

Université de Montréal

Croissance des fonctions propres du laplacien
sur un domaine circulaire

par :

Guillaume Lavoie

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en mathématiques
Orientation mathématiques pures

Juillet 2011

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé :

**Croissance des fonctions propres du laplacien sur un
domaine circulaire**

présenté par :

Guillaume Lavoie

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Yvan Saint-Aubin

président-rapporteur

Iosif Polterovich

directeur de recherche

Marlène Frigon

membre du jury

Abstract

The goal of this master's thesis is to explore the properties of the solutions of the eigenvalue problem for the Laplace operator Δ on a disk as the eigenvalues λ go to infinity. More specifically, we study the growth rate of the pointwise and the L^∞ norms of the eigenfunctions.

Let D be the unit disk and ∂_D be its boundary (the unit circle). We study the solutions of the eigenvalue problem $\Delta f = \lambda f$ with either Dirichlet boundary condition ($f|_{\partial D} = 0$) or Neumann boundary condition ($\frac{\partial f}{\partial n}|_{\partial D} = 0$; note that for the disk the normal derivative is simply the derivative with respect to the radial variable: $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r}$). The corresponding eigenfunctions are given by:

$$f_\lambda(r, \theta) = f_{n,m}(r, \theta) = J_n(k_{n,m}r)(A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta)) \quad (\text{Dirichlet})$$

$$f_\lambda^N(r, \theta) = f_{n,m}^N(r, \theta) = J_n(k'_{n,m}r)(A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta)) \quad (\text{Neumann})$$

where J_n is the n^{th} order Bessel function of the first type, $k_{n,m}$ is its m^{th} zero and $k'_{n,m}$ is the m^{th} zero of its derivative (here we denote the eigenfunctions for the Dirichlet problem by f and those for the Neumann problem by f^N). The spectrum of the Laplacian on D , $Sp_D(\Delta)$, that is the set of its eigenvalues, is given by:

$$Sp_D(\Delta) = \{\lambda : \Delta f = \lambda f\} = \{k_{n,m}^2 : n = 0, 1, 2, \dots m = 1, 2, \dots\} \quad (\text{Dirichlet})$$

$$Sp_D^N(\Delta) = \{\lambda : \Delta f^N = \lambda f^N\} = \{k'_{n,m}{}^2 : n = 0, 1, 2, \dots m = 1, 2, \dots\} \quad (\text{Neumann})$$

Finally, we normalize the L^2 norm of the eigenfunctions on D , namely: $\int_D F_\lambda^2 da = 1$ (here and further on we use the notation F_λ for the normalized eigenfunctions and f_λ for arbitrary eigenfunctions).

Under these conditions, we study the growth rate of the L^∞ norm of the normalized eigenfunctions, $\|F_\lambda\|_\infty$, in relation to λ . It is important to mention that the L^∞ norm of a function on a given domain corresponds to the maximum of its absolute value on the domain. Note that λ depends on two parameters, m and n , and the relation between λ and the L^∞ norm depends on the regime at which m

and n change as λ goes to infinity. Studying the behavior of the L^∞ norm is linked to the study of the set $E(D)$ which is the set of accumulation points of

$$\log(\|F_\lambda\|_\infty)/\log \lambda.$$

One of our main results is that

$$[7/36, 1/4] \subset E(B^2) \subset [1/18, 1/4].$$

The thesis is organized as follows. Introduction and main results are presented in chapter 1. In chapter 2 we review some well-known facts regarding the eigenfunctions of the Laplacian on the disk and the properties of the Bessel functions. In chapter 3 we prove results on pointwise growth of eigenfunctions. In particular, we show that, if $m/n \rightarrow 0$, then, for any fixed point (r, θ) on D , the value of $F_\lambda(r, \theta)$ decreases exponentially as $\lambda \rightarrow \infty$. In chapter 4 we study the growth of the L^∞ norm. Eigenfunctions of the Neumann problem are discussed in chapter 5. Some numerical results are presented in chapter 6. A discussion and a summary of our work could be found in chapter 7.

Key words: Laplacian, spectral theory, Bessel function, disk

Résumé

Ce mémoire a pour but d'étudier les propriétés des solutions à l'équation aux valeurs propres de l'opérateur de Laplace Δ sur le disque lorsque les valeurs propres λ tendent vers l'infini. En particulier, on s'intéresse au taux de croissance des normes ponctuelle et L^∞ .

Soit D le disque unitaire et ∂D sa frontière (le cercle unitaire). On s'intéresse aux solutions de l'équation aux valeurs propres $\Delta f = \lambda f$ avec soit des conditions frontières de Dirichlet ($f|_{\partial D} = 0$), soit des conditions frontières de Neumann ($\frac{\partial f}{\partial n}|_{\partial D} = 0$; notons que sur le disque, la dérivée normale est simplement la dérivée par rapport à la variable radiale : $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r}$). Les fonctions propres correspondantes sont données par :

$$f_\lambda(r, \theta) = f_{n,m}(r, \theta) = J_n(k_{n,m}r)(A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta)) \quad (\text{Dirichlet})$$

$$f_\lambda^N(r, \theta) = f_{n,m}^N(r, \theta) = J_n(k'_{n,m}r)(A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta)) \quad (\text{Neumann})$$

où J_n est la fonction de Bessel de premier type d'ordre n , $k_{n,m}$ est son m -ième zéro et $k'_{n,m}$ est le m -ième zéro de sa dérivée (ici on dénote les fonctions propres pour le problème de Dirichlet par f et celles pour le problème de Neumann par f^N). Dans ce cas, on obtient que le spectre $Sp_D(\Delta)$ du laplacien sur D , c'est-à-dire l'ensemble de ses valeurs propres, est donné par :

$$Sp_D(\Delta) = \{\lambda : \Delta f = \lambda f\} = \{k_{n,m}^2 : n = 0, 1, 2, \dots m = 1, 2, \dots\} \quad (\text{Dirichlet})$$

$$Sp_D^N(\Delta) = \{\lambda : \Delta f^N = \lambda f^N\} = \{k'_{n,m}{}^2 : n = 0, 1, 2, \dots m = 1, 2, \dots\} \quad (\text{Neumann})$$

Enfin, on impose que nos fonctions propres soient normalisées par rapport à la norme L^2 sur D , c'est-à-dire : $\int_D F_\lambda^2 da = 1$ (à partir de maintenant on utilise F_λ pour noter les fonctions propres normalisées et f_λ pour les fonctions propres quelconques).

Sous ces conditions, on s'intéresse à déterminer le taux de croissance de la norme L^∞ des fonctions propres normalisées, notée $\|F_\lambda\|_\infty$, selon λ . Il est important de mentionner que la norme L^∞ d'une fonction sur un domaine correspond au maximum de sa valeur absolue sur le domaine. Notons que λ dépend de deux paramètres, m et n et que la dépendance entre λ et la norme L^∞ dépendra du rapport entre leurs taux de croissance. L'étude du comportement de la norme L^∞ est étroitement liée à l'étude de l'ensemble $E(D)$ qui est l'ensemble des points d'accumulation de

$$\log(\|F_\lambda\|_\infty) / \log \lambda.$$

Notre principal résultat sera de montrer que

$$[7/36, 1/4] \subset E(B^2) \subset [1/18, 1/4].$$

Le mémoire est organisé comme suit. L'introduction et les résultats principaux sont présentés au chapitre 1. Au chapitre 2, on rappelle quelques faits bien connus concernant les fonctions propres du laplacien sur le disque et sur les fonctions de Bessel. Au chapitre 3, on prouve des résultats concernant la croissance de la norme ponctuelle des fonctions propres. On montre notamment que, si $m/n \rightarrow 0$, alors pour tout point donné (r, θ) du disque, la valeur de $F_\lambda(r, \theta)$ décroît exponentiellement lorsque $\lambda \rightarrow \infty$. Au chapitre 4, on montre plusieurs résultats sur la croissance de la norme L^∞ . Le problème avec conditions frontières de Neumann est discuté au chapitre 5 et on présente quelques résultats numériques au chapitre 6. Une brève discussion et un sommaire de notre travail se trouve au chapitre 7.

Mots clés : laplacien, théorie spectrale, fonctions Bessel

Remerciements

Je tiens avant tout à remercier mon directeur, Iosif Polterovich, pour son support tout au long de ma maîtrise. L'idée initiale du projet vient de lui et c'est en grande partie grâce à ses précieux conseils de même qu'à son support financier que le mémoire a pu aboutir.

Je tiens aussi à remercier les membres du jury, Yvan Saint-Aubin et Marlène Frigon, pour leurs nombreux commentaires qui m'ont permis de grandement améliorer la qualité du mémoire. Je remercie aussi Guillaume Poliquin, Guillaume Roy-Fortin et Ariane Champagne pour avoir contribué à la révision des preuves et surtout pour avoir grandement amélioré le niveau du français dans le texte.

Table des matières

1	Introduction	1
2	Préliminaires	7
2.1	Définitions du laplacien et du problème aux valeurs propres	7
2.2	Solution du problème aux valeurs propres	9
2.3	Borne supérieure pour la norme L^∞	13
2.4	Les zéros des fonctions de Bessel	14
3	Résultats ponctuels	17
3.1	Cas $\gamma < 1$	17
3.2	Cas $\gamma > 5/2$	19
4	Croissance de la norme L^∞	21
4.1	Ensemble $E(X)$	21
4.2	Cas $\gamma < 1$	22
4.3	Cas $\gamma > 3$	27
4.4	Cas $\gamma > 1$	29
5	Le cas de Neumann	31
5.1	Préalables	31
5.2	Cas $\gamma < 1$	33
5.3	Cas $\gamma > 1$	37
6	Calculs numériques	39

7 Conclusion	41
7.1 Sommaire	41
7.2 Dirichlet et Neumann	42
7.3 Discussion	43
A Programme en Mathematica	x

Chapitre 1

Introduction

Ce mémoire est un bon exemple de problèmes auxquels on peut s'intéresser en géométrie spectrale au même titre que l'étude des domaines minimisant ou maximisant la n -ième valeur propre d'un opérateur, l'obtention de bornes générales sur les norme L^p des fonctions propres d'un opérateur peu importe le domaine ou la reconstitution d'un domaine en fonction des valeurs propres d'un opérateur qui lui sont associées. La géométrie spectrale est une combinaison de géométrie et d'analyse spectrale, cette dernière étant l'étude du spectre des valeurs propres associées à un opérateur, par exemple un opérateur différentiel comme le laplacien agissant sur des fonctions ou une matrice agissant sur des vecteurs. On fait alors intervenir la géométrie en modifiant les espaces sur lesquels ces objets sont définis. On peut par exemple modifier considérablement les solutions d'un problème aux valeurs propres en passant d'un espace non-borné à un espace borné (par exemple passer de \mathbb{R}^3 à la boule unitaire) ou en variant la dimension de l'espace considéré.

Dans ce qui suivra, on s'intéressera uniquement à l'opérateur de Laplace, le laplacien, qui est linéaire et auto-adjoint, ce qui simplifie énormément le problème par rapport à un opérateur différentiel quelconque. Il présente un intérêt particulier en théorie spectrale étant donné son importance marquée dans plusieurs problèmes de physique, que ce soit au niveau des potentiels électriques ou gravitationnels ou dans l'équation de diffusion pour la chaleur, l'équation des ondes classique ou dans le calcul de la fonction d'onde d'une particule en mécanique

quantique. À ce titre, on peut facilement donner une interprétation plus physique au problème de l'étude des fonctions propres du laplacien sur le disque. En effet, il s'agit d'une bonne modélisation mathématique, via l'équation d'ondes, de l'oscillation d'une membrane de forme circulaire (par exemple un tambour) pour laquelle des conditions frontières de Dirichlet représenteraient une membrane dont le bord est attaché, alors que des conditions frontières de Neumann représenteraient une membrane dont les bords sont libres d'osciller. On peut aussi représenter la distribution quantique d'une particule dans un puit de potentiel circulaire.

Le problème qui nous intéresse, qui est d'évaluer le comportement asymptotique des fonctions propres lorsque $\lambda \rightarrow \infty$, a aussi une correspondance en physique. En effet, pour le cas de la vibration d'une membrane, les valeurs propres λ représentent la fréquence de vibration associée à un certain mode de vibration normal représenté par la fonction propre associée, alors que dans le cas d'une particule quantique les valeurs propres représentent l'énergie associée à une certaine fonction d'onde, donnée par la fonction propre associée à λ , qui représente la densité de probabilité qu'une particule soit présente à un certain point de l'espace. Dans les deux cas, λ est associée à l'énergie du système et la limite $\lambda \rightarrow \infty$ correspond donc à la limite de haute énergie du système. C'est un concept particulièrement important puisque que, dans le cas de la mécanique quantique par exemple, la limite à haute énergie correspond au passage vers la mécanique classique.

Nous examinerons deux aspects distincts du problème. En premier lieu, nous approcherons le problème d'un point de vue ponctuel, c'est-à-dire que nous évaluerons la valeur des fonctions propres pour des points quelconques du disque afin d'obtenir des résultats valides pour certaines régions du domaine. Ensuite, nous porterons notre attention sur le maximum des fonctions propres sur le domaine, en d'autres termes la norme L^∞ de ces fonctions, et plus particulièrement sur le taux de croissance de ce maximum par rapport à λ . Les résultats ainsi obtenus ne seront plus valides pour un certain point du domaine en particulier, mais ce seront des résultats globaux.

