Université de Montréal

Sur la distribution des valeurs de la fonction zêta de Riemann et des fonctions L au bord de la bande critique

par

Youness Lamzouri

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Thèse présentée à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Philosophiæ Doctor (Ph.D.)
en mathématiques

Orientation mathématiques fondamentales

août 2009

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Cette thèse intitulée

Sur la distribution des valeurs de la fonction zêta de Riemann et des fonctions L au bord de la bande critique

présentée par

Youness Lamzouri

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes :

Iosif Polterovich

(président-rapporteur)

Andrew Granville

(directeur de recherche)

Yvan Saint-Aubin

(membre du jury)

Carl Pomerance

(examinateur externe)

Patrice Marcotte

(représentant du doyen de la FES)

Thèse acceptée le:

29 Juillet 2009

RÉSUMÉ

Le sujet principal de cette thèse est la théorie analytique des nombres. Elle est principalement constituée de quatre articles. Les deux premiers traitent de la distribution des valeurs de la fonction zêta de Riemann $\zeta(s)$ et des familles de fonctions L au bord de la bande critique. Les deux derniers, quant à eux, résolvent des problèmes de nature multiplicative.

Le premier chapitre est une introduction à la théorie de la fonction zêta de Riemann et des fonctions L en général. Nous allons y introduire la notion de fonctions L, et donner quelques exemples de familles classiques telles les fonctions L de Dirichlet, les fonctions L de formes modulaires cuspidales et les fonctions L de courbes elliptiques.

Le chapitre deux est une introduction à la théorie des valeurs moyennes des fonctions multiplicatives. On y introduira aussi la correspondance de A. Granville et K. Soundararajan entre l'ensemble de ces valeurs moyennes et les solutions d'une classe intéressante d'équations intégrales retardées.

Le premier article de cette thèse, intitulé *The two dimensional distribution of* $\zeta(1+it)$ **[Lam3]**, est présenté au chapitre trois. Dans ce travail nous prouvons plusieurs nouveaux résultats sur la fonction de distribution de $\zeta(1+it)$ dans le plan complexe. Plus précisément on étudie la probabilité conjointe que $|\zeta(1+it)|$ est grande (proche du maximum conjecturé) et $\arg\zeta(1+it)$ est borné. Nous obtenons des résultats similaires dans le cas de la famille des fonctions L de Dirichlet $L(1,\chi)$, où χ varie parmi les caractères non-triviaux modulo un grand premier q.

Le chapitre quatre contient le deuxième article de la thèse, intitulé *Distribution of values of L-functions at the edge of the critical strip* **[Lam4]**. Dans ce travail

nous généralisons les travaux de A. Granville et K. Soundararajan et ceux de J.Y. Liu, E. Royer et J. Wu sur la distribution des valeurs des familles de fonctions L au bord de la bande critique. Notre méthode consiste à construire une large classe de produits Eulériens aléatoires, qui englobe tous les modèles aléatoires étudiés précédemment. Parmi les nouvelles applications, nous obtenons des estimations pour les fonctions de distribution des valeurs de fonctions L appartenant à la classe de Selberg en l'aspect t, et de la famille de fonctions L de tordus quadratiques d'une forme automorphe cuspidale sur $GL(n)$ au point $s = 1$, en supposant une version uniforme de la conjecture de Sato-Tate.

La deuxième partie de la thèse est consacré à l'étude du comportement multiplicatif de certains ensembles de nombres et de fonctions arithmétiques.

Le troisième article de cette thèse, intitulé *Smooth values of the iterates of the Euler ϕ function* **[Lam1]**, est contenu dans le chapitre cinq. Dans ce travail nous utilisons la correspondance de A. Granville et K. Soundararajan afin d'étudier la structure multiplicative des itérées de la fonction ϕ de Euler (une question à laquelle Erdös était intéressé).

Le chapitre six contient le quatrième article, intitulé *On the number of linear forms in logarithms* **[Lam2]**. Le résultat principal de cet article est une formule asymptotique pour le nombre des formes linéaires $b_1 \log a_1 + \cdots + b_n \log a_n$, où n est un entier positif, $|b_i| \leq B_i$ et $0 < a_i \leq A_i$ sont des entiers, quand A_i, B_i tendent vers l'infini. Une formulation équivalente de ce problème est d'estimer le nombre des rationnels de la forme $r = a_1^{b_1} a_2^{b_2} \ldots a_n^{b_n}$ tel que $1 \leq a_i \leq A_i$ et $|b_i| \leq B_i$. Ce travail est motivé par l'argument heuristique suivi par S. Lang et M. Waldshmidt pour formuler leur fameuse conjecture sur les formes linéaires en logarithmes (voir conjecture 0.0.2).

Mots Clés :

Théorie analytique des nombres, fonction zêta de Riemann, fonctions L, classe de Selberg, formes automorphes, fonctions multiplicatives, méthodes de crible, nombres friables, équations intégrales retardées, formes linéaires en logarithmes.

SUMMARY

In this thesis we study several problems from analytic number theory. It consists of four articles. The first two of them concern the distribution of the values of the Riemann zeta function $\zeta(s)$ and families of L-functions at the edge of the critical strip. The other two articles concern problems from multiplicative number theory.

The first chapter is an introduction to the theory of the Riemann zeta function and L-functions in general. We will introduce the concept of L-functions and give some classical examples such as the Dirichlet L-functions, the L-functions of modular forms and the L-functions of elliptic curves.

Chapter two is an introduction to the theory of mean values of multiplicative functions. It also contains a description of A. Granville and K. Soundararajan correspondence between arithmetic functions and a class of interesting integral delay equations.

The first paper, entitled *The two dimensional distribution of* $\zeta(1+it)$ **[Lam3]**, is presented in chapter three. In this work we prove several results on the distribution function of $\zeta(1+it)$ in the complex plane. More precisely, we study the joint probability that $|\zeta(1+it)|$ is large (close to the conjectured maximum) and $\arg\zeta(1+it)$ is bounded. We also get similar results in the case of the family of Dirichlet L-functions $L(1,\chi)$, where χ varies over non-principal characters modulo a large prime q.

Chapter four contains the second paper of the thesis : *Distribution of values of L-functions at the edge of the critical srip* **[Lam4]**. In this paper we generalize the results of A. Granville and K. Soundararajan and those of J.Y. Liu, E. Royer and J. Wu on the distribution of values of L-functions on the line $\mathrm{Re}(s) = 1$; namely

by constructing and studying a large class of random models, which include all the ones studied previously. Among new applications, we provide estimates for the distribution of the values of L-functions of the Selberg Class in the t-aspect, and of the family of L-functions of quadratic twists of a cuspidal automorphic form on $GL(n)$ at $s = 1$, assuming a uniform version of the Sato-Tate conjecture.

In the second part of the thesis we study the multiplicative behavior of certain sets of numbers and arithmetic functions.

The third paper of the thesis, entitled *Smooth values of the iterates of the Euler ϕ function* **[Lam1]**, is contained in chapter five. In this work we use A. Granville and K. Soundararajan' correspondence to study the multiplicative structure of shifted primes (numbers of the form $p - 1$ where p is prime), and of the iterates of Euler's ϕ function (a question close to Erdös' heart).

In Chapter six, we present our fourth paper, entitled *On the number of linear forms in logarithms* **[Lam2]**. The main result of this paper is an asymptotic formula for the number of linear forms $b_1 \log a_1 + \cdots + b_n \log a_n$, where n is a positive integer, $|b_i| \leq B_i$ and $0 < a_i \leq A_i$ are integers, as A_i, B_i tend to infinity. An equivalent formulation of the problem is to estimate the number of rational numbers $r = a_1^{b_1} a_2^{b_2} ... a_n^{b_n}$ with $1 \leq a_i \leq A_i$ and $|b_i| \leq B_i$. This problem was motivated by the heuristic argument which leads to a famous conjecture on linear forms in logarithms formulated by S. Lang and M. Waldshmidt (see conjecture 0.0.2 below).

Key words :

Analytic number theory, Riemann' zeta function, L-functions, Selberg class, automorphic forms, multiplicative functions, sieve methods, smooth numbers, integral delay equations, linear forms in logarithms.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS

Premièrement, je tiens à remercier très sincèrement mon directeur de recherche, Andrew Granville, qui m'a initié à l'univers fascinant de la théorie analytique des nombres, et sans qui ce travail n'aurait sûrement pas vu le jour. Son encouragement, sa patience, son dévouement, ses nombreuses idées et suggestions, ses intuitions profondes et ses conseils éclairés m'ont guidé tout au long des cinq belles années que j'ai passées sous sa supervision. Je lui exprime aussi toute ma reconnaissance pour son soutien financier durant les premières années de mes études de doctorat.

I warmly thank Carl Pomerance for accepting to review this doctoral dissertation.

Je remercie le département de mathématiques et de statistique pour les excellentes conditions de travail, et la directrice Véronique Hussin pour son encouragement et sa disponibilité et pour les premières charges de cours qu'elle m'a donné. Je lui serais toujours reconnaissant de m'avoir ainsi offert cette opportunité d'enseigner les mathématiques, que j'aime tant.

Je voudrais aussi remercier le Conseil de Recherches en Sciences Naturelles et en Génie du Canada (CRSNG), pour son généreux soutien financier tout au long de mes études doctorales.

Je tiens à remercier mes amis que j'ai côtoyés au fil des années passées aux DMS. Je pense notamment à Rémi Étoua, Alexandre Girouard, Nathan Ng, Nathan Jones, Habiba Kadiri, Calvin Mbuntcha, et Guillaume Ricotta.

Je voudrais remercier chaleureusement mes parents Abdelrhani et Fatiha, pour avoir cru en moi, pour tout leur soutien moral et financier et surtout pour leurs encouragements qui m'ont donné du courage et de la persévérance durant toutes mes années d'études universitaires.

Finalement, mes remerciements les plus tendres vont évidemment à ma femme Fouzia. Je voudrais la remercier pour tout le bonheur immense qu'elle me procure, pour m'avoir supporté, encouragé, et épaulé durant ces deux dernières années. Je lui serais toujours reconnaissant pour avoir partagé mes moments de bonheur et de tristesse, et pour m'avoir donné tout son amour!

À Fouzia et Salma

INTRODUCTION

La distribution de $\zeta(1+it)$ dans le plan complexe

Le comportement analytique de la fonction zêta de Riemann $\zeta(s)$ au bord de la bande critique (c'est à dire sur la ligne $\mathrm{Re}(s) = 1$) est étroitement relié à la distribution des nombres premiers. En effet, la preuve du célèbre théorème des nombres premiers par Hadamard et de la Vallée Poussin en 1896, repose essentiellement sur le fait que $\zeta(1+it) \neq 0$. En définissant, pour tout réel positif x, le nombre $\pi(x)$ comme le nombre de premiers inférieurs à x, le théorème des nombres premiers s'énonce de la façon suivante

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}, \quad \text{quand} \quad x \to \infty.$$

La fonction zêta de Riemann possède un produit Eulérien qui converge conditionellement sur la ligne $\mathrm{Re}(s) = 1$

$$\zeta(1+it) = \lim_{y\to\infty} \prod_{p\leq y} \left(1 - \frac{1}{p^{1+it}}\right)^{-1}, \text{ si } t \neq 0. \tag{0.0.1}$$

En supposant l'hypothèse de Riemann, J.E. Littlewood (**[Li1]** et **[Li2]**) a démontré que le produit tronqué à $p \leq \log^2 t$ constitue une bonne approximation pour $\zeta(1+it)$, ce qui lui a permit de déduire que $|\zeta(1+it)| \leq (2e^{\gamma} + o(1)) \log_2 t$, où γ est la constante d'Euler. (Tout au long de cette thèse on utilisera la notation $\log_j$ pour la j-ième itérée du logarithme. On aura alors $\log_1 n = \log n$ et $\log_j n = \log(\log_{j-1} n)$ pour tout $j \geq 2$). Ceci démontre que sous l'hypothèse de Riemann, la somme $\sum_{p\geq y} 1/p^{1+it}$ est négligeable pour $y \geq \log^2 t$. D'autre part, en utilisant le théorème de Dirichlet sur les approximations diophantiennes on peut forcer la somme $\sum_{p\leq \log t} 1/p^{1+it}$ à être grande, en prenant t de telle sorte que $p^{it} \approx 1$, pour tous les premiers $p \leq \log t$. Ceci a permis à J.E. Littlewood de montrer l'existence de valeurs arbitrairement grandes t pour lesquelles $|\zeta(1+it)| \geq (e^\gamma + o(1))\log_2 t$. De plus, il est conjecturé que la somme $\sum_{\log t \leq p \leq \log^2 t} 1/p^{1+it}$ est négligeable et donc que le produit sur les premiers $p \leq \log t$ constitue une bonne approximation pour $\zeta(1+it)$:

Conjecture 0.0.1. *Quand $t \to \infty$, on a*

$$\zeta(1+it) \sim \prod_{p \leq \log t} \left(1 - \frac{1}{p^{1+it}}\right)^{-1}.$$

Une conséquence directe de cette conjecture est

$$\max_{|t| \leq T} |\zeta(1+it)| \sim e^\gamma \log_2 T.$$

En **[Le1]**, N. Levinson a démontré l'existence de valeurs t arbitrairement grandes pour lesquelles $|\zeta(1+it)| \geq e^\gamma \log_2 t + O(1)$. Cette borne inférieure a été légèrement améliorée par A. Granville et K. Soundararajan en **[GS4]**. D'autre part ils ont réussi à évaluer la fréquence d'apparition des valeurs extrêmes de $|\zeta(1+it)|$. Plus précisèment, pour $T, \tau \geq 1$, soit

$$\Phi_T(\tau) := \frac{1}{T}\text{meas}\{t \in [T, 2T] : \quad |\zeta(1+it)| > e^\gamma \tau\},$$

où "meas" est la mesure de Lebesgue. Granville et Soundararajan ont prouvé qu'uniformément dans la région $1 \ll \tau \leq \log_2 T - 20$, on a

$$\Phi_T(\tau) = \exp\left(-\frac{2e^{\tau - C - 1}}{\tau}\left(1 + O\left(\frac{1}{\tau^{\frac{1}{2}}} + \left(\frac{e^\tau}{\log T}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right)\right), \tag{0.0.2}$$

où

$$C = \int_0^2 \log I_0(t)\frac{dt}{t^2} + \int_2^\infty (\log I_0(t) - t)\frac{dt}{t^2}, \tag{0.0.3}$$

et $I_0(t)$ est la fonction de Bessel modifiée d'ordre 0.

Notre premier article **[Lam3]**, qui sera présenté au chapitre 3, concerne l'étude de la distribution conjointe de $\arg\zeta(1+it)$ et $|\zeta(1+it)|$. En effet, nous allons étudier la fonction suivante

$$\Phi_T(\tau, \theta) := \frac{1}{T}\text{meas}\{t \in [T, 2T] : \quad |\zeta(1+it)| > e^\gamma \tau, |\arg\zeta(1+it)| > \theta\},$$

pour τ grand et $\theta > 0$ borné.

En premier lieu on démontre l'existence de valeurs $\zeta(1+it)$ de grandes normes (proche du maximum conjecturé) dans toutes les directions $\arg z = \psi$, où $\psi \in [-\pi, \pi]$ est fixé. Plus précisèment on prouve

Théorème 0.0.1 (Y. Lamzouri [**Lam3**]). *Soit $T > 0$ un nombre réel très grand, et $\psi \in [-\pi, \pi]$, un angle fixé. Pour un nombre réel $\tau \leq \log_2 T - \log_3 T$, soit $M(\psi, \tau)$ la mesure des points $t \in [T, 2T]$, pour lesquels*

$$\zeta(1+it) = e^{i\psi} e^{\gamma} \tau \left(1 + O\left(\frac{1}{\log \tau}\right)\right).$$

Alors il existe deux constantes positives c_1, c_2 (qui dépendent uniquement sur la constante du O) tel que

$$T \exp\left(-e^{\tau - c_2\tau/(\log \tau)^2}\right) \leq M(\psi, \tau) \leq T \exp\left(-e^{\tau - c_1\tau/\log \tau}\right).$$

Une conséquence immédiate de ce résultat est que la fonction de distribution $\Phi_T(\tau, \theta)$ est "double exponentiellement décroissante" en le paramètre τ, pour θ fixé.

En utilisant une approche différente, A. Granville et K. Soundararajan (non-publié) ont prouvé une variante du théorème 0.0.1 dans la cas de la famille $L(1, \chi)$ (voir chapitre 1 pour la définition). En effet, ils ont démontré l'existence de grandes valeurs (et de petites valeurs) de $L(1, \chi)$ dans toutes les directions. Cependant leur résultat contient uniquement une borne inférieure sur la mesure de ces valeurs et cette borne est plus faible que celle obtenue au théorème 0.0.1. En adaptant leur méthode au cas de $\zeta(1+it)$, on peut prouver le résultat suivant

Théorème 0.0.2 (A. Granville-K. Soundararajan). *Soit T un nombre réel très grand. Si z est un nombre complexe tel que*

$$\frac{\pi^2}{6e^{\gamma} \log_2 T}\left(1 + O\left(\frac{1}{\log_3 T}\right)\right) \leq |z| \leq e^{\gamma} \log_2 T \left(1 + O\left(\frac{1}{\log_3 T}\right)\right),$$

alors la mesure des points $t \in [T, 2T]$ pour lesquels

$$\zeta(1+it) = z\left(1 + O\left(\frac{\log_3 T}{\log_2 T}\right)\right),$$

est au moins $T^{1-1/\log\log T}$.

Soit $T > 0$ un nombre réel très grand, et $\{X(p)\}_{p \text{ premier}}$ un ensemble de variables aléatoires indépendantes et uniformément distribuées sur le cercle unité $\mathbb{U}$.

Afin de comprendre la distribution des valeurs $\zeta(1+it)$, pour $t \in [T, 2T]$, notre stratégie consiste à comparer cette distribution avec celle du "produit Eulérien aléatoire"

$$L(1, X) = \lim_{y\to\infty} \prod_{p\le y} \left(1 - \frac{X(p)}{p}\right)^{-1}, \text{ (ce produit converge avec probabilité 1).}$$

Soit z un nombre complexe. On définit la fonction multiplicative $d_z(n)$, par $d_z(p^a) = \Gamma(z+a)/\Gamma(z)a!$, pour tout premier p et tout entier $a \geq 0$. Alors $d_z(n)$ est le coefficient de la série de Dirichlet de $\zeta(s)^z$ pour $\mathrm{Re}(s) > 1$. Ainsi pour les variables $\{X(p)\}_{p \text{ premier}}$ on a (avec probabilité 1) que

$$L(1, X)^z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_z(n)X(n)}{n},$$

où $X(n) = \prod_{i=1}^{k} X(p_i)^{a_i}$, si $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{a_i}$. Si Y est une variable aléatoire définie sur un espace de probabilité (Ω, μ) on définit son espérance par $\mathbb{E}(Y) = \int_\Omega Y d\mu$. Ainsi $\mathbb{E}(X(n)\overline{X(m)}) = 1$ si $n = m$ et vaut 0 sinon. On en déduit que pour deux nombres complexes z_1 et z_2, on a

$$\mathbb{E}\left(L(1, X)^{z_1}\overline{L(1, X)}^{z_2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_{z_1}(n)d_{z_2}(n)}{n^2}.$$

L'idée d'utiliser un modèle aléatoire fût exploitée par H.L. Montgomery et R.C. Vaughan **[MV]**, A. Granville et K. Soundararajan **[GS2]**, et J. Cogdell et P. Michel **[CM]**, qui ont construit des modèles probabilistes afin d'étudier la distribution des valeurs de diverses familles de fonctions L. Pour démontrer cette connexion dans notre cas, nous avons évalué les grands moments complexes de $\zeta(1+it)$ et montré qu'ils coïncident avec ceux du modèle probabiliste à un terme d'erreur près. Plus précisément on prouve

Théorème 0.0.3 (Y. Lamzouri **[Lam3]**). *Uniformément pour tous les nombres complexes z_1, z_2 dans la région $|z_1|, |z_2| \leq \log T/(50(\log_2 T)^2)$, on a*

$$\frac{1}{T}\int_T^{2T} \zeta(1+it)^{z_1}\zeta(1-it)^{z_2}dt = \mathbb{E}\left(L(1, X)^{z_1}\overline{L(1, X)}^{z_2}\right) + O\left(\exp\left(-\frac{\log T}{2\log\log T}\right)\right).$$

Dans le cas spécial où $z_2 = z_1 = k \in \mathbb{Z}$, A. Granville et K. Soundararajan **[GS4]** ont pu établir ce résultat dans une région plus grande en le paramètre k.

En vue du théorème 0.0.3, la prochaine étape serait d'étudier la distribution du modèle aléatoire $L(1, X)$. Pour $\tau, \theta > 0$, on définit

$$\Phi(\tau, \theta) := \text{Prob}(|L(1,X)| > e^{\gamma}\tau, \ |\arg L(1,X)| > \theta).$$

En **[Lam3]**, nous avons étudié ce modèle et prouvé une estimation précise de cette fonction de distribution

Théorème 0.0.4 (Y. Lamzouri **[Lam3]**). *Soit $\tau > 0$ un nombre réel grand et $\theta > \sqrt{\frac{(\log \tau)^2 \log_2 \tau}{\tau}}$, alors*

$$\Phi(\tau, \theta) = \exp\left(-\frac{e^{\tau + \frac{\theta^2 \tau}{2 \log \tau} + O\left(\frac{\theta^2 \tau}{\log^2 \tau}\right)}}{\tau} \right).$$

Soit p_j le j-ième nombre premier. Afin d'établir une formule analogue pour $\Phi_T(\tau, \theta)$, nous avons étudié la distribution du vecteur $V(t) := (p_1^{it}, p_2^{it}, ..., p_N^{it})$, dans le tore de dimension N qu'on notera $\mathbb{T}^N := (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^N$, pour $t \in [T, 2T]$, quand $T \to \infty$. Nous croyons que ce vecteur devrait être uniformément distribué sur $\mathbb{T}^N$ pour $N = \pi(y)$ dans une région maximale $y \leq (1 + o(1)) \log T$. Afin d'attaquer cette conjecture, nous avons utilisé l'analyse de Fourier sur $\mathbb{T}^N$. En **[BMV]**, J.T. Barton, H.L. Montgomery et J.D. Vaaler ont construit des polynômes trigonométriques à N variables, qui fournissent une approximation précise pour la fonction caractéristique d'un produit cartésien de N intervalles ouverts (voir théorème 3.8.1 du chapitre 3). Ces polynômes sont en quelques sorte la généralisation des polynômes de Selberg en une variable (voir **[Mo]**). En utilisant cette construction et l'analyse de Fourier sur $\mathbb{T}^N$, on prouve que le vecteur $V(t)$ est uniformément distribué sur $\mathbb{T}^N$, dans la région $y \leq \sqrt{\log T}/(\log_2 T)^2$ inconditionnellement, et dans la région $y \leq (\log T)/10$ en supposant la conjecture de S. Lang et M. Waldshmidt sur les formes linéaires en logarithmes (voir **[Lan]**, Introduction to chapter X and XI, p. 212) :

Conjecture 0.0.2. *Soit b_i des entiers, et a_i des entiers positifs tels que* $\log a_i$ *soient linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Soit $B_j = \max\{|b_j|, 1\}$, et*

$B = \max_{1\leq j\leq n} B_j$. *Alors pour tout* $\epsilon > 0$, *il existe une constante positive* $C(\epsilon)$, *tel que*

$$|b_1 \log a_1 + b_2 \log a_2 + ... + b_n \log a_n| > \frac{C(\epsilon)^n B}{(B_1...B_n a_1...a_n)^{1+\epsilon}}.$$

En effet on prouve

Théorème 0.0.5 (Y. Lamzouri **[Lam3]**). *Soit* $2 < y$ *un nombre réel. Pour tout* $1 \leq j \leq \pi(y)$, *soit* $I_j \subset (0,1)$ *un intervalle ouvert de longueur* $\delta_j > 0$. *On définit*

$$M(I_1, ..., I_{\pi(y)}) := meas\left\{t \in [T, 2T] : \left\{\frac{t \log p_j}{2\pi}\right\} \in I_j, \text{ pour tout } 1 \leq j \leq \pi(y)\right\},$$

où $\{\cdot\}$ *est la partie fractionnaire. Alors*

$$M(I_1, ..., I_{\pi(y)}) \sim T \prod_{j\leq\pi(y)} \delta_j,$$

uniformément pour $y \leq \sqrt{\log T}/(\log_2 T)^2$, *et* $\delta_j > (\log_2 T)^{-5/3}$.

Théorème 0.0.6 (Y. Lamzouri **[Lam3]**). *Si on suppose la conjecture 0.0.2 vérifiée, alors sous les mêmes conditions que le théorème 0.0.5, on a*

$$M(I_1, ..., I_{\pi(y)}) \sim T \prod_{j\leq\pi(y)} \delta_j,$$

uniformément pour $y \leq (\log T)/10$, *et* $\delta_j > (\log T)^{-3/2}$.

En suivant les idées de la preuve du théorème 0.0.4 et en utilisant les résultats des théorèmes 0.0.5 et 0.0.6 on déduit que

Théorème 0.0.7 (Y. Lamzouri [**[Lam3]**). *Soit* $T > 0$ *un nombre réel très grand. Alors il existe deux constantes positive* c_3 *et* c_4 *telles que*

$$\Phi_T(\tau, \theta) \leq \exp\left(-\frac{e^{\tau + \frac{\theta^2\tau}{2\log\tau} - c_3\frac{\theta^2\tau}{\log^2\tau}}}{\tau}\right), \tag{0.0.4}$$

uniformément dans la région $\tau \leq \log_2 T$, *et* $\theta > \sqrt{\frac{(\log\tau)^2 \log_2\tau}{\tau}}$, *et*

$$\Phi_T(\tau, \theta) \geq \exp\left(-\frac{e^{\tau + \frac{\theta^2\tau}{2\log\tau} + c_4\frac{\theta^2\tau}{\log^2\tau}}}{\tau}\right), \tag{0.0.5}$$

uniformément dans la région $\theta > \sqrt{\frac{(\log\tau)^2 \log_2\tau}{\tau}}$, *et* $\tau \leq (\log_2 T)/2 - 2\log_3 T$ *inconditionnellement, et pour* $\tau \leq \log_2 T - \log 10$ *si on suppose que la conjecture 0.0.2 est vraie.*

A partir de ce résultat nous pouvons déduire que presque toutes les valeurs $\zeta(1+it)$ possédant des grandes normes sont concentrées autour de l'axe réel positif. En effet en comparant les équations (0.0.2) et (0.0.4), on prouve que

Corollaire 0.0.1 (Y. Lamzouri **[Lam3]**). *Soit $\tau, T \to \infty$ tel que $\tau \leq \log_2 T - \log_3 T$. Alors pour presque tout $t \in [T, 2T]$, tel que $|\zeta(1+it)| > e^\gamma \tau$, on a $|\arg \zeta(1+it)| \leq (\log \tau)\sqrt{\log_2 \tau / \tau}$. De plus l'ensemble des exceptions possède une mesure $\leq \exp(-\exp(\tau + (\log \tau \log_2 \tau)/2))$.*

Soit $\tau \leq \log_2 T$ un nombre réel très grand. La dernière partie de nos résultats concerne la distribution de l'argument de $\zeta(1+it)$ pour les valeurs $t \in [T, 2T]$ vérifiant $|\zeta(1+it)| \approx e^\gamma \tau$, et $\tau \leq (1+o(1)) \log_2 T$. La présence du facteur $(\theta^2/2)\tau/\log \tau$ dans l'énoncé du théorème 0.0.7, peut suggérer un comportement gaussien en l'argument θ. En effet, en évaluant la fonction caractéristique de $\arg \zeta(1+it)$ avec un poids naturel, et en se servant du théorème de Berry-Esseen (**[Be]**, **[Es]**) nous avons démontré que ces arguments devraient être distribués selon une loi normale d'espérance 0 et de variance $\log(\tau - 1 - C)/2e^{\tau-1-C}$, où C est définie par (0.0.3). Plus précisément on prouve

Théorème 0.0.8 (Y. Lamzouri **[Lam3]**). *Soit $T > 0$ un nombre réel très grand, $1 \ll \tau \leq \log_2 T - 3\log_3 T$ un nombre réel, $\epsilon = \tau^{-1/5}$ et $k = e^{\tau-1-C}$, où C est définie par (0.0.3). Soit*

$$\Omega_T(\tau) := \{t \in [T, 2T] : \; e^\gamma(\tau - \epsilon) \leq |\zeta(1+it)| \leq e^\gamma(\tau + \epsilon)\},$$

et pour un nombre réel x, on définit

$$\Lambda_T(\tau, x) := \left\{ t \in \Omega_T(\tau) : \; \frac{\arg \zeta(1+it)}{\sqrt{\frac{\log(\tau-1-C)}{2e^{\tau-1-C}}}} < x \right\},$$

$$\text{et } \nu_{T,\tau}(x) := \frac{\displaystyle\int_{\Lambda_T(\tau,x)} |\zeta(1+it)|^{2k} dt}{\displaystyle\int_{\Omega_T(\tau)} |\zeta(1+it)|^{2k} dt}.$$

Alors

$$\nu_{T,\tau}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2} dy + O_x\left(\frac{1}{\sqrt{\log \tau}}\right).$$

Finalement nous généralisons tous les résultats énoncés ci-dessus (sauf le théorème 0.0.6 ainsi que la partie conditionnelle du théorème 0.0.7) pour la famille des fonctions L de Dirichlet au point $s = 1$: $L(1, \chi)$ (où χ varie parmi les caractères non-triviaux modulo un grand premier q). Une discussion de ces résultats est présentée à la section 3.10 du chapitre 3.

LA DISTRIBUTION DES VALEURS DES FONCTIONS L AU BORD DE LA BANDE CRITIQUE

Les valeurs des fonctions L au bord de la bande critique (c'est à dire sur la ligne $\mathrm{Re}(s) = 1$) encodent souvent des informations arithmétiques, algébriques et géométriques intéressantes. Le premier exemple est le fait que $\zeta(1 + it) \neq 0$ implique le théorème des nombres premiers. Aussi la formule du nombre de classes, prouvée par Dirichlet en 1839, relie le nombre de classe d'un corps quadratique imaginaire à la valeur de la fonction L de Dirichlet au point 1, $L(1, \chi_d)$ où d est le discriminant du corps. D'autre part soit $S_k^p(N)$ l'ensemble des formes modulaires cuspidales primitives normalisées de poids k et de niveau N. Pour toute $f \in S_k^p(N)$, J.P. Serre **[Ser]**, a prouvé que la conjecture de Sato-Tate est vraie pour f si et seulement si les fonctions L de puissances symétriques de f : $L(s, \mathrm{Sym}^m f)$ ne s'annulent pas sur la ligne $\mathrm{Re}(s) = 1$, pour tout $m \in \mathbb{N}$. Ce résultat a été récemment exploité par Taylor *et collaborateurs* qui ont prouvé la conjecture de Sato-Tate pour certaines courbes elliptiques ne possédant pas de multiplication complexe.

La distribution des valeurs des fonctions L sur la ligne $\mathrm{Re}(s) = 1$ a été intensivement étudiée durant ces dernières décennies. On peut citer le travail de A. Granville et K. Soundararajan **[GS4]** dans le cas de $\zeta(1 + it)$; P.D.T.A Elliott (**[El1]** et **[El2]**), H.L. Montgomery et R.C. Vaughan **[MV]**, et A. Granville et K. Soundararajan **[GS2]** dans le cas des fonctions L de Dirichlet de caractères quadratiques $L(1, \chi_d)$; W. Duke **[Du]** dans le cas des fonctions L d'Artin, et le travail de J. Cogdell et P. Michel **[CM]**, L. Habsieger et E. Royer **[HR]**, Y.-K. Lau et J. Wu **[LW]**, J.Y. Liu et E. Royer et J. Wu **[LRW]**, E. Royer (**[Ro1]** et **[Ro2]**), et E. Royer et J. Wu (**[RW1]** et **[RW2]**) dans le cas des fonctions L de puissances symétriques des formes automorphes de GL_2.

Dans le cas des fonctions L de caractères quadratiques, H.L. Montgomery et R.C Vaughan **[MV]** furent les premiers à construire un modèle probabiliste afin d'étudier la distribution de cette famille au point $s = 1$. En se basant sur ce modèle ils ont ainsi conjecturé que la queue de la fonction de distribution doit être double exponentiellement décroissante. En 2003, A. Granville et K. Soundararajan **[GS2]** ont évalué les grands moments de $L(1, \chi_d)$ et déduit une formule asymptotique pour cette fonction de distribution, prouvant ainsi la conjecture de Montgomery et Vaughan. Plus précisément soit $\Phi_x(\tau)$ la proportion des discriminants fondamentaux d vérifiant $|d| \leq x$, et $L(1, \chi_d) > e^{\gamma}\tau$, pour $\tau > 0$. Granville et Soundararajan ont prouvé qu'uniformément pour $1 \ll \tau \leq \log_2 x$ on a

$$\Phi_x(\tau) = \exp\left(-\frac{e^{\tau - C_1}}{\tau}\left(1 + O\left(\frac{1}{\tau}\right)\right)\right), \tag{0.0.6}$$

où

$$C_1 := 1 + \int_0^1 \log\cosh y \frac{dy}{y^2} + \int_1^\infty (\log\cosh y - y)\frac{dy}{y^2} = 0.8187...$$

On peut remarquer que $\Phi_x(\tau)$ possède une formule asymptotique (0.0.6) très similaire à la formule (0.0.2) obtenue par Granville est Soundararajan dans le cas de $|\zeta(1 + it)|$. En effet en vue de l'équation (0.0.2) et en faisant un simple calcul on pourra voir que dans le cas de $\zeta(1 + it)$ on a

$$\Phi_T(\tau) = \exp\left(-\frac{e^{\tau - C_2}}{\tau}\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}}\right)\right)\right),$$

uniformément pour $1 \ll \tau \leq \log_2 T - 20$, où

$$C_2 := 1 + \int_0^1 \log I_0(y)\frac{dy}{y^2} + \int_1^\infty (\log I_0(y) - y)\frac{dy}{y^2}.$$

Récemment, J.Y. Liu, E. Royer et J. Wu **[LRW]** ont étudié la distribution des valeurs des fonctions L de formes automorphes au point $s = 1$ par rapport au poids. En suivant les idées de Granville et Soundararajan, ils ont démontré que la fonction de distribution des valeurs $L(1, f)$ où f varie parmi les éléments de $S_k^p(1)$, possède exactement la même forme que (0.0.2) et (0.0.6) mais avec une constante différente C_3 qui est étroitement liée au modèle probabiliste correspondant à leur famille.

Dans le deuxième article de cette thèse qui sera présenté au chapitre 4, nous étudions la distribution d'une classe générale de modèles probabilistes et nous dérivons plusieurs applications à la distribution des valeurs de divers familles de fonctions L au bord de la bande critique. Parmi les nouveaux résultats obtenus nous prouvons des formules asymptotiques pour ces fonctions de distribution, similaires à (0.0.6), ainsi qu'une formule générale pour la constante qui y apparaît, en fonction du modèle probabiliste correspondant.

Soit d un entier positif, et $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Pour $p \in \mathcal{P}$ et $1 \leq j \leq d$, soit $\theta_j(p)$ des variables aléatoires ayant leurs valeurs dans $[-\pi, \pi]$ et vérifiant les conditions naturelles suivantes :

Condition 1. $\mathbb{E}(e^{i\theta_j(p)}) = 0$, pour tout $p \in \mathcal{P}$ et $1 \leq j \leq d$.

Condition 2. $\theta_j(p)$ et $\theta_k(q)$ sont des variables aléatoires indépendantes pour $p \neq q$.

Condition 3. Les variables aléatoires $X(p) := \sum_{j=1}^{d} e^{i\theta_j(p)}/d$, sont identiquement distribuées, pour tout $p \in \mathcal{P}$.

Condition 4. Il existe une constante $\alpha > 0$ tel que pour tout premier p et tout $\epsilon > 0$, on a $\text{Prob}\left(|\theta_1(p)| \leq \epsilon, ..., |\theta_d(p)| \leq \epsilon\right) \gg \epsilon^{\alpha}$.

On définit les produits Eulériens suivants

$$L(1, X) := \prod_{p \in \mathcal{P}} \prod_{j=1}^{d} \left(1 - \frac{e^{i\theta_j(p)}}{p}\right)^{-1}.$$

Notre premier résultat consiste à donner une estimation pour

$$\Phi(\tau) := \text{Prob}\left(|L(1, X)| > (e^{\gamma}\tau)^d\right).$$

On prouve

Théorème 0.0.9 (Y. Lamzouri **[Lam4]**). *Soit d un entier positif. Pour $1 \leq j \leq d$ et $p \in \mathcal{P}$, soit $\theta_j(p)$ des variables aléatoires ayant leurs valeurs dans $[-\pi, \pi]$ et vérifiants les conditions 1-4. Pour $\tau \gg 1$, on a*

$$\Phi(\tau) = \exp\left(-\frac{e^{\tau - A_X}}{\tau}\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}}\right)\right)\right),$$

où

$$A_X := 1 + \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t^2} dt, \ \ et \ f(t) := \begin{cases} \log \mathbb{E}\left(e^{Re(X)t}\right) & si \ 0 \leq t < 1 \\ \log \mathbb{E}\left(e^{Re(X)t}\right) - t & si \ 1 \leq t, \end{cases}$$

et X est une variable aléatoire possédant la même distribution que les $X(p)$. De plus A_X est convergent par le lemme 4.2.1 du chapitre 4.

Ce théorème généralise les résultats de Granville et Soundararajan (**[GS2]** et **[GS4]**) et de Liu, Royer et Wu **[LRW]**. En effet les modèles probabilistes correspondants aux familles $|\zeta(1+it)|$, $L(1,\chi_d)$ et $L(1,f)$ vérifient les conditions 1-4.

J. Cogdell et P. Michel **[CM]**, ont étudié la famille des fonctions L de k-ième puissance symétrique des formes modulaires cuspidales primitives de poids 2 par rapport au niveau. Dans leur travail, ils ont évalué les moments complexes de cette famille au point $s=1$, uniformément par rapport au niveau, et montré que ceux-ci coïncident avec les moments d'un modèle probabiliste adéquat (construit à partir de la mesure de Sato-Tate), s'ils supposent l'automorphie de ces fonctions L :

Hypothèse $\mathrm{Sym}^k(q)$: Pour tout $f \in S_2^p(q)$ la fonction L de la k-ième puissance symétrique de f est automorphe, ce qui veut dire qu'elle coïncide avec la fonction L d'une certaine représentation cuspidale automorphe de $GL(k+1)/\mathbb{Q}$.

Cette hypothèse est prédite par les conjectures de fonctorialité de Langlands et est effectivement prouvée pour les puissances symétriques $1 \leq k \leq 4$.

En vue de la formule de Petersson (voir chapitre 1), il est plus naturel de considérer la fonction de distribution harmonique

$$\Phi_q(\mathrm{Sym}^k, \tau) = \left(\sum_{f \in S_2^p(q)} \omega_f \right)^{-1} \sum_{\substack{f \in S_2^p(q) \\ L(1, \mathrm{Sym}^k f) \geq (e^\gamma \tau)^{k+1}}} \omega_f,$$

où $\omega_f := 1/(4\pi\langle f, f\rangle_q)$ est le poids harmonique. Cogdell et Michel **[CM]** ont aussi noté qu'il serait intéressant de trouver une bonne estimation pour cette fonction uniformément par rapport au niveau, en utilisant leur résultats sur les moments. Liu, Royer et Wu ont indiqué en **[LRW]** que leur méthode pourrait fonctionner dans ce cas, mais qu'il y aurait possiblement plus de difficultés techniques. En combinant le théorème 0.0.9 et les résultats de Cogdell et Michel, nous avons obtenu une estimation de la même forme que (0.0.6) pour cette fonction de distribution. Ceci est essentiellement dû au fait que le modèle probabiliste correspondant vérifie les conditions 1-4. En effet, dans ce cas, les variables aléatoires $\theta_j(p)$ sont données par $\theta_j(p) = (k-2j)\theta_p$ pour $0 \leq j \leq k$ où les $\{\theta_p\}_{p\in\mathcal{P}}$ sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon la mesure de Sato-Tate $\frac{2}{\pi}\sin^2(\theta)d\theta$ sur $[0,\pi]$. On prouve

Théorème 0.0.10 (Y. Lamzouri **[Lam4]**). *Soit $k \geq 1$ un nombre entier et q un nombre premier très grand tel que l'hypothèse $Sym^k(q)$ est vérifiée. Alors uniformément pour $\tau \leq \log_2 q - \log_3 q - 2\log_4 q$ on a*

$$\Phi_q(Sym^k, \tau) = \exp\left(-\frac{e^{\tau - A_k}}{\tau}\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}}\right)\right)\right),$$

où $A_k = 1 + \int_0^1 \frac{h_k(t)}{t^2}dt + \int_1^\infty \frac{h_k(t)-t}{t^2}dt$ *et*

$$h_k(t) = \log\left(\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \exp\left(\frac{t}{k+1}\sum_{j=0}^{k}\cos(\theta(k-2j))\right)\sin^2\theta d\theta\right).$$

Une autre application de notre travail concerne la distribution des fonctions L de la classe de Selberg en l'aspect t au bord de la bande critique. Cette classe S, introduite par A. Selberg **[Sel]** (voir aussi la belle description de cette classe par J. Kaczorowski et A. Perelli **[KP1]**), est la classe des séries de Dirichlet

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_F(n)}{n^s}, \text{ pour } \operatorname{Re}(s) > 1,$$

vérifiant les axiomes suivants

Axiome 1. Analyticité : $(s-1)^l F(s)$ est une fonction entière d'ordre fini pour un certain entier $l \geq 0$.

Axiome 2. Hypothèse de Ramanujan : $a_F(n) \ll_\epsilon n^\epsilon$ pour tout $\epsilon > 0$.

Axiome 3. Équation fonctionnelle : il existe une fonction $\gamma_F(s)$ de la forme

$$\gamma_F(s) = \epsilon Q_F^s \prod_{i=1}^{k}\Gamma(w_i s + \mu_i),$$

où $|\epsilon| = 1$, $Q_F > 0$, $w_i > 0$ et $\operatorname{Re}(\mu_i) \geq 0$ sont tels que la fonction L complétée $\Phi(s) = \gamma_F(s)F(s)$ vérifie l'équation fonctionnelle

$$\Phi(s) = \overline{\Phi}(1-s), \text{ où } \overline{\Phi}(s) = \overline{\Phi(\overline{s})}.$$

Axiome 4. Produit Eulérien : $a_F(1) = 1$, et

$$\log F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s},$$

où $b_n = 0$ excepté quand n est de la forme p^r où p est un nombre premier et r un entier positif. De plus on a $b_n \ll n^\lambda$ pour une certaine constante $\lambda < 1/2$.

Soit $F \in S$. Notre but sera d'étudier la distribution des grandes valeurs de $|F(1+it)|$ où $t \in [T, 2T]$, quand T tend vers l'infini. À cette fin, nous construisons un modèle probabiliste basé sur la fonction complètement multiplicative (pour la définition voir chapitre 2) $X(.)$, où les $\{X(p)\}_{p \text{ premier}}$ sont des variables aléatoires indépendantes et uniformément distribuées sur le cercle unité $\mathbb{U}$, et pour un entier positif $n = p_1^{a_1}...p_r^{a_r}$ on a $X(n) := X(p_1)^{a_1}...X(p_r)^{a_r}$. On définit alors les séries aléatoires

$$F(1, X) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_F(n)X(n)}{n}, \text{ (ces séries convergent avec probabilité 1).}$$

En premier lieu on prouve que les grands moments entiers de $|F(1+it)|$ et ceux de $|F(1, X)|$ sont asymptotiques, si on suppose que notre fonction L vérifie une forme plus forte de l'axiome 2 en moyenne :

$$\sum_{p \le y} \frac{|a_F(p)|}{p} \ll \log_2 y. \tag{0.0.7}$$

On prouve

Théorème 0.0.11 (Y. Lamzouri **[Lam4]**). *Soit $F \in S$ et vérifie l'équation(0.0.7). Soit $T > 0$ un nombre réel très grand, et soit $A > 0$. Alors pour tous les entiers positifs k vérifiant $1 \le k \le \log T/(B \log_2 T \log_3 T)$ (pour une certaine constante $B = B(A, F)$ très grande) , on a*

$$\frac{1}{T} \int_T^{2T} |F(1+it)|^{2k} dt = \mathbb{E}\left(|F(1, X)|^{2k}\right) \left(1 + O\left(\frac{1}{\log^A T}\right)\right).$$

Ainsi la prochaine étape sera d'étudier le modèle probabiliste afin de déduire des informations sur la fonction de distribution de $|F(1+it)|$. Pour faire une étude précise, nous aurons besoin de plus de propriétés de la part de la fonction F, qui sont satisfaites pour tous les exemples explicites de fonctions L connues, et sont suggérées par le programme de Langlands (qui prédit que les fonctions L proviennent de représentations automorphes de $GL(m)$ sur $\mathbb{Q}$). Donc il est plausible de croire que ces propriétés seront saisfaites pour toutes les fonctions de la classe S :

1. F possède un produit Eulérien dont les facteurs sont des polynômes en $1/p^s$, ce qui veut dire qu'il existe un entier positif d (dit le degré de F) tel que
$$F(s) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \prod_{i=1}^{d} \left(1 - \frac{\alpha_{i,F}(p)}{p^s}\right)^{-1}, \text{ pour } \mathrm{Re}(s) > 1, \tag{0.0.8}$$
où $\alpha_{i,F}(p) \neq 0$ pour tout les premiers sauf au plus un nombre fini.
2. Les paramètres locaux $a_F(p) = \sum_{i=1}^{d} \alpha_{i,F}(p)$ sont bornés.

La sous-classe des fonctions L de S qui vérifient ces deux propriétés sera notée $S^\star$.

Par ailleurs, pour la plupart des fonctions L de $S^\star$ nous croyons que les valeurs $|a_F(p)|$ sont régis par une certaine loi de distribution, ou plus précisément qu'il existe une fonction de distribution à support compact $\psi(t)$, telle que

$$\frac{1}{\pi(x)}|\{p \leq x : |a_F(p)| \in I\}| \sim \int_I \psi(t)dt, \tag{0.0.9}$$
quand $x \to \infty$, pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$.

Cette propriété est satisfaite pour les fonctions L de degrée 1 (car dans ce cas $|a_F(p)| = 1$ pour tout sauf au plus un nombre fini de premiers), et pour les fonctions L de formes automorphes si on suppose la conjecture de Sato-Tate (qui a été établie pour les fonctions L de certaines courbes elliptiques). Dans notre cas nous aurons besoin d'une version légèrement uniforme de (0.0.9) :

Hypothèse D. *Il existe une fonction de distribution à support compact $\psi(t)$ (dont le support est inclus dans un certain intervalle $[0, U]$), telle que pour toute fonction continue g on a*
$$\sum_{p\leq x} g(|a_F(p)|) = \pi(x)\left(\int_0^U g(t)\psi(t)dt + o\left(\frac{1}{\log x}\right)\right), \text{ quand } x \to \infty.$$

Soit $F \in S^\star$ vérifiant l'hypothèse D. Posons
$$N := \int_0^U t\psi(t)dt \text{ et } M := \int_0^U t\log t\psi(t)dt.$$

On peut alors facilement prouver que

$$\sum_{p\leq y}\frac{|a_F(p)|}{p}\sim N\sum_{p\leq y}\frac{1}{p},$$

et donc déduire que le produit

$$b_F := \prod_{p\in\mathcal{P}}\max_{t\in[-\pi,\pi]}\left|\prod_{i=1}^{d}\left(1-\frac{e^{it}\alpha_{i,F}(p)}{p}\right)^{-1}\right|\left(1-\frac{1}{p}\right)^{N} \text{ est convergent.}$$

On définit

$$\Phi_F(\tau) := \frac{1}{T}\text{meas}\{t\in[T,2T]:\ \ |F(1+it)|>b_F\,(e^{\gamma}\tau)^N\}. \tag{0.0.10}$$

Nous allons prouver une formule asymptotique de cette fonction de distribution

Théorème 0.0.12 (Y. Lamzouri **[Lam4]**). *Soit $T>0$ un nombre réel très grand. Soit $F\in S^\star$ vérifiant l'hypothèse D (avec fonction de distribution ψ). Alors uniformément dans la région $1\ll\tau\leq\log_2 T-\log_3 T-2\log_4 T$, on a*

$$\Phi_F(\tau)=\exp\left(-\frac{e^{\tau-C_2-M/N+\log N}}{\tau}(1+o(1))\right).$$

Dans les équations (0.0.2), (0.0.6) et dans les énoncés des théorèmes 0.0.9 et 0.0.10, la constante apparaissant dans l'asymptotique de la fonction de distribution dépend uniquement du modèle probabiliste. Cependant dans le cas du théorème 0.0.12, cette constante contient deux parties, la première C_2 dépend sur le modèle aléatoire, et la seconde $M/N-\log N$ dépend sur la fonction ψ qui régit la distribution des $|a_F(p)|$. Cette dernière constante s'annulle dans le cas des fonctions L de degré 1, mais est non-nulle pour les fonctions L de courbes elliptiques (par la conjecture de Sato-Tate). Ainsi il parait naturel et nécessaire de supposer la validité de l'hypothèse D, (ou au moins l'existence de la fonction de distriution $\psi(t)$) si on veut estimer la fonction de distribution des grandes valeurs de $F(1+it)$.

