turán posa premièrement le problème en terme de points sur le cercle $|z| = 1$ puis Hyltén-Cavallius l'élargit à tout le plan complexe.

La seule continuité est suffisante pour assurer l'existence d'un disque centré en $z = 1$ à l'intérieur duquel $|P_n(z)|$ ne s'annule pas. Il est possible d'élargir ce résultat en utilisant la différentiabilité de $|P_n(z)|$ et l'inégalité de M. Riesz - S. N. Bernstein¹. En effet, cette dernière affirme que pour tout polynôme $f_m(z)$ de degré m , on a

$$\max_{|z|=1} |f'_m(z)| \leq m \max_{|z|=1} |f_m(z)|. \quad (1)$$

De plus, une conséquence immédiate du principe du maximum pour les fonctions

¹Bien que cette inégalité porte le nom de S. N. Bernstein, elle a été démontrée en premier lieu pour des polynômes trigonométriques par M. Riesz [11], p. 357.

holomorphes² stipule que

$$\max_{|z|=R} |f_m(z)| \leq R^m \max_{|z|=1} |f_m(z)| \quad (R \geq 1). \quad (2)$$

D'où, en appliquant les inégalités (1) et (2) au polynôme P_n , on obtient

$$\max_{|z|=R} |P'_n(z)| \leq nR^{n-1} \max_{|z|=1} |P_n(z)| = nR^{n-1} \quad (3)$$

et si $|z| \leq 1$, la borne sur la dérivée est alors

$$|P'_n(z)| \leq \max_{|z|=1} |P_n(z)| = n.$$

Considérons le segment allant du point $z = 1$ à $z = 1 + \delta e^{i\alpha}$ paramétré par $\gamma(t) = 1 + te^{i\alpha}$ avec $0 \leq t \leq \delta$ et α fixé dans \mathbb{R} . En jumelant l'inégalité (3) au théorème fondamental du calcul, on obtient

$$\begin{aligned} |P_n(1 + \delta e^{i\alpha}) - P_n(1)| &= \left| \int_1^{1+\delta e^{i\alpha}} P'_n(\zeta) d\zeta \right| \\ &= \left| \int_0^\delta P'_n(1 + te^{i\alpha}) e^{i\alpha} dt \right| \\ &\leq \int_0^\delta |P'_n(1 + te^{i\alpha})| dt. \end{aligned}$$

Si $|1 + te^{i\alpha}| \leq 1$, la borne sur $|P'_n(1 + te^{i\alpha})|$ sera n sinon elle sera $n|1 + te^{i\alpha}|^{n-1}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} |P_n(1 + \delta e^{i\alpha}) - P_n(1)| &\leq \int_0^\delta \max\{n, n|1 + te^{i\alpha}|^{n-1}\} dt \\ &\leq \int_0^\delta n(1+t)^{n-1} dt = (1+\delta)^n - 1 \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} |P_n(1 + \delta e^{i\alpha})| &\geq |P_n(1)| - (1+\delta)^n + 1 \\ &= 2 - (1+\delta)^n \end{aligned}$$

qui reste strictement positif si $(1+\delta)^n < 2$.

²Résultat cité par G. Pólya et G. Szegő dans leur ouvrage "Problems and theorems in analysis" [8] Problème 269, p. 158.

On constate que cette réponse ne dépend plus du polynôme choisi mais uniquement du degré n . Néanmoins, cela n'est pas tout à fait satisfaisant car, d'une part, il est difficile d'améliorer ce résultat si l'on garde une démarche basée sur l'inégalité de M. Riesz - S. N. Bernstein et sur le théorème fondamental du calcul. D'autre part, cette technique ne permet pas de trouver l'exacte région qui ne contiendrait aucun zéro ni les polynômes extrémaux. Pour ces raisons, il est préférable de se tourner vers une approche différente.

1.2 Méthode de Hyltén-Cavallius

On définit donc B_n la classe de tous les polynômes réels sur l'axe réel, de degré au plus n et tels que $\max_{|z|=1} |P_n(z)| = |P_n(1)|$.

Désormais, l'idée est de trouver la plus grande région G contenant le point $z = 1$ et à l'intérieur de laquelle aucun polynôme de la classe B_n ne s'annule. On aimerait aussi savoir si, pour tout point de la frontière de G , il existe un polynôme de B_n qui s'y annule. Dans son article intitulé "*Some extremal problems for trigonometrical and complex polynomials*" [6], Hyltén-Cavallius trouve la région G cherchée. Il s'agit en fait de la région bornée qui est déterminée par la courbe de Jordan c_n , région³ dite "inside" de c_n . La courbe c_n est décrite en coordonnées polaires ($z = \rho e^{i\varphi}$) par

$$\cos \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}(\rho^{\frac{1}{2}} + \rho^{-\frac{1}{2}}) \cos \frac{\pi}{2n}, \quad -\pi/n \leq \varphi \leq \pi/n. \quad (4)$$

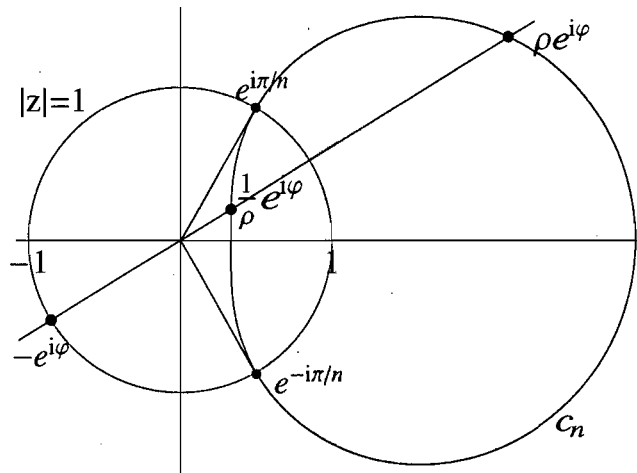


FIG. 1 - Graphique de c_n pour $n = 3$.

³Cf. sous-section 5.1 À propos de la courbe c_n .

Plus précisément, il démontre le résultat suivant.

Théorème A. Soient $n \geq 2$ un entier et c_n la courbe définie ci-dessus. Alors,

- a. si z_0 appartient à la région bornée déterminée par c_n , aucun polynôme de B_n ne s'y annule,
- b. si $z_0 = \rho e^{i\varphi}$ est un point de c_n , il existe des polynômes de B_n qui s'y annullent. De fait, ils sont de la forme

$$c \sum_{1 \leq 2\nu+1 \leq n} \binom{n}{2\nu+1} (ze^{-i\varphi} + 1)^{n-2\nu-1} (ze^{-i\varphi} - \rho)^{\nu+1} \left(ze^{-i\varphi} - \frac{1}{\rho} \right)^\nu,$$

où $c \neq 0$ est une constante arbitraire dans \mathbb{C} ,

- c. si z_0 est un point à l'extérieur de c_n , il existe une infinité de polynômes $P_n \in B_n$ s'y annullant et n'étant pas multiples les uns des autres.

La preuve de ce théorème étant particulièrement délicate et assez longue, on se contente pour l'instant d'en donner un aperçu et de souligner les étapes majeures.

Soient $z_0 = \rho e^{i\varphi}$ un point dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ et P_n un polynôme de B_n s'annulant en z_0 . On définit le polynôme trigonométrique Φ_n , de degré n , par

$$\Phi_n(\zeta) := P_n(e^{i\zeta}) \overline{P_n(e^{-i\zeta})}, \quad (5)$$

où $\overline{P_n(z)} := \overline{P_n(\bar{z})}$ est le polynôme dont les coefficients sont les conjugués de ceux de $P_n(z)$. Pour $\zeta = \theta$ réel, on a $\Phi_n(\theta) = |P_n(e^{i\theta})|^2$. On en déduit que $\Phi_n(\theta)$ est un polynôme trigonométrique non négatif sur l'axe réel. De plus, $\Phi_n(z)$ s'annule en $z = \varphi - i \log \rho$ et atteint son maximum sur l'axe réel en $z = 0$. On est ainsi amené à considérer la question suivante : étant donné un polynôme trigonométrique Φ_n non négatif sur l'axe réel, de degré au plus n et atteignant son maximum sur l'axe réel en l'origine, quelle est la plus petite région autour du point $z = 0$ pour laquelle Φ_n n'ait pas de zéro ? Dans le lemme qui suit, Hyltén-Cavallius parvient à donner la condition nécessaire et suffisante pour que le point $\rho e^{i\varphi}$ puisse être un tel zéro.

Lemme B. Soit t_n un polynôme trigonométrique non négatif sur l'axe réel de degré au plus n et tel qu'il atteint son maximum sur l'axe réel en 0 et s'annule en $u + iv$. La racine $u + iv$ doit alors satisfaire la relation

$$|\cos \frac{u}{2}| \leq \cosh \frac{v}{2} \cos(\pi/2n).$$

En appliquant ce résultat à Φ_n , on a ainsi

$$\cos \frac{\varphi}{2} \leq \frac{1}{2}(\rho^{1/2} + \rho^{-1/2}) \cos \frac{\pi}{2n},$$

ce qui signifie que $z_0 = \rho e^{i\varphi}$ est soit à l'extérieur de c_n , soit sur sa frontière.

Le Lemme B est une conséquence directe du prochain théorème (Théorème C). Afin de l'énoncer, on définit la classe Ω_n .

Définition 1. Soient t un nombre réel et $\Omega_n(it, 0)$ la classe des polynômes trigonométriques $\Phi_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ de degré au plus n et pour lesquels $0 \leq \Phi_n(x) \leq 1$ pour tout x réel et $\Phi_n(it) = 0$.

Introduisons de plus la fonction

$$\Theta_n(x) := \frac{1}{2} \left(1 - T_{2n} \left[\frac{\cos \frac{x}{2}}{\cosh \frac{t}{2}} \right] \right)$$

où T_{2n} est le polynôme de Chebyshev⁴ de première espèce de degré $2n$.

Il sera montré ultérieurement⁵ que Θ_n est bien un polynôme trigonométrique de degré n et qu'il appartient à la classe $\Omega_n(it, 0)$.

Théorème C. Soit Φ_n un polynôme trigonométrique de la classe $\Omega_n(it, 0)$ tel que défini à la Définition 1.

a. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|\cos \frac{x}{2}| \geq \cosh \frac{t}{2} \cos(\pi/2n)$, on a

$$\Phi_n(x) \leq \Theta_n(x).$$

Dans le cas où $t \neq 0$, l'égalité pour un tel x implique qu'il y a égalité pour

⁴Parmi les nombreuses orthographes du nom de P. Chebyshev, celle suggérée par l'American Mathematical Society a été retenue pour ce mémoire.

⁵Les polynômes de Chebyshev de première espèce font l'objet d'une étude plus approfondie à la section suivante 2 À propos des polynômes de Chebyshev.

tous les x . Par contre, si $t = 0$ et s'il y a égalité pour un certain $x \neq 2\nu\pi$, $\nu \in \mathbb{Z}$, alors l'égalité tient pour tous les x .

b. Pour chaque x tel que $|\cos \frac{x}{2}| < \cosh \frac{t}{2} \cos(\pi/2n)$, il existe une infinité de polynômes $\Phi_n \in \Omega_n(it, 0)$ tels que $\Phi_n(x) = 1$.

Considérons un instant un polynôme trigonométrique $\Phi_n \neq 0$ dans la classe $\Omega(it, 0)$. On peut, sans perte de généralité, supposer que le maximum sur l'axe réel vaut $+1$. Le Théorème C affirme que Φ_n ne peut prendre la valeur $+1$ que pour les x satisfaisant $|\cos \frac{x}{2}| > \cosh \frac{t}{2} \cos(\pi/2n)$. Ainsi, pour que x_0 soit un maximum de Φ_n sur l'axe réel, il est nécessaire et suffisant qu'il satisfasse la condition $|\cos \frac{x_0}{2}| \leq \cosh \frac{t}{2} \cos(\pi/2n)$.

Soit t_n un polynôme trigonométrique satisfaisant les hypothèses du Lemme B. On démontre celui-ci en appliquant le Théorème C au polynôme trigonométrique $\Phi_n(x) := t_n(x - u)$. Cette translation permet de se placer dans la situation où $\Phi_n(it) = 0$ avec $t = v$ et pour laquelle le maximum sur \mathbb{R} est atteint en u .

Par ailleurs, le cas des polynômes trigonométriques non négatifs que traite le Théorème C est un cas particulier d'un théorème plus vaste. Ainsi, si Φ_n est un polynôme non négatif de $\Omega_n(it, 0)$, on a alors comme condition équivalente que $1 - 2\Phi_n$ est un polynôme trigonométrique réel sur l'axe réel, borné par 1 en valeur absolue et prenant la valeur 1 au point it . Ceci justifie la définition d'une nouvelle classe.

Définition 2. Soient $n \geq 2$ un entier, t un réel et α un réel dans $[0, \pi]$. On désigne par $\Pi_n = \Pi_n(it, \cos \alpha)$ la classe de tous les polynômes trigonométriques $\Phi_n(x)$ réels sur l'axe réel, de degré au plus n et qui satisfont aussi $|\Phi_n(x)| \leq 1$ pour x réel et $\Phi_n(it) = \cos \alpha$.

En addition, on définit le paramètre a par :

$$a := \frac{\cos(\alpha/2n)}{\cosh(t/2)}. \quad (6)$$

On remarque que le polynôme constant $\cos \alpha$ appartient à Π_n . La classe n'est donc pas vide. De plus, puisque les coefficients de Φ_n sont réels, les classes $\Pi_n(it, \cos \alpha)$ et $\Pi_n(-it, \cos \alpha)$ sont identiques.

Dès lors, le prochain résultat permet de démontrer le Théorème C lorsque $t \neq 0$ et, ainsi, de conclure le raisonnement.

Théorème D. Soit a le paramètre défini par (6) ainsi que I l'intervalle centré à l'origine et constitué des points de l'intervalle $[-\pi, \pi]$ solutions de l'inéquation $a |\cos(x/2)| \geq \cos(\pi/2n)$. Considérons aussi $\Psi_n(x) := T_{2n}(a \cos \frac{x}{2})$ un polynôme trigonométrique de degré n .

a. Alors, pour tout Φ_n appartenant à la classe Π_n de la Définition 2 et pour tout x dans I , on a

$$\Phi_n(x) \geq \Psi_n(x).$$

En fait, on a $\Phi_n(x) > \Psi_n(x)$, pour tout x dans I , sauf dans le cas où $\Phi_n(x) \equiv \Psi_n(x)$.

b. Pour tout x tel que $a |\cos(x/2)| < \cos(\pi/2n)$, il existe une infinité de polynômes $\Phi_n \in \Pi_n$ tels que $\Phi_n(x) = -1$.

Récapitulons. De la question initiale de Turán formulée pour des polynômes, le Théorème A donne une réponse qui dépend toutefois d'un polynôme trigonométrique non négatif sur l'axe réel défini en (5). On requiert alors le Lemme B, lui-même conséquence du Théorème C, pour poser la condition nécessaire et suffisante relatives aux zéros d'un tel polynôme. Pour sa part, le Théorème C est quasi équivalent au Théorème D, à la différence près que ce dernier transpose le problème en terme de polynômes trigonométriques réels sur \mathbb{R} .

La démonstration du Théorème D étant assez technique, il est judicieux de développer au préalable certains outils qui faciliteront ensuite la preuve. C'est ce à quoi est dédié la prochaine section.

Puis, on enchaînera avec la section 3 comprenant l'énoncé du Théorème D ainsi que sa preuve complète. À la section 4 nous indiquerons les conditions nécessaires et suffisantes sur les racines de plusieurs types de polynômes trigonométriques (Lemme B) et, finalement, à la section 5, quelques résultats concernant la courbe c_n seront présentés ainsi que l'entière démonstration du théorème A.

2 À propos des polynômes de Chebyshev

Tel que le Théorème D de l'introduction l'a mis en évidence, la résolution du problème de Turán passe par la détermination de la plus grande et plus petite valeur que peut prendre un polynôme trigonométrique de la classe Π_n en un point x de l'axe réel. Cela revient ainsi à déterminer les fonctions

$$m(x) = \inf_{\Phi_n \in \Pi_n} \Phi_n(x) \quad \text{ainsi que} \quad M(x) = \sup_{\Phi_n \in \Pi_n} \Phi_n(x)$$

pour chaque valeur de x dans $[-\pi, \pi]$. Le Théorème D affirme, par exemple, que $m(x)$ vaut -1 partout sauf à l'intérieur d'un intervalle centré à l'origine et de ses translations de $2\nu\pi$ sur l'axe réel où ν est un entier arbitraire. Dans ces intervalles, $m(x)$ est égale au polynôme trigonométrique $T_{2\nu}(a \cos \frac{x}{2})$. Il convient donc de donner quelques précisions sur les polynômes de Chebyshev de première espèce.

2.1 Définition des polynômes de Chebyshev de première espèce

En faisant usage de la formule du binôme et en extrayant la partie réelle de $(\cos \theta + i \sin \theta)^n$, on obtient l'expansion de $\cos n\theta$ en fonction de $\cos \theta$:

$$\begin{aligned} \cos n\theta &= \sum_{0 \leq 2\nu \leq n} \binom{n}{2\nu} \cos^{n-2\nu} \theta (i \sin \theta)^{2\nu} \\ &= \sum_{0 \leq 2\nu \leq n} (-1)^\nu \binom{n}{2\nu} \cos^{n-2\nu} \theta (1 - \cos^2 \theta)^\nu \end{aligned}$$

$$= \sum_{0 \leq 2\nu \leq n} \sum_{\mu=0}^{\nu} (-1)^{\nu+\mu} \binom{n}{2\nu} \binom{\nu}{\mu} (\cos \theta)^{n-2\nu+2\mu}.$$

Le polynôme de Chebyshev de première espèce de degré n est quant à lui défini en remplaçant $\cos \theta$ par z dans l'expansion de $\cos n\theta$, ceci nous donne

$$T_n(z) := \sum_{0 \leq 2\nu \leq n} \sum_{\mu=0}^{\nu} (-1)^{\nu+\mu} \binom{n}{2\nu} \binom{\nu}{\mu} z^{n-2\nu+2\mu}. \quad (7)$$

Il en découle donc une première relation

$$T_n(\cos \theta) = \cos n\theta. \quad (8)$$

On constate de plus que $|T_n(x)| \leq 1$ pour $x \in [-1, 1]$ et on obtient aussi $T_n(x) = \arccos(n \cos x)$ si $x \in [-1, 1]$.