Évidemment, on ne fait pas le choix d'étudier le taux de croissance de la

norme L^∞ des fonctions propres de manière totalement arbitraire. Connaître la taille du maximum nous donne une idée de la distribution de ces fonctions sur le domaine, ainsi plus $\|F_\lambda\|_\infty$ est grand, plus la fonction est distribuée inégalement sur le disque et se concentre autour de certaines courbes ou points du domaine. Les courbes du domaine autour desquelles on obtient des croissances maximales pour la norme L^∞ apparaissent d'ailleurs dans l'étude de la correspondance classique/quantique des systèmes chaotiques où elles sont appelées « strong scars ». L'étude de ces objets a notamment donné lieu à la conjecture d'ergodicité quantique unique qui prédit le comportement des systèmes quantiques chaotiques. Pour plus d'informations sur ces sujets, on peut se référer à [8] et à [9].

Les valeurs propres et les fonctions propres qui découlent de l'équation aux valeurs propres du laplacien sur le disque dépendent de deux paramètres, n et m . Or, comme on le verra plus tard, étudier la dépendance entre les normes ponctuelle et L^∞ et les valeurs propres $\lambda_{n,m}$ est peu pratique si on étudie la question selon n et m . C'est principalement dû au fait qu'on se limite au cas où $\lambda \rightarrow \infty$, ce qui impose une certaine contrainte sur n et m . Puisque $\lambda_{n,m}$ est strictement croissant par rapport à n et à m , le seul vrai choix qu'on peut faire est de déterminer « comment » n et m tendent vers l'infini. Dans cette optique on définit l'exposant γ :

Définition 1.0.1. (*Exposant γ*) Soit $\{\lambda_{n_l, m_l}\}$, une suite de valeurs propres telle que $\lambda_{n_l, m_l} < \lambda_{n_{l+1}, m_{l+1}}$, alors on pose γ_l tel que :

$$\frac{\log m_l}{\log n_l} = \gamma_l$$

Nous noterons :

$$\gamma_a = \{\gamma_l\}' \quad (\text{l'ensemble des points d'accumulation de } \{\gamma_l\})$$

De plus, lorsque la limite existe, on pose :

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \gamma_l = \gamma$$

Remarque : la définition ne suppose pas nécessairement que $\lambda_l \rightarrow \infty$ bien que ce soit le cas dans le problème qui nous intéresse.

Dans le reste du mémoire, on utilisera généralement la notation $\gamma_l = \gamma$ au lieu de $\gamma_l \rightarrow \gamma$ pour simplifier la lecture. De plus, puisque n et $m \in \mathbb{N}$, on a que $\gamma \in [0, \infty]$ et on utilisera :

$$m = n^\gamma \quad (1.1)$$

Bien qu'on étudiera la croissance des fonctions propres selon γ , cette valeur n'existe généralement pas pour une suite arbitraire de valeurs propres $\{\lambda_l\}$ telle que $\lambda_l \rightarrow \infty$. On doit donc trouver une méthode pour tenir compte des cas où γ n'existe pas et énoncer les résultats selon γ_a .

C'est d'ailleurs dans cet optique que nous allons définir la relation suivante :

Définition 1.0.2. (relation ϕ) Soit $\{\lambda_{n_l, m_l}\}$, une suite de valeurs propres telle que $\lambda_{n_l, m_l} < \lambda_{n_{l+1}, m_{l+1}}$, et $\{F_l\}$, la suite des fonctions propres normalisées par rapport à la norme L^2 qui y est associée. Si $\gamma_l \rightarrow \gamma$ on définit la relation ϕ comme :

$$\phi(\gamma) = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\log \|F_l\|_\infty}{\log \lambda_{n_l, m_l}} \quad (1.2)$$

alors que si γ_l ne converge pas on prend :

$$\phi(\gamma) = \phi(\gamma_a) \quad (1.3)$$

où $\phi(\gamma_a)$ est la relation $\phi(\gamma)$ appliquée à chaque élément de γ_a .

On doit noter que rien ne garantit que la relation $\phi(\gamma)$ soit une fonction. C'est plutôt une relation qui associe un sous ensemble de $[0, \infty]$ à une suite de valeurs propres strictement croissante. D'ailleurs, la plupart des résultats qu'on obtiendra dans ce mémoire nous permettent uniquement de borner la relation ϕ sans en préciser la valeur exacte à l'exception de l'intervalle $(3, \infty]$ où on a une formule exacte pour $\phi(\gamma)$ qui nous permet de dire qu'elle s'y comporte comme une fonction.

Puisque, en général, on peut seulement borner $\phi(\gamma)$, on obtiendra aussi des bornes pour $\phi(\gamma_a)$. Elles seront données par les pire bornes obtenues lorsqu'on applique la relation $\phi(\gamma)$ à chaque élément de γ_a .

On peut maintenant donner un résumé des résultats de ce mémoire, tous valides sur le disque :

- Thm 3.1.1 : Si $\gamma < 1$, alors pour tout point donné $(r, \theta) \in D$:

$$\|F_{n,m}(r, \theta)\| \rightarrow 0 \quad \text{si } \lambda \rightarrow \infty$$

- Thm 3.2.1 : Si $\gamma > 5/2$, alors :

$$|F_{n,m}(r, \theta)| = \left| \sqrt{\frac{2}{\pi(A^2 + B^2)}} \frac{\cos(k_{n,m}r - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4})}{\sqrt{r}} (A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta)) \right| + O\left(\frac{n^2}{k_{n,m}r}\right)$$

- Lemme 4.2.1 : Si $\gamma < 1$:

$$\phi(\gamma) \geq \frac{1 - \gamma}{6}$$

- Lemme 4.2.2 : Si $\gamma < 1$:

$$\phi(\gamma) \geq \frac{\gamma}{12}$$

- Thm 4.3.1 : Si $\gamma > 3$:

$$\phi(\gamma) = \frac{1}{4} - \frac{1}{6\gamma}$$

- Lemme 4.4.1 : Si $\gamma > 1$:

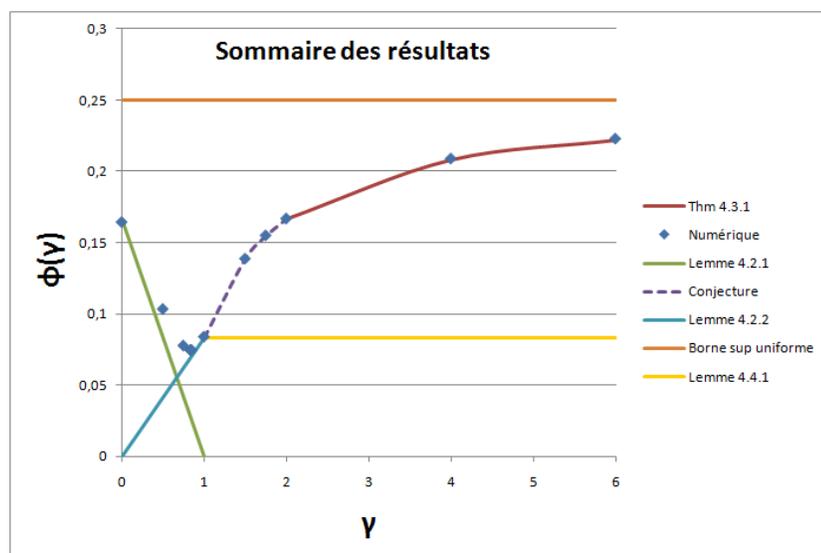
$$\phi(\gamma) \geq \frac{1}{12}$$

En combinant les lemmes 4.2.2, 4.2.1 et 4.4.1, on trouve une borne inférieure de la croissance de la norme L^∞ des fonctions propres :

$$\|F_\lambda(r, \theta)\|_\infty \gg \lambda^{\frac{1}{18}}.$$

Remarque : Cette borne n'est pas optimale puisque les lemmes 4.2.1 et 4.2.2 ne donnent pas des résultats optimaux.

Finalement, il est utile de donner une représentation graphique des résultats :



Remarque : les points « Numérique » sont obtenus en calculant numériquement le taux de croissance des fonctions propres pour une suite de valeurs avec un γ donné (voir le chapitre 6).

Chapitre 2

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous allons dresser une liste des définitions utiles pour traiter le problème qui nous intéresse et nous décrirons les résultats classiques nécessaires pour approfondir l'étude des fonctions propres du laplacien.

2.1 Définitions du laplacien et du problème aux valeurs propres

L'ensemble des définitions données dans cette section sont relatives à des notions de base en mathématiques.

Définition 2.1.1. (laplacien Δ). Soit Ω un domaine de \mathbb{R}^n et soit $C^k(\Omega)$ l'ensemble des fonctions définies sur Ω qui y sont continûment différentiables k fois. Alors, le laplacien Δ est défini par :

$$\Delta : C^k(\Omega) \rightarrow C^{k-2}(\Omega) \quad k \geq 2$$
$$\Delta f = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Dans le cas qui nous intéresse, on prend $\Omega = D$, le disque unitaire, dans \mathbb{R}^2 , donc :

$$\Delta = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) = -\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) \quad (2.1)$$

Définition 2.1.2. (*Problème aux valeurs propres*). Un problème aux valeurs propres, relatif à un opérateur A , consiste à chercher les solutions à :

$$Au = \lambda u$$

où u est une **fonction propre** non identiquement nulle relative à λ , une constante appelée **valeur propre**.

Dans le cas qui nous intéresse on utilise l'opérateur de Laplace, Δ , et on cherche les solutions de l'équation :

$$\Delta f = \lambda f \quad (2.2)$$

Définition 2.1.3. (*Conditions de Dirichlet et de Neumann*). Soit $\partial\Omega$ la frontière d'un domaine Ω de \mathbb{R}^n , alors la condition aux limites de Dirichlet est :

$$u|_{\partial\Omega} = 0$$

et la condition de Neumann est :

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \text{où } \frac{\partial}{\partial n} \text{ est la dérivée dans la direction normale à } \partial\Omega.$$

Dans le cas du disque unitaire, on trouve :

$$f|_{\partial D} = f|_{r=1} = 0 \quad (\text{Dirichlet}), \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial f^N}{\partial n}|_{\partial D} = \frac{\partial f^N}{\partial r}|_{r=1} = 0 \quad (\text{Neumann}). \quad (2.4)$$

Remarque : on utilise l'exposant N pour différencier les fonctions propres du problème de Neumann de celles du problème de Dirichlet.

On impose aussi la restriction suivante sur les fonctions propres étudiées :

$$\int_D F^2 da = 1, \quad (2.5)$$

c'est-à-dire qu'on impose que nos fonctions propres soient normalisées par rapport à la norme L^2 . Il est important de noter qu'on peut toujours le faire et que cela ne restreint pas la classe des fonctions étudiées, car si u est une fonction propre de la valeur propre λ , cu l'est aussi.

2.2 Solution du problème aux valeurs propres

Nous allons maintenant décrire certains résultats classiques concernant le problème aux valeurs propres du laplacien sur le disque unitaire avec conditions aux limites de Dirichlet ou de Neumann.

La solution du problème aux valeurs propres pour le laplacien sur le disque avec les conditions de Dirichlet ou Neumann est un résultat classique [3] :

Théorème 2.2.1. (*Solution du problème aux valeurs propres*) La solution du problème aux valeurs propres du Laplacien sur le disque unitaire est donnée par :

$$f_{n,m}(r, \theta) = J_n(k_{n,m}r)(A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta)); \quad \lambda_{n,m} = k_{n,m}^2 \quad (\text{Dirichlet}) \quad (2.6)$$

$$f_{n,m}^N(r, \theta) = J_n(k'_{n,m}r)(A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta)); \quad \lambda_{n,m} = k'^2_{n,m} \quad (\text{Neumann}) \quad (2.7)$$

où $f_{n,m}(r, \theta)$ ($f_{n,m}^N(r, \theta)$) est la fonction propre associée à la valeur propre $\lambda_{n,m}$, J_n est la fonction de Bessel de premier type d'ordre n , $k_{n,m}$ son $m^{\text{ième}}$ zéro strictement positif et $k'_{n,m}$ le $m^{\text{ième}}$ zéro strictement positif de sa dérivée.

Démonstration. On cherche une fonction de \mathbb{R}^2 , f , qui satisfasse à l'équation (2.2) et à l'équation (2.3) ou (2.4). On ne se préoccupe pas tout de suite de la normalisation.

