Université de Montréal

Le Théorème de Borel-Weil-Bott

par

Isabelle Ascah-Coallier

Département de mathématiques et de statistique

Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures

en vue de l'obtention du grade de

Maître ès sciences (M.Sc.)

en mathématiques

Orientation mathématiques fondamentales

août 2008

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

Le Théorème de Borel-Weil-Bott

présenté par

Isabelle Ascah-Coallier

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Pavel Winternitz

(président-rapporteur)

Abraham Broer

(directeur de recherche)

Octav Cornea

(membre du jury)

Mémoire accepté le:

La date d'acceptation

RÉSUMÉ ET MOTS CLÉS

RÉSUMÉ

Ce mémoire contient une preuve du théorème de Borel-Weil-Bott. Ce théorème décrit tous les G-modules irréductibles d'un groupe réductif complexe G en terme de cohomologie de faisceaux. Les faisceaux utilisés sont des faisceaux de sections de fibrés en droite construits à partir des caractères d'un sous-groupe de Borel de G. Le théorème de Borel-Weil-Bott nous apprend que pour un faisceau $\mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*)$, construit à partir du caractère λ, il existe au plus un groupe de cohomologie non nul. Si le caractère λ est singulier, alors tous les groupes de cohomologie sont nuls. Si le caractère est régulier, l'indice du groupe de cohomologie non nul est la longueur de l'unique élément ω du groupe de Weyl de G tel que $\omega(\lambda + \rho) - \rho$ est un caractère dominant.

Plusieurs preuves de ce théorème existent par exemple dans un cadre purement algébrique [**D1**] et [**D2**]. Notre approche sera basée entre autre sur la théorie des groupes algébriques réductifs et sur leurs racines dont nous faisons une petite revue dans le chapitre 2.

Le chapitre 6 contient des applications mathématiques du théorème de Borel-Weil-Bott.

MOTS CLÉS

Groupes réductifs, sous-groupe de Borel, tore maximal, fibrés en droite, cohomologie de faisceaux, caractères, racines, modules irréductibles.

ABSTRACT AND KEY WORDS

ABSTRACT

This thesis contains a proof of the theorem of Borel-Weil-Bott. This theorem describes all irreducible G-modules of a complex reductive groupe G in terms of cohomology of sheaves. We work with the sheaf of sections of a line bundle which is constructed with a character on a Borel subgroup of G. The theorem of Borel-Weil-Bott says that for the sheaf $\mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*)$, constructed with the character λ, there exists no more than one non trivial cohomology group. If the character λ is singular, all cohomology groups are trivial. If λ is regular, the index of the cohomology group that is non trivial is the length of the unique element ω in the Weyl group of G such that $\omega(\lambda + \rho) - \rho$ is a dominant character.

There exist several proofs of this theorem. Some are strictly algebraic like in [**D1**] and [**D2**]. Our approach is based on the theory of reductives group and their roots, that we introduce briefly in chapter 2.

Chapter 6 contains mathematical applications of Borel-Weil-Bott's theorem.

KEY WORDS

Reductive groups, Borel subgroups, maximal torus, line bundles, sheaf cohomology, characters, roots, irreducible modules.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS

Je voudrais remercier mon directeur Abraham Broer qui a su me pousser au-delà de ce que j'aurais pu pouvoir comprendre en deux ans de maîtrise. Ce fut extrêmement enrichissant. Ardu, mais enrichissant.

Un merci spécial à Raphaël avec qui j'ai partagé mes cinq dernières années mathématiques. C'est peut-être ce qui le pousse maintenant à aller faire son doctorat ailleurs. Tu vas me manquer.

Tout mon amour à Jean-Daniel.

Je tiens aussi à remercier le CRSNG et le FQRNT qui m'ont permis de travailler sur cette maîtrise à temps plein et cela sans souci financier.

Un dernier mot à mon frère et à ma soeur qui croient en moi depuis toujours.

INTRODUCTION

La théorie de la représentation étudie comment un groupe peut agir sur un espace vectoriel. Cela peut servir à obtenir de l'information sur le groupe lui-même. On peut aussi voir la théorie de la représentation comme un premier pas pour comprendre les actions d'un groupe sur des objets plus complexes. Par exemple, avant d'étudier comment un groupe agit sur des variétés algébriques, il est plus facile de comprendre ses actions sur des espaces vectoriels commes des groupes de cohomologie ou des espaces tangents.

L'étude de la théorie de la représentation s'est faite tout d'abord vers la fin du XIX^e siècle sur des groupes de cardinalité finie qui agissent sur des espaces vectoriels de dimension finie. On peut citer entre autre les contributions de Schur, Frobenius, Maschke, Wedderburn et Burnside. Même si plusieurs résultats sur les représentations des groupes finis restent vrais pour des groupes de cardinalité infinie, par exemple le lemme de Schur, la théorie est beaucoup plus complexe dans ce cas et les outils utilisés sont différents.

Ce sont des mathématiciens tels que Cartan, Weyl, Chevalley et Borel qui ont poussé l'étude des représentations continues des groupes de Lie en travaillant d'abord avec des groupes de matrices. Ils utilisent alors l'algèbre de Lie d'un groupe pour comprendre les représentations de ce groupe.

Le but de ce mémoire est de démontrer le théorème de Borel-Weil-Bott. Celui-ci permet d'exprimer les représentations algébriques (ou holomorphes) irréductibles d'un groupe réductif complexe G comme les groupes de cohomologie de faisceaux d'un espace G-homogène. Plus spécifiquement, nous chercherons à calculer la cohomologie $H^i(G/B, \mathscr{L})$, où B est un sous-groupe de Borel de G et $\mathscr{L}$ est le faisceau des sections d'un certain fibré en droite au-dessus de G/B construit à partir d'une représentation de

B sur $\mathbb{C}$. Nous verrons que dans ce cas, il existe au plus un groupe de cohomologie non nul et qu'il correspond alors à une représentation irréductible de G.

Ce théorème est un premier exemple où on peut utiliser les méthodes de géométrie algébrique dans la théorie de la représentation des groupes algébriques. Mais c'est loin d'être le seul.

Énonçons exactement le théorème de Borel-Weil-Bott.

Théorème 0.0.1 (Borel-Weil-Bott). *Soit G un groupe algébrique réductif, B un sous-groupe de Borel et T un tore maximal dans B. Considérons λ un caractère de T. Si λ est singulier, alors tous les groupes de cohomologie $H^i(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_\lambda))$ sont nuls. Si λ est régulier, il existe un unique groupe de cohomologie qui est non nul. Le degré de ce groupe consiste en la longueur de l'unique élément ω du groupe de Weyl tel que $\omega(\lambda+\rho)-\rho$ est dominant. Nous noterons ce degré $i(\lambda)$. Dans ce cas, $H^{i(\lambda)}(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_\lambda))$ est une représentation irréductible de G qui est isomorphe à $H^0(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_{\omega(\lambda+\rho)-\rho}))$. De plus, toutes les représentations irréductibles de G peuvent être obtenues de cette façon.*

Plusieurs preuves de ce théorème existent. Celle de Bott se trouve dans [**Bott**]. M. Demazure, dans ses articles [**D1**] et [**D2**], en proposent deux. Pourtant, il n'existe pas de preuves élémentaires de ce théorème dans les ouvrages classiques sur les groupes algébriques, par exemple [**B1**] et [**Hu2**]. Nous souhaitons ici pallier à ce manque en proposant une démonstration complète qui pourrait s'inscrire en annexe de ces livres.

La preuve du théorème de Borel-Weil-Bott présentée dans ce mémoire se distingue des précédentes par sa relative simplicité. L'étape d'induction abordée dans le chapitre 5 est empruntée à la preuve de Demazure dans [**D2**], mais il n'en demeure pas moins que les outils utilisés ici sont beaucoup plus élémentaires. La preuve de Borel-Weil se basait sur un théorème d'annulation de Kodaira et celle de Bott, [**Bott**], traduit le problème en termes de cohomologie relative d'algèbres de Lie. L'approche ici est plus directe. Nous avons aussi pris le temps de justifier le fait que le fibré $G\times^B V$ est bien un fibré vectoriel algébrique sur G/B. Bien que ce résultat soit largement utilisé, il semble difficile de trouver une justification de ce fait dans la littérature.

Nous avons décidé de traiter le théorème de Borel-Weil-Bott en travaillant avec des variétés algébriques complexes munies de la topologie de Zariski et avec des fibrés algébriques. Nous aurions aussi pu travailler avec des variétés complexes munies de la topologie usuelle et des fibrés holomorphes. Le théorème GAGA de Serre **[S2]** nous assure que les résultats obtenus dans chacun des cas sont les mêmes.

Dans le chapitre 1, nous ferons une preuve partielle du théorème de Borel-Weil-Bott dans le cas où $G = SL(2,\mathbb{C})$ et $B = B(2,\mathbb{C})$, le sous-groupe de $SL(2,\mathbb{C})$ constitué des matrices triangulaires supérieures. Dans cette situation, l'espace G/B s'identifie à la sphère de Riemann $\mathbb{C}P^1$. Nous discuterons de ce qu'est un caractère dominant, un caractère régulier et un caractère singulier dans ce cas. Nous traiterons aussi en parallèle le cas où le groupe $G = PSL(2,\mathbb{C})$ et $B = B'(2,\mathbb{C})$, le sous-groupe de Borel de $PSL(2,\mathbb{C})$ qui correspond à l'image de $B(2,\mathbb{C})$ dans $PSL(2,\mathbb{C})$. Ces deux groupes sont particulièrement importants puisqu'ils sont les deux seuls groupes algébriques semi-simples de rang 1 et leur cohomologie de faisceaux jouent un rôle crucial dans la preuve générale du théorème de Borel-Weil-Bott.

Les chapitres 2 et 3 contiennent des préliminaires qui sont nécessaires à la compréhension de l'énoncé du théorèmes de Borel-Weil-Bott et de sa preuves. Dans le chapitre 2, nous généraliserons la terminologie introduite au chapitre 1. Nous y discuterons de groupes algébriques et plus spécifiquement de groupes algébriques réductifs. Nous définirons les caractères d'un groupe et ses racines. Nous verrons comment le groupe de Weyl de G se décompose en terme de réflexions simples.

Dans le chapitre 3, nous construirons le faisceau $\mathscr{L}(\mathbb{C}^*_\lambda)$ sur G/B à partir d'un caractère λ d'un sous-groupe de Borel B de G. Nous discuterons de la cohomologie de faisceaux, de la cohomologie de Čech et de ce qui les relie. Nous introduirons aussi la suite spectrale de Leray.

La preuve générale du théorème de Borel-Weil-Bott se trouve dans les chapitres 4 et 5. Le chapitre 4 est consacré à l'étude de la cohomologie de degré 0. Pour ce faire, on s'inspirera des articles de Borel **[B2]** et **[B3]**. Il faudra cependant faire une généralisation aux groupes réductifs puisque ces deux articles ne s'intéressent qu'à des groupes semi-simples. Le chapitre 5 permettra de calculer tous les autres degrés de cohomologie en terme de la cohomologie de degré 0. Pour cela, nous devrons utiliser une conséquence simple de la suite spectrale de Leray. C'est à cet endroit que la connaissance de la cohomologie de faisceaux sur $\mathbb{C}P^1$ calculée dans le chapitre 1 sera nécessaire.

Le chapitre 6 sera consacré à certaines applications du théorème de Borel-Weil-Bott. Dans un premier temps, nous montrerons comment il est possible de calculer pour un sous-groupe parabolique P de G la cohomologie de G/P par rapport à certains faisceaux G-équivariants particuliers. Encore une fois, nous devrons utiliser la suite spectrale de Leray. Finalement, nous traiterons plus spécifiquement du cas de $GL(n, \mathbb{C})$.

Tout au long de ce mémoire, nous supposerons connu les résultats de base sur les variétés algébriques, sur la cohomologie de faisceaux et sur les suites spectrales. Nous énoncerons cependant en temps et lieux les résultats qui s'y rapportent et qui nous sont nécessaires. Le lecteur pour qui ces sujets ne sont pas familiers peut consulter [**H**] et [**McC**]. Nous rappelerons les résultats nécessaires de la théorie des groupes algébriques dans le chapitre 2. Le lecteur peut aussi consulter [**B1**] ou [**Hu2**].

Chapitre 1

COHOMOLOGIE DE FAISCEAUX DE $\mathbb{C}P^1$

Dans ce chapitre, nous allons montrer le théoreme de Borel-Weil-Bott lorsque le groupe considéré est $SL(2,\mathbb{C})$, le groupe des matrices 2×2 inversibles de déterminant 1, et le sous-groupe de Borel est $B(2,\mathbb{C})$, le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures.

Dans la section 1.1, nous étudierons la structure des groupes $SL(2,\mathbb{C})$ et $PSL(2,\mathbb{C}) = SL(2,\mathbb{C})/\{+Id,-Id\}$. Plusieurs des définitions introduites seront étendues dans le chapitre 2 à des groupes algébriques généraux. Nous discuterons, dans la section 1.2, de l'isomorphisme entre $SL(2,\mathbb{C})/B(2,\mathbb{C})$ et $\mathbb{C}P^1$. Dans la section 1.3, nous construirons des fibrés en droite sur cet espace, ce qui nous permettra de définir le faisceau $\mathscr{L}(\mathbb{C}_n^*)$. La section 1.4 sera consacrée au calcul de la cohomologie $H^i(SL(2,\mathbb{C})/B(2,\mathbb{C}),\mathscr{L}(\mathbb{C}_n^*))$ et voir en quoi elle vérifie le théorème de Borel-Weil-Bott. Finalement, nous utiliserons la cohomologie $H^i(SL(2,\mathbb{C})/B(2,\mathbb{C}),\mathscr{L}(\mathbb{C}_n^*))$ pour pouvoir calculer le groupe de cohomologie $H^i(PSL(2,\mathbb{C})/B'(2,\mathbb{C}),\mathscr{L}(\mathbb{C}_n^*))$. Cela sera fait dans la section 1.5.

Tous ces calculs seront essentiels dans le chapitre 5. Ils apparaîtront quand nous utiliserons la suite spectrale de Leray à la section 5.3.

1.1. $SL(2,\mathbb{C})$ ET $PSL(2,\mathbb{C})$

Nous voulons étudier la structure de $SL(2,\mathbb{C})$ et de $PSL(2,\mathbb{C})$. Ce sont deux groupes qui ont aussi une structure de variété algébrique affine. On appellera de tels groupes des groupes algébriques. Nous définirons de façon exacte les groupes algébriques dans le chapitre 2, où nous décrirons aussi certaines de leurs propriétés. Commençons en étudiant la structure de variété affine de ces deux groupes.

Le cas de $SL(2,\mathbb{C})$ est relativement simple. Ce groupe se trouve à être les zéros dans $GL(2,\mathbb{C})$, le groupe des matrices inversibles 2×2, du polynôme $det - 1$. Nous obtenons donc immédiatement sa structure de variété affine. Pour ce qui est du groupe $PSL(2,\mathbb{C})$, cela demande un peu plus de travail.

On sait que $SL(2,\mathbb{C})$ agit sur $\mathbb{C}^2$ par multiplication matricielle. Prenons $\{e_1, e_2\}$ la base canonique sur $\mathbb{C}^2$. Cela nous donne une base $\{e_1^2, e_1e_2, e_2^2\}$ de $S^2\mathbb{C}^2$, les composantes homogènes de degré 2 de l'algèbre symétrique de $\mathbb{C}^2$. Le groupe $SL(2,\mathbb{C})$ agit sur cet espace vectoriel via son action sur $\mathbb{C}^2$. Cela nous permet de construire une représentation

$$\begin{array}{cccc} \rho: & SL(2,\mathbb{C}) & \rightarrow & GL(3,\mathbb{C}) \\ & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2ac & ad+bc & 2bd \\ c^2 & cd & d^2 \end{pmatrix}. \end{array}$$

On remarque que le noyau de cette représentation est $\{Id, -Id\}$. Ainsi, cet homomorphisme se factorise par $PSL(2,\mathbb{C})$. On obtient donc une injection de $PSL(2,\mathbb{C})$ dans $SL(3,\mathbb{C})$. Or, si H et G sont des groupes algébriques et si $\rho : H \rightarrow G$ est un homomorphisme de groupes alébriques, alors $\rho(H)$ est un sous-groupe fermé de H, [**Hu2**], Proposition 7.4B. On peut donc voir $PSL(2,\mathbb{C})$ comme un sous-groupe fermé de $SL(3,\mathbb{C})$. Ce qui nous assure que $PSL(2,\mathbb{C})$ est bien une variété algébrique affine.

Puisque le groupe $PSL(2,\mathbb{C})$ est un groupe quotient de $SL(2,\mathbb{C})$, il existe un morphisme surjectif $\nu : SL(2,\mathbb{C}) \rightarrow PSL(2,\mathbb{C})$. Notons $T(2,\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices diagonales de $SL(2,\mathbb{C})$. Nous appelerons ce sous-groupe un *tore maximal* de $SL(2,\mathbb{C})$. L'image de ce sous-groupe par le morphisme ν est :

$$\nu(T(2,\mathbb{C})) = \left\{ \begin{pmatrix} t^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t^{-2} \end{pmatrix} : t \in \mathbb{C}^\times \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & r^{-1} \end{pmatrix} : r \in \mathbb{C}^\times \right\}.$$

Cela correspond à l'ensemble des matrices diagonales de $SL(3,\mathbb{C})$ qui sont aussi dans $PSL(2,\mathbb{C})$. Nous appelerons ce sous-groupe un tore maximal de $PSL(2,\mathbb{C})$

Afin d'alléger le texte, nous noterons m_t la matrice diagonale de $SL(2,\mathbb{C})$ définie comme

$$m_t = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}$$

et nous noterons μ_r la matrice diagonale de $PSL(2,\mathbb{C})$ définie comme

$$\mu_r = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & r^{-1} \end{pmatrix}.$$

Nous conserverons ces notations tout au long du chapitre.

Étudions comment une matrice de $T(2,\mathbb{C})$ agit par conjugaison sur un élément de $U(2,\mathbb{C})$, le sous-groupe des $SL(2,\mathbb{C})$ composé des matrices triangulaires supérieures dont les seules valeurs propres sont 1. Notons $E(u)$ la matrice de $U(2,\mathbb{C})$ telle que $E(u)_{12} = u$. On observe que

$$m_t E(u) m_t^{-1} = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t^2 u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E(t^2 u).$$

Nous appelerons l'application $\alpha_2 : T(2,\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ définie par $\alpha_2(m_t) = t^2$ une *racine* de $SL(2,\mathbb{C})$. Elle est la racine positive de $SL(2,\mathbb{C})$. On remarque que

$$m_t E(u) m_t^{-1} = E(\alpha_2(t) u).$$

Nous reviendrons sur ce type d'égalité dans le chapitre 2.

De façon similaire, $T(2,\mathbb{C})$ agit par conjugaison sur un élément de $U^-(2,\mathbb{C})$, le sous-groupe des matrices triangulaires inférieures dont les seules valeurs propres sont 1. Notons $E^-(u)$ la matrice de $U^-(2,\mathbb{C})$ telle que $E^-(u)_{21} = u$. On observe que

$$m_t E^-(u) m_t^{-1} = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t^{-2} u & 1 \end{pmatrix} = E^-(t^{-2} u).$$

En définissant $\alpha_{-2} : T(2,\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ par $\alpha_{-2}(m_t) = t^{-2}$, on remarque que

$$m_t E^-(u) m_t^{-1} = E^-(\alpha_{-2}(t) u).$$

Cette application sera aussi une racine de $SL(2,\mathbb{C})$. Elle est la racine négative de $SL(2,\mathbb{C})$.

L'analogue de $U(2,\mathbb{C})$ dans $PSL(2,\mathbb{C})$ est

$$\nu(U(2,\mathbb{C})) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & u & u^2 \\ 0 & 1 & 2u \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid u \in \mathbb{C} \right\}.$$

Encore une fois, l'ensemble des matrices diagonales de $PSL(2,\mathbb{C})$ agit par conjugaison sur ce sous-groupe. Notons

$$\varepsilon(u) = \begin{pmatrix} 1 & u & u^2 \\ 0 & 1 & 2u \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient alors l'action

$$\mu_r \varepsilon(u) \mu_r^{-1} = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & r^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u & u^2 \\ 0 & 1 & 2u \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & ru & (ru)^2 \\ 0 & 1 & 2ru \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En définissant l'application $\alpha_1(\mu_r) = r$, on remarque que

$$\mu_r \varepsilon(u) \mu_r^{-1} = \varepsilon(\alpha_1(\mu_r)u).$$

L'application α_1 est une racine de $PSL(2,\mathbb{C})$, qui sera sa racine positive. Similairement, le caractère α_{-1} défini par $\alpha_{-1}(\mu_r) = r^{-1}$ vérifie aussi le même type d'égalité sur le sous-groupe $\nu(U^-(2,\mathbb{C}))$. C'est la racine négative de $PSL(2,\mathbb{C})$.

Nous voulons maintenant étudier comment une réflexion peut nous permettre de passer de la racine positive à la racine négative de ces groupes. Des calculs matriciels élémentaires nous assurent que la matrice

$$s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

permet de vérifier l'égalité :

$$s^{-1} m_t s = m_{t^{-1}}.$$

On obtient alors que

$$\alpha_2(s^{-1} m_t s) = \alpha_{-2}(m_t).$$

L'image de la matrice s par l'homomorphisme ν est la matrice

$$s' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice vérifie l'égalité :

$$s'^{-1}\mu_r s' = \mu_{r^{-1}},$$

et donc,

$$\alpha_1(s'^{-1}\mu_r s') = \alpha_{-1}(\mu_r).$$

Nous reviendrons sur les racines de $SL(2,\mathbb{C})$ et de $PSL(2,\mathbb{C})$ dans les sections 1.4 et 1.5 respectivement.

Finissons l'étude générale des groupes $SL(2,\mathbb{C})$ et $PSL(2,\mathbb{C})$ en donnant quelques résultats sur leurs représentations. Ces résultats proviennent du chapitre 4 de **[Hall]**.

Nous avons déjà mentionné au début de la section que $SL(2,\mathbb{C})$ agit naturellement sur $\mathbb{C}^2$ par multiplication matricielle. En fait, toutes les représentations irréductibles de $SL(2,\mathbb{C})$ proviennent d'une certaine manière de cette représentation. Le théorème suivant illustre cela.

Théorème 1.1.1. *Toute représentation algébrique irréductible de $SL(2,\mathbb{C})$ est de la forme $S^n\mathbb{C}^2$, où $S^n\mathbb{C}^2$ consiste en les composantes homogènes de degré n de l'algèbre symétrique de $\mathbb{C}^2$.*

De ce théorème, on peut déduire que deux représentations irréductibles de $SL(2,\mathbb{C})$ de même dimension sont nécessairement isomorphes. Toujours en se basant sur ce résultat, il est aussi possible de montrer que les représentations irréductibles de $PSL(2,\mathbb{C})$ sont de la forme $S^{2n}\mathbb{C}^2$.

Soit $\rho : SL(2,\mathbb{C}) \to GL(V)$, une représentation rationnelle. On peut restreindre cette représentation à $T(2,\mathbb{C})$. Par définition d'une représentation rationnelle, si $\mathbb{C}v$ est un sous-espace stable sous l'action de $T(2,\mathbb{C})$, alors $\rho(m_t)(v) = t^n v$ pour un certain $n \in \mathbb{Z}$. Puisque $T(2,\mathbb{C})$ est un sous-groupe diagonal de $SL(2,\mathbb{C})$, $\rho(T(2,\mathbb{C}))$ sera un sous-groupe diagonal de $GL(V)$. On peut donc décomposer l'espace vectoriel V en sous-espace stable sous l'action de $T(2,\mathbb{C})$, c'est-à-dire en définissant

$$V_n = \{v \in V \mid \rho(m_t)(v) = t^n v\},$$

on obtient la décomposition

$$V = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_n.$$

Puisque V est de dimension finie, seul un nombre fini de sous-espaces V_n sont non nuls. Le n le plus grand pour lequel V_n est non nul est appelé le *plus haut poids* de V. Ceci détermine complètement une représentation irréductible de $SL(2, \mathbb{C})$.

De façon plus générale, l'action de $T(2, \mathbb{C})$ sur V détermine complètement la représentation. En effet, puique les représentations de $SL(2, \mathbb{C})$ sont complètement réductibles, **[Hall]** Corollary 6.9, et que les représentations irréductibles sont déterminées par leur plus haut poids qui ne dépend que de l'action de $T(2, \mathbb{C})$, on conclut que la connaissance de l'action de $T(2, \mathbb{C})$ sur V nous suffit pour comprendre l'action de $SL(2, \mathbb{C})$ sur V.

1.2. $SL(2, \mathbb{C})/B(2, \mathbb{C})$ COMME VARIÉTÉ PROJECTIVE

Dans cette section nous montrerons que $SL(2, \mathbb{C})/B(2, \mathbb{C})$ est isomorphe à $\mathbb{C}P^1$. Dans le chapitre 2, nous discuterons du fait que si G est un groupe algébrique et B est un sous-groupe de Borel de G, alors G/B est une variété projective. Nous illustrons ici un cas particulier de ce résultat.

On construit un morphisme de variétés $\varphi : SL(2, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}P^1$:

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = [a : c].$$

Puisque a et c ne peuvent pas être simultanément nuls, l'image de ce morphisme est bien dans $\mathbb{C}P^1$. On remarque que si $g \in SL(2, \mathbb{C})$ et si $b \in B(2, \mathbb{C})$, alors $\varphi(gb) = \varphi(g)$. Ainsi le morphisme se factorise par $B(2, \mathbb{C})$. De plus, cette application est surjective. En effet, soit $[a : c]$ un élément de $\mathbb{C}P^1$. Si $a \neq 0$, alors

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a^{-1} \end{pmatrix}\right) = [a : c].$$

Si $c \neq 0$,

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} a & -c^{-1} \\ c & 0 \end{pmatrix}\right) = [a : c].$$

Puisque pour $[a : c] \in \mathbb{C}P^1$, a et c ne peuvent pas être simultanément nuls, l'application est bien surjective. Cela nous permet d'obtenir un morphisme bijectif entre $SL(2,\mathbb{C})/B(2,\mathbb{C})$ et $\mathbb{C}P^1$.

Il existe deux ouverts de $\mathbb{C}P^1$ qui sont isomorphes à $\mathbb{C}$. Nous noterons

$$U_0 = \{[a : c] \mid a \neq 0\}$$

et

$$U_1 = \{[a : c] \mid c \neq 0\}.$$

La préimage de ces deux ouverts dans $SL(2,\mathbb{C})$ correspond à deux ouverts de $SL(2,\mathbb{C})$ que nous noterons Ω et $s\Omega$ pour des raisons qui nous paraîtront évidentes plus tard. On obtient que

$$\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C}) \mid a \neq 0 \right\}$$

et

$$s\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C}) \mid c \neq 0 \right\}.$$

Il existe une décomposition intéressante des matrices de Ω et de $s\Omega$ en termes de matrices de $B(2,\mathbb{C})$ et de $U^-(2,\mathbb{C})$. Plus précisément, si $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est dans Ω, on peut la décomposer uniquement comme

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c/a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}.$$

Similairement, si g est dans $s\Omega$, on obtient une décomposition unique

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a/c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c & -d \\ 0 & -c^{-1} \end{pmatrix}.$$

L'unicité de ces deux décompositions se montrent par des calculs directs que nous omettrons ici.

Nous noterons U_0 et U_1 respectivement l'image de ces deux ouverts dans l'espace $SL(2,\mathbb{C})/B(2,\mathbb{C})$ puisqu'on peut les identifier avec ces ouverts de $\mathbb{C}P^1$. En notant $\overline{g} :=$

$gB(2,\mathbb{C})$, la classe de g dans $SL(2,\mathbb{C})/B(2,\mathbb{C})$, on obtient un isomorphisme $U_0 \simeq \mathbb{C}$ à travers l'application

$$\overline{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} = \overline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c/a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}} \mapsto \frac{c}{a}.$$

Similairement, on peut construire un isomorphisme entre U_1 et $\mathbb{C}$ avec l'application

$$\overline{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} = \overline{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a/c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -c & -d \\ 0 & -c^{-1} \end{pmatrix}} \mapsto \frac{a}{c}.$$

Ces applications sont bien définies puisque les décompositions en termes de matrices des sous-groupes $U^{-}(2,\mathbb{C})$ et $B(2,\mathbb{C})$ sont uniques.

On remarque que $SL(2,\mathbb{C})/B(2,\mathbb{C})$ consiste bien en deux ouverts isomorphes à $\mathbb{C}$ qui sont recollés sur $\mathbb{C}^{\times}$ en suivant l'application $z \mapsto \frac{1}{z}$.

Il existe une action de $SL(2,\mathbb{C})$ sur $SL(2,\mathbb{C})/B(2,\mathbb{C})$. Un élément $g \in SL(2,\mathbb{C})$ agit sur $\overline{h} = hB$ par multiplication à gauche :

$$g \cdot hB = ghB.$$

Il est important de remarquer que les ouverts U_0 et U_1 ne sont pas stables sous l'action de $SL(2,\mathbb{C})$. Ils le sont cependant sous l'acion de $T(2,\mathbb{C})$.

1.3. Définition du faisceau $\mathscr{L}(\mathbb{C}_n)$

Nous voulons construire un fibré vectoriel de rang un, ce que nous appelons aussi fibré en droite, au dessus-de $SL(2,\mathbb{C})/B(2,\mathbb{C})$ à partir d'une représentation de rang un de $B(2,\mathbb{C})$. Les sections de ce fibré, nous permettrons de définir un faisceau. Nous serons ensuite intéressés à calculer la cohomologie de $SL(2,\mathbb{C})/B(2,\mathbb{C})$ par rapport à ce faisceau. Le calcul de la cohomologie sera fait dans la section 1.4.

On définit une application $\lambda_n : T(2,\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^{\times}$ par $\lambda_n(m_t) = t^n$. Une telle application est appelé un *caractère* de $T(2,\mathbb{C})$. Si λ_n est un caractère de $T(2,\mathbb{C})$, alors la réflexion s agit sur λ_n de la façon suivante :

$$s\lambda_n(m_t) = \lambda_n(s^{-1}m_t s).$$

On remarque qu'alors $s\lambda_n = \lambda_{-n}$. Nous avions déjà fait une telle remarque dans la section 1.1 pour les racines α_2 et α_{-2} qui sont en fait les caractères λ_2 et λ_{-2}. Nous conserverons toutefois la nototation α_2 et α_{-2} pour les racines de $SL(2,\mathbb{C})$ afin de s'harmoniser avec les notations qui apparaîtront plus tard dans le mémoire.

On peut définir la somme de deux caractères $\lambda_n + \lambda_m = \lambda_{n+m}$. Cela fait de l'ensemble des caractères de $T(2,\mathbb{C})$ un groupe commutatif.

On peut étendre l'application λ_n à $B(2,\mathbb{C})$ par

$$\lambda_n(\begin{pmatrix} t & u \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}) = t^n.$$

Cette application est un homomorphisme de groupes algébriques et elle consiste en une représentation de $B(2,\mathbb{C})$ sur $\mathbb{C}$.

Nous dirons qu'un caractère λ_n de $T(2,\mathbb{C})$ est *dominant* si $n \geq 0$. On remarque que si le caractère λ_n n'est pas dominant, alors le caractère $s\lambda_n$ est dominant.

Construisons maintenant un fibré en droite sur $SL(2,\mathbb{C})/B(2,\mathbb{C})$ à partir d'un caractère de $B(2,\mathbb{C})$. Considérons l'espace $SL(2,\mathbb{C}) \times \mathbb{C}$. On définit une relation d'équivalence $\sim_n$:

$$(gb, v) \sim_n (g, \lambda_n(b)v).$$

Cela nous permet de définir un fibré en droite au-dessus de $SL(2,\mathbb{C})/B(2,\mathbb{C})$:

$$SL(2,\mathbb{C}) \times^{B(2,\mathbb{C})} \mathbb{C}_n = SL(2,\mathbb{C}) \times \mathbb{C} \ / \sim_n .$$

Nous noterons $[g, v]$ la classe de (g, v) dans $SL(2,\mathbb{C}) \times^{B(2,\mathbb{C})} \mathbb{C}_n$.

Nous devons aussi définir une projection

$$\pi : SL(2,\mathbb{C}) \times^{B(2,\mathbb{C})} \mathbb{C}_n \to SL(2,\mathbb{C})/B(2,\mathbb{C}).$$

Cela se fait de façon naturelle :

$$\pi([g, v]) = \overline{g}.$$

Il est clair que cette application ne dépend pas du choix du représentant de $[g, v]$.

Avant d'aller plus loin, nous voulons définir une action de $SL(2,\mathbb{C})$ sur le fibré $SL(2,\mathbb{C}) \times^{B(2,\mathbb{C})} \mathbb{C}_n$. Soit $g \in SL(2,\mathbb{C})$ et $[k, v] \in SL(2,\mathbb{C}) \times^{B(2,\mathbb{C})} \mathbb{C}_n$. On définit

$$g[k, v] := [gk, v].$$

Cette action ne dépend pas du choix de représentant de $[k, v]$. On remarque entre autre que pour $[k, v] \in SL(2, \mathbb{C}) \times^{B(2,\mathbb{C})} \mathbb{C}_n$,

$$\pi(g[k, v]) = g\pi([k, v]), \ \forall g \in SL(2, \mathbb{C}).$$

Afin de vérifier que $SL(2, \mathbb{C})\times^{B(2,\mathbb{C})}\mathbb{C}_n$ est bien un fibré en droite sur $SL(2, \mathbb{C})/B(2, \mathbb{C})$, nous allons montrer qu'il se trivialise au-dessus des ouverts U_0 et U_1. Soit $[g, v] \in U_0$. Alors $g = ub$ avec $u \in U^-(2, \mathbb{C})$ et $b \in B(2, \mathbb{C})$. Ainsi, $[g, v] = [ub, v] = [u, \lambda_n(b)v]$. Cette dernière expression est unique. Cela nous permet de définir une application

$$\begin{array}{rccc} \phi_{U_0}: & \pi^{-1}(U_0) & \rightarrow & U_0 \times \mathbb{C} \\ & [g, v] & \mapsto & (\overline{g}, \lambda_n(b)v). \end{array}$$

Plus précisément, si $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on peut réécrire l'application ϕ_{U_0} en identifiant $\pi^{-1}(U_0)$ à $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ comme :

$$\begin{array}{rccc} \psi_{U_0}: & \pi^{-1}(U_0) & \rightarrow & \mathbb{C} \times \mathbb{C} \\ & [g, v] & \mapsto & (\frac{c}{a}, a^n v). \end{array}$$

Il est aisé de vérifier que cette application est bien définie. De plus, l'application ψ_{U_0} consiste en une bijection entre $\pi^{-1}(U_0)$ et $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$.

On va construire de façon similaire la trivialisation au-dessus de U_1 :

$$\begin{array}{rccc} \phi_{U_1}: & \pi^{-1}(U_1) & \rightarrow & U_1 \times \mathbb{C} \\ & [g, v] & \mapsto & (\overline{g}, \lambda_n(-b)v) \end{array}$$

où g se décompose comme $g = sub$ avec $u \in U^-(2, \mathbb{C})$ et $b \in B(2, \mathbb{C})$. Plus précisément, si $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on peut réécrire l'application ϕ_{U_1} en identifiant $\pi^{-1}(U_1)$ et $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ comme :

$$\begin{array}{rccc} \psi_{U_1}: & \pi^{-1}(U_1) & \rightarrow & \mathbb{C} \times \mathbb{C} \\ & [g, v] & \mapsto & (\frac{a}{c}, c^n v). \end{array}$$

Encore une fois, on peut montrer que ψ_{U_1} est une bijection entre $\pi^{-1}(U_1)$ et $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Le lecteur qui veut plus de détails, peut aller voir la preuve de la proposition 3.1.1 dans laquelle on traite un cas plus général.

Nous avons défini une action de $SL(2,\mathbb{C})$ sur le fibré $SL(2,\mathbb{C})\times^{B(2,\mathbb{C})}\mathbb{C}_n$. Cependant, les deux ouverts $\pi^{-1}(U_0)$ et $\pi^{-1}(U_1)$ ne sont pas stables sous l'action de $SL(2,\mathbb{C})$. Ils le sont toutefois sous l'action de $T(2,\mathbb{C})$. Étudions plus en détails cette action.