La relation suivante est toujours vérifiée

$$T_{2n}(z) = T_n(2z^2 - 1). \quad (9)$$

Démonstration de (9). Étudions la variable x dans l'intervalle $[-1, 1]$ et posons $x = \cos \theta$. Puisque $\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$, on a alors par (8)

$$T_n(2x^2 - 1) = T_n(2 \cos^2 \theta - 1) = T_{2n}(\cos 2\theta) = \cos 2n\theta = T_{2n}(\cos \theta) = T_{2n}(x).$$

Ainsi la fonction entière $T_{2n}(z) - T_n(2z^2 - 1)$ s'annule sur tout l'intervalle $[-1, 1]$. Elle doit donc être nulle partout dans \mathbb{C} . \square

2.2 Détails sur la fonction Ψ_n

Considérons les nombres α , a et t tels qu'à la Définition 2 de l'introduction (p. 6). Il suit alors de l'égalité (9) et de la définition de T_{2n} que $\Psi_n := T_{2n}(a \cos \frac{x}{2})$ est un polynôme de degré n en $\cos x$ et aux coefficients réels. En outre, de $|a \cos \frac{x}{2}| \leq a < 1$, on déduit que $|\Psi_n(x)| \leq 1$ pour tout x réel.

Aussi, a-t-on

$$\Psi_n(it) = T_{2n}(a \cosh \frac{t}{2}) = T_{2n}(\cos \alpha/2n) = \cos \alpha,$$

ce qui montre que Ψ_n est un élément de la classe Π_n telle que présentée à la Définition 2.

Afin de connaître l'allure du graphique de la fonction Ψ_n , on définit les valeurs $\xi_k := \cos \frac{k\pi}{2n}$ ainsi que les points $x_k \in [0, \pi]$ tels que $a \cos \frac{x_k}{2} = \xi_k$ pour $k = 1, 2, \dots, n$. On obtient alors $x_1 < x_2 < \dots < x_k < \dots < x_n = \pi$. Notons de plus γ_k la portion du graphe de Ψ_n décrit lorsque x augmente de x_k à x_{k+1} . Constatons que γ_k croît de -1 à $+1$ lorsque k est impair et décroît de $+1$ à -1 si k est pair. Il appert donc que le graphe de Ψ_n est constitué de n arcs croissant de -1 à $+1$ puis diminuant de -1 à $+1$ en alternance.

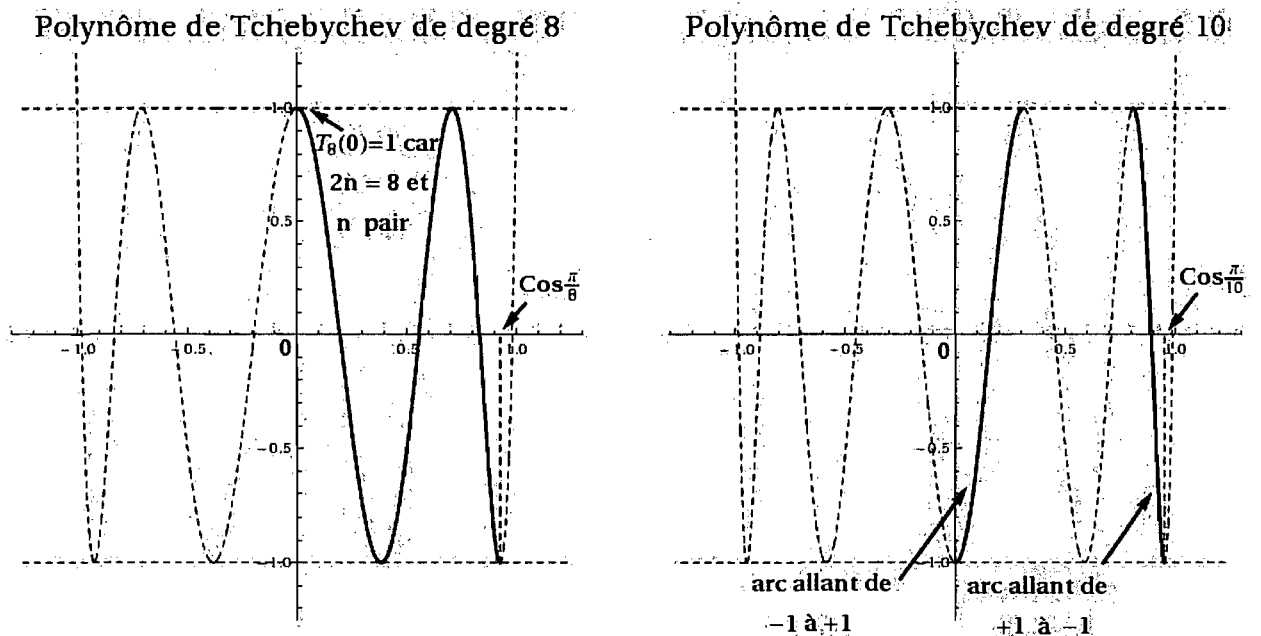


FIG. 2 – Graphique des fonctions $T_8(x)$ et $T_{10}(x)$. On remarque que chaque courbe possède respectivement 3 et 4 arcs dans l'intervalle $[0, \cos(\pi/2n)]$.

Par ailleurs, à l'aide de l'égalité (9), on peut réécrire la fonction de manière légèrement différente :

$$\Psi_n(x) = T_{2n}(a \cos \frac{x}{2}) = T_n(2a^2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1) = T_n(a^2 \cos x + a^2 - 1).$$

Posons $\cos x = \xi$ et considérons le polynôme τ_n de degré n défini par

$$\tau_n(\xi) := T_n(a^2 \xi + a^2 - 1).$$

On remarque en premier lieu que τ_n est l'image de T_n suite à la transformation affine de l'argument décrite par $\xi \mapsto a^2\xi + (a^2 - 1)$. Puisque $0 \leq a < 1$, le facteur a^2 participe à dilater le graphique. On observe ensuite que la transformation laisse le point $\xi = -1$ inchangé et applique 1 sur $2a^2 - 1$. Ainsi, selon la valeur de a , comprise entre 0 et 1, le graphique de τ_n dans l'intervalle $[-1, 1]$ sera semblable à celui de T_n dans l'intervalle $[-1, \frac{2}{a^2} - 1]$. C'est à dire que dans ces intervalles, les deux polynômes auront autant de zéros et atteindront un même nombre de fois les valeurs -1 et +1. En particulier, si l'inégalité $0 < a < \cos(\pi/2n)$ est respectée, τ_n aura au plus $n - 1$ zéros et atteindra la valeur -1 au maximum $n - 1$ fois. Ainsi, τ_n aura, dans ce cas, au plus $n - 1$ arcs γ_k et conséquemment Ψ_n sera limité à $2n - 2$ arcs γ_k au maximum.

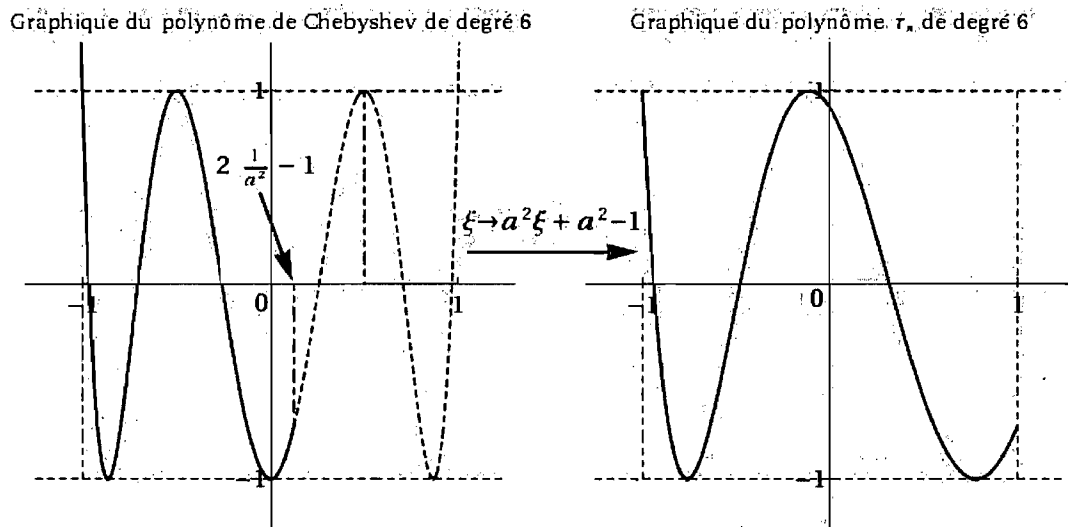


FIG. 3 – Graphique de T_6 et de τ_6 , le polynôme de Chebyshev de première espèce de degré 6 ainsi que son image lorsque son argument subi la transformation $\xi \mapsto a^2\xi + (a^2 - 1)$.

3 Inégalités pour polynômes trigonométriques ayant une valeur donnée en un point de l'axe imaginaire

Cette section reprend le Théorème D de la section 1 *Introduction et préliminaires* et en fait la démonstration. Suivent ensuite un cas particulier, une généralisation du théorème et un corollaire.

3.1 Théorème 1 : comportement près de l'origine d'un polynôme trigonométrique réel prenant la valeur $\cos \alpha$ en un point it de l'axe imaginaire

Quelles sont les plus grandes valeurs sur l'axe réel que peut atteindre un polynôme trigonométrique borné par 1 sur l'axe réel et prenant la valeur $\cos \alpha$ en it ? Le théorème suivant répond à la question.

Théorème 1. Soient $n \geq 2$ un entier naturel, $t \neq 0$ un réel et α un point de l'intervalle $[0, \pi]$. Considérons aussi $\Pi_n = \Pi_n(it, \cos \alpha)$ la classe de polynômes trigonométriques $\Phi_n(z) := \sum_{\nu=-n}^n a_\nu e^{i\nu z}$ de degré au plus n tels que

$$-1 \leq \Phi_n(x) \leq 1 \quad (x \in \mathbb{R})$$

et

$$\Phi_n(it) = \cos \alpha.$$

De plus, on note

$$a := \frac{\cos(\alpha/2n)}{\cosh(t/2)} \quad (10)$$

et

$$\Psi_n(x) := T_{2n}(a \cos \frac{x}{2}) \quad (11)$$

où T_{2n} est le polynôme de Chebyshev de première espèce de degré $2n$.

Alors,

(i) pour tout x réel tel que

$$\left| \cos \frac{x}{2} \right| \geq \frac{1}{a} \cos \frac{\pi}{2n} \quad (12)$$

et pour tout $\Phi_n \in \Pi_n$, on a

$$\Phi_n(x) \geq \Psi_n(x). \quad (13)$$

Pour un x satisfaisant (12), l'égalité en (13) n'a lieu que si $\Phi_n = \Psi_n$.

(ii) pour chaque x tel que

$$\left| \cos \frac{x}{2} \right| < \frac{1}{a} \cos \frac{\pi}{2n}, \quad (14)$$

il existe une infinité de polynômes trigonométriques Φ_n dans la classe Π_n tels que $\Phi_n(x) = -1$.

Remarque 1 Tel qu'observée à la section 2 intitulée "À propos des polynômes de Chebyshev", la relation (9) nous donne l'égalité suivante :

$$\Psi_n(x) = T_n[a^2 - 1 + a^2 \cos x].$$

De plus, en utilisant la formule de De Moivre, par exemple, on peut exprimer $(a^2 - 1 + a^2 \cos x)^k$ sous la forme

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j \cos jx$$

avec $\alpha_0, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ et $k = 0, 1, \dots, n$. Ainsi, la fonction $\Psi_n(x)$ est un polynôme trigonométrique pair de degré n . Il a aussi été montré à la même section que Ψ_n est un élément de la classe $\Pi_n(it, \cos \alpha)$.

Remarque 2 Puisque $t \neq 2$ et $\alpha \in [0, \pi]$, on a $0 < a < 1$, ce qui implique que

$$\frac{1}{a} \cos \frac{\pi}{2n} > \cos \frac{\pi}{2n}.$$

Si $|t|$ n'est pas suffisamment petit, le nombre a peut être plus petit que $\cos(\pi/2n)$ et alors, il n'y aurait pas de $x \in \mathbb{R}$ pour lequel (12) serait satisfaite. Supposons que $|t|$ soit assez petit pour que $a \geq \cos(\pi/2n)$. Dans ce cas, l'ensemble E des points x pour lequel (12) a lieu est non vide. En introduisant le nombre $\delta \in [0, \pi]$ défini par

$$a \cos \frac{\delta}{2} = \cos \frac{\pi}{2n}, \quad (15)$$

on observe facilement que $E = \bigcup_{\nu=-\infty}^{\infty} I^{(\nu)}$, où

$$I^{(\nu)} := \{2\nu\pi - \delta \leq x \leq 2\nu\pi + \delta\} \quad (\nu = 0, \pm 1 \pm 2, \dots). \quad (16)$$

Remarque 3 Constatons aussi que $\Phi_n \in \Pi_n(it, \cos \alpha)$ si et seulement si $-\Phi_n \in \Pi_n(it, \cos \beta)$, où $\beta := \pi - \alpha$. Le Théorème 1 est donc aisément adaptable à la fonction $M(x)$, ce qui est fait au théorème suivant.

Théorème 1'. Soient $n \geq 2$ un entier naturel, $t \neq 0$ un réel et α un point de l'intervalle $[0, \pi]$ ainsi que $\Pi_n = \Pi_n(it, \cos \alpha)$ la classe de polynômes trigonométriques définie au Théorème 1.

Alors,

(i) pour tout x réel tel que

$$\left| \cos \frac{x}{2} \right| \geq \frac{\cosh \frac{t}{2}}{\cos \frac{\pi-\alpha}{2n}} \cos \frac{\pi}{2n} \quad (12')$$

et pour tout $\Phi_n \in \Pi_n$, on a

$$\Phi_n(x) \leq -T_{2n} \left(\frac{\cos \frac{\pi-\alpha}{2n}}{\cosh \frac{t}{2}} \cos \frac{x}{2} \right). \quad (13')$$

(ii) de plus, pour tout x réel tel que

$$\left| \cos \frac{x}{2} \right| < \frac{\cosh \frac{t}{2}}{\cos \frac{\pi-\alpha}{2n}} \cos \frac{\pi}{2n}, \quad (14')$$

il existe une infinité de polynômes trigonométriques $\Phi_n \in \Pi_n(it, \cos \alpha)$ tels

que $\Phi_n(x) = 1$.

3.1.1 Preuve de 1(i)

Afin d'étudier la fonction $\Psi_n(x)$ dans l'intervalle $-\pi \leq x \leq \pi$, rappelons que δ désigne la valeur dans $[0, \pi)$ qui vérifie $a |\cos(\delta/2)| = \cos(\pi/2n)$.

Lorsque x passe de δ à π , la fonction $a \cos(x/2)$ décroît de $\cos(\pi/2n)$ à 0. Ainsi, le graphe de $\Psi_n(x)$ entre δ et π a le même comportement que celui de $T_{2n}(x)$ entre $\cos(\pi/2n)$ et 0. C'est dire que le graphe de $\Psi_n(x)$, entre δ et π , est composé de $n - 1$ arcs montant de -1 à $+1$ puis descendant de $+1$ à -1 et ainsi de suite en alternance. De plus, $\Psi_n(x)$ décroît dans l'intervalle $0 \leq x \leq \delta$ et atteint -1 en δ . On note de surcroît que $T_{2n}(0) = (-1)^n$, d'où $\Psi_n(\pi) = (-1)^n$. Finalement, $\Psi_n(x)$ étant pair, l'allure de son graphe est alors connu sur toute la période $[-\pi, \pi]$.

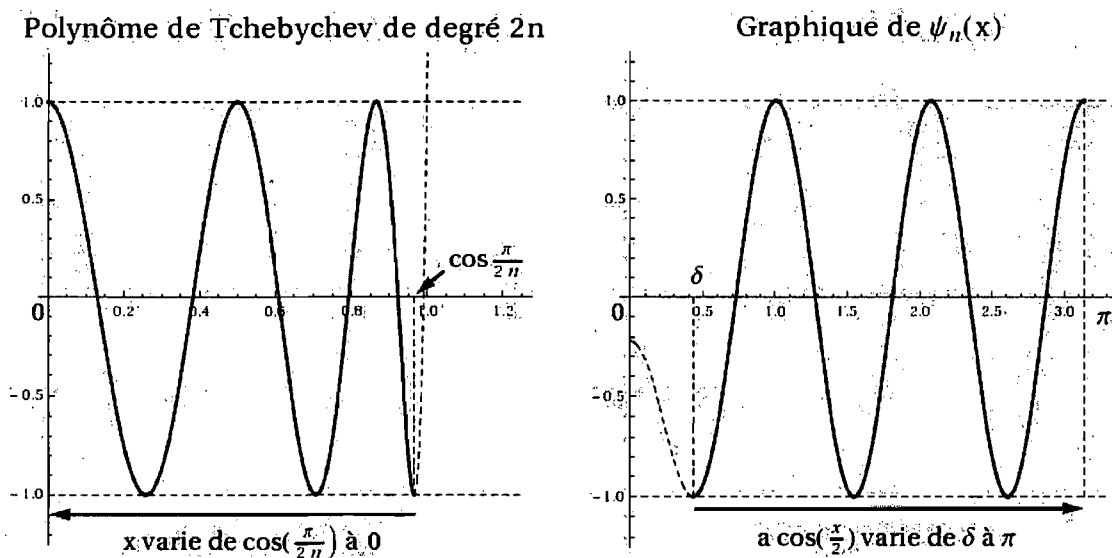


FIG. 4 – Graphique des fonctions $T_{2n}(x)$ et $\Psi_n(x)$. Lorsque x décroît de $\cos(\pi/2n)$ à 0, la fonction $a \cos(x/2)$ croît de δ à π .

On considère $\Phi_n(x)$ un polynôme trigonométrique quelconque de la classe $\Pi_n(it, \cos \alpha)$. La preuve s'effectue en traitant séparément les cas $\delta = 0$ et $\delta > 0$.