Premièrement, puisque les conditions aux limites sont beaucoup plus faciles à exprimer en coordonnées polaires (r, θ) , on choisit d'exprimer le laplacien dans ces coordonnées tel que donné dans la 3^e partie de l'équation (2.1). L'équation (2.2) devient alors :

$$-\left(\frac{\partial^2 f(r, \theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f(r, \theta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f(r, \theta)}{\partial \theta^2} \right) = \lambda f(r, \theta)$$

Comme c'est souvent le cas lorsqu'on résout des équations aux dérivées partielles, on suppose que la solution est séparable :

$$f(r, \theta) = U(r)V(\theta).$$

Si on introduit cette nouvelle forme pour $f(r, \theta)$ dans l'équation aux valeurs propres, on trouve :

$$U''(r)V(\theta) + \frac{U'(r)}{r}V(\theta) + \frac{U(r)}{r^2}V''(\theta) = -\lambda U(r)V(\theta)$$

$$\Leftrightarrow \frac{r^2 U''(r)}{U(r)} + \frac{r U'(r)}{U(r)} + r^2 \lambda = -\frac{V''(\theta)}{V(\theta)} = \text{constante} = c^2$$

On doit donc résoudre deux équations différentielles ordinaires au lieu d'une équation aux dérivées partielles impliquant deux variables :

$$V''(\theta) + c^2 V(\theta) = 0 \quad (2.8)$$

$$\frac{r^2 U''(r)}{U(r)} + \frac{r U'(r)}{U(r)} + r^2 \lambda = c^2 \quad (2.9)$$

On doit aussi imposer que $V(\theta) = V(\theta + 2\pi)$ puisque la fonction doit être continue donc périodique. Il est alors facile de résoudre l'équation (2.8) :

$$V(\theta) = A \cos(c\theta) + B \sin(c\theta) \quad \text{et } c = n \in \mathbb{N}$$

Enfin, on peut remplacer c par n dans l'équation (2.9) :

$$\frac{r^2 U''(r)}{U(r)} + \frac{r U'(r)}{U(r)} + r^2 \lambda = n^2$$

Cette équation est appelée l'équation de Bessel et sa solution est donnée par :

$$U(r) = J_n(\sqrt{\lambda}r)$$

Il faut toutefois prendre en compte la condition aux limites appropriée. Dans le cas de Dirichlet (2.3), on trouve :

$$U(1) = J_n(\sqrt{\lambda}) = 0$$

et donc $\sqrt{\lambda}$ doit être un zéro de J_n . Pour Neumann (2.4), on trouve :

$$U'(1) = \sqrt{\lambda} J'_n(\sqrt{\lambda}) = 0$$

et donc $\sqrt{\lambda}$ doit être un zéro de J'_n car $\lambda > 0$. □

Il est important de noter que les fonctions de Bessel du première type sont des fonctions analytiques qui admettent le développement en série suivant :

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-\frac{x}{2})^i}{i!(n+i)!}$$

La meilleure référence pour ce qui est des fonctions de Bessel est probablement le livre de Watson [11].

La conjecture de Bourget, qui a été prouvée par Siegel [11, p.485] stipule que $k_{n,m} \neq k_{n',m'}$ pour $n, n', m, m' \in \mathbb{N}$ et $(n, m) \neq (n', m')$. De plus, on vient d'établir que

$$\lambda_{n,m} = k_{n,m}^2 \quad (k'_{n,m}{}^2 \text{ pour Neumann}), \quad (2.10)$$

donc les valeurs propres sont toutes doubles car $k_{n,m} \geq 0$ et, en tenant compte de la multiplicité qui vient de la partie angulaire de la solution, $A \cos n\theta + B \sin n\theta$ (sauf pour $n = 0$, auquel cas les valeurs propres sont simples).

Par contre, ces fonctions ne sont pas encore normalisées. Le théorème suivant nous donne la bonne constante de normalisation [3] :

Théorème 2.2.2. (*Normalisation des fonctions propres*). *Les fonctions propres normalisées par rapport à la norme L^2 pour le laplacien sont données par :*

$$F_{n,m}(r, \theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi(A^2 + B^2)}} \frac{J_n(k_{n,m}r)}{J_{n+1}(k_{n,m})} (A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta)) \quad (\text{Dirichlet}) \quad (2.11)$$

$$F_{n,m}^N(r, \theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi(A^2 + B^2)(1 - \frac{n^2}{k'_{n,m}{}^2})}} \frac{J_n(k'_{n,m}r)}{J_n(k'_{n,m})} (A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta)) \quad (\text{Neumann}) \quad (2.12)$$

où A et $B \in \mathbb{R}$

Démonstration. En se basant sur la forme non-normalisée des solutions (2.6), (2.7), il suffit d'intégrer sur le domaine :

$$\int_D F(r, \theta)^2 da = \int_0^1 \int_0^{2\pi} F(r, \theta)^2 r dr d\theta = 1$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} (C_1(A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta)))^2 d\theta = C_1^2(\pi(A^2 + B^2)) = 1$$

$$\text{et } \int_0^1 (C_2 J_n(k_{n,m} r))^2 r dr = 1 \quad (\text{Dirichlet})$$

$$\int_0^1 (C_2 J_n(k'_{n,m} r))^2 r dr = 1 \quad (\text{Neumann})$$

Mais on a aussi que [3, p.306] :

$$\int_0^1 J_n(cr)^2 r dr = \frac{J'_n(c)^2}{2} + \frac{(1 - \frac{n^2}{c^2})}{2} J_n(c)^2$$

Donc on trouve :

$$C_1 = \sqrt{\frac{1}{\pi(A^2 + B^2)}}$$

$$C_2 = \frac{\sqrt{2}}{J'_n(k_{n,m})} \quad (\text{Dirichlet})$$

$$\text{ou } C_2 = \frac{\sqrt{\frac{2}{(1 - \frac{n^2}{k'^2_{n,m}})}}}{J_n(k'_{n,m})} \quad (\text{Neumann})$$

De plus, puisque $J'_n(x) = \frac{n}{x} J_n(x) + J_{n+1}(x)$ et que $J_n(k_{n,m}) = 0$ par définition de $k_{n,m}$, on a que :

$$J'_n(k_{n,m}) = J_{n+1}(k_{n,m})$$

□

Remarque : la normalisation pour la partie angulaire $(A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta))$ n'est pas valide si $n = 0$. Dans ce cas, la normalisation est triviale, on trouve :

$$C_1 = \frac{1}{A\sqrt{2\pi}}.$$

À partir de maintenant et pour la majorité du mémoire, nous allons seulement considérer la condition aux limites de Dirichlet. Nous allons consacrer le Chapitre 5 à adapter les résultats obtenus pour le cas de Dirichlet au cas de Neumann. Enfin, il est important de mentionner qu'à partir de maintenant nous nous intéresserons uniquement aux cas lorsque $\lambda_{n,m} \rightarrow \infty$, ce qui est équivalent à $k_{n,m} \rightarrow \infty$ ou à $n \rightarrow \infty$ et/ou $m \rightarrow \infty$

2.3 Borne supérieure pour la norme L^∞

Dans un article paru en 2002 [5], Grieser donne un résultat général pour la croissance de la norme L^∞ des fonctions propres du laplacien avec conditions frontières de Dirichlet ou de Neumann sur un domaine compact avec frontière de dimension N qui lorsque restreint à $N = 2$ donne :

Théorème 2.3.1. *Il existe une constante positive C telle que la norme L^∞ satisfait à :*

$$\|F_{n,m}(r, \theta)\|_\infty \leq C\lambda_{n,m}^{1/4} \quad \forall m \neq 0, n \in \mathbb{N} \quad (2.13)$$

La preuve du résultat général est donnée dans l'article de référence, nous nous contenterons de montrer que cette borne est effectivement atteinte dans le cas $n = 0$, ce qui en fait une borne supérieure optimale.

En effet, si on regarde ce qui se passe en $r = 0$, on trouve que

$$J_n(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

donc

$$F_{n,m}(0, \theta) = \begin{cases} \frac{C_1}{J_1(k_{0,m})} (A \cos 0 + B \sin 0) = \frac{1}{\sqrt{\pi} J_1(k_{0,m})} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0. \end{cases} \quad (2.14)$$

On peut donc supposer, que si on s'intéresse à la croissance des fonctions propres au centre du disque, alors $n = 0$. Il ne faut pas oublier qu'on considère le cas où $\lambda \rightarrow \infty$, mais puisque $n = 0 \Rightarrow m \rightarrow \infty$. Or,

Proposition 2.3.1. *(Asymptotique pour grand x). Soit $J_n(x)$, si $n^2 = o(x)$, alors on peut utiliser la forme asymptotique suivante due à Jacobi [11, p.195] :*

$$J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{4n^2 - 1}{x}\right) \right) \quad (2.15)$$

Évidemment, puisqu'on s'intéresse au cas $n = 0$, qu'ici $x = k_{0,m}$ et que $\lambda \rightarrow \infty \Rightarrow k \rightarrow \infty$, on satisfait amplement les conditions d'application de la proposition précédente. Donc, avec (2.14) :

$$F_{0,m}(0, \theta) = \quad (2.16)$$

$$\sqrt{\frac{1}{\pi}} \sqrt{\frac{\pi k_{0,m}}{2}} \frac{1}{\cos(k_{0,m} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) + O(\frac{1}{k_{0,m}})} = \frac{\sqrt{k_{0,m}} + o(\sqrt{k_{0,m}})}{\sqrt{2} \cos(k_{0,m} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})}$$

Enfin, en utilisant la Proposition 2.3.1 et le fait que $k_{n,m}$ est un zéro de la fonction de Bessel, on trouve :

$$k_{0,m} = c\pi - \frac{\pi}{4} + o(1), \quad c \in \mathbb{N} \quad (2.17)$$

Finalement, avec (2.16) et (2.17) et en prenant $m \rightarrow \infty$ (pour avoir $k_{0,m} \rightarrow \infty$), on trouve :

$$\begin{aligned} F_{0,m}(0, \theta) &= \frac{\sqrt{k_{0,m}} + o(\sqrt{k_{0,m}})}{\cos(c\pi - \pi)} = \pm \sqrt{k_{0,m}} + o(\sqrt{k_{0,m}}) \\ \Rightarrow |F_{0,m}(0, \theta)| &= \sqrt{k_{0,m}} + o(\sqrt{k_{0,m}}) = \lambda_{0,m}^{1/4} + o(\lambda_{0,m}^{1/4}) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Donc la norme de $F_{0,m}(r, \theta)$ atteint une croissance de $\lambda^{1/4}$. De plus, on a que :

Définition 2.3.1. *La norme L^∞ d'une fonction u sur un domaine Ω de \mathbb{R}^2 est donnée par :*

$$\|u\|_\infty := \sup_{\Omega} |u|$$

Puisque $|F_{0,m}(0, \theta)| = \lambda^{1/4} + o(\lambda^{1/4})$, on atteint la borne supérieure du Théorème 2.3.1 ce qui en fait une borne optimale pour des conditions aux limites de Dirichlet.

2.4 Les zéros des fonctions de Bessel

Pour conclure les résultats préliminaires nécessaires à l'étude plus approfondie des solutions du problème aux valeurs propres qui nous intéressent, nous allons devoir donner quelques résultats concernant les zéros des fonctions de Bessel de premier type. Le principal résultat qui nous intéresse permet d'obtenir une borne inférieure et une borne supérieure à la valeur d'un zéro quelconque des fonctions de Bessel.

Proposition 2.4.1. [4] Soit $k_{n,m}$ le $m^{\text{ième}}$ zéro positif de J_n , alors :

$$n + \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} a_m n^{\frac{1}{3}} < k_{n,m} < n + \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} a_m n^{\frac{1}{3}} + \frac{3}{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} a_m^2 n^{-\frac{1}{3}}, \quad (2.19)$$

où a_m est la $m^{\text{ième}}$ racine de la fonction d'Airy du premier type :

$$Ai(-x) = \sqrt{x} \left(J_{1/3} \left(\frac{2}{3} x^{3/2} \right) + J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} x^{3/2} \right) \right).$$

De plus, lorsque m est suffisamment grand (par exemple lorsque $m \rightarrow \infty$), $a_m = cm^{2/3} + o(m^{2/3})$. Dans ce cas on trouve :

$$n + C_1 m^{2/3} n^{1/3} < k_{n,m} < n + C_1 m^{2/3} n^{1/3} + C_2 m^{4/3} n^{-1/3}, \quad (2.20)$$

qu'on peut réécrire comme :

$$n + C_1 n^{\frac{1+2\gamma}{3}} < k_{n,m} < n + C_1 n^{\frac{1+2\gamma}{3}} + C_2 n^{\frac{4\gamma-1}{3}}, \quad (2.21)$$

où $C_1 = \frac{(9\pi^2)^{\frac{1}{3}}}{2}$ et $C_2 = \frac{9(3\pi^4)^{\frac{1}{3}}}{40}$.

Démonstration. La preuve de la première série d'inégalités (2.19) est donnée dans l'article de référence, nous nous contenterons de montrer la forme asymptotique pour les grandes valeurs de m .

Commençons par introduire brièvement les fonctions d'Airy. Ce sont les solutions à l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - xu = 0.$$

Cette équation, appelée équation d'Airy ou de Stokes, est la plus simple équation différentielle possédant un point d'inflexion, c'est-à-dire un point à partir duquel la solution passe d'un comportement oscillatoire à un comportement exponentiel. Elle admet deux solutions distinctes $Ai(x)$ et $Bi(x)$, respectivement les fonctions d'Airy du premier et du deuxième type, nommées d'après George Biddell Airy, un astronome britannique du 19^e siècle. Comme mentionné précédemment, les fonctions d'Airy sont étroitement liées aux fonctions de Bessel.