Soit $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U_0$ et $v \in \mathbb{C}$. Alors,

$$\psi_{U_0}(m_t[g,v]) = \psi_{U_0}([m_t g, v]) = \psi_{U_0}\left(\left[\begin{pmatrix} ta & tb \\ t^{-1}c & t^{-1}d \end{pmatrix}, v\right]\right) = [t^{-2}\frac{c}{a}, t^n a^n v].$$

Ainsi, si on définit une action de $T(2,\mathbb{C})$ sur $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ par

$$m_t(z,\xi) := (t^{-2}z, t^n\xi),$$

on obtient que

$$\psi_{U_0}(m_t[g,v]) = (t^{-2}\frac{c}{a}, t^n a^n v) = m_t(\frac{c}{a}, a^n v) = m_t(\psi_{U_0}([g,v])).$$

De même, si $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U_1$, alors

$$\psi_{U_1}(m_t[g,v]) = \psi_{U_1}\left(\left[\begin{pmatrix} ta & tb \\ t^{-1}c & t^{-1}d \end{pmatrix}, v\right]\right) = [t^2\frac{a}{c}, t^{-n}c^{-n}v].$$

En définissant l'action $m_t(u,\eta) := (t^2u, t^{-n}\eta)$, on obtient alors que

$$\psi_{U_1}(m_t[g,v]) = (t^2\frac{a}{c}, t^{-n}c^n v) = m_t(\frac{c}{a}, c^n v) = m_t(\psi_{U_1}([g,v])).$$

Nous voulons maintenant étudier les changements de cartes de $SL(2,\mathbb{C})\times^{B(2,\mathbb{C})}\mathbb{C}_n$. Soit $[g,v] \in \pi^{-1}(U_0 \cap U_1)$. Entre autre, $g \in \Omega \cap s\Omega$. En posant $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, nous obtenons les deux décompositions simultanées de g comme

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c/a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$$

et

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a/c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -c & -d \\ 0 & -c^{-1} \end{pmatrix}.$$

Nous avons alors que $\psi_{U_0}([g,v]) = (\frac{c}{a}, a^n v)$ et que $\psi_{U_1}([g,v]) = (\frac{a}{c}, c^n v)$. En identifiant $U_0 \cap U_1$ à $\mathbb{C}^\times$, nous aurons alors que

$$\begin{array}{rccc} \phi_{U_1} \circ \phi_{U_0}^{-1} : & \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C} & \to & \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C} \\ & (z, v) & \mapsto & (z^{-1}, z^n v). \end{array}$$

Nous voulons maintenant définir le faisceau des sections du fibré $SL(2,\mathbb{C}) \times^{B(2,\mathbb{C})} \mathbb{C}_n$, faisceau que nous noterons $\mathscr{L}(\mathbb{C}_n)$. Soit W un ouvert de $SL(2,\mathbb{C})/B(2,\mathbb{C})$. Notons $\kappa : SL(2,\mathbb{C}) \to SL(2,\mathbb{C})/B(2,\mathbb{C})$, la projection de $SL(2,\mathbb{C})$ sur la variété projective $SL(2,\mathbb{C})/B(2,\mathbb{C})$. Alors, $W' = \kappa^{-1}(W)$ est un ouvert de $SL(2,\mathbb{C})$ dont la projection sur $SL(2,\mathbb{C})$ est W. Une section de $\mathscr{L}(\mathbb{C}_n)(W)$ est un morphisme de variété $\sigma : W \to SL(2,\mathbb{C}) \times^{B(2,\mathbb{C})} \mathbb{C}_n$ telle que $\pi \circ \sigma$ est l'identité sur W. Soit $gB(2,\mathbb{C}) \in W$. On peut écrire une section σ sous la forme

$$\sigma(gB(2,\mathbb{C})) = [g, \hat{\sigma}(g)]$$

où $\hat{\sigma}$ peut être vue comme une fonction de W' dans $\mathbb{C}$. La fonction $\hat{\sigma}$ doit vérifier certaines conditions afin de nous assurer que la section σ soit bien définie.

Soit $b \in B(2,\mathbb{C})$. Puisque $gbB(2,\mathbb{C}) = gB(2,\mathbb{C})$, on doit avoir

$$[g, \hat{\sigma}(g)] = \sigma(gB(2,\mathbb{C})) = \sigma(gbB(2,\mathbb{C})) = [gb, \hat{\sigma}(gb)] = [g, \lambda_n(b)\hat{\sigma}(gb)].$$

On peut donc voir $\hat{\sigma}$ comme une fonction de W' dans $\mathbb{C}$ qui vérifie

$$\hat{\sigma}(gb) = \lambda_n(b^{-1})\hat{\sigma}(g).$$

Ainsi,

$$\mathscr{L}(\mathbb{C}_n)(W) \simeq \{\sigma \in \mathbb{C}[W'] : \sigma(gb) = \lambda_n(b^{-1})\sigma(g)\ \forall b \in B(2,\mathbb{C})\}.$$

Pour plus de commodité, nous allons travailler avec la représentation duale. Nous allons noter $\mathscr{L}(\mathbb{C}_n^*)$ le faisceau des sections du fibré $SL(2,\mathbb{C}) \times^{B(2,\mathbb{C})} \mathbb{C}_n^*$. Dans ce fibré, on identifie $[gb, v]$ et $[g, \lambda_n(b^{-1})v]$. De sorte que

$$\mathscr{L}(\mathbb{C}_n^*)(W) \simeq \{\sigma \in \mathbb{C}[W'] : \sigma(gb) = \lambda_n(b)\sigma(g)\ \forall b \in B(2,\mathbb{C})\}.$$

Étudions $\mathscr{L}(\mathbb{C}_n^*)(U_0)$ et $\mathscr{L}(\mathbb{C}_n^*)(U_1)$. Soit g une matrice de Ω. Nous savons que g se décompose comme produit unique

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c/a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}.$$

Soit $\sigma \in \mathscr{L}(\mathbb{C}_n^*)(U_0)$. Alors,

$$\sigma(g) = \sigma\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c/a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}\right) = a^n\sigma\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c/a & 1 \end{pmatrix}\right).$$

Ainsi, une section σ est complètement déterminée par sa valeur sur $U^-(2,\mathbb{C})$. On peut donc identifier $\mathscr{L}(\mathbb{C}_n^*)(U_0)$ et $\mathbb{C}[z]$ comme espace vectoriel. Le même raisonnement sur U_1 nous permet d'identifier les espaces vectoriels $\mathscr{L}(\mathbb{C}_n^*)(U_1)$ et $\mathbb{C}[z^{-1}]$.

On peut définir une action de $SL(2,\mathbb{C})$ sur les sections globales de $\mathscr{L}(\mathbb{C}_n^*)$. Soit $\sigma \in \mathscr{L}(\mathbb{C}_n^*)(SL(2,\mathbb{C})/B(2,\mathbb{C}))$. Pour g et $h \in SL(2,\mathbb{C})$, on définit

$$g\sigma(h) := \sigma(g^{-1}h).$$

Cette action permet de faire de la cohomologie de $SL(2,\mathbb{C})/B(2,\mathbb{C})$ par rapport au faisceau $\mathscr{L}(\mathbb{C}_n^*)$ un $SL(2,\mathbb{C})$-module.

Les ouverts U_0 et U_1 n'étant pas stables sous l'action de $SL(2,\mathbb{C})$, nous ne pouvons transporter cette action sur $\mathscr{L}(\mathbb{C}_n^*)(U_0)$ et $\mathscr{L}(\mathbb{C}_n^*)(U_1)$. Ils sont cependant stables sous l'action de $T(2,\mathbb{C})$. Nous pouvons donc faire de $\mathscr{L}(\mathbb{C}_n^*)(U_0)$ et de $\mathscr{L}(\mathbb{C}_n^*)(U_1)$ des $T(2,\mathbb{C})$-modules.

Soit $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \in U_0$ et $\sigma \in \mathscr{L}(\mathbb{C}_n^*)(U_0)$. Nous avons défini $m_t\sigma(g) = \sigma(m_t^{-1}g)$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} m_t\sigma(g) &= \sigma\left(\begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}\right) = \sigma\left(\begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ tc & t \end{pmatrix}\right) \\ &= \sigma\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t^2c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}\right) = t^{-n}\sigma\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t^2c & 1 \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

En reprenant notre isomorphisme d'espace vectoriel $\mathscr{L}(\mathbb{C}_n^*)(U_0) \simeq \mathbb{C}[z]$ et en définissant une action de $T(2,\mathbb{C})$ sur $\mathbb{C}[z]u$ par

$$m_tf(z)u = f(t^2z)t^{-n}u = t^{-n}f(t^2z)u,$$

nous obtenons un isomorphisme de $T(2,\mathbb{C})$-module entre $\mathscr{L}(\mathbb{C}_n^*)(U_0)$ et $\mathbb{C}[z]u$. De façon similaire, on obtient un isomorphisme de $T(2,\mathbb{C})$-module entre $\mathscr{L}(\mathbb{C}_n^*)(U_1)$ et $\mathbb{C}[z^{-1}]v$ en définissant une action de $T(2,\mathbb{C})$ sur $\mathbb{C}[z^{-1}]v$ par

$$m_tg(z^{-1})v = f((t^2z)^{-1})t^nv = t^nf(t^2z)v.$$

Nous avons maintenant tous les outils en main pour calculer la cohomologie de $SL(2,\mathbb{C})/B(2,\mathbb{C})$ à valeur dans le faisceau $\mathscr{L}(\mathbb{C}_n^*)$.

Remarque 1.3.1. *Sur une surface de Riemann X compacte, on définit le groupe de Picard de X, noté Pic(X), comme le groupe des diviseurs sur X modulo les diviseurs principaux. Un résultat important fait un pont entre ce groupe et l'ensemble des fibrés en droite holomorphes sur X à isomorphisme près. Chaque fibré en droite peut être construit à partir d'un diviseur et réciproquement, tout diviseur peut être obtenu d'un fibré en droite,* [**M**] *chapitre 11.*

Dans le cas de $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$*, on sait que le groupe de Picard est* $\mathbb{Z}$*. Or, pour chaque entier n, nous venons de construire un fibré en droite. Nous avons donc construit tous les fibrés en droite sur* $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$*. Du même coup, nous venons de montrer que tous les fibrés en droite sur* $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ *sont munis d'une action de* $SL(2,\mathbb{C})$*. Ce sont des fibrés* $SL(2,\mathbb{C})$*-équivariants.*

1.4. Calcul de $H^i(SL(2,\mathbb{C})/B(2,\mathbb{C}),\mathscr{L}(\mathbb{C}_n^*))$

Notons $\mathscr{U}$ le recouvrement de $SL(2,\mathbb{C})/B(2,\mathbb{C})$ constitué des ouverts U_0 et U_1. Chacun des deux ouverts est une copie de $\mathbb{C}$ et ils sont recollés sur $U_0\cap U_1\simeq\mathbb{C}^\times$ via le morphisme $z\mapsto\frac{1}{z}$. Comme nous avons vu dans la section 1.3, nous savons que le fibré en droite $SL(2,\mathbb{C})\times^{B(2,\mathbb{C})}\mathbb{C}_n^*$ est trivial sur les deux ouverts U_0 et U_1. De plus, en identifiant $U_0\cap U_1$ à $\mathbb{C}^\times$, nous savons que le changement de trivialisation se fait via le morphisme

$$\begin{array}{rccc}\psi_1\circ\psi_0^{-1}: & \mathbb{C}^\times\times\mathbb{C} & \to & \mathbb{C}^\times\times\mathbb{C}\\ & (z,v) & \mapsto & (\frac{1}{z},z^{-n}v).\end{array}$$

Nous avons déjà remarqué que $\mathscr{L}(\mathbb{C}_n)(U_0)\simeq\mathbb{C}[z]u$ comme $T(2,\mathbb{C})$-module. Similairement, nous avons vu que $\mathscr{L}(\mathbb{C}_n^*)(U_1)\simeq\mathbb{C}[w]v$, avec $w=z^{-1}$ sur $U_0\cap U_1$. Nous savons aussi que $U_0\cap U_1\simeq\mathbb{C}^\times$. On obtient alors que $\mathscr{L}(\mathbb{C}_n^*)(U_0\cap U_1)$ est tout simplement isomorphe à $\mathbb{C}[z,z^{-1}]=\mathbb{C}[z,\frac{1}{z}]u$. Nous pouvons définir un complexe

$$0\to\mathbb{C}[z]u\oplus\mathbb{C}[z^{-1}]v\xrightarrow{d}\mathbb{C}[z,\frac{1}{z}]u\to 0.$$

Nous voulons définir une différentielle sur ce complexe de telle sorte que son noyau corresponde aux sections globales de $\mathscr{L}(\mathbb{C}_n^*)$. Soit $\hat{\sigma}_0:U_0\simeq\mathbb{C}\to\psi_{U_0}(\pi^{-1}(U_0))$ définie par $\hat{\sigma}_0(z)=(z,\sigma_0(z))$ et soit $\hat{\sigma}_1:U_1\simeq\mathbb{C}\to\psi_{U_1}(\pi^{-1}(U_1))$ définie par $\hat{\sigma}_1(w)=(w,\sigma_1(w))$. Alors, la paire σ_0,σ_1 induit une section globale si et seulement si l'image

de $\hat{\sigma}_0$ et de $\hat{\sigma}_1$ se recolle correctement via l'application $\psi_{U_1} \circ \psi_{U_0}^{-1}$. Ceci est le cas, si et seulement si $\sigma_1(z^{-1}) = \sigma_0(z)z^n$. N'oublions pas que nous travaillons avec le fibré $SL(2,\mathbb{C}) \times^{B(2,\mathbb{C})} \mathbb{C}_n^*$ et non pas avec le fibré $SL(2,\mathbb{C}) \times^{B(2,\mathbb{C})} \mathbb{C}_n$.
Nous devons donc définir

$$d(p(z)u, q(z^{-1})v) = (p(z) - z^n q(z^{-1}))u.$$

Cela fait de ce complexe, le complexe de Čech. Nous donnerons plus de détails sur la cohomologie de Čech dans le chapitre 3. Puisque $\mathbb{C}P^1$ est une variété projective, que le faisceau $\mathscr{L}(\mathbb{C}_n)$ est défini algébriquement et que les ouverts U_0 et U_1 sont isomorphes à $\mathbb{C}$, la cohomologie de Čech par rapport au recouvrement $\mathscr{U}$, que nous notons $\check{H}^i(\mathscr{U}, \mathscr{L}(\mathbb{C}_n^*))$, coïncide avec la cohomologie de faisceaux $H^i(\mathscr{U}, \mathscr{L}(\mathbb{C}_n^*))$. Entre autre, puisque le complexe n'a des termes que de degré 0 et de degré 1, on sait que la cohomologie de faisceaux $H^i(\mathscr{U}, \mathscr{L}(\mathbb{C}_n^*))$ est nulle pour tout $i \geq 2$.

Étudions tout d'abord le noyau de ce morphisme, qui comme nous l'avons dit, correpond aux sections globales de $\mathscr{L}(\mathbb{C}_n^*)$. Le couple $(p(z)u, q(z^{-1})v)$ est dans le noyau de d s'il vérifie l'égalité $p(z) = z^n q(z^{-1})$. Cela est possible seulement si $n \geq 0$ et si q est un polynome de degré au plus n. De plus, pour tout polynôme q de degré au plus n cette égalité est vérifiée pour un unique polynôme $p(z)$. Ainsi $\ker d$ est isomorphe à l'ensemble des polynômes en une variable de degré inférieur ou égal à n. Notons cet espace V_n. C'est un espace vectoriel de dimension $n + 1$ qui correspond aux sections globales de $\mathscr{L}(\mathbb{C}_n^*)$. Une base de cet espace est

$$\{u, zu, z^2u, \ldots, z^n u\}.$$

L'action de $T(2,\mathbb{C})$ sur un vecteur $z^i u$ de la base se fait par $m_t z^i u = t^{2i-n} z^i u$. Les éléments de la base sont donc des vecteurs propres pour l'action de $T(2,\mathbb{C})$. La valeur propre pour le vecteur $z^i u$ est $\lambda(m_t) = t^{2i-n}$. Si $n < 0$, le noyau est tout simplement trivial.

Pour pouvoir calculer $\check{H}^1(SL(2,\mathbb{C})/B(2,\mathbb{C}), \mathscr{L}(\mathbb{C}_n^*))$, nous devons calculer l'image de d. En fait, la cohomologie de degré 1 que est exactement le quotient de $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$ par l'image de d. L'image de d correspond à l'ensemble des polynômes $f(z)$ dans $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$ tels que $f(z) = p(z) - z^n q(z^{-1})$ pour deux polynômes p et q. Si $n \geq -1$, on voit que tout polynôme de $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$ peut s'écrire de cette façon. En effet, soit $f = \sum_{i=-m}^{l} a_i z^i$ un polynôme dans $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$. En posant $p(z) = \sum_{i=0}^{l} a_i z^i$ et $q(z) = \sum_{i=1}^{m} a_{-i} z^{n+i}$, on obtient que $d(pu, qv) = fu$. La condition $n \geq -1$ est nécessaire afin de s'assurer que $q \in \mathbb{C}[z]$.

Si $n < -1$, $Im(d) = \{\sum_{i=-m}^{l} a_i z^i u \mid a_i = 0 \; \forall i \in \{n+1, n+2, \ldots, -1\}\}$. Ainsi, $\check{H}^1(SL(2,\mathbb{C})/B(2,\mathbb{C}), \mathscr{L}(\mathbb{C}_n^*)) = \mathbb{C}[z, z^{-1}]/Im(d) \simeq \{\sum_{i=1}^{|n|-1} a_i z^{-i} u \mid a_i \in \mathbb{C}\}$. Notons $W_{|n|}$ cet espace. On remarque que $W_{|n|}$ est un espace vectoriel de dimension $|n| - 1$. Une base de cet espace est

$$\{z^{n+1}u, z^{n+2}u, \ldots, z^{-1}u\}.$$

L'action de $T(2,\mathbb{C})$ sur un vecteur $z^{-i}u$ de la base se fait par $m_t z^{-i} u = t^{|n|-2i} z^i u$. Les éléments de la base sont donc des vecteurs propres pour l'action de $T(2,\mathbb{C})$ et la valeur propre pour le vecteur $z^i u$ est $\lambda(m_t) = t^{|n|-2i}$.

Soit n>1. Nous pouvons construire un isomorphisme de $T(2,\mathbb{C})$-module entre W_n et V_{n-2}. Au polynôme $\sum_{i=1}^{n-1} a_i z^{-i} u$, on associe le polynôme $z^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} a_i z^{-i} u$ qui est bien un polynôme de degré au plus $n-2$. C'est clairement une application linéaire bijective. Il est facile de vérifier que l'action de $T(2,\mathbb{C})$ est compatible avec ce morphisme et en fait un isomorphsime de $T(2,\mathbb{C})$-module.

Comme nous l'avons mentionné dans la section 1.1, l'action du groupe $SL(2,\mathbb{C})$ sur un espace vectoriel V est complètement déterminée par l'action d'un de ses tores maximaux, par exemple $T(2,\mathbb{C})$. Nous savons que pour un entier $n > 1$, V_{n-2} et W_n sont des $SL(2,\mathbb{C})$-modules puisqu'ils correspondent à des groupes de cohomologie de $SL(2,\mathbb{C})/B(2,\mathbb{C})$. De plus, l'action de $T(2,\mathbb{C})$ que nous avons défini est la restriction de l'action de $SL(2,\mathbb{C})$. Ainsi, nous avons un isomorphisme de $SL(2,\mathbb{C})$-module entre ces deux espaces.

Résumons maintenant nos résultats sur la cohomologie en appliquant l'isomorphisme entre la cohomologie de faisceaux et la cohomologie de Čech. Pour la cohomologie de degré 0,

$$H^0(SL(2,\mathbb{C})/B(2,\mathbb{C}), \mathscr{L}(\mathbb{C}_n^*)) = V_n, \quad n \geq 0$$
$$H^0(SL(2,\mathbb{C})/B(2,\mathbb{C}), \mathscr{L}(\mathbb{C}_n^*)) = 0, \quad n < 0.$$

Pour la cohomologie de degré 1,

$$H^1(SL(2,\mathbb{C})/B(2,\mathbb{C}), \mathscr{L}(\mathbb{C}_n^*)) = 0, \quad n \geq -1$$
$$H^1(SL(2,\mathbb{C})/B(2,\mathbb{C}), \mathscr{L}(\mathbb{C}_n^*)) = V_{|n|-2}, \quad n < -1.$$

Comme nous l'avions remarqué précédement, il est évident que pour tout $i \geq 2$,

$$H^i(SL(2,\mathbb{C})/B(2,\mathbb{C}), \mathscr{L}(\mathbb{C}_n^*)) = 0.$$

Ainsi, pour chaque caractère λ_n, il existe au plus un groupe de cohomologie qui est non nul. Si λ_n est dominant, c'est-à-dire si $n \geq 0$, alors $H^0(SL(2,\mathbb{C})/B(2,\mathbb{C}), \mathscr{L}(\mathbb{C}_{\lambda_n}^*)) \simeq V_n$, qui est non nul. Si λ_n n'est pas dominant, c'est-à-dire si $n < 0$, il y a deux cas possibles. Si $n < -1$, alors $H^1(SL(2,\mathbb{C})/B(2,\mathbb{C}), \mathscr{L}(\mathbb{C}_{\lambda_n}^*)) \simeq V_{-n-2}$ qui est non nul. On remarque que $s\lambda_n(m_t) - \alpha_2(m_t) = t^{-n-2}$ et $-n-2 \geq 0$, c'est-à-dire le caractère $s\lambda_n - \alpha_2$ est dominant. Ainsi,

$$H^1(SL(2,\mathbb{C})/B(2,\mathbb{C}), \mathscr{L}(\mathbb{C}_{\lambda_n})) \simeq H^0(SL(2,\mathbb{C})/B(2,\mathbb{C}), \mathscr{L}(\mathbb{C}_{s\lambda_n-\alpha_2}^*)).$$

Si $n = -1$, tous les groupes de cohomologie sont nuls. On remarque que dans ce cas, le caractère $s\lambda_{-1} - \alpha_2 = \lambda_{-1}$ qui n'est pas dominant. On dira que λ_{-1} est un *caractère singulier* de $T(2,\mathbb{C})$.

Remarque 1.4.1. *Nous aurions aussi pu calculer directement la cohomologie de degré* 0 *de* $SL(2,\mathbb{C})/B(2,\mathbb{C})$ *et utilser la dualité de Serre pour obtenir l'isomorphisme entre* $H^1(SL(2,\mathbb{C})/B(2,\mathbb{C}), \mathscr{L}(\mathbb{C}_{-n}^*))$ *et* $H^0(SL(2,\mathbb{C})/B(2,\mathbb{C}), \mathscr{L}(\mathbb{C}_{n-2}^*))$*, pour un* $n > 0$.

La cohomologie $H^0(SL(2,\mathbb{C})/B(2,\mathbb{C}), \mathscr{L}(\mathbb{C}_n^*))$ *se trouve à être les sections globales du faisceau* $\mathscr{L}(\mathbb{C}_n^*)$*. Nous avons déjà mentionné que*

$$\mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*)(SL(2,\mathbb{C})/B(2,\mathbb{C})) = \{s \in \mathbb{C}[SL(2,\mathbb{C})] \mid s(gb) = \lambda(b)s(g),\ \forall b \in B(2,\mathbb{C})\}.$$

On remarque que si n est strictement négatif,

$$\mathscr{L}(\mathbb{C}_n^*)(SL(2,\mathbb{C})/B(2,\mathbb{C})) = 0.$$

Si $n \geq 0$, $\mathscr{L}(\mathbb{C}_n^*)(SL(2,\mathbb{C})/B(2,\mathbb{C}))$ *se trouve à être l'ensembles des polynômes homogènes de degré n en* X_{11} *et en* X_{21}*, où nous notons* X_{ij} *l'application de* $\mathbb{C}[SL(2,\mathbb{C})]$ *définie par* $X_{ij}(g) = g_{ij}$*. Ainsi, on obtient que* $\mathscr{L}(\mathbb{C}_n^*)(SL(2,\mathbb{C})/B(2,\mathbb{C}))$ *est un espace vectoriel de dimension* $n+1$*. L'action de* $SL(2,\mathbb{C})$ *sur cet espace découle de l'action de ce groupe sur* $\mathbb{C}[SL(2,\mathbb{C})]$.

Le théorème de dualité de Serre nous dit que pour X une variété projective non singulière de dimension n, et $\mathscr{L}$ *un faisceau de sections d'un fibré en droite, il existe* *un pairing canonique*

$$H^i(X,\mathscr{L}) \times H^{n-i}(X,\mathscr{L}^\vee \otimes K) \to \mathbb{C},$$

où K est le faiceau associé au fibré canonique sur X et $\mathscr{L}^\vee = Hom_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{L},\mathscr{O}_X)$.

Nous savons que $SL(2,\mathbb{C})/B(2,\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}P^1$ est une variété projective de dimension 1. De plus, le fibré K se trouve à être isomorphe au fibré $SL(2,\mathbb{C}) \times^{B(2,\mathbb{C})} \mathbb{C}^*_{-2}$. Cela nous donne un isomorphisme

$$H^1(SL(2,\mathbb{C})/B(2,\mathbb{C}),\mathscr{L}(\mathbb{C}^*_n)) \simeq H^0(SL(2,\mathbb{C})/B(2,\mathbb{C}),\mathscr{L}(\mathbb{C}^*_{-n-2}))^\vee.$$

Puisque les $SL(2,\mathbb{C})$-modules irréductibles de même dimension sont isomorphes, on observe que si V est un $SL(2,\mathbb{C})$-module irréductible, alors V et $V^\vee$ sont isomorphes comme $SL(2,\mathbb{C})$-module. Cela nous permet d'obtenir l'isomorphisme de $SL(2,\mathbb{C})$-module

$$H^1(SL(2,\mathbb{C})/B(2,\mathbb{C}),\mathscr{L}(\mathbb{C}^*_n)) \simeq H^0(SL(2,\mathbb{C})/B(2,\mathbb{C}),\mathscr{L}(\mathbb{C}^*_{-n-2})).$$

1.5. Le cas de $PSL(2,\mathbb{C})$

Notons $B'(2,\mathbb{C})$ le sous-groupe de Borel de $PSL(2,\mathbb{C})$ qui correspond à l'image par le morphisme ν de $B(2,\mathbb{C}) \subset SL(2,\mathbb{C})$ et notons $T'(2,\mathbb{C})$ le tore maximal $\nu(T(2,\mathbb{C}))$. Nous allons utiliser ce que nous connaissons de la cohomologie de $SL(2,\mathbb{C})/B(2,\mathbb{C})$ pour calculér celle de $PSL(2,\mathbb{C})/B'(2,\mathbb{C})$ plutôt que de refaire tous les calculs.

Un caractère de $T'(2,\mathbb{C})$ est un homomorphisme de $\lambda_n = T'(2,\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}^\times$ de la forme $\lambda_n(\mu_r) = r^n$. Comme dans le cas de $SL(2,\mathbb{C})$, un caractère de $T'(2,\mathbb{C})$ s'étend à un caractère sur $B'(2,\mathbb{C})$. À partir d'un tel caractère, on peut définir le fibré en droite $PSL(2,\mathbb{C}) \times^{B'(2,\mathbb{C})} \mathbb{C}_n$ et le faisceau $\mathscr{L}(\mathbb{C}_n)$.

Soit λ un caractère du tore de $PSL(2,\mathbb{C})$ tel que $\lambda(\mu_r) = r^n$. Considérons le morphisme $\nu : SL(2,\mathbb{C}) \to PSL(2,\mathbb{C})$ défini plus tôt. Nous utilisons ce morphisme de groupe algébrique pour en définir un de variété projective :

$$\begin{array}{rccc} \overline{\nu}: & SL(2,\mathbb{C})/B(2,\mathbb{C}) & \to & PSL(2,\mathbb{C})/B'(2,\mathbb{C}) \\ & gB(2,\mathbb{C}) & \mapsto & \nu(g)B'(2,\mathbb{C}). \end{array}$$

Ce morphisme est bien défini puisque nous avons défini $B'(2,\mathbb{C})$ comme étant $\nu(B(2,\mathbb{C}))$. Il consiste aussi en un isomorphisme entre $SL(2,\mathbb{C})/B(2,\mathbb{C})$ et $PSL(2,\mathbb{C})/B'(2,\mathbb{C})$ qui sont aussi isomorphes à $\mathbb{C}P^1$. Avec le caractère λ, nous pouvons contruire le fibré en droite $PSL(2,\mathbb{C}) \times^{B'(2,\mathbb{C})} \mathbb{C}_n^*$. On étudie le fibré en droite induit $\overline{\nu}^* PSL(2,\mathbb{C}) \times^{B'(2,\mathbb{C})} \mathbb{C}_n^*$ au dessus de la variété $SL(2,\mathbb{C})/B(2,\mathbb{C})$. Puisque $\overline{\nu}$ est un isomorphisme, nous avons aussi un isomorphisme entre $\overline{\nu}^* PSL(2,\mathbb{C}) \times^{B'(2,\mathbb{C})} \mathbb{C}_n^*$ et $PSL(2,\mathbb{C}) \times^{B'(2,\mathbb{C})} \mathbb{C}_n^*$. C'est cet isomorphisme qui nous permettra de calculer la cohomologie de $PSL(2,\mathbb{C})/B'(2,\mathbb{C})$ en fonction de celle de $SL(2,\mathbb{C})/B(2,\mathbb{C})$.

Puisque $SL(2,\mathbb{C})$ agit sur le fibré $PSL(2,\mathbb{C}) \times^{B'(2,\mathbb{C})} \mathbb{C}_n^*$ à travers le morphisme ν, on obtient aussi une action de ce groupe sur le fibré induit. Cela nous permet de déduire que $\overline{\nu}^* PSL(2,\mathbb{C}) \times^{B'(2,\mathbb{C})} \mathbb{C}_n^*$ est un fibré en droite de type $SL(2,\mathbb{C}) \times^{B(2,\mathbb{C})} \mathbb{C}_m^*$ pour un certain entier m. Pour trouver cet entier, il nous suffit d'étudier l'action de $B(2,\mathbb{C})$ sur la droite au-dessus du point $eB(2,\mathbb{C})$. Soit $(\overline{e}, [e,v])$ un point au-dessus de $eB(2,\mathbb{C}) \subset SL(2,\mathbb{C})/B(2,\mathbb{C})$ et soit $b \in B(2,\mathbb{C})$. L'élément b agit sur $(\overline{e}, [e,v])$ par $b(\overline{e}, [e,v]) := (\overline{be}, [\nu(b)e, v]) = (\overline{e}, [e\nu(b), v]) = (\overline{e}, [e, \lambda^{-1}(\nu(b))v])$. Or, si $b = \begin{pmatrix} t & u \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}$, alors $\lambda^{-1}(\nu(b)) = t^{-2n}$. Ce qui veut dire que le fibré $\overline{\nu}^* PSL(2,\mathbb{C}) \times^{B'(2,\mathbb{C})} \mathbb{C}_n^*$ est exactement $SL(2,\mathbb{C}) \times^{B(2,\mathbb{C})} \mathbb{C}_{2n}^*$. Nous pouvons résumer ce résultat avec le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} SL(2,\mathbb{C}) \times^{B(2,\mathbb{C})} \mathbb{C}_{2n}^* & \longrightarrow & PSL(2,\mathbb{C}) \times^{B'(2,\mathbb{C})} \mathbb{C}_n^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ SL(2,\mathbb{C})/B(2,\mathbb{C}) & \longrightarrow & PSL(2,\mathbb{C})/B'(2,\mathbb{C}) \end{array}$$

Les flèches horizontales de ce diagramme sont des isomorphismes. Nous aurons donc que $H^i(SL(2,\mathbb{C})/B(2,\mathbb{C}), \mathscr{L}(\mathbb{C}_{2n}^*))$ et $H^i(PSL(2,\mathbb{C})/B'(2,\mathbb{C}), \mathscr{L}(\mathbb{C}_n^*))$ sont isomorphes comme espaces vectoriels, mais aussi comme $PSL(2,\mathbb{C})$-modules.

Nous obtenons alors pour la cohomologie de degré 0 :

$$H^0(PSL(2,\mathbb{C})/B'(2,\mathbb{C}), \mathscr{L}(\mathbb{C}_n^*)) = V_{2n}, \quad n \geq 0$$
$$H^0(PSL(2,\mathbb{C})/B'(2,\mathbb{C}), \mathscr{L}(\mathbb{C}_n^*)) = 0, \quad n < 0.$$

Pour la cohomologie de degré 1,

$$H^1(PSL(2,\mathbb{C})/B'(2,\mathbb{C}), \mathscr{L}(\mathbb{C}_n^*)) = 0, \quad n \geq 0$$
$$H^1(PSL(2,\mathbb{C})/B'(2,\mathbb{C}), \mathscr{L}(\mathbb{C}_n^*)) = V_{|2n|-2}, \quad n < 0.$$

Les groupes de cohomologie de degré supérieur seront tous nuls.

Comme dans le cas de $SL(2,\mathbb{C})$, nous avons montré que pour tout caractère λ_n, il existe au plus un groupe de cohomologie $H^i(PSL(2,\mathbb{C})/B'(2,\mathbb{C}), \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_n))$ non nul. Si λ_n est dominant, c'est-à-dire si $n \geq 0$, alors c'est le groupe de cohomologie de degré 0 qui est non nul. Si λ_n n'est pas dominant, alors le premier groupe de cohomologie est non nul. On remarque qu'alors,

$$H^1(PSL(2,\mathbb{C})/B'(2,\mathbb{C}), \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_{\lambda_n})) \simeq H^0(PSL(2,\mathbb{C})/B'(2,\mathbb{C}), \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_{s'\lambda_n-\alpha_1})).$$

On remarque qu'ici, il n'existe pas de caractère λ_n non dominant, tel que $s'\lambda_n - \alpha_1$ ne soit pas dominant. Ainsi, tous les caractères seront appelés réguliers.

Chapitre 2

PRÉLIMINAIRES

Pour comprendre au moins l'énoncé du théorème de Borel-Weil-Bott, il faut introduire entre autre les groupes algébriques, les groupes réductifs, les sous-groupes de Borel, les tores, les caractères d'un tore, les racines d'un groupe algébrique, son groupe de Weyl. Ce chapitre se veut une introduction à toutes ces notions.

Nous introduirons la notion de groupe algébrique dans la section 2.1. Nous y donnerons quelques résultats de bases. Dans la section 2.2, nous étudierons plus spécifiquement les groupes algébriques réductifs. Nous discuterons des caractères d'un groupe algébrique et plus précisément d'un tore et d'un sous-groupe de Borel dans la section 2.3. Nous étudierons une sous-famille de caractère, les racines d'un groupe G dans la section 2.4. La section 2.5 nous permettra de mieux comprendre le groupe de Weyl d'un groupe G et l'impact de sa décomposition en termes de racines simples. Finalement, le chapitre 2.6 nous permettra de faire un pont entre les représentations d'un groupe algébrique G et les caractères d'un tore maximal de G. L'ensemble des définitions et des résultats de ces sections se trouve dans **[Hu2]**, **[B1]** et pour un traitement plus élémentaire dans [**C**].

2.1. Éléments de géométrie algébrique

Nous travaillerons toujours avec des variétés algébriques ayant comme corps de base les complexes. Nous utiliserons la topologie de Zariski. Si X est une variété algébrique, on note $\mathbb{C}[X]$ son anneau de coordonnée et $\mathbb{C}(X)$ son corps de fractions. Si X est une variété affine irréductible et x est un point de X, $\mathscr{O}_x$ correspond aux fonctions de $\mathbb{C}(X)$ régulières au point x, c'est-à-dire $f \in \mathscr{O}_x$ s'il existe g et h, deux fonctions de

$\mathbb{C}[X]$, telles que $g(x) \neq 0$ et $f = \frac{g}{h}$. Nous noterons pour un ouvert U de X, l'anneau des fonctions régulières sur U par $\mathcal{O}(U)$.

Soit G une variété algébrique affine qui a aussi une structure de groupe. Nous dirons que G est un groupe algébrique affine si les deux applications $\mu : G \times G \to G$ qui correspond à la multiplication dans le groupe et $\iota : G \to G$ où $\iota(g) = g^{-1}$ sont des morphismes de variétés algébriques. Puisque nous travaillerons toujours avec des groupes algébriques dont les variétés sous-jacentes sont affines, nous utiliserons le terme de groupe algébrique pour groupe algébrique affine.

