

Université de Montréal

Construction de méthodes de volumes finis
tridimensionnelles sans solveur de Riemann pour
les systèmes hyperboliques non-linéaires

par

Amik St-Cyr

Département de mathématiques et de statistique

Faculté des arts et des sciences

Thèse présentée à la Faculté des études supérieures

en vue de l'obtention du grade de

Philosophiæ Doctor (Ph.D.)

en Mathématiques

Orientation mathématiques appliquées

février 2002

© Amik St-Cyr, 2002



QA

3

U54

2002

v. 014

7

7

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Cette thèse intitulée

**Construction de méthodes de volumes finis
tridimensionnelles sans solveur de Riemann pour
les systèmes hyperboliques non-linéaires**

présentée par

Amik St-Cyr

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes :

Michel Delfour

(président-rapporteur)

Paul Arminjon

(directeur de recherche)

Anne Bourlioux

(membres du jury)

Bram van Leer

(examineur externe)

Thèse acceptée le:

15 mai 2002

19 juin 2002

RÉSUMÉ

Dans cette thèse nous abordons la conception de nouveaux schémas de type volumes finis pour la résolution de systèmes hyperboliques non-linéaires pour la prédiction des écoulements compressibles instationnaires. Les nouveaux schémas présentés s'appuient tous sur les schémas proposés par Arminjon-Viallon et Arminjon-Stanescu-Viallon en 2 dimensions spatiales qui, eux, furent dérivés du schéma de Nessyahu-Tadmor en une dimension d'espace construit à partir du schéma décalé bien connu de Lax-Friedrichs. Ces schémas peuvent être considérés comme étant tous du type de Godunov et ont pour caractéristique principale d'éviter la résolution des problèmes de Riemann aux interfaces en utilisant 2 maillages différents pour, respectivement, les pas de temps pairs et impairs. Pour éviter la trop grande diffusion amenée par le schéma de Lax-Friedrichs, on a eu recours à l'utilisation d'une technique nommée MUSCL, originalement proposée par van Leer, consistant à reconstruire la solution constante par cellule en une solution linéaire par cellule tout en limitant les oscillations grâce à l'utilisation de fonctions non-linéaires. On obtient tout d'abord une extension en 3 dimensions spatiales sur des maillages cartésiens structurés. Ensuite, nous abordons le cas de maillages non-structurés composés de tétraèdres, et la formulation mathématique du schéma associé à ces cellules. Pour réduire les temps de calcul, un nouveau,

schéma de type centré fondé sur celui de Nessyahu-Tadmor mais évitant l'utilisation d'un pas intermédiaire, et composé d'un nouveau flux est proposé en une et 2 dimensions spatiales pour des maillages structurés, puis en 3 dimensions sur des maillages non structurés composés de tétraèdres. Les résultats obtenus démontrent que les nouvelles méthodes sont moins sensibles aux maillages déformés et qu'elles sont plus simples à mettre en œuvre du fait que le problème de Riemann est évité et qu'aucune information sur la décomposition de la discontinuité en les différents champs caractéristiques du système n'est nécessaire.

MOTS CLÉS :

Lax-Friedrichs, schémas centrés, Euler, instationnaire, méthodes multiples, ordre élevé, MUSCL, limiteurs, schémas monotones, TVD

SUMMARY

In this thesis we construct new finite volume methods for the solution of non-linear hyperbolic systems describing instationary compressible flows. The new methods proposed here are based on the same ideas that gave rise to the 2-dimensional finite volume methods of Arminjon-Viallon and Arminjon-Stanescu-Viallon. The latter were based on the one-dimensional finite difference method proposed by Nessyahu-Tadmor derived itself from the staggered Lax-Friedrichs scheme. These methods can be viewed as Godunov-type methods and have the advantage to bypass the resolution of Riemann problems at cell interfaces by using two staggered meshes respectively at even and odd time steps. To compensate for the well known high diffusion of the Lax-Friedrichs scheme, van Leer's MUSCL technique is applied to the base method: it consists in replacing the Godunov piecewise constant cell functions with piecewise linear functions constrained with the help of nonlinear limiting functions that inhibit the apparition of oscillations. A 3 dimensional extension for structured Cartesian grids is first derived. Then, the method is presented for unstructured tetrahedral grids with the mathematical formulation of the method associated with the diamond dual cell. The computation times are then reduced by introducing a new formulation for the flux term. Numerical tests are performed in 1 and 2 spatial dimensions for Cartesian grids,

and on unstructured tetrahedral grids in 3 dimensions. The results obtained demonstrate that all these new unstructured methods are less sensitive to meshes with a high aspect ratio. They are also simpler to code than usual finite volume methods because the Riemann problem is avoided and hence no information on the characteristics of the hyperbolic system is required.

KEY WORDS :

Lax-Friedrichs, centered scheme, Euler, instationary, linear multistep methods, high resolution, MUSCL, limiters, monotone schemes, TVD

À Kim, Olivier et Sophie

REMERCIEMENTS

Je voudrais tout d'abord remercier mon directeur de recherche le professeur Paul Arminjon pour m'avoir donné ma chance et un sujet de recherche aussi intéressant. Aussi, ma femme pour son soutien moral et, disons le, financier tout au long de mes études. Je remercie aussi Miguel Chagnon et Daniel Ouimet qui m'ont donné l'occasion d'approfondir mon expérience en informatique (Hé oui déjà en recyclage...). Merci à Noa Mathieu Cantin pour m'avoir initié au monde de Linux. Un merci très special à Alexandre Lacombe, mon vieux copain, pour son soutien moral et pour m'avoir aidé à boire toutes ces bières... Merci à Aziz Madrane pour son encadrement et son humour toujours très subtil. Merci aussi à Bell Canada pour m'avoir donné l'occasion d'utiliser le LUB¹ pour y conduire mes expériences de calcul. Enfin, j'aimerais remercier tout particulièrement la Société du Chocolat Cémoi pour mon apport quotidien en caféine...

1. Laboratoire Universitaire Bell

Table des matières

Résumé	iii
Mots clés :.....	iv
Summary	v
Key words :.....	vi
Remerciements	viii
Table des figures	xvii
Liste des tableaux	xx
Introduction	1
Contributions.....	7
Article (1) (chapitre 3): New 2 and 3-dimensional non-oscillatory central finite volume methods for staggered Cartesian grids	8
Article (3) (chapitre 5): Numerical simulation of 3-D flows with a non-oscillatory central scheme on staggered unstructured tetrahedral grids.....	8

Article (2) (chapitre 6): New space staggered and time interleaved 2^{nd} order finite volume methods.....	9
Chapitre 1. Modèle mathématique.....	10
1.1. Introduction.....	10
1.2. Équations d'Euler.....	12
1.2.1. Propriétés des équations d'Euler.....	16
1.3. Existence d'une solution.....	19
1.4. Formulation mathématique du concept d'entropie.....	21
1.5. Problème de Riemann.....	24
1.5.1. Systèmes unidimensionnels.....	32
1.5.1.1. Cas linéaire.....	32
1.5.2. Cas non-linéaire unidimensionnel.....	35
1.5.3. Cas multidimensionnel.....	38
Chapitre 2. Volumes finis.....	39
2.1. Introduction.....	39
2.1.1. Schéma de Godunov.....	40
2.1.2. Stabilité.....	41
2.1.3. Schémas conservatifs.....	44
2.1.4. Schémas monotones.....	45

2.1.5.	Schéma TVD	47
2.1.6.	Limiteurs	52
2.1.7.	Technique MUSCL	53
Chapitre 3.	New 2 and 3-dimensional non-oscillatory central finite volume methods on staggered Cartesian grids	56
3.1.	Auteurs	56
3.2.	Résumé	56
3.3.	Abstract	57
3.4.	Introduction	58
3.5.	3-dimensional finite volume extensions of the Lax-Friedrichs and Nessyahu-Tadmor schemes	64
3.5.1.	Generic model equation	65
3.5.1.1.	Notations	66
3.5.2.	First time step, LF-type scheme	66
3.5.3.	Second time step, LF-type scheme	68
3.5.4.	Fluxes	68
3.5.5.	Monotonicity condition	70
3.5.6.	A second order finite volume method via MUSCL cellwise interpolation	73
3.5.7.	Limiters	76

3.6.	2-d Cartesian grid scheme with oblique dual cells ASCV.....	80
3.6.1.	Notations.....	81
3.6.2.	First time step.....	82
3.6.3.	Second time step.....	87
3.7.	Numerical experiments.....	88
3.7.1.	3-dimensional ASV formulation (non oblique dual cells).....	88
3.7.1.1.	Linear advection.....	88
3.7.1.2.	3-Dimensional Euler equations.....	90
3.7.2.	New 2D ASCV formulation (Oblique dual cells).....	93
3.8.	Concluding remarks.....	95
3.9.	Acknowledgments.....	97
3.10.	Appendix.....	97
	Bibliographie.....	99
	Chapitre 4. Volumes finis en maillages non-structurés.....	104
4.1.	Introduction.....	104
4.2.	Maillages admissibles.....	104
4.3.	Formulation classique.....	105
4.4.	Technique MUSCL (Méthode de van Leer).....	107

4.4.1. Reconstruction des gradients	108
4.4.1.1. Green-Gauss	108
4.4.1.2. Moindres carrés	109
4.4.2. Limitation	110
4.4.2.1. Limiteur de Venkatakrisnan	113
Chapitre 5. Non-oscillatory Lax-Friedrichs type central finite volume methods for 3-D flows on unstructured tetrahedral grids	114
5.1. Auteurs	114
5.2. Résumé	114
5.3. Abstract	115
5.4. Introduction	116
5.5. Mathematical modelling	117
5.5.1. Governing equations	117
5.6. Discretization with respect to space and time	118
5.6.1. Definitions, description of the first-order method	118
5.6.2. High-order accurate approximations	122
5.6.2.1. Approximation of the slopes and limitation	126
5.6.2.2. Stability	126

5.7. Numerical experiments.....	127
5.7.1. Linear advection problem	127
5.7.2. Shock tube problem	127
5.8. Conclusion	129
Bibliographie	130
Chapitre 6. New space staggered and time interleaved 2^{nd} order finite volume methods.....	133
6.1. Auteurs.....	133
6.2. Résumé.....	133
6.3. abstract	134
6.4. Introduction	135
6.5. The one-dimensional NT-type scheme without predictor step	140
6.5.1. The Lax-Friedrichs and Nessyahu-Tadmor difference schemes ...	140
6.5.2. One-dimensional NT-type scheme without predictor step	142
6.6. 2D and 3D NT-type finite volume methods without predictor	145
6.6.0.1. Remark.....	147
6.7. Stability	147
6.8. Performance	150

6.9. Numerical results	151
6.9.1. Remark	152
6.9.2. Cartesian 1D	152
6.9.2.1. Scalar non-linear equation	152
6.9.2.2. Systems	153
6.9.3. Cartesian 2D	154
6.9.3.1. Systems	154
6.9.4. Unstructured 3D	155
6.9.4.1. Shock tube	155
6.9.4.2. Channel with a 4% circular arc bump with $M_\infty = 1.65$	156
6.10. Conclusion	164
6.10.0.3. Acknowledgements	165
Bibliographie	166
Conclusion	171
Annexe A. Autorisations diverses	174
A.1. Article 1	174
A.2. Article 2	176
A.3. Article 3	178
A.4. Articles 1 et 2 approbation d'Aziz Madrane	178

Bibliographie 183

Table des figures

1.1	Solution non-entropique du problème de Riemann	29
1.2	Solution incomplète du problème de Riemann	30
1.3	Solution entropique (détente) du problème de Riemann	31
2.1	$CFL \leq 1/2$	42
2.2	$CFL \leq 1$	42
2.3	Région TVD	51
2.4	Région d'ordre 2	51
2.5	Région TVD d'ordre 2	52
2.6	Reconstruction de la solution	53
3.1	2D dual cells. Left: original form(non-oblique) right: oblique case	61
3.2	Intersection of Cell L_{ijk} and Cell $C_{l=i,m=j,n=k}$ (dotted region)	69
3.3	Cell C_i and Cell L_{ij}	82
3.4	L^1 error Original van Albada limiter with $K \in [0.25,2.25]$	92
3.5	Density $t=3.05$, 61 contours, Grid $240 \times 10 \times 80$, simplified van Albada (left) and OVAT with $K=3$ (right)	93

5.1	Barycentric cell C_i and diamond cell L_{ij}	119
5.2	Sod's shock tube problem with 909 and 3609 gridpoints	128
6.1	2D dual cells for: left: original(non-oblique) right: oblique case	138
6.2	Barycentric cell C_i and diamond cell L_{ij}	147
6.3	Continuous problem 1D at $t = 2.0$, $N=400$	153
6.4	discontinuous 1D at $t = 0.4$, $N=400$	154
6.5	Sod's shock tube 1D $N=200$ at $t = 0.16$	155
6.6	Sod's shock tube 1D $N=400$ at $t = 0.16$	156
6.7	Sod's shock tube 2D $N=200$ at $t = 0.16$	157
6.8	Sod's shock tube 2D $N=400$ at $t = 0.16$	158
6.9	Sod's shock tube 3D $N=200$ at $t = 0.16$	159
6.10	Sod's shock tube 3D $N=400$ at $t = 0.16$	159
6.11	First mesh with characteristic length $1/10$ (18079 Tetrahedra)	160
6.12	Second mesh with characteristic length $1/20$ (64099 Tetrahedra)	160
6.13	Final mesh with characteristic length $1/30$ (138561 Tetrahedra)	161
6.14	Isomach (18079 Tetrahedra)	161
6.15	Isomach (64099 Tetrahedra)	162
6.16	Isomach (138561 Tetrahedra)	162
6.17	Isomach interleaved (138561 Tetrahedra)	162
6.18	Convergence history (residuals)	163

6.19	Convergence history (Normalized residuals)	164
A.1	numérisation de la lettre de l'éditeur	175
A.2	numérisation de la lettre de l'éditeur	177

Liste des tableaux

3.1	L^1 - error and accuracy order, discontinuous problem (test 1) 3D case	91
3.2	L^1 - error and accuracy order, continuous problem (test 2), 3D case ..	92
3.3	continuous problem (test 2) original van Albada limiter, 3D case	92
3.4	test 1 new 2D scheme ASCV (<i>left</i>) old scheme ASV (<i>right</i>).....	94
3.5	test 2, new 2D scheme ASCV	95
3.6	test 2, 2D NT	95
5.1	L^1 - error and accuracy order, continuous problem	127
5.2	L^2 - error and accuracy order, Sod's problem	128
6.1	Comparison of the two schemes for a fixed residual.....	151

INTRODUCTION

Dans les années 1950, S. K. Godunov a construit une méthode [24] de type “volumes finis” pour résoudre les équations hyperboliques de conservation du type

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

Il procédait en subdivisant la région d'intérêt en x en sous-intervalles, ou cellules, $(x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$ sur lesquelles il approximait la solution $u(x,t)$ par des valeurs constantes par cellule $\{u_i^n\}$ à chaque instant $t^0 = 0, t^1 = \Delta t, \dots, t^n = n\Delta t$. Cette méthode était d'ordre un en espace et en temps et préservait la monotonie, mais son inconvénient était la nécessité de résoudre localement, à chaque interface $x_{i+1/2}$, un problème de Riemann

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 & \text{pour } t^n \leq t \leq t^{n+1} \text{ et } -\infty < x < \infty \\ u(x, t^n) = \begin{cases} \bar{u}_i^n & x < x_{i+1/2} \\ \bar{u}_{i+1}^n & x \geq x_{i+1/2} \end{cases} \end{cases}$$

où les \bar{u}_i^n sont justement les valeurs moyennes cellulaires sur lesquelles repose la méthode. La résolution des problèmes de Riemann requiert un temps de calcul non négligeable ce qui peut devenir un inconvénient important lorsque l'on généralise la méthode aux problèmes en 2 ou 3 dimensions spatiales. Même si les résultats

obtenus par Godunov et ses collaborateurs [25] étaient de très bonne qualité pour l'époque, il laissaient désirer une amélioration en ce qui concerne les temps de calcul et l'ordre de précision. D'importants progrès furent accomplis par Boris et Book [12], van Leer [62, 63, 64, 61, 65], Roe [50], Osher et collaborateurs [45], Harten [30, 27, 28].

Les améliorations reposaient d'une part (van Leer) sur le remplacement d'une approximation constante par morceaux (proposée par Godunov) par une approximation linéaire par morceaux ou, encore, parabolique par morceaux (Woodward et Colella [67]) et d'autre part (Roe, Osher) par le remplacement de la résolution exacte du problème de Riemann par une solution approchée (solveur de Riemann). En généralisant l'approche de van Leer, Woodward et Colella, il fut possible d'obtenir des méthodes dites "ENO²" valables (théoriquement) pour des ordres de précision arbitrairement grands [30].

Dans d'autres approches par exemple Richtmyer-von Neumann [44] et Richtmyer-Morton [48], on ajoutait une certaine quantité de "viscosité artificielle" pour stabiliser la solution au voisinage de la discontinuité. Cette approche, souvent fort utile, comportait cependant l'inconvénient d'exiger un ajustement assez délicat, et spécifique du problème considéré, de la quantité de viscosité artificielle à ajouter au schéma de Lax-Wendroff sur lequel cette méthode reposait.

Les solveurs de Riemann approximatifs (ou non) comportaient tous le même inconvénient majeur. Il était possible d'observer en plusieurs dimensions spatiales

des effets dit d'orientation de grille; le problème de Riemann posé aux interfaces des cellules se résolvait dans la direction normale à ces faces. Donc, l'aspect multidimensionnel du problème était restreint à la résolution d'une multitude de problèmes unidimensionnels dans les directions normales aux faces des cellules.

Les méthodes utilisant des pas fractionnaires [58] ou des directions alternées [55] souffraient aussi, entres autres, d'effets d'orientation de grille. Également, une généralisation de ces méthodes sur des maillages non-structurés était tout à fait impensable. Le problème restait donc entier : comment préserver au maximum le caractère multidimensionnel d'un système hyperbolique lors de sa discrétisation?

Fait étrange, une nouvelle solution à ce problème nous parvint du passé : le schéma de Lax-Friedrichs (1954). Nessyahu et Tadmor en 1990 [43] ramenaient à la vie ce schéma de Lax-Friedrichs en une dimension spatiale pour finalement laisser de côté toute la grande famille des schémas de type "amont" et se concentrer sur des nouveaux schémas dit de type "centrés", permettant d'éviter la résolution des problèmes de Riemann aux interfaces grâce à l'emploi du schéma décalé de Lax-Friedrichs en utilisant deux maillages jumelés. Arminjon et Viallon virent immédiatement les implications (temps de calculs, rédition du caractère multidimensionnel...) de cette nouvelles famille de schémas et, ils proposèrent une extension très générale pour les maillages triangulaires non-structurés [8] et pour les maillages cartésiens en 2 dimensions spatiales [7]. Madrane étendit le schéma aux équations bidimensionnelles de Navier-Stokes [42].

Le temps était donc venu d'étudier cette méthode en 3 dimensions d'espace, ce qui fit l'objet de notre étude [3, 4, 5, 6].

Le plan de cette thèse est le suivant:

Chapitre 1. Introduction du modèle mathématique sur lequel nous voulons nous pencher. Un rappel des résultats de base sur les équations hyperbolique : solutions faibles, condition de Rankine et Hugoniot, solution entropique, problème de Riemann.

Chapitre 2. Notions de base nécessaires à la construction de schémas de type volumes finis d'ordre supérieur sur des maillages structurés : ordre, convergence, MUSCL, limiteurs.

Chapitre 3. Présentation d'une généralisation à 3 dimensions spatiales de la méthode aux volumes finis d'Arminjon, Stanescu et Viallon. Nous nous intéressons aussi à une extension bidimensionnelle de la méthode d'Arminjon et Viallon pour des maillages structurés pour voir si la forme des cellules duales a une influence sur la résolution de la méthode.

Chapitre 4. Notions de base nécessaires à la construction de schémas de type volumes finis d'ordre supérieur sur des maillages non-structurés: estimation des gradients, MUSCL, limiteurs.

Chapitre 5. Une formulation en 3 dimensions d'espace pour des maillages non structurés formés de tétraèdres est dérivée en s'appuyant sur les idées d'Arminjon et Viallon dans le cas de maillages de triangulations (2D).

Chapitre 6. En se fondant sur les méthodes de type Nessyahu-Tadmor de dimension 1, 2 et sur la nouvelle formulation non-structurée pour des tétraèdres, un nouveau type de schéma centré n'utilisant pas de prédicteur et réduisant significativement les coûts de calculs est présenté.

Conclusion

Les travaux qui ont mené à cette thèse ont fait l'objet des publications suivantes :

- (1) **Chapitre 3 :** P. ARMINJON, A. ST-CYR, A. MADRANE, *New 2 and 3-dimensional non-oscillatory central finite volume methods for staggered Cartesian grids*, publié Applied Numerical Mathematics, février 2002, Vol 40/3, pp 367-390.
- (2) **Chapitre 6 :** P. ARMINJON, A. ST-CYR, *New space staggered and time interleaved 2nd order finite volume methods*, soumis à Applied Numerical Mathematics.
- (3) **Chapitre 5 :** P. ARMINJON, A. MADRANE AND A. ST-CYR, (1999), *Numerical simulation of 3-D flows with a non-oscillatory central scheme on staggered unstructured tetrahedral grids*, in Proceed. 8th Int. Conf. on Hyperbolic Problems, Magdeburg (Germany) Feb. 28 - Mar. 3, 2000, H. Freistuehler and G. Warnecke, editors published by Birkhauser, International Series of Numerical Mathematics 2002 ISBN 3-7643-6711-3, vol. 140 (2001), pp.59-68.

- (4) P. ARMINJON, A. ST-CYR, (2002), *New 2nd Order Finite Volume Methods Staggered in Space and Interleaved in Time*, in Proceed. 9th Int. Conf. on Hyperbolic Problems, California (É-U) Mar. 25 - 29, 2002, T. Hou and E. Tadmor, editors.
- (5) P. ARMINJON, A. MADRANE AND A. ST-CYR (1999), *New 2 and 3-dimensional non-oscillatory central finite volume methods on staggered Cartesian grids*, in "Mathematics in Applications", Proc. of a conference to honour Academician S.K. Godunov, Novosibirsk (Russia) (August 1999), E.I. Romenskii, editor, to appear.
- (6) P. ARMINJON, A. MADRANE AND A. ST-CYR, (1999), *New Lax-Friedrichs-type finite volume schemes on 2 and 3D Cartesian staggered grids*, 7th annual conference of the CFD Society of Canada, May 30 to June 1, 1999, Halifax, J. Militzer, editor, pp.(3-3)-(3-10).
- (7) P. ARMINJON, A. MADRANE AND A. ST-CYR (2000), *Non-oscillatory Lax-Friedrichs type central finite volume methods for 3-D flows on unstructured tetrahedral grids*, 8th annual conference of the CFD Society of Canada, June 11-13, 2000, Montreal, D. Pelletier, editor, vol 1, pp. 43-48.
- (8) P. ARMINJON AND A. ST-CYR, (2001), *New Lax-Friedrichs-type finite volume schemes in 1,2 and 3D without time predictor step*, Proceedings of the 9th annual conference of the CFD Society of Canada, May 27-29, 2001, Kitchener, Ontario, G. E.Schneider editor, pp. 63-68.

- (9) P. ARMINJON, A. MADRANE AND A. ST-CYR, (1999), *New 2 and 3-dimensional non-oscillatory central finite volume methods on staggered Cartesian grids*, Res. Report CRM-2675, Centre de Recherches Mathématiques, Univ. de Montréal, mars 2000.
- (10) P. ARMINJON, A. MADRANE, A. ST-CYR, (2001), *Numerical simulation of 3D flows with a non-oscillatory central scheme on unstructured tetrahedral grids*, Res. Report CRM-2712, Centre de Recherches Mathématiques, Univ. de Montréal, janvier 2001.

CONTRIBUTIONS

Pour se conformer aux exigences de la F.É.S.³ nous nous devons d'introduire explicitement les contributions faites par l'auteur de la thèse aux articles présentés dans une thèse utilisant le format de présentation par articles [18](section p.35 D.1.2-b-3).

Les articles présentés dans cette thèse sont notés en gras dans l'énumération des travaux faite ci-dessus.

3. Faculté des Études Supérieures de l'Université de Montréal

Article (1) (chapitre 3): New 2 and 3-dimensional non-oscillatory central finite volume methods for staggered Cartesian grids

- (1) L'extension à 3 dimensions spatiales de la méthode de volumes finis de type centré, non oscillatoire, proposée en 2 dimensions spatiales par Arminjon-Viallon-Stanescu et inspirée par le schéma aux différences de Nessyahu-Tadmor, en une dimension spatiale.
- (2) L'extension de la méthode résultante à des systèmes hyperboliques non linéaires.
- (3) L'étude d'une cellule duale alternative, qui correspondait plus à la cellule duale proposée par Arminjon-Viallon dans le cadre de maillages triangulaires non structurés.
- (4) Pour les 2 méthodes décrites aux points (1) et (3) ci-dessus: la mise en œuvre de plusieurs expériences numériques sur des cas tests de référence dans la littérature de ce domaine.

Article (3) (chapitre 5): Numerical simulation of 3-D flows with a non-oscillatory central scheme on staggered unstructured tetrahedral grids

- (1) Collaboration avec A. Madrane pour la construction de l'extension à 3 dimensions, en maillage tétraédrique non structurés, de la méthode pour des

systèmes hyperboliques qui avait été présentée et étudiée par Arminjon-Viallon dans le cas de maillages bi-dimensionnels triangulaires non-structurés dans le cadre d'une équation scalaire.

- (2) Mise en œuvre pratique de la méthode sur quelques cas tests simples d'écoulements compressibles.

Article (2) (chapitre 6): New space staggered and time interleaved 2^{nd} order finite volume methods

- (1) Étude, en une dimension spatiale, d'une variante sans premier pas prédicteur du schéma de Nessyahu-Tadmor, cette variante reposant sur le principe des méthodes de type "multipas linéaires" pour les équations différentielles.
- (2) Généralisation et mise en œuvre en 2 et 3 dimensions spatiales avec calculs de cas tests pour des systèmes hyperboliques.

L'avis d'acceptation d'A. Madrane (Articles 1 et 3) est donné dans les annexes à la fin de cette thèse, puisqu'il est le seul auteur qui ne soit pas le directeur de recherche ou l'auteur de cette thèse. Nous avons jugé convenable qu'il était suffisant d'inclure son avis d'acceptation et non celui du directeur de recherche.

Chapitre 1

MODÈLE MATHÉMATIQUE

1.1. INTRODUCTION

Dans ce chapitre on présente les définitions et principes de base sur les équations hyperboliques. Cet exposé repose sur les ouvrages de références très connus dans le domaine: [22, 23, 37, 54, 32, 48]. Le système d'équations qui nous intéresse est le suivant :

$$\mathbf{U}_t + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U}) = 0, \quad \mathbf{U} = \mathbf{U}(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^d \times [0, T] \rightarrow \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n, \quad T > 0 \quad (1.1.1)$$

de façon évidente $\mathbf{U} = (u_1, u_2, \dots, u_n)^\top$ et $\mathbf{F} = (F_1, F_2, \dots, F_d)$. Les F_j sont des vecteurs de dimension n s'exprimant comme $(f_{j1}, f_{j2}, \dots, f_{jn})^\top$. Lorsque (1.1.1) est combiné à certaines conditions dites initiales, nous transformons le tout en un problème avec conditions initiales ou, plus brièvement **p.c.i.**. Par exemple, il est très courant de vouloir résoudre le problème dans un domaine fermé et borné, ce qui est une condition pratique pour la résolution de tout problème par ordinateur.

Nous pouvons formuler deux types de problèmes avec conditions initiales différentes à l'aide du système (1.1.1). Les questions de problème bien posé dans le cas d'équations aux dérivées partielles (é.d.p.) assujetties à diverses conditions

initiales, et d'existence de solutions, sont des sujets très complexes. Nous nous contenterons, ici, de mettre en place des conditions initiales qui donnent un sens physique aux problèmes. Plus loin, nous énoncerons les principales démonstration d'existence reliées à certains types de conditions aux bords et initiales.

Définition 1.1.1. (Problème mixte, initial et aux limites) Soit $\mathbf{U}(\mathbf{x},t)$ telle que définie en (1.1.1) avec $\mathbf{U} : \Omega \times [0,T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, Ω étant un ouvert de \mathbb{R}^d . Si, en $t = 0$ \mathbf{U} est définie par

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{U}(\mathbf{x},t = 0), \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (1.1.2)$$

$$\mathbf{U}|_{\partial\Omega} = \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad \forall t \in [0,T], \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (1.1.3)$$

alors (1.1.1), (1.1.2) et (1.1.3) forment un problème de conditions initiales (PCI).

Définition 1.1.2. (Problème purement initial, ou de Cauchy) Soit \mathbf{U} telle que définie en (1.1.1) et telle que $\mathbf{U} : \mathbb{R}^d \times [0,T] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Supposons qu'en $t = 0$, \mathbf{U} soit définie par $\mathbf{U}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{U}(\mathbf{x},0) \in \mathbb{R}^n$, alors en combinant à (1.1.1) cette dernière condition initiale, nous formons un problème de Cauchy.

Introduisons maintenant les matrices jacobiennes associées à (1.1.1):

Définition 1.1.3. Les matrices jacobiennes de (1.1.1) sont: $A_j = \frac{\partial F_j(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}}$.

Nous désignerons par \mathbf{A} le vecteur composé des matrices (A_1, A_2, \dots, A_d) . Pour un vecteur quelconque $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^d$ le produit scalaire $\mathbf{A} \cdot \mathbf{w} = \sum_{i=1}^d A_i \cdot w_i$ sera appelé **matrice caractéristique** et sera notée comme $\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{U}, \mathbf{w})$.

Le système (1.1.1) possède des propriétés radicalement différentes selon les diverses valeurs propres possibles que peut prendre la matrice $\tilde{\mathbf{A}}$. Nous n'étudierons pas (1.1.1) pour toute matrice $\tilde{\mathbf{A}}$ mais seulement lorsque la matrice caractéristique rend le système hyperbolique au sens suivant :

Définition 1.1.4. *Le système (1.1.1) est dit **hyperbolique** si $\forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}^d$ on a que $\tilde{\mathbf{A}}$ possède n valeurs propres réelles et n vecteurs propres linéairement indépendants. Si ces valeurs propres sont toutes distinctes alors (1.1.1) est dit **strictement hyperbolique**.*

Nous avons maintenant assez de définitions sur les systèmes hyperboliques pour nous concentrer sur un exemple typique et concret.

1.2. ÉQUATIONS D'EULER

Provenant de la mécanique des fluides et modélisant les écoulements compressibles à la limite non-visqueuse, les équations d'Euler pour les gaz parfaits constituent l'exemple principal de système hyperbolique que nous étudierons. Il est certain qu'il en existe beaucoup d'autres qui proviennent de différents domaines de la physique (magnétohydrodynamique, processus de réaction (combustion)). Lorsque l'on considère les équations d'Euler dans \mathbb{R}^3 , le système modèle (1.1.1) est composé de 5 équations ($(n,d) = (5,3)$). Sous la forme conservative, les équations d'Euler s'écrivent comme :

$$U_t + F(U)_x + G(U)_y + H(U)_z = 0 \quad (1.2.1)$$

avec $U = U(x,y,z,t) = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E)^\top$ et $\mathbf{F} = (F, G, H)$. Les flux s'expriment de façon explicite ainsi :

$$\mathbf{F}(U) = \left(\begin{array}{c} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ u(\rho E + p) \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ v(\rho E + p) \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ w(\rho E + p) \end{array} \right) \quad (1.2.2)$$

Les variables physiques qui forment les quantités conservées sont ρ la densité du fluide, $\mathbf{v} = (u, v, w)$ sa vitesse, p la pression et E l'énergie totale, c'est-à-dire la somme des énergies interne et cinétique. La première équation représente la conservation de la masse, la dernière la conservation de l'énergie tandis que les 3 équations du centre représentent la conservation de la quantité de mouvement. Ce système doit être complété par une équation d'état qui définit les propriétés thermodynamiques de l'écoulement en considération. Pour un écoulement non-visqueux sans échange de chaleur, l'équation qui complète le système est :

$$p = (\gamma - 1) \left(\rho E - \frac{\rho}{2} \|\mathbf{v}\|^2 \right) \quad (1.2.3)$$

Le nombre γ représente le rapport des coefficients de chaleur spécifique ($\gamma = C_p/C_v$), dans notre cas, pour un gaz parfait diatomique, $\gamma = 1.4$. Dans les chapitres suivants, lors des calculs, il sera intéressant de regarder certaines quantités physiques, autres que celles qui interviennent directement dans le système, comme la vitesse locale du son et le nombre de Mach. La vitesse du son au carré est proportionnelle au rapport de la pression et de la densité :

$$c^2 = \frac{\gamma p}{\rho}$$

Le nombre de Mach représente la vitesse de l'écoulement par rapport à celle du son (localement):

$$M = \frac{\|\mathbf{v}\|}{c}$$

On dira, de façon générale, que l'écoulement pour $M \gg 1$ est supersonique, pour $M \ll 1$ est subsonique et que pour M "autour" de 1 l'écoulement sera transsonique.

Il faut également distinguer 2 types d'écoulements: internes et externes. Respectivement, ils correspondent à 2 types de conditions aux bords du domaine physique et de calcul. Par exemple, pour un écoulement externe, on prend un domaine suffisamment grand et tel qu'aux bords du domaine, l'écoulement possède des propriétés simples. Il peut, par exemple, devenir laminaire aux bords. L'écoulement autour d'une aile d'avion est l'exemple classique d'un cas externe

d'écoulement. L'entrée de l'air dans l'espace plus restreint du moteur peut se définir comme un écoulement interne.

Selon (1.1.1), il faut imposer à (1.2.1) des conditions initiales partout sur le domaine et des conditions aux frontières (Dirichlet) du domaine physique Ω . Nous désignerons par $\partial\Omega$ la frontière du domaine physique. De façon générale, il y a 4 types de conditions frontières pour les écoulements modélisés par les équations d'Euler. Il y a des conditions d'entrée Γ_E , de sortie Γ_S , de glissement le long des parois Γ_B et finalement une condition frontière Γ_∞ dite "à l'infini" qui pourrait être vue comme une condition d'entrée pour des écoulements supersoniques. Évidemment, la frontière du domaine Ω se décompose comme $\partial\Omega = \Gamma_B \cup \Gamma_E \cup \Gamma_S \cup \Gamma_\infty$.

La condition de glissement est la plus simple à imposer, elle stipule que le fluide le long des parois ne colle pas mais glisse (équations d'Euler). Soit \mathbf{n} un vecteur normal à la parois sur la région Γ_B alors la conditions $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ est imposée.

Remarque 1.2.1. *(1.2.1) est la forme locale des équations d'Euler. Il est possible de ré-écrire ces équations pour un volume de contrôle Ω_k , cette nouvelle formulation sous forme intégrale, nous permettra d'imposer de façon faible la condition de glissement, et ce, directement dans la discrétisation en volumes finis.*

Pour étudier les autres conditions aux frontières restantes, une études des propriétés de (1.2.1) est nécessaire.

1.2.1. Propriétés des équations d'Euler

Définition 1.2.1. Une fonction $f = f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite homogène si $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ on a que $f(\lambda x) = \lambda f(x)$. Ceci se généralise trivialement pour \mathbb{R}^n . En effet, $F(U) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, comme dans (1.2.1), est homogène si $F(\lambda U) = \lambda F(U) \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Proposition 1.2.1. Pour les équations d'Euler (1.2.1) \mathbf{F} est homogène.

DÉMONSTRATION. Puisque l'équation d'état est donnée en (1.2.3), nous démontrons la proposition seulement pour F dans $\mathbf{F} = (F, G, H)$:

$$\begin{aligned} U &= (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E) \\ &= (\rho, m, n, l, o) \\ F &= \left(m, \frac{m^2}{\rho} + p, \frac{mn}{\rho}, \frac{ml}{\rho}, \frac{om}{\rho} + \frac{pm}{\rho} \right) \\ p &= (\gamma - 1) \left(o - \frac{1}{2} \left(\frac{m^2}{\rho} + \frac{n^2}{\rho} + \frac{l^2}{\rho} \right) \right) \end{aligned}$$

À l'aide de ces définitions $\forall \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} p(\lambda U) &= p((\lambda \rho, \lambda m, \lambda n, \lambda l, \lambda o)) \\ &= (\gamma - 1) \left(\lambda o - \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda^2 m^2}{\lambda \rho} + \frac{\lambda^2 n^2}{\lambda \rho} + \frac{\lambda^2 l^2}{\lambda \rho} \right) \right) \\ &= \lambda (\gamma - 1) \left(o - \frac{1}{2} \left(\frac{m^2}{\rho} + \frac{n^2}{\rho} + \frac{l^2}{\rho} \right) \right) \\ &= \lambda p(U) \end{aligned}$$

Maintenant, pour F , la preuve est simple :

$$\begin{aligned}
 F(\lambda U) &= \left(\lambda m, \frac{\lambda^2 m^2}{\lambda \rho} + \lambda p, \frac{\lambda^2 mn}{\lambda \rho}, \frac{\lambda^2 ml}{\lambda \rho}, \frac{\lambda^2 om}{\lambda \rho} + \frac{\lambda^2 pm}{\lambda \rho} \right) \\
 &= \lambda \left(m, \frac{m^2}{\rho} + p, \frac{mn}{\rho}, \frac{ml}{\rho}, \frac{om}{\rho} + \frac{pm}{\rho} \right) \\
 &= \lambda F(U)
 \end{aligned}$$

□

Cette propriété permet d'écrire les équations sous une forme non conservative qui sera utilisée dans les calculs numériques car le produit des matrices jacobiniennes sous forme non conservative est beaucoup moins coûteux que sous forme conservative.

Les équations d'Euler en 3 dimensions d'espace comportent 5 valeurs propres. L'obtention de ces valeurs propres, quoique élémentaire, demeure une tâche fastidieuse. Un logiciel de calcul symbolique parvient à la bonne réponse en quelques secondes. Les valeurs propres sont obtenues à partir de la matrice caractéristique pour un vecteur arbitraire $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$:

$$\lambda_1(\mathbf{n}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} - c, \quad \lambda_{2,3,4} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, \quad \lambda_5(\mathbf{n}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} + c \quad (1.2.4)$$

Donc, selon la définition (1.1.4), les équations d'Euler (1.2.1) ne sont pas strictement hyperboliques car la seconde valeur propre du système est triple (et linéairement dégénérée). Le signe des valeurs propres donne exactement le nombre de conditions au bord $\partial\Omega$ qui doivent être imposées pour que le problème soit

bien posé. Ces conditions paraîtront beaucoup plus naturelles lorsque nous aborderons le problème de Riemann. Lors du traitement des conditions aux limites numériques il y a un lien évident entre extrapolation des variables dépendantes dans le domaine de calcul et signe des valeurs propres du système.

Prenons $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ pointant vers l'intérieur du domaine Ω :

Entrée supersonique: \mathbf{n} et \mathbf{v} pointent dans la même direction donc $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \geq 0$
et $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \geq c$

$$0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 < \lambda_5 \quad (1.2.5)$$

Les caractéristiques "entrent" dans Ω , il faut donc imposer toutes les variables physiques à l'entrée.

Entrée subsonique: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} > 0$ et $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} < c$

$$\lambda_1 \leq 0 < \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 < \lambda_5 \quad (1.2.6)$$

Il faut donc imposer 4 conditions.

Sortie supersonique: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} < 0$ et $|\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}| > c$

$$\lambda_1 < \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 < \lambda_5 \leq 0 \quad (1.2.7)$$

Aucune condition à imposer.

Sortie subsonique: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} < 0$ et $|\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}| < c$

$$\lambda_1 < \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 \leq 0 \leq \lambda_5 \quad (1.2.8)$$

Une seule condition à imposer.

1.3. EXISTENCE D'UNE SOLUTION

L'existence d'une solution pour le système (1.1.1) soumis à certaines conditions initiales demeure un problème très complexe que nous n'aborderons pas. Nous nous contenterons, ici, d'énoncer les résultats fondamentaux et utiles à la construction de schémas aux volumes finis lorsque ceux-ci seront abordés. Le lecteur intéressé par ces questions pourra consulter les ouvrages de [17, 33].

Il est facile de se convaincre que même dans le cas scalaire unidimensionnel (1.1.1) peut dans un intervalle de temps fini, conduire à des solutions discontinues même pour une condition initiale de classe C^∞ [47, 37]. Donc, l'existence de solutions au sens "classique" ne s'observe que très rarement.

Pour élargir la classe des solutions admissibles, il nous faut considérer la formulation faible du problème (1.1.2). Intuitivement, nous allons définir ce qu'est une solution faible au problème (1.1.2) en la construisant à partir de morceaux de solutions classiques séparés par un ensemble fini de discontinuités. La valeur (hauteur) du saut entre ces solutions sera une quantité bien définie.

Définition 1.3.1. $L_{loc}^\infty(X, Y) = \{u : X \rightarrow Y \mid \|u\|_{L^\infty(C, Y)} < \infty \forall C(\text{compact}) \subseteq X\}$

Définition 1.3.2. Soit $\mathbf{u}_0 \in L_{loc}^\infty$. On appelle solution faible du problème (1.1.2) une fonction de classe $L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)^n$ telle que $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ p.p. et satisfaisant la relation intégrale suivante :

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \left\{ \mathbf{U} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{F} \cdot \nabla \phi \right\} d\mathbf{x} dt + \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{U}_0(\mathbf{x}) \cdot \phi(\mathbf{x}, 0) d\mathbf{x} = 0 \quad (1.3.1)$$

$$\forall \phi \in C_0^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)^n$$

Définition 1.3.3. *On suppose que \mathbf{U} est de classe C^1 partout sauf sur un nombre dénombrable de surfaces lisses orientables (π) dans l'hyperplan (\mathbf{x}, t) . Aux frontières délimitées par les surfaces π , \mathbf{U} subira un saut ou discontinuité. Les états respectivement à gauche et à droite de π se dénoteront par les limites suivantes : $\mathbf{U}_\pm(\mathbf{x}, t) = \lim_{\delta \rightarrow 0, \delta > 0} \mathbf{U}(\mathbf{x}, t) \pm \delta \mathbf{n}$. Notez que $\mathbf{n}_\pi = (n_1, n_2, \dots, n_d, n_t) = (\bar{\mathbf{n}}, n_t)$ est le vecteur normal à la surface π dans l'hyperplan (\mathbf{x}, t) .*

Théorème 1.3.1. *Soit $\mathbf{U} : \mathbb{R}^d \times [0, \infty) \rightarrow \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1 par morceaux comme dans la définition (1.3.3) alors \mathbf{U} est une solution de (1.1.2) au sens des distributions sur $\mathbb{R}^d \times (0, +\infty) \Leftrightarrow$ les 2 conditions suivantes sont satisfaites :*

- \mathbf{U} est une solution classique là où $\mathbf{U} \in C^1$
- Le long des surfaces de discontinuité π , \mathbf{U} satisfait la condition de saut :

$$(\mathbf{U}_+ - \mathbf{U}_-)n_t = -(\mathbf{F}(u_+) - \mathbf{F}(u_-)) \cdot \bar{\mathbf{n}} \quad (1.3.2)$$

La condition (1.3.2) se nomme relation de Rankine et Hugoniot.