Soit π une représentation automorphe cuspidale de $GL(m)/\mathbb{Q}$. La fonction L normalisée de π (telle que la bande critique soit $0\leq\text{Re}(s)\leq 1$) peut être exprimée comme une série de Dirichlet

$$L(\pi,s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_\pi(n)}{n^s},\ \text{ pour Re}(s)>1.$$

Elle admet un prolongement méromorphe au plan complexe, elle n'a pas de pôles sauf possiblement à $s = 1$, possède un produit Eulérien de la forme (0.0.8) de degré m, ainsi qu'une équation fonctionnelle du même type que l'axiome 3. On considère les formes π qui sont auto-duales (donc $a_\pi(n) \in \mathbb{R}$) et dont les $\{a_\pi(p)\}_{p\in\mathcal{P}}$ sont bornés et vérifient l'hypothèse D (avec fonction de distribution ψ). Soit d un discriminant fondamental. On considère le tordu de $L(s,\pi)$ par l'unique caractère quadratique modulo d

$$L(\pi \otimes \chi_d, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_\pi(n)\chi_d(n)}{n^s}, \text{ pour } \mathrm{Re}(s) > 1.$$

Soit x un nombre réel très grand. La dernière partie de notre travail concerne l'étude de la distribution des grandes valeurs de $L(\pi \otimes \chi_d, 1)$ pour $|d| \leq x$. Similairement à (0.0.6) soit $\Phi_\pi(\tau)$ la proportion des discriminants fondamentaux d tel que $|d| \leq x$, et vérifiant $L(\pi \otimes \chi_d, 1) > b_\pi(e^\gamma \tau)^N$, où

$$N = \int_0^U t\psi(t)dt, \text{ et } M := \int_0^U t\log t\psi(t)dt,$$

et

$$b_\pi := \prod_{p\in\mathcal{P}} \max_{\delta\in\{-1,1\}} \prod_{i=1}^{d} \left(1 - \delta\frac{\alpha_{i,F}(p)}{p}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^N.$$

On prouve de façon analogue au théorème 0.0.12, le résultat suivant

Théorème 0.0.13 (Y. Lamzouri **[Lam4]**). *Soit π une représentation automorphe cuspidale auto-duale de $GL(m)/\mathbb{Q}$, telle que les $\{a_\pi(p)\}_{p\in\mathcal{P}}$ sont bornés et vérifient l'hypothèse D (avec fonction de distribution ψ). Soit $x > 0$ un nombre réel très grand. Alors uniformément pour $1 \ll \tau \leq \log_2 x - \log_3 x - 2\log_4 x$, on a*

$$\Phi_\pi(\tau) = \exp\left(-\frac{e^{\tau - C_1 - M/N + \log N}}{\tau}(1 + o(1))\right).$$

Valeurs friables des itérées de la fonction Phi de Euler

Les entiers sans grand facteurs premiers, souvent appelés *nombres friables*, jouent un rôle central dans plusieurs sujets de la théorie des nombres. En effet, la connaissance de la structure multiplicative de ces entiers fournit non seulement d'importantes conséquences arithmétiques mais aussi des applications pour plusieurs algorithmes de cryptographie.

Soit $\phi(n)$ la fonction Phi de Euler. On définit $\phi_0(n) = n$ et $\phi_{k+1}(n) = \phi(\phi_k(n))$ pour tout $k \geq 0$. La fonction Phi et ses itérées sont des objets importants en théorie des nombres puisqu'elles sont présentes dans plusieurs faits et résultats clés. Par exemple on note que $\phi(q)$ est le nombre d'entiers positifs copremiers avec et plus petits que q, qui compte aussi le nombre de caractères de Dirichlet modulo q. Par ailleurs le nombre de racines primitives modulo n est $\phi(\phi(n)) = \phi_2(n)$. Il existe plusieurs résultats sur la distribution des valeurs de ces fonctions ϕ_k. On peut citer les travaux de P. Erdös (**[Er1]** et **[Er2]**), P. Erdös, A. Granville, C. Pomerance et C. Spiro **[EGPS]**, P. Erdös et C. Pomerance **[EP]**, C. Pomerance **[Po]** et H. Shapiro **[Sh]**.

En effet ces fonctions sont intéréssantes puisque leurs structures multiplicatives sont étroitement liées à celle des entiers de la forme $p-1$ où p est un nombre premier (dont le comportement est aussi relié à la distribution des premiers dans les progressions arithmétiques). Une conjecture fameuse affirme que la distribution des facteurs premiers de $p-1$ où p varie parmi les nombres premiers est similaire à celle d'un entier aléatoire. Plus précisément on définit

$$\Psi(x, y) = \left|\{n \leq x : p|n \implies p \leq y\}\right|,$$

$$\text{et } \pi(x, y) = \left|\{p \leq x : q|p-1 \implies q \leq y\}\right|.$$

Conjecture 0.0.3. *Soit $U \geq 1$. Si $x^{1/U} \leq y \leq x$ alors*

$$\frac{\pi(x, y)}{\pi(x)} \sim \frac{\Psi(x, y)}{x} \quad \textit{quand} \quad x \to \infty.$$

Cette conjecture fût citée dans les travaux de C. Pomerance **[Po]** et de C. Pomerance et I.E. Shparlinski **[PS]**, alors qu'une version légèrement différente a été déjà implicite dans le travail de P. Erdös **[Er1]**. En supposant cette conjecture on peut déduire une formule asymptotique pour $\pi(x, y)$ à partir de celle connue de $\Psi(x, y)$

$$\Psi(x, y) \sim x\rho(u) \text{ quand } x \to \infty \text{ où } x = y^u,$$

où $\rho(u)$ est la fonction de Dickman-de Bruijn, définit comme l'unique solution de l'équation différentielle aux différences $u\rho'(u) = -\rho(u-1)$ pour $u \geq 1$, et vérifiant la condition initiale $\rho(u) = 1$ pour $0 \leq u \leq 1$. (Voir chapitre 2 pour plus de détails concernant cette fonction.)

Soit P un ensemble de nombres premiers. On définit

$$\Psi(x,P) = \left|\{n \leq x : p|n \implies p \in P\}\right|,$$

$$\text{et } \pi(x,P) = \left|\{p \leq x : q|p-1 \implies q \in P\}\right|.$$

On pourrait deviner que la conjecture 0.0.3 reste vraie en général pour l'ensemble P, autrement dit

$$\frac{\pi(x,P)}{\pi(x)} \sim \frac{\Psi(x,P)}{x} \quad \text{quand} \quad x \to \infty, \tag{0.0.11}$$

sous certaines conditions sur l'ensemble P.

A. Granville (non-publié) a démontré que la conjecture 0.0.3 est vraie, si on suppose la validité de la conjecture de Elliott-Halberstam (E-H) qui affirme que

$$\sum_{q \leq x^{1-\epsilon}} \max_{y \leq x} \max_{(a,q)=1} \left|\pi(y;q,a) - \frac{\pi(y)}{\phi(q)}\right| \ll_{\epsilon,A} \frac{x}{\log(x)^A}.$$

Une version faible de cette conjecture est la suivante :

Conjecture 0.0.4. *Soit $\epsilon > 0$. Alors*

$$\sum_{d \leq x^{1-\epsilon}} \left|\pi(x;d,1) - \frac{\pi(x)}{\phi(d)}\right| = o\left(\pi(x)\right) \;\; \textit{quand } x \to \infty.$$

Nous allons prouver une version de (0.0.11) conditionnellement à la conjecture 0.0.4 ; plus précisément on prouve :

Théorème 0.0.14 (Y. Lamzouri **[Lam1]**). *Supposons que la conjecture 0.0.4 est vraie. Soit P est un ensemble de nombres premiers plus petits que x, tel que*

$$\sum_{\substack{p \notin P \\ p \leq x}} \frac{1}{p} \ll 1.$$

Alors on a

$$\frac{\pi(x,P)}{\pi(x)} \sim \prod_{p \notin P} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \frac{\Psi(x,P)}{x} \;\; \textit{quand } x \to \infty.$$

On pourrait remarquer qu'il y a un facteur de plus dans l'énoncé du théorème 0.0.14 comparé à notre conjecture 0.0.11. En effet, soit q un nombre premier ; alors la probabilité qu'un entier aléatoire n soit divisible par q est $1/q$. Par ailleurs la probabilité qu'un entier aléatoire de la forme $p-1$ (où p est premier) soit divisible par q est $1/(q-1)$ (puisque p ne peut appartenir à la classe $0 \mod q$). La différence entre les deux probabilités est négligeable quand q est très grand, cependant il faudrait ajouter le facteur de correction suivant pour les petits premiers q

$$\frac{1-\frac{1}{q-1}}{1-\frac{1}{q}} = 1 - \frac{1}{(q-1)^2}.$$

Notons que ce facteur n'apparaît pas dans certains cas spéciaux où P contient tous les petits premiers (voir le lemme 5.2.1 du chapitre 5).

En utilisant le résultat du théorème 0.0.14, nous allons démontrer une asymptotique pour le nombre d'entiers $n \leq x$ tels que $\phi_k(n)$ est y-friable (tout ses facteurs premiers sont plus petit que y). Plus précisément soit

$$\Phi_k(x,y) := \big|\{n \leq x : p|\phi_k(n) \implies p \leq y\}\big|.$$

Nous allons prouver le résultat suivant

Théorème 0.0.15 (Y. Lamzouri **[Lam1]**). *Supposons que la conjecture 0.0.4 est vraie. Soit $U > 1$ fixé. Si $y = x^{1/u}$ où $1 \leq u \leq U$, alors*

$$\Phi_k(x,y) \sim x\sigma_k(u) \quad \textit{quand} \quad x \to \infty,$$

où $\sigma_k(u) = 1$ pour $u \leq 1$, et $u\sigma_{k+1}(u) = \int_0^u \sigma_{k+1}(u-t)\sigma_k(t)dt$ for $u \geq 1$, et tel que $\sigma_0(u) = \rho(u) = ((e+o(1))/u\log(u))^u$. De plus, pour tout $k \geq 1$, on a

$$\sigma_k(u) = \left(\frac{1+o(1)}{\log_k(u)\log_{k+1}(u)}\right)^u.$$

La première étape de la preuve consiste à utiliser des arguments combinatoires afin d'approximer les fonctions $\Phi_k(x,y)$ par $\Psi(x,P_k)$, où P_k sont des ensembles de premiers définis récursivement par $P_{k+1} = \{p \leq x : q|p-1 \implies q \in P_k\}$, et tel que $P_0 = \{p \leq y\}$. En effet on prouve

Proposition 0.0.1 (Y. Lamzouri **[Lam1]**).

$$\Phi_k(x,y) = \Psi(x,P_k) + O\left(\frac{x(\log x)^{2k}}{y}\right).$$

On pourrait remarquer que ces ensembles P_k vérifient l'identité intéressante $|P_k| = \pi(x, P_{k-1})$. Ainsi la prochaine étape pour prouver le théorème 0.0.15 est d'établir une relation entre $|P|$ et $\Psi(x,P)$ pour un ensemble de premiers P, afin de pouvoir utiliser le théorème 0.0.14. Cette relation qu'on cherche, a été découverte par Granville et Soundararajan **[GS1]** lors de leur étude sur le spectre des valeurs moyennes de fonctions multiplicatives. Ils ont établit la proposition suivante :

Proposition 0.0.2 (Proposition 1 de **[GS1]**). *Soit f une fonction multiplicative vérifiant $|f(n)| \leq 1$ pour tout n, et $f(n) = 1$ pour $n \leq y$. Soit $\theta(x) = \sum_{p \leq x} \log(p)$ et*

$$\chi(u) := \frac{1}{\theta(y^u)} \sum_{p \leq y^u} f(p) \log(p).$$

Alors $\chi(t)$ est une fonction mesurable telle que $\chi(t) = 1$ pour $t \leq 1$. Soit σ l'unique solution de l'équation intégrale aux différences :

$$u\sigma(u) = \int_0^u \sigma(u-t)\chi(t)dt \text{ pour } u > 1, \tag{0.0.12}$$

sous la condition initiale $\sigma(u) = 1$ pour $0 \leq u \leq 1$. Alors

$$\frac{1}{y^u} \sum_{n \leq y^u} f(n) = \sigma(u) + O\left(\frac{u}{\log(y)}\right).$$

À partir de ce résultat et par un argument de sommation partielle nous pouvons déduire

Corollaire 0.0.2. *Soit $U > 1$ fixé. Soit P un ensemble de premiers plus petits que x et tel que $P_0 \subseteq P$; et soit f une fonction complètement multiplicative telle que $f(p) = 1$ si $p \in P$ et vaut 0 sinon (ainsi $f(n) = 1$ pour tout $n \leq y$). Pour $1 \leq u \leq U$, on définit*

$$\chi(u) := \frac{1}{\pi(y^u)} \sum_{\substack{p \in P \\ p \leq y^u}} 1.$$

Alors

$$\Psi(y^u, P) = \sum_{n \leq x} f(n) \sim y^u \sigma(u),$$

où σ est l'unique solution de l'équation (0.0.12).

Ainsi la dernière étape de notre preuve du théorème 0.0.15 consiste à étudier les solutions σ de l'équation (0.0.12) et leurs comportements asymptotiques quand $u \to \infty$. Dans plusieurs cas intéressants, la fonction $\chi(u)$ décroit comme $(\{1 + o(1)\}/h(u))^u$ où h est une fonction positive croissante. Ainsi on prouve :

Théorème 0.0.16 (Y. Lamzouri **[Lam1]**). *Soit χ une fonction réelle mesurable telle que $\chi(t) = 1$ pour $0 \leq t \leq 1$, et $0 \leq \chi(t) \leq 1$ pour $t > 1$. De plus, supposons qu'elle vérifie l'une des conditions suivantes :*

i) $\int_T^\infty \chi(t)dt = 0$ *pour une certaine constante* T. *Dans ce cas on définit* $T = \min\{t : \int_T^\infty \chi(t)dt = 0\}$ *pour éviter la redondance, et on suppose que* $T > 1$.

ii) $\chi(t) = (\{1+o(1)\}/h(t))^t$, *où* $h(t)$ *est une fonction croissante et positive et* $h(t) \to \infty$ *quand* $t \to \infty$.

Soit σ *l'unique solution correspondant à* χ *de l'équation (0.0.12). Alors*

$$\sigma(u) = \exp\left((-\xi(u) + o(1))u + \int_1^\infty \frac{\chi(v)e^{\xi(u)v}}{v}dv\right),$$

où $\xi(u)$ *est l'unique solution de* $u = \int_1^\infty \chi(v)e^{\xi(u)v}dv$.

Par ailleurs, nous avons pu obtenir des asymptotiques explicites dans plusieurs cas intéressants. En effet nous allons prouver

Proposition 0.0.3 (Y. Lamzouri **[Lam1]**). *Soit* χ *une fonction réelle mesurable vérifiant* $\chi(t) = 1$ *pour* $0 \le t \le 1$, *et* $0 \le \chi(t) \le 1$ *pour* $t > 1$. *Supposons que* $\int_T^\infty \chi(t)dt = 0$ *pour une certaine constante* T.
On définit $T = \min\{t : \int_T^\infty \chi(t)dt = 0\}$ *pour éviter la redondance, et on suppose que* $T > 1$. *Alors*

$$\xi(u) = \frac{\log(u)}{T}(1 + o(1)),$$

et

$$\sigma(u) = \exp\left(-\frac{u\log(u)}{T}(1 + o(1))\right).$$

Proposition 0.0.4 (Y. Lamzouri **[Lam1]**). *Soit* χ *une fonction réelle mesurable vérifiant* $\chi(t) = 1$ *pour* $0 \le t \le 1$, *et* $0 \le \chi(t) \le 1$ *pour* $t > 1$ *; et supposons que* $\chi(u) = (\{1+o(1)\}/h(u))^u$ *où* h *vérifie les conditions suivantes :*

i) h *est positive et croissante et telle que* $h(u) \to \infty$ *quand* $u \to \infty$.

ii) h *est continument différentiable et vérifie* $uh'(u)/h(u) \to n$, *quand* $u \to \infty$ *pour un certain nombre réel* $n \ge 0$.

On considère deux cas : a) $0 < n$ *et b)* $n = 0$.

Alors

$$\sigma(u) = \left(\frac{1 + o(1)}{h(\zeta\log(u))}\right)^u,$$

où $\zeta = e/n$ *dans le cas a) et* $\zeta = 1$ *dans le cas b).*

Cette différence entre les cas a) et b) dans la dernière proposition justifie l'apparence de la constante e uniquement dans l'asymptotique de $\sigma_0 = \rho$ dans l'énoncé du théorème 0.0.15.

SUR LE NOMBRE DES FORMES LINÉAIRES EN LOGARITHMES

La théorie des formes linéaires en logarithmes, développée by A. Baker (**[Ba1]** et **[Ba2]**) dans les années 60, est une méthode puissante dans la théorie transcendantale des nombres. Elle consiste à trouver des bornes inférieures pour les formes $|b_1 \log a_1 + b_2 \log a_2 + ... + b_n \log a_n|$, où les b_i sont des entiers et les a_i sont des nombres algébriques positifs pour lesquels les $\log a_i$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. On considère le cas simple où les $a_i > 0$ sont des entiers, et on pose $B_j = \max\{|b_j|, 1\}$, et $B = \max_{1 \leq j \leq n} B_j$.

Dans ce contexte, la puissante conjecture de S. Lang et M. Waldshmidt (conjecture 0.0.2) fournit des bornes inférieures beaucoup plus fortes que celles données par la méthode de Baker, mais reste encore l'un des problèmes largement ouverts. Une partie de l'argument que Lang et Waldshmidt ont utilisé pour motiver leur conjecture, est que le nombre des formes linéaires distinctes $b_1 \log a_1 + b_2 \log a_2 + ... + b_n \log a_n$, où $|b_j| \leq B_j$ et $0 < a_j \leq A_j$, est $\asymp B_1 ... B_n A_1 ... A_n$, si les A_i et les B_i sont suffisamment grands.

Dans l'article qui sera présenté au chapitre 6, nous allons fournir des estimations précises pour le nombre de ces formes linéaires quand $A_i, B_i \to \infty$. Une formulation équivalente du problème revient à estimer la taille de l'ensemble suivant

$$R = R(A_1, ..., A_n, B_1, ..., B_n) := \{r \in \mathbb{Q} : r = a_1^{b_1} a_2^{b_2} ... a_n^{b_n}, 1 \leq a_i \leq A_i, |b_i| \leq B_i\},$$

quand $A_i, B_i \to \infty$.

Dans le cas simple où $A_i = A$ et $B_i = B$ pour tout i, une borne supérieure pour $|R|$ est $2^n A^n B^n / n! + o(A^n B^n)$, puisqu'en permutant les $a_i^{b_i}$ on retrouve le même nombre r.

D'abord nous allons prouver que cette borne sera atteinte asymptotiquement quand $A, B \to \infty$. Ensuite nous allons considérer le cas général, qui sera nettement plus compliqué car il faut tenir compte des régions des A_i et des B_i, comme nous allons voir par exemple dans les corollaires 0.0.3 et 0.0.4.

Soit $E \subset \{(a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n), 1 \leq a_i \leq A_i, |b_i| \leq B_i\}$. On dit que $r \in \mathbb{Q}$ possède une représentation dans E, s'il existe $(a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n) \in E$ tel que $r = a_1^{b_1} a_2^{b_2} ... a_n^{b_n}$.

Pour $r \in R$, si $\sigma \in S_n$ est une permutation qui vérifie $1 \leq a_{\sigma(i)} \leq A_i$, et $|b_{\sigma(i)}| \leq B_i$ pour tout i, on dit que σ permute r, ou σ est une permutation possible pour les $a_i^{b_i}$. Finalement on dit qu'une permutation $\sigma \in S_n$ est permise si

$$|\{r \in R : \sigma \text{ permute } r\}| \gg A_1 ... A_n B_1 ... B_n.$$

Le résultat principal de ce chapitre est le suivant

Théorème 0.0.17 (Y. Lamzouri **[Lam2]**). *Il existe un ensemble* $E \subset \{(a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n), 1 \leq a_i \leq A_i, |b_i| \leq B_i\}$ *vérifiant*

$$|E| \sim 2^n A_1 A_2 ... A_n B_1 B_2 ... B_n,$$

quand $A_i, B_i \to \infty$, *tel que tout nombre rationnel* $r \in \{a_1^{b_1} a_2^{b_2} ... a_n^{b_n} : (a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n) \in E\}$ *possède une représentation unique dans* E *modulo les permutations permises.*

On peut déduire de ce résultat que $|R|$ est asymptotique au cardinal de l'ensemble des $2n$-tuplés $\{(a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n), 1 \leq a_i \leq A_i, |b_i| \leq B_i\}$ modulo les permutations permises.

Dans le cas où $A_i = A$, $B_i = B$ pour tout i, toutes les permutations sont permises et on peut déduire le corollaire suivant

Corollaire 0.0.3 (Y. Lamzouri **[Lam2]**). *Quand* $A, B \to \infty$, *on a*

$$|\{r \in \mathbb{Q} : r = a_1^{b_1} a_2^{b_2} ... a_n^{b_n}, 1 \leq a_i \leq A, |b_i| \leq B\}| = \frac{2^n A^n B^n}{n!} + o(A^n B^n).$$

Supposons maintenant que $A_i = o(A_{i+1})$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$, ou $B_i = o(B_{i+1})$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$. Pour une permutation non-triviale $\sigma \in S_n$, il existe j pour lequel $\sigma(j) \neq j$. Ainsi si σ permute $r = a_1^{b_1} a_2^{b_2} ... a_n^{b_n}$, on doit avoir

$1 \leq a_j, a_{\sigma(j)} \leq \min(A_j, A_{\sigma(j)})$ et $-\min(B_j, B_{\sigma(j)}) \leq b_j, b_{\sigma(j)} \leq \min(B_j, B_{\sigma(j)})$. Et alors on peut déduire que

$$\begin{aligned}&|\{r \in \mathbb{Q} : r = a_1^{b_1} a_2^{b_2} ... a_n^{b_n}, 1 \leq a_i \leq A_i, |b_i| \leq B_i : \sigma \text{ permute } r\}| \\ &\leq 2^n A_1 ... A_n B_1 ... B_n \left(\frac{\min(A_j, A_{\sigma(j)}) \min(B_j, B_{\sigma(j)})}{\max(A_j, A_{\sigma(j)}) \max(B_j, B_{\sigma(j)})} \right) = o(A_1 ... A_n B_1 ... B_n),\end{aligned}$$

par notre hypothèse sur les A_i et B_i. Donc dans ce cas aucune permutation $\sigma \neq 1$ n'est permise. Ainsi on a

Corollaire 0.0.4 (Y. Lamzouri **[Lam2]**). *Si $A_i = o(A_{i+1})$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$, ou $B_i = o(B_{i+1})$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$, alors*

$$|\{r \in \mathbb{Q} : r = a_1^{b_1} a_2^{b_2} ... a_n^{b_n}, 1 \leq a_i \leq A_i, |b_i| \leq B_i\}| \sim 2^n A_1 ... A_n B_1 ... B_n,$$

quand $A_i, B_i \to \infty$.

On peut observer que les corollaires 0.0.3 et 0.0.4 correspondent aux cas extrêmes : au corollaire 0.0.3 toutes les permutations sont permises, alors qu'aucune ne l'est au corollaire 0.0.4. En effet on a

Corollaire 0.0.5 (Y. Lamzouri **[Lam2]**). *Quand $A_i, B_i \to \infty$, on a*

$$\frac{(2^n + o(1))}{n!} A_1 ... A_n B_1 ... B_n \leq |R| \leq (2^n + o(1)) A_1 ... A_n B_1 ... B_n.$$

De plus les deux bornes sont optimales.

Démonstration. Par le théorème 0.0.17 on a

$$|R| \sim \sum_{\substack{1 \leq a_1 \leq A_1 \\ |b_1| \leq B_1}} ... \sum_{\substack{1 \leq a_n \leq A_n \\ |b_n| \leq B_n}} \frac{1}{|\{\sigma \in S_n : \sigma \text{ est possible pour les } a_i^{b_i}\}|}.$$

Le résultat est impliqué par le fait que
$1 \leq |\{\sigma \in S_n : \sigma \text{ est possible pour les } a_i^{b_i}\}| \leq n!$. Finalement les deux bornes sont optimales par les corollaires 0.0.3 et 0.0.4. □

Dans le cas simple $n = 2$, il existe une unique permutation non-triviale $\sigma = (12)$. Cette permutation est possible seulement si $1 \leq a_1, a_2 \leq \min(A_1, A_2)$ et $|b_1|, |b_2| \leq \min(B_1, B_2)$. Alors par le théorème 0.0.17, ainsi qu'un simple calcul on peut déduire que

$$|\{r \in \mathbb{Q} : r = a_1^{b_1} a_2^{b_2}, 1 \leq a_1 \leq A_1, 1 \leq a_2 \leq A_2, |b_1| \leq B_1, |b_2| \leq B_2\}|$$

$$\sim 4A_1A_2B_1B_2 - 2\min(A_1, A_2)^2 \min(B_1, B_2)^2.$$

En général nous allons prouver que le cardinal de R est asymptotique à un polynôme homogène de degré $2n$ en les variables $A_1, ..., A_n, B_1, ..., B_n$. À cette fin, il est nécessaire d'ordonner les A_i et les B_i. Ainsi sans perdre de généralités on suppose que $A_1 \leq A_2 \leq ... \leq A_n$ et $B_{\pi(1)} \leq B_{\pi(2)} \leq ... \leq B_{\pi(n)}$, où $\pi \in S_n$ est une permutation. Le dernier résultat de ce chapitre est le suivant

Proposition 0.0.5 (Y. Lamzouri **[Lam2]**). *Supposons que $A_1 \leq A_2 \leq ... \leq A_n$ et $B_{\pi(1)} \leq B_{\pi(2)} \leq ... \leq B_{\pi(n)}$, où $\pi \in S_n$ est une permutation. Aussi posons $A_0 = B_{\pi(0)} = 1$. Alors $|R|$ est asymptotique à*

$$2^n \sum_{\substack{i_1=1 \\ 1 \leq j_1 \leq \pi^{-1}(1)}} \cdots \sum_{\substack{1 \leq i_n \leq n \\ 1 \leq j_n \leq \pi^{-1}(n)}} \frac{\prod_{k=1}^{n} (A_{i_k} - A_{i_k - 1})(B_{\pi(j_k)} - B_{\pi(j_k - 1)})}{|\{\sigma \in S_n : i_{\sigma(l)} \leq l, j_{\sigma(l)} \leq \pi^{-1}(l), \forall 1 \leq l \leq n\}|},$$

quand $A_i, B_i \to \infty$.

Chapitre 1

FONCTION ZÊTA DE RIEMANN ET FONCTIONS L

Ce chapitre contient une description de la fonction zêta de Riemann ainsi que ses généralisations : les fonctions L. Nous allons définir la notion de fonctions L d'une façon générale, tout en présentant plusieurs exemples d'un grand intérêt. C'est aussi l'occasion de mettre en place tous les objets nécessaires à la lecture des deux prochains chapitres. Les références utilisées sont principalement **[Da]**, **[Iw]**, **[IK]**, **[Mi]** et **[Ti]**.

1.1. Fonction ζ de Riemann

1.1.1. Propriétés analytiques

La fonction zêta de Riemann est un objet fondamental en théorie des nombres moderne. Etudiée par Euler et surtout Riemann, il s'est avéré vers la fin du 19-ème siècle qu'elle constitue la clé de la distribution des nombres premiers. Depuis lors, plusieurs résultats arithmétiques ont été démontrés par l'intermédiaire de l'étude de son comportement analytique.

Dans le demi plan complexe $\mathrm{Re}(s) > 1$, elle est définie par la série absolument convergente

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}. \tag{1.1.1}$$

En se basant sur le théorème fondamental de l'arithmétique qui affirme que tout entier naturel n peut être décomposé de façon unique comme produit de nombres premiers, on peut voir que pour $\mathrm{Re}(s) > 1$, la fonction zêta de Riemann possède *un produit Eulérien* (un produit infini sur les nombres premiers)

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \dots\right) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}. \tag{1.1.2}$$

L'intérêt majeur de considérer $\zeta(s)$ comme une fonction d'une variable complexe réside dans le fait de pouvoir la prolonger au-delà du domaine de convergence de la série. Le principe du prolongement analytique nous assure alors que ce prolongement est unique. Nous allons tout d'abord étendre la définition de $\zeta(s)$ au demi-plan $\mathrm{Re}(s) > 0$, au moyen d'une manipulation très simple. On écrit pour $\mathrm{Re}(s) > 1$

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} s \int_n^{\infty} \frac{dt}{t^{s+1}} = s \int_1^{\infty} \left(\sum_{n\le t} 1\right) \frac{dt}{t^{s+1}} = s \int_1^{\infty} \frac{[t]}{t^{s+1}} dt \\ &= s \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^s} - s \int_1^{\infty} \frac{\{t\}}{t^{s+1}} dt = \frac{s}{s-1} - s \int_1^{\infty} \frac{\{t\}}{t^{s+1}} dt. \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

Comme $\{t\} \in [0, 1[$, la dernière intégrale converge pour $\mathrm{Re}(s) > 0$. Le membre de droite définit alors un prolongement analytique pour $\zeta(s)$ au demi-plan $\mathrm{Re}(s) > 0$ privé du point $s = 1$. On peut aussi constater que ζ admet un pôle simple en $s = 1$ de résidu 1.

Dans son mémoire de 1859, Riemann démontre *l'équation fonctionnelle* suivante de ζ qui relie $\zeta(s)$ à $\zeta(1-s)$ dans la *bande critique* $0 \le \mathrm{Re}(s) \le 1$:

$$\zeta(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}} = \zeta(1-s)\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\pi^{-\frac{1-s}{2}}. \tag{1.1.4}$$

Cette équation fonctionnelle nous permet finalement de prolonger $\zeta(s)$ au demi-plan $\mathrm{Re}(s) \le 0$. On peut aussi en déduire plusieurs faits importants :

1. Comme $\Gamma(s)$ possède des pôles aux entiers $n \le 0$, on en déduit que ζ s'annule aux points $s = -2, -4, -6, \dots$; ceux ci sont appelés **les zéros triviaux** de $\zeta(s)$.
2. Puisque le produit Eulérien converge absolument dans le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > 1$, et qu'aucun de ses facteurs ne s'annule dans cette région, alors *les zéros non-triviaux* de $\zeta(s)$ se trouvent dans la bande critique. Ils sont symétriques par rapport à l'axe réel, et l'équation fonctionnelle amène également une symétrie par rapport à *la droite critique* $\mathrm{Re}(s) = 1/2$.

1.1.2. Les zéros de $\zeta(s)$

Dans la théorie des fonctions analytiques, la connaissance des zéros permet de décrire plusieurs informations sur la fonction en question. Pour le cas de $\zeta(s)$, on sait désormais que les zéros non-triviaux se trouvent dans la bande critique, cependant on ne connaît pas leur localisation exacte. Riemann, en 1859, conjecture que tous les zéros non-triviaux de $\zeta(s)$ se trouvent sur la droite critique $\mathrm{Re}(s) = 1/2$. Cette conjecture, souvent appelée *l'hypothèse de Riemann*, résiste encore de nos jours. Son importance réside dans le fait que plusieurs résultats arithmétiques, notamment sur la distribution des nombres premiers, découleront de la validité de l'hypothèse de Riemann.

Quelques résultats sur les zéros ont cependant été prouvés. En 1896, Hadamard et de la Vallée Poussin ont prouvé indépendamment que $\zeta(s) \neq 0$ sur la droite $\mathrm{Re}(s) = 1$. Plus tard en 1899, de la Vallée Poussin prouve une région sans zéros pour $\zeta(s)$, pour s très proche de la droite $\sigma = 1$. Plus précisément, il établit l'existence d'une constante $c_1 > 0$ telle que $\zeta(\sigma + it) \neq 0$ dans la région

$$\sigma \geq 1 - \frac{c_1}{\log(|t| + 2)}. \tag{1.1.5}$$

Le meilleur résultat sur la région sans zéros de $\zeta(s)$ est dû à Vinogradov et Korobov, qui ont prouvé en 1958, qu'il existe une constante $c_2 > 0$ telle que $\zeta(\sigma + it) \neq 0$ dans la région

$$\sigma \geq 1 - \frac{c_2}{\log(|t| + 2)^{2/3} \log_2(|t| + 3)^{1/3}}. \tag{1.1.6}$$

Pour plusieurs applications, il est nécessaire de quantifier le nombre de zéros de $\zeta(s)$ dans la bande critique. Soit

$$N(T) := |\{s = \sigma + it, 0 < \sigma \leq 1, 0 \leq t \leq T, \text{ tel que } \zeta(s) = 0\}|.$$

En utilisant le principe de l'argument, Von Mangoldt montra en 1905, que

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T). \tag{1.1.7}$$

Concernant le nombre de zéros de $\zeta(s)$ sur la droite critique $\sigma = 1/2$, Hardy a démontré en 1914 qu'il en existe une infinité. Plus tard, en 1942, Selberg démontre qu'une proportion positive des zéros est sur la droite critique. Plus précisément, il prouve l'existence d'une constante $c_3 > 0$ telle que pour tout nombre réel très grand T on a

$$N_0(T) := |\{s = 1/2 + it, 0 \le t \le T, \zeta(s) = 0\}| \ge c_3 N(T).$$

Ceci fût amélioré par Levinson **[Le2]**, qui démontre en 1974 qu'on peut prendre $c_3 = 1/3$. Le meilleur résultat à date est celui de Conrey **[Co]** qui a prouvé que $c_3 = 2/5$ est admissible.

Pour plusieurs résultats, il est souvent suffisant de prouver des bornes supérieures sur le nombre de zéros de $\zeta(s)$ loin de la droite critique. De tels résultats s'appellent les *théorèmes de densités des zéros* (voir **[Bo]**). Soit

$$N(\alpha, T) := |\{s = \sigma + it, \alpha \le \sigma \le 1, 0 \le t \le T, \text{ tel que } \zeta(s) = 0\}|.$$

F. Carlson prouve en 1920 que pour $1/2 \le \alpha \le 1$ on a

$$N(\alpha, T) \ll T^{4\alpha(1-\alpha)}(\log T)^{13}. \tag{1.1.8}$$

Plusieurs améliorations ont suivi. Cependant ce résultat est suffisant pour montrer que la proportion des zéros de $\zeta(s)$ est négligeable quand on s'éloigne de la droite critique, car $4\alpha(1-\alpha) < 1$ pour tout $\alpha > 1/2$.

1.1.3. L'ordre de $\zeta(s)$ dans la bande critique

Par l'équation fonctionnelle de $\zeta(s)$ (1.1.4), on sait que

$$\zeta(s) = \chi(s)\zeta(1-s) \quad \text{où} \quad \chi(s) = \frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\pi^{s-\frac{1}{2}}.$$

Par ailleurs, en utilisant la formule de Stirling, on peut prouver que dans toute bande fixée $\alpha \le \sigma \le \beta$, quand $t \to \infty$

$$|\chi(s)| \sim \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}-\sigma}. \tag{1.1.9}$$

En combinant ceci avec la convergence absolue du produit Eulérien pour $\mathrm{Re}(s) > 1$, il s'en suit que $\zeta(s)$ est une fonction d'ordre 1. Par conséquent, pour tout σ fixé, on peut définir $\mu(\sigma)$ comme l'infimum des ξ tels que

$$|\zeta(\sigma + it)| = O(|t|^{\xi}).$$

Par le principe de Phragmén-Lindelöf (valide pour la théorie générale des séries de Dirichlet d'ordre fini), on sait que $\mu(\sigma)$ est une fonction continue, décroissante, et convexe. Ce principe est souvent appelé *le principe de convexité.* Comme $\zeta(s)$ est une série absolument et uniformément convergente dans tout demi-plan $\sigma > 1+\delta$, alors $\zeta(s) = O(1)$, pour $\sigma > 1+\delta$; il s'en suit que dans ce demi-plan on a $\mu(\sigma) = 0$. Ainsi par continuité et (1.1.9), on déduit que

$$\mu(\sigma) = 0 \text{ pour } \sigma \geq 1, \text{ et } \mu(\sigma) = \frac{1}{2} - \sigma \text{ pour } \sigma \leq 0.$$

La droite joignant les points $(0, 1/2)$ et $(1, 0)$ a pour équation $y = 1/2 - x/2$, et donc par le principe de convexité on déduit que

$$\mu(\sigma) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sigma, \text{ et donc } |\zeta(\sigma + it)| \ll t^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sigma+\epsilon} \text{ pour } 0 < \sigma < 1, \text{ et tout } \epsilon > 0.$$

Ainsi sur la droite critique on a *la borne de convexité* $\mu(1/2) \leq 1/4$.

L'hypothèse de Lindelöf affirme que le graphe de $\mu(\sigma)$ consiste dans la réunion des deux demi-droites $\mu(\sigma) = 1/2 - \sigma$ pour $\sigma \leq 1/2$, et $\mu(\sigma) = 0$ pour $\sigma \geq 1/2$, ce qui est équivalent au fait que

$$|\zeta(1/2 + it)| \ll t^{\epsilon}, \text{ pour tout } \epsilon > 0. \tag{1.1.10}$$

Plusieurs améliorations de la borne de convexité ont été prouvées, et le meilleur résultat est $\mu(1/2) \leq 1/6 - \delta$, où $\delta > 0$ est une constante très petite. On note finalement que l'hypothèse de Riemann implique celle de Lindelöf.

1.2. Fonctions L

La fonction zêta de Riemann $\zeta(s)$ fait partie d'une famille très large de fonctions appelées *fonctions L*. L'étude des propriétés analytiques de ces fonctions constitue une partie centrale de la théorie des nombres moderne. En effet, ceci est dû notamment aux connections diverses entre les fonctions L et plusieurs objets arithmétiques, algébriques et géométriques d'un grand intérêt. Le premier exemple est sans doute la relation entre la fonction zêta de Riemann et la distribution des nombres premiers. Les fonctions L de Dirichlet jouent aussi un rôle très important pour décrire la distribution des nombres premiers dans les progressions arithmétiques. Il existe aussi une relation entre les fonctions L de Dirichlet de caractères quadratiques et les nombres de classes des corps quadratiques imaginaires. Des exemples plus avancés incluent la preuve du Grand Théorème de Fermat (qui repose sur la modularité des fonctions L de Hasse-Weil des courbes elliptiques), la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer (qui prédit que le rang du groupe abélien des points rationnels sur une courbe elliptique coïncide avec l'ordre d'annulation de la fonction L de la courbe elliptique au point central), ainsi que les conjectures de fonctorialité de Langlands, qui prédisent que toutes les fonctions L sont associées aux formes automorphes cuspidales, qui sont certaines représentations irréductibles de dimension infinie du groupe général linéaire $GL(n)$ sur l'anneau adélique de $\mathbb{Q}$.

1.2.1. Présentation générale

Dans cette section nous allons donner une définition assez générale d'une fonction L, sans toutefois passer par l'axiomatisation de la classe de Selberg que nous avons présenté dans l'introduction et qui possède plusieurs similarités avec notre approche. Nous allons plutôt partir du point de vue des fonctions L de formes automorphes, suivant ainsi la philosophie de Langlands.

Soit f un objet théorique (en général de nature arithmétique, mais pouvant aussi être algébrique ou géométrique) auquel on associe un ensemble de nombres complexes $(\lambda_f(n))_{n\geq 1}$ où $\lambda_f(1) = 1$, et une série de Dirichlet :

$$L(f, s) = \sum_{n\geq 1} \frac{\lambda_f(n)}{n^s}, \text{ où } s \in \mathbb{C}.$$

On dit que $L(f, s)$ est une fonction L, si elle possède les propriétés suivantes :

1. La série de Dirichlet est absolument convergente dans le demi plan $\{s \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(s) > 1\}$, et y admet un *produit Eulérien* absolument convergent de *degré* $d \geq 1$:

$$L(f, s) = \prod_p \left(1 - \frac{\alpha_1(p)}{p^s}\right)^{-1} \dots \left(1 - \frac{\alpha_d(p)}{p^s}\right)^{-1}, \tag{1.2.1}$$

   où les $\alpha_i(p)$, $1 \leq i \leq d$, sont appelés *les paramètres locaux* de f en p, et vérifient :

$$|\alpha_i(p)| < p \text{ pour tout premier } p.$$

2. $L(f,s)$ admet un prolongement méromorphe au plan complexe avec au plus un pôle en $s=1$.

3. Il existe un entier naturel $q(f)$ appelé *conducteur arithmétique* de f tel que $\alpha_i(p)\neq 0$ pour tout $1\leq i\leq d$ et tout $p\nmid q(f)$ (de tels premiers sont dits *non-ramifiés*) ; et un *facteur gamma*
$$\Gamma_f(s)=\pi^{-ds/2}\prod_{j=1}^{d}\Gamma\left(\frac{s+\kappa_j}{2}\right),$$
où les nombres κ_j sont dit *paramètres locaux de f à l'infini*, et vérifient $\mathrm{Re}(\kappa_j)\geq 0$. Cette dernière condition nous assure que $\Gamma_f(s)$ ne possède pas de zéros dans $\mathbb{C}$ et pas de pôles dans le demi plan $\mathrm{Re}(s)>0$. De là nous pouvons définir la *fonction L complétée* par
$$\Lambda(f,s)=q(f)^{\frac{s}{2}}\Gamma_f(s)L(f,s).$$
Alors $\Lambda(f,s)$ est une fonction méromorphe d'ordre 1, et vérifie *l'équation fonctionnelle* suivante :
$$\Lambda(f,s)=\epsilon(f)\Lambda(\overline{f},1-s), \tag{1.2.2}$$
où $\overline{f}$ est appelé *le dual* de f, et vérifie $\lambda_{\overline{f}}(n)=\overline{\lambda_f(n)}$ (le conjugué en $\mathbb{C}$), et f et $\overline{f}$ possèdent les mêmes conducteurs arithmétiques et facteurs gamma. De plus, $\epsilon(f)$ est un nombre complexe de valeur absolue 1 dit *signe* de l'équation fonctionnelle.

On dira que f est *auto-duale* si $f=\overline{f}$. Dans ce cas on aura $\lambda_f(n)\in\mathbb{R}$, et le signe de l'équation fonctionnelle sera aussi réel donc $\epsilon(f)=\pm 1$. Dans le cas où $\epsilon(f)=-1$ la fonction L s'annule trivialement au point central $s=1/2$ par l'équation fonctionnelle, ainsi on aura $L(f,1/2)=0$.

Une fonction L est donc un regroupement global de données locales $\{\alpha_i(p)\}_{1\leq i\leq d}$ (en p) et $\{\kappa_i\}_{1\leq i\leq d}$ (en ∞). Afin d'analyser ces données, il est souvent nécessaire de trouver des estimations uniformes pour plusieurs quantités analytiques reliées à une fonction L unique ou à une *famille* de fonctions L : $\{L(f,s), f\in\mathcal{F}\}$ où $\mathcal{F}$ est un ensemble d'objets f étant plus ou moins de même nature arithmétique. Si la fonction L est unique, seul le paramètre s est intéressant, tandis que dans le cas d'une famille, nous devons considérer le degré, le conducteur arithmétique, les paramètres locaux, et chacune de ces données peut varier en fonction de la famille. Il s'avère ainsi nécessaire de construire un objet qui permet d'englober ces données tout en mesurant la complexité des fonctions L en question. Dans ce contexte, H. Iwaniec et P. Sarnak ont introduit une nouvelle quantité attachée à toute fonction L, appelée *conducteur analytique*, notée $Q(f, s)$ et définie par

$$Q(f,s) = q(f) \prod_{i=1}^{d} (|s + \kappa_i| + 3)\,.$$

Pour plusieurs applications analytiques il est souvent utile de contrôler la grandeur des paramètres locaux $\alpha_i(p)$. En général, on s'attend à ce que $|\alpha_i(p)| = 1$ pour tout $p \nmid q(f)$ et $|\alpha_i(p)| \leq 1$ autrement. Dans ce cas on dira que la fonction L vérifie *la conjecture de Ramanujan-Petersson*. En particulier on aura que $\lambda_f(n) \ll n^\epsilon$, ce qui s'avère très utile pour plusieurs applications.

Puisque la fonction L complétée $\Lambda(f, s) = q(f)^{s/2}\Gamma_f(s)L(f, s)$ est supposée être holomorphe, sauf peut être au point $s = 1$, on déduit alors que les pôles de $\Gamma_f(s)$ doivent coïncider avec des zéros de $L(f, s)$. Ceux-ci sont dit *zéros triviaux* de $L(f, s)$. Ils se trouvent aux points $-2m - \kappa_j \neq 0$, $1 \leq j \leq d$, où $m \geq 0$ est un entier. Les autres zéros de $L(f, s)$ sont dit *zéros non-triviaux*, et se trouvent dans la bande critique $0 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 1$, par l'équation fonctionnelle (1.2.2) et puisque le produit Eulérien (1.2.1) est absolument convergent pour $\mathrm{Re}(s) > 1$. *L'Hypothèse de Riemann Généralisée (HRG)* pour $L(f, s)$ affirme que tous ses zéros non-triviaux se trouve sur *la droite critique* $\mathrm{Re}(s) = 1/2$.

Il existe plusieurs manières de construire de nouvelles fonctions L à partir de celles déjà connues. En effet, on peut voir que si $L(f, s)$ et $L(g, s)$ sont deux fonctions L de degrés d et e respectivement, alors $L(f, s)L(g, s)$ est aussi une fonction L, de degré $d + e$, de conducteur arithmétique $q(f)q(g)$, de facteur gamma $\Gamma_f(s)\Gamma_g(s)$, de signe $\epsilon(f)\epsilon(g)$ et de conducteur analytique $Q(f, s)Q(g, s)$. Par ailleurs $L(\overline{f}, s)$ est aussi une fonction L par construction, ayant les mêmes paramètres que $L(f, s)$ sauf pour le signe, où on a $\epsilon(\overline{f}) = \overline{\epsilon(f)}$. Une autre manière de produire des fonctions L lorsque $L(f, s)$ est entière est de considérer la fonction translatée $L(g, s) = L(f, s + it)$ qui est aussi une fonction L. Il est à noter que la condition que $L(f, s)$ soit entière est nécessaire puisqu'on est pas autorisé à bouger les pôles possibles de la fonction L.

Récemment, la théorie analytique des fonctions L a été influencée par deux concepts majeurs : celui de familles de fonctions L, et celui de la fonctorialité de Langlands.

La notion de familles de fonctions L est très naturelle. En effet, certains des résultats les plus fameux sur les fonctions L des caractères de Dirichlet (essentiellement la seule famille qui a été étudiée jusqu'à il y a peu) sont des énoncés "en moyenne", par exemple les théorèmes de densité pour leurs zéros, qui quelque fois sont une alternative (parfois plus) efficace à l'Hypothèse de Riemann Généralisée. Dans le contexte des formes automorphes, la notion de famille de fonctions L ne s'est vraiment révélée qu'avec les développements récents de la géométrie arithmétique, et elle apporte bien plus qu'une simple généralisation des énoncés classiques de la théorie analytique :

- Elle apparaît naturellement dans plusieurs problèmes arithmétiques liés aux formes modulaires, aux courbes elliptiques et à la conjecture de Birch-Swinnerton Dyer.
- Elle sert à résoudre des problèmes de nature analytique, qui étaient inaccessibles par les méthodes traditionnelles, et qui en corollaire fournissent des résultats non-triviaux en arithmétique.
- Elle est au coeur du modèle probabiliste des matrices aléatoires de N. Katz et P. Sarnak pour les fonctions L, et qui permet de décrire la structure fine des zéros des fonctions L et peut-être de mieux comprendre leur nature spectrale.

Par ailleurs, la fonctorialité refléte le principe que parfois il est possible de construire de nouvelles fonctions L en faisant quelques opérations simples (comme les puissances) sur leur coefficients $\lambda_f(n)$ (par exemple on pourrait regarder $\lambda_f(n^k)$ ou $\lambda_f(n)^k$). Au lieu de définir proprement la notion de fonctorialité (ce qui nécessitera un lourd bagage de définitions et notations), nous allons présenter une opération primordiale qui réside au coeur de cette notion, qui est *la convolution de Rankin-Selberg* :

Soient $L(f,s)$ et $L(g,s)$ des fonctions L de degrés d et e, avec des paramètres locaux $\alpha_i(p)$ et $\beta_j(p)$ en p, et κ_i et ν_j en l'infini respectivement. Pour $p \nmid q(f)q(g)$, soit

$$L_p(f \otimes g, s) = \prod_{i,j} \left(1 - \frac{\alpha_i(p)\beta_j(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

On dit que f et g possèdent une convolution de Rankin-Selberg s'il existe une fonction L qu'on note $L(f \otimes g, s)$ de degré de, telle que pour $\mathrm{Re}(s) > 1$ on a

$$L(f \otimes g, s) = \prod_{p \nmid q(f)q(g)} L_p(f \otimes g, s) \prod_{p \mid q(f)q(g)} H_p(p^{-s})^{-1}, \tag{1.2.3}$$

où H_p est un polynôme de degré au plus de. Le facteur gamma de $L(f \otimes g, s)$ sera alors

$$\Gamma_{f\otimes g}(s) = \pi^{-des/2} \prod_{i,j} \Gamma\left(\frac{s + \mu_{i,j}}{2}\right),$$

où $\mathrm{Re}(\mu_{i,j}) \leq \mathrm{Re}(\kappa_i + \nu_j)$ et $|\mu_{i,j}| \leq |\kappa_i| + |\nu_j|$. De plus le conducteur arithmétique de $f \otimes g$ doit diviser $q(f)^d q(g)^e$. Aussi on remarquera que $L(f \otimes g, s)$ possède un pôle en $s = 1$ si $g = \overline{f}$.

Cette notion de convolution sera nécessaire afin de définir les puissances symétriques de fonctions L que nous allons aborder à la fin de ce chapitre.