Exemple 2.1.1. *Le groupe des matrices inversibles $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{C}$, noté $GL(n, \mathbb{C})$, et le groupe des matrices de déterminant 1 de taille $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{C}$, noté $SL(n, \mathbb{C})$, sont des groupes algébriques sur le corps $\mathbb{C}$. Dans le chapitre 1, nous avons montré que $PSL(2, \mathbb{C})$ est un groupe algébrique. De façon plus générale, $PSL(n, \mathbb{C})$ est aussi un groupe algébrique.*

Un homomorphisme de groupes algébriques est un homomorphisme de variétés algébriques qui est aussi un homomorphisme de groupe. Soit G et H deux groupes algébriques. Nous noterons $Hom_{gr}(G, H)$ les homomorphismes de groupes algébriques entre G et H. Si X et Y sont des variétés algébriques, nous noterons $Hom_{var}(X, Y)$ les homomorphismes de variétés algébriques entre X et Y.

Un premier résultat important nous apporte de l'information sur la structure des groupes algébriques.

Théorème 2.1.1 ([**Hu2**], Theorem 8.6). *Soit G un groupe algébrique affine. Alors, il existe un entier positif n tel que G soit isomorphe comme groupe algébrique à un sous-groupe fermé de $GL(n, \mathbb{C})$.*

Ce théorème peut se révéler intéressant afin de faire certaine construction sur les groupes algébriques. On fait une preuve dans un cas matriciel, en exploitant les particularités des matrices et on obtient le résultat pour un groupe algébrique général en plongeant celui-ci dans un espace de matrices. Nous allons utiliser immédiatement ce type d'argument afin de définir la partie semi-simple et la partie unipotente d'un élément x dans un groupe algébrique G. Commençons par définir ces notions dans $GL(n, \mathbb{C})$.

Définition 2.1.1. *Soit $x \in GL(n, \mathbb{C})$. L'élément x est appelé semi-simple si x est diagonalisable dans $GL(n, \mathbb{C})$. On appelle x unipotent si ses seules valeurs propres sont 1.*

En particulier, si x est unipotent et semi-simple, alors $x = Id$.

À partir de la décomposition de Jordan dans $GL(n, \mathbb{C})$, on obtient une décomposition multiplicative, illustrée dans la proposition suivante.

Proposition 2.1.1 ([**Hu2**], Lemma 15.1B)**.** *Soit $x \in GL(n, \mathbb{C})$. Il existe un unique x_s semi-simple et un unique x_u unipotent dans $GL(n, \mathbb{C})$ vérifiant $x = x_s x_u = x_u x_s$.*

Définition 2.1.2. *On appelle x_s la partie semi-simple de x et x_u la partie unipotente de x.*

Nous voulons maintenant généraliser ces définitions à un groupe algébrique G. Par le théorème 2.1.1, il existe un homomorphisme injectif $\phi : G \to GL(n, \mathbb{C})$ pour un certain entier n. Soit $x \in G$. L'image de x par le morphisme ϕ se décompose comme un produit d'un élément semi-simple et d'un élément unipotent de $GL(n, \mathbb{C})$. Il est possible de montrer que les éléments de cette décomposition sont aussi dans $\phi(G)$. On définit la partie semi-simple de x, encore noté x_s, comme l'unique élément de G tel que $\phi(x_s) = \phi(x)_s$ et la partie unipotente de x, noté x_u, comme l'unique élément de G tel que $\phi(x_u) = \phi(x)_u$. On dira que x est semi-simple si $x = x_s$ et que x est unipotent si $x = x_u$. Il est à noter que cette décomposition est indépendante du choix du plongement de G dans un espace de matrices. Le chapitre 15 de [**Hu2**] décrit cette décomposition des éléments d'un groupe algébrique en termes d'un élément unipotent et d'un élément semi-simple.

On peut alors définir deux sous-ensembles de G : $G_s = \{x \in G \mid x = x_s\}$ qui correspond à l'ensemble des éléments semi-simples de G et $G_u = \{x \in G \mid x = x_u\}$ qui est l'ensemble des éléments unipotents de G. Il est possible de montrer que G_u est un sous-ensemble fermé de G. En général, G_s n'est pas un fermé de G. Cependant, si G est un groupe résoluble connexe, alors G_u est un sous-groupe fermé et normal de G. Nous reviendrons sous peu sur les groupes résolubles.

Soit G un groupe algébrique. Il est possible que G ne soit pas une variété irréductible. Dans ce cas, il existe une unique composante irréductible de G qui contient l'élément neutre de G. Nous l'appellerons la composante de l'identité de G et elle sera notée G°. Notons que G° est un sous-groupe normal d'index fini dans G dont les translatés sont les composantes irréductibles de G. On dira que G est connexe si $G = G^\circ$. Cela est dû au fait que les composantes irréductibles d'un groupe algébrique coïncident avec ses composantes connexes. Ces résultats sont décrits dans la proposition 7.3 de **[Hu2]**.

Nous travaillerons avec certains sous-groupes particuliers d'un groupe algébrique G. Les prochains paragraphes nous permettrons de les introduire et d'énoncer quelques unes de leurs propriétés.

Soit G un groupe algébrique. Notons $\mathscr{D}^1(G) = (G, G)$, le sous-groupe de dérivé de G. On définit de façon inductive $\mathscr{D}^{i+1}(G) = (\mathscr{D}^i(G), \mathscr{D}^i(G))$ pour $i \geq 1$.

Définition 2.1.3. *Un groupe algébrique G est dit résoluble s'il existe i tel que $\mathscr{D}^i(G)$ se réduit à l'identité.*

Nous nous intéresserons à certains sous-groupes résolubles de G plus particuliers.

Définition 2.1.4. *Un sous-groupe de G connexe fermé résoluble et maximal par rapport à ces propriétés est appelé un sous-groupe de Borel de G.*

Exemple 2.1.2. *Considérons le groupe algébrique des matrices inversibles $GL(n, \mathbb{C})$. Les matrices triangulaires supérieures forment un sous-groupe de Borel. Nous noterons ce sous-groupe $B(n, \mathbb{C})$. Le sous-groupe des matrices triangulaires inférieures est aussi un sous-groupe de Borel de $GL(n, \mathbb{C})$.*

Nous étudierons l'espace G/B muni de la topologie quotient, où B est un sous-groupe de Borel de G. Il est possible de montrer que cet espace est une variété projective, **[Hu2]** Theorem 21.3. En fait, les sous-groupes de Borel sont les plus petits sous-groupes de G tel que l'espace quotient est une variété projective. Nous appellerons la variété G/B une variété de drapeaux généralisée puisque dans le cas où $G = GL(n, \mathbb{C})$ et $B = B(n, \mathbb{C})$, la variété G/B est tout simplement la variété de drapeaux sur $\mathbb{C}^n$.

Définition 2.1.5. *Soit P un sous-groupe de G tel que G/P est une variété projective. Alors, P est appelé un sous-groupe parabolique de G.*

Proposition 2.1.2 ([**Hu2**], Corollary 21.3B)**.** *Si P est un sous-groupe parabolique de G, il existe un sous-groupe de Borel B tel que $B \subseteq P$. Réciproquement, tout sous-groupe fermé de G contenant un Borel est un sous-groupe parabolique.*

À priori, rien dans la définition de sous-groupe parabolique nous permet de nous assurer qu'il soit connexe. Or, c'est toujours le cas ([**Hu2**], corollary 23.1B). Nous nous servirons de cette propriété à quelques reprises.

Un lien unit les sous-groupes de Borel de G et les sous-groupes de Borel de P un sous-groupe parabolique de G.

Proposition 2.1.3. *Soit G un groupe algébrique et P un sous-groupe parabolique de G. Si B est un sous-groupe de Borel qui est inclus dans P, alors B est un sous-groupe de Borel de P. Réciproquement, tout sous-groupe de Borel de P est un sous-groupe de Borel de G.*

Démonstration. Soit B un sous-groupe de Borel de G inclus dans P. C'est un sous-groupe fermé résoluble et connexe de G. Il possède donc aussi ces propriétés comme sous-groupe de P. Soit B' un sous-groupe fermé, si B' est un sous-groupe fermé résoluble et connexe de P tel que $B \subseteq B'$. Puisque P est un sous-groupe fermé, B' est aussi fermé dans G. Mais puisque B est un sous-groupe de Borel, on doit avoir $B = B'$ et donc B est un sous-groupe de Borel de P.

Nous n'utiliserons pas le deuxième énoncé du théorème. Nous omettrons donc la preuve ici qui se base sur le fait que tous les sous-groupes de Borel d'un groupe algébrique sont conjugués. □

Un groupe algébrique G possède un unique sous-groupe normal résoluble, maximal par rapport à ces propriétés. La composante de l'identité de ce sous-groupe est appelée le radical de G, qui sera noté $R(G)$. Ce sous-groupe peut aussi être défini comme la composante de l'identité de l'intersection de tous les sous-groupes de Borel de G. L'ensemble des éléments unipotents de $R(G)$ forme un sous-groupe normal de G. Il est appelé le radical unipotent de G et il est noté $R_u(G)$. On peut aussi le définir comme la composante de l'identité de l'intersection des parties unipotentes des sous-groupes de Borel de G, c'est-à-dire $R_u(G) = \bigcap_{B \text{ Borel}} B_u$.

Définition 2.1.6. *Un groupe algébrique G connexe dont le radical est le sous-groupe trivial est appelé un groupe semi-simple. Si $R_u(G)$ est trivial et que G est connexe, on dira alors de G qu'il est un groupe réductif.*

Nous travaillerons plus particulièrement avec les groupes réductifs. Nous décrirons plusieurs de leur propriétés importantes dans la section 2.2.

Exemple 2.1.3. *Le groupe $GL(n, \mathbb{C})$ est un groupe réductif alors que $SL(n, \mathbb{C})$ est un groupe semi-simple. Le radical de $GL(n, \mathbb{C})$ est l'ensemble des matrices de la forme λId, où $\lambda \in \mathbb{C}^{\times}$.*

Notons $T(n, \mathbb{C})$ le sous-groupe des matrices diagonales dans $GL(n, \mathbb{C})$. On appelle un groupe algébrique T un tore s'il existe un entier positif n tel que T soit isomorphe à $T(n, \mathbb{C})$. On dit qu'un tore T de G est maximal s'il n'est contenu dans aucun autre tore de G. Chaque tore maximal de G est contenu dans un sous-groupe de Borel de G. On définit le rang d'un groupe algébrique G, noté $rg(G)$, comme la dimension d'un tore maximal dans G. Les tores maximaux étant tous conjugués, le rang est bien défini. Le rang du groupe $G/R(G)$ est appelé le rang semi-simple de G, noté $rg_{ss}(G)$.

La proposition suivante expose comment les sous-groupes particuliers que nous venons de définir se comportent via un homomorphisme de groupes algébriques.

Proposition 2.1.4 ([**Hu2**], Corollary 21.3C). *Soit $\varphi : G \to G'$ un épimorphisme de groupes algébriques connexes. Soit B un sous-groupe de Borel (resp. un sous-groupe parabolique, resp. un tore maximal, resp. sous-groupe connexe maximal unipotent) de G. Alors $\varphi(B)$ est un sous groupe de même type dans G' et tous les sous-groupes de cette forme dans G' peuvent être obtenus de cette façon.*

Cette proposition est particulièrement utile lorsqu'on connaît bien les sous-groupes de Borel d'un groupe G et qu'on veut étudier ceux d'un groupe quotient de G.

Tout au long de ce mémoire, nous travaillerons avec des représentations de groupes algébriques. Nous allons définir ce que nous entendons par cela et énoncer deux théorèmes classiques concernant les représentations d'un groupe algébrique.

Définition 2.1.7. *Soit G un groupe algébrique. Une représentation (rationnelle) de G est un morphisme de groupes algébriques $\rho : G \to GL(V)$, où V est un espace vectoriel de dimension finie.*

Il est à noter qu'une représentation ρ de G dans $GL(V)$ fait de V un G-module avec l'action de G sur V définie par $g \cdot v := \rho(g)(v)$. Réciproquement, si V est un espace vectoriel qui est aussi un G-module, avec une action définie par un morphisme de variétés algébriques $G \times V \to V$ et si l'action de G est $\mathbb{C}$-linéaire, on peut retrouver une représentation rationnelle de G dans $GL(V)$ à partir de cette action. On parlera donc de G-module ou de représentation de G sans distinction.

Pour une représentation donnée $\rho : G \to GL(V)$, on cherche à savoir si étant donné H un sous-groupe de G, il existe un sous-espace de V stable sous l'action de H. Le théorème de Lie-Kolchin nous donne des hypothèses sur H pour que ce soit possible.

Théorème 2.1.2 (Lie-Kolchin, [Hu2], Theorem 17.2). *Soit H un sous-groupe résoluble connexe de $GL(V)$, où V est un espace vectoriel non nul de dimension finie. Alors H possède un vecteur propre commun dans V.*

Le théorème suivant nous sera utile dans le chapitre 4.

Théorème 2.1.3 (Chevalley, [Hu2], Theorem 11.2). *Soit G un groupe algébrique et H un sous-groupe fermé de G. Alors il existe une représentation $\varphi : G \to GL(V)$ et un sous-espace L de dimension 1 tel que*

$$H = \{g \in G \mid \varphi(g)L = L\}.$$

2.2. Groupes réductifs

Les groupes réductifs possèdent plusieurs propriétés qui facilitent leur étude. Nous citerons ici quelques résultats qui nous seront utiles. Nous notons $Z(G)$ le centre de G et (G,G) son sous-groupe dérivé. Notons que (G,G) est un sous-groupe fermé et connexe dès que G est connexe, **[Hu2]** Proposition 17.2.

Lemme 2.2.1 ([**Hu2**], Lemma 19.3). *Soit G un groupe réductif. Alors $R(G) = Z(G)^\circ$ et l'intersection entre $Z(G)^\circ$ et (G,G) est finie.*

Lemme 2.2.2 ([**Hu2**], Corollary 26.2A). *Soit G un groupe réductif et T un tore maximal. Alors $Z(G) \subset T$.*

Il existe une décomposition intéressante d'un groupe réductif comme produit de son centre et de son sous-groupe dérivé.

Théorème 2.2.1 ([**Hu2**] Theorem 27.5). *Soit G un groupe réductif. Alors $G = (G,G) \cdot Z(G)$.*

Nous pouvons déduire un premier corollaire de cette proposition.

Corollaire 2.2.1. *Soit G un groupe réductif. Alors (G,G) est un groupe semi-simple.*

DÉMONSTRATION. Puisque (G, G) est connexe, il nous suffit donc de montrer que le radical du sous-groupe dérivé de G est réduit à l'identité.

Par définition, $R((G, G))$ est un sous-groupe normal de (G, G). Mais puisque G est engendré par son sous-groupe dérivé et son centre, $R((G, G))$ est aussi un sous-groupe normal de G. Ainsi $R((G, G)) \subseteq R(G) \cap (G, G)$. Puisque $R(G) = Z(G)^\circ$, le radical du sous-groupe dérivé de G est un sous-ensemble de $Z(G)^\circ \cap (G, G)$ qui est fini. Mais par définition $R((G, G))$ est connexe. Ce qui nous permet de déduire que $R((G, G))$ est simplement $\{e\}$. □

Nous venons de parler de la décomposition d'un groupe algébrique réductif. Nous aurons aussi besoin d'une décomposition des sous-groupes paraboliques d'un groupe réductif G. C'est l'objet du théorème suivant.

Théorème 2.2.2 ([**Hu2**], Section 30.2). *Tout sous-groupe parabolique P d'un groupe réductif G a une décomposition de Levi comme produit semi-direct $P = LR_uP$, où L est un sous-groupe réductif de P isomorphe à P/R_uP. Le groupe L est appelé un facteur de Levi de P. De plus, deux facteurs de Levi de P sont conjugués par un élément de R_uP.*

Soit H un sous-groupe fermé de G et B un sous-groupe de Borel de G. En général, il est faux de dire que $H \cap B$ est un sous-groupe de Borel de H bien que ce soit un sous-groupe fermé et résoluble de H. Il y a cependant certains cas pour lesquels c'est vrai. Ce sera l'objet des deux prochaines propositions.

Proposition 2.2.1. *Soit G un groupe réductif et N un sous-groupe normal connexe de G. Si B est un sous-groupe de Borel de G, alors $B \cap N$ est sous-groupe de Borel de N.*

DÉMONSTRATION. Considérons l'ensemble BN. Puisque N est un sous-groupe normal de G, BN est un sous-groupe de G. Nous pouvons donc considérer l'espace, mais aussi le groupe, BN/B comme sous-ensemble fermé de G/B. Cela fait de BN/B une variété projective. Le deuxième théorème d'isomorphisme nous assure que $BN/B \simeq N/N \cap B$. Ainsi, $N/N \cap B$ est une variété projective. Ceci nous permet de conclure que $N \cap B$ est un sous-groupe parabolique de N. Nous en déduisons alors qu'il est connexe. Puisqu'il est aussi résoluble, nous pouvons conclure que $N \cap B$ est un sous-groupe de Borel de N. □

Cette proposition est un peu trop générale. Nous utiliserons plutôt le corollaire suivant.

Corollaire 2.2.2. *Soit G un groupe réductif et (G,G) son sous-groupe dérivé. Si B est un sous-groupe de Borel de G, alors $B \cap (G,G)$ est sous-groupe de Borel de (G,G).*

Démonstration. Le sous-groupe (G,G) est un sous-groupe normal connexe de G. □

Ce corollaire reste vraie si on change le groupe de Borel pour un tore maximal dans G. Pour montrer cela, on utilise le fait que tous les tores maximaux d'un groupe algébrique G sont conjugués et puisque $G = (G,G)Z(G)$, ils sont conjugués par un élément de (G,G).

Le deuxième cas que nous voulons étudier est celui où H est le centralisateur d'un tore de G.

Proposition 2.2.2 ([**Hu2**], Corollary 22.4). *Soit S un tore de G et B un sous-groupe de Borel de G qui contient S. Alors $C_G(S) \cap B$ est un sous-groupe de Borel de $C_G(S)$ et tous les sous-groupes de Borel de $C_G(S)$ sont obtenus de cette façon.*

Nous avons déjà mentionné que chaque tore maximale est contenu dans un sous-groupe de Borel. En fait, il peut même être obtenu comme l'intersection de deux sous-groupes de Borel comme nous l'indique la proposition suivante.

Proposition 2.2.3 ([**Hu2**], Corollary 26.2C). *Soit G un groupe réductif, B un sous-groupe de Borel et T un tore maximal dans B. Alors il existe un unique sous-groupe de Borel de G, noté B^-, tel que $B \cap B^- = T$.*

Définition 2.2.1. *On appelle B^- le sous-groupe de Borel opposé à B par rapport à T*

Exemple 2.2.1. *Nous avons vu que $B(n,\mathbb{C})$ est un sous-groupe de Borel de $GL(n,\mathbb{C})$. Le sous-groupe des matrices diagonales $T(n,\mathbb{C})$ est un tore maximal de $GL(n,\mathbb{C})$ inclus dans $B(n,\mathbb{C})$. On remarque que l'intersection entre le sous-groupe des matrices triangulaires inférieures et $B(n,\mathbb{C})$ est exactement $T(n,\mathbb{C})$. Ainsi, le sous-groupe des matrices triangulaires inférieures est le sous-groupe de Borel opposé à $B(n,\mathbb{C})$ par rapport $T(n,\mathbb{C})$. On le notera $B^-(n,\mathbb{C})$.*

Soit G un groupe algébrique réductif et T un tore maximal dans G. On définit le groupe de Weyl $W(G,T) = N_G(T)/T$. Puisque les tores maximaux sont tous conjugués, le groupe de Weyl ne dépend pas du tore choisi et nous pouvons parler du groupe de

Weyl de G en toute généralité. Il est possible de montrer que ce groupe est de cardinalité finie, [**Hu2**] section 24.1.

Exemple 2.2.2. *Dans le cas où $G = GL(n, \mathbb{C})$, on peut choisir $T = T(n, \mathbb{C})$ comme tore maximal. Le normalisateur de $T(n, \mathbb{C})$ dans G est l'ensemble des matrices dont exactement une entrée dans chaqe ligne et dans chaque colonne est non nulle. On obtient alors un isomorphisme entre le groupe de Weyl $W(G, T)$ de G et S_n, le groupe de permutation sur n éléments.*

Soit T un tore maximal dans G. On définit $\mathfrak{B}^T$ comme l'ensemble des sous-groupes de Borel de G qui contiennent T. Le groupe de Weyl $W = W(G, T)$ agit sur cet ensemble. Soit $B \in \mathfrak{B}^T$, $\omega \in W$ et n_ω un représentatant de ω. On définit $\omega \cdot B := n_\omega B n_\omega^{-1}$. Puisque $T \subseteq B$, cette action ne dépend pas du choix du représentant de ω. Le théorème suivant décrit un peu cette action.

Théorème 2.2.3 ([**Hu2**], Proposition 24.1A). *Soit T un tore maximal de G et $W = W(G, T)$, son groupe de Weyl. Alors W permute l'ensemble $\mathfrak{B}^T$ de façon simplement transitive.*

En particulier, il existe un élément $\omega_0 \in W$ tel que $\omega_0 \cdot B = B^-$.

Nous pouvons décomposer un groupe réductif à l'aide de son groupe de Weyl. Cette décomposition est due à Bruhat. Elle est explicitée dans le théorème suivant.

Théorème 2.2.4 ([**Hu2**], Theorem 28.3). *Soit G un groupe réductif, B un sous-groupe de Borel et W son groupe de Weyl. Alors $G = \bigsqcup_{\sigma \in W} B\sigma B$, avec $B\omega B = B\tau B$ si et seulement si $\omega = \tau$.*

Exemple 2.2.3. *Cette décomposition est bien connue dans le cas de $GL(n, \mathbb{C})$. Une matrice $g \in GL(n, \mathbb{C})$ peut s'écrire comme $g = b\sigma b'$ avec b et b' des matrices triangulaires supérieures et σ une matrice de permutation.*

Cette décomposition ne nous informe pas sur la topologie de G et des cellules $B\sigma B$ de la décomposition. Il existe une cellule particulière, appelée la grande cellule de Bruhat et notée Ω, qui est un ouvert de G. Soit $\omega_0 \in W(G, T)$ l'élément qui permet de passer de B à B^-. Alors $B\omega_0^{-1}B$ est une cellule ouverte de G. On pose $\Omega = B_u^- B$, qui est simplement un translaté de cette cellule par ω_0. C'est un ouvert dense de G. Nous travaillerons à plusieurs reprise avec cet ouvert et avec ses translatés. La section 28.5 de [**Hu2**] traite de l'existence de cet ouvert.

Une autre décomposition nous intéresse. C'est celle de la variété projective G/P où P est un sous-groupe parabolique de G. Cette décomposition se trouve dans **[B-L]**. Pour la comprendre, il faut se rappeler de la décomposition de P dont nous avons discutée dans le théorème 2.2.2.

Théorème 2.2.5. *Soit G un groupe algébrique réductif, P un sous-groupe parabolique de G et L un facteur de Levi de P. Notons W le groupe de Weyl de G et W_L celui de L. Alors,*

$$G/P = \bigsqcup_{\sigma \in W/W_L} B\sigma P/P.$$

En particulier, $B\omega_0 P/P$ est un ouvert dense de G/P et les translatés $\sigma B\omega_0 P/P$, où $\sigma \in W/W_L$, recouvrent G/P.

2.3. Caractères

Définition 2.3.1. *Soit G un groupe algébrique. Un caractère (rationnel) de G est un homomorphisme de groupes algébriques $\lambda : G \to \mathbb{C}^\times$.*

L'ensemble des caractères de G, que nous noterons $X(G)$, peut être muni d'une structure de groupe abélien. Si μ et λ sont deux caractères de G, on obtient le caractère $\mu\lambda$ en multipliant leur valeur : $\mu\lambda(x) = \mu(x)\lambda(x)$. Notons que $X(G)$ est un sous-ensemble de $\mathbb{C}[G]$, l'anneau de coordonnées de G. En effet, puisqu'un caractère $\lambda : G \to \mathbb{C}^\times$ est un morphisme de variétés algébriques, pour toute fonction $f \in \mathbb{C}[\mathbb{C}^\times] = \mathbb{C}[x, \frac{1}{x}]$, la composition $f \circ \lambda$ est dans l'anneau de coordonnées $\mathbb{C}[G]$. Entre autre, pour la fonction $f(x) = x$, la composition $f \circ \lambda = \lambda$ est incluse dans $\mathbb{C}[G]$.

Nous allons nous intéresser plus particulièrement aux caractères du groupe des matrices diagonales inversibles $T(n, \mathbb{C})$. D'après la remarque ci-dessus, $\lambda \in \mathbb{C}[T(n, \mathbb{C})] = \mathbb{C}[x_{11}, \ldots, x_{nn}, \frac{1}{x_{11}}, \ldots, \frac{1}{x_{nn}}]$, de sorte que λ est un polynôme en x_{ii} et en $\frac{1}{x_{ii}}$. De plus, puisque λ est aussi un homomorphisme de groupe, λ doit être un monôme. Ainsi, tous les caractères de $T(n, \mathbb{C})$ sont de la forme

$$\lambda(t) = \lambda(\begin{pmatrix} t_{11} & \ldots & 0 \\ & \ldots & \\ 0 & \ldots & t_{nn} \end{pmatrix}) = t_{11}^{\lambda_1} t_{22}^{\lambda_2} \ldots t_{nn}^{\lambda_n},$$

avec $\lambda_i \in \mathbb{Z}$.

On remarque qu'il existe un isomorphisme de groupe $X(T(n,\mathbb{C})) \simeq \mathbb{Z}^n$. En effet, à un caractère $\lambda(t) = t_{11}^{\lambda_1} t_{22}^{\lambda_2} \dots t_{nn}^{\lambda_n}$, on peut associer le n-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Cette application est bijective et respecte les opérations de groupe ce qui en fait un isomorphisme. En raison de cette identification, nous écrirons souvent les opérations de groupe sur les caractères avec les notations additives. Par exemple, pour un caractère $\lambda \in X(T(n,\mathbb{C}))$, $-\lambda(t) = \lambda^{-1}(t) = \lambda(t^{-1})$.

Le groupe des caractères d'un tore $T \simeq T(n,\mathbb{C})$ peut aussi être identifié à $\mathbb{Z}^n$. Cette identification sera utilisée tout au long des deux prochains chapitres.

Nous sommes aussi intéressés à étudier les caractères de B, un sous-groupe de Borel d'un groupe algébrique G. L'étude des caractères des matrices diagonales $T(n,\mathbb{C})$ s'est faite entre autre dans ce but. Si on considère un tore T maximal dans le sous-groupe B, on peut montrer que tous les caractères de B proviennent de caractères de T. Pour cela, nous devons comprendre comment B se décompose comme produit semi-direct.

Le sous-groupe B_u des éléments unipotents de B est un sous-groupe normal de B. On peut montrer que $B = TB_u$ et que $T \cap B_u = e$, l'élément neutre de G. De cela, on déduit que $B \simeq T \ltimes B_u$ comme groupe, où T agit sur B_u par conjugaison. Mais ce sera aussi un isomorphisme de groupes algébriques. Les justifications de ces affirmations se trouvent dans la section 19.3 de [**Hu2**]. Or, il n'existe pas de caractère non trivial sur B_u. Ceci est dû au fait que B_u est un groupe unipotent et donc l'image d'un caractère de B_u est un sous-groupe unipotent de $\mathbb{C}^\times$ et donc ne peut être que l'identité. Ainsi, les seuls caractères de B sont ceux hérités de T et qui sont étendus trivialement sur B_u. Pour cette raison, nous allons souvent considérer $X(B)$ et $X(T)$ comme étant un même objet, au sens qu'un caractère de B sera toujours vu comme un caractère de T sans la mention explicite qu'il est étendu trivialement sur B_u. Il y a cependant une différence qu'il est important de noter. Le groupe de Weyl agit de façon naturelle sur les caractères de T, mais cette action ne s'étend pas aux caractères de B.

Étudions cette action du groupe de Weyl $W(G,T)$ sur les caractères de T. Soit $\omega \in W$. Considérons n_ω une représentant de ω dans G et λ un caractère dans $X(T)$. On peut définir une action de ω sur λ par $\omega\lambda(t) = \lambda(n_\omega^{-1} t n_\omega)$. Cette action ne dépend pas du choix du représentant de ω. En effet, soit $n' = n_\omega h$ avec $h \in T$, un autre représentant de

ω. Nous obtenons alors $\lambda(n'^{-1}tn') = \lambda(h^{-1}n_\omega^{-1}tn_\omega h)$. Or T est commutatif et $n_\omega \in N_G(T)$, d'où $h^{-1}n_\omega^{-1}tn_\omega h = h^{-1}hn_\omega^{-1}tn_\omega = n_\omega^{-1}tn_\omega$. Ainsi, $\lambda(n'^{-1}tn') = \lambda(n_\omega^{-1}tn_\omega)$ et donc, l'action de W sur $X(T)$ est bien définie.

2.4. Les racines d'un groupe G

Lors de l'étude de $SL(2,\mathbb{C})$ nous avons mis en évidence deux caractères particuliers, α_2 et α_{-2}, qui vérifiaient des égalités en termes de matrices de $U(2,\mathbb{C})$ et de $U^-(2,\mathbb{C})$. Nous avions appelés ces caractères les racines de $SL(2,\mathbb{C})$. Dans cette section, nous allons définir la notion de racine pour un groupe réductif G. Nous les séparerons en termes de racines positives et négatives. Nous verrons ensuite comment elles nous permettent de mettre de l'avant une certaine classe de caractères : les caractères dominants.

Tout au long de la section, G sera un groupe réductif, B un sous-groupe de Borel de G et T un tore maximal de G contenu dans B. Nous étudierons en parallèles l'exemple de $GL(n,\mathbb{C})$ afin de faciliter la compréhension. Dans ces exemples, nous utiliserons $B(n,\mathbb{C})$ le sous-groupe des matrices triangulaires supérieurs comme sous-groupe de Borel et $T(n,\mathbb{C})$ le sous-groupe des matrices diagonales comme tore maximal.

Définition 2.4.1. *Soit $\alpha : T \to \mathbb{C}^\times$ un caractère non trivial tel qu'il existe un morphisme injectif de groupes algébriques qui est normalisé par T, c'est à dire un morphisme*

$$\varepsilon_\alpha : (\mathbb{C},+) \to G$$

tel que $\forall t \in T$ et $\forall u \in \mathbb{C}$, $t\varepsilon_\alpha(u)t^{-1} = \varepsilon_\alpha(\alpha(t)u)$. Nous appelerons ces caractères des racines de G et nous noterons $R(G,T)$, ou tout simplement R si cela ne porte pas à confusion, l'ensemble des caractères qui vérifient cette condition.

Nous noterons $G_\alpha = \varepsilon_\alpha(\mathbb{C})$, l'image de $\mathbb{C}$ par le morphisme ε_α. Puisqu'il est l'image d'un homomorphisme de groupe, G_α est un sous-groupe fermé de G. Notons que $R(G,T)$ est un ensemble de cardinalité finie. Ceci se démontre avec un passage à l'algèbre de Lie de G et de T.

Nous avons défini une action du groupe de sur les caractères de T. Nous allons maintenant montrer que cette action fermée dans $R(G,T)$. Soit $\alpha \in R$ et $\omega \in W$.

Choisissons n_ω un représentant de ω. On définit

$$\begin{array}{rccc} \varepsilon_{\omega\alpha}: & \mathbb{C} & \longrightarrow & G \\ & u & \longmapsto & n_\omega \varepsilon_\alpha(u) n_\omega^{-1}. \end{array}$$

Ainsi défini, $\varepsilon_{\omega\alpha}$ est bien un homomorphisme injectif de groupe algébrique. On vérifie alors que pour $t \in T$, $t\varepsilon_{\omega\alpha}(u)t^{-1} = \varepsilon_{\omega\alpha}(\omega\alpha(t)u)$. En effet,

$$\begin{aligned} t\varepsilon_{\omega\alpha}(u)t^{-1} &= tn_\omega\varepsilon_\alpha(u)n_\omega^{-1}t^{-1} \\ &= n_\omega n_\omega^{-1} tn_\omega \varepsilon_\alpha(u) n_\omega^{-1} t^{-1} n_\omega n_\omega^{-1} \\ &= n_\omega \varepsilon_\alpha(\alpha(n_\omega^{-1} t n_\omega)u) n_\omega^{-1} \\ &= n_\omega \varepsilon_\alpha(\omega\alpha(t)u) n_\omega^{-1}. \end{aligned}$$

Cela nous permet de conclure que pour toute racine $\alpha \in R$ et pour tout $\omega \in W$, le caractère $\omega\alpha$ est aussi une racine de G.

Exemple 2.4.1. *Considérons le caractère $\alpha = \alpha_{ij} : T(n, \mathbb{C}) \to GL(n, \mathbb{C})$ défini par*

$$\alpha_{ij}(t) = t_{ii}t_{jj}^{-1}$$

avec $i \neq j$. On notera E_{ij} la matrice telle que $(E_{ij})_{ij} = 1$ et telle que toutes les autres entrées de la matrice sont nulles. Nous pouvons définir un morphisme

$$\varepsilon_\alpha : (\mathbb{C}, +) \to GL(n, \mathbb{C})$$

par $\varepsilon_\alpha(u) = 1 + uE_{ij}$. Ceci est bien un morphisme de groupes algébriques. De plus $T(n, \mathbb{C})$ agit par conjugaison sur $GL(n, \mathbb{C})$ et

$$t\varepsilon_\alpha(u)t^{-1} = t(1 + uE_{ij})t^{-1} = 1 + t_{ii}t_{jj}^{-1}uE_{ij} = \varepsilon_\alpha(\alpha(t)u).$$

Ainsi, $\forall i \neq j$, le caractère α_{ij} est une racine de $GL(n, \mathbb{C})$. Remarquons aussi que pour $\alpha = \alpha_{ij}$, $-\alpha = \alpha_{ji}$. En effet, $-\alpha(t) = \alpha(t)^{-1} = t_{ii}^{-1}t_{jj} = \alpha_{ji}(t)$. L'image de ε_α est le groupe G_α. Il consiste en l'ensemble des matrices m de $GL(n, \mathbb{C})$ telles que $m_{ll} = 1$, $\forall l \in \{1, \ldots, n\}$, $m_{ij} \in \mathbb{C}$ et $m_{kl} = 0$ si $k \neq i$ ou $l \neq j$.

Les caractères α de la forme $\alpha = \alpha_{ij}$ sont en fait les seules racines de G. On déduit cela en étudiant la matrice tgt^{-1} où $g \in GL(n, \mathbb{C})$ et $t \in T(n, \mathbb{C})$. On remarque alors que pour $i \neq j$, $(tgt^{-1})_{ij} = t_{ii}t_{jj}^{-1}g_{ij}$ et $(tgt^{-1})_{ii} = g_{ii}$. En combinant à cela la définition d'homomorphisme de groupe algébrique, on obtient notre conclusion.

Nous savons que le groupe de Weyl de $GL(n,\mathbb{C})$ est le groupe des permutations sur n éléments, noté S_n. On veut étudier l'action de W sur un caractère $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Soit ω une permutation de W et n_ω sa matrice de permutation associée. Si

$$t = (t_{11}, t_{22}, \ldots, t_{nn})$$

est une matrice diagonale, alors

$$n_\omega^{-1} t n_\omega = (t_{\omega 1 \omega 1}, t_{\omega 2 \omega 2}, \ldots, t_{\omega n \omega n}).$$

Ainsi,

$$\omega\lambda(t) = \lambda(n_\omega^{-1} t n_\omega) = t_{\omega 1 \omega 1}^{\lambda_1} t_{\omega 2 \omega 2}^{\lambda_2} \cdots t_{\omega n \omega n}^{\lambda_n}.$$

Nous obtenons finalement que

$$\omega\lambda = (\lambda_{\omega^{-1}1}, \lambda_{\omega^{-1}2}, \ldots, \lambda_{\omega^{-1}n}).$$

Soit α une racine de G. Posons $T_\alpha = \ker(\alpha)^\circ$, la composante de l'identité du noyau de α. Bien entendu, T_α est un sous-groupe de T. Posons $Z_\alpha = C_G(T_\alpha)$, le centralisateur dans G de T_α. Il est possible de montrer que le rang semi-simple de Z_α est un, **[Hu2]** section 24.3. Ainsi, d'après le théorème 25.3 de **[Hu2]** le groupe de Weyl de Z_α comporte exactement deux éléments. Notons s_α l'élément du groupe de Weyl de Z_α qui n'est pas l'identité. Notons que s_α est un élément d'ordre deux puisque $W(Z_\alpha, T)$ ne comporte que deux éléments. Nous appelerons s_α la réflexion par rapport à α.