Ce dernier théorème permet d'élargir la classe des solutions admissibles, mais il est maintenant possible de trouver plusieurs solutions faibles satisfaisant (1.1.2) (comme il est facile de le vérifier, par exemple, pour l'équation de Burgers). Il faut donc ajouter une condition ou contrainte supplémentaire pour pouvoir distinguer une "bonne" et une "mauvaise" solution. Ce langage peut sembler étrange pour le monde des mathématiques, mais il faut toujours garder à l'esprit que ces systèmes

hyperboliques proviennent dans la majorité des cas de systèmes physiques. Par exemple, les équations d'Euler proviennent des équations plus générales de Navier-Stokes. Pour simplifier, on peut considérer une version modifiée de (1.1.1), obtenue en lui ajoutant un terme de dissipation / viscosité :

$$\mathbf{U}_t^\epsilon + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U}^\epsilon) = \epsilon \Delta \mathbf{U}^\epsilon, \quad (\epsilon > 0) \quad (1.3.3)$$

avec comme problème de Cauchy modifié $\mathbf{U}^\epsilon(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{U}_0^\epsilon(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{U}_0(\mathbf{x})$. On remarque que lorsque $\epsilon \rightarrow 0^+$ on retombe sur le modèle hyperbolique. Donc, il ne faut pas se borner à chercher une solution unique sans ajouter une autre contrainte à la formulation faible énoncée en (1.3.1).

1.4. FORMULATION MATHÉMATIQUE DU CONCEPT D'ENTROPIE

Pour pouvoir distinguer et écarter certaines solutions non physiques, il nous faut avoir recours à une notion d'entropie. On veut que \mathbf{U} satisfasse (1.1.1) et on veut en plus qu'il existe des fonctions scalaires $\mathcal{U}(\mathbf{U})$ et $\mathcal{F}_j(\mathbf{U})$ de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} telles que

$$\mathcal{U}_t(\mathbf{U}) + \nabla \cdot \mathcal{F}(\mathbf{U}) = 0 \quad (1.4.1)$$

$$\text{avec } \mathcal{F} = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_d) \text{ et } \mathcal{U}'(\mathbf{U}) A_j(\mathbf{U}) = \mathcal{F}'_j(\mathbf{U}) \quad (1.4.2)$$

$$\text{où } \mathcal{F}'_j := \nabla_U \mathcal{F}_j(U) \text{ et } \mathcal{U}' := \nabla_U \mathcal{U} \quad (1.4.3)$$

Définition 1.4.1. *Soit Ω un ensemble convexe de \mathbb{R}^n , une fonction convexe $\mathcal{U} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une entropie pour le système (1.1.1) s'il existe "d" fonctions $\mathcal{F}_j :$*

$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \ 1 \leq j \leq d$, appelées *flux entropiques*, telles que la relation (1.4.2) soit satisfaite.

Le problème se résume donc à trouver les fonctions d'entropie et, si possible, toutes les fonctions d'entropie associées au problème (1.1.1). Malheureusement, cette nouvelle direction ne nous mènera à rien car, trouver l'ensemble de ces fonctions est chose difficile pour les systèmes. Dans le cas scalaire, Kruzkov [38] a trouvé une fonction de flux qui satisfait une forme scalaire équivalente à (1.4.2) pour toute fonction \mathcal{U} strictement convexe ! Pour aider à la recherche d'une fonction d'entropie \mathcal{U} associée à un système on peut utiliser un changement de variables. Si ce changement de variable symétrise (1.1.1), on peut alors montrer qu'il admet une entropie strictement convexe.

Théorème 1.4.1. *Supposons que (1.1.1) admette une entropie \mathcal{U} (avec flux correspondants \mathcal{F}_j) et soit $\{\mathbf{U}^\epsilon\}_\epsilon$ une suite de solutions suffisamment lisses de (1.3.3) telles que*

$$a) \|\mathbf{U}^\epsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d \times [0, \infty+))} \leq C, \quad (dC/d\epsilon = 0)$$

$$b) \mathbf{U}^\epsilon \rightarrow_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbf{U} \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^d \times [0, T)$$

alors \mathbf{U} est une solution faible de (1.1.1) et elle satisfait la condition d'entropie :

$$\mathcal{U}_t(\mathbf{U}) + \nabla \cdot \mathcal{F}(\mathbf{U}) \leq 0 \tag{1.4.4}$$

au sens des distributions sur $\mathbb{R}^d \times (0, +\infty)$

Il est maintenant possible de définir ce qu'est une solution entropique de (1.1.2).

Définition 1.4.2. *Une solution faible de (1.1.2) est une solution entropique si \mathbf{U} satisfait $\forall \mathcal{U}$ de (1.4.2) et $\forall \phi \in C_0^1 \subset \mathbb{R}^d \times [0, \infty)$,*

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} (\mathcal{U}(\mathbf{U}) \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathcal{F}(\mathbf{U}) \cdot \nabla \phi) dx dt + \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{U}_0 \phi(x, 0) dx \geq 0 \quad (1.4.5)$$

Remarque 1.4.1. *On peut définir une inégalité de type Rankine et Hugoniot pour \mathbf{U} :*

$$(\mathcal{U}(\mathbf{U}_+) - \mathcal{U}(\mathbf{U}_-))n_t \leq -(\mathcal{F}(\mathbf{U}_+) - \mathcal{F}(\mathbf{U}_-)) \cdot \bar{\mathbf{n}} \quad (1.4.6)$$

Il est décevant de constater que même avec tout ces éléments de théorie mathématique, le fait qu'une solution entropique de (1.1.2) soit unique pour des systèmes de $n > 1$ équations en $d \geq 1$ dimensions spatiales est encore à l'état de conjecture. La seule démonstration d'existence connue à ce jour est due à Kruzkov [38] pour une équation scalaire multi-dimensionnelle. (Pour le cas scalaire, \mathbf{U} sera remplacé par u).

Théorème 1.4.2. *(Kruzkov) Supposons que $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ alors le problème de Cauchy (1.1.2) possède une solution entropique unique $u \in L^\infty(\mathbb{R}^d \times (0, T))$. Cette solution satisfait pour $T \geq 0$*

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty} \leq \|u_0\|_{L^\infty} \quad (p.p.) \quad (1.4.7)$$

Si u et v sont les solutions entropiques respectivement associées à $u_0 \geq v_0$ alors $u(\cdot, t) \geq v(\cdot, t)$ p.p. . (Dépendance continue p.p. par rapport aux conditions initiales.) Si $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \cap BV(\mathbb{R}^d)$ alors $u(\cdot, t) \in BV(\mathbb{R}^d)$ avec $TV(u(\cdot, t)) \leq TV(u_0)$.

Ce théorème sera fondamental pour sélectionner les schémas, pour les équations hyperboliques, qui pourront converger vers des solutions entropiques et donc vers des solutions admissibles **physiquement**.

1.5. PROBLÈME DE RIEMANN

Un exposé du problème de Riemann permettra de comprendre quel avantage il y a à en éviter la résolution approchée ou exacte avec les méthodes sans solveur de Riemann proposées aux chapitres suivants.

Définition 1.5.1. On nomme problème de Riemann tout problème ayant pour but de résoudre (1.1.2) (lorsque $\tilde{\mathbf{A}}$ rend le système hyperbolique) avec une condition initiale \mathbf{U}_0 discontinue de la forme

$$\mathbf{U}_0(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{U}_L & \mathbf{x} \in \mathcal{D}_- \\ \mathbf{U}_R & \mathbf{x} \in \mathcal{D}_+ \end{cases}$$

où \mathbf{U}_L et \mathbf{U}_R sont des états constant de \mathbb{R}^n et $\mathcal{D}_+ \cup \mathcal{D}_- \cup \pi = \mathbb{R}^d$. π désigne une hypersurface séparant \mathbb{R}^d en 2 ouverts \mathcal{D}_+ et \mathcal{D}_- simplement connexes et ayant les propriétés suivantes : $\int_{\mathcal{D}_+} dV > M$, $\int_{\mathcal{D}_-} dV > M$, $\forall M > 0$

Remarque 1.5.1. En général, on considère π comme un hyperplan de normale \mathbf{n} ce qui simplifie grandement l'étude du problème.

Pour commencer nous résoudrons (1.1.2) pour le cas scalaire unidimensionnel $((n,d) = (1,1))$. Dans le cas scalaire, nous remplaçons \mathbf{U} par u . Le problème de Riemann s'énonce maintenant ainsi :

Résoudre :

$$u_t + f_x(u) = 0 \quad (1.5.1)$$

avec les conditions initiales :

$$u_0(x) = \begin{cases} u_L & x < x_0 \\ u_R & x \geq x_0 \end{cases}$$

On vérifie sans peine que les conditions de la définition plus générale (1.5.1) sont satisfaites. Introduisons l'outil qui nous aidera en grande partie à résoudre le problème de Riemann.

Définition 1.5.2. *Pour une solution \mathbf{U} de (1.1.2), une surface Σ dans $\mathbb{R}^d \times [0, \infty+)$ ayant pour équation $\xi(\mathbf{x}, t) = 0$ est une (hypersurface) caractéristique du système (1.1.1) en un point (\mathbf{x}_0, t_0) si la matrice*

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \mathbf{I} + \mathbf{A}(\mathbf{U}) \cdot \nabla \xi \right) |_{(\mathbf{x}_0, t_0)} \equiv \mathbf{M} |_{(\mathbf{x}_0, t_0)} \quad (1.5.2)$$

est singulière en ce point.

Cela revient à trouver au moins une valeur propre “ λ_k ” de $\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{U}, \nabla \xi)$ telle que $(\frac{\partial \xi}{\partial t} + \lambda_k(\mathbf{U}, \nabla \xi))|_{(\mathbf{x}_0, t_0)} = 0$ pour \mathbf{U} une solution de (1.1.2).

Proposition 1.5.1. *Il y a une équivalence entre :*

$$1) \exists k \text{ tel que } (\frac{\partial \xi}{\partial t} + \lambda_k(\mathbf{U}, \nabla \xi))|_{(\mathbf{x}_0, t_0)} = 0$$

$$2) \det(\mathbf{M}|_{(\mathbf{x}_0, t_0)}) = 0$$

DÉMONSTRATION. 1) \Rightarrow 2): Puisque $\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{U}, \nabla \xi)$ est diagonalisable on a que $\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{U}, \nabla \xi) = R\Lambda R^{-1}$ donc (1.5.2) peut s’écrire comme $RM R^{-1} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \mathbf{I} + \Lambda(\mathbf{U}, \nabla \xi)$ donc R et R^{-1} diagonalisent M trivialement. Les propriétés des déterminants entraînent la singularité de M :

$$\det(RMR^{-1}) = \det\left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \mathbf{I} + \Lambda\right) \quad (1.5.3)$$

$$= \prod_{i=1}^n \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} + \lambda_i\right) \quad (1.5.4)$$

$$= \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} + \lambda_k\right) \prod_{i=1, i \neq k}^n \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} + \lambda_i\right) \quad (1.5.5)$$

$$= 0 \prod_{i=1, i \neq k}^n \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} + \lambda_i\right) \quad (1.5.6)$$

$$= 0 = \frac{\det(R) \det(M)}{\det(R)} = \det(M) \quad (1.5.7)$$

donc M est singulière.

2) \Rightarrow 1): On sait que R^{-1} et R diagonalisent M , et le résultat est donc immédiat.

□

Revenons au sous-cas scalaire unidimensionnel. On peut écrire l’équation de l’hypersurface $\xi(x, t) = \phi(t) - x = 0$. Alors l’équation de la surface caractéristique

devient :

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + f'(u)\xi_x = \frac{d\phi}{dt} - f'(u(\phi, t)) = \frac{d\phi}{dt} - a(u(\phi, t)) = 0 \quad (1.5.8)$$

On cherche les “ (x_0, t_0) ” tels que (1.5.8) soit zéro pour u une solution de (1.1.2).

En utilisant le fait que u est solution de (1.1.2)

$$\frac{du(\phi(t), t)}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} + a(u(\phi, t)) \frac{\partial u}{\partial \phi} = 0 \quad (1.5.9)$$

Donc, la solution u est constante le long des courbes $\phi(t) = x$. Nous trouvons facilement avec ce résultat que les $\phi(t)$ sont des droites $\frac{x-x_0}{t-t_0} = a(u(x_0, t_0))$. Nous venons donc de démontrer la propriété suivante:

Proposition 1.5.2. *Les caractéristiques de (1.1.2) pour u une solution classique du problème scalaire unidimensionnel sont des droites du plan (x, t) le long desquelles $u(x, t)$ est constante.*

Proposition 1.5.3. *Dans le cas général nous avons que si $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$ est solution du problème de Riemann (1.5.1) alors $\mathbf{U}(\xi_1, \xi_2) = \mathbf{U}(a\mathbf{x}, at) \equiv \mathbf{V}(\xi_1, \xi_2)$ est aussi une solution ($\xi_1 = (\xi_1^1, \xi_1^2, \xi_1^3)$).*

DÉMONSTRATION.

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{U}(\xi_1, \xi_2)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial t} = a \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \xi_2} \quad (1.5.10)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial \xi_1^1} \frac{\partial \xi_1^1}{\partial x} = a \frac{\partial F(\mathbf{U}(\xi_1, \xi_2))}{\partial \xi_1^1} \quad (1.5.11)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial \xi_1^2} \frac{\partial \xi_1^2}{\partial y} = a \frac{\partial F(\mathbf{U}(\xi_1, \xi_2))}{\partial \xi_1^2} \quad (1.5.12)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial \xi_1^3} \frac{\partial \xi_1^3}{\partial z} = a \frac{\partial F(\mathbf{U}(\xi_1, \xi_2))}{\partial \xi_1^3} \quad (1.5.13)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{F} = a \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \xi_2} + \nabla_{\xi_1} \cdot \vec{F} \right) = 0 \quad (1.5.14)$$

□

Proposition 1.5.4. *Les solutions $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$ ne dépendent que du rapport $\xi = \mathbf{x}/t$ ($\mathbf{U} = \mathbf{U}(\xi)$).*

DÉMONSTRATION. Dans la proposition précédente poser $a = 1/t$ pour $t > 0$. □

Il est maintenant possible de trouver une solution classique pour le problème de Riemann scalaire unidimensionnel. Selon la dernière proposition $u = v(\xi)$ donc $u_t + f(u)_x = \frac{v'}{t}(f'(v(\xi)) - \xi)$. Si $v' = 0$ alors $v(\xi) = \text{const.} = u_0(x_0)$. Donc, dans ce cas il faudrait avoir $u_0(x)$ constant. Si, par contre, $v' \neq 0$ il faut que $f'(v(\xi)) = \xi = a(v(\xi))$. Supposons que a^{-1} existe dans un voisinage de $v(\xi)$ alors $v(\xi) = a^{-1}(\xi)$. Pour que a^{-1} existe il faut que $f'' > 0$ ou $f'' < 0$. Nous venons donc de montrer l'existence d'une solution pour une fonction f strictement convexe (ou strictement concave).

Supposons f **convexe** alors 3 cas sont possibles $a(u_L) > a(u_R)$, $a(u_L) < a(u_R)$ et $a(u_L) = a(u_R) = s$.

cas 1: les caractéristiques se rencontrent en un temps fini. Puisque $f'' > 0$ on a forcément $u_L > u_R$. La relation de Rankine et Hugoniot permet de déterminer la vitesse et donc la position de la discontinuité pour tout $t > 0$:

$$s = \frac{f(u_R) - f(u_L)}{u_R - u_L} \quad (1.5.15)$$

Nous sommes en présence d'une "onde de choc" ayant pour solution:

$$u(x,t) = \begin{cases} U_L & \xi < s \\ U_R & \xi > s \end{cases}$$

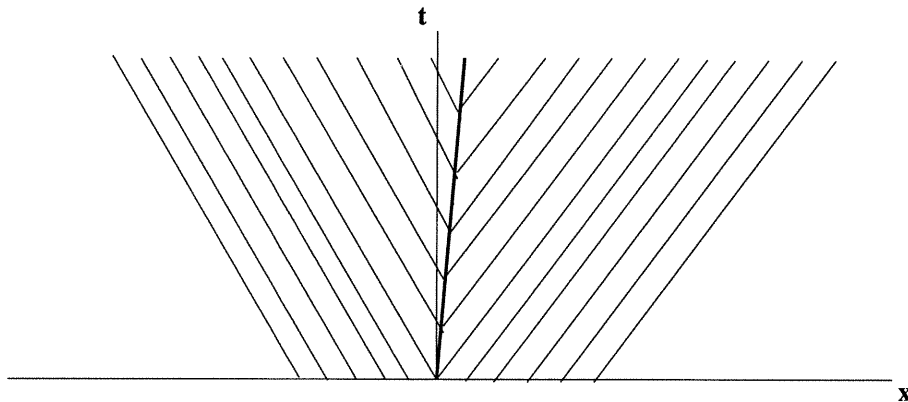


FIG. 1.1. Solution non-entropique du problème de Riemann

cas 2: Les mêmes observations nous permettent de conclure que dans le cas d'un flux convexe il faut que $u_L < u_R$. Il est possible d'observer sur les graphiques 1.1, 1.2 et 1.3 qu'il y a une zone où la solution est indéterminée. En se rapportant à la démonstration d'existence on peut tenter de remplir cette région à l'aide de la solution $v(\xi) = u(x,t) = a^{-1}(\xi)$. Il serait possible de compléter cette zone par

d'autres solutions mais c'est la seule solution qui satisfait la condition d'entropie d'Oleinik. La solution onde de raréfaction ou "détente" s'écrit donc :

$$u(x,t) = \begin{cases} u_L & \xi < a(u_L) \\ a^{-1}(\xi) & a(u_L) \leq \xi \leq a(u_R) \\ u_R & \xi > a(u_R) \end{cases} \quad (1.5.16)$$

cas 3: Nous sommes en présence d'une "discontinuité de contact" [56].

$$u(x,t) = \begin{cases} u_L & \xi < u_L \\ u_R & \xi > u_R \end{cases}$$

Remarque 1.5.2. Dans les 3 cas précédents nous avons implicitement utilisé la condition d'entropie d'Oleinik qui nous assure dans le premier cas de la présence d'un choc, pour le second cas de sélectionner la bonne solution dans la zone de détente. On nomme souvent cette relation "condition géométrique" d'Oleinik ou encore, inégalité d'entropie de Lax-Oleinik; dans le cas d'un système on utilise la condition de Lax (1.5.10).

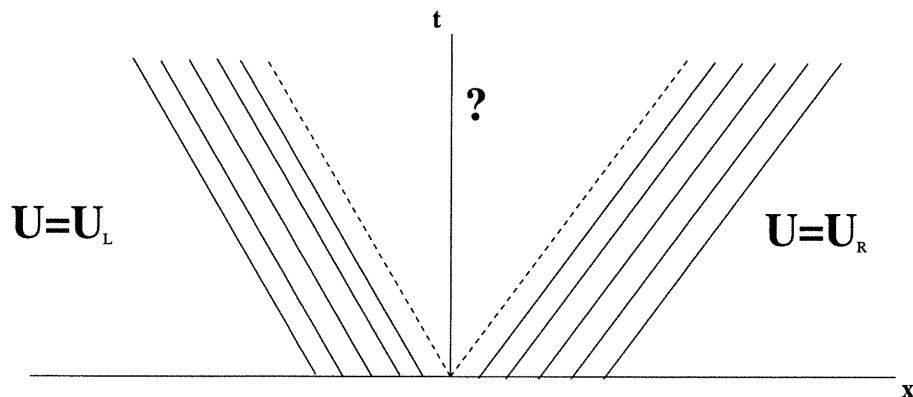


FIG. 1.2. Solution incomplète du problème de Riemann

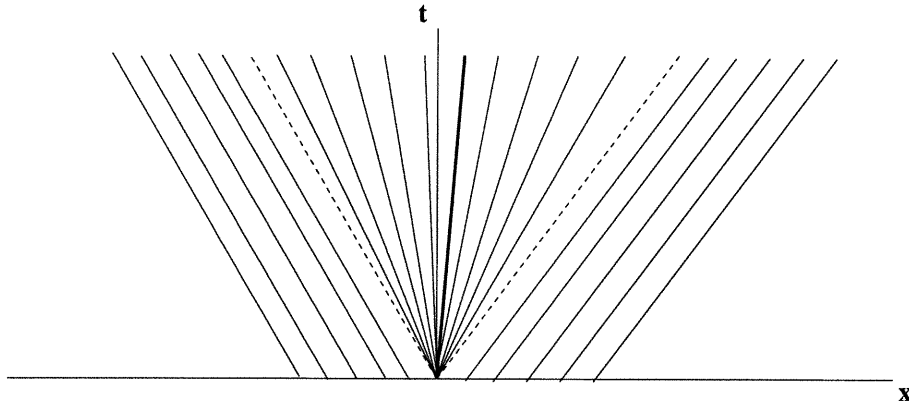


FIG. 1.3. Solution entropique (détente) du problème de Riemann

Définition 1.5.3. *Condition géométrique d'Oleinik: $\forall u \in (u_L, u_R)$*

$$\frac{f(u) - f(u_L)}{u - u_L} \geq s \geq \frac{f(u) - f(u_R)}{u - u_R} \quad (1.5.17)$$

Définition 1.5.4. *En faisant tendre $u \rightarrow u_L$ dans le membre de gauche et $u \rightarrow u_R$ dans le membre de droite, nous obtenons l'inégalité d'entropie de Lax-Oleinik:*

$$a(u_L) \geq s \geq a(u_R) \quad (1.5.18)$$

où $a(u) \equiv f'(u)$.

Remarque 1.5.3. *Pour f générale, la solution du problème de Riemann peut se trouver en utilisant dans le cas $u_L < u_R$ l'enveloppe convexe de f et dans le cas $u_R < u_L$ l'enveloppe concave ([24] p. 93-95).*

Remarque 1.5.4. *La condition d'Oleinik sélectionne de façon unique les solutions bornées du problème de Riemann.*

En mettant ensemble la solution choc, la raréfaction et la discontinuité de contact nous construisons un opérateur solution $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\bar{x}}^{\bar{t}}(\frac{x-\bar{x}}{t-\bar{t}}; u_L, u_R)$

$$\mathcal{R}_{\bar{x}}^{\bar{t}}\left(\frac{x-\bar{x}}{t-\bar{t}}; u_L, u_R\right) = \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \text{si } a(u_L) > a(u_R) \\ u_L \quad \frac{x-\bar{x}}{t-\bar{t}} < s \\ u_R \quad \frac{x-\bar{x}}{t-\bar{t}} > s \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{si } a(u_L) < a(u_R) \\ u_L \quad \frac{x-\bar{x}}{t-\bar{t}} < a(u_L) \\ a^{-1}\left(\frac{x-\bar{x}}{t-\bar{t}}\right) \quad a(u_R) < \frac{x-\bar{x}}{t-\bar{t}} < a(u_L) \\ u_R \quad \frac{x-\bar{x}}{t-\bar{t}} > a(u_R) \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{si } a(u_L) = a(u_R) = s \\ u_L \quad \frac{x-\bar{x}}{t-\bar{t}} < s \\ u_R \quad \frac{x-\bar{x}}{t-\bar{t}} > s \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (1.5.19)$$

Cet opérateur trouvera son utilité lors de la dérivation de la méthode de Godunov. Nous avons donc obtenu une solution unique (entropique) au problème de Riemann dans le cas scalaire unidimensionnel.

1.5.1. Systèmes unidimensionnels

Nous étudions ici les propriétés du problème de Cauchy avec la donnée initiale de Riemann dans le cas des systèmes $n > 1$ et $d = 1$.

1.5.1.1. Cas linéaire

Si la matrice A est constante alors la solution du problème de Riemann est directement construite à l'aide de la diagonalisation de A faite par les matrices

$R = (r_1 r_2 \dots r_n)$ et $R^{-1} = (l_1 l_2 \dots l_n)^T$. Cette dernière est possible parce que le système est hyperbolique, la matrice A admet donc un ensemble de valeurs propres réelles que l'on ordonne $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{n-1} \leq \lambda_n$.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (1.5.20)$$

$$\frac{\partial R^{-1}U}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial R^{-1}U}{\partial x} = 0 \quad (1.5.21)$$

En posant $W = R^{-1}U = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ et $W_0 = R^{-1}U_0 = (w_{0,1}, w_{0,2}, \dots, w_{0,n})$ il vient :

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \\ W(x, t = 0) = W_0 = R^{-1}U_0 \end{cases} \quad (1.5.22)$$

Le système se trouve ainsi découpé. Il faut satisfaire n équations scalaires

$$\frac{\partial w_k}{\partial t} + \lambda_k \frac{\partial w_k}{\partial x} = 0 \quad (1.5.23)$$

Sous cette forme, on reconnaît l'équation d'advection pure qui a pour solution (classique) :

$$w_k = w_{0,k}(x - \lambda_k t) \quad (1.5.24)$$

donc,

$$w_{0,k}(x - \lambda_k t) = l_k^T U_0(x - \lambda_k t) = \sum_{i=1}^n l_k^i u_0^i(x - \lambda_k t) \quad (1.5.25)$$

$$= \langle l_k, U_0(x - \lambda_k t) \rangle = w_k(x, t) \quad (1.5.26)$$

$$\Rightarrow U(x, t) = RW = \sum_{k=1}^n w_k(x, t) r_k = \sum_{k=1}^n \langle l_k, U_0(x - \lambda_k t) \rangle r_k \quad (1.5.27)$$

$$U(x,t) = \sum_{k=1}^n \langle l_k, U_0(x - \lambda_k t) \rangle r_k \quad (1.5.28)$$

Remarque 1.5.5. Cette solution est à la base de bien des solveurs de Riemann de type “approché”.

Cette solution est valide pour une donnée initiale bornée quelconque. Pour le problème de Riemann il faut restreindre U_0 et donc W aux formes suivantes :

$$U_0(x) = \begin{cases} U_L & x < 0 \\ U_R & x > 0 \end{cases} \quad (1.5.29)$$

$$W_0(x) = \begin{cases} W_L = R^{-1}U_L = (w_{L,1}, w_{L,2}, \dots, w_{L,n}) & x < 0 \\ W_R = R^{-1}U_R = (w_{R,1}, w_{R,2}, \dots, w_{R,n}) & x > 0 \end{cases} \quad (1.5.30)$$

La solution associée à chaque valeur propre est modifiée

$$w_k(x,t) = w_{0,k}(x - \lambda_k t) = \begin{cases} w_{L,k} & x/t < \lambda_k \\ w_{R,k} & x/t > \lambda_k \end{cases} \quad (1.5.31)$$

Pour se convaincre de la forme finale de la solution regardons ce qui se produit pour divers rapports de x/t :

- Si $x/t < \lambda_1$ alors $w_1 = w_{L,1}, w_2 = w_{L,2}, \dots, w_n = w_{L,n} \Rightarrow W = W_L$
- Si $x/t > \lambda_n$ alors $w_1 = w_{R,1}, w_2 = w_{R,2}, \dots, w_n = w_{R,n} \Rightarrow W = W_R$
- Si $\lambda_p < x/t < \lambda_{p+1}$ alors $w_1 = w_{R,1}, w_2 = w_{R,2}, \dots, w_p = w_{R,p}$ et $w_{p+1} = w_{L,p+1}, w_{p+2} = w_{L,p+2}, \dots, w_n = w_{L,n}$

Donc une solution intermédiaire dans la région $\lambda_p \leq \frac{x}{t} \leq \lambda_{p+1}$ peut s'écrire

$$U(x,t) = \sum_{k=1}^p w_{R,k} r_k + \sum_{i=p+1}^n w_{L,i} r_i \quad (1.5.32)$$

$$\mathcal{R}_{\bar{x}}^{\bar{t}}\left(\frac{x-\bar{x}}{t-\bar{t}}; U_L, U_R\right) = \begin{cases} U_L & x/t < \lambda_1 \\ \sum_{k=1}^p \langle l_k, U_R \rangle r_k + \sum_{i=p+1}^n \langle l_i, U_L \rangle r_i & \lambda_p < x/t < \lambda_{p+1} \\ U_R & x/t > \lambda_n \end{cases} \quad (1.5.33)$$

Remarque 1.5.6. *La discontinuité initiale dans le cas du système unidimensionnel scalaire se sépare en n discontinuités qui se propagent à des vitesses λ_k $k \in [1, n]$ et séparant $n+1$ états constants $U_1 = U_L, U_2, \dots, U_{n+1} = U_R$. Cette observation pour ce cas a priori simple laisse présager que le cas non-linéaire sera très complexe.*

1.5.2. Cas non-linéaire unidimensionnel

La matrice et les vecteurs propres associés ont une dépendance par rapport à la solution U , ceci implique que $A = A(U)$, $r_k = r_k(U)$, $l_k = l_k(U)$, $\lambda_1(U) \leq \lambda_2(U) \leq \dots \leq \lambda_{n-1}(U) \leq \lambda_n(U)$.

Définition 1.5.5. Champ caractéristique : sous-espace de R^n engendré par $r_k(U)$.

Définition 1.5.6. *Le k -ième champ caractéristique est dit vraiment non-linéaire si $\nabla_U \lambda_k(U) \cdot r_k U \neq 0 \forall U \in \Omega$.*

Définition 1.5.7. *Le k -ième champ caractéristique est dit **linéairement dégénéré** si $\nabla_U \lambda_k(U) \cdot r_k(U) = 0 \forall U \in \Omega$.*

Définition 1.5.8. *w est un k -invariant de Riemann si $\nabla_U w(U) \cdot r_k(U) = 0 \forall U \in \Omega$.*

Théorème 1.5.1. *Il y a $n - 1$ k -invariants de Riemann $(w_1, w_2, \dots, w_{n-1})$ tels que les gradients $\nabla w_1^k, \dots, \nabla w_{n-1}^k$ sont linéairement indépendants.*

Les k -invariants de Riemann sont utilisés lors de la recherche d'une solution. Lorsqu'ils sont tous constants dans une région D alors ils conduisent à une k -onde de raréfaction. Localement, c'est-à-dire dans D , on retrouve les mêmes propriétés que dans le cas scalaire pour les k -caractéristique: elles sont des droites sur lesquelles U est constante. Comme dans le cas scalaire, il est possible de construire une solution au problème de Riemann à partir de raréfactions, de chocs et de discontinuités de contacts.

Définition 1.5.9. *Soit $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ et $U \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$ une solution du système hyperbolique unidimensionnel (1.1.2). Si tout les k -invariants w_i sont constants dans D alors la solution U est une **k -onde de raréfaction**.*

Définition 1.5.10. *Une discontinuité qui satisfait la condition :*

$$\lambda_k(U_R) < s < \lambda_{k+1}(U_R) \quad (1.5.34)$$

$$\lambda_{k-1}(U_L) < s < \lambda_k(U_L) \quad (1.5.35)$$

*est un **k -choc** au sens de Lax, on dit aussi que la discontinuité satisfait la condition d'entropie de Lax.*

Définition 1.5.11. *Si le vitesse s de propagation d'une discontinuité est la même que la vitesse caractéristique λ_k des 2 cotés de la discontinuité alors U est une **k -discontinuité de contact**. Les inégalités à satisfaire sont :*

$$\lambda_k(U_R) \leq s < \lambda_{k+1}(U_R) \quad (1.5.36)$$

$$\lambda_{k-1}(U_L) < s \leq \lambda_k(U_L) \quad (1.5.37)$$

Il faut évidemment qu'au moins une des inégalités \leq soit satisfaite avec le signe =.

Nous énonçons le principal résultat d'existence connu pour le problème de Riemann dans le cas de systèmes hyperboliques unidimensionnels.

Théorème 1.5.2. *Soit $U_L \in \mathbb{R}^n$ et D un voisinage ouvert de U_L . Considérons le système hyperbolique*

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0 \quad (1.5.38)$$

Supposons que ses champs caractéristiques soient linéairement dégénérés ou vraiment non-linéaires dans D . Alors il existe un voisinage $D_R \subset D$ de U_L tel que $\forall U_R \in D_R$ le problème (1.5.38) combiné à la condition initiale :

$$U_0(x) = \begin{cases} U_L & x < 0 \\ U_R & x \geq 0 \end{cases} \quad (1.5.39)$$

possède une solution. Cette solution est constituée d'au plus $n + 1$ états constants qui peuvent être reliés par des chocs, des ondes de raréfaction ou des discontinuités de contact. Cette solution est également unique.

DÉMONSTRATION. Voir par exemple Smoller [56] □

1.5.3. Cas multidimensionnel

Nous n'avons considéré jusqu'à présent que des résultats dans les cas scalaires/systèmes unidimensionnels ($d = 1$). Pour $d > 1$ il n'y a pas beaucoup de résultats connus. Pour $n > 2$ seulement certains systèmes admettent un ensemble complet d'invariants de Riemann. Concernant la construction d'une solution au problème de Riemann, déjà, pour $d = 2$ celle-ci devient très complexe [14]. Évidemment pour $d = 3$ dimensions spatiales, la construction d'une solution explicite est un domaine de recherche en soit. Le lecteur intéressé pourra constater l'état actuel de la théorie dans les livres de D. Serre [52] et de C. Dafermos [17].

Le but de cet exposé sur le problème de Riemann était de mettre en évidence sa complexité qui nous pousse à construire un schéma qui en évite la résolution et ainsi essaye de préserver le maximum d'information sur le système sans pour autant devoir procéder à une décomposition caractéristique du système à l'étude. Un exposé assez complet des solveurs exacts et approchés du problème de Riemann utilisés dans la construction de méthodes numériques se trouve dans le livre de Toro [60].

Chapitre 2

VOLUMES FINIS

2.1. INTRODUCTION

Les difficultés rencontrées lorsque nous avons essayé de trouver des solutions analytiques à des problèmes hyperboliques scalaires simples et l'absence de résultats dans le cas de systèmes en plusieurs dimensions spatiales justifient l'utilisation d'un processus de discrétisation pour tenter de résoudre approximativement des problèmes beaucoup plus complexes et réalistes. En fait, même s'ils semblent disjoints, les champs de recherche en É.D.P.¹ et en analyse numérique pour la résolution d'É.D.P. bénéficient mutuellement des avancées faites dans leurs domaines respectifs. Par exemple, si l'on démontre l'existence d'une solution faible entropique, dans le cas d'un schéma, lorsque la discrétisation devient "infiniment" précise alors, cela revient à dire que c'est une démonstration d'existence au sens des É.D.P. (Voir par exemple, la démonstration de l'existence et unicité de la solution pour une équation hyperbolique scalaire faite par O. Oleinik [56] à l'aide du schéma de Lax-Friedrichs.)

1. Équations aux Dérivées Partielles

2.1.1. Schéma de Godunov

On veut résoudre le problème scalaire unidimensionnel que nous énonçons encore ici :

$$u_t + f_x(u) = 0 \quad , \quad u(x, t = 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, T], \quad 0 < T < \infty \quad (2.1.1)$$

La première étape consiste à discrétiser le plan (x, t) de façon appropriée comme par exemple par : $x_i = ih, t^n = n\Delta t$. Puisqu'en $n = 0$ nous connaissons la solution au problème $(u_0(x))$ nous pouvons appliquer l'idée de Godunov qui consiste à faire évoluer dans le temps des constantes par morceaux définies sur les cellules $C_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ au lieu de chercher à poursuivre l'évolution de la solution exacte, ce qui est le plus souvent impossible. Ces constantes par morceaux se définissent comme :

$$v_i^n = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x, t^n) dx \quad (2.1.2)$$

Dans le cas de u_0 nous avons $v_i^0 = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u_0(x) dx$ et c'est à partir de ces valeurs constantes sur les intervalles C_i que la méthode sera mise en œuvre. En intégrant l'équation exacte à l'aide du théorème de Green (2.1.1) sur le rectangle $C_i \times [t^n, t^{n+1}]$ nous obtenons :

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \{u(x, t^{n+1}) - u(x, t^n)\} dx = - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \{f(u(x_{i+1/2}, t)) - f(u(x_{i-1/2}, t))\} dt \quad (2.1.3)$$

On remarque que le membre de gauche peut se représenter comme une moyenne

(2.1.2) :

$$hv_i^{n+1} - hv_i^n = - \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u(x_{i+1/2}, t)) dt + \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u(x_{i-1/2}, t)) dt \quad (2.1.4)$$

En $x = x_{i+1/2}, x_{i-1/2}$ se posent respectivement 2 problèmes de Riemann centrés en $(x_{i+1/2}, t^n)$ (respectivement $(x_{i-1/2}, t^n)$) dont la solution exacte nous sera donnée par $\mathcal{R}_{i+1/2}(\frac{x-x_{i+1/2}}{t-t^n}, U_L, U_R)$, donc pour $U_L = v_i^n$ et $U_R = v_{i+1}^n$ (respectivement $U_L = v_{i-1}^n$ et $U_R = v_i^n$).

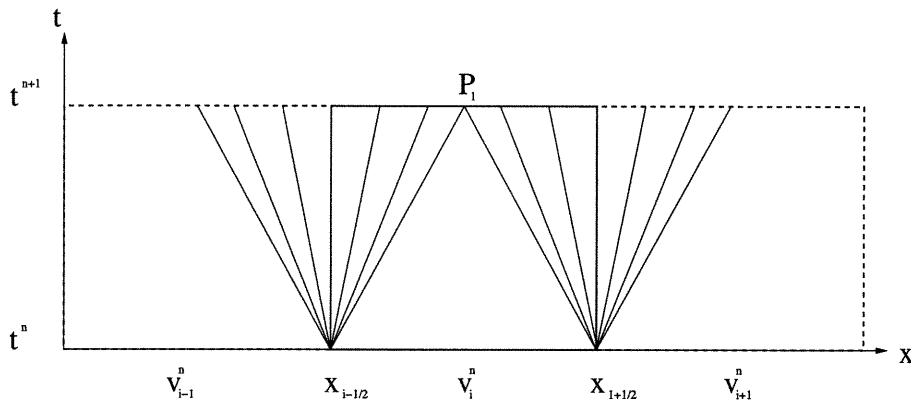
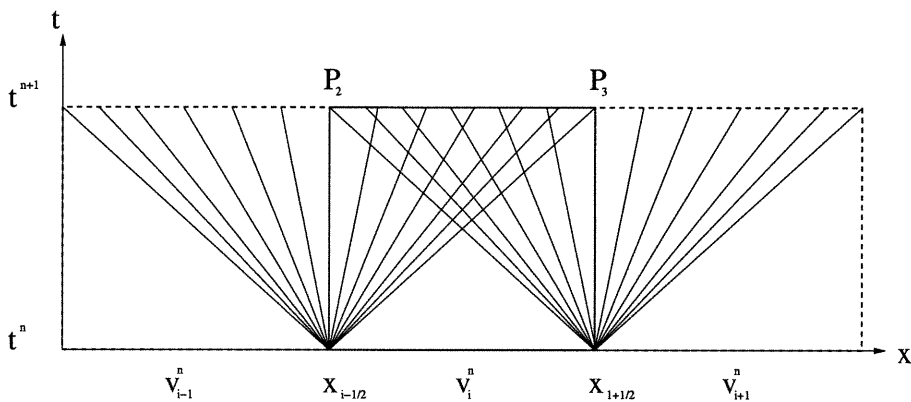
$$hv_i^{n+1} - hv_i^n = -\Delta t \{f(\mathcal{R}_{i+1/2}(0^-, v_i^n, v_{i+1}^n)) - f(\mathcal{R}_{i-1/2}(0^+, v_{i-1}^n, v_i^n))\} \quad (2.1.5)$$

En réécrivant (2.1.5) nous obtenons une façon de faire avancer les moyennes de t^n à t^{n+1} .

$$v_i^{n+1} = v_i^n - \frac{\Delta t}{h} \{f(\mathcal{R}_{i+1/2}(0^-, v_i^n, v_{i+1}^n)) - f(\mathcal{R}_{i-1/2}(0^+, v_{i-1}^n, v_i^n))\} \quad (2.1.6)$$

2.1.2. Stabilité

Afin d'éviter que les solutions des 2 problèmes de Riemann adjacents en $x_{i-1/2}$ et $x_{i+1/2}$ interagissent avec leurs voisines, le pas de temps Δt devra être restreint. Pour mieux comprendre ce qui se passe, il est intéressant de représenter graphiquement les 2 problèmes de Riemann aux interfaces $x_{i+1/2}$ et $x_{i-1/2}$. Sur la figure 2.1, on constate que le point P_1 est la première interaction entre 2 ondes qui résultent de la solution des problèmes de Riemann en $x_{i-1/2}$ et $x_{i+1/2}$. Nous savons que la pente de ces caractéristiques est ici donnée par $|\Delta t / \frac{h}{2}|$. Dans la figure 2.2,

FIG. 2.1. $\text{CFL} \leq 1/2$ FIG. 2.2. $\text{CFL} \leq 1$

l'interaction a lieu plus tôt, c'est-à-dire, lorsque la pente des caractéristiques est $|\Delta t/h|$. Puisque nous ne voulons pas résoudre un problème de Riemann avec interaction de plusieurs états constants, le cas de la figure 2.1 est le cas limite dans le cadre de la solution \mathcal{R} exacte que nous avons définie au chapitre précédent. On voudra donc imposer que la distance parcourue par l'onde la plus rapide vers la droite soit inférieure à $h/2$:

$$|a(u)|\Delta t \leq \frac{h}{2} \Rightarrow \frac{\Delta t}{h}|a(v_i^n)| \leq \frac{1}{2} \quad (2.1.7)$$

Δt sera donc choisi de manière que l'inégalité (2.1.7) soit respectée partout sur \mathbb{R} (ou sur le fermé $\cup_i C_i \subset \mathbb{R}$), il faudra empêcher toute interaction, sur le maillage, pour pouvoir passer de t^n à t^{n+1} :

$$\frac{\Delta t}{h} \max_i |a(v_i^n)| \leq \frac{1}{2} \quad (2.1.8)$$

On nomme cette condition “la condition CFL” en l'honneur de Courant-Friedrichs et Lewy. C'est une condition nécessaire à la stabilité d'un schéma.