- Cas $\delta > 0$: Supposons qu'il existe x^0 dans $I^{(0)}$ tel que $\Phi_n(x^0) < \Psi_n(x^0)$. On aura alors $|x^0| < \delta$.

On s'intéresse maintenant au nombre de zéros du polynôme trigonométrique

$$\Delta_n(z) := \Psi_n(z) - \Phi_n(z)$$

dans la bande $-\pi \leq \Re(z) < \pi$. On procède en comptant le nombre de fois que les courbes Ψ_n et Φ_n s'intersectent dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

De même qu'à la section 2, posons $\xi_k := \cos \frac{k\pi}{2n}$ et x_k dans $[0, \pi]$ tels que $a \cos \frac{x_k}{2} = \xi_k$ pour tout $k = 1, 2, \dots, n$. On a ainsi

$$\delta = x_1 < x_2 < \dots < x_k < \dots < x_n = \pi.$$

Notons γ_k la portion du graphe de Ψ_n décrite lorsque x augmente de x_k à x_{k+1} . Remarquons que γ_k croît de -1 à $+1$ lorsque k est impair et décroît de $+1$ à -1 si k est pair. Supposons maintenant k impair (le cas pair est tout à fait similaire) de telle sorte que l'arc γ_k croisse de -1 à $+1$. Le graphe de Φ_n intersecte alors celui de Ψ_n soit dans l'intervalle (x_k, x_{k+1}) soit en x_k . Dans le premier cas, $\Delta_n(x)$ aura au moins un zéro simple dans l'intervalle $[x_k, x_{k+1})$. Dans le second, on a $\Delta_n(x_k) = 0$. De plus, puisque $|\Phi_n(x)| \leq 1$ et $\Phi_n(x_k) = -1$, le point x_k doit être un minimum et donc $\Phi_n'(x_k) = 0$. Il en est de même pour Ψ_n , i.e. x_k est un minimum de $\Psi_n(x)$ et $\Psi_n'(x_k) = 0$. Ceci nous donne $\Delta_n'(x_k) = 0$ et montre bien que x_k est un zéro multiple. Dans la mesure, où il n'y aurait pas d'intersection à l'intérieur de γ_{k-1} et γ_k , la racine en x_k nous assurerait tout de même que l'intervalle $[x_{k-1}, x_{k+1})$ possède au moins deux zéros (en considérant la multiplicité).

En particulier, Δ_n peut ne pas avoir de racine dans l'intervalle $[x_{n-1}, \pi)$. C'est à dire que Φ_n intersecterait γ_{n-1} en π . Or, en ce point, $\Psi_n(x)$ vaut soit 1 , soit -1 et donc π serait soit un maximum, soit un minimum pour les deux polynômes. On en déduit donc que Δ_n aura un zéro de multiplicité au moins deux en π et aussi, par périodicité, en $-\pi$. Ainsi, même si aucune racine n'est comptabilisée dans $[x_{n-1}, \pi)$, la contribution de cet intervalle est néanmoins présente dans l'intervalle $[-\pi, -x_{n-1})$ puisque la fonction Δ_n aura au minimum un zéro de multiplicité double en $-\pi$.

Sur l'union des intervalles $[-\pi, -\delta)$ et (δ, π) , le graphe de $\Psi_n(x)$ possède $2n - 2$ arcs γ_k . Ainsi, Δ_n admet au moins $2n - 2$ zéros dans $[-\pi, -\delta) \cup (\delta, \pi)$. En outre, l'hypothèse $\Phi_n(x^0) < \Psi_n(x^0)$ force les deux graphes à se croiser à au moins deux autres reprises dans l'intervalle $[-\delta, \delta]$. En supposant que $\Psi_n \not\equiv \Phi_n$, la différence Δ_n possède au minimum $2n$ zéros dans la période

$-\pi \leq x < \pi$. Or, on a aussi

$$\Delta_n(\pm it) = \Psi_n(\pm it) - \Phi_n(\pm it) = 0,$$

de sorte que Δ_n a au moins $2n + 2$ zéros dans la bande $-\pi \leq \Re(z) < \pi$. Ceci est impossible puisque Δ_n est un polynôme trigonométrique de degré au plus n .

Il est maintenant clair que $\Psi_n(x) \leq \Phi_n(x)$ pour $x \in [-\delta, \delta]$ et on s'intéresse à l'hypothèse $\Phi_n(x^\circ) = \Psi_n(x^\circ)$ pour un certain x° tel que $\delta \leq x^\circ \leq \delta$. Supposons aussi que $\Delta_n \not\equiv 0$.

On dénombre toujours $2n - 2$ zéros de Δ_n dans $[-\pi, -\delta) \cup (\delta, \pi]$. De surcroît, les graphes de Φ_n et de Ψ_n pourraient cette fois-ci n'avoir qu'un seul point commun dans l'intervalle $[-\delta, \delta]$. Le polynôme trigonométrique Δ_n aurait alors un zéro multiple d'ordre pair en ce point. Néanmoins, en ajoutant les deux racines en $\pm it$, on obtient au moins $2n + 2$ zéros, ce qui est impossible pour un polynôme trigonométrique de degré n . D'où : $\Delta_n \equiv 0$ et cela achève la démonstration du cas $\delta > 0$ de la partie 1(i) du théorème.

- *Cas $\delta = 0$* : Dans ce cas, le seul point qui importe est $x = 0$. Observons en l'occurrence, $a = \cos(\pi/2n)$, $\Psi_n(x) = T_{2n}(\cos(\pi/2n) \cos(x/2))$ et conséquemment $\Psi_n(0) = -1$. On a toujours $\Phi_n(0) \geq -1$, il suffit dès lors d'étudier le seul cas $\Phi_n(0) = -1$. Par hypothèse, Φ_n est un polynôme trigonométrique borné en valeur absolue par 1 sur l'axe réel, il s'ensuit donc que $\Phi_n(0) = -1$ est un minimum. D'où : $\Phi'_n(0) = 0$ et $\Phi''_n(0) \geq 0$. De même, on a par calcul⁶ $\Psi'_n(0) = 0$ et $\Psi''_n(0) = 0$ ce qui nous donne $\Delta'_n(0) = 0$ et $\Delta''_n(0) \leq 0$.

Supposons que $\Delta_n \not\equiv 0$. Si $\Delta''_n(0) < 0$, il existe, par le développement de Maclaurin, $\epsilon > 0$ tel que $\Delta_n(x) < 0$ si $|x| < \epsilon$. Ainsi, près de 0, le graphe de Φ_n sera au-dessus de celui de Ψ_n et croisera impérativement γ_1 ainsi que les $n - 2$ autres arcs qui le suivent. La fonction Δ_n possède donc $2n - 2$ zéros dans l'intervalle $[-\pi, -\epsilon] \cup [\epsilon, \pi]$, pourvu que ϵ soit suffisamment petit, ainsi qu'un zéro de multiplicité au moins deux à l'origine. On compte donc au moins $2n$ zéros dans $[-\pi, \pi)$ si $\Delta''_n(0) < 0$. Dans le cas où $\Delta''_n(0) = 0$, le polynôme trigonométrique Δ_n a au moins $2n - 4$ zéros dans $-\pi \leq x < 0$

⁶Cf. calculs complémentaires de l'Annexe.

et $0 < x \leq \pi$ ainsi qu'un zéro à l'origine de multiplicité supérieure ou égale à 3. Néanmoins, en additionnant les deux racines en $x = \pm it$, on obtient respectivement au moins $2n + 2$ et $2n + 1$ zéros dans la période, selon le cas $\Delta_n''(0) < 0$ ou $\Delta_n''(0) = 0$. Ce qui est en contradiction avec le degré de Δ_n . D'où : $\Delta_n \equiv 0$ et cela conclut le cas $\delta = 0$ de la partie 1(i) du théorème.

3.1.2 Preuve de 1(ii)

Supposons désormais que $a |\cos(x'/2)| < \cos(\pi/2n)$. On débute en construisant un polynôme trigonométrique Φ_n qui satisferait aux exigences de 1(ii). Pour y parvenir, on réécrit Ψ_n sous la forme ⁷

$$\Psi_n(x) = T_{2n}(a \cos \frac{x}{2}) = T_n(2a^2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1).$$

On soumet ensuite l'argument à une transformation linéaire. On définit donc

$$\Phi_n(x) = T_n[\varphi_\chi(x)] \quad (0 \leq \chi \leq 1),$$

où

$$\varphi_\chi(x) := \chi (2a^2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1) + (1 - \chi) \cos \frac{\alpha}{n}.$$

Il faut montrer que $\Phi_n(x)$ est un élément de la classe $\Pi_n(it, \cos \alpha)$ et que pour le bon χ on a bien $\Phi_n(x') = -1$.

On constate premièrement que $\Phi_n(x)$ est un polynôme trigonométrique de degré au plus n et aux coefficients réels. De plus, puisque $|2a^2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1| \leq 1$ et $|\cos(\alpha/n)| \leq 1$, on a alors $|\varphi_\chi(x)| \leq 1$ et conséquemment $|\Phi_n(x)| \leq 1$ pour tout x réel. De surcroît, $|\varphi_\chi(it)| = \cos(\alpha/n)$ et donc

$$\Phi_n(it) = T_n(\cos(\alpha/n)) = \cos \alpha.$$

Ceci permet de conclure que, pour tout χ dans $[0, 1]$, le polynôme trigonométrique Φ_n est effectivement un élément de la classe $\Pi_n(it, \cos \alpha)$.

Par ailleurs,

$$\varphi_0(x') = \cos(\alpha/n) \geq \cos(\pi/n)$$

et, par hypothèse,

$$\varphi_1(x') = 2a^2 \cos^2 \frac{x'}{2} - 1 < 2 \cos^2(\pi/2n) - 1 = \cos(\pi/n).$$

⁷Cf. l'égalité (9) de la section 2 À propos des polynômes de Chebyshev, p. 9.

Aussi, la continuité et la monotonie de φ_χ , en tant que fonction de χ , assure l'existence d'un unique $\chi = \lambda$ tel que $0 \leq \lambda < 1$ et $\varphi_\lambda(x') \equiv \cos(\pi/n)$. Il en résulte que

$$\Phi_n(x') = T_n[\varphi_\lambda(x')] = -1.$$

On a ainsi obtenu un premier polynôme pour lequel les hypothèses de 1(ii) sont satisfaites. Il s'agit désormais de montrer qu'il est possible de générer une infinité de variations de ce polynôme Φ_n qui satisfera elle aussi les hypothèses 1(ii) du théorème.

L'idée consiste à ajouter à Φ_n un polynôme trigonométrique t_n , de degré inférieur ou égal à celui de Φ_n et ayant une très petite amplitude ainsi que des zéros simples en $\pm it$ et doubles en x' . Ainsi, on désire obtenir un nouveau polynôme $\Phi_n + t_n$ tel que $\Phi_n + t_n \in \Pi_n(it, \cos \alpha)$ et $(\Phi_n + t_n)(x') = -1$.

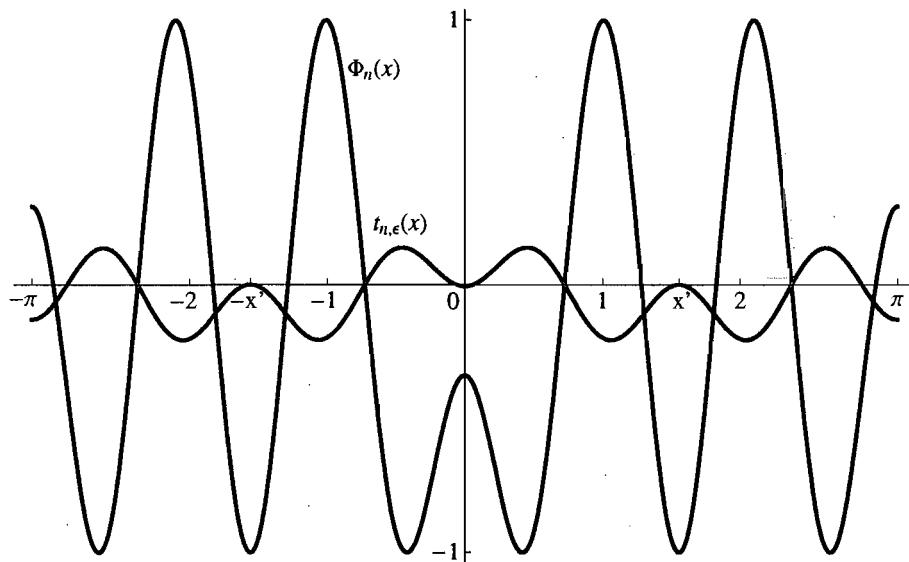


FIG. 5 – Graphique de $\Phi_n(x) = T_n[\varphi_\chi(x)]$ et de $t_{n,\epsilon}(x)$. En variant ϵ , on obtient une infinité de polynômes $\Phi_n + t_n$ dans $\Pi_n(it, \cos \alpha)$ tels que $(\Phi_n + t_n)(x') = -1$.

On construit t_n de manière à ce qu'il soit positif lorsque Φ_n est négatif et, au contraire, négatif lorsque Φ_n est positif. Cela nous assurera alors d'avoir $|\Phi_n(x) - t_n(x)| \leq 1$ sur tout l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

On remarque d'abord que $\lambda = 0$ seulement si $\alpha = \pi$. Pour $\lambda > 0$, on déduit

de $a < 1$ que $\varphi_\lambda(0) < 1$. On observe en outre que

$$\varphi_\lambda(\pi) = (1 - \lambda) \cos(\alpha/n) - \lambda > -1.$$

Puisque $\varphi_\lambda(x)$ est décroissante lorsque x parcourt l'intervalle $[0, \pi]$, il en résulte que le graphe de $\Phi_n(x)$, entre 0 et π , sera une portion de celui de $T_n(x)$ entre -1 et 1. Donc, Φ_n aura au plus n zéros et $n-2$ arcs reliant 1 et -1, dans l'intervalle $[0, \pi]$. Soient x_1, x_2, \dots, x_k les zéros réels positifs de Φ_n dans $[0, \pi]$. On note x_ν et $x_{\nu+1}$ les deux zéros consécutifs encadrant inférieurement et supérieurement le point x' . On a toujours $k \leq n$. Cependant, dans le cas où $k = n$, c'est-à-dire, lorsque Φ_n a exactement $n-2$ arcs et n zéros dans l'intervalle $[0, \pi]$, les conditions $\varphi_\lambda(0) < 1$ et $\varphi_\lambda(\pi) > -1$ impliquent alors que $|\Phi_n(0)| < 1$ et $|\Phi_n(\pi)| < 1$.

On peut dès lors définir le polynôme trigonométrique $t_{n,\epsilon}$:

$$t_{n,\epsilon}(z) := \epsilon (1 - \cos(z - x')) (1 - \cos(z + x')) (\cos z - \cosh t) \times \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq \{\nu, \nu+1\}}}^{n-1} (\cos z - \cos x_j). \quad (17)$$

On remarque que $t_{n,\epsilon}$ est de degré $n-1$, réel sur \mathbb{R} et tel que $|t_{n,\epsilon}(x)| \leq 1$ si ϵ est suffisamment petit et x est réel. De plus, le polynôme trigonométrique $t_{n,\epsilon}$ s'annule en $\pm it$ et possède des zéros doubles en x' et $-x'$. Aussi, puisque $|\Phi_n(z)|$ est strictement inférieur à 1 aux points 0 et π , la différence $|\Phi_n(x) - t_{n,\epsilon}(x)|$ reste inférieure à 1 même si Φ_n et t_n sont de même signe dans un voisinage de 0 et π . Ainsi, les zéros x_1 et x_n ne sont pas considérés dans la construction de $t_{n,\epsilon}$. De même, si $k = n-1$, on pourra négliger soit x_1 , soit x_n pour former t_n . Dans ce cas le polynôme trigonométrique obtenu sera de degré n .

Maintenant, si $k < n-1$, on construit le polynôme

$$t_{n,\epsilon}(z) := \epsilon (1 - \cos(z - x')) (1 - \cos(z + x')) (\cos z - \cosh t) \times \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq \{\nu, \nu+1\}}}^k (\cos z - \cos x_j), \quad (18)$$

qui sera au plus de degré $n-1$.

Par ailleurs, si $\alpha = \pi$, on peut construire la famille de polynômes

$$t_{n,\epsilon}(x) := -1 + \epsilon (\cosh t - \cos x)(1 - \cos(x - x'))$$

pour tout $\epsilon \in [0, 1)$.

3.2 Cas particulier : $t = 0$.

Deux sous-cas sont à distinguer ici.

En premier lieu, on définit la classe $\Pi_n(0, \cos \alpha)$, $n \geq 2$, comme étant la classe des polynômes trigonométriques Φ_n de degré au plus n , aux coefficients réels, $|\Phi_n(x)| \leq 1$ sur l'axe réel et tels que $\Phi_n(x)$ ait un extremum local à l'origine prenant la valeur $\cos \alpha$. Cette condition est équivalente à exiger que $\Phi_n - \cos \alpha$ possède un zéro double ou de multiplicité paire à l'origine.

On a alors, comme complément du Théorème 1, le résultat suivant :

Proposition 1. *Soit Φ_n dans $\Pi_n(0, \cos \alpha)$ la classe définie ci-dessus.*

Si $x \in \mathbb{R}$ tel que $\cos \frac{\alpha}{2n} |\cos \frac{x}{2}| \geq \cos \frac{\pi}{2n}$ alors

$$\Phi_n(x) \geq T_{2n}[\cos \frac{\alpha}{2n} \cos \frac{x}{2}].$$

En particulier, il y a égalité seulement si $\Phi_n(x) \equiv T_{2n}[\cos \frac{\alpha}{2n} \cos \frac{x}{2}]$.

De plus, si x est tel que $\cos \frac{\alpha}{2n} |\cos \frac{x}{2}| < \cos \frac{\pi}{2n}$, il existe alors une infinité de polynômes Φ_n dans la classe tels que $\Phi_n(x) = -1$.