Puisque $T \subseteq Z_\alpha$, on a nécessairement que T est un tore maximal de Z_α. Ainsi le groupe de Weyl de Z_α peut être vu comme un sous-groupe du groupe de Weyl de G. De sorte que s_α peut être vu comme un élément de $W(G,T)$. Cet élément à la propriété particulière que $s_\alpha\alpha = -\alpha$, [**B3**] proposition 13.14. Nous avons vu précédemment que dans ce cas, $-\alpha$ sera aussi une racine de G puisque ce caractère est obtenu à partir de α par l'action d'un élément du groupe de Weyl. Ainsi, les racines de $R(G,T)$ viennent par paire : si $\alpha \in R(G,T)$, alors $-\alpha \in R(G,T)$ et il existe $s_\alpha \in W(G,T)$ tel que $s_\alpha\alpha = -\alpha$.

Il est à noter que pour chaque racine α et pour chaque caractère λ, il existe un $n \in \mathbb{Z}$ tel que $s_\alpha\lambda = \lambda - n\alpha$. Cela est prouvé dans la section 27.2 de [**Hu2**]. Nous noterons ce n par $\langle\alpha, \lambda\rangle$. Nous allons énoncer quelques propriétés de l'application

$$\langle , \rangle : R(G,T) \times X(T) \to \mathbb{Z}.$$

Proposition 2.4.1. *L'application* $\langle , \rangle : R(G,T) \to X(T)$ *vérifie les propriétés suivantes :*

(1) $\langle \alpha, \lambda_1 + \lambda_2 \rangle = \langle \alpha, \lambda_1 \rangle + \langle \alpha, \lambda_2 \rangle$ *;*

(2) $\forall \omega \in W(G,T)$, $\langle \omega\alpha, \omega\lambda \rangle = \langle \alpha, \lambda \rangle$ *;*

(3) $\langle -\alpha, -\lambda \rangle = \langle \alpha, \lambda \rangle$.

Démonstration. Tout au long de la preuve, t sera un élément de T et nous noterons $\dot{\omega}$ un représentant de $\omega \in W(G,T)$.
(1) Il suffit de montrer que $s_\alpha(\lambda_1 + \lambda_2) = s_\alpha\lambda_1 + s_\alpha\lambda_2$, puisque dans ce cas,

$$s_\alpha(\lambda_1+\lambda_2) = s_\alpha\lambda_1+s_\alpha\lambda_2 = \lambda_1-\langle\alpha,\lambda_1\rangle\alpha+\lambda_2-\langle\alpha,\lambda_2\rangle\alpha = (\lambda_1+\lambda_2)-(\langle\alpha,\lambda_1\rangle+\langle\alpha,\lambda_2\rangle)\alpha.$$

Or,

$$s_\alpha(\lambda_1+\lambda_2)(t) = (\lambda_1+\lambda_2)(\dot{s}_\alpha^{-1}t\dot{s}_\alpha) = \lambda_1(\dot{s}_\alpha^{-1}t\dot{s}_\alpha)\lambda_2(\dot{s}_\alpha^{-1}t\dot{s}_\alpha) = s_\alpha\lambda_1(t)s_\alpha\lambda_2(t) = (s_\alpha\lambda_1+s_\alpha\lambda_2)(t).$$

Cela nous permet donc de terminer la preuve de cette première propriété.

(2) Il faut d'abord remarquer qu'on peut choisir $\dot{\omega}\dot{s}_\alpha\dot{\omega}^{-1}$ comme représentant de $s_{\omega\alpha}$. En effet, on voit tout d'abord que $\dot{\omega}\dot{s}_\alpha\dot{\omega}^{-1}$ est bien un élément de $N_G(T)$. De plus, il nous faut montrer que $\omega\alpha((\dot{\omega}\dot{s}_\alpha\dot{\omega}^{-1})^{-1}t\dot{\omega}\dot{s}_\alpha\dot{\omega}^{-1}) = -\omega\alpha(t)$. Or,

$$\omega\alpha((\dot{\omega}\dot{s}_\alpha\dot{\omega}^{-1})^{-1}t\dot{\omega}\dot{s}_\alpha\dot{\omega}^{-1} = \alpha(\dot{s}_\alpha^{-1}\dot{\omega}^{-1}t\dot{\omega}\dot{s}_\alpha) = -\alpha(\dot{\omega}^{-1}t\dot{\omega}) = -\omega\alpha(t).$$

En montrant que $\dot{\omega}\dot{s}_\alpha\dot{\omega}^{-1}$ est dans $Z_{\omega\alpha}$, nous saurons alors que c'est bien un représentant de $s_{\omega\alpha}$. Soit $z \in \ker(\omega\alpha)$. On veut montrer que $\dot{\omega}\dot{s}_\alpha\dot{\omega}^{-1}z(\dot{\omega}\dot{s}_\alpha\dot{\omega}^{-1})^{-1} = z$. Or, en remarquant que $\dot{\omega}^{-1}z\dot{\omega} \in \ker(\alpha)$, on obtient le résultat souhaité.
On observe alors que

$$\begin{aligned}
s_{\omega\alpha}(\omega\lambda)(t) &= (\omega\lambda)((\dot{\omega}\dot{s}_\alpha^{-1}\dot{\omega}^{-1})^{-1}t\dot{\omega}\dot{s}_\alpha\dot{\omega}^{-1}) \\
&= \lambda(\dot{s}_\alpha^{-1}\dot{\omega}^{-1}t\dot{\omega}\dot{s}_\alpha) \\
&= \lambda(\dot{\omega}^{-1}t\dot{\omega}) - \langle\alpha,\lambda\rangle\alpha(\dot{\omega}^{-1}t\dot{\omega}^{-1}) \\
&= \omega\lambda(t) - \langle\alpha,\lambda\rangle\omega\alpha(t).
\end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve de cette propriété.

(3) Une fois qu'on remarque que $s_\alpha = s_{-\alpha}$, la preuve est directe.

□

Exemple 2.4.2. *Soit $\alpha = \alpha_{ij}$ une racine de $GL(n, \mathbb{C})$. Pour plus de commodité au niveau des notations, nous allons choisir $i < j$. On observe tout d'abord que*

$$\ker(\alpha) = \{t \in T(n, \mathbb{C}) \mid t_{ii} = t_{jj}\}.$$

Le centralisateur dans $GL(n, \mathbb{C})$ du noyau de α est l'ensemble des matrices $g \in GL(n, \mathbb{C})$ dont les seules entrées non nulles sont sur la diagonale, en g_{ij} ou en g_{ji}. La réflexion s_α se trouve à être la permutation (ij). Nous pouvons choisir un représentant n_α de s_α qui s'écrit comme $n_\alpha = 1 + E_{ij} + E_{ji} - E_{ii} - E_{jj}$. Cet élément est bien dans $C_{GL(n,\mathbb{C})}\ker(\alpha)$. L'action de s_α sur un élément de $t \in T$ se trouve à interchanger les valeurs t_i et t_j. Ainsi, pour un caractère $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $s_\alpha\lambda(t) = \lambda(s_\alpha t) = t_1^{\lambda_1} \ldots t_i^{\lambda_j} \ldots t_j^{\lambda_i} \ldots t_n^{\lambda_n}$. Posons $m = \lambda_i - \lambda_j$. Alors, $\alpha(t)^m = (t_i t_j^{-1})^m = t_i^{\lambda_i - \lambda_j} t_j^{-\lambda_i + \lambda_j}$. Ainsi, $s_\alpha\lambda(t)\alpha(t)^m = t_1^{\lambda_1} \ldots t_i^{\lambda_j} \ldots t_j^{\lambda_i} \ldots t_n^{\lambda_n} t_i^{\lambda_i - \lambda_j} t_j^{-\lambda_i + \lambda_j} = \lambda(t)$. En revenant aux notations additives, on observe que pour $\lambda \in X(T)$ et pour $\alpha = \alpha_{ij}$

$$\lambda = s_\alpha\lambda + (\lambda_i - \lambda_j)\alpha.$$

Ainsi pour λ un caractère de $T(n, \mathbb{C})$ et $\alpha = \alpha_{ij}$ une racine de G, $\langle \alpha, \lambda \rangle = \lambda_i - \lambda_j$.

Rappelons-nous que nous avons choisi B un sous-groupe de Borel de G.

Définition 2.4.2. *Soit $\alpha \in R$.*

1. On dira que $\alpha > 0$ si $\varepsilon_\alpha(\mathbb{C}) \subseteq B$. Nous noterons R^+, l'ensemble des racines positives. Une racine α est négative si $s_\alpha\alpha = -\alpha$ est positive. Nous noterons R^-, l'ensemble des racines négatives.

2. Une racine positive α est appelée simple s'il n'existe pas deux racines positives β_1, β_2 telles que $\alpha = \beta_1 + \beta_2$. Nous noterons $\triangle$, l'ensemble des racines simples de R. On appelera la réflexion s_α simple si la racine α est simple.

Il est possible de montrer que $R = R^+ \bigsqcup R^-$. Cela se voit par un passage à l'algèbre de Lie de G. Pour plus de détails, le lecteur est référé à la section 26.3 de **[Hu2]**.

Remarque 2.4.1. *Le choix du sous-groupe de Borel B détermine quelles racines seront positives. Un choix différent changerait les ensembles R^+ et $\triangle$. Il faut seulement garder* *en tête qu'un tel choix a été effectué et garder ce même groupe de Borel tout au long des calculs.*

Exemple 2.4.3. *Nous avons choisi $B(n, \mathbb{C})$, le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures, comme sous-groupe de Borel. Les racines positives sont les caractères α_{ij} tels que $i < j$. Les racines simples correspondent aux caractères α_{ii+1}. En effet, si $j > i+1$, alors $\alpha_{ij} = \alpha_{ii+1} + \alpha_{i+1j}$, de sorte que cette racine n'est pas simple. Réciproquement, il est impossible d'écrire α_{ii+1} comme somme de deux racines positives.*

Considérons $\alpha = \alpha_{ii+1}$ une racine simple. Nous voulons montrer que P_α/B est isomorphe à $\mathbb{C}P^1$. Nous savons que $P_\alpha =< B, G_{-\alpha} >=< B, 1 + uE_{i+1i} \mid u \in \mathbb{C} >$. Ce sous-groupe consiste en toutes les matrices $m \in GL(n, \mathbb{C})$ telle que $m_{kl} \neq 0$ seulement si $k \leq l$ ou si $k = i + 1$ et $l = i$. Visuellement, ce sont les matrices de la forme

$$m = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & & \dots & & m_{1n} \\ 0 & m_{22} & & \dots & & m_{2n} \\ & & & \dots & & \\ 0 & \dots & m_{ii} & m_{ii+1} & \dots & m_{in} \\ 0 & \dots & m_{i+1i} & m_{i+1i+1} & \dots & m_{in} \\ & & & \dots & & \\ 0 & 0 & & \dots & 0 & m_{nn} \end{pmatrix}.$$

Définition 2.4.3. *Soit $\lambda \in X(T)$ et $\alpha \in \Delta$, une racine simple de G. On dira que $\lambda >_\alpha s_\alpha(\lambda)$ si $\lambda = s_\alpha(\lambda) + n\alpha$ avec n un entier positif, ce qui correspond à dire que l'entier $\langle \alpha, \lambda \rangle$ est positif. On appelera le caractère λ dominant si pour toutes les racines simples α, $\lambda >_\alpha s_\alpha(\lambda)$. En particulier, λ n'est pas dominant s'il existe une racine simple α telle que $\langle \alpha, \lambda \rangle$ est strictement négatif.*

Exemple 2.4.4. *Nous avons vu que pour une racine simple $\alpha = \alpha_{ii+1}$ et λ un caractère de T, $\langle \alpha, \lambda \rangle = \lambda_i - \lambda_{i+1}$. Ainsi $\lambda >_\alpha s_\alpha \lambda$ si $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$. En particulier, un caractère λ est dominant si $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$.*

2.5. Le groupe de Weyl

Dans la section 2.2, nous avons défini le groupe de Weyl $W(G, T)$ d'un groupe réductif G. Nous avons vu comment il agit sur les sous-groupes de Borel de G qui contiennent le tore T. Nous avons aussi étudié son action sur les caractères de T. Dans la section 2.4, nous avons défini certains éléments particuliers de ce groupe : les réflexions simples. Dans cette section, nous étudierons plus en détail le groupe de Weyl et son action sur les caractères de T en nous servant des réflexions simples.

L'ensemble des résultats de cette section peuvent se trouver dans le chapitre 5 de **[S1]**. Nous les énoncerons ici sans preuve. Ils se basent en grande partie sur les propriétés de l'application $\langle , \rangle$.

Nous avons défini $\triangle$ comme l'ensemble des racines simples dans $R(G,T)$. Cet ensemble forme une base de $R(G,T)$ au sens où toute racine β a une expression unique $\beta = \sum_{\alpha \in \triangle} c_\alpha \alpha$ avec les c_α des entiers de même signe. Les c_α seront positifs si la racine est positive et négative si la racine l'est. Le lemme suivant se déduit de cette décomposition unique.

Lemme 2.5.1. *Soit α une racine simple. Alors s_α permute les racines positives $R^+ \setminus \{\alpha\}$.*

Nous aurons maintenant besoin de travailler non plus avec le groupe $X(T)$, mais avec l'espace vectoriel $X(T) \otimes \mathbb{Q}$. Nous allons appeler les éléments de $X(T) \otimes \mathbb{Q}$ des caractères abstraits de T. Dans un premier temps, nous allons définir l'action d'une réflexion sur un élément de $X(T) \otimes \mathbb{Q}$ de façon naturelle :

$$s_\alpha(\lambda \otimes q) = s_\alpha \lambda \otimes q.$$

On prolonge cette application linéairement sur $X(T) \otimes \mathbb{Q}$. On peut montrer que cette action est bien définie. En particulier, cela nous permet de prolonger l'application

$$\langle , \rangle : R(G,T) \times X(T) \to \mathbb{Z},$$

à l'application

$$\langle , \rangle : R(G,T) \times X(T) \otimes \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}\,.$$

On obtient alors que pour $\lambda \in X(T)$ et $q \in \mathbb{Q}$,

$$\langle \alpha, \lambda \otimes q \rangle = q\langle \alpha, \lambda \rangle.$$

Remarque 2.5.1. *Les caractères abstraits ne sont pas en général des caractères de T. Nous avons introduit cette notion parce que certains éléments avec lesquels nous devrons travailler ne sont pas dans le groupe $X(T)$. On peut cependant voir chaque élément $\lambda \in X(T)$ comme un élément de $X(T) \otimes \mathbb{Q}$ en l'identifiant au caractère abstrait $\lambda \otimes 1$.*

Nous avons noté $\triangle$ l'ensemble des racines simples de $R(G,T)$. Nous pouvons numéroter les éléments de cet ensemble $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$. Il existe alors des éléments $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ de l'espace vectoriel $X(T) \otimes \mathbb{Q}$ tels que $\langle \alpha_i, \lambda_j \rangle = \delta_{ij}$. Nous appellerons ces vecteurs des poids dominants fondamentaux. Tout caractère λ s'écrit comme combinaison $\mathbb{Z}$-linéaire de poids dominants fondamentaux. Cela nous permet de d'étendre la définition de caractère dominant. Nous dirons qu'un caractère abstrait λ de $X(T) \times \mathbb{Q}$ est dominant si et seulement si $\lambda = \sum_{i=1}^{m} c_i \lambda_i$ avec les $c_i \in \mathbb{Z}^+$. Les propriétés que nous venons de mentionner se trouvent dans [**B2**], section 2. Elles s'expliquent par le fait que l'ensemble $\triangle$ forme une base de $X(T) \otimes \mathbb{Q}$.

Exemple 2.5.1. *Pour* $SL(n, \mathbb{C})$, $\triangle = \{\alpha_{ii+1},\ i = 1, \ldots, n-1\}$. *En numérotant* $\alpha_i = \alpha_{ii+1}$, *on obtient les poids dominants fondamentaux* $\lambda_i = (1, 1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ *où la dernière coordonnée non nulle est à la position i. On remarque que dans ce cas particulier, les poids dominants fondamentaux sont dans* $X(T)$.

Nous travaillerons avec un élément particulier de $X(T) \otimes \mathbb{Q}$ que nous noterons ρ et qui consiste en la demie somme de toutes les racines positives :

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{\beta \in R^+} \beta.$$

Nous serons intéressés par l'action d'une réflexion simple, sur cet élément. Le lemme 2.5.1 nous permet de vérifier que $s_\alpha \rho = \rho - \alpha$. Cela nous permet entre autre de déduire que pour toute racine positive α, $\langle \alpha, \rho \rangle = 1$.

Nous énonçons maintenant à un théorème central pour comprendre le groupe de Weyl de G. Il justifie à lui seul l'importance des racines simples d'un groupe algébrique réductif.

Théorème 2.5.1. *Soit* $\omega \in W$. *Alors* ω *peut s'écrire comme le produit de réflexions simples*

Avec ce lemme, nous pouvons définir une longueur sur les éléments de W. On définit la longueur de ω, notée $l(\omega)$, comme étant le plus petit entier r tel que $\omega = s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} \ldots s_{\alpha_r}$ où $\alpha_i \in \triangle$. En particulier, $l(\omega) = 1$ si et seulement si $\omega = s_\alpha$ avec $\alpha \in \triangle$. La longueur de l'élément neutre du groupe est 0.

La longueur d'un élément $\omega \in W$ peut aussi être caractérisée comme le nombre de racine positive que ω envoit sur des racines négatives. On voit que dans le cas d'une réflexion simple, ces deux définitions sont équivalentes puisque pour α une racine simple, s_α permute $R^+ \setminus \{\alpha\}$ et envoit α sur $-\alpha$.

Il existe un élément de longueur maximale dans W que nous noterons par ω_0. Cet élément envoit toutes les racines positives vers des racines négatives et donc, $l(\omega) = |R^+|$. Puisque ω_0^2 envoit toutes les racines positives sur des racines positives, on déduit que $l(\omega_0) = 0$. Ce qui veut dire que ω_0^2 est l'identité. Ainsi, ω_0 est un élément d'ordre 2 dans W.

Remarque 2.5.2. *Dans la section 2.1, nous avions noté ω_0 l'élément du groupe de Weyl de G qui nous permettait de passer de B à son sous-groupe opposé B^-. Cette notation concorde avec celle que nous venons d'établir puisque c'est bien le plus long élément de W qui nous permet de passer de B à B^-.*

Exemple 2.5.2. *Nous savons que le groupe de Weyl de $GL(n, \mathbb{C})$ correspond au groupe de permutation à n éléments S_n. Un résultat de base de théorie des goupes nous dit que toute permutation peut s'écrire comme un produit de permutation de la forme $(ii+1)$. Ces permutations correspondent aux réflexions $s_{\alpha_{ii+1}}$.*

La longueur d'une permuation peut aussi être caractérisée comme le nombre de croisements obtenus lorsqu'on représente une premutation comme dans la figure 2.1. À partir de cette caractérisation, il est facile de voir que le plus long élément de W

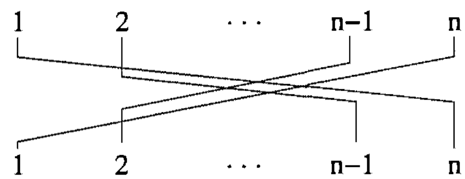

FIG. 2.1. Permutation

sera la permutation

$$\omega_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il est évident que cette permutation est d'ordre 2. De plus, $\omega_0\alpha_{ij} = \alpha_{n-i+1,n-j+1}$. Ainsi si $i < j$, c'est-à-dire si α_{ij} est une racine positive, $\omega_0\alpha_{ij}$ est une racine négative puisque dans ce cas, $n-i+1 > n-j+1$.

Soit λ un caractère non dominant et soit α une racine simple telle que $\langle \alpha, \lambda \rangle < 0$. Le caractère $s_\alpha \lambda - \alpha$ apparaîtra dans la section 5.4. Nous allons l'exprimer en termes de ρ, ce qui nous facilitera vie par la suite. Montrons que $s_\alpha(\lambda) - \alpha = s_\alpha(\lambda + \rho) - \rho$. En effet, $s_\alpha(\lambda+\rho) = s_\alpha\lambda + s_\alpha\rho = s_\alpha\lambda + \rho - \alpha$. Ainsi $s_\alpha(\lambda+\rho) - \rho = s_\alpha\lambda + \rho - \alpha - \rho = s_\alpha\lambda - \alpha$. Nous obtenons donc l'égalité souhaitée. En particulier, cela veut dire que $s_\alpha(\lambda + \rho) - \rho$ est dans $X(T)$.

L'intérêt de travailler avec $s_\alpha(\lambda + \rho) - \rho$ plutôt qu'avec $s_\alpha\lambda - \alpha$ apparaît lorsqu'on veut composer des réflexions. Supposons que β soit une autre racine simple. Posons $\lambda_2 = s_\alpha(\lambda + \rho) - \rho$. Alors, on sait que $s_\beta(\lambda_2 + \rho) - \rho = s_\beta\lambda_2 - \beta$ et

$$\begin{aligned} s_\beta(\lambda_2 + \rho) - \rho &= s_\beta(\lambda_2) - \beta \\ &= s_\beta(s_\alpha(\lambda + \rho) - \rho) - \beta \\ &= s_\beta s_\alpha(\lambda + \rho) - \rho + \beta - \beta \\ &= s_\beta s_\alpha(\lambda + \rho) - \rho. \end{aligned}$$

Ainsi en se donnant un caractère λ, une suite de réflexions simples s_{α_i}, $i = 1, \ldots, m$ et en définissant

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \lambda \\ \lambda_1 &= s_{\alpha_1}\lambda - \alpha_1 \\ &\ldots \\ \lambda_{i+1} &= s_{\alpha_{i+1}}\lambda_i - \alpha_{i+1}, \end{aligned}$$

on obtient par induction que

$$s_{\alpha_m}\lambda_m - \alpha_m = s_{\alpha_m} \ldots s_{\alpha_2} s_{\alpha_1}(\lambda_0 + \rho) - \rho.$$

Théorème 2.5.2. *Soit λ un caractère abstrait. Alors il existe un unique caractère μ dominant et un unique élément $\omega \in W$ tels que $\omega\lambda = \mu$.*

Cela veut dire que chaque caractère abstrait est conjugué à un seul caractère abstrait dominant. Ainsi pour le caractère abstrait $\lambda + \rho$, il existe un unique élément $\omega \in W$ tel que $\omega(\lambda+\rho)$ soit dominant. De plus, nous savons que $\omega(\lambda+\rho)-\rho$ est un caractère, et non pas seulement un caractère abstrait. Cependant, cela ne nous assure pas que $\omega(\lambda+\rho)-\rho$ soit aussi un caractère dominant. Étudions dans quelle situation $\omega(\lambda + \rho) - \rho$ n'est pas dominant.

Le caractère abstrait $\omega(\lambda + \rho)$ étant dominant, pour toute racine simple α, nous obtenons l'inégalité

$$\langle \alpha, \omega(\lambda + \rho) \rangle \geq 0.$$

Puisque $\langle \alpha, \rho \rangle = 1$, nous concluons que

$$\langle \alpha, \omega(\lambda + \rho) - \rho \rangle = \langle \alpha, \omega(\lambda + \rho) \rangle - \langle \alpha, \rho \rangle \geq -1.$$

Ainsi, $\omega(\lambda + \rho) - \rho$ n'est pas dominant si et seulement si il existe une racine simple α telle que $\langle \alpha, \omega(\lambda + \rho) - \rho \rangle = -1$, c'est-à-dire si et seulement si il existe une racine simple α telle que $\langle \alpha, \omega(\lambda + \rho) \rangle = 0$.

Nous appellerons un caractère λ *régulier* si pour toute racine positive β, $\langle \beta, \lambda + \rho \rangle \neq 0$. S'il existe une racine positive β telle que $\langle \beta, \lambda + \rho \rangle = 0$, nous dirons que λ est un *caractère singulier*. Entre autre, λ ne peut pas être dominant et être singulier simultanément.

Soit λ un caractère dominant et soit $\omega \in W$ l'unique élément du groupe de Weyl de G tel que $\omega(\lambda + \rho)$ soit un caractère abstrait dominant. Nous voulons vérifier que $\omega(\lambda + \rho) - \rho$ est bien dominant. Nous savons qu'il le sera si et seulement si $\langle \alpha, \omega(\lambda + \rho) \rangle \geq 0$ pour toute racine simple α. Suposons qu'il existe une racine simple α telle que $\langle \alpha, \omega(\lambda + \rho) \rangle = 0$. Nous savons que $\langle \alpha, \omega(\lambda + \rho) \rangle = \langle \omega^{-1}\alpha, \omega^{-1}\omega(\lambda + \rho) \rangle$. Ainsi,

$$\langle \omega^{-1}\alpha, \lambda + \rho \rangle = 0.$$

Posons $\beta = \omega^{-1}\alpha$. Nous obtenons alors que

$$\langle \beta, \lambda + \rho \rangle = 0 = \langle -\beta, \lambda + \rho \rangle.$$

Puisque β ou $-\beta$ est une racine positive, nous avons montré qu'il existe une racine positive μ telle que $\langle \mu, \lambda + \rho \rangle = 0$, ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle λ est un caractère régulier. Ainsi, nous savons que $\omega(\lambda + \rho) - \rho$ est bien dominant.

Cela nous permet de reformuler le théorème 2.5.2.

Théorème 2.5.3. *Soit λ un caractère régulier de T. Alors, il existe un unique élément ω du groupe de Weyl de G tel que $\omega(\lambda + \rho) - \rho$ soit dominant.*

Avant de terminer cette section, nous allons introduire une application qui sera importante dans le chapitre 4. On définit l'application $\pi : X(T) \to X(T)$ par

$$\pi(\lambda) = -\omega_0\lambda,$$

où ω_0 est le plus long élément de W. En choisissant un représentant n_0 de ω_0 et en s'appuyant sur le fait que ω_0 est d'ordre 2 dans W, on remarque que

$$\pi(\lambda)(n_0^{-1}tn_0) = -\lambda(t)$$

pour tout $t \in T$. Énonçons d'autres propriétés de l'application π qui nous seront utiles dans le chapitre 4.

Lemme 2.5.2. *Soit $\pi : X(T) \to X(T)$ l'application précédemment définie. Alors,*

(1) $\pi^2 = Id$;

(2) $\pi(\lambda)$ est dominant si et seulement si λ est dominant.

DÉMONSTRATION. (1) Soit λ un caractère de $X(T)$. Alors,

$$\pi(\pi(\lambda)) = -\omega_0(-\omega_0\lambda) = ((-\omega_0)(-\omega_0))(\lambda) = \lambda$$

puisque ω_0 est d'ordre 2 dans W.

(2) On doit se référer à quelques propriétés de l'application $\langle , \rangle$ que nous avons énoncées dans la proposition 2.4.1. Soit λ un caractère de $X(T)$ et α une racine simple. Alors, il existe une racine $\beta \in R^+(G,T)$ telle que $\omega_0\alpha = -\beta$. Nous obtenons alors

$$\langle \alpha, -\omega_0\lambda\rangle = \langle \omega_0\alpha, -\omega_0\omega_0\lambda\rangle = \langle -\beta, -\lambda\rangle = \langle \beta, \lambda\rangle$$

qui est positif si et seulement si λ est dominant. Ainsi, l'application π permute les caractères dominants de $X(T)$.

□

2.6. Les poids d'une représentation

Nous pouvons maintenant faire un lien entre les caractères d'un tore d'un groupe algébrique G et les représentations de ce groupe G. Soit $\rho : G \to GL(V)$ une représentation de G. Pour chaque caractère λ de G, on peut définir l'espace

$$V_\lambda = \{v \in V \mid \rho(g)v = \lambda(g)v \ \forall g \in G\}.$$

Les sous-espaces V_λ sont G-stables. Si V_λ est non nul, on dira que λ est un poids de G. Si λ est un caractère dominant pour lequel V_λ est non nul, on parlera alors de poids dominant.

Similairement, si L est un sous-espace de dimension 1 stable sous l'action de G et engendré par un vecteur v, l'application $\lambda : G \to \mathbb{C}^\times$ qui vérifie $\rho(g)v = \lambda(g)v$ sera un caractère de G.

En particulier, si $\rho : G \to GL(V)$ est un représentation, $\rho(T)$ sera un sous-groupe diagonalisable de $GL(V)$. On pourra alors décomposer V en sous-espaces stables sous l'action de T :

$$V = \bigoplus_{\lambda \in X(T)} V_\lambda.$$

Un caractère λ pour lesquel V_λ est non nul est appelé un *poids* de T dans V.

Remarque 2.6.1. *Les racines de G sont en fait les poids pour la représentation adjointe de G. On définit $c_g : G \to G$ par $c_g(h) = ghg^{-1}$. La dérivée de ce morphisme est $Ad_g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, qui est un isomorphisme d'algèbre de Lie. La représentation adjointe est le morphisme $Ad : G \to GL(\mathfrak{g})$ définie par $Ad(g) = Ad_g$. Il est possible de montrer que c'est bien une représentation rationnelle.*

2.7. Représentations d'un groupe semi-simple

Les représentations des groupes semi-simple ont beaucoup été étudiées. Plusieurs propriétés intéressantes les caractérisent. Cette section se veut une introduction à ce sujet qui sera essentiel dans le chapitre 4. Tout au long de cette section, le groupe G sera un groupe semi-simple. On peut penser par exemple au groupe $SL(n, \mathbb{C})$.

Soit $\rho : G \to GL(V)$ une représentation de G. Nous dirons qu'un vecteur $v \in V$ est *maximal* si le sous-espace de dimension 1 qu'il engendre, $\mathbb{C}\, v$, est stable sous l'action de B. D'après la proposition 2.1.4, $\rho(B)$ est aussi un sous-groupe de Borel de $\rho(G) \subseteq GL(V)$. Il est donc résoluble et connexe. Le théorème de Lie-Kolchin, théorème 2.1.2, nous assure alors qu'il existe toujours un vecteur maximal pour une représentation donnée. Nous savons en outre que l'action de B sur $\mathbb{C}\, v$ est de la forme $bv = \lambda(b)v$ pour un certain caractère λ de B appelé un poids de V, comme nous l'avons mentionné dans la section 2.6.

Le théorème suivant nous donne de l'information sur les vecteurs maximaux d'une représentation.

Théorème 2.7.1 (**[Hu2]**, Proposition 31.2). *Soit V un G-module, v un vecteur maximal de poids λ et V' le sous-G-module de V engendré par v. Alors les poids de V' sont de la forme $\lambda - \sum_{\alpha\in\Delta} c_\alpha \alpha$ avec $c_\alpha \in \mathbb{Z}^+$. En particulier, λ est un poids dominant. De plus, V' possède un unique sous-G-module maximal excluant v, c'est-à-dire V' n'est pas nécessairement irréductible, mais il possède un unique sous-G-module qui ne contient pas le vecteur v et qui n'est inclus dans aucun autre sous-G-module de V'.*

Un corollaire de ce théorème est que si V est une représentation irréductible de G, alors il existe un unique vecteur maximal de V, à un scalaire près. Cela se déduit en munissant $X(T)$ d'un ordre partiel. On dira que $\lambda > \mu$ si $\lambda - \mu$ est une somme de racines positives. Cet ordre justifie le choix du terme de plus haut poids pour désigner le poids du vecteur maximal d'une représentation irréductible.

Le théorème suivant exprime le fait que pour un groupe semi-simple, les représentations irréductibles sont complètement déterminées par leur plus haut poids.

Théorème 2.7.2 (**[Hu2]**, Theorem 31.3). *Si V et V' sont deux représentations irréductibles de G de plus haut poids λ et μ respectivement, alors V et V' sont isomorphes comme G-modules si et seulement si $\lambda = \mu$.*

Nous montrerons aussi dans le chapitre 4 que si λ est un caractères dominant, il existe un G-module V dont le plus haut poids est λ.

Un dernier résultat dont nous voulons discuter concerne la possibilité de décomposer un G-module comme somme directe de modules irréductibles. Ce résultat est dû à Weyl. La preuve se base sur des propriétés topologiques des groupes semi-simples.

Théorème 2.7.3. [W] *Soit G un groupe algébrique semi-simple et V un représentation rationnelle de G. Soit W un sous-module de V. Alors, il existe un sous-module W' de V tel que $V = W \oplus W'$.*

Chapitre 3

FIBRÉS EN DROITE ET COHOMOLOGIE

Dans le dernier chapitre, nous avons introduit les notions sur les groupes algébriques qui nous seront nécessaires afin de comprendre l'énoncé et la preuve du théorème de Borel-Weil-Bott. Dans ce chapitre, nous introduirons des notions plus topologiques.

La section 3.1 nous permettra d'introduire la notion de fibré vectoriel algébrique. Le but de cette section, sera de construire pour chaque caractère λ d'un sous-groupe de Borel B d'un groupe réductif G, un fibré en droite $G \times^B \mathbb{C}_\lambda$ au dessus de l'espace G/B. Ce fibré nous permettra de définir le faisceau des sections $\mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda)$.

Dans la section 3.2, nous introduirons brièvement la cohomologie de faisceaux et la cohomologie de Čech. Nous verrons un théorème qui nous permet de faire le pont entre la cohomologie de Čech pour un recouvrement donné et la cohomologie de faisceaux.

Finalement, nous introduirons la suite spectrale de Leray dans le section 3.3.

3.1. Construction d'un fibré vectoriel à partir d'un B-module

On considère G un groupe algébrique réductif et B un sous-groupe de Borel de G. On sait alors que G/B est une variété projective. Nous cherchons à construire des fibrés vectoriels sur cette variété. Nous allons commencer par définir la notion de fibré vectoriel algébrique avant de construire des fibrés vectoriels sur G/B plus spécifiquement.

Soit X et E deux variétés algébriques et $\pi : E \to X$ un morphisme de variétés algébriques tel que pour tout point $x \in X$, $\pi^{-1}(x)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. L'espace E avec l'application π est un *fibré vectoriel topologique* sur $\mathbb{C}$ de rang n s'il existe une famille $\{U_i\}_{i\in I}$ d'ouverts de X qui trivialise E, c'est-à-dire s'il existe des applications

ϕ_i tels que pour chaque $i \in I$, $\phi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{C}^n$ soit un homéomorphisme qui commute avec la projection π.

On obtient alors pour tout $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, une application $g_{ij} : U_i \cap U_j \to GL(\mathbb{C}^n)$ telle que

$$\begin{array}{rccc} \phi_j \circ \phi_i^{-1} : & (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^n & \to & (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^n \\ & (x, v) & \mapsto & (x, g_{ij}(x)v). \end{array}$$

Les applications g_{ij} sont appelées des *changements de trivialisation*. Nous parlerons d'un *fibré vectoriel algébrique* si les applications g_{ij} sont des morphismes de variétés algébriques. Puisque ce n'est qu'à ce type de fibrés que nous nous intéresserons, nous omettrons en général le terme algébrique.

Un fibré vectoriel est appelé un *fibré en droite* si la fibre au dessus d'un point est un espace vectoriel de dimension 1.

Nous voulons construire des fibrés vectoriels sur G/B à partir d'espaces vectoriels sur lesquels B agit de façon algébrique. Dans la section 2.1, nous avons défini ce que nous entendons par représentation rationelle d'un groupe algébrique. C'est seulement avec ce type de représentation que nous travaillerons.

Soit $\rho : B \to GL(V)$ une représentation de B. On considère l'espace $G \times V$ sur lequel on définit la relation d'équivalence suivante :

$$(gb, v) \sim (g, bv) \; \forall g \in G \; \forall b \in B \; \forall v \in V.$$

On peut alors définir $G \times^B V = G \times V / \sim$. On en fait un espace topologique en le munissant de la topologie quotient. Nous noterons $[g, v]$ la classe de (g, v).

Proposition 3.1.1. *$G \times^B V$ est un fibré vectoriel algébrique sur G/B.*

Démonstration. Nous allons séparer la preuve en plusieurs étapes. Nous allons tout d'abord définir une projection de $G \times^B V$ sur G/B. Par la suite, nous allons définir une structure d'espace vectoriel sur les fibres de ce fibré. Nous allons finalement trouver une trivialisation de $G \times^B V$ à l'aide de la décomposition de Bruhat de G. Cette trivialisation et les changements de cartes qui y sont associés nous permettrons de voir $G \times^B V$ comme une variété algébrique.