1.2.2. Les fonctions L de Dirichlet

1.2.2.1. *Les caractères de Dirichlet*

Soit m un nombre entier positif. Un caractère de Dirichlet est un homomorphisme de groupes

$$\chi : (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^{\times} \to \mathbb{C}^{\times},$$

où $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^{\times} = \{a \mod m, \text{ tel que } (a,m) = 1\}$ est le groupe multiplicatif de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Afin de considérer χ comme une fonction sur $\mathbb{Z}$, on pose $\chi(n) = 0$ si $(n,m) > 1$. Ainsi χ est une fonction sur $\mathbb{Z}$, périodique de période m (qu'on appelle *module*) de χ, et qui est en plus complètement multiplicative (pour la définition voir chapitre 2). Le caractère trivial χ_0 est défini par $\chi_0(n) = 1$ si $(n,m) = 1$ et vaut 0 sinon. Le groupe $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^{\times}$ et son dual (ensemble des caractères) possèdent $\phi(m)$ éléments. Ainsi tout caractère χ vérifie $\chi^{\phi(m)} = \chi_0$. Donc si $(n,m) = 1$, alors

$\chi(n)$ est un nombre complexe de valeur absolue 1 qui est une racine $\phi(m)$ ième de l'unité. On a aussi les relations d'orthogonalité

$$\sum_{a(\text{mod } m)} \chi(a) = \begin{cases} \phi(m) \text{ si } \chi = \chi_0, \\ 0 \text{ autrement}, \end{cases}$$

$$\sum_{\chi(\text{mod } m)} \chi(a) = \begin{cases} \phi(m) \text{ si } a \equiv 1(\text{mod } m), \\ 0 \text{ autrement}. \end{cases}$$

Si $m = m_1 m_2$ avec $(m_1, m_2) = 1$, alors $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \simeq (\mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/m_2\mathbb{Z})^\times$, ce qui implique que tout caractère $\chi(\text{mod } m)$ est un produit $\chi_1\chi_2$, où χ_1 est un caractère $(\text{mod } m_1)$ et χ_2 est un caractère $(\text{mod } m_2)$.

L'ordre d'un caractère est défini comme le plus petit entier positif g tel que $\chi^g = \chi_0$. Un caractère est dit *quadratique* si $g = 2$. Dans ce cas, il existe un discriminant fondamental D, tel que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on aura $\chi(n) = \left(\frac{D}{n}\right)$ est le symbole de kronecker mod D. On notera ce caractère par χ_D.

En plus de son module m, on associe à chaque caractère χ, un nombre naturel q appelé *conducteur* de χ. Le conducteur est le plus petit diviseur de m tel qu'on peut factoriser χ comme $\chi = \chi_0\chi^\star$, où χ_0 est le caractère trivial $(\text{mod } m)$ et $\chi^\star$ est un caractère $(\text{mod } q)$. Dans ce cas on dira que χ est induit par $\chi^\star$. Un caractère est dit *primitif* si $q = m$, autrement dit il ne peut être induit par un caractère de module plus petit.

1.2.2.2. *Propriétés analytiques des fonctions L de Dirichlet*

Les fonctions L de Dirichlet associées aux caractères sont d'une importance primordiale en théorie des nombres. Elles furent en premier introduites par Dirichlet afin de décrire la distribution des nombres premiers dans les progressions arithmétiques et plus précisément pour obtenir des informations sur le comportement asymptotique de $\pi(x, q, a) := |\{p \leq x : p \equiv a(\text{mod } q)\}|$.

La fonction L de Dirichlet associée au caractère $\chi(\text{mod } m)$ est définie pour $\text{Re}(s) > 1$, par

$$L(\chi, s) = \sum_{n \geq 1} \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

Cependant $L(\chi, s)$ n'est une fonction L que si χ est un caractère primitif. En effet cette condition est nécessaire pour pouvoir établir l'équation fonctionnelle de la fonction L.

Soit χ un caractère de Dirichlet primitif de conducteur q. Alors $L(\chi, s)$ est une fonction L de degré 1, de conducteur arithmétique q et d'objet dual $\overline{\chi}$. Son paramètre local en tout premier p est $\chi(p)$, alors que son paramètre local en ∞ est

$$\mu_\chi = \begin{cases} 0 \text{ si } \chi(-1) = 1, \\ 1 \text{ si } \chi(-1) = -1. \end{cases}$$

Le signe de l'équation fonctionnelle vaut

$$\epsilon_\chi = \begin{cases} \dfrac{\tau(\chi)}{\sqrt{q}} \text{ si } \chi(-1) = 1, \\ -i\dfrac{\tau(\chi)}{\sqrt{q}} \text{ si } \chi(-1) = -1, \end{cases}$$

où $\tau(\chi)$ est dite *la somme de Gauss* associée à χ et est définie par

$$\tau(\chi) = \sum_{n (\text{mod } q)} \chi(n) \exp\left(\frac{2\pi i n}{q}\right).$$

Si $\chi \neq \chi_0$ alors $L(\chi, s)$ est entière, alors que $L(\chi_0, s)$ possède un pôle simple en $s = 1$.

Une fonction L de Dirichlet est auto-duale si et seulement si χ est un caractère quadratique ou $\chi = \chi_0$. Le conducteur analytique de $L(\chi, s)$ est $Q(\chi, s) = q(|s + \mu_\chi| + 3)$. Finalement toutes les fonctions L de Dirichlet vérifient trivialement la conjecture de Ramanujan-Petersson.

Soit $d > 0$ un discriminant fondamental. Un intérêt profond des fonctions L de Dirichlet de caractères quadratiques $L(\chi_d, s)$ est l'étude du cardinal du groupe des classes d'idéaux du corps quadratique imaginaire $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$. On note $h(d)$ ce cardinal et on l'appelle *le nombre de classes* de K. Dirichlet a établi la formule du nombre de classes :

$$h(d) = \frac{w\sqrt{d}}{2\pi} L(\chi_d, 1), \tag{1.2.4}$$

où w est le nombre d'unités dans l'anneau des entiers de K. L'analyse complexe permet de déduire des minorations de $|L(\chi_d, 1)|$ à partir des régions sans zéros de cette fonction L. Par exemple, l'Hypothèse de Riemann Généralisée pour ces fonctions L implique que $h(d)$ varie très peu autour de $\sqrt{q}$. Par les travaux de Hadamard et de la Vallée-Poussin, on peut montrer l'existence d'une région sans zéro pour $L(\chi, s)$, du même type que (1.1.5) pour $\zeta(s)$:

$$\mathrm{Re}(s) > 1 - \frac{c}{\log(q(2+\mathrm{Im}(s)))}, \text{ où } c \text{ est une constante positive,}$$

pour tout caractère primitif χ de conducteur q sauf au plus pour un éventuel caractère de Dirichlet primitif de conducteur q qui serait réel (donc quadratique) et dont la fonction L de Dirichlet admettrait un zéro réel simple dans $]1 - c/\log q, 1]$ appelé *zéro de Siegel*. Un problème qui reste encore ouvert de nos jours est de prouver l'inexistence de ce zéro. Siegel a démontré en 1935 que pour tout $\epsilon > 0$, il existe une constante ineffective $c_1(\epsilon) > 0$ telle que si χ est un caractère primitif réel de conducteur q, alors :

$$L(\chi, 1) > c_1(\epsilon) q^{-\epsilon}.$$

Le fait que la constante soit ineffective provient du fait que la preuve repose sur l'existence ou non du zéro de Siegel. Ceci implique, par (1.2.4), que pour tout $\epsilon > 0$, il existe une constante ineffective $c_2(\epsilon) > 0$ telle que

$$h(d) \geq c_2(\epsilon) d^{1/2-\epsilon}.$$

Ainsi ce qui précède constitue un autre exemple du lien profond qui existe entre les propriétés analytiques des fonctions L et certains résultats arithmétiques.

Finalement nous devons mentionner qu'il existe deux familles intéressantes de fonctions L de Dirichlet :

- La famille des fonctions L de Dirichlet associées aux caractères primitifs modulo un grand nombre q :

$$\{L(\chi, s) : \chi \text{ primitif } (\mathrm{mod}\ q)\}.$$

  Pour q premier et $s = \sigma \in [1/2, 1]$ fixé, cette famille possède souvent les mêmes propriétés (asymptotiques pour les moments, distribution des zéros, etc...) que la famille $\{\zeta(\sigma + it) : t \in [T, 2T]\}$. En effet, dans la plupart des cas, il suffit de remplacer T par q dans les résultats obtenus pour $\zeta(s)$ pour avoir ceux de $L(\chi, s)$.

– La famille des fonctions L de Dirichlet associées aux caractères quadratiques χ_d où d varie parmi les discriminants fondamentaux vérifiant $|d| \leq x$, et $x > 0$ est un nombre réel très grand :

$$\{L(\chi_d, s) : d \text{ est un discriminant fondamental tel que } |d| \leq x\}.$$

1.2.3. Fonctions L de formes automorphes cuspidales

1.2.3.1. *Le groupe modulaire et les sous-groupes de congruences de Hecke*

Soit $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ *le demi plan de Poincaré*, que l'on munit de la distance hyperbolique donnée par :

$$d(z, w) := \frac{|z - w|^2}{4\mathrm{Im}(z)\mathrm{Im}(w)}.$$

Le demi plan $\mathbb{H}$ munit de cette métrique est le modèle de Poincaré du plan hyperbolique (courbure -1). La mesure associée, dite de Poincaré est définie par

$$d\mu = \frac{dxdy}{y^2}.$$

Le groupe modulaire $\Gamma_0(1) := SL_2(\mathbb{Z})$ est le premier sous-groupe de $SL_2(\mathbb{R})$ qui soit intéressant en arithmétique. Ce groupe agit sur $\mathbb{H}$ par *homographies* :

$$\gamma.z = \frac{az + b}{cz + d}, \text{ pour } z \in \mathbb{H} \text{ et } \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(1).$$

Le quotient du demi-plan de Poincaré par le groupe modulaire sous cette action donne lieu à une surface de Riemann notée $\Gamma_0(1)\backslash\mathbb{H}$, et appelée *courbe modulaire*, car elle paramètre les classes d'isomorphismes de courbes elliptiques complexes.

Soit $N \in \mathbb{N}$. On définit le sous-groupe de congruence de $\Gamma_0(1)$ de niveau N par :

$$\Gamma_0(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(1), N|c \right\}.$$

Il s'agit d'un sous-groupe normal de $\Gamma_0(1)$ d'indice fini multiplicatif donné par :

$$\nu(N) := N \prod_{p|N} \left(1 + \frac{1}{p}\right) = [\Gamma_0(1) : \Gamma_0(N)].$$

1.2.3.2. *Les formes modulaires cuspidales*

Une forme modulaire cuspidale de poids k par rapport au groupe modulaire $\Gamma_0(1)$, est une fonction holomorphe f sur le demi plan $\mathbb{H}$, qui vérifie la condition d'automorphie suivante

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z), \tag{1.2.5}$$

pour tout $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(1)$, et telle que $\lim_{y\to\infty} f(iy) = 0$ (elle s'annule en la pointe à l'infinie). Les formes modulaires cuspidales de poids k existent seulement pour $k = 12$ et k pair vérifiant $k \geq 16$. L'ensemble de toutes les formes cuspidales de poids k par rapport au groupe modulaire $\Gamma_0(1)$, noté S_k, est un espace vectoriel complexe de dimension finie donnée par

$$\dim_{\mathbb{C}} S_k = \begin{cases} \left[\frac{k}{12}\right] & \text{si } k \not\equiv 2 \bmod 12, \\ \left[\frac{k}{12}\right] - 1 & \text{si, } k = 2 \bmod 12. \end{cases}$$

Le produit scalaire de Petersson est défini sur l'espace S_k par

$$\langle f, g\rangle = \iint_D f\overline{g}y^k d\mu,$$

où l'intégration est prise sur le *domaine fondamental de* $\Gamma_0(1)$ défini par

$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1/2 < x \leq 1/2, y \geq \sqrt{1-x^2}\}.$$

Par (1.2.5), une forme modulaire cuspidale f vérifie la condition de périodicité $f(z+1) = f(z)$. Ainsi elle admet un développement de Fourier

$$f(z) = \sum_{n\geq 1} a_f(n) \exp(2\pi i n z).$$

En effet $a_f(0) = 0$ car f s'annule en la pointe infinie.

L'espace vectoriel S_k munit du produit scalaire de Petersson est un espace de Hilbert, et possède une base orthogonale spéciale H_k constituée de *formes cuspidales de Hecke.* Ces formes sont les vecteurs propres de tous les opérateurs de Hecke $\{T(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ et dont les valeurs propres sont exactement les coefficients de Fourier $\{a_f(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Ces opérateurs sont définis par :

$$T(n).f(z) = \frac{1}{n}\sum_{ad=n} a^k \sum_{0\leq b<d} f\left(\frac{az+b}{d}\right).$$

Ces opérateurs procurent une structure multiplicative sur les coefficients de Fourier $a_f(n)$. En effet, si f est une forme cuspidale de Hecke alors

$$a_f(n)a_f(m) = \sum_{d|(m,n)} d^{k-1}a_f(mn/d^2). \tag{1.2.6}$$

Ceci implique en particulier que $a_f(1) = 1$ et que si $(m,n) = 1$ alors $a_f(mn) = a_f(m)a_f(n)$. Ainsi les coefficients de Fourier d'une forme cuspidale de Hecke sont multiplicatifs.

Nous allons voir plus tard que l'information arithmétique de f sera contenue dans ces coefficients de Fourier $a_f(n)$.

1.2.3.3. *La formule de Petersson*

La formule de Petersson procure aux formes modulaires cuspidales des relations *de quasi-orthogonalité* sur leurs coefficients de Fourier, analogues à ceux des caractères de Dirichlet, et qui sont souvent utiles pour évaluer des quantités analytiques en moyenne (par exemple les moments des fonctions L associées).

Soit $\mathcal{F}$ une base orthogonale de S_k pour le produit scalaire de Petersson. La formule de Petersson établit que

$$\frac{\Gamma(k-1)}{(4\pi\sqrt{mn})^{k-1}}\sum_{f\in\mathcal{F}}\frac{a_f(m)\overline{a_f(n)}}{\langle f,f\rangle} = \delta_{m,n} + 2\pi i^{-k}\sum_{c=1}^{\infty}\frac{S(m,n,c)}{c}J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{c}\right),$$

où $\delta_{m,n} = 1$ si $m = n$ et vaut 0 sinon ; J_{k-1} est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre $k-1$; et $S(m,n,c)$ est la somme de Kloosterman

$$S(m,n,c) = \sum_{(x,c)=1} \exp\left(2\pi i\left(\frac{mx+n\overline{x}}{c}\right)\right),$$

où cette somme est prise sur un ensemble réduit de résidus modulo c, et $\overline{x}$ est l'inverse multiplicatif de x modulo c.

La borne de Weil sur les sommes de Kloosterman est

$$|S(m,n,c)| \leq (m,n,c)^{1/2}d(c)\sqrt{c},$$

où $d(c)$ est la fonction qui compte le nombre de divieurs de c. Puisque $d(c) = O(c^\epsilon)$ pour tout $\epsilon > 0$, la borne de Weil assure que la somme qui apparaît au côté droit de la formule de Petersson constitue un terme d'erreur lorsque k est très grand. En effet cette somme est

$$\ll \frac{1}{\sqrt{k}} d_3((m,n))(mn)^{1/4} \log\left(1 + \frac{(mn)^{1/4}}{\sqrt{k}}\right).$$

1.2.3.4. *Les formes modulaires cuspidales de grand niveau*

Soit $N \in \mathbb{N}$ un entier positif. Si f est une fonction holomorphe sur $\mathbb{H}$ qui vérifie (1.2.5) pour toutes les matrices $\gamma \in \Gamma_0(N)$, et telle que

$$\lim_{y \to 0} f\left(\frac{a}{N} + iy\right) = 0, \text{ et } \lim_{y \to \infty} f(iy) = 0,$$

pour tout $a \in \mathbb{Z}$, est dite une forme cuspidale de poids k et de *niveau* N. Pour k pair, soit $S_k(N)$ l'espace de ces formes muni du produit scalaire de Petersson de niveau N (si k est impair alors $S_k(N)$ est vide par (1.2.5)) :

$$\langle f, g \rangle_N = \iint_{D_0(N)} f\bar{g} y^k d\mu,$$

où $D_0(N)$ est un domaine fondamental pour $\Gamma_0(N)$. Cet espace est aussi un espace de Hilbert de dimension finie, et possède une base orthogonale composée de formes cuspidales de Hecke (qui sont des vecteurs propres de tous les opérateurs de Hecke).

Analoguement aux caractères de Dirichlet, il existe des formes modulaires cuspidales dites *primitives*. Pour définir ces formes, il faut passer par la théorie des *formes nouvelles* et *formes anciennes*, développée par Atkin et Lehner :

Pour tout $d \in \mathbb{N}$, la forme $g_d(z) := f(dz)$ est aussi une forme modulaire cuspidale. Soit $S_k^a(N)$ l'espace engendré par ces formes g_d pour $f \in S_k(q)$ et tel que $q < N$ et $dq|N$. Cet espace est dit celui des formes anciennes. Par la théorie d'Atkin-Lehner il est possible de décomposer l'espace $S_k(N)$ en l'union de l'espace $S_k^a(N)$ et de son complémentaire orthogonal (par rapport au produit scalaire de Petersson) $S_k^n(N)$: l'espace des formes nouvelles. On aura ainsi

$$S_k(N) = S_k^a(N) \oplus S_k^n(N).$$

Finalement une forme $f \in S_k(N)$ est dite *primitive* si elle est une forme de Hecke qui est aussi nouvelle.

1.2.3.5. *Les fonctions L des formes modulaires cuspidales*

Soit f une forme modulaire cuspidale primitive de poids k et de niveau N. Elle admet un développement de Fourier

$$f(z) = \sum_{n \geq 1} a_f(n) \exp(2\pi i n z).$$

Afin de définir la fonction L associée, on normalise les coefficients de Fourier, en définissant

$$\lambda_f(n) := \frac{a_f(n)}{n^{(k-1)/2}}.$$

La fonction L normalisée associée à f est définie pour $\mathrm{Re}(s) > 1$ par

$$\begin{aligned} L(f,s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_f(n)}{n^s} &= \prod_{p \nmid N} \left(1 - \frac{\lambda_f(p)}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}}\right)^{-1} \prod_{p \mid N} \left(1 - \frac{\lambda_f(p)}{p^s}\right)^{-1} \\ &= \prod_{p} \left(1 - \frac{\alpha_f(p)}{p^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\beta_f(p)}{p^s}\right)^{-1}, \end{aligned} \tag{1.2.7}$$

où $\alpha_f(p)$ et $\beta_f(p)$ sont les racines de l'équation

$$x^2 - \lambda_f(p)x + \epsilon(p) = 0,$$

où $\epsilon(p) = 1$ si $p \nmid N$ et vaut 0 sinon.

La fonction $L(f,s)$ est une fonction L de degré 2, de conducteur arithmétique N, et de facteur gamma

$$\gamma_{f,s} = \pi^{-s}\Gamma\left(\frac{s + (k-1)/2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s + (k+1)/2}{2}\right).$$

Quand $N = 1$, le signe de l'équation fonctionnelle est $(-1)^{k/2}$, alors que si $N > 1$ il est donné par $\eta_f(N)(-1)^{k/2}$, où $\eta_f(N) = \pm 1$, et vérifie $W.f = \eta \overline{f}$, où W est *l'involution de Fricke* donnée par

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -N & 1 \end{pmatrix}.$$

Suite aux travaux de P. Deligne, $L(f,s)$ vérifie la conjecture de Ramanujan-Petersson. Plus précisément le théorème de Deligne affirme que pour $p \nmid N$, on a que

$$\alpha_f(p) = e^{i\theta_f(p)}, \beta(p) = e^{-i\theta_f(p)} \text{ et } \lambda_f(p) = 2\cos\theta_f(p),$$

pour un certain nombre réel $\theta_f(p) \in [0,\pi)$. *La conjecture de Sato-Tate* affirme que l'ensemble $\{\theta_f(p) : p \text{ premier}\}$ est uniformément distribué dans $[0,\pi)$ par rapport à *la mesure de Sato-Tate* : $\frac{2}{\pi}\sin^2\theta d\theta$.

1.2.4. Les fonctions L de courbes elliptiques

Soit E une courbe elliptique définie sur $\mathbb{Q}$ et possédant l'équation de Weierstrass suivante

$$y^2 = x^3 + Ax + B, \text{ où } A, B \in \mathbb{Z},$$

et soit $\Delta = -16(4A^3 + 27B^2)$ son discriminant, et N son conducteur. Pour tout premier p soit E_p la réduction de E modulo p, et posons

$$a_p := p + 1 - |E_p(\mathbb{Z}_p)|, \text{ et } \lambda_E(p) = \frac{a_p}{p^{1/2}}.$$

La fonction L normalisée de E est définie pour $\mathrm{Re}(s) > 1$ par

$$L(E,s) = \prod_{p\nmid\Delta}\left(1 - \frac{\lambda_E(p)}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}}\right)^{-1} \prod_{p|\Delta}\left(1 - \frac{\lambda_E(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

Le fait que $L(E,s)$ soit une fonction L résulte des travaux de Wiles et Taylor qui ont prouvé *la conjecture de modularité de Taniyama-Shimura-Weil.* Cette conjecture affirme qu'il existe une forme modulaire primitive cuspidale f de poids 2 et de niveau N tel que

$$L(E,s) = L(f,s).$$

Ainsi $L(E,s)$ est une fonction L de degré 2.

1.2.5. Les fonctions L de puissances symétriques de formes modulaires

Soit N un entier sans facteurs carrés. Soit f une forme modulaire cuspidale et primitive de poids k et de niveau N. On sait que f admet un développement de Fourier en l'infini de la forme suivante :

$$f(z) = \sum_{n \geq 1} \lambda_f(n) n^{\frac{k-1}{2}} \exp(2\pi i n z).$$

Par (1.2.7), la fonction L associée à f possède la forme

$$L(f, s) = \prod_p \left(1 - \frac{\alpha_f(p)}{p^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\beta_f(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

Pour $m \in \mathbb{N}$, la fonction L de m ième puissance symétrique associée à f est définie par le produit Eulérien de degré $m + 1$ donné par

$$L(\mathrm{Sym}^m f, s) = \prod_p \prod_{j=0}^{m} \left(1 - \frac{\alpha_f^j(p) \beta_f^{m-j}(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

Ce produit est absolument convergent pour $\mathrm{Re}(s) \gg 1$.

Suite aux travaux de Shimura, Gelbart-Jacquet, Kim et Kim-Shahidi, on sait que $L(\mathrm{Sym}^m f, s)$ est une fonction L entière de degrée $m + 1$, pour $m \leq 4$. De plus, par la théorie de Rankin-Selberg, Kim et Shahidi ont démontré l'équation fonctionnelle et le prolongement méromorphe de $L(\mathrm{Sym}^m f, s)$ au plan complexe pour $m = 5, ..., 9$, et l'holomorphie et la non-annulation de $L(\mathrm{Sym}^m f, s)$ pour $m = 5, ..., 8$. Une conjecture célèbre affirme que $L(\mathrm{Sym}^m f, s)$ coïncide avec la fonction L d'une forme automorphe cuspidale auto-duale sur $GL(m + 1)/\mathbb{Q}$, et donc elle serait une fonction L entière de degré $m + 1$.

Chapitre 2

GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS MULTIPLICATIVES

2.1. Définitions et propriétés

L'étude des fonctions multiplicatives est une partie importante de la théorie analytique des nombres. Leur intérêt vient du fait qu'elles imitent le comportement multiplicatif des entiers naturels, et peuvent donc encoder plusieurs informations sur la distribution de diverses classes d'entiers (nombres premiers, somme de deux carrés, nombres friables,...).

Une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, est dite multiplicative si pour tout $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $(m, n) = 1$, on a

$$f(mn) = f(m)f(n), \text{ et } f(1) = 1.$$

Elle est dite complètement multiplicative si elle vérifie cette condition pour tous les entiers naturels m et n. On notera toujours $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$, comme étant la décomposition de n en facteurs premiers. Si f est une fonction multiplicative, on a alors

$$f(n) = f(p_1^{a_1}) f(p_2^{a_2}) \cdots f(p_k^{a_k}),$$

de plus si elle est complètement multiplicative on aura

$$f(n) = f(p_1)^{a_1} f(p_2)^{a_2} \dots f(p_k)^{a_k}.$$

Plusieurs exemples sont d'un intérêt particulier. Nous allons en citer quelques uns :

1. La fonction $d(n)$ qui est le nombre de diviseurs de n

$$d(n) = \sum_{d|n} 1 = \prod_{i=1}^{k} (a_i + 1).$$

2. La fonction de diviseurs $d_k(n) = \sum_{a_1 \ldots a_k = n} 1$, qui représente le nombre de façons d'écrire n comme produit de k nombres entiers positifs.

3. La fonction $\phi(n)$ qui est l'ordre du groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times}$, ou le nombre d'entiers plus petits que n et copremiers avec lui

$$\phi(n) = \sum_{1 \leq h \leq n, (h,n)=1} 1 = \prod_{i=1}^{k} p_i^{a_i - 1}(p_i - 1).$$

4. La fonction de Möbius qui est définie par $\mu(1) = 1$ et

$$\mu(n) = (-1)^k \text{ si } n = p_1 p_2 \ldots p_k \text{ est sans facteurs carrés, et vaut 0 sinon.}$$

5. La fonction de Von Mangoldt définie par

$$\Lambda(n) = \log p, \text{ si } n = p^{\nu} \text{ pour un certain } \nu \geq 1, \text{ et 0 sinon.}$$

Afin d'étudier les fonctions multiplicatives, un outil indispensable est la théorie des séries de Dirichlet. Si f est une fonction multiplicative, on définit sa série formelle de Dirichlet (en général ces séries convergent dans un demi-plan complexe $\mathrm{Re}(s) > \alpha$) par

$$D(f, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}, \text{ où } s \in \mathbb{C}. \tag{2.1.1}$$

La somme et le produit de deux séries de Dirichlet sont définis de manière naturelle comme suit

$$D(f, s) + D(g, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n) + g(n)}{n^s}$$

$$\text{et } D(f, s) D(g, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s},$$

où $h(n) = \sum_{d|n} f(d) g(n/d) = (f * g)(n)$ est la *convolution* des deux fonctions multiplicatives f et g. On peut prouver que h est aussi une fonction multiplicative. Avec les opérations $+$ et $*$, l'ensemble des fonctions multiplicatives est un anneau commutatif unitaire, et son unité est la fonction $\delta(n) = 1$ si $n = 1$, et vaut 0 sinon.

Soit $\mathbf{1}$ la fonction multiplicative définie par $\mathbf{1}(n) = 1$ pour tout n, on aura alors que $\mathbf{1}*\mu = \delta$. En utilisant cette dernière relation on pourra démontrer le résultat suivant dit *Inversion de Mobius*, et qui affirme que si f et g sont deux fonctions multiplicatives telles que $f(n) = \sum_{d|n} g(d)$, alors

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d)\mu(n/d).$$

En analogie à la fonction zêta de Riemann , la série de Dirichlet d'une fonction multiplicative f admet aussi un produit Eulérien dans son domaine de convergence absolue :

$$D(f,s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{f(p^\nu)}{p^{\nu s}}\right). \tag{2.1.2}$$

De plus si f est complètement multiplicative, on aura

$$D(f,s) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{f(p)}{p^s}\right)^{-1}. \tag{2.1.3}$$

Pour une fonction multiplicative f, on définit sa fonction sommatoire $F(x)$ par

$$F(x) = \sum_{n\le x} f(n) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^+.$$

Plusieurs questions arithmétiques d'une grande importance peuvent être formulées à l'aide de fonctions sommatoires des fonctions multiplicatives. L'énoncé du théorème des nombres premiers est équivalent au deux formes suivantes

$$\psi(x) := \sum_{n\le x} \Lambda(n) \sim x \Leftrightarrow M(x) := \sum_{n\le x} \mu(n) = o(x). \tag{2.1.4}$$

Aussi l'hypothèse de Riemann est équivalente à ce que pour tout $\epsilon > 0$ on a

$$\psi(x) = x + O(x^{1/2+\epsilon}), \text{ ou encore } M(x) = o(x^{1/2+\epsilon}). \tag{2.1.5}$$

Afin d'estimer la taille de la fonction sommatoire de f, une méthode classique consiste à utiliser les propriétés analytiques de la série de Dirichlet de f, au moyen de la formule suivante appelée *formule de Perron*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^s \frac{ds}{s} = \begin{cases} 1 & (x > 1) \\ \frac{1}{2} & (x = 1) \\ 0 & (0 < x < 1), \end{cases}$$

pour tout $c > 0$. En effet, si la série de Dirichlet $D(f, s)$ converge absolument dans le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > \sigma$, alors pour tout $x \notin \mathbb{N}$, et $c > \max(\sigma, 0)$ on aura

$$F(x) = \sum_{n\le x} f(n) = \sum_{n\ge 1} f(n) \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} D(f,s) x^s \frac{ds}{s}.$$

Ensuite on déplace le contour d'intégration à gauche, de façon à rencontrer des pôles de $D(f, s)x^s/s$. Le calcul des résidus donnera le terme principal et l'intégrale sur le nouveau contour sera souvent un terme d'erreur. Ceci fût la méthode utilisée par Hadamard et de La Vallée Poussin dans la preuve du théorème des nombres premiers en 1896.

2.2. Nombres friables et fonction ρ de Dickman

Dans plusieurs applications arithmétiques, il est souvent utile de borner les facteurs premiers des entiers en question. Comme exemple, une méthode classique en théorie analytique des nombres consiste à étudier les produits Eulérien tronqués

$$D_y(f, s) := \prod_{p\le y}\left(1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{f(p^\nu)}{p^{\nu s}}\right),$$

pour y assez grand, afin de déduire certaines propriétés analytiques de la série de Dirichlet $D(f, s)$. Ceci est souvent utile dans le cas des fonctions L. On comprend ainsi l'intérêt de connaître les propriétés arithmétiques des entiers sans facteurs premiers très grands. Ces entiers sont souvent appelés *nombres friables* (une excellente référence en ce sujet est [Gr]). Une définition plus précise est la suivante : Soit $x \ge y \ge 2$. Un entier naturel n est dit y-friable si pour tout nombre premier $p|n$ on a que $p \le y$. On note aussi

$$S(x, y) := \{n \le x : n \text{ est } y - \text{friable}\} \text{ et } \Psi(x, y) := |S(x, y)|.$$

En 1930, Dickman fût le premier à prouver une estimation asymptotique pour $\Psi(x,y)$ quand x est une puissance de y. Plus précisément si $x = y^u$, $u \geq 1$ fixé, alors

$$\Psi(x,y) \sim x\rho(u) \text{ quand } x \to \infty, \tag{2.2.1}$$

où $\rho(u)$ est une fonction qui dépend de u, souvent appelée *fonction de Dickman-de Bruijn* . Ce résultat démontre alors qu'une proportion positive des entiers sont y-friables pour u fixé.

La fonction ρ est continue, elle vaut 1 sur l'intervalle $[0,1]$, elle est dérivable sur $]1,+\infty[$, et vérifie l'équation différentielle aux différences :

$$u\rho'(u) = -\rho(u-1), \text{ ou de façon équivalente } u\rho(u) = \int_{u-1}^{u} \rho(t)dt. \tag{2.2.2}$$

Cette dernière équation peut être prouvée à partir de *l'équation fonctionnelle de Buchstab* (1931)

$$\Psi(x,y) = 1 + \sum_{p\leq y} \Psi\left(\frac{x}{p}, p\right). \tag{2.2.3}$$

La preuve de l'équation (2.2.3) est immédiate : si $n > 1$ est compté dans $\Psi(x,y)$, alors on peut écrire $n = mp$ où p est le plus grand facteur premier de n. Cette dernière condition implique que $q|m \implies q \leq p$. D'où

$$\Psi(x,y) = 1 + \sum_{p\leq y} \sum_{\substack{m\leq x/p \\ q|m \implies q\leq p}} 1 = 1 + \sum_{p\leq y} \Psi\left(\frac{x}{p}, p\right).$$

On peut voir par (2.2.2) que ρ est décroissante, et par induction on démontre que $\rho(u) \leq 1/\Gamma(u+1)$. Ceci est clair pour $0 \leq u \leq 1$, et pour $u > 1$ il suffit de voir que

$$\rho(u) = \frac{1}{u}\int_{u-1}^{u} \rho(t)dt \leq \frac{\rho(u-1)}{u} \leq \frac{1}{u\Gamma(u)} = \frac{1}{\Gamma(u+1)}.$$

Cette inégalité montre que $\rho(u)$ décroît rapidement vers 0 lorsque $u \to \infty$. En effet, en utilisant l'équation intégrale (2.2.2) et certaines manipulations analytiques on pourrait prouver que

$$\rho(u) = \left(\frac{e + o(1)}{u \log u}\right)^u \text{ quand } u \to \infty. \tag{2.2.4}$$

On peut aussi démontrer le fait remarquable, à savoir

$$\int_0^\infty \rho(t)dt = e^\gamma. \tag{2.2.5}$$

Dans plusieurs applications, il est souvent nécessaire d'avoir $u \to \infty$ quand $x \to \infty$. En 1951, de Bruijn améliore le résultat de Dickman en montrant que la relation asymptotique (2.2.1) est valide uniformément pour

$$1 \leq u \leq (\log y)^{3/5-\epsilon}; \text{ ce qui est équivalent à } y > \exp((\log x)^{5/8+\epsilon}).$$

Le meilleur résultat reste celui de Hildebrand (1986), qui a prouvé que (2.2.1) est valide dans la région

$$1 \leq u \leq \exp((\log y)^{3/5-\epsilon}); \text{ ce qui est équivalent à } y > \exp((\log\log x)^{5/3+\epsilon}). \tag{2.2.6}$$

Il a aussi démontré que l'hypothèse de Riemann est équivalente à ce que (2.2.1) serait valide dans la région plus vaste

$$1 \leq u \leq y^{1/2-\epsilon}; \text{ ce qui est équivalent à } y \geq (\log x)^{2+\epsilon}.$$

Je finirai cette section en présentant un outil à la fois simple et puissant souvent appelé *la méthode de Rankin* :
Pour tout $\alpha > 0$ fixé, on sait que $(x/n)^\alpha \geq 1$ si $n \leq x$, et > 0 si $n > x$, d'où

$$\Psi(x, y) \leq \sum_{\substack{n \leq x \\ p|n \implies p \leq y}} \left(\frac{x}{n}\right)^\alpha \leq \sum_{\substack{n \geq 1 \\ p|n \implies p \leq y}} \left(\frac{x}{n}\right)^\alpha = x^\alpha \prod_{p \leq y} \left(1 - \frac{1}{p^\alpha}\right)^{-1}. \tag{2.2.7}$$

On obtient une majoration explicite en choisissant α de façon optimale. En effet en dérivant la partie droite de (2.2.7) par rapport à α, on voit bien que notre choix optimal doit vérifier

$$\log x = \sum_{p \leq y} \frac{\log p}{p^\alpha - 1}.$$

En résolvant cette équation en α en fonction de x et y (en utilisant le théorème des nombres premiers) on pourrait obtenir une borne supérieure pour $\Psi(x, y)$ du même de ordre que l'asymptotique (2.2.1) dans une région très grande du paramètre u en fonction de x et y.

2.3. Distribution des valeurs moyennes de fonctions multiplicatives

Soit f une fonction multiplicative telle que $|f(n)| \leq 1$ pour tout n. On définit le produit Eulérien tronqué suivant

$$\Theta(f,x) = \prod_{p\leq x}\left(1+\frac{f(p)}{p}+\frac{f(p^2)}{p^2}+\dots\right)\left(1-\frac{1}{p}\right). \tag{2.3.1}$$

En 1944, Wintner **[Win]** a démontré, en utilisant une méthode de convolution simple, que si $\sum_{p\in\mathcal{P}}|1-f(p)|/p$ converge, alors f possède une valeur moyenne qui vaut

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sum_{n\leq x}f(n) = \Theta(f,\infty). \tag{2.3.2}$$

Plus tard, en 1967, Wirsing **[Wir]** réussit à démontrer que si $|f| \leq 1$ est réelle et multiplicative, elle a toujours une valeur moyenne. Sa preuve consiste à combler le cas manquant où la série $\sum_{p\in\mathcal{P}}(1-f(p))/p$ diverge. Dans ce cas, f a pour valeur moyenne

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sum_{n\leq x}f(n) = 0.$$

Le cas d'une fonction multiplicative à valeurs complexes est plus délicat. Par exemple la fonction $f(n) = n^{i\alpha}$ (α est un réel non-nul) ne possède pas de valeur moyenne, car on peut voir que $\sum_{n\leq x}f(n) \sim x^{1+i\alpha}/(1+i\alpha)$. De plus pour cet exemple la série $\sum_{p\in\mathcal{P}}(1-\mathrm{Re}(p^{i\alpha}))/p$ diverge, alors que $x^{-1}\sum_{n\leq x}n^{i\alpha}$ ne tend pas vers 0 (elle oscille quand $x\to\infty$).

Halász **[Ha]**, complète l'étude dans le cas d'une fonction f à valeurs complexes. Plus précisément, il démontre le résultat suivant

Théorème 2.3.1 (Halász **[Ha]**). *Soit f une fonction multiplicative à valeurs dans le disque unité. S'il existe un réel τ tel que la série*

$$\sum_{p\in\mathcal{P}}\frac{1-Re(f(p)p^{-i\tau})}{p} \tag{2.3.3}$$

converge, alors on a

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leq x}f(n) = \frac{x^{i\tau}}{1+i\tau}\prod_{p\leq x}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{f(p)}{p^{1+i\tau}}+\frac{f(p^2)}{p^{2(1+i\tau)}}+\dots\right)+o(1),$$

quand $x \to \infty$. Dans le cas contraire, on aura

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{n\leq x} f(n) = 0.$$

Soit $N \in \mathbb{N}$. Il est souvent intéressant de considérer l'ensemble des valeurs moyennes quantitatives

$$\frac{1}{N} \sum_{n\leq N} f(n),$$

où f varie dans la classe des fonctions multiplicatives ayant leurs valeurs dans $[-1, 1]$. Cet ensemble sera noté $\mathcal{F}$. Ce problème est plus difficile à traiter car f peut cette fois dépendre de N. L'exemple le plus typique est la fonction caractéristique des nombres y-friables qui est complètement multiplicative, et définie par $g(p) = 1$ si $p \leq y$, et vaut 0 sinon. Si $x = y^u$ alors

$$\frac{1}{x} \sum_{n\leq x} g(n) = \frac{1}{x}\Psi(x, y) \to \rho(u),$$

quand $x \to \infty$ par les résultats de la section précédente.

Pour $N \in \mathbb{N}$, on définit les ensembles suivants

$$\Omega_N = \left\{ \frac{1}{N} \sum_{n\leq N} f(n) : f \in \mathcal{F} \right\} \text{ et } \Omega = \lim_{N\to\infty} \Omega_N.$$

Ceci veut dire que $z \in \Omega$ si et seulement s'il existe une suite de nombres $z_N \in \Omega_N$ telle que $\lim_{N\to\infty} z_N = z$. Ω est appelé *le spectre* de $\mathcal{F}$. Une question intéressante est alors de caractériser cet ensemble de valeurs réelles Ω. En 2001, Granville et Soundararajan **[GS1]** ont résolu ce problème en prouvant que cet ensemble est décrit en terme de produits Eulériens (2.3.1), et des solutions σ de l'équation intégrale retardée

$$u\sigma(u) = \int_0^u \chi(t)\sigma(u-t)dt \text{ pour } u > 1, \tag{2.3.4}$$

sous la condition initiale $\sigma(u) = 1$, pour $0 \leq u \leq 1$; où χ est une fonction mesurable avec $\chi(u) = 1$ si $0 \leq u \leq 1$, et $\chi(u) \in [-1, 1]$ pour $u > 1$.

Wirsing (1967) avait déjà remarqué l'intervention de cette équation intégrale dans l'étude des fonctions multiplicatives. Cette connexion paraît explicitement dans le premier résultat de Granville-Soundararajan **[GS1]**

Théorème 2.3.2 (Granville-Soundararajan **[GS1]**). *Soit $f \in \mathcal{F}$ et $f(n) = 1$ pour $n \leq y$. On définit $\theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p$, et*

$$\chi(u) = \chi_f(u) = \frac{1}{\theta(y^u)} \sum_{p \leq y^u} f(p) \log p.$$

Alors $\chi(t)$ est mesurable, de valeur absolue plus petite que 1, et $\chi(t) = 1$ pour $0 \leq t \leq 1$ par définition. Soit $\sigma = \sigma_\chi$ l'unique solution correspondante de (2.3.4). On a alors

$$\frac{1}{y^u} \sum_{n \leq y^u} f(n) = \sigma(u) + O\left(\frac{u}{\log y}\right).$$

Notons par K l'ensemble des fonctions mesurables $\chi : [0, +\infty[\to [-1, 1]$, avec $\chi(u) = 1$ si $0 \leq u \leq 1$. Le résultat réciproque du théorème (2.3.2) est aussi vrai. En effet Granville et Soundararajan ont démontré que

Théorème 2.3.3 (Granville-Soundararajan **[GS1]**). *Soit $\chi \in K$. Soit $\epsilon > 0$ et $u \geq 1$ deux nombres réels. Alors il existe un nombre réel $y > 0$ assez grand, et une fonction multiplicative $f \in \mathcal{F}$, tels que $f(n) = 1$ pour $n \leq y$ et*

$$\left| \chi(t) - \frac{1}{\theta(y^t)} \sum_{p \leq y^t} f(p) \log p \right| \leq \epsilon,$$

pour tout $0 \leq t \leq u$, sauf un ensemble de mesure nulle. Par conséquent si $\sigma(u)$ est la solution de (2.3.4) pour ce χ on a

$$\sigma(t) = \frac{1}{y^t} \sum_{n \leq y^t} f(n) + O(u^\epsilon - 1) + O\left(\frac{u}{\log y}\right) \text{ pour tout } t \leq u.$$

Comme ces deux résultats caractérisent les fonctions multiplicatives f telles que $f(n) = 1$ pour $n \leq y$, et y assez grand, il faut alors essayer d'enlever cette condition afin d'avoir un résultat général pour toutes les fonctions multiplicatives f. Pour ceci il faut regarder la contribution des valeurs de f pour les entiers $n \leq y$. On peut voir ceci dans le résultat suivant de Granville-Soundararajan **[GS1]**

Proposition 2.3.1 (Granville-Soundararajan **[GS1]**). *Soit $f \in \mathcal{F}$. Pour tout $\epsilon \geq \log 2/\log x$, soit g la fonction complètement multiplicative vérifiant $g(p) = 1$ si $p \leq x^\epsilon$, et $g(p) = f(p)$ sinon. Alors on a*

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} f(n) = \Theta(f, x^\epsilon) \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} g(n) + O(\epsilon^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi}}).$$

De ces résultats on peut alors déduire le théorème suivant

Théorème 2.3.4 (Structure du spectre de Granville-Soundararajan **[GS1]**). *Soit*

$$\Omega_\Theta = \{\Theta(f,\infty) : f \in \mathcal{F}\},$$

et

$$\Sigma = \{\sigma(u) : u \in [0,\infty[, \text{ et } \sigma \text{ est une solution de (2.3.4) avec } \chi \in K\}.$$

Alors

$$\Omega = \Omega_\Theta \times \Sigma,$$

où $A \times B = \{ab : a \in A \text{ et } b \in B\}$.

Ce résultat est impressionnant puisqu'il décrit d'une manière précise l'ensemble des valeurs que peuvent prendre les moyennes des fonctions multiplicatives, au moyen d'une correspondance remarquable avec les solutions de l'équation intégrale retardée (2.3.4). Cette correspondance sera l'un des ingrédients principaux dans le troisième article de cette thèse (chapitre 5).

Chapitre 3

THE TWO DIMENSIONAL DISTRIBUTION OF VALUES OF $\zeta(1+IT)$

Résumé : On prouve plusieurs résultats sur la fonction de distribution de $\zeta(1+it)$ dans le plan complexe. Plus précisément on étudie la probabilité conjointe que $|\zeta(1+it)|$ est grande (proche du maximum conjecturé) et $\arg \zeta(1+it)$ est borné. Nous obtenons des résultats similaires dans le cas de la famille des fonctions L de Dirichlet $L(1,\chi)$, où χ varie parmi les charactères non-triviaux modulo un grand premier q.

Abstract : We prove several results on the distribution function of $\zeta(1+it)$ in the complex plane, that is the joint distribution function of $\arg \zeta(1+it)$ and $|\zeta(1+it)|$. Similar results are also given for $L(1,\chi)$ (as χ varies over non-principal characters modulo a large prime q).

3.1. INTRODUCTION

The values of the Riemann zeta function and L-functions at the edge of the critical strip $\mathrm{Re}(s)=1$, have important arithmetical consequences. The first one being the fact that $\zeta(1+it)\neq 0$ implies the prime number theorem, proved by Hadamard and de La Vallée Poussin in 1896, that

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}, \quad \text{as} \quad x \to \infty.$$

The second one is the class number formula, proved by Dirichlet in 1839, which relates the class number of a quadratic extension of $\mathbb{Q}$ to the value of $L(1,\chi_d)$ where d is the discriminant of the field extension.

The distribution of these values have been extensively studied over the last decades. One can quote the work of Granville-Soundararajan **[GS4]** in the case of $|\zeta(1+it)|$; Elliott (**[El1]** and **[El2]**), Montgomery-Vaughan **[MV]** and Granville-Soundararajan **[GS2]** in the case of Dirichlet L-functions of quadratic characters $L(1,\chi_d)$; Duke **[Du]** in the case of Artin L-functions, and the work of Cogdell-Michel **[CM]**, Habsieger-Royer **[HR]**, Lau-Wu **[LW]**, Liu-Royer-Wu **[LRW]**, Royer (**[Ro1]** and **[Ro2]**), and Royer-Wu (**[RW1]** and **[RW2]**) in the case of symmetric power L-functions of GL_2-automorphic forms.

We know that the Riemann zeta function $\zeta(s)$ has a conditionally convergent Euler product on $\mathrm{Re}(s) = 1$

$$\zeta(1+it) = \lim_{y\to\infty} \prod_{p\le y} \left(1 - \frac{1}{p^{1+it}}\right)^{-1}, \text{ if } t \gg 1. \tag{3.1.1}$$

In 1928, assuming the Riemann Hypothesis, Littlewood (**[Li1]** and **[Li2]**) showed that one can truncate this product at $p \le \log^2 t$ to obtain a good approximation for $\zeta(1+it)$, deducing that $|\zeta(1+it)| \le (2e^\gamma + o(1))\log_2 t$. (Throughout $\log_j$ denotes the j-th iterated logarithm, so that $\log_1 n = \log n$ and $\log_j n = \log(\log_{j-1} n)$ for each $j \ge 2$). This shows that under the Riemann Hypothesis the sum $\sum_{p\ge y} 1/p^{1+it}$ is small for $y \ge \log^2 t$. Moreover using Dirichlet's Theorem on diophantine approximation it is possible to make the sum $\sum_{p\le \log t} 1/p^{1+it}$ large, by choosing t such that $p^{it} \approx 1$, for all the primes $p \le \log t$. This enabled Littlewood (**[Li1]** and **[Li2]**) to show the existence of arbitrarily large t for which $|\zeta(1+it)| \ge (e^\gamma + o(1))\log_2 t$. Furthermore it is widely believed that the sum $\sum_{\log t \le p \le \log^2 t} 1/p^{1+it}$ is small so that the truncated product up to $\log t$ still serves as a good approximation for $\zeta(1+it)$:

Conjecture 3.1.1. *As $t \to \infty$, we have*

$$\zeta(1+it) \sim \prod_{p\le \log t} \left(1 - \frac{1}{p^{1+it}}\right)^{-1}.$$

One consequence of this conjecture is that $\max_{|t|\le T} |\zeta(1+it)| \sim e^\gamma \log_2 T$. In 2003, Granville and Soundararajan **[GS4]** evaluate the frequency with which such extreme values are attained, giving strong evidence for the truth of Conjecture

3.1.1. More precisely if

$$\Phi_T(\tau) := \frac{1}{T}\text{meas}\{t \in [T, 2T]: \quad |\zeta(1+it)| > e^\gamma \tau\},$$

then uniformly in the range $1 \ll \tau \leq \log_2 T - \log_3 T$, they proved that

$$\Phi_T(\tau) = \exp\left(-\frac{2e^{\tau - C - 1}}{\tau}\left(1 + O\left(\frac{1}{\tau^{\frac{1}{2}}}\right)\right)\right), \tag{3.1.2}$$

where

$$C = \int_0^2 \log I_0(t)\frac{dt}{t^2} + \int_2^\infty (\log I_0(t) - t)\frac{dt}{t^2}, \tag{3.1.3}$$

is a positive constant and $I_0(t) := \sum_{n=0}^\infty (t/2)^{2n}/n!^2$ is the modified Bessel function of order 0.