Remarque 2.1.1. *Puisque dans le calcul de la solution v_i^{n+1} , seules les valeurs $\mathcal{R}_{i+1/2}(0^-, v_i^n, v_{i+1}^n)$ et $\mathcal{R}_{i-1/2}(0^+, v_{i-1}^n, v_i^n)$ interviennent on voit qu'en pratique il est possible de recourir à la condition CFL plus généreuse*

$$\frac{\Delta t}{h} \max_i |a(v_i^n)| \leq 1 \quad (2.1.9)$$

voir [41, 22, 23].

Il est possible aussi de faire une analyse dite de von Neumann (à l'aide de modes de Fourier) mais un exposé complet de cette technique serait difficile à résumer en quelques lignes. Notons toutefois que cette analyse ne prend pas en compte les conditions aux bords (elle suppose un domaine périodique). Une autre technique se base sur la forme matricielle du schéma prenant ainsi en compte les conditions aux limites.

2.1.3. Schémas conservatifs

Il existe une multitude de schémas qui peuvent résoudre le problème (2.1.1).

Nous pouvons presque tous les écrire sous la forme :

$$v_i^{n+1} = v_i^n - \frac{\Delta t}{h} \{g_{i+1/2}(v_{i-k+1}, \dots, v_{i+k}) - g_{i-1/2}(v_{i-k}, \dots, v_{i+k-1})\} \quad (2.1.10)$$

La fonction $g_{i\pm 1/2}$ est appelée **flux numérique**. Voici quelques exemples de flux numériques basés sur f de (2.1.1):

Lax-Friedrichs : $g^{LxF}(u, v) = \frac{1}{2}(f(u) + f(v)) - \frac{h}{2\Delta t}(v - u)$

Lax-Wendroff : $g^{LxW}(u, v) = \frac{f(u)+f(v)}{2} - \frac{\Delta t}{2h}a(\frac{u+v}{2})(f(v) - f(u))$

Lax-Wendroff (“Richtmyer”) : $g^{LxW}(u, v) = f(\frac{u+v}{2} - \frac{\Delta t}{2h}(f(v) - f(u)))$

Amont : $g^A(u, v) = a^+u + a^-v$

Définition 2.1.1. $g_{i\pm 1/2}$ est un **flux numérique compatible** avec f (2.1.1) si $g(u, \dots, u) = f(u)$.

Définition 2.1.2. Si un schéma peut être écrit sous la forme (2.1.10) on dit qu’il est sous **forme conservative**. Plus généralement, si l’on considère un système à n dimensions en d dimensions spatiales et donc d flux numériques \mathcal{G}^m correspondants $m \in [1, d]$, le schéma correspondant sera sous forme conservative si $\mathcal{G}^1 : \mathbb{R}^{n \times (2k_1) \times (2k_2+1) \times (2k_2+1) \dots \times (2k_d+1)} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ou encore $\mathcal{G}^l : \mathbb{R}^{n \times (2k_l) \times \prod_{(m \neq l)=1}^d (2k_m+1)} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Le schéma sera **conservatif** s’il est sous forme conservative et si ses flux sont compatibles.

Une notation aussi très utilisée pour dénoter le schéma (2.1.10), avec l'aide d'un opérateur solution $\mathcal{H}(v_{i-k}^n, \dots, v_{i+k}^n)$, est la suivante :

$$v_i^{n+1} = \mathcal{H}(v_{i-k}^n, \dots, v_{i+k}^n) \quad (2.1.11)$$

Lorsque les conditions de flux numérique compatible et forme conservative du schéma sont réunies, autrement dit, lorsque le schéma est conservatif, si la suite de solutions v_h (qui dénote une solution obtenue pour un maillage d'espacement h) converge vers une solution de (2.1.10), alors la limite est une solution faible de (2.1.1). Ce théorème fut démontré par Lax et Wendroff [40] pour une équation scalaire en une dimension spatiale :

Théorème 2.1.1. (*Lax-Wendroff*) *Soit un schéma conservatif et v^0 comme en (2.1.2). Supposons que v_h soit une suite de solutions (Δt étant déterminé en gardant le rapport $\Delta t/h$ constant) et telle que :*

- 1) $\|v_h\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty))} \leq C$

- 2) v_h converge dans $L^1_{loc}(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ p.p. vers une fonction u

alors u est une solution faible de (2.1.1).

2.1.4. Schémas monotones

Le problème que ce théorème ne réussit pas à résoudre est encore celui de convergence vers une solution physique (entropique) du problème de départ. Il faut donc que la solution faible obtenue satisfasse une condition autre que la condition de Rankine et Hugoniot aux sauts / discontinuités. Une première façon

de procéder est d'imposer (comme dans le cas analytique) une condition supplémentaire.

Définition 2.1.3. *Un schéma qui peut s'écrire comme en (2.1.11) sera dit **monotone** si pour $-q \leq k \leq q$*

$$\frac{\partial \mathcal{H}_i}{\partial u_{i-k}^n} > 0 \quad (2.1.12)$$

Ceci engendre la propriété recherchée dans le cas d'une équation scalaire en une variable spatiale :

Théorème 2.1.2. *Soit un schéma monotone conservatif qui satisfait en plus les exigences du théorème de Lax-Wendroff 2.1.1. Alors si $v_h \rightarrow_{p.p.} u$, u est une solution faible, et donc aux endroits où la solution est discontinue, la condition de Rankine et Hugoniot est satisfaite; en plus la limite u satisfait aussi la condition d'entropie d'Oleinik (1.5.17), et représente donc la solution entropique du problème (2.1.1).*

Malheureusement, la condition de monotonie du schéma engendre (tout en résolvant le problème de la convergence) une limite sur l'ordre maximal de précision d'un schéma.

Définition 2.1.4. *Un schéma est **précis d'ordre** (p,q) si pour u une solution au problème (2.1.1) on a*

$$\|u^{n+1} - \mathcal{Q}v^n\| = \Delta t(\mathcal{O}(h^p) + \mathcal{O}(\Delta t^p)) = \Delta t \tau(p,q) \quad (2.1.13)$$

où $\tau(p,q)$ est la notation pour l'erreur de **troncature locale**.

Théorème 2.1.3. (Harten-Hyman-Lax [29]) *Un schéma monotone conservatif est d'ordre 1, i.e. $\tau(p,q) = \mathcal{O}(h) + \mathcal{O}(\Delta t)$.*

Remarque 2.1.2. *Un des objectifs recherchés lors de la construction de schémas est d'obtenir un schéma de précision élevée en un nombre minimal d'opérations. L'expérience montre qu'un schéma d'ordre 1 en espace et en temps n'est pas vraiment intéressant. Une autre des raisons qui poussent à essayer d'augmenter l'ordre d'un schéma est qu'il est possible de démontrer que le contact entre les diverses ondes (e.g. pour le p -système) comme les raréfactions, chocs et discontinuités de contact, pour des discontinuités "faibles", sont lisses jusqu'à l'ordre 2. Donc, un schéma devrait être au moins d'ordre 2 pour saisir le maximum de phénomènes physiques.*

2.1.5. Schéma TVD

Il faut alléger les conditions sur les schémas admissibles pour permettre de tenter l'extension à des schémas d'ordre de précision élevé.

Définition 2.1.5. *La variation totale d'une suite $v = (v_{i,j,k})$ se définit comme :*

$$TV(v) = \sum_{i,j,k} \Delta y \Delta z |v_{i+1,j,k} - v_{i,j,k}| + \Delta x \Delta z |v_{i,j+1,k} - v_{i,j,k}| + \Delta y \Delta z |v_{i,j,k+1} - v_{i,j,k}| \quad (2.1.14)$$

Définition 2.1.6. *La norme L^1 discrète se dénote par $\|v\|_{L^1(h)} = h^3 \sum_{i,j,k} |v_{i,j,k}|$ lorsque $\Delta x = \Delta y = \Delta z = h$.*

Définition 2.1.7. *Un schéma est TVD² si*

$$TV(v^{n+1}) \leq TV(v^n) \quad (2.1.15)$$

pour $n = 0, 1, 2, \dots$

Théorème 2.1.4. *Un schéma monotone est TVD.*

Théorème 2.1.5. *Dans le cas d'une seule dimension spatiale il n'y a pas de restriction sur l'ordre de précision d'un schéma TVD. Goodman et LeVeque ont montré qu'un schéma TVD bidimensionnel est au plus précis d'ordre 1 au sens de la norme L^1 discrète [26].*

Remarque 2.1.3. *On peut se demander comment construire un schéma d'ordre élevé. En fait, il faut construire explicitement un schéma qui est la somme d'un schéma monotone ou TVD et d'un terme de second ordre. L'idée est la suivante [59, 62, 32, 37]:*

- *Le schéma total n'est pas forcément TVD pour toutes les combinaisons possibles (du schéma monotone et du terme d'ordre 2) il faut donc trouver les combinaisons admissibles qui restreignent le schéma à une "zone TVD".*
- *Aux discontinuités, le schéma retombe sur un schéma monotone d'ordre 1.*

Sous ces conditions, on parle d'un schéma d'ordre quasi-deux ou, encore, d'ordre 2 presque partout. Il faut donc recourir à cet artifice pour pouvoir augmenter l'ordre d'un schéma. Nous allons montrer, en une dimension spatiale,

comment combiner un schéma monotone (linéaire) et un terme de second ordre (linéaire) pour obtenir l'ordre quasi-deux. Pour commencer il nous faut le lemme suivant :

Lemme 2.1.1. *Soit L un opérateur qui peut être mis sous la forme*

$$Lv_i = v_i + c_{i+1/2}\Delta_+v_i - d_{i-1/2}\Delta_-v_i, \quad (2.1.16)$$

où $\Delta_+v_i = v_{i+1} - v_i$ et $\Delta_-v_i = v_i - v_{i-1}$, alors il satisfait la propriété TVD en une dimension spatiale si $\forall i \in \mathbb{N}$ les coefficients $c_{i+1/2}$ et $d_{i+1/2}$ sont positifs et que la somme de ces deux derniers soit inférieure à 1 ($c_{i+1/2} + d_{i+1/2} \leq 1$).

Définition 2.1.8. *On dit d'un schéma s'écrivant $v_i^{n+1} = Lv_i^n$ ($L = (2.1.16)$) qu'il est sous forme incrémentale.*

Dans ce qui va suivre λ désignera $\frac{\Delta t}{h}$ (à ne pas confondre avec une valeur propre). Nous allons considérer pour le problème scalaire linéaire (2.1.1) ayant pour fonction de flux $f(u) = au$ ($a > 0$) le schéma :

$$v_i^{n+1} = v_i^n - \lambda a \Delta_-v_i^n - \frac{\lambda a}{2}(1 - \lambda a)\Delta_-(\phi(r_i)\Delta_+v_i^n) \quad (2.1.17)$$

Les 2 premiers termes du membre de droite représentent le schéma décentré amont et le dernier terme une correction d'ordre 2. ϕ pourrait être considéré comme un détecteur de discontinuité ou limiteur qui dépend des rapports des différences Δ_- et Δ_+ ($\phi = \phi(\Delta_+u_i, \Delta_-u_i) = \phi(r_i = \Delta_+u_i/\Delta_-u_i)$). r_i est heuristiquement le détecteur d'oscillations. Si $r_i < 0$ visiblement, nous sommes en présence d'une

oscillation, et il faudra donc imposer $\phi = 0$. Donc, nous trouvons $\phi \geq 0$ pour $r_i \geq 0$ et dans le cas $r_i < 0$ on imposera $\phi = 0$.

Remarque 2.1.4. *Le choix $\phi \geq 0$ lorsque $r_i \geq 0$ est imposé car Sweby choisit de retrancher de la viscosité numérique au schéma amont. En effet, en définissant a^+ et a^- par $a^+ = 1/2(a + |a|)$ et $a^- = 1/2(a - |a|)$, le schéma amont s'écrit ($a > 0$):*

$$v_i^{n+1} = v_i^n - \frac{\lambda a}{2}(v_{i+1}^n - v_{i-1}^n) + \frac{\lambda a}{2}(v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n) \quad (2.1.18)$$

Le terme le plus à droite représente la viscosité numérique du schéma amont. Le terme d'ordre 2 (2.1.17) choisi par Sweby représente une "anti-viscosité" ou "anti-diffusion" numérique d'où le choix $\phi \geq 0$ pour $r_i \geq 0$ et non $\phi \leq 0$ pour $r_i \geq 0$.

Une autre condition serait de trouver pour quelles valeurs de ϕ le schéma (2.1.17) est TVD. En mettant (2.1.17) sous forme incrémentale, on trouve que ϕ doit satisfaire la condition

$$0 \leq \left\{ \frac{\phi(r)}{r}, \phi(r) \right\} \leq 2, \quad r \geq 0 \quad (2.1.19)$$

si la condition de CFL $a\lambda \leq 1$ est respectée. Une dernière condition est que le schéma doit être du second ordre pour certains ϕ . On peut considérer une combinaison convexe de 2 schémas d'ordre 2 (qui ne sont pas forcément TVD / monotones):

$$\phi(r) = [1 - \psi(r)]\phi_{LW}(r) + \psi(r)\phi_{WB}(r), \quad \psi \in C^{0,1}(\mathbb{R}, [0,1]) \quad (2.1.20)$$

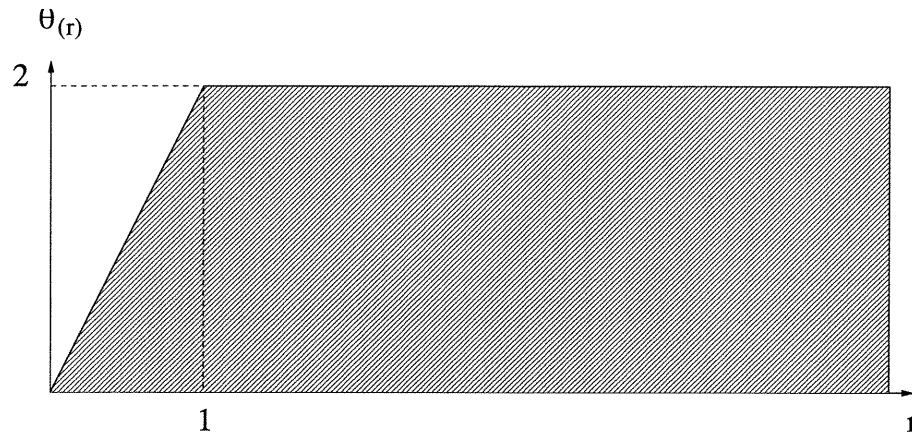


FIG. 2.3. Région TVD

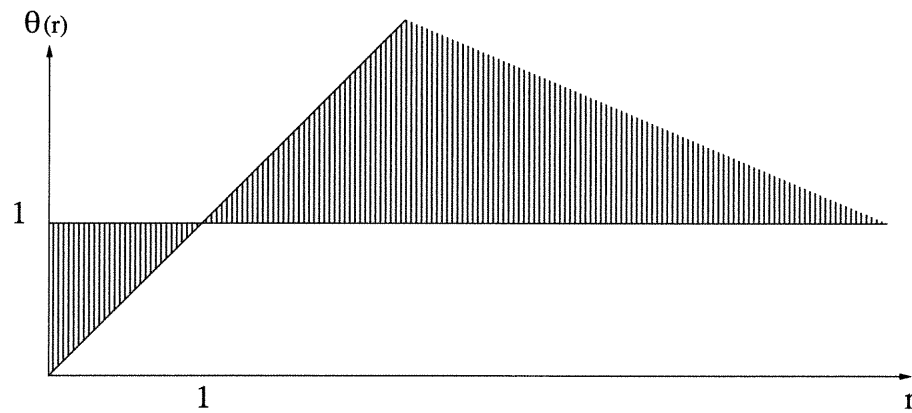


FIG. 2.4. Région d'ordre 2

où $\phi_{LW}(r)$ est le coefficient qu'il faut pour que (2.1.17) tombe sur le schéma de Lax-Wendroff et $\phi_{WB}(r)$ celui qui transforme (2.1.17) en schéma de Warming et Beam ($\phi_{LW} = 1$ et $\phi_{WB} = r$ respectivement). En intersectant les régions du plan (r, ϕ) qui correspondent aux conditions sur ϕ , nous obtenons la région TVD d'ordre 2 que devra respecter le limiteur ϕ .

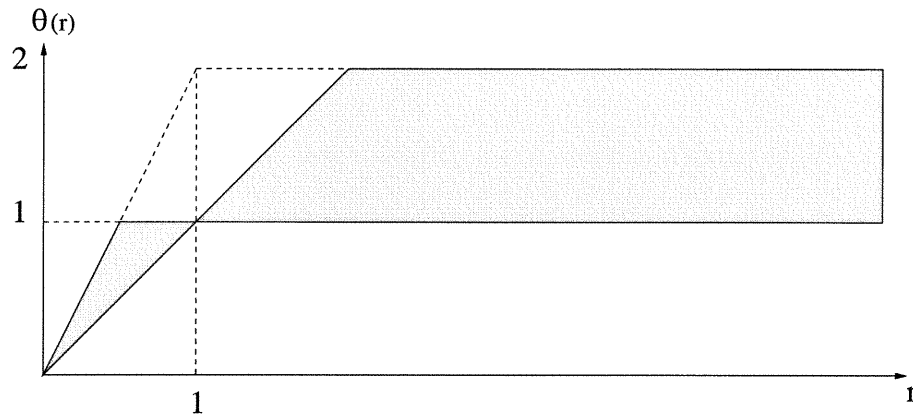


FIG. 2.5. Région TVD d'ordre 2

2.1.6. Limiteurs

Définition 2.1.9. *Nous appellerons **limiteur** toute fonction ϕ comprise dans la région TVD d'ordre 2.*

Voici quelques exemples de limiteurs :

minmod: $\phi_{mm}(r) = \max\{0, \min\{r, 1\}\}$

superbee: $\phi_{sb}(r) = \max\{0, \min\{2r, 1\}, \min\{r, 2\}\}$

Van Albada: $\phi_{va}(r) = \frac{r^2+r}{1+r^2}$

Van Leer: $\phi_{vl}(r) = \frac{2r}{1+|r|}$

Chakravarthy et Osher: $\phi_{co}(r) = \max\{0, \min\{r, \beta\}\}$ $1 \leq \beta \leq 2$.

Sweby obtient dans un contexte plus général (le cas non-linéaire) cette région TVD d'ordre 2 [59]. Il devient très évident qu'aux extrêmes le schéma est compatible mais d'ordre 1 seulement. Donc, on ne peut parler, encore une fois, de schéma d'ordre 2 mais quasi-deux.

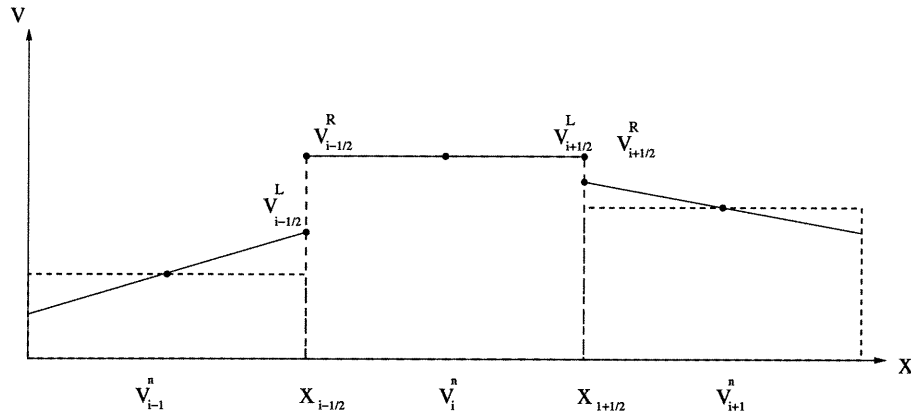


FIG. 2.6. Reconstruction de la solution

2.1.7. Technique MUSCL

Une technique conceptuellement plus simple pour obtenir un schéma d'ordre 2 consiste à reconstruire, à partir d'une solution constante par cellule, une fonction linéaire (ou même quadratique) par morceaux et d'utiliser cette reconstruction dans le schéma d'origine défini pour des constantes par cellules.

Si $g_{i+1/2}(v_i, v_{i+1})$ est le flux numérique d'un schéma d'ordre 1

$$v_i^{n+1} = v_i^n - \frac{\Delta t}{h} \{g_{i+1/2}(v_i, v_{i+1}) - g_{i-1/2}(v_{i-1}, v_i)\} \quad (2.1.21)$$

alors on obtient un schéma d'ordre 2 en espace en l'appliquant aux valeurs extrapolées aux interfaces communes des cellules C_{i-1}, C_i, C_{i+1} :

$$v_i^{n+1} = v_i^n - \frac{\Delta t}{h} \{g_{i+1/2}(v_{i+1/2}^L, v_{i+1/2}^R) - g_{i-1/2}(v_{i-1/2}^L, v_{i-1/2}^R)\} \quad (2.1.22)$$

où les $v_{i\pm 1/2}^L, v_{i\pm 1/2}^R$ sont des extrapolations linéaires jusqu'aux interfaces des cellules. Concrètement on peut par exemple choisir de procéder à une extrapolation

linéaire unilatérale à l'interface $x_{i+1/2}$:

$$v_{i+1/2}^L = v_i + \frac{1}{2}(u_i - u_{i-1}) \quad (2.1.23)$$

Le cas plus général est celui de la reconstruction qui préserve la monotonie de la solution reconstruite. Intuitivement si les constantes par cellules nous proviennent d'un schéma monotone / TVD et si le processus de reconstruction n'introduit pas de nouveaux extrêmes (oscillations) dans cette nouvelle solution reconstruite alors nous obtenons un schéma d'ordre 2 (en espace).

$$v_{i-1/2}^L = v_{i-1} + \frac{1}{2}\phi(r_{i-1})(u_{i-1} - u_{i-2}), \quad (2.1.24)$$

où $\phi(r_{i-1})$ est n'importe quel limiteur construit dans la région de la figure 2.5.

Définition 2.1.10. *Les schémas construits avec ces interpolations limitées (de degré 1) sont de type MUSCL³. Cette idée est due à van Leer [62, 63, 64].*

Remarque 2.1.5. *Cette méthode se généralise beaucoup plus facilement, lorsque l'on considère le cas de schémas aux flux numériques vraiment non-linéaires, que la première approche proposée à l'aide d'une somme d'un schéma TVD et d'une correction d'ordre 2.*

Remarque 2.1.6. *La technique MUSCL n'augmente que l'ordre de précision spatial du schéma. Pour augmenter l'ordre de précision temporel, il est possible*

d'utiliser une technique dite de prédicteur-correcteur "à la Richtmyer" recommandée par Hancock dans [61]. Brièvement, à partir de v_i^n , on fait une prédiction à $t = t^{n+1/2}$. Ensuite, on calcule u^L, u^R en $t^{n+1/2}$ dans (2.1.22).

La combinaison de la technique MUSCL et de l'utilisation d'un pas prédicteur-correcteur avec le schéma monotone décalé de Lax-Friedrichs conduit en 1D au schéma de Nessyahu-Tadmor, et en 3D à un schéma d'ordre 2 en maillage cartésien dont la construction fera l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 3

NEW 2 AND 3-DIMENSIONAL NON-OSCILLATORY CENTRAL FINITE VOLUME METHODS ON STAGGERED CARTESIAN GRIDS

(voir annexe A.1 pour les autorisations des co-auteurs et de l'éditeur)

3.1. AUTEURS

- Paul Arminjon
- Aziz Madrane
- Amik St-Cyr

3.2. RÉSUMÉ

Nous présentons une extension tri-dimensionnelle des schémas de Lax-Friedrichs et de Nessyahu-Tadmor en une dimension spatiale sur des maillages cartésiens. Le schéma centré non-oscillatoire aux différences finies de Nessyahu et Tadmor,

dans lequel la solution des problèmes de Riemann est évitée grâce au schéma décalé de Lax-Friedrichs, est généralisé, ici, à un schéma à 2 pas, non-oscillatoire, tri-dimensionnel de type volumes finis.

Des interpolants linéaires par morceaux, utilisant plusieurs techniques de limitations de type van Leer pour estimer les gradients (van Leer, van Albada, SuperBee, Minmod), conduisent à un schéma non-oscillatoire d'ordre spatial supérieur à 1. Le fait que l'ordre 2 ne soit pas atteint en 3D est premièrement analysé en considérant un second maillage dual (en 2D), et en utilisant le limiteur original de van Albada en 3D.

Des résultats numériques pour l'équation d'advection linéaire pour des données initiales continues et discontinues en 2 et 3D montrent la précision et la stabilité de la méthode. Une comparaison est faite entre le schéma 2D d'Arminjon-Stanescu-Viallon, celui de Jiang-Tadmor et la nouvelle formulation. Une nouvelle méthode simple de projection pour les gradients est utilisée dans le nouveau schéma 2D. Nous incluons aussi des tests en 3D pour les équations d'Euler (problème de la marche montante).

3.3. ABSTRACT

We present a 3D finite volume generalization of the 1-dimensional Lax-Friedrichs and Nessyahu-Tadmor schemes for hyperbolic equations on Cartesian grids. The non-oscillatory central difference scheme of Nessyahu and Tadmor, in which the resolution of the Riemann problem at the cell interfaces is by-passed thanks to

the use of the staggered Lax-Friedrichs scheme, is extended here to a two-step, tri-dimensional non-oscillatory centered scheme in finite volume formulation.

Piecewise linear cell interpolants using several van Leer-type limiting techniques to estimate the gradient (van Leer, van Albada, SuperBee, MinMod), lead to a non-oscillatory spatial resolution of order superior to 1. The fact that the expected second-order resolution is not fully attained in 3D is investigated first by considering an alternate dual grid (in 2D), and by using the original van Albada limiter in 3D.

Numerical results for a linear advection problem with continuous and discontinuous initial conditions in 2D and 3D show the accuracy and stability of the method. A comparison is made between the 2D Arminjon-Stanescu-Viallon and Jiang- Tadmor formulations and the new one. A new simple projection method is used for the gradients in the new 2D scheme. We also include results for the 3D Euler system (channel with a forward facing step).

3.4. INTRODUCTION

The non-oscillatory central difference scheme of Nessyahu and Tadmor may be interpreted as a Godunov-type scheme for one-dimensional hyperbolic conservation laws in which the resolution of the Riemann problems at the cell interfaces is by-passed thanks to the use of the staggered Lax-Friedrichs scheme. Piecewise linear MUSCL-type cell interpolants and slope limiters lead to an oscillation-free second-order resolution.

In earlier papers [8] [9] [7] we presented a two-dimensional finite volume method generalizing the one-dimensional Lax-Friedrichs [23] and Nessyahu - Tadmor [25] difference schemes for hyperbolic conservation laws to unstructured triangular grids, while in [5, 2] we constructed a corresponding extension in the case of 2-dimensional Cartesian grids. These “central” finite volume methods share with the Lax-Friedrichs and Nessyahu-Tadmor schemes the two advantages of avoiding the resolution of Riemann problems at the cell interfaces, and being non-oscillatory.

In [18], Jiang and Tadmor have presented a slightly different extension to two-dimensional Cartesian grids; the difference between both extensions for rectangular grids is that in [5], the MUSCL (Monotonic Upstream-centered Scheme for Conservation Laws) variable extrapolation (“reconstruction technique”) [32],[33] is applied both to the vector of conservative variables and to the fluxes, while in [18], it is only used for the conservative variables. All these extensions to 2-dimensional problems lead to non-oscillatory, essentially second-order accurate finite volume methods.

In this paper, we first present a finite volume extension of the first-order accurate Lax-Friedrichs scheme to three-dimensional Cartesian grids, and show that the new scheme is monotone under an appropriate CFL condition. We then construct the corresponding extension of the Nessyahu-Tadmor difference scheme to a non-oscillatory finite volume method for 3-dimensional staggered Cartesian grids, which should in principle be second-order accurate.

As our first numerical experiments indicated orders between 0.8 and 1.3, we investigated two avenues to try and recover quasi-second order accuracy. First in three dimensions, if we apply the simplified form of the van Albada limiter in the computation of the predictor, and any reasonable limiter for the gradient of the piecewise linear reconstruction at time t^n , we obtain accuracy orders between 0.7 and 1.86 depending on the choice of the limiter for the reconstruction step. Alternately, if we apply, as suggested by Venkatakrishnan [34], the *original* van Albada limiter [29], both to the reconstruction at time t^n and to the predictor at $t^{n+1/2}$, we obtain second-order resolution, in the L_1 norm, for an appropriate choice of the parameter K (see [34] and section (3.5.7)). Unfortunately, we then lose strict monotonicity preservation, and get small oscillations in computationally sensitive regions e.g. near the supersonic inlet, as was the case in [34]. This is caused by the fact that the scheme leaves the reconstruction gradients unlimited or almost unlimited in the near-constant regions, as observed by Venkatakrishnan [34]. Choosing the smallest value of K compatible with second-order accuracy allows the limiter to remain active nearly everywhere except in regions where the solution is truly constant, and thus leads to nearly perfectly monotonous profiles where needed.

Our second field of investigation, as regards the recovery of second-order accuracy *and* preservation of monotonicity was related with our earlier construction [5], for 2-dimensional Cartesian grids, of a finite volume generalization of the Lax-Friedrichs (LF) and Nessyahu-Tadmor (NT) schemes. This generalization,

for Cartesian grids, is not the direct transposition to rectangular grids of our earlier generalization of the LF and NT schemes to unstructured triangular grids [8] [9]; indeed it features cells, both for the original and dual grid, with sides parallel to the x, y axes (figure (3.1 left)), while for the direct analogous to our triangular scheme, the alternate quadrilateral cells L_{lm} of the dual grid should in fact be *oblique*, with sides making 45 degree angles with the sides of the original cell C_{ij} (see figure (3.1 right) showing the dual cell L_{ij}).

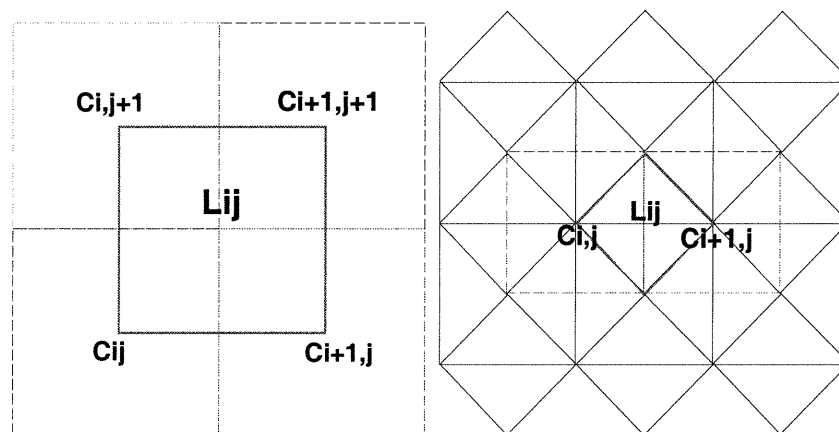


FIG. 3.1. 2D dual cells. Left: original form(non-oblique) right: oblique case

This approach has been presented in [2, 3], and has also been considered, independently, by Katsaounis and Levy [19]; one of the tests presented in [19] is the same as our first numerical test here, inspired from [18], and results are comparable since both schemes are very similar. With this new "oblique" version of our 2-dimensional finite volume extensions of the Lax-Friedrichs and Nessyahu-Tadmor schemes to staggered Cartesian grids, we obtain second-order accuracy

(for continuous solutions) and monotonicity preservation, provided that we use standard limiters, without having to apply the original or modified van Albada limiter.

In a forthcoming paper, we might extend this new "oblique dual grid" approach to the corresponding 3-dimensional finite volume method with oblique dual cells, and show that we again obtain, in the case of a linear advection problem with continuous initial function, second order accuracy and monotonicity preservation without having to resort to special limiters such as the original van Albada limiter, and simply applying the 3-dimensional analog of the standard limiters successfully used with both 2-dimensional Cartesian versions (non oblique dual rectangular cells [5], oblique dual cells as described in subsection 3.6 of this paper) of the 2-dimensional finite volume method for Cartesian grids. Regarding the actual accuracy one should expect to obtain, let us observe here that in the case of a nonlinear hyperbolic equation with a (discontinuous) initial function $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \cap BV_{loc}(\mathbb{R}^d)$, Kuether [21, 22] has recently proved an error estimate of order 0.25 for the Lax-Friedrichs-type finite volume scheme on unstructured grids, which is not optimal; it was indeed recently proved by Sabac [26] that $h^{1/2}$ is optimal for first-order schemes. For second-order schemes, it is presently believed / conjectured that h^1 is optimal. Kuether's proof of the $h^{1/4}$ -error estimate is inspired from the work of Haasdonk, Kroener and Rohde [14].

Instead of modifying the staggered/dual cells, another possible approach consisting of modifying the numerical flux by using an improved quadrature formula

for the fluxes across the boundaries of the cells has recently been proposed by Lie and Noelle [24]. Their scheme is less sensitive to grid orientation effects and leads to an improved preservation of symmetries as compared with the original scheme considered here and in [2, 5] and [18].

We have recently proposed a new version for 1 and 2-dimensional Cartesian grids and 3-dimensional unstructured tetrahedral grids, where a new approach to compute the flux allows to bypass the predictor step used in all of the above schemes, thus substantially reducing computing times [6].

The organization of this paper is as follows. In section 3.5, we describe our 3-dimensional central finite volume methods of first and second order accuracy, which generalize the LF and NT schemes, respectively. The dual cells used here have sides parallel to the coordinate axes, as in [5]. The first-order accurate Lax-Friedrichs-type finite volume method is shown to be *monotone* under an appropriate CFL condition. We also describe the limiters used in this paper. In section 3.6, we construct the direct analogous, for 2-dimensional Cartesian grids, of our finite volume generalization of the NT scheme for unstructured triangular grids. This 2-dimensional finite volume method has oblique dual cells. In section 3.7, we present numerical experiments for the 3-dimensional method of section 3.5 and for the 2-dimensional oblique dual cell method of section 3.6, with, in the latter case, a comparison with our earlier 2-dimensional finite volume method with dual cell boundaries parallel to the axes, and with the Jiang-Tadmor variant of that method.

3.5. 3-DIMENSIONAL FINITE VOLUME EXTENSIONS OF THE LAX-FRIEDRICHS AND NESSYAHU-TADMOR SCHEMES

In this section we briefly describe how to construct a 3D finite volume generalization of the Nessyahu-Tadmor (1D) scheme on Cartesian grids. A 2D extension (ASV¹) on quadrilaterals, featuring non oblique dual cells, was first proposed in 1995 by Arminjon et al. [5]. The ASV finite volume method differs from the Nessyahu-Tadmor scheme because not only the dependent variable vector \vec{U} but also the fluxes are reconstructed using a MUSCL technique. Four items are needed to obtain the ASV formulation (on structured uniform hexahedrals), for each time step.

- A centered monotone scheme (which implies that this scheme is only first-order)
- A reconstruction of the solution with the MUSCL method to obtain second-order spatial accuracy
- A predictor for the fluxes, for second-order time accuracy
- A precise CFL condition to prevent wave interaction between the original and dual grids

The first item is defined with the help of a staggered Lax-Friedrichs-type (LF) finite volume scheme. This scheme uses a uniform fully structured hexahedral grid for the dual grid. We also need to prove that this LF-type scheme is monotone.

1. Arminjon-Stanescu-Viallon

The reconstruction is then performed here both for the point values \vec{U}_{ijk} and for the fluxes (see [5]). A predictor (in time) is then constructed by using a Taylor expansion combined with the conservation law (3.5.1). Finally, the CFL condition is computed using analytic and geometric arguments inspired by Hindmarsh et al. [15] and [9].

3.5.1. Generic model equation

We consider the 3-dimensional system of conservation laws

$$\vec{U}_t + \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(U) = \vec{U}_t + \vec{f}_x + \vec{g}_y + \vec{h}_z = 0 \quad (3.5.1)$$

$$\text{where} \quad \vec{U} = (u^1, u^2, \dots, u^m)^T$$

$$\vec{F} = (\vec{f}, \vec{g}, \vec{h}) = ((f^1, f^2, \dots, f^m)^T, (g^1, g^2, \dots, g^m)^T, (h^1, h^2, \dots, h^m)^T)$$

with the initial condition $\vec{U}(x, y, z, 0) = \vec{U}_0(x, y, z)$. System (3.5.1) will be assumed to be hyperbolic in the sense of the following definition.

Définition 3.5.1. *The system (3.5.1) is said to be hyperbolic if any linear combination of the $m \times m$ Jacobian matrices $A(\vec{U}), B(\vec{U}), C(\vec{U})$ where*

$$\vec{A} = (A(\vec{U}), B(\vec{U}), C(\vec{U})) = \left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{U}}, \frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{U}}, \frac{\partial \vec{h}}{\partial \vec{U}} \right) \quad (3.5.2)$$

has m real eigenvalues $\lambda^k(\vec{U})$ and m linearly independent right and left eigenvectors $\vec{r}^k(\vec{U})$ and $\vec{l}^k(\vec{U})$ that satisfy

$$\vec{r}^i \cdot \vec{l}^j = \delta_{ij}$$

3.5.1.1. Notations

As the staggered Lax-Friedrichs and Nessyahu-Tadmor schemes are one-dimensional two step schemes using two staggered grids at alternate time steps, our three-dimensional finite volume extensions also use two staggered grids and two time steps.

For the first grid, the control volume or cell is the region $C_{ijk} = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}] \times [y_{j-\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}] \times [z_{k-\frac{1}{2}}, z_{k+\frac{1}{2}}]$, while for the second grid the dual cell will be defined as $L_{ijk} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}]$.

3.5.2. First time step, LF-type scheme

In the first (and further odd) time step of our 3-dimensional finite volume schemes, we start from initial (or previously obtained) cell average values $\vec{U}_{C_{ijk}}$ for the cells of the first grid, and compute cell average values $\vec{U}_{L_{ijk}}$ for the (staggered) dual cells of the second grid. This is done by integrating (3.5.1) on an extended control volume $L_{ijk} \times [t^n, t^{n+1}]$, where L_{ijk} is a cell of the dual grid, and by assuming that $\vec{U}_{L_{ijk}}(t^n + \Delta t)$ is piecewise constant on the cells of the second grid. The following equality is easily verified with the help of figure (3.2), showing dual cell L_{ijk} and one of its composing subcells, $L_{ijk} \cap C_{lmn}$ in the particular case $l = i, m = j, n = k$ (dotted region).

$$L_{ijk} = \bigcup_{\substack{lmn \\ \text{neighbour}}} L_{ijk} \cap C_{lmn} \quad (3.5.3)$$

where lmn means $l = i, i + 1$; $m = j, j + 1$; $n = k, k + 1$ and in the sequel,

$\sum_{lmn} (\cdot)$ stands for $\sum_{\substack{lmn \\ \text{neighbour}}} (\cdot)$. Using (3.5.1) and applying the divergence theorem to the flux term, we obtain

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{L_{ijk}} \vec{U}_t dV dt + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\partial L_{ijk}} \vec{F} \cdot \vec{n} dA dt = 0 \quad (3.5.4)$$

or

$$\int_{L_{ijk}} \vec{U}(x, y, z, t^{n+1}) dV - \int_{L_{ijk}} \vec{U}(x, y, z, t^n) dV = - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\partial L_{ijk}} \vec{F}(\vec{U}(x, y, z, t)) \cdot \vec{n} dA dt \quad (3.5.5)$$

For a *first-order accurate Lax-Friedrichs-type method*, the R.H.S. is evaluated (according to the left rectangular quadrature formula) at time t^n , using (3.5.3) and cell-average values :

$$V(L_{ijk}) \vec{U}_{L_{ijk}}(t^{n+1}) - \sum_{lmn} V(C_{lmn} \cap L_{ijk}) \vec{U}_{lmn}(t^n) = -\Delta t \int_{\partial L_{ijk}} \vec{F}(\vec{U}^n) \cdot \vec{n} dA \quad (3.5.6)$$

The function $V()$ calculates the volume of the region common to the cell L_{ijk} (second grid) and cell C_{lmn} (first grid). Let us mention that the cells of either grid do not need to be cubic, in fact, they can be any rectangular prism in 3-space.

For a *second-order accurate method* generalizing the NT scheme, the R.H.S. of (3.5.5) is evaluated with the midpoint formula for integration with respect to time

$$- \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\partial L_{ijk}} \vec{F}(\vec{U}(x, y, z, t)) \cdot \vec{n} dA dt \cong -\Delta t \int_{\partial L_{ijk}} \vec{F}(\vec{U}^{n+1/2}) \cdot \vec{n} dA \quad (3.5.7)$$

where $\vec{U}^{n+1/2}$ is some predicted value obtained with the help of (3.5.1). The corresponding calculations will be described in subsection (3.5.6).

3.5.3. Second time step, LF-type scheme

Once the first time step is completed, starting from the obtained dual cell values $\vec{U}_{L_{ijk}}$, we compute cell-average values $\vec{U}_{C_{ijk}}$ for the original cells C_{ijk} of the first grid; the calculations are performed in a similar manner (see [5],[8],[9] for details in the 2-dimensional case).

3.5.4. Fluxes

The computation of the flux for the scheme (R.H.S of (3.5.6)) is more complex than that of the conservative variables. Here, again, we assume that the fluxes are piecewise constant on ∂L_{ijk} and ∂C_{lmn} respectively.