Nous pouvons définir $\pi : G\times^B V \to G/B$ par $\pi([g,v]) = gB$. On remarque que cette définition ne dépend pas du choix du représentant puisque si $[g_1, v] = [g_2, u]$, alors il existe $b \in B$ tel que $g_2 = g_1 b$ et donc $g_1 B = g_2 B$ dans G/B. De plus, cette application est clairement surjective sur G/B.

Soit $x = gB \in G/B$. Notons E l'espace $G \times^B V$ et $E_x = \{[g, v] : v \in V\}$, la fibre au dessus de x. Nous voulons donner une structure d'espace vectoriel sur E_x. Cette structure découle de celle sur V.

Soit $x = gB \in G/B$. On considère l'application

$$\phi_g : V \longrightarrow E_x$$

$$v \longmapsto [g, v]$$

Cette application dépend du choix de g comme représentant de la classe de x. Pour un autre représentant gb, nous aurons que $\phi_{gb} = \phi_g \circ \rho(b)$. Remarquons aussi que cette application est bijective. Nous l'utiliserons pour définir une structure d'espace vectoriel sur E_x. Soient $e_1,\ e_2 \in E_x$ tels que $e_1 = \phi_g(v_1)$ et $e_2 = \phi_g(v_2)$. On définit $e_1 + e_2 := \phi_g(v_1 + v_2)$. Similairement, on définit $\lambda e_1 = \phi_g(\lambda v_1)\ \forall \lambda \in \mathbb{C}$. La structure ainsi donnée d'espace vectoriel sur E_x ne dépend pas du choix du représentant de x puisque l'action de B sur V est linéaire.

Nous allons maintenant trouver une famille d'ouverts de G/B qui permettent de trivialiser $G \times^B V$. Nous allons commencer par remarquer que $G \times^B V$ est trivial au-dessus de la grande cellule de Bruhat $\Omega = U^- B$ où U^- est le radical unipotent du sous-groupe de Borel opposé à B. Pour cela, il faut savoir que pour $g \in \Omega$, il existe $u \in U^-$ et $b \in B$ uniques tels que $g = ub$. Cela découle du fait que $U^- \cap B = e$.

Définissons $\phi_\Omega : \pi^{-1}(U^-B/B) \to U^-B/B \times V$ par $\phi_\Omega([g, v]) = (\overline{g}, bv)$ si $g = ub$. La première chose à vérifier est que l'application est bien définie. Un autre représentant de $[g, v]$ s'écrit sous la forme $[gb_2, b_2^{-1}v]$ avec $b_2 \in B$. Nous aurons alors que $\phi_\Omega([gb_2, b_2^{-1}v]) = (\overline{gb_2}, bb_2b_2^{-1}v) = (\overline{g}, bv)$. Ainsi l'application ϕ_Ω est bien définie. Elle est aussi clairement surjective. Montrons maintenant qu'elle est injective. Soit $g = u_1b_1$, $h = u_2b_2$ deux éléments de Ω et $v,\ w \in V$. Supposons que $\phi_\Omega([g, v]) = (\overline{g}, b_1v) = (\overline{h}, b_2w) = \phi_\Omega([h, w])$. Alors, il existe $b \in B$ tel que $u_1b_1 = u_2b_2b$. De cela, on déduit que $u_1 = u_2$ et donc $b_1 = b_2b$. Mais alors, puisque $b_2w = b_1v$, on obtient que $v = b^{-1}w$

et la suite d'égalité suivante $[h, w] = [u_1 b_2, w] = [u_1 b_2 b, b^{-1} w] = [u_1 b_1, v] = [g, v]$, nous permet de conclure que ϕ_Ω est injective. Ainsi ϕ_Ω est bien une bijection entre $\pi^{-1}(U^- B/B)$ et $U^- B/B \times V$. Mais la topologie de $G \times^B V$ étant la topologie quotient de $G \times V$, cette application est nécessairement un homéomorphisme.

Nous avons seulement pour le moment un ouvert qui trivialise $G \times^B V$. Mais si nous prenons tous les translatés de Ω/B par les éléments du groupe de Weyl W de G nous obtenons G/B au complet, c'est-à-dire $G/B = \bigcup_{\omega \in W} \omega U^- B/B$. De plus, en choisissant un représentant n_ω pour chaque $\omega \in W(G, T)$, on obtient encore l'écriture unique d'un élément $g \in \omega U^- B$ comme $g = n_\omega u b$ avec $u \in U^-$ et $b \in B$. Cela nous permet de définir l'application $\phi_{\omega\Omega} : \pi^{-1}(\omega U^- B/B) \to \omega U^- B/B \times V$ par $\phi_{\omega\Omega}([g, v]) = (\overline{g}, bv)$ si $g = n_\omega u b$. Les mêmes raisonnements que dans le paragraphe précédent nous permettent de montrer que $\phi_{\omega\Omega}$ est bien définie et que c'est un homéomorphisme de $\pi^{-1}(\omega U^- B/B)$ dans $\omega U^- B/B \times V$.

Nous voulons maintenant étudier les changements de trivialisations. Cela se résume à comprendre l'application $\phi_\sigma \circ \phi_\omega^{-1} : (\sigma U^- B/B \cap \omega U^- B/B) \times V \to (\sigma U^- B/B \cap \omega U^- B/B) \times V$, pour σ et $\omega \in W(G, T)$. Supposons que $g \in \sigma U^- B \cap \omega U^- B$. Alors g s'écrit comme $n_\sigma u_1 b_1$ et comme $n_\omega u_2 b_2$ avec u_1 et u_2 dans U^- et b_1 et b_2 dans B. En décomposant l'application, on obtient que

$$\phi_\sigma \circ \phi_\omega^{-1}((\overline{g}, v)) = \phi_\sigma([g, b_2^{-1} v]) = (\overline{g}, \rho(b_2 b_1^{-1}) v).$$

On remarque aussi que cette application ne dépend pas du choix du représentant de $\overline{g}$. Cela nous permet d'obtenir l'application

$$\begin{array}{rccc} g_{\omega\Omega,\sigma\Omega} : & \sigma U^- B/B \cap \omega U^- B/B & \to & GL(V) \\ & \overline{g} & \mapsto & \rho(b_2 b_1^{-1}), \end{array}$$

qui est bien un morphisme de variétés algébriques.

Pour terminer la preuve, nous allons utiliser le lemme 3.1.1 qui se trouve immédiatement après la preuve et qui nous permettra de munir $G \times^B V$ d'une structure de variété algébrique

Les différents espaces $\omega U^- B/B \times V$, pour $\omega \in W$, sont des variétés affines. Nous allons noter l'espace $\omega U^- B/B \times V$ par X_ω. Pour un couple (ω, σ), on définit l'ouvert $X_{\omega\sigma} = (\omega U^- B/B \cap \sigma U^- B/B) \times V$. Ainsi, dans notre cas, $X_{\omega\sigma} = X_{\sigma\omega}$. On définit les isomorphismes $\varphi_{\omega\sigma} = \phi_\sigma \circ \phi_\omega^{-1}$. Clairement, les applications $\varphi_{\omega\sigma}$ vérifient les trois conditions du lemme 3.1.1. Il existe donc une unique variété algébrique munie d'un atlas $\{\varphi_\omega : U_\omega \to X_\omega\}$. Ça ne peut être que $G \times^B V$ par définition des X_ω et des isomorphismes $\varphi_{\omega\sigma}$. Ainsi, le fibré vectoriel $G \times^B V$ est muni d'une structure de variété algébrique. Ce qui complète la preuve.

□

Lemme 3.1.1 ([CL], Théorème 3.4.7). *Étant donné une famille finie $\{X_i\}$ de variétés algébriques affines et pour tout couple (i, j) un ouvert X_{ij} de X_i et des isomorphismes $\varphi_{ij} : X_{ij} \to X_{ji}$ tels que*

(1) pour $i = j$, $X_{ii} = X_i$ et $\varphi_{ii} = Id$;

(2) $\varphi_{ij} = \varphi_{ji}^{-1}$;

(3) $\varphi_{ki} \circ \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij} = Id$.

Alors, il existe une unique variété algébrique X munie d'une familles de trivialisations $\{\varphi_i : U_i \to X_i\}$ telle que pour tout i et j, $X_{ij} = \varphi_i(U_i \cap U_j)$ et $\varphi_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$.

Remarque 3.1.1. *Si on considère P un sous-groupe parabolique de G et V un P-module, l'espace $G \times^P V$ est un fibré vectoriel au-dessus de G/P. La preuve se fait de façon similaire à celle que nous venons de faire, mais en utilisant plutôt la décomposition de G/P introduite dans le théorème 2.2.5.*

3.1.1. Fibrés G équivariants

Les fibrés vectoriels sur G/B définis à partir d'un B-module V ont une propriété de plus, ils sont G-équivariants. Comme nous allons travailler avec ce type de fibré tout au long du mémoire, nous allons discuter un peu de cette propriété et voir comment il est possible de faire de $G \times^B V$ un fibré vectoriel G-équivariant.

Définition 3.1.1. *Soit G un groupe qui agit sur une variété algébrique X et E un fibré vectoriel sur X. On dit que E est un fibré vectoriel G-équivariant si :*

(1) G agit sur E ;

(2) L'application $\pi : E \to X$ est un G-morphisme ;

(3) L'application $g : E_x \to E_{gx}$, qui correspond à l'action de g sur un élément de E_x, est linéaire $\forall g \in G$ et $\forall x \in X$.

Il est possible de définir une action de G sur les fibrés vectoriels construits plus tôt afin d'en faire des fibrés vectoriels G-équivariants. Nous définissons $\forall k \in G$

$$k[g, v] = [kg, v].$$

Remarquons que cette définition est indépendante du choix du représentant. En effet, considérons $[gb^{-1}, bv] = [g, v]$ avec $b \in B$. Alors

$$k[gb^{-1}, bv] = [kgb^{-1}, bv] = [kg, v] = k[g, v].$$

Cette action fait bien de π un G-morphisme et l'application $k : (G \times^B V)_x \to (G \times^B V)_{kx}$ est linéaire. Ainsi nous avons fait de $G \times^B V$ un fibré vectoriel G-équivariant.

3.1.2. Faisceau des sections

À partir d'un fibré vectoriel au-dessus d'un espace X, on peut construire le faisceau des sections de ce fibré. Nous serons intéressés à construire le faisceau des sections du fibré $G \times^B V$. Nous noterons ce faisceau $\mathscr{L}(V)$ ou $\mathscr{L}_{G/B}(V)$ quand l'espace de base n'est pas clair. Pour un ouvert U de G/B, on définit

$$\mathscr{L}(V)(U) = \{s : U \to G \times^B V \mid \pi \circ s = Id_U \text{ et } s \in Hom_{alg}(U, G \times^B V)\}.$$

Étudions plus en détails ce faisceau avec lequel nous travaillerons tout au long de ce mémoire.

Soit U un ouvert de G/B. Il existe un morphisme de variétés algébriques $v_B : G \to G/B$. Puisque la topologie sur G/B est la topologie quotient, la préimage de U, $U' = v_B^{-1}(U)$, est un ouvert de G. Soit $s \in \mathscr{L}(V)(U)$. Puisque $\pi \circ s = Id_U$, alors $s(gB) = [g, \hat{s}(g)]$ où $\hat{s}$ peut être vue comme une fonction de U' dans V. Étudions les conditions qui sont vérifiées par $\hat{s}$. Soit $b \in B$. Puisque $gbB = gB$, on a que $s(gB) = s(gbB) = [gb, \hat{s}(gb)] = [g, b\hat{s}(gb)]$. On peut donc voir $\hat{s}$ comme une fonction de U' dans V qui vérifie

$$\hat{s}(g) = b\hat{s}(gb),$$

ou encore

$$b^{-1}\hat{s}(g) = \hat{s}(gb), \quad \forall b \in B \;\; \forall g \in U'. \qquad (1)$$

Inversement, si $\hat{s} : U' \to V$ vérifie la condition (1), alors $gB \mapsto [g, \hat{s}(g)]$ définie une section de $\mathscr{L}(V)(U)$.

En identifiant s et $\hat{s}$, on peut alors identifier

$$\mathscr{L}(V)(U) \simeq \{\hat{s} : U' \to V \mid b\hat{s}(g) = \hat{s}(gb^{-1}),\ \forall b \in B\, \forall g \in U' \text{ et } s \in Hom_{alg}(U', V)\}.$$

En raison de cette identification, nous utiliserons indépendament ces deux façons de voir $\mathscr{L}(V)(U)$.

Notons que l'espace des sections globales $\mathscr{L}(V)(G/B)$ est un G-module. En effet, on peut définir l'action de $g \in G$ sur une section globale $s : G \to V$ par $gs(hB) = s(g^{-1}hB)$.

Remarquons que si V est un B-module, alors V^* est aussi un B-module avec l'action de B sur $f \in V^*$ définie par $bf(v) = f(b^{-1}v)\ \forall b \in B, \forall v \in V$. Ainsi, nous pouvons aussi construire un fibré vectoriel à partir de V^* qui sera $G \times^B V^*$ et nous obtenons le faisceau $\mathscr{L}(V^*)$.

Nous serons particulièrement intéressés par les fibrés vectoriels sur G/B construits à partir de représentations de dimension 1. Une représentation de dimension 1 est une morphisme de groupes algébriques $\rho : B \to GL(1, \mathbb{C})$. Or, $GL(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times$. Cela nous donne un morphisme $\rho : B \to \mathbb{C}^\times$ qui est en fait un caractère de B. Étudions quelle sera la représentation duale. Soit $f \in \mathbb{C}^*$, $b \in B$ et $v \in \mathbb{C}$. Alors, $bf(v) = f(b^{-1}v) = f(\rho(b^{-1})v) = \rho(b^{-1})f(v)$. La représentation duale de ρ sera donc ρ^{-1}.

Soit λ un caractère de B, nous noterons $\mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda)$ le faisceau des sections du fibré $G \times^B \mathbb{C}_\lambda$ construit à partir de ce caractère. Remarquons que pour U un ouvert de G/B,

$$\mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda)(U) \simeq \{s \in \mathscr{O}_{G/B}(v_B^{-1}(U))] \mid \lambda(b^{-1})s(g) = s(gb),\quad \forall b \in B\ \ \forall g \in U'\}.$$

Pour des raisons de commodité, nous préférerons travailler avec le fibré $G \times^B \mathbb{C}_\lambda^*$ pour lequel le fibré des sections est défini sur un ouvert U de G/B par

$$\mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*)(U) \simeq \{s \in \mathscr{O}_{G/B}(v_B^{-1}(U)) \mid \lambda(b)s(g) = s(gb),\quad \forall b \in B\ \ \forall g \in U'\}.$$

Les actions de G sur les sections globales de $\mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*)$ ainsi que sur le fibré $G \times^B \mathbb{C}_\lambda^*$ nous permettrons de faire de la cohomologie $H^i(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*))$ un G-module comme nous le verrons dans la sous-section 3.2.1.

3.2. Cohomologie

En général, il est peu pratique, voir impossible, de calculer la cohomologie de faisceaux à partir de sa définition. Or, dans pluseurs cas, la cohomologie de Čech d'un faisceau $\mathscr{F}$ par rapport à un recouvrement coïncide avec la cohomologie de faisceaux. De plus, la cohomologie de Čech se calcule aisément dans plusieurs cas. Par exemple, dans la section 1.4, il nous a été possible de calculer la cohomologie de $\mathbb{C}P^1$ à valeur dans le faisceau $\mathscr{L}(\mathbb{C}_n^*)$ par rapport au recouvrement $\mathscr{U} = \{U_0, U_1\}$. Nous commencerons par donner un petit apperçu de ce qu'est la cohomologie de faisceaux. Nous allons ensuite définir plus en détails la cohomologie de Čech par rapport à un recouvrement donné et voir dans quels cas elle coïncide avec la cohomologie de faisceaux. Le lecteur qui veut plus de détails sur la cohomologie de Čech et sur la cohomologie de faisceaux peut consulter le chapitre 3 de [**H**].

3.2.1. Cohomologie de faisceaux

Soit X un espace topologique et $\mathscr{F}$ un faisceau de groupes abéliens sur X. On veut définir la cohomologie de faisceaux $H^i(X, \mathscr{F})$. Pour cela, nous devons commencer par définir ce qu'est un faisceau injectif.

Soit

$$0 \to \mathscr{G} \xrightarrow{f} \mathscr{F} \xrightarrow{g} \mathscr{H} \to 0,$$

une suite exacte de faisceaux. Considérons $\mathscr{K}$ un faisceaux de groupes abéliens. Le foncteur $Hom(\cdot, \mathscr{K})$ est exact à gauche, c'est-à-dire la suite

$$0 \to Hom(\mathscr{H}, \mathscr{K}) \xrightarrow{g^*} Hom(\mathscr{F}, \mathscr{K}) \xrightarrow{f^*} Hom(\mathscr{G}, \mathscr{K})$$

est exacte. On dira qu'un faisceau $\mathscr{I}$ est *injectif* si le foncteur $Hom(\cdot, \mathscr{I})$ est exact.

Soit $\mathscr{F}$ un faisceau de groupes abéliens. Alors, il existe une suite exacte de faisceaux

$$0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{I}^0 \to \mathscr{I}^1 \to \mathscr{I}^2 \to \dots$$

telle que les $\mathscr{I}^j$ sont des faisceaux injectifs. Une telle suite est appelée une *résolution injective* de $\mathscr{F}$.

Le foncteur des sections globales est exact à gauche. On l'applique à la suite exacte. Cela nous donne un complexe

$$0 \to \mathscr{F}(X) \to \mathscr{I}^0(X) \to \mathscr{I}^1(X) \to \mathscr{I}^2(X) \to \dots.$$

On définit la cohomologie de faisceaux $H^i(X, \mathscr{F})$ comme la cohomologie du complexe $\mathscr{I}^\bullet$. On peut montrer que cette cohomologie est indépendante de la résolution injective choisie.

Puisque le foncteur des sections globales est exact à gauche, on obtient directement que $H^0(X, \mathscr{F})$ est tout simplement $\mathscr{F}(X)$.

Maintenant que nous avons défini la cohomologie de faisceaux et le faisceau $\mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*)$, nous allons montrer comment il est possible de définir une action de G sur l'espace vectoriel $H^i(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*))$.

Soit $g \in G$. Il existe une application

$$\begin{array}{rccc} \tau_g : & G/B & \to & G/B \\ & hB & \mapsto & ghB. \end{array}$$

Considérons le faisceau $\mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*)$. L'image directe de ce faisceau par l'application τ_g est le faisceau $\tau_{g_*}\mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*)$ qui a un ouvert U de G/B associe le groupe $\tau_{g_*}\mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*)(U) = \mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*)(g^{-1}U)$.

En premier lieu, nous devons construire un isomorphisme entre $H^i(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*))$ et $H^i(G/B, \tau_{g_*}\mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*))$. Nous savons que $R^i\tau_{g_*}\mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*)$ est nul pour tout $i \geq 1$ puique τ_g consiste en un isomorphisme. À partir de cela, nous pouvons déduire que si $\mathscr{I}^\bullet$ est une résolution injective de $\mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*)$, alors $(\tau_{g_*}\mathscr{I})^\bullet$ est une résolution injective de $\tau_{g_*}\mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*)$. Nous obtenons alors directement l'isomorphisme

$$H^i(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*)) \simeq H^i(G/B, \tau_{g_*}\mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*)).$$

En deuxième lieu, nous construisons un isomorphisme entre les faisceaux $\mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*)$ et $\tau_{g_*}\mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*)$. Soit U un ouvert de G/B. Nous définissons :

$$\begin{array}{rccl} \phi_U : & \mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*)(U) & \to & \tau_{g_*}\mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*)(U) = \mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*)(g^{-1}U) \\ & s & \mapsto & \phi_U(s)(v) = g^{-1}s(gv), \end{array}$$

où $v \in g^{-1}U$. Puisque $v \in g^{-1}U$, nous savons que $gv \in U$ et $s(gv)$ fait du sens. D'après la définition de l'action de G sur $G \times^B \mathbb{C}_\lambda^*$, nous savons que $\pi(g^{-1}s(gv)) = v$. Ainsi, $\phi_U(s)$ est bien une section de $\mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*)(g^{-1}U)$.

On peut construire de façon similaire l'application inverse, ce qui nous assure que ϕ_U est un isomorphisme. Puisque pour tout ouvert U de G/B l'application ϕ_U est un isomorphisme, on déduit que les faisceaux $\mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*)$ et $\tau_{g_*}\mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*)$ sont isomorphes. Nous avons donc un isomorphisme au niveau de la cohomologie :

$$H^i(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*)) \simeq H^i(G/B, \tau_{g_*}\mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*)).$$

En composant les deux isomorphismes précédents que nous avons obtenus au niveau de la cohomologie, nous obtenons qu'un élément $g \in G$ induit un isomorphisme

$$g : H^i(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*)) \to H^i(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*)).$$

Si $w \in H^i(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*))$, nous définirons l'action $g \cdot w := g(w)$. Les propriétés fonctorielles des deux isomorphismes, nous assurent que c'est bien une action. Nous avons donc fait de l'espace vectoriel $H^i(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*))$ un G-module.

3.2.2. Cohomologie de Čech

Soit X un espace topologique, $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un recouvrement d'ouverts de X et $\mathscr{F}$ un faisceau de groupes abéliens sur X. Un bon ordre est défini sur l'ensemble I. Nous voulons définir la cohomologie de Čech de $\mathscr{F}$ par rapport au recouvrment $\mathscr{U}$ de X. Pour ce faire, nous devons commencer par définir un complexe.

Pour chaque $p \geq 0$, on pose

$$U_{i_0 i_1 \ldots i_p} = \bigcap_{k=1}^{n} U_{i_k}.$$

Les 0-cochaînes de $\mathscr{U}$ à valeur dans le faisceau $\mathscr{F}$ sont les fonctions qui assignent à chaque U_i un élément de $\mathscr{F}(U_i)$, c'est à dire

$$C^0(\mathscr{U}, \mathscr{F}) = \prod_{i\in I} \mathscr{F}(U_i).$$

On définit,

$$C^1(\mathscr{U}, \mathscr{F}) = \prod_{i_0 < i_1} \mathscr{F}(U_{i_0 i_1}).$$

De façon générale, on définit le p-ième groupe de notre complexe comme

$$C^p(\mathscr{U},\mathscr{F}) = \prod_{i_0<i_1<\ldots<i_p} \mathscr{F}(U_{i_0 i_1 \ldots i_p}).$$

Entre autre, pour définir une p-cochaîne $\alpha \in C^p(\mathscr{U},\mathscr{F})$, nous devons déterminé

$$\alpha_{i_0 i_1 \ldots i_p} \in \mathscr{F}(U_{i_0 i_1 \ldots i_p})$$

pour chacun des $(p+1)$-uplet de I tel que $i_0 < i_1 < \ldots < i_p$.

Pour avoir un complexe, nous devons maintenant définir une différentielle. Rappelons-nous que puisque $\mathscr{F}$ est un faisceau, pour $V \subseteq U$ deux ouverts de X, il existe un morphisme de restriction

$$\rho_{UV} : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V).$$

Soit $\alpha \in C^p(\mathscr{U},\mathscr{F})$. On définit

$$\delta : C^p(\mathscr{U},\mathscr{F}) \to C^{p+1}(\mathscr{U},\mathscr{F})$$

par

$$(\delta\alpha)_{i_0 i_1 \ldots i_{p+1}} = \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j \rho_{U_{i_0 \ldots \hat{i}_j \ldots i_{p+1}}, U_{i_0 \ldots i_{p+1}}}(\alpha_{i_0, \ldots, \hat{i}_j \ldots, i_{p+1}}),$$

où $\hat{i_j}$ veut dire que nous omettons i_j. En général, on sous-entend le morphisme de restriction afin d'alléger les notations.

Il est possible de montrer que $\delta^2 = 0$, ce qui fait bien de δ une différentielle. Ainsi $\{C^p(\mathscr{U},\mathscr{F}), \delta\}$ est un complexe de chaîne. La cohomologie de ce complexe est noté $\check{H}^p(\mathscr{U},\mathscr{F})$ et est appelé la cohomologie de Čech du recouvrement $\mathscr{U}$ à valeur dans $\mathscr{F}$.

En particulier, $\check{H}^0(\mathscr{U},\mathscr{F})$ est le noyau de l'application

$$\delta : \prod_{i\in I} \mathscr{F}(U_i) \to \prod_{i_0<i_1} \mathscr{F}(U_{i_0 i_1}).$$

En se basant sur la définition de la différentielle et sur les propriétés des faisceaux, on montre que le noyau de cette application correspond aux sections globales du faisceau $\mathscr{F}$. Ainsi, nous avons toujours que pour un espace topologique X, un recouvrement $\mathscr{U}$ de X et un faisceau de groupes abéliens $\mathscr{F}$,

$$\mathscr{F}(X) \simeq \check{H}^0(\mathscr{U},\mathscr{F}) \simeq H^0(X,\mathscr{F})$$

Malgré ce résultat sur les groupes de cohomologie de degré 0, la cohomologie de Čech dépend en général du recouvrement choisi. Dans certains cas, elle coïncide cependant avec la cohomologie de faisceaux. Le théorème suivant fait le pont entre la cohomologie de faisceaux et la cohomologie de Čech pour un recouvrement particulier.

Théorème 3.2.1. [H] *Soit X un schéma noetherien séparé, $\mathscr{U}$ un recouvrement d'ouverts affines de X et $\mathscr{F}$ un faisceau quasicohérent. Alors, pour tout $i \geq 0$, $\check{H}^i(\mathscr{U}, \mathscr{F})$ est isomorphe à $H^i(X, \mathscr{F})$.*

Entre autre, dans le cas de $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ avec le recouvrement $\mathscr{U} = \{U_0, U_1\}$ naturel et le faisceau $\mathscr{L}(\mathbb{C}_n)$, nous avons un isomorphisme entre la cohomologie de faisceaux et la cohomologie de Čech.

3.3. Suite spectrale de Leray

La suite spectrale de Leray aura une importance capitale dans la preuve du théorème de Borel-Weil-Bott au chapitre 5. Dans le cas où λ est un caractère tel que $\langle\alpha, \lambda\rangle < 0$ pour une racine simple α, elle nous permettra d'obtenir un isomorphisme entre les G-modules $H^{i+1}(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*))$ et $H^i(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_{s_\alpha\lambda-\alpha}))$. Nous discuterons ici de cette suite spectrale et de quelques outils qui nous seront utiles dans le chapitre 5 lorsque nous l'utiliserons.

Théorème 3.3.1. *Soit $f : X \to Y$ une application continue entre deux espaces topologiques et soit $\mathscr{F}$ un faisceau sur X. Alors il existe une suite spectrale*

$$E_2^{p,q} = H^p(Y, R^q f_* \mathscr{F}) \Longrightarrow H^{p+q}(X, \mathscr{F}).$$

Le foncteur $R^q f_*$ ayant une place de premier choix dans ce théorème, il est important de bien le comprendre. C'est le but de la proposition suivante.

Proposition 3.3.1 ([H], section 3.8)**.** *Soit $f : X \to Y$ une application continue entre deux espaces topologiques et $\mathscr{F}$ un faisceau sur X. Alors $R^i f_*(\mathscr{F})$, est le faisceau associé au préfaisceau*

$$V \mapsto H^i(f^{-1}(V), \mathscr{F}|_{f^{-1}(V)})$$

où V est un ouvert de Y.

Dans le cas où une suite spectrale se stabilise en $E_\infty^{p,q}$ et que la plupart des valeurs de $E_\infty^{p,q}$ sont nulles, nous obtenons le lemme suivant.

Lemme 3.3.1. *Supposons que* $E_r^{p,q} \Longrightarrow H^{p+q}$.

(1) Si $E_\infty^{p,q} = 0$ *sauf si* $q = q_0$, *alors* $H^n = E_\infty^{n-q_0,q_0}$.

(2) Si $E_\infty^{p,q} = 0$ *sauf si* $p = p_0$, *alors* $H^n = E_\infty^{p_0,n-p_0}$.

Chapitre 4

COHOMOLOGIE DE DEGRÉ 0

Soit G un groupe réductif, B un sous-groupe de Borel et λ un caractère de B. Dans ce chapitre, nous allons montrer que toutes les représentations irréductibles de G peuvent être obtenues comme la cohomologie de degré 0 de G/B par rapport à un faisceau de type $\mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*)$, que cette cohomologie de degré zéro est non nulle si et seulement si le caractère λ est dominant et que dans le cas où elle est non nulle, l'espace $H^0(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*))$ est un G-module irréductible. Les preuves de ces résultats proviennent en grande partie de **[B2]**, **[B3]** et de **[Hu2]** qui les reprend.

Dans les sections 4.1 et 4.2, nous travaillerons avec G un groupe algébrique semi-simple. Nous utiliserons les notations suivantes : B sera un sous-groupe de Borel de G, T un tore maximal contenu dans B et W le groupe de Weyl $W(G,T)$. La section 4.3 nous permettra de faire le passage aux groupes réductifs. Nous utiliserons le groupe $SL(n,\mathbb{C})$ pour illustrer certaines de nos constructions, ce groupe étant semi-simple.

4.1. Les représentations irréductibles de G

Soit G un groupe algébrique semi-simple. Dans cette section, nous allons prouver que toutes les représentations irréductibles de G s'obtiennent à partir de la cohomologie de G/B par rapport aux faisceaux de la forme $\mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*)$. Pour cela, nous aurons besoin de quelques résultats sur les représentations des groupes semi-simples dont nous avons discutés dans la section 2.6.

Avant de pouvoir formuler explicitement la proposition que nous voulons prouver, rappelons-nous que nous avions défini dans la section 2.5 l'application

$$\begin{array}{rccc} \pi: & X(T) & \to & X(T) \\ & \lambda & \mapsto & -\omega_0\lambda, \end{array}$$

où ω_0 est le plus long élément du groupe de Weyl de G. Nous aurons besoin de cette application et de ses propriétés tout au long de la section.

Nous pouvons maintenant énoncer l'objet de cette section.

Proposition 4.1.1. *Soit V une représentation irréductible de G de plus haut poids λ. Alors*

$$V \simeq H^0(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_{\pi(\lambda)}))$$

comme G-module.

Nous montrerons cette proposition en acceptant le fait que $H^0(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_\lambda)))$ est non nul dans le cas où λ est dominant. Ce fait sera montré dans la section 4.2. Commençons par donner un apperçu de la preuve de la proposition 4.1.1.

Dans un premier temps, nous montrerons que si l'espace vectoriel engendré par un vecteur s de $H^0(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_{\pi(\lambda)}))$ est stable sous l'action de B, alors le poids de s est λ. Cela nous permettra de montrer qu'il existe un unique sous-espace de dimension 1 de $H^0(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_{\pi(\lambda)}))$ qui est stable sous l'action de B. De cela, nous déduirons que si λ n'est pas dominant, alors le groupe de cohomologie $H^0(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_\lambda)))$ est nul. En utilisant le théorème de réductibilité 2.7.3, nous parviendrons à montrer que $H^0(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_{\pi(\lambda)}))$ est un G-module irréductible. Le théorème 2.7.2 nous permettra finalement de conclure que $H^0(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_\lambda))) \simeq V$. Nous pouvons maintenant débuter cette preuve.

Démonstration de la proposition 4.1.1. Soit λ un caractère dominant de B. Posons

$$H^0(\pi(\lambda)) := H^0(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_{\pi(\lambda)})).$$

Comme nous venons de le dire, nous allons supposer que cet espace est non nul. Nous allons montrer sous cette condition que c'est un G-module irréductible de plus haut poids λ. Pour ce faire, nous allons commencer par montrer qu'il existe un sous-espace unique de dimension 1 qui est stable sous l'action de B.

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 3,

$$H^0(\pi(\lambda)) \simeq \{s \in \mathbb{C}[G] \mid s(gb) = \pi(\lambda)(b)s(g)\ \forall g \in G,\ \forall b \in B\}.$$

De plus, le groupe G agit sur un élément s de $H^0(\pi(\lambda))$ par

$$(gs)(h) = s(g^{-1}h).$$

Puisque B est un groupe résoluble, le théorème de Lie-Kolchin, théorème 2.1.2, nous assure qu'il existe un sous-espace de $H^0(\pi(\lambda))$ qui est stable sous l'action de B. Notons D_λ cet espace.

Soit $f \in D_\lambda$ non identiquement nulle. Alors, il existe un caractère $\mu \in X(T)$ tel que

$$\forall b \in B,\ \mu(b)f(g) = bf(g) = f(b^{-1}g).$$

Puisque $f \in H^0(\pi(\lambda))$, on obtient que

$$\forall g \in G,\ \forall b', b \in B,\ f(b'gb) = \mu(b'^{-1})\pi(\lambda)(b)f(g).$$

Nous obtenons alors que sur l'ouvert dense $B\omega_0B$, $f(b'n_0b) = \mu(b'^{-1})\pi(\lambda)(b)f(n_0)$. Puisque f n'est pas identiquement nulle, $f(n_0) \neq 0$.

Nous voulons maintenant montrer que le poids de B sur f, que nous avons noté μ, est exactement λ. Choisissons n_0 un représentant de ω_0. Pour un élément t du tore T, nous obtenons la suite d'égalités suivante :

$$\begin{aligned}
\mu(t^{-1})f(n_0) &= f(tn_o)\\
&= f(n_0n_0^{-1}tn_0)\\
&= f(n_0)\pi(\lambda)(n_0^{-1}tn_0)\\
&= f(n_0)\lambda^{-1}(t)\\
&= \lambda(t^{-1})f(n_0).
\end{aligned}$$

Puisque $f(n_0) \neq 0$, on doit avoir $\mu(t^{-1}) = \lambda(t^{-1})$ et cela pour tout $t \in T$. Nous en concluons que $\mu = \lambda$.

Ainsi, sur l'ouvert $B\omega_0B$, $f(b'n_0b) = \lambda(b'^{-1})\pi(\lambda)(b)f(n_0)$. De sorte que la valeur de f sur cet ouvert est complètement déterminée par sa valeur en n_0. Puisque $B\omega_0B$ est un ouvert dense de G, on en conclut que la valeur de f en n_0 détermine entièrement la valeur de f sur G.

Si f_1 et f_2 sont dans D_λ et non identiquement nuls, il existe $c \in \mathbb{C}^\times$ tel que $f_1(n_0) = cf_2(n_0)$. Ainsi, sur l'ouvert $B\omega_0 B$, $f_1 = cf_2$, c'est-à-dire $f_1 - cf_2 \equiv 0$. Puisque $B\omega_0 B$ est un ouvert dense de G, on obtient que $f_1 - cf_2 \equiv 0$ sur G. Nous pouvons donc conclure que D_λ est de dimension 1.

Nous avons donc montré qu'il existe un sous-espace stable sous l'action de B de dimension 1, sous-espace que nous avons noté D_λ, et le poids de B sur cet espace est exactement λ.

Soit V un sous-espace irréductible de $H^0(\pi(\lambda))$. Nécessairement, V doit contenir D_λ. En effet, V doit contenir un sous-espace stable sous l'action de B et ça ne peut être que D_λ. Le plus haut poids de V sera le poids de D_λ qui est λ. Par conséquent, λ est un caractère dominant. De cela, nous concluons que si λ n'est pas dominant, alors nécessairement $H^0(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_{\pi(\lambda)}))$ est nul. Puisque π permute les caractères non dominants et que $\pi^2 = id$, on déduit que pour λ un caractère non dominant, $V_\lambda = V_{\pi(\pi(\lambda))}$ est nul. Nous venons donc de montrer que pour un caractère λ non dominant, $H^0(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_\lambda)) = 0$.

Nous sommes maitenant en mesure de montrer que $H^0(\pi(\lambda))$ est irréductible. Ce fait se base sur la complète réductibilité d'une représentation d'un groupe algébrique semi-simple dont nous avons discuté dans le théorème [**W**].

Supposons que $H^0(\pi(\lambda))$ n'est pas irréductible. Soit W un sous-module non nul de $H^0(\pi(\lambda))$ et W' son complément dont l'existence est assurée par le théorème 2.7.3. Puisque W et W' sont des G-modules, ils doivent contenir un sous-espace qui est stable sous l'action de B. Mais nous avons montré que le seul sous-espace de ce type est D_λ. Ainsi, si W' est non nul, $D_\lambda \subseteq W$ et $D_\lambda \subseteq W'$ ce qui est impossible. Nous pouvons donc en conclure que $H^0(\pi(\lambda)) = W$. Par conséquent $H^0(\pi(\lambda))$ est un G-module irréductible.