The aim of this paper is to investigate the tail of the joint distribution function of $|\zeta(1+it)|$ and $\arg\zeta(1+it)$ (where the latter is defined by continuous variation of the argument along the straight lines joining 2, $2+it$ and $1+it$ starting with the value 0) :

$$\Phi_T(\tau, \theta) := \frac{1}{T}\text{meas}\{t \in [T, 2T] : |\zeta(1+it)| > e^\gamma \tau, \ |\arg\zeta(1+it)| > \theta\},$$

for τ large and $\theta > 0$ bounded. In the same range $1 \ll \tau \leq \log_2 T - \log_3 T$ as in (3.1.2), we show (in Theorem 3.2.1) that for any fixed $\theta > 0$

$$\Phi_T(\tau, \theta) = \exp\left(-e^{\tau(1+o_\theta(1))}\right), \tag{3.1.4}$$

so the proportion does not decay too fast. We can be more precise showing (see Theorem 3.2.6 below), in the smaller range $1 \ll \tau \leq (\log_2 T)/2 - 2\log_3 T$, and $(\log\tau)\sqrt{\frac{\log_2 \tau}{\tau}} < \theta \ll 1$, that

$$\Phi_T(\tau, \theta) = \exp\left(-\frac{e^{\tau + \frac{\theta^2\tau}{2\log\tau} + O\left(\frac{\theta^2\tau}{\log^2\tau}\right)}}{\tau}\right). \tag{3.1.5}$$

We do prove the implicit upper bound in the full range $1 \ll \tau \leq \log T - \log 10$ unconditionally, and that the lower bound holds in this range assuming the Lang-Waldshmidt conjecture for linear forms in logarithms (Conjecture 3.2.1 below). As a consequence of our result we deduce that almost all values of $\zeta(1+it)$ with large norm are concentrated near the positive real axis :

Corollary 3.1.1. *As $\tau, T \to \infty$ with $\tau \leq \log_2 T - \log_3 T$, almost all values $t \in [T, 2T]$, with $|\zeta(1+it)| > e^\gamma \tau$, satisfy $|\arg \zeta(1+it)| \leq (\log \tau)\sqrt{\log_2 \tau/\tau}$. Moreover the set of exceptions has measure $\leq \exp(-\exp(\tau + (\log \tau \log_2 \tau)/2))$.*

Also from the estimate (3.1.5), one can deduce that the larger the arguments, the more it becomes rare to find values with large norm. More precisely we have

Corollary 3.1.2. *Let τ, θ_1 and θ_2, be in the range of validity of Theorem 3.2.6. If τ is large and $\theta_1 > \theta_2(1 + c_5/\log \tau)$, where c_5 is a suitably large constant, then*

$$\Phi_T(\tau, \theta_1) = o(\Phi_T(\tau, \theta_2)), \quad \textit{as } \tau, T \to \infty.$$

Let $\tau \leq \log_2 T$ be a large real number. Another interesting question is to understand the behavior of the argument of $\zeta(1+it)$ for t with $|\zeta(1+it)| \approx e^\gamma \tau$. The appearance of the factor $(\theta^2/2)\tau/\log \tau$ in (3.1.5), may suggests a normal behavior in the argument θ. Indeed we evaluate the characteristic function of $\arg \zeta(1+it)$ with an appropriate weight, and show that these arguments should be distributed according to a normal law of mean 0 and variance $\log(\tau - 1 - C)/2e^{\tau - 1 - C}$ (see Theorem 3.2.7 below).

We will introduce a random model for the values $\zeta(1+it)$: Let $\{X(p)\}_{p \text{ prime}}$ be a set of independent random variables, uniformly distributed on the unit circle $\mathbb{U}$, and define the "random Euler product"

$$L(1, X) = \lim_{y \to \infty} \prod_{p \leq y} \left(1 - \frac{X(p)}{p}\right)^{-1}, \text{ (these products converge with probability 1).}$$

Our strategy is to compare the distribution of the values of $\zeta(1+it)$ with the distribution of $L(1, X)$. For example we show in Theorem 3.2.2 below, that large complex moments of $\zeta(1+it)$ and $L(1, X)$ are roughly equal (Granville and Soundararajan (unpublished) proved an analogous result for $L(1, \chi)$, see Theorem 3.10.3 in section 3.10). Therefore we study this probabilistic model closely (Theorem 3.2.3) and deduce results on the distribution of $\zeta(1+it)$ (Theorem 3.2.6).

The results proved here carry over to $L(1, \chi)$ (where χ varies over non-principal characters modulo a large prime q) without any difficulty. We discuss these results in section 3.10.

3.2. Detailed statement of results

First we define

$$\zeta(1+it,y) := \prod_{p\le y}\left(1-\frac{1}{p^{1+it}}\right)^{-1}, \quad \text{and} \quad R_y := \prod_{p\le y}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}.$$

To exhibit large values of $\zeta(1+it)$ in any given direction $\arg z = \theta$, we first approximate $\zeta(1+it)$ by short Euler products $\zeta(1+it,y)$ (which is possible for almost all $t\in[T,2T]$ by Lemma 3.3.4 below in the range $1 \ll y \le \log T$), then we try to find many values $t\in[T,2T]$ for which

$$\zeta(1+it,y) \approx e^{i\theta}R_y.$$

To do so we use a biased method of moments, which we describe below. The first step is to note that the following inequality

$$\left|\zeta(1+it,y)+e^{i\theta}R_y\right| \ge (2-\epsilon)R_y, \tag{3.2.1}$$

implies

$$\zeta(1+it,y) = e^{i\theta}R_y\left(1+O\left(\sqrt{\epsilon}\right)\right).$$

This follows from the fact that $|\zeta(1+it,y)| \le \left|e^{i\theta}R_y\right|$, and noting that for a complex number $|z|\le 1$, with $|z+1|\ge 2-\epsilon$, one can easily show that $z = 1+O(\sqrt{\epsilon})$. To prove (3.2.1) we can try to have a good lower bound for the moments

$$\frac{1}{T}\int_T^{2T}\left|\zeta(1+it,y)+e^{i\theta}R_y\right|^{2k}dt$$
$$= \sum_{0\le l,m\le k}\binom{k}{l}\binom{k}{m}R_y^{2k-l-m}e^{i\theta(m-l)}\frac{1}{T}\int_T^{2T}\zeta(1+it,y)^l\zeta(1-it,y)^m dt. \tag{3.2.2}$$

In general, we can estimate these moments if the central terms $m=l$ constitute the main term, (since for most cases it's difficult to handle the non-central ones). However this is not the case here. In fact if $y\le(\log T)^2$, and $m,l\le \log T/(25\log_2 T\log_3 T)$, then by Theorem 3.5.1 below, we have

$$\frac{1}{T}\int_T^{2T}\zeta(1+it,y)^l\zeta(1-it,y)^m dt = \sum_{n\in S(y)}\frac{d_l(n)d_m(n)}{n^2}+o(1), \tag{3.2.3}$$

and so by Proposition 3.4.2 below one can see that some non-central terms have the same order as the central ones. Therefore it seems difficult to estimate (3.2.2), because of the oscillation of $e^{i\theta(m-l)}$. To handle this, we slightly modify the moments. Indeed, instead of working with $\zeta(1+it,y)$, we search for some completely multiplicative function $f(n)$ with values on the unit circle $\mathbb{U}$, such that

$$\prod_{p\leq y}\left(1-\frac{f(p)}{p^{1+it}}\right)^{-1}=R_y(1+O(\epsilon))\Longleftrightarrow\zeta(1+it,y)=e^{i\theta}R_y(1+O(\epsilon)).$$

In this case the non-central terms in

$$\frac{1}{T}\int_T^{2T}\left|\prod_{p\leq y}\left(1-\frac{f(p)}{p^{1+it}}\right)^{-1}+R_y\right|^{2k}dt, \tag{3.2.4}$$

will be positive (by Theorem 3.5.1), and the central ones will give the lower bound we search for. In fact it turns out that the function we need, satisfies $f(p)=e^{-i\psi}$ for all $p\leq y$, where $\psi=\theta/\log_2 y$.

Using this method we can prove the existence of large values of $\zeta(1+it)$ in each given direction $\arg z=\theta$. Indeed we prove

Theorem 3.2.1. *Let T be large, and fix $\theta\in(-\pi,\pi]$. If $1\ll y\leq \log T/\log_2 T$ is a real number, let $M(\theta,y)$ be the measure of values $t\in[T,2T]$, for which*

$$\zeta(1+it)=e^{i\theta}\prod_{p\leq y}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\left(1+O\left(\frac{1}{\log_2 y}\right)\right).$$

Then there exist two positive constants c_1,c_2 (depending on the constant in the O) for which

$$T\exp\left(-y^{1-c_2/(\log_2 y)^2}\right)\leq M(\theta,y)\leq T\exp\left(-y^{1-c_1/\log_2 y}\right).$$

Granville and Soundararajan (unpublished) used a different method to prove the existence of large values (and small values) of $L(1,\chi)$ in every direction (see Theorem 3.10.2 of section 3.10). However they only got a lower bound for the measure, and their bound is less strong than what we obtain in Theorem 3.2.1.

Let z be a complex number. We define the "zth divisor function" $d_z(n)$, to be the multiplicative function such that $d_z(p^a)=\Gamma(z+a)/\Gamma(z)a!$, for any prime p and any integer $a\geq 0$. Then $d_z(n)$ is the coefficient of the Dirichlet series $\zeta(s)^z$

for $\mathrm{Re}(s) > 1$. Therefore for the random variables $\{X(p)\}_{p \text{ prime}}$ we have (with probability 1) that

$$L(1,X)^z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_z(n)X(n)}{n},$$

where $X(n) = \prod_{i=1}^{k} X(p_i)^{a_i}$, if $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{a_i}$. If Y is a random variable on a probability space (Ω, μ) we define its expectation by $\mathbb{E}(Y) = \int_\Omega Y d\mu$. Therefore $\mathbb{E}(X(n)\overline{X(m)}) = 1$ if $n = m$ and vanishes otherwise. Thus for any complex numbers z_1 and z_2, we have

$$\mathbb{E}\left(L(1,X)^{z_1}\overline{L(1,X)}^{z_2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_{z_1}(n)d_{z_2}(n)}{n^2}.$$

The idea of using a probabilistic model appears previously in the work of Montgomery-Vaughan **[MV]**, Granville-Soundararajan **[GS2]**, and Cogdell-Michel **[CM]**. Indeed in each of these cases an adequate probabilistic model was constructed to understand the distribution of appropriate L-functions. To convince ourselves that it is the right model to use, we evaluate high complex moments of $\zeta(1+it)$ and found that

Theorem 3.2.2. *Uniformly for all complex numbers z_1, z_2 in the region $|z_1|, |z_2| \le \log T/(50(\log_2 T)^2)$, we have*

$$\frac{1}{T}\int_T^{2T} \zeta(1+it)^{z_1}\zeta(1-it)^{z_2}dt = \mathbb{E}\left(L(1,X)^{z_1}\overline{L(1,X)}^{z_2}\right) + O\left(\exp\left(-\frac{\log T}{2\log_2 T}\right)\right),$$

Using a combinatorial argument, Granville and Soundararajan **[GS4]**, get a better result (in the uniformity of the range of moments) in the special case where $z_2 = z_1 = k \in \mathbb{Z}$.

This result motivated us to study the distribution of the random Euler products $L(1,X)$. For $\tau, \theta > 0$, define

$$\Phi(\tau,\theta) := \mathrm{Prob}(|L(1,X)| > e^\gamma \tau,\ |\arg L(1,X)| > \theta).$$

A close study of this model allowed us to find a precise estimate for this distribution function. Indeed we prove the following

Theorem 3.2.3. *For $\tau > 0$ large and $(\log \tau)\sqrt{\frac{\log_2 \tau}{\tau}} < \theta \ll 1$, we have*

$$\Phi(\tau, \theta) = \exp\left(-\frac{e^{\tau + \frac{\theta^2 \tau}{2\log\tau} + O\left(\frac{\theta^2\tau}{\log^2\tau}\right)}}{\tau} \right).$$

Let p_j denotes the j-th smallest prime number. To prove an analogous formula for $\Phi_T(\tau, \theta)$, we studied the behavior of the vector $V(t) := (p_1^{it}, p_2^{it}, ..., p_N^{it})$, in the torus $\mathbb{T}^N := (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^N$, for $t \in [T, 2T]$, as $T \to \infty$. In fact we believe that these values should be equidistributed on $\mathbb{T}^N$ for $N = \pi(y)$ and $y \leq (1 + o(1)) \log T$. In **[BMV]**, Barton, Montgomery and Vaaler constructed trigonometric polynomials in N variables, which give a sharp approximation to the characteristic function of a cartesian product of N open intervals (see Theorem 3.8.1). These polynomials are the analogue of Selberg polynomials in 1 variable (see **[Mo]**). Using this construction and Fourier analysis on $\mathbb{T}^N$, we show in Theorems 3.2.4 and 3.2.5 below, that these values are equidistributed on $\mathbb{T}^N$, for $y \leq \sqrt{\log T}/(\log_2 T)^2$ unconditionally, and for $y \leq (\log T)/10$ under a conjecture on linear forms in logarithms, formulated by Lang and Waldshmidt (**[Lan]**, Introduction to chapter X and XI, p. 212) :

Conjecture 3.2.1. *Let b_i be integers, and a_i be positive integers for which $\log a_i$ are linearly independent over $\mathbb{Q}$. We let $B_j = \max\{|b_j|, 1\}$, and $B = \max_{1 \leq j \leq n} B_j$. Then for any $\epsilon > 0$, there exists a positive constant $c(\epsilon)$, such that*

$$|b_1 \log a_1 + b_2 \log a_2 + ... + b_n \log a_n| > \frac{c(\epsilon)^n B}{(B_1 ... B_n a_1 ... a_n)^{1+\epsilon}}.$$

More precisely we prove

Theorem 3.2.4. *Let $2 < y$ be a real number. For each $1 \leq j \leq \pi(y)$, let $I_j \subset (0,1)$ be an open interval of length $\delta_j > 0$. Define*

$$M(I_1, ..., I_{\pi(y)}) := meas\left\{ t \in [T, 2T] : \left\{ \frac{t \log p_j}{2\pi} \right\} \in I_j, \text{ for all } 1 \leq j \leq \pi(y) \right\},$$

where $\{\cdot\}$ denotes the fractional part. Then

$$M(I_1, ..., I_{\pi(y)}) \sim T \prod_{j \leq \pi(y)} \delta_j,$$

uniformly for $y \leq \sqrt{\log T}/(\log_2 T)^2$, and $\delta_j > (\log_2 T)^{-5/3}$.

Theorem 3.2.5. *Assume Conjecture 3.2.1. Then with the same notations as Theorem 3.2.4, we have*

$$M(I_1, ..., I_{\pi(y)}) \sim T \prod_{j\leq\pi(y)} \delta_j,$$

uniformly for $y \leq (\log T)/10$, *and* $\delta_j > (\log T)^{-3/2}$.

Following the proof of Theorem 3.2.3 and using Theorems 3.2.4 and 3.2.5 we deduce

Theorem 3.2.6. *Let* $T > 0$ *be large. There exists two positive constants* c_3 *and* c_4 *for which*

$$\Phi_T(\tau, \theta) \leq \exp\left(-\frac{e^{\tau+\frac{\theta^2\tau}{2\log\tau}-c_3\frac{\theta^2\tau}{\log^2\tau}}}{\tau}\right),$$

uniformly for $1 \ll \tau \leq \log_2 T$, *and* $(\log\tau)\sqrt{\frac{\log_2\tau}{\tau}} < \theta \ll 1$. *And*

$$\Phi_T(\tau, \theta) \geq \exp\left(-\frac{e^{\tau+\frac{\theta^2\tau}{2\log\tau}+c_4\frac{\theta^2\tau}{\log^2\tau}}}{\tau}\right),$$

uniformly for $(\log\tau)\sqrt{\frac{\log_2\tau}{\tau}} < \theta \ll 1$, *and* $1 \ll \tau \leq (\log_2 T)/2 - 2\log_3 T$ *unconditionally, and for* $1 \ll \tau \leq \log_2 T - \log 10$ *if we assume Conjecture 3.2.1.*

We now turn our attention to the behavior of $\arg\zeta(1+it)$ when the norm is large, that is when $|\zeta(1+it)| \approx e^\gamma\tau$ with $\tau \leq (1+o(1))\log_2 T$. We compute the characteristic function of these arguments with a natural weight, and use the Berry-Esseen Theorem (see **[Be]** and **[Es]**) to prove the following

Theorem 3.2.7. *Let* $T > 0$ *be large,* $1 \ll \tau \leq \log_2 T - 3\log_3 T$ *a real number,* $\epsilon = \tau^{-1/5}$ *and* $k = e^{\tau-1-C}$, *where* C *is defined by (3.1.3). Let*

$$\Omega_T(\tau) := \{t \in [T, 2T] : \ e^\gamma(\tau-\epsilon) \leq |\zeta(1+it)| \leq e^\gamma(\tau+\epsilon)\},$$

and for a real number x, *let*

$$\Lambda_T(\tau, x) := \left\{ t \in \Omega_T(\tau) : \ \frac{\arg\zeta(1+it)}{\sqrt{\frac{\log(\tau-1-C)}{2e^{\tau-1-C}}}} < x \right\},$$

$$\text{and } \nu_{T,\tau}(x) := \frac{\displaystyle\int_{\Lambda_T(\tau,x)} |\zeta(1+it)|^{2k} dt}{\displaystyle\int_{\Omega_T(\tau)} |\zeta(1+it)|^{2k} dt}.$$

Then we have

$$\nu_{T,\tau}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2} dy + O_x\left(\frac{1}{\sqrt{\log \tau}}\right).$$

3.3. Approximations of $\zeta(1+it)$

3.3.1. Short Euler product approximation

In this section we approximate $\zeta(1+it)$ by a short Euler product of length $y \le \log T$, for almost all $t \in [T, 2T]$. The main idea is to show that this is possible if $\zeta(s)$ has no zeros far from the critical line, then to use a classical zero-density estimate (there are few such zeros) to see that we can almost surely avoid there zeros. The material of this section is classical, and it's essentially proved by Granville and Soundararajan (see sections 2 and 3 of **[GS4]**).

Lemma 3.3.1. *(***[GS4]***, Lemma 1) Let $y \ge 2$ and $|t| \ge y+3$ be real numbers. Let $\frac{1}{2} \le \sigma_0 < 1$ and suppose that the rectangle $\{s : \ \sigma_0 < Re(s) \le 1, \ |Im(s) - t| \le y+2\}$ does not contain any zeros of $\zeta(s)$. Then if $\sigma_0 < \sigma \le 2$ and $|x - t| \le y$ we have*

$$|\log \zeta(\sigma + ix)| \ll \log |t| \log(e/(\sigma - \sigma_0)).$$

Moreover, if $\sigma_0 < \sigma \le 1$ then

$$\log \zeta(\sigma + it) = \sum_{n=2}^{y} \frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma+it} \log n} + O\left(\frac{\log |t|}{(\sigma_1 - \sigma_0)^2} y^{\sigma_1 - \sigma}\right),$$

where $\sigma_1 = \min(\sigma_0 + \frac{1}{\log y}, \frac{\sigma + \sigma_0}{2})$.

From this result, we deduce

Lemma 3.3.2. *(***[GS4]***, Lemma 2) Let $\frac{1}{2} < \sigma \le 1$ be fixed, T large and $3 < y < T/2$ be a real number. We have*

$$\log \zeta(\sigma + it) = \sum_{n=2}^{y} \frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma+it} \log n} + O(y^{(\frac{1}{2} - \sigma)/2} \log^3 T)$$

for all $t \in (T, 2T)$ except for a set of measure $\ll T^{5/4 - \sigma/2} y (\log T)^5$.

Proof. This follows from combining the classical zero-density estimate $N(\sigma_0, T) \ll T^{3/2 - \sigma_0} (\log T)^5$ (see Theorem 9.19 A of **[Ti]**) and Lemma 3.3.1 (taking $\sigma_0 = (1/2 + \sigma)/2$ there). □

To obtain an approximation by shorter Euler products, we need a large sieve type inequality

Lemma 3.3.3. *([GS4], Lemma 3) Let $2 \le y \le z$ be real numbers. For arbitrary complex numbers $x(p)$ we have*

$$\frac{1}{T}\int_T^{2T}\left|\sum_{y\le p\le z}\frac{x(p)}{p^{it}}\right|^{2k} dt \ll \left(k\sum_{y\le p\le z}|x(p)|^2\right)^k + T^{-\frac{2}{3}}\left(\sum_{y\le p\le z}|x(p)|\right)^{2k}$$

uniformly for all integers $1 \le k \le \log T/(3\log z)$.

We define $\zeta(s,y) := \prod_{p\le y}(1-p^{-s})^{-1}$, and using the Lemmas above, we prove the following key Lemma

Lemma 3.3.4. *Let $T > 0$ be a large real number, and $A(t) \le \log t$ be a slowly increasing function which tends to ∞ with t. Then, uniformly for $y \le \log T$, we have*

$$\zeta(1+it) = \zeta(1+it,y)\left(1+O\left(\frac{1}{A(y)}\right)\right),$$

for all $t \in [T,2T]$ except a set of measure

$$\ll T\exp\left(-\log\left(\frac{300\log^2 y}{A(y)^2}\right)\frac{y}{300\log y}\right).$$

Proof. Let $z = (\log T)^{100}$, we deduce from Lemma 3.3.2 that

$$\zeta(1+it) = \zeta(1+it,z)\left(1+O\left(\frac{1}{\log T}\right)\right), \tag{3.3.1}$$

for all $t \in [T,2T]$ except a set of measure at most $T^{4/5}$. Applying Lemma 3.3.3 with $x(p) = 1/p$, we get

$$\frac{1}{T}\int_T^{2T}\left|\sum_{y\le p\le z}\frac{1}{p^{1+it}}\right|^{2k} dt \ll \left(k\sum_{y\le p\le z}\frac{1}{p^2}\right)^k + T^{-2/3}\left(\sum_{y\le p\le z}\frac{1}{p}\right)^{2k},$$

for any integer $1 \le k \le \log T/3\log z$. We choose $k = [y/(300\log y)]$, which implies that

$$\frac{1}{T}\int_T^{2T}\left|\sum_{y\le p\le z}\frac{1}{p^{1+it}}\right|^{2k} dt \ll \left(\frac{1}{300\log^2 y}\right)^k. \tag{3.3.2}$$

Let $M = \text{meas}\left\{t \in [T,2T] : \left|\sum_{y\le p\le z}\frac{1}{p^{1+it}}\right| > \frac{1}{A(y)}\right\}$. From (2.2) we get

$$\frac{M}{T}\left(\frac{1}{A(y)}\right)^{2k} \ll \left(\frac{1}{300\log^2 y}\right)^k,$$

which implies that

$$M \ll T \exp\left(-\log\left(\frac{300\log^2 y}{A(y)^2}\right)\frac{y}{300\log y}\right).$$

To complete the proof one may check that for all $t \in [T, 2T]$, except a set of measure M, we have

$$\begin{aligned}\zeta(1+it,z) &= \zeta(1+it,y)\exp\left(-\sum_{y\le p\le z}\left(\frac{1}{p^{1+it}}+O\left(\frac{1}{p^2}\right)\right)\right)\\ &= \zeta(1+it,y)\left(1+O\left(\frac{1}{A(y)}\right)\right).\end{aligned}$$

□

3.3.2. Smooth Dirichlet series approximation of $\zeta(1+it)^z$

To prove Theorem 3.2.2, we need the following Lemma, which corresponds to Lemma 2.3 of Granville-Soundararajan **[GS2]**.

Lemma 3.3.5. *Let t be large, and z be any complex number with $|z| \le \log^2 t$. Define $Z = \exp((\log t)^{10})$. Then*

$$\zeta(1+it)^z = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_z(n)}{n^{1+it}}e^{-n/Z} + O\left(\frac{1}{t}\right).$$

PROOF. Since $\frac{1}{2\pi i}\int_{1-i\infty}^{1+i\infty} y^s\Gamma(s)ds = e^{-1/y}$, we have

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{1-i\infty}^{1+i\infty}\zeta(1+it+s)^z Z^s\Gamma(s)ds = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_z(n)}{n^{1+it}}e^{-n/Z}. \qquad (3.3.3)$$

We shift the line of integration to the contour $s = -C(x) + ix$ where $C(x) := c/(2\log(|x|+2))$, and $c > 0$ is chosen so that $\zeta(s)$ have no zeros in the region where we shift the contour (this is possible by the classical theorem on the zero free region of $\zeta(s)$). We encounter a pole at $s = 0$, which leaves the residue $\zeta(1+it)^z$. Applying Lemma 3.3.1 with $\sigma_0 = 1 - 4C(x)/3$ and $y = 2$ gives $|\log\zeta(s)| \ll 1/C(x)^2$ and so the integral along the new contour is

$$\ll \int_{-\infty}^{\infty} Z^{-C(x)}e^{O(|z|/C(x)^2)}|\Gamma(-C(x)+ix)|dx \ll \frac{1}{t},$$

by Stirling's formula. This completes the proof. □

3.4. Estimates of sums of divisor functions

In this section we prove two results on sums of the divisor function $d_k(n)$. The advantage of our results is the uniformity on k. We begin by proving the following proposition on the estimates of such sums in short intervals, which we shall use later in the proof of Theorem 3.2.2

Proposition 3.4.1. *Let $T > 0$ be a large real number, and $k \le \log T/4(\log_2 T)^2$ a positive integer. Define $Z = \exp((\log T)^{10})$ and $y = \exp(\log T/\log_2 T)$. Then*

$$\sup_{m>\sqrt{T}} \sum_{m<n<m+\frac{m}{\sqrt{T}}} \frac{d_k(n)}{n} e^{-n/Z} \le \frac{(\log 3Z)^k}{y}.$$

Proof. We prove this by induction on k. If $k = 1$ then

$$\sup_{m>\sqrt{T}} \sum_{m<n<m+\frac{m}{\sqrt{T}}} \frac{e^{-n/Z}}{n} \le \sup_{m>\sqrt{T}} \frac{1}{m}\left(\frac{m}{\sqrt{T}}+1\right) \le \frac{2}{\sqrt{T}} \le \frac{\log 3Z}{y}.$$

Now suppose the result true for $k-1$. K. Norton **[No]** proved that

$$\log d_k(n) \le \frac{\log n \log k}{\log\log n}\left(1+\frac{\log\log\log n}{\log\log n}\left(1+O\left(\frac{1}{\log\log n}\right)\right)\right),$$

uniformly for $k \le \log n/(\log\log n)^2$, if n is large enough. Thus

$$\begin{aligned}\sup_{\sqrt{T}<m<y\sqrt{T}} \sum_{m<n<m+\frac{m}{\sqrt{T}}} \frac{d_k(n)}{n} e^{-n/Z} &\le \sup_{\sqrt{T}<m<y\sqrt{T}} \sum_{m<n<m+y} \frac{d_k(n)}{n} \\ &\le \sup_{\sqrt{T}<m<y\sqrt{T}} \left(y \max_{m<n<m+y} \frac{d_k(n)}{n}\right) \le \frac{1}{y}.\end{aligned} \tag{3.4.1}$$

Now for $m > y\sqrt{T}$, we have

$$\sum_{m<n<m+\frac{m}{\sqrt{T}}} \frac{d_k(n)}{n} e^{-n/Z} = \sum_{m<n<m+\frac{m}{\sqrt{T}}} \frac{e^{-n/Z}}{n} \sum_{dr=n} d_{k-1}(r).$$

We divide the above sum into two parts : S_1 for $d > y$ (which implies that $r \le \frac{2m}{y}$), and S_2, for $d \le y$. We have then

$$S_1 \le \sum_{r\le\frac{2m}{y}} \frac{d_{k-1}(r)}{r} e^{-r/Z} \sum_{\frac{m}{r}<d<\frac{m}{r}+\frac{m}{r\sqrt{T}}} \frac{1}{d} \le \sum_{r\le\frac{2m}{y}} \frac{d_{k-1}(r)}{r} e^{-r/Z}\left(\frac{1}{\sqrt{T}}+\frac{2}{y}\right).$$

For $j \in \mathbb{N}$, we have that $d_j(n)e^{-n/Z} \le e^{j/Z}\sum_{a_1\ldots a_j=n} e^{-(a_1+\ldots+a_j)/Z}$, and so

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_j(n)}{n} e^{-n/Z} \leq \left(e^{1/Z} \sum_{a=1}^{\infty} \frac{e^{-a/Z}}{a} \right)^j \leq (\log 3Z)^j. \tag{3.4.2}$$

This implies

$$S_1 \leq \frac{3(\log 3Z)^{k-1}}{y} \leq \frac{(\log 3Z)^k}{3y}. \tag{3.4.3}$$

Moreover

$$S_2 \leq \sum_{d \leq y} \frac{1}{d} \sum_{\frac{m}{d} < r < \frac{m}{d} + \frac{m}{d\sqrt{T}}} \frac{d_{k-1}(r)}{r} e^{-r/Z}.$$

Since $m > y\sqrt{T}$, and $d \leq y$, we get $m/d > \sqrt{T}$. By our induction hypothesis we deduce that

$$\sum_{\frac{m}{d} < r < \frac{m}{d} + \frac{m}{d\sqrt{T}}} \frac{d_{k-1}(r)}{r} e^{-r/Z} \leq \sup_{s > \sqrt{T}} \sum_{s < r < s + \frac{s}{\sqrt{T}}} \frac{d_{k-1}(r)}{r} e^{-r/Z} \leq \frac{(\log 3Z)^{k-1}}{y}.$$

Finally we have

$$S_2 \leq \frac{(\log 3Z)^{k-1} \log y}{y} \leq \frac{(\log 3Z)^k}{3y}. \tag{3.4.4}$$

Now combining (3.4.1), (3.4.3) and (3.4.4) gives the result. □

The key ingredient of the proof of Theorem 3.2.7 is to understand the ratio

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_{k-r}(n) d_{k+r}(n)}{n^2} \Big/ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_k(n)^2}{n^2},$$

for large k and r. To this end we prove the following result

Proposition 3.4.2. *Let k be a large real number and define*

$$c_0 = \lim_{x \to \infty} \left(\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} - \log_2 x \right).$$

Then uniformly for $|r| \leq \sqrt{k}$, we have

$$\sum_{n \geq 1} \frac{d_{k-r}(n) d_{k+r}(n)}{n^2} = \exp\left(-r^2 \frac{\log_2 k}{k} - \frac{c_0 r^2}{k} + O\left(\frac{r^2}{k\sqrt{\log k}} + \frac{r^4}{k^2} \right) \right) \sum_{n \geq 1} \frac{d_k^2(n)}{n^2}.$$

First, we remark that

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| 1 - \frac{e^{i\theta}}{p} \right|^{-2k} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 - \frac{e^{i\theta}}{p} \right)^{-k} \left(1 - \frac{e^{-i\theta}}{p} \right)^{-k} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{a=0}^{\infty} \frac{d_k(p^a) e^{ia\theta}}{p^a} \sum_{b=0}^{\infty} \frac{d_k(p^b) e^{-ib\theta}}{p^b} d\theta = \sum_{a=0}^{\infty} \frac{d_k^2(p^a)}{p^{2a}}. \end{aligned} \tag{3.4.5}$$

Analogously we have

$$\sum_{a=0}^{\infty} \frac{d_{k-r}(p^a)d_{k+r}(p^a)}{p^{2a}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|1-\frac{e^{i\theta}}{p}\right|^{-2k} \left(1-\frac{e^{i\theta}}{p}\right)^{r} \left(1-\frac{e^{-i\theta}}{p}\right)^{-r} d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|1-\frac{e^{i\theta}}{p}\right|^{-2k} \mathrm{Re}\left(\left(1-\frac{e^{i\theta}}{p}\right)^{r} \left(1-\frac{e^{-i\theta}}{p}\right)^{-r}\right) d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|1-\frac{e^{i\theta}}{p}\right|^{-2k} \cos\left(2r\arg\left(1-\frac{e^{i\theta}}{p}\right)\right) d\theta, \tag{3.4.6}$$

since the series $\sum_{a=0}^{\infty} d_{k-r}(p^a)d_{k+r}(p^a)/p^{2a}$ is real. The proof will rely on these two identities. The last ingredient we need is the following Lemma

Lemma 3.4.1. *Let $k > 0$ be a large real number. Suppose that $p = o(k)$ as $k \to \infty$, and let $\epsilon = 4\sqrt{\frac{p}{k}\log\left(\frac{k}{p}\right)}$. Then we have*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \left|1-\frac{e^{i\theta}}{p}\right|^{-2k} d\theta = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|1-\frac{e^{i\theta}}{p}\right|^{-2k} d\theta\right)\left(1+O\left(\frac{p^4}{k^4}\right)\right).$$

PROOF. First we observe that

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|1-\frac{e^{i\theta}}{p}\right|^{-2k} d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1-\frac{2\cos\theta}{p}+\frac{1}{p^2}\right)^{-k} d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(1-\frac{2\cos\theta}{p}+\frac{1}{p^2}\right)^{-k} d\theta.$$

Now

$$\frac{1}{\pi}\int_{\epsilon}^{\pi/2}\left(1-\frac{2\cos\theta}{p}+\frac{1}{p^2}\right)^{-k} d\theta$$

$$\leq \frac{1}{\sin\epsilon}\left(\frac{1}{\pi}\int_{\epsilon}^{\pi/2}\sin\theta\left(1-\frac{2\cos\theta}{p}+\frac{1}{p^2}\right)^{-k} d\theta\right)$$

$$= \frac{1}{\sin\epsilon}\left(-\frac{p}{2\pi(k-1)}\left(1-\frac{2\cos\theta}{p}+\frac{1}{p^2}\right)^{-k+1}\Bigg|_{\epsilon}^{\pi/2}\right)$$

$$\leq \frac{p}{\pi\epsilon(k-1)}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-2k+2}\exp\left(-\frac{\epsilon^2 k}{p}+O\left(\frac{\epsilon^4 k}{p}\right)\right).$$

Moreover since

$$\frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\left(1-\frac{2\cos\theta}{p}+\frac{1}{p^2}\right)^{-k} d\theta \leq \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{p^2}\right)^{-k},$$

then

$$
\begin{aligned}
E := & \frac{1}{\pi} \int_{\epsilon}^{\pi} \left(1 - \frac{2\cos\theta}{p} + \frac{1}{p^2}\right)^{-k} d\theta \\
\leq & \frac{2p}{\pi\epsilon(k-1)} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-2k+2} \exp\left(-\frac{\epsilon^2 k}{p} + O\left(\frac{\epsilon^4 k}{p}\right)\right).
\end{aligned}
$$

Let $0 < \delta < \epsilon$ be a small real number, to be chosen later. We have

$$
\begin{aligned}
I := & \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\epsilon} \left(1 - \frac{2\cos\theta}{p} + \frac{1}{p^2}\right)^{-k} d\theta \\
\geq & \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\delta} \left(1 - \frac{2\cos\theta}{p} + \frac{1}{p^2}\right)^{-k} d\theta \\
\geq & \frac{1}{\sin\delta} \left(-\frac{p}{2\pi(k-1)} \left(1 - \frac{2\cos\theta}{p} + \frac{1}{p^2}\right)^{-k+1} \Bigg|_{0}^{\delta}\right) \\
\geq & \frac{p}{2\pi\delta(k-1)} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-2k+2} \left(1 - \exp\left(-\frac{\delta^2 k}{2p}\right)\right).
\end{aligned}
$$

One may chose $\delta = \sqrt{\frac{p}{2k}}$, which implies that

$$
E \leq \left(\frac{20\delta}{\epsilon} \exp\left(-\frac{\epsilon^2 k}{2p}\right)\right) I \leq \left(\frac{p^4}{k^4}\right) I,
$$

completing the proof. □

Proof of Proposition 3.4.2. If $-\pi/2 \leq \omega \leq \pi/2$, then

$$
\omega = \sin\omega + O\left(\sin^3\omega\right).
$$

Also since $\cos\arg\left(1 - \frac{e^{i\theta}}{p}\right) = \frac{1 - \frac{\cos\theta}{p}}{\left|1 - \frac{e^{i\theta}}{p}\right|} > 0$, and $\sin\arg\left(1 - \frac{e^{i\theta}}{p}\right) = \frac{-\sin\theta}{p\left|1 - \frac{e^{i\theta}}{p}\right|}$, then

$$
\arg\left(1 - \frac{e^{i\theta}}{p}\right) = \frac{-\sin\theta}{p\left|1 - \frac{e^{i\theta}}{p}\right|} + O\left(\frac{\sin^3\theta}{p^3}\right).
$$

This implies

$$
\cos\left(2r\arg\left(1 - \frac{e^{i\theta}}{p}\right)\right) = 1 - \frac{2r^2\sin^2\theta}{p^2\left|1 - \frac{e^{i\theta}}{p}\right|^2} + O\left(\frac{(r^4 + r^2)\sin^4\theta}{p^4}\right). \tag{3.4.7}
$$

Now suppose that $p \leq k/\sqrt{\log k}$, in this case one has

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|1-\frac{e^{i\theta}}{p}\right|^{-2k}\cos\left(2r\arg\left(1-\frac{e^{i\theta}}{p}\right)\right)d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|1-\frac{e^{i\theta}}{p}\right|^{-2k}d\theta$$
$$-\frac{r^2}{p^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\theta\left|1-\frac{e^{i\theta}}{p}\right|^{-2k-2}d\theta + O\left(\frac{r^4+r^2}{p^4}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^4\theta\left|1-\frac{e^{i\theta}}{p}\right|^{-2k}d\theta\right).$$

Integrating by parts, we obtain

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\theta\left|1-\frac{e^{i\theta}}{p}\right|^{-2k-2}d\theta = \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\theta\left(1-\frac{2\cos\theta}{p}+\frac{1}{p^2}\right)^{-k-1}d\theta$$
$$=\frac{p}{2k}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\theta\left(1-\frac{2\cos\theta}{p}+\frac{1}{p^2}\right)^{-k}d\theta - \frac{p}{2k}\sin\theta\left(1-\frac{2\cos\theta}{p}+\frac{1}{p^2}\right)^{-k}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}$$
$$=\frac{p}{2k}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\theta\left(1-\frac{2\cos\theta}{p}+\frac{1}{p^2}\right)^{-k}d\theta.$$

Further by Lemma 3.4.1, taking $\epsilon = 4\sqrt{\frac{p}{k}\log\left(\frac{k}{p}\right)}$ there, we get

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos\theta\left(1-\frac{2\cos\theta}{p}+\frac{1}{p^2}\right)^{-k}d\theta$$
$$=\left(1+O\left(\frac{p^4}{k^4}\right)\right)\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\cos\theta\left(1-\frac{2\cos\theta}{p}+\frac{1}{p^2}\right)^{-k}d\theta$$
$$=\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\left(1-\frac{2\cos\theta}{p}+\frac{1}{p^2}\right)^{-k}d\theta\left(1+O\left(\epsilon^2+\frac{p^4}{k^4}\right)\right)$$
$$=\int_{-\pi}^{\pi}\left(1-\frac{2\cos\theta}{p}+\frac{1}{p^2}\right)^{-k}d\theta\left(1+O\left(\frac{p}{k}\log\left(\frac{k}{p}\right)\right)\right).$$

So we deduce that

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\theta\left|1-\frac{e^{i\theta}}{p}\right|^{-2k-2}d\theta = \frac{p}{2k}\int_{-\pi}^{\pi}\left|1-\frac{e^{i\theta}}{p}\right|^{-2k}d\theta\left(1+O\left(\frac{p}{k}\log\left(\frac{k}{p}\right)\right)\right).$$

Moreover following the same ideas, and integrating by parts, we get

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^4\theta\left|1-\frac{e^{i\theta}}{p}\right|^{-2k}d\theta = \frac{3p}{2(k+1)}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\theta\cos\theta\left(1-\frac{2\cos\theta}{p}+\frac{1}{p^2}\right)^{-k+1}d\theta$$
$$\ll\frac{p^2}{k^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left|1-\frac{e^{i\theta}}{p}\right|^{-2k}d\theta.$$

Thus by (3.4.7), the RHS of (3.4.6) equals

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|1-\frac{e^{i\theta}}{p}\right|^{-2k}d\theta\left(1-\frac{r^2}{pk}+O\left(\frac{r^2}{k^2}\log\left(\frac{k}{p}\right)+\frac{r^4+r^2}{p^2k^2}\right)\right). \tag{3.4.8}$$

Now for the case $p \geq k/\sqrt{\log k}$, by (3.4.7) we use the following estimate for the RHS of (3.4.6)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|1-\frac{e^{i\theta}}{p}\right|^{-2k} d\theta\left(1+O\left(\frac{r^2}{p^2}\right)\right). \tag{3.4.9}$$

Finally upon using (3.4.5), (3.4.6) and the estimates (3.4.8) and (3.4.9) for the appropriate cases, we deduce that

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_{k-r}(n)d_{k+r}(n)}{n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_k^2(n)}{n^2}\prod_{p\geq k/\sqrt{\log k}}\exp\left(O\left(\frac{r^2}{p^2}\right)\right)\\ &\prod_{p\leq k/\sqrt{\log k}}\exp\left(-\frac{r^2}{pk}+O\left(\frac{r^2}{k^2}\log\left(\frac{k}{p}\right)+\frac{r^4+r^2}{p^2k^2}\right)\right)\\ &= \exp\left(-r^2\frac{\log_2 k}{k}-\frac{c_0r^2}{k}+O\left(\frac{r^2}{k\sqrt{\log k}}+\frac{r^4}{k^2}\right)\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_k^2(n)}{n^2},\end{aligned}$$

completing the proof. □

3.5. Moments of $\zeta(1+it)$

In this section we prove Theorem 3.2.2 together with a result on moments of short Euler products. We begin by the proof of Theorem 3.2.2

Proof of Theorem 3.2.2. First by Lemma 3.3.5, for t large enough we have

$$\zeta(1+it)^z = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_z(n)}{n^{1+it}}e^{-n/Z}+O\left(\frac{1}{t}\right),$$

where z is any complex number such that $|z| \leq (\log t)^2$, and $Z = \exp((\log t)^{10})$. Now let $x = \max\{|z_1|, |z_2|\}$, and $k = [x]+1$. Therefore we have

$$\begin{aligned}&\frac{1}{T}\int_T^{2T}\zeta(1+it)^{z_1}\zeta(1-it)^{z_2}dt\\ &\qquad = \sum_{m,n\geq 1}\frac{d_{z_1}(n)d_{z_2}(m)e^{-(m+n)/Z}}{mn}\frac{1}{T}\int_T^{2T}\left(\frac{m}{n}\right)^{it}dt+E_1,\end{aligned} \tag{3.5.1}$$

where

$$E_1 \ll \frac{1}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_k(n)}{n}e^{-n/Z} \ll \frac{(\log 3Z)^k}{T}, \tag{3.5.2}$$

by equation (3.4.2). The series in the RHS of (3.5.1) includes diagonal terms $m = n$ which contribute as the main term, and off-diagonal terms $m \neq n$ which contribute as an error term, as we shall prove later. The diagonal terms' contribution equals

$$\sum_{n\geq 1}\frac{d_{z_1}(n)d_{z_2}(n)e^{-2n/Z}}{n^2}=\sum_{n\geq 1}\frac{d_{z_1}(n)d_{z_2}(n)}{n^2}+E_2,$$

where

$$E_2 \ll \frac{1}{\sqrt{Z}}\sum_{n\geq 1}\frac{d_k(n)^2}{n^{3/2}} \leq \frac{1}{\sqrt{Z}}\sum_{n\geq 1}\frac{d_{k^2}(n)}{n^{3/2}} = \frac{\zeta(3/2)^{k^2}}{\sqrt{Z}}, \tag{3.5.3}$$

knowing that $1-e^{-t}\leq 2\sqrt{t}$ for all $t>0$.

For the off-diagonal terms, we divide the sum into four parts :

a) $m,n\leq\sqrt{T}$, b) $m\geq n+n/\sqrt{T}$, c) $n\geq m+m/\sqrt{T}$, and d) whatever remains.

For the three first cases we use the following inequality

$$\frac{1}{T}\int_T^{2T}\left(\frac{m}{n}\right)^{it}dt \ll \frac{1}{T|\log(m/n)|}\leq T^{-1/2}, \tag{3.5.4}$$

which holds since $|\log(1-c)|=-\log(1-c)>c$ for any real number $0<c<1$. Thus by equation (3.4.2) the contribution of such terms is

$$E_3 \ll \frac{1}{T^{1/2}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_k(n)}{n}e^{-n/Z}\right)^2 \leq \frac{(\log 3Z)^{2k}}{T^{1/2}}. \tag{3.5.5}$$

It remains then, to bound the contribution from the last part E_4. we have

$$|E_4| \leq \sum_{\substack{n+n/\sqrt{T}>m>n>\sqrt{T}\\ \text{or } m+m/\sqrt{T}>n>m>\sqrt{T}}}\frac{d_{|z_1|}(n)d_{|z_2|}(m)e^{-(n+m)/Z}}{mn}.$$

Let $y=\exp(\log T/\log_2 T)$. By Proposition 3.4.1 and equation (3.4.2), we get

$$\begin{aligned}|E_4| &\leq 2\sum_{m>\sqrt{T}}\frac{d_k(m)}{m}e^{-m/Z}\sum_{m<n<m+m/\sqrt{T}}\frac{d_k(n)}{n}e^{-n/Z}\\ &\leq 2\left(\sum_{m>\sqrt{T}}\frac{d_k(m)}{m}e^{-m/Z}\right)\left(\sup_{r>\sqrt{T}}\sum_{r<n<r+r/\sqrt{T}}\frac{d_k(n)}{n}e^{-n/Z}\right)\\ &\leq 2(\log 3Z)^k\frac{(\log 3Z)^k}{y}=\frac{2(\log 3Z)^{2k}}{y}.\end{aligned}$$

This gives along with (3.5.2), (3.5.3) and (3.5.5), the following bound

$$E_1+E_2+E_3+E_4 \ll (2\log 3Z)^{2k}/y \leq y^{-1/2},$$

which achieves the proof. $\square$

Now to prove Theorem 3.2.1, we need a similar result to Theorem 3.2.2, but for general short Euler products of degree 1. Indeed we have

Theorem 3.5.1. *Let $T > 0$ be large, $y \le (\log T)^2$ a real number, and f a completely multiplicative function with values on the unit circle $\mathbb{U}$ ($|f(n)| = 1$ for all $n \in \mathbb{N}$). Let*

$$L_f(s,y) := \prod_{p\le y}\left(1-\frac{f(p)}{p^s}\right)^{-1} = \sum_{n\in S(y)}\frac{f(n)}{n^s},$$

where $S(y) = \{n \in \mathbb{N} : p|n \implies p \le y\}$. If z_1, z_2 are complex numbers verifying $|z_1|, |z_2| \le \log T/(25\log_2 T\log_3 T)$, then

$$\frac{1}{T}\int_T^{2T} L_f(1+it,y)^{z_1}\overline{L_f(1+it,y)}^{z_2}dt = \sum_{n\in S(y)}\frac{d_{z_1}(n)d_{z_2}(n)}{n^2}+O\left(\exp\left(-\frac{\log T}{4\log_2 T}\right)\right).$$

Proof. Let $x = \max\{|z_1|, |z_2|\}$, and $k = [x] + 1$. Then

$$\frac{1}{T}\int_T^{2T} L_f(1+it,y)^{z_1}\overline{L_f(1+it,y)}^{z_2}dt$$
$$= \sum_{m,n\in S(y)}\frac{d_{z_1}(n)d_{z_2}(m)f(n)\overline{f(m)}}{mn}\frac{1}{T}\int_T^{2T}\left(\frac{m}{n}\right)^{it}dt.$$

In this series, the diagonal terms $m = n$ contribute

$$\sum_{n\in S(y)}\frac{d_{z_1}(n)d_{z_2}(n)f(n)\overline{f(n)}}{n^2} = \sum_{n\in S(y)}\frac{d_{z_1}(n)d_{z_2}(n)}{n^2}.$$

Furthermore we divide the off-diagonal terms into two parts :

a) If $m, n \le T^{3/4}$, and b) if $m > T^{3/4}$, or $n > T^{3/4}$. Now for the first case we have

$$\frac{1}{T}\int_T^{2T}\left(\frac{m}{n}\right)^{it}dt \ll \frac{1}{T|\log(m/n)|} \le T^{-1/4},$$

since $|\log(1-c)| = -\log(1-c) > c$ for any real number $0 < c < 1$. Thus the contribution of such terms is bounded by

$$\frac{1}{T^{1/4}}\sum_{m,n\in S(y)}\frac{d_{|z_1|}(n)d_{|z_2|}(m)}{mn} \le \frac{1}{T^{1/4}}\left(\sum_{n\in S(y)}\frac{d_k(n)}{n}\right)^2 \le \frac{(3\log y)^{2k}}{T^{1/4}}. \tag{3.5.6}$$

Moreover the contribution from the second part is bounded by

$$2\sum_{n,m\in S(y),n>T^{3/4}}\frac{d_k(n)d_k(m)}{mn} \le 2\left(T^{3/4}\right)^{-\alpha}\sum_{m\in S(y)}\frac{d_k(m)}{m}\sum_{n\in S(y)}\frac{d_k(n)}{n^{1-\alpha}}, \tag{3.5.7}$$

for all $\alpha > 0$. We choose $\alpha = 1/\log_2 T$. Therefore

$$\sum_{n\in S(y)} \frac{d_k(n)}{n^{1-\alpha}} = \prod_{p\le y}\left(1-\frac{1}{p^{1-\alpha}}\right)^{-k} = \exp\left(k\sum_{p\le y}\frac{1}{p^{1-\alpha}} + O(k)\right) \le \exp\left(9k\log_2 y\right). \tag{3.5.8}$$

Finally by (3.5.6), (3.5.7) and (3.5.8) the contribution of the off-diagonal part is at most

$$\exp(-3\log T/4\log_2 T + 10k\log_2 y)) \le \exp(-\log T/4\log_2 T),$$

proving the Theorem. □

3.6. Large values of $\zeta(1+it)$ in every direction

In this section we prove Theorem 3.2.1. For $s \in \mathbb{C}$, define

$$L_\psi(s,y) := \prod_{p\le y}\left(1-\frac{e^{-i\psi}}{p^s}\right)^{-1}.$$

We have

Lemma 3.6.1. *For $\theta \in (-\pi,\pi]$, and $y > 0$ large enough, let $\psi = \theta/\log_2 y$. Then for all $t \in \mathbb{R}$, we have*

$$L_\psi(1+it,y) = R_y\left(1+O\left(\frac{1}{\log_2 y}\right)\right) \iff \zeta(1+it,y) = e^{i\theta}R_y\left(1+O\left(\frac{1}{\log_2 y}\right)\right).$$

Proof. First we have

$$\frac{1}{R_y}\prod_{p\le y}\left(1-\frac{e^{i\psi}}{p}\right)^{-1} = \prod_{p\le y}\left(1-\frac{e^{i\psi}-1}{p-1}\right)^{-1} = \exp\left(-\sum_{p\le y}\log\left(1-\frac{e^{i\psi}-1}{p-1}\right)\right)$$
$$= \exp\left(\sum_{p\le y}\frac{i\psi}{p-1} + O\left(\psi^2\log_2 y\right)\right) = e^{i\theta}\left(1+O\left(\frac{1}{\log_2 y}\right)\right). \tag{3.6.1}$$

Now using that $(e^{i\psi})^m = 1 + O(m\psi)$ for all $m \in \mathbb{N}$, we deduce that

$$\begin{aligned}
\log\left(\prod_{p\le y}\left(1-\frac{e^{-i\psi}}{p^{1+it}}\right)^{-1}\right) - \log R_y &= \sum_{p\le y}\sum_{m\ge 1}\frac{(p^{-it}e^{-i\psi})^m - 1}{p^m m}\\
&= \sum_{p\le y}\sum_{m\ge 1}\frac{(p^{-it})^m e^{-i\psi} - 1}{p^m m} + O\left(\psi\sum_{p\le y}\sum_{m\ge 2}\frac{1}{p^m}\right)\\
&= e^{-i\psi}\sum_{p\le y}\sum_{m\ge 1}\frac{(p^{-it})^m - e^{i\psi}}{p^m m} + O\left(\frac{1}{\log_2 y}\right).
\end{aligned} \tag{3.6.2}$$

Moreover by (3.6.1) we get

$$\begin{aligned}
&\log\zeta(1+it,y) - \log\left(e^{i\theta}R_y\right)\\
&= \log\zeta(1+it,y) - \log\left(\prod_{p\le y}\left(1-\frac{e^{i\psi}}{p}\right)^{-1}\right) + O\left(\frac{1}{\log_2 y}\right)\\
&= \sum_{p\le y}\sum_{m\ge 1}\frac{(p^{-it})^m - (e^{i\psi})^m}{p^m m} + O\left(\frac{1}{\log_2 y}\right)\\
&= \sum_{p\le y}\sum_{m\ge 1}\frac{(p^{-it})^m - e^{i\psi}}{p^m m} + O\left(\psi\sum_{p\le y}\sum_{m\ge 2}\frac{1}{p^m} + \frac{1}{\log_2 y}\right)\\
&= \sum_{p\le y}\sum_{m\ge 1}\frac{(p^{-it})^m - e^{i\psi}}{p^m m} + O\left(\frac{1}{\log_2 y}\right).
\end{aligned} \tag{3.6.3}$$

Finally the result follows upon taking absolute values of both (3.6.2) and (3.6.3). □

Now we are ready to compute the moments (3.2.4). Indeed we prove

Theorem 3.6.1. *Let $T > 0$ be large, $y \le \log T$ a real number, and f a completely multiplicative function with values on the unit circle $\mathbb{U}$. If $k \le y/(\log y)^2$ is a positive integer and $\alpha = y/k$, then*

$$\begin{aligned}
I(k) :&= \frac{1}{T}\int_T^{2T}\left|L_f(1+it,y) + R_y\right|^{2k} dt\\
&= (2R_y)^{2k}\exp\left(\frac{k}{\log k}\left(-\log(\alpha) + O\left(1 + \frac{(\log\alpha)^2}{\log k}\right)\right)\right),
\end{aligned}$$

PROOF. First

$$I(k) = \frac{1}{T}\int_T^{2T} (L_f(1+it,y)+R_y)^k \overline{(L_f(1+it,y)}+R_y)^k dt$$
$$= \sum_{0\le l,m\le k} \binom{k}{l}\binom{k}{m} R_y^{2k-l-m} \frac{1}{T}\int_T^{2T} L_f(1+it,y)^l \overline{L_f(1+it,y)}^m dt.$$

Therefore by Theorem 3.5.1, $I(k)$ equals

$$\sum_{0\le l,m\le k} \binom{k}{l}\binom{k}{m} R_y^{2k-l-m} \sum_{n\in S(y)} \frac{d_l(n)d_m(n)}{n^2} + O\left((R_y+1)^{2k}\exp\left(-\frac{\log T}{4\log_2 T}\right)\right).$$

Now $k \le y/(\log y)^2 \le \log T/(\log_2 T)^2$, and we know that $R_y \sim e^\gamma \log y$, thus

$$(R_y+1)^{2k}\exp\left(-\frac{\log T}{4\log_2 T}\right) \le \exp\left(-\frac{\log T}{5\log_2 T}\right).$$

We divide the main term into two parts : central terms which correspond to $l = m$, and non-central terms $l \neq m$.