We begin by labelling each of the faces of ∂L_{ijk} and the corresponding normal vectors figure (3.2):

$$\partial L_{ijk} = \partial L_{ijk}^1 \cup \partial L_{ijk}^2 \cup \partial L_{ijk}^3 \cup \partial L_{ijk}^4 \cup \partial L_{ijk}^5 \cup \partial L_{ijk}^6$$

$$\vec{n}_1 = -\vec{n}_x \quad \vec{n}_2 = -\vec{n}_y \quad \vec{n}_3 = -\vec{n}_z \quad (3.5.8)$$

$$\vec{n}_4 = \vec{n}_1 \quad \vec{n}_5 = \vec{n}_2 \quad \vec{n}_6 = \vec{n}_3 \quad (3.5.9)$$

$$\vec{n}_x = (1,0,0), \quad \vec{n}_y = (0,1,0), \quad \vec{n}_z = (0,0,1) \quad (3.5.10)$$

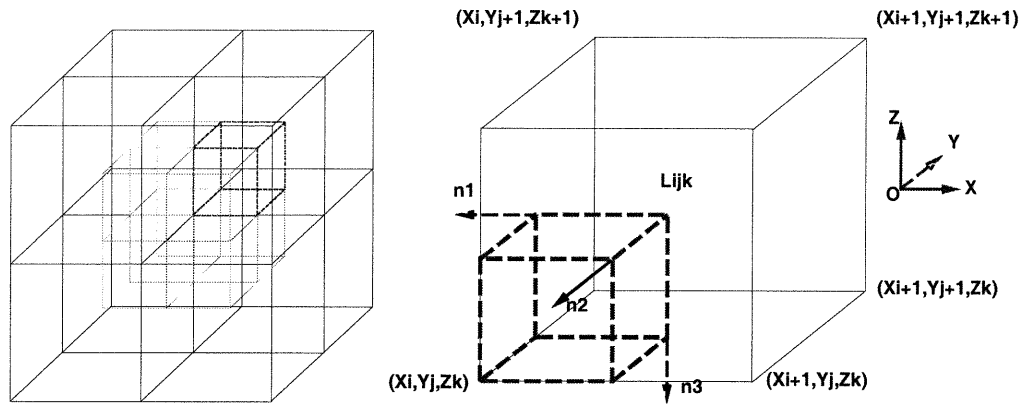


FIG. 3.2. Intersection of Cell L_{ijk} and Cell $C_{l=i,m=j,n=k}$ (dotted region)

Again, one can derive an expression similar to (3.5.3) for the faces. Each one of the faces can be written as the union of 4 subfaces resulting from the intersection with the C_{lmn} of the first grid:

$$\partial L_{ijk}^q = \bigcup_{\substack{lmn \\ \text{neighbour}}} C_{lmn} \cap \partial L_{ijk}^q$$

where the notation *neighbour* now means that only four of the eight index combinations corresponding to the notation $\bigcup_{\substack{lmn \\ \text{neighbour}}}$ give rise to a non-empty intersection set. If $A()$ is a function that calculates the area of a given surface, the first step

of the staggered LF scheme can be written in the following compact form :

$$\begin{aligned} \vec{U}_{L_{ijk}}(t^n + \Delta t) = \frac{1}{V(L_{ijk})} & \left(\sum_{\substack{lmn \\ \text{neighbour}}} V(C_{lmn} \cap L_{ijk}) \vec{U}_{lmn}(t^n) - \right. \\ & \left. \Delta t \sum_{\substack{q=1 \\ \text{neighbour}}}^6 \sum_{lmn} A(C_{lmn} \cap \partial L_{ijk}^q) \vec{F}_{lmn} \cdot \vec{n}_q \right) \end{aligned} \quad (3.5.11)$$

where $\vec{F}_{lmn} = \vec{F}(\vec{U}_{lmn}(t^n))$ and $\vec{U}_{lmn}(t^n) = \vec{U}_{C_{lmn}}(t^n)$ for lmn neighbour.

3.5.5. Monotonicity condition

Let us recall here some basic definitions to make the article self-contained.

Définition 3.5.2. *A general scheme for the model equation (3.5.1) can be written*

$$\vec{U}_{L_{ijk}}^{n+1} = \mathcal{H}(\vec{U}_{C_{i-p,j-q,k-r}}, \dots, \vec{U}_{C_{i+p',j+q',k+r'}}) \quad (3.5.12)$$

Our finite volume scheme is a subcase of the form:

$$\vec{U}_{L_{ijk}}^{n+1} = \mathcal{H}(\vec{U}_{C_{i,j,k}}, \dots, \vec{U}_{C_{i+1,j+1,k+1}}) = \mathcal{H}\{\vec{U}_{lmn}(t^n), (lmn \text{ neighbour})\} \quad (3.5.13)$$

Définition 3.5.3. *The scheme (3.5.13) is monotone if \mathcal{H} is a monotone increasing function of each of its arguments.*

$$0 \leq \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{U}_{lmn}} \quad (lmn \text{ neighbour})$$

or equivalently if all eigenvalues of the matrix $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{U}_{lmn}}$ (lmn neighbour) are non negative.

Theorem 3.5.1. *Under the CFL-like condition (3.5.22) below, the 3-dimensional finite volume extension (3.5.11) of the LF scheme for structured uniform staggered grids is monotone.*

Proof of theorem 3.5.1 From (3.5.11) we find

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{U}_{lmn}} = \frac{V(C_{lmn} \cap L_{ijk})}{V(L_{ijk})} \mathcal{I} - \Delta t \sum_{q=1}^6 \frac{A(C_{lmn} \cap \partial L_{ijk}^q)}{V(L_{ijk})} \vec{\mathcal{A}}_{lmn} \cdot \vec{n}_q \quad (3.5.14)$$

for lmn neighbour . To simplify the calculations, we introduce the following vector :

$$\vec{K} = \sum_{q=1}^6 \frac{A(C_{lmn} \cap \partial L_{ijk}^q)}{V(L_{ijk})} \vec{n}_q = (K_x, K_y, K_z) \quad (3.5.15)$$

we then have

$$\begin{aligned} \sum_{q=1}^6 \frac{A(C_{lmn} \cap \partial L_{ijk}^q)}{V(L_{ijk})} \vec{\mathcal{A}}_{lmn} \cdot \vec{n}_q &= \vec{\mathcal{A}}_{lmn} \cdot \sum_q \frac{A(C_{lmn} \cap \partial L_{ijk}^q)}{V(L_{ijk})} \vec{n}_q \\ &= \vec{\mathcal{A}}_{lmn} \cdot \vec{K} \equiv \mathcal{M} \end{aligned} \quad (3.5.16)$$

Here, $\mathcal{M} = \mathcal{M}(l,m,n)$ represents a weighted sum of the 3 jacobian matrices A,B,C . By our assumption on the hyperbolicity of system (3.5.1), the matrix \mathcal{M} has real eigenvalues λ_s ($1 \leq s \leq m$) and can be diagonalised by a similarity transformation (see also Hirsch Vol.II, pp.176-191 for the Euler equations). By definition (3.5.3), monotonicity of our finite volume extension of the Lax-Friedrichs scheme will be established if we can prove, in view of (3.5.14) -(3.5.16), that

$$\mathcal{W} \equiv \frac{V(C_{lmn} \cap L_{ijk})}{V(L_{ijk})} \mathcal{I} - \Delta t \mathcal{M} \quad (3.5.17)$$

is positive semi-definite. By the spectral theorem, the eigenvalues of \mathcal{W} are the numbers

$$\frac{V(C_{lmn} \cap L_{ijk})}{V(L_{ijk})} - \Delta t \lambda_s(\mathcal{M}) \quad (3.5.18)$$

where $\lambda_s(\mathcal{M})$ is an eigenvalue of \mathcal{M} . We therefore need

$$\begin{aligned} \Delta t \lambda_s(\mathcal{M}) &\leq \frac{V(C_{lmn} \cap L_{ijk})}{V(L_{ijk})} \\ s &= 1, \dots, m \quad lmn \text{ neighbour} \end{aligned} \quad (3.5.19)$$

or finally

$$\Delta t \max_{1 \leq s \leq m} \{|\lambda_s(\mathcal{M})|\} \leq \frac{V(C_{lmn} \cap L_{ijk})}{V(L_{ijk})} \quad (3.5.20)$$

Remark 3.5.1. *It might appear at first sight that (3.5.20) does not have the dimensional form of a CFL condition; but the matrix \mathcal{M} is equal to the matrix product $\vec{A}_{lmn} \cdot \vec{K}$ where \vec{K} is obviously $\mathcal{O}(h^{-1})$ by (3.5.15), where h is the mesh size in the x, y, z directions, for the case of a uniform rectangular grid. The eigenvalues $\lambda_s(\mathcal{M})$ are thus $\mathcal{O}(h^{-1})$ and (3.5.20) does have the dimensions of a CFL condition.*

Remark 3.5.2. *For a perfectly uniform hexahedral grid the factor $\frac{V(C_{lmn} \cap L_{ijk})}{V(L_{ijk})}$ reduces to $\frac{1}{8}$, and the vector \vec{K} takes the simpler form $\vec{K} = \frac{1}{4h} \sum_{q=1}^6 \delta(C_{lmn} \cap L_{ijk}) \vec{n}_q$, so that the monotonicity condition (3.5.20) is not very restrictive (here $\delta(\cdot)$ represents a “Kronecker-like” set function which is equal to zero when the argument*

is the empty set, otherwise its value is 1); indeed, we then obtain the condition

$$\frac{\Delta t}{h} \max_s \{|\lambda_s(\vec{U}_{lmn})|\} \leq \frac{1}{2} \quad (3.5.21)$$

However this is only the monotonicity condition for a usual (non staggered) grid, the parameter h in (3.5.21) must be divided by two for obvious geometric reasons (since we are using staggered grids). The final monotonicity condition for the finite volume Lax-Friedrichs scheme can thus be written as

$$\frac{\Delta t}{h} \max_s \{|\lambda_s(\vec{U}_{lmn})|\} \leq \frac{1}{4} \quad (3.5.22)$$

Remark 3.5.3. *In the scalar case, we can therefore expect the numerical solution u_h to converge to the unique solution of (3.5.1) satisfying the entropy condition, as $h \rightarrow 0$, if it does converge, see [20, 10, 12]. In the 2-dimensional case of unstructured triangular grids, we have proved [7], for a scalar linear hyperbolic equation, that the numerical solution satisfies a discrete maximum principle, and converges weakly* to a weak solution of (3.5.1). The proof can be directly extended to the case of 2-dimensional Cartesian grids, again for a scalar linear hyperbolic equation.*

3.5.6. A second order finite volume method via MUSCL cellwise interpolation

In the one-dimensional Nessyahu-Tadmor difference scheme, the first order accuracy of the Lax-Friedrichs scheme was raised to second order by the use of van Leer's MUSCL [32],[33] cellwise piecewise linear interpolation of the conservative

variables (but not of the flux functions), and a midpoint rule approach for the time discretisation of the flux integral, implemented with a predictor-corrector treatment of each time step. In the 3-dimensional finite volume generalization, we apply the same strategy to both the conservative variables and the flux functions $\vec{f}, \vec{g}, \vec{h}$, following our 2-dimensional generalization of the NT scheme to Cartesian grids [5]. Let $M_{C_{lmn}}^{\vec{U}}$ (resp. $M_{C_{lmn}}^{\vec{f}}, M_{C_{lmn}}^{\vec{g}}, M_{C_{lmn}}^{\vec{h}}$) denote the piecewise trilinear interpolant of the conservative variable \vec{U} (resp. of the flux functions $\vec{f}, \vec{g}, \vec{h}$) on cell C_{lmn} :

$$M_{C_{lmn}}^{\vec{U}}(\vec{R}) = \vec{U}_{C_{lmn}} + \nabla \vec{U}_{C_{lmn}} \cdot (\vec{R} - \vec{R}_{C_{lmn}}) \quad (3.5.23)$$

where $\nabla \vec{U}_{C_{lmn}}$ is some limited approximate gradient of the interpolant, to be defined later (section 3.5.7) (with similar definitions for $M_{C_{lmn}}^{\vec{f}}$ etc). \vec{R} is the position vector of an arbitrary point contained in C_{lmn} , and $\vec{R}_{C_{lmn}}$ denotes the centroid of the same cell.

Replacing in (3.5.5) all the cellwise constant variables by their linear reconstruction (3.5.23), integrating in time with the help of the midpoint rule for the flux integral, we obtain

$$V(L_{ijk})\vec{U}_{L_{ijk}}^{n+1} = \int_{L_{ijk}} M_{L_{ijk}}^{\vec{U}} dV - \Delta t \int_{\partial L_{ijk}} (M_{L_{ijk}}^{\vec{f}^{n+1/2}} n_x + M_{L_{ijk}}^{\vec{g}^{n+1/2}} n_y + M_{L_{ijk}}^{\vec{h}^{n+1/2}} n_z) dA \quad (3.5.24)$$

where $M_{L_{ijk}}^{\vec{U}}$ and $M_{L_{ijk}}^{\vec{f}^{n+1/2}}$ are the piecewise linear interpolants of \vec{U} and $\vec{f}^{n+1/2} = \vec{f}(\vec{U}(t^{n+1/2}))$, respectively, in cell L_{ijk} ; $\vec{U}(t^{n+1/2})$ is a predicted value defined below.

We now use the definitions of the control volumes C_{ijk} and L_{ijk} and introduce the following notations :

$$\Delta x_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}, \quad \Delta y_j = y_{j+1/2} - y_{j-1/2}, \quad \Delta z_k = z_{k+1/2} - z_{k-1/2}$$

$$V_{ijk} = \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k, \quad A_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j$$

For a uniform and isotropic grid, $\Delta x_i = \Delta y_j = \Delta z_k \equiv h$.

For simplicity, from now on, \vec{U}_{ijk} will mean $\vec{U}_{C_{ijk}}$ i.e. the value of \vec{U} at the centroid of the cell of the first grid. Decomposing the limited gradient into its Cartesian parts gives :

$$\nabla \vec{V}_{ijk} = (\vec{V}_{ijk,x}^{\text{lim}}, \vec{V}_{ijk,y}^{\text{lim}}, \vec{V}_{ijk,z}^{\text{lim}}) \quad (3.5.25)$$

where for any vector function \vec{V} , \vec{V}^{lim} denotes the limited vector \vec{V} . Our complete ASV-type (non oblique Cartesian) 3d finite volume generalization of the NT scheme can now be derived and is given in the *appendix*. The intermediate-time fluxes are found with the help of a predictor step:

$$\vec{U}_{ijk}^{n+\frac{1}{2}} = \vec{U}_{ijk}^n + \frac{\Delta t}{2} \vec{U}_{ijk,t}(t^n) \quad (3.5.26)$$

Using the conservation equation (3.5.1), (3.5.26) can be written in a form which is easy to evaluate, replacing the gradients by their limited numerical approximations:

$$\vec{U}_{ijk}^{n+\frac{1}{2}} = \vec{U}_{ijk}^n - \frac{\Delta t}{2} (\vec{f}_{ijk,x}^{\text{lim}} + \vec{g}_{ijk,y}^{\text{lim}} + \vec{h}_{ijk,z}^{\text{lim}}) \quad (3.5.27)$$

where $\vec{f}_{ijk,x}^{\text{lim}}$ denotes the limited derivative of \vec{f} in the \hat{x} direction.

Here, an alternate choice for the predictor can be made, using the known Jacobian matrices of the flux function:

$$\vec{U}_{ijk}^{n+\frac{1}{2}} = \vec{U}_{ijk}^n - \frac{\Delta t}{2} (A \cdot \vec{U}_{ijk,x}^{\text{lim},n} + B \cdot \vec{U}_{ijk,y}^{\text{lim},n} + C \cdot \vec{U}_{ijk,z}^{\text{lim},n}) \quad (3.5.28)$$

From a computational viewpoint, some inconveniences arise from the fact that (3.5.28) is very costly to evaluate even for the non-conservative Jacobians (which have a simpler form).

For each of these two predictors, two approaches to define the predicted values of the dependent variables at time t^{n+1} can be used. By a proper transformation (see [16], 1990 and [12], 1996), one can pass from the conservative to the physical variables (when dealing with the Euler equations), make the prediction at $t^{n+1/2}$ and then use it to reconstruct the fluxes at $t^{n+1/2}$, to finally obtain \vec{U}^{n+1} . The other approach is to use the predictor on the conservative variables, and then rebuild the fluxes with the intermediate-time approximations.

3.5.7. Limiters

To give a short description of the MUSCL cell interpolation considered here with the various limiters mentioned earlier in this section and used in our numerical experiments, we follow the notation used in [34] and [27], and consider *in the 1-dimensional case for simplicity* piecewise linear reconstructions defined, at

the cell interface $x_{i+1/2}$, by

$$u_{i+1/2}^L = u_i + \frac{1}{2}\psi(\theta_i)(u_i - u_{i-1}), \quad (3.5.29)$$

$$u_{i-1/2}^R = u_i - \frac{1}{2}\psi\left(\frac{1}{\theta_i}\right)(u_{i+1} - u_i) \quad (3.5.30)$$

where

$$\theta_i = \frac{\Delta_+ u_i}{\Delta_- u_i} \equiv \frac{u_{i+1} - u_i}{u_i - u_{i-1}} \quad (3.5.31)$$

and $\psi(\theta)$ is the (slope) limiter function; we take $\psi(r) \equiv 0$ for $r \leq 0$. In this paper, we have used the following limiters.

(i) Simplified van Albada² (SVA)

$$\psi_{VA}(\theta) = \frac{\theta^2 + \theta}{\theta^2 + 1} \quad (3.5.32)$$

With this limiter, (3.5.29) takes the form

$$u_{i+1/2}^L = u_i + \frac{1}{2} \frac{\theta^2 + \theta}{\theta^2 + 1} (u_i - u_{i-1}) \quad (3.5.33)$$

with $\theta_i = \frac{\Delta_+ u_i}{\Delta_- u_i} \equiv \frac{\Delta_+}{\Delta_-}$ for simplicity.

We note here that if we use a cell interface value defined from a centered approximation of the slope

$$u_{i+1/2}^L = u_i + \frac{1}{2} R(\theta_i) \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2} \quad (3.5.34)$$

2. SVA: Simplified van Albada limiter. (We should mention here that in [34], the original and simplified van Albada limiters have been exchanged. Van Albada's original limiter really is defined by (3.5.37), as communicated to the first author by B. van Leer.)

van Albada's simplified limiter must now be written in the form

$$R(\theta_i) = \frac{2\theta_i}{1 + \theta_i^2} \quad (3.5.35)$$

It can be easily verified that both (3.5.33) and (3.5.34) can be written as

$$u_{i+1/2}^L = u_i + \frac{1}{2} \frac{\Delta_+^2 \Delta_- + \Delta_-^2 \Delta_+}{\Delta_+^2 + \Delta_-^2} \quad (3.5.36)$$

(ii) Original van Albada³ (OVA)

This choice correspond to modifying equation (3.5.36) as follows:

$$u_{i+1/2}^L = u_i + \frac{1}{2} \frac{(\Delta_+^2 + \epsilon^2)\Delta_- + (\Delta_-^2 + \epsilon^2)\Delta_+}{\Delta_+^2 + \Delta_-^2 + 2\epsilon^2} \quad (3.5.37)$$

where ϵ^2 is made proportional to $(\Delta x)^3$, by setting $\epsilon^2 = (K\Delta x)^3$ where K is a constant. Notice that at an extremum of u or in a region where u is nearly constant, $\epsilon^2 = O(h^3)$ will dominate Δ_+^2 , Δ_-^2 by Taylor's theorem, leading to a nearly unlimited value $u_{i+1/2}^L$ (i.e. $\psi \approx 1$) in (3.5.29), while if K is very large the same situation will prevail. It has been verified by Venkatakrisnan that for a fixed value of K , the scheme will tend to be second-order accurate, but will not be monotonicity preserving for an advection problem. This difficulty arises from the fact that the scheme resumes to the unlimited form (3.5.34) with $R(\theta) = 1$ in the near-constant regions (see [34] for details). By restricting the action of the *original* van Albada limiter (3.5.37) to the neighbourhood of true extrema only, while using the simplified form (3.5.32)-(3.5.36) elsewhere, Venkatakrisnan obtained a globally second-order accurate scheme (for all usual norms) which is monotonicity preserving (the limiter is then the original van Albada limiter at a true extremum,

but the simplified van Albada in near-constant regions). In this paper, for simplicity, we chose the following limiting strategy: Defining $u_i^{\max} \equiv \max(u_{i-1}, u_i, u_{i+1})$ and reconstructions of the form $u_i(x) = u_i + \psi(\theta_i) \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} (x - x_i)$ we use the original van Albada limiter (3.5.37) everywhere except when both $\tilde{\Delta}_+ = u_i^{\max} - u_i$ and $\tilde{\Delta}_- = u_i(x_{i+1/2}) - u_i$ are below a certain tolerance threshold, in which case we take the limiter equal to 1 (no limitation). This variant of the original van Albada limiter will be noted OVAT (Original van Albada with Threshold).

(iii) van Leer (VL)

In van Leer's notation we consider piecewise linear interpolants

$$\tilde{u}(x) = u_i + \delta_i \frac{(x - x_i)}{\Delta x} \quad x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2} \quad (3.5.38)$$

with θ_i as in (3.5.31) and

$$\delta_i = R(\theta_i) \hat{\delta}_i \quad \text{and} \quad \hat{\delta}_i \equiv \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2} \quad (3.5.39)$$

the coefficient $R(\theta_i)$ is a "slope limiter" related to Sweby's [28] flux limiter $\phi(r)$ by [12]

$$\phi_{VL}(r) = \frac{R(\theta)(1 + \theta)}{2\theta} \quad \text{with} \quad r_i = \frac{\Delta_- u_i}{\Delta_+ u_i} = \frac{1}{\theta_i} \quad (3.5.40)$$

We then have [12, 13] the corresponding forms of van Leer's limiters

$$R(\theta) = \frac{4\theta}{(1 + \theta)^2} \quad \theta \geq 0 \quad (3.5.41)$$

and

$$\phi_{VL}(r) = \begin{cases} \frac{2r}{1+r} & r \geq 0 \\ 0 & r < 0 \end{cases} \quad (3.5.42)$$

(iv) MinMod (MM)

In Sweby's notation, the minmod limiter is defined by

$$\phi_{MM}(r) = \begin{cases} \min(r,1) & r \geq 0 \\ 0 & r < 0 \end{cases} \quad (3.5.43)$$

in the slope limiter notation

$$\text{MM}(\Delta_+, \Delta_-) = \frac{1}{2} \{ \text{sgn}(\Delta_+) + \text{sgn}(\Delta_-) \} \min\{ |\Delta_-|, |\Delta_+| \} \quad (3.5.44)$$

(v) Superbee (SB)

$$\phi_{SB}(r) = \max\{0, \min(2r,1), \min(r,2)\} \quad (3.5.45)$$

3.6. 2-D CARTESIAN GRID SCHEME WITH OBLIQUE DUAL CELLS

ASCV

3.6.1. Notations

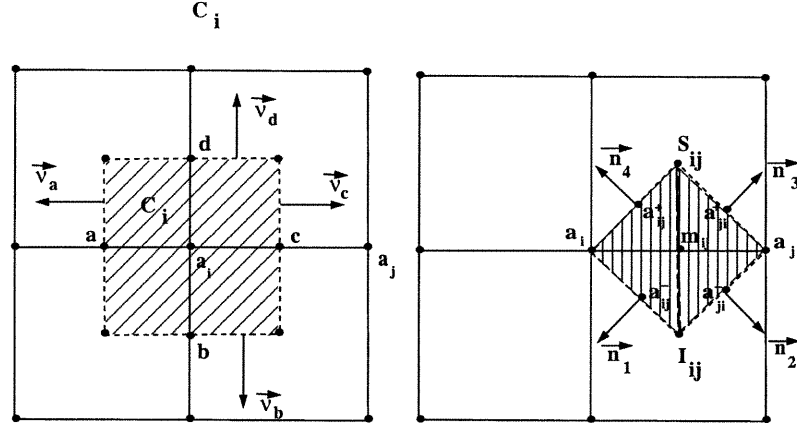
We consider equation (3.5.1) with a flux function $\vec{F}(\vec{U}) = (\vec{f}(\vec{U}), \vec{g}(\vec{U}))$ in some rectangular region Ω of the $x - y$ plane, with initial condition

$$\vec{U}(x, y, t = 0) = \vec{U}_0(x, y)(x, y) \in \Omega \quad (3.6.1)$$

We shall describe the scheme in the case of a uniform rectangular grid which partitions Ω into M^2 squares of equal area; the extension to arbitrary rectangular grids is straightforward, except for the initialization, which requires numerical integration, and the programming part of the resolution, where we have to proceed as in the case of a fully unstructured grid. If $h = \Delta x = \Delta y = x_{i+1/2} - x_{i-1/2} = y_{j+1/2} - y_{j-1/2}$ is the mesh size, the nodes of the first grid are the points $(x_i, y_j) = (ih, jh)$ for $0 \leq i, j \leq M$. We introduce a numbering of these nodes, noted

$$a_i \quad 1 \leq i \leq (M + 1)(M + 1) \quad (3.6.2)$$

and consider, for an arbitrary node a_i , the finite volume cell C_i defined, for the first grid, as the square (quadrilateral in the case of an arbitrary rectangular grid) obtained by joining the centroids of the four squares adjacents to a_i (figure (3.3)). For the second (dual) grid, the nodes are the midpoints m_{ij} of sides such as a_i, a_j of the original grid. The corresponding oblique dual cell L_{ij} is defined by joining the points a_i, a_j to the centroids I_{ij} and S_{ij} of the squares sharing the common side $a_i a_j$.

FIG. 3.3. Cell C_i and Cell L_{ij}

Let $\vec{U}_i^n \cong \vec{U}(a_i, t^n)$ and $\vec{U}_{ij}^{n+1} \cong \vec{U}(m_{ij}, t^{n+1})$ denote the nodal or cell average values in the first and second grid at time t^n and t^{n+1} , respectively (n even). In the first step, we compute the approximation \vec{U}_{ij}^{n+1} of the problem (3.5.1)-(3.6.1) at the centroid of the oblique cell L_{ij} , using a finite volume approach.

3.6.2. First time step

Integrating (3.5.1) in the extended cell $L_{ij} \times [t^n, t^{n+1}] = [(L_{ij} \cap C_i) \cup (L_{ij} \cap C_j)] \times [t^n, t^{n+1}]$, we obtain

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \iint_{L_{ij}} \vec{U}_t dAdt = - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \iint_{L_{ij}} \nabla \cdot \vec{F} dAdt \quad (3.6.3)$$

or using Gauss' divergence theorem

$$\begin{aligned} \iint_{L_{ij}} \vec{U}(x,y,t^{n+1})dA &= \iint_{L_{ij} \cap C_i} \vec{U}(x,y,t^n)dA \\ &+ \iint_{L_{ij} \cap C_j} \vec{U}(x,y,t^n)dA - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\partial L_{ij}} \vec{f}n_x + \vec{g}n_y d\sigma dt \end{aligned} \quad (3.6.4)$$

where the left-hand side defines the new cell value \vec{U}_{ij}^{n+1}

$$A(L_{ij})\vec{U}_{ij}^{n+1} \cong \iint_{L_{ij}} \vec{U}(x,y,t^{n+1})dA \quad (3.6.5)$$

The first two integrals in the right-hand side of (3.6.4) can be written as

$$\left(\iint_{(L_{ij} \cap C_i)_S} + \iint_{(L_{ij} \cap C_i)_I} \right) \vec{U}(x,y,t^n)dA + \left(\iint_{(L_{ij} \cap C_j)_S} + \iint_{(L_{ij} \cap C_j)_I} \right) \vec{U}(x,y,t^n)dA \quad (3.6.6)$$

where $(L_{ij} \cap C_i)_S = \text{triangle } a_i m_{ij} S_{ij}$, $(L_{ij} \cap C_i)_I = \text{triangle } a_i I_{ij} m_{ij}$

$(L_{ij} \cap C_j)_S = \text{triangle } a_j S_{ij} m_{ij}$, $(L_{ij} \cap C_j)_I = \text{triangle } a_j m_{ij} I_{ij}$

Instead of splitting the integral on L_{ij} into the contributions of four triangles, as above, we can split it into only two triangles without changing the accuracy of the approximation. The decomposition into four triangles will be used for the R.H.S of (3.6.3).

For a uniform Cartesian grid we have, to second-order accuracy:

$$\begin{aligned} \iint_{L_{ij}} \vec{U}(x,y,t^n) dA &\cong \left\{ \vec{U}\left(x_i + \frac{\Delta x}{3}, y_i\right) A(L_{ij} \cap C_i) \right. \\ &\quad \left. + \vec{U}\left(x_j - \frac{\Delta x}{3}, y_j\right) A(L_{ij} \cap C_j) \right\} \end{aligned} \quad (3.6.7)$$

To obtain second-order accuracy and preserve monotonicity of the solution, we introduce van Leer's (MUSCL) piecewise linear interpolant, defined at a node a_i (in analogy with (3.5.23),(3.5.25)) by

$$\tilde{\vec{U}}_i(x,y,t^n) = \vec{U}_i^n + \vec{U}_{i,x}^{\text{lim},n} \frac{(x - x_i)}{\Delta x} + \vec{U}_{i,y}^{\text{lim},n} \frac{(y - y_i)}{\Delta y} \quad (3.6.8)$$

Combining (3.6.7) and (3.6.8) now gives

$$\begin{aligned} \iint_{L_{ij}} \vec{U}(x,y,t^n) dA &\cong \vec{U}_i^n A(L_{ij} \cap C_i) + \vec{U}_j^n A(L_{ij} \cap C_j) \\ &\quad + \frac{1}{3} \vec{U}_{i,x}^{\text{lim},n} A(L_{ij} \cap C_i) - \frac{1}{3} \vec{U}_{j,x}^{\text{lim},n} A(L_{ij} \cap C_j) \end{aligned} \quad (3.6.9)$$

In the flux integral, the integration with respect to time can be approximated, to second-order accuracy, by the midpoint rule; the right-hand side of (3.6.3) is thus approximated by

$$\Delta t \int_{\partial L_{ij}} (\vec{f}(\vec{U}(x,y,t^{n+1/2}))n_x + \vec{g}(\vec{U}(x,y,t^{n+1/2}))n_y) d\sigma \quad (3.6.10)$$

which requires a prediction at the intermediate time $t^{n+1/2}$, both for \vec{U} and for the fluxes, at the cell interfaces; for example, we need a prediction at the midpoint a_{ij}^- of line segment $a_i I_{ij}$ (fig.3.3) to comply with the AV formulation [8], [7], [9]; this had not been applied in [5], where we had used a MUSCL reconstruction of

the fluxes combined with an evaluation, at time $t^{n+1/2}$, performed directly at the vertices. We feel it is the extension of this procedure which is, in 3 dimensions, responsible (at least in part) for the loss of accuracy mentioned in the introduction, even though all steps of the approximations are in fact time - and - space second - order accurate.

We will use the following prediction at a_{ij}^- , considered as the value along line segment $a_i I_{ij}$:

$$\vec{U}_{a_i I_{ij}}^{n+\frac{1}{2}} = \tilde{U}_i(a_{ij}^-, t^n) + \frac{\Delta t}{2} \vec{U}_t(a_{ij}^-, t^n) \quad (3.6.11)$$

In view of (3.5.1), we get

$$\vec{U}_{a_i I_{ij}}^{n+\frac{1}{2}} = \tilde{U}_i(a_{ij}^-, t^n) - \frac{\Delta t}{2} (A(\tilde{U}_i(a_{ij}^-, t^n)) \vec{U}_{i,x}^{\text{lim}} + B(\tilde{U}_i(a_{ij}^-, t^n)) \vec{U}_{i,y}^{\text{lim}}) \quad (3.6.12)$$

We note $\vec{f}(\vec{U}_{a_i I_{ij}}^{n+\frac{1}{2}})$ the corresponding predicted flux computed at the midpoint a_{ij}^- of $a_i I_{ij}$, at time $t^{n+1/2}$, with the help of (3.6.12). For a uniform square grid, the quadrilateral cell L_{ij} is in fact a square rotated by 45 degrees. The unit vectors normal to the boundary of L_{ij} (fig.3.3) are

$$\begin{aligned} \vec{n}_1 &= -\frac{\sqrt{2}}{2}(1,1), \vec{n}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, -1), \\ \vec{n}_3 &= \frac{\sqrt{2}}{2}(1,1), \vec{n}_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1,1) \end{aligned} \quad (3.6.13)$$

By (3.6.10), the right-hand side of (3.6.3) is thus approximated as follows :

$$\begin{aligned} & \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\partial L_{ij}} (f\vec{n}_x + g\vec{n}_y) d\sigma dt = \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\sum_{q=1}^4 \int_{\partial L_{ij}^q} (\vec{f}\vec{n}_{x,q} + \vec{g}\vec{n}_{y,q}) d\sigma \right) dt = \\ & \Delta t \frac{\sqrt{2}}{2} ((-\vec{f}(\vec{U}_{a_i I_{ij}}^{n+1/2}) - \vec{g}(\vec{U}_{a_i I_{ij}}^{n+1/2}))l(a_i I_{ij}) + (\vec{f}(\vec{U}_{a_j I_{ij}}^{n+1/2}) - \vec{g}(\vec{U}_{a_j I_{ij}}^{n+1/2}))l(a_j I_{ij})) \\ & + (\vec{f}(\vec{U}_{a_j S_{ij}}^{n+1/2}) + \vec{g}(\vec{U}_{a_j S_{ij}}^{n+1/2}))l(a_j S_{ij}) + (-\vec{f}(\vec{U}_{a_i S_{ij}}^{n+1/2}) + \vec{g}(\vec{U}_{a_i S_{ij}}^{n+1/2}))l(a_i S_{ij})) \end{aligned}$$

For the rotated square cell L_{ij} , we have

$$l(a_i I_{ij}) = l(\partial_{ij}^1) = \frac{\sqrt{2}}{2} h$$

The first time step then takes the following form :

$$\begin{aligned} \vec{U}_{L_{ij}}^{n+1} A(L_{ij}) &= \frac{h^2}{4} ((\vec{U}_i^n + \vec{U}_j^n) + \frac{1}{3}(\vec{U}_{i,x}^{\text{lim}} - \vec{U}_{j,x}^{\text{lim}})) \\ &\quad - \frac{1}{2} h \Delta t ((-f(\vec{U}_{a_i I_{ij}}^{n+1/2}) - g(\vec{U}_{a_i I_{ij}}^{n+1/2})) + (f(\vec{U}_{a_j I_{ij}}^{n+1/2}) - g(\vec{U}_{a_j I_{ij}}^{n+1/2}))) \\ &\quad + (f(\vec{U}_{a_j S_{ij}}^{n+1/2}) + g(\vec{U}_{a_j S_{ij}}^{n+1/2})) + (-f(\vec{U}_{a_i S_{ij}}^{n+1/2}) + g(\vec{U}_{a_i S_{ij}}^{n+1/2})) \end{aligned} \tag{3.6.14}$$

hence :

$$\begin{aligned} \vec{U}_{L_{ij}}^{n+1} &= \frac{1}{2}(\vec{U}_i^n + \vec{U}_j^n) + \frac{1}{6}(\vec{U}_{i,x}^{\text{lim}} - \vec{U}_{j,x}^{\text{lim}}) \\ &\quad - \frac{\Delta t}{h} ((-f(\vec{U}_{a_i I_{ij}}^{n+1/2}) - g(\vec{U}_{a_i I_{ij}}^{n+1/2})) + (f(\vec{U}_{a_j I_{ij}}^{n+1/2}) - g(\vec{U}_{a_j I_{ij}}^{n+1/2}))) \\ &\quad + (f(\vec{U}_{a_j S_{ij}}^{n+1/2}) + g(\vec{U}_{a_j S_{ij}}^{n+1/2})) + (-f(\vec{U}_{a_i S_{ij}}^{n+1/2}) + g(\vec{U}_{a_i S_{ij}}^{n+1/2})) \end{aligned} \tag{3.6.15}$$

For a dual grid cell L_{ik} such that $a_i a_k$ is parallel to the y axis, some minor changes are necessary and we obtain

$$\begin{aligned} \vec{U}_{L_{ik}}^{n+1} &= \frac{1}{2}(\vec{U}_i^n + \vec{U}_k^n) + \frac{1}{6}(\vec{U}_{i,x}^{\text{lim}} - \vec{U}_{k,x}^{\text{lim}}) \\ &\quad - \frac{\Delta t}{h}((f(\vec{U}_{a_k I_{ij}}^{n+1/2}) + g(\vec{U}_{a_k I_{ij}}^{n+1/2})) + (-f(\vec{U}_{a_k I_{ij}}^{n+1/2}) + g(\vec{U}_{a_k I_{ij}}^{n+1/2}))) \\ &\quad + (-f(\vec{U}_{a_i S_{ij}}^{n+1/2}) - g(\vec{U}_{a_i S_{ij}}^{n+1/2})) + (-f(\vec{U}_{a_i S_{ij}}^{n+1/2}) - g(\vec{U}_{a_i S_{ij}}^{n+1/2})) \quad (3.6.16) \end{aligned}$$

3.6.3. Second time step

For the second (and further even) time step, we consider the original cell C_i (fig.3.3) and the time interval $t^{n+1} \rightarrow t^{n+2}$ (n even). Proceeding as for the first step, we obtain

$$\begin{aligned} \vec{U}_{C_i}^{n+2} A(C_i) &= \iint_{C_i} \vec{U}(x,y,t^{n+2}) dA \cong \\ &\quad \iint_{C_i} \vec{U}(x,y,t^{n+1}) dA - \Delta t \int_{\partial C_i} (\vec{f}(x,y,t^{n+3/2}) \nu_x + \vec{g}(x,y,t^{n+3/2}) \nu_y) d\sigma \end{aligned} \quad (3.6.17)$$

The first integral in the R.H.S. can be decomposed into 8 parts, and obvious symmetries in the case of a uniform square grid reduce this to 4 parts :

$$\begin{aligned} \iint_{C_i} \vec{U}(x,y,t^{n+1}) dA &= \frac{h^2}{4}((\vec{U}_c^{n+1}] - \frac{1}{6}\vec{U}_{c,x}^{\text{lim},n+1}) + (\vec{U}_d^{n+1} - \frac{1}{6}\vec{U}_{d,y}^{\text{lim},n+1}) \\ &\quad + (\vec{U}_a^{n+1} + \frac{1}{6}\vec{U}_{a,x}^{\text{lim},n+1}) + (\vec{U}_b^{n+1} + \frac{1}{6}\vec{U}_{b,y}^{\text{lim},n+1})) \quad (3.6.18) \end{aligned}$$

The flux integral is treated as above, using the unit normal vectors

$$\nu_a = (-1,0), \nu_b = (0,-1), \nu_c = (1,0), \nu_d = (0,1)$$

we obtain

$$\begin{aligned} \int_{\partial C_i} (\vec{f}\nu_x + \vec{g}\nu_y) d\sigma &\cong \\ &\frac{\Delta t}{2} (\vec{f}(\vec{U}_{c-1/2}^{n+\frac{3}{2}}) + \vec{f}(\vec{U}_{c1/2}^{n+\frac{3}{2}}) - \vec{f}(\vec{U}_{a1/2}^{n+\frac{3}{2}}) - \vec{f}(\vec{U}_{a-1/2}^{n+\frac{3}{2}})) \\ &+ \vec{g}(\vec{U}_{d1/2}^{n+\frac{3}{2}}) + \vec{g}(\vec{U}_{d-1/2}^{n+\frac{3}{2}}) - \vec{g}(\vec{U}_{b-1/2}^{n+\frac{3}{2}}) + \vec{g}(\vec{U}_{b1/2}^{n+\frac{3}{2}})) \end{aligned}$$

The second step of the scheme can therefore be written as

$$\begin{aligned} \vec{U}_{C_i}^{n+2} A(C_i) &= \frac{h^2}{4} (\vec{U}_a^{n+1} + \vec{U}_b^{n+1} + \vec{U}_c^{n+1} + \vec{U}_d^{n+1}) + \\ &\frac{h^2}{24} (\vec{U}_{b,y}^{\text{lim},n+1} - \vec{U}_{d,y}^{\text{lim},n+1} + \vec{U}_{a,x}^{\text{lim},n+1} - \vec{U}_{c,x}^{\text{lim},n+1}) - \\ &\frac{\Delta t h}{2} (\vec{f}(\vec{U}_{c-1/2}^{n+\frac{3}{2}}) + \vec{f}(\vec{U}_{c1/2}^{n+\frac{3}{2}}) - \vec{f}(\vec{U}_{a1/2}^{n+\frac{3}{2}}) - \vec{f}(\vec{U}_{a-1/2}^{n+\frac{3}{2}})) \\ &+ \vec{g}(\vec{U}_{d1/2}^{n+\frac{3}{2}}) + \vec{g}(\vec{U}_{d-1/2}^{n+\frac{3}{2}}) - \vec{g}(\vec{U}_{b-1/2}^{n+\frac{3}{2}}) + \vec{g}(\vec{U}_{b1/2}^{n+\frac{3}{2}})) \end{aligned} \quad (3.6.19)$$

3.7. NUMERICAL EXPERIMENTS

Numerical experiments for the methods presented in sections 3.5-3.6 will be described in the next two subsections.

3.7.1. 3-dimensional ASV formulation (non oblique dual cells)

3.7.1.1. Linear advection

We consider the scalar advection equation

$$u_t + au_x + bu_y + cu_z = 0$$

with initial condition $u(x,y,z,0) = u_0(x,y,z) \equiv f_0^{\text{test}}$ where (a,b,c) will be chosen equal to $(1,1,1)$ here. We consider the cases of a discontinuous and of a continuous initial function :

$$f_0^{\text{test } 1}(x,y,z) = \begin{cases} 0.5 & \text{if } (x,y,z) \in [\frac{7}{20}, \frac{12}{20}]^3 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$f_0^{\text{test } 2}(x,y,z) = \cos(2\pi x) \cos(2\pi y) \cos(2\pi z)$$

The spatial computational domain for both tests is the cube $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$. In table 3.1, L^1 denotes the error calculated with the L^1 norm, and N is the number of intervals in each spatial direction. In tables 3.1 and 3.2, SVA/VL means that the simplified van Albada limiter was used for the prediction and the van Leer limiter for the reconstruction, with similar signification for SVA/MM, SVA/SB (i.e. predictor / reconstruction).

Table 3.1 shows the results for the discontinuous initial function; we note that in three dimensions, the limiters which are smoother give better accuracy, as has generally been observed in the literature [34, 17]. These results give some insight into the difficulties encountered in 3-dimensional calculations. We observe that the second grid refinement is much more efficient than the first; the order O_{L^1} indicated in the last column is the average of the two orders obtained from each grid refinement.

Tables 3.2 and 3.3 present a test with a continuous initial function. We see that with the smoother simplified van Albada and van Leer limiters, second-order

accuracy is approached while it is even slightly exceeded with the original van Albada limiter.

Figure 3.4 shows the effect of varying the parameter K in $\epsilon^2 = (K\Delta x)^3$. For small values of K (say less than 3) the order increases with K , but we found that monotonicity is no longer preserved if K grows beyond a particular value which depends on the smoothness of the initial function; smoother data allow higher values of K before encountering monotonicity breaches.

3.7.1.2. 3-Dimensional Euler equations

We considered the classical test problem [35] of supersonic flow in a channel with a forward facing step, extended here to a three-dimensional geometry corresponding to the computational domain $[0,3] \times [0,1] \times [0,1]$ (in dimensionless units). The length, width and height of the step are 2.4, 1 and 0.2, respectively.

Figure 3.5 (left) shows the results obtained (in the unstationary mode) with the simplified van Albada limiter, at time $t = 3.05$. Although the density contours are smooth, the forward shock is not very sharp and the reflected ones even weaker. Figure 3.5 (right) presents the results obtained with the original van Albada limiter, with $K = 3$. The forward and reflected shocks are somewhat sharper, but we are still far from the sharp structure observed e.g. in [35, 5]. This is not only the consequence of some difficulties which might have been encountered by our method, but can also be attributed, at least in part, to the fact that we are dealing with three-dimensional shocks. Our results here compare favourably,

Limiters	$L^1, N = 16$	$L^1, N = 32$	$L^1, N = 64$	O_{L^1}
OVAT ⁵ (K=3)	0.010696	0.006992	0.003764	0.75
VL ⁶	0.006030	0.004317	0.002083	0.77
MM ⁷	0.014622	0.011124	0.007142	0.52
SB ⁸	0.014158	0.010627	0.006385	0.57
SVA ⁹ /VL	0.009184	0.007319	0.003732	0.65
SVA/MM	0.011052	0.011415	0.007090	0.21
SVA/SB	0.010967	0.011116	0.006692	0.36

TAB. 3.1. L^1 - error and accuracy order, discontinuous problem
(test 1) 3D case

though, with similar results presented, for the second order upwind scheme and unstructured tetrahedra obtained from an original structured cubic grid, where the cubes are decomposed into tetrahedra, in [11]. We believe that mesh adaptation, which, unfortunately, was not available when our numerical experiments were performed, would lead to significant improvements, in the 3-dimensional case, as was observed in [1] in the 2-D case, and intend to study this aspect of our 3-D computations in the future.