En reprenant la démonstration du Théorème 1, on réalise que les arguments sont les mêmes. Dans la partie 1(i), cas $\delta > 0$, il s'agit de remarquer que, si $x^o \neq 0$, on a au moins un zéro de Δ_n dans l'intervalle $(-\delta, 0)$ ou $(0, \delta)$ ainsi qu'un second, double, en 0. Ceci nous donne bien $2n + 1$ zéros (en comptant la multiplicité) dans la période et, conséquemment, on obtient la contradiction désirée.

Maintenant, si $x^o = 0$, en considérant le polynôme constant $\cos(\alpha)$, on a un polynôme de Π_n prenant la même valeur que Ψ_n à l'origine sans toutefois y être identique partout.

La partie 1(ii) ne dépend pas du tout de t et la preuve reste tout à fait la même.

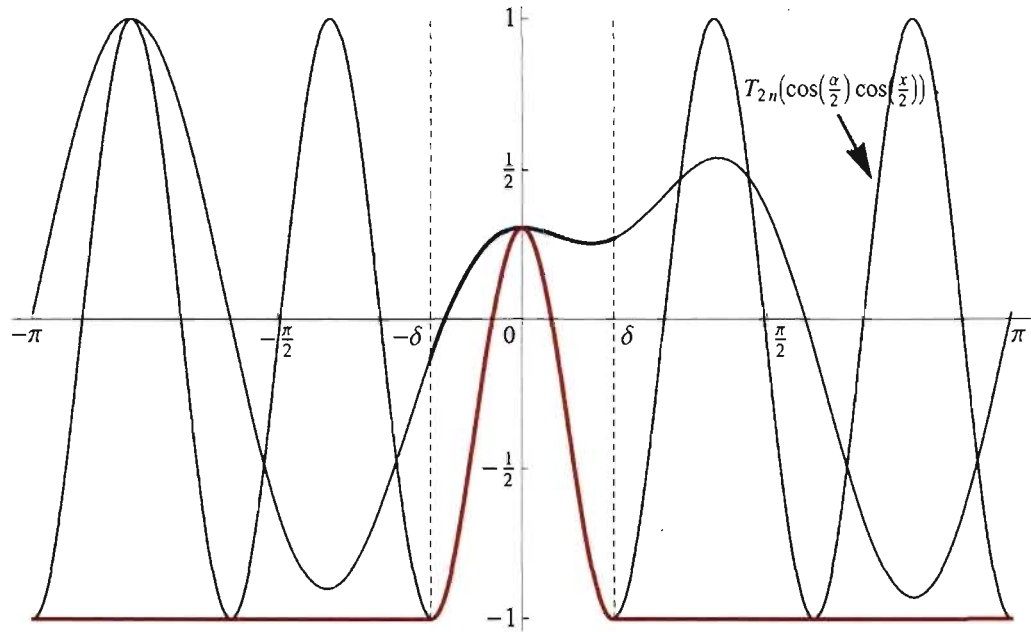


FIG. 6 – Graphique des fonctions $T_{2n}[\cos \frac{\alpha}{2n} \cos \frac{x}{2}]$, en noir et rouge, ainsi que de $\Phi_n(x)$, en bleu. Le graphique de tout polynôme trigonométrique de degré au plus n et satisfaisant $\Phi_n(0) = \cos(\alpha)$ ne peut jamais se situer sous la courbe extrême rouge.

Considérons dans un deuxième temps que $\Phi_n(x) - \cos(\alpha)$ ait un zéro (simple ou non) à l'origine. Nous obtenons alors cette deuxième proposition, complément au Théorème 1.

Proposition 2. Sur $[0, (\pi - \alpha)/n]$ le polynôme minimal est $\cos(nx + \alpha)$; sur $[-(\pi - \alpha)/n, 0]$ il est $\cos(nx - \alpha)$, et ailleurs dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$ la valeur minimale est -1 .

Démonstration de la Proposition 2. Utilisons de nouveau le polynôme trigonométrique

$$\Delta_n(x) = \Phi_n(x) - \cos(nx + \alpha).$$

On débute par calculer le nombre d'arcs dans l'intervalle $[-\alpha/n, -\alpha/n + 2\pi)$ de manière à compter les zéros de Δ_n dans ce même intervalle.

En observant le graphique de $\cos(nx + \alpha)$, on réalise qu'il possède un arc allant de $+1$ à -1 dans l'intervalle $[-\alpha/n, (\pi - \alpha)/n]$ ainsi que $2n - 1$ arcs dans $[(\pi - \alpha)/n, -\alpha/n + 2\pi)$ oscillant entre -1 et 1 . Dans ce dernier intervalle, on

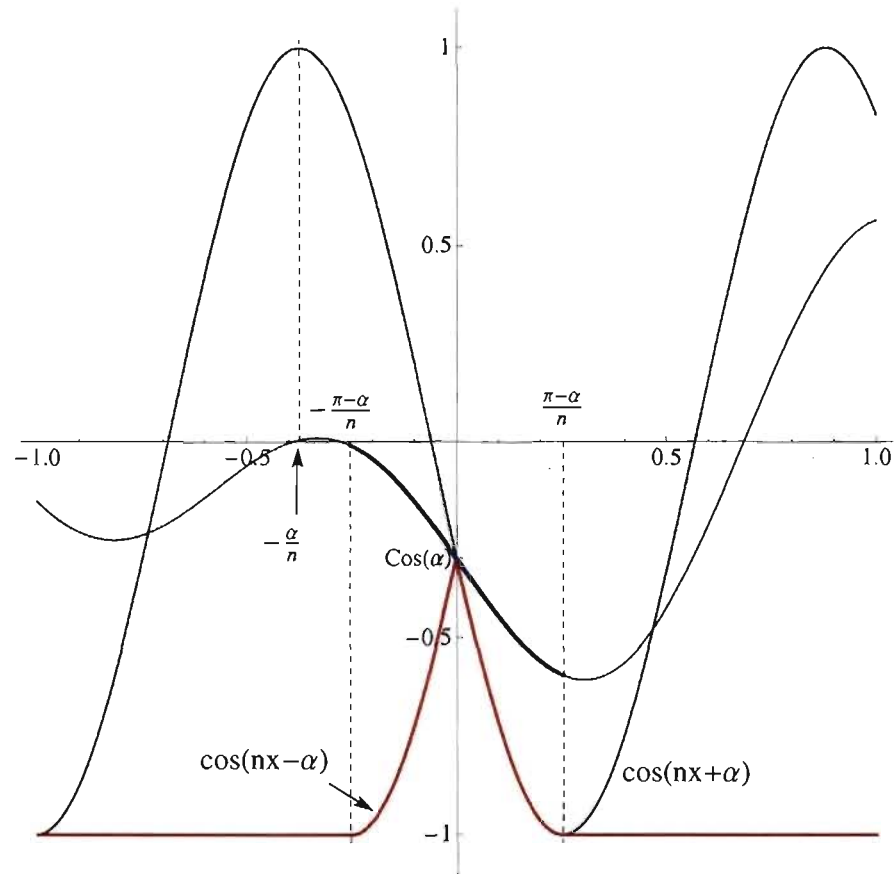


FIG. 7 – Portion des graphiques des fonctions $\cos(nx + \alpha)$, en noir et rouge, et $\Phi_n(x)$, en bleu. Il s'agit ici du cas pour lequel $\Phi_n(x) - \cos(\alpha)$ peut n'avoir qu'un zéro simple à l'origine.

peut identifier à chacun de ces arcs au moins un zéro de Δ_n portant à $2n - 1$ le total de zéros dans $[(\pi - \alpha)/n, -\alpha/n + 2\pi)$. Considérons maintenant la condition $\Phi_n(x^0) < \cos(nx^0 - \alpha)$ pour un certain $x^0 \in (0, (\pi - \alpha)/n)$. Ainsi le premier arc, situé dans l'intervalle $[-\alpha/n, (\pi - \alpha)/n)$, aura sûrement 2 zéros au minimum. Remarquons toutefois que dans le cas où il y a exactement 2 zéros, Φ_n est alors strictement inférieur à $\cos(nx + \alpha)$ avant et après l'origine. Cela implique que la tangente au graphe de Φ_n à l'origine est confondue avec celle de $\cos(nx + \alpha)$ au même point produisant ainsi un zéro double pour Δ_n en $z = 0$. De plus, puisque l'on a $\Phi_n(x) < \cos(nx + \alpha)$ dans $(0, (\pi - \alpha)/n)$ et puisque $\cos(nx + \alpha)$ vaut -1 en $(\pi - \alpha)/n$, on doit alors forcément avoir $\Phi_n((\pi - \alpha)/n) = -1$. La fonction Δ_n possède alors au moins 4 zéros dans l'intervalle correspondant au deux premiers arcs.

En définitive, qu'on ait deux zéros ou plus au niveau du premier arc, le polynôme trigonométrique Δ_n aura toujours un total de zéros supérieur à $2n + 1$ dans la période $[-\frac{\alpha}{n}, -\frac{\alpha}{n} + 2\pi)$. Conséquemment, un tel x^o ne peut exister et donc $\cos(nx + \alpha)$ est minimal sur $[0, (\pi - \alpha)/n]$. Ce même argument permet aussi de vérifier que l'égalité en un point de l'intervalle entraîne l'égalité sur tout l'intervalle.

Notons qu'un polynôme trigonométrique t_n de degré n est dans la classe $\Pi_n(0, \cos \alpha)$ si et seulement si $t_n(-x)$ y est aussi. En appliquant à $t_n(-x)$ le résultat obtenu dans l'intervalle $[0, (\pi - \alpha)/n)$, on obtient aussi que, dans l'intervalle $[-(\pi - \alpha)/n, 0]$, le polynôme $\cos(nx - \alpha)$ est minimal.

Pour ce qui a trait au reste de l'intervalle, par la même technique que la preuve de 1(ii), il appert que les polynômes de la forme

$$T_n[\chi \cos(\pm x + \alpha/n) + (1 - \chi) \cos(\alpha/n)], \quad 0 \leq \chi \leq 1,$$

permettent de générer une infinité de polynômes dans la classe et prenant la valeur -1 en un point arbitraire de l'intervalle $[(\pi - \alpha)/n, -\alpha/n + 2\pi)$. \square

3.3 Valeur donnée non réelle

Cette section ainsi que la suivante s'appliquent à généraliser le Théorème 1 en remplaçant $\cos \alpha$ dans la définition de Π_n par un nombre complexe arbitraire $\xi + i\eta$.

Définition 3. Soient $n \geq 2$ un entier ainsi que $t (\neq 0)$, ξ et η des nombres réels. On désigne par $\Pi_n(it, \xi + i\eta)$ la classe des polynômes trigonométriques

$\Phi_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ de degré au plus n à coefficients réels tels que

$$|\Phi_n(x)| \leq 1, \quad (x \in \mathbb{R})$$

et

$$\Phi_n(it) = \xi + i\eta.$$

Théorème 2. La classe $\Pi_n(it, \xi + i\eta)$ est non vide si et seulement si

$$\frac{\xi^2}{\cosh^2 nt} + \frac{\eta^2}{\sinh^2 nt} \leq 1. \quad (19)$$

C'est donc dire qu'il faut nécessairement que $\xi + i\eta$ soit à l'intérieur ou sur la frontière de l'ellipse de demi-axes $\cosh nt$ et $\sinh nt$ pour que la classe Π_n soit non vide.

Démonstration. On suppose que (19) est vérifiée. Il existe alors b dans $[0,1]$ tel que

$$\frac{\xi^2}{\cosh^2 nt} + \frac{\eta^2}{\sinh^2 nt} = b^2$$

et donc

$$\left(\frac{\xi}{b \cosh nt}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{b \sinh nt}\right)^2 = 1.$$

Cette dernière égalité peut se réécrire comme la somme des carrés d'un cosinus et d'un sinus. En effet, il existe un réel x_1 tel que $\cos nx_1 = \frac{\xi}{b \cosh nt}$ et $\sin nx_1 = \frac{\eta}{b \sinh nt}$, d'où :

$$\left. \begin{aligned} \xi &= b \cos nx_1 \cosh nt, \\ \eta &= b \sin nx_1 \sinh nt. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Par (20), on obtient pour $\xi + i\eta$:

$$\begin{aligned} \xi + i\eta &= b \cos nx_1 \cosh nt + i(b \sin nx_1 \sinh nt) \\ &= b \cos nx_1 \cos int + b \sin nx_1 \sin int \\ &= b \cos n(it - x_1) \end{aligned} \quad (21)$$

et ainsi, le polynôme trigonométrique $b \cos n(z - x_1)$ est un élément de la classe $\Pi_n(it, \xi + i\eta)$.

Afin de montrer la réciproque, supposons que Φ_n soit dans $\Pi_n(it, \xi + i\eta)$ mais que la condition (19) ne soit pas satisfaite. Il existerait alors un nombre $b > 1$ tel que

$$\frac{\xi^2}{\cosh^2 nt} + \frac{\eta^2}{\sinh^2 nt} = b^2.$$

Ainsi, il existe $x = x_1$ tel que (21) reste satisfait. Considérons maintenant le polynôme trigonométrique

$$\delta(x) := \cos n(x - x_1) - \frac{1}{b} \Phi_n(x).$$

De plus, le rectangle R_λ décrit par $\{x + iy : 0 \leq x < 2\pi, 0 \leq y \leq \lambda\}$ a pour image par la fonction cosinus l'intérieur et la frontière de l'ellipse centrée en l'origine et de demi axes $\cosh \lambda$ et $\sinh \lambda$.

Ainsi, si $\eta \neq 0$, il existe une unique ellipse centrée en l'origine, de foyers ± 1 et passant par $\xi + i\eta$. On peut alors associer à cette ellipse le segment $r_\lambda(\tau)$ qui est sa préimage par la fonction cosinus. Il existe alors τ^* dans $[0, 2\pi)$ tel que $\cos(r_\lambda(\tau^*)) = \xi + i\eta$.

Il appert en outre que le point $\xi + i\eta$ sera sur ou à l'intérieur de l'ellipse de demi axes $\cosh nt$ et $\sinh nt$ si, et seulement si, $|\beta| \leq n|t|$. \square

Considérons le cas pour lequel l'égalité est satisfaite, c'est-à-dire $\beta = \pm nt$. Pour $\Phi_n \in \Pi_n(it, \xi + i\eta)$, la fonction $\cos(nx \pm \alpha) - \Phi_n(x)$ possède $2n + 2$ zéros ($2n$ réels et 2 complexes en it) ce qui est impossible pour un polynôme trigonométrique de degré au plus n . Ainsi, $\Phi_n(x) \equiv \cos(nx \pm \alpha)$ ce qui permet de conclure qu'en cas d'égalité la classe $\Pi_n(it, \cos(\alpha \pm int))$ ne contient qu'un polynôme, soit $\cos(nx \pm \alpha)$. Le signe étant déterminé par $\beta = nt$ ou $\beta = -nt$.

3.4 Généralisation du Théorème 1 aux valeurs non réelles

On désire résoudre le problème similaire à celui du Théorème 1 mais pour la classe $\Pi_n(it, \cos(\alpha + i\beta))$. On admet dans cette section que $\beta \neq 0$ puisque le cas nul correspond au Théorème 1.

Les fonctions $m(x)$ et $M(x)$ vaudront encore -1 et $+1$ sur \mathbb{R} à l'exception de certains intervalles pour lesquels elles seront égales à des polynômes de la classe. Ces derniers étant de la forme $\pm \Psi_n(a, x - x')$ où

$$\Psi_n(a, x - x') := T_{2n} \left[a \cos \frac{1}{2}(x - x') \right],$$

il s'agit de translations du polynôme trigonométrique

$$\Psi_n(a, x) \equiv \Psi_n(x) = T_{2n} \left[a \cos \frac{x}{2} \right].$$

Pour qu'un polynôme $\Psi_n(a, x - x')$ appartienne à $\Pi_n(it, \cos(\alpha + i\beta))$, on doit avoir

$$T_{2n} \left[a \cos \frac{1}{2}(it - x') \right] = \cos(\alpha + i\beta).$$

On s'intéresse donc à résoudre l'équation

$$T_{2n}(z) = \cos(\alpha + i\beta). \quad (23)$$

Débutons avec

$$T_{2n}(z) = \cos(\alpha + i\beta) = \cos(\alpha + 2k\pi + i\beta), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Par une des propriétés des polynômes de Chebyshev⁸, on a aussi

$$T_{2n} \left[\cos \left(\frac{\alpha + i\beta}{2n} + \frac{k\pi}{n} \right) \right] = \cos(\alpha + 2k\pi + i\beta), \quad k = 0, 1, \dots, 2n - 1.$$

Ainsi, les points $z_k := \cos \left(\frac{\alpha + i\beta}{2n} + \frac{k\pi}{n} \right)$, pour $k = 0, 1, \dots, 2n - 1$, sont au moins n points distincts et, dans le meilleur des cas, $2n$ points distincts et solutions de l'équation (23).

On désire de surcroît montrer que ces z_k peuvent être écrits sous la forme $z_k = a_k \cos \frac{1}{2}(it - x_k)$. Cela revient à trouver certains a_k et x_k bien définis qui satisfont l'égalité

$$a_k \cos \frac{1}{2}(it - x_k) = \cos \left(\frac{\alpha + i\beta}{2n} + \frac{k\pi}{n} \right).$$

En développant les cosinus et en regroupant les parties réelles et imaginaires, on obtient :

$$a_k \cosh \frac{t}{2} \cos \frac{x_k}{2} - \cos \frac{\alpha + 2k\pi}{2n} \cosh \frac{\beta}{2n} + i \left[\sin \frac{\alpha + 2k\pi}{2n} \sinh \frac{\beta}{2n} + a_k \sinh \frac{t}{2} \sin \frac{x_k}{2} \right] = 0.$$

Il en découle les deux relations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} a_k \cosh \frac{t}{2} \cos \frac{x_k}{2} &= \cos \frac{\alpha + 2k\pi}{2n} \cosh \frac{\beta}{2n} \\ a_k \sinh \frac{t}{2} \sin \frac{x_k}{2} &= -\sin \frac{\alpha + 2k\pi}{2n} \sinh \frac{\beta}{2n} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

pour $k = 0, 1, \dots, 2n - 1$. D'où,

$$a_k^2 = \left[\frac{\cos \frac{\alpha + 2k\pi}{2n} \cosh \frac{\beta}{2n}}{\cosh \frac{t}{2}} \right]^2 + \left[\frac{\sin \frac{\alpha + 2k\pi}{2n} \sinh \frac{\beta}{2n}}{\sinh \frac{t}{2}} \right]^2$$

⁸Cf. égalité (8) de la section 2 *À propos des polynômes de Chebyshev*, p. 9.

et on définit donc a_k en choisissant la valeur positive de la racine

$$a_k = \sqrt{\left[\frac{\cos \frac{\alpha+2k\pi}{2n} \cosh \frac{\beta}{2n}}{\cosh \frac{t}{2}} \right]^2 + \left[\frac{\sin \frac{\alpha+2k\pi}{2n} \sinh \frac{\beta}{2n}}{\sinh \frac{t}{2}} \right]^2} \quad (25)$$

Tel que mentionné suite au Théorème 2, pour que la classe $\Pi_n(it, \cos(\alpha + i\beta))$ soit non-vide, la condition $0 < \frac{|\beta|}{n} \leq |t|$ doit nécessairement être respectée. Grâce à ce fait, on observe que $0 < a_k \leq 1$, ce qui implique que $\Psi_n(a_k, x - x_k)$ appartient bien à Π_n .