The lower bound. Since the contribution of the non-central terms is positive, we have

$$I(k) \ge \sum_{0\le l\le k} \binom{k}{l}^2 R_y^{2k-2l} \sum_{n\in S(y)} \frac{d_l(n)^2}{n^2} + O\left(\exp\left(-\frac{\log T}{5\log_2 T}\right)\right).$$

Since all the terms are positive, we consider only the contribution of $l = [k/2]$. Then what remains only is to evaluate $\sum_{n\in S(y)} d_l(n)^2/n^2$. This has been done in **[GS4]** (see Theorem 3). Indeed Granville and Soundararajan proved that

$$\sum_{n\in S(y)} \frac{d_l(n)^2}{n^2} = \prod_{p\le l}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-2l} \exp\left(\frac{2l}{\log l}\left(C + O\left(\frac{l}{y}+\frac{1}{\log l}\right)\right)\right), \quad (3.6.4)$$

where C is the same constant as equation (3.1.3). By (3.6.4) we get

$$I(k) \ge \binom{k}{l}^2 R_y^{2k-2l} \prod_{p\le l}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-2l} \exp\left(\frac{2l}{\log l}\left(C + O\left(\frac{l}{y}+\frac{1}{\log l}\right)\right)\right).$$

First by Stirling's formula we have $\binom{k}{l} \gg 2^k/\sqrt{k}$. Moreover since $\log l/\log y = 1 - \log(2\alpha)/\log y + O(1/\log^2 y)$, then

$$\prod_{p\le l}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-2l} = (R_y)^{2l}\exp\left(-2l\frac{\log(2\alpha)}{\log y}\left(1+O\left(\frac{\log\alpha}{\log y}\right)\right)\right).$$

Thus we deduce that

$$I(k) \ge \frac{1}{\sqrt{k}}(2R_y)^{2k}\exp\left(\frac{k}{\log k}\left(-\log(\alpha) + O\left(1+\frac{(\log\alpha)^2}{\log k}\right)\right)\right),$$

which proves the lower bound.

The upper bound. Using Cauchy's inequality, we get that

$$\sum_{0\le l,m\le k}\binom{k}{l}\binom{k}{m}R_y^{2k-l-m}\sum_{n\in S(y)}\frac{d_l(n)d_m(n)}{n^2}$$

$$\le\sqrt{\left(\sum_{0\le m\le k}\sum_{0\le l\le k}\binom{k}{l}^2R_y^{2k-2l}\sum_{n\in S(y)}\frac{d_l(n)^2}{n^2}\right)^2}$$

$$=(k+1)\sum_{0\le l\le k}\binom{k}{l}^2R_y^{2k-2l}\sum_{n\in S(y)}\frac{d_l(n)^2}{n^2}.$$

Therefore

$$I(k)\le(k+2)\sum_{0\le l\le k}\binom{k}{l}^2R_y^{2k-2l}\sum_{n\in S(y)}\frac{d_l(n)^2}{n^2}.$$

Thus, by equation (3.6.4) we deduce that $I(k)$ is

$$\le(k+2)\sum_{0\le l\le k}\binom{k}{l}^2R_y^{2k-2l}\prod_{p\le l}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-2l}\exp\left(\frac{2l}{\log l}\left(C+O\left(\frac{l}{y}+\frac{1}{\log l}\right)\right)\right)$$

$$\le R_y^{2k}\sum_{0\le l\le k}\binom{k}{l}^2\prod_{k\le p\le y}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{2l}\exp\left(O\left(\frac{k}{\log k}\right)\right)$$

$$=R_y^{2k}\sum_{0\le l\le k}\binom{k}{l}^2\exp\left(\frac{2l}{\log k}\left(-\log\alpha+O\left(\frac{(\log\alpha)^2}{\log k}\right)\right)+O\left(\frac{k}{\log k}\right)\right).$$

Let

$$f(l)=\binom{k}{l}^2\exp\left(-\frac{2l\log\alpha}{\log k}\right).$$

By Stirling's formula, one has

$$\begin{aligned}\log f(l)=&2(k\log k-(k-l)\log(k-l)-l\log l)-\log 2\pi\\&+\log k-\log(k-l)-\log l-\frac{2l\log\alpha}{\log k}+o(1).\end{aligned}$$

Differentiating the main term of this formula with respect to l, we deduce that the maximum of f, occurs for $l=k/2(1+O(\log\alpha/\log k))$. Thus

$$f(l)\le 2^{2k}\exp\left(\frac{k}{\log k}\left(-\log(\alpha)+O\left(1+\frac{(\log\alpha)^2}{\log k}\right)\right)\right),$$

which implies the upper bound. $\square$

PROOF OF THEOREM 3.2.1. First, by Lemma 3.3.4 (with $A(y) = \log_2 y$) and Lemma 3.6.1, we have

$$\begin{aligned} M(\theta, y) =& \text{meas}\left\{t \in [T, 2T] : L_\psi(1+it, y) = R_y\left(1 + O\left(\frac{1}{\log_2 y}\right)\right)\right\} \\ &+ O\left(T \exp\left(-\frac{y \log_2 y}{10^4 \log y}\right)\right), \end{aligned}$$

where $\psi = \theta / \log_2 y$ as in Lemma 3.6.1. Let z be a complex number verifying $|z| \leq 1$ and $|z+1| \geq 2 - A\epsilon$, for some positive constant A. Then $z = 1 + O(\sqrt{\epsilon})$ (where the constant in the O depends only on A). Moreover if $z - 1 = O(\epsilon)$ then $|z+1| \geq 2 - B\epsilon$ where B depends only on the constant in the O. Thus there exist some positive constants c_1 and c_2 for which

$$M_2 + O\left(T \exp\left(-\frac{y \log_2 y}{10^4 \log y}\right)\right) \leq M(\theta, y) \leq M_1 + O\left(T \exp\left(-\frac{y \log_2 y}{10^4 \log y}\right)\right), \tag{3.6.5}$$

where

$$M_2 := \text{meas}\{t \in [T, 2T] : |L_\psi(1+it, y) + R_y| \geq 2R_y\left(1 - \frac{c_2}{(\log_2 y)^2}\right)\},$$

and

$$M_1 := \text{meas}\{t \in [T, 2T] : |L_\psi(1+it, y) + R_y| \geq 2R_y\left(1 - \frac{c_1}{4 \log_2 y}\right)\}.$$

The lower bound. For a positive integer k, we have

$$TI(k) \leq (2R_y)^{2k} M_2 + (2R_y)^{2k} \exp\left(-2c_2 \frac{k}{(\log_2 y)^2}\right)(T - M_2).$$

Now by Theorem 3.6.1, if $k \leq y/(\log y)^2$, and $\alpha = y/k$, we get

$$T \exp\left(\frac{k}{\log k}\left(-\log(\alpha) + O\left(1 + \frac{(\log \alpha)^2}{\log k}\right)\right)\right) - T \exp\left(-2c_2 \frac{k}{(\log_2 y)^2}\right) \leq M_2.$$

Choosing $k = [\exp(\log y - c_2 \log y / (\log_2 y)^2)]$, we deduce

$$M_2 \geq 2T \exp\left(-\exp\left(\log y - c_2 \frac{\log y}{(\log_2 y)^2}\right)\right). \tag{3.6.6}$$

The upper bound. Similarly, for a positive integer k we have

$$(2R_y)^{2k} \exp\left(-c_1 \frac{k}{\log_2 y}\right) M_1 \leq TI(k).$$

Then if $k \le y/(\log y)^2$, and $\alpha = y/k$, we get by Theorem 3.6.1 that

$$M_1 \le T \exp\left(c_1 \frac{k}{\log_2 y} + \frac{k}{\log k}\left(-\log(\alpha) + O\left(1 + \frac{(\log \alpha)^2}{\log k}\right)\right)\right).$$

Now by choosing $k = [\exp(\log y - 2c_1 \log y/\log_2 y)]$, we have that

$$M_1 \le \frac{1}{2} T \exp\left(-\exp\left(\log y - c_1 \frac{\log y}{\log_2 y}\right)\right). \tag{3.6.7}$$

Finally from (3.6.5), (3.6.6) and (3.6.7) we deduce that

$$T \exp\left(-y^{1-c_2/(\log_2 y)^2}\right) \le M(\theta, y) \le T \exp\left(-y^{1-c_1/\log_2 y}\right).$$

□

3.7. Random Euler products and their distribution

We define $L(1, X, y) := \prod_{p \le y} (1 - X(p)/p)^{-1}$. By the Central Limit Theorem, $L(1, X, y)$ converges to $L(1, X)$ with probability 1, as $y \to \infty$. However we want a more accurate result which quantify the rate of this convergence. Let Ω be the probability space on which $\{X(p)\}_{p \text{ prime}}$ are defined. For a real number $y > 2$, define

$$D(y) := \left\{\omega \in \Omega : L(1, X(\omega)) = L(1, X(\omega), y)\left(1 + O\left(\frac{1}{\log y}\right)\right)\right\}.$$

Then we prove

Lemma 3.7.1. *Let y be large. We have*

$$1 - \text{Prob}(D(y)) \ll \exp\left(-\frac{y}{e \log y}\right).$$

PROOF. First we have

$$\prod_{p > y}\left(1 - \frac{X(p)}{p}\right)^{-1} = \exp\left(\sum_{\substack{p > y \\ n \ge 1}} \frac{X(p)^n}{np^n}\right) = \exp\left(\sum_{p > y} \frac{X(p)}{p} + O\left(\frac{1}{y}\right)\right).$$

Moreover

$$\mathbb{E}\left(\left|\sum_{p > y} \frac{X(p)}{p}\right|^{2k}\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{\substack{p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_k \\ p_i, q_j > y}} \frac{X(p_1) \dots X(p_k)\overline{X(q_1) \dots X(q_k)}}{p_1 \dots p_k q_1 \dots q_k}\right).$$

Now if $p_1...p_k = q_1...q_k$ then $\mathbb{E}(X(p_1)...X(p_k)\overline{X(q_1)...X(q_k)}) = 1$, otherwise this expectation is 0. This gives

$$\mathbb{E}\left(\left|\sum_{p>y}\frac{X(p)}{p}\right|^{2k}\right) \ll k!\left(\sum_{p>y}\frac{1}{p^2}\right)^k \leq \left(\frac{k}{y\log y}\right)^k.$$

Thus

$$\left(\frac{1}{\log y}\right)^{2k}\mathrm{Prob}\left(\left|\sum_{p>y}\frac{X(p)}{p}\right| > \frac{1}{\log y}\right) \leq \mathbb{E}\left(\left|\sum_{p>y}\frac{X(p)}{p}\right|^{2k}\right) \ll \left(\frac{k}{y\log y}\right)^k.$$

Finally we choose $k = y/(e\log y)$, which implies the result. □

To prove Theorem 3.2.3, we have to understand the correlation between the norm and the argument of short Euler products of degree 1. For $y > 2$ define

$$P_y := \log\prod_{p\leq y}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}.$$

We have

Lemma 3.7.2. *Let $\theta \ll 1$ and $\{x(p)\}_{p\leq y}$ a sequence of complex numbers on the unit circle, such that $\arg\prod_{p\leq y}(1-x(p)/p)^{-1} = \theta$. If*

$$\left|\prod_{p\leq y}\left(1-\frac{x(p)}{p}\right)^{-1}\right| = \prod_{p\leq y}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\exp(L),$$

then

$$L \leq -\frac{\theta^2}{2P_y}.$$

Moreover if y is large, there exists some real ψ verifying $\psi = \theta/P_y + O(\theta/P_y^2)$, and such that

$$\prod_{p\leq y}\left(1-\frac{e^{i\psi}}{p}\right)^{-1} = \exp(L+i\theta)\prod_{p\leq y}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1},$$

with

$$L = -\frac{\theta^2}{2P_y} + O\left(\frac{\theta^2}{P_y^2}\right).$$

PROOF. The first statement of the Lemma follows upon noting that $\log\prod_{p\le y}\left(1-\frac{x(p)}{p}\right)^{-1}=P_y+L+i\theta$, and

$$\left|\log\prod_{p\le y}\left(1-\frac{x(p)}{p}\right)^{-1}=\sum_{\substack{p\le y\\ k\ge 1}}\frac{x(p)^k}{kp^k}\right|\le P_y.$$

For the second statement, we search for ψ such that

$$\theta=\sum_{\substack{p\le y\\ k\ge 1}}\frac{\sin(k\psi)}{kp^k}.$$

By the uniform convergence of the last series, ψ exists and we have

$$\theta=P_y\sin\psi+\sum_{\substack{p\le y\\ k\ge 2}}\frac{\sin(k\psi)-\sin\psi}{kp^k}=\psi P_y+O(\psi+\psi^3P_y).$$

Thus $\psi=\theta/P_y+O(\theta/P_y^2)$, and finally

$$L=\sum_{\substack{p\le y\\ k\ge 1}}\frac{\cos(k\psi)-1}{kp^k}=(\cos\psi-1)P_y+\sum_{\substack{p\le y\\ k\ge 2}}\frac{\cos(k\psi)-\cos\psi}{kp^k}=-\frac{\psi^2}{2}P_y+O(\psi^2),$$

which completes the proof. □

PROOF OF THEOREM 3.2.3. For $c>0$, and y large enough we define the sets $B_\pm(c,\tau,y,\theta)$ by

$$B_+:=\left\{\omega\in\Omega:|L(1,X(\omega),y)|>e^\gamma\tau\left(1+\frac{c}{\log y}\right),|\arg L(1,X,y)|>\theta+\frac{c}{\log y}\right\},$$

$$B_-:=\left\{\omega\in\Omega:|L(1,X(\omega),y)|>e^\gamma\tau\left(1-\frac{c}{\log y}\right),|\arg L(1,X,y)|>\theta-\frac{c}{\log y}\right\}.$$

The upper bound . If c is a sufficiently large constant, we get

$$\Phi(\tau,\theta)\le\operatorname{Prob}(B_-(c,\tau,y,\theta)\cap D(y))+\operatorname{Prob}(D^c(y)).\qquad(3.7.1)$$

Let $C_3>0$ be a suitably large constant and choose

$$\tau=\log y\exp\left(-\frac{\theta^2}{2P_y}+2C_3\frac{\theta^2}{P_y^2}\right).$$

Take $\omega \in B_-(C_3,\tau,y,\theta)$, and put $L(1,X(\omega),y) = \prod_{p\le y}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\exp(L+i\phi)$. Then $|\phi| > \theta - \dfrac{C_3}{\log y}$, and

$$|L(1,X(\omega),y)| > e^{\gamma}\tau\left(1-\frac{C_3}{\log y}\right) > \prod_{p\le y}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\exp\left(-\frac{\theta^2}{2P_y}+C_3\frac{\theta^2}{P_y^2}\right).$$

Therefore

$$L > -\frac{\theta^2}{2P_y}+C_3\frac{\theta^2}{P_y^2} \ge \frac{-\phi^2}{2P_y}+C_3\frac{\theta^2}{P_y^2}-C_3\frac{\theta}{P_y\log y} > \frac{-\phi^2}{2P_y}.$$

This contradicts Lemma 3.7.2, which implies that $B_-(C_3,\tau,y,\theta)=\emptyset$. Thus from equation (3.7.1) and Lemma 3.7.1 we deduce that

$$\Phi(\tau,\theta) \le \mathrm{Prob}(D^c(y)) \ll \exp\left(-\frac{y}{e\log y}\right).$$

And finally replacing y by τ, we get

$$\Phi(\tau,\theta) \le \exp\left(-\frac{e^{\tau+\frac{\theta^2\tau}{2\log\tau}-3C_3\frac{\theta^2\tau}{\log^2\tau}}}{\tau}\right),$$

as desired.

The lower bound. By Lemma 3.7.1, if c is a sufficiently large constant, then

$$\begin{aligned}\Phi(\tau,\theta) &\ge \mathrm{Prob}(B_+(c,\tau,y,\theta)\cap D(y)) \ge \mathrm{Prob}(B_+(c,\tau,y,\theta)) + \mathrm{Prob}(D(y)) - 1\\ &\ge \mathrm{Prob}(B_+(c,\tau,y,\theta)) - \exp\left(-\frac{y}{3\log y}\right).\end{aligned} \tag{3.7.2}$$

Now put $X(p)=e^{i\theta_p}$, where the θ_p are independent random variables uniformly distributed on $(-\pi,\pi)$. Let $\widetilde{\theta} = \theta\,(1+1/P_y)$. By Lemma 3.7.2, there exists ψ verifying

$$\psi = \frac{\widetilde{\theta}}{P_y} + O\left(\frac{\widetilde{\theta}}{P_y^2}\right),$$

and such that

$$\prod_{p\le y}\left(1-\frac{e^{i\psi}}{p}\right)^{-1} = \exp(L+i\widetilde{\theta})\prod_{p\le y}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1},$$

where

$$L = -\frac{\widetilde{\theta}^2}{2P_y} + O\left(\frac{\widetilde{\theta}^2}{P_y^2}\right) = -\frac{\theta^2}{2P_y} + O\left(\frac{\theta^2}{P_y^2}\right).$$

We choose $\omega \in \Omega$ such that

$$\begin{cases} \psi - \dfrac{1}{(\log y)^{3/2}} < \theta_p(\omega) < \psi + \dfrac{1}{(\log y)^{3/2}} \quad \text{for} \quad p \le z, \\ \text{and} \quad \theta_p(\omega) \in (-\pi, \pi), \ \text{for } z < p \le y, \end{cases} \tag{3.7.3}$$

where $z = \dfrac{y}{8\log_2 y}$. In this case

$$\prod_{p\le y}\left(1-\frac{X(p)}{p}\right)^{-1} = \prod_{p\le y}\left(1-\frac{e^{i\psi}}{p}\right)^{-1}\exp\left(O\left(\frac{1}{(\log y)^{3/2}}\sum_{p\le z}\frac{1}{p}+\sum_{z<p\le y}\frac{1}{p}\right)\right).$$

And since

$$\sum_{z<p\le y}\frac{1}{p} \sim \log\left(\frac{\log y}{\log z}\right) = O\left(\frac{\log_3 y}{\log y}\right),$$

then

$$\frac{\prod_{p\le y}\left(1-\frac{X(p)}{p}\right)^{-1}}{\prod_{p\le y}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}} = \exp\left(-\frac{\theta^2}{2P_y} + i\left(\theta + \frac{\theta}{P_y}\right) + O\left(\frac{\theta^2}{P_y^2} + \frac{\log_3 y}{\log y}\right)\right).$$

Let $C_4 > 0$ be a suitably large constant, and choose

$$\tau = \log y \exp\left(-\frac{\theta^2}{2P_y} - 2C_4\frac{\theta^2}{P_y^2}\right).$$

In this case we have

$$\left|\prod_{p\le y}\left(1-\frac{X(p)}{p}\right)^{-1}\right| > e^{\gamma}\tau\left(1+\frac{C_4}{\log y}\right),$$

and

$$\left|\arg\prod_{p\le y}\left(1-\frac{X(p)}{p}\right)^{-1}\right| > \theta + \frac{C_4}{\log y}.$$

Thus considering only these ω which satisfy equation (3.7.3) we deduce that

$$\text{Prob}(B_+(c,\tau,y,\theta)) \ge \left(\frac{2}{2\pi(\log y)^{3/2}}\right)^{\pi(z)} \ge \exp\left(-\frac{y}{4\log y} + O\left(\frac{y}{\log y^2}\right)\right).$$

Finally by equation (3.7.2) we get

$$\Phi(\tau,\theta) \ge \exp\left(-\frac{y}{3\log y}\right) \ge \exp\left(-\frac{e^{\tau + \frac{\theta^2\tau}{2\log\tau} + 3C_4\frac{\theta^2\tau}{\log^2\tau}}}{\tau}\right).$$

Thus upon taking $c_3 = 3C_3$, and $c_4 = 3C_4$, we deduce the result. $\square$

PROOF OF THEOREM 3.2.6. For the upper bound, the proof is the same as for Theorem 3.2.3, replacing Lemma 3.7.1 by Lemma 3.3.4 (taking $A(y) = \log y$). For the lower bound we use Theorems 3.2.4 and 3.2.5 to make (3.7.3) holds in the appropriate ranges, and follow the same lines as with Theorem 3.2.3. $\square$

3.8. FOURIER ANALYSIS ON THE n-DIMENSIONAL TORUS

We begin by presenting the following construction due to Barton-Montgomery-Vaaler **[BMV]**. Let $N \in \mathbb{N}$. If u, v are real numbers with $0 < u < v < 1$, we define the modified characteristic function $\phi_{u,v} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ by

$$\phi_{u,v}(x) = \begin{cases} 1 \text{ if } u < x - n < v \text{ for } n \in \mathbb{Z}, \\ \frac{1}{2} \text{ if } u - x \in \mathbb{Z} \text{ or } v - x \in \mathbb{Z}, \\ 0 \text{ otherwise.} \end{cases}$$

Put $\mathbf{u} = (u_1, u_2, ..., u_N)$ and $\mathbf{v} = (v_1, v_2, ..., v_N)$ where $0 < u_n < v_n < 1$. If $\mathbf{L} = (L_1, ..., L_N) \in \mathbb{N}^N$, we let $\mathcal{B}(\mathbf{L})$ to be the set of all functions $\mathbf{\Phi}_{\mathbf{u},\mathbf{v}} : (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^N \to \mathbb{R}$ of the form

$$\mathbf{\Phi}_{\mathbf{u},\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \prod_{n=1}^{N} \phi_{u_n,v_n}(x_n),$$

and such that $(v_n - u_n)(L_n + 1) \in \mathbb{N}$ for all $1 \leq n \leq N$. The principal result of Barton-Montgomery-Vaaler is the following :

Theorem 3.8.1. *Let $\mathbf{L} = (L_1, ..., L_N) \in \mathbb{N}^N$ and $\mathbf{\Phi}_{\mathbf{u},\mathbf{v}} \in \mathcal{B}(\mathbf{L})$.*
There exist trigonometric polynomials $A(\mathbf{x})$, $B(\mathbf{x})$ and $C(\mathbf{x})$ of N variables, with Fourier coefficients supported on the lattice

$$\mathcal{L} := \mathcal{L}(L) = \{l \in \mathbb{Z}^N : |l_n| \leq L_n, \ n = 1, 2, ..., N\},$$

such that

$$\hat{C}(0) = \prod_{n=1}^{N}\left(1 + \frac{1}{(v_n - u_n)(L_n+1)}\right)\prod_{n=1}^{N}(v_n - u_n),$$

$$\hat{A}(0) = \prod_{n=1}^{N}(v_n - u_n),$$

$$\hat{B}(0) = \left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(v_n - u_n)(L_n+1)}\right)\prod_{n=1}^{N}(v_n - u_n),$$

and

$$A(\mathbf{x}) - B(\mathbf{x}) \le \mathbf{\Phi}_{\mathbf{u},\mathbf{v}}(\mathbf{x}) \le C(\mathbf{x}) \qquad \text{for all } \mathbf{x} \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^N.$$

Our goal is to prove Theorem 3.2.4 in the best possible uniform region for $N = \pi(y)$. To this end we prove the following Lemma which establishes the optimal choice of the lattice $\mathcal{L}$ and thus of the degrees of the trigonometric polynomials we use later in the proof of Theorem 3.2.4.

Lemma 3.8.1. *If $N = o\left(\sqrt{\log T/\log_2 T}\right)$, as $T \to \infty$, and $\{\delta_n\}_{1\le n\le N}$ are real numbers between 0 and 1 such that*

$$\min_{1\le n\le N}\delta_N > \delta := \left(\frac{N}{\sqrt{\log T/\log_2 T}}\right)^{2/3},$$

then there exist positive integers $L_1, L_2, ..., L_N$ verifying

$$p_1^{L_1}p_2^{L_2}...p_N^{L_N} \le T^{1/2}, \tag{3.8.1}$$

and

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\delta_n(L_n+1)} = o(1). \tag{3.8.2}$$

Moreover if equations (3.8.1) and (3.8.2) hold for some positive integers $L_1, L_2, ..., L_N$, and any real numbers $\{\delta_n\}_{1\le n\le N}$ between 0 and 1, then $N = o\left(\sqrt{\log T/\log_2 T}\right)$.

PROOF. Let $L = [\log T/2N]$. If $L_i = [L/\log p_i]$, then

$$\sum_{n=1}^{N}L_n\log p_n \le LN \le \log T/2,$$

which implies equation (3.8.1). Moreover

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\delta_n(L_n+1)} \ll \frac{1}{\delta L}\sum_{n=1}^{N}\log p_n \ll \frac{N\log N}{\delta L} \ll \frac{N^{4/3}\log N}{(\log T)^{2/3}(\log_2 T)^{1/3}} = o(1),$$

and so equation (3.8.2) holds.

Now suppose that there exist positive integers $L_1, L_2, ..., L_N$, and real numbers $\{\delta_n\}_{1\le n\le N}$ between 0 and 1, which verify equations (3.8.1) and (3.8.2). Then

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{L_n} = o(1), \quad \text{and} \quad \sum_{n=1}^{N} L_n \log p_n \le \frac{\log T}{2}.$$

Thus by Cauchy's inequality, we have

$$\left(\sum_{n=1}^{N} \sqrt{\log p_n}\right)^2 \le \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{L_n}\right)\left(\sum_{n=1}^{N} L_n \log p_n\right) = o(\log T).$$

Finally by partial summation we get

$$N\sqrt{\log N} \ll \sum_{n=1}^{N} \sqrt{\log p_n} = o(\sqrt{\log T}),$$

which implies the result. □

To prove Theorem 3.2.5 we need the following Lemma

Lemma 3.8.2. *Assume Conjecture 3.2.1. Let $N \le \log T/(10\log_2 T)$, as $T \to \infty$. Put $L = [N(\log T)^2]$. If $|l_i| \le L$, where $\{l_i\}_{1\le i\le N}$ are integers not all zero, then*

$$|l_1 \log p_1 + l_2 \log p_2 + ... + l_N \log p_N| \ge T^{-1/2}.$$

Proof. Let $\epsilon = 1/100$. Since $\{\log p\}_{p \text{ prime}}$ are linearly independent over $\mathbb{Q}$, there exists a constant $c > 0$ such that

$$\begin{aligned}|l_1 \log p_1 + l_2 \log p_2 + ... + l_N \log p_N| &> \frac{c^N L}{(L^N p_1 ... p_N)^{1+\epsilon}} \\ &> \exp(-(1+2\epsilon)N\log N - (1+\epsilon)N\log L) \\ &> \exp\left(-\frac{\log T}{2}\right).\end{aligned}$$

□

Proof of Theorem 3.2.4. Let $a_j < b_j$ be the endpoints of I_j, and L_j be positive integers satisfying the conditions of Lemma 3.8.1. There exist integers $0 \le r_i, s_i \le L_i + 1$ such that $u_j := r_j/(L_j+1) \le a_j \le x_j := (r_j+1)/(L_j+1)$

and $y_j := s_j/(L_j+1) \le b_j \le v_j := (s_j+1)/(L_j+1)$. Thus for all $(z_1, z_2, ..., z_N) \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^N$, we have

$$\mathbf{\Phi}_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(\mathbf{z}) := \prod_{j=1}^{N} \phi_{x_j,y_j}(z_j) \le \prod_{j=1}^{N} \phi_{a_j,b_j}(z_j) \le \mathbf{\Phi}_{\mathbf{u},\mathbf{v}}(\mathbf{z}) := \prod_{j=1}^{N} \phi_{u_j,v_j}(z_j).$$

Moreover $\mathbf{\Phi}_{\mathbf{x},\mathbf{y}}, \mathbf{\Phi}_{\mathbf{u},\mathbf{v}} \in \mathcal{B}(\mathbf{L})$. Hence

$$\int_T^{2T} \prod_{j=1}^{N} \phi_{x_j,y_j} \left(\left\{ \frac{t \log p_j}{2\pi} \right\} \right) dt \le M(I_1, ..., I_N) \le \int_T^{2T} \prod_{j=1}^{N} \phi_{u_j,v_j} \left(\left\{ \frac{t \log p_j}{2\pi} \right\} \right) dt.$$

Let $C(\mathbf{z})$ be the trigonometric polynomial as in Theorem 3.8.1, which corresponds to $\mathbf{\Phi}_{\mathbf{u},\mathbf{v}}$. Thus

$$\begin{aligned} M(I_1, ..., I_N) &\le \int_T^{2T} C \left(\left\{ \frac{t \log p_1}{2\pi} \right\}, \left\{ \frac{t \log p_2}{2\pi} \right\}, ..., \left\{ \frac{t \log p_N}{2\pi} \right\} \right) dt \\ &= \int_T^{2T} \sum_{l \in \mathcal{L}} \hat{C}(l) \exp\left(it(l_1 \log p_1 + ... + {}_N \log p_N) \right) dt \\ &= \sum_{l \in \mathcal{L}} \hat{C}(l) \int_T^{2T} \exp\left(it \log\left(p_1^{l_1} ... p_N^{l_N} \right) \right) dt. \end{aligned}$$

The diagonal term which corresponds to $l = 0$, equals $T\hat{C}(0)$. Since $L_1, ..., L_N$ verify the assertion (3.8.1) of Lemma 3.8.2, it follows that the off-diagonal terms contribute at most

$$\begin{aligned} \sum_{0 \ne l \in \mathcal{L}} |\hat{C}(l)| \frac{2}{\left| \log\left(p_1^{l_1} ... p_N^{l_N} \right) \right|} &\le \left(\prod_{n=1}^{N} 3L_n \right) \hat{C}(0) p_1^{L_1} ... p_n^{L_n} \\ &\le \hat{C}(0) \left(p_1^{L_1} ... p_n^{L_n} \right)^{3/2} \le T^{3/4} \hat{C}(0). \end{aligned}$$

Finally since the assertion (3.8.2) holds for our choices of δ_j, we have

$$\begin{aligned} M(I_1, ..., I_N) &\le T\hat{C}(0) \left(1 + O\left(T^{-\frac{1}{4}} \right) \right) \\ &= T \prod_{n=1}^{N} (v_n - u_n) \prod_{n=1}^{N} \left(1 + \frac{1}{(v_n - u_n)(L_n + 1)} \right) \left(1 + O\left(T^{-\frac{1}{4}} \right) \right) \\ &= T \left(\prod_{n=1}^{N} \delta_n \right) \exp\left(O\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{L_j} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\delta_j L_j} \right) \right) \left(1 + O\left(T^{-\frac{1}{4}} \right) \right) \\ &= T \left(\prod_{n=1}^{N} \delta_n \right) (1 + o(1)). \end{aligned}$$

For the lower bound, we follow the same lines using the corresponding trigonometric polynomials $A(\mathbf{z})$ and $B(\mathbf{z})$ for $\mathbf{\Phi}_{\mathbf{x},\mathbf{y}}$, as in Theorem 3.8.1. Indeed we have

$$\begin{aligned}
M(I_1,...,I_N) &\geq \int_T^{2T} (A-B)\left(\left\{\frac{t\log p_1}{2\pi}\right\},\left\{\frac{t\log p_2}{2\pi}\right\},...,\left\{\frac{t\log p_N}{2\pi}\right\}\right) dt \\
&= T(\hat{A}(0)-\hat{B}(0))\left(1+O\left(T^{-\frac{1}{4}}\right)\right) \\
&= T\prod_{n=1}^{N}(y_n-x_n)\left(1-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(y_n-x_n)(L_n+1)}\right)\left(1+O\left(T^{-\frac{1}{4}}\right)\right) \\
&= T\left(\prod_{n=1}^{N}\delta_n\right)(1+o(1)).
\end{aligned}$$

This completes the proof. □

Proof of Theorem 3.2.5. The proof is exactly the same as Theorem 3.2.4, taking $L_j = [N(\log T)^2]$ and using Lemma 3.8.2 instead of Lemma 3.8.1. □

3.9. The normal distribution of $\arg\zeta(1+it)$

First we prove the following Lemma which shows that the dominant contribution to the $2k$-th moment of $|\zeta(1+it)|$ comes from the values of t for which $|\zeta(1+it)| \approx e^{\gamma}\tau$, provided that $k = e^{\tau-1-C}$, where C is defined by equation (3.1.3).

Lemma 3.9.1. *Let T, τ, ϵ, k, and $\Omega_T(\tau)$ be as in Theorem 3.2.7. We have*

$$\frac{1}{T}\int_T^{2T}|\zeta(1+it)|^{2k}dt = \frac{1}{T}\int_{\Omega_T(\tau)}|\zeta(1+it)|^{2k}dt\left(1+O\left(\exp\left(-\frac{2k}{(\log k)^{3/2}}\right)\right)\right).$$

Proof. Upon integrating by parts, we get

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{T}\int_{\{t\in[T,2T]:\ |\zeta(1+it)|<e^{\gamma}(\tau-\epsilon)\}}|\zeta(1+it)|^{2k}dt = -e^{2k\gamma}\int_0^{\tau-\epsilon}x^{2k}d\Phi_T(x) \\
&= e^{2k\gamma}\left(-(\tau-\epsilon)^{2k}\Phi_T(\tau-\epsilon)+2k\int_0^{\tau-\epsilon}\Phi_T(x)x^{2k-1}dx\right).
\end{aligned} \tag{3.9.1}$$

Similarly one has

$$\begin{aligned}&\frac{1}{T}\int_{\{t\in[T,2T]:\ |\zeta(1+it)|>e^{\gamma}(\tau+\epsilon)\}}|\zeta(1+it)|^{2k}dt\\&=e^{2k\gamma}\left((\tau+\epsilon)^{2k}\Phi_T(\tau+\epsilon)+2k\int_{\tau+\epsilon}^{\infty}\Phi_T(x)x^{2k-1}dx\right),\end{aligned}\tag{3.9.2}$$

and

$$\frac{1}{T}\int_T^{2T}|\zeta(1+it)|^{2k}dt=e^{2k\gamma}\left(2k\int_0^{\infty}\Phi_T(x)x^{2k-1}dx\right).\tag{3.9.3}$$

In **[GS4]**, Granville and Soundararajan proved that

$$2k\int_0^{\infty}\Phi_T(x)x^{2k-1}dx=(\log k)^{2k}\exp\left(\frac{2k}{\log k}\left(C+O\left(\frac{1}{\log k}\right)\right)\right),$$

together with

$$\int_0^{\tau-\epsilon}\Phi_T(x)x^{2k-1}dx\ll\exp\left(-\frac{2k}{(\log k)^{3/2}}\right)\int_0^{\infty}\Phi_T(x)x^{2k-1}dx,\tag{3.9.4}$$

and

$$\int_{\tau+\epsilon}^{\infty}\Phi_T(x)x^{2k-1}dx\ll\exp\left(-\frac{2k}{(\log k)^{3/2}}\right)\int_0^{\infty}\Phi_T(x)x^{2k-1}dx.\tag{3.9.5}$$

By equation (3.1.2) we deduce that

$$\begin{aligned}&\frac{(\tau+\epsilon)^{2k}\Phi_T(\tau+\epsilon)}{2k\displaystyle\int_0^{\infty}\Phi_T(x)x^{2k-1}dx}\\&=\left(\frac{\tau-C-1}{\tau+\epsilon}\right)^{-2k}\exp\left(-\frac{2e^{\tau+\epsilon-C-1}}{\tau+\epsilon}-\frac{2kC}{\log k}+O\left(\frac{k}{(\log k)^{3/2}}\right)\right)\\&=\exp\left(\frac{2k(1+C+\epsilon)}{\tau+\epsilon}-\frac{2ke^{\epsilon}}{\tau+\epsilon}-\frac{2kC}{\log k}+O\left(\frac{k}{(\log k)^{3/2}}\right)\right)\\&=\exp\left(\frac{2k}{\tau}\left(1+\epsilon-e^{\epsilon}\right)+O\left(\frac{k}{(\log k)^{3/2}}\right)\right)\\&\ll\exp\left(-\frac{2k}{(\log k)^{3/2}}\right).\end{aligned}$$

Similarly we get

$$\frac{(\tau-\epsilon)^{2k}\Phi_T(\tau-\epsilon)}{2k\displaystyle\int_0^{\infty}\Phi_T(x)x^{2k-1}dx}\ll\exp\left(-\frac{2k}{(\log k)^{3/2}}\right).$$

Finally using equations (3.9.1)-(3.9.5), we deduce the result. □

PROOF OF THEOREM 3.2.7. Let x be a fixed real number, and define

$$\Lambda'_T(k,x) := \left\{ t \in [T,2T] : \frac{\arg\zeta(1+it)}{\sqrt{\frac{\log_2 k}{2k}}} < x \right\}.$$

We consider the following distribution function

$$\nu'_{T,k}(x) := \frac{\displaystyle\int_{\Lambda'_T(k,x)} |\zeta(1+it)|^{2k} dt}{\displaystyle\int_T^{2T} |\zeta(1+it)|^{2k} dt}.$$

The characteristic function of $\nu'_{T,k}$ is

$$\psi_{T,k}(\eta) := \frac{\displaystyle\int_T^{2T} |\zeta(1+it)|^{2k} \exp\left(i\eta \frac{\arg\zeta(1+it)}{\sqrt{\frac{\log_2 k}{2k}}} \right) dt}{\displaystyle\int_T^{2T} |\zeta(1+it)|^{2k} dt}.$$

Let $\xi = \dfrac{\eta}{\sqrt{\frac{\log_2 k}{2k}}}$. One can see that $\exp(i \arg\zeta(1+it)) = \zeta(1+it)^{1/2}/\zeta(1-it)^{1/2}$, which implies

$$\psi_{T,k}(\eta) = \frac{\displaystyle\frac{1}{T}\int_T^{2T} \zeta(1+it)^{k+\xi/2}\zeta(1-it)^{k-\xi/2} dt}{\displaystyle\frac{1}{T}\int_T^{2T} |\zeta(1+it)|^{2k} dt}.$$

Now uniformly for $|\xi| \le k$, we have by Theorem 3.2.2

$$\psi_{T,k}(\eta) = \frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_{k+\xi/2}(n) d_{k-\xi/2}(n)}{n^2}}{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_k^2(n)}{n^2}} + O\left(\exp\left(-\frac{\log T}{2\log_2 T} \right) \right).$$

Finally by Proposition 3.4.2, and replacing ξ by η, we deduce that uniformly for $|\eta| \le \sqrt{\frac{\log_2 k}{2}}$, we have

$$\psi_{T,k}(\eta) = \exp\left(-\frac{\eta^2}{2} - \frac{c_0\eta^2}{2\log_2 k} + O\left(\frac{\eta^2}{\sqrt{\log k}} + \frac{\eta^4}{\log_2^2 k} \right) \right) + O\left(\exp\left(-\frac{\log T}{2\log_2 T} \right) \right).$$

Let $\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2} dy$ be the normal distribution function, and $\psi(\eta) = e^{-\eta^2/2}$ its characteristic function. Then by the Berry-Esseen Theorem (Berry **[Be]**, Esseen **[Es]**),

$$|\nu'_{T,k}(x) - \nu(x)| \leq K \int_{-R}^{R} \frac{|\psi_{T,k}(\eta) - \psi(\eta)|}{\eta} d\eta + \frac{B}{R},$$

for all $R > 0$, where B and K are absolute constants. We take $R = \sqrt{\frac{\log_2 k}{2}}$, which implies that

$$|\nu'_{T,k}(x) - \nu(x)| \ll \int_{-R}^{R} \frac{e^{-\eta^2/2}\eta^2}{\eta \log_2 k} d\eta + \frac{1}{\sqrt{\log_2 k}} \ll \frac{1}{\sqrt{\log_2 k}}.$$

Finally by Lemma 3.9.1, we have

$$\frac{1}{T}\int_{\Omega_T(\tau)} |\zeta(1+it)|^{2k} dt = \frac{1}{T}\int_{T}^{2T} |\zeta(1+it)|^{2k} dt \left(1 + O\left(\exp\left(-\frac{2k}{(\log k)^{3/2}}\right)\right)\right),$$

and

$$\begin{aligned} \frac{1}{T}\int_{\Lambda'_T(k,x)} &|\zeta(1+it)|^{2k} dt - \frac{1}{T}\int_{\Lambda_T(\tau,x)} |\zeta(1+it)|^{2k} dt \\ &\ll \exp\left(-\frac{2k}{(\log k)^{3/2}}\right) \frac{1}{T}\int_{T}^{2T} |\zeta(1+it)|^{2k} dt. \end{aligned} \tag{3.9.6}$$

Therefore

$$\nu_{T,\tau}(x) = \nu'_{T,k}(x) + O\left(\exp\left(-\frac{2k}{(\log k)^{3/2}}\right)\right),$$

which completes the proof. □

3.10. Analogous results for $L(1,\chi)$

In this section we present the analogous results for $L(1,\chi)$. Although we expect the behavior of the sets of values of $\zeta(1+it)$ and these of $L(1,\chi)$ should be the same, one should note that there are some differences between these two sets. Indeed the first set is continuous and the moments are integrals, while the second one is discrete and the moments are sums. Also an extra difficulty in the case of $L(1,\chi)$, is the possible existence of *Landau-Siegel* zeros, corresponding to exceptional *Siegel* characters χ defined as follows

$$\chi \bmod q: \text{ there exists } s \text{ with } \operatorname{Re}(s) \geq 1 - \frac{c}{\log q(\operatorname{Im}(s)+2)} \text{ and } L(s,\chi) = 0,$$

for some small constant $c > 0$. Let S be the set of such characters. One expects this set to be empty, but what is known unconditionally (see **[Da]**), is that such characters are very rare. Indeed each χ must be real (thus of order 2), and between any two powers of 2 there is at most one fundamental discriminant D with $\left(\frac{D}{\cdot}\right) \in S$. Throughout this section q will denote a large prime number. In this case there is at most one exceptional character χ of conductor q.

Using similar ideas, we show the existence of large values of $L(1,\chi)$ in every direction

Theorem 3.10.1. *Fix $\theta \in (-\pi,\pi]$. If $1 \ll y \leq \log q/\log_2 q$ is a real number, let $N(\theta,y)$ be the number of non-principal characters $\chi \notin S$ of conductor q for which*

$$L(1,\chi) = e^{i\theta}\prod_{p\leq y}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\left(1+O\left(\frac{1}{\log_2 y}\right)\right).$$

Then there exist two positive constants c_6, c_7 (depending on the constant in the O) for which

$$\phi(q)\exp\left(-y^{1-c_6/(\log_2 y)^2}\right) \leq N(\theta,y) \leq \phi(q)\exp\left(-y^{1-c_7/\log_2 y}\right).$$

PROOF. We follow exactly the proof of Theorem 3.2.1 : first we prove the analogue of Theorem 3.5.1 to get asymptotic for moments of short Euler products $\prod_{p\leq y}(1-f(p)\chi(p)/p)^{-1}$, where f is a completely multiplicative function with values on the unit circle. Then we prove the analogue of Lemma 3.6.1, replacing p^{-it} by $\chi(p)$ (the proof is the same since $|\chi(p)| = 1$). What remains is to prove the analogue of Lemma 3.3.4, which can be done using the zero free region and zero density estimates of $L(s,\chi)$, if $\chi \notin S$. $\square$

As mentioned in the introduction, using a different approach , Granville and Soundararajan (unpublished) proved the existence of large values (and small ones) in every direction. Indeed what they established is the following

Theorem 3.10.2 (Granville-Soundararajan). *If z is any complex number such that*

$$\frac{\pi^2}{6e^{\gamma}\log_2 q}\left(1+O\left(\frac{1}{\log_3 q}\right)\right) \leq |z| \leq e^{\gamma}\log_2 q\left(1+O\left(\frac{1}{\log_3 q}\right)\right),$$

then the number of non-principal characters $\chi \notin S$ *of conductor* q *for which*

$$L(1,\chi) = z\left(1 + O\left(\frac{\log_3 q}{\log_2 q}\right)\right),$$

is at least $q^{1-1/\log_2 q}$.

Also in their unpublished draft, they proved an analogue of Theorem 3.2.2 for complex moments of $L(1,\chi)$

Theorem 3.10.3 (Granville-Soundararajan). *Fix* $\epsilon > 0$ *and suppose that* q *is a sufficiently large integer. Let* H *be a subgroup of the character group* G *for* $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ *with* $[G : H] \ll \exp\left(\log^{\epsilon/2} q\right)$. *Assume that there is an integer* $r \leq \log^{1-\epsilon} q$ *for which* $\chi^r \in H$ *for all* $\chi \in G$. *If* z_1 *and* z_2 *are complex numbers with* $|z_1|, |z_2| \leq \log q/r(\log_2 q)^3$, *and* ξ *is any character in* G *then, we have uniformly*

$$\frac{1}{|H_\xi|}\sum_{\chi \in H_\xi} L(1,\chi)^{z_1} L(1,\overline{\chi})^{z_2} = \sum_{\substack{n=1 \\ (n,q)=1}}^{\infty} \frac{d_{z_1}(n) d_{z_2}(n)}{n^2} + o(1),$$

where H_ξ *is the set of characters in* ξH *of order* > 1, *not belonging to* S.