-
- 5. Original van Albada with threshold
 - 6. Van Leer
 - 7. MinMod
 - 8. Superbee
 - 9. Simplified van Albada

Limiter	$L^1, N = 16$	$L^1, N = 32$	$L^1, N = 64$	O_{L^1}
SVA	0.032720	0.009580	0.002794	1.77
SVA/VL	0.023744	0.006406	0.001813	1.86
SVA/MM	0.047324	0.011864	0.003920	1.80
SVA/SB	0.021896	0.009090	0.002803	1.48

TAB. 3.2. L^1 - error and accuracy order, continuous problem (test 2), 3D case

N	$L^1(K=0)$	O_{L^1}	$L^1(K=0.75)$	O_{L^1}	$L^1(K=1.5)$	O_{L^1}
8	0.095168		0.032114		0.029454	
16	0.032720	1.54	0.009070	1.82	0.007669	1.94
32	0.009580	1.77	0.002444	1.89	0.001876	2.03

TAB. 3.3. continuous problem (test 2) original van Albada limiter, 3D case

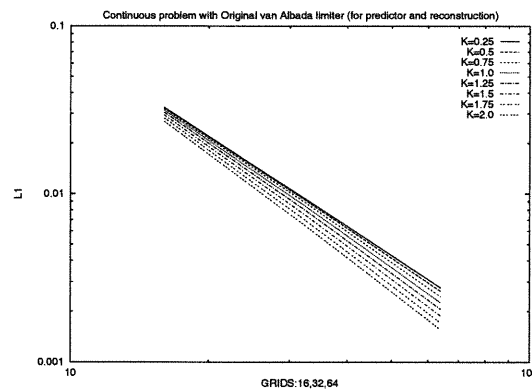


FIG. 3.4. L^1 error Original van Albada limiter with $K \in [0.25, 2.25]$

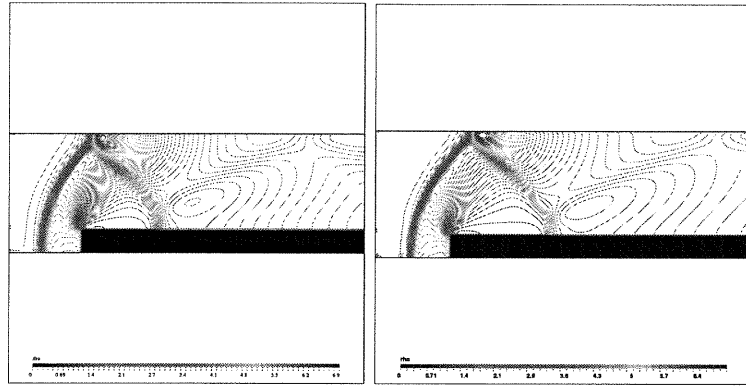


FIG. 3.5. Density $t=3.05$, 61 contours, Grid $240 \times 10 \times 80$, simplified van Albada (left) and OVAT with $K=3$ (right)

3.7.2. New 2D ASCV formulation (Oblique dual cells)

We considered initial values problems for the advection equation

$$u_t + au_x + bu_y = 0 \quad 0 \leq x, y \leq 1$$

where we chose $a = b = 1$ here, with the initial functions

$$f_0^{\text{test } 1}(x, y) = \begin{cases} 0.5 & \text{if } (x - 1/2)^2 + (y - 1/2)^2 < 1/8 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$$\text{and } f_0^{\text{test } 2}(x, y) = \sin(\pi(x + y))$$

Table 3.4 shows the results obtained, for the discontinuous initial function, with the new “oblique dual cell” ASCV finite volume method, using the simplified van Albada limiter (SVA). N is the number of intervals in each spatial direction, and N_t is the number of double time steps. On the right hand side, for comparison’s

sake, we have given the results obtained with the former ASV method (with cell boundaries parallel to the x or y axes), using van Leer's limiter (VL).

For this discontinuous problem, both methods seem to be comparable. The slight advantage provided by the ASV method could be due to the reconstruction of the fluxes and the fact that van Leer's limiter might, in some cases, lead to better results than the simplified van Albada limiter, as already observed for our 3-dimensional tests (tables 3.1 and 3.2).

For the second (continuous) test function, we have compared the new oblique dual cell method (table 3.5) with the results obtained by Jiang and Tadmor [18] for the same test (table 3.6) with a 2-dimensional extension of the Nessyahu-Tadmor scheme similar to the ASV extension but without reconstruction of the fluxes.

The new ASCV method leads to better L^1 and L^∞ error with the final grid, and to higher orders of accuracy. We note that we have performed 400 double time steps, while the number of time steps performed in [18] is not indicated.

N	N_t	SVA		van Leer	
errors :		L^1	L^∞	L^1	L^∞
85	30	1.149E-2	2.615E-1	5.835E-3	2.929E-1

TAB. 3.4. test 1 new 2D scheme ASCV (*left*) old scheme ASV (*right*)

ASCV				
N	L^1	L^∞	O_{L^1}	O_{L^∞}
40	2.352E-2	6.003E-2		
80	5.759E-3	2.303E-2	2.03	1.38
160	1.347E-3	8.759E-3	2.10	1.39

TAB. 3.5. test 2, new 2D scheme ASCV

Jiang-Tadmor [18]				
N	L^1	L^∞	O_{L^1}	O_{L^∞}
40	1.93E-2	4.91E-2		
80	5.70E-3	2.12E-2	1.76	1.21
160	1.55E-3	8.90E-3	1.88	1.25

TAB. 3.6. test 2, 2D NT

3.8. CONCLUDING REMARKS

We have presented new 2 and 3-dimensional non oscillatory central finite volume methods for staggered grids. Starting from our two-dimensional finite volume generalization for Cartesian grids of the Nessyahu-Tadmor 1-dimensional finite difference scheme, we have extended it to a 3-dimensional finite volume method using two staggered Cartesian grids at alternate time steps. Our numerical experiments have shown that for continuous initial data, the method is

non-oscillatory and second order accurate when coupled with the original van Albada limiter; slight under/overshoots, for discontinuous data, can arise for inadequate choices of the limiter parameter K . Mesh adaptation would probably bring substantial improvements, and will be studied.

Having observed these under/overshoots when using the original van Albada limiter, and orders of accuracy inferior to the theoretical second order predicted, in the absence of discontinuities, by the principle of the method when using the simplified van Albada limiter, and in an effort to simplify the computational complexity of our earlier 2-dimensional method, where the reconstruction step was applied both to the dependent variables and to the fluxes, we have investigated here the possibility of a direct transposition of our 2-dimensional finite volume method for staggered unstructured triangular grids to the case of 2-dimensional Cartesian grids. This new “oblique dual cell” (or “diamond” dual cell) method (ASCV) seems to converge faster in all norms than the Jiang-Tadmor 2-dimensional extension of the NT scheme, while having comparable accuracy; on the other hand, its accuracy is comparable with the earlier 2-dimensional version (ASV) (non oblique dual cells), but computing times are reduced since we do not reconstruct the fluxes; the 2-dimensional ASCV method can therefore be considered as a slight improvement of both earlier methods (ASV and JT).

These considerations have encouraged us to proceed to three-dimensional computations on unstructured tetrahedral grids, using grid adaptation [4].

3.9. ACKNOWLEDGMENTS

Special thanks for the CNI center *Calcul Numérique Intensif*¹⁰ for allocating time on the *SGI Origin2000* and to the CERCA *Centre de Recherche en Calcul Appliqué* for the *Vu* software¹¹. We also thank professor B. van Leer for numerous private discussions on limiters, and his support for our work while the first two authors were visiting the University of Michigan. Finally, we are very grateful to the Alexander von Humboldt-Foundation (Bonn, Germany) for the generous support it provided to the first author, during a research stay at the University of Würzburg.

3.10. APPENDIX

Using equation (3.5.11) and the reconstruction (3.5.23), the complete ASV second order scheme in 3D can be written:

First time step

(i) reconstruction of conservative variables

$$M_{C_{lmn}}^{\vec{U}^n}(\vec{R}_{ijk}) = \vec{U}_{C_{lmn}}^n + \frac{1}{2} \nabla \vec{U}_{C_{lmn}}^n \cdot (\vec{R}_{ijk} - \vec{R}_{C_{lmn}}) \quad (3.10.1)$$

\vec{R}_{ijk} represents the center of cell L_{ijk} and $\vec{R}_{C_{lmn}}$ the center of cell C_{lmn} .

10. <http://www.CENTRCN.UMontreal.CA>

11. <http://www.cerca.umontreal.ca/science/vu.html>

(ii) predictor

$$\vec{U}_{ijk}^{n+\frac{1}{2}} = \vec{U}_{ijk}^n - \frac{\Delta t}{2} (A \cdot \vec{U}_{ijk,x}^{\text{lim},n} + B \cdot \vec{U}_{ijk,y}^{\text{lim},n} + C \cdot \vec{U}_{ijk,z}^{\text{lim},n}) \quad (3.10.2)$$

(iii) reconstruction of the flux

$$\begin{aligned} \vec{F}_{ijk}^{n+1/2} &= \vec{F}(\vec{U}_{ijk}^{n+\frac{1}{2}}) \\ M_{C_{lmn}}^{\vec{F}^{n+1/2}}(\vec{R}_{\partial L_{ijk}^q}) &= \vec{F}_{C_{lmn}}^{n+1/2} + \nabla \vec{F}_{C_{lmn}}^{n+1/2} \cdot (\vec{R}_{\partial L_{ijk}^q} - \vec{R}_{C_{lmn}}) \end{aligned} \quad (3.10.3)$$

$\vec{R}_{\partial L_{ijk}^q}$ is the center of face q of the L_{ijk} cell.

Using the facts that $\Delta x = \Delta y = \Delta z = h$ and $\frac{V(C_{lmn} \cap L_{ijk})}{V(L_{ijk})} = \frac{1}{8}$ and $\frac{A(C_{lmn} \cap \partial L_{ijk}^q)}{V(L_{ijk})} = \frac{1}{4h}$, (3.5.11) can be re-written as:

(iv) corrector

$$\vec{U}_{L_{ijk}}^{n+1} = \frac{1}{8} \sum_{\substack{lmn \\ \text{neighbour}}} M_{C_{lmn}}^{\vec{U}^n}(\vec{R}_{ijk}) - \frac{\Delta t}{4h} \sum_{q=1}^6 \sum_{\substack{lmn \\ \text{neighbour}}} M_{C_{lmn}}^{\vec{F}^{n+1/2}}(\vec{R}_{\partial L_{ijk}^q}) \cdot \vec{n}_q \quad (3.10.4)$$

Second time step

Repeat steps (i) to (iv) starting from the values on the staggered grid L_{ijk} .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. ARMINJON, A. MADRANE, (1999), *Staggered Mixed Finite Volume/Finite Element Method for the Navier-Stokes Equations*, Am. Inst. Aeronautics Astronautics (AIAA) Journal, Vol. 37, No. 12, pp. 1558-1571.
- [2] P. ARMINJON, A. MADRANE AND A. ST-CYR, (1999), *New Lax-Friedrichs-type finite volume schemes on 2 and 3D Cartesian staggered grids*, 7th annual conference of the CFD Society of Canada, May 30 to June 1, 1999, Halifax, J. Militzer, editor, pp.(3-3)-(3-10).
- [3] P. ARMINJON, A. MADRANE AND A. ST-CYR, (1999), *New 2 and 3-dimensional non-oscillatory central finite volume methods on staggered Cartesian grids*, Res. Report CRM-2675, Centre de Recherches Mathématiques, Univ. de Montréal, mars 2000.
- [4] P. ARMINJON, A. MADRANE AND A. ST-CYR, (1999), *Numerical simulation of 3-D flows with a non-oscillatory central scheme on staggered unstructured tetrahedral grids*, to appear in Proceed. 8th Int. Conf. on Hyperbolic Problems, Magdeburg (Germany) Feb. 28 - Mar. 3, 2000, H. Freistuehler and G. Warnecke, editors.
- [5] P. ARMINJON, D. STANESCU AND M. C. VIALON, (1995), *A two-dimensional finite volume extension of the Lax-Friedrichs and Nessyahu-Tadmor schemes for compressible flows*, Proc.of the 6th. Int. Symp. on Comp. Fluid Dynamics, Lake

- Tahoe (Nevada) September 4-8, 1995, M.Hafez and K. Oshima, editors, Vol. IV, pp. 7-14.
- [6] P. ARMINJON AND A. ST-CYR, (2001), *New Lax-Friedrichs-type finite volume schemes in 1,2 and 3D without time predictor step*, Proceedings of the 9th annual conference of the CFD Society of Canada, May 27-29, 2001, Kitchener, Ontario, G. E.Schneider editor, pp. 63-68.
- [7] P. ARMINJON AND M. C. VIALON, (1999), *Convergence of a finite volume extension of the Nessyahu-Tadmor scheme on unstructured grids for a two-dimensional linear hyperbolic equation*, SIAM J. Num. Anal., Vol. 36, No.3, pp. 738-771.
- [8] P. ARMINJON AND M. C. VIALON, (1995), *Généralisation du schéma de Nessyahu-Tadmor pour une équation hyperbolique à deux dimensions d'espace*, C.R. Acad. Sci. Paris, t.320, serie I (1995), pp. 85-88.
- [9] P. ARMINJON, M.C. VIALON AND A. MADRANE, (1994), *A Finite Volume Extension of the Lax-Friedrichs and Nessyahu-Tadmor Schemes for Conservation Laws on Unstructured Grids*, revised version with numerical applications, Int. J. of Comp. Fluid Dynamics (1997), Vol. 9, No. 1, 1-22.
- [10] M. CRANDALL AND A. MAJDA, (1980), *Monotone difference approximations for scalar conservation laws*, Math. Comp., 34, no. 149, pp. 1-21.
- [11] M. GEIBEN-WIERSE, (1994), *Higher Order Upwind Schemes for the Compressible Euler Equations in Time-dependent Geometries in 3D*, Dissertation/thesis, Universitaet Freiburg, Germany.

- [12] E. GODLEWSKI AND P.A. RAVIART, (1996), *Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, Springer-Verlag, New York.
- [13] E. GODLEWSKI AND P.A. RAVIART, (1991), *Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, Editions Ellipses, Paris.
- [14] B. HAASDONK, D. KROENER AND C. ROHDE, (2000), *Convergence of a staggered Lax-Friedrichs Scheme for nonlinear conservation laws on unstructured two-dimensional grids*, Preprint No. 07/2000, Mathematische Fakultät, University of Freiburg, Germany, April 2000. Published in *Numerische Mathematik*, vol. 88 (2001) pp. 459-484.
- [15] A.C. HINDMARSH, P.M. GRESHO AND D.F. GRIFFITHS, (1984), *The stability of explicit Euler time integration for certain finite difference approximations of the multidimensional advection diffusion equation*, *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*, 4, 853-97.
- [16] C. HIRSCH, (1990), *Numerical Computation of Internal and External Flows, Vol.I,1988, Vol.II,1990*, John Wiley, New York.
- [17] A. JAMESON, (1997), *Essential Elements of Computational Algorithms for Aerodynamic Analysis and Design*, ICASE Report No. 97-68.
- [18] G. JIANG AND E. TADMOR, (1998), *Non-oscillatory Central Schemes for Multidimensional Hyperbolic Conservation Laws*, *SIAM J. Scien. Comp.*, Vol. 19, No. 6, pp. 1892-1917.
- [19] T. KATSAOUNIS AND D. LEVY, (1999), *A Modified Structured Central Scheme for 2D Hyperbolic Conservation Laws*, *Applied Mathematics Letters* 12(6), 1 August (1999), pp. 89-86.

- [20] S.N. KRUKHKOVA, (1970), *First-order quasilinear equations with several space variables*, Math. Sbornik, 123, pp. 228-255; English Transl. in Math. USSR Sbornik, 10 (1970), pp. 217-243.
- [21] M. KUETHER, (MAY 2000), *A priori and a posteriori error estimates for the staggered Lax-Friedrichs scheme in multi-dimensions for scalar nonlinear conservation laws*, Preprint No. 19/2000, Mathematische Fakultät, Univ. of Freiburg, Germany.
- [22] M. KUETHER, (2001), *Error estimates for the staggered Lax-Friedrichs scheme on unstructured grids scalar*, to appear in SIAM J. Numer. Anal..
- [23] P.D. LAX, (1954), *Weak solutions of nonlinear hyperbolic equation and their numerical computation*, Comm. Pure and Applied Math.7, pp. 159-193.
- [24] K.-A. LIE AND S. NOELLE, (2000), *Remarks on high-resolution non-oscillatory central schemes for multidimensional systems of conservation laws. Part I: An improved quadrature rule for the flux computation*, Preprint no. 679, Sonderforschungsbereich 256, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität, Bonn, Germany.
- [25] H. NESSYAHU AND E. TADMOR, (1990), *Non-oscillatory central differencing for hyperbolic conservation laws*, J. Comp. Phys., 87, No. 2, pp. 408-463.
- [26] F. SABAC, (1997), *The optimal convergence rate of monotone finite difference methods for hyperbolic conservation laws*, SIAM J. Num. Anal., 34, No. 6, pp. 2306-2318.
- [27] S. P. SPEKREIJSE, (1987), *Multigrid solution of monotone second-order discretizations of hyperbolic conservation laws*, Math.Comp.49(1987), pp. 135-156.

- [28] P.K. SWEBY, (1984), *High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws*, SIAM J. Num. Anal., 21, pp. 995-1011.
- [29] G.D. VAN ALBADA, B. VAN LEER, W.W. ROBERTS, (1982), *A comparative study of computational methods in cosmic gas dynamics*, Astron. Astrophys. 108, pp 76-84.
- [30] B. VAN LEER, (1974), *Towards the ultimate conservative difference scheme II. Monotonicity and conservation combined in a second order scheme*, J. Comp. Phys., 14, 361-370.
- [31] B. VAN LEER, (1977), *Towards the ultimate conservative difference scheme III. Upstream-centered finite difference schemes for ideal compressible, flow*. J. Comp. Phys., 23, 263-275.
- [32] B. VAN LEER, (1977), *Towards the ultimate conservative difference scheme IV. A new approach to numerical convection*, J.Comp.Physics, 23, pp. 276-299.
- [33] B. VAN LEER, (1979), *Towards the ultimate conservative difference scheme V. A Second-Order Sequel to Godunov's Method*, J.Comp.Physics, 32, pp. 101-136.
- [34] V. VENKATAKRISHNAN, (1995), *Convergence to Steady State Solutions of the Euler Equations on Unstructured Grids with Limiters*, J. Comp. Phys. 118, pp. 120-130.
- [35] P. WOODWARD AND P. COLELLA, (1984), *The Numerical Simulation of Two-Dimensional Fluid Flow with strong Shocks*, J. Comp. Phys. 54, pp. 115-173.

Chapitre 4

VOLUMES FINIS EN MAILLAGES NON-STRUCTURÉS

4.1. INTRODUCTION

Dans ce chapitre, les définitions de base pour la généralisation des méthodes de volumes finis à des maillages non-structurés sont présentées. Nous considérons tout d'abord une tétraèdrisation admissible et nous montrons l'équivalent non-structuré de la méthode de Godunov. La technique MUSCL est étendue aux maillages non structurés de tétraèdres et diverses techniques de reconstructions sont expliquées. Des fonctions jouant le rôle de limiteur pour forcer le respect du principe du maximum sont présentées, en particulier le limiteur de Venkatakrishnan.

4.2. MAILLAGES ADMISSIBLES

Les effets d'un mauvais maillage sur toute méthode de volumes / éléments / différences finies constituent un phénomène grandement reconnu par la communauté des numériciens, mais ces effets restent difficiles à démontrer. Pour éliminer

ces effets au maximum, des conditions restrictives sélectionnant certains types de maillages sont introduites, la plupart du temps pour simplifier le contexte des démonstrations de convergence des méthodes.

Définition 4.2.1. *Un maillage \mathcal{T} de \mathbb{R}^d est dit **admissible** [21] si :*

1) *il est donné par l'union de polygones simplement connexes, disjoints notés Ω_i .*

($\mathcal{T} = \cup_i \Omega_i$). Notons par $h = \sup\{\text{diam}\{\Omega_i\}, \Omega_i \in \mathcal{T}\} < \infty$.

2) *il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall i$*

$$\alpha h^d \leq m(\Omega_i) \tag{4.2.1}$$

$$m(\partial\Omega_i) \leq \frac{1}{\alpha} h^{d-1} \tag{4.2.2}$$

où $m(\Omega_i)$ est la mesure de Lebesgue de Ω_i et de façon analogue $m(\partial\Omega_i)$ représente la mesure de Lebesgue en \mathbb{R}^{d-1} dimensions. \mathcal{N}_i est l'ensemble des indices numérotant les polygones voisins de Ω_i .

4.3. FORMULATION CLASSIQUE

Soit Ω_i un volume de contrôle respectant la définition d'un polygone du maillage admissible alors, à l'aide de (1.1.2) nous avons en intégrant sur $[t^n, t^{n+1}] \times \Omega_i$:

$$\iint_{[t^n, t^{n+1}] \times \Omega_i} (U_t + \nabla \cdot \vec{F}(U)) dV dt = 0 \tag{4.3.1}$$

en intégrant par parties par rapport au temps et en utilisant le théorème de flux-divergence il vient :

$$\int_{\Omega_i} U(\vec{x}, t^{n+1}) dV = \int_{\Omega_i} U(\vec{x}, t^n) dV - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\partial\Omega_i} \vec{F}(U) \cdot \hat{n} dAdt \quad (4.3.2)$$

Cette dernière formule est exacte car aucune approximation n'a encore été faite. Ceci laisse entendre intuitivement que l'ordre de précision du schéma sera dicté par l'ordre des règles d'intégrations numériques utilisées. En reprenant l'idée de Godunov et en utilisant des constantes par cellules définies ainsi :

$$\bar{U}_{\Omega_i}^n = \frac{1}{m(\Omega_i)} \int_{\Omega_i} U(\vec{x}, t) dV \quad (4.3.3)$$

(4.3.2) devient :

$$\bar{U}_{\Omega_i}^{n+1} = \bar{U}_{\Omega_i}^n - \frac{1}{m(\Omega_i)} \int_{\partial\Omega_i} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \vec{F}(U) \cdot \hat{n} dAdt \quad (4.3.4)$$

Encore une fois, la formulation est équivalente à (4.3.1) si les \bar{U} sont exactes. Une première approximation consiste à prendre la règle du rectangle gauche pour l'intégrale en temps dans le terme de flux (ceci revient à prendre Euler-explicite pour la dérivation en temps dans le cas de différences finies) et U constant par cellule, ceci conduit à

$$\bar{U}_{\Omega_i}^{n+1} = \bar{U}_{\Omega_i}^n - \frac{\Delta t}{m(\Omega_i)} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \int_{\partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j} \vec{F}(U(\vec{x}, t^n)) \cdot \hat{n}_{ij} dAdt \quad (4.3.5)$$

Supposons que la solution U soit constante dans Ω_i alors le terme de flux s'approxime comme $\vec{F}(U(\vec{x}_{ij}, t^n)) \cdot \hat{n}_{ij} = G_{ij}(\bar{U}_i^n, \bar{U}_j^n; \hat{n}_{ij})$. Le problème de Riemann est projeté localement sur la normale \hat{n}_{ij} du plan formé par l'intersection des 2

cellules voisines i et j . Puisque cette solution, qui peut être localement assimilée à un problème unidimensionnel, est coûteuse à résoudre pour un système, diverses techniques sont utilisées pour simplifier les calculs en se fondant sur un problème de Riemann “approché” (par exemple les solveurs de Roe, HLL et Einfeldt (HLLÉ) [23, 60]). Ces solveurs nécessitent tous une connaissance fine du système qu’ils tentent de résoudre car ils se fondent sur l’utilisation des variables caractéristiques et donc d’une connaissance des valeurs et vecteurs propres associés à la matrice caractéristique.

$$\bar{U}_{\Omega_i}^{n+1} = \bar{U}_{\Omega_i}^n - \frac{\Delta t}{m(\Omega_i)} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} m(\partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j) G_{ij}(\bar{U}_i^n, \bar{U}_j^n; \hat{n}_{ij}) \quad (4.3.6)$$

4.4. TECHNIQUE MUSCL (MÉTHODE DE VAN LEER)

Comme dans le cas structuré, il est possible d’augmenter la précision spatiale de la méthode en introduisant une étape de reconstruction à l’aide d’interpolants construits à partir des moyennes cellulaires.

L’étape constituant à prendre la moyenne de la fonction U sur le volume de contrôle Ω_i est linéaire :

$$A_i(aU + bV) = a\bar{U}_i + b\bar{V}_i = \frac{a}{m(\Omega_i)} \int_{\Omega_i} U(\vec{x}, t) + \frac{b}{m(\Omega_i)} \int_{\Omega_i} V(\vec{x}, t) dV \quad (4.4.1)$$

$$= aA_iU + bA_iV, \quad (4.4.2)$$

où A_i est l'opérateur de moyenne spatiale sur la cellule Ω_i . De plus, A_i est une **projection** car $A_i A_i U = A_i \bar{U}_i = \bar{U}_i$.

Définition 4.4.1. Une reconstruction à l'ordre k à partir des moyennes sera notée $U_i^k = R^k \bar{U}_i$. Celle-ci sera une candidate acceptable si elle satisfait la propriété suivante de conservation de la moyenne $AU_i^k = \bar{U}_i$ et si elle satisfait la propriété dite de k -exactitude : $R^k AU = U, \forall U \in \mathcal{P}_k$ (\mathcal{P}_k étant l'ensemble des polynômes de degré k) ([11]).

4.4.1. Reconstruction des gradients

Nous exposons ici les 2 techniques les plus courantes pour la reconstruction des gradients.

4.4.1.1. Green-Gauss

Théorème 4.4.1. Soit u une fonction scalaire et Ω_i un volume de contrôle simplement connexe alors

$$\int_{\Omega_i} \nabla u dV = \int_{\partial\Omega_i} u \hat{n} dA \quad (4.4.3)$$

DÉMONSTRATION. posons $\vec{F} = u\hat{m}$ et intégrons sur Ω_i la fonction $\nabla \cdot \vec{F}$; alors d'après le théorème de flux-divergence le résultat est immédiat car \hat{m} est quelconque. \square

Posons $\partial\Omega_{ij} = \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j$ et notons par $U|_{\partial\Omega_{ij}}$ la valeur de U à la frontière entre les cellules Ω_i et Ω_j . Alors il est possible d'écrire une approximation des gradients

sur la cellule Ω_i de la façon suivante :

$$\int_{\Omega_i} \nabla u dV = \int_{\partial\Omega_i} u \hat{n} dA \quad (4.4.4)$$

$$= \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \int_{\partial\Omega_{ij}} u|_{\partial\Omega_{ij}} \hat{n} dA \quad (4.4.5)$$

En prenant pour approximation de $u|_{\partial\Omega_{ij}} \cong \frac{1}{2}(\bar{u}_i + \bar{u}_j)$ on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_i} \nabla u dV &\cong \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \int_{\partial\Omega_{ij}} \frac{1}{2}(\bar{u}_i + \bar{u}_j) \hat{n} dA \\ &= \frac{1}{2} \bar{u}_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \int_{\partial\Omega_{ij}} \hat{n} dA + \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \bar{u}_j \int_{\partial\Omega_{ij}} \hat{n} dA \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \bar{u}_j \int_{\partial\Omega_{ij}} \hat{n} dA \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

Donc, en utilisant la notation introduite en (4.4.1) pour les moyennes cellulaires, il vient

$$A_i \nabla u = \frac{1}{2m(\Omega_i)} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \bar{u}_j \int_{\partial\Omega_{ij}} \hat{n} dA \quad (4.4.7)$$

Remarque 4.4.1. Le choix $u|_{\partial\Omega_{ij}} \cong \frac{1}{2}(\bar{u}_i + \bar{u}_j)$ implique que la formule (4.4.7) est exacte lorsque $u \in \mathcal{P}^1$.

Remarque 4.4.2. Le terme \bar{u}_i n'apparaît pas dans l'expression (4.4.7) car

$$\sum_{j \in \mathcal{N}_i} \int_{\partial\Omega_{ij}} \hat{n} dA = 0 \quad (4.4.8)$$

4.4.1.2. Moindres carrés

La formulation du problème de construction du gradient est plus facilement généralisable à des dérivées d'ordre plus élevé lorsqu'on formule le problème de

recherche des gradients en une minimisation dans l_2 . Cette technique, en plus de donner le gradient optimal dans l_2 , est moins sensible au bruit Gaussien que la technique de Green-Gauss.

Supposons une reconstruction linéaire directement obtenue à partir d'une série de Taylor :

$$u_i(\vec{x}) = \bar{u}_i + (\nabla u_i) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_i) \quad (4.4.9)$$

Notons par u_{ij} les $u_i(\vec{x}_j)$ tels que $j \in \mathcal{N}_i$ alors la fonction à minimiser est

$$\psi(\nabla u_i) = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (-u_{ij} + \bar{u}_i + (\nabla u_i) \cdot (\vec{x}_j - \vec{x}_i))^2 \quad (4.4.10)$$

L'inconnue est donc $\nabla u_i = (p_i, q_i, r_i)$ et notons $\vec{x}_j - \vec{x}_i = (\Delta x_{ji}, \Delta y_{ji}, \Delta z_{ji})$. En dérivant ψ par rapport aux 3 inconnues il en résulte le système linéaire suivant :

$$\sum_{j \in \mathcal{N}_i} \begin{pmatrix} \Delta x_{ji}^2 & \Delta x_{ji} \Delta y_{ji} & \Delta x_{ji} \Delta z_{ji} \\ \Delta y_{ji} \Delta x_{ji} & \Delta y_{ji}^2 & \Delta y_{ji} \Delta z_{ji} \\ \Delta z_{ji} \Delta x_{ji} & \Delta z_{ji} \Delta y_{ji} & \Delta z_{ji}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_i \\ q_i \\ r_i \end{pmatrix} = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (u_{ij} - \bar{u}_i) \begin{pmatrix} \Delta x_{ji} \\ \Delta y_{ji} \\ \Delta z_{ji} \end{pmatrix}$$

qu'il faut résoudre pour tout Ω_i du maillage.

4.4.2. Limitation

Les gradients doivent être limités pour forcer localement le respect du principe du maximum et tenter d'empêcher la formation de nouveaux extremums et donc d'oscillations.

Concrètement soient $u_{i_{\max}}$ et $u_{i_{\min}}$ les maximum et minimum des \bar{u} voisins de \bar{u}_i ($u_{i_{\max}} = \max_{k \in \mathcal{N}_i} \{\bar{u}_k\}$). On cherche donc à imposer à la reconstruction $u_i(\vec{x})$:

$$u_{i_{\min}} \leq u_i(\vec{x}) \leq u_{i_{\max}} \quad (4.4.11)$$

Théorème 4.4.2. *Il est suffisant d'imposer la condition (4.4.11) seulement aux points de quadratures, c'est-à-dire aux points où la reconstruction sera évaluée.*

DÉMONSTRATION. Par exemple [11]. □

Ce dernier théorème simplifie l'algorithmique nécessaire à la mise en œuvre du limiteur sur des maillages non structurés.

Définition 4.4.2. \mathcal{PQ}_i est l'ensemble des points de \mathbb{R}^d où la reconstruction sera évaluée dans la cellule Ω_i : ce sont les points de quadrature pour les intégrales de volume et de surface qui apparaissent (pour $d = 3$) dans (4.3.2).

Définition 4.4.3. Une reconstruction limitée se désignera par :

$$u_i(\vec{x}) = \bar{u}_i + \phi_i \nabla u_i \cdot (\vec{x} - \vec{x}_i) \quad (4.4.12)$$

Définition 4.4.4. Soit \vec{x}_k un point de \mathcal{PQ}_i alors la dérivée directionnelle de u_i dans la direction $\vec{x}_k - \vec{x}_i$ sera définie par

$$u_i(\vec{x}_k) - \bar{u}_i = (\nabla u_i) \cdot (\vec{x}_k - \vec{x}_i) \quad (4.4.13)$$

qui est en fait (4.4.12) évaluée en $x = x_k$ avec $\phi_i = 1$.

Définition 4.4.5. Les dérivées maximale et minimale sur une cellule Ω_i

$\forall \vec{x}_k \in \mathcal{PQ}_i$ seront définies par :

$$u_{i_{\max}} - \bar{u}_i \quad (4.4.14)$$

et respectivement

$$u_{i_{\min}} - \bar{u}_i \quad (4.4.15)$$

Définition 4.4.6. Soit $\Psi(r)$ une fonction de limitation telle que définie dans la section 2.1.6 alors pour $\vec{x}_k \in \mathcal{PQ}_i$ on désignera par ϕ_k la limitation générée par le point de quadrature de la manière suivante :

$$\phi_k = \begin{cases} \Psi\left(r = \frac{u_{i_{\max}} - \bar{u}_i}{u_i(\vec{x}_k) - \bar{u}_i}\right) & \text{si } u_i(\vec{x}_k) - \bar{u}_i > 0 \\ \Psi\left(r = \frac{u_{i_{\min}} - \bar{u}_i}{u_i(\vec{x}_k) - \bar{u}_i}\right) & \text{si } u_i(\vec{x}_k) - \bar{u}_i < 0 \\ 1 & \text{si } u_i(\vec{x}_k) - \bar{u}_i = 0 \end{cases} \quad (4.4.16)$$

Définition 4.4.7. La valeur finale du limiteur pour la reconstruction $u_i(\vec{x})$ sera donnée par :

$$\phi_i = \min_{\vec{x}_k \in \mathcal{PQ}_i} \{\phi_k\} \quad (4.4.17)$$

avec ϕ_k donné par l'expression (4.4.16).

Remarque 4.4.3. Les conditions de l'expression (4.4.16) ne sont pas réalisables sur un ordinateur. En effet, il faut donner une tolérance $\epsilon_{\text{machine}}$ qui représente le **zero machine** qui, lui, dépend du nombre de bits utilisés pour représenter les

nombres décimaux (largeur de la mantisse). L'expression (4.4.16) corrigée se lit maintenant :

$$\phi_k = \begin{cases} \Psi(r = \frac{u_{i_{\max}} - \bar{u}_i}{u_i(\vec{x}_k) - \bar{u}_i}) & \text{si } u_i(\vec{x}_k) - \bar{u}_i > \epsilon_{\text{machine}} \\ \Psi(r = \frac{u_{i_{\min}} - \bar{u}_i}{u_i(\vec{x}_k) - \bar{u}_i}) & \text{si } u_i(\vec{x}_k) - \bar{u}_i < -\epsilon_{\text{machine}} \\ 1 & \text{si } |u_i(\vec{x}_k) - \bar{u}_i| \leq \epsilon_{\text{machine}} \end{cases} \quad (4.4.18)$$

4.4.2.1. Limiteur de Venkatakrisnan

Le limiteur de Venkatakrisnan [66] est un des limiteurs les plus robustes sur des maillages non structurés et favorisant la convergence vers des états stationnaires beaucoup plus rapidement en tolérant de petites oscillations en l'absence de chocs.

Définition 4.4.8. Selon le signe de $u_i(\vec{x}_k) - \bar{u}_i$ (voir 4.4.16), on désignera par Δ_+ la différence $(u_{i_{\max}} - \bar{u}_i)$ si la différence $(u_i(\vec{x}_k) - \bar{u}_i)$ est positive et $(u_{i_{\min}} - \bar{u}_i)$ si $(u_i(\vec{x}_k) - \bar{u}_i)$ est négative, et par $\bar{\Delta}_-$ la quantité $(u_i(\vec{x}_k) - \bar{u}_i)$. Pour éviter les problèmes liés à la division par zéro le gradient minimal sera redéfini ainsi : $\Delta_- = \text{sign}(\bar{\Delta}_-)(|\bar{\Delta}_-| + c\epsilon_{\text{machine}})$ avec $c > 0$.

Le limiteur de Venkatakrisnan est défini par :

$$\Psi = \Psi(r = \frac{\Delta_+}{\Delta_-}) = \frac{\Delta_+^2 + 2\Delta_- \Delta_+ + \epsilon^2}{\Delta_+^2 + 2\Delta_-^2 + \Delta_- \Delta_+ + \epsilon^2} \quad (4.4.19)$$

où $\epsilon^2 = (K\Delta x)^3$. K représente la tolérance aux oscillations; si $K = 0$ le limiteur est actif partout sur le maillage. Δx , pour un maillage non structuré, représente heuristiquement, pour des tétraèdres, le diamètre (plus grande arête) que l'on obtiendrait en maillant de façon uniforme avec des tétraèdres le domaine de calcul.

Chapitre 5

NON-OSCILLATORY LAX-FRIEDRICHS TYPE CENTRAL FINITE VOLUME METHODS FOR 3-D FLOWS ON UNSTRUCTURED TETRAHEDRAL GRIDS

(voir annexe A.2 pour les autorisations des co-auteurs et de l'éditeur)

5.1. AUTEURS

- Paul Arminjon
- Aziz Madrane
- Amik St-Cyr

5.2. RÉSUMÉ

Nous présentons une généralisation 3D aux volumes finis des schémas 1D de Lax-Friedrichs et de Nessyahu-Tadmor pour des équations hyperboliques sur des maillages non structurés composés de tétraèdres. Le schéma centré non-oscillatoire

aux différences finies de Nessyahu et Tadmor, dans lequel la solution des problèmes de Riemann est évitée grâce au schéma décalé de Lax-Friedrichs, est généralisé, ici, à un schéma à 2 pas, non-oscillatoire, tri-dimensionnel de type volumes finis. Des interpolants linéaires par morceaux, utilisant le limiteur de Venkatakrishnan combiné à des techniques diverses pour estimer les gradients conduisent à une résolution spatiale non-oscillatoire d'ordre 2. Le fait que l'ordre 2 ne soit pas atteint en 3D est sans doute causé par l'absence d'adaptation dans nos calculs. Des résultats numériques pour l'équation d'advection linéaire pour une donnée initiale continue en 3D montre la précision de la méthode et sa stabilité. Nous incluons aussi des résultats pour les équations d'Euler (tube à choc de Sod).

5.3. ABSTRACT

We present a 3D finite volume generalization of the 1-dimensional Lax-Friedrichs and Nessyahu-Tadmor schemes for hyperbolic equations on unstructured tetrahedral grids. The non-oscillatory central difference scheme of Nessyahu and Tadmor, in which the resolution of the Riemann problem at the cell interfaces is by-passed thanks to the use of the staggered Lax-Friedrichs scheme, is extended here to a two-step, three-dimensional non-oscillatory centered scheme in finite volume formulation. Piecewise linear cell interpolants using Venkatakrishnan's limiter combined with diverse techniques to estimate the gradients lead to a non-oscillatory spatial resolution of order 2. The fact that the expected second order resolution is not fully attained in 3D for nonlinear systems might be caused by the absence

of grid adaptation in our calculations. Numerical results for a linear advection problem with continuous initial conditions in 3D show the accuracy and stability of the method. We also include results for the 3D Euler system (shock tube problem)

5.4. INTRODUCTION

In earlier papers [5, 6] we presented a two-dimensional finite volume method generalizing the one-dimensional Lax-Friedrichs [12] and Nessyahu-Tadmor [16] difference schemes for hyperbolic conservation laws to unstructured triangular grids, while in [4, 2] we have also constructed a corresponding extension for 2-dimensional Cartesian grids. Other recent contributions in the case of Cartesian grids can be found in [10, 11, 13, 14].

All these extensions to 2-dimensional problems lead to non-oscillatory, essentially second order accurate finite volume methods.

In [2, 3] we presented an extension to staggered structured three-dimensional Cartesian grids of our two-dimensional finite volume method for Cartesian grids. We proved that the first order three-dimensional finite volume extension of the Lax-Friedrichs scheme is monotone under an appropriate CFL condition. Some difficulties encountered in the numerical experiments led us to consider a special type of limiting function proposed by Venkatakrishnan. The method still displayed too much dissipation and requires some adjustments.

In this paper, we first present a finite volume extension of the first order accurate Lax-Friedrichs scheme to three-dimensional tetrahedral grids. We then construct the extension of our two-dimensional finite volume method to a quasi-second order accurate non-oscillatory finite volume method of "central type", for staggered unstructured tetrahedral grids, which can be viewed as a finite volume generalization of the 1-dimensional Nessyahu-Tadmor difference scheme to 3-dimensional unstructured tetrahedral grids.