De plus, des équations (24) on obtient

$$\tanh \frac{t}{2} \tan \frac{x_k}{2} = -\tan \frac{\alpha+2k\pi}{2n} \tanh \frac{\beta}{2n}$$

et en considérant la branche principale de \arctan (entre $-\pi/2$ et $\pi/2$), on peut décrire x_k explicitement :

$$x_k = -2 \arctan \left(\frac{\tan \frac{\alpha+2k\pi}{2n} \tanh \frac{\beta}{2n}}{\tanh \frac{t}{2}} \right) \quad (26)$$

À partir des définitions (25) et (26) on déduit les deux relations suivantes

$$a_k = a_{k+n} \quad \text{et} \quad x_k = x_{k+n}.$$

Ainsi, le nombre de couples (a_k, x_k) sera nécessairement inférieur ou égal à n . De plus, à chaque paire (a_k, x_k) , on peut faire correspondre certains intervalles solutions d'une équation ayant pour paramètres a_k et x_k . De fait, on nomme E_k l'ensemble solution de l'équation $a_k |\cos \frac{1}{2}(x - x_k)| \geq \cos(\pi/2n)$. On note plus précisément

$$E_k := \bigcup_{\nu=-\infty}^{\infty} I_k^{(\nu)},$$

où

$$I_k^{(\nu)} := \{x \in \mathbb{R} : a_k |\cos \frac{1}{2}(x - x_k)| \geq \cos(\pi/2n), -\pi + 2\nu\pi \leq x < \pi + 2\nu\pi\}.$$

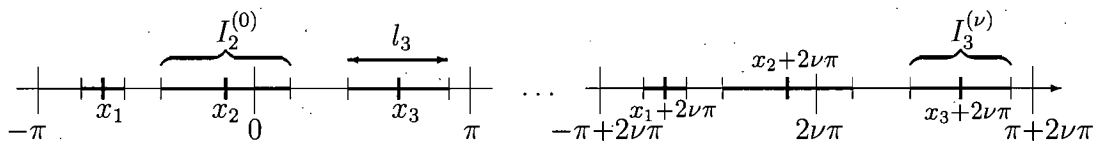


FIG. 9 – Exemple de répartition des points x_k et des intervalles $I_k^{(\nu)}$ dans le cas où $k \leq 3$.

On constate que les intervalles $I_k^{(\nu)}$ sont centrés en $x_k + 2\nu\pi$ et que leur longueur l_k est déterminée par l'équation

$$a_k \cos \frac{l_k}{4} = \cos \frac{\pi}{2n}. \quad (27)$$

On a conséquemment $0 \leq l_k \leq 2\pi/n$.

Les intervalles $I_k^{(\nu)}$ sont d'importance puisqu'il s'agit des points dans la période pour lesquels les valeurs extrémales de la classe $\Pi_n(it, \cos(\alpha + i\beta))$ seront différentes de +1 et -1.

La prochaine définition est maintenant justifiée.

Définition 4. Soit $\{(a_k, x_k)\}$ l'ensemble des différentes paires de nombres réels solutions de l'équation

$$T_{2n}[a_k \cos \frac{1}{2}(it - x_k)] = \cos(\alpha + i\beta)$$

qui vérifie aussi $a_k \geq \cos(\pi/2n)$ et $-\pi \leq x_k < \pi$.

Notons de plus E_k l'ensemble des intervalles pour lesquels x satisfait l'équation

$$a_k |\cos \frac{1}{2}(x - x_k)| \geq \cos(\pi/2n).$$

Tous les intervalles composant E_k ont la même longueur que l'on note l_k .

Les valeurs de a_k et x_k sont déterminés par les égalités (25) et (26) respectivement. La longueur l_k est déterminée par l'équation (27).

Aussi, sur E_k , le polynôme minimal pour la classe $\Pi_n(it, \cos(\alpha + i\beta))$ sera de la forme $\Psi_n(a_k, x - x_k)$. Le prochain théorème contient l'énoncé de ce résultat.

Théorème 3. Soient $|\beta| \leq nt$ ainsi que (a_k, x_k) et E_k tels que définis ci-dessus.

(i) Alors, pour tout Φ_n appartenant à la classe Π_n de la Définition 3 et pour tout x dans E_k , on a

$$\Phi_n(x) \geq \Psi_n(a_k, x - x_k).$$

En fait, on a $\Phi_n(x) > \Psi_n(a_k, x - x_k)$, pour tout x dans E_k , sauf dans le cas où $\Phi_n(x) \equiv \Psi_n(a_k, x - x_k)$.

(ii) Pour tout x à l'extérieur des intervalles de E_k , il existe une infinité de polynômes $\Phi_n \in \Pi_n$ tels que $\Phi_n(x) = -1$.

Démonstration. Par la périodicité des polynômes trigonométriques, il est suffisant de travailler dans un intervalle de longueur 2π quelconque. Choisissons alors $[-\pi, \pi)$ et considérons les intervalles $I_k^{(0)}$ et $I_{k'}^{(0)}$ que l'on notera désormais I_k et $I_{k'}$.

De la même manière que ce qui a été fait pour le Théorème 1, on peut montrer que $\Psi_n(a_k, x - x_k)$ est le polynôme trigonométrique minimal sur I_k . Il suffit pour cela de comparer le graphe de $\Psi_n(a_k, x - x_k)$ avec celui de Φ_n un polynôme trigonométrique quelconque dans la classe Π_n . De fait, l'hypothèse $a_k \geq \cos(\pi/2n)$ nous assure que $\Psi_n(a_k, x - x_k)$ a au moins $2n - 2$ arcs oscillant entre -1 et $+1$ dans l'intervalle $[-\pi, \pi)$.

Pour $k \neq k'$, les intervalles I_k et $I_{k'}$ ne se chevauchent pas. En effet, si tel n'était pas le cas, il existerait x_0 appartenant à I_k et tel que

$$\Psi_n(a_{k'}, x_0 - x_{k'}) < \Psi_n(a_k, x_0 - x_k)$$

ce qui contredit le fait que $\Psi_n(a_k, x - x_k)$ est le polynôme trigonométrique minimal sur I_k .

On note par $D_k^{(\nu)}$ la région de \mathbb{C} se situant au niveau des $I_k^{(\nu)}$ sous le graphe des $\Psi_n(a_k, x - x_k)$ et par D la réunion de tous ces ensembles $D := \bigcup_{\nu=-\infty}^{\infty} \bigcup_{j=1}^k D_j^{(\nu)}$ (cf. Figure 10 à la page suivante). Autrement dit, D est la région regroupant toutes les valeurs minimales que les polynômes trigonométriques de la classe Π_n ne peuvent prendre. De même, D' représente la région comprenant toutes les valeurs maximales non atteignables par les polynômes trigonométriques de Π_n . On s'intéresse à l'effet sur D et D' de la variation de t lorsque α , β et n sont fixés.

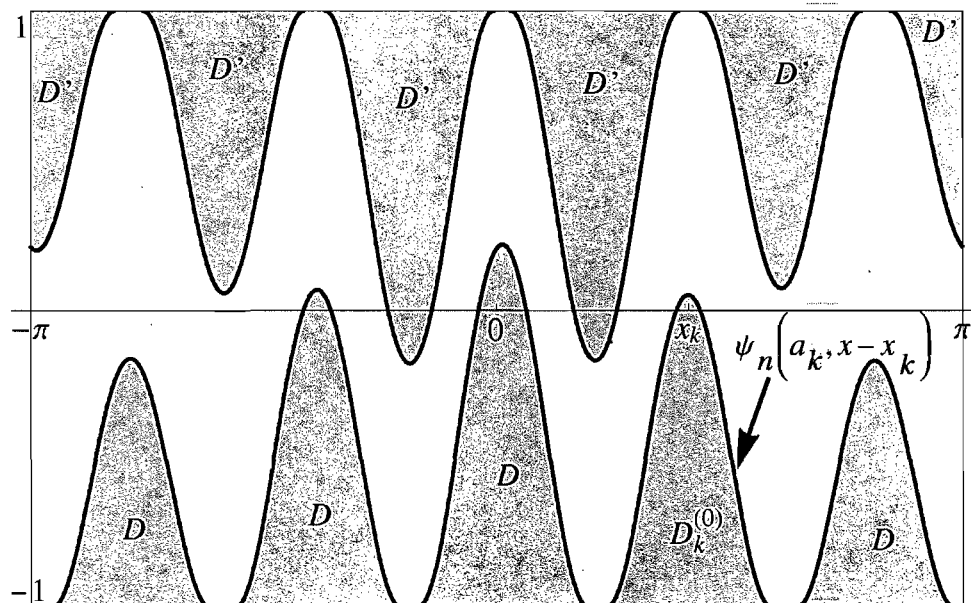


FIG. 10 – Les régions D et D' sont les valeurs que les polynômes trigonométriques de la classe $\Pi_n(it, \cos(\alpha + i\beta))$ ne peuvent pas atteindre sur les réels.

Si $|t|$ tend vers l'infini, il suit de (25) que a_k tendra aussi vers 0. Conséquemment, l'inégalité $a_k \geq \cos(\pi/2n)$ ne sera plus vérifiée dès que t excédera une certaine valeur t_0 et, dans ce cas, il n'y aura pas de région D prescrite. Il en est de même pour D' .

Par ailleurs, le Théorème 2 mentionne qu'il est nécessaire que $|t| \geq |\beta|/n$ afin que la classe Π_n soit non vide. Si l'on considère la situation pour laquelle $t = \beta/n$, on aura alors par (25) et (26) que $a_k = 1$ et $x_k = -\alpha/n + 2k\pi/n$ pour tout k . Conséquemment, la longueur l_k vaudra $2\pi/n$, pour tout k , et ainsi la réunion des I_k s'étendra sur tout l'axe des abscisses. En outre, le polynôme trigonométrique $\Psi_n(1, x - x_k) = \cos(nx + \alpha)$ est indépendant de k . On a donc $m(x) = \cos(nx + \alpha)$ pour tout x dans \mathbb{R} . De manière similaire, on réalise que $M(x) = \cos(nx + \alpha) = m(x)$. La bande entre $y = 1$ et $y = -1$ est donc entièrement remplie par D et D' et tel que discuté à la fin de la section 3.3, le polynôme trigonométrique $\cos(nx + \alpha)$ est le seul de la classe $\Pi_n\left(\frac{i\beta}{2n}, \cos(\alpha + i\beta)\right)$. Le cas $t = -\beta/n$ est tout à fait similaire.

La preuve de la partie 3(ii) du théorème peut se faire de manière similaire à ce qui a été fait en 3.1.2. Néanmoins, on aborde ici une approche différente. Soit x' un nombre réel en dehors de tout E_k ($k = 1, 2, \dots$). De ce qui a été conclu

précédemment, on doit forcément avoir $|\beta| < n|t|$. Ainsi, $\cos(\alpha + i\beta) = \xi + i\eta$ est à l'intérieur de l'ellipse définie par le cas d'égalité de (19). Pour $\xi_0 + i\eta_0$ sur l'ellipse, il existe une partition de l'axe réel en I_k . Aussi appelle-t-on $J(\xi_0 + i\eta_0)$ l'intervalle sur lequel se trouve x' et notons L la droite reliant $\xi_0 + i\eta_0$ à $\xi + i\eta$ (se référer à la Figure 11).

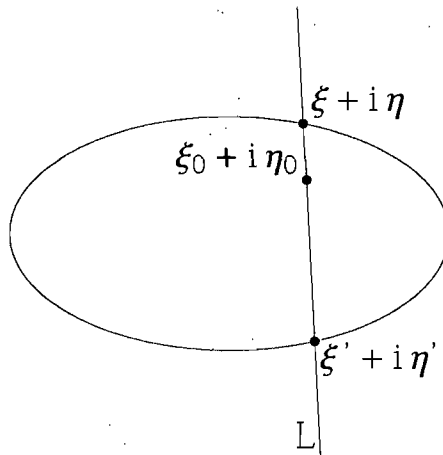


FIG. 11 – La droite L passe par les points $\xi_0 + i\eta_0$ et $\xi + i\eta$ qui sont respectivement sur et à l'intérieur de l'ellipse définie par $\frac{\xi^2}{\cosh^2 nt} + \frac{\eta^2}{\sinh^2 nt} = 1$.

Pour z se déplaçant le long de L , entre $\xi_0 + i\eta_0$ et $\xi + i\eta$, il existe des couples $\{(a_k, x_k)\}$ solutions de $T_{2n}[a_k \cos(it - x_k)] = z$ et auxquelles sont associés les ensembles d'intervalles I_k . Si z est suffisamment proche de $\xi_0 + i\eta_0$ et que x' n'est pas à l'une des extrémités de $J(\xi_0 + i\eta_0)$, il existe alors un intervalle parmi ceux des I_k pour lequel x' est un point d'intérieur. On note cet intervalle $J(z)$. Constatons que, tant que l'on n'a pas atteint un $J(z)$ composé d'un seul point, les intervalles $J(z)$ varient continûment lorsqu'on se déplace le long de L , de $\xi_0 + i\eta_0$ vers $\xi + i\eta$. Puisqu'en $\xi + i\eta$, le point x' n'est plus dans aucun I_k , on conclut qu'il existe z_1 sur L , entre $\xi_0 + i\eta_0$ et $\xi + i\eta$, tel que x' soit une extrémité de $J(z_1)$. Cela signifie de plus qu'il y a un polynôme trigonométrique $\Phi_n^{(1)} \in \bar{\Pi}_n(it, z_1)$ tel que $\Phi_n^{(1)}(x') = -1$. On effectue de nouveau cette même démarche mais cette fois-ci le long de L entre $\xi + i\eta$ et l'autre point d'intersection $\xi' + i\eta'$ de L avec l'ellipse, on trouve à nouveau un point z_2 ainsi qu'un autre polynôme trigonométrique $\Phi_n^{(2)}$ tel que $\Phi_n^{(2)}(x') = -1$.

Il existe $t_1 \geq 0$ et $t_2 \geq 0$ tels que $t_1 + t_2 = 1$ et $t_1 z_1 + t_2 z_2 = \xi + i\eta$. D'où :

$$\Phi_n := t_1 \Phi_n^{(1)} + t_2 \Phi_n^{(2)} \in \bar{\Pi}_n(it, \xi + i\eta) \quad \text{et} \quad \Phi_n(x') = 1.$$

On obtient désormais un polynôme trigonométrique Φ_n qui satisfait les conditions de la partie 3(ii). En utilisant différents points $\xi_0 + i\eta_0$ le long de l'ellipse, on obtient une infinité de solutions. \square

3.5 Corollaire

On présente maintenant un résultat qui sera utile à la prochaine section.

Définition 5. Soient $n \geq 2$ un entier, t un réel et $\Omega_n(it, 0)$ la classe des polynômes trigonométriques Φ_n d'ordre n , aux coefficients réels et tels que $0 \leq \Phi_n(x) \leq 1$, pour tout x réel, et $\Phi_n(it) = 0$.

Le polynôme extrémal suivant

$$\Theta_n(x) := \frac{1}{2} \left(1 - T_{2n} \left[\cosh^{-1} \frac{t}{2} \cos \frac{x}{2} \right] \right)$$

appartient à la classe $\Omega_n(it, 0)$ et admet certaines propriétés extrémales qui sont détaillées au théorème suivant.

Théorème 4. Soit $\Phi_n \in \Omega_n$.

a. Pour $x \in \mathbb{R}$ tel que $\cosh^{-1} \frac{t}{2} \left| \cos \frac{x}{2} \right| \geq \cos(\pi/2n)$, on a

$$\Phi_n(x) \leq \frac{1}{2} \left\{ 1 - T_{2n} \left[\cosh^{-1} \frac{t}{2} \cos \frac{x}{2} \right] \right\} = \Theta_n(x). \quad (28)$$

Dans le cas où $t \neq 0$, l'égalité pour un tel x implique qu'il y a égalité pour tous les x . Par contre, si $t = 0$ et s'il y a égalité pour un certain $x \neq 2\nu\pi$, $\nu \in \mathbb{Z}$, alors l'égalité tient pour tous les x .

b. Pour x tel que $\cosh^{-1} \frac{t}{2} \left| \cos \frac{x}{2} \right| < \cos(\pi/2n)$, il existe une infinité de polynômes $\Phi_n \in \Omega_n$ tels que $\Phi_n(x) = 1$.

Démonstration. Observons que la condition $\Phi_n \in \Omega_n$ est équivalente à $1 - 2\Phi_n \in \Pi_n(it, 1)$. Ainsi, pour t non nul, la preuve découle du Théorème 1. Si $t = 0$, le point $x = 0$ est alors un minimum et donc un zéro de multiplicité supérieure à deux. Le résultat suit alors de la section 3.2. \square

Considérons un instant un polynôme trigonométrique $\Phi_n \neq 0$ de degré au plus $n \geq 2$ dont les coefficients sont dans \mathbb{R} et ayant les propriétés que $|\Phi_n(x)| \geq 0$ pour $x \in \mathbb{R}$ et que $\Phi_n(it) = 0$. On peut supposer sans perte de généralité que le maximum d'un tel polynôme sur les réels soit 1. Afin que x_0 soit un point de maximum, le Théorème 4 implique alors qu'il doit satisfaire la condition $\left| \cos \frac{x_0}{2} \right| \leq \cosh \frac{t}{2} \cos(\pi/2n)$ et que cette condition est aussi suffisante.