If we restrict our selves to the case of q prime then using a similar approach as in Theorem 3.2.2, we have

Theorem 3.10.4. *Let* q *be a large prime. Then uniformly for all complex numbers* z_1, z_2 *in the region* $|z_1|, |z_2| \leq \log q/50(\log_2 q)^2$, *we have*

$$\frac{1}{\phi(q)} \sum_{\substack{\chi \pmod q \\ \chi \neq 1, \chi \notin S}} L(1,\chi)^{z_1} L(1,\overline{\chi})^{z_2} = \sum_{\substack{n=1 \\ (n,q)=1}}^{\infty} \frac{d_{z_1}(n) d_{z_2}(n)}{n^2} + O\left(\exp\left(-\frac{\log q}{2\log_2 q}\right)\right).$$

Proof. We follow the same lines as in the proof of Theorem 3.2.2. First by Lemma 2.3 of **[GS2]** (analogue of Lemma 3.3.5 for $\zeta(1+it)$), if χ is a non-principal character (mod q) not belonging to S, then

$$L(1,\chi)^z = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) \frac{d_z(n)}{n} e^{-n/Z} + O\left(\frac{1}{q}\right),$$

where $Z = \exp\left((\log q)^{10}\right)$ and z is any complex number with $|z| \leq (\log q)^2$. Let $k = \max\{[|z_1|] + 1, [|z_2|] + 1\}$, we have then

$$\frac{1}{\phi(q)} \sum_{\substack{\chi \pmod q \\ \chi \neq 1, \chi \notin S}} L(1,\chi)^{z_1} L(1,\overline{\chi})^{z_2}$$
$$= \sum_{n,m \geq 1} \frac{d_{z_1}(n) d_{z_2}(m)}{nm} e^{-(m+n)/Z} \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\substack{\chi \pmod q \\ \chi \neq 1, \chi \notin S}} \chi(n)\overline{\chi(m)} + O\left(\frac{(\log 3Z)^k}{q}\right). \tag{3.10.1}$$

We now extend the right side of (3.10.1) so as to include all characters (mod q). Since q is prime, S contains at most one element, thus by equation (3.4.2) the contribution of characters of S together with the principal character is bounded by

$$\frac{2}{\phi(q)} \left(\sum_{n \geq 1} \frac{d_k(n)}{n} e^{-n/Z} \right)^2 \ll \frac{(\log 3Z)^{2k}}{q}.$$

The contribution from the diagonal terms $m = n$ is

$$\sum_{\substack{n=1 \\ (n,q)=1}}^{\infty} \frac{d_{z_1}(n) d_{z_2}(n)}{n^2} e^{-2n/Z} = \sum_{\substack{n=1 \\ (n,q)=1}}^{\infty} \frac{d_{z_1}(n) d_{z_2}(n)}{n^2} + O\left(\frac{\zeta(3/2)^{k^2}}{\sqrt{Z}}\right),$$

by equation (3.5.3). Using the orthogonality relations for characters, we see that the off-diagonal terms $m \neq n$ satisfy $m \equiv n \pmod q$ and $(mn, q) = 1$, which imply $\max(m,n) > q$. Thus the contribution of these terms is bounded by

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_k(n)}{n} e^{-n/Z} \left(\max_{b \bmod q} \sum_{\substack{m > q \\ m \equiv b \bmod q}} \frac{d_k(m)}{m} e^{-m/Z} \right). \tag{3.10.2}$$

Now following the proof of Proposition 3.4.1 (using induction on k), we can prove that

$$\max_{b \bmod q} \sum_{\substack{m > q \\ m \equiv b \bmod q}} \frac{d_k(m)}{m} e^{-m/Z} \leq \frac{(\log 3Z)^k}{y}, \tag{3.10.3}$$

where $y = \exp(\log q / \log_2 q)$. Finally by equations (3.10.2) and (3.10.3) we deduce the result. □

Using Fourier analysis on the n-dimensional torus, and the construction of Barton-Montgomery-Vaaler **[BMV]**, we proved the uniform distribution of the values $\{p^{it} : t \in [T, 2T]\}_{p \leq y}$. We can use exactly the same ideas to prove that the values $\{\chi(p) : \chi \bmod q\}_{p \leq y}$ have the same behavior. Indeed we have

Theorem 3.10.5. *Let $2 < y$ be a real number. For each $1 \leq j \leq \pi(y)$, let $I_j \subset (0,1)$ be an open interval of length $\delta_j > 0$. Define*

$$N(I_1, ..., I_{\pi(y)}) := \left| \left\{ \chi \text{ mod } q : \left\{ \frac{\arg(\chi(p_j))}{2\pi} \right\} \in I_j, \text{ for all } 1 \leq j \leq \pi(y) \right\} \right|,$$

where p_j is the j-th smallest prime, and $\{\cdot\}$ denotes the fractional part. We have

$$N(I_1, ..., I_{\pi(y)}) \sim \phi(q) \prod_{j \leq \pi(y)} \delta_j,$$

uniformly for $y \leq \sqrt{\log q}/(\log_2 q)^2$, and $\delta_j > (\log_2 q)^{-5/3}$.

One should note that there is no analogue of Theorem 3.2.5 (where we assume Conjecture 3.2.1) in this case.

PROOF. The proof is exactly the same as Theorem 3.2.4, noting that

$$\sum_{\chi \pmod q} A\left(\frac{\arg(\chi(p_1))}{2\pi}, ..., \frac{\arg(\chi(p_n))}{2\pi} \right) = \phi(q) \hat{A}(0), \tag{3.10.4}$$

if A is a trigonometric polynomial in n variables, with Fourier coefficients supported in a lattice

$$\mathcal{L} = \{ l \in \mathbb{Z}^n : |l_i| \leq L_i, i = 1, 2, ..., n \},$$

with $p_1^{L_1} p_2^{L_2} ... p_n^{L_n} \leq q$. This follows from the orthogonality relation for characters and the fact that

$$\begin{aligned}
&\sum_{\chi \pmod q} A\left(\frac{\arg(\chi(p_1))}{2\pi}, ..., \frac{\arg(\chi(p_n))}{2\pi} \right) \\
&= \sum_{\chi \pmod q} \sum_{l \in \mathcal{L}} \hat{A}(l) \exp(i(l_1 \arg(\chi(p_1)) + ... + l_n \arg(\chi(p_n)))) \\
&= \sum_{l \in \mathcal{L}} \hat{A}(l) \sum_{\chi \pmod q} \chi\left(\prod_{i=1}^{n} p_i^{l_i} \right).
\end{aligned}$$

□

Finally we can use the same ideas in the proofs of Theorems 3.2.6 and 3.2.7, to deduce analogous results for $L(1, \chi)$. Indeed define

$$\Phi_q(\tau) := \frac{1}{\phi(q)}|\{\chi \bmod q, \chi \neq 1, \chi \notin S : |L(1,\chi)| > e^\gamma \tau\}|, \quad \text{and}$$

$$\Phi_q(\tau,\theta) := \frac{1}{\phi(q)}|\{\chi \bmod q, \chi \neq 1, \chi \notin S : |L(1,\chi)| > e^\gamma \tau, \ |\arg L(1,\chi)| > \theta\}|.$$

In **[GS4]**, Granville and Soundararajan proved that the asymptotic relation (3.1.2) holds also for $\phi_q(\tau)$. For $\Phi_q(\tau,\theta)$, similarly to Theorem 3.2.6 we prove

Theorem 3.10.6. *Let q be a large prime number. There exist two positive constants c_8 and c_9 such that*

$$\Phi_q(\tau,\theta) \leq \exp\left(-\frac{e^{\tau+\frac{\theta^2\tau}{2\log\tau}-c_8\frac{\theta^2\tau}{\log^2\tau}}}{\tau}\right),$$

uniformly for $1 \ll \tau \leq \log_2 q$, and $(\log\tau)\sqrt{\frac{\log_2\tau}{\tau}} < \theta \ll 1$. And

$$\Phi_q(\tau,\theta) \geq \exp\left(-\frac{e^{\tau+\frac{\theta^2\tau}{2\log\tau}+c_9\frac{\theta^2\tau}{\log^2\tau}}}{\tau}\right),$$

uniformly for $1 \ll \tau \leq (\log_2 q)/2 - 2\log_3 q$ and $(\log\tau)\sqrt{\frac{\log_2\tau}{\tau}} < \theta \ll 1$.

PROOF. For the upper bound, the proof is the same as for Theorem 3.2.6, replacing Lemma 3.7.1 by the analogue of Lemma 3.3.4 for $L(1,\chi)$ (taking $A(y) = \log y$). For the lower bound we use Theorem 3.10.5 to make equation (3.7.3) holds and follow the same lines as with Theorem 3.2.6. $\square$

Corollary 3.10.1. *If $1 \ll \tau \leq \log_2 q - \log_3 q$, then for almost all characters χ mod q, with $|L(1,\chi)| > e^\gamma\tau$, we have $|\arg L(1,\chi)| \leq (\log\tau)\sqrt{\log_2\tau/\tau}$.*

We also prove

Theorem 3.10.7. *Let q be a large prime number, $1 \ll \tau \leq \log_2 q - 3\log_3 q$ a real number, $\epsilon = \tau^{-1/5}$ and $k = e^{\tau-1-C}$, where C is defined by equation (3.1.3). Let*

$$\Omega_q(\tau) := \{\chi \ mod \ q, \chi \neq 1, \chi \notin S: \ e^\gamma(\tau-\epsilon) \leq |L(1,\chi)| \leq e^\gamma(\tau+\epsilon)\},$$

and for a real number x, let

$$\Lambda_q(\tau,x) := \{\chi \in \Omega_q(\tau) : \frac{\arg L(1,\chi)}{\sqrt{\frac{\log(\tau-1-C)}{2e^{\tau-1-C}}}} < x\} \quad \textit{and } \nu_{q,\tau}(x) := \frac{\sum\limits_{\chi\in\Lambda_q(\tau,x)} |L(1,\chi)|^{2k}}{\sum\limits_{\chi\in\Omega_q(\tau)} |L(1,\chi)|^{2k}}.$$

Then we have

$$\nu_{q,\tau}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2} dy + O_x\left(\frac{1}{\sqrt{\log \tau}}\right).$$

PROOF. The proof is exactly the same as Theorem 3.2.7, using Theorem 3.10.4, along with Proposition 3.4.2 and the results of Granville-Soundararajan **[GS4]** on the distribution of $|L(1,\chi)|$ (which are exactly the same as for $|\zeta(1+it)|$). $\square$

Chapitre 4

DISTRIBUTION OF L-FUNCTIONS AT THE EDGE OF THE CRITICAL STRIP

Résumé : On prouve plusieurs résultats sur la distribution des valeurs des fonctions L au bord de la bande critique. Notre stratégie consiste à construire et étudier une classe très large de produits Eulériens aléatoires. Parmi les nouvelles applications, nous prouvons une estimation pour la fonction de distribution des valeurs de la famille des fonctions L de k-ième puissance symétrique des formes primitives cuspidales de poids 2 par rapport au niveau (si on suppose l'automorphie de ces fonctions L), en utilisant les résultats de J. Cogdell et P. Michel sur les grands moments complexes de cette famille. Par ailleurs on étudie la distribution des valeurs des fonctions L de la classe de Selberg en l'aspect t sur la ligne $\text{Re}(s) = 1$, ainsi que ceux des fonctions L de tordus quadratiques de représentations automorphes cuspidales de $GL(m)/\mathbb{Q}$ au point $s = 1$, et on prouve des estimations pour les fonctions de distribution correspondantes en supposant une version uniforme de la conjecture de Sato-Tate.

Abstract : We prove several results on the distribution of values of L-functions at the edge of the critical strip, by constructing and studying a large class of random Euler products. Among new applications, we provide a precise estimate for the distribution function of the values at $s = 1$ of the family of k-th symmetric power L-functions of primitive cusp forms of weight 2 in the level aspect (assuming the automorphy of these L-functions), using results of J. Cogdell and P. Michel on high complex moments of this family. Further we study families of L-functions of

the Selberg Class in the t aspect at $\mathrm{Re}(s) = 1$, and of L-functions of quadratic twists of cuspidal automorphic representations of $GL(m)/\mathbb{Q}$ at $s = 1$, and prove precise estimates for the corresponding distribution functions assuming a uniform version of the Sato-Tate conjecture.

4.1. Introduction and statement of results

Values of L-functions at the edge of the critical strip are interesting objects that encode deep arithmetic information. For example, the non-vanishing of the Riemann zeta function at $\mathrm{Re}(s) = 1$ implies the prime number theorem proved by Hadamard and de La Vallée Poussin in 1896. Also the class number formula, proved by Dirichlet in 1839, relates the class number of a quadratic extension of $\mathbb{Q}$ to the value of $L(1, \chi_d)$ where d is the discriminant of the field extension. Moreover let $S_k^p(N)$ be the set of arithmetically normalized primitive cusp forms of weight k and level N. Serre **[Ser]**, proved that the Sato-Tate conjecture is equivalent to the non-vanishing of symmetric power L-functions $L(\mathrm{Sym}^k f, s)$ at $\mathrm{Re}(s) = 1$, for all $k \in \mathbb{N}$. This was recently used by Taylor *and al* to prove the Sato-Tate conjecture for non-CM Elliptic curves (assuming some mild conditions).

The distribution of these values have been extensively studied over the last decades. One can quote the work of Granville-Soundararajan **[GS4]** and Lamzouri **[Lam3]** in the case of $\zeta(1 + it)$; Elliott (**[El1]** and **[El2]**), Montgomery-Vaughan **[MV]** and Granville-Soundararajan **[GS2]** in the case of Dirichlet L-functions of quadratic characters $L(1, \chi_d)$; Duke **[Du]** in the case of Artin L-functions, and the work of Cogdell-Michel **[CM]**, Habsieger-Royer **[HR]**, Lau-Wu **[LW]**, Liu-Royer-Wu **[LRW]**, Royer (**[Ro1]** and **[Ro2]**), and Royer-Wu (**[RW1]** and **[RW2]**) in the case of symmetric power L-functions of GL_2-automorphic forms.

In the case of quadratic characters L-functions, Montgomery and Vaughan **[MV]** were the first to construct a probabilistic model to study the distribution of this family at $s = 1$, and based on their model they conjectured that the distribution function should be double exponentially decreasing. In 2003, Granville and Soundararajan **[GS2]** computed large complex moments of $L(1, \chi_d)$ and deduced an asymptotic formula for the distribution of the L-values, proving Montgomery and Vaughan's conjecture. More precisely define $\Phi_x(\tau)$ to be the proportion of fundamental discriminants d with $|d| \leq x$, for which $L(1, \chi_d) > e^{\gamma}\tau$. Then Granville and Soundararajan proved that uniformly in the region $\tau \leq \log_2 x$, we have

$$\Phi_x(\tau) = \exp\left(-\frac{e^{\tau - C_1}}{\tau}\left(1 + O\left(\frac{1}{\tau}\right)\right)\right), \tag{4.1.1}$$

where

$$C_1 := 1 + \int_0^1 \log\cosh y \frac{dy}{y^2} + \int_1^{\infty} (\log\cosh y - y)\frac{dy}{y^2} = 0.8187...$$

Using a similar approach, they studied the distribution of the values $|\zeta(1+it)|$ (in **[GS4]**), and showed that uniformly in the region $\tau \leq \log_2 T - \log_3 T$, the measure of points $t \in [T, 2T]$ for which $|\zeta(1+it)| \geq e^{\gamma}\tau$ equals

$$T\exp\left(-\frac{e^{\tau - C_2}}{\tau}\left(1 + O\left(\frac{1}{\tau^{\frac{1}{2}}}\right)\right)\right), \tag{4.1.2}$$

where

$$C_2 := 1 + \int_0^1 \log I_0(t)\frac{dt}{t^2} + \int_1^{\infty} (\log I_0(t) - t)\frac{dt}{t^2},$$

and $I_0(t) := \sum_{n=0}^{\infty} (t/2)^{2n}/n!^2$ is the modified Bessel function of order 0.

Recently, Liu, Royer and Wu **[LRW]**, studied the distribution of the values of automorphic L-functions at $s = 1$ in the weight aspect. Following the ideas of Granville and Soundararajan, they showed that the distribution function of $L(f, 1)$ where $f \in S_k^p(1)$ has the same shape as equations (4.1.1) and (4.1.2) but with a different constant C_3 arising from the corresponding random model for their family.

In this paper we investigate the distribution of a general class of random models and its applications to the distribution of values of various families of L-functions at the edge of the critical strip. Among our results we will prove a general formula for the constant involved in the distribution function of the L-values as a function of the corresponding probabilistic model.

Let d be a positive integer, and $\mathcal{P}$ be the set of all prime numbers. For $p \in \mathcal{P}$ and $1 \leq j \leq d$, let $\theta_j(p)$ be random variables distributed on $[-\pi, \pi]$ and satisfying :

Condition 1 . $\mathbb{E}(e^{i\theta_j(p)}) = 0$, for all $p \in \mathcal{P}$ and $1 \leq j \leq d$.

Condition 2 . $\theta_j(p)$ and $\theta_k(q)$ are independent random variables for $p \neq q$.

Condition 3 . The random variables $X(p) := \sum_{j=1}^d e^{i\theta_j(p)}/d$, are identically distributed, for every $p \in \mathcal{P}$.

Condition 4 . There exists an absolute constant $\alpha > 0$ such that for all primes p and all $\epsilon > 0$, we have $\text{Prob}\left(|\theta_1(p)| \leq \epsilon, ..., |\theta_d(p)| \leq \epsilon\right) \gg \epsilon^\alpha$.

Consider the following random Euler products

$$L(1, X) := \prod_{p\in\mathcal{P}}\prod_{j=1}^{d}\left(1 - \frac{e^{i\theta_j(p)}}{p}\right)^{-1}.$$

Our aim then is to study the behavior of

$$\Phi(\tau) := \text{Prob}\left(|L(1, X)| > (e^\gamma\tau)^d\right).$$

We prove

Theorem 4.1.1. *Let d be a positive integer. For $1 \leq j \leq d$ and $p \in \mathcal{P}$, let $\theta_j(p)$ be random variables distributed on $[-\pi, \pi]$ and satisfying conditions 1-4. For $\tau \gg 1$, we have*

$$\Phi(\tau) = \exp\left(-\frac{e^{\tau - A_X}}{\tau}\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}}\right)\right)\right),$$

where

$$A_X := 1 + \int_0^\infty \frac{f(t)}{t^2}dt, \ \ \textit{with} \ f(t) := \begin{cases} \log \mathbb{E}\left(e^{Re(X)t}\right) & \textit{if } 0 \leq t < 1 \\ \log \mathbb{E}\left(e^{Re(X)t}\right) - t & \textit{if } 1 \leq t, \end{cases}$$

and X is a random variable having the same distribution as the $X(p)$. Furthermore A_X is convergent by Lemma 4.2.1 below.

Theorem 4.1.1 implies results of Granville-Soundararajan (**[GS2]** and **[GS4]**) and Liu-Royer-Wu **[LRW]**. Indeed the corresponding random models for the families $|\zeta(1 + it)|$, $L(1, \chi_d)$ and $L(1, f)$ satisfy conditions 1-4.

Cogdell and Michel **[CM]**, considered the family of k-th symmetric power L-functions of primitive cusp forms of weight 2 and large prime level. Indeed they proved that large complex moments of this family at $s = 1$ coincide with those of the adequate probabilistic model (constructed from the Sato-Tate distribution), assuming the following hypothesis :

Hypothesis $\mathbf{Sym}^k(q)$: For all $f \in S_2^p(q)$ the k-th symmetric power L-function of f is automorphic, that is it coincides with the L-function of a certain cuspidal automorphic representation of $GL(k+1)/\mathbb{Q}$.

This hypothesis is predicted by the Langlands functoriality conjectures and is effectively proved for the symmetric powers up to 4.

In view of the Petersson trace formula, it is arguably more natural to consider the weighted arithmetic distribution function

$$\Phi_q(\mathrm{Sym}^k, \tau) = \left(\sum_{f \in S_2^p(q)} \omega_f\right)^{-1} \sum_{\substack{f \in S_2^p(q) \\ L(1, \mathrm{Sym}^k f) \geq (e^\gamma \tau)^{k+1}}} \omega_f,$$

where $\omega_f := 1/(4\pi \langle f, f \rangle_q)$ is the usual harmonic weight.

In their paper **[CM]**, Cogdell and Michel did not determine a good estimate for this distribution function, and noted that it will be interesting to have such an estimate. Liu, Royer and Wu **[LRW]**, noted that their method should work in this case but with additional technical issues.

Combining Theorem 4.1.1 with the results of Cogdell and Michel **[CM]** on high complex moments of this family, we get a good estimate for this distribution function. Indeed in this case the corresponding random model will satisfy conditions 1-4, since the $\theta_j(p)$ are given by $\theta_j(p) = (k-2j)\theta_p$ for $0 \leq j \leq k$ where the $\{\theta_p\}_{p \in \mathcal{P}}$ are independent random variables distributed on $[0, \pi]$ according to the Sato-Tate measure $\frac{2}{\pi} \sin^2(\theta) d\theta$. We prove

Theorem 4.1.2. *Let $k \geq 1$ be an integer and q be a large prime such that Hypothesis Sym$^k(q)$ holds. Then uniformly in the region $\tau \leq \log_2 q - \log_3 q - 2\log_4 q$ we have*

$$\Phi_q(Sym^k, \tau) = \exp\left(-\frac{e^{\tau - A_k}}{\tau}\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}}\right)\right)\right),$$

where $A_k = 1 + \int_0^1 \frac{h_k(t)}{t^2} dt + \int_1^\infty \frac{h_k(t) - t}{t^2} dt$ *and*

$$h_k(t) = \log\left(\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \exp\left(\frac{t}{k+1}\sum_{j=0}^k \cos(\theta(k-2j))\right)\sin^2\theta d\theta\right).$$

Another application of our work concerns the distribution of L-functions of the Selberg class in the t-aspect. This class S, introduced by Selberg **[Sel]** (see also the nice survey of Kaczorowski and Perelli **[KP1]**), is the class of Dirichlet series

$$F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_F(n)}{n^s},\ \text{for } \mathrm{Re}(s)>1,$$

satisfying the following axioms

Axiom 1 Analyticity : $(s-1)^l F(s)$ is an entire function of finite order for some non-negative integer l.

Axiom 2 Ramanujan Hypothesis : $a_n \ll_\epsilon n^\epsilon$ for any fixed $\epsilon>0$.

Axiom 3 Functional equation : there exists a function $\gamma_F(s)$ of the form

$$\gamma_F(s)=\epsilon Q_F^s\prod_{i=1}^{k}\Gamma(w_i s+\mu_i),$$

where $|\epsilon|=1$, $Q_F>0$, $w_i>0$ and $\mathrm{Re}(\mu_i)\geq 0$ are such that the completed L-function $\Phi(s)=\gamma_F(s)F(s)$ satisfies the functional equation

$$\Phi(s)=\overline{\Phi}(1-s),\ \text{where } \overline{\Phi}(s)=\overline{\Phi(\overline{s})}.$$

Axiom 4 Euler product : $a_1=1$, and

$$\log F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n^s},$$

where $b_n=0$ except when n is of the form p^r where p is a prime and r a positive integer. Furthermore we have $b_n \ll n^\lambda$ for some $\lambda<1/2$.

Let $F\in S$. Our aim is to study the distribution of large values of $|F(1+it)|$ for $t\in[T,2T]$, and T large. To this end we construct a probabilistic model based on the totally multiplicative function $X(.)$, where the $\{X(p)\}_{p \text{ prime}}$ are independent random variables uniformly distributed on the unit circle $\mathbb{U}$, and for a positive integer $n=p_1^{a_1}...p_r^{a_r}$ we have $X(n):=X(p_1)^{a_1}...X(p_r)^{a_r}$. Then define the following random series

$$F(1,X):=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_F(n)X(n)}{n},\ \text{(these series converge with probability 1).}$$

We first prove that large integral moments of $|F(1+it)|$ and those of $|F(1,X)|$ are roughly equal, assuming a stronger form of axiom 2 on average, namely that

$$\sum_{p\leq y}\frac{|a_F(p)|}{p}\ll \log_2 y. \tag{4.1.3}$$

Theorem 4.1.3. *Let $F \in S$ and satisfies equation (4.1.3). Let $T > 0$ be large, and take $A > 0$. Then for all positive integers k in the range* $1 \leq k \leq \log T/(B \log_2 T \log_3 T)$ *(for a suitably large constant $B = B(A, F)$) , we have*

$$\frac{1}{T}\int_T^{2T} |F(1+it)|^{2k} dt = \mathbb{E}\left(|F(1,X)|^{2k}\right)\left(1 + O\left(\frac{1}{\log^A T}\right)\right).$$

Therefore what remains is to study the random model to deduce information on the distribution function of $|F(1+it)|$. To do so we need some extra assumptions on the L-function F, which we believe to hold for most L-functions of the class S (from the point of view of the Langlands program which predicts that L-functions arise from automorphic representations of $GL(m)$ over $\mathbb{Q}$) :

1. F has a polynomial Euler product, that is there exists some positive integer d (called the degree of F) such that

$$F(s) = \prod_{p\in\mathcal{P}}\prod_{i=1}^{d}\left(1 - \frac{\alpha_{i,F}(p)}{p^s}\right)^{-1}, \text{ for } \mathrm{Re}(s) > 1, \tag{4.1.4}$$

   where $\alpha_{i,F}(p) \neq 0$ for all primes except finitely many.

2. The coefficients $a_F(p) = \sum_{i=1}^{d} \alpha_{i,F}(p)$ are bounded.

The subclass of L-functions of S which satisfy these two assumptions will be denoted by $S^\star$.

In fact, for most L-functions of $S^\star$ we believe further that the values $|a_F(p)|$ behave in some regular way, that is there exists some compactly supported distribution function $\psi(t)$, such that

$$\frac{1}{\pi(x)}|\{p \leq x : |a_F(p)| \in I\}| \sim \int_I \psi(t)dt, \tag{4.1.5}$$

as $x \to \infty$, for any interval I. This assumption is true for L-functions of degree one (since in this case $|a_F(p)| = 1$ for all except finitely many prime numbers), and for automorphic L-functions assuming the Sato-Tate conjecture. Moreover for our purpose we need a slightly uniform version of (4.1.5) :

Hypothesis D. *There exists a compactly supported distribution function $\psi(t)$ (with support in some interval $[0, U]$), such that for all continuous functions g we* *have*

$$\sum_{p\le x} g(|a_F(p)|) = \pi(x)\left(\int_0^U g(t)\psi(t)dt + o\left(\frac{1}{\log x}\right)\right), \text{ as } x\to\infty.$$

Let $F\in S^\star$ and satisfies hypothesis D. Let

$$N := \int_0^U t\psi(t)dt, \text{ and } M := \int_0^U t\log t\psi(t)dt.$$

Then one can easily prove that

$$\sum_{p\le y}\frac{|a_F(p)|}{p} \sim N\sum_{p\le y}\frac{1}{p},$$

and that the product

$$b_F := \prod_{p\in\mathcal{P}}\max_{t\in[-\pi,\pi]}\left|\prod_{i=1}^{d}\left(1-\frac{e^{it}\alpha_{i,F}(p)}{p}\right)^{-1}\right|\left(1-\frac{1}{p}\right)^N \text{ is convergent.}$$

Now define

$$\Phi_F(\tau) := \frac{1}{T}\text{meas}\{t\in[T,2T]:\ |F(1+it)| > b_F\,(e^\gamma\tau)^N\}. \tag{4.1.6}$$

Then we prove

Theorem 4.1.4. *Let $T>0$ be large. Let $F\in S^\star$, and satisfies Hypothesis D (with distribution function ψ). Then uniformly for $1\ll\tau\le\log_2 T-\log_3 T-2\log_4 T$, we have*

$$\Phi_F(\tau) = \exp\left(-\frac{e^{\tau-C_2-M/N+\log N}}{\tau}(1+o(1))\right).$$

In equations (4.1.1), (4.1.2) and Theorem 4.1.2, the constant involved in the distribution function depends only on the corresponding random model. However in the case of Theorem 4.1.4, this constant contains two parts, the first one C_2 depends on the random model, and the second one $M/N-\log N$ depends on the function ψ which governs the distribution of the $|a_p|$. This latter constant equals 0 for L-functions of degree one, but is non-vanishing for Elliptic curves L-functions (if we assume the Sato-Tate conjecture). Therefore it seems that assuming Hypothesis D (or at least assumption (4.1.5)) is necessary if one wants to know the distribution of large values of $F(1+it)$.

Let π be a cuspidal automorphic representation of $GL(m)/\mathbb{Q}$. The normalized L-function of π (so that the critical strip is $0 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 1$) can be expressed as a Dirichlet series

$$L(\pi, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_\pi(n)}{n^s}, \text{ for } \mathrm{Re}(s) > 1.$$

It extends to a meromorphic function on the complex plan with no poles except possibly at $s = 1$, has a polynomial Euler product as in equation (4.1.4) with degree m, and a functional equation as in axiom 3. Consider those π which are auto-dual (therefore $a_\pi(n) \in \mathbb{R}$) and such that the $\{a_\pi(p)\}_{p\in\mathcal{P}}$ are bounded and satisfy hypothesis D (with distribution function ψ). Let d be a fundamental discriminant and consider the twist of $L(s,\pi)$ by the unique real quadratic character mod d

$$L(\pi \otimes \chi_d, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_\pi(n)\chi_d(n)}{n^s}, \text{ for } \mathrm{Re}(s) > 1.$$

Let x be large. The last part of our work concerns the study of the distribution of large values of $L(\pi\otimes\chi_d, 1)$ for fundamental discriminants $|d| \leq x$. Analogously to equation (4.1.6) let $\Phi_\pi(\tau)$ denotes the proportion of fundamental discriminants d with $|d| \leq x$, such that $L(\pi \otimes \chi_d, 1) > b_\pi(e^\gamma\tau)^N$, where

$$N = \int_0^U t\psi(t)dt, \text{ and } M := \int_0^U t\log t\psi(t)dt,$$

and

$$b_\pi := \prod_{p\in\mathcal{P}} \max_{\delta\in\{-1,1\}} \prod_{i=1}^{d} \left(1 - \delta\frac{\alpha_{i,F}(p)}{p}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^N.$$

Then similarly to Theorem 4.1.4 we prove

Theorem 4.1.5. *Let π be an auto-dual cuspidal automorphic representation of $GL(m)/\mathbb{Q}$, such that the $\{a_\pi(p)\}_{p\in\mathcal{P}}$ are bounded and satisfy Hypothesis D (with distribution function ψ). Let $x > 0$ be large. Then uniformly for $1 \ll \tau \leq \log_2 x - \log_3 x - 2\log_4 x$, we have*

$$\Phi_\pi(\tau) = \exp\left(-\frac{e^{\tau - C_1 - M/N + \log N}}{\tau}(1 + o(1))\right).$$

4.2. Distribution of Random Euler Products : Proof of Theorem 4.1.1

For $1 \leq j \leq d$ and $p \in \mathcal{P}$, let $\theta_j(p)$ be random variables distributed on $[-\pi, \pi]$ and satisfying conditions 1-4. Let X be a random variable having the same distribution as the $X(p)$, define $h(t) := \log \mathbb{E}\left(e^{\mathrm{Re}(X)t}\right)$, and let $f(t)$ be as in Theorem 4.1.1. First we prove some useful properties of the function f.

Lemma 4.2.1. *We have*

i) f satisfies the growth conditions

$$f(t) = \begin{cases} O\left(t^2\right) & \text{if } 0 \leq t < 1 \\ O\left(\log t + 1\right) & \text{if } 1 \leq t. \end{cases}$$

ii) h and f are continuous differentiable Lipshitz functions on $[0, +\infty)$.

iii) A_X is convergent.

Proof. i) First let $0 \leq t < 1$. Noting that $\mathbb{E}(\mathrm{Re}(X)) = 0$ by condition 1, and using the Taylor expansion of $e^{\mathrm{Re}(X)t}$, we deduce that $f(t) = \log(1 + O(t^2)) = O(t^2)$. Now for $t \geq 1$, we have that $f(t) = \log \mathbb{E}\left(e^{(\mathrm{Re}(X)-1)t}\right)$. Since $\mathrm{Re}(X) \leq 1$, then $f(t) \leq 0$. Let p be prime. By condition 3 we have

$$e^{f(t)} \geq \mathrm{Prob}\left(|\theta_1(p)| \leq \epsilon, ..., |\theta_d(p)| \leq \epsilon\right) e^{(\cos\epsilon - 1)t}, \text{ for all } \epsilon > 0.$$

Choose $\epsilon = 1/t$, and use condition 4 to get the result.

ii) By the Taylor expansion of $e^{\mathrm{Re}(X)t}$ and the fact that $|\mathrm{Re}(X)| \leq 1$, h is smooth and

$$|h'(t)| = \frac{\left|\mathbb{E}\left(\mathrm{Re}(X)e^{\mathrm{Re}(X)t}\right)\right|}{\mathbb{E}\left(e^{\mathrm{Re}(X)t}\right)} \leq \frac{\mathbb{E}\left(|\mathrm{Re}(X)|\, e^{\mathrm{Re}(X)t}\right)}{\mathbb{E}\left(e^{\mathrm{Re}(X)t}\right)} \leq 1.$$

Hence h is Lipschitz with constant 1. This implies also that f is differentiable and Lipshitz with constant 2.

iii) This follows from (i). □

Now we are ready to compute the real moments of the random variable $|L(1, X)|$. We prove the following proposition

Proposition 4.2.1. *Let $r > d^8$. Then we have*

$$\log \mathbb{E}\left(|L(1,X)|^r\right) = rd\log_2(rd) + rd\gamma + \frac{rd}{\log rd}\left(A_X - 1 + O\left(\frac{1}{\log r}\right)\right).$$

PROOF. We have that

$$|L(1,X)|^r = \prod_{p\in\mathcal{P}}\prod_{j=1}^{d}\left|1 - \frac{e^{i\theta_j(p)}}{p}\right|^{-r} = \prod_{p\in\mathcal{P}}\prod_{j=1}^{d}\left(1 - \frac{2\cos\theta_j(p)}{p} + \frac{1}{p^2}\right)^{-r/2}.$$

Let

$$E_p := \mathbb{E}\left(\prod_{j=1}^{d}\left(1 - \frac{2\cos\theta_j(p)}{p} + \frac{1}{p^2}\right)^{-r/2}\right).$$

Then by condition 2 we know that $\mathbb{E}(|L(1,X)|^r) = \prod_{p\in\mathcal{P}} E_p$.

Case 1. $p > \sqrt{rd}$. In this case

$$\prod_{j=1}^{d}\left(1 - \frac{2\cos\theta_j(p)}{p} + \frac{1}{p^2}\right)^{-r/2} = \exp\left(\frac{rd}{p}\mathrm{Re}(X(p)) + O\left(\frac{rd}{p^2}\right)\right). \tag{4.2.1}$$

Case 2. $p \le \sqrt{rd}$. Let

$$E_p* := E_p\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{rd}.$$

Then we have

$$E_p* = \mathbb{E}\left(\prod_{j=1}^{d}\left(1 - \frac{2(\cos\theta_j(p) - 1)}{p(1-1/p)^2}\right)^{-r/2}\right) \le 1. \tag{4.2.2}$$

Moreover for all $\epsilon > 0$ we have that

$$E_p* \ge \mathrm{Prob}\left(|\theta_1(p)| \le \epsilon, ..., |\theta_d(p)| \le \epsilon\right)\prod_{j=1}^{d}\left(1 - \frac{2(\cos\epsilon - 1)}{p(1-1/p)^2}\right)^{-r/2}.$$

Choosing $\epsilon = 1/(dr)$ and using condition 4, we get

$$E_p* \gg \frac{1}{(dr)^\alpha}\exp\left(-\frac{1}{2rd^2p(1-1/p)^2}\right) \gg \frac{1}{(dr)^\alpha}. \tag{4.2.3}$$

Therefore by equations (4.2.2) and (4.2.3) we get

$$\log E_p = -rd\log\left(1 - \frac{1}{p}\right) + O(\log r).$$

Hence by (4.2.1) we conclude that

$$\sum_{p\in\mathcal{P}}\log E_p = -rd\sum_{p\le\sqrt{rd}}\log\left(1 - \frac{1}{p}\right) + \sum_{\sqrt{rd}<p} h\left(\frac{rd}{p}\right) + O\left(\sum_{p\le\sqrt{rd}}\log r + \sum_{\sqrt{rd}<p}\frac{dr}{p^2}\right).$$

For the error terms, since $r > d^8$ we have

$$\sum_{\sqrt{rd}<p} \frac{dr}{p^2} + \sum_{p\leq\sqrt{rd}} \log r \ll r^{3/4}.$$

Therefore using that

$$\sum_{\sqrt{rd}\leq p\leq rd} \log\left(1-\frac{1}{p}\right) + \frac{1}{p} \ll (rd)^{-1/2},$$

we get

$$\sum_{p\in\mathcal{P}} \log E_p = -rd\sum_{p\leq rd} \log\left(1-\frac{1}{p}\right) + \sum_{\sqrt{rd}<p} f\left(\frac{rd}{p}\right) + O\left(r^{3/4}\right). \tag{4.2.4}$$

Let $r_1 = r^{3/2}$. Then by Lemma 4.2.1 we have

$$\sum_{p>r_1} f\left(\frac{rd}{p}\right) \ll \sum_{p>r_1} \frac{(rd)^2}{p^2} \ll r^{3/4}. \tag{4.2.5}$$

To evaluate the sum over $f(rd/p)$ we use the prime number theorem in the form

$$\pi(t) = \int_2^t \frac{du}{\log u} + O\left(te^{-8\sqrt{\log t}}\right).$$

Therefore

$$\sum_{\sqrt{rd}<p\leq r_1} f\left(\frac{rd}{p}\right) = \int_{\sqrt{rd}}^{r_1} f\left(\frac{rd}{t}\right) d\pi(t) = \int_{\sqrt{rd}}^{r_1} f\left(\frac{rd}{t}\right)\frac{dt}{\log t} + E_1, \tag{4.2.6}$$

where

$$E_1 \ll f\left(\sqrt{rd}\right)\sqrt{rd}e^{-4\sqrt{\log r}} + f\left(\frac{rd}{r_1}\right) r_1 e^{-4\sqrt{\log r}} + \int_{\sqrt{rd}}^{r_1} \frac{rd}{t^2}\left|f'\left(\frac{rd}{t}\right)\right| te^{-8\sqrt{\log t}}dt.$$

Now by Lemma 4.2.1 we can see that $E_1 \ll rde^{-4\sqrt{\log r}}$. To estimate the main term we make the change of variables $T = rd/t$. Hence we have

$$\int_{\sqrt{rd}}^{r_1} f\left(\frac{rd}{t}\right)\frac{dt}{\log t} = rd\int_{dr^{-1/2}}^{\sqrt{rd}} \frac{f(T)}{T^2\log(rd/T)}dT. \tag{4.2.7}$$

In the range $dr^{-1/2} \leq t \leq \sqrt{rd}$, we have

$$\frac{1}{\log(rd/t)} = \frac{1}{\log(rd)}\frac{1}{1-\frac{\log t}{\log(rd)}} = \frac{1}{\log(rd)} + O\left(\frac{\log t}{\log^2 r}\right).$$

Therefore

$$\int_{dr^{-1/2}}^{\sqrt{rd}} \frac{f(t)}{t^2\log(rd/t)}dt = \frac{1}{\log(rd)}\int_{dr^{-1/2}}^{\sqrt{rd}} \frac{f(t)}{t^2}dt + O\left(\frac{1}{\log^2 r}\right), \tag{4.2.8}$$

using that

$$\int_0^\infty \frac{f(t)\log(t)}{t^2}dt \ll 1,$$

which follows from Lemma 4.2.1. Finally by the same Lemma we deduce that

$$\int_{dr^{-1/2}}^{\sqrt{rd}} \frac{f(t)}{t^2}dt = A_X - 1 + O\left(\frac{d}{\sqrt{r}} + \frac{\log rd}{\sqrt{rd}}\right). \tag{4.2.9}$$

Therefore from equations (4.2.4)-(4.2.9) we deduce that

$$\sum_{p\in\mathcal{P}} \log E_p = -rd\sum_{p\le rd}\log\left(1-\frac{1}{p}\right) + \frac{rd}{\log rd}(A_X - 1) + O\left(\frac{rd}{\log^2 r}\right).$$

Finally by the prime number theorem we have

$$-\sum_{p\le rd}\log\left(1-\frac{1}{p}\right) = \log_2(rd) + \gamma + O\left(e^{-2\sqrt{\log r}}\right), \tag{4.2.10}$$

which implies the result. □

Proof of Theorem 4.1.1. Let the $\{X(p)\}_{p\in\mathcal{P}}$ be defined on a probability space (Ω,μ). Then

$$rd\int_0^\infty \Phi(t)t^{rd-1}dt = rd\int_0^\infty t^{rd-1}\int_{|L(1,X(\omega))|>(e^\gamma t)^d} d\mu(\omega)dt$$
$$= \int_\Omega \frac{|L(1,X(\omega))|^r}{(e^{\gamma rd})}d\mu(\omega) = \mathbb{E}\left(|L(1,X)|^r\right)e^{-\gamma rd}.$$

Therefore by Proposition 4.2.1 we deduce that

$$\int_0^\infty \Phi(t)t^{rd-1}dt = (\log rd)^{rd}\exp\left(\frac{rd}{\log rd}\left(A_X - 1 + O\left(\frac{1}{\log r}\right)\right)\right). \tag{4.2.11}$$

Let $\tau = \log rd + A_X$, and $R = re^\delta$ where $\delta > 0$ will be chosen later. By (4.2.11) we have

$$\int_{\tau+\delta}^\infty \Phi(t)t^{rd-1}dt \le (\tau+\delta)^{rd(1-e^\delta)}\int_0^\infty \Phi(t)t^{Rd-1}dt$$
$$= (\tau+\delta)^{rd(1-e^\delta)}(\log rd+\delta)^{rde^\delta}\exp\left(\frac{rde^\delta}{\log rd}\left(A_X - 1 + O\left(\frac{1}{\log r}\right)\right)\right)$$
$$= (\log rd)^{rd}\exp\left(\frac{rd}{\log rd}\left(A_X - 1 + (\delta + 1 - e^\delta) + O\left(\frac{1}{\log r}\right)\right)\right). \tag{4.2.12}$$

Now choose $\delta = c/\sqrt{\log r}$, where c is a suitably large constant. Then by (4.2.11) and (4.2.12) we deduce that

$$\int_{\tau+\delta}^{\infty} \Phi(t)t^{rd-1}dt \le \left(\int_0^{\infty} \Phi(t)t^{rd-1}dt\right) \exp\left(-\frac{r}{\log^2 r}\right). \tag{4.2.13}$$

A similar argument shows that

$$\int_0^{\tau-\delta} \Phi(t)t^{rd-1}dt \le \left(\int_0^{\infty} \Phi(t)t^{rd-1}dt\right) \exp\left(-\frac{r}{\log^2 r}\right). \tag{4.2.14}$$

Therefore by (4.2.11), (4.2.13) and (4.2.14) we deduce that

$$\int_{\tau-\delta}^{\tau+\delta} \Phi(t)t^{rd-1}dt = (\log rd)^{rd} \exp\left(\frac{rd}{\log rd}\left(A_X - 1 + O\left(\frac{1}{\log r}\right)\right)\right). \tag{4.2.15}$$

Since $\Phi(t)$ is a non-increasing function we have that

$$\Phi(\tau+\delta)\tau^{rd} \exp\left(O\left(\frac{\delta r}{\tau}\right)\right) \le \int_{\tau-\delta}^{\tau+\delta} \Phi(t)t^{rd-1}dt \le \Phi(\tau-\delta)\tau^{rd} \exp\left(O\left(\frac{\delta r}{\tau}\right)\right).$$

This along with (4.2.15) imply that

$$\Phi(\tau+\delta) \le \exp\left(-\frac{e^{\tau-A_X}}{\tau}\left(1+O(\delta)\right)\right) \le \Phi(\tau-\delta),$$

and thus

$$\Phi(\tau) = \exp\left(-\frac{e^{\tau-A_X}}{\tau}\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}}\right)\right)\right),$$

completing the proof. □

4.3. Distribution of Symmetric power L-functions : Proof of Theorem 4.1.2

In this section we study the distribution of the family $L(1, \mathrm{Sym}^k f)$, for $f \in S_2^p(q)$, where q is a large prime number. Given a sequence $(\alpha_f)_{f\in S_2^p(q)}$, its harmonic average is defined as the sum

$$\sum_{f\in S_2^p(q)}^{h} \alpha_f = \sum_{f\in S_2^p(q)} \frac{\alpha_f}{4\pi\langle f, f\rangle_q},$$

and if $S \subset S_2^p(q)$ then we will let $|S|_h$ denote the harmonic measure of S, that is

$$|S|_h := \sum_{f\in S}^{h} 1.$$

Such averaging is natural in view of the two following facts

$$|S_2^p(q)|_h = 1 + O\left(\frac{\log q}{q^{3/2}}\right), \text{ and } \frac{1}{q(\log q)^3} \ll \omega_f \ll \frac{\log q}{q}; \tag{4.3.1}$$

so that the harmonic weight ω_f is not far from the natural weight $1/|S_2^p(q)|$ (since $|S_2^p(q)| \asymp q$), and it defines asymptotically a probability measure on $S_2^p(q)$.

To describe the corresponding random model for the family $L(1, \mathrm{Sym}^k f)$, we consider the compact group $G = SU(2)$ endowed with its natural Haar measure μ_G; we then let $G^\natural$ be the set of conjugacy classes of G endowed with the Sato-Tate measure μ_{st} (i.e. the direct image of μ_G by the canonical projection). By Weyl's integration formula, the map

$$\theta \to g(\theta)^\natural = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}^\natural,$$

identifies $G^\natural$ with the interval $[0, \pi]$ and μ_{st} with the distribution

$$d\mu_{st}(\theta) = \frac{2}{\pi} \sin^2(\theta) d\theta.$$

Consider a probability space (Ω, μ), and let $\{g_p^\natural\}_{p \in \mathcal{P}}$ be a sequence of independent random variables, with values in $G^\natural$ and distributed according to the measure μ_{st}. Consider the following random Euler product

$$L(1, \mathrm{Sym}^k g^\natural) := \prod_{p \in \mathcal{P}} \det\left(I - p^{-1} \mathrm{Sym}^k g_p^\natural\right)^{-1},$$

which converges with probability 1. Cogdell and Michel **[CM]**, proved that large complex harmonic moments of $L(1, \mathrm{Sym}^k f)$ and those of the random product $L(1, \mathrm{Sym}^k g^\natural)$ are roughly equal. More precisely they showed that

Theorem 4.3.1 (Theorem 1.3 of **[CM]**). *Let $k \geq 1$ be an integer and q a prime such that Hypothesis Sym$^k(q)$ holds. Then there exists $C = C(k) > 0$ and $\delta = \delta(k) > 0$ and an exceptional set $S_{2,ex}^p(q) \subset S_2^p(q)$ with at most one element such that, for any complex number z satisfying $|z| \leq C \log q/(\log_2 q \log_3 q)$, we have*

$$\frac{1}{|S_2^p(q) \backslash S_{2,ex}^p(q)|_h} \sum_{f \in S_2^p(q) \backslash S_{2,ex}^p(q)}^h L(1, Sym^k f)^z$$

$$= \mathbb{E}\left(L(1, Sym^k g^\natural)^z\right) + O_k\left(\exp\left(-\delta \frac{\log q}{\log_2 q}\right)\right),$$

the implied constant depending on k only.