5.5. MATHEMATICAL MODELLING

5.5.1. Governing equations

Let $\Omega \subset R^3$ be the domain of interest of the flow and Γ be its boundary, we write $\Gamma = \Gamma_B \cup \Gamma_\infty \cup \Gamma_E$, where Γ_B denotes that part of the body boundary which is relevant for the computational domain. Γ_∞ is the (upwind) farfield boundary, and Γ_E is the (downwind) exit part of the boundary. The equations describing 3-dimensional compressible inviscid flows are the Euler equations, written here in their conservation form , given by

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{F}}(U) = 0$$

$$\text{where } U = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, E)^T, \quad \vec{\mathcal{F}}(U) = (F(U), G(U), H(U))^T, \quad (5.5.1)$$

$\vec{\mathcal{F}}(U)$ denotes the convective flux, ρ is the density, $\vec{V} = (u, v, w)$ is the velocity vector, $E = \rho e = \rho e + \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2 + w^2)$ is the total energy per unit volume; p is the pressure of the fluid. Let A, B and C denote the Jacobian matrices $\partial F(U)/\partial U$, $\partial G(U)/\partial U$ and $\partial H(U)/\partial U$, respectively. Eq.(5.5.1) can be written in the non-conservative form:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A(U)\frac{\partial U}{\partial x} + B(U)\frac{\partial U}{\partial y} + C(U)\frac{\partial U}{\partial z} = 0 \quad (5.5.2)$$

5.6. DISCRETIZATION WITH RESPECT TO SPACE AND TIME

5.6.1. Definitions, description of the first-order method

We assume that Ω is a polyhedral bounded domain of R^3 , and start from an arbitrary FEM tetrahedral grid \mathcal{T}_h , where h is the maximal length of the edges in \mathcal{T}_h . We need the following notations: T_{ij} denotes the set of all tetrahedra which share edge $[i, j]$ as a common edge. Let M denote the set of indices of all sub-tetrahedra of the original tetrahedral grid, defined by the median planes such as: $iM_1GG_1, iM_1GG_3, jM_1GG_1$ and jM_1GG_3 on fig. 5.1. Let $m(i, j, \tau, l)$ be one such index contained in M , where $\tau \in T_{ij}$ and l ($1 \leq l \leq 4$) is the index of one of the four sub-tetrahedra sharing edge $[i, j]$ and contained in tetrahedron τ . If $l = 1, 3$ then the index denotes sub-tetrahedra having node a_i in common, and, if $l = 2, 4$ they share node a_j . Any such sub-tetrahedron will be noted l_k where $k \in M$. $K(i)$ is the set of nodes (vertices) which are neighbours of node a_i . Let nv be the number of vertices of $\tau \in \mathcal{T}_h$. For every vertex a_i , $1 \leq i \leq nv$

(written i for simplicity on fig. 5.1) of an arbitrary tetrahedron $\tau \in \mathcal{T}_h$, we define the (vertex centered) barycentric cell C_i as follows (this approach was introduced in [1]): every tetrahedron of \mathcal{T}_h is subdivided in 24 sub-tetrahedra l_k by the median planes. The cell C_i is the union of the resulting sub-tetrahedra sharing a_i as a vertex $C_i = \bigcup_{j \in K(i)} \bigcup_{\tau \in \mathcal{T}_{ij}} l_{m(i,j,\tau,\{1,3\})}$. The faces of interest associated with each sub-tetrahedron l_k ($k \in M$) are, first, those which do not share any edge midpoint (such as M_1 in fig. 5.1) noted ∂l_k^1 (such as jGG_1 or jGG_3 on fig. 5.1), and secondly, the faces which do not contain vertex a_i in their composition, noted ∂l_k^2 . The outward normals to those faces will be noted n_k for ∂l_k^1 and ν_k for ∂l_k^2 (such as, on fig. 5.1, M_1GG_1 or M_1GG_3). Note that we use normal vectors such that $\|n_k\| = \text{Area}(\partial l_k^1)$ and $\|\nu_k\| = \text{Area}(\partial l_k^2)$. The boundary ∂C_i of C_i can be constructed with ∂l_k^2 ($\partial C_i = \bigcup_{j \in K(i)} \bigcup_{\tau \in \mathcal{T}_{ij}} \partial l_{m(i,j,\tau,\{1,3\})}^2$). As was

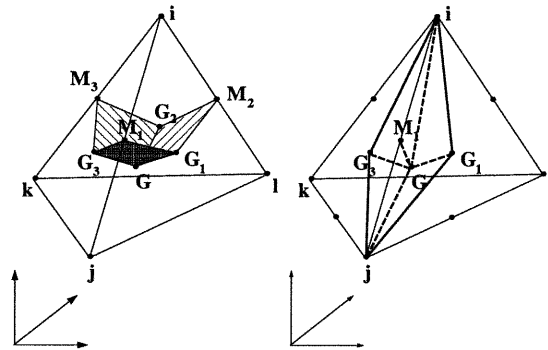


FIG. 5.1. Barycentric cell C_i and diamond cell L_{ij}

the case in our 2-dimensional extensions, our 3-D extension also uses a dual grid, with dual cells L_{ij} associated with the edges of \mathcal{T}_h . The dual ("diamond")

cell L_{ij} is composed by the sub-tetrahedra (defined above) sharing edge $[i,j]$ ($L_{ij} = \bigcup_{\tau \in \mathcal{T}_{ij}} l_{m(i,j,\tau,\{1,2,3,4\})}$). Owing to the the fact that ∂l_k^1 denotes one of the facets of ∂L_{ij} , we can formulate the dependence of ∂L_{ij} on the selected faces (i.e. with superscript index 1) of the sub-tetrahedra which compose L_{ij} :

$$\partial L_{ij} = \bigcup_{\tau \in \mathcal{T}_{ij}} \partial l_{m(i,j,\tau,\{1,2,3,4\})}^1 = \bigcup_{\tau \in \mathcal{T}_{ij}} \partial l_{m(i,j,\tau,\{1,3\})}^1 \cup \partial l_{m(i,j,\tau,\{2,4\})}^1 \quad (5.6.1)$$

Let i,j,k,l be the four nodes defining a tetrahedron τ sharing node a_i , then the cell boundary element of cell C_i , associated with τ and edge $[i,j]$ is

$$\begin{aligned} \partial C_i \cap \tau \cap L_{ij} &= \text{Triangle}(M_1 G G_1) \cup \text{Triangle}(M_1 G G_3) \\ &= \partial l_{m(i,j,\tau,\{1,3\})}^2 = \partial l_{m(i,j,\tau,1)}^2 \cup \partial l_{m(i,j,\tau,3)}^2 \end{aligned} \quad (5.6.2)$$

Let m_{ij} denote the midpoint of edge $[i,j]$, also written as M_1 above, and let $U_i^n \cong U(a_i, t^n)$ and $U_{ij}^{n+1} \cong U(m_{ij}, t^{n+1})$ denote the nodal (resp. cell average) values in the first and second grid at time $t = t^n$ and $t = t^{n+1}$, respectively (n even).

The union of all the barycentric cells constitutes a partition of the computational domain Ω_h and the same holds for diamond cells:

$$\Omega_h = \bigcup_{i=1}^{nv} C_i, \quad \Omega_h = \bigcup_{k=1}^{ne} L_k$$

where nv and ne are the number of vertices and number of edges, respectively, of the original finite element triangulation \mathcal{T}_h . We now define the two steps of our first order accurate (staggered, Lax-Friedrichs type) finite volume method:

First time step:

In the first (and further odd) time step of our 3-dimensional finite volume scheme, we start from initial (or previously obtained) cell average values \vec{U}_i for the barycentric cells of the first grid, and compute cell average values \vec{U}_{ij} for the (staggered) dual cells of the second grid. This is done by integrating (5.5.1) on an extended control volume $L_{ij} \times [t^n, t^{n+1}]$, where L_{ij} is a (diamond) cell of the dual grid, and by assuming that $\vec{U}_{L_{ij}}(t^n + \Delta t)$ is piecewise constant on the cells of the second grid. Using (5.5.1) and applying the divergence theorem to the flux term, we obtain

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{L_{ij}} U_t d\vec{x} dt + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\partial L_{ij}} \vec{\mathcal{F}}(U) \cdot \vec{n} dA dt = 0 \quad (5.6.3)$$

Let $m(1,3)$ be equal to $m(i,j,\tau,\{1,3\})$ and $m(2,4) = m(i,j,\tau,\{2,4\})$ for simplicity, (where $m(1,3)$ is in fact dependent on i,j,τ); we obtain

$$\begin{aligned} U_{ij}^{n+1} &= \frac{1}{2}(U_i^n + U_j^n) \\ &- \frac{\Delta t}{Vol(L_{ij})} \sum_{\tau \in T_{ij}} \{ \vec{\mathcal{F}}(U_i^n) \cdot \vec{n}_{m(1,3)} + \vec{\mathcal{F}}(U_j^n) \cdot \vec{n}_{m(2,4)} \} \\ &- \frac{\Delta t}{Vol(L_{ij})} \int_{\partial L_{ij} \cap \Gamma_B} \vec{\mathcal{F}}(U(\vec{x})^n) \cdot \vec{n} dA \\ &- \frac{\Delta t}{Vol(L_{ij})} \int_{\partial L_{ij} \cap \Gamma_\infty} \vec{\mathcal{F}}(U(\vec{x})^n) \cdot \vec{n} dA \end{aligned} \quad (5.6.4)$$

Second time step: Starting from the known diamond cell value U_{ij}^{n+1} , we compute the barycentric cell value U_i^{n+2} ($1 \leq i \leq nv$) by integrating (5.5.1) on an extended control volume $C_i \times [t^{n+1}, t^{n+2}]$, applying the divergence theorem to the

flux term, and observing that

$$\partial C_i = \bigcup_{j \in K(i)} \{\partial C_i \cap \partial C_j\} \cup \{\partial C_i \cap \Gamma_B\} \cup \{\partial C_i \cap \Gamma_\infty\}.$$

We obtain

$$\begin{aligned} U_i^{n+2} = & \sum_{j \in K(i)} \frac{\text{Vol}(C_i \cap L_{ij})}{\text{Vol}(C_i)} U_{ij}^{n+1} - \frac{\Delta t}{\text{Vol}(C_i)} \sum_{j \in K(i)} \sum_{\tau \in T_{ij}} \vec{\mathcal{F}}(U_i^{n+1}) \cdot \vec{\nu}_{m(1,3)} \\ & - \frac{\Delta t}{\text{Vol}(C_i)} \int_{\partial C_i \cap \Gamma_B} \vec{\mathcal{F}}(U^{n+1}) \cdot \vec{\nu} dA \\ & - \frac{\Delta t}{\text{Vol}(C_i)} \int_{\partial C_i \cap \Gamma_\infty} \vec{\mathcal{F}}(U^{n+1}) \cdot \vec{\nu} dA \end{aligned} \quad (5.6.5)$$

5.6.2. High-order accurate approximations

To obtain second-order accuracy, we introduce cellwise piecewise linear interpolation (MUSCL,[17]), the derivatives of the P_1 (Galerkin) interpolation [8], Least Squares [6], and the Gauss-Green formula [7].

First step: We integrate (5.5.1) on an extended control volume $L_{ij} \times [t^n, t^{n+1}]$, assuming we have obtained from the cell average values U_i^n piecewise linear reconstructions given by

$$\begin{aligned} U_h(x, y, z, t^n)|_{C_i} &= \mathcal{L}_i(x, y, z, t^n) \\ &= U_i^n + (x - x_i)P_i^n + (y - y_i)Q_i^n + (z - z_i)R_i^n \quad (x, y, z) \in C_i \end{aligned} \quad (5.6.6)$$

For the integration with respect to time, in order to ensure "nearly" second-order accuracy, we adopt a "quasi-midpoint formula" time discretization, where the

convective flux is computed at the intermediate time $t^{n+\frac{1}{2}}$ (thus requiring the computation of **predicted** values $U_h(x,y,t^{n+\frac{1}{2}})$ along ∂L_{ij}), in the integration with respect to time.

Predictor (First step):

On each face of the cell L_{ij} , using the Euler equations, we define a predicted vector

$$U_{a_i, G_1, G}^{n+1/2} = U_{a_i, G_1, G}^n - \frac{\Delta t}{2} \{ F'(U_{a_i, G_1, G}^n) P_i^n + G'(U_{a_i, G_1, G}^n) Q_i^n + H'(U_{a_i, G_1, G}^n) R_i^n \} \quad (5.6.7)$$

where, using (5.6.6), the value of U_h^n along the face a_i, G_1, G of diamond cell L_{ij} is taken equal to

$$U_h(x, y, z, t^n) \cong U_i^n + \frac{1}{2}(x_{a_i, G_1, G} - x_i) P_i^n + \frac{1}{2}(y_{a_i, G_1, G} - y_i) Q_i^n + \frac{1}{2}(z_{a_i, G_1, G} - z_i) R_i^n \equiv U_{a_i, G_1, G}^n \quad (5.6.8)$$

The corrector can now be written, using (5.6.7), as **Corrector (First step)**

$$\begin{aligned} & Vol(L_{ij}) U_{ij}^{n+1} - \left\{ \int_{L_{ij} \cap C_i} \mathcal{L}(x, y, z, t^n) d\vec{x} + \int_{L_{ij} \cap C_j} \mathcal{L}(x, y, z, t^n) d\vec{x} \right\} \\ & + \Delta t \sum_{\tau \in T_{ij}} \left\{ \int_{\partial l_{m(i, j, \tau, \{1, 3\})}^1} + \int_{\partial l_{m(i, j, \tau, \{2, 4\})}^1} \right\} \vec{\mathcal{F}}(U_h^{n+\frac{1}{2}}) \cdot \vec{n} dA \\ & + \Delta t \int_{\partial L_{ij} \cap \Gamma_B} \vec{\mathcal{F}}(U_h^n) \cdot \vec{n}_{ij} dA + \Delta t \int_{\partial L_{ij} \cap \Gamma_\infty} \vec{\mathcal{F}}(U_h^n) \cdot \vec{n}_{ij} dA = 0 \quad (5.6.9) \end{aligned}$$

where

$$\int_{L_{ij} \cap C_i} \mathcal{L}(x, y, z, t^n) d\vec{x} = \sum_{\tau \in T_{ij}} \text{Vol}(l_{m(1,3)}) \mathcal{L}(x_{\mathcal{G}_{m(1,3)}}, y_{\mathcal{G}_{m(1,3)}}, z_{\mathcal{G}_{m(1,3)}}, t^n) \quad (5.6.10)$$

where $\mathcal{G}_{m(1,3)}$ is the centroid of sub-tetrahedron $l_{m(1,3)}$. Note that from the coding viewpoint there is a simplification since the two sub-tetrahedra (1,3) also form a convex polyhedron the barycenter of which can be calculated, and the last integral can be simplified.

Second step

To obtain the second step of the time discretization, we integrate (5.5.1) on the cell $C_i \times [t^{n+1}, t^{n+2}]$, assuming we have obtained, from the diamond cell average values U_{ij}^{n+1} computed in the first time step, piecewise linear reconstructions, given by

$$\begin{aligned} U_h(x, y, z, t^{n+1})|_{L_{ij}} &= \mathcal{L}_{ij}(x, y, z, t^{n+1}) \\ &= U_{ij}^{n+1} + (x - x_{ij})P_{ij}^{n+1} + (y - y_{ij})Q_{ij}^{n+1} + (z - z_{ij})R_{ij}^{n+1} \end{aligned} \quad (5.6.11)$$

Proceeding as for the first step, we obtain

Predictor (second step)

$$\begin{aligned} U_{G, G_1, M_1, G_3}^{n+\frac{3}{2}} &= U_{G, G_1, M_1, G_3}^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} \{ \\ &F'(U_{G, G_1, M_1, G_3}^{n+1})P_{ij}^{n+1} + G'(U_{G, G_1, M_1, G_3}^{n+1})Q_{ij}^{n+1} + H'(U_{G, G_1, M_1, G_3}^{n+1})R_{ij}^{n+1} \} \end{aligned} \quad (5.6.12)$$

where

$$\begin{aligned}
U_h(x,y,z,t^{n+1}) &\cong U_{ij}^{n+1} \\
&+ \frac{1}{2}(x_G - x_{M_1})P_{ij}^{n+1} + \frac{1}{2}(y_G - y_{M_1})Q_{ij}^{n+1} + \frac{1}{2}(z_G - z_{M_1})R_{ij}^{n+1} \\
&\equiv U_{G,G_1,M_1,G_3}^{n+1} \tag{5.6.13}
\end{aligned}$$

defines an approximation of the value of U on the boundary element $[G,G_1,M_1,G_3]$ of cell C_i . Corrector (second step)

$$\begin{aligned}
&Vol(C_i)U_i^{n+2} - \sum_{j \in K(i)} \int_{C_i \cap L_{ij}} \mathcal{L}_{ij}(x,y,z,t^{n+1}) d\vec{x} \\
&+ \Delta t \sum_{j \in K(i)} \sum_{\tau \in T_{ij}} \int_{\partial l_m^2(i,j,\tau,\{1,3\})} \vec{\mathcal{F}}(U(x,y,z,t^{n+3/2})) \cdot \vec{\nu} dA \\
&+ \Delta t \int_{\partial C_i \cap \Gamma_B} \vec{\mathcal{F}}(U_h^{n+1}) \cdot \vec{\nu} dA + \Delta t \int_{\partial C_i \cap \Gamma_\infty} \vec{\mathcal{F}}(U_h^{n+1}) \cdot \vec{\nu} dA = 0 \tag{5.6.14}
\end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}
&\int_{C_i \cap L_{ij}} \mathcal{L}_{ij}(x,y,z,t^{n+1}) d\vec{x} = \\
&\sum_{j \in K(i)} \sum_{\tau \in T_{ij}} \{Vol(l_m(i,j,\tau,1,3)) \mathcal{L}(x_{\mathcal{G}_m(i,j,\tau,1,3)}, y_{\mathcal{G}_m(i,j,\tau,1,3)}, z_{\mathcal{G}_m(i,j,\tau,1,3)}, t^{n+1})\} \tag{5.6.15}
\end{aligned}$$

is computed according to 5.6.10 with the respective barycenters of the sub-tetrahedra (again, a simplification is possible).

5.6.2.1. Approximation of the slopes and limitation

In order to compute the gradient (P_i^n, Q_i^n, R_i^n) of the piecewise linear interpolant $L(x, y, z, t^n)$ for the cell C_i , we use the P_1 (Galerkin) interpolation [8], Least Squares [6] and Gauss-Green [7]. For the limitation we use several procedures, see [17]. Numerical experiments have led us to choose the Gauss-Green formula for the gradients used in the reconstruction for the cells C_i and a least squares weighted procedure for the cells L_{ij} .

5.6.2.2. Stability

We refer to [15] for a stability study of linear multidimensional advection models that is also valid in the 3-D case. For the second time step:

$$\Delta t_i = \frac{Vol(C_i)}{\lambda_{max}^i \int_{\partial C_i} dA} \quad \text{where} \quad \lambda_{max}^i = \max(\lambda_i, \max_{j \text{ neighbour of } i} \lambda_j)$$

$$\text{and} \quad \lambda_i = \|\vec{V}_i\| + c_i$$

\vec{V}_i , c_i refer to the values in the cell C_i of the velocity vector and sound speed, respectively. We then choose the minimum Δt_i for all indices i ($1 \leq i \leq nv$)

$\Delta t = \min_{1 \leq i \leq nv} \{\Delta t_i\}$ with a similar time step definition for the first (odd) step ($t^n \rightarrow t^{n+1}$).

5.7. NUMERICAL EXPERIMENTS

5.7.1. Linear advection problem

First, to confirm the spatial accuracy of the scheme, a simple advection test is performed on a smooth initial distribution. The distribution is advected near the boundary of the cube $[0,1]^3$ and compared with the exact solution of the following problem:

$$u_t + u_x + u_y + u_z = 0 \quad (5.7.1)$$

$$u(x,y,z,t=0) = f(r^2) = \begin{cases} \cos(4\pi r^2) & \text{if } r^2 \leq 1/8 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

where $r^2 = (x - 1/2)^2 + (y - 1/2)^2 + (z - 1/2)^2$.

Diameter	Nodes	L^1 -error	Order
0.134057	4095	0.0487568	
0.123977	5733	0.0416913	2.0027

TAB. 5.1. L^1 - error and accuracy order, continuous problem

Table 5.1 shows the L_1 -error and accuracy order; the limiting function used was the one proposed by Venkatakrishnan [18].

5.7.2. Shock tube problem

To illustrate the accuracy of our scheme, we present numerical results for a 3-D extension of the shock tube problem introduced by Sod . In this problem, an

initial discontinuity in the thermodynamical state of the gas breaks into a shock wave followed by a contact discontinuity and a rarefaction wave. Finite element meshes with 909,1809 and 3609 nodes are used and the initial conditions at $t = 0$ are specified by the data

$$\begin{cases} \rho = 1; u = 0; v = 0; w = 0; p = 1.0 & x \in [0, 1/2] \\ \rho = 0.125; u = 0; v = 0; w = 0; p = 0.1 & x \in [1/2, 1] \end{cases} \quad (5.7.2)$$

The profiles of density, velocity, pressure and temperature are compared with the analytical solution at $t = 0.16$. The numerical solution of the 3-dimensional

h	Nodes	$L^2 \rho$	Order	$L^2 V_z$	Order	$L^2 P$	Order
0.01	909	2.898e-05		9.982e-05		2.778e-05	
0.005	1809	1.555e-05	0.898	6.399e-05	0.641	1.196e-05	1.216

TAB. 5.2. L^2 - error and accuracy order, Sod's problem

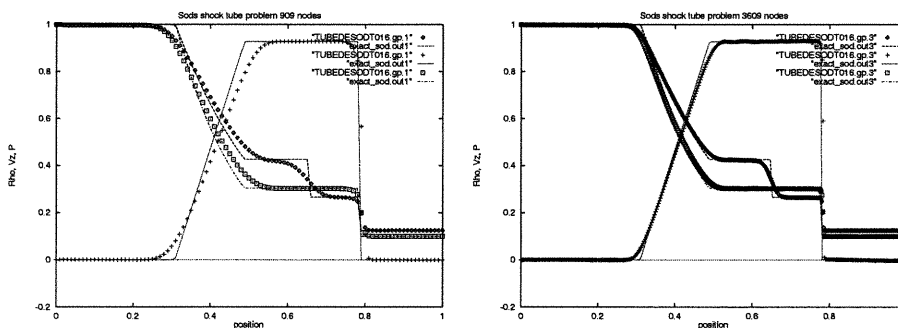


FIG. 5.2. Sod's shock tube problem with 909 and 3609 gridpoints

shock tube problem is clearly much more likely to suffer from excessive numerical

dissipation than its 1-dimensional analogue see e. g. [9]. In our case, see table 5.2 and Fig. 5.2, this dissipation might be due to the fact that the tetrahedra are fairly stretched (the aspect ratio is more than 1 : 25). This creates an additional difficulty for the capture of the shock and particularly of the contact discontinuity. Mesh adaptation, which was not available to us, would certainly bring a decisive improvement, as was observed in our 2-dimensional experiments [6].

5.8. CONCLUSION

In this paper we have presented a new construction of three-dimensional finite volume methods for inviscid flows using staggered unstructured tetrahedral grids. The first and second-order methods can be considered as finite volume generalizations of the Lax-Friedrichs and Nessyahu-Tadmor 1-dimensional difference schemes, respectively. Actual calculations have been restricted to the higher-order method, as the first-order Lax-Friedrichs-type method, in three dimensions, proved to be even more dissipative than in one dimension. Nevertheless the quality of the results does not fully meet original expectations, based on the very high quality obtained with our method for 2-dimensional flows [6], where we were using grid adaptation. We could probably attribute the excessive dissipation in part to the grids, which have a relatively small number of nodes, a high aspect ratio, and have not benefited from the improvements brought about by grid adaptation. We are currently working on this problem.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ANGRAND F., BOULARD V., DERVIEUX A., PERIAUX J., VIJAYASUNDARAM G., (1984), *Triangular finite element methods for the Euler equations*, 6th Int. Conf. on Comp. Meth. in Appl. Sciences and Engineering, Glowinski R., Lions J.L., Eds., North Holland .
- [2] P. ARMINJON, A. MADRANE AND A. ST-CYR (1999), *New Lax-Friedrichs-type finite volume schemes on 2 and 3D Cartesian staggered grids*, 7th annual conference of the CFD Society of Canada, May 30 to June 1, 1999, Halifax, J. Militzer, editor, pp.(3-3)-(3-10).
- [3] P. ARMINJON, A. MADRANE, A. ST-CYR, *New 2 and 3-dimensional non-oscillatory central finite volume methods for staggered Cartesian grids*, to appear in Applied Numer. Math.
- [4] P. ARMINJON, D. STANESCU AND M. C. VIALON, (1995), *A two-dimensional finite volume extension of the Lax-Friedrichs and Nessyahu-Tadmor schemes for compressible flows*, Proc.of the 6th. Int. Symp. on Comp. Fluid Dynamics, Lake Tahoe (Nevada) September 4-8, 1995, M.Hafez and K. Oshima, editors, Vol. IV, pp. 7-14.
- [5] P. ARMINJON AND M. C. VIALON, (1995), *Généralisation du schéma de Nessayahu-Tadmor pour une équation hyperbolique à deux dimensions d'espace*, C.R. Acad. Sci. Paris, t.320, série I, January 1995, pp. 85-88.

- [6] P. ARMINJON, M.C. VIALON AND A. MADRANE, (1994), *A Finite Volume Extension of the Lax-Friedrichs and Nessyahu-Tadmor Schemes for Conservation Laws on Unstructured Grids*, revised version with numerical applications, Int. J. of Comp. Fluid Dynamics (1997), Vol. 9, No. 1, 1-22.
- [7] T. J.BARTH AND D. C.JESPERSEN, (1989), *The design and application of upwind schemes on unstructured meshes*, AIAA Paper No. 89-0366, 27th Aerospace sciences meeting, January 9-12, 1989, Reno, Nevada.
- [8] FEZOU, L., LANTERI, S. , LARROUTUROU, B. AND OLIVIER, C., (1989), *Résolution Numérique des Équations de Navier-Stokes pour un Fluide Compressible en Maillage triangulaire*, INRIA Res. Rep. No. 1033, Inst. National de Rech. en Informatique et Automatique, Rocquencourt, 78153 Le Chesnay, France.
- [9] FEZOU, L., STEVE, H. AND SELMIN, V. (1988) *Simulation numérique d'écoulements compressibles 3-D par un schéma décentré en maillage non-structuré*, INRIA Res. Rep. No. 0825, Institut National de Recherche en Informatique et Automatique, Rocquencourt, 78153 Le Chesnay, France.
- [10] G. JIANG AND E. TADMOR, (1998), *Non-oscillatory Central Schemes for Multi-dimensional Hyperbolic Conservation Laws*, SIAM J. on Scientific Computing, 19, pp.1892-1917.
- [11] T. KATSAOUNIS AND D. LEVY, (1999), *A modified structured central schme for 2D hyperbolic conservation laws*, Appl. Math. Lett. 12, pp. 89-96.
- [12] P.D. LAX, (1954), *Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation*, Comm. Pure and Applied Math.7, pp. 159-193.

- [13] D. LEVY, G. PUPPO AND G. RUSSO, (2000), *A third order central WENO scheme for 2D hyperbolic conservations laws*, Appl. Numer. Math. 33, pp. 415-421.
- [14] D. LEVY, G. PUPPO AND G. RUSSO, (2000), *Compact central WENO scheme for multidimensional conservations laws*, SIAM J. Sci. Comput. 22, pp. 656-672.
- [15] A. MADRANE, (1998), *Constructions of new finite volume/finite element methods for transonic/supersonic compressible flows*, Ph. D. dissertation, Université de Montréal, Département de Mathématiques et Statistique.
- [16] H. NESSYAHU AND E. TADMOR, (1990), *Non-oscillatory central differencing for hyperbolic conservation laws*, J. Comp. Phys., 87, No. 2, pp. 408–463.
- [17] B. VAN LEER, (1979), *Towards the ultimate conservative difference scheme V. A Second-Order Sequel to Godunov's Method*, J.Comp.Physics, 32, pp. 101-136.
- [18] V. VENKATAKRISHNAN, (1995), *Convergence to Steady State Solutions of the Euler Equations on Unstructured Grids with Limiters*, J. Comp. Phys. 118, pp. 120-130.

Chapitre 6

NEW SPACE STAGGERED AND TIME INTERLEAVED 2^{ND} ORDER FINITE VOLUME METHODS

(voir annexe A.3 pour les autorisations des co-auteurs et de l'éditeur)

6.1. AUTEURS

- Paul Arminjon
- Amik St-Cyr

6.2. RÉSUMÉ

Nous présentons une version modifiée du schéma de Nessyahu-Tadmor (NT) en une dimension, et les nouvelles versions correspondantes en 2 et 3D inspirées du schéma de NT. Dans le cas bi-dimensionnel nous présentons le schéma en maillages structurés cartésiens, tandis qu'en 3 dimensions nous construisons la version centrée modifiée de la méthodes de volumes finis basée sur le schéma de

NT pour des maillages non structurés de tétraèdres. Cette modification évite l'utilisation d'un pas de prédiction entre les étapes t^n et t^{n+1} . Même si ce changement ne conduit pas vers des améliorations drastiques dans la précision ou la vitesse de calcul en 1D, dans les cas 2 et tri-dimensionnel, la version modifiée conduit à d'importantes réductions des temps de calculs.

6.3. ABSTRACT

A new modified version of the Nessyahu-Tadmor (NT) 1-dimensional finite volume central scheme is presented , as well as corresponding new versions for 2D-structured and 3D-unstructured grids inspired from the NT scheme. The modification avoids the intermediate predictor time step between t^n and t^{n+1} . Although this does not really bring about substantial accuracy / computer time improvements in the 1D case, in the 2 and 3 dimensional cases, the modified scheme does lead to important reductions in computer times. 3D comparative simulations for the shock tube problem and for a supersonic inviscid flow through a channel with a 4% circular bump are presented.

6.4. INTRODUCTION

We consider central methods for scalar hyperbolic conservation laws or corresponding systems:

$$u_t + f(u)_x = 0$$

with initial data $u(x, t = 0) = u_0(x)$ (6.4.1)

as well as their 2 and 3-dimensional analogue, to be described below.

The non-oscillatory central difference scheme of Nessyahu and Tadmor may be interpreted as a Godunov-type scheme for one-dimensional hyperbolic conservation laws in which the resolution of the Riemann problems at the cell interfaces is by-passed thanks to the use of the staggered Lax-Friedrichs scheme. Piecewise linear MUSCL-type cell interpolants and slope limiters lead to an oscillation-free second-order resolution.

In earlier papers [8, 10, 9] a two-dimensional finite volume method was presented, generalizing the one-dimensional Lax-Friedrichs [20] and Nessyahu - Tadmor [22] difference schemes for hyperbolic conservation laws to unstructured triangular grids, while in [5, 3, 6] a corresponding extension in the case of 2-dimensional Cartesian grids was constructed. These “central” finite volume methods share with the Lax-Friedrichs and Nessyahu-Tadmor schemes the two advantages of avoiding the resolution of Riemann problems at the cell interfaces, and being non-oscillatory.

In [14], Jiang and Tadmor have presented a slightly different extension to two-dimensional Cartesian grids; the difference between both extensions for rectangular grids is that in [5], the MUSCL (Monotonic Upstream-centered Scheme for Conservation Laws) variable extrapolation ("reconstruction technique") [29],[30] is applied both to the vector of conservative variables and to the fluxes, while in [14], it is only used for the conservative variables. All these extensions to 2-dimensional problems lead to non-oscillatory, essentially second-order accurate finite volume methods.

Recently in [4, 2, 7] new extensions of the LxF and NT 1-dimensional finite difference schemes to central finite volume methods for 3-dimensional hyperbolic systems on **unstructured tetrahedral grids** were presented. The results of the simple numerical simulations were reasonably good but indicated the need for more complicated test cases. Grid adaptation could be used to cure the smearing of shocks although using such a complement could shadow the real properties / deficiencies of the scheme.

In [6] a finite volume extension of the first-order accurate Lax-Friedrichs scheme to three-dimensional Cartesian grids was presented, and the new scheme was proved to be monotone under an appropriate CFL condition. A corresponding extension of the N. T. difference scheme to a non-oscillatory finite volume method for 3-dimensional staggered Cartesian grids was then constructed. This extension should in principle be second order accurate.

As numerical experiments shown in [3, 6] indicated orders between 0.8 and 1.86, a more careful look at this problem was needed; first in 3 dimensions, second-order accuracy was essentially recovered by resorting to the original van Albada limiter [28], albeit at the cost of losing strict monotonicity see [31, 6]. In the two-dimensional case, 2^{nd} order accuracy was also recovered by introducing new, oblique dual cells ("diamond cells") [3, 6] instead of the dual cells with sides parallel to the axes (considered in [5]) (fig 6.1). These diamond cells were in fact the direct analogue of the quadrilateral dual cells introduced in the 2-dimensional finite volume extensions of the NT scheme described in [8, 9, 10], for unstructured triangular grids. They have also been considered, independently, by Katsaounis and Levy [15]; combined with the use of standard limiters, they lead to 2^{nd} order accuracy and monotonicity preservation, in the case of continuous initial data. Moreover, the method described in [3, 6, 15] prevents the crossing of discontinuities in the normal direction [15]. In the case of a nonlinear hyperbolic equation with a (discontinuous) initial function u_0 in $L^\infty(\mathbb{R}^d) \cap BV_{loc}(\mathbb{R}^d)$, K  ther [18, 19] has recently proved an error estimate of order 0.25 for the Lax-Friedrichs-type finite volume scheme, which is not optimal; it was indeed recently proved by Sabac [23] that $h^{1/2}$ is optimal for first-order schemes. For second order schemes it is presently believed or conjectured that h^1 is optimal. K  ther's proof of the $h^{1/4}$ - error estimate is inspired from the work of Haasdonk, Kr  ner and Rohde [13].

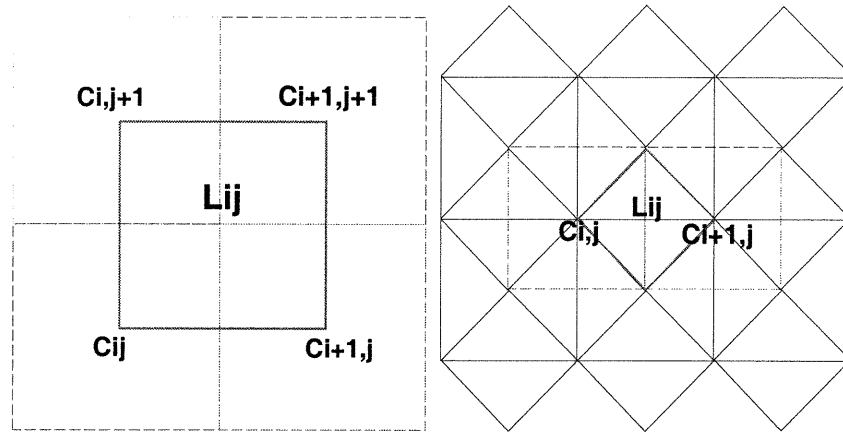


FIG. 6.1. 2D dual cells for: left: original(non-oblique) right: oblique case

Instead of modifying the dual cells to improve the accuracy, another possible approach consisting of modifying the numerical flux by using an improved quadrature formula for the fluxes across the boundaries of the cells has recently been proposed by Lie and Noelle [21]. Their scheme is less sensitive to grid orientation effects and leads to an improved preservation of symmetries as compared with the original two dimensional finite volume extensions of the NT scheme considered here and in [3, 5, 6] and [14].

In this paper, we investigate another way to improve our 2 and 3-dimensional central finite volume methods inspired from the Lax-Friedrichs and Nessyahu-Tadmor difference schemes. These methods require the implementation, at each time step, of an intermediate half-time step, in the form of a predictor for the values $u^{n+1/2}$ needed to compute the cell-interface fluxes with the midpoint rule. Since the execution of this predictor step becomes more and more time consuming

in 2 and 3 dimensions, we shall present here a variant of our schemes which avoids these predictor steps. The new method is inspired by multistep methods for Ordinary Differential Equations, and computes the fluxes with the help of the values of the dependent variables at the last two time steps. Since the NT scheme and our finite volume extensions use two staggered grids at alternate time steps, the solution at time t^{n+1} is constructed with the help of the fluxes at t^n and t^{n-2} , both obtained from the same grid.

Although the new method does not lead to significant computer time reduction in the one dimensional case, it really becomes advantageous in two and even more so in three spatial dimensions, where it can lead to reductions up to 40% in total computer times.

The organization of this paper is as follows.

In section 2, we present, after a short review of the NT scheme, our new method in the one-dimensional case, while the two and three-dimensional cases are presented in section 3.

In section 4 we describe some simple numerical experiments, including a comparison with the results obtained with our former finite volume extension of the NT scheme.

6.5. THE ONE-DIMENSIONAL NT-TYPE SCHEME WITHOUT PREDICTOR STEP

6.5.1. The Lax-Friedrichs and Nessyahu-Tadmor difference schemes

We consider the initial value problem (6.4.1) and the (first-order accurate) Lax-Friedrichs scheme [20] written in, its staggered form, as

$$u_{i+1/2}^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{i+1}^n + u_i^n) - \lambda(f(u_{i+1}^n) - f(u_i^n)) \quad (\lambda \equiv \frac{\Delta t}{h} \equiv \frac{\Delta t}{\Delta x}) \quad (6.5.1)$$

Starting from initial values

$$u_i^0 = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u_0(x) dx \quad (6.5.2)$$

the first (or further odd) time step of (6.5.1), with $n = 0$ (or $n = 2n', n' = 1, 2, \dots$) leads to staggered values $\{u_{i+1/2}^1\}$ (or $\{u_i^{2n'+1}\}$) which can be considered as piecewise constant on the cells $C_{i+1/2}$ of the staggered, dual grid:

$$C_{i+1/2} = \{x | x_i = ih < x < x_{i+1}\} \quad (6.5.3)$$

In the next (even) time step (with $n=0, 2, \dots$)

$$u_i^{n+2} = \frac{1}{2}(u_{i+1/2}^{n+1} + u_{i-1/2}^{n+1}) - \lambda(f(u_{i+1/2}^{n+1}) - f(u_{i-1/2}^{n+1})) \quad (6.5.4)$$

we obtain values $\{u_i^{n+2}\}_{n=0, 2, 4, \dots}$ which define a piecewise constant approximation of $u(x, t = t^{n+2})$ on the cells $C_i = \{x | x_{i-1/2} < x < x_{i+1/2}\}$ of the original grid. To obtain a second-order accurate scheme, Nessyahu and Tadmor [22] introduced

van Leer's MUSCL-Type [29] piecewise linear reconstruction of the piecewise constant solution obtained at the previous step (i.e. at time t^n):

$$u(x, t^n) = L_i(x, t^n) = u_i^n + (x - x_i) \frac{u_i'}{\Delta x} \quad x \in C_i \quad (6.5.5)$$

where

$$u_i' = (u_i^n)' \cong h \frac{\partial}{\partial x} u(x, t^n)|_{x=x_i} + O(\Delta x^2) \quad (6.5.6)$$

approximates the slope to first-order accuracy, this leads to second-order spatial accuracy. Second-order accuracy with respect to time is then obtained by approximating the flux integrals appearing in the integral form of the problem (6.4.1), as follows.

Integrating (6.4.1) in the rectangle $R_{i+1/2}^{n+1/2} = [x_i, x_{i+1}] \times [t^n, t^{n+1}]$ and applying Green's formula gives

$$0 = \iint_{R_{i+1/2}^{n+1/2}} (u_t + f(u)_x) dx dt = - \oint_{\partial R_{i+1/2}^{n+1/2}} [u(x, t) dx - f(u(x, t)) dt] \quad (6.5.7)$$

which can be written as

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u(x, t^{n+1}) dx &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} u(x, t^n) \\ &\quad - \left\{ \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u(x_{i+1}, t)) dt - \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u(x_i, t)) dt \right\} \end{aligned} \quad (6.5.8)$$

Substituting (6.5.5) into (6.5.8) and applying the midpoint rule to the flux integrals then gives, for the cell averages

$$u_{i+1/2}^{n+1} = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u(x, t^{n+1}) dx \quad (6.5.9)$$

Nessyahu and Tadmor's formula [22]:

$$u_{i+1/2}^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{i+1}^n + u_i^n) + \frac{1}{8}((u_i^n)' - (u_{i+1}^n)') - \lambda(f(u_{i+1}^{n+1/2}) - f(u_i^{n+1/2})) \quad (6.5.10)$$

where $u_i^{n+1/2}$ is an approximate value defined by an intermediate **predictor step** at time $t^{n+1/2}$:

$$\begin{aligned} u(x_i, t^{n+1/2}) &\cong u(x_i, t^n) + \frac{\Delta t}{2} u_t(x_i, t^n) \cong u_i^n - \frac{\Delta t}{2} f(u)_x|_{(x_i, t^n)} \\ &\cong u_i^n - \frac{\Delta t}{2h} f'_i \equiv u_i^{n+1/2} \end{aligned} \quad (6.5.11)$$

where $\frac{1}{h} f'_i$ is an **approximate flux derivative** which can be chosen [22] as

$$f'_i = \begin{cases} \text{MinMod}\{\Delta f_{i-1/2}, \Delta f_{i+1/2}\} \\ \text{MinMod}\{\alpha \Delta f_{i-1/2}, \frac{1}{2}(f_{i+1} - f_{i-1}), \alpha \Delta f_{i+1/2}\} \end{cases} \quad (6.5.12)$$

or simply as

$$f'_i = a(u_i^n)(u_i^n)' \quad (6.5.13)$$

(6.5.12.1) and (6.5.13), as well as (6.5.12.2) for $1 \leq \alpha \leq 2$, with similar choices for u'_i , lead to a TVD scheme [22]. For multidimensional extensions of the Nessyahu-Tadmor scheme, see (by chronological order) [8, 5, 10, 14, 3, 15].

6.5.2. One-dimensional NT-type scheme without predictor step

The new method is based on the NT scheme (in 1 dimension). Instead of performing the usual (NT)-predictor to obtain second order accuracy in time for the resolution of (6.4.1), the flux function required for the computation of the flux integrals appearing in (6.5.8) will be reconstructed with the help of previous

values in a manner inspired by linear multistep methods for ordinary differential equations.

We start from (6.5.8) and rewrite it, after calculation of the first two integrals, as

$$\begin{aligned} u_{i+1/2}^{n+1} &= \frac{1}{2}(u_{i+1}^n + u_i^n) + \frac{1}{8}((u_i^n)' - (u_{i+1}^n)') - \frac{1}{h}(D.F.I.) \\ &\equiv \tilde{u}_{i+1/2}^n - \frac{1}{h}(D.F.I.) \end{aligned} \quad (6.5.14)$$

where $D.F.I.$ is the difference of the flux integrals appearing in the bracket of (6.5.8), and $\tilde{u}_{i+1/2}^n$ is the average of the reconstructed function (6.5.5) on the dual cell $C_{i+1/2} = \{x | x_i < x < x_{i+1}\}$.

Let $\mathcal{P}(x, t)$ denote the first degree Lagrange polynomial interpolating the function $f(u(x, t))$ at the nodes t^{n-2} , t^n (considering x as a parameter):

$$\mathcal{P}(x, t) = \frac{(t - t^{n-2})f(u(x, t^n)) + (t^n - t)f(u(x, t^{n-2}))}{t^n - t^{n-2}} \quad (6.5.15)$$

Defining the flux difference $\Delta_i f(u(x_i, t^n)) \equiv f(u(x_{i+1}, t^n)) - f(u(x_i, t^n))$ and using the linearity of \mathcal{P} we can write

$$\begin{aligned} D.F.I. &= \frac{1}{2(t^n - t^{n-2})} \left\{ -[(t^n - t)^2]_{t^n}^{t^{n+1}} \Delta_i f(u(x_i, t^{n-2})) \right. \\ &\quad \left. + [(t - t^{n-2})^2]_{t^n}^{t^{n+1}} \Delta_i f(u(x_i, t^n)) \right\} \end{aligned} \quad (6.5.16)$$

$$= \Delta t^{n+1} \{ A_2 \Delta_i f(u(x_i, t^{n-2})) + A_1 \Delta_i f(u(x_i, t^n)) \} \quad (6.5.17)$$

$$\cong \Delta t^{n+1} \{ A_1 [f(u_{i+1}^n) - f(u_i^n)] + A_2 [f(u_{i+1}^{n-2}) - f(u_i^{n-2})] \} \quad (6.5.18)$$

where

$$A_1 = 1 + \frac{\Delta t^{n+1}}{2(\Delta t^{n-1} + \Delta t^n)}, \quad A_2 = 1 - A_1 \quad (6.5.19)$$

and $\Delta t^n = t^n - t^{n-1}$.