Le plus haut poids de $H^0(\pi(\lambda))$ est le poids de son sous-espace stable par l'action de B. Or nous avons vu que le poids de D_λ est λ. Ainsi, sous-réserve de montrer que $H^0(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_{\pi(\lambda)}))$ est non nul dans le cas où λ est dominant, nous pouvons conclure que toute représentation irréductible de G peut être obtenue à partir de la cohomologie de G/B par rapport à un certain fibré en droite. En effet, si V un G-module irréductible de plus haut poids λ alors $V \simeq H^0(\pi(\lambda))$ puisque ce sont deux G-modules irréductibles dont le plus haut poids est identique et le théorème 2.7.2 nous assure qu'une représentation irréductible d'un groupe semi-simple est complètement déterminée par son plus haut poids. □

Il nous reste seulement à montrer que pour un caractère λ dominant, le G-module V_λ est non nul. Ce sera le but de la section suivante.

Remarque 4.1.1. *Si V est un G-module irréductible de plus haut poids λ, il n'est pas très difficile de montrer que V^* est un G-module irréductible de plus haut poids $\pi(\lambda)$. En notant V_λ le G-module irréductible de plus haut poids λ, nous avons montré que*

$$V_\lambda^* \simeq H^0(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*)).$$

4.2. La cohomologie de degré 0

Nous avons montré dans la section précédente que si λ n'est pas dominant, le groupe de cohomologie $H^0(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*))$ est nul. Nous voulons maintenant montrer que ce G-module est non nul dans le cas où λ est dominant. Nous saurons alors que c'est un G-module irréductible dont le plus haut poids est $\pi(\lambda)$. Cette section consiste en la preuve de la proposition suivante.

Proposition 4.2.1. *Soit λ un caractère dominant. Alors, $H^0(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*)) \neq 0$.*

Pour ce faire, nous allons construire explicitement dans le cas où λ est un caractère dominant une fonction $c_\lambda \in \mathbb{C}[G]$ non identiquement nulle telle que $c_\lambda(gb) = \lambda(b)c_\lambda(g)$. En particulier, $c_\lambda \in H^0(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*))$ et donc la cohomologie de degré 0 de G/B par rapport au faisceau $\mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*)$ sera non nulle. Le lecteur peu intéressé par la preuve de la proposition 4.2.1 peut passer directement à la section 4.3.

4.2.1. Informations provenant d'un module irréductible de plus haut poids λ

Dans cette sous-section, nous prouverons le lemme suivant.

Lemme 4.2.1. *Soit λ un caractère dominant. Supposons qu'il existe un G module de plus haut poids λ. Alors, le groupe de cohomologie $H^0(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*))$ est non nul.*

Supposons qu'il existe un G-module irréductible V de plus haut poids λ et de vecteur maximal v. Écrivons V comme somme directe de $\mathbb{C}\,v$ et de V' où V' est le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs de poids autre que λ pour l'action de T. Nous avons alors la décomposition $V = \mathbb{C}\,v \oplus V'$ comme espace vectoriel.

Définisons une première fonction $r : V \to \mathbb{C}$ par $r(v) = 1$ et $r(w) = 0$ si $w \in V'$. Nous étendons cette fonction par linéarité sur V. À partir de cette fonction, nous pouvons définir l'application $c_\lambda : G \to \mathbb{C}$ par $c_\lambda(g) = r(gv)$. Nous énumérerons quelques propriétés importantes de c_λ dans la proposition suivante.

Proposition 4.2.2. *Soit c_λ la fonction définie précédemment. Alors*

(1) c_λ n'est pas identiquement nulle ;

(2) $c_\lambda \in \mathbb{C}[G]$;

(3) $\forall g \in G$, $gv = c_\lambda(g)v \bmod V'$;

(4) $\forall g \in G$ et $\forall b \in B$, $c_\lambda(gb) = \lambda(b)c_\lambda(g)$;

(5) $\forall u^- \in B_u^-$ et $\forall b \in B$, $c_\lambda(u^-b) = \lambda(b)$.

Démonstration. (1) La fonction c_λ est exactement λ sur le sous-groupe de Borel B. Elle n'est donc pas nulle.

(2) Puisque V est un G-module rationnel, $r(gv) \in \mathbb{C}[G]$. Ainsi, $c_\lambda(g) = r(gv) \in \mathbb{C}[G]$.

(3) Cette propriété est claire d'après la définition de c_λ.

(4) On sait que $(gb)v = g(bv)$ et que $bv = \lambda(b)v$, v étant un vecteur maximal de poids λ. On obtient alors que $c_\lambda(gb) = r(gbv) = r(\lambda(b)gv) = \lambda(b)r(gv) = \lambda(b)c_\lambda(g)$.

(5) La preuve de cette propriété se base sur le fait que V' est stable sous l'action de B^-, ce dont nous ne discuterons pas ici. Pour plus de détails, le lecteur peut consulter la section 5.7 de [**B3**].

□

Les propriétés (2) et (4) nous assurent que $c_\lambda \in H^0(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*))$. Ainsi l'existence d'un G-module irréductible de plus haut poids λ nous permet de démontrer que $H^0(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*)) \neq 0$. Ceci met fin à la preuve du lemme.

Ainsi, il nous suffirait de montrer que pour λ un caractère dominant, il existe un G-module irréductible de plus haut poids λ. Ce n'est cependant pas tout à fait ce que nous ferons. Nous serons seulement en mesure de montrer qu'il existe un G-module irréductible de plus haut poids $d\lambda$ pour un certain entier positif d.

4.2.2. Restrictions possibles

Nous avons montré dans la sous-section précédente qu'il suffit de montrer que pour λ un caractère dominant, il existe un G-module irréductible de plus haut poids λ pour obtenir un élément de $H^0(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*))$ et donc montrer que cet espace est non nul. Il existe cependant des restrictions qui nous permettent de diminuer l'ensemble des λ à considérer. Il n'est pas non plus nécessaire de trouver une représentation irréductible. Nous discuterons ici de ces restrictions.

Il est suffisant de trouver des représentations qui ont un vecteur maximal de poids λ même si la représentation n'est pas irréductible. En effet, supposons que V soit un G-module ayant un vecteur maximal v de poids λ. Notons V' le G-module engendré par v. D'après le théorème 2.7.1, il existe un unique sous-module W de V' maximal qui exclut v. Considérons le module quotient V'/W. Ce module est nécessairement irréductible puisque tous les sous-modules propres de V' sont contenus dans W. De plus, la classe de v sera un vecteur maximal de V'/W de plus haut poids λ. Ainsi à partir d'un G-module ayant un vecteur maximal de poids λ, il est possible de construire un G-module irréductible de plus haut poids λ.

Si V est un G-module ayant un vecteur maximal v de poids λ et V' est un G-module ayant un vecteur maximal v' de poids λ' alors le G-module $V \otimes V'$ est un G-module ayant un vecteur maximal de poids $\lambda + \lambda'$. En effet, l'action de B sur le vecteur $v \otimes v'$ est $b(v \otimes v') = bv \otimes bv' = \lambda(b)v \otimes \lambda'(b)v' = \lambda(b)\lambda'(b)v \otimes v'$. Ainsi $v \otimes v'$ est un vecteur maximal de poids $\lambda + \lambda'$. Ceci, combiné avec la remarque précédente, nous permet de montrer que l'existence d'un G-module irréductible de plus haut poids $\lambda + \lambda'$ se déduit de l'existence de deux G-module irréductibles ayant des vecteurs maximaux de poids λ et λ' respectivement.

4.2.3. Construction d'un G-module de poids $c\lambda_i$

Rappelons nous que dans la section 2.5 nous avons numéroté les racines simples dans $\triangle$. Nous avons associé à chacune d'elle un poids dominant fondamental λ_i tel que $\langle \alpha_i, \lambda_j \rangle = \delta_{ij}$.

Soit $\alpha_i \in \triangle$, une racine simple. Définissons le sous-groupe parabolique maximal $P_i =< B, G_{-\alpha_j} \mid j \neq i >$, c'est-à-dire, P_i est le sous-groupe engendré par B et par tous les sous-groupes $G_{-\alpha_j}$, pour lesquels $j \neq i$.

Exemple 4.2.1. *Nous pouvons numérotés les racines simples de $SL(n, \mathbb{C})$ de telle sorte que pour $t \in T$, $\alpha_i(t) = t_{ii}t^{-1}_{i+1i+1}$. Le sous groupe parabolique P_i correspond à l'ensemble des matrices $g \in SL(n, \mathbb{C})$ telles que $g_{kl} = 0$ si $k > i$ et $l < i$. La forme de ses matrices est illustrée dans la figure 4.1.*

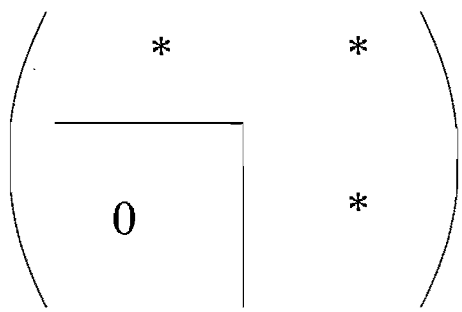

FIG. 4.1. Parabolique maximal

Le théorème de Chevalley, théorème 2.1.3, nous assure l'existence d'une représentation $G \to GL(V)$ et d'une droite $\mathbb{C}\, v_i$ telles que P_i est exactement le sous-groupe de G qui stabilise la droite $\mathbb{C}\, v_i$. Puisque le sous-groupe de Borel B est contenu dans P_i, le vecteur v_i est un vecteur maximal de V. Notons μ_i le poids de ce vecteur. C'est un caractère dominant puisqu'il provient d'un vecteur maximal et nous pouvons l'écrire comme somme à coefficients positifs de poids dominants fondamentaux : $\mu_i = \sum_{i=1}^{m} c_i\lambda_i$.

Remarquons que pour $j \neq i$, il existe un représentant de s_{α_j} dans P_i. Cela vient du fait que $Z_{\alpha_j} \subseteq P_i$. Notons n_i un tel représentant. Nous voulons montrer que $s_{\alpha_j}\mu_i = \mu_i$. Par définition, $s_{\alpha_j}\mu_i(t) = \mu_i(n_i^{-1}tn_i)$. Pour calculer $\mu_i(n_i^{-1}tn_i)$ nous devons savoir comment $n_i^{-1}tn_i$ agit sur v_i. Puisque la droite $\mathbb{C}\, v_i$ est stable sous l'action de P_i, il existe un caractère $\nu \in X(P_i)$ tel que $gv_i = \nu(g)v_i$ pour tous les $g \in P_i$. Ainsi, $n_i^{-1}tn_iv_i = n_i^{-1}t\nu(n_i)v_i = \nu(n_i)n_i^{-1}\mu_i(t)v_i = \nu(n_i)\nu(n_i)^{-1}\mu_i(t)v_i = \mu_i(t)v_i$. Ce qui nous permet de conclure que $s_{\alpha_j}\mu_i(t) = \mu_i(t)$. Or nous savons aussi que $s_{\alpha_j}\mu_i = \mu_i - c_j\lambda_j$. Nous en déduisons que $c_j = 0$, $\forall j \neq i$. On peut alors réécrire $\mu_i = c_i\lambda_i$. Nous avons donc trouvé un G-module ayant $c_i\lambda_i$ comme plus haut poids, avec $c_i \geq 1$. Ainsi pour chaque $i \in \{1, \dots, m\}$, le sous-groupe parabolique P_i nous permet de construire un G-module dont le plus haut poids est un multiple positif de λ_i, que nous notons $c_i\lambda_i$.

Soit λ un poids dominant. Nous savons que nous pouvons l'écrire comme combinaison $\mathbb{Z}$-linéaire des poids dominants fondamentaux $\lambda = \sum_{i=1}^{m} a_i\lambda_i$ avec les a_i positifs. Il existe alors un entier positif d tel que c_i divise da_i pour tout i, par exemple en prenant d comme le produit des c_i. Nous pouvons réécrire $d\lambda = \sum_{i=1}^{m} a_i'(c_i\lambda_i)$. Nous savons alors, grâce aux remarques de la sous-section 4.2.2, qu'il existe un G-module irréductible de poids maximal $d\lambda$. Avec cela, nous obtenons une application $f_{d\lambda} \in \mathbb{C}[G]$ telle que $f_{d\lambda}(gb) = \lambda^d(b)f_{d\lambda}(g)$. Ce n'est pas encore tout à fait ce qu'on veut, mais notre but est à portée de main.

Avant d'aller plus loin, nous allons introduire un lemme qui sera nécessaire afin de compléter notre construction.

Lemme 4.2.2. *Soit f une fonction de $\mathbb{C}(G)$, où G est un groupe algébrique connexe. Supposons qu'il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n \in \mathbb{C}[G]$. Alors $f \in \mathbb{C}[G]$.*

Démonstration. Si G est connexe, alors son anneau de coordonnées $\mathbb{C}[G]$ est intégralement clos dans $\mathbb{C}(G)$. Supposons que f soit une fonction du corps de coordonnées $\mathbb{C}(G)$ telle que $f^n \in \mathbb{C}[G]$, alors la fonction f est solution de l'équation

$$T^n - f^n = 0$$

et donc f est un élément intègre sur $\mathbb{C}[G]$. Ce qui nous permet de conclure que $f \in \mathbb{C}[G]$ puisque $\mathbb{C}[G]$ est intégralement clos.

□

Définissons une fonction f_λ sur la grande cellule Ω de G par $f_\lambda(u^- b) = \lambda(b)$. Notons que la fonction f_λ vérifie $f_\lambda(gb) = \lambda(b)f_\lambda(g)$ pour $g \in \Omega$. Du fait que Ω est un ouvert dense de G, les corps de fonctions $\mathbb{C}(\Omega)$ et $\mathbb{C}(G)$ sont égaux et nous savons que f_λ peut être étendue à une fonction rationnelle dans $\mathbb{C}(G)$. Il reste seulement à vérifier que f_λ est définie partout, ce qui nous permettra de conclure que $f_\lambda \in \mathbb{C}[G]$. D'après le lemme

4.2.2, il suffit de montrer qu'il existe une puissance positive de f_λ qui est dans $\mathbb{C}[G]$. Le d obtenu plus tôt fera l'affaire. Sur Ω, $f_\lambda^d = f_{d\lambda}$. En effet, pour $u^- \in B_u^-$ et pour $b \in B$

$$\begin{aligned} f_\lambda^d(u^- b) &= \lambda^d(b) \\ &= \lambda^d(b) f_{d\lambda}(u^-) \\ &= f_{d\lambda}(u^- b). \end{aligned}$$

Ainsi, nous pouvons déduire que $f_\lambda^d = f_{d\lambda}$ sur G et $f_\lambda^d \in \mathbb{C}[G]$. On en conclut que $f_\lambda \in \mathbb{C}[G]$ et f_λ vérifie la condition $f_\lambda(gb) = \lambda(b) f_\lambda(g)$. Nous avons donc montré l'existence d'une fonction non identiquement nulle dans $H^0(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*))$.

En combinant les résultats des sections 4.1 et 4.2, nous avons maintenant montré le théorème suivant.

Théorème 4.2.1. *Soit G un groupe semi-simple. Alors $H^0(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*))$ est non nul si et seulement si λ est dominant. Dans le cas où cet espace est non nul, il consiste en un G-module irréductible de plus haut poids $\pi(\lambda)$. Si V est un G-module irréductible de plus haut poids λ, alors $V \simeq H^0(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}_{\pi(\lambda)}^*))$.*

Nous voulons maintenant généraliser ce même théorème au cas où G est un groupe réductif.

4.3. Passage aux groupes réductifs

Pour passer aux groupes réductifs, il nous suffit de nous rappeler de la décomposition de G comme produit de son sous-groupe dérivé et de son centre. Nous avons parlé de cette décomposition dans le théorème 2.2.1. Notons qu'à l'aide de ce théorème, nous avions pu montrer que (G, G) est un groupe semi-simple.

Nous avons une injection $(G, G) \hookrightarrow G$. Nous allons utiliser ce que nous connaissons sur les groupes semi-simples et cette injection afin de généraliser les résultats des deux dernières sections aux groupes réductifs.

Posons $S = T \cap (G, G)$, la restriction du tore maximal de G à (G, G). Comme nous l'avons remarqué dans la section 2.2, c'est un tore maximal de (G, G). Puisque $Z(G) \subset T$, on peut décomposer T comme le produit de S et de $Z(G)$. Soit α une racine de G. Nous avons déjà montré que $G_\alpha \subset (Z_\alpha, Z_\alpha) \subset (G, G)$. Ainsi α peut aussi être vu comme une racine de (G, G) si on la restreint à S. Remarquons que nous ne perdons pas d'informations sur α dans ce cas, puisque une racine de G est complètement déterminée par sa valeur sur S. En effet, si $z \in Z(G)$, $\varepsilon_\alpha(u) = z\varepsilon_\alpha(u)z^{-1} = \varepsilon_\alpha(\alpha(z)u)$. De sorte que $\alpha(z) = e$. On peut donc identifier α et $\alpha|_S$.

Nous voulons maintenant montrer qu'un caractère λ sur T est dominant si et seulement si $\lambda|_S$ est un caractère dominant de S. Pour cela, nous devons montrer que $\langle\alpha, \lambda\rangle = \langle\alpha|_S, \lambda|_S\rangle$. Or, un représentant de s_α dans $N_{(G,G)}S$ sera aussi dans $N_G(T)$ puisque G est le produit de (G, G) et de son centre. La définition de $\langle\alpha, \lambda\rangle$ nous permet de conclure.

Nous allons commencer par montrer que la cohomologie de degré 0 de G/B par rapport au faisceau $\mathscr{L}(\mathbb{C}^*_\lambda)$ est non nulle si et seulement si λ est dominant.

Théorème 4.3.1. *Soit G un groupe réductif. Alors $H^0(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_\lambda)) \neq 0$ si et seulement si λ est un caractère dominant. Dans le cas où $H^0(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_\lambda))$ est non nul, c'est un G-module irréductible.*

DÉMONSTRATION. Notons $B' = B \cap (G, G)$, la restriction de B à (G, G), qui est un sous-groupe de Borel de (G, G) d'après le corollaire 2.2.2. Puisque $G = (G, G)Z(G)$ et que $Z(G) \subset B$, les variétés projectives G/B et $(G, G)/B'$ sont isomorphes. Nous obtenons le diagramme commutatif suivant, où les flèches horizontales sont des isomorphismes.

$$\begin{array}{ccc} (G,G) \times^{B'} \mathbb{C}^*_{\lambda|_B} & \longrightarrow & G \times^B \mathbb{C}^*_\lambda \\ \downarrow & & \downarrow \\ (G,G)/B' & \longrightarrow & G/B \end{array}$$

Commençons par étudier le cas où λ est dominant. Nous savons alors que $\lambda|_S$ est dominant et il existe une section globale non identiquement nulle $s : (G, G) \to \mathbb{C}$ telle que $s(gb) = \lambda(b)s(g)$ pour tout $b \in B'$ et pour tout $g \in (G, G)$. On veut étendre s à une section globale $\hat{s} : G \to \mathbb{C}$. Soit $g \in G$. Alors, il existe $h \in (G, G)$ et il existe $z \in Z(G)$ tels que $g = hz$. On définit $\hat{s}(g) = s(h)\lambda(z)$. Il n'est pas clair que $\hat{s}$ soit bien définie puisque l'intersection entre (G, G) et $Z(G)$ n'est pas réduite à l'élément neutre. Supposons qu'il existe $h' \in (G, G)$ et z' in $Z(G)$ tels que $g = h'z'$. Nous voulons montrer que $s(h')\lambda(z') = s(h)\lambda(z)$. Puisque $g = hz = h'z'$, il existe $w \in Z(G) \cap (G, G)$ tel que $h' = hw$. On en déduit que $wz' = z$. En se rappelant que $w \in Z(G) \cap (G, G) \subset B'$, on obtient la suite d'égalité $s(h')\lambda(z') = s(hw)\lambda(z') = s(h)\lambda(w)\lambda(z') = s(h)\lambda(wz') = s(h)\lambda(z)$. Ce qui achève de montrer que $\hat{s}$ est bien définie.

Nous voulons maintenant nous assurer que $\hat{s} \in H^0(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*))$. Pour cela, nous devons montrer que $\forall g \in G$ et $\forall\, b \in B$, $\hat{s}(gb) = \lambda(b)s(g)$. On peut écrire $g = h_1 z_1$ et $b = h_2 z_2$ avec h_1 dans (G, G), h_2 dans B' et z_1 et z_2 dans $Z(G)$. Ainsi,

$$\hat{s}(gb) = \hat{s}(h_1 z_1 h_2 z_2) = \hat{s}(h_1 h_2 z_1 z_2) = s(h_1 h_2)\lambda(z_1 z_2) = s(h_1)\lambda(h_2)\lambda(z_1)\lambda(z_2)$$

$$= s(h_1)\lambda(z_1)\lambda(h_2)\lambda(z_2) = \hat{s}(h_1 z_1)\lambda(h_2 z_2) = \hat{s}(g)\lambda(b).$$

De sorte que $\hat{s}$ est bien une section globale non identiquement nulle de $\mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*)$. Nous venons donc de montrer que pour λ dominant, $H^0(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*))$ est non nulle.

Supposons maintenant que λ ne soit pas dominant. Soit s une section globale de $\mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*)$. Nous voulons montrer que s est identiquement nulle. La section s restreinte à (G, G) est nécessairement nulle. Entre autre, sur e l'élément neutre de G, $s(e) = 0$. Ainsi, pour $z \in Z(G)$, $s(z) = s(ez) = s(e)\lambda(z) = 0$. Puisque s est nulle sur (G, G) et sur $Z(G)$, alors s est nulle sur G. De sorte que si λ n'est pas dominant, $H^0(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*))$ est nulle.

Il ne reste plus qu'à montrer que $H^0(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*))$ est un G-module irréductible. Nous avons montré que toute section globale de $\mathscr{L}(\mathbb{C}^*_{\lambda|_{B}'})$ se prolonge en une section globale de $\mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*)$. Réciproquement, deux sections globales de $\mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*)$ sont égales si et seulement si elles sont égales sur (G, G). Ainsi, les groupes de cohomologie $H^0(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*))$ et $H^0((G, G)/B', \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_{\lambda|_{B}'}))$ sont isomorphes comme espace vectoriel. On sait que $H^0((G, G)/B', \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_{\lambda|_{B}'}))$ est un (G, G)-module. Le sous-groupe dérivé de G agit aussi sur $H^0(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*))$, l'action de (G, G) étant la restriction de l'action de G à ce sous-groupe. D'après la construction d'une section globale sur G/B à partir d'une section sur $(G, G)/B'$, on réalise que les actions de (G, G) sur ces deux espaces vectoriels coïncident. Ainsi $H^0(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*))$ est un (G, G)-module irréductible. Mais puisque l'action de (G, G) sur $H^0(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*))$ est la restriction de l'action de G sur cet espace, nous obtenons que $H^0(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*))$ est un G-module irréductible. Ce qui termine la preuve. □

Remarque 4.3.1. *Nous aurions pu remarquer directement que*

$$H^0(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*)) \simeq H^0((G, G)/B', \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_{\lambda|_{B}'}))$$

comme espace vectoriel à partir des isomorphismes du diagramme commutatif. Cependant, en construisant explicitement une section $\hat{s} \in H^0(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*))$ à partir d'une section $s \in H^0((G,G)/B', \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_{\lambda|_B}))$, on comprend mieux cet isomorphisme d'espaces vectoriels, de même que l'action de G sur $H^0(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*))$.

Il ne nous reste plus qu'à montrer que tous les G-modules peuvent être obtenus à partir de la cohomologie de G/B par rapport à un faisceau de type $\mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*)$. Ce sera le but du prochain théorème.

Théorème 4.3.2. *Soit G un groupe réductif et V un G-module irréductible. Il existe un caractère λ de B tel que $V \simeq H^0(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*))$ comme G-module.*

Démonstration. La première chose à prouver est que si V est un G-module irréductible, l'action de $Z(G)$ sur V se fait via un caractère, c'est-à-dire, il existe μ un caractère de $Z(G)$ tel que pour tout $v \in V$, et pour tout $z \in Z(G)$, $zv = \mu(z)v$. Puisque $Z(G) \subseteq T$, l'action de $Z(G)$ est diagonalisable et on peut réécrire $V = \bigoplus_{\mu \in X(Z(G))} V_\mu$, où $V_\mu = \{v \in V \mid zv = \mu(z)v\}$. Or V_μ est stable sous l'action de G. En effet, si $v \in V_\mu$, $z(gv) = (zg)v = (gz)v = g(zv) = \mu(z)gv$. D'où, $gv \in V_\mu$. Mais puisque V est irréductible, cela veut dire qu'il existe un unique caractère μ tel que V_μ soit non nul. On en déduit que $V = V_\mu$.

Soit V un G-module irréductible et μ le caractère de $Z(G)$ via lequel ce sous-groupe agit sur V. Puisque V est un G-module irréductible et que $(G,G) \hookrightarrow G$, V est aussi un (G,G)-module. L'action de $Z(G)$ se faisant via un caractère, V est irréductible comme (G,G)-module. Il existe donc un caractère λ sur B' tel que V soit isomorphe à $H^0((G,G)/B', \mathbb{C}_\lambda^*)$ comme (G,G)-module. Considérons le caractère $\hat{\lambda}$ défini par $\hat{\lambda}(b) = \lambda(b')\mu^{-1}(z)$ si $b = b'z$ avec $b' \in B'$ et $\mu \in Z(G)$. On peut montrer que $\hat{\lambda}$ est bien défini. Or $\hat{\lambda}|_S = \lambda$. La preuve du théorème 4.3.1 nous assure que $H^0(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}_{\hat{\lambda}}^*))$ et $H^0((G,G)/B', \mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*))$ sont isomorphes comme (G,G)-module. Ainsi, V et $H^0(G/B, \mathbb{C}_{\hat{\lambda}}^*)$ sont isomorphes comme G-modules. □

Chapitre 5

LE THÉORÈME DE BOREL-WEIL-BOTT

Le théorème de Borel-Weil-Bott dit entre autre que pour un caractère λ, il existe au plus un i tel que $H^i(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_\lambda))$ est non nul. Dans le chapitre précédent, nous avons montré que $H^0(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_\lambda))$ est non nul si et seulement si λ est dominant. Nous devons maintenant montrer que si λ est dominant, alors tous les groupes de cohomologie de degré non zéro sont nuls. Dans le cas où λ est régulier mais n'est pas dominant, nous devrons déterminer quel est l'unique groupe de cohomologie qui est non nul et justifier le fait que tous les autres s'annulent. Lorsque λ est singulier, nous montrerons que tous les groupes de cohomologie sont nuls. Tout cela se fera en reliant la cohomologie $H^i(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_\lambda))$ pour λ un caractère qui n'est pas dominant à la cohomologie $H^0(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_\gamma))$ où γ est un caractère dominant. Nous ferons une esquisse de la preuve dans la section 5.1. À la fin du chapitre, nous pourrons mettre en relation les propositions prouvées dans les chapitres 4 et 5 afin de compléter la preuve du théorème de Borel-Weil-Bott.

Tout au long de ce chapitre, nous travaillerons avec G un groupe algébrique réductif, B un sous-groupe de Borel de G et T un tore maximal de G dans B. Nous noterons W le groupe de Weyl de G.

5.1. Esquisse de la preuve

Ce chapitre contiendra la preuve de la proposition suivante.

Proposition 5.1.1. *Soit λ un caractère dans $X(T)$. Alors il existe au plus un entier i tel que le groupe de cohomologie $H^i(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_\lambda))$ soit non nul.*

La preuve se décompose en plusieurs étapes. Nous en faisons ici une esquisse afin de permettre au lecteur de mieux la comprendre dans sa globalité.

Soit λ un caractère de B et soit α une racine simple de G. On construit le sous-groupe parabolique $P_\alpha =< B, G_{-\alpha} >$. On sait qu'il existe un entier n tel que $\langle\alpha,\lambda\rangle = n$. À l'aide de la décomposition de Levi d'un groupe parabolique et de la décomposition d'un groupe réductif, décompositions dont nous avons discutées dans la section 2.2, on commence par relier la cohomologie $H^i(P_\alpha/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*))$ à la cohomologie $H^i(SL(2,\mathbb{C})/B(2,\mathbb{C}), \mathscr{L}(\mathbb{C}_n^*))$. Avec les calculs du chapitre 1, on déduit que

$$\begin{array}{rcll} H^0(P_\alpha/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*)) & \simeq & V_n & n \geq 0; \\ H^0(P_\alpha/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*)) & = & 0 & n < 0; \\ H^1(P_\alpha/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*)) & = & 0 & n \geq -1; \\ H^1(P_\alpha/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*)) & \simeq & V_{|n|-2} & n < -1; \\ H^i(P_\alpha/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*)) & = & 0 & \forall i > 1. \end{array}$$

En particulier, si $n < 0$, on obtient que

$$H^1(P_\alpha/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*)) \simeq H^0(P_\alpha/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}_{s_\alpha\lambda-\alpha}^*)).$$

Tout cela sera fait dans la section 5.2.

Si λ est un caractère qui n'est pas dominant, il existe α une racine simple telle que $\langle\alpha,\lambda\rangle < 0$. Le but de la section 5.3 est de montrer que dans ce cas,

$$H^{i+1}(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*)) \simeq H^i(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}_{s_\alpha\lambda-\alpha}^*)).$$

Pour ce faire, on utilise l'application $\pi : G/B \to G/P_\alpha$ qui nous permettra d'obtenir la suite spectrale de Leray

$$E_2^{p,q} = H^p(G/P_\alpha, \mathscr{L}_{G/P_\alpha}(H^q(P_\alpha/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*)))) \Longrightarrow H^{p+q}(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*)),$$

où $\mathscr{L}_{G/P_\alpha}(H^q(P_\alpha/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*)))$ est le faisceau des sections du fibré vectoriel

$$G \times^{P_\alpha} H^q(P_\alpha/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*)).$$

Comme on vient de l'énoncer, les groupes de cohomologie $H^q(P_\alpha/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_\lambda))$ sont tous nuls sauf pour au plus un entier q, ainsi la suite spectrale dégénère et on obtient

$$\begin{aligned} H^{i+1}(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_\lambda)) &\simeq H^i(G/P_\alpha, \mathscr{L}_{G/P_\alpha}(H^1(P_\alpha/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_\lambda)))) \\ &\simeq H^i(G/P_\alpha, \mathscr{L}_{G/P_\alpha}(H^0(P_\alpha/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_{s_\alpha\lambda-\alpha})))) \\ &\simeq H^i(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_{s_\alpha\lambda-\alpha})). \end{aligned}$$

Finalement, on utilisera cet isomorphisme à répétition dans la section 5.4, afin de terminer la preuve du théorème de Borel-Weil-Bott. Cette étape se base sur la preuve de Demazure dans **[D2]**. On utilise le fait que pour un caractère régulier λ, il existe un unique $\omega \in W$ tel que $\omega(\lambda+\rho)-\rho$ afin de montrer inductivement que

$$H^{i+l(\omega)}(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_\lambda)) \simeq H^i(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_{\omega(\lambda+\rho)-\rho}));$$

et cela, en se rappelant que $s_\alpha\lambda - \alpha = s_\alpha(\lambda+\rho)-\rho$. Des considérations de dimension nous assurerons que pour un caractère dominant λ, $H^i(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_\lambda))$ est nul pour tout $i \geq 1$. Ce résultat combiné avec le fait que $H^0(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_\lambda))$ est non nul si et seulement si λ est dominant nous permettront de terminer la preuve de la proposition 5.1.1 dans le cas où le caractère λ est régulier. Dans le cas où le caractère λ est singulier, nous obtiendrons par le même type de raisonnement l'annulation de tous les groupes de cohomologie.

5.2. Étude de P_α/B

Soit λ un caractère dans $X(T)$. Considérons α une racine simple de T et $P_\alpha =< B, G_{-\alpha} >$, le sous-groupe parabolique associé à cette racine. Le sous-groupe de Borel B est aussi un sous-groupe de Borel de P_α, comme nous l'avons vu à la proposition 2.1.3. Ainsi P_α/B est une variété projective. On construit le fibré vectoriel P_α-équivariant $P_\alpha \times^B \mathbb{C}^*_\lambda$ au dessus de P_α/B, qui se trouve à être la restriction du fibré $G \times^B \mathbb{C}^*_\lambda$ au-dessus de P_α/B. Nous aurons besoin de calculer la cohomologie de P_α/B par rapport au faisceau des sections de ce fibré. Énonçons exactement le résultat que nous voulons montrer.

Proposition 5.2.1. *Soit λ un caractère de T et α une racine simple. Posons $n := \langle\alpha, \lambda\rangle$. Alors,*

$$H^i(P_\alpha/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_\lambda)) \simeq H^i(SL(2,\mathbb{C})/B(2,\mathbb{C}), \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_n))$$

comme P_α-module. En particulier, il existe au plus un groupe de cohomologie qui est non nul. Ce sera le groupe de degré 0 *si $n \geq 0$ et ce sera le premier groupe de cohomologie, si $n < -1$. De plus, si $n < 0$, alors*

$$H^1(P_\alpha/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_\lambda)) \simeq H^0(P_\alpha/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_{s_\alpha\lambda-\alpha}))$$

comme P_α-module.

Démonstration. Comme sous-groupe parabolique d'un groupe algébrique réductif, P_α a une décomposition de Levi, dont nous avons discuté dans le théorème 2.2.2, $P_\alpha = LV$ avec $V = R_u(P_\alpha)$ et $L = C_G((\ker(\alpha))^\circ)$. Nous avons précédemment noté Z_α le centralisateur dans G de la composante de l'identité du noyau de α. Ainsi la décomposition se trouve à être $P_\alpha = Z_\alpha R_u(P_\alpha)$. Comme nous l'avons mentionné dans la section 2.4, Z_α est un groupe réductif de rang semi-simple 1. On notera $B_\alpha = B \cap Z_\alpha$, la restriction à Z_α du sous-groupe de Borel B. Puisque $\ker(\alpha)^\circ$ est un tore de G, la proposition 2.2.2 nous assure que $Z_\alpha \cap B$ est un sous-groupe de Borel de Z_α. De plus, $R_u(P_\alpha) \subset B$, puisque B est un sous-groupe de Borel de P_α et $R_u(P_\alpha)$ consiste en l'intersection sur l'ensemble des Borel B' de P_α des B'_u. Nous obtenons ainsi l'isomorphisme $P_\alpha/B \simeq Z_\alpha/B_\alpha$. De plus, puisque Z_α est un groupe réductif de rang semi-simple 1, le théorème 25.3 de **[Hu2]** nous assure que Z_α/B_α est isomorphe à $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$. Nous savons donc aussi que $P_\alpha/B \simeq \mathbb{C}\mathrm{P}^1$.

Nous venons de mentionner que Z_α est un groupe réductif. Nous pouvons donc utiliser les résultats de la section 2.2. Entre autre, nous savons que Z_α se décompose comme le produit de son sous-groupe dérivé et de son centre que nous noterons Z.

Le lemme 2.2.2 nous permet d'obtenir la suite d'inclusion $Z \subset T \subset B_\alpha$. Nous obtenons alors les isomorphismes

$$Z_\alpha/B_\alpha \simeq (Z_\alpha, Z_\alpha)Z/B_\alpha \simeq (Z_\alpha, Z_\alpha)/(B_\alpha \cap (Z_\alpha, Z_\alpha)).$$

Nous pouvons donc travailler avec $(Z_\alpha, Z_\alpha)/(B_\alpha \cap (Z_\alpha, Z_\alpha))$ et étudier le fibré au dessus de cet espace. Nous noterons $B'_\alpha = B_\alpha \cap (Z_\alpha, Z_\alpha)$, la restriction de B_α à (Z_α, Z_α). Encore une fois, nous pouvons remarquer grâce au corollaire 2.2.2 que B'_α est un sous-groupe de Borel de (Z_α, Z_α).

Par le corollaire 2.2.1, nous savons que le groupe (Z_α, Z_α) est semi-simple. Puisque le rang semi-simple de Z_α est 1, on en déduit que le rang de (Z_α, Z_α) est aussi 1. Or, comme il est montré dans la section 32.3 de **[Hu2]**, il existe exactement deux groupes semi-simples de rang 1 : $SL(2,\mathbb{C})$ et $PSL(2,\mathbb{C}) = SL(2,\mathbb{C})/\{Id,-Id\}$. Nous avons déjà étudié ces deux groupes dans le chapitre 1.