Let

$$\Phi_q^\star(\mathrm{Sym}^k,\tau)=\frac{1}{|S_2^p(q)\backslash S_{2,ex}^p(q)|_h}\sum_{\substack{f\in S_2^p(q)\backslash S_{2,ex}^p(q)\\ L(1,\mathrm{Sym}^k f)\geq (e^\gamma\tau)^{k+1}}}^h 1.$$

Removing at most one exceptional element from $S_2^p(q)$ does not affect the distribution function. Indeed by (4.3.1) we can see that

$$\Phi_q(\mathrm{Sym}^k,\tau)=\Phi_q^\star(\mathrm{Sym}^k,\tau)+O\left(\frac{\log q}{q}\right). \tag{4.3.2}$$

Now we have to compute the moments of the random Euler product $L(1,\mathrm{Sym}^k g^\natural)$. Let $r>0$, by Weyl's integration formula we have

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(L(1,\mathrm{Sym}^k g^\natural)^r\right)&=\prod_{p\in\mathcal{P}}\int_{G^\natural}\det\left(I-p^{-1}\mathrm{Sym}^k g^\natural\right)^{-r}d\mu_{st}(g^\natural)\\ &=\prod_{p\in\mathcal{P}}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\det\left(I-p^{-1}\mathrm{Sym}^k g(\theta)\right)^{-r}\sin^2\theta d\theta\right).\end{aligned}$$

Since $\mathrm{Sym}^k g(\theta)$ is a diagonal matrix with diagonal entries $(e^{i\theta(k-2j)})_{0\leq j\leq k}$, then

$$\det\left(I-p^{-1}\mathrm{Sym}^k g(\theta)\right)=\prod_{j=0}^k\left(1-\frac{e^{i\theta(k-2j)}}{p}\right).$$

Let $\{\theta_p\}_{p\in\mathcal{P}}$ be independent random variables taking values on $[0,\pi]$ and endowed with the Sato-Tate measure $(2/\pi)\sin^2\theta d\theta$, and let $\theta_j(p)=(k-2j)\theta_p$ for $0\leq j\leq k$. Define the random variables $X_{st}(p):=\sum_{j=0}^k\theta_j(p)/(k+1)$, and the random Euler product $L(1,X_{st})$

$$L(1,X_{st}):=\prod_{p\in\mathcal{P}}\prod_{j=0}^k\left(1-\frac{e^{i\theta_p(k-2j)}}{p}\right)^{-1}.$$

The local factors of this random Euler product equal

$$\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-\delta_{2|k}}\prod_{0\leq j<k/2}\left(1-\frac{2\cos(\theta_p(k-2j))}{p}+\frac{1}{p^2}\right)^{-1},$$

where $\delta_{2|k}=1$ if k is even and 0 otherwise. This implies that $|L(1,X_{st})|=L(1,X_{st})$. Also one can easily see that the $\theta_j(p)$ satisfy conditions 1-4 of Theorem 4.1.1 and Proposition 4.2.1, and that

$$\mathbb{E}\left(L(1,\mathrm{Sym}^k g^\natural)^r\right)=\mathbb{E}\left(L(1,X_{st})^r\right). \tag{4.3.3}$$

Now we are ready to prove Theorem 4.1.2

PROOF OF THEOREM 4.1.2. Let $r > 0$ be large. Then by Theorem 4.3.1 and equation (4.3.3) we have that uniformly for $r \le C \log q / (\log_2 q \log_3 q)$

$$
\begin{aligned}
& r(k+1) \int_0^\infty \Phi_q^\star(\mathrm{Sym}^k, t) t^{r(k+1)-1} dt \\
&= \frac{r(k+1)}{|S_2^p(q) \backslash S_{2,ex}^p(q)|_h} \int_0^\infty t^{r(k+1)-1} \sideset{}{^h}\sum_{\substack{f \in S_2^p(q) \backslash S_{2,ex}^p(q) \\ L(1,\mathrm{Sym}^k f) \ge (e^\gamma t)^{k+1}}} 1 dt \\
&= \frac{e^{-\gamma(k+1)r}}{|S_2^p(q) \backslash S_{2,ex}^p(q)|_h} \sideset{}{^h}\sum_{f \in S_2^p(q) \backslash S_{2,ex}^p(q)} L(1, \mathrm{Sym}^k f)^r \\
&= e^{-\gamma(k+1)r} \mathbb{E}\left(L(1, X_{st})^r\right) + o(1).
\end{aligned}
$$

Since $L(1, X_{st})$ is real and positive, we deduce by Proposition 4.2.1 that $\mathbb{E}\left(L(1, X_{st})^r\right)$ equals

$$
= e^{\gamma(k+1)r} (\log r(k+1))^{r(k+1)} \exp\left(\frac{r(k+1)}{\log(r(k+1))}(A_k - 1) + O\left(\frac{r}{\log^2 r}\right)\right),
$$

where A_k is defined as in Theorem 4.1.2. Therefore

$$
\begin{aligned}
& \int_0^\infty \Phi_q^\star(\mathrm{Sym}^k, t) t^{r(k+1)-1} dt \\
&= (\log r(k+1))^{r(k+1)} \exp\left(\frac{r(k+1)}{\log(r(k+1))}\left(A_k - 1 + O\left(\frac{1}{\log r}\right)\right)\right),
\end{aligned}
$$

and thus by the same saddle point method used to prove Theorem 4.1.1 (taking $\tau = \log(r(k+1)) + A_k$), we deduce that uniformly for $\tau \le \log_2 q - \log_3 q - 2\log_4 q$, we have

$$
\Phi_q^\star(\mathrm{Sym}^k, \tau) = \exp\left(-\frac{e^{\tau - A_k}}{\tau}\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}}\right)\right)\right).
$$

Hence by (4.3.2) the result follows. □

4.4. ANOTHER CLASS OF RANDOM MODELS

For some families of L-functions, the corresponding probabilistic model has the shape

$$
L(1, X) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \prod_{j=1}^{d} \left(1 - \frac{X_j(p) a_j(p)}{p^s}\right)^{-1}
$$

where the $X_j(p)$ are random variables distributed on the unit circle $\mathbb{U}$, and $a_j(n)$ are completely multiplicative functions. In general it is difficult to study the distribution of $|L(1,X)|$ if any of the functions $a_j(p)$ is negative or have complex values, since in this case it is difficult to find the maximum of the local factors of $|L(1,X)|$, if the $X_j(p)$ are not independent for the same prime p. However we still get results in some cases where

$$X_1(p) = X_2(p) = ... = X_d(p) = X(p), \text{ for all primes } p.$$

In the first case we take the $\{X(p)\}_{p\in\mathcal{P}}$ to be independent random variables uniformly distributed on $\mathbb{U}$ (this will correspond to the random models constructed to study L-functions of the Selberg class in the t-aspect). While in the second case the $\{X(p)\}_{p\in\mathcal{P}}$ will be random variables taking the values -1 and 1 with equal probabilities $1/2$ (this will be useful in the study of quadratic twists of automorphic L-functions at 1). Since the analysis for the two cases is quite similar, we only describe the first one.

Let $a_1(n), ..., a_d(n)$ be completely multiplicative functions such that for primes p

$$|a_i(p)| \leq p/2, \quad \text{and } a_i(p) \ll 1, \quad \text{as } p \to \infty. \tag{4.4.1}$$

And define a_n by

$$\prod_{p\in\mathcal{P}}\prod_{j=1}^{d}\left(1-\frac{a_j(p)}{p^s}\right)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}, \text{ for } \operatorname{Re}(s) > 1,$$

so that a_n is multiplicative and $a_p = \sum_{j=1}^{d} a_j(p) \ll 1$. Let $\{X_u(p)\}_{p\in\mathcal{P}}$ be independent random variables uniformly distributed on $\mathbb{U}$. In this section we study the distribution of the following random Euler product

$$L(1, X_u) := \prod_{p\in\mathcal{P}}\prod_{j=1}^{d}\left(1-\frac{X_u(p)a_j(p)}{p}\right)^{-1}.$$

To do so we have to estimate its real moments. Define

$$L_p(t) = \prod_{j=1}^{d}\left(1-\frac{e^{it}a_j(p)}{p}\right)^{-1}, \text{ for } t \in [-\pi, \pi].$$

Since $|L_p(t)|$ is a continuous function of t, it attain its maximum at some $\phi_p \in [-\pi, \pi]$. Let $h(t) = \log I_0(t)$. We first prove

Lemma 4.4.1. *Let $r > 0$ be large, and put $r_1 := r/(\log^2 r)$, and $r_2 := r \log_2 r$. Then we have*

$$\log \mathbb{E}\left(|L(1, X_u)|^r\right) = r \sum_{p \le r_1} \log |L_p(\phi_p)| + \sum_{r_1 < p \le r_2} h\left(\frac{r|a_p|}{p}\right) + o\left(\frac{r}{\log r}\right).$$

PROOF. The proof goes through the lines of the proof of Proposition 4.2.1. Write $\mathbb{E}(|L(1, X_u)|^r) = \prod_{p \in \mathcal{P}} E_p$, where

$$\begin{aligned} E_p &= \mathbb{E}\left(\prod_{j=1}^{d} \left|1 - \frac{X_u(p) a_j(p)}{p}\right|^{-r}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\prod_{j=1}^{d} \left(1 - \frac{2\mathrm{Re}(X_u(p) a_j(p))}{p} + \frac{|a_j(p)|^2}{p^2}\right)^{-r/2}\right). \end{aligned}$$

Let $\beta_p = \arg a_p$. In the range $p > r_1$, we have

$$\begin{aligned} E_p &= \mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{r}{p}\mathrm{Re}(a_p X_u(p))\right)\right)\left(1 + O\left(\frac{r}{p^2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(\frac{r|a_p|}{p}\cos(t + \beta_p)\right) dt \left(1 + O\left(\frac{r}{p^2}\right)\right) \qquad (4.4.2) \\ &= \exp\left(h\left(\frac{r|a_p|}{p}\right)\right)\left(1 + O\left(\frac{r}{p^2}\right)\right). \end{aligned}$$

Now if $p \le r_1$, we let

$$E_p^{\star} := E_p |L_p(\phi_p)|^{-r} \le 1.$$

Further $E_p^{\star}$ equals

$$\mathbb{E}\left(\prod_{j=1}^{d}\left(1 - \frac{2\mathrm{Re}(a_j(p)(X_u(p) - e^{i\phi_p}))}{p\left(1 - 2\mathrm{Re}(e^{i\phi_p} a_j(p))/p + |a_j(p)|^2/p^2\right)}\right)\right)^{-r/2}.$$

Let $\epsilon = \frac{1}{r^2}$. Then

$$E_p^{\star} \ge \frac{1}{2\pi}\int_{\phi_p - \epsilon}^{\phi_p + \epsilon} \prod_{j=1}^{d}\left(1 - \frac{2\mathrm{Re}(a_j(p)(e^{it} - e^{i\phi_p}))}{p\left(1 - 2\mathrm{Re}(e^{i\phi_p} a_j(p))/p + |a_j(p)|^2/p^2\right)}\right)^{-r/2} dt,$$

from which we can deduce that $E_p^{\star} \ge 1/(2\pi r^2)$. Which implies that

$$\log E_p = r \log |L_p(\phi_p)| + O(\log r).$$

Therefore we deduce from these two cases that

$$\sum_{p\in\mathcal{P}} \log E_p = r\sum_{p\le r_1} \log|L_p(\phi_p)| + \sum_{r_1<p} h\left(\frac{r|a_p|}{p}\right) + O\left(r\sum_{p>r_1}\frac{1}{p^2} + \pi(r_1)\log r\right).$$

The error term above is $\ll r/(\log^2 r)$. Moreover by the fact that $h(t) \ll t^2$ for $0 \le t \le 1$, we have

$$\sum_{p>r_2} h\left(\frac{r|a_p|}{p}\right) \ll \sum_{p>r_2}\frac{r^2|a_p|^2}{p^2} \ll \frac{r^2}{r_2\log r_2} = o\left(\frac{r}{\log r}\right),$$

which imply the result. □

In order to evaluate the two sums in the main term of the RHS of Lemma 4.4.1, we assume further that the a_p satisfy Hypothesis D with distribution function ψ. Let N and M be as in Theorem 4.1.4. To estimate the first sum we use the following convergent product

$$b_u := \prod_{p\in\mathcal{P}} |L_p(\phi_p)|\left(1-\frac{1}{p}\right)^N.$$

Indeed this product converges upon using Hypothesis D to show that

$$\sum_{p\le y}\frac{|a_p|}{p} \sim N\sum_{p\le y}\frac{1}{p},$$

along with the fact that

$$|L(\phi_p)| = \exp\left(\frac{|a_p|}{p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right)\right).$$

We now prove

Proposition 4.4.1. *Assume that the $\{a_p\}_{p\in\mathcal{P}}$ are bounded and satisfy Hypothesis D. Let M and N be as in Theorem 4.1.4. For $r > 0$ large enough we have*

$$\log\mathbb{E}\left(|L(1,X_u)|^r\right) = rN\log_2(r) + r(\gamma N + \log b_u) + \frac{r}{\log r}(M + N(C_2-1)) + o\left(\frac{r}{\log r}\right).$$

PROOF. Let r_1 and r_2 be as in Lemma 4.4.1. The first step is to estimate

$$\sum_{r_1<p<r_2} h\left(\frac{r|a_p|}{p}\right).$$

To do so divide the interval (r_1, r_2) into small interval (u_i, u_{i+1}) for $1 \leq i \leq I$, where

$$u_1 = r_1, \text{ and } u_{i+1} = u_i \left(1 + \frac{1}{\log_2^2 r}\right),$$

and I is the smallest integer such that $u_I > r_2$. A simple estimate shows that $I \ll (\log_2 r)^3$. Now for $1 \leq i \leq I - 1$ we have

$$\sum_{u_i \leq p \leq u_{i+1}} h\left(\frac{r|a_p|}{p}\right) = \sum_{u_i \leq p \leq u_{i+1}} h\left(\frac{r|a_p|}{u_i}\right) + O\left(\sum_{u_i \leq p \leq u_{i+1}} \left|\frac{r}{u_i} - \frac{r}{p}\right|\right), \tag{4.4.3}$$

since h is Lipschitz. By the prime number Theorem the error term above is

$$\ll \frac{r}{\log_2^2 r} \sum_{u_i \leq p \leq u_{i+1}} \frac{1}{p} \ll \frac{r}{u_i \log_2^2 r} (\pi(u_{i+1}) - \pi(u_i)) \ll \frac{r}{\log r \log_2^4 r}.$$

We assumed hypothesis D, hence we get

$$\sum_{u_i \leq p \leq u_{i+1}} h\left(\frac{r|a_p|}{u_i}\right) = (\pi(u_{i+1}) - \pi(u_i)) \int_0^U h\left(\frac{rt}{u_i}\right) \psi(t) dt + o\left(\frac{u_i}{\log^2 u_i}\right). \tag{4.4.4}$$

Using that h is Lipschitz again gives us

$$\begin{aligned} &(\pi(u_{i+1}) - \pi(u_i)) \int_0^U h\left(\frac{rt}{u_i}\right) \psi(t) dt \\ &= \sum_{u_i \leq p \leq u_{i+1}} \int_0^U h\left(\frac{rt}{p}\right) \psi(t) dt + O\left(\frac{r}{\log r \log_2^4 r}\right). \end{aligned}$$

Therefore using the equation above with equations (4.4.3) and (4.4.4) give

$$\sum_{u_i \leq p \leq u_{i+1}} h\left(\frac{r|a_p|}{p}\right) = \sum_{u_i \leq p \leq u_{i+1}} \int_0^U h\left(\frac{rt}{p}\right) \psi(t) dt + O\left(\frac{r}{\log r \log_2^4 r}\right).$$

Now adding all these together for $1 \leq i \leq I$, we deduce

$$\sum_{r_1 \leq p \leq r_2} h\left(\frac{r|a_p|}{p}\right) = \sum_{r_1 \leq p \leq r_2} \int_0^U h\left(\frac{rt}{p}\right) \psi(t) dt + O\left(\frac{r}{\log r \log_2 r}\right). \tag{4.4.5}$$

For a positive number x define

$$H(x) := \int_0^U h(xt) \psi(t) dt, \text{ and } F(x) := \int_0^U f(xt) \psi(t) dt.$$

Then

$$H(x) = F(x) + x \int_{1/x}^U t\psi(t) dt.$$

By a simple change of variables and Lemma 4.2.1, we have

$$F(x) \ll \int_0^U f(xt)\,dt = \frac{1}{x}\int_0^{Ux} f(t)dt = \begin{cases} O\left(x^2\right) & \text{if } 0 \le x < 1/U \\ O(\log x + 1) & \text{if } 1/U \le x. \end{cases}$$

Therefore by the same analysis as in equations (4.2.6)-(4.2.9), we deduce that

$$\sum_{r_1 \le p \le r_2} F\left(\frac{r}{p}\right) = \frac{r}{\log r}\int_0^\infty \frac{F(t)}{t^2}dt + o\left(\frac{r}{\log r}\right). \tag{4.4.6}$$

Now

$$\int_0^\infty \frac{F(t)}{t^2}dt = \int_0^\infty \frac{1}{t^2}\int_0^U f(tx)\,\psi(x)dxdt = \int_0^U \psi(x)\int_0^\infty \frac{f(tx)}{t^2}dtdx.$$

By a simple change of variable $T = tx$ (t is the variable and x is constant), we get

$$\int_0^\infty \frac{F(t)}{t^2}dt = \int_0^U x\psi(x)\int_0^\infty \frac{f(T)}{T^2}dTdx = N(C_2 - 1), \tag{4.4.7}$$

Furthermore

$$\sum_{r_1 \le p \le rU} \frac{r}{p}\int_{p/r}^U t\psi(t)dt = N\sum_{r_1 \le p \le rU}\frac{r}{p} - \sum_{r_1 \le p \le rU}\frac{r}{p}\int_0^{p/r} t\psi(t)dt. \tag{4.4.8}$$

Now to calculate the last sum on the RHS of equation (4.4.8), we change the order of summation and integration to get

$$\sum_{r_1 \le p \le rU}\frac{r}{p}\int_0^{p/r} t\psi(t)dt = r\int_0^{r_1/r}\sum_{r_1 \le p \le rU}\frac{1}{p}t\psi(t)dt + r\int_{r_1/r}^U \sum_{rt \le p \le rU}\frac{1}{p}t\psi(t)dt. \tag{4.4.9}$$

And since

$$r\int_0^{r_1/r}\sum_{r_1 \le p \le rU}\frac{1}{p}t\psi(t)dt \ll r\log_2 r\int_0^{1/\log^2 r} tdt = O\left(\frac{r}{\log^3 r}\right), \tag{4.4.10}$$

the LHS of equation (4.4.9) equals

$$r\int_{r_1/r}^U \log\left(\frac{\log rU}{\log rt}\right) t\psi(t)dt + O\left(\frac{r}{\log^2 r}\right). \tag{4.4.11}$$

In the range $r_1/r \le t \le U$, we have

$$\log\left(\frac{\log rU}{\log rt}\right) = -\log\left(1 + \frac{\log t/U}{\log rU}\right) = -\frac{\log t/U}{\log rU} + O\left(\frac{\log^2 t}{\log^2 r}\right).$$

Therefore by equations (4.4.10) and (4.4.11) we deduce that the LHS of (4.4.9) equals

$$-\frac{r}{\log rU}\int_0^U t\psi(t)\log t/U\,dt + O\left(\frac{r}{\log^2 r}\right).$$

Hence by equation (4.4.8) we have

$$\begin{aligned}\sum_{r_1\le p\le rU}\frac{r}{p}\int_{p/r}^U t\psi(t)dt &= Nr\sum_{r_1\le p\le rU}\frac{1}{p} + (M - N\log U)\frac{r}{\log r} + O\left(\frac{r}{\log^2 r}\right)\\ &= Nr\sum_{r_1\le p\le r}\frac{1}{p} + M\frac{r}{\log r} + O\left(\frac{r}{\log^2 r}\right).\end{aligned} \tag{4.4.12}$$

Thus by equations (4.4.5), (4.4.6), (4.4.7) and (4.4.12) we deduce that

$$\sum_{r_1\le p\le r_2} h\left(\frac{r|a_p|}{p}\right) = Nr\sum_{r_1\le p\le r}\frac{1}{p} + (M + N(C_2-1))\frac{r}{\log r} + o\left(\frac{r}{\log r}\right). \tag{4.4.13}$$

Furthermore using hypothesis D and partial summation, we get that

$$\sum_{p\le y}\frac{|a_p| - N}{p} = o\left(\frac{1}{\log y}\right),$$

and therefore we get that

$$r\sum_{p\le r_1}\log|L_p(\phi_p)| = -\sum_{p\le r_1} rN\log\left(1-\frac{1}{p}\right) + r\log b_u + o\left(\frac{r}{\log r}\right). \tag{4.4.14}$$

Finally by

$$\sum_{r_1<p<r}\frac{1}{p} + \log\left(1-\frac{1}{p}\right) \ll \frac{1}{r_1\log r_1},$$

and equation (4.2.10), we get the result. □

Now define

$$\Phi_u(\tau) := \text{Prob}\left(|L(1,X_u)| > b_u(e^\gamma\tau)^N\right).$$

Following the same lines as the proof of Theorem 4.1.1 (taking $\tau = \log(rN) + (C_2 + M/N - \log N)$) we obtain the following result

Theorem 4.4.1. *With the same notations and assumptions as in Proposition 4.4.1, we have for* $\tau \gg 1$

$$\Phi_u(\tau) = \exp\left(-\frac{e^{\tau - C_2 - M/N + \log N}}{\tau}(1 + o(1))\right).$$

Let $\{X_c(p)\}_{p\in\mathcal{P}}$ be independent random variables taking the values -1 and 1 with equal probabilities, and define the random Euler product

$$L(1,X_c) := \prod_{p\in\mathcal{P}}\prod_{j=1}^{d}\left(1-\frac{X_c(p)a_j(p)}{p}\right)^{-1},$$

where $a_j(p)$ are real, bounded and satisfy Hypothesis D with distribution function ψ. As above define

$$\Phi_c(\tau) := \text{Prob}\left(L(1,X_c) > b_c(e^{\gamma}\tau)^N\right),$$

where

$$b_c := \prod_{p\in\mathcal{P}} L(p)\left(1-\frac{1}{p}\right)^N \text{ and } L(p) = \max_{\delta\in\{-1,1\}}\prod_{i=1}^{d}\left(1-\delta\frac{a_j(p)}{p}\right)^{-1}.$$

Then using exactly the same analysis as above we prove

Theorem 4.4.2. *Assume that the $\{a_p\}_{p\in\mathcal{P}}$ are real, bounded and satisfy Hypothesis D. Let M and N be as in Theorem 4.1.4. For $r>0$ large enough we have*

$$\log\mathbb{E}\left(L(1,X_c)^r\right) = rN\log_2(r)+r(\gamma N+\log b_c)+\frac{r}{\log r}(M+N(C_1-1))+o\left(\frac{r}{\log r}\right),$$

and

$$\Phi_c(\tau) = \exp\left(-\frac{e^{\tau-C_1-M/N+\log N}}{\tau}(1+o(1))\right).$$

4.5. The Selberg class of L-functions in the t-aspect

In **[Sel]**, Selberg studied and made several conjectures on this class of L-functions, among all, the most important is the Riemann Hypothesis. However we don't use this hypothesis in our work, but we require some weak results on zeros density estimates near the line $\text{Re}(s) = 1$, which have been proved by Kaczorowski-Perelli (see Lemma 3 of **[KP2]**)

Lemma 4.5.1. *Let $F\in S$, and define*

$$N_F(\sigma,T) := |\{\rho=\beta+i\gamma : F(\rho)=0, \sigma\le\beta\le 1, |\gamma|\le T\}|$$

Then there exists $\lambda_F>0$ such that

$$N_F(\sigma,T) \ll T^{\lambda_F(1-\sigma)}, \text{ uniformly for } 1/2<\sigma<1.$$

Let $F \in S$. In order to study the distribution of large values of $|F(1+it)|$, we have to compute its moments. However it is difficult in general to find asymptotic formulas for large moments due to the difficulty of estimating the off-diagonal terms. To solve this problem we approximate $F(1+it)$ by very short Euler products and compute large moments of these. We generalize the approach of Granville and Soundararajan (**[GS2]** and **[GS4]**), and use Lemma 4.5.1 to show that this approximation holds for almost all t. First we prove

Lemma 4.5.2. *Let $y \geq 2$ be a real number and $|t| \geq y+3$. Let $1/2 \leq \sigma_0 < \sigma$, and suppose that there are no zeros of $F(s)$ inside the rectangle $\{z : \sigma_0 \leq Re(z) \leq 1, |Im(z) - t| \leq y+1\}$, then for $s = \sigma + it$ we have*

$$|\log F(s)| \ll \frac{\log |t|}{\sigma - \sigma_0}$$

PROOF. First for $\sigma > 1$ we know that $|\log F(s)| \ll 1$ so there is nothing to prove in this case. Now assume that $\sigma \leq 1$, and consider the circles with center $2+it$ and radii $r := 2-\sigma < R := 2-\sigma_0$, so that the smaller circle passes through s. By our hypothesis $\log F(s)$ is analytic inside the larger circle. For a point z on the larger circle we use the bound $|F(z)| \ll |z|^{\alpha_F} \ll |t|^{\alpha_F}$, which holds for some constant α_F by the functional equation, so that $\mathrm{Re}(\log F(z)) \ll \log |t|$. Thus upon using the Borel-Caratheodory Theorem we deduce that

$$|\log F(s)| \leq \frac{2r}{R-r} \max_{|z-2-it|=R} \mathrm{Re}(\log F(s)) + \frac{R+r}{R-r} |\log F(2+it)| \ll \frac{\log |t|}{\sigma - \sigma_0}.$$

□

Using this bound we prove

Lemma 4.5.3. *Let $F \in S$ and satisfies assumption (4.1.3). Let $y \geq 2$ and $|t| \geq y+3$ be real numbers. Let $\frac{1}{2} \leq \sigma_0 < \sigma \leq 1$ and suppose that the rectangle $\{s : \ \sigma_0 < Re(s) \leq 1, \ \ |Im(s) - t| \leq y+2\}$ does not contains zeros of $F(s)$. Then*

$$\log F(\sigma + it) = \sum_{n=2}^{y} \frac{b_n}{n^{\sigma+it}} + O\left(\frac{\log |t|}{(\sigma_1 - \sigma_0)^2} y^{\sigma_1 - \sigma}\right),$$

where $\sigma_1 = \min(\sigma_0 + \frac{1}{\log y}, \frac{\sigma+\sigma_0}{2})$.

PROOF. Without loss of generality we may assume that $y \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$. Let $c = 1 - \sigma + \frac{1}{\log y}$, by Perron's formula (see Davenport **[Da]**), we have

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-iy}^{c+iy} \log F(\sigma + it + w) \frac{y^w}{w} dw = \sum_{n=2}^{y} \frac{b_n}{n^{\sigma+it}} + O\Big(\frac{1}{y} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^c |b_n|}{n^{\sigma+c}} \frac{1}{|\log(y/n)|} \Big). \tag{4.5.1}$$

To deal with the error term in the RHS of equation (4.5.1), we take first all the terms for which $n \le \frac{3}{4}y$ or $n \ge \frac{5}{4}y$. For these, $|\log(y/n)|$ has a positive lower bound, so there contribution is

$$\ll \frac{1}{y^\sigma} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n|}{n^{1+1/\log y}} = \frac{1}{y^\sigma} \left(\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{|a_p|}{p^{1+1/\log y}} + O(1) \right) \ll \frac{\log y}{y^\sigma},$$

by partial summation and assumption (4.1.3).

Now consider the terms for which $\frac{3}{4}y < n < y$. Let y_0 be the largest prime power less than y; we can suppose that $\frac{3}{4}y < y_0 < y$. For the term $n = y_0$, we have that $\log(y/n) \ge (y-n)/y$, so the contribution of this term is $\ll \frac{|b_n|}{y^\sigma} \ll y^{\lambda-\sigma}$ by axiom 4. For the other terms we can put $n = y_0 - m$, where $0 < m < y/4$, and then $\log(y/n) \ge m/y$. Hence the contribution of these terms is

$$\ll \frac{1}{y^\sigma} \sum_{0<m<y/4} \frac{|b_{y_0-m}| y_0}{(y_0 - m)^{1+1/\log y} m} \ll y^{\lambda-\sigma} \log y.$$

The terms with $y < n < \frac{5}{4}y$ are dealt with similarly, except that y_0 is replaced by y_1 which is the least prime power greater than y. Thus the error term in the RHS of (4.5.1) is

$$\ll y^{\lambda-\sigma} \log y.$$

Now we move the line of integration to the left at $\mathrm{Re}(w) = \sigma_1 - \sigma < 0$. From our hypothesis we encounter only a simple pole at $w = 0$ which has residue $\log F(\sigma + it)$. Thus the left side of equation (4.5.1) equals $\log F(\sigma + it)$ plus

$$\frac{1}{2\pi i} \Big(\int_{c-iy}^{\sigma_1-\sigma-iy} + \int_{\sigma_1-\sigma-iy}^{\sigma_1-\sigma+iy} + \int_{\sigma_1-\sigma+iy}^{c+iy} \Big) \log F(\sigma+it+w) \frac{y^w}{w} dw \ll \frac{\log |t|}{(\sigma_1 - \sigma_0)^2} y^{\sigma_1-\sigma},$$

by Lemma 4.5.2. □

Lemma 4.5.4. *Let $F \in S$ and satisfies (4.1.3). Let $T > 0$ be large. There exists some $\epsilon_F > 0$, such that for any real number $3 \le y \le T/2$ the asymptotic*

$$\log F(1+it) = \sum_{n=2}^{y} \frac{b_n}{n^{1+it}} + O\left(y^{-\epsilon_F} \log^3 T\right)$$

holds for all $t \in (T, 2T)$ except a set of measure $T^{1-c_F} y$, for some fixed constant $c_F > 0$.

PROOF. By Lemma 4.5.1, there exist two positive constants ϵ_F and c_F such that $N_F(1-\epsilon_F, T) \ll T^{1-c_F}$. Thus applying to Lemma 4.5.3 with $\sigma_0 = 1 - \epsilon_F$ gives the result. □

Let $F \in S$ and satisfies assumption (4.1.3). For $y > 2$ define the short Euler product of length y of $F(1+it)$ by

$$F(1+it, y) := \sum_{n \in S(y)} \frac{a_F(n)}{n^{1+it}}, \text{ where } S(y) = \{n \in \mathbb{N} : p|n \implies p \le y\}. \quad (4.5.2)$$

And similarly define the short Euler random product of $F(1, X)$ by

$$F(1, X, y) := \sum_{n \in S(y)} \frac{a_F(n) X(n)}{n}.$$

The following proposition establish that large integral moments of $F(1+it, y)$ and $F(1, X, y)$ are roughly equal. For simplicity we let $a_F(n) = a_n$.

Proposition 4.5.1. *Let $F \in S$ and satisfies assumption (4.1.3). Let $T > 0$ be large and $2 < y < (\log T)^A$ a real number where $A > 0$ is a fixed constant. Then for all positive integers k in the range $1 \le k \le \log T/(B \log_2 T \log_2 T)$ for some suitably large constant $B = B(F, A) > 0$, we have*

$$\frac{1}{T} \int_T^{2T} |F(1+it, y)|^{2k} dt = \mathbb{E}\left(|F(1, X, y)|^{2k}\right) + o(1).$$

PROOF. First we have that

$$|F(1+it, y)|^{2k} = \sum_{n, m \in S(y)} \frac{c_k(n)\overline{c_k(m)}}{m^{1-it} n^{1+it}}, \quad \text{where } c_k(m) = \sum_{m_1 m_2 \dots m_k = m} a_{m_1} \dots a_{m_k}.$$

Therefore

$$\frac{1}{T}\int_T^{2T}|F(1+it,y)|^{2k}dt = \sum_{n,m\in S(y)}\frac{c_k(n)\overline{c_k(m)}}{mn}\frac{1}{T}\int_T^{2T}\left(\frac{m}{n}\right)^{it}dt.$$

The contribution of the diagonal terms $m=n$ is

$$\sum_{n\in S(y)}\frac{|c_k(n)|^{2k}}{n^2} = \mathbb{E}\left(|F(1,X,y)|^{2k}\right),$$

so it remains only to bound the contribution of the non-diagonal terms. To do so we divide the above sum into two parts : E_1 over the integers $1\leq m\neq n\leq\sqrt{T}$, and E_2 over the remaining terms. For the first terms we use the fact that

$$\int_T^{2T}\left(\frac{m}{n}\right)^{it}dt \ll \frac{1}{T|\log(m/n)|}\leq\frac{1}{\sqrt{T}},$$

which implies that

$$E_1 \ll \frac{1}{\sqrt{T}}\left(\sum_{n\in S(y)}\frac{|c_k(n)|}{n}\right)^2 = \frac{1}{\sqrt{T}}\left(\sum_{n\in S(y)}\frac{|a_n|}{n}\right)^{2k} \ll \frac{\exp(O(k\log_2 y))}{\sqrt{T}} = o(1).$$

Let $\beta = 1/\log_2 T$. The contribution of the remaining non-diagonal terms is

$$E_2 \ll \left(\sum_{n>\sqrt{T}}\frac{|c_k(n)|}{n}\right)\left(\sum_{n\in S(y)}\frac{|c_k(n)|}{n}\right) \ll \frac{\exp(O(k\log_2 y))}{T^{\beta/2}}\left(\sum_{n\in S(y)}\frac{|c_k(n)|}{n^{1-\beta}}\right).$$

Moreover

$$\left(\sum_{n\in S(y)}\frac{|c_k(n)|}{n^{1-\beta}}\right) = \left(\sum_{n\in S(y)}\frac{|a_n|}{n^{1-\beta}}\right)^k = \exp\left(k\sum_{p\leq y}\frac{|a_p|}{p^{1-\beta}}+O(k)\right)$$
$$\leq \exp(O(k\log_2 y)).$$

Therefore the contribution of the non-diagonal terms is bounded by

$$\exp(-\beta\log T + O(k\log_2 y)),$$

which completes the proof. □

By Lemma 4.5.4, we can approximate $F(1+it)$ by very short Euler products for almost all $t\in[T,2T]$, where the exceptional set have measure $\leq T^{1-c_F}$ for some positive constant c_F. Therefore in order to compute high moments of $F(1+it)$, we need to control the contribution of these exceptional values. To do so we prove the classical bound for $F(1+it)$. We follow closely the method of K. Soundararajan **[So]**.

Lemma 4.5.5. *Let $F \in S$ and satisfies assumption (4.1.3). Then there exists a constant m_F such that for any real number t we have*

$$F(1+it) \ll \log(|t|+2)^{m_F}.$$

PROOF. Let $c > 0$, and take $Z \geq 1$. Then expand $F(1+it+\omega)$ into its Dirichlet series to see that

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(1+it+\omega)Z^{\omega}\Gamma(\omega)d\omega = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{1+it}}e^{-n/Z}.$$

Now shift the contour to the line of integration $\omega = -1+\epsilon$. the pole at $\omega = 0$ leaves the residue $F(1+it)$. The possible pole at $\omega = -it$ leaves a residue $\ll Z^{\epsilon}(1+|t|)^{\epsilon}|\Gamma(it)| \ll Z^{\epsilon}e^{-|t|}$. Finally using the functional equation (axiom 3) and Stirling's formula we have

$$|F(1+it+\omega)| = \frac{|\overline{\gamma_F}(-it-\omega)|}{|\gamma_F(1+it+\omega)|}|F(-it-\omega)| \ll (1+|t|+|\omega|)^{1+\epsilon},$$

for ω on the line $\mathrm{Re}(\omega) = -1+\epsilon$. Hence the integral on the line $\mathrm{Re}(\omega) = -1+\epsilon$ is $\ll Z^{-1+\epsilon}(1+|t|)^{1+\epsilon}$. Therefore we deduced that for any $\epsilon > 0$ and $Z \geq 1$

$$F(1+it) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{1+it}}e^{-n/Z} + O\left(Z^{-1+\epsilon}(1+|t|)^{1+\epsilon} + Z^{\epsilon}e^{-|t|}\right).$$

Choose $Z = 1+|t|^2$. Then the error term is $\ll |t|^{-1+2\epsilon}$. Now the main term is bounded by

$$\sum_{n\leq X^2}^{\infty}\frac{|a_n|}{n} + \sum_{k=1}^{\infty}e^{-Z^k}\sum_{Z^{k+1}\leq n\leq Z^{k+2}}\frac{|a_n|}{n}.$$

Now by assumption (4.1.3), we know that

$$\sum_{n\leq y}\frac{|a_n|}{n} \leq \exp\left(\sum_{p\leq y}\frac{|a_p|}{p} + O(1)\right) \ll \exp(O(\log_2 y)).$$

Therefore we get

$$F(1+it) \ll \log(|t|+2)^{m_F},$$

for some constant $m_F > 0$. $\square$

PROOF OF THEOREM 4.1.3. Let ϵ_F be as in Lemma 4.5.4 and take $y = \log^{(A+3)/\epsilon_F} T$. Then by this Lemma we know that

$$F(1+it) = F(1+it,y)\left(1+O\left(\frac{1}{\log^A T}\right)\right),$$

for all $t \in [T, 2T]$ except a set of measure $V = T^{1-\delta}$ for some small $\delta = \delta(F, A)$. Now by Lemma 4.5.5 we deduce that

$$\frac{1}{T}\int_T^{2T} |F(1+it)|^{2k} dt = \frac{1}{T}\int_T^{2T} |F(1+it,y)|^{2k} dt \left(1+O\left(\frac{1}{\log^A T}\right)\right) + Er,$$

where

$$\begin{aligned} Er &\ll V \max_{t\in[T,2T]} |F(1+it)|^{2k} + V \max_{t\in[T,2T]} |F(1+it,y)|^{2k} \\ &\ll T^{1-\delta} \exp\left(O(k\log_2 T)\right) = o(1). \end{aligned}$$

Furthermore by equation (4.4.2) and the fact that $h(t) \ll t^2$ for $0 \le t \le 1$, we have

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(|F(1,X)|^{2k}\right) &= \mathbb{E}\left(|F(1,X,y)|^{2k}\right) \exp\left(O\left(k\sum_{p>y}\frac{|a_p|^2}{p^2}\right)\right) \\ &= \mathbb{E}\left(|F(1,X,y)|^{2k}\right)\left(1+O\left(\frac{1}{\log^A T}\right)\right). \end{aligned}$$

Therefore by Proposition 4.5.1 we get the result. □

In order to prove Theorem 4.1.4 we consider only those $F \in S^\star$ which satisfy Hypothesis D (with distribution function ψ). Hence our random model $F(1, X)$ satisfies the assumptions of Proposition 4.4.1, and thus we can compute its real moments. Using this fact along with the same saddle point method used to prove Theorem 4.1.1 we prove Theorem 4.1.4.

PROOF OF THEOREM 4.1.4. First for any positive real number r we have that

$$rN\int_0^\infty \Phi_F(t) t^{rN-1} dt = \left(b_F e^{\gamma N}\right)^{-r} \frac{1}{T}\int_T^{2T} |F(1+it)|^r dt.$$

Take $r = 2k$ where $1 \le k \le \log T/(B\log_2 T\log_3 T)$ is a positive integer, and B is a suitably large constant. Therefore by Theorem 4.1.3 and Proposition 4.4.1 we have that

$$2kN\int_0^\infty \Phi_F(t)t^{2kN-1}dt = \left(b_F e^{\gamma N}\right)^{-2k}\mathbb{E}\left(|F(1,X)|^{2k}\right)\left(1+O\left(\frac{1}{\log T}\right)\right)$$
$$= (\log 2k)^{2kN}\exp\left(\frac{2k}{\log 2k}(M+N(C_2-1))+o\left(\frac{2k}{\log 2k}\right)\right). \tag{4.5.3}$$

In order to use the saddle point method as in the proof of Theorem 4.1.1, we require equation (4.5.3) to be valid for all real numbers r in the range $1 \le r \le \log T/(B\log_2 T\log_3 T)$. To do so we know by equation (4.5.3) (for $k \ge 1/N$ and fixed) that

$$\int_0^\infty \Phi_F(t)dt \ll 1 + \int_1^\infty \Phi_F(t)t^{2kN-1}dt \ll 1.$$

Therefore by Hölder's inequality we have for $a < b$

$$\int_0^\infty \Phi_F(t)t^a dt \le \left(\int_0^\infty \Phi_F(t)dt)^{1-a/b}\right)\left(\int_0^\infty \Phi_F(t)t^b dt\right)^{a/b}$$
$$\ll \left(\int_0^\infty \Phi_F(t)t^b dt\right)^{a/b}.$$

Using this we may interpolate equation (4.5.3) to non-integer value $\kappa \in (k-1,k)$ by taking $a = 2(k-1)N-1, b = 2\kappa N - 1$ and then $a = 2\kappa N - 1, b = 2kN-1$ in the last inequality to obtain

$$\left(\int_0^\infty \Phi_F(t)t^{2(k-1)N-1}dt\right)^{\frac{2\kappa N-1}{2(k-1)N-1}} \ll \int_0^\infty \Phi_F(t)t^{2\kappa N-1}dt$$
$$\ll \left(\int_0^\infty \Phi_F(t)t^{2kN-1}dt\right)^{\frac{2\kappa N-1}{2kN-1}}.$$

Hence we get equation (4.5.3) for $r = 2\kappa$ by substituting the same equation for $2(k-1)$ and $2k$ into this equation. Finally applying the same saddle point method as in the proof of Theorem 4.1.1 (now taking $\tau = \log r + C_2 + M/N$) we get the result. □

4.6. Distribution of Quadratic twists of automorphic L-functions

Let π be an auto-dual cuspidal automorphic representation of $GL(m)/\mathbb{Q}$, such that the $a_\pi(p)$ satisfy assumption (4.1.3). Consider the values of $L(\pi\otimes\chi_d, 1)$ as d varies over all fundamental discriminants with $|d| \le x$. The probabilistic model constructed for this family is based on the totally multiplicative function $X(.)$, where the $\{X(p)\}_{p\in\mathcal{P}}$ are independent random variables taking the values 1 with probability $p/(2(p+1))$, 0 with probability $1/(p+1)$, and -1 with probability $p/(2(p+1))$; and for a positive integer $n = p_1^{a_1}...p_r^{a_r}$ we have $X(n) := X(p_1)^{a_1}...X(p_r)^{a_r}$. Then define the following random series

$$L_\pi(1,X) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_\pi(n)X(n)}{n}, \text{ (these series converge with probability 1).}$$

As in equation (4.5.2) let $L(\pi\otimes\chi_d,1,y)$ and $L_\pi(1,X,y)$ denote the short Euler products of length y of $L(\pi\otimes\chi_d,1)$ and $L_\pi(1,X)$ respectively.

The analysis for this section is similar to section 4.5, indeed the methods for proving the analogues of Lemmas 4.5.2, 4.5.3, 4.5.4 and 4.5.5 are exactly the same. Furthermore the analogue of Lemma 4.5.1 (zeros density estimates near $\text{Re}(s) = 1$) has been proved by Kowalski and Michel (see Theorem 5 of **[KM]**) for general families of cuspidal automorphic representations of $GL(m)/\mathbb{Q}$. However the method of proving the estimates for the moments of short Euler products is a little bit different so we include it.

Proposition 4.6.1. *Let π be an auto-dual cuspidal automorphic representation of $GL(m)/\mathbb{Q}$, such that the $a_\pi(p)$ satisfy assumption (4.1.3). Let $x > 0$ be large and $2 < y < (\log x)^A$ a real number where $A > 0$ is a fixed constant. Then for all positive integers k in the range $1 \le k \le \log x/(B\log_2 x \log_3 x)$ (for a suitably large constant $B = B(\pi, A)$), we have*

$$\frac{\pi^2}{6x}\sideset{}{^\flat}\sum_{|d|\le x} L(\pi\otimes\chi_d,1,y)^k = \mathbb{E}\left(L_\pi(1,X,y)^k\right) + o(1),$$

where $\sideset{}{^\flat}\sum$ denotes the sum over fundamental discriminants.

Proof. First we have that

$$L(\pi\otimes\chi_d,1,y)^k = \left(\sum_{n\in S(y)} \frac{a_\pi(n)\chi_d(n)}{n}\right)^k = \sum_{n\in S(y)} \frac{c(k,n)\chi_d(n)}{n},$$

where $c(k,n)=\sum_{n_1n_2\ldots n_k=n}a_\pi(n_1)\ldots a_\pi(n_k)$. Further one can see that $\mathbb{E}(X(n))=\prod_{p|n}\left(\frac{p}{p+1}\right)$ if n is a square and equals 0 otherwise. Hence

$$\mathbb{E}\left(L_\pi(1,X,y)^k\right)=\mathbb{E}\left(\sum_{n\in S(y)}\frac{c(k,n)X(n)}{n}\right)=\sum_{m\in S(y)}\frac{c(k,m^2)}{m^2}\prod_{p|m}\left(\frac{p}{p+1}\right).$$

Now we estimate the contribution of the diagonal terms $n=\square$ (which constitute the main term) to the moments of $L(\pi\otimes\chi_d,1,y)$. When $n=m^2$ we have

$$\sum_{|d|\leq x}^{b}\chi_d(m^2)=\sum_{\substack{|d|\leq x\\(m,d)=1}}^{b}1=\frac{6}{\pi^2}x\prod_{p|m}\left(\frac{p}{p+1}\right)+O\left(x^{1/2+\epsilon}d(m)\right).$$

Thus the contribution of the diagonal terms is

$$\frac{6}{\pi^2}x\sum_{m\in S(y)}\frac{c(k,m^2)}{m^2}\prod_{p|m}\left(\frac{p}{p+1}\right)+O\left(x^{1/2+\epsilon}\sum_{m\in S(y)}\frac{c(k,m^2)d(m)}{m^2}\right). \tag{4.6.1}$$

Before considering the non-diagonal terms, we will bound the error term in the RHS of equation (4.6.1). To do so we divide the sum into two parts $m\leq x^{1/3}$ and $m>x^{1/3}$. Using that $d(m)\leq\sqrt{m}$, the contribution of the first terms is

$$\begin{aligned}&\ll x^{2/3+\epsilon}\sum_{m\in S(y)}\frac{c(k,m^2)}{m^2}\leq x^{2/3+\epsilon}\left(\sum_{n\in S(y)}\frac{|a_\pi(n)|}{n}\right)^k\\&\leq x^{2/3+\epsilon}\exp\left(k\sum_{p\leq y}\frac{|a_\pi(p)|}{p}+O(k)\right)\ll x^{3/4},\end{aligned} \tag{4.6.2}$$

by assumption (4.1.3) and our hypothesis on k. Now for the other terms we use the bound of Ramanujan

$$d(m)\leq\exp\left(\frac{\log 2\log(m)}{\log_2(m)}(1+o(1))\right)\leq m^{2\beta},$$

with $\beta=1/(2\log_2 x)$. Thus similarly to (4.6.2), we can show that the contribution of these terms is

$$\ll x^{1/2+\epsilon}\sum_{m\in S(y)}\frac{c(k,m^2)}{m^{2-2\beta}}\leq x^{1/2+\epsilon}\exp\left(k\sum_{p\leq y}\frac{|a_\pi(p)|}{p^{1-\beta}}+O(k)\right)\ll x^{2/3}, \tag{4.6.3}$$

using that $p^\beta=O(1)$ for all primes $p\leq y$. Moreover the contribution of the non-diagonal terms $n\neq\square$ is

$$\ll \sum_{\substack{n\in S(y)\\ n\neq\square}} \frac{|c(k,n)|}{n}\left|\sum_{|d|\leq x}^{\flat} \chi_d(n)\right|.$$

Consider first the terms $n \leq x$. For these we use Lemma 4.1 of Granville-Soundararajan **[GS2]** which asserts that

$$\left|\sum_{|d|\leq x}^{\flat} \chi_d(n)\right| \ll x^{1/2}n^{1/4}(\log n)^{1/2},$$

if n is not a perfect square. Hence the contribution of these terms is

$$\ll x^{5/6}\sum_{n\in S(y)} \frac{|c(k,n)|}{n} \ll x^{5/6}\exp\left(k\sum_{p\leq y}\frac{|a_\pi(p)|}{p}+O(k)\right) \ll x^{6/7}. \tag{4.6.4}$$

Now the contribution of the terms $n > x$ is

$$\ll x\sum_{\substack{n\in S(y)\\ n>x}} \frac{|c(k,n)|}{n} \ll x^{1-2\beta}\sum_{n\in S(y)}\frac{|c(k,n)|}{n^{1-2\beta}}$$

$$\ll x^{1-2\beta}\exp\left(O\left(k\sum_{p\leq y}\frac{|a_\pi(p)|}{p}\right)\right) \ll x^{1-\beta}.$$

This along with equations (4.6.1)-(4.6.4) complete the proof. □

Now using exactly the same method as in the proof of Theorem 4.1.3, we can prove the following result

Theorem 4.6.1. *Let π be an auto-dual cuspidal automorphic representation of $GL(m)/\mathbb{Q}$, such that the $a_\pi(p)$ satisfy assumption (4.1.3). Let $x > 0$ be large, and take $A > 0$. Then for all positive integers k in the range*
$1 \leq k \leq \log x/(B\log_2 x\log_3 x)$ *(for a suitably large constant $B = B(\pi, A)$) , we have*

$$\frac{\pi^2}{6x}\sum_{|d|\leq x}^{\flat} L(\pi\otimes\chi_d,1)^k = \mathbb{E}\left(L_\pi(1,X)^k\right)\left(1+O\left(\frac{1}{\log^A T}\right)\right).$$

Now we are in position to prove Theorem 4.1.5

Proof of Theorem 4.1.5. We use exactly the same proof as Theorem 4.1.4. What remains only is compute the moments of $L_\pi(1,X)$.

To this end let $\{X_1(p)\}_{p\in\mathcal{P}}$ be independent random variables taking the values -1 and 1 with equal probabilities. Extend $X_1(.)$ to a completely multiplicative function over positive integers and consider the random series

$$L_\pi(1, X_1) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_\pi(n)X_1(n)}{n}.$$

Then using Theorem 4.4.2 we can compute the moments of $L_\pi(1, X_1)$. Now since $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X_1) = 0$ we have that

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{E}\left(L_\pi(1,X)^k\right)}{\mathbb{E}\left(L_\pi(1,X_1)^k\right)} &= \frac{\mathbb{E}\left(L_\pi(1,X,k^2)^k\right)}{\mathbb{E}\left(L_\pi(1,X_1,k^2)^k\right)} \exp\left(O\left(k\sum_{p>k^2}\frac{|a_\pi(p)|^2}{p^2}\right)\right) \\ &= \prod_{p\leq k^2}\left(1+O\left(\frac{1}{p}\right)\right)\left(1+O\left(\frac{1}{k}\right)\right) = \log k^{O(1)}.\end{aligned}$$

Thus by Theorem 4.4.2 the asymptotic of $\log \mathbb{E}\left(L_\pi(1,X_1)^k\right)$ holds also for $\log \mathbb{E}\left(L_\pi(1,X)^k\right)$, completing the proof. $\square$

Chapitre 5

SMOOTH VALUES OF THE ITERATES OF THE EULER'S PHI FUNCTION

Résumé : Soit $\phi(n)$ la fonction phi de Euler. On définit $\phi_0(n) = n$ et $\phi_{k+1}(n) = \phi(\phi_k(n))$ pour tout $k \geq 0$. Nous allons démontrer une formule asymptotique pour l'ensemble des entiers n plus petits que x tels que $\phi_k(n)$ est y-friable, conditionnellement si on suppose une forme faible de la conjecture de Elliott-Halberstam sur la distribution des nombres premiers dans les progressions arithmétiques.