Puisqu'on s'intéresse à de grandes valeurs de m , il est raisonnable de supposer que la $m^{\text{ième}}$ racine de l'équation d'Airy a_m est elle aussi grande et qu'on peut utiliser la forme asymptotique de la Proposition 2.3.1 de même que le fait que a_m soit une racine :

$$\begin{aligned}
& Ai(-a_m) = \\
& \sqrt{a_m} \sqrt{\frac{2}{\pi \frac{2}{3} a_m^{3/2}}} \left(\left(\cos\left(\frac{2}{3} a_m^{3/2} - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{6 a_m^{3/2}}\right) \right) - \left(\cos\left(\frac{2}{3} a_m^{3/2} + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{6 a_m^{3/2}}\right) \right) \right) = 0 \\
& \Rightarrow \cos\left(\frac{2}{3} a_m^{3/2} - \frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{2}{3} a_m^{3/2} - \frac{\pi}{12}\right) + O\left(\frac{1}{a_m^{3/2}}\right) \\
& \Rightarrow \frac{2}{3} a_m^{3/2} = c\pi + \frac{\pi}{4} + o(1) \Rightarrow a_m = \left(\frac{3}{2}(c\pi + \frac{\pi}{4} + o(1))\right)^{2/3}.
\end{aligned}$$

Puisque toutes les racines de l'équation d'Airy à partir d'un certain point sont de cette forme, il n'y en a qu'un nombre fini d qui ne peuvent s'écrire de cette manière et ainsi :

$$\begin{aligned}
a_m &= \left(\frac{3}{2}((m-d)\pi + c_1\pi + \frac{\pi}{4} + o(1))\right)^{2/3} = \left(\frac{3}{2}(m\pi + c_2\pi + \frac{\pi}{4} + o(1))\right)^{2/3} \\
&\Rightarrow a_m = \left(\frac{3\pi m}{2}\right)^{2/3} + o(m^{2/3}), \quad \text{si } m \text{ est suffisamment grand.} \quad (2.22)
\end{aligned}$$

Enfin, en utilisant ce résultat dans (2.19), on trouve :

$$n + 2^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{3\pi m}{2}\right)^{2/3} n^{\frac{1}{3}} < k_{n,m} < n + 2^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{3\pi m}{2}\right)^{2/3} n^{\frac{1}{3}} + \frac{3}{10} 2^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{3\pi m}{2}\right)^{4/3} n^{-\frac{1}{3}}$$

□

Un fait important à noter est que si m n'est pas borné, l'équation (2.21) nous fournit une très bonne estimation pour la valeur de $k_{n,m}$ tant que $\gamma < 1$, alors que si m est borné ($\gamma \rightarrow 0$), l'équation (2.19) donne une excellente estimation mais avec des constantes implicites.

Chapitre 3

Résultats ponctuels

Dans ce chapitre, nous nous attarderons à démontrer plusieurs résultats ponctuels concernant les fonctions propres du laplacien sur un disque sous certaines conditions afin d'avoir une idée du comportement de ces dernières sur l'ensemble du spectre des valeurs propres et en différents points du disque.

Toutefois, avant de continuer, il est important de remarquer qu'étant donné la forme des fonctions propres pour la condition aux limites de Dirichlet, $F_{n,m}(r, \theta) = C \frac{J_n(k_{n,m}r)}{J_{n+1}(k_{n,m})} (A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta))$, la croissance de la norme en fonction de λ dépend uniquement du facteur $\frac{J_n(k_{n,m}r)}{J_{n+1}(k_{n,m})}$, on ne s'intéressera donc qu'à ces deux fonctions.

3.1 Cas $\gamma < 1$

Dans cette section, nous traiterons du cas où $\lambda_{n,m} \rightarrow \infty$ mais avec la restriction que $\gamma < 1 \Rightarrow m/n \rightarrow 0$ par exemple en étudiant des suites comme : $\lambda_{n,c}, \lambda_{n, \lfloor n^{\frac{1}{2}} \rfloor}, \lambda_{n, \lfloor \log n \rfloor}$. Remarque : $m/n \rightarrow 0$ n'implique pas $\gamma < 1$ puisque, par exemple : $\lambda_{n, n/\log n}$.

Théorème 3.1.1. *Si $\gamma < 1$, alors pour tout point donné $(r, \theta) \in D$:*

$$|F_{n,m}(r, \theta)| \rightarrow 0 \quad \text{si } \lambda \rightarrow \infty. \quad (3.1)$$

Démonstration. Premièrement, la formule (2.20) nous donnent une bonne approximation pour $k_{n,m}/n$ dans le cas où $m/n \rightarrow 0$ et $n \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} 1 + C_1 \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{2}{3}} &< k_{n,m}/n < 1 + C_1 \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{2}{3}} + C_2 \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{4}{3}} \\ &\Rightarrow k_{n,m}/n = 1 + C_1 \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{2}{3}} + o\left(\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{2}{3}}\right) \\ &\Rightarrow k_{n,m} = \alpha n \quad \text{où } \alpha = 1 + C_1 \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{2}{3}} + o\left(\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{2}{3}}\right) > 1 \end{aligned} \quad (3.2)$$

mais, puisque $m/n \rightarrow 0$ et donc $\alpha \rightarrow 1$ lorsque $n \rightarrow \infty$, on peut écrire :

$$J_n(k_{n,m}r) = J_n(nz), \quad z = \alpha r. \quad (3.3)$$

Proposition 3.1.1. [11, p.227] Soit $J_n(nz)$, si $z \in (0, 1)$, alors le premier développement de Meissel, trouvé en 1892, nous donne :

$$J_n(nz) = \frac{(nz)^n e^{n\sqrt{1-z^2}-V_n}}{e^n n! (1-z^2)^{\frac{1}{4}} (1+\sqrt{1-z^2})^n}, \quad (3.4)$$

où $V_n = \frac{1}{24n} \left(\frac{2+3z^2}{(1-z^2)^{\frac{3}{2}}} + 2 \right) + o\left(\frac{1}{n}\right)$ donc $V_n \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$.

En simplifiant quelque peu et en prenant $n \rightarrow \infty$ (Stirling), on trouve :

$$\begin{aligned} J_n(nz) &\approx \frac{z^n e^{n\sqrt{1-z^2}}}{(1+\sqrt{1-z^2})^n} \frac{1}{\sqrt{2\pi n} (1-z^2)^{\frac{1}{4}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi n} (1-z^2)^{\frac{1}{4}}} e^{n(\sqrt{1-z^2} + \log z - \log(1+\sqrt{1-z^2}))}. \end{aligned}$$

Or, $\sqrt{1-z^2} + \log z - \log(1+\sqrt{1-z^2}) < 0$ et est strictement croissant, $\forall z \in (0, 1)$, ce qui implique que $J_n(nz)$ décroît exponentiellement vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$ pour $z \in (0, 1)$, $r \in (0, \frac{1}{\alpha})$. De plus, peu importe la normalisation qu'on viendra appliquer ($\frac{c}{J'_n(k_{n,m})}$), elle ne peut que dépendre de n et non de z . Puisque l'exposant n'est pas uniforme et strictement croissant en z , si la normalisation annulait la décroissance exponentielle en un certain $z_0 \in (0, 1)$, alors $\forall z \in (z_0, 1)$ on aurait une croissance exponentielle par rapport à n et nécessairement la fonction ne sera

plus normalisée, ce qui entraînerait une contradiction. On peut donc conclure que, peu importe la forme que prendra la normalisation, elle ne peut pas contrebalancer la décroissance exponentielle de $F_{n,m}$ pour tout $z \in (0, 1)$:

$$F_{n,m}(r, \theta) \rightarrow 0 \quad \forall r \in (0, \frac{1}{\alpha}) \quad \text{lorsque : } n \rightarrow \infty, m/n \rightarrow 0 \quad (3.5)$$

Puisque $\alpha \rightarrow 1$ lorsque $n \rightarrow \infty$, alors pour tout point donné $(r, \theta) \in D$, $\exists n$ tel que $r < \frac{1}{\alpha}$, ce qui prouve le théorème (voir sec 4.1 pour $z \geq 1$).

□

3.2 Cas $\gamma > 5/2$

Comme on l'a vu dans la proposition 2.3.1, si x/n^2 est suffisamment grand, on peut utiliser une forme asymptotique très puissante due à Jacobi pour évaluer la fonction $J_n(x)$. Or, dans notre cas, on s'intéresse surtout à la valeur de $J_n(k_{n,m}r)$ et $J_{n+1}(k_{n,m})$. On doit donc demander que $k_{n,m}r/n^2$ et $k_{n,m}/n^2$ soient suffisamment grand. Pour le moment, nous allons supposer que r ne tend pas vers 0. Dans ce cas, si on utilise (2.20), on trouve :

$$n + C_1 m^{\frac{2}{3}} n^{\frac{1}{3}} < k_{n,m} \Rightarrow \frac{k_{n,m}}{n^2} > \frac{1}{n} + C_1 \frac{m^{\frac{2}{3}}}{n^{\frac{5}{3}}}.$$

Donc, si $\gamma > \frac{5}{2}$, alors $m^{\frac{2}{3}}/n \rightarrow \infty$, $k_{n,m}/n^2 \rightarrow \infty$ et on peut utiliser la forme asymptotique de la Proposition 2.3.1 pour évaluer $J_n(k_{n,m}r)/J_{n+1}(k_{n,m})$:

$$\begin{aligned} \frac{J_n(k_{n,m}r)}{J_{n+1}(k_{n,m})} &= \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi k_{n,m}r}} (\cos(k_{n,m}r - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) + O(\frac{n^2}{k_{n,m}r}))}{\sqrt{\frac{2}{\pi k_{n,m}}} (\cos(k_{n,m} - \frac{(n+1)\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) + O(\frac{(n+1)^2}{k_{n,m}}))} \\ &= \frac{(\cos(k_{n,m}r - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) + O(\frac{n^2}{k_{n,m}r}))}{\sqrt{r} (\cos(k_{n,m} - \frac{(n+1)\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) + O(\frac{(n+1)^2}{k_{n,m}}))}. \end{aligned}$$

Mais, puisque $k_{n,m}$ est un zéro de J_n il doit être de la forme :

$$k_{n,m} = \begin{cases} c\pi - \frac{\pi}{4} + O(\frac{n^2}{k_{n,m}r}) & \text{si } n \text{ est pair} \\ c\pi + \frac{\pi}{4} + O(\frac{n^2}{k_{n,m}r}) & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \quad (3.6)$$

où $c \in \mathbb{Z}$.

Alors,

$$\cos(k_{n,m} - \frac{(n+1)\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) = \cos(c\pi + d\pi) = \pm 1,$$

$$\text{où } d = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ (n+1)/2 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{J_n(k_{n,m}r)}{J_{n+1}(k_{n,m})} &= \frac{(\cos(k_{n,m}r - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) + O(\frac{n^2}{k_{n,m}r}))}{\sqrt{r}(\pm 1 + O(\frac{(n+1)^2}{k_{n,m}}))} \\ &= \frac{\pm \cos(k_{n,m}r - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4})}{\sqrt{r}} + O(\frac{n^2}{k_{n,m}r}). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Théorème 3.2.1. *Si $\gamma > 5/2$, alors*

$$F_{n,m}(r, \theta) = \pm \sqrt{\frac{2}{\pi(A^2 + B^2)}} \frac{\cos(k_{n,m}r - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4})}{\sqrt{r}} (A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta)) + O\left(\frac{n^2}{k_{n,m}r}\right) \quad (3.8)$$

C'est une conséquence directe des équations (2.11),(3.7). On peut en déduire que :

$$|F_{n,m}(r, \theta)| \leq \left| \sqrt{\frac{2}{\pi(A^2 + B^2)}} \frac{1}{\sqrt{r}} (A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta)) + O\left(\frac{n^2}{k_{n,m}r}\right) \right| \quad (3.9)$$

D'où, si $m^{\frac{2}{5}}/n \rightarrow \infty$ et r ne tend pas vers 0, alors :

$$|F_{n,m}(r, \theta)| \leq \frac{C}{\sqrt{r}} \quad (3.10)$$

Chapitre 4

Croissance de la norme L^∞

4.1 Ensemble $E(X)$

On a maintenant tous les outils nécessaires pour étudier la croissance de la norme L^∞ des fonctions propres du laplacien sur le disque. On définit premièrement l'ensemble $E(X)$ comme étant :

Définition 4.1.1. (*Ensemble $E(X)$*) Soit X une variété riemannienne, $\{\lambda\}$ l'ensemble des valeurs propres du laplacien et $\{F_\lambda\}$ l'ensemble des fonctions propres qui lui est associé. Alors, $E(X)$ est l'ensemble des points d'accumulation de $\log(\|F_\lambda\|_\infty)/\log \lambda$, où $\|\cdot\|_\infty$ est la norme L^∞ .

On peut se référer à [10] pour une discussion sur les intérêts de l'étude de cet ensemble et les motivations derrière cette définition. Le but principal de ce chapitre est de démontrer le résultat suivant :

Théorème 4.1.1.

$$[7/36, 1/4] \subset E(D) \subset [1/18, 1/4] \quad (4.1)$$

Nous allons premièrement donner deux bornes inférieures complémentaires pour la croissance de la norme L^∞ lorsque $\gamma < 1$, puis nous allons obtenir une formule exacte pour la croissance de la norme par rapport à λ , valide lorsque $\gamma > 3$, et nous allons en reprendre la preuve mais de manière légèrement différente pour trouver une borne inférieure valide lorsque $\gamma \geq 1$.

4.2 Cas $\gamma < 1$

On s'attaque ici au cas où $\gamma < 1$ donc $m/n \rightarrow 0$. On utilisera deux approches sensiblement différentes pour trouver deux bornes inférieures distinctes pour la croissance de la norme L^∞ , la première étant particulièrement bonne lorsque γ est proche de 0 tandis que la deuxième est meilleure lorsque γ est proche de 1.

La preuve qui suit, pour la première borne, se base en grande partie sur le Théorème 3.1.1 et sur un argument géométrique simple.