Substituting this into (6.5.14) now gives our modified form of the NT scheme

$$\begin{aligned} u_{i+1/2}^{n+1} = & \frac{1}{2}(u_{i+1}^n + u_i^n) + \frac{1}{8}((u_i^n)' - (u_{i+1}^n)') \\ & - \frac{\Delta t^{n+1}}{h} \{ \mathcal{F}(u_{i+1}^n, u_{i+1}^{n-2}) - \mathcal{F}(u_i^n, u_i^{n-2}) \} \end{aligned} \quad (6.5.20)$$

where

$$\mathcal{F}(u_i^n, u_i^{n-2}) \equiv A_1 f(u_i^n) + A_2 f(u_i^{n-2}) \quad (6.5.21)$$

can be viewed as a modified numerical flux influenced by the theory of multistep methods for ODE's, along the lines of Adams-Bashforth methods; the apparent difference with the second-order AB method is due to the fact that we use t^n and t^{n-2} (instead of t^n and t^{n-1} for AB-2), in order to make use of the latest values on the same grid. For constant time steps (6.5.19) leads to $A_1 = \frac{5}{4}, A_2 = -\frac{1}{4}$, compared with $A_1 = \frac{3}{2}, A_2 = -\frac{1}{2}$ for the classical Adams-Bashforth method of order 2.

6.6. 2D AND 3D NT-TYPE FINITE VOLUME METHODS WITHOUT PREDICTOR

Using the following model equation in 2 or 3 spatial dimensions ($\vec{F} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{(2,3)}$):

$$u_t + \nabla \cdot \vec{F}(u) = 0$$

with:

$$u(\vec{x}, 0) = u_0(\vec{x}) \tag{6.6.1}$$

allows us to derive the new scheme. Since only the time derivative will be modified with respect to the original Nessyahu-Tadmor scheme, the extension to several spatial dimensions is quite straightforward. One only needs to replace the fluxes in the original schemes with the new flux. Directly transposing the work of [2, 4, 6, 5, 14] leads in all cases to the new scheme.

Proceeding as in section 2 for the 1-dimensional case, we rewrite (6.6.1) as follows in a method of lines fashion:

$$u_t = -\nabla \cdot \vec{F}(u) \equiv G(u) = \frac{\partial u}{\partial t} \tag{6.6.2}$$

In the original finite volume formulation for tetrahedral grids (see [2, 4] for details), equation (6.6.1) is integrated with respect to space on the dual cells L_{ij} and with respect to time from t^n to t^{n+1} (see figure 6.2 for details). Instead of integrating the function $G(u)$ we integrate its \mathcal{P}_1 -Lagrange interpolation-polynomial

with respect to time (x being considered as a parameter):

$$\mathcal{P}(\vec{x}, t) = \left(\frac{(t - t^{n-2})G(u(\vec{x}, t^n))}{\Delta t^n + \Delta t^{n-1}} + \frac{(t^n - t)G(u(\vec{x}, t^{n-2}))}{\Delta t^n + \Delta t^{n-1}} \right) \quad (6.6.3)$$

Applying first integration by parts to the integration with respect to time gives

$$\int_{L_{ij}} u(x, t^{n+1}) dV = \int_{L_{ij}} u(x, t^n) dV + \int_{L_{ij}} \left\{ \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathcal{P}(\vec{x}, t) dt \right\} dV + O(\Delta t)^2 \quad (6.6.4)$$

Using the cell average values $u_{L_{ij}}(t^n) \equiv u_{L_{ij}}^n$ and a calculation similar to the one performed in section 2 now gives

$$\begin{aligned} u_{L_{ij}}(t^{n+1}) \text{vol}(L_{ij}) &= \int_{L_{ij} \cap C_i} u(x, t^n) dV + \int_{L_{ij} \cap C_j} u(x, t^n) dV \\ &\quad + \int_{L_{ij}} \{A_1 G(u(\vec{x}, t^n)) + A_2 G(u(\vec{x}, t^{n-2}))\} dV \end{aligned} \quad (6.6.5)$$

where A_1, A_2 are again defined by (6.5.19). Substituting the values of G and applying the divergence theorem finally leads to

$$\begin{aligned} u_{L_{ij}}(t^{n+1}) \text{vol}(L_{ij}) &= \int_{L_{ij} \cap C_i} u(x, t^n) dV + \int_{L_{ij} \cap C_j} u(x, t^n) dV \\ &\quad - \left(\int_{\partial L_{ij} \cap C_i} + \int_{\partial L_{ij} \cap C_j} \right) \{A_1 \vec{F}(u(\vec{x}, t^n)) + A_2 \vec{F}(u(\vec{x}, t^{n-2}))\} \cdot \hat{n} dA \end{aligned} \quad (6.6.6)$$

which represents the **NT-type finite volume method without predictor** in its version valid for **3-dimensional unstructured tetrahedral grids**.

Fig. 2 shows the part of the barycentric cell C_i (centered at node i) which is contained in the tetrahedra $ijkl$, and the dual cell L_{ij} constructed about the edge ij .

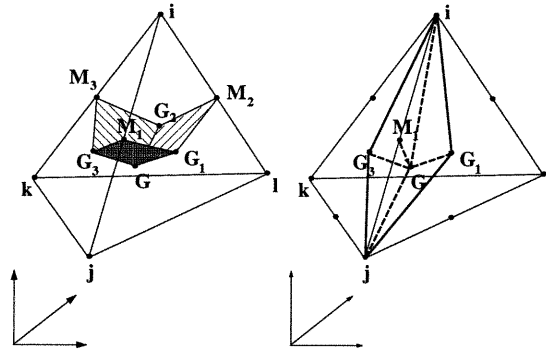


FIG. 6.2. Barycentric cell C_i and diamond cell L_{ij}

6.6.0.1. Remark

The polynomial is constructed in an interleaved way, skipping the data from the previous grid; hence, only information on identical grids is used to interpolate.

6.7. STABILITY

The study of stability for our new scheme (6.5.20) is more difficult than the corresponding investigation for the Nessyahu-Tadmor scheme, due to the values of $f(u_i^{n-2})$ appearing in (6.5.21). We have tried to use a heuristic CFL condition obtained by multiplying by $\frac{1}{A_1}$ ($\equiv \frac{4}{5}$ in the case of constant Δt) the maximum CFL number used in the case of the corresponding schemes without occurrence of the values at time t^{n-2} . For instance for the one-dimensional NT-type scheme without predictor, it was observed in [22] that in practice, the NT scheme will

be TVD for

$$\lambda \max_i |f'(u_i)| \leq \beta \quad (6.7.1)$$

with

$$\beta \leq \frac{1}{2} \quad (6.7.2)$$

we therefore used a CFL number of the order of $\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{5}$. We have found a heuristic justification for this factor $\frac{4}{5}$ or more generally $\frac{1}{A_1}$ by considering the simplest possible situation of a linear flux $f(u) = \alpha u$. The scheme (6.5.20) can then be written as

$$\begin{aligned} u_{i+1/2}^{n+1} &= \frac{1}{2}(u_i^n + u_{i+1}^n) + \frac{1}{8}[(u_i^n)' - (u_{i+1}^n)'] \\ &\quad - \frac{\Delta t}{h} \{A_1(\alpha u_{i+1}^n - \alpha u_i^n) + A_2(\alpha u_{i+1}^{n-2} - \alpha u_i^{n-2})\} \\ &\equiv \mathcal{H}(u_i^n, u_{i+1}^n, u_i^{n-2}, u_{i+1}^{n-2}) \end{aligned} \quad (6.7.3)$$

and giving up the 2^{nd} -order spatial accuracy by choosing $(u_i^n)' = 0$ for all i , we could try to impose, at least partially, a kind of positivity condition. Specifically, imposing $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_i^n} \geq 0$, $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_{i+1}^n} \geq 0$ leads to the restriction

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_i^n} = \frac{1}{2} + \frac{\alpha A_1 \Delta t}{h} \geq 0 \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_{i+1}^n} = \frac{1}{2} - \frac{\alpha A_1 \Delta t}{h} \geq 0 \end{cases} \quad (6.7.4)$$

from which we obtain

$$\frac{|\alpha| A_1 \Delta t}{h} \leq \frac{1}{2} \quad (6.7.5)$$

and thus

$$\frac{|\alpha|\Delta t}{h} \leq \frac{1}{2A_1} \quad (6.7.6)$$

Although this method seems to lead to good results, it does not really fall within the frame of the stability analysis presented by Shu [11] where multistep methods with negative coefficients are introduced and handled with the help of the adjoint spatial approximation operator. Other methods using the multistep approach have been considered, among others, by [24, 25, 11]; [24] gives an interesting analysis of the stability problem for multistep schemes of the form

$$u^{n+1} = \sum_{k=0}^m (\alpha_k u^{n-k} + \Delta t \beta_k G(u^{n-k})) \quad (6.7.7)$$

where $G(u) = -f(u)_x$ or $G(u) = -\nabla \cdot \vec{F}(u(\vec{x}, t))$. This analysis assumes that if one of the coefficients α_k vanishes, then β_k must also vanish. Unfortunately, this condition is not satisfied by our NT-type finite volume method without predictor step. But the CFL condition (6.7.6) is substantially less restrictive than the optimal condition found in [24, 11] (which features $\frac{1}{2}$ as a multiplier of the CFL number valid for the forward Euler method, in contrast with $\frac{1}{A_1} = \frac{4}{5}$). In future research, we intend to try and obtain an extension of Shu's stability analysis to the case of our interleaved scheme.

Considering now the unstructured tetrahedral 3D case, recalling the original scheme first presented in [2, 4], for the Euler equations, and applying the condition for a monotone scheme $\frac{\partial H}{\partial u_j^n} \geq 0$, we have used the following time step

For the second time step (NT):

$$\Delta t_i = \frac{Vol(C_i)}{\lambda_{max}^i \int_{\partial C_i} d\sigma}$$

where

$$\lambda_{max}^i = \max(\lambda_i, \max_{j \in \mathcal{N}(i)} \lambda_j) \quad \text{and} \quad \lambda_i = \|\vec{V}_i\| + c_i$$

and \vec{V}_i , c_i refer to the values in the cell C_i of the velocity vector and sound speed, respectively. We then choose the minimum Δt_i for all indices i ($1 \leq i \leq nv$) $\Delta t = \min_{1 \leq i \leq nv} \{\Delta t_i\}$ with a similar time step definition for the first (odd) step ($t^n \rightarrow t^{n+1}$).

We then used the multiplier $\frac{4}{5}$ to obtain our time step for the new scheme.

For the second time step (New scheme):

$$\Delta t_i = \frac{4Vol(C_i)}{5\lambda_{max}^i \int_{\partial C_i} d\sigma}$$

6.8. PERFORMANCE

The major restriction in the Nessyahu-Tadmor scheme is that there must be a predictor step executed before the evaluation of the fluxes. Specifically, since the predictor step in the Nessyahu-Tadmor scheme is using the value of u_t in the Taylor-expansion a pre-calculation of the fluxes is needed. These considerations

might seem harmless for a 1D solver but, when considering higher spatial dimensions, 2 evaluations of the fluxes at each time step may become somewhat time consuming and when the solver is applied to systems, 2 matrix-vector multiplications are needed in 2D and 3 matrix-vector multiplications are needed in 3D. The new proposed Riemann solver-free scheme does not use a predictor so that the fluxes needed in the next time step can be stored while calculating the actual solution at t^{n+1} . The only inconvenience is that the scheme must be started with two time steps of the Nessyahu-Tadmor version. But, if one does not mind using first order starting values, it is possible to set $A_2 = 0$, $A_1 = 1$ in the new scheme which then reverts to the LxF scheme with an order of accuracy $\mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(h^2)$. Note that in 3D the last option was used since it releases the coder from the necessity to implement a different scheme for the first two time steps only. But, if grid adaptation is applied, then the two schemes must be coded.

Mesh 3 (138561 Elements)	iterations	time(sec)	Normalized
Original Scheme	1692	5868	1.00
Interleaved Scheme	2123	3681	0.63

TAB. 6.1. Comparison of the two schemes for a fixed residual

6.9. NUMERICAL RESULTS

In all structured tests the *minmod-2* limiter (i.e. with $\alpha = 2$ in (6.5.12)) was used, while on unstructured 3D grids for the shock tube problem the new

Venkatakrisnan limiter was applied. For the bump problem, van Leer's limiter was used because of its low computational cost. For details on those limiters, one can consult [29, 30, 31, 6, 14].

6.9.1. Remark

It is worth mentioning that no artificial compression was applied on the NT scheme in any dimensions. Doing so would greatly improve the quality of the solution, particularly for the contact discontinuities, and could be applied to all of the newly proposed methods.

6.9.2. Cartesian 1D

6.9.2.1. *Scalar non-linear equation*

We solve the Burgers equation with the NT and \mathcal{P}_1 -NT schemes for a continuous initial condition and, also, a discontinuous initial condition. The continuous initial function is $u_0 = \sin(\pi x)$ while the discontinuous one is the step function centered at $x = 0$ and equal to 1 for $x < 0$, and 0 for $x > 0$. Both the continuous and discontinuous initial functions (fig. 6.3, 6.4) give rise to discontinuities, as time evolves, as the continuous initial function $u_0(x)$ is decreasing for $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$. These discontinuities are fairly well captured by both schemes. (N denotes the number of spatial cells/intervals of length $h = \frac{2}{N}$.)

6.9.2.2. Systems

The Euler system is solved for Sod's shock tube problem [26]. Both the NT scheme and the NT-type scheme perform well on that test (fig. 6.5,6.6), with the restriction that a slight undershoot on the right-hand-side of the rarefaction and contact discontinuity and overshoot on the LHS of the contact are present for the original NT scheme, which might have been caused by our use of the maximal CFL number both for the NT scheme and the new flux.

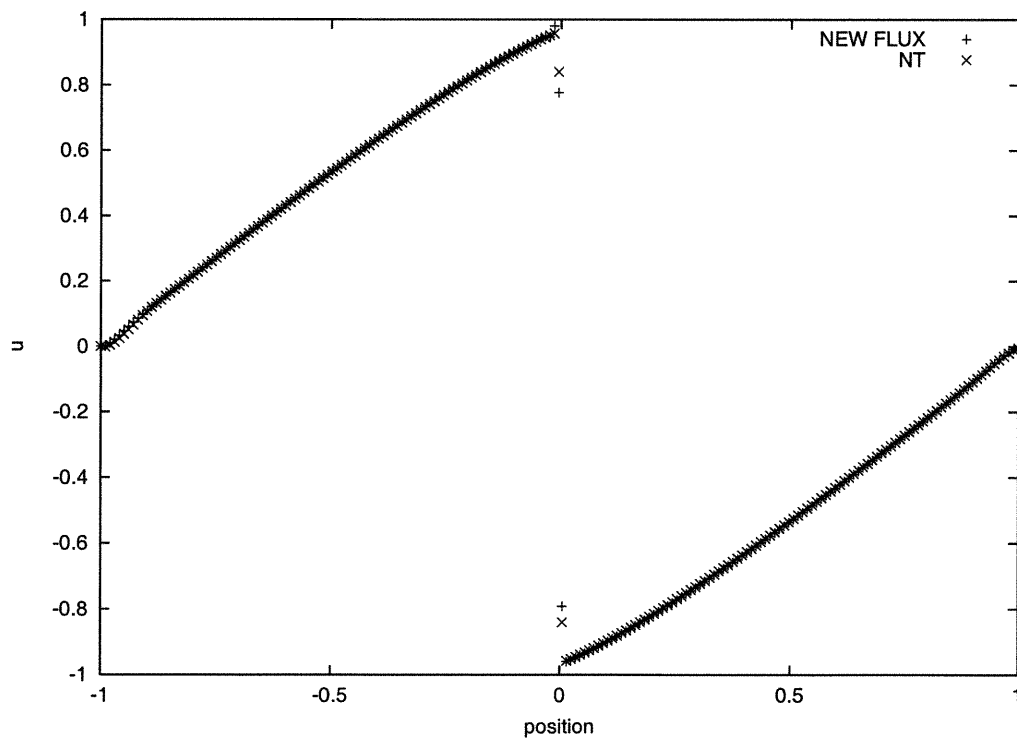


FIG. 6.3. Continuous problem 1D at $t = 2.0$, $N = 400$

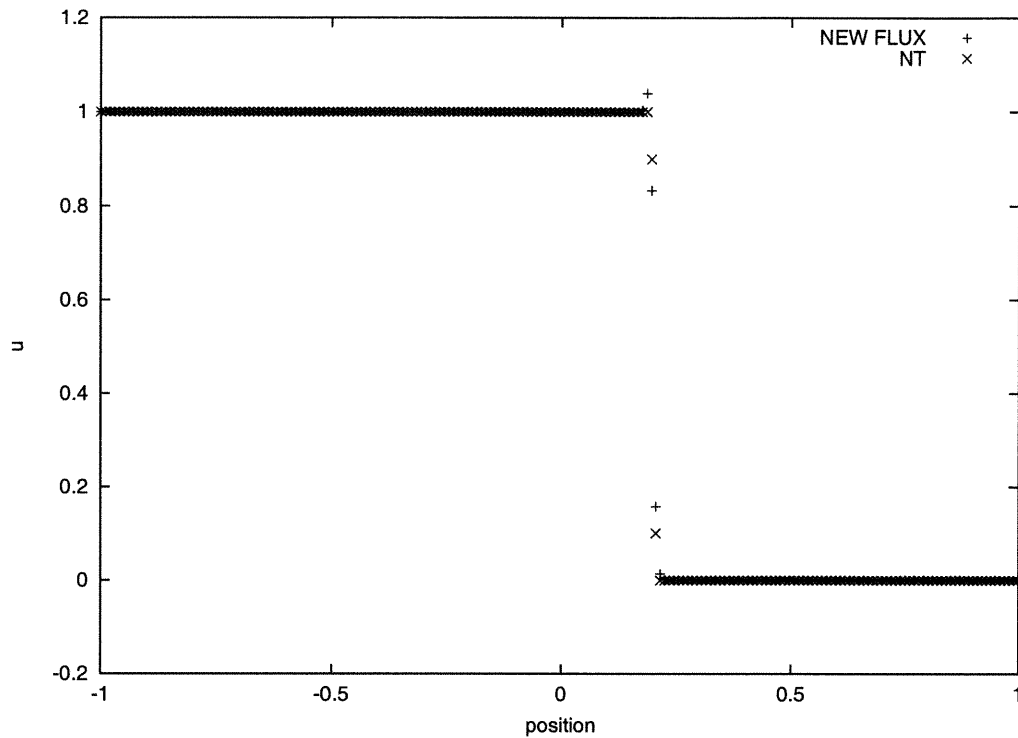


FIG. 6.4. discontinuous 1D at $t = 0.4$, $N=400$

6.9.3. Cartesian 2D

6.9.3.1. *Systems*

Solving again Sod's shock tube problem extended to 2 spatial dimensions and taking a transversal cut in the 2D plane gives the densities shown on figures (6.7,6.8) (to be compared with the results of the 1D scheme). The results are very similar for both schemes and generally good, except for the contact discontinuity which is somewhat smeared.

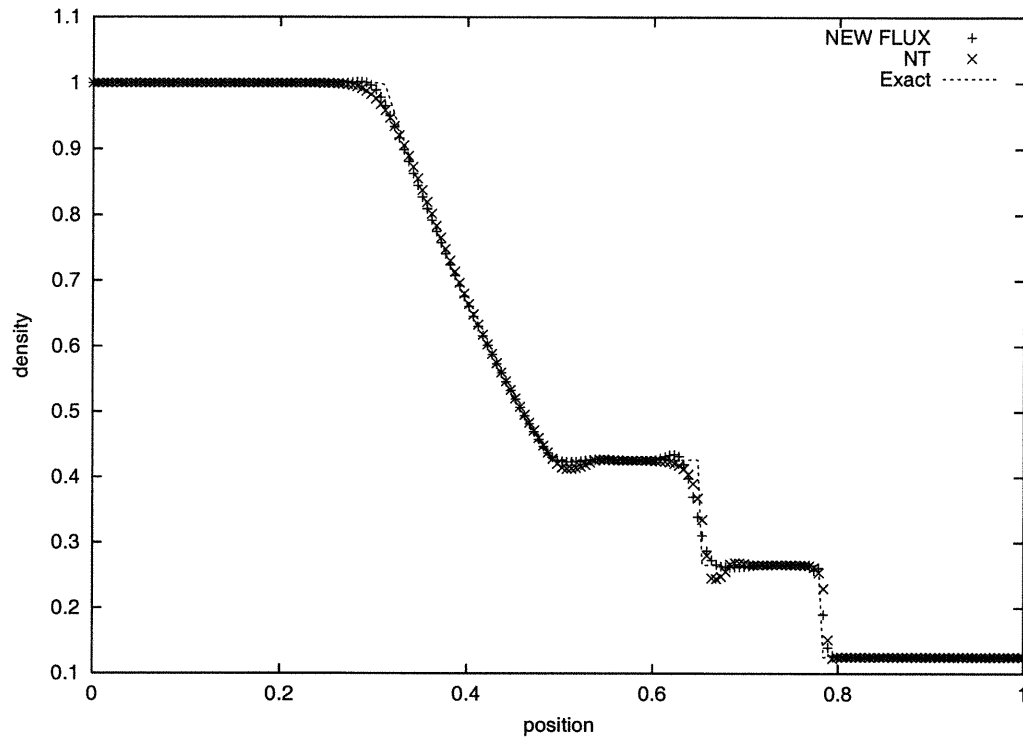


FIG. 6.5. Sod's shock tube 1D $N=200$ at $t = 0.16$

6.9.4. Unstructured 3D

6.9.4.1. Shock tube

For comparison purposes, the shock tube problem is again solved here by applying the unstructured tetrahedral 3D schemes. Resulting densities obtained respectively by the use of the Nessyahu-Tadmor-like scheme (with predictor) and with the new proposed (faster) scheme (without predictor) are given in figures (6.9,6.10). As in the 2-D case, The results for both schemes are practically indistinguishable. Here in 3D, the cost of performing the half time step is significant

since 3 matrix-vector multiplications are needed at each node. The order of convergence of the scheme has been observed to be only 1.22 for nonlinear systems in [2, 4] which has been confirmed by the recent theoretical results of [18, 19, 17] for a truly nonlinear scalar equation.

6.9.4.2. Channel with a 4% circular arc bump with $M_\infty = 1.65$

Original 3D-unstructured Scheme

An inviscid supersonic flow is considered over a circular 4% arc bump; this test case was first proposed as a benchmark problem by Eidelman et al. [12]. The left

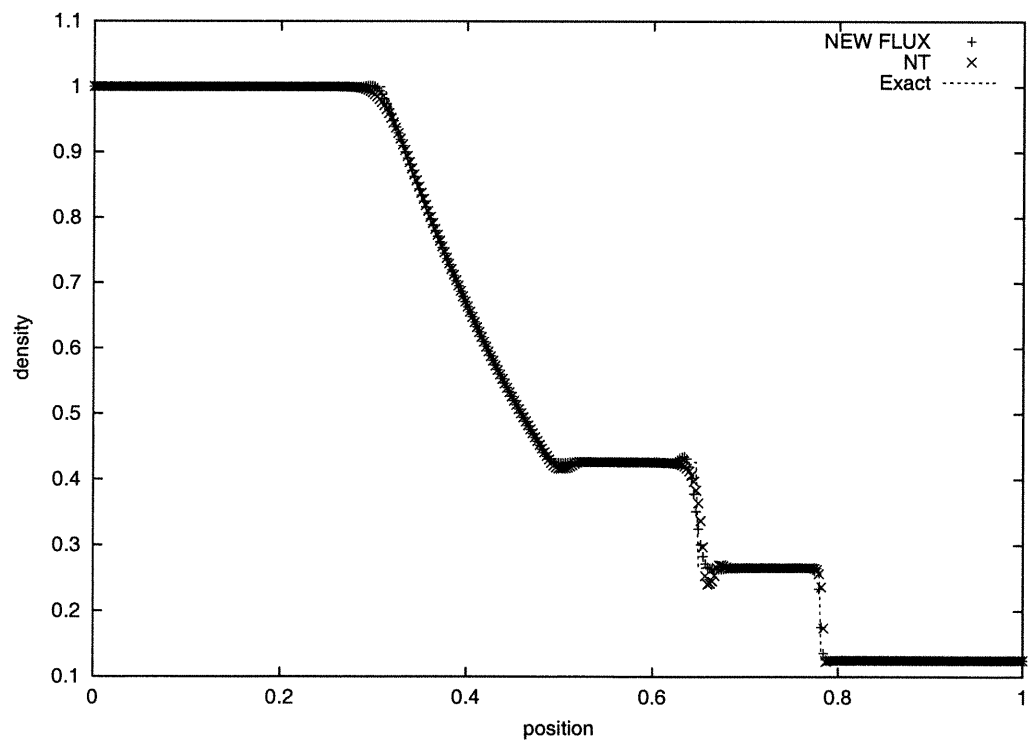


FIG. 6.6. Sod's shock tube 1D $N=400$ at $t = 0.16$

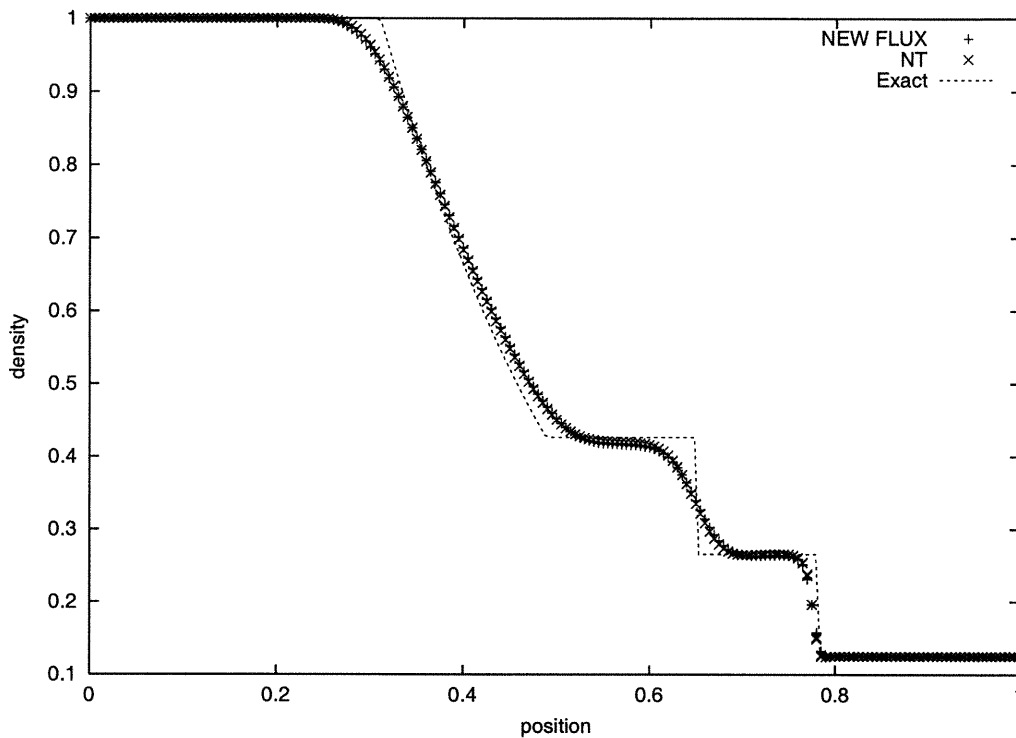


FIG. 6.7. Sod's shock tube 2D $N=200$ at $t = 0.16$

boundary of the computational domain is considered as the inlet of the flow with a prescribed supersonic condition, namely: $(\rho, u, v, w, p) = (1.4, 1.65, 0, 0, 1)$ and the right boundary is considered as a supersonic outlet. For the sake of comparison 3 different meshes are presented. The first mesh has a characteristic length of $1/10$ (fig. 6.11), which is quite coarse but produces reasonably accurate results (fig. 6.14) considering that no Riemann solver are used. An intermediate mesh of length $1/20$ is shown (fig. 6.12) with correspondingly more accurate results (fig. 6.15). The final grid has a characteristic length of $1/30$ and is composed of 138561 tetrahedra with, since both data structures are needed, 23279 nodes and 154535 edges (fig. 6.13). The results are comparable in resolution to the

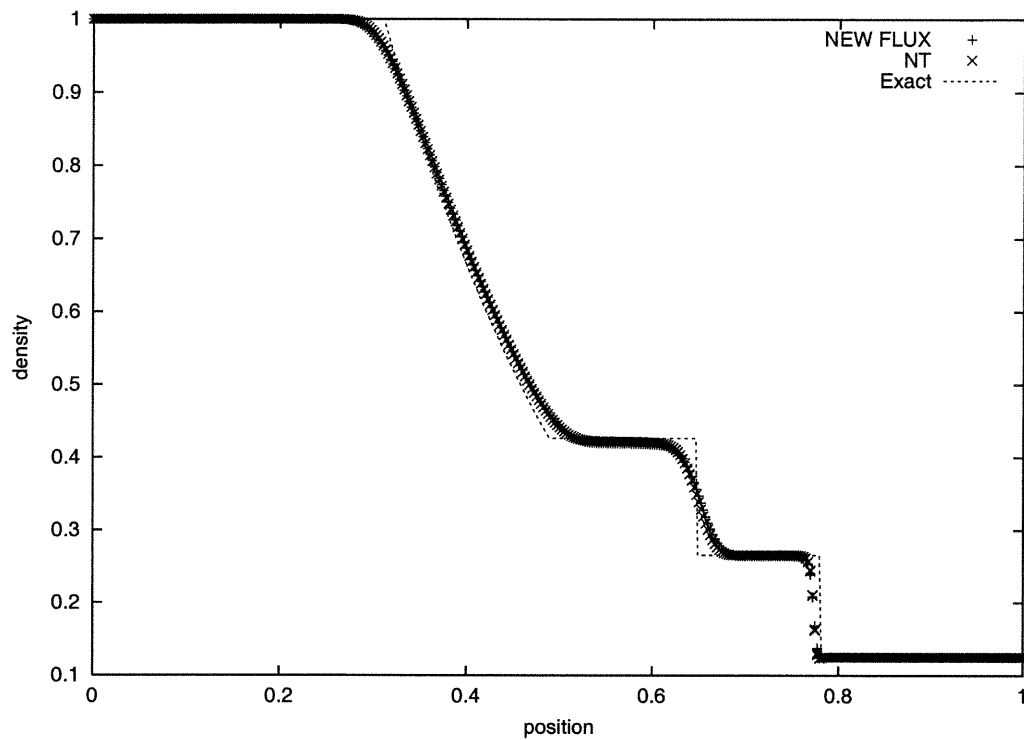
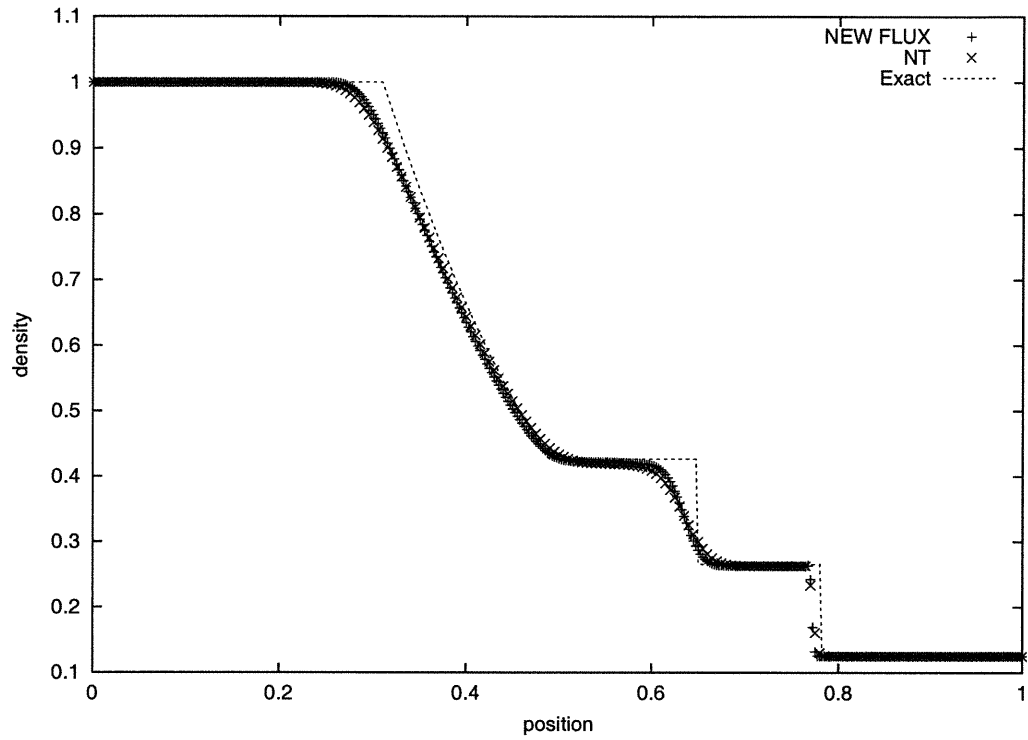
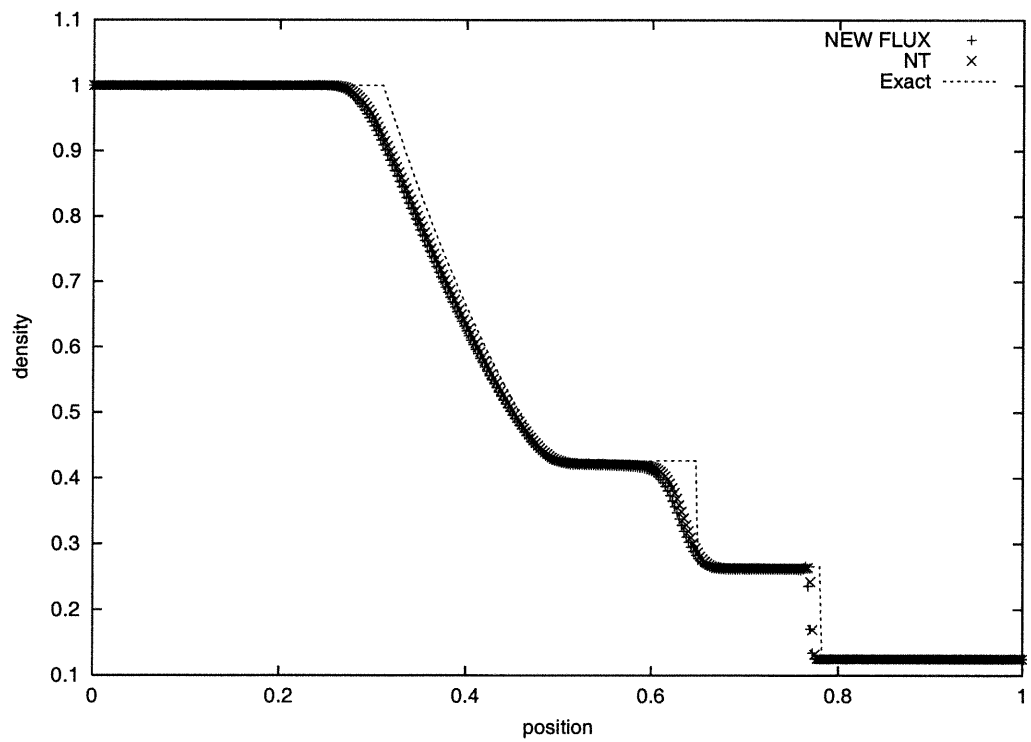


FIG. 6.8. Sod's shock tube 2D $N=400$ at $t = 0.16$

structured cases presented in [16] since the number of unknowns are about the same. An interesting property of the proposed scheme is the convergence rate to the stationary solution (fig. 6.18): the single precision machine epsilon is reached without requiring any special limiting function like the one proposed by Venkatakrishnan, hence preventing any over / under shoot as observed in [1, 16].

3D-unstructured Interleaved Scheme

The second scheme proposed in this paper does not require an explicit predictor step as required by the original unstructured scheme proposed in [4]. Since the

FIG. 6.9. Sod's shock tube 3D $N=200$ at $t = 0.16$ FIG. 6.10. Sod's shock tube 3D $N=400$ at $t = 0.16$

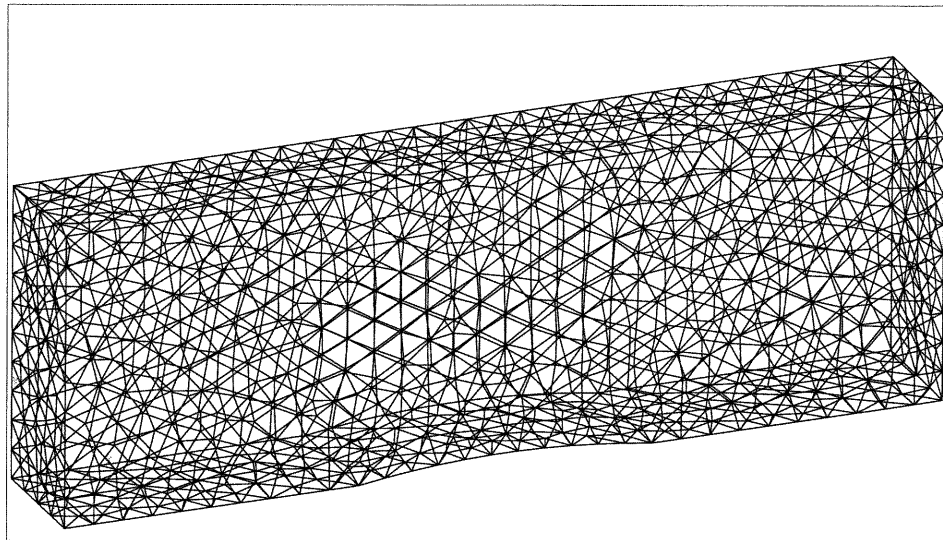


FIG. 6.11. First mesh with characteristic length $1/10$ (18079 Tetrahedra)

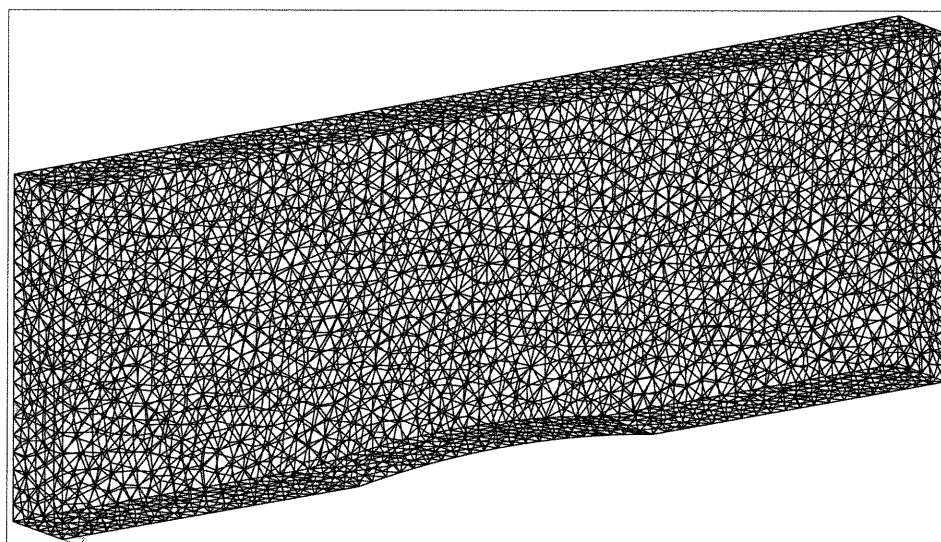


FIG. 6.12. Second mesh with characteristic length $1/20$ (64099 Tetrahedra)

scheme is explicit and both edge based and vertex based data structures are used, the gain is evaluated on a tetrahedron basis (second/(cell \times iteration)). The

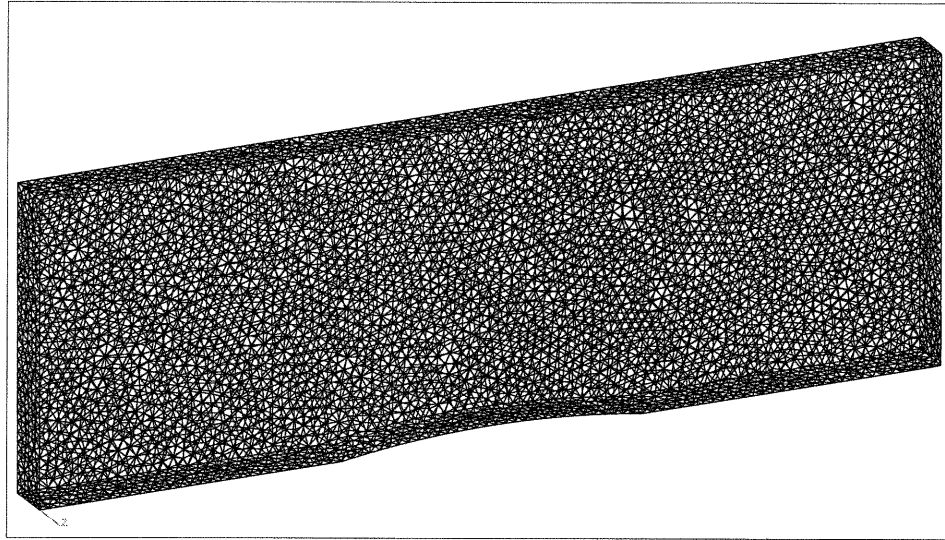


FIG. 6.13. Final mesh with characteristic length 1/30 (138561 Tetrahedra)

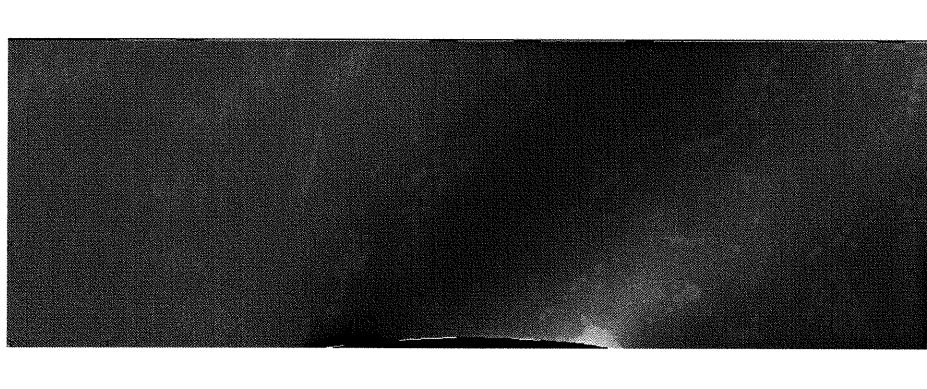


FIG. 6.14. Isomach (18079 Tetrahedra)

original scheme requires 2.5×10^{-5} second while the interleaved scheme requires only half of that time i.e. 1.25×10^{-5} second/cell \times iteration. This acceleration reflects directly in the calculations since it is possible to use twice as many cells and obtain a substantially finer solution in about the same amount of time as