Étudions comment se décompose le tore T. Puisque $Z \subset T$, on peut décomposer $T = (Z_\alpha, Z_\alpha) \cap T \cdot Z$. On notera $S = (Z_\alpha, Z_\alpha) \cap T$, la restriction du tore dans (Z_α, Z_α) qui est aussi un tore de cet espace. Puisque (Z_α, Z_α) est un groupe semi-simple de rang 1, il existe $\varphi : S \to \mathbb{C}^\times$, un isomorphisme de groupe algébrique. Nous voulons étudier $\lambda|_S$ pour pouvoir comprendre le faisceau des sections associés au fibré en droite $(Z_\alpha, Z_\alpha) \times^{B'_\alpha} \mathbb{C}^*_{\lambda|_{B'_\alpha}}$. On cherche l'entier n tel que $\lambda|_S(\varphi^{-1}(z)) = z^n$.

Nous allons commencer par étudier $\alpha|_S$. Notons tout d'abord que $\alpha|_S$ est une racine de (Z_α, Z_α). Pour montrer cela, il nous suffit de remarquer que l'image du morphisme ε_α, qu nous avons notée G_α, est incluse dans (Z_α, Z_α). Dans un premier temps, on remarque que $G_\alpha \subset Z_\alpha$. En effet, si $z \in \ker(\alpha)$, $z\varepsilon_\alpha(u)z^{-1} = \varepsilon_\alpha(\alpha(z)u) = \varepsilon_\alpha(u)$. Ceci nous permet de conclure que $z\varepsilon_\alpha(u) = \varepsilon_\alpha(u)z$ et donc $\varepsilon_\alpha(u) \in C_G(\ker(\alpha))$. Mais puisque pour $t \in T$, $[\varepsilon_\alpha(u), t] = \varepsilon_\alpha((1-\alpha(t))u)$, on déduit que $G_\alpha \subset (Z_\alpha, Z_\alpha)$. Ainsi, $\alpha|_S \in R((Z_\alpha, Z_\alpha), S)$. Nous allons séparer notre étude en deux parties. Dans un premier temps, nous étudierons ce qui se passe si $(Z_\alpha, Z_\alpha) \simeq SL(2,\mathbb{C})$. Par la suite, nous étudierons le cas où $(Z_\alpha, Z_\alpha) \simeq PSL(2,\mathbb{C})$.

Cas 1 : $(Z_\alpha, Z_\alpha) \simeq SL(2,\mathbb{C})$

Nous avons un isomorphisme $\phi : (Z_\alpha, Z_\alpha) \to SL(2,\mathbb{C})$. Puisque tous les tores maximaux d'un groupe algébrique sont conjugués, on peut s'assurer que l'image de S soit exactement $T(2,\mathbb{C})$. On remarque alors que $\alpha|_S \circ \phi^{-1}$ est une racine de $SL(2,\mathbb{C})$. Pour cela, il suffit de conjuguer ϕ et ε_α pour obtenir un morphisme de $(\mathbb{C},+)$ dans $SL(2,\mathbb{C})$ qui est normalisé par $T(2,\mathbb{C})$. Puisque $n_{\alpha_2} m_t n_{\alpha_2}^{-1} = m_{t^{-1}}$, on peut aussi faire en sorte que $\alpha|_S \circ \phi^{-1} = \alpha_2$. Ainsi, nous sommes certains que B'_α est envoyé sur $B(2,\mathbb{C})$.

Soit $\sigma_\alpha \in W((Z_\alpha, Z_\alpha), S)$ l'élément du groupe de Weyl de (Z_α, Z_α) qui envoit α sur $-\alpha$ et soit $\dot{\sigma}_\alpha \in N_{(Z_\alpha,Z_\alpha)}S \subset N_G S$, un représentant de σ_α. On veut montrer que $\dot{\sigma}_\alpha$ est aussi un représentant de $s_\alpha \in W(G,T)$. Pour cela, il faut montrer que $\dot{\sigma}_\alpha \in N_G T$. Mais $T = S \cdot Z$, où Z est le centre de Z_α. Ainsi, si $t \in T$ s'écrit sous la forme $t = sz$ avec $s \in S$ et $z \in Z$, il existe $s' \in S$ tel que $\dot{\sigma}_\alpha s \dot{\sigma}_\alpha^{-1} = s'$ et donc, $\dot{\sigma}_\alpha t \dot{\sigma}_\alpha^{-1} = \dot{\sigma}_\alpha s z \dot{\sigma}_\alpha^{-1} =$

$\dot{\sigma}_\alpha s \dot{\sigma}_\alpha^{-1} z = s'z$ qui est un élément de T. Ainsi, $\dot{\sigma}_\alpha \in N_G T$ et c'est donc un représentant de $s_\alpha \in W(G, T)$. Cela nous permet de conclure que pour λ un caractère de T

$$(s_\alpha \lambda)|_S = \sigma_\alpha(\lambda|_S).$$

Nous savons que $s_\alpha \lambda = \lambda - \langle \alpha, \lambda \rangle \alpha$. Réécrivons cette égalité sous la forme $\lambda - s_\alpha \lambda = \langle \alpha, \lambda \rangle \alpha$. Nous pouvons restreindre le tout à S, ce qui nous donne $(\lambda - s_\alpha \lambda)|_S = \langle \alpha, \lambda \rangle \alpha|_S$. Or $(s_\alpha \lambda)|_S(\phi^{-1}(m_t)) = \sigma_\alpha(\lambda|_S)(\phi^{-1}(m_t)) = \lambda|_S(\phi^{-1}(m_{t^{-1}})) = -\lambda|_S(\phi^{-1}(m_t))$. Ainsi, on en déduit que $2\lambda|_S = \langle \alpha, \lambda \rangle \alpha|_S$. Puisque $\alpha|_S(\phi^{-1}(m_t)) = t^2$, on en déduit que $\lambda|_S(\phi^{-1}(m_t)) = t^{\langle \alpha, \lambda \rangle}$. Ainsi, le n que nous cherchons est tout simplement $\langle \alpha, \lambda \rangle$.

On se rappelle que nous avons noté α_2 la racine positive de $SL(2, \mathbb{C})$ et s l'unique élément non trivial du groupe de Weyl $W(SL(2, \mathbb{C}), T(2, \mathbb{C}))$. Puisque $T(2, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^\times$, un caractère de $T(2, \mathbb{C})$ est complètement déterminé par un entier n. Si $\lambda(m_t) = t^n$, nous associons ce n à λ. En particulier, nous noterons $\mathscr{L}(\mathbb{C}_n^*)$ pour $\mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*)$. On remarque que $s\lambda = -\lambda$. De plus, il est important de noter que α_2 est associé à l'entier 2.

Avec les calculs que nous avons précédemment effectués concernant $\lambda|_S$, nous obtenons le diagramme commutatif suivant où $n = \langle \alpha, \lambda \rangle$ et chaque morphisme horizontal est un isomorphisme.

$$\begin{tikzcd}
(Z_\alpha, Z_\alpha) \times^{B'_\alpha} \mathbb{C}^*_{\lambda|_{B'_\alpha}} \arrow[r] \arrow[d] & SL(2, \mathbb{C}) \times^{B(2,\mathbb{C})} \mathbb{C}_n^* \arrow[d] \\
(Z_\alpha, Z_\alpha)/B'_\alpha \arrow[r] & SL(2, \mathbb{C})/B(2, \mathbb{C})
\end{tikzcd}$$

Ainsi, nous obtenons un isomorphisme d'espaces vectoriels entre les groupes de cohomologie $H^i(SL(2, \mathbb{C})/B(2, \mathbb{C}), \mathscr{L}(\mathbb{C}_n^*))$ et $H^i((Z_\alpha, Z_\alpha)/B'_\alpha, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_{\lambda|_{B'_\alpha}}))$. Mais à travers l'isomorphisme $\phi : SL(2, \mathbb{C}) \to (Z_\alpha, Z_\alpha)$, on fait de $H^i(SL(2, \mathbb{C})/B(2, \mathbb{C}), \mathscr{L}(\mathbb{C}_n^*))$ un (Z_α, Z_α)-module et nous parvenons à conclure que $H^i(SL(2, \mathbb{C})/B(2, \mathbb{C}), \mathscr{L}(\mathbb{C}_n^*))$ et $H^i((Z_\alpha, Z_\alpha)/B'_\alpha, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_{\lambda|_{B'_\alpha}}))$ sont isomorphes comme (Z_α, Z_α)-modules.

Cas 2 : $(Z_\alpha, Z_\alpha) \simeq PSL(2, \mathbb{C})$

Soit λ un caractère de T et notons S la restriction de T à (Z_α, Z_α). Puisque $S \simeq \mathbb{C}^\times$, nous cherchons l'entier n tel que $\lambda|_S$ peut être identifié à n. Nous avons déjà fait le calcul dans le cadre de $SL(2, \mathbb{C})$ et la seule modification à apporter ici vient du fait que la racine simple α est ici associé à l'entier 1 et non pas à 2 comme dans le cas de $SL(2,\mathbb{C})$. Nous trouvons donc que l'entier cherché est $\frac{1}{2}\langle\alpha,\lambda\rangle$.

Mais puisque

$$H^i(SL(2,\mathbb{C})/B(2,\mathbb{C}),\mathscr{L}(\mathbb{C}^*_{2n}))\simeq H^i(PSL(2,\mathbb{C})/B'(2,\mathbb{C}),\mathscr{L}(\mathbb{C}^*_n)),$$

nous obtenons alors que

$$H^i((Z_\alpha,Z_\alpha)/B'_\alpha,\mathscr{L}(\mathbb{C}^*_{\lambda|_{B'_\alpha}}))\simeq H^i(SL(2,\mathbb{C})/B(2,\mathbb{C}),\mathscr{L}(\mathbb{C}^*_{\langle\alpha,\lambda\rangle}))$$

et cela comme (Z_α,Z_α)-module.

Structure de P_α-module

On se rappelle que le but de cette section est de calculer la cohomologie de P_α/B par rapport au faisceau $\mathscr{L}(\mathbb{C}^*_\lambda)$. Nous voulons aussi voir cet espace non seulement comme un espace vectoriel, mais bien comme un P_α-module. Nous avons le diagramme commutatif suivant dont toutes les flèches horizontales sont des isomorphismes.

$$\begin{array}{ccccc} P_\alpha\times^B\mathbb{C}^*_\lambda & \longrightarrow & Z_\alpha\times^{B_\alpha}\mathbb{C}^*_\lambda & \longrightarrow & (Z_\alpha,Z_\alpha)\times^{B'_\alpha}\mathbb{C}^*_{\lambda|_S} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ P_\alpha/B & \longrightarrow & Z_\alpha/B_\alpha & \longrightarrow & (Z_\alpha,Z_\alpha)/B'_\alpha \end{array}$$

Nous sommes seulement intéressés à la cohomologie de degré 0 puisque les groupes de cohomologies de degré 1 sont isomorphes comme Z_α-module à des groupes de cohomologie de degré 0 et que les groupes de cohomologie d'ordre supérieur sont tous nuls. Puisque toutes les flèches horizontales du diagramme commutatif précédent sont des isomorphismes, nous savons que

$$H^0(P_\alpha/B,\mathscr{L}(\mathbb{C}^*_\lambda))\simeq H^0((Z_\alpha,Z_\alpha)/B'_\alpha,\mathscr{L}(\mathbb{C}^*_{\lambda|_{B'_\alpha}}))$$

comme espaces vectoriels. Nous voulons maintenant induire une structure de P_α-module sur $H^0((Z_\alpha,Z_\alpha)/B'_\alpha,\mathscr{L}(\mathbb{C}^*_{\lambda|_{B'_\alpha}}))$. Pour rendre le travail possible, nous allons revenir à la définition de $H^0(X,\mathscr{F})$ comme étant les sections globales du faisceau $\mathscr{F}$.

Soit $s\in H^0((Z_\alpha,Z_\alpha)/B'_\alpha,\mathscr{L}(\mathbb{C}^*_{\lambda|_{B'_\alpha}}))$, une section globale de $\mathscr{L}(\mathbb{C}^*_{\lambda|_{B'_\alpha}})$ et $g\in(Z_\alpha,Z_\alpha)$. Nous pouvons voir $s:(Z_\alpha,Z_\alpha)\to(Z_\alpha,Z_\alpha)\times^{B'_\alpha}\mathbb{C}^*_{\lambda|_{B'_\alpha}}$ comme une application définie par $s(hB) = [g, \hat{s}(h)]$. L'élément g agit sur cette section par $gs(h) = s(g^{-1}h)$. Nous voulons maintenant induire une action de Z sur cet espace. Puisque $s(g) = [g, \hat{s}(g)]$, nous pouvons définir $zs(g) := z[g, \hat{s}(g)]$. En faisant nos calculs dans $Z_\alpha \times^{B_\alpha} \mathbb{C}^*_\lambda$, nous obtenons que $zs(g) = [zg, \hat{s}(g)] = [gz, \hat{s}(g)] = [g, \lambda^{-1}(z)\hat{s}(g)]$. Notre action de z sur s se trouve donc à être $zs = \lambda^{-1}(z)s$. Nous savons que Z_α se décompose comme produit de (Z_α, Z_α) et de Z. Ainsi nous avons une action de Z_α sur $H^0((Z_\alpha, Z_\alpha)/B'_\alpha, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_{\lambda|_{B'_\alpha}}))$.

Le groupe parabolique P_α se décompose comme produit de Z_α et de $R_u(P_\alpha)$. Le sous-groupe $R_u(P_\alpha)$ est inclus dans B_u, le sous-ensemble des éléments unipotents du sous-groupe de Borel B. Nous savons que pour tout élément $u \in B_u$, $\lambda(u) = 1$. De plus, on se rappelle que $R_u(P_\alpha)$ est un sous-groupe normal de P_α. Encore une fois, nous allons définir pour $u \in B_u$ et $s \in H^0((Z_\alpha, Z_\alpha)/B'_\alpha, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_{\lambda|_{B'_\alpha}}))$ $us(g) := [ug, \hat{s}(g)]$. En faisant nos calculs dans $P_\alpha \times^B \mathbb{C}^*_\lambda$, nous obtenons que $us(g) = [gg^{-1}ug, \hat{s}(g)]$. Puisque $R_u(P_\alpha)$ est un sous-groupe normal de P_α, il existe $u' \in R_u(P_\alpha)$ tel que $g^{-1}ug = u'$. Nous obtenons alors que $[gg^{-1}ug, \hat{s}(g)] = [gu', \hat{s}(g)] = [g, \lambda^{-1}(u')\hat{s}(g)] = [g, \hat{s}(g)]$, c'est-à-dire $R_u(P_\alpha)$ agit trivialement sur $H^0((Z_\alpha, Z_\alpha)/B'_\alpha, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_{\lambda|_{B'_\alpha}}))$. Ainsi, nous avons mis une structure de P_α-module sur $H^0((Z_\alpha, Z_\alpha)/B'_\alpha, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_{\lambda|_{B'_\alpha}}))$. De plus cette structure se trouve à être la même que celle sur $H^0(P_\alpha/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_\lambda))$. Cela nous permet donc de conclure que $H^0(P_\alpha/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_\lambda))$ et $H^0((Z_\alpha, Z_\alpha)/B'_\alpha, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_{\lambda|_{B'_\alpha}}))$ sont isomorphes comme P_α-modules.

Nous pouvons maintenant résumer les calculs de la cohomologie $H^i(P_\alpha/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_\lambda))$ pour un caractère λ donné. Posons $n = \langle \alpha, \lambda \rangle$.

$$\begin{array}{rcll}
H^0(P_\alpha/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_\lambda)) & \simeq & V_n & n \geq 0; \\
H^0(P_\alpha/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_\lambda)) & = & 0 & n < 0; \\
H^1(P_\alpha/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_\lambda)) & = & 0 & n \geq -1; \\
H^1(P_\alpha/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_\lambda)) & \simeq & V_{|n|-2} & n < -1; \\
H^i(P_\alpha/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_\lambda)) & = & 0 & \forall i > 1.
\end{array}$$

Entre autre, nous obtenons que si $\langle \alpha, \lambda \rangle < 0$, alors il existe un isomorphisme de P_α-modules

$$H^1(P_\alpha/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_\lambda)) \simeq H^0(P_\alpha/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_{s_\alpha\lambda-\alpha})).$$

Ceci nous permet de terminer la preuve de la proposition. □

5.3. Utilisation de la suite spectrale de Leray

Considérons $\alpha \in R$ une racine simple et $P_\alpha =< G_{-\alpha}, B >$, le parabolique minimal associé à cette racine. Il existe un morphisme continu de projection $\pi : G/B \to G/P_\alpha$. Si on pose $\mathscr{F} = \mathscr{L}_{G/B}(\mathbb{C}^*_\lambda)$ avec λ un caractère de T, la suite spectrale de Leray dont nous avons assuré l'existence dans le théorème 3.3.1 s'écrit :

$$E_2^{p,q} = H^p(G/P_\alpha, R^q\pi_* \mathscr{L}_{G/B}(\mathbb{C}^*_\lambda)) \Longrightarrow H^{p+q}(G/B, \mathscr{L}_{G/B}(\mathbb{C}^*_\lambda)).$$

Or, nous allons montrer dans la proposition 5.3.1 que

$$R^q\pi_* \mathscr{L}_{G/B}(\mathbb{C}^*_\lambda) \simeq \mathscr{L}_{G/P_\alpha}(H^q(P_\alpha/B, \mathscr{L}_{P_\alpha/B}(\mathbb{C}^*_\lambda))).$$

Cela nous permet de réécrire notre suite spectrale :

$$E_2^{p,q} = H^p(G/P_\alpha, \mathscr{L}_{G/P_\alpha}(H^q(P_\alpha/B, \mathscr{L}_{P_\alpha/B}(\mathbb{C}^*_\lambda))) \Longrightarrow H^{p+q}(G/B, \mathscr{L}_{G/B}(\mathbb{C}^*_\lambda)).$$

C'est avec cette formulation que nous allons travailler.

Proposition 5.3.1. *Soit P un sous-groupe parabolique de G et V un B-module. Alors, il existe un isomorphisme de faisceaux :*

$$R^q\pi_* \mathscr{L}_{G/B}(V) \simeq \mathscr{L}_{G/P}(H^q(P/B, \mathscr{L}_{P/B}(V))).$$

Démonstration. Pour montrer ce résultat, nous devons tout d'abord comprendre le faisceau $R^i\pi_* \mathscr{L}_{G/B}(V)$. Nous avons décrit ce faisceau dans la proposition 3.3.1. On se rappelle que nous avions alors vu que pour $f : X \to Y$ une application continue entre deux espaces topologiques et $\mathscr{F}$ un faisceau sur X, $R^if_*(\mathscr{F})$ est le faisceau associé au préfaisceau

$$U \mapsto H^i(f^{-1}(U), \mathscr{F}|_{f^{-1}(U)})$$

où U est un ouvert de Y.

Nous allons noter ce préfaisceau $r^if_*(\mathscr{F})$. Nous voulons construire un isomorphisme de faisceaux entre $R^i\pi_* \mathscr{L}_{G/B}(V)$ et $\mathscr{L}_{G/P}(H^q(P/B, \mathscr{L}_{P/B}(V)))$. Pour ce faire, nous allons commencer par construire une application

$$\phi : r^i\pi_* \mathscr{L}_{G/B}(V) \to \mathscr{L}_{G/P}(H^q(P/B, \mathscr{L}_{P/B}(V))).$$

Ainsi, pour chaque ouvert U de G/P, on doit construire une application

$$\phi_U : H^i(\pi^{-1}(U), \mathscr{L}_{G/B}(V)|_{\pi^{-1}(U)}) \to \mathscr{L}_{G/P}(H^q(P/B, \mathscr{L}_{P/B}(V)))(U).$$

Cela consiste à définir pour un élément $\eta \in H^i(\pi^{-1}(U), \mathscr{L}_{G/B}(V))$, une section

$$\phi_U(\eta) : U \to G \times^P H^q(P/B, \mathscr{L}_{P/B}(V)).$$

Comme on a remarqué dans la section 3.1, si on appelle ν la projection de G sur G/P, c'est équivalent à définir une application

$$\phi_U(\eta) : \nu^{-1}(U) \to H^q(P/B, \mathscr{L}_{P/B}(V))$$

qui vérifie $\phi_U(\eta)(gp) = p\phi_U(\eta)(g),\ \forall g \in \nu^{-1}(U)$, et $\forall p \in P$.

Soit $g \in G$. On définit le morphisme continu

$$\begin{array}{rccc} \tau_g : & P/B & \to & G/B \\ & pB & \mapsto & gpB \end{array}$$

Il existe alors une application naturelle

$$\tau_g^* : H^i(G/B, \mathscr{L}_{G/B}(V)) \to H^i(P/B, \tau_g^* \mathscr{L}_{G/B}(V)).$$

Le lecteur peut trouver plus de détails sur l'existence et la construction de cette application dans la section 2.5 de **[I]**.

Il est possible de montrer que le faisceau $\tau_g^* \mathscr{L}_{G/B}(V)$ est isomorphe au faisceau $\mathscr{L}_{P/B}(V)$. On obtient alors une application

$$\tau_g^* : H^i(G/B, \mathscr{L}_{G/B}(V)) \to H^i(P/B, \mathscr{L}_{P/B}(V)).$$

Ces constructions restent vraies si on se restreint à un ouvert U de P/B et qu'on considère seulement les application τ_g pour lesquelles $\overline{g} \in \pi^{-1}(U)$. Cela nous permet de définir l'application ϕ_U. Soit $gB \in \pi^{-1}(U)$ et $\eta \in H^i(\pi^{-1}(U), \mathscr{L}_{G/B}(V)|_{(\pi^{-1}(U)})$. On définit $\phi_U(\eta)(g) = \tau_g^*\eta$. On vérifie alors que $\phi_U(\eta)$ est bien une section de

$$\mathscr{L}_{G/P}(H^q(P/B, \mathscr{L}_{P/B}(V)))(U).$$

Il reste à montrer que ϕ_U induit un isomorphisme au niveau des faisceaux. Ceci se trouve à être une question locale. Nous n'allons pas faire les détails ici. Le lecteur est invité à aller consulter la preuve du théorème 6 de **[Bott]** pour plus d'informations. □

Nous devons comprendre $E_\infty^{p,q}$. Mais puisque peu de valeurs $E_2^{p,q}$ sont non nulles, cela sera facile à décrire.

Lemme 5.3.1. *Pout tout entier positif p et q,*

$$E_2^{p,q} = E_\infty^{p,q}$$

Démonstration. Pour chacun des caractères λ, comme nous l'avons vu dans la proposition 5.2.1, il existe au plus un degré $q \in \{0,1\}$ pour lequel $H^q(P_\alpha/B, \mathscr{L}_{P_\alpha/B}(\mathbb{C}_\lambda^*))$ est non nul. Ainsi, il existe au plus un $q \in \{0,1\}$ pour lequel le faisceau $R^q\pi_* \mathscr{L}_{G/B}(\mathbb{C}_\lambda^*)$ est non nul. Cela fait en sorte qu'au plus une ligne de $E_2^{p,q}$ est non nulle, $E_2^{p,0}$ ou $E_2^{p,1}$, et donc $E_2^{p,q} = E_\infty^{p,q}$. □

Nous savons maintenant que $E_\infty^{p,q} = 0$, sauf pour au plus un $q \in \{0,1\}$. Dans un premier temps, étudions la situation où $E_\infty^{p,q} = 0$ sauf si $q = 1$. Pour cela, on doit avoir $H^0(P_\alpha/B, \mathscr{L}_{P_\alpha/B}(\mathbb{C}_\lambda^*)) = 0$ ce qui arrive lorsque $\langle\alpha,\lambda\rangle < 0$. En appliquant le lemme 3.3.1, on obtient l'isomorphisme suivant

$$H^{p+1}(G/B, \mathscr{L}_{G/B}(\mathbb{C}_\lambda^*)) \simeq H^p(G/P_\alpha, \mathscr{L}_{G/P_\alpha}(H^1(P_\alpha/B, \mathscr{L}_{P_\alpha/B}(\mathbb{C}_\lambda^*)))). \tag{5.3.1}$$

Notons que dans notre cas, l'action de groupe est respectée et nous obtiendrons des isomorphismes de G-module.

Dans le cas où $E_\infty^{p,q} = 0$ sauf si $q = 0$, ce qui arrive lorsque $\langle\alpha,\lambda\rangle \geq -1$, on obtient l'isomorphisme

$$H^p(G/B, \mathscr{L}_{G/B}(\mathbb{C}_\lambda^*)) \simeq H^p(G/P_\alpha, \mathscr{L}_{G/P_\alpha}(H^0(P_\alpha/B, \mathscr{L}_{P_\alpha/B}(\mathbb{C}_\lambda^*)))). \tag{5.3.2}$$

Lemme 5.3.2. *Soit λ un caractère tel que pour une racine simple α, $\langle\alpha,\lambda\rangle = -1$. Alors,*

$$H^i(G/B, \mathscr{L}_{G/B}(\mathbb{C}_\lambda^*)) \simeq H^0(G/B, \mathscr{L}_{G/B}(\mathbb{C}_\lambda^*))$$

et cela pour tout $i \geq 0$.

Démonstration. Dire que $\langle\alpha,\lambda\rangle = -1$ est équivalent à dire que $s_\alpha\lambda - \alpha = \lambda$. D'après la proposition 5.2.1, nous savons alors que $H^1(P_\alpha/B, \mathscr{L}_{P_\alpha/B}(\mathbb{C}_\lambda^*)) = H^0(P_\alpha/B, \mathscr{L}_{P_\alpha/B}(\mathbb{C}_\lambda^*))$.

L'isomorphisme 5.3.1 nous dit que

$$H^{p+1}(G/B, \mathscr{L}_{G/B}(\mathbb{C}_\lambda^*)) \simeq H^p(G/P_\alpha, \mathscr{L}_{G/P_\alpha}(H^1(P_\alpha/B, \mathscr{L}_{P_\alpha/B}(\mathbb{C}_\lambda^*)))),$$

et donc

$$H^{p+1}(G/B, \mathscr{L}_{G/B}(\mathbb{C}_\lambda^*)) \simeq H^p(G/P_\alpha, \mathscr{L}_{G/P_\alpha}(H^0(P_\alpha/B, \mathscr{L}_{P_\alpha/B}(\mathbb{C}_\lambda^*)))),$$

En appliquant l'isomorphisme 5.3.2, nous obtenons que

$$H^p(G/P_\alpha, \mathscr{L}_{G/P_\alpha}(H^0(P_\alpha/B, \mathscr{L}_{P_\alpha/B}(\mathbb{C}_\lambda^*)))) \simeq H^p(G/B, \mathscr{L}_{G/B}(\mathbb{C}_\lambda^*)).$$

Ce qui nous permet de conclure que

$$H^{p+1}(G/B, \mathscr{L}_{G/B}(\mathbb{C}_\lambda^*)) \simeq H^p(G/B, \mathscr{L}_{G/B}(\mathbb{C}_\lambda^*)).$$

En appliquant ce résultat inductivement, on obtient que pour tout entier p,

$$H^p(G/B, \mathscr{L}_{G/B}(\mathbb{C}_\lambda^*)) \simeq H^0(G/B, \mathscr{L}_{G/B}(\mathbb{C}_\lambda^*)).$$

□

Ainsi, il suffit de connaître $H^0(G/B, \mathscr{L}_{G/B}(\mathbb{C}_\lambda^*))$ pour connaître $H^p(G/B, \mathscr{L}_{G/B}(\mathbb{C}_\lambda^*))$ pour tout entier p. Or, λ n'étant pas dominant, $H^0(G/B, \mathscr{L}_{G/B}(\mathbb{C}_\lambda^*)) = 0$. Ainsi, dans le cas où il existe une racine simple α telle que $\langle \alpha, \lambda \rangle = -1$, nous savons que

$$H^p(G/B, \mathscr{L}_{G/B}(\mathbb{C}_\lambda^*)) = 0$$

pour tout entier $p \geq 0$.

Lemme 5.3.3. *Soit λ un caractère tel que pour α une racine simple, $\langle \alpha, \lambda \rangle = -n$ avec $n > 1$. Alors,*

$$H^{p+1}(G/B, \mathscr{L}_{G/B}(\mathbb{C}_\lambda^*)) \simeq H^p(G/B, \mathscr{L}_{G/B}(\mathbb{C}_{s_\alpha\lambda-\alpha}^*))$$

Démonstration. Nous commençons aves l'isomorphisme 5.3.1

$$H^{p+1}(G/B, \mathscr{L}_{G/B}(\mathbb{C}_\lambda^*)) \simeq H^p(G/P_\alpha, \mathscr{L}_{G/P_\alpha}(H^1(P_\alpha/B, \mathscr{L}_{P_\alpha/B}(\mathbb{C}_\lambda^*)))).$$

Nous avons vu dans la section 5.2 que si $\langle \alpha, \lambda \rangle = -n$ avec $n > 1$, alors

$$H^1(P_\alpha/B, \mathscr{L}_{P_\alpha/B}(\mathbb{C}_\lambda^*)) \simeq H^0(P_\alpha/B, \mathscr{L}_{P_\alpha/B}(\mathbb{C}_{s_\alpha\lambda-\alpha}^*)).$$

Nous obtenons un second isomorphisme

$$H^p(G/P_\alpha, \mathscr{L}_{G/P_\alpha}(H^1(P_\alpha/B, \mathscr{L}_{P_\alpha/B}(\mathbb{C}^*_\lambda)))) \simeq H^p(G/P_\alpha, \mathscr{L}_{G/P_\alpha}(H^0(P_\alpha/B, \mathscr{L}_{P_\alpha/B}(\mathbb{C}^*_{s_\alpha\lambda-\alpha})))).$$

Puisque $\langle \alpha, s_\alpha\lambda - \alpha \rangle \geq 0$, l'isomorphisme 5.3.2 nous permet d'observer que

$$H^p(G/P_\alpha, \mathscr{L}_{G/P_\alpha}(H^0(P_\alpha/B, \mathscr{L}_{P_\alpha/B}(\mathbb{C}^*_{s_\alpha\lambda-\alpha})))) \simeq H^p(G/B, \mathscr{L}_{G/B}(\mathbb{C}^*_{s_\alpha\lambda-\alpha})).$$

Ainsi, dans le cas où il existe une une racine simple α telle que $\langle \alpha, \lambda \rangle < -1$, les trois isomorphismes précédents nous permettent de descendre de un le degré de la cohomologie de G/B à travers l'isomorphisme suivant

$$H^{p+1}(G/B, \mathscr{L}_{G/B}(\mathbb{C}^*_\lambda)) \simeq H^p(G/B, \mathscr{L}_{G/B}(\mathbb{C}^*_{s_\alpha\lambda-\alpha})).$$

□

5.4. La dernière étape

Nous venons de montrer que pour λ un caractère et α une racine simple tels que $\langle \alpha, \lambda \rangle < 0$, il existe un isomorphisme de G-module

$$H^{i+1}(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_\lambda)) \simeq H^i(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_{s_\alpha\lambda-\alpha})).$$

Nous allons utiliser ce type d'isomorphisme afin de calculer tous les groupes de cohomologie $H^i(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_\lambda))$ pour un caractère λ quelconque.

Nous commencerons par montrer que pour un caractère λ dominant, la cohomologie $H^i(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_\lambda))$ est nulle pour tout $i > 0$. Cela se fera entre autre à l'aide de considérations sur la dimension de G/B. Nous serons ensuite en mesure de montrer que pour un caractère μ régulier qui n'est pas dominant, il existe un unique caractère dominant λ et un unique $p > 0$ tels que $H^p(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_\mu))$ et $H^0(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_\lambda))$ soient isomorphes comme G-module. Les autres degrés de cohomologie seront tous nuls. Finalement, nous pourrons traiter du cas où le caractère λ est singulier. Nous verrons que dans ce cas, tous les groupes de cohomologie sont nuls. Nous aurons ainsi montré que pour un caractère λ donné, il existe au plus un degré de cohomologie qui est non nul.

Nous aurons besoin d'utiliser les résultats de la section 2.5 sur la décomposition des éléments du groupe de Weyl en termes de réflexions simples. De plus, nous avons montré dans le chapitre 4 que la cohomologie de degré 0 est non nulle si et seulement si le caractère λ est dominant et que dans ce cas, c'est un G-module irréductible. Les résultats de cette section mis de paire avec les résultats du chapitre 4 permettront de terminer la preuve du théorème de Borel-Weil-Bott.

5.4.1. Le caractère λ est dominant

Le but de la section sera de prouver la proposition suivante.

Proposition 5.4.1. *Soit λ un caractère dominant. Alors,*

$$H^i(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*)) = 0$$

pour tout $i \geq 1$. De plus, $H^0(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*))$ est non nul et c'est un G-module irréductible.

Démonstration. Nous avons vu que la longueur de ω_0, le plus long élément de W, est le nombre de racines positives. Or, le nombre de racines positive est aussi la dimension de G/B comme variété projective sur $\mathbb{C}$. Cela peut se voir par un calcul de dimension sur l'espace tangent de G/B et en remarquant que $dim(G) = rg(G) + card(R(G,T))$. Le théorème d'annulation de Grothendieck, **[H]** théorème 3.2.7, nous dit que $H^i(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*)) = 0$ dès que $i > dim_{\mathbb{C}}(G/B)$. Cela nous permet de déduire que $H^i(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*)) = 0$ dès que $i > l(\omega_0)$.

Soit λ un caractère dominant. Considérons le caractère $\lambda_- = \omega_0(\lambda+\rho)-\rho$. D'après les résultats de la section 2.5, λ_- ne peut pas être dominant. De plus, on peut montrer que

$$H^i(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}_{\lambda_-}^*)) \simeq H^{i-l(\omega_0)}(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*)).$$

Cela se fait en deux étapes. Dans un premier temps, le calcul suivant nous permet de montrer que λ est l'unique caractère dominant qui est conjugué à λ_- par un élément de W :

$$\begin{aligned} \omega_0(\lambda_- + \rho) - \rho &= \omega_0(\omega_0(\lambda+\rho) - \rho + \rho) - \rho \\ &= \omega_0(\omega_0(\lambda+\rho) - \rho \\ &= \lambda + \rho - \rho \\ &= \lambda. \end{aligned}$$

Ainsi, non seulement λ_- est conjugué à λ, mais il l'est par le plus long élément de W.

Dans un deuxième temps, obtient l'isomorphisme souhaité en se basant sur les isomorphismes du type

$$H^i(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_{\lambda_-})) \simeq H^{i-1}(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_{s_\alpha(\lambda_-+\rho)-\rho}))$$

qui proviennent du lemme 5.3.3.

Posons $\omega_0 = s_{\alpha_{l(\omega_0)}} \dots s_{\alpha_2} s_{\alpha_1}$ et $\omega_0^{(i)} = s_{\alpha_i} \dots s_{\alpha_2} s_{\alpha_1}$. Puisque $\omega_0^{(k)}(\lambda+\rho)-\rho$ n'est pas dominant si $k < l(\omega_0)$, on obtient que

$$H^{i+1}(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_{\omega_0^{(k)}(\lambda+\rho)-\rho})) \simeq H^i(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_{\omega_0^{(k+1)}(\lambda+\rho)-\rho})).$$

On peut alors déduire le résultat souhaité en utilisant inductivement ces isomorphismes. Ainsi si $i > l(\omega_0)$, $H^i(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_{\lambda_-})) = 0$ et donc pour tout $i > 0$, $H^i(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_\lambda))$ est nul.

Nous venons donc de montrer que si λ est un caractère dominant et $i > 0$, alors $H^i(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_\lambda)) = 0$.

Nous avons prouvé dans le chapitre 4 que si λ est dominant, alors $H^0(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_\lambda))$ est non nul et c'est un G-module irréductible. Ainsi, si λ est dominant, il existe un unique groupe de cohomologie $H^i(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_\lambda))$ qui est non nul et c'est lorsque $i = 0$. □

5.4.2. Le caractère λ est régulier, mais n'est pas dominant

Nous voulons maintenant montrer la proposition suivante.

Proposition 5.4.2. *Soit λ un caractère régulier qui n'est pas dominant. Alors, il existe un unique entier $i(\lambda)$ tel que $H^{i(\lambda)}(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_\lambda))$ est non nul. Cet entier consiste en la longueur de l'unique élément $\omega \in W(G, T)$ tel que $\omega(\lambda + \rho)$ soit dominant. De plus, nous aurons alors que*

$$H^{i(\lambda)}(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_\lambda)) \simeq H^0(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_{\omega(\lambda+\rho)-\rho})).$$

En particulier, $H^{i(\lambda)}(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_\lambda))$ est un G-module irréductible.