Lemme 4.2.1. *Si $\gamma < 1$,*

$$\phi(\gamma) \geq \frac{1-\gamma}{6} \quad (4.2)$$

Démonstration. À l'aide des outils de la section 3.1, il est possible de déterminer la largeur de la section du disque sur laquelle les fonctions propres ne tendent pas vers 0 de manière exponentielle si $\gamma < 1$. En effet, avec (2.21), en prenant $\gamma < 1$, on trouve :

$$\begin{aligned} n + C_1 n^{\gamma \frac{2}{3}} n^{1/3} < k_{n,m} < n + C_1 n^{\gamma \frac{2}{3}} n^{1/3} + C_2 n^{\gamma \frac{4}{3}} n^{-1/3} \\ \Rightarrow \alpha = k_{n,m}/n = 1 + C_1 n^{\frac{2(\gamma-1)}{3}} + O(n^{\frac{4(\gamma-1)}{3}}) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Puisque la section du disque où la décroissance n'est pas exponentielle se situe sur l'intervalle $r \in (\frac{1}{\alpha}, 1)$, la largeur L est donnée par :

$$\begin{aligned} L = 1 - \frac{1}{\alpha} = 1 - \frac{1}{1 + C_1 n^{\frac{2(\gamma-1)}{3}} + O(n^{\frac{4(\gamma-1)}{3}})} = \frac{C_1 n^{\frac{2(\gamma-1)}{3}} + O(n^{\frac{4(\gamma-1)}{3}})}{1 + C_1 n^{\frac{2(\gamma-1)}{3}} + O(n^{\frac{4(\gamma-1)}{3}})} \\ \Rightarrow L = C_1 n^{\frac{2(\gamma-1)}{3}} + o(C_1 n^{\frac{2(\gamma-1)}{3}}) \end{aligned} \quad (4.4)$$

De plus, puisque les fonctions propres sont normalisées par rapport à la norme L^2 , on a que :

$$\int_D F_{n,m}(r, \theta)^2 da = \int_A F_{n,m}(r, \theta)^2 da + \int_{D \setminus A} F_{n,m}(r, \theta)^2 da = 1,$$

où A est le domaine où les fonctions propres ne tendent pas vers 0 exponentiellement. L'aire du domaine A est donc donnée par :

$$\begin{aligned} \text{Aire}(A) &= \pi(1)^2 - \pi \left(\frac{1}{\alpha} \right)^2 = \pi \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) = \pi L \left(2 + C_1 n^{\frac{2(\gamma-1)}{3}} + o\left(n^{\frac{2(\gamma-1)}{3}}\right) \right) \\ &= 2\pi L + o\left(n^{\frac{2(\gamma-1)}{3}}\right). \end{aligned}$$

Or, comme $F_{n,m}(r, \theta) \rightarrow 0$ exponentiellement sur $D \setminus A$:

$$\begin{aligned} \int_A F_{n,m}(r, \theta)^2 da + \int_{D \setminus A} F_{n,m}(r, \theta)^2 da &= \int_A F_{n,m}(r, \theta)^2 da + O(e^{-an}) = 1 \\ \Rightarrow \int_A F_{n,m}(r, \theta)^2 da &= 1 + O(e^{-an}), \end{aligned}$$

où $a \in \mathbb{R} > 0$ et dépend de r mais pas de n .

Enfin, si on cherche à borner inférieurement le taux de croissance des fonctions propres, on doit trouver la croissance minimale de la valeur maximale de $F_{n,m}(r, \theta)$ sur A . Or, si on veut minimiser le maximum de $F_{n,m}(r, \theta)$ sous la contrainte $\int_A F_{n,m}(r, \theta)^2 da = 1 + O(e^{-an})$, on doit imposer que $F_{n,m}(r, \theta) = C_{n,m}$ sur A (qu'elle soit constante par rapport à r). Si $F_{n,m}(r, \theta) = C_{n,m}$ sur A :

$$\begin{aligned} \int_A F_{n,m}(r, \theta)^2 da &= \text{Aire}(A) C_{n,m}^2 = (2\pi L + o\left(n^{\frac{2(\gamma-1)}{3}}\right)) C_{n,m}^2 = 1 \\ \Rightarrow C_{n,m} &= \sqrt{\frac{1}{2\pi C_1 n^{\frac{2(\gamma-1)}{3}} + o\left(n^{\frac{2(\gamma-1)}{3}}\right)}} = C n^{\frac{1-\gamma}{3}} + o\left(n^{\frac{1-\gamma}{3}}\right). \end{aligned}$$

On peut en déduire que la croissance du maximum sur D des fonctions propres est au moins d'ordre $n^{\frac{1-\gamma}{3}}$ et puisque $k_{n,m} = n + o(n)$ et $\lambda_{n,m} = k_{n,m}^2$:

$$\|F_{n,m}(r, \theta)\|_\infty \geq C n^{\frac{1-\gamma}{3}} + o\left(n^{\frac{1-\gamma}{3}}\right) = C k^{\frac{1-\gamma}{3}} + o\left(k^{\frac{1-\gamma}{3}}\right) = C \lambda^{\frac{1-\gamma}{6}} + o\left(\lambda^{\frac{1-\gamma}{6}}\right).$$

□

On donne maintenant la deuxième borne inférieure qui, combinée au résultat précédent, donne une borne inférieure non triviale à la croissance de la norme L^∞ lorsque $\gamma < 1$. La preuve est principalement calculatoire et se base sur un bon nombre de développements asymptotiques et bornes pour les fonctions de Bessel.

Lemme 4.2.2. Si $\gamma < 1$,

$$\phi(\gamma) \geq \frac{\gamma}{12}. \quad (4.5)$$

Démonstration. On utilise ici une technique similaire à la preuve du Théorème 3.1.1 mais on traite les cas $z = 1$ et $z > 1$. Lorsque $r = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow z = 1$, on utilise la forme asymptotique de Cauchy [11, p.231] :

Proposition 4.2.1. (Asymptotique pour $J_n(n)$)

$$J_n(n) = \frac{\Gamma(\frac{1}{3})}{2^{1/3}3^{1/6}\pi}n^{-1/3} + o(n^{-1/3}). \quad (4.6)$$

Pour $r \in (\frac{1}{\alpha}, 1] \Rightarrow z > 1$, on utilise le deuxième développement de Meissel [11, p.228,234] :

Proposition 4.2.2. (Asymptotique pour $r > \frac{1}{\alpha}$) Soit $J_n(nz)$, $z > 1$, alors on pose $z = \sec \beta$ où $\beta \in (0, \pi/2)$ et on a :

$$J_n(nz) = J_n(n \sec \beta) = \frac{\cos(n(\tan \beta - \beta) - \frac{\pi}{4})}{\sqrt{n\frac{\pi}{2} \tan \beta}} + o\left(\frac{1}{n}\right). \quad (4.7)$$

On utilisera cette formule pour évaluer la normalisation à appliquer lorsque $\gamma < 1$, c'est-à-dire la fonction :

$$J_{n+1}(k_{n,m}) = J_{n+1}(\alpha n) = J_{n+1}((n+1) \sec \beta'),$$

où $\beta' = \arccos \frac{n+1}{n\alpha}$.

Il est possible de simplifier légèrement cette dernière formule :

$$\begin{aligned} (\tan \beta')^2 &= \left(\frac{\sin \beta'}{\cos \beta'}\right)^2 = \frac{1 - (\cos \beta')^2}{(\cos \beta')^2} = \frac{1}{(\cos \beta')^2} - 1 = \left(\frac{n\alpha}{n+1}\right)^2 - 1 \\ \Rightarrow \tan \beta' &= \sqrt{\left(\frac{n\alpha}{n+1}\right)^2 - 1}. \end{aligned}$$

On peut maintenant utiliser la définition de α (3.2) :

$$\sqrt{\left(\frac{n\alpha}{n+1}\right)^2 - 1} = \sqrt{\left(\frac{n(1 + C_1(\frac{m}{n})^{\frac{2}{3}} + o((\frac{m}{n})^{\frac{2}{3}}))}{n+1}\right)^2 - 1}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{(1 + O\left(\frac{1}{n}\right))(1 + 2C_1\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{2}{3}} + o\left(\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{2}{3}}\right))} - 1 \\
&= \sqrt{2C_1\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{2}{3}} + o\left(\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{2}{3}}\right)} = \sqrt{2C_1}\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{3}} + o\left(\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{3}}\right).
\end{aligned}$$

Alors on trouve :

$$\begin{aligned}
J_{n+1}(k_{n,m}) &= \frac{\cos((n+1)(\tan \beta' - \beta') - \frac{\pi}{4})}{\sqrt{(n+1)\frac{\pi}{2} \tan \beta'}} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{\cos((n+1)(\tan \beta' - \beta') - \frac{\pi}{4})}{\sqrt{(n+1)\frac{\pi}{2} \sqrt{2C_1}\left(\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{3}} + o\left(\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{3}}\right)\right)}} + o\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

et finalement :

Proposition 4.2.3. *Si $\gamma < 1$, alors :*

$$J_{n+1}(k_{n,m}) = \frac{\cos((n+1)(\tan \beta' - \beta') - \frac{\pi}{4})}{n^{\frac{2+\gamma}{6}} \sqrt{\frac{\pi}{2} \sqrt{2C_1}(1 + o(1))}}.$$

Un résultat classique [11] nous assure que cette fonction ne peut jamais s'anuler car, pour $n \in \mathbb{N}$, un zéro de J_n ne peut pas être un zéro de J_{n+1} . Par contre, la dépendance explicite du numérateur en termes de n et m ne se calcule pas facilement et rien n'empêche la fonction de s'approcher de zéro plus ou moins rapidement (par exemple $J_{n+1}(k_{n,m}) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$). On peut tout de même utiliser le résultat pour estimer la valeur des fonctions propres pour les cas $r = \frac{1}{\alpha}$ et $r > \frac{1}{\alpha}$.

En $r = \frac{1}{\alpha}$, avec les propositions 4.2.1 et 4.2.3 :

$$\begin{aligned}
J_n(n)/J_{n+1}(k_{n,m}) &= \left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{2^{1/3}3^{1/6}\pi} n^{-1/3} + o(n^{-1/3})\right) \\
&\quad \times \left(\frac{\cos((n+1)(\tan \beta' - \beta') - \frac{\pi}{4})}{n^{\frac{2+\gamma}{6}} \sqrt{\frac{\pi}{2} \sqrt{2C_1}(1 + o(1))}}\right)^{-1},
\end{aligned}$$

d'où :

$$J_n(n)/J_{n+1}(k_{n,m}) = \frac{Cn^{\frac{\gamma}{6}} + o(n^{\frac{\gamma}{6}})}{\cos((n+1)(\tan \beta' - \beta') - \frac{\pi}{4})}, \quad (4.8)$$

où $C = \frac{\Gamma(\frac{1}{3})\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2C_1}}{2^{1/3}3^{1/6}\pi}$

En $r > \frac{1}{\alpha}$, on utilise une borne supérieure pour $J_n(k_{n,m}r)$ donnée par la formule de Landau [7] :

$$|J_n(x)| < bn^{-1/3}, \quad b = 0,674885... \quad (4.9)$$

Puisque cette formule est valide $\forall n > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, on peut s'en servir en conjonction avec la proposition 4.2.3 pour borner $|\frac{J_n(k_{n,m}r)}{J_{n+1}(k_{n,m})}|$ et on trouve :

$$\left| \frac{J_n(k_{n,m}r)}{J_{n+1}(k_{n,m})} \right| < bn^{-1/3} \left(\frac{\cos((n+1)(\tan \beta' - \beta') - \frac{\pi}{4})}{n^{\frac{2+\gamma}{6}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2C_1}(1+o(1))} \right)^{-1}.$$

D'où, si $r > \frac{1}{\alpha}$,

$$\left| \frac{J_n(k_{n,m}r)}{J_{n+1}(k_{n,m})} \right| < \left| \frac{Cn^{\frac{\gamma}{6}} + o(n^{\frac{\gamma}{6}})}{\cos((n+1)(\tan \beta' - \beta') - \frac{\pi}{4})} \right|, \quad (4.10)$$

où $C = b\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2C_1}$.

En prenant le supremum sur le disque, pour tout n, m tels que $\gamma < 1$, avec le théorème 3.1.1 et les équations (4.8),(4.10), on trouve :

$$\begin{aligned} \|F_{n,m}\|_{\infty} &= \sup_D \left| \sqrt{\frac{2}{\pi(A^2 + B^2)}} \frac{J_n(k_{n,m}r)}{J_{n+1}(k_{n,m})} (A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta)) \right| \\ &= \left| \frac{cn^{\frac{\gamma}{6}} + o(n^{\frac{\gamma}{6}}) + O(\frac{1}{n})}{\cos((n+1)(\tan \beta' - \beta') - \frac{\pi}{4})} \right| \sqrt{\frac{2}{\pi(A^2 + B^2)}} \sup_D (A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta)) \\ &= \left| \frac{Cn^{\frac{\gamma}{6}} + o(n^{\frac{\gamma}{6}}) + O(\frac{1}{n})}{\cos((n+1)(\tan \beta' - \beta') - \frac{\pi}{4})} \right|. \end{aligned}$$

Mais, puisque $\frac{1}{\cos(x)} \geq 1$ et selon la définition de γ , on a :

$$\|F_{n,m}\|_{\infty} \geq Cn^{\frac{\gamma}{6}} + o(n^{\frac{\gamma}{6}}) + O(\frac{1}{n}).$$

Enfin, avec (3.2), on trouve :

$$\|F_{n,m}\|_{\infty} \geq Ck^{\frac{\gamma}{6}} + o(k^{\frac{\gamma}{6}}) = C\lambda^{\frac{\gamma}{12}} + o(\lambda^{\frac{\gamma}{12}}),$$

pour une certaine constante $C > 0$.

□

Remarque : cette borne n'est évidemment pas optimale car l'approximation $\frac{1}{\cos x} \geq 1$ n'est pas très bonne. Si on parvenait à déterminer quelle valeur prend $\frac{1}{\cos((n+1)(\tan \beta' - \beta') - \frac{\pi}{4})}$, on aurait une formule exacte valide pour tout $\gamma < 1$ au lieu d'une borne inférieure.

4.3 Cas $\gamma > 3$

Dans cette partie, nous allons obtenir une formule exacte pour la norme L^∞ des fonctions propres du Laplacien avec conditions aux limites de Dirichlet en fonction de λ et γ .