4 Conditions sur les racines de polynômes trigonométriques

Cette section a pour objectif de mettre en lumière les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un point du plan complexe puisse être un zéro d'un certain type de polynômes trigonométriques. Nous commençons par la présentation une nouvelle classe de polynômes trigonométriques.

Définition 6. Soit $n \geq 2$ un entier. On note Γ_n la classe des polynômes trigonométriques $\Phi_n \neq 0$ de degré au plus n , aux coefficients dans \mathbb{C} et tels que $|\Phi_n(x)|$ atteigne son maximum sur l'axe réel en $x = 0$.

On cherche à déterminer, pour différentes sous-classes de Γ_n , les conditions nécessaires et suffisantes pour que $u + iv$, u et v réels, soit la racine d'au moins un polynôme de la classe.

Plusieurs sous-classes sont envisageables. En voici quelques unes et les conditions nécessaires et suffisantes associées.

- 4.a. Pour la sous-classe composée des $\Phi_n \in \Gamma_n$ tels que $\Phi_n(x) \geq 0$ si $x \in \mathbb{R}$ la condition est alors

$$\left| \cos \frac{u}{2} \right| \leq \cosh \frac{v}{2} \cos(\pi/2n).$$

- 4.b. Soit la sous-classe composée des $\Phi_n \in \Gamma_n$ tels que la seule condition est d'être un polynôme trigonométrique aux coefficients réels. La condition dans ce cas est

$$\left| \cos \frac{u}{2} \right| \cos(\pi/4n) \leq \cosh \frac{v}{2} \cos(\pi/2n)$$

si $v \neq 0$. Si $v = 0$ et le point $x = u$ est un zéro de $\Phi_n(x)$ de multiplicité paire, la condition reste la même. Sinon, elle devient $\cos u \leq \cos(\pi/2n)$.

4.c. Pour le cas général où $\Phi_n \in \Gamma_n$ est un polynôme aux coefficients dans \mathbb{C} , la condition est alors

$$\left| \cos \frac{u}{2} \right| \leq \cosh \frac{v}{2} \cos(\pi/4n).$$

Démonstration. Afin de démontrer la partie 4.a, on effectue la translation $\varphi_n(x) := \Phi_n(x - u)$ qui permet de se placer dans la situation où $t = v$, $\varphi_n(it) = 0$ et pour lequel le maximum sur \mathbb{R} de φ_n est atteint en $-u$. La conclusion provient directement de la discussion faisant suite au Théorème 4.

Pour la partie 4.b, on scinde le problème en deux cas. En premier lieu, on suppose $v \neq 0$ et on procède à la même translation qu'en 4.a. De plus, en posant $\alpha = \pi/2$ et en utilisant le Théorème 1, on obtient la première condition $\left| \cos \frac{u}{2} \right| \cos(\pi/4n) \leq \cosh \frac{v}{2} \cos(\pi/2n)$. Si $v = 0$ et que Φ_n possède un zéro de multiplicité paire en $x = u$, il suffit alors d'utiliser la même translation et par le Corollaire 1 de la section 3.2, on retrouve de nouveau la condition désirée. Sinon, la conclusion $\cos u \leq \cos(\pi/2n)$ est une conséquence du Corollaire 2 de la section 3.2.

Finalement, on s'intéresse au polynôme trigonométrique $\Phi_n \in \Gamma_n$ dont les coefficients sont dans \mathbb{C} et tel que $\Phi_n(u + iv) = 0$. On peut alors écrire $\Phi_n(\zeta) = K_n(e^{i\zeta})$ où l'on a $K_n(z) = \sum_{\nu=-n}^n \mu_\nu z^\nu$ et pour lequel les coefficients μ_ν sont dans \mathbb{C} . On définit ainsi le polynôme trigonométrique de degré $2n$

$$\Lambda_{2n}(z) := K_n(e^{iz}) \overline{K_n}(e^{-iz}),$$

où $\overline{K_n}(z)$ est le polynôme dont les coefficients sont les conjugués de ceux de $K_n(z)$. Dès lors, Λ_{2n} est non-négatif sur l'axe réel et possède un maximum en $x = 0$. Remarquons aussi que $\Lambda_{2n}(u + iv) = 0$. Le polynôme trigonométrique Λ_{2n} appartient donc à la sous-classe de la partie a). En remplaçant n par $2n$ on retrouve effectivement la condition $\left| \cos \frac{u}{2} \right| \leq \cosh \frac{v}{2} \cos(\pi/4n)$.

De manière réciproque, supposons que le point $u + iv$ respecte la condition $\left| \cos \frac{u}{2} \right| \leq \cosh \frac{v}{2} \cos(\pi/4n)$. La partie 4.a, assure alors l'existence d'un polynôme trigonométrique $\Lambda_{2n}(z)$ dans Γ_{2n} tel que $\Lambda_{2n}(u + iv) = 0$. De plus, le lemme de Fejér - M. Riesz⁹ à propos des polynômes trigonométriques non-négatifs affirme qu'il existe un polynôme trigonométrique t_n de degré au plus n tel que pour x réel on ait $\Lambda_{2n}(x) = |t_n(e^{ix})|^2$. Ainsi, t_n est un élément de Γ_n et $t_n(u + iv) = 0$. Cela complète la preuve. \square

⁹Cf. lemme de Fejér-Riesz à la section *Annexe*.

5 Position des racines et des maxima de polynômes

Cette section s'articule autour du Théorème 5 qui contient la réponse au problème de Turán cité dans l'introduction. Aussi, la solution de ce dernier est exprimée en fonction d'une certaine courbe c_n décrite dans la première sous-section. Les deux suivantes sont dédiées à l'énoncé du théorème ainsi qu'à sa démonstration.

5.1 À propos de la courbe c_n

La courbe c_n décrite par l'équation en coordonnées polaires ($z = \rho e^{i\varphi}$)

$$\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1}{2}(\rho^{\frac{1}{2}} + \rho^{-\frac{1}{2}}) \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right), \quad -\pi/n \leq \varphi \leq \pi/n \quad (29)$$

croise le cercle unité aux points $e^{\pm i\pi/n}$ et l'axe des abscisses en

$$a_1 = \frac{1 - \sin(\pi/2n)}{1 + \sin(\pi/2n)} \quad \text{et} \quad a_2 = \frac{1 + \sin(\pi/2n)}{1 - \sin(\pi/2n)}.$$

Pour tout angle φ tel que $-\pi/n \leq \varphi \leq \pi/n$, il existe une unique valeur de $\rho \geq 1$ satisfaisant l'équation (29). Conséquemment, lorsque φ croît de $-\pi/n$ à π/n , le point $z = e^{i\varphi}$ décrit un chemin dans \mathbb{C} dont le point initial est $e^{-i\pi/n}$ et le point final $e^{i\pi/n}$. De même, lorsque φ décroît de π/n à $-\pi/n$, il existe une seule valeur de $\rho \leq 1$ satisfaisant l'équation (29). Ces points décrivent un second chemin débutant en $e^{i\pi/n}$ et finissant en $e^{-i\pi/n}$. Ainsi, l'ensemble des points $z = e^{i\varphi}$

solutions de l'équation (29) se trouvent sur une courbe de Jordan¹⁰ que l'on a notée c_n .

Selon le théorème de Jordan, la courbe c_n est la frontière de deux composantes connexes ayant \mathbb{C} pour réunion. L'une de deux composantes est bornée. Elle est dite "inside" de c_n et on la note c_n^i . L'autre, non bornée, est appelée "outside" de c_n et notée c_n^e . Mentionnons, que c'est c_n^i qui est la région trouvée par Hyltén-Cavallius comme solution au problème de Turán.

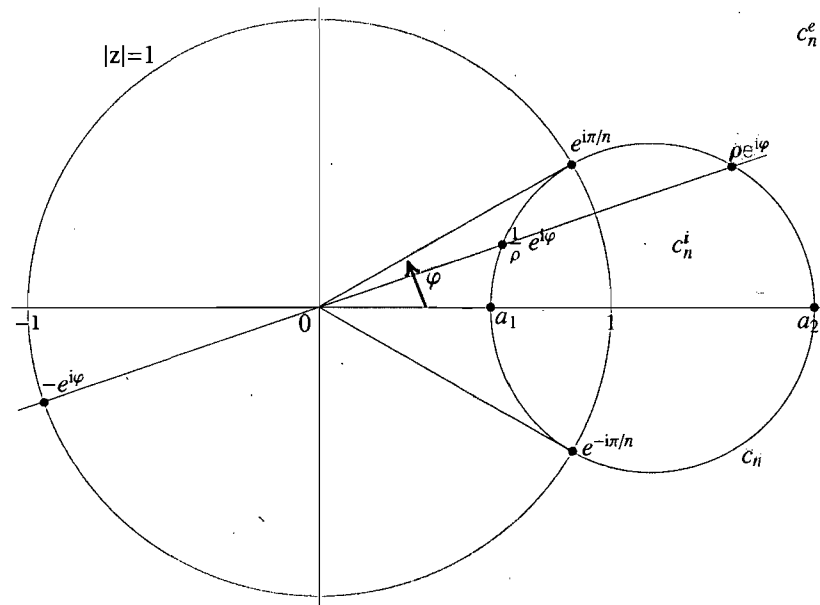


FIG. 12 - Graphique de c_n pour $n = 6$.

On exprime maintenant c_n dans un repère muni de coordonnées polaires ($z = re^{i\theta}$) mais dont l'origine est située en $z = 1$. On a donc les relations $\rho \cos \varphi - 1 = r \cos \theta$ et $\rho \sin \varphi = r \sin \theta$ duquelles découlent les suivantes :

$$\rho^2 = r^2 + 2r \cos \theta + 1 \quad \text{et} \quad r^2 = \rho^2 - 2\rho \cos \varphi + 1. \quad (30)$$

Par (29), on a

$$2\rho \cos \varphi = 2\rho \left(2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} - 1 \right) = (\rho^2 + 2\rho + 1) \cos^2 \frac{\pi}{2n} - 2\rho, \quad (31)$$

¹⁰Cf. le livre de Z. Nehari, *Introduction to complex analysis* [7].

ce qui implique que

$$\rho^2 - 2\rho \cos \varphi + 1 = \rho^2 + 2\rho + 1 - (\rho^2 + 2\rho + 1) \cos^2 \frac{\pi}{2n} = (\rho^2 + 2\rho + 1) \sin^2 \frac{\pi}{2n}$$

et par la deuxième relation de (30), on a

$$r^2 = (\rho^2 + 2\rho + 1) \sin^2 \left(\frac{\pi}{2n} \right). \quad (32)$$

En utilisant la première relation de (30), nous obtenons

$$r^2 = (r^2 + 2r \cos \theta + 1 + 2\rho + 1) \sin^2 \left(\frac{\pi}{2n} \right)$$

et alors

$$r^2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{2n} \right) = r^2 - r^2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{2n} \right) = (2 + 2\rho + 2r \cos \theta) \sin^2 \left(\frac{\pi}{2n} \right).$$

Donc

$$r^2 = 2r \cos \theta \tan^2 \left(\frac{\pi}{2n} \right) + (2 + 2\rho) \tan^2 \left(\frac{\pi}{2n} \right)$$

puis par (30), on obtient

$$r = 2 \cos \theta \tan^2 \left(\frac{\pi}{2n} \right) + \frac{1}{r} \left(\tan^2 \left(\frac{\pi}{2n} \right) \frac{2r}{\sin \left(\frac{\pi}{2n} \right)} \right)$$

d'où finalement

$$r = 2 \tan^2 \left(\frac{\pi}{2n} \right) \cos \theta + 2 \sin \left(\frac{\pi}{2n} \right) \cos^{-2} \left(\frac{\pi}{2n} \right). \quad (33)$$

Ceci montre que la courbe c_n est un limaçon de Pascal bien qu'à première vue cela puisse paraître être un cercle.

5.2 Théorème 5 : solution au problème de Turán

Le Théorème 5 indique de quelle manière l'intérieur de la courbe c_n est la réponse au problème de Turán. Afin d'exprimer cette solution en terme de classe de polynômes, on insère une dernière définition, celle de la classe $C_n(z_0)$.

Définition 7. Soit $z_0 \neq 1$ dans \mathbb{C} et soit $C_n(z_0)$ la classe des polynômes $\sum_{k=0}^n a_k z^k$ de degré au plus n à coefficients dans \mathbb{C} s'annulant en z_0 et tels que $\max_{|z|=1} |P_n(z)| = |P_n(1)|$.

On énonce maintenant le théorème.

Théorème 5. Soit z_0 dans \mathbb{C} .

- (i) Si z_0 est un point à l'intérieur de c_n , alors $C_n(z_0)$ est vide.
- (ii) Si $z_0 = \rho e^{i\varphi}$ est un point sur c_n , alors $C_n(z_0)$ contient tous les polynômes de la forme

$$c \sum_{1 \leq 2\nu+1 \leq n} \binom{n}{2\nu+1} (ze^{-i\varphi} + 1)^{n-2\nu-1} (ze^{-i\varphi} - \rho)^{\nu+1} \left(ze^{-i\varphi} - \frac{1}{\rho} \right)^\nu,$$

où $c \neq 0$ est une constante arbitraire dans \mathbb{C} .

- (iii) Si z_0 est un point à l'extérieur de c_n , il existe alors une infinité de polynômes $P_n \in C_n(z_0)$ n'étant pas multiples les uns des autres.

5.3 Preuve du Théorème 5

On s'intéresse en premier lieu au cas $z_0 = 0$. Ce point étant à l'extérieur de c_n , il s'agit de montrer qu'il existe une infinité de polynômes dans la classe $C_n(z_0)$. On choisit donc arbitrairement un polynôme $P_{n-1}(z)$ de degré $n-1$ tel que $|P_{n-1}|$ atteint son maximum sur le cercle unité en $z = 1$. Ainsi, le polynôme de degré n , $zP_{n-1}(z)$, appartient à la classe $C_n(z_0)$. En variant le choix du P_{n-1} (il en existe une infinité) on obtient le résultat désiré.

On suppose désormais que z_0 est non nul et qu'il existe $P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ un polynôme dans $C_n(z_0)$ et notons $z_0 = \rho e^{i\varphi}$. Soit $\overline{P}_n(z) := \overline{P}_n(\overline{z})$ le polynôme dont les coefficients sont les conjugués de ceux de $P_n(z)$. En posant, $z = e^{i\theta}$, θ réel, on a $\overline{P}_n(e^{i\theta}) = \overline{P}_n(e^{-i\theta})$.

On définit le polynôme trigonométrique Φ_n , de degré n , par

$$\Phi_n(\zeta) := P_n(e^{i\zeta}) \overline{P}_n(e^{-i\zeta}),$$

ζ étant une variable complexe. Pour $\zeta = \theta$ réel, on obtient

$$\Phi_n(\theta) = P_n(e^{i\theta}) \overline{P}_n(e^{-i\theta}) = |P_n(e^{i\theta})|^2.$$

On en déduit que, pour θ réel, $\Phi_n(\theta)$ est un polynôme trigonométrique non négatif. De plus, par hypothèse, on a : $P_n(z_0) = P_n(\rho e^{i\varphi}) = 0$, ce qui implique

$$\Phi_n(\varphi - i \log \rho) = P_n(e^{i(\varphi - i \log \rho)}) \overline{P}_n(e^{-i(\varphi - i \log \rho)})$$

$$\begin{aligned}
&= P_n(e^{\log \rho + i\varphi}) \overline{P_n}(e^{-\log \rho - i\varphi}) \\
&= P_n(\rho e^{i\varphi}) \overline{P_n}(\rho^{-1} e^{-i\varphi}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Puisque $\max_{|z|=1} |P_n(z)|$ est atteint en 1, alors $\max_{|z|=1} |P_n(z)|^2$ aura aussi son maximum en 1. D'où : $|P_n(e^{i\theta})|^2$ est maximal lorsque $\theta = 0$.

Ainsi, $\Phi_n(\theta)$ s'annule en $\varphi - i \log \rho$ et atteint son maximum en 0. Par le résultat obtenu en 4.a. , on doit donc avoir :

$$|\cos \frac{\varphi}{2}| \leq \cosh(-\frac{1}{2} \log \rho) \cos(\frac{\pi}{2n})$$

et donc

$$\cos \frac{\varphi}{2} \leq \frac{1}{2}(\rho^{1/2} + \rho^{-1/2}) \cos(\frac{\pi}{2n})$$

ce qui signifie que z_0 est soit à l'extérieur de c_n , soit sur sa frontière.

Ceci démontre la partie 5(i) du théorème.

Afin de prouver la partie 5(ii), on choisit cette fois-ci $z_0 = \rho e^{i\varphi}$ sur la courbe c_n . Pour $P_n \in C_n(z_0)$, on définit ensuite le polynôme $P_n^*(z) := P_n(z e^{i\varphi})$ qui est la rotation par un angle de $-\varphi$ de P_n . On a alors :

- $P_n^*(\rho) = P_n(\rho e^{i\varphi}) = 0$,
- $\max_{|z|=1} |P_n^*(z)| = \max_{|z|=1} |P_n(z e^{i\varphi})|$ est atteint lorsque $z e^{i\varphi} = 1$, i.e lorsque $z = e^{-i\varphi}$. On suppose, sans perte de généralité, que ce maximum vaut 1.