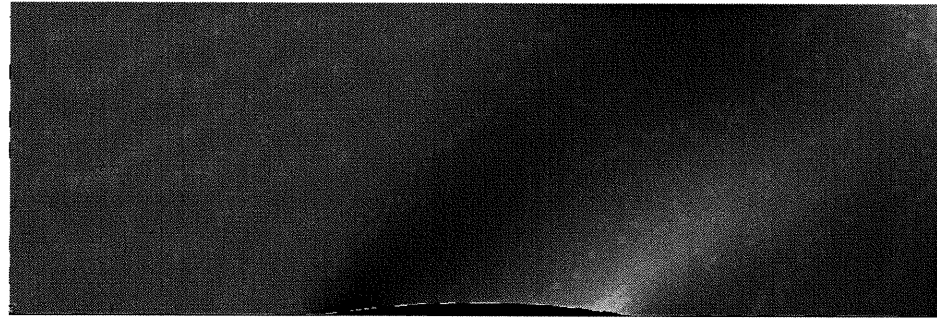


FIG. 6.15. Isomach (64099 Tetrahedra)

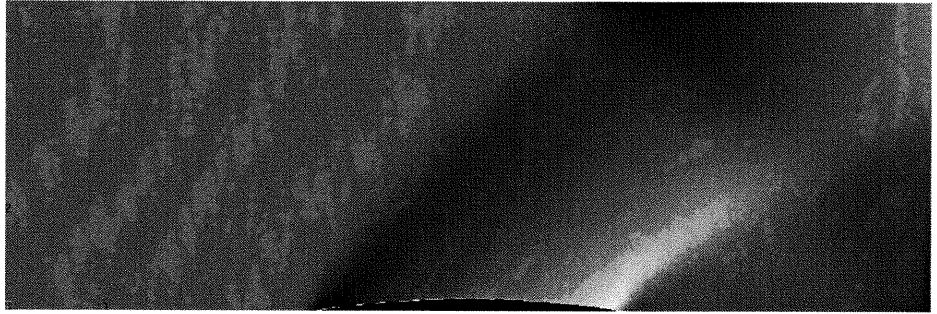


FIG. 6.16. Isomach (138561 Tetrahedra)

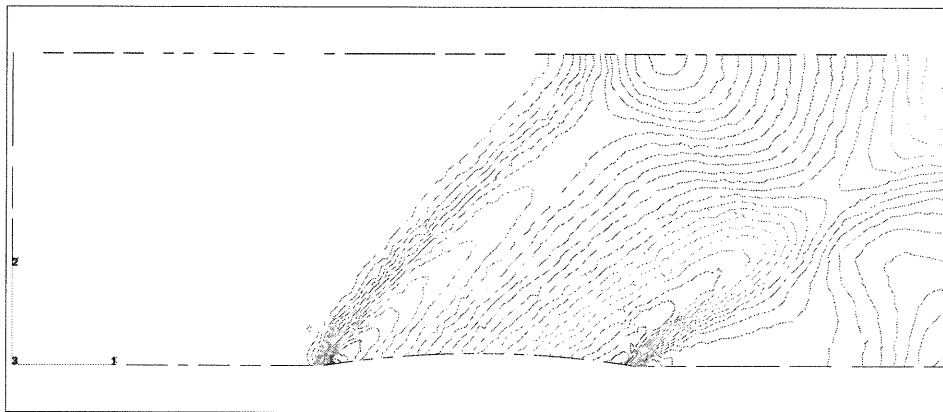


FIG. 6.17. Isomach interleaved (138561 Tetrahedra)

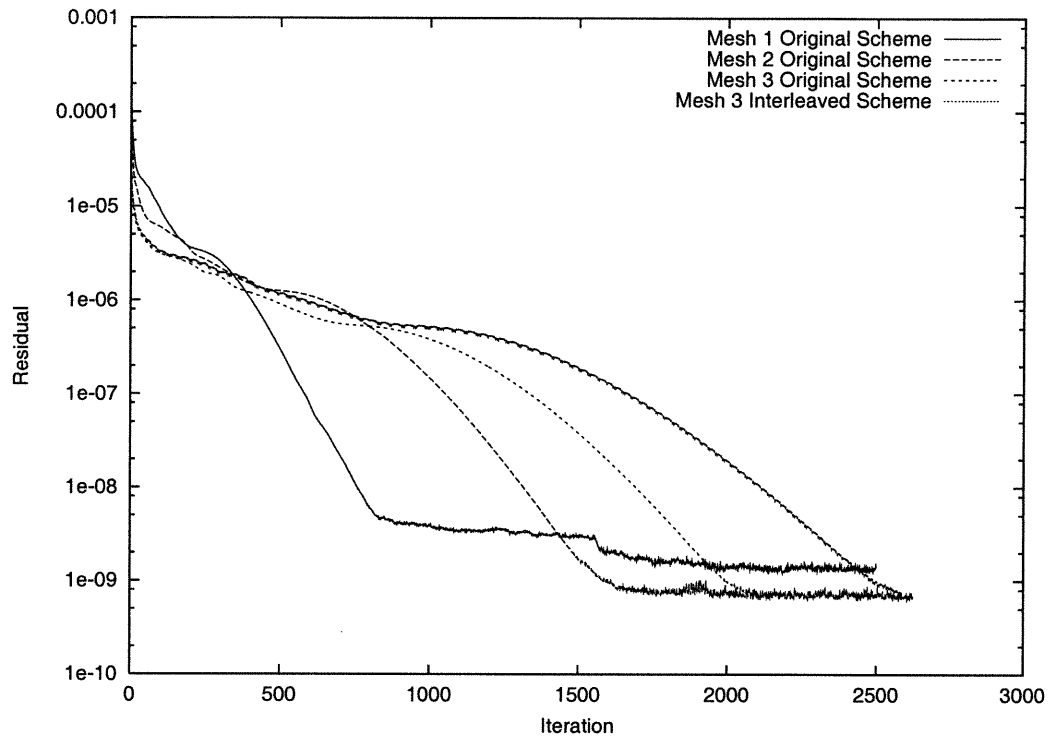


FIG. 6.18. Convergence history (residuals)

that needed for the first method to solve the same problem on a coarser mesh. The results are practically indistinguishable from those obtained with the scheme with predictor, so that fig. 6.14, 6.15, 6.16 are valid for both schemes. A plot of the isomach lines is given in fig. 6.18. As regards convergence to the steady state, the machine tolerance is reached in less than 2000 iterations for the original scheme, and 2500 iterations for the new scheme. Despite the fact that the CFL condition used with the interleaved scheme is more restrictive, thus requiring more time steps to reach the stationary state, the computing times are reduced by approximately 37% (Table 6.1).

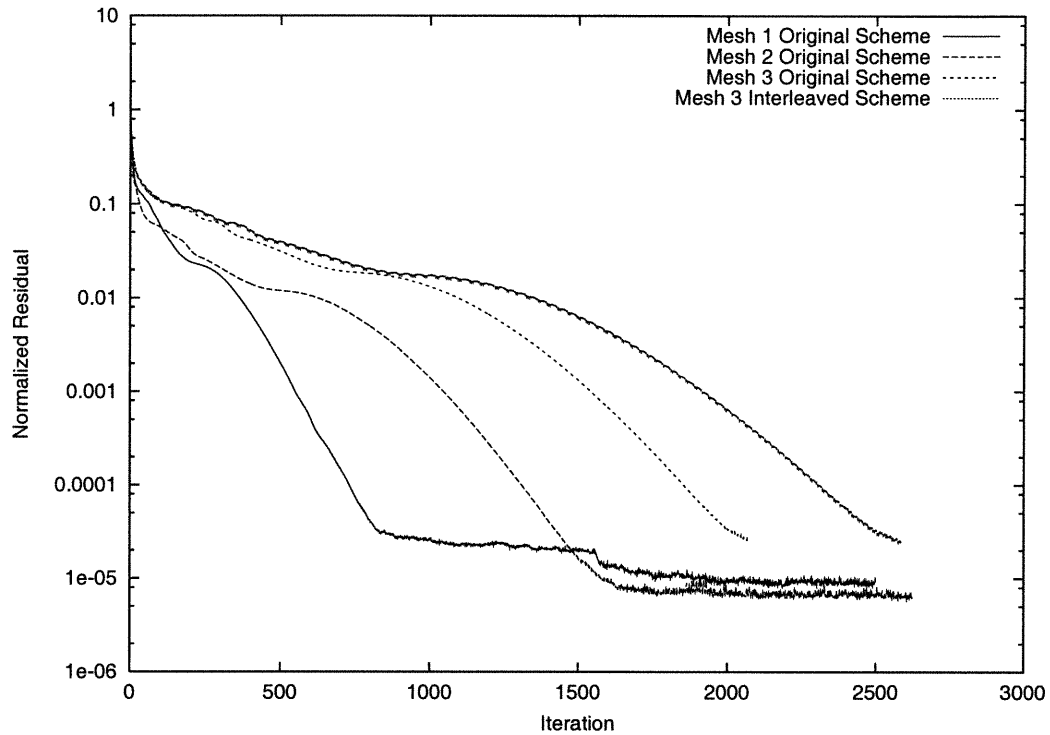


FIG. 6.19. Convergence history (Normalized residuals)

6.10. CONCLUSION

We have presented a new structured and unstructured Riemann solver-free centered finite-volume scheme for solving systems of conservation laws in 1,2 and 3 spatial dimensions. The new scheme is significantly faster in the unstructured case and in the structured 2D case for systems. The resolutions are comparable in all spatial dimensions to the NT scheme and its multidimensional extensions. This makes the new scheme computationally more efficient while being comparable, for accuracy, with the Nessyahu-Tadmor scheme and its Cartesian 2D-extensions

by both Arminjon-Stanescu-Viallon and Jiang-Tadmor, and, finally, with the 3D central finite volume schemes for tetrahedral grids proposed in [2, 4].

6.10.0.3. *Acknowledgements*

The authors would like to thank J. F. Remacle at Rensselaer Polytechnic Institute for the freely available mesh generator GMSH¹ and the CERCA² for the VU³ visualisation software.

1. <http://www.geuz.org/gmsh>

2. Centre de Recherche en Calcul Appliqué

3. <http://www.cerca.umontreal.ca/science/vu.html>

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. AFTOSMIS, D. GAITONDE AND T. S. TAVARES (1995), *Behavior of Linear Reconstruction Techniques on Unstructured Meshes*, AIAA Journal, Vol. 33, No. 11, November 1995.
- [2] P. ARMINJON, A. MADRANE AND A. ST-CYR (2000), *Non-oscillatory Lax-Friedrichs type central finite volume methods for 3-D flows on unstructured tetrahedral grids*, 8th annual conference of the CFD Society of Canada, June 11-13, 2000, Montreal, D. Pelletier, editor, vol 1, pp. 43-48.
- [3] P. ARMINJON, A. MADRANE AND A. ST-CYR, (1999), *New Lax-Friedrichs-type finite volume schemes on 2 and 3D Cartesian staggered grids*, 7th annual conference of the CFD Society of Canada, May 30 to June 1, 1999, Halifax, J. Militzer, editor, pp.(3-3)-(3-10).
- [4] P. ARMINJON, A. MADRANE AND A. ST-CYR, (2000), *Numerical simulation of 3-D flows with a non-oscillatory central scheme on staggered unstructured tetrahedral grids*, in Proceed. 8th Int. Conf. on Hyperbolic Problems, Magdeburg (Germany) Feb. 28 - Mar. 3, 2000, H. Freistuehler and G. Warnecke, editors published by Birkhauser, International Series of Numerical Mathematics Vol. 140 (2001), pp. 59-68, ISBN 3-7643-6711-3.
- [5] P. ARMINJON, D. STANESCU AND M. C. VIALON, (1995), *A two-dimensional finite volume extension of the Lax-Friedrichs and Nessyahu-Tadmor schemes for*

- compressible flows*, Proc.of the 6th. Int. Symp. on Comp. Fluid Dynamics, Lake Tahoe (Nevada) September 4-8, 1995, M.Hafez and K. Oshima, editors, Vol. IV, pp. 7-14.
- [6] P. ARMINJON, A. ST-CYR, A. MADRANE (2002), *New 2 and 3-dimensional non-oscillatory central finite volume methods for staggered Cartesian grids*, Applied Numerical Mathematics, february 2002, Vol 40/3, pp 367-390.
- [7] P. ARMINJON AND A. ST-CYR, (2001), *New Lax-Friedrichs-type finite volume schemes in 1,2 and 3D without time predictor step*, Proceedings of the 9th annual conference of the CFD Society of Canada, May 27-29, 2001, Kitchener, Ontario, G. E.Schneider editor, pp. 63-68.
- [8] P. ARMINJON AND M. C. VIALON, (1995), *Généralisation du schéma de Nessyahu-Tadmor pour une équation hyperbolique à deux dimensions d'espace*, C.R. Acad. Sci. Paris, t.320, serie I (1995), pp. 85-88.
- [9] P. ARMINJON AND M. C. VIALON, (1999), *Convergence of a finite volume extension of the Nessyahu-Tadmor scheme on unstructured grids for a two-dimensional linear hyperbolic equation*, SIAM J. Num. Anal., Vol. 36, No.3, pp. 738-771.
- [10] P. ARMINJON, M.C. VIALON AND A. MADRANE, (1994), *A Finite Volume Extension of the Lax-Friedrichs and Nessyahu-Tadmor Schemes for Conservation Laws on Unstructured Grids*, revised version with numerical applications, Int. J. of Comp. Fluid Dynamics (1997), Vol. 9, No. 1, 1-22.
- [11] B. COCKBURN, C. JOHNSON, C.-W. SHU AND E. TADMOR, (1997), *Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations*, Lectures given at the 2nd session of the Centro internazionale matematico estivo (C.I.M.E.) held in

- Cetraro, Editor A. Quarteroni, Italy, June 23-28, Lectures notes in mathematics, Springer-Verlag, no. 1697, 1997. See Chapter 4, C. W. Shu, pp. 325-432.
- [12] S. EIDELMAN, P. COLLELA AND R. P. SHREEVE (1984), *Application of the Godunov Method and its Second-Order Extension to Cascade Flow modeling*, AIAA Journal, Vol. 22, No. 11, 1984, pp. 1609-1615.
- [13] B. HAASDONK, D. KRÖNER AND C. ROHDE, (2000), *Convergence of a staggered Lax-Friedrichs Scheme for nonlinear conservation laws on unstructured two-dimensional grids*, Preprint No. 07/2000, Mathematische Fakultät, University of Freiburg, Germany, April 2000. Published in Numerische Mathematik, vol. 88 (2001) pp. 459-484.
- [14] G. JIANG AND E. TADMOR, (1998), *Non-oscillatory Central Schemes for Multi-dimensional Hyperbolic Conservation Laws*, SIAM J. on Scientific Computing, 19, pp.1892-1917.
- [15] T. KATSAOUNIS AND D. LEVY, (1999), *A Modified Structured Central Scheme for 2D Hyperbolic Conservation Laws*, Applied Mathematics Letters 12(6),1 August (1999), pp. 89-86.
- [16] M. H. KOBAYASHI AND J. C. PEREIRA (1996), CHARACTERISTIC-BASED PRESSURE CORRECTION AT ALL SPEEDS, AIAA Journal, Vol. 34, No. 2, February 1996.
- [17] D. KRÖNER, (1997), NUMERICAL SCHEMES FOR CONSERVATION LAWS, Mathematics, Wiley-Teubner.
- [18] M. KÜTHER (MAY 2000), *A priori and a posteriori error estimates for the staggered Lax-Friedrichs scheme in multi dimensions for scalar nonlinear conservation laws*,

Preprint No. 19/2000, Mathematische Fakultät, University of Freiburg, Germany, 2000.

- [19] M. KÜTHER (2001), *Error estimates for the staggered Lax-Friedrichs scheme on unstructured grids*, SIAM J. Numer. Anal. 39 (4) (2001) 1269-1301
- [20] P.D. LAX, (1954), *Weak solutions of nonlinear hyperbolic equation and their numerical computation*, Comm. Pure and Applied Math.7, pp. 159-193.
- [21] K.-A. LIE AND S. NOELLE, (2000), *Remarks on high-resolution non-oscillatory central schemes for multidimensional systems of conservation laws. Part I: An improved quadrature rule for the flux computation*, Preprint no. 679, Sonderforschungsbereich 256, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universitaet, Bonn, Germany.
- [22] H. NESSYAHU AND E. TADMOR, (1990), *Non-oscillatory central differencing for hyperbolic conservation laws*, J. Comp. Phys., 87, No. 2, pp. 408–463.
- [23] F. SABAC, (1997), *The optimal convergence rate of monotone finite difference methods for hyperbolic conservation laws*, SIAM J. Num. Anal., 34, No. 6, pp. 2306-2318.
- [24] C.-W. SHU, (1988), *Total-variation diminishing time discretizations*, SIAM J. Sci. Stat. Comput., 9, 1988, pp. 1073-1084.
- [25] S. GOTTLIEB, C.-W. SHU AND E. TADMOR, (2000) *Strong Stability Preserving high-Order Time Discretization Methods*, ICASE Report No. 2000-15.
- [26] G. A. SOD, (1978), *A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws*, J. Comp. Physisc, vol. 27, pp. 1-31.
- [27] A. H. STROUD, (1974), *Numerical quadrature and solution of ordinary differential equations*, Springer Verlag, New York - Heidelberg - Berlin.

- [28] G.D. VAN ALBADA, B. VAN LEER, W.W. ROBERTS, (1982), *A comparative study of computational methods in cosmic gas dynamics*, *Astron. Astrophys.* 108, pp 76-84.
- [29] B. VAN LEER, (1977), *Towards the ultimate conservative difference scheme IV. A new approach to numerical convection*, *J.Comp.Physics*, 23, pp. 276-299.
- [30] B. VAN LEER, (1979), *Towards the ultimate conservative difference scheme V. A Second-Order Sequel to Godunov's Method*, *J.Comp.Physics*, 32, pp. 101-136.
- [31] V. VENKATAKRISHNAN, (1995), *Convergence to Steady State Solutions of the Euler Equations on Unstructured Grids with Limiters*, *J. Comp. Phys.* 118, pp. 120-130.

CONCLUSION

Dans ces travaux nous avons présenté 4 nouvelles méthodes de volumes finis pour les systèmes hyperboliques de lois de conservations qui font appel à deux maillages emboîtés, venant de la généralisation du schéma décalé de Lax-Friedrichs, qui sont utilisés alternativement aux pas de temps pairs et impairs pour éviter la résolution du problème de Riemann, normalement associé à toute méthode de volumes finis, aux frontières des cellules.

En premier lieu, une extension tridimensionnelle des schémas d'Arminjon-Stanescu-Viallon et de Jiang-Tadmor pour des maillages cartésiens tridimensionnels fut construite pour des systèmes hyperboliques. Également, une nouvelle cellule duale fut utilisée en deux dimensions spatiales pour étudier les effets du choix de la cellule duale en maillage cartésien. Les résultats obtenus pour les équations d'Euler sans adaptation montrent que la méthode tridimensionnelle est diffusive comparativement à la méthode bidimensionnelle.

En second lieu, on a obtenu une extension, pour des maillages non-structurés constitués de tétraèdres, de la méthode bidimensionnelle d'Arminjon-Viallon. L'ordre presque 2 propre aux schémas utilisant la technique MUSCL est vérifié expérimentalement à l'aide de l'utilisation du limiteur de Venkatakrishnan qui relaxe la condition de monotonie du schéma loin des extrêmes, c'est-à-dire

dans les régions où la solution est presque constante. Une simulation pour les équations d'Euler permet de voir que le schéma capte bien les chocs et moins bien les discontinuités de contact, ceci étant encore dû au fait que le schéma est très diffusif. Le résultat le plus appréciable est le fait que des maillages hautement déformés permettent quand même d'obtenir un résultat physique ce qui n'est pas le cas pour un grand nombre de méthodes en volumes et éléments finis.

Pour terminer, la quatrième méthode de volumes finis présentée dans ces travaux consiste à éviter le pas de prédiction nécessaire pour toute cette famille de méthodes dérivées du schéma de Lax-Friedrichs, pour l'obtention de l'ordre deux temporel. Le coût du pas de prédiction est significatif pour les systèmes tridimensionnels car une multiplication par les matrices jacobiniennes associées aux flux du système est nécessaire. Cette nouvelle méthode est maintenant dite "entrelacée" en temps, par l'utilisation de techniques propres aux méthodes multi-pas linéaires, et décalée en espace par l'utilisation du schéma de Lax-Friedrichs. Les résultats obtenus sont comparables en ordre de précision aux autres méthodes uni-bi et tridimensionnelles. Le gain concerne surtout les temps de calculs plus courts. L'avantage de cette généralisation est qu'il est ensuite relativement simple d'obtenir des ordres de reconstruction temporels plus élevés que 2.

Un adapteur de maillage non-structuré tridimensionnel étant très difficile à obtenir dans un milieu non-industriel, nous n'avons pas été en mesure, comme cela avait été le cas en deux dimensions spatiales, d'étudier les effets de son utilisation sur la viscosité numérique du schéma.

En ce qui concerne l'ordre de précision des méthodes présentées ici, une autre approche, qui sera étudiée dans un travail à paraître, pour valider l'ordre 2 dans le cas non-linéaire, consiste à enlever une petite région au voisinage immédiat des discontinuités, et calculer l'erreur en utilisant seulement les données numériques plus lisses provenant de la région complémentaire.

Par ailleurs, nous avons récemment commencé à généraliser la méthode unidimensionnelle explicite à une méthode implicite. Les résultats semblent très prometteurs car ils nous ont fait observer qu'il était possible de faire avancer simultanément 2 solutions sur les 2 maillages décalés et de les recoupler par la solution du système linéaire provenant du pas de temps implicite. Ceci conduit à une méthode qui pour calculer $2N$ points implicitement ne nécessite que la résolution d'un système s'exprimant à l'aide d'une matrice triangulaire supérieure de dimensions N^2 (au lieu de $4N^2$!) et permet de trouver la solution sur le second maillage pour le prix d'un produit matrice / vecteur. Le fait que 2 solutions soient disponibles laisse présager qu'une reconstruction spatiale d'ordre plus élevé serait possible de façon très compacte, ou, encore qu'une estimation de l'erreur de troncature locale serait naturellement obtainable pour l'utilisation de techniques multi-grilles.

Annexe A

AUTORISATIONS DIVERSES

A.1. ARTICLE 1

Ci-dessous les autorisations nécessaires pour l'article présenté au chapitre 3 et **publié** dans le journal Applied Numerical Mathematics février 2002, Vol 40/3, pp 367-390.

Lettre de l'éditeur:



CWI is the
research institute of the
Stichting Mathematisch Centrum

Prof. P. Arminjon
Centre de Recherches Mathématiques
Université de Montréal
C.P. 6128
Succ. Centre Ville, Montréal
Quebec, CANADA, H3C 3J7

Dear Professor Arminjon,

I hereby declare that your student has permission to use your paper '*New 2 and 3-dimensional non-oscillatory central finite volume methods on staggered Cartesian grids*' by P. Arminjon, A. St-Cyr and A. Madrane for his thesis. This is common standard. Authors are always allowed to use their published work for own publications such as theses, books, etc.

I cannot send you a letter now since I am away from the institute and it is vacation time here. I'll ask my secretary to send you such a letter when she comes back from her vacation.

Sincerely,

Prof.dr. J.G. Verwer
Senior Editor APNUM

Addresses

Kruislaan 413 1098 SJ Amsterdam
P.O.Box 94079 1090 GB Amsterdam
URL: <http://www.cwi.nl/>

Communications

Telephone +31 20 592 93 33
Telefax +31 20 592 41 99

Invoice address

Stichting Mathematisch Centrum
P.O.Box 94079
1090 GB Amsterdam

Registration numbers

41198731 KvK Amsterdam
Alg. Voorwaarden nr. 3851 KvK Amsterdam
BTW nr. NL 002953390B01

FIG. A.1. numérisation de la lettre de l'éditeur

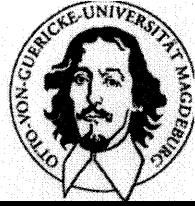
A.2. ARTICLE 2

Ci-dessous les autorisations nécessaires pour l'article présenté au chapitre 5 et **publié** aux éditions Birkhauser dans la collection International Series of Numerical Mathematics 2002 ISBN 3-7643-6711-3 par les éditeurs H. Freistuehler et G. Warnecke dans le cadre de la 8^{ième} Conférence internationale sur les systèmes hyperboliques ayant eu lieu à Magdeburg

Lettre de l'éditeur:

OTTO-VON-GUERICKE-UNIVERSITÄT MAGDEBURG

Fakultät für Mathematik
 Institut für Analysis und Numerik
 Prof. Dr. G. Warnecke



Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg • Postfach 4120 • D-39016 Magdeburg

Prof. Dr.
 Paul Arminjon
 Institut für Angewandte Mathematik u. Statistik
 Universität Würzburg
 Am Hubland

97074 Würzburg

Ihre Zeichen, Ihre Nachricht vom

Unsere Zeichen
 Wa/Bi

Hausapparat
 18587

Datum
 23.07.01

Dear Professor Arminjon,

hereby you are granted permission to use the article

Paul Arminjon, Aziz Madrane, Amik St.-Cyr:
 „Numerical simulation of 3-D flows with a non-oscillatory central scheme on unstructured tetrahedral grids”

that is to appear in the proceedings of the 8th International Conference on Hyperbolic Problems (HYP2000) in the dissertation of A. St.-Cyr.

Sincerely yours,

Prof. Dr. Gerald Warnecke
 (Editor)

FIG. A.2. numérisation de la lettre de l'éditeur

A.3. ARTICLE 3

L'article présenté au chapitre 6 est **soumis** au journal Applied Numerical Mathematics; lors de la soumission électronique, nous avons noté que cet article serait aussi publié dans cette thèse.

A.4. ARTICLES 1 ET 2 APPROBATION D'AZIZ MADRANE

Date: Tue, 25 Sep 2001 19:44:12 +0200

From: Aziz Madrane [REDACTED]

To: [REDACTED]

Subject: Re: Lettre

Parts/Attachments:

1.1	OK	23 lines	Text
1.2	Shown	30 lines	Text
2	Shown	65 lines	Text

[Part 1.1, Text/PLAIN 23 lines.]

[Not Shown. Use the "V" command to view or save this part.]

Salut Amick

Tu trouveras ci-joint la lettre.

J'attends ta reponse.

Je m'excuse pour le retard car j'etais a Berlin.

| Dr. Aziz Madrane |

| German Aerospace Center |

| DLR Inst. of Design Aerodynamics |

| Lilienthalplatz 7 |

| Email : |

| 38108 Braunschweig Germany |

| _/|_ |

| /_/_/ DLR |

| |/ |

[Part 2: "Attached Text"]

Madame, Monsieur,

Je suis en relation avec monsieur Amik St-Cyr depuis qu'il a été chargé d'implémenter une nouvelle méthode numérique en 3D que j'ai développée, en collaboration avec le professeur Paul Arminjon, son directeur de thèse, en 2D. Amik St-Cyr a adapté plusieurs logiciels scientifiques pour résoudre le problème posé par l'alternance des maillages. Il a proposé plusieurs variantes de la méthode pour la résolution de systèmes hyperboliques en 3D. J'ai apprécié la grande qualité du travail qu'il a fourni, en particulier son travail sur les systèmes. Avec notre méthode on a publié plusieurs articles dans des journaux de réputation internationale.

Sa contribution respective dans les articles qui suivent est majeure:

Auteurs: P. Arminjon, A. Madrane et A. St-Cyr.

Titre: Numerical simulation of 3-d flows with a non-oscillatory central scheme on unstructured tetrahedral grids (2000).

Editions: Birkhauser

Type: Conférence internationale avec arbitrage, 10 pages.

Publie dans la 8ieme conference internationale sur les problemes
hyperboliques, Magdeburg

Auteurs: P. Arminjon, A. Madrane et A. St-Cyr.

Titre: New 2 and 3-dimensional non-oscillatory central finite
volume methods for staggered Cartesian grids (2001).

Type: revue avec arbitrage

Editions: North-Holland

Publie dans Applied Numerical Mathematics, 2002,

Vol 40/3, pp 367-390.

Par cette lettre j'atteste et je reconnais que Amik St-Cyr peut
utiliser les articles dans lesquels je suis co-auteur pour sa
these a l'Universite de Montreal.

J'espere que le tout sera conforme avec vos exigences au niveau
des nouveaux reglements face aux theses par articles. S'il me
faut y ajouter quelque chose veuillez m'en informer au plus vite.

Veillez agreer l'expression de mes sentiments les meilleurs,

<SIGNATURE>

=====

Dr. Aziz Madrane

| Dr. Aziz Madrane

| German Aerospace Center

| DLR Inst. of Design Aerodynamics |

| Lilienthalplatz 7

| 38108 Braunschweig Germany

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ANGRAND F., BOULARD V., DERVIEUX A., PERIAUX J., VIJAYASUNDARAM G., (1984), *Triangular finite element methods for the Euler equations*, 6th Int. Conf. on Comp. Meth. in Appl. Sciences and Engineering, Glowinski R., Lions J.L., Eds., North Holland .
- [2] P. ARMINJON AND A. DERVIEUX (1993), *Construction of TVD-like artificial viscosities on two-dimensional arbitrary FEM grids*, J. Comp. Phys., vol 106, pp. 176-188.
- [3] P. ARMINJON, A. MADRANE AND A. ST-CYR (1999), *New Lax-Friedrichs-type finite volume schemes on 2 and 3D Cartesian staggered grids*, 7th annual conference of the CFD Society of Canada, May 30 to June 1, 1999, Halifax, J. Militzer, editor, pp.(3-3)-(3-10).
- [4] P. ARMINJON, A. MADRANE, A. ST-CYR (2002), *New 2 and 3-dimensional non-oscillatory central finite volume methods for staggered Cartesian grids*, Applied Numerical Mathematics, février 2002, Vol 40/3, pp 367-390.
- [5] P. ARMINJON, A. MADRANE, A. ST-CYR (2000) *Numerical simulation of 3-D flows with a non-oscillatory central scheme on unstructured tetrahedral grids*, Res. Report No. 2674, Centre de Recherche Mathématiques, Univ. de Montréal, Canada.

- [6] P. ARMINJON, A. MADRANE, A. ST-CYR (2000) *Numerical simulation of 3-D flows with a non-oscillatory central scheme on unstructured tetrahedral grids*, 8th annual conference of the CFD Society of Canada, June 11 to June 13, 2000, Montreal, D. Pelletier, editor.
- [7] P. ARMINJON, D. STANESCU AND M. C. VIALON, (1995), *A two-dimensional finite volume extension of the Lax-Friedrichs and Nessyahu-Tadmor schemes for compressible flows*, Proc.of the 6th. Int. Symp. on Comp. Fluid Dynamics, Lake Tahoe (Nevada) September 4-8, 1995, M.Hafez and K. Oshima, editors, Vol. IV, pp. 7-14.
- [8] P. ARMINJON AND M. C. VIALON, (1995), *Généralisation du schéma de Nessyahu-Tadmor pour une équation hyperbolique à deux dimensions d'espace*, C.R. Acad. Sci. Paris, t.320, série I, January 1995, pp. 85-88.
- [9] P. ARMINJON AND M. C. VIALON, (1999), *Convergence of a finite volume extension of the Nessyahu-Tadmor scheme on unstructured grids for a two-dimensional linear hyperbolic equation*, SIAM J.Numerical Analysis, Vol. 36, No.3, pp. 738-771.
- [10] P. ARMINJON, M.C. VIALON AND A. MADRANE, (1994), *A Finite Volume Extension of the Lax-Friedrichs and Nessyahu-Tadmor Schemes for Conservation Laws on Unstructured Grids*, revised version with numerical applications, Int. J. of Comp. Fluid Dynamics (1997), Vol. 9, No. 1, 1-22.
- [11] T. J.BARTH AND D. C.JESPERSEN, (1989), *The design and application of upwind schemes on unstructured meshes*, AIAA Paper No. 89-0366, 27th Aerospace sciences meeting, January 9-12, 1989, Reno, Nevada.

- [12] J. P. BORIS, D. L. BOOK (1973), *Flux corrected transport I, SHASTA, a fluid transport algorithm that works*, J. Comp. Phys., 11, pp. 38-69.
- [13] CHAMPIER,S., (1992), *Convergence de schémas numériques type Volumes Finis pour la résolution d'équations hyperboliques*, Ph. D. dissertation, Univ. de St-Étienne, France.
- [14] T. CHANG AND S. YANG (1995), *Two-dimensional Riemann Problems for Systems of Conservation Laws*, Pitman monographs and surveys in applied mathematics.
- [15] M. CRANDALL AND A. MAJDA, (1980), *Monotone difference approximations for scalar conservation laws*, Math. Comp., 34, no. 149, pp. 1-21.
- [16] DAVID E. CULLER, JASWINDER PAL SINGH AND ANOOP GUPTA (1999),*Parallel Computer Architecture A Hardware/Software Approach*, Morgan Kaufmann Publishers, Inc., (1025 pages).
- [17] C. M. DAFERMOS (2000), *Hyperbolic conservation laws in continuum physics*, A Series of Comprehensive Studies in Mathematics, vol. 325, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2000, (443 pages).
- [18] FACULTÉ DES ÉTUDES SUPÉRIEURES (2001), *Guide présentation et d'évaluation des mémoires de maîtrise et des thèses de doctorat*, Faculté des études supérieures de l'Université de Montréal, nouvelle édition revue, corrigée mise à jour en mars 2001.
- [19] FEZOU,L., LANTERI,S. , LARROUTUROU,B. AND OLIVIER,C., (1989), *Résolution Numérique des Équations de Navier-Stokes pour un Fluide Compressible*

en Maillage triangulaire, INRIA Res. Rep. No. 1033, Inst. National de Rech. en Informatique et Automatique, Rocquencourt, 78153 Le Chesnay, France.

- [20] FEZOU, L., STEVE, H. AND SELMIN, V. (1988) *Simulation numérique d'écoulements compressibles 3-D par un schéma décentré en maillage non-structuré*, INRIA Res. Rep. No. 0825, Institut National de Recherche en Informatique et Automatique, Rocquencourt, 78153 Le Chesnay, France.
- [21] R. EYMARD, T. GALLOUET AND R. HERBIN (1997), *Finite Volume Methods*, Prépublication no. 97-19 du LAPT, UMR 6632, Marseille, to appear in Handbook of Numerical Analysis, P. G. Ciarlet, J. L. Lions eds.
- [22] E. GODLEWSKI AND P.A. RAVIART (1991), *Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, Editions Ellipses, Paris.
- [23] E. GODLEWSKI AND P.A. RAVIART (1996), *Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, Springer-Verlag, New York.
- [24] GODUNOV S. K. (1959), *Finite differences methods for numerical computations of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics*, Mat. Sbornik 47, 271-306.
- [25] GODUNOV S. K., ZABRODIN A. V., IVANOV M., KRILKO A. AND PROKOPOV G. P. (1976), *Résolution Numérique des problèmes multidimensionnels de la dynamique des gaz*, Éditions Mir Moscou 1979.
- [26] J. B. GOODMAN, R. J. LEVEQUE, (1985), *On the accuracy of stable schemes for 2D scalar conservation laws*, Math. Comput., 45, 15-21.

- [27] A. HARTEN, (1978), *The Artificial Compression Method for Computation of Shocks and Contact Discontinuities, III. Self-Adjusting Hybrid Schemes*, Math. Comput., Vol. 32, New York, pp. 363-389.
- [28] A. HARTEN, (1983), *High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws*, J. Comput. Physics, Vol. 49, 1983, pp. 357-393.
- [29] A. HARTEN, J. M. HYMAN AND P. LAX, (1976), *On finite-difference approximations and entropy conditions for shocks*, Comm. Appl. Math., 29, pp. 297-322.
- [30] A. HARTEN, S. OSHER, S. R. CHAKRAVARTY (1987), *Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes. III*, JCP, 71, pp. 231-303.
- [31] A.C. HINDMARSH, P.M. GRESHO AND D.F. GRIFFITHS, (1984), *The stability of explicit Euler time integration for certain finite difference approximations of the multidimensional advection diffusion equation*, Int. J. for Numerical Methods in Fluids, 4, 853-97.
- [32] C. HIRSCH, *Numerical Computation of Internal and External Flows, Vol.I,1988, Vol.II,1990, John Wiley, New York.*
- [33] L. HÖRMANDER (1997), *Lectures on Nonlinear Hyperbolic Differential Equations*, Mathématiques et applications 26, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [34] A. JAMESON (1997), *Essential Elements of Computational Algorithms for Aerodynamic Analysis and Design*, ICASE Report No. 97-68.
- [35] P.JAWAHAR AND H.KAMATH (2000) *A High-Resolution Procedure for Euler and Navier-Stokes Computations on Unstructured Grids* , J. of Comp. Physics, Vol. 164, No. 1, Oct 2000, pp. 165-203.

- [36] G. JIANG AND E. TADMOR, (1998), *Non-oscillatory Central Schemes for Multidimensional Hyperbolic Conservation Laws*, SIAM J. on Scientific Computing, 19, pp.1892-1917.
- [37] D. KRÖNER, (1997), *Numerical Schemes for Conservation Laws*, John Wiley and Sons (England) with B.G. Teubner (Germany), 508 pages.
- [38] S.N. KRUZHKOVA, (1970), *First order quasilinear equation with several independent variables*, Math. Sbornik USSR, no. 10, pp. 217-243.
- [39] P.D. LAX, (1954), *Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation*, Comm. Pure and Applied Math.7, pp. 159-193.
- [40] P. LAX, B. WENDROFF, (1960), *Systems of conservation laws*, Comm. Pure Appl. Math., 13, pp 217-237.
- [41] R. J. LEVEQUE, (1985), *Large time step shock-capturing techniques for scalar conservation laws*, Comm. Pure Appl. Math., 37, pp. 463-477.
- [42] A. MADRANE, (1998), *Constructions of new finite volume/finite element methods for transonic/supersonic compressible flows*, Ph. D. dissertation, Université de Montréal, Département de Mathématiques et Statistique.
- [43] H. NESSYAHU AND E. TADMOR, (1990), *Non-oscillatory central differencing for hyperbolic conservation laws*, J. Comp. Phys., 87, No. 2, pp. 408-463.
- [44] J. VON NEUMANN, R. D. RICHTMYER 1950, *Methods for the numerical calculations of hydrodynamical shocks* J. Math. Phys., 21, p 232.
- [45] S. OSHER (1984), *Riemann Solvers, the Entropy Condition, and Difference Approximations*, SIAM J. Numer. Anal., 21, pp. 217-235.

- [46] PEYRET, R. AND TAYLOR, T.-D., (1983), *Computational Methods for Fluid Flow*, Springer-Verlag, New-York, Heidelberg, Berlin.
- [47] M. RENARDY AND R. C. ROGERS, (1993) *An introduction to partial differential equations*, Texts in applied mathematics, no. 13, Springer-Verlag, New York, 428 pages.
- [48] R. D. RICHTMYER, K. W. MORTON (1967), *Difference Methods for Initial-value Problems*, Wiley-Interscience.
- [49] A.W. RIZZI AND H. VIVIAND (EDS.), (1982), *Numerical methods for the computation of inviscid transonic flows with shock waves*, Vieweg and Sohn, Braunschweig-Wiesbaden.
- [50] P.L. ROE (1981), *Approximate Riemann solvers, parameter vectors and differences schemes*, J. Comp. Phys., 43, pp. 357-372.
- [51] SELMIN, V. (1987) *Numerical simulation of 3-D flows with a finite element method*, INRIA Res. Rep. No. 0706, Institut National de Recherche en Informatique et Automatique, Roquencourt, 78153 Le Chesnay, France.
- [52] D. SERRE (1996), *Systèmes de Lois de Conservation*, Diderot, Paris.
- [53] M. SNIR ET AL. (1996), *MPI: The Complete Reference*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, London, England.
- [54] G.A. SOD, (1985), *Numerical methods in fluid dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [55] G.A. SOD, (1978), *A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws*, J.Comp.Physics, vol. 27, pp. 1-31.

- [56] J. SMOLLER (1994), *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 258, Springer-Verlag, New-York (Sec. ed. 1994).
- [57] S. P. SPEKREIJSE (1987), *Multigrid solution of monotone second-order discretizations of hyperbolic conservation laws*, Math.Comp.49(1987), pp. 135-156.
- [58] G. STRANG (1968), *On the construction and comparison of difference schemes*, SIAM J. Num. Anal., 5, pp. 506-517.
- [59] P.K. SWEBY (1984), *High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws*, SIAM J. Num. Anal., 21, pp. 995-1011.
- [60] E. F. TORO (2001) *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A practical introduction (2nd ed.)*, Springer-Verlag,2001.
- [61] G.D. VAN ALBADA, B. VAN LEER, W.W. ROBERTS, (1982), *A comparative study of computational methods in cosmic gas dynamics*, Astron. astrophys. 108, pp 76-84.
- [62] B. VAN LEER, (1974), *Towards the ultimate conservative difference scheme II. Monotonicity and conservation combined in a second-order scheme*, J. Comp. Physics, 14, pp. 361-370.
- [63] B. VAN LEER, (1977), *Towards the ultimate conservative difference scheme IV. A new approach to numerical convection*, J. Comp. Physics, 23, pp. 276-299.
- [64] B. VAN LEER, (1979), *Towards the ultimate conservative difference scheme V. A Second-Order Sequel to Godunov's Method*, J.Comp.Physics, 32, pp. 101-136.

- [65] B. VAN LEER, (1983), *Computational Methods for Ideal Compressible Flow*, Von Karman Institute for Fluid Dynamics, Lecture series 1983-04, Computational Fluid Dynamics, March 7-11, 1983.
- [66] V. VENKATAKRISHNAN, (1995), *Convergence to Steady State Solutions of the Euler Equations on Unstructured Grids with Limiters*, J. Comp. Phys. 118, pp. 120-130.
- [67] P. WOODWARD AND P. COLELLA, (1984), *The Numerical Simulation of Two-Dimensional Fluid Flow with strong Shocks*, J. Comp. Phys. 54, pp. 115-173.