Théorème 4.3.1. *Si $\gamma > 3$,*

$$\phi(\gamma) = \frac{1}{4} - \frac{1}{6\gamma}. \quad (4.11)$$

Démonstration. On s'intéresse au maximum sur D de

$$\begin{aligned} |F_{n,m}(r, \theta)| &= \left| \sqrt{\frac{2}{\pi(A^2 + B^2)}} \frac{J_n(k_{n,m}r)}{J_{n+1}(k_{n,m})} (A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta)) \right| \\ \Rightarrow \|F_{n,m}(r, \theta)\|_\infty &= C_a \max_{r \in [0,1]} \left| \frac{J_n(k_{n,m}r)}{J_{n+1}(k_{n,m})} \right| \end{aligned}$$

Premièrement, il est possible de combiner le résultat de Landau (4.9) et la proposition 4.2.1 pour $J_n(n)$ afin d'obtenir que :

$$C_a \max_{r \in [0,1]} |J_n(k_{n,m}r)| = C_b n^{-1/3}.$$

Mais, puisque $\gamma > 3 > 5/2$, on peut utiliser la Proposition 2.3.1 et l'équation (3.6) pour évaluer le dénominateur. On trouve donc :

$$\|F_{n,m}(r, \theta)\|_\infty = C_a \max_{r \in [0,1]} \left| \frac{J_n(k_{n,m}r)}{\sqrt{\frac{2}{\pi k_{n,m}} (\pm 1 + O(\frac{n^2}{k_{n,m}}))}} \right|$$

$$= C_c n^{-\frac{1}{3}} k_{n,m}^{\frac{1}{2}} + o(n^{-\frac{1}{3}} k_{n,m}^{\frac{1}{2}}) = C_c k_{n,m}^{\frac{1}{2}} m^{-\frac{1}{3\gamma}} + o(k_{n,m}^{\frac{1}{2}} m^{-\frac{1}{3\gamma}}) \quad (4.12)$$

Enfin, lorsque $\gamma > 3$, il est possible de trouver une très bonne approximation pour $k_{n,m}$. En effet, on sait qu'on peut utiliser l'asymptotique de la proposition 2.3.1 pour évaluer $J_{n+1}(k_{n,m})$ lorsque $(n+1)^2/k_{n,m} \rightarrow 0$. Or, (2.21) nous donne que :

$$k_{n,m} > n + C_1 m^{\frac{2}{3}} n^{\frac{1}{3}} > n^{\frac{1+2\gamma}{3}},$$

donc $n^2 = o(k_{n,m})$ si $\gamma > 5/2$, ce qui est le cas puisque $\gamma > 3$. Il en résulte que tous les zéros sauf un maximum de $O(n^{5/2})$ doivent être solutions de la forme asymptotique de la proposition 2.3.1. Il y en a donc $m - O(n^{5/2}) = m - o(m)$ qui sont des solutions de l'asymptotique et qui sont donnés par (3.6). De plus, le dernier zéro qui n'a pas le même terme principal que celui donné dans (3.6), notons-le k_M , est au maximum de la forme $k_M = k_{n,O(n^{5/2})}$. Dans ce cas, avec la formule (2.20), on trouve :

$$\begin{aligned} n + C_1 n^{1/3} O(n^{5/2})^{2/3} &= n + O(n^2) < k_M \\ < n + C_1 n^{1/3} O(n^{5/2})^{2/3} + C_2 n^{-1/3} O(n^{5/2})^{4/3} &= n + O(n^2) + O(n^3). \end{aligned}$$

Puisque $\gamma > 3$, on a que $k_M = o(m)$. On peut alors écrire :

$$k_{n,m} = \begin{cases} C_{n,m} \pi - \frac{\pi}{4} + o(1) & \text{si } n \text{ est pair} \\ C_{n,m} \pi + \frac{\pi}{4} + o(1) & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases}$$

où $C_{n,m} = m + o(m) + k_M = m + o(m)$ et $C_{n,m} \in \mathbb{Z}$. On trouve enfin :

$$k_{n,m} = m\pi + o(m) \quad \text{si } \gamma > 3. \quad (4.13)$$

Ainsi, avec les équations (4.12),(4.13) :

$$\begin{aligned} \|F_{n,m}(r, \theta)\|_{\infty} &= C_d k_{n,m}^{\frac{1}{2}} (k_{n,m}^{-\frac{1}{3\gamma}} + o(k_{n,m}^{-\frac{1}{3\gamma}})) = C_d k_{n,m}^{\frac{1}{2} - \frac{1}{3\gamma}} + o(k_{n,m}^{\frac{1}{2} - \frac{1}{3\gamma}}) \\ \Rightarrow \|F_{n,m}(r, \theta)\|_{\infty} &= C \lambda_{n,m}^{\frac{1}{4} - \frac{1}{6\gamma}} + o(\lambda_{n,m}^{\frac{1}{4} - \frac{1}{6\gamma}}). \end{aligned}$$

□

Remarque : bien qu'il ne soit pas possible de le démontrer analytiquement par une méthode semblable, cette dernière formule semble demeurer valide $\forall \gamma \geq 1$. Il est d'ailleurs facile de le vérifier numériquement (voir chapitre 6).

Ce dernier résultat permet de montrer la moitié du théorème 4.1.1 soit $[7/36, 1/4] \subset E(B^2)$.

4.4 Cas $\gamma > 1$

Dans cette section, nous allons tenter d'étendre le résultat précédent pour $\gamma > 1$. On obtient un résultat semblable quoique moins fort :

Lemme 4.4.1. *Si $\gamma \geq 1$,*

$$\phi(\gamma) \geq \frac{1}{12} \quad (4.14)$$

Démonstration. On peut reprendre l'argument du théorème 4.3.1 à deux exceptions près : il n'est plus possible d'utiliser l'asymptotique de la proposition 2.3.1 pour évaluer le dénominateur et on ne peut plus utiliser l'équation (4.13) pour relier m et $k_{n,m}$.

On peut contourner relativement facilement la première difficulté en utilisant cette formule de Krasikov [6] :

$$J_n(x)^2 \leq \frac{4(4x^2 - (2n+1)(2n+5))}{\pi((4x^2 - \mu)^{3/2} - \mu)}, \quad (4.15)$$

où $\mu = (2n+1)(2n+3)$.

Cette formule est valide $\forall n > -1/2, n \in \mathbb{R}$ et $\forall x > (\mu + \mu^{2/3})^{1/2}/2$. Dans notre cas, $x = k_{n,m}$ et en vertu de (2.21) et puisque $\gamma > 1$, on a que $x > (1+c)n$, où $c > 0$. Ainsi, $(\mu + \mu^{2/3})^{1/2}/2 = (4n^2 + 8n + 3 + (4n^2 + 8n + 3)^{2/3})^{1/2}/2 = n + o(n)$ et donc

$$x > (\mu + \mu^{2/3})^{1/2}/2.$$

On peut donc se servir de (4.15). On trouve alors :

$$J_{n+1}(k_{n,m})^2 \leq \frac{4(4k_{n,m}^2 - (4n^2 + 20n + 21))}{\pi((4k_{n,m}^2 - (4n^2 + 16n + 15))^{3/2} - (4n^2 + 16n + 15))}.$$

En se rappelant que $k_{n,m} > (1+c)n \Rightarrow k_{n,m} - n = Ck_{n,m} + o(k_{n,m})$ avec $0 < C \leq 1$ lorsque $\gamma \geq 1$, on trouve :

$$\begin{aligned} J_{n+1}(k_{n,m})^2 &\leq \frac{4(4(Ck_{n,m}^2 + o(k_{n,m}^2)))}{\pi((4(Ck_{n,m}^2 + o(k_{n,m}^2)))^{3/2} - (4n^2 + 16n + 15))} \\ &= \frac{16(Ck_{n,m}^2 + o(k_{n,m}^2))}{\pi(8(C^{3/2}k_{n,m}^3 + o(k_{n,m}^3)) - (4n^2 + 16n + 15))} \\ &= \frac{2(Ck_{n,m}^2 + o(k_{n,m}^2))}{\pi(C^{3/2}k_{n,m}^3 + o(k_{n,m}^3))} = \frac{2}{\pi C^{3/2}k_{n,m} + o(k_{n,m})}. \end{aligned}$$

On trouve finalement :

$$|J_{n+1}(k_{n,m})| \leq \left(\frac{2}{\pi C^{3/2}k_{n,m} + o(k_{n,m})} \right)^{1/2} = C_2 k_{n,m}^{-1/2} + o(k_{n,m}^{-1/2}) \quad (4.16)$$

Si on combine ce résultat avec celui établi dans la preuve du Théorème 4.3.1, qui impose que $\sup_{r \in [0,1]} J_n(k_{n,m}r)$ décroisse comme $n^{-1/3}$ sans dépendre de γ , on trouve que :

$$\|F_{n,m}(r, \theta)\|_\infty \geq Ck_{n,m}^{1/2}n^{-1/3} + o(k_{n,m}^{1/2}n^{-1/3}).$$

Or, $n < k_{n,m} \Rightarrow n^{-1/3} > k_{n,m}^{-1/3}$, ce qui nous donne :

$$\|F_{n,m}(r, \theta)\|_\infty \geq Ck_{n,m}^{1/2}k_{n,m}^{-1/3} + o(k_{n,m}^{1/2}k_{n,m}^{-1/3}) = Ck_{n,m}^{1/6} + o(k_{n,m}^{1/6}) = C\lambda^{1/12} + o(\lambda^{1/12}) \quad (4.17)$$

□

Remarque : Si on prend $\gamma = 1$ dans l'équation du théorème 4.3.1, on trouve exactement la même valeur pour la croissance des fonctions propres que pour la borne inférieure qu'on vient de trouver et on peut vérifier numériquement (voir chapitre 6) que c'est effectivement la bonne dépendance en ce point. De plus, bien que l'énoncé du lemme impose que $\gamma > 1$, si on examine attentivement la preuve et l'inégalité (2.21) qui borne la valeur de $k_{n,m}$, on réalise que la preuve fonctionne tant que n/m ne tend pas vers zéro. En combinant ce résultat et les deux bornes inférieures valides pour $\gamma < 1$ (lemmes 4.2.1 et 4.2.2), on trouve une borne inférieure à la croissance des fonctions propres du Laplacien valide $\forall \gamma$ soit $1/18$. On a donc fini de montrer la deuxième partie du théorème 4.1.1.

Chapitre 5

Le cas de Neumann

Dans ce chapitre, nous allons réobtenir la plupart des résultats principaux obtenus précédemment dans le cas de conditions frontières de Dirichlet mais pour des conditions frontières de Neumann ($\frac{\partial f}{\partial n}|_{\partial D} = 0$). Nous ne donnerons pas de preuves détaillées pour chaque résultat puisqu'elles sont généralement très semblables à celles des résultats analogues avec conditions frontières de Dirichlet.

5.1 Préalables

Le but de cette section est de rappeler les résultats qu'on a déjà obtenus pour le cas de Neumann, de mettre en évidence les différences entre le cas de Neumann et celui de Dirichlet et d'obtenir une bonne estimation pour $k'_{n,m}$. Premièrement, on avait déjà trouvé la forme que doivent prendre les fonctions propres du laplacien lorsqu'on utilise les conditions frontières de Neumann, de même que les valeurs propres qui leur sont associées au Théorème 2.2.2. On avait obtenu :

$$F_{n,m}^N(r, \theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi(A^2 + B^2)(1 - \frac{n^2}{k'_{n,m}{}^2})}} \frac{J_n(k'_{n,m}r)}{J_n(k'_{n,m})} (A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta)),$$
$$\lambda = k'_{n,m}{}^2.$$

Si on compare avec la forme que prennent les fonctions propres dans le cas de Dirichlet (2.11), on note qu'il y a trois différences notables : on utilise les zéros

de la dérivée des fonctions de Bessel au lieu des zéros des fonctions de Bessel ($k_{n,m} \rightarrow k'_{n,m}$), on normalise avec J_{n+1} au lieu de J_n et il y a un terme supplémentaire, $\sqrt{\frac{1}{1-\frac{n^2}{k'^2_{n,m}}}}$, qu'on doit inclure dans la normalisation pour Neumann et qui n'est pas présent dans le cas de Dirichlet.

Comme on le montrera sous peu, les deux premiers points ont un impact minime sur les résultats. En effet, on peut utiliser des inégalités très semblables à celles de la section 2.5 pour borner $k'_{n,m}$ et, puisqu'on s'intéresse au cas où $\lambda \rightarrow \infty$, m et n sont typiquement très grands, le passage de J_n à J_{n+1} ne change pratiquement rien aux formes asymptotiques utilisées dans les preuves précédentes. Le troisième point, l'ajout d'un terme dans la normalisation, aura un impact sur les résultats lorsque $n \approx k'_{n,m}$ mais il sera assez facile d'en tenir compte une fois qu'on aura une bonne estimation pour $k'_{n,m}$.