Démonstration. Si λ est régulier, nous avons vu qu'il existe $\omega \in W$ tel que $\omega(\lambda+\rho)-\rho$ est dominant. De plus, le même raisonnement que dans la preuve de la proposition

5.4.1 nous assure que

$$H^{i+l(\omega)}(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_\lambda)) \simeq H^i(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_{\omega(\lambda+\rho)-\rho})).$$

Puisque $\omega(\lambda+\rho)-\rho$ est dominant, nous savons maintenant que $H^i(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_{\omega(\lambda+\rho)-\rho})) = 0$ pour tout $i \geq 1$. Ceci nous permet de conclure que $H^i(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_\lambda)) = 0$ pour tout $i > l(\omega)$. Reste seulement à voir ce qui se passe pour $0 < i < l(\omega)$.

Nous savons que ω est un produit de réflexions simples. Posons $\omega = s_{\alpha_m}s_{\alpha_{m-1}}\dots s_{\alpha_1}$ avec $m = l(\omega)$ et les $\alpha_i \in \Delta$. Soit $0 \leq i < m$ et posons $\omega^{(i)} = s_{\alpha_i}s_{\alpha_{i-1}}\dots s_{\alpha_1}$. En particulier, $\omega^{(0)} = Id$. Alors $\omega^{(i)}(\lambda+\rho)-\rho$ n'est pas dominant et savons que dans ce cas, $H^0(G/B, \mathscr{L}_{\omega^{(i)}(\lambda+\rho)-\rho}) = 0$. Mais, $H^i(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_\lambda)) \simeq H^0(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_{\omega^{(i)}(\lambda+\rho)-\rho}))$. Ainsi, pour tout $0 \leq i < l(\omega)$, $H^i(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_\lambda)) = 0$.

Finalement, dans le chapitre 4, nous avons montré que pour λ un caractère qui n'est pas dominant, le groupe de cohomologie $H^0(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_\lambda))$ est nul. □

5.4.3. Le caractère λ est singulier

Le seul cas qu'il nous reste à traiter et lorsque que le caractère λ est singulier. C'est ce que fait la proposition suivante.

Proposition 5.4.3. *Soit λ un caractère singulier. Alors, pour tout $i \geq 0$*

$$H^i(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_\lambda)) = 0.$$

DÉMONSTRATION. Soit λ un caractère singulier. Alors il existe β une racine positive telle que $\langle \beta, \lambda+\rho \rangle = 0$. Soit $\omega \in W$ l'unique élément du groupe de Weyl tel que $\omega(\lambda+\rho)$ soit dominant. Nous voulons montrer qu'il existe une racine simple α telle que $\langle \alpha, \omega(\lambda+\rho)\rangle = 0$. Puisque $\langle \beta, \lambda+\rho\rangle = 0$, alors $\langle \omega\beta, \omega(\lambda+\rho)\rangle = 0$ et $\langle -\omega\beta, \omega(\lambda+\rho)\rangle = 0$. Ainsi, il existe une racine positive μ telle que $\langle \mu, \omega(\lambda+\rho)\rangle = 0$. Puisque μ est une racine positive, elle s'écrit comme somme de racines simples positives

$$\mu = \sum_{\alpha\in\Delta} c_\alpha \alpha$$

avec les c_α des entiers positifs. De sorte que

$$\langle \mu, \omega(\lambda+\rho)\rangle = \langle \sum_{\alpha\in\Delta} c_\alpha\alpha, \omega(\lambda+\rho)\rangle = \sum_{\alpha\in\Delta} c_\alpha \langle \alpha, \omega(\lambda+\rho)\rangle = 0.$$

Puisque pour tout $\alpha \in \triangle$, $\langle \alpha, \omega(\lambda+\rho)\rangle \geq 0$, on conclut qu'il existe une racine simple α telle que $\langle \alpha, \omega(\lambda+\rho)\rangle = 0$. Ainsi, il existe une racine simple α telle que $\langle \alpha, \omega(\lambda+\rho)-\rho\rangle = -1$.

Dans le lemme 5.3.2, nous avons montré si μ est un caractère de T et si α est une racine simple telle que $\langle \alpha, \mu\rangle = -1$, les groupes de cohomologie $H^i(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}_\mu^*))$ sont nuls pour tout entier i. Ainsi, nous savons que $\forall i \geq 0$,

$$H^i(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_{\omega(\lambda+\rho)-\rho})) = 0.$$

Or, nous savons aussi que

$$H^{i+l(\omega)}(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*)) \simeq H^i(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_{\omega(\lambda+\rho)-\rho})).$$

Nous pouvons donc en déduire que pour tout $i \geq l(\omega)$,

$$H^i(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*)) = 0.$$

Dans le cas où $i < l(\omega)$, le même argument que nous avons utilisé dans la preuve de la proposition 5.4.2 nous assure que $H^i(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*)) = 0$. Ainsi, nous avons montré que si λ est singulier, alors

$$H^i(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*)) = 0$$

et cela pour tout entier i. □

5.5. Le théorème de Borel-Weil-Bott

Revenons maintenant à l'énoncé du théorème de Borel-Weil-Bott.

Théorème 5.5.1 (Borel-Weil-Bott)**.** *Soit G un groupe algébrique réductif, B un sous-groupe de Borel et T un tore maximal dans B. Considérons λ un caractère de T. Si λ est singulier, alors tous les groupes de cohomologie $H^i(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*))$ sont nuls. Si λ est régulier, il existe un unique groupe de cohomologie qui est non nul. Le degré de ce groupe consiste en la longueur de l'unique élément ω du groupe de Weyl tel que $\omega(\lambda+\rho)-\rho$ est dominant. Nous noterons ce degré $i(\lambda)$. Dans ce cas, $H^{i(\lambda)}(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}_\lambda^*))$ est une représentation irréductible de G qui est isomorphe à $H^0(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_{\omega(\lambda+\rho)-\rho}))$. De plus, toutes les représentations irréductibles de G peuvent être obtenues de cette façon.*

Démonstration. La proposition 5.4.3 nous assure que dans le cas où λ est singulier, tous les groupes de cohomologie $H^i(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_\lambda))$ sont nuls. Les propositions 5.4.1 et 5.4.2 font la preuve de l'énoncé dans le cas où le caractère est régulier. Il faut seulement noter que si λ est dominant, alors $id(\lambda+\rho)-\rho = \lambda$ est dominant et la longueur de l'identité est 0. Finalement, le théorème 4.3.2 nous assure que pour chaque représentation irréductible V de G, il existe un caractère λ tel que $V \simeq H^0(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_\lambda))$. □

Chapitre 6

APPLICATIONS DU THÉORÈME DE BOREL-WEIL-BOTT

Nous allons consacrer ce chapitre à certaines applications du théorème de Borel-Weil-Bott. La première consiste à calculer la cohomologie de G/P par rapport à un faisceau $\mathscr{L}(V)$, où P est un sous-groupe parabolique d'un groupe réductif G et V est une représentation irréductible de P. Cela sera fait dans la section 6.1. Dans la section 6.2, nous nous attarderons au cas de $GL(n, \mathbb{C})$. Nous étudierons certaines conclusions du théorème de Borel-Weil-Bott pour ce groupe en particulier.

6.1. La cohomologie de faisceaux de G/P

Soit G un groupe algébrique réductif et P un sous-groupe parabolique. Nous savons que G/P est une variété projective. De plus, il existe un sous-groupe de Borel B de G qui est inclus dans P. Nous allons utiliser nos connaissances sur la cohomologie de faisceaux de la variété de drapeaux généralisée G/B pour calculer celle de G/P.

Théorème 6.1.1. *Soit V une représentation irréductible de P, un sous-groupe parabolique d'un groupe réductif G. Alors, il existe au plus un entier $i \geq 0$ tel que le groupe de cohomologie $H^i(G/P, \mathscr{L}(V))$ est non nul. Lorsqu'il est non nul, ce groupe de cohomologie est un G-module irréductible.*

Démonstration. Nous avons discuté dans le théorème 2.2.2 de la décomposition de Levi d'un sous-groupe parabolique d'un groupe réductif. Nous savons qu'il existe un groupe réductif $L \subset P$ tel que $P = LR_u(P)$. Le radical unipotent de P est nécessairement contenu dans B_u. De plus, la restriction du sous-groupe de Borel B à L est un sous-groupe de Borel de L. Notons d'abord que $L \cap B$ est connexe. En effet, B est connexe et $B = (L \cap B)R_u(P)$. Ce qui nous permet de conclure que $B \cap L$ doit être connexe. De plus, P agit transitivement sur la variété projective P/B. Comme sous-groupe de P, L agit aussi sur cet espace. Le stabilisateur dans L du point eB est exactement $L \cap B$. Puisque $R_u(P) \subset B$, ce sous-groupe agit trivialement sur eB. Ceci nous permet de conclure que l'action de L sur P/B est transitive puisque l'action de P l'est et $P = LR_u(P)$. Nous avons donc que $L/(L \cap B) \simeq P/B$. Cela nous permet de conclure que $L \cap B$ est un sous-groupe parabolique de L et puisqu'il est résoluble et connexe, il est nécessairement un sous-groupe de Borel de L. En particulier, puisque $P = LR_u(P)$ et $R_u(P) \subset B$, nous obtenons un isomorphisme entre $L/(L \cap B)$ et P/B.

Étudions maintenant comment P agit sur V. Considérons le sous-espace V' de V sur lequel R_uP agit trivialement. Nous voulons montrer que cet espace est stable sous l'action de P. Ainsi, nous saurons que c'est un sous-P-module de V et puisque V est un P-module irréductible, nous pourrons conclure que $V' = V$, c'est-à-dire que R_uP agit trivialement sur le module V. Soit $v \in V'$, $u \in R_uP$ et $g \in P$. Par définition, R_uP est un sous-groupe normal de P. Il existe donc $u' \in R_uP$ tel que $g^{-1}ug = u'$. Nous obtenons alors que

$$u(gv) = (ug)v = (gg^{-1}ug))v = (gu')v = g(u'v) = gv$$

Ainsi, pour tout $g \in P$, et pour tout $v \in V'$, $gv \in V'$, ce qui nous permet de conclure que V' est un sous-P-module de V. Comme nous l'avons remarqué, cela nous permet de conclure que $V' = V$. Puisque R_uP agit trivialement sur V et que V est un P-module irréductible, on déduit que P est L-module irréductible.

Le sous-groupe de Borel B de P agit sur V. D'après le théorème de Lie-Kolchin, théorème 2.1.2, nous savons qu'il existe un sous-espace de V de dimension 1 stable sous l'action de B. Notons v_λ un vecteur qui engendre cet espace et λ le caractère qui décrit l'action de B sur $\mathbb{C}\, v_\lambda$. Le groupe L étant réductif, on sait que λ restreint à $B \cap L$ est un caractère dominant puisqu'il est le plus haut poids du L-module irréductible V. Cet espace de dimension 1 est unique puisque l'action de P sur V est complètement déterminée par l'action de L sur V et comme L est un groupe réductif, il existe un unique sous-espace de V de dimension 1 qui est stable sous l'action de $B \cap L$. Ainsi, le caractère λ est bien défini. Nous pouvons l'appeler le plus haut poids de V. Il est cependant important de noter que dans ce cas, le plus haut poids n'est pas nécessairement un caractère dominant de B.

Considérons le morphisme de projection

$$\nu : G/B \to G/P,$$

et le faisceau $\mathscr{L}_{G/B}(\mathbb{C}_{\pi_L(\lambda)})$, où π_L est l'application définie par $\pi_L(\lambda) = -\omega_0^L\lambda$, avec ω_0^L le plus long élément de $W(L,T)$. Nous avons déjà utilisé cette application dans la section 4.1. On avait alors montré que pour un caractère λ dominant, $H^0(G/B, \mathscr{L}(\mathbb{C}_{\pi_L(\lambda)}))$ est un G-module irréductible de plus haut poids λ.

On obtient le diagramme commutatif suivant où chacune des applications horizontales est un isomorphisme :

$$\begin{tikzcd}
L \times^{B\cap L} \mathbb{C}^*_{\pi_L(\lambda)|_{B\cap L}} \arrow[r] \arrow[d] & P \times^B \mathbb{C}^*_{\pi_L(\lambda)} \arrow[d] \\
L/(B\cap L) \arrow[r] & P/B
\end{tikzcd}$$

Comme nous avons remarqué dans la section 5.3, il existe une suite spectrale

$$E_2^{p,q} = H^p(G/P, R^q\nu_* \mathscr{L}_{G/B}(\mathbb{C}^*_{\pi_L(\lambda)})) \Longrightarrow H^{p+q}(G/B, \mathscr{L}_{G/B}(\mathbb{C}^*_{\pi_L(\lambda)})).$$

Nous avions alors prouvé dans la proposition 5.3.1 qu'il existe un isomorphisme de faisceaux

$$R^q\nu_* \mathscr{L}_{G/B}(\mathbb{C}^*_{\pi_L(\lambda)}) \simeq \mathscr{L}_{G/P}(H^q(P/B, \mathscr{L}_{P/B}(\mathbb{C}^*_{\pi_L(\lambda)}))).$$

Or, nous savons que

$$H^q(P/B, \mathscr{L}_{P/B}(\mathbb{C}^*_{\pi_L(\lambda)})) \simeq H^q(L/(B\cap L), \mathscr{L}_{L/(B\cap L)}(\mathbb{C}^*_{\lambda|_{B\cap L}})),$$

cela comme espace vectoriel, mais aussi comme P-module puisque R_uP agit trivialement sur P/B et sur $P \times^B \mathbb{C}^*_\lambda$. Puisque L est un groupe réductif, que $B \cap L$ est un sous-groupe de Borel de L et que $\lambda|_{B\cap L}$ est un caractère dominant de $B \cap L$, nous savons que le seul groupe de cohomologie $H^q(L/(B\cap L), \mathscr{L}_{L/(B\cap L)}(\mathbb{C}^*_{\lambda|_{B\cap L}}))$ non nul est pour $q = 0$. Ainsi, $E_2^{p,q} = E_\infty^{p,q}$. Grâce au lemme 3.3.1, nous pouvons conclure que

$$H^p(G/P, \mathscr{L}_{G/P}(H^0(L/(B\cap L), \mathscr{L}_{L/(B\cap L)}(\mathbb{C}^*_{\pi_L(\lambda)|_{B\cap L}})))) \simeq H^p(G/B, \mathscr{L}_{G/B}(\mathbb{C}^*_{\pi_L(\lambda)})).$$

Reste à voir que $H^0(L/(B\cap L), \mathscr{L}_{L/(B\cap L)}(\mathbb{C}^*_{\pi_L(\lambda)|_{B\cap L}})) \simeq V$ et cela comme P-module.

Or, on sait que $H^0(L/(B\cap L), \mathscr{L}_{L/(B\cap L)}(\mathbb{C}^*_{\pi_L(\lambda)|_{B\cap L}}))$ est un L-module irréductible de plus haut poids $\lambda|_{B\cap L}$ tout comme V. La preuve du théorème 4.3.2 nous assure que dans ce cas,

$$H^0(L/(B\cap L), \mathscr{L}_{L/(B\cap L)}(\mathbb{C}^*_{\pi_L(\lambda)|_{B\cap L}})) \simeq V$$

comme L-module. Mais puisque l'action de R_uP sur V est triviale, on conclut que

$$H^0(L/(B\cap L), \mathscr{L}_{L/(B\cap L)}(\mathbb{C}^*_{\pi_L(\lambda)|_{B\cap L}})) \simeq V$$

comme P-module.

Nous avons donc montré que pour V un P-module irréductible dont le plus haut poids est λ,

$$H^p(G/P, \mathscr{L}(V)) \simeq H^p(G/B, \mathscr{L}_{G/B}(\mathbb{C}^*_{\pi_L(\lambda)})).$$

Nous avons vu que le caractère $\lambda|_{B\cap L}$ est dominant. Cependant, cela ne nous assure par que λ est un caractère dominant de B. Ainsi, $\pi_L(\lambda)$ n'est pas nécessairement dominant. Il pourrait même être singulier. Nous pouvons cependant utiliser le théorème de Borel-Weil-Bott pour décrire la cohomologie de $H^p(G/B, \mathscr{L}_{G/B}(\mathbb{C}^*_{\pi_L(\lambda)}))$. En particulier, nous savons que si $\pi_L(\lambda)$ est régulier, il existe un unique caractère dominant μ et un unique entier i tel que

$$H^{p+i}(G/B, \mathscr{L}_{G/B}(\mathbb{C}^*_{\pi_L(\lambda)})) \simeq H^p(G/B, \mathscr{L}_{G/B}(\mathbb{C}^*_{\mu})).$$

Ainsi,

$$H^{p+i}(G/P, \mathscr{L}(V)) \simeq H^p(G/B, \mathscr{L}_{G/B}(\mathbb{C}^*_{\mu}))$$

et nous pouvons conclure que l'unique entier pour lequel la cohomologie de G/P par rapport au faisceau $\mathscr{L}(V)$ est l'entier qui correspond à la longueur de l'élément ω du groupe de Weyl de G tel que $\omega(\pi_L(\lambda)+\rho)-\rho$ soit le caractère dominant μ.

□

Remarque 6.1.1. *Nous avons prouvé un résultat plus fort que l'énoncé du théorème 6.1.1. Nous avons montré que si V est une représentation irréductible de P de plus haut poids λ, alors*

$$H^p(G/P, \mathscr{L}(V)) \simeq H^p(G/B, \mathscr{L}_{G/B}(\mathbb{C}^*_{\pi_L(\lambda)})).$$

À partir de ce théorème, nous pouvons traiter le cas où V est un P-module complètement réductible. Cela équivaut au fait que R_uP agit trivialement sur V.

Supposons donc que V est un P-module de dimension finie complètement réductible. Nous noterons Λ l'ensemble des poids apparaissant en tenant compte de leur multiplicité. Notons W_λ le P-module de plus haut poids λ. Nous obtenons la décomposition suivante :

$$V \simeq \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} W_\lambda.$$

Cela nous permet d'obtenir la décomposition du faisceau

$$\mathscr{L}(V) \simeq \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{L}(W_\lambda).$$

On obtient alors l'isomorphisme :

$$H^p(G/P, \mathscr{L}(V)) \simeq H^p(G/P, \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{L}(W_\lambda)).$$

Or, la cohomologie commute avec les sommes directes de faisceaux ([**H**], Chapter III, Remark 2.9.1). On en déduit donc que

$$H^p(G/P, \mathscr{L}(V)) \simeq \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} H^p(G/P, \mathscr{L}(W_\lambda)) \simeq \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} H^p(G/B, \mathscr{L}_{G/B}(\mathbb{C}^*_\lambda)).$$

Nous savons entre autre que pour chaque $\lambda \in \Lambda$, il existe un unique entier tel que $H^p(G/B, \mathscr{L}_{G/B}(\mathbb{C}^*_\lambda))$ est non nul.

Remarque 6.1.2. *Si V est un P-module qui n'est pas complètement réductible, il n'est pas possible en général de calculer les groupes de cohomologie $H^i(G/P, \mathscr{L}(V))$ à partir du théorème de Borel-Weil-Bott. Il est cependant possible de calculer la caractéristique d'Euler $\chi(G/P, \mathscr{L}(V))$ à partir des dimensions des représentations irréductibles de G. Donnons quelques détails sur ce calcul.*

Il existe une filtration de P-module

$$V = V_0 \supseteq V_1 \supseteq V_2 \supseteq \ldots \supseteq V_n = 0$$

tels que $M_i = V_i/V_{i+1}$ est un P-module irréductible. Le théorème 6.1.1 nous permet de calculer les groupes de cohomologie $H^i(G/P, \mathscr{L}(M_i))$ et la caractéristique d'Euler de G/B par rapport au faisceau $\mathscr{L}(M_i)$ est soit zéro, soit la dimension de l'unique groupe *de cohomologie $H^i(G/P, \mathscr{L}(M_i))$ qui est non nul et qui consiste, comme nous le savons, en un G-module irréductible. Des propriétés d'additivité nous assureront que*

$$\chi(G/P, \mathscr{L}(V)) = \chi(G/P, \mathscr{L}(M_0)) + \chi(G/P, \mathscr{L}(M_1)) + \ldots + \chi(G/P, \mathscr{L}(M_{n-1})).$$

6.2. Le groupe $GL(n, \mathbb{C})$

Dans cette section, nous allons faire quelques calculs en utilisant le groupe $GL(n, \mathbb{C})$. Nous allons calculer le caractère abstrait ρ et étudier pour un caractère λ et une racine simple α, le caractère $s_\alpha(\lambda + \rho) - \rho$. Nous étudierons par la suite la cohomologie $H^0(GL(n, \mathbb{C})/B(n, \mathbb{C}), \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_\lambda))$ pour certains caractères λ dominants.

6.2.1. Étude de ρ et des caractères de $GL(n, \mathbb{C})$

Décrivons l'élément ρ dans le cas de $GL(n, \mathbb{C})$ lorsqu'on considère $B(n, \mathbb{C})$ comme sous-groupe de Borel et $T(n, \mathbb{C})$ comme tore maximal. Nous savons que

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{\beta \in R^+(G,T)} \beta.$$

Nous avons déjà mentionné qu'une racine prositive est un caractère $\beta : T(n, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}^\times$ tel que $\beta(t) = t_i t_j^{-1}$, avec $i < j$. Nous avions noté un tel caractère α_{ij}. On peut donc réécrire

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{1 \le i < j \le n} \alpha_{ij}.$$

Avec un peu de calcul, on trouve que

$$\rho = \frac{1}{2}(n-1, n-3, \ldots, -(n-3), -(n-1)).$$

En particulier, $\rho \in X(T(n, \mathbb{C}))$ si et seulement si n est impair.

Nous avons montré que pour $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ un caractère tel que $\langle \alpha_{ii+1}, \lambda \rangle < 0$,

$$H^{k+1}(GL(n, \mathbb{C})/B(n, \mathbb{C}), \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_\lambda)) \simeq H^k(GL(n, \mathbb{C})/B(n, \mathbb{C}), \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_{s_{\alpha_{ii+1}}(\lambda+\rho)-\rho})).$$

Puisque

$$s_{\alpha_{ii+1}}\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \lambda_i, \lambda_{i+2}, \ldots, \lambda_n),$$

et que

$$\lambda + \rho = \left(\lambda_1 + \frac{n-1}{2}, \lambda_2 + \frac{n-3}{2}, \ldots, \lambda_i + \frac{n-2i+1}{2}, \ldots, \lambda_n + \frac{-(n-1)}{2}\right),$$

on obtient que

$$s_{\alpha_{ii+1}}(\lambda + \rho) - \rho = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1} - 1, \lambda_i + 1, \lambda_{i+2}, \ldots, \lambda_n).$$

Nous voulons maintenant étudier les caractérisations de caractère dominants, de caractères réguliers et de caractères singuliers dans le cas de $GL(n, \mathbb{C})$.

Un caractère $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ sera dominant si $\lambda_1 \geq \lambda_2 \ldots \geq \lambda_n$. Dans ce cas, on sait que $H^0(GL(n, \mathbb{C})/B(n, \mathbb{C}), \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_\lambda))$ sera non nul et consistera en une représentation irréductible de $GL(n, \mathbb{C})$.

Pour déterminer quels caractères sont réguliers nous devons calculer $\langle \alpha, \lambda + \rho \rangle$ pour toute racine positive α. Un caractère est régulier si pour toute racine positive α, $\langle \alpha, \lambda + \rho \rangle \neq 0$. Soit $\alpha = \alpha_{ij}$ une racine de $GL(n, \mathbb{C})$. Nous avons montré dans la section 2.4 que $\langle \alpha, \lambda \rangle = \lambda_i - \lambda_j$. Ainsi, un caractère λ sera singulier s'il existe des entiers i et j tels que

$$\lambda_i + \frac{n - 2i + 1}{2} = \lambda_j + \frac{n - 2j + 1}{2}.$$

Dans ce cas, nous savons que $H^p(GL(n, \mathbb{C})/B(n, \mathbb{C}), \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_\lambda))$ est nul pour tout entier p.

Si pour tout entier i et j,

$$\lambda_i + \frac{n - 2i + 1}{2} \neq \lambda_j + \frac{n - 2j + 1}{2},$$

ce qui équivaut à dire que pour tout entier i et j,

$$\lambda_i - \lambda_j \neq i - j,$$

le caractère λ est régulier. Il existe alors une permutation $\omega \in S_n$ tel que $\omega(\lambda + \rho)$ est dominant.

Exemple 6.2.1. *Travaillons dans $GL(5, \mathbb{C})$. Étudions d'abord le caractère*

$$\lambda = (1, -3, 5, -7, 9).$$

On observe immédiatement que λ n'est pas un caractère dominant. En additionnant $\rho = (2, 1, 0, -1, -2)$ à λ, on obtient que $\lambda + \rho = (3, -2, 5, -8, 7)$. La permutation qui nous permet de passer de $\lambda + \rho$ à un caractère dominant est $\omega = (32451)$ qui correpond à la figure 6.1. On observe que cette figure comporte 6 croisements et donc $l(\omega) = 6$.

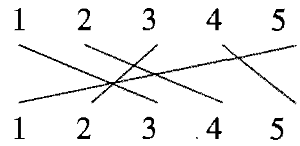

FIG. 6.1. Permutation (32451)

De plus, $\omega(\lambda+\rho) = (7,5,3,-2,-8)$ *et donc* $\omega(\lambda+\rho)-\rho = (5,4,3,-1,-6)$ *qui est bien un caractère dominant de* $B(5,\mathbb{C})$. *Nous pouvons donc déduire que*

$$H^6(GL(5,\mathbb{C})/B(5,\mathbb{C}),\mathscr{L}(\mathbb{C}^*_{(1,-3,5,-7,9)})) \simeq H^0(GL(5,\mathbb{C})/B(5,\mathbb{C}),\mathscr{L}(\mathbb{C}^*_{(5,4,3,-1,-6)})).$$

Ce sera l'unique groupe de cohomologie non nul.

Dans un deuxième temps, étudions ce qui se passe avec le caractère

$$\lambda = (4,0,9,2,-3).$$

Le caractère $\lambda+\rho$ *est* $(6,1,9,1,-5)$. *La permutation* $\omega = (123)$ *nous permet d'obtenir un caractère dominant. Cependant,* $\omega(\lambda+\rho)-\rho = (7,5,1,2,-3)$ *qui n'est pas dominant. Cela veut dire que le caractère* $\lambda = (4,0,9,2,-3)$ *est singulier. On aurait pu le voir directement en remarquant que* $\lambda_2-\lambda_4 = -2 = 2-4$. *Nous savons alors que la cohomologie* $H^i(GL(5,\mathbb{C})/B(5,\mathbb{C}),\mathscr{L}(\mathbb{C}^*_{(4,0,9,2,-3)}))$ *est nulle pour tout* $i \geq 0$.

6.2.2. Calcul de $H^0(GL(n,\mathbb{C})/B(n,\mathbb{C}),\mathscr{L}(\mathbb{C}^n_\lambda))$ pour certains caractères λ dominants

Calculons $H^0(GL(n,\mathbb{C})/B(n,\mathbb{C}),\mathscr{L}(\mathbb{C}^*_{\lambda^1}))$ dans le cas où $\lambda^1 = (1,0,\ldots,0)$ qui est bien un caractère dominant. On sait que $H^0(GL(n,\mathbb{C})/B(n,\mathbb{C}),\mathscr{L}(\mathbb{C}^*_{\lambda^1}))$ consiste en les sections globales du faisceaux $\mathscr{L}(\mathbb{C}_{\lambda^1})$. Ainsi,

$$\begin{aligned} H^0(GL(n,\mathbb{C})/B(n,\mathbb{C}),\mathscr{L}(\mathbb{C}^*_{\lambda^1})) &= \{X \in \mathbb{C}[GL(n,\mathbb{C})] \mid X(gb) = \lambda^1(b)X(g)\ \forall b \in B\} \\ &= \{X \in \mathbb{C}[GL(n,\mathbb{C})] \mid X(gb) = b_{11}X(g)\ \forall b \in B\}. \end{aligned}$$

On remarque que cet espace se trouve à être l'espace vectoriel engendré par les fonctions $X_{11}, X_{21}, \ldots, X_{n1}$, où X_{ij} est la fonction de $GL(n,\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$ définie par $X_{ij}(g) = g_{ij}$. On voit directement que les X_{j1} sont des sections globales de $\mathscr{L}(\mathbb{C}^*_{\lambda^1})$. En effet, soit $g \in GL(n\,\mathbb{C})$ et $b \in B(n,\mathbb{C})$. Alors,

$$X_{i1}(gb) = \sum_{k=1}^{n} g_{ik}b_{k1}.$$

Puisque $b \in B(n, \mathbb{C})$, pour tout $k > 1$, $b_{k1} = 0$. Ainsi,

$$X_{i1}(gb) = g_{i1}b_{11} = \lambda^1(b)X_{i1}(g).$$

Le groupe $GL(n, \mathbb{C})$ agit sur une fontion X_{ij} par

$$hX_{ij}(g) = X_{ij}(h^{-1}g) = \sum_{k=1}^{n}(h^{-1})_{ik}g_{kj}$$

On remarque que l'espace vectoriel engendré sur $\mathbb{C}$ par l'ensemble $\{X_{11}, X_{21}, \ldots, X_{n1}\}$ est stable sous l'action de $GL(n, \mathbb{C})$. En effet, soit g et h deux éléments de $GL(n, \mathbb{C})$. Alors,

$$gX_{i1}(h) = X_{i1}(g^{-1}h) = \sum_{k=1}^{n}(g^{-1})_{ik}h_{k1} = \sum_{k=1}^{n}(g^{-1})_{ik}X_{i1}(h).$$

Ainsi, gX_{i1} est bien une combinaisons linéaire des éléments de $\{X_{11}, X_{21}, \ldots, X_{n1}\}$. Nous noterons V_1 l'espace vectoriel engendré par $\{X_{11}, X_{21}, \ldots, X_{n1}\}$. Puisque le groupe de cohomologie $H^0(GL(n, \mathbb{C})/B(n, \mathbb{C}), \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_{\lambda^1}))$ est un $GL(n, \mathbb{C})$-module irréductible et que V_1 en est un sous-$GL(n, \mathbb{C})$-module, nous pouvons conclure que

$$V_1 \simeq H^0(GL(n, \mathbb{C})/B(n, \mathbb{C}), \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_{\lambda^1})).$$

Afin de déterminer le plus haut poids de V_1, on cherche quel vecteur de V_1 est stable sous l'action de $B(2, \mathbb{C})$. À partir de la decription de l'action que nous avons décrite précédement, on remarque que le vecteur X_{n1} est stable sous l'action de $B(n, \mathbb{C})$. Le poids de ce vecteur est $(0, 0, \ldots, -1)$. Comme nous avons vu dans la section 2.5, le plus long élément du groupe de Weyl de $GL(n, \mathbb{C})$ est la permutation

$$\omega_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-2 & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \ldots & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

De sorte que $\pi(\lambda^1) = -\omega_0\lambda_1 = (0, 0, \ldots, -1)$. Ainsi le plus haut poids de V_1 est bien $\pi(\lambda^1)$, ce qui est consistant avec ce que nous avons montré dans le chapitre 4.

Pour $m\lambda^1 = (m, 0, \ldots, 0)$, on observe que $H^0(GL(n, \mathbb{C})/B(n, \mathbb{C}), \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_{m\lambda^1})) \simeq S^mV_1$, où S^mV_1 consiste en les polynômes homogènes de degré m sur les variables X_{k1}, $k = 1, \ldots, n$.

De façon plus générale, pour λ^k défini par

$$\lambda_i^k = \begin{cases} 1 & 1 \leq i \leq k \\ 0 & i > k, \end{cases}$$

on veut calculer $V_k = H^0(GL(n,\mathbb{C})/B(n,\mathbb{C}), \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_{\lambda^k}))$. Posons X la matrice dont l'entrée ij est la fonction X_{ij}. Le $GL(n,\mathbb{C})$-module $H^0(GL(n,\mathbb{C})/B(n,\mathbb{C}), \mathscr{L}(\mathbb{C}^*_{\lambda^k}))$ sera l'espace vectoriel engendré par les sous-déterminants de taille k de la matrice X restreinte au k première colonne. Nous ne ferons pas les détails du calcul ici. En particulier, V_n sera l'espace vectoriel de dimension 1 engendré par le déterminant de X.

En numérotant les racines simples de $GL(n,\mathbb{C})$, $\alpha_i = \alpha_{ii+1}$, les caractères dominants fondamenataux sont exactement les λ^i. Puisque tout caractère est une somme des caractères fondamentaux, pour chaque caractère λ, on peut construire une représentation de plus haut poids λ avec des produits tensoriels des représentations V_i. Ce ne seront pas nécessairement des représentations irréductibles de plus haut poids λ, mais comme nous l'avons vu dans le chapitre 4, il est possible de trouver une représentation irréductible de plus haut poids λ à partir d'une représentation dont un des plus hauts poids est λ.

BIBLIOGRAPHIE

[A] ASOK, ARAVIND. *Equivariant vector bundles on certain affine G-varieties*, Pure Applied Mathematics Quaterly, volume 2, no. 4, 1085–1102, 2006.

[B-L] BILLEY, SARA ; LAKSHMIBAI, VENKATRAMANI. *Singular loci of Schubert varieties*, Boston : Birkhäuser, 2000.

[B1] BOREL, ARMAND. *Linear algebraic groups*, New York : Springer-Verlag, 1991.

[B2] BOREL, ARMAND. *Linear representations of semi-simple algebraic groups*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, AMS, Volume 29, 1975.

[B3] BOREL, ARMAND. *Properties and linear representations of Chevalley groups* , Seminar in algebraic groups and related finite groups, Springer Lecture Notes 131, 1–55, 1970.

[Bott] BOTT, RAOUL. *Homogeneous vector bundles*, Annals of Mathematics, Volume 66, no. 2, 203–248, 1957.

[B-T] BOTT, RAOUL ; TU, LORING W. *Differential forms in algebraic topology* New York : Springer-Verlag, 1982.

[C] CARTER, ROGER ; SEGAL, GRAEME ; MACDONALD, IAN. *Lectures on Lie groups and Lie algebras*, Cambridge University Press, 1995.

[CL] CHAMBERT-LOIR, ANTOINE. *Algèbre commutative et introduction à la géométrie algébrique*, Cours accéléré de 3e cycle, Université Pierre et Marie Curie, 1999.

[D1] DEMAZURE, MICHEL. *Une démonstration algébrique d'un théorème de Bott*, Inventiones Mathematicae, Volume 5, 349–356, 1968.

[D2] DEMAZURE, MICHEL. *A very simple proof of Bott's theorem*, Inventiones Mathematicae, Volume 33, no. 3, 271–272, 1976.

[E] EISENBUD, DAVID ; HARRIS, JOE. *The geometry of schemes*, New York : Springer-Verlag, 2000.

[F] FULTON, WILLIAM ; HARRIS, JOE. *Representation theory : a first course*, New York : Springer-Verlag, 1991.

[G] GRIFFITHS, PHILLIP ; HARRIS, JOSEPH. *Principles of algebraic geometry*, New York : John Wiley & Sons, 1978.

[Hall] HALL BRINA C. *Lies groups, Lie algebras, ans representations*, New York : Springer-Verlag, 2003.

[H] HARTSHORNE, ROBIN. *Algebraic geometry*, New York : Springer-Verlag, 1977.

[Hir] HIRZEBRUCH, FRIEDRICH. *Topological methods in algebraic geometry*, New York : Springer-Verlag, 1966

[Hu1] HUMPHREYS, JAMES E. *Introduction to Lie algebras and representation theory*, New York : Springer-Verlag, 1972.

[Hu2] HUMPHREYS, JAMES E. *Linear algebraic groups*, New York : Springer-Verlag, 1975.

[Hu3] HUMPHREYS, JAMES E. *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge : Cambridge University Press, 1990.

[I] IVERSEN, BIRGER. *Cohomology of sheaves*, Berlin : Springer-Verlag, 1986.

[McC] MCCLEARY, JOHN. *A user's guide to spectral sequences*, New York : Cambridge University Press, 2001.

[M] MIRANDA, RICK. *Algebraic curves and Riemann surfaces*, Providence, R.I. : American Mathematical Society, 1995.

[S1] SERRE, JEAN-PIERRE. *Algèbres de Lie semi-simples complexes*, New York : Benjamin, 1966.

[S2] SERRE, JEAN-PIERRE. *Géométrie algébrique et géométrie analytique*, Annales de l'Institut Fourier, Grenoble, t. 6, 1–42, 1955-1956.

[U] UENO, KENJI. *Algebraic geometry*, Providence, R.I. : American Mathematical Society, 1999-2003.

[W] WEYL, HERMANN. *The classical groups, their invariants and representations*, Princeton : Princeton University Press, 1966.