De manière similaire à ce qui a été fait au préalable, on peut définir le polynôme trigonométrique à coefficients réels

$$\Phi_n^*(\zeta) := P_n^*(e^{i\zeta}) \overline{P_n^*}(e^{-i\zeta}),$$

où les coefficients de $\overline{P_n^*}$ sont les conjugués de ceux de P_n^* . Ainsi, on obtient

$$\Phi_n^*(-i \log \rho) = P_n^*(\rho) \overline{P_n^*}(\rho^{-1}) = P_n(\rho e^{i\varphi}) \overline{P_n}(\rho^{-1}) = 0.$$

Nous affirmons aussi que $|\Phi_n^*(\theta)|$ atteint son maximum sur les réels en $-\varphi$. En effet, cela est dû au fait que $\Phi_n^*(\theta) = |P_n^*(e^{i\theta})|^2$, pour θ réel, et que le maximum sur $|z| = 1$ de $|P_n^*|$ vaut 1 en $e^{-i\varphi}$. D'où : $0 \leq \Phi_n^*(\theta) \leq \Phi_n^*(-\varphi) = 1$. Ainsi $\Phi_n^* \in \Omega_n(-i \log \rho, 0)$ où $\Omega_n(it, 0)$ est la classe des polynômes trigonométriques de degré au plus n qui sont positifs et bornés par 1 sur les réels et ayant un zéro en

it. Grâce au Théorème 4, on peut déterminer le polynôme extrémal de la classe $\Omega_n(-i \log \rho, 0)$ qui est

$$\Theta_n(x) := \frac{1}{2} \left(1 - T_{2n} \left[2(\rho^{1/2} + \rho^{-1/2})^{-1} \cos \frac{x}{2} \right] \right). \quad (34)$$

En considérant $\cos(\frac{x}{2}) = \frac{1}{2}(\rho^{\frac{1}{2}} + \rho^{-\frac{1}{2}}) \cos(\frac{\pi}{2n})$, la définition de la courbe c_n , et en évaluant au point $-\varphi$, on obtient la relation

$$\Theta_n(-\varphi) = \frac{1}{2} (1 - T_{2n}[\cos(\pi/2n)]) = 1.$$

L'énoncé du Théorème 4 sur le cas de l'égalité de (28) affirme de plus que l'égalité en un point avec Θ_n entraîne l'égalité partout. Puisque on a déjà $\Phi_n(-\varphi) = 1 = \Theta_n(-\varphi)$ et que le cas $z_0 = 1$ n'est pas possible, on en déduit la relation

$$\Phi_n^*(\theta) = |P_n^*(e^{i\theta})|^2 = \frac{1}{2} (1 - T_{2n} [2(\rho^{1/2} + \rho^{-1/2})^{-1} \cos \frac{\theta}{2}]) = \Theta_n(\theta), \quad (35)$$

pour $\theta \in \mathbb{R}$. Ainsi, quand θ varie de 0 à π , l'argument $2(\rho^{\frac{1}{2}} + \rho^{-\frac{1}{2}})^{-1} \cos \frac{1}{2}\theta$ décroît de

$$2(\rho^{\frac{1}{2}} + \rho^{-\frac{1}{2}})^{-1} = \cos^{-1} \frac{1}{2} \varphi \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) > \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

à 0. Conséquemment, $\Theta_n(\theta)$ possède $n - 1$ zéros doubles dans l'intervalle $-\pi \leq \theta \leq \pi$ (doubles car $\Theta_n(\theta) = |P_n^*(e^{i\theta})|^2$). Il en découle que $P_n(z)$ a, en fait, $n - 1$ zéros sur le cercle unité, tous distincts et différents de 1. La $n^{\text{ème}}$ racine étant $z = \rho e^{i\varphi}$. $P_n(z)$ est ainsi entièrement défini à une constante non nulle près.

Pour obtenir une expression explicite du polynôme P_n^* , on utilise l'identité

$$\frac{1}{2} \left(1 - T_{2n} \left[\frac{\zeta + \zeta^{-1}}{2} \right] \right) = \left(\frac{\zeta^n - \zeta^{-n}}{2i} \right)^2 \quad (36)$$

et, en vue de (35), on résout l'équation

$$\frac{1}{2} (\zeta + \zeta^{-1}) = 2(\rho^{1/2} + \rho^{-1/2})^{-1} \cos \frac{\theta}{2}.$$

Débutons par la démonstration de l'égalité (36).

Considérons en premier lieu le cas restreint aux points sur le cercle $|z| = 1$, i.e.

$\zeta = e^{i\theta}$. On a alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(1 - T_{2n} \left[\frac{\zeta + \zeta^{-1}}{2} \right] \right) &= \frac{1}{2} \left(1 - T_{2n} \left[\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right] \right) \\ &= \frac{1}{2} (1 - T_{2n}(\cos \theta)) \\ &= \frac{1}{2} (1 - \cos(2n\theta)) \\ &= \left(\frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i} \right)^2 \\ &= \left(\frac{\zeta^n - \zeta^{-n}}{2i} \right)^2. \end{aligned}$$

Ainsi, le polynôme $\frac{1}{2}\zeta^{2n} \left(1 - T_{2n} \left(\frac{\zeta + \zeta^{-1}}{2} \right) \right) - \zeta^{2n} \left(\frac{\zeta^n - \zeta^{-n}}{2i} \right)^2$ est identiquement nul sur le cercle unité. Il s'en suit qu'il doit être nul sur tout \mathbb{C} .

Poursuivons en résolvant l'équation (36) en fonction de ζ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\zeta + \zeta^{-1}) &= 2(\rho^{1/2} + \rho^{-1/2})^{-1} \cos \frac{\theta}{2} \\ \Rightarrow \zeta^2 - (4(\rho^{1/2} + \rho^{-1/2})^{-1} \cos \frac{\theta}{2})\zeta + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Les deux solutions sont donc de la forme :

$$\begin{aligned} \zeta_{\pm} &= \frac{4(\rho^{1/2} + \rho^{-1/2})^{-1} \cos \frac{\theta}{2} \pm \sqrt{16(\rho^{1/2} + \rho^{-1/2})^{-2} \cos^2 \frac{\theta}{2} - 4}}{2} \\ &= 2r \cos \frac{\theta}{2} \pm \sqrt{4r^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1} \end{aligned}$$

où $r := (\rho^{1/2} + \rho^{-1/2})^{-1}$.

Or,

$$1 = \frac{\rho + 2 + \rho^{-1}}{\rho + 2 + \rho^{-1}} = \frac{2}{(\rho^{1/2} + \rho^{-1/2})^2} + \frac{\rho + \rho^{-1}}{(\rho^{1/2} + \rho^{-1/2})^2} = 2r^2 + r^2(\rho + \rho^{-1})$$

et donc :

$$\begin{aligned} \zeta_{\pm} &= 2r \cos \frac{\theta}{2} \pm \sqrt{4r^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 2r^2 - r^2(\rho + \rho^{-1})} \\ &= 2r \cos \frac{\theta}{2} \pm ri \sqrt{(\rho + \rho^{-1}) - 2 \cos \theta} \\ &= r \left(2 \cos \frac{\theta}{2} \pm i \sqrt{(\rho + \rho^{-1}) - 2 \cos \theta} \right) \end{aligned}$$

Par ailleurs, on remarque que $|\zeta_+| = |\zeta_-| = 1$ et que $\zeta_+^{-1} = \overline{\zeta_+} = \zeta_-$.

Afin d'obtenir l'expression explicite de $\Theta_n(\theta)$, on insère maintenant ζ_+ (ou de manière équivalente ζ_-) dans le membre de droite de l'égalité (36). D'où :

$$\left(\frac{\zeta_+^n - \zeta_+^{-n}}{2i}\right)^2 = \frac{(\zeta_-^n - \zeta_+^{-n})^2}{-4}$$

Remplaçons ζ_+ et ζ_- par leur valeur respective :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\zeta_+^n - \zeta_+^{-n}}{2i}\right)^2 = \\ &= -\frac{r^{2n}}{4} \left[\left(2 \cos \frac{\theta}{2} + i\sqrt{(\rho + \rho^{-1}) - 2 \cos \theta}\right)^n - \left(2 \cos \frac{\theta}{2} - i\sqrt{(\rho + \rho^{-1}) - 2 \cos \theta}\right)^n \right]^2 \\ &= -\frac{r^{2n}}{4} \left[\sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} (2 \cos \frac{\theta}{2})^{n-\nu} \left(i\sqrt{(\rho + \rho^{-1}) - 2 \cos \theta}\right)^\nu \right. \\ & \quad \left. - \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} (2 \cos \frac{\theta}{2})^{n-\nu} \left(-i\sqrt{(\rho + \rho^{-1}) - 2 \cos \theta}\right)^\nu \right]^2 \\ &= -\frac{r^{2n}}{4} \left[\sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} (2 \cos \frac{\theta}{2})^{n-\nu} ((\rho + \rho^{-1}) - 2 \cos \theta)^{\frac{\nu}{2}} (i^\nu - (-i)^\nu) \right]^2 \\ &= -r^{2n} \left[\sum_{1 \leq 2\nu+1 \leq n} i^{2\nu+1} \binom{n}{2\nu+1} (2 \cos \frac{\theta}{2})^{n-2\nu-1} ((\rho + \rho^{-1}) - 2 \cos \theta)^{\nu+\frac{1}{2}} \right]^2 \\ &= r^{2n} ((\rho + \rho^{-1}) - 2 \cos \theta) \\ & \quad \times \left[\sum_{1 \leq 2\nu+1 \leq n} (-1)^\nu \binom{n}{2\nu+1} (2 \cos \frac{\theta}{2})^{n-2\nu-1} ((\rho + \rho^{-1}) - 2 \cos \theta)^\nu \right]^2 \\ &= r^{2n} (-e^{i\theta} + \rho^{-1} + \rho - e^{-i\theta}) \\ & \quad \times \left[\sum_{1 \leq 2\nu+1 \leq n} (-1)^\nu \binom{n}{2\nu+1} (e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}})^{n-2\nu-1} (-e^{i\theta} + \rho^{-1} + \rho - e^{-i\theta})^\nu \right]^2 \\ &= -r^{2n} (e^{i\frac{\theta}{2}} - \rho e^{-i\frac{\theta}{2}})(e^{i\frac{\theta}{2}} - \rho^{-1} e^{-i\frac{\theta}{2}}) \left[\sum_{1 \leq 2\nu+1 \leq n} (-1)^\nu \binom{n}{2\nu+1} (e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}})^{n-2\nu-1} \right. \\ & \quad \left. \times \left(-(e^{i\frac{\theta}{2}} - \rho e^{-i\frac{\theta}{2}})(e^{i\frac{\theta}{2}} - \rho^{-1} e^{-i\frac{\theta}{2}}) \right)^\nu \right]^2 \\ &= -e^{in\theta} r^{2n} (e^{i\theta} - \rho)(e^{i\theta} - \rho^{-1}) \\ & \quad \times \left[\sum_{1 \leq 2\nu+1 \leq n} \binom{n}{2\nu+1} (e^{i\theta} + 1)^{n-2\nu-1} (e^{i\theta} - \rho)^\nu (e^{i\theta} - \rho^{-1})^\nu \right]^2 \end{aligned}$$

Cette dernière égalité ne contenant aucune ambiguïté, on peut alors formellement écrire :

$$\Theta_n(\theta) = -e^{-in\theta} (\rho^{1/2} + \rho^{-1/2})^{-2n} (e^{i\theta} - \rho)(e^{i\theta} - 1/\rho) \\ \times \left(\sum_{1 \leq 2\nu+1 \leq n} \binom{n}{2\nu+1} (e^{i\theta} + 1)^{n-2\nu-1} (e^{i\theta} - \rho)^\nu (e^{i\theta} - 1/\rho)^\nu \right)^2$$

Rappelons que $\Theta_n(\theta)$ est non-négatif selon sa définition¹¹. Ainsi, on a

$$\Theta_n(\theta) = |\Theta_n(\theta)| \\ = (\rho^{1/2} + \rho^{-1/2})^{-2n} |(e^{i\theta} - \rho)(e^{i\theta} - 1/\rho)| \\ \times \left| \sum_{1 \leq 2\nu+1 \leq n} \binom{n}{2\nu+1} (e^{i\theta} + 1)^{n-2\nu-1} (e^{i\theta} - \rho)^\nu (e^{i\theta} - 1/\rho)^\nu \right|^2 \quad (37)$$

Considérons le polynôme

$$R_n(z) := \rho^{-1/2} (\rho^{1/2} + \rho^{-1/2})^{-n} \sum_{1 \leq 2\nu+1 \leq n} \binom{n}{2\nu+1} (z+1)^{n-2\nu-1} (z-\rho)^{\nu+1} (z-1/\rho)^\nu.$$

Il s'ensuit que $R_n(\rho) = 0$. On a de plus

$$R_n^2(z) = \rho^{-1} (\rho^{1/2} + \rho^{-1/2})^{-2n} \\ \times \left(\sum_{1 \leq 2\nu+1 \leq n} \binom{n}{2\nu+1} (z+1)^{n-2\nu-1} (z-\rho)^{\nu+1} (z-1/\rho)^\nu \right)^2 \\ = \rho^{-1} (\rho^{1/2} + \rho^{-1/2})^{-2n} (z-\rho)^2 \\ \times \left(\sum_{1 \leq 2\nu+1 \leq n} \binom{n}{2\nu+1} (z+1)^{n-2\nu-1} (z-\rho)^\nu (z-1/\rho)^\nu \right)^2$$

et donc, pour tout θ réel, on a par (37) :

$$|R_n(e^{i\theta})|^2 = \rho^{-1} |(\rho^{1/2} + \rho^{-1/2})^{-2n} (e^{i\theta} - \rho)^2 \\ \times \left\{ \sum_{1 \leq 2\nu+1 \leq n} \binom{n}{2\nu+1} (e^{i\theta} + 1)^{n-2\nu-1} (e^{i\theta} - \rho)^\nu (e^{i\theta} - 1/\rho)^\nu \right\}^2|$$

¹¹Cf. égalité (34) p. 42.

$$\begin{aligned}
&= \rho^{-1} \left| \frac{e^{i\theta} - \rho}{e^{i\theta} - 1/\rho} (\rho^{1/2} + \rho^{-1/2})^{-2n} (e^{i\theta} - \rho)(e^{i\theta} - 1/\rho) \right. \\
&\quad \left. \times \left\{ \sum_{1 \leq 2\nu+1 \leq n} \binom{n}{2\nu+1} (e^{i\theta} + 1)^{n-2\nu-1} (e^{i\theta} - \rho)^\nu (e^{i\theta} - 1/\rho)^\nu \right\}^2 \right| \\
&= \rho^{-1} \left| \frac{e^{i\theta} - \rho}{e^{i\theta} - \rho^{-1}} \right| \cdot |\Theta_n(\theta)| \\
&= \rho^{-1} |\Theta_n(\theta)| \left| \frac{\cos \theta - \rho + i \sin \theta}{\cos \theta - \rho^{-1} + i \sin \theta} \right| \\
&= \rho^{-1} \Theta_n(\theta) \sqrt{\frac{(\cos \theta - \rho)^2 + \sin^2 \theta}{(\cos \theta - \rho^{-1})^2 + \sin^2 \theta}} \\
&= \rho^{-1} \Theta_n(\theta) \sqrt{\frac{\rho^2(\rho^{-2} - 2\rho^{-1} \cos \theta + 1)}{1 - 2\rho^{-1} \cos \theta + \rho^{-2}}} \\
&= \Theta_n(\theta)
\end{aligned}$$

Ainsi, les polynômes $P_n^*(z)$ et $R_n(z)$ sont égaux sur tout le cercle unité. Ils doivent donc aussi l'être partout dans \mathbb{C} . Finalement, une rotation d'angle φ permet de réobtenir notre polynôme initial $P_n(z)$.

Il reste à démontrer la partie 5(iii) pour compléter la preuve. Il s'agit du cas pour lequel $\cos(\frac{\varphi}{2}) < \frac{1}{2}(\rho^{\frac{1}{2}} + \rho^{-\frac{1}{2}}) \cos(\frac{\pi}{2n})$. Il suit du Théorème 4 qu'il existe une infinité de polynômes $\Phi_n \in \Omega_n(-i \log \rho, 0)$ qui prennent la valeur 1 au point $-\varphi$. Par ailleurs, le lemme de Fejér - M. Riesz¹² garantit l'existence d'un polynôme P_n^* tel que $\Phi_n(\theta) = |P_n^*(e^{i\theta})|^2$ pour tout θ réel et $P_n^*(\rho) = \Phi_n(-i \log \rho) = 0$ (car on a $\Phi_n(\zeta) = P_n^*(e^{i\zeta}) \overline{P_n^*(e^{-i\zeta})}$). On en déduit que $P_n^*(e^{-i\varphi}) = 1$ (ou -1 mais alors on n'a qu'à prendre $-P_n^*$) et que $0 \leq |P_n^*(e^{i\theta})| \leq 1$, pour θ réel. Conséquemment, P_n^* atteint, son maximum sur le cercle unité en $-\varphi$.

En définissant $P_n(z) := P_n^*(ze^{-i\varphi})$, on obtient bien $P_n \in C_n(z_0)$, ce qui complète la preuve.

¹²Cf. lemme de Fejér-Riesz à la section *Annexe*.

6 Conclusion

6.1 Récapitulation et contribution personnelle

Rappelons le problème de Turán.

“Étant donné les polynômes de degré n dont la valeur absolue atteint son maximum sur le cercle unité en $z = 1$, où se situent les zéros les plus près du point $z = 1$ pour de tels polynômes?” Turán posa premièrement le problème en terme de points sur le cercle $|z| = 1$ et montra que, dans ce cas, aucun polynôme ne peut avoir une racine sur le cercle unité avant les points $z = e^{\pm i\pi/n}$. En utilisant le théorème fondamental du calcul ainsi que l’inégalité de Bernstein, je raffine cette conclusion en prouvant que ces polynômes ne peuvent avoir de zéros dans tout disque centré en $z = 1$ et de rayon inférieur à $2^{1/n} - 1$. Cependant, cette technique n’est pas totalement satisfaisante et ne permet pas d’améliorations significatives. C’est pourquoi j’ai choisi d’étudier l’article “*Some extremal problems for trigonometrical and complex polynomials*” d’Hyltén-Cavallius dans lequel il développe une nouvelle méthode qui généralise le problème de Turán et en donne une réponse complète.

Le présent mémoire fait donc état de cet article et s’ouvre par une section sur les polynômes de Chebyshev de première espèce qui jouent un rôle central dans l’approche de Hyltén-Cavallius. L’analyse du comportement de ces polynômes que je fournis à la section 2, nommée *À propos des polynômes de Chebyshev*, dispense au lecteur les informations essentielles à la compréhension des idées reliées aux polynômes de Chebyshev et contenues dans le texte.