C'est d'ailleurs ce que nous allons faire maintenant :

Proposition 5.1.1. *Soit $k'_{n,m}$ le m -ième zéro positif de J'_n , alors :*

$$n + \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} a_{m-1} n^{\frac{1}{3}} < k'_{n,m} < n + \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} a_m n^{\frac{1}{3}} + \frac{3}{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} a_m^2 n^{-\frac{1}{3}}, \quad (5.1)$$

où a_m est la m -ième racine de la fonction d'Airy du premier type :

$$Ai(-x) = \sqrt{x} \left(J_{1/3} \left(\frac{2}{3} x^{3/2} \right) + J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} x^{3/2} \right) \right)$$

De plus, lorsque m est suffisamment grand (principalement lorsque $m \rightarrow \infty$), $a_m = cm^{2/3} + o(m^{2/3})$. Dans ce cas, on trouve :

$$n + C_1(m-1)^{2/3} n^{1/3} < k'_{n,m} < n + C_1 m^{2/3} n^{1/3} + C_2 m^{4/3} n^{-1/3}, \quad (5.2)$$

qu'on peut réécrire comme :

$$n + C_1 n^{\frac{1+2\gamma}{3}} + o(n^{\frac{1+2\gamma}{3}}) < k'_{n,m} < n + C_1 n^{\frac{1+2\gamma}{3}} + C_2 n^{\frac{4\gamma-1}{3}}. \quad (5.3)$$

Démonstration. Pour obtenir la première inégalité, il suffit d'utiliser le fait que $k_{n,m-1} < k'_{n,m} < k_{n,m}$ [11]. On peut alors borner inférieurement $k_{n,m-1}$ et supérieurement $k_{n,m}$ avec (2.19) et on a le résultat voulu. Le fait que $a_m =$

$cm^{2/3} + o(m^{2/3})$ est démontré dans la preuve de la Proposition 2.4.1 et la deuxième inégalité pour $k'_{n,m}$ découle directement de la première et de ce résultat. \square

Comme on peut le voir, les inégalités qui régissent le comportement de $k'_{n,m}$ sont essentiellement les mêmes que celles qui régissent le comportement de $k_{n,m}$ (voir Proposition 2.4.1). Ainsi, comme mentionné précédemment, l'impact sur le comportement des fonctions propres induit par le passage de $k_{n,m}$ à $k'_{n,m}$ sera généralement négligeable. De plus, avec cette dernière proposition, il est maintenant possible d'évaluer comment le comportement des fonctions propres sera influencé par l'ajout du terme supplémentaire $\sqrt{\frac{1}{1 - \frac{n^2}{k'_{n,m}}}}$. Si $\gamma > 1$, alors $1 - \frac{n^2}{k'_{n,m}} \rightarrow 1$ donc le facteur est sans importance. Par contre, si $\gamma \leq 1$, alors $k'_{n,m} = n + cn^{\frac{2\gamma+1}{3}} + o(n^{\frac{2\gamma+1}{3}})$ et $\frac{n^2}{k'_{n,m}} = 1 - \frac{2cn^{\frac{2\gamma+4}{3}} + o(n^{\frac{2\gamma+4}{3}})}{n^2 + 2cn^{\frac{2\gamma+4}{3}} + o(n^{\frac{2\gamma+4}{3}})}$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{n^2}{k'_{n,m}}}} = \sqrt{\frac{1}{2cn^{\frac{2\gamma-2}{3}} + o(n^{\frac{2\gamma-2}{3}})}} = \frac{n^{\frac{1-\gamma}{3}}}{\sqrt{2c}} \quad (5.4)$$

On devra donc tenir compte de ce facteur lorsqu'on tente de trouver une correspondance entre le cas de Dirichlet et celui de Neumann pour $\gamma \leq 1$.

De plus, puisque la valeur propre $\lambda_{n,m}$ est associée à $k'_{n,m}$ au lieu de $k_{n,m}$ et que le résultat qui nous permet de borner la multiplicité de λ dans le cas de Dirichlet repose sur un résultat qui impose que tous les $k_{n,m}$ soient distincts et qui n'a pas d'équivalent pour $k'_{n,m}$ (mais il n'y a pas non plus de contre exemple), on ne peut pas affirmer que la multiplicité de λ est bornée dans le cas de Neumann.

5.2 Cas $\gamma < 1$

Le but de cette section est de modifier légèrement les résultats obtenus lorsque $\gamma < 1$ pour le cas de Dirichlet de manière à ce qu'ils soient applicables au cas de Neumann.

Commençons par établir l'équivalent du Théorème 3.1.1 dans le cas de Neumann :

Théorème 5.2.1. Si $\gamma < 1$, alors pour tout point donné $(r, \theta) \in D$:

$$|F_{n,m}^N(r, \theta)| \rightarrow 0 \quad \text{si } \lambda \rightarrow \infty \quad (5.5)$$

Démonstration. Premièrement, les formules (5.1),(5.3) nous donnent une bonne approximation pour $k'_{n,m}/n$ dans le cas où $m/n \rightarrow 0$ et $n \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} 1 + C_1 \left(\frac{m-1}{n} \right)^{\frac{2}{3}} &< k'_{n,m}/n < 1 + C_1 \left(\frac{m}{n} \right)^{\frac{2}{3}} + C_2 \left(\frac{m}{n} \right)^{\frac{4}{3}} \\ &\Rightarrow k'_{n,m}/n = 1 + C_1 \left(\frac{m}{n} \right)^{\frac{2}{3}} + o\left(\left(\frac{m}{n} \right)^{\frac{2}{3}} \right) \\ &\Rightarrow k'_{n,m} = \alpha' n \quad \text{où } \alpha' = 1 + C_1 \left(\frac{m}{n} \right)^{\frac{2}{3}} + o\left(\left(\frac{m}{n} \right)^{\frac{2}{3}} \right) > 1 \end{aligned} \quad (5.6)$$

mais puisque $m/n \rightarrow 0 \Rightarrow \alpha \rightarrow 1$ lorsque $n \rightarrow \infty$, on peut écrire :

$$J_n(k'_{n,m} r) = J_n(nz'), \quad z' = \alpha' r \quad (5.7)$$

Le reste de la preuve est identique à celle du Théorème 3.1.1, mais avec z' et α' au lieu de z et α .

Remarque : le facteur de normalisation supplémentaire qu'on doit inclure dans le cas de Neumann ne change en rien la preuve ou le résultat, car cette dernière est indépendante de la normalisation. □

Maintenant qu'on a montré que le Théorème 3.1.1 est le même peu importe que les conditions frontières soient de Dirichlet ou de Neumann, on peut donner l'équivalent du Lemme 4.2.1 pour le cas de Neumann, mais avant donnons une définition alternative de la relation $\phi(\gamma)$ adaptée au cas de Neumann :

Définition 5.2.1. Soit $\{\lambda_{n_l, m_l}\}$, une suite de valeurs propres telle que $\lambda_{n_l, m_l} < \lambda_{n_{l+1}, m_{l+1}}$, et $\{F_l^N\}$, la suite des fonctions propres normalisées qui y est associée. Si $\gamma_l \rightarrow \gamma$, on définit la relation ϕ' comme :

$$\phi'(\gamma) = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\log \|F_l^N\|_\infty}{\log \lambda_{n_l, m_l}}, \quad (5.8)$$

alors que si γ_l ne converge pas on prend :

$$\phi(\gamma) = \phi'(\gamma_a), \quad (5.9)$$

où $\phi'(\gamma_a)$ est la relation $\phi'(\gamma)$ appliquée à chaque élément de l'ensemble γ_a .

Lemme 5.2.1. Si $\gamma < 1$,

$$\phi'(\gamma) \geq \frac{1-\gamma}{6}. \quad (5.10)$$

Démonstration. La preuve de ce résultat est exactement la même que pour le Lemme 4.2.1, on doit seulement changer α par α' mais, puisqu'ils ont le même développement asymptotique, ça ne change strictement rien au reste de la preuve ou au résultat.

Remarque : Comme c'était le cas pour le dernier théorème, la preuve de ce lemme ne se base pas sur la forme explicite que prend la normalisation, elle prend donc déjà en compte le facteur supplémentaire qui apparait lorsqu'on normalise les fonctions propres pour des conditions frontières de Neumann.

□

Il ne reste plus qu'à trouver un équivalent du Lemme 4.2.2 pour Neumann et on aura terminé le cas $\gamma < 1$. Contrairement aux résultats précédents, où le passage du cas de Dirichlet au cas de Neumann ne changeait rien, on trouve un résultat différent :

Lemme 5.2.2. Si $\gamma < 1$,

$$\phi'(\gamma) \geq \frac{2-\gamma}{12}. \quad (5.11)$$

Démonstration. Comme on l'a mentionné précédemment, la croissance des fonctions propres normalisées pour le cas de Neumann est déterminée exclusivement par le facteur :

$$\sqrt{1 - \frac{n^2}{k_{n,m}'^2} \frac{J_n(k_{n,m}' r)}{J_n(k_{n,m}')}}.$$

On a déjà montré que $\sqrt{\frac{1}{1 - \frac{n^2}{k_{n,m}'^2}}} = \frac{n^{\frac{1-\gamma}{3}}}{\sqrt{2c}} + o(n^{\frac{1-\gamma}{3}})$, il ne reste donc plus qu'à déterminer le taux de croissance de $\frac{J_n(k_{n,m}' r)}{J_n(k_{n,m}')}$.

Pour ce faire, on procède exactement comme dans la preuve du Lemme 4.2.2. On commence par utiliser la Proposition 4.2.2 pour évaluer

$$J_n(k'_{n,m}) = J_n(\alpha'n) = J_n(n \sec \beta') \quad \text{où } \beta' = \arccos \frac{1}{\alpha'}.$$

Dans ce cas, $\tan \beta' = \sqrt{\alpha'^2 - 1}$ et, avec la définition de α' donnée en (5.6), on trouve que :

$$\tan \beta' = \sqrt{\left(1 + C \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{2}{3}} + o\left(\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{2}{3}}\right)\right)^2 - 1} = \sqrt{2C} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{3}} + o\left(\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{3}}\right).$$

Avec la Proposition 4.2.2, on trouve :

$$\begin{aligned} J_n(k'_{n,m}) &= \frac{\cos(n(\tan \beta' - \beta') - \frac{\pi}{4})}{\sqrt{n \frac{\pi}{2} \tan \beta'}} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{\cos(n(\tan \beta' - \beta') - \frac{\pi}{4})}{\sqrt{n \frac{\pi}{2} \sqrt{2C} \left(\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{3}} + o\left(\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{3}}\right)\right)}} + o\left(\frac{1}{n}\right), \end{aligned}$$

ce qui nous donne l'équivalent de la Proposition 4.2.3 pour Neumann :

Proposition 5.2.1.

$$J_n(k'_{n,m}) = \frac{\cos(n(\tan \beta' - \beta') - \frac{\pi}{4})}{n^{\frac{1}{3}} m^{\frac{1}{6}} \sqrt{\frac{\pi}{2} \sqrt{2C_1} (1 + o(1))}} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

On peut alors reprendre la preuve du Lemme 4.2.2 à partir de ce point sans changer le résultat et on trouve que :

$$\sup_D \left| \frac{J_n(k'_{n,m} r)}{J_n(k'_{n,m})} \right| \geq C \lambda^{\frac{1}{12}} + o\left(\lambda^{\frac{1}{12}}\right). \quad (5.12)$$

Finalement, en combinant toutes les parties de la preuve ensemble, on obtient que, si $\gamma < 1$:

$$\|F_{n,m}^N\|_\infty = \left| \sup_D F_{n,m}^N(r, \theta) \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_D \left| \sqrt{\frac{2}{\pi(A^2 + B^2)(1 - \frac{n^2}{k'_{n,m}})}} \frac{J_n(k'_{n,m}r)}{J_n(k'_{n,m})} (A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta)) \right| \\
&\geq \left(\frac{n^{\frac{1-\gamma}{3}}}{\sqrt{2c}} + o\left(n^{\frac{1-\gamma}{3}}\right) \right) \left(C\lambda^{\frac{1}{12}} + o\left(\lambda^{\frac{1}{12}}\right) \right).
\end{aligned}$$

Il suffit d'utiliser l'équation (5.6) pour avoir, puisque $\gamma < 1$, que :

$$n = k'_{n,m} + o(k'_{n,m}) = \lambda^{\frac{1}{2}} + o\left(\lambda^{\frac{1}{2}}\right),$$

ce qui nous donne le résultat voulu :

$$\|F_{n,m}^N\|_\infty \geq C\lambda^{\frac{2-\gamma}{12}} + o\left(\lambda^{\frac{2-\gamma}{12}}\right).$$

□

Il est intéressant de remarquer que cette nouvelle borne inférieure rend complètement désuète celle trouvée dans le Lemme 5.2.1.

5.3 Cas $\gamma > 1$

Dans cette section, nous allons donner l'équivalent du Lemme 4.4.1 pour le cas de Neumann. Toutefois, avant de s'attaquer à ce problème, il convient d'expliquer pourquoi la preuve du Théorème 4.3.1 ne peut pas se généraliser directement au cas de Neumann.

En effet, au début de la preuve, on combine la Proposition 2.3.1 et l'équation (3.6) pour estimer la valeur de $\frac{1}{J_n(k_{n,m})}$. Malheureusement, si on combinait l'équivalent de l'équation (3.6) pour le cas de Neumann avec la Proposition 2.3.1, on perdrait le terme principal de la forme asymptotique de la proposition et il ne nous resterait qu'un terme d'erreur peu utile. Puisque ce passage est essentiel à la preuve, on ne peut pas généraliser celle-ci directement pour le cas de Neumann.

On peut par contre assez facilement adapter la preuve du Lemme 4.4.1 au cas de Neumann pour obtenir :

Lemme 5.3.1. Si $\gamma \geq 1$,

$$\phi'(\gamma) \geq \frac{1}{12}. \quad (5.13)$$

Démonstration. On peut utiliser la formule de Krasikov pour évaluer $\frac{1}{J_n(k'_{n,m})}$ et, par le même raisonnement que dans le cas de Dirichlet, on trouve :

$$|J_n(k'_{n,m})| = Ck'_{n,m} \frac{-1}{2} + o\left(k'_{n,m} \frac{-1}{2}\right).$$

Si on combine ce résultat avec celui de la preuve du Théorème 4.3.1 qui impose que $\sup_{r \in [0,1]} |J_n(k_{n,m}r)|$ se comporte comme $n^{-1/3}$ et en se rappelant le fait que le facteur $\sqrt{\frac{1}{1 - \frac{n^2}{k'_{n,m}{}^2}}}$ n'influence pas le taux de croissance des fonctions propres lorsque $\gamma > 1$, on trouve :

$$\begin{aligned} \|F_{n,m}^N\|_\infty &= \sup_D |F_{n,m}^N(r, \theta)| \\ &\geq Ck'_{n,m} \frac{1}{2} n \frac{-1}{3} + o\left(k'_{n,m} \frac{1}{2} n \frac{-1}{3}\right). \end{aligned}$$

Lorsque $\gamma > 1$, $k'_{n,m} > n \Rightarrow n \frac{-1}{3} > k'_{n,m} \frac{-1}{3}$ et on trouve :

$$\|F_{n,m}^N\|_\infty \geq Ck'_{n,m} \frac{1}{6} + o\left(k'_{n,m} \frac{1}{6}\right) = C\lambda^{\frac{1}{12}} + o\left(\lambda^{\frac{1}{12}}\right).$$

□

En résumé, lorsqu'on passe du cas de Dirichlet au cas de Neumann, les Lemmes 4.2.1, 4.4.1 et le Théorème 3.1.1 restent inchangés, on doit modifier le Lemme 4.2.2 et le Théorème 4.3.1 ne se généralise pas directement. Évidemment, en vertu de ces changements, le Théorème 4.1.1 doit aussi être modifié pour donner :

Théorème 5.3.1.

$$E'(D) \subset [1/12, 1/4]$$

où $E'(D)$ est l'équivalent de l'ensemble $E(D)$ pour les fonctions propres associées aux conditions frontières de Neumann.

Chapitre 6

Calculs numériques

Dans ce chapitre nous présenterons certains résultats obtenus numériquement qui supportent et complètent les résultats obtenus précédemment. Premièrement, voici une table comparative pour la dépendance entre la croissance de la norme L^∞ et λ pour les résultats numériques et analytiques en fonction de γ :

γ	numérique	analytique
0	6,08	6
0,5	9,96	12
0,66	11,5	18
0,75	13,03	16
0,85	13,42	14,12
1	11,95	12
1,5	7,21	7,2
1,75	6,45	6,46
2	5,99	6
4	4,78	4,8
6	4,48	4,5

Ici, les colonnes numérique et analytique représentent les valeurs théoriques et numériques pour $\phi(\gamma)$. Pour les résultats analytiques, on a utilisé la formule du théorème 4.3.1 pour $\gamma \geq 1$ et la valeur la plus élevée entre celles données par les lemmes 4.2.1 et 4.2.2 pour $\gamma < 1$.

Pour obtenir les valeurs numériques, on prend plusieurs points de la suite de valeurs propres $\{\lambda_{n,m}\}$ tels que $m = n^\gamma$ pour les différentes valeurs de γ et on utilise le programme donné en annexe pour obtenir la valeur de la norme L^∞ des fonctions propres correspondantes. On utilise ensuite ces valeurs pour déterminer le taux de croissance de la norme L^∞ par rapport à λ .

On remarque que la concordance est excellente pour $\gamma > 1$ y compris dans l'intervalle $[1, 3]$ pour lequel on n'a pas de preuve analytique de la validité du théorème 4.3.1. Pour $\gamma < 1$, la concordance est moins bonne, mais c'est compréhensible étant donné qu'on ne dispose que d'une borne inférieure pour la croissance de la norme L^∞ sous ces conditions et non d'une formule exacte.

Remarque : les résultats numériques sont présentés pour appuyer les résultats obtenus précédemment mais ne sont pas particulièrement précis. En effet, pour des valeurs de $\gamma > 5$ la précision intrinsèque du logiciel de calcul empêche d'obtenir des résultats très précis alors que pour des valeurs de $\gamma < 1$, le temps de calcul croît exponentiellement, ce qui empêche d'obtenir suffisamment de points pour avoir une bonne estimation.

Chapitre 7

Conclusion

7.1 Sommaire

Voici un bref résumé des résultats importants obtenus dans ce mémoire :

- Thm 3.1.1 : si $\gamma < 1$, alors pour tout point donné $(r, \theta) \in D$:

$$\|F_{n,m}(r, \theta)\| \rightarrow 0 \quad \text{si } \lambda \rightarrow \infty$$

- Thm 3.2.1 : si $\gamma > 5/2$, alors :

$$|F_{n,m}(r, \theta)| = \left| \sqrt{\frac{2}{\pi(A^2 + B^2)}} \frac{\cos(k_{n,m}r - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4})}{\sqrt{r}} (A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta)) \right| + O\left(\frac{n^2}{k_{n,m}r}\right)$$

- Lemme 4.2.1 : Si $\gamma < 1$:

$$\phi(\gamma) \geq \frac{1 - \gamma}{6}$$

- Lemme 4.2.2 : Si $\gamma < 1$:

$$\phi(\gamma) \geq \frac{\gamma}{12}$$

- Thm 4.3.1 : Si $\gamma > 3$:

$$\phi(\gamma) = \frac{1}{4} - \frac{1}{6\gamma}$$

- Lemme 4.4.1 : Si $\gamma > 1$:

$$\phi(\gamma) \geq \frac{1}{12}$$

- Thm 4.1.1 :

$$[7/36, 1/4] \subset E(D) \subset [1/18, 1/4]$$

En combinant les lemmes 4.2.2, 4.2.1 et 4.4.1, on trouve une borne inférieure à la croissance de la norme L^∞ des fonctions propres :

$$\|F_\lambda(r, \theta)\|_\infty \gg \lambda^{\frac{1}{18}}.$$

7.2 Dirichlet et Neumann

Comme on l'a mentionné au début du mémoire, la grande majorité des preuves ont été faites pour des conditions frontières de Dirichlet. Par contre, on a consacré le chapitre 5 en entier à les adapter au cas de Neumann. On obtient notamment que les lemmes 4.2.1 et 4.4.1 s'appliquent aussi bien dans un cas que dans l'autre, que le lemme 4.2.1 doit être modifié pour avoir : $\|F_{n,m}(r, \theta)\|_\infty \geq C\lambda^{\frac{1}{6} - \frac{\gamma}{12}} + o(\lambda^{\frac{1}{6} - \frac{\gamma}{12}})$ et que la preuve du théorème 4.3.1 ne s'étend pas de manière directe d'un cas à l'autre. Enfin, puisqu'on doit modifier le lemme 4.2.1 et que le théorème 4.3.1 ne s'applique plus, la borne inférieure uniforme pour la croissance de la norme L^∞ des fonctions propres passe de $1/18$ à $1/12$ et le théorème 4.1.1 doit être modifié pour donner : $E(D) \subset [1/12, 1/4]$.

Enfin, il y a un résultat essentiel à la preuve des résultats pour le cas de Dirichlet qu'on ne peut pas utiliser dans le cas de conditions aux limites de Neumann : la conjecture de Bourget. Celle-ci, prouvée par Siegel, garantit que les zéros des fonctions de Bessel du premier type d'ordre entier sont tous distincts et donc que la multiplicité des valeur propres pour le cas de Dirichlet est d'au plus deux. On ne peut donc pas prendre de combinaisons linéaires des fonctions propres associées à une valeur propre de manière à obtenir un taux de croissance différent de celui obtenu dans les divers théorèmes du mémoire. Par contre, la conjecture de Bourget n'ayant pas d'équivalent pour les zéros de la dérivée des fonctions de Bessel,

on ne peut pas garantir que la multiplicité des valeurs propres dans le cas de Neumann soit bornée. Il serait donc possible, si la multiplicité des valeurs propres n'était pas bornée dans le cas de Neumann, de trouver une suite de combinaisons linéaires pour des fonctions propres associées à une suite de valeurs propres qui aurait des taux de croissance de leur norme L^∞ différent de ceux obtenus dans le mémoire.

7.3 Discussion

Maintenant que tous les résultats ont été énoncés et démontrés, on est à même d'analyser leur signification et leurs conséquences. Un des points frappant du mémoire est l'obtention d'une borne inférieure non-nulle pour l'ensemble $E(D)$.

Le fait qu'il existe une borne inférieure non-nulle pour $E(D)$ implique que, peu importe la manière dont on fera croître λ , on assistera inévitablement à une concentration des fonctions propres autour de certaines courbes ou points du domaine. Si on fait la comparaison avec la fonction d'onde d'une particule quantique, la remarque précédente est équivalente à dire que, si on augmente l'énergie de la particule, peu importe les conditions, la fonction d'onde de la particule aura tendance à se localiser autour de certaines courbes.

On peut d'ailleurs avoir une bonne idée des courbes autour desquelles les fonctions propres se concentrent en étudiant un peu plus attentivement les preuves des différents lemmes et théorèmes. En effet, si on examine la preuve du théorème 4.3.1, on remarque que la croissance maximale est atteinte lorsqu'on évalue $J_n(k_{n,1})$, donc en $r = k_{n,1}/k_{n,m}$. Comme le résultat est valide lorsque $\gamma > 3$, m croîtra beaucoup plus rapidement que n . De plus, on a montré que $k_{n,1}$ croît linéairement en n et que $k_{n,m}$ croît linéairement en m si $\gamma > 3$. La croissance maximale lorsque $\gamma > 3$ est donc réalisée en $r \rightarrow 0$ et donc proche du centre (mais pas au centre, car $J_n(0) = 0$ si $n > 0$). Ce résultat n'est pas particulièrement surprenant puisqu'on a démontré qu'en prenant $n = 0$, on obtenait la croissance maximale au centre et que le cas $n = 0$ correspond à $\gamma = \infty$.

Ce qui est plus surprenant est le cas $\gamma < 1$. On a montré, avec le Théorème

3.1.1, que pour tout point donné du domaine, les fonctions propres ont éventuellement une décroissance exponentielle en λ . Ainsi les fonctions propres doivent se concentrer de plus en plus près du bord de D . On a même calculé la largeur de la bande sur laquelle les fonctions propres peuvent être « grandes » dans la preuve du Lemme 4.2.1. Ainsi, si $\gamma < 1$, les fonctions propres sont pratiquement nulles partout sauf à l'extrême bordure du domaine. Ce cas est en fait une représentation mathématique d'un phénomène physique bien connu, les « galeries chuchotantes » (whispering gallery). Il s'agit d'un phénomène où, pour un lieu ou un objet à géométrie favorable (généralement des disques, des ellipses ou des sphères), une onde émise en un point précis du lieu est transmise avec une clarté inusitée vers un autre point de l'endroit [1]. La manifestation la plus connue du phénomène est évidemment en acoustique (d'où le nom de « galeries chuchotantes ») mais il y a aussi des applications très importantes en électricité et en mécanique quantique [2].

Bibliographie

- [1] *Whispering Gallery*, http://en.wikipedia.org/wiki/Whispering_gallery.
- [2] *Whispering gallery resonators*, <http://metrology.hut./courses/s108-j/Nano2.pdf>.
- [3] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of mathematical physics*, vol. 1, Interscience publishers, inc., New York, 1953.
- [4] S. Finch, *Bessel Function Zeroes*, <http://algo.inria.fr/csolve/bs.pdf>, October 2003.
- [5] D. Grieser, *Uniform Bounds for Eigenfunctions of the Laplacian on Manifolds with Boundary*, Communications in Partial Differential Equations, **27** (2002), no. 7-8, 1283–1299.
- [6] I. Krasikov, *Uniform Bounds for Bessel Functions*, Journal of Applied Analysis, **12** (2006), no. 1, 83–91.
- [7] L. J. Landau, *Bessel functions : monotonicity and bounds*, Journal of the London Mathematical Society, **61** (2000), no. 1, 197–215.
- [8] P. Ribeau-Gesippe, *Le chaos quantique mieux compris*, Pour la Science, **374** (2008).
- [9] Z. Rudnick, http://www.aimath.org/news/que/rudnick_summary.html, 1991.

- [10] P. Sarnak, http://www.math.princeton.edu/sarnak/Sarnak_Letter_to_Morawetz.pdf, 2004, page 41.
- [11] G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge university press, inc., Cambridge, 2 ed., 1945.

Annexe A

Programme en Mathematica

Le court programme suivant est utilisé pour calculer numériquement la valeur du maximum sur D des fonctions propres avec conditions frontières de Dirichlet. En fait, le programme ne calcule pas les fonctions propres elles-mêmes mais plutôt $J_n(k'_{n,1})/J_{n+1}(k_{n,m})$. On sait toutefois que le ratio $J_n(k_{n,m})/J_{n+1}(k_{n,m})$ est la seule composante importante des fonctions propres lorsqu'on évalue le taux de croissance de leur maximum. De plus, dans la preuve du théorème 4.3.1, on montre que $J_n(n)$ a le même taux de croissance que le maximum sur D de $J_n(x)$. Enfin, $k'_{n,1} > n$ est le premier maximum local de $J_n(x)$ (car c'est un zéro de sa dérivée) et le plus proche de n , ce qui justifie le choix d'évaluer $J_n(x)$ en $k'_{n,1}$ au lieu de trouver son maximum.

```
n = ;  
m = ;  
k = BesselJZeros[n, {m, m}]  
x = BesselJPrimeZeros[n, {1, 1}]  
k BesselJ[n, x]/(n BesselJ[n, k] - k BesselJ[n + 1, k])
```

Remarque : $J'_n(x) = \frac{n}{x}J_n(x) + J_{n+1}(x)$ et $J_n(k_{n,m}) = 0$.