S’ensuit une seconde section articulée autour du Théorème 1. Celui-ci revêt une importance particulière puisque, outre ses conséquences au niveau des résultats

subséquents, sa preuve est basée sur une idée qui revient tout au long du mémoire. Un polynôme trigonométrique non identiquement nul et de degré au plus n possède exactement $2n$ zéros (avec la multiplicité) dans une période $a \leq x < a + 2\pi$. Ainsi, en comptant dans une période de longueur 2π le nombre de fois que se coupent les graphiques de deux polynômes trigonométriques de degré au plus n , on parvient à montrer certaines contradictions ou égalités si le nombre de zéros excède $2n$ dans la période. Cette technique est reprise à plusieurs endroits notamment pour la démonstration des deux corollaires du cas particulier $t = 0$ qui fait suite ainsi que pour la preuve du Théorème 3, la généralisation du Théorème 1. Précisons aussi que la deuxième partie de la preuve du Théorème 1 est mentionnée mais laissée non prouvée dans l'article d'Hyltén-Cavallius. Je remédie à cette absence à la sous-section 3.1.2 de ce manuscrit en donnant le raisonnement complet et en tenant compte de tous les cas de figure possibles. Il en est de même pour le cas $t = 0$ et la démonstration du Théorème 3. Ainsi, je donne une version étoffée des preuves et je m'applique à considérer toutes les subtilités que Hyltén-Cavallius ne traite pas mais qui ne sont pas triviales pour autant.

On enchaîne avec la section 4 qui traite des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un point du plan complexe puisse être le zéro d'un certain type de polynômes trigonométriques. Cela nous mène finalement à la dernière section axée autour du Théorème 5 dont l'énoncé contient la réponse au problème de Turán. La solution que donne Hyltén-Cavallius dépend d'une courbe particulière notée c_n . Je réserve donc quelques lignes à la description des propriétés principales de cette courbe et je développe par la suite l'intégralité des calculs permettant de trouver l'expression explicite des polynômes s'annulant en un point de c_n .

6.2 Autres considérations et ouverture

Le fameux chimiste russe D. Mendeleïev fut le premier à aborder le problème dont le but est de trouver le maximum sur $[-1, 1]$ de la dérivée d'un polynôme de degré deux sachant que le polynôme est lui même borné en valeur absolue par 1 sur cet intervalle. Puis, A. Markov étudia le sujet en le généralisant aux polynômes de degré $n \in \mathbb{N}$ et montra que

$$|P'(x)| \leq n^2, \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

si P est un polynôme de degré n tel que $|P(x)| \leq 1$ sur $[-1, 1]$. Plus tard, motivé par une question relative au degré de la meilleure approximation par des polynômes

trigonométriques, Bernstein s'intéressa à son tour au problème analogue pour les polynômes trigonométriques. Il démontra alors la solution suivante : soit t un polynôme trigonométrique de degré n , on a alors

$$\max_{x \in \mathbb{R}} |t'(x)| \leq n \max_{x \in \mathbb{R}} |t(x)|. \quad (38)$$

M. Riesz publia en 1914 un article¹³ contenant une autre preuve de (38) ainsi que deux autres résultats liés à l'inégalité. Ainsi, il prouva les deux propositions suivantes, premièrement :

Proposition (★). *Si g est un polynôme trigonométrique impaire de degré n tel que $|g(x)| \leq M$ lorsque $x \in \mathbb{R}$, alors*

$$|g(x)| \leq M |\sin nx| \quad (x \in \mathbb{R}),$$

si $g(x) \not\equiv \pm M \sin nx$.

Et dans un deuxième temps :

Proposition (★★). *Si t_n est un polynôme trigonométrique réel de degré n tel que $|t_n(x)| \leq M$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $f(0) = 0$, alors*

$$t_n(x) \geq M \cos nx \quad \left(-\frac{\pi}{n} \leq x \leq \frac{\pi}{n}\right),$$

à moins que $t_n(x) \equiv M \cos nx$.

En utilisant le travail de Fejér et de F. Riesz, effectué entre 1915 et 1916, D. Dryanov, M. Qazi et Q.I. Rahman¹⁴ prouvèrent que la Proposition (★★) implique la Proposition (★) et que les conditions de ces deux propositions peuvent être élargies à tout polynôme trigonométrique quelconque s'annulant à l'origine plutôt qu'aux polynômes trigonométriques impaires seulement. Finalement, il a été remarqué que l'inégalité de Bernstein découle de la Proposition (★). En effet, si t est un polynôme trigonométrique de degré n borné par M sur l'axe réel, il suffit alors d'appliquer la Proposition (★) à la fonction $g(x) := \frac{t(x) - t(-x)}{2}$ qui est un polynôme trigonométrique impair.

Au delà de la résolution du problème de Turán, l'article de Hyltén-Cavallius représente un intérêt majeur dans la mesure où il nous renseigne par rapport au

¹³Cf. *Eine trigonometrische Interpolationsformel und einige Ungleichungen für Polynome* [11], p. 362-364.

¹⁴Cf. l'article *Local behavior of polynomials* [3].

comportement local d'un polynôme. Or, en partant du comportement d'un polynôme en un point, il est possible d'en déduire l'inégalité de Bernstein et même d'avantage. Le travail de Hyltén-Cavallius englobe donc celui de Bernstein et Markov.

Par ailleurs, certaines interrogations émanent naturellement de l'article de Hyltén-Cavallius. Soit D un domaine compact du plan complexe, z_0 un point de sa frontière et B_n la classe de tous les polynômes réels sur l'axe réel, de degré au plus n et tels que $\max_{z \in D} |P(z)| = |P(z_0)|$. Reprenons le problème de Turán et dénotons par G la région qui inclut le point z_0 et pour laquelle aucun polynôme de la classe B_n ne s'annule. Comment sera affectée la région G si l'on choisit D comme étant une ellipse plutôt que le cercle unité? Qu'obtiendrons nous si D est l'intervalle $[-1, 1]$ ou un carré? Si z_0 est l'un des coins du carré ou un point d'intérieur de l'un des côtés?

Il est aussi légitime de se demander si les conclusions obtenues par Hyltén-Cavallius pour des polynômes sont généralisables à d'autres fonctions. Effectivement, dans un article intitulé "*Some inequalities for functions of exponential type*" [5] paru à la suite de celui de Hyltén-Cavallius, L. Hörmander démontre un résultat similaire au Théorème 5 mais pour les fonctions entières de type exponentiel bornées par 1 sur l'axe réel. Pour plus de clarté, donnons une définition précise ces fonctions.

Définition 8. Une fonction entière f est dite de type exponentiel τ si pour tout $\epsilon > 0$, il existe une constante $K > 0$ telle qu'on ait $|f(z)| < Ke^{(\tau+\epsilon)|z|}$, pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Les fonctions entières de type exponentiel englobe la classe des polynômes et des polynômes trigonométriques. De fait, il existe une relation forte entre les deux classes : une fonction entière f est de type exponentiel τ et de période 2π si, et seulement si, f est un polynôme trigonométrique de degré n où n est la partie entière de τ . Néanmoins, toute fonction entière de type exponentiel n'est pas un polynôme trigonométrique tel qu'en fait foi la fonction entière $\sin(\tau z)/z$ avec $\tau > 0$ qui est de type exponentiel τ et, de toute évidence, qui n'est pas un polynôme trigonométrique.

En outre, une inégalité similaire à celle de Bernstein est obtenue pour les

fonctions entières de type exponentiel. Elle prend la forme suivante :

$$|f'(x)| \leq \tau \|f\|, \quad x \in \mathbb{R} \quad (39)$$

où la norme infinie est définie par $\|f\| := \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$.

Cette inégalité généralisée a eu des répercussions dans différents domaines. En particulier, en analyse complexe, elle est utilisée pour démontrer la formule de quadrature suivante¹⁵

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{\pi}{\sigma} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\nu\pi}{\sigma}\right)$$

où f est une fonction entière de type exponentiel $\tau < 2\sigma$ avec $0 < \sigma < \infty$. Par ailleurs, J. Arzac [1] mentionne aussi l'emploi de l'inégalité généralisée de Bernstein pour des problèmes de transformées de Fourier ainsi que pour des problèmes physiques d'électricité, d'optique et d'ondes (antennes).

Ceci dit, bien que l'article de Hörmander représente une extension des résultats obtenus par Hyltén-Cavallius, certains aspects sont restés inexplorés. En effet, Dryanov, Qazi et Rahman [2] se sont intéressés au cas particulier $t = 0$ que Hörmander ne fait que mentionner. Ils ont ainsi montré que le théorème pour les fonctions entières de type exponentiel reste vrai lorsqu'on affaiblit certaines conditions. Par exemple, cela fonctionne toujours si l'on exige que la fonction soit bornée par M sur une infinité de points spécifiques et équidistribués sur l'axe réel plutôt que de demander que la fonction soit bornée partout sur \mathbb{R} . Il est alors possible de se questionner à savoir quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes sur la suite de points, sur sa distribution et de manière générale est-il possible de généraliser davantage ? Est-il par ailleurs envisageable d'étendre les résultats obtenus pour le cas $t = 0$ au cas $t \neq 0$? Voici quelques pistes de réflexions sur lesquelles pourra se pencher le lecteur curieux et désireux d'approfondir le sujet.

¹⁵Résultat obtenu par C. Frappier et Q.I. Rahman [4].

Annexe

L'annexe regroupe les démonstrations de certains résultats dont l'entendement n'est pas indispensable à la compréhension générale de ce mémoire.

Calculs complémentaires

Il s'agit ici de montrer l'égalité $\Psi_n''(0) = 0$ lorsque $a = \cos(\pi/2n)$.

Démonstration. On rappelle pour cela la définition de Ψ_n :

$$\Psi_n(x) = T_{2n}\left(a \cos \frac{x}{2}\right)$$

où T_{2n} est le polynôme de Chebyshev de première espèce et de degré $2n$. Des propriétés des polynômes de Chebyshev¹⁶, on a la relation $T_{2n}(\cos \theta) = \cos(2n\theta)$. En dérivant implicitement, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} T_{2n}(\cos \theta) &= \frac{d}{d\theta} \cos(2n\theta) \\ T'_{2n}(\cos \theta) \sin \theta &= 2n \sin(2n\theta) \end{aligned}$$

Ainsi, en posant $\theta = \pi/2n$, on trouve $T'_{2n}(\cos \pi/2n) = 0$.

On calcule maintenant de la même manière les deux premières dérivées de Ψ_n :

$$\begin{aligned} \Psi'_n(x) &= \frac{d}{dx} T_{2n}\left(a \cos \frac{x}{2}\right) \\ &= -\frac{a}{2} T'_{2n}\left(a \cos \frac{x}{2}\right) \sin \frac{x}{2} \end{aligned}$$

¹⁶Cf. l'égalité (8) de la section 2 À propos des polynômes de Chebyshev, p. 9 .

et ensuite

$$\begin{aligned}\Psi_n''(x) &= \frac{d}{dx} \left(-\frac{a}{2} T_{2n}'(a \cos \frac{x}{2}) \sin \frac{x}{2} \right) \\ &= \frac{a^2}{4} T_{2n}''(a \cos \frac{x}{2}) \sin^2 \frac{x}{2} - \frac{a}{4} T_{2n}'(a \cos \frac{x}{2}) \cos \frac{x}{2}.\end{aligned}\quad (40)$$

Finalement, en combinant le résultat $T_{2n}'(\cos \pi/2n) = 0$ avec le fait que $a = \cos(\pi/2n)$, il découle de (40) :

$$\Psi_n''(0) = -\frac{a}{4} T_{2n}'(a) = -\frac{a}{4} T_{2n}'(\cos \pi/2n) = 0,$$

ce qui complète la preuve. \square

Lemme de Fejér-Riesz

On s'intéresse maintenant au Lemme de Fejér - M. Riesz utile aux preuves de la section 4 et du Théorème 5.

Lemme (Fejér-Riesz). *Soit t_n un polynôme trigonométrique de degré n non négatif sur l'axe réel. Il existe alors un polynôme f de degré au plus n tel que*

$$t_n(x) = |f(e^{ix})|^2,$$

pour tout x réel.

Démonstration. Supposons que le polynôme trigonométrique $t_n(z) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikz}$ est strictement supérieur à zéro sur l'axe réel.

On définit P le polynôme de degré $2n$ par

$$P(z) = z^n \sum_{k=-n}^n c_k z^k = \sum_{k=0}^{2n} c_{k-n} z^k.$$

Il en découle l'égalité suivante :

$$t_n(z) = e^{-inz} P(e^{iz}). \quad (41)$$

Aussi, t_n étant réel sur l'axe réel, ses coefficients satisfont la relation $c_k = \overline{c_{-k}}$ et on a alors

$$\overline{P(1/\bar{z})} = \overline{\sum_{k=-n}^n c_k (1/\bar{z})^{n+k}} = \sum_{k=-n}^n \overline{c_k} \frac{1}{z^{n+k}} = \sum_{k=-n}^n c_{-k} z^{-n-k},$$

d'où

$$P(z) = z^{2n} \overline{P(1/\bar{z})}. \quad (42)$$

Notons que P n'a pas de zéro sur le cercle unité. En effet, si $|z_0| = 1$ et $P(z_0) = 0$, il existerait alors $x_0 \in [0, 2\pi)$ tel que $P(e^{ix_0}) = 0$. Or, par l'égalité (41), on aurait $0 = e^{-inx_0} P(e^{ix_0}) = t(x_0) > 0$, une contradiction. De plus, la relation (42) indique que si z^* est une racine de P , le point $1/\bar{z}^*$ en est aussi une de même multiplicité. Ainsi les zéros se divisent en deux parties égales : ceux à l'intérieur du cercle unité et ceux à l'extérieur.

Notons z_1, z_2, \dots, z_m les zéros de P à l'intérieur du cercle $|z| = 1$ et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ leur multiplicité respective. On a donc $\sum_{k=1}^m \alpha_k = n$.

On peut désormais considérer la décomposition suivante de P :

$$\begin{aligned} P(z) &= c \prod_{k=1}^m \left\{ (z - z_k)^{\alpha_k} \left(z - \frac{1}{\bar{z}_k} \right)^{\alpha_k} \right\} \\ &= c \prod_{k=1}^m \left\{ (z - z_k)^{\alpha_k} z^{\alpha_k} \left(1 - \frac{1}{z\bar{z}_k} \right)^{\alpha_k} \right\} \\ &= c z^n \prod_{k=1}^m \left\{ (z - z_k)^{\alpha_k} \left(-\frac{1}{\bar{z}_k} \right)^{\alpha_k} \left(\frac{1}{z} - \bar{z}_k \right)^{\alpha_k} \right\} \\ &= c (-1)^n z^n \prod_{k=1}^m (\bar{z}_k)^{-\alpha_k} \prod_{k=1}^m \left\{ (z - z_k)^{\alpha_k} \left(\frac{1}{z} - \bar{z}_k \right)^{\alpha_k} \right\}. \end{aligned}$$

En définissant premièrement la constante $A := c (-1)^n \prod_{k=1}^m (\bar{z}_k)^{-\alpha_k}$ et ensuite le

polynôme $g(z) := \prod_{k=1}^m (z - z_k)^{\alpha_k}$ de degré au plus n , on obtient

$$P(z) = A z^n g(z) \overline{g\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} \quad (43)$$

et en combinant (41) et (43), on a pour tout x réel

$$t_n(x) = e^{-inx} P(e^{ix}) = A g(e^{ix}) \overline{g(e^{ix})} = A |g(e^{ix})|^2.$$

Ceci implique que A est une constante réelle et strictement positive puisque t_n l'est aussi sur les réels. Il s'agit ensuite de poser $f(z) := \sqrt{A} g(z)$.

Dans la mesure où t_n ne serait pas strictement positif sur l'axe réel, il suffit de

remarquer que les zéros de t_n sur l'axe réel sont tous de multiplicité paire. Effectivement, s'ils étaient de multiplicité impaire, cela forcerait le graphe de t_n à passer sous l'axe des abscisses ce qui n'est pas possible. Ainsi, il est aisé de définir de nouveau $P(z)$ et de procéder à sa décomposition en facteurs de la forme $(z - z')^{\alpha'}$ et $(z - 1/\bar{z}')^{\alpha'}$ où z' est un zéro sur ou à l'intérieur du cercle unité.

□

Bibliographie

- [1] J. Arsac, *Transformation de Fourier et Théorie des distributions*, Dunod, Paris, 1961, p. 234-243.
- [2] D. Dryanov, M. Qazi et Q.I. Rahman, *Local behavior of entire functions of exponential type*, *Comp. Meth. and Func. Theo.* **2** (2002), 319-336.
- [3] D. Dryanov, M. Qazi et Q.I. Rahman, *Local behavior of polynomials*, *Math. of Computat.* **73** (2003), 1345-1364.
- [4] C. Frappier et Q.I. Rahman, *Une formule de quadrature pour les fonctions entières de type exponentiel*, *Ann. sc. math. Qc.* **10** (1986), 17-26.
- [5] L. Hörmander, *Some inequalities for functions of exponential type*, *Math. Scand.* **3** (1955), 21-27.
- [6] C. Hyltén-Cavallius, *Some extremal problems for trigonometrical and complex polynomials*, *Math. Scand.* **3** (1955), 5-20.
- [7] Z. Nehari, *Introduction to complex analysis*, College Mathematics Series, Boston, 1961, p. 77-78.
- [8] G. Pólya et G. Szegő, *Problems and theorems in analysis*, Volume I, Springer-Verlag, New-York, 1972.
- [9] Q.I. Rahman and G. Schmeisser, *Analytic theory of polynomials*, London Mathematical Society Monographs New Series, Oxford : Clarendon Press, 2002.
- [10] F. Riesz et B. Szökefalvi-Nagy *Leçon d'analyse fonctionnelle*, 5e éd., Gauthier-Villars, Paris, 1968, p. 117-118.
- [11] M. Riesz, *Eine trigonometrische Interpolationsformel und einige Ungleichungen für Polynome*, *Jber. Deutsch. Math. Verein.* **23** (1914), 354-368.
- [12] P. Turán, *On rational polynomials*, *Acta Univ. Szeged.Sect. Sci. Math.* **11** (1946), 106-113.