Abstract : Let $\phi(n)$ be the Euler-phi function, define $\phi_0(n) = n$ and $\phi_{k+1}(n) = \phi(\phi_k(n))$ for all $k \geq 0$. We will determine an asymptotic formula for the set of integers n less than x for which $\phi_k(n)$ is y-smooth, assuming a weak form of the Elliott-Halberstam conjecture on the distribution of primes in arithmetic progressions.

5.1. Introduction

Integers without large prime factors, usually called *smooth numbers*, play a central role in several topics of number theory. From multiplicative questions to analytic methods, they have various and wide applications, and understanding their behavior will have important consequences for number theoretic algorithms, which are an important tool in cryptography.

Let $\phi(n)$ be the Euler-phi function, define $\phi_0(n) = n$ and $\phi_{k+1}(n) = \phi(\phi_k(n))$ for all $k \geq 0$. There are several interesting results on the behavior of the functions ϕ_k. One can quote the work of Erdös (**[Er1]** and **[Er2]**), Erdös, Granville, Pomerance and Spiro **[EGPS]**, Erdös and Pomerance **[EP]**, Pomerance **[Po]** and Shapiro **[Sh]**.

It is known that the multiplicative structure of the phi-function and its iterates is closely related to the behavior of the integers of the form $p-1$ where p is prime. It is also believed that the distribution of the prime factors of such an integer behaves like that of a random integer, in the following sense : Define

$$\Psi(x,y) = \left|\{n \le x : p|n \implies p \le y\}\right|,$$

and

$$\pi(x,y) = \left|\{p \le x : q|p-1 \implies q \le y\}\right|.$$

Conjecture 5.1.1. *Fix $U \geq 1$. If $x^{1/U} \leq y \leq x$ then*

$$\frac{\pi(x,y)}{\pi(x)} \sim \frac{\Psi(x,y)}{x} \quad as \quad x \to \infty.$$

This conjecture was first stated in the work of Pomerance **[Po]** and discussed in the work of Pomerance and Shparlinski **[PS]**. We should also note that a version of it was implicit in the work of Erdös **[Er1]**. Assuming this conjecture one can deduce the behavior of the function $\pi(x,y)$ from the known asymptotic formula

$$\Psi(x,y) \sim x\rho(u) \text{ as } x \to \infty \text{ with } x = y^u$$

where $\rho(u)$ is the Dickman function, defined as the unique continuous solution of the differential-difference equation $u\rho'(u) = -\rho(u-1)$ for $u \geq 1$, satisfying the initial condition $\rho(u) = 1$ for $0 \leq u \leq 1$.

Let P be a set of prime numbers and define

$$\Psi(x,P) = \left|\{n \le x : p|n \implies p \in P\}\right|,$$

and

$$\pi(x,P) = \left|\{p \le x : q|p-1 \implies q \in P\}\right|.$$

One might guess

$$\frac{\pi(x,P)}{\pi(x)} \sim \frac{\Psi(x,P)}{x} \quad as \quad x \to \infty, \tag{5.1.1}$$

under certain conditions on the set P.

Granville **[Gr]** has an unpublished argument that Conjecture 5.1.1 holds for $u = \log(x)/\log(y)$ bounded, assuming the Elliott-Halberstam conjecture (E-H) which states that :

$$\sum_{q\leq x^{1-\epsilon}} \max_{y\leq x} \max_{(a,q)=1} \left|\pi(y;q,a) - \frac{\pi(y)}{\phi(q)}\right| \ll_{\epsilon,A} \frac{x}{\log(x)^A}.$$

A weak version of this conjecture is the following :

Conjecture 5.1.2. *Fix $\epsilon > 0$. Then*

$$\sum_{d\leq x^{1-\epsilon}} \left|\pi(x;d,1) - \frac{\pi(x)}{\phi(d)}\right| = o\left(\pi(x)\right) \qquad \textit{as} \qquad x \to \infty.$$

We will prove a version of equation (5.1.1) assuming this Conjecture; specifically we show the following :

Theorem 5.1.1. *Assume Conjecture 5.1.2. If P is a set of primes less than x for which*

$$\sum_{\substack{p\notin P\\ p\leq x}} \frac{1}{p} \ll 1,$$

then

$$\frac{\pi(x,P)}{\pi(x)} \sim \prod_{p\notin P}\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right)\frac{\Psi(x,P)}{x}, \quad \textit{as } x \to \infty.$$

Note that there is an extra factor in Theorem 5.1.1 compared with equation (5.1.1). To see why we should expect this, let q be some prime; then the probability that a random integer n is divisible by q is $1/q$. Now the probability that a random integer of the form $p-1$ (where p prime) is divisible by q is $1/(q-1)$ (since p is excluded from the class $0 \mod q$). The differences between the two probabilities are negligible as q increases, however this is not true for small primes q, and thus we need a correction factor. We should note that this factor can be removed in some special cases where the set P contains all the small primes, see Lemma 5.2.1 below.

Using Theorem 5.1.1 we will prove an asymptotic formula for the number of positive integers $n \leq x$ for which $\phi_k(n)$ is y-smooth conditionally on Conjecture 5.1.2. To this end we define

$$\Phi_k(x,y) = \left|\{n \leq x : p|\phi_k(n) \implies p \leq y\}\right|.$$

We prove

Theorem 5.1.2. *Assume Conjecture 5.1.2. Fix $U > 1$. If $y = x^{1/u}$ where $1 \leq u \leq U$, then*

$$\Phi_k(x,y) \sim x\sigma_k(u) \quad as \quad x \to \infty,$$

where $\sigma_k(u) = 1$ for $u \leq 1$, and $u\sigma_{k+1}(u) = \int_0^u \sigma_{k+1}(u-t)\sigma_k(t)dt$ for $u \geq 1$, with $\sigma_0(u) = \rho(u)$. Moreover, for all $k \geq 1$ we have the following estimate for $\sigma_k(u)$ when u is large

$$\sigma_k(u) = \left(\frac{1+o(1)}{\log_k(u)\log_{k+1}(u)}\right)^u.$$

The first step in the proof uses simple combinatorics to approximate the functions $\Phi_k(x,y)$ by $\Psi(x,P_k)$, where P_k are the sets of primes defined iteratively by $P_{k+1} = \{p \leq x : q|p-1 \implies q \in P_k\}$, with $P_0 = \{p \leq y\}$. Indeed we prove

Proposition 5.1.1.

$$\Phi_k(x,y) = \Psi(x,P_k) + O\left(\frac{x(\log x)^{2k}}{y}\right).$$

From the fact that $|P_k| = \pi(x,P_{k-1})$, the next step in proving our Theorem 5.1.2 is to establish a relation between $|P|$ and $\Psi(x,P)$ for any given set of primes P. This was done by Granville and Soundararajan **[GS1]** while studying mean values of multiplicative functions. They proved the following proposition :

Proposition 5.1.2 (Proposition 1 of **[GS1]**). *Let f be a multiplicative function with $|f(n)| \leq 1$ for all n, and $f(n) = 1$ for $n \leq y$. Let $\theta(x) = \sum_{p\leq x}\log(p)$ and define*

$$\chi(u) := \frac{1}{\theta(y^u)}\sum_{p\leq y^u} f(p)\log(p).$$

Then $\chi(t)$ is a measurable function with $\chi(t) = 1$ for all $t \leq 1$. Let σ be the corresponding unique solution to the equation :

$$u\sigma(u) = \int_0^u \sigma(u-t)\chi(t)dt \quad for \quad u > 1 \tag{5.1.2}$$

subject to the initial condition $\sigma(u) = 1$ for $0 \leq u \leq 1$. Then

$$\frac{1}{y^u}\sum_{n\leq y^u} f(n) = \sigma(u) + O\left(\frac{u}{\log(y)}\right).$$

From this result and by partial summation we can deduce

Corollary 5.1.1. *Fix $U > 1$. Let P be a set of primes less than x such that $P_0 \subseteq P$, and f be a completely multiplicative function such that $f(p) = 1$ if $p \in P$ and 0 otherwise (so that $f(n) = 1$ for all $n \leq y$). For $1 \leq u \leq U$, define*

$$\chi(u) := \frac{1}{\pi(y^u)} \sum_{\substack{p \in P \\ p \leq y^u}} 1,$$

then

$$\Psi(y^u, P) = \sum_{n \leq x} f(n) \sim y^u \sigma(u)$$

where σ is the corresponding solution to equation (5.1.2).

It remains to study the integral delay equation (5.1.2), and to estimate the solution σ where χ is a certain measurable function. In several interesting cases $\chi(u)$ decays like $(\{1 + o(1)\}/h(u))^u$ where h is positive and non-decreasing. We prove the following :

Theorem 5.1.3. *Let χ be a real measurable function for which $\chi(t) = 1$ for $0 \leq t \leq 1$, and $0 \leq \chi(t) \leq 1$ for $t > 1$. Moreover assume that χ satisfies one of the following conditions*

i) *$\int_T^\infty \chi(t)dt = 0$ for some constant T. We define $T = \min\{t : \int_T^\infty \chi(t)dt = 0\}$ to avoid redundancy, and suppose that $T > 1$.*

ii) *$\chi(t) = (\{1 + o(1)\}/h(t))^t$ where $h(t)$ is non-decreasing and $h(t) \to \infty$ as $t \to \infty$.*

Let σ be the corresponding solution to equation (5.1.2). Then

$$\sigma(u) = \exp\left((-\xi(u) + o(1))u + \int_1^\infty \frac{\chi(v)e^{\xi(u)v}}{v} dv\right),$$

where $\xi(u)$ is the unique solution to $u = \displaystyle\int_1^\infty \chi(v)e^{\xi(u)v} dv$.

Moreover we can get explicit asymptotics in a number of interesting cases. We prove

Proposition 5.1.3. *Let χ be a real measurable function for which $\chi(t) = 1$ for $0 \leq t \leq 1$, and $0 \leq \chi(t) \leq 1$ for $t > 1$. Suppose that $\int_T^\infty \chi(t)dt = 0$ for some constant T. We define $T = \min\{t : \int_T^\infty \chi(t)dt = 0\}$ to avoid redundancy, and suppose that $T > 1$. Then*

$$\xi(u) = \frac{\log(u)}{T}(1 + o(1)),$$

and

$$\sigma(u) = \exp\left(-\frac{u\log(u)}{T}(1+o(1))\right).$$

Proposition 5.1.4. *Let χ be a real measurable function for which $\chi(t) = 1$ for $0 \le t \le 1$, and $0 \le \chi(t) \le 1$ for $t > 1$; and suppose that $\chi(u) = (\{1+o(1)\}/h(u))^u$ where h satisfies the following conditions :*

i) *h is positive and non-decreasing with $h(u) \to \infty$ as $u \to \infty$.*

ii) *h is continuously differentiable and $uh'(u)/h(u) \to n$ as $u \to \infty$ for some real number $n \ge 0$.*

We distinguish two cases : a) $n > 0$ and b) $n = 0$.

Then

$$\sigma(u) = \left(\frac{1+o(1)}{h(\zeta\log(u))}\right)^u,$$

where $\zeta = e/n$ in case a) and $\zeta = 1$ in case b).

The distinction between cases a) and b) in Proposition 5.1.4 justifies the appearance of the constant e only in the asymptotic of σ_o in Theorem 5.1.2.

5.2. Proof of Theorem 5.1.2

We begin by proving

Lemma 5.2.1. *Assume Conjecture 5.1.2. Fix $U \ge 1$. Suppose that P is a set of primes less than x for which $\{p \le y\} \subseteq P$, where $y = x^{1/u}$ and $1 \le u \le U$. Then*

$$\frac{\pi(x,P)}{\pi(x)} \sim \frac{\Psi(x,P)}{x} \quad as \quad x \to \infty.$$

Proof. We have that

$$\sum_{\substack{p\notin P\\ p\le x}} \frac{1}{p} \le \sum_{y<p\le x} \frac{1}{p} \ll \log\left(\frac{\log(x)}{\log(y)}\right) = \log(u) \ll 1$$

and, since $1 - t \ge e^{-2t}$ for $0 \le t \le 1/2$, then

$$1 \ge \prod_{p\notin P}\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \ge \prod_{p>y}\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \ge \exp\left(-2\sum_{p>y}\frac{1}{(p-1)^2}\right)$$
$$= 1 + o(1).$$

The result follows by Theorem 5.1.1. □

PROOF OF THEOREM 5.1.2. First note that the sets P_k for $k \geq 0$ satisfy the conditions of Lemma 5.2.1. Now $\Psi(x, P_0) = \Psi(x, y) \sim \rho(u)x$ as $x \to \infty$. We use induction on k : suppose that $\Psi(x, P_k) \sim \sigma_k(u)x$ as $x \to \infty$ for some smooth function $\sigma_k(u)$; then by Lemma 5.2.1

$$\frac{|P_{k+1}|}{\pi(x)} = \frac{\pi(x, P_k)}{\pi(x)} \sim \frac{\Psi(x, P_k)}{x} \sim \sigma_k(u) \text{ as } x \to \infty.$$

Now by Corollary 5.1.1 we have

$$\Psi(x, P_{k+1}) \sim \sigma_{k+1}(u)x \text{ as } x \to \infty,$$

where $\sigma_{k+1}(u)$ is the corresponding solution to equation (5.1.2) with $\chi(u) = \sigma_k(u)$. Noting that $\sigma_0(u) = \rho(u) = ((e + o(1))/u \log(u))^u$ and using Proposition 5.1.4 we deduce that

$$\sigma_k(u) = \left(\frac{1 + o(1)}{\log_k(u) \log_{k+1}(u)}\right)^u$$

by induction. Thus, using Proposition 5.1.1, the Theorem follows. □

5.3. PROOF OF THEOREM 5.1.1

Lemma 5.3.1. *If P is a set of primes $\leq x$, then*

$$\sum_{\substack{p \notin P \\ p \leq x}} \frac{1}{p} \ll 1 \quad \iff \quad \prod_{p \in P} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \asymp \frac{1}{\log(x)}.$$

PROOF. The result follows since

$$\prod_{p \in P} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \prod_{\substack{p \notin P \\ p \leq x}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \asymp \exp\left(O\left(\sum_{\substack{p \notin P \\ p \leq x}} \frac{1}{p}\right)\right) \frac{1}{\log(x)},$$

by Mertens' theorem.

□

Lemma 5.3.2. *Let m,d be positive integers such that $d|m$, then we have*

$$\sum_{\substack{r \leq x \\ d|r|m}} \frac{\mu(r)}{r} = \mu(d) \sum_{\substack{n \geq 1 \\ d|n \\ p|n \implies p|d}} \frac{1}{n} \sum_{\substack{r \leq x/n \\ r|m}} \frac{\mu(r)}{r}.$$

PROOF. The result is trivial if $\mu(d) = 0$ or $d = 1$. We fix m and do a double induction on $d \geq 1$ and $x \geq 1$. Now

$$S_d(x) := \sum_{\substack{r \leq x \\ d|r|m}} \frac{\mu(r)}{r} = \sum_{\substack{n \leq x/d \\ n|\frac{m}{d}}} \frac{\mu(dn)}{dn} = \frac{\mu(d)}{d} \sum_{\substack{n \leq x/d \\ n|m \\ (n,d)=1}} \frac{\mu(n)}{n} = \frac{\mu(d)}{d} \sum_{\substack{n \leq x/d \\ n|m}} \frac{\mu(n)}{n} \sum_{\substack{a|n \\ a|d}} \mu(a)$$

$$= \frac{\mu(d)}{d} \sum_{a|d} \mu(a) \sum_{\substack{n \leq x/d \\ a|n|m}} \frac{\mu(n)}{n} = \frac{\mu(d)}{d} \sum_{a|d} \mu(a) S_a(x/d).$$

Now each $a \leq d$ and $x/d < x$ so, by induction

$$S_d(x) = \frac{\mu(d)}{d} \sum_{a|d} \mu(a)^2 \sum_{\substack{n \geq 1 \\ a|n \\ p|n \implies p|a}} \frac{1}{n} \sum_{\substack{r \leq x/nd \\ r|m}} \frac{\mu(r)}{r}$$

$$= \frac{\mu(d)}{d} \sum_{\substack{n \geq 1 \\ p|n \implies p|d}} \frac{1}{n} \sum_{\substack{r \leq x/nd \\ r|m}} \frac{\mu(r)}{r} \sum_{\substack{a|d \\ a|n \\ p|n \implies p|a}} \mu(a)^2.$$

Now if we write $n = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \ldots p_k^{b_k}$ with each $b_j \geq 1$, then $p|n \implies p|d$ implies that $p_1 p_2 \ldots p_k | d$. Moreover if a satisfies $a|d$, $a|n$, $p|n \implies p|a$, and a is a squarefree, then a must be $p_1 p_2 \ldots p_k$; which implies

$$\sum_{\substack{a|d \\ a|n \\ p|n \implies p|a}} \mu(a)^2 = 1.$$

Then, writing $l = nd$, we have $S_d(x) = \mu(d) \displaystyle\sum_{\substack{l \geq 1 \\ d|l \\ p|l \implies p|d}} \frac{1}{l} \sum_{\substack{r \leq x/l \\ r|m}} \frac{\mu(r)}{r}$, as desired.

□

Lemma 5.3.3. *For any positive integer k we have*

$$\sum_{\substack{n \geq 1 \\ k|n \\ p|n \implies p|k}} \frac{\log(n)}{n} = \frac{1}{\phi(k)} \left(\sum_{p|k} \frac{\log(p)}{p-1} + \log(k) \right) \asymp \frac{\log(k)}{\phi(k)}.$$

PROOF. Writing $n = kd$ we have

$$\sum_{\substack{n\geq 1\\ k|n\\ p|n \implies p|k}} \frac{\log(n)}{n} = \sum_{\substack{d\geq 1\\ p|d \implies p|k}} \frac{\log(d)+\log(k)}{dk} = \frac{1}{k}\sum_{\substack{d\geq 1\\ p|d \implies p|k}} \frac{\log(d)}{d} + \frac{\log(k)}{\phi(k)}.$$

Now if $p_1, p_2, ..., p_n$ are the prime factors of k then

$$\sum_{\substack{d\geq 1\\ p|d \implies p|k}} \frac{\log(d)}{d} = \sum_{\substack{a_i\geq 0\\ 1\leq i\leq n}} \frac{a_1\log(p_1)+a_2\log(p_2)+...+a_n\log(p_n)}{p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_n^{a_n}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{a_i\geq 0}\frac{a_i\log(p_i)}{p_i^{a_i}}\right)\left(\prod_{\substack{1\leq j\leq n\\ j\neq i}}\left(\sum_{a_j\geq 0}\frac{1}{p_j^{a_j}}\right)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{\log(p_i)}{p_i\left(1-\frac{1}{p_i}\right)^2}\prod_{\substack{1\leq j\leq n\\ j\neq i}}\left(1-\frac{1}{p_j}\right)^{-1}$$

$$= \frac{k}{\phi(k)}\sum_{p|k}\frac{\log(p)}{p-1},$$

which gives the result. $\square$

We state a classical result of Sieve theory which is used throughout the proof :

Lemma 5.3.4 (Brun's Sieve (for reference see **[IK]**)). *Let A be a set of positive integers contained in $[1, N]$. Suppose that for each prime $p \leq N$, A is excluded from $\omega(p)$ residue classes $\bmod p$, where ω is a multiplicative function and $\omega(p) \ll 1$. Then*

$$|A| \ll N\prod_{p\leq N}\left(1-\frac{\omega(p)}{p}\right).$$

PROOF OF THEOREM 5.1.1. Let $\epsilon > 0$, $P^* = \{p \leq x\}\setminus P$, and $m = \prod_{p\in P^*} p$. Then we have

$$\pi(x,P) = \sum_{\substack{p\leq x\\ q|p-1 \implies q\in P}} 1 = \sum_{\substack{p\leq x\\ (p-1,m)=1}} 1 = \sum_{p\leq x}\sum_{d|(m,p-1)}\mu(d) = \sum_{d|m}\mu(d)\sum_{\substack{p\leq x\\ d|p-1}} 1$$

$$= \sum_{d|m}\mu(d)\pi(x;d,1). \tag{5.3.1}$$

Now by a similar argument we have

$$\Psi(x,P)=\sum_{\substack{d\le x\\ d|m}}\mu(d)\left[\frac{x}{d}\right]. \tag{5.3.2}$$

By equation (5.3.1) and assuming Conjecture 5.1.2 we have

$$\pi(x,P)=\left(\sum_{\substack{d\le x^{1-\epsilon}\\ d|m}}\frac{\mu(d)}{\phi(d)}\right)\pi(x)+O\left(\sum_{\substack{x^{1-\epsilon}<d\le x\\ d|m}}\pi(x;d,1)\right)+o(\pi(x)). \tag{5.3.3}$$

From equation (5.3.2), Lemmas 5.3.1 and 5.3.4 we deduce

$$\left|\Psi(x,P)-x\sum_{\substack{d\le x\\ d|m}}\frac{\mu(d)}{d}\right|\le\sum_{\substack{d\le x\\ d|m}}1\le\sum_{\substack{d\le x\\ p|d\implies p\notin P}}1\ll x\prod_{p\in P}\left(1-\frac{1}{p}\right)\ll\frac{x}{\log(x)}. \tag{5.3.4}$$

Also by Lemmas 5.3.1 and 5.3.4 we have

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{x^{1-\epsilon}<d\le x\\ d|m}}\frac{1}{d}\le\sum_{\substack{x^{1-\epsilon}<d\le x\\ p|d\implies p\in P^*}}\frac{1}{d}&=\int_{x^{1-\epsilon}}^{x}\frac{d\Psi(t,P^*)}{t}\le\frac{\Psi(x,P^*)}{x}+\int_{x^{1-\epsilon}}^{x}\frac{\Psi(t,P^*)}{t^2}dt\\ &\ll\prod_{p\in P}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\int_{x^{1-\epsilon}}^{x}\frac{dt}{t}\right)\ll\prod_{p\in P}\left(1-\frac{1}{p}\right)\epsilon\log(x)\ll\epsilon.\end{aligned} \tag{5.3.5}$$

Therefore from equations (5.3.3), (5.3.4) and (5.3.5) we deduce

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\pi(x,P)}{\pi(x)}-\prod_{p\notin P}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\frac{\Psi(x,P)}{x}\right|\\ &\le\left|\sum_{\substack{d\le x^{1-\epsilon}\\ d|m}}\frac{\mu(d)}{\phi(d)}-\sum_{\substack{d\le x^{1-\epsilon}\\ d|m}}\frac{\mu(d)}{d}\prod_{p\notin P}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\right|\\ &+o(1)+O(\epsilon)+O\left(\sum_{\substack{x^{1-\epsilon}<d\le x\\ d|m}}\frac{\pi(x;d,1)}{\pi(x)}\right).\end{aligned} \tag{5.3.6}$$

Now by Lemmas 5.3.1, 5.3.4, and the fact that $\sum_{r\le x}\frac{1}{\phi(r)} \ll \log(x)$ we get

$$\sum_{\substack{x^{1-\epsilon}<d\le x\\ d|m}} \pi(x;d,1) = \sum_{r\le x^{\epsilon}} \sum_{\substack{x^{1-\epsilon}<d\le x/r\\ p|d \implies p\notin P\\ dr+1 prime}} 1 \ll \sum_{r\le x^{\epsilon}} \frac{x}{r}\prod_{p\in P}\left(1-\frac{1}{p}\right)\prod_{\substack{p\le x\\ p\nmid r}}\left(1-\frac{1}{p}\right)$$

$$\ll \frac{x}{\log(x)^2}\sum_{r\le x^{\epsilon}}\frac{1}{\phi(r)} \ll \epsilon\frac{x}{\log(x)}. \tag{5.3.7}$$

Moreover, from Lemma 5.3.2 we have

$$\sum_{\substack{d\le x^{1-\epsilon}\\ d|m}} \frac{\mu(d)}{\phi(d)} = \sum_{\substack{d\le x^{1-\epsilon}\\ d|m}} \frac{\mu(d)}{d}\sum_{k|d}\frac{\mu(k)^2}{\phi(k)}$$

$$= \sum_{k|m}\frac{\mu(k)^2}{\phi(k)}\sum_{\substack{d\le x^{1-\epsilon}\\ k|d|m}}\frac{\mu(d)}{d} = \sum_{k|m}\frac{\mu(k)}{\phi(k)}\sum_{\substack{n\ge 1\\ k|n\\ p|n\implies p|k}}\frac{1}{n}\sum_{\substack{r\le x^{1-\epsilon}/n\\ r|m}}\frac{\mu(r)}{r}$$

$$= \sum_{k|m}\frac{\mu(k)}{\phi(k)}\sum_{\substack{n\ge 1\\ k|n\\ p|n\implies p|k}}\frac{1}{n}\sum_{\substack{r\le x^{1-\epsilon}\\ r|m}}\frac{\mu(r)}{r} - \sum_{k|m}\frac{\mu(k)}{\phi(k)}\sum_{\substack{n\ge 1\\ k|n\\ p|n\implies p|k}}\frac{1}{n}\sum_{\substack{x^{1-\epsilon}/n<r\le x^{1-\epsilon}\\ r|m}}\frac{\mu(r)}{r}. \tag{5.3.8}$$

The first term in the RHS of equation (5.3.8) is equal to :

$$\sum_{\substack{r\le x^{1-\epsilon}\\ r|m}}\frac{\mu(r)}{r}\sum_{k|m}\frac{\mu(k)}{k\phi(k)}\prod_{p|k}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1} = \sum_{\substack{r\le x^{1-\epsilon}\\ r|m}}\frac{\mu(r)}{r}\prod_{p|m}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right). \tag{5.3.9}$$

By integration by parts and using Lemma 5.3.4 we have

$$\left|\sum_{\substack{x^{1-\epsilon}/n<r\le x^{1-\epsilon}\\ r|m}}\frac{\mu(r)}{r}\right| \le \sum_{\substack{x^{1-\epsilon}/n<r\le x^{1-\epsilon}\\ r|m}}\frac{1}{r} \le \int_{x^{1-\epsilon}/n}^{x^{1-\epsilon}}\frac{d\Psi(t,P^*)}{t}$$

$$\ll \prod_{p\in P}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\int_{x^{1-\epsilon}/n}^{x^{1-\epsilon}}\frac{dt}{t}\right) \ll \frac{\log(n)}{\log(x)}.$$

Then, by Lemma 5.3.3

$$\sum_{k|m}\frac{\mu(k)}{\phi(k)}\sum_{\substack{n\geq 1\\ k|n\\ p|n\implies p|k}}\frac{1}{n}\sum_{\substack{x^{1-\epsilon}/n<r\leq x^{1-\epsilon}\\ r|m}}\frac{\mu(r)}{r}\ll\sum_{k|m}\frac{\mu(k)}{\phi(k)}\sum_{\substack{n\geq 1\\ k|n\\ p|n\implies p|k}}\frac{\log(n)}{n\log(x)}$$
$$\ll\frac{1}{\log(x)}\sum_{k|m}\frac{\mu(k)\log(k)}{\phi(k)^2}\ll\frac{1}{\log(x)}. \tag{5.3.10}$$

Thus combining equations (5.3.6)-(5.3.10) gives the result, letting $\epsilon\to 0$. □

5.4. Proof of Proposition 5.1.1

We begin by proving the following useful Lemmas

Lemma 5.4.1. *Let* $P_0=\{p\leq y\}$ *and*

$$P_{k+1}=\{primes\ q\leq x : p|q-1\implies p\in P_k\}.$$

Then for all positive integers $i\geq 0$ *we have*

$$P_i\subseteq P_{i+1}.$$

Proof. If $p\in P_0$ then $p\leq y$ and so $p-1\leq y$, which implies $q|p-1\implies q\leq y$. This means that $p\in P_1$. Now using a simple induction argument : if $p\in P_k$ then $q|p-1\implies q\in P_{k-1}\subseteq P_k$, and so $p\in P_{k+1}$. □

Lemma 5.4.2. *Let* r *be a positive integer. Then*

$$R(r,k,x):=\sum_{\substack{y<r<q_1<\ldots<q_k\leq x\\ r|q_1-1,q_1|q_2-1,\ldots,q_{k-1}|q_k-1}}\frac{1}{q_k}\leq\frac{(\log x+1)^k}{r}.$$

We deduce that

$$S(r,k,x):=\sum_{\substack{y<r<q_1<\ldots<q_k\leq n\leq x\\ r|q_1-1,q_1|q_2-1,\ldots,q_{k-1}|q_k-1,q_k|n}}1\leq\frac{x(\log x+1)^k}{r}.$$

Proof. Writing $q_k-1=mq_{k-1}$ we have

$$R(r,k,x)\leq\sum_{m\leq\frac{x}{r}}\frac{1}{m}R(r,k-1,x)\leq R(r,k-1,x)(\log x+1),$$

and

$$R(r,1,x) \leq \sum_{m\leq \frac{x}{r}} \frac{1}{mr} \leq \frac{\log x + 1}{r},$$

then by induction

$$R(r,k,x) \leq \frac{(\log x + 1)^k}{r}.$$

The second inequality follows since

$$S(r,k,x) \leq \sum_{\substack{y<r<q_1<\ldots<q_k\leq x \\ r|q_1-1, q_1|q_2-1,\ldots,q_{k-1}|q_k-1}} \frac{x}{q_k} = xR(r,k,x).$$

□

Lemma 5.4.3. *Define*

$$S_k(x,y) = \{n \leq x : \text{ there is a prime } p > y \text{ such that } p^2|\phi_k(n)\}.$$

Then

$$|\Psi(x,P_k) - \Phi_k(x,y)| \leq \sum_{i=0}^{k-1} |S_i(x,y)|.$$

PROOF. Let

$$A_k(x) = \{n \leq x : p|n \implies p \in P_k\}.$$

If $n \in A_{k+1}(x)$ and $\phi(n) \notin A_k(x)$, then there is a prime p which divides $\phi(n)$ and $p \notin P_k$. Now $n \in A_{k+1}(x)$ so every prime factor of $q-1$, where $q|n$, is in P_k, which implies that $p^2|n$. This gives

$$\begin{aligned} &A_{k+1}(x) \setminus \{n \leq x : \phi(n) \in A_k(x)\} \\ &= \{n \leq x : n \in A_{k+1}(x), \text{ there exists some prime } p \in P_{k+1} \setminus P_k, p^2|n\}. \end{aligned}$$

Then by Lemma 5.4.1, we have

$$\begin{aligned} 0 &\leq \Psi(x,P_k) - \Phi_k(x,y) = |A_k(x)| - |\{n \leq x : \phi_k(n) \in A_0(x)\}| \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} |\{n \leq x : \phi_i(n) \in A_{k-i}(x)\}| - |\{n \leq x : \phi_{i+1}(n) \in A_{k-i-1}(x)\}| \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} |\{n \leq x : \phi_i(n) \in A_{k-i}(x), \text{ there is a prime } p \in P_{k-i} \setminus P_{k-i-1}, p^2|\phi_i(n)\}| \\ &\leq \sum_{i=0}^{k-1} |S_i(x,y)|. \end{aligned}$$

□

Now we are ready to prove Proposition 5.1.1

PROOF OF PROPOSITION 5.1.1. Note that if $q|(\phi(n),n)$ for some prime q, then $q^2|n$. Define

$$S_k^*(x,y) = S_k(x,y) \setminus \bigcup_{i=0}^{k-1} S_i(x,y).$$

If $n \in S_k^*(x,y)$ and $q^2|\phi_j(n)$ for some $0 \le j \le k-1$, then $q \le y$ (by definition); also there exists some prime p satisfying $p^2|\phi_k(n)$ with $p > y$, which implies $p^2 \nmid \phi_{k-1}(n)$. Thus we have two cases :

(i) There exists a prime $q_1|\phi_{k-1}(n)$ such that $p^2|q_1 - 1$.

(ii) There are two primes $q_1|\phi_{k-1}(n)$ and $Q_1|\phi_{k-1}(n)$ such that $p|q_1 - 1$ and $p|Q_1 - 1$.

In the first case $q_1|\phi_{k-1}(n) = \phi(\phi_{k-2}(n))$, $p|q_1-1$, so that $q_1 > y$, which implies that $q_1^2 \nmid \phi_{k-2}(n)$, so that there exists a prime $q_2|\phi_{k-2}(n)$ such that $q_1|q_2 - 1$ and $q_2 > q_1 > p > y$. By a simple induction, there exist primes $y < p < q_1 < q_2 < \ldots < q_k$ for which $p^2|q_1 - 1, q_1|q_2 - 1, \ldots, q_{k-1}|q_k - 1, q_k|n$.

We deduce that the total number of possibilities for this case is :

$$S_1 = \sum_{\substack{y<p<q_1<\ldots<q_k\le n\le x \\ p^2|q_1-1,q_1|q_2-1,\ldots,q_{k-1}|q_k-1,q_k|n}} 1 = \sum_{y<p<\sqrt{x}} S(p^2,k,x)$$
$$\le x(\log x+1)^k \sum_{p>y} \frac{1}{p^2} \ll \frac{x(\log x)^k}{y},$$

by Lemma 5.4.2.

Now, following an analogous argument we find (for the second case) that there exist primes $p, q_1, q_2, \ldots, q_k, Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ such that $p|q_1 - 1, q_1|q_2 - 1, \ldots, q_{k-1}|q_k - 1, q_k|n$ and $p|Q_1 - 1, Q_1|Q_2 - 1, \ldots, Q_{k-1}|Q_k - 1, Q_k|n$; we shall have two cases again :

a) $q_i \ne Q_i$ for all $1 \le i \le k$.

b) There exists i such that $q_i = Q_i$; so let $j = \min\{1 \le i \le k : q_i = Q_i\}$.

For case a) the total number of possibilities is :

$$S_2 = \sum_{\substack{y<p<q_1<\ldots<q_k\le n\le x \\ p<Q_1<\ldots<Q_k\le n\le x \\ p|q_1-1,q_1|q_2-1,\ldots,q_{k-1}|q_k-1,q_k|n \\ p|Q_1-1,Q_1|Q_2-1,\ldots,Q_{k-1}|Q_k-1,Q_k|n}} 1 \le \sum_{\substack{y<p<q_1<\ldots<q_k\le x \\ p<Q_1<\ldots<Q_k\le x \\ p|q_1-1,q_1|q_2-1,\ldots,q_{k-1}|q_k-1 \\ p|Q_1-1,Q_1|Q_2-1,\ldots,Q_{k-1}|Q_k-1}} \frac{x}{q_kQ_k}$$

$$\le x\sum_{p>y} R(p,k,x)^2 = O\left(\frac{x(\log x)^{2k}}{y}\right)$$

by Lemma 5.4.2.

Now for case b) we have

$$p|q_1-1, q_1|q_2-1, \ldots, q_{j-1}|q_j-1,$$

$$p|Q_1-1, Q_1|Q_2-1, \ldots, Q_{j-1}|Q_j-1,$$

$$Q_j = q_j|\phi_{k-j}(n).$$

Then following the same logic there exist primes $q_{j+1}, q_{j+2}, \ldots, q_k$ such that $q_j|q_{j+1}-1, \ldots, q_{k-1}|q_k-1, q_k|n$.

We deduce that the total number of possibilities is :

$$S_3 = \sum_{\substack{y<p<q_1<\ldots<q_j\le x \\ p|q_1-1,q_1|q_2-1,\ldots,q_{j-1}|q_j-1}} \left(\sum_{\substack{p<Q_1<\ldots<Q_j=q_j \\ p|Q_1-1,Q_1|Q_2-1,\ldots,Q_{j-1}|Q_j-1}} \left(\sum_{\substack{q_j<q_{j+1}<\ldots<q_k\le n\le x \\ q_j|q_{j+1}-1,\ldots q_{k-1}|q_k-1,q_k|n}} 1\right)\right)$$

$$= \sum_{\substack{y<p<q_1<\ldots<q_j\le x \\ p|q_1-1,q_1|q_2-1,\ldots,q_{j-1}|q_j-1}} \left(\sum_{\substack{p<Q_1<\ldots<Q_j=q_j \\ p|Q_1-1,Q_1|Q_2-1,\ldots,Q_{j-1}|Q_j-1}} S(q_j,k-j,x)\right)$$

$$\le \sum_{\substack{y<p<q_1<\ldots<q_j\le x \\ p|q_1-1,q_1|q_2-1,\ldots,q_{j-1}|q_j-1}} \left(\sum_{\substack{p<Q_1<\ldots<Q_j=q_j \\ p|Q_1-1,Q_1|Q_2-1,\ldots,Q_{j-1}|Q_j-1}} \frac{x(\log x+1)^{k-j}}{q_j}\right).$$

Now writing $Q_j-1 = q_j-1 = mQ_{j-1}q_{j-1}$ we have :

$$\sum_{\substack{q_j\le x \\ q_{j-1},Q_{j-1}|q_j-1}} \frac{1}{q_j} < \sum_{m\le x} \frac{1}{mQ_{j-1}q_{j-1}} \le \frac{\log x+1}{Q_{j-1}q_{j-1}}.$$

Thus by Lemma 5.4.2

$$S_3 \ll x(\log x)^{k-j+1}\sum_{p>y} R(p,j-1,x)^2 \ll \frac{x(\log x)^{k+j-1}}{y}.$$

We deduce from cases (i), (ii), a) and b) that

$$|S_k^*(x,y)| = S_1 + S_2 + S_3 = O\left(\frac{x(\log x)^{2k}}{y}\right). \tag{5.4.1}$$

Now

$$\begin{aligned}
|S_1(x,y)| &= |S_0(x,y)| + |S_1^*(x,y)| \\
&= |\{n \le x : \text{ there is a prime } p > y, p^2|n\}| + O\left(\frac{x(\log x)^2}{y}\right) \\
&\le \sum_{\substack{n\le x\\ p>y\\ p^2|n}} 1 + O\left(\frac{x(\log x)^2}{y}\right) \le \sum_{p>y} \frac{x}{p^2} + O\left(\frac{x(\log x)^2}{y}\right) \\
&= O\left(\frac{x}{y}\right) + O\left(\frac{x(\log x)^2}{y}\right) = O\left(\frac{x(\log x)^2}{y}\right),
\end{aligned}$$

and by simple induction we obtain :

$$|S_k(x,y)| = |S_k^*(x,y)| + \sum_{i=0}^{k-1} |S_i(x,y)| = O\left(\frac{x(\log x)^{2k}}{y}\right). \tag{5.4.2}$$

Thus by equation (5.4.2) and Lemma 5.4.3 the result follows. □

5.5. Proof of Theorem 5.1.3

Lemma 5.5.1. *Let χ be a real measurable function for which $\int_1^\infty \chi(t)e^{st}dt$ converges for all $s \in \mathbb{R}$ and such that $C := \int_1^\infty \chi(v)dv > 0$. Then for $u \ge C^2$ and for any $\epsilon > 0$, we have*

$$\int_1^\infty \chi(v)e^{(\xi(u)+\epsilon)v}dv \ge u^{1+\frac{\epsilon}{2\xi(u)}}.$$

Proof. Let $\epsilon' > 0$ and $s > 0$. Using Hölder inequality we get

$$\left(\int_1^\infty \chi(v)dv\right)^{\epsilon'} \left(\int_1^\infty \chi(v)e^{sv}dv\right)^{1-\epsilon'} \ge \int_1^\infty \chi(v)e^{s(1-\epsilon')v}dv.$$

Now putting $s = \xi(u)/(1-\epsilon') = \xi(u)(1+\epsilon")$ and since $u \ge C^2$ we deduce that

$$\int_1^\infty \chi(v)e^{\xi(u)(1+\epsilon")v}dv \ge \frac{1}{C^{\epsilon'}}\left(\int_1^\infty \chi(v)e^{\xi(u)v}dv\right)^{1+\epsilon"} \ge u^{1+\epsilon"/2}.$$

The Lemma follows taking $\epsilon = \xi(u)\epsilon"$. □

PROOF OF THEOREM 5.1.3. We begin by proving the upper bound :

The upper bound. From Lemma 3.4 of Granville-Soundararajan **[GS1]** we note that

$$\sigma(u) = \rho(u) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \int_{\substack{t_1,\ldots,t_j \geq 1 \\ t_1+\cdots+t_j \leq u}} \frac{\chi(t_1)}{t_1} \cdots \frac{\chi(t_j)}{t_j} \rho(u - t_1 - \ldots - t_j) dt_1 \ldots dt_j.$$

Therefore for any $\xi \in \mathbb{R}$

$$\sigma(u)e^{\xi u} = \rho(u)e^{\xi u} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!}$$

$$\int_{\substack{t_1,\ldots,t_j \geq 1 \\ t_1+\cdots+t_j \leq u}} \frac{\chi(t_1)e^{\xi t_1}}{t_1} \cdots \frac{\chi(t_j)e^{\xi t_j}}{t_j} \rho(u - t_1 - \ldots - t_j) e^{\xi(u-t_1-\ldots-t_j)} dt_1 \ldots dt_j.$$

Setting $F(\xi) = \max_{t \geq 0} \rho(t)e^{\xi t}$ we deduce that (by forgetting the condition $t_1 + \ldots + t_j \leq u$)

$$\sigma(u) \leq F(\xi)e^{-\xi u} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \Big(\int_1^{\infty} \frac{\chi(t)e^{\xi t}}{t} dt \Big)^j = F(\xi)e^{-\xi u} \exp\Big(\int_1^{\infty} \frac{\chi(t)e^{\xi t}}{t} dt \Big).$$

Choose ξ such that $u = \int_1^{\infty} \chi(t)e^{\xi t} dt$, that is $\xi = \xi(u)$.

Now putting $C := \int_1^{\infty} \chi(v) dv$ we have $u = \int_1^{\infty} \chi(v)e^{\xi(u)v} dv \geq Ce^{\xi(u)}$, which implies that

$$F(\xi(u)) \leq \max_{t \geq 0} \left(\frac{(e + o(1))u}{t \log(t) C} \right)^t = e^{O(u/\log(u))},$$

and the upper bound follows.

The Lower bound. Fix $\epsilon > 0$. We will show that there exists a constant C_ϵ such that

$$\sigma(u) > C_\epsilon \exp\left((-\xi(u) - \epsilon)u + \int_1^{\infty} \frac{\chi(v)e^{\xi(u)v}}{v} dv \right) \text{ for all } u \geq 0. \qquad (5.5.1)$$

Let u_0 be a suitably large number, and define

$$C_\epsilon = C_{\epsilon,u_0} = \inf_{u \leq u_0} \sigma(u) \exp\left((\xi(u) + \epsilon)u - \int_1^{\infty} \frac{\chi(v)e^{\xi(u)v}}{v} dv \right).$$

Evidently equation (5.5.1) holds for all $u \leq u_0$.

We use an induction argument. Let $n \in \mathbb{N}$ such that $n > u_0$ and suppose that equation (5.5.1) is true for all $t \leq n$, then we will show that it holds also for all $t \in [n, n+1]$.

Define

$$f(\xi) = \int_1^\infty \frac{\chi(v)e^{\xi v}}{v} dv,$$

and let $u \in [n, n+1]$. Then using our hypothesis we have

$$\begin{aligned}\frac{\sigma(u)e^{((\xi(u)+\epsilon)u)}}{C_\epsilon \exp(f(\xi(u)))} &= \frac{1}{C_\epsilon u}\int_0^u \chi(t)e^{(\xi(u)+\epsilon)t}\sigma(u-t)e^{((\xi(u)+\epsilon)(u-t)-f(\xi(u))}dt \\ &\geq \frac{1}{u}\int_1^u \chi(t)\exp\Big((\xi(u)+\epsilon)t + (\xi(u)-\xi(u-t))(u-t) \\ &\qquad + f(\xi(u-t)) - f(\xi(u))\Big)dt.\end{aligned} \tag{5.5.2}$$

Since $f'(\xi) = \int_1^\infty \chi(v)e^{\xi v}dv$ and using the mean value theorem we deduce that

$$u - t \leq \frac{f(\xi(u)) - f(\xi(u-t))}{\xi(u) - \xi(u-t)} \leq u. \tag{5.5.3}$$

Now differentiating $u = \int_1^\infty \chi(v)e^{\xi(u)v}dv$ with respect to u we get that

$$\xi'(u) = \left(\int_1^\infty v\chi(v)e^{\xi(u)v}dv\right)^{-1} \leq \frac{1}{u}. \tag{5.5.4}$$

By equation (5.5.4) and using the mean value theorem again we have

$$\xi(u) - \xi(u-t) \leq \frac{t}{u-t}. \tag{5.5.5}$$

Therefore by equations (5.5.3) and (5.5.5) we deduce that

$$\begin{aligned}&\frac{1}{u}\int_1^u \chi(t)\exp\Big((\xi(u)+\epsilon)t + (\xi(u)-\xi(u-t))(u-t) + f(\xi(u-t)) - f(\xi(u))\Big)dt \\ &\qquad \geq \frac{1}{u}\int_1^u \chi(t)\exp\Big((\xi(u)+\epsilon)t - t(\xi(u)-\xi(u-t))\Big)dt \\ &\qquad \geq \frac{1}{u}\int_1^u \chi(t)\exp\left((\xi(u)+\epsilon)t - \frac{t^2}{(u-t)}\right)dt \\ &\qquad \geq \frac{1}{u}\int_1^{\sqrt{u}} \chi(t)e^{(\xi(u)+\epsilon/2)t}dt, \quad \text{for} \quad u \geq u_0.\end{aligned} \tag{5.5.6}$$

For case i), Since $\int_T^\infty \chi(t)dt = 0$ and $\chi(t) \geq 0$ for all t, then meas$\{t \geq T : \chi(t) \neq 0\} = 0$ which implies that meas$\{t \geq T : \chi(t)e^{\xi(u)t} \neq 0\} = 0$, and so $\int_T^\infty \chi(t)e^{\xi(u)t}dt = 0$. Then taking $u_0 > T^2$ we have

$$\int_1^{\sqrt{u}} \chi(t)e^{(\xi(u)+\epsilon/2)t}dt = \int_1^T \chi(t)e^{(\xi(u)+\epsilon/2)t}dt > \int_1^T \chi(t)e^{\xi(u)t}dt = u. \tag{5.5.7}$$

Now for case ii) since $\chi(t) = (\{1+o(1)\}/h(t))^t$, there exist two constants A_ϵ and B_ϵ for which

$$A_\epsilon \left(\frac{\exp(-\epsilon/16)}{h(t)}\right)^t < \chi(t) < B_\epsilon \left(\frac{\exp(\epsilon/16)}{h(t)}\right)^t \quad \text{for every} \quad t \geq 0. \tag{5.5.8}$$

We consider two cases

1) $\dfrac{e^{\xi(u)}}{h(\sqrt{u})} \geq \exp\left(-\dfrac{\epsilon}{4}\right)$. Since h is non-decreasing we have by equation (5.5.8)

$$\begin{aligned}\int_1^{\sqrt{u}} \chi(t) e^{(\xi(u)+\epsilon/2)t} dt &\geq A_\epsilon \int_1^{\sqrt{u}} \left(\frac{e^{(\xi(u)+7\epsilon/16)}}{h(t)}\right)^t dt \\ &\geq A_\epsilon \int_1^{\sqrt{u}} \left(\frac{e^{\xi(u)}}{h(\sqrt{u})}\right)^t e^{(7\epsilon/16)t} dt \\ &\geq A_\epsilon \int_1^{\sqrt{u}} e^{(3\epsilon/16)t} dt = \frac{16A_\epsilon}{3\epsilon}\left(e^{(3\epsilon/16)\sqrt{u}} - e^{3\epsilon/16}\right) > u,\end{aligned} \tag{5.5.9}$$

for $u > u_0$.

2) $\dfrac{e^{\xi(u)}}{h(\sqrt{u})} \leq \exp\left(-\dfrac{\epsilon}{4}\right)$. Using Lemma 5.5.1 and equation (5.5.8), then the fact that h is non-decreasing and $u \geq Ce^{\xi(u)}$ we conclude that

$$\begin{aligned}\int_1^{\sqrt{u}} \chi(t) e^{(\xi(u)+\epsilon/2)t} dt &\geq \int_1^{\sqrt{u}} \chi(t) e^{(\xi(u)+\epsilon/8)t} dt \\ &\geq u^{1+\epsilon/(16\xi(u))} - B_\epsilon \int_{\sqrt{u}}^{\infty} \left(\frac{e^{(\xi(u)+3\epsilon/16)}}{h(t)}\right)^t dt \\ &\geq u^{1+\epsilon/(16\xi(u))} - B_\epsilon \int_{\sqrt{u}}^{\infty} \left(\frac{e^{\xi(u)}}{h(\sqrt{u})}\right)^t e^{(3\epsilon/16)t} dt \\ &\geq u^{1+\epsilon/(16\xi(u))} - B_\epsilon \frac{16}{\epsilon} \exp\Big(-\epsilon\sqrt{u}/16\Big) > u,\end{aligned} \tag{5.5.10}$$

for $u > u_0$.

Therefore combining equations (5.5.2), (5.5.6) then (5.5.7), (5.5.9), and (5.5.10) the result follows. □

5.6. Getting the asymptotic approximation of σ explicitly

Lemma 5.6.1. *If $\xi(u) = o(\log(u))$ as $u \to \infty$, then*

$$\int_1^{\infty} \frac{\chi(v) e^{\xi(u)v}}{v} dv = o(u),$$

and

$$\sigma(u) = \exp((-\xi(u) + o(1))u).$$

PROOF. Since $\chi(t) \leq 1$ for every $t \geq 1$ and using our assumption we have

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{\chi(v)e^{\xi(u)v}}{v}dv &= \int_1^{\frac{\log(u)}{\xi(u)}} \frac{\chi(v)e^{\xi(u)v}}{v}dv + \int_{\frac{\log(u)}{\xi(u)}}^\infty \frac{\chi(v)e^{\xi(u)v}}{v}dv \\
&\leq \int_1^{\frac{\log(u)}{\xi(u)}} e^{\xi(u)v}dv + \frac{\xi(u)}{\log(u)}\int_1^\infty \chi(v)e^{\xi(u)v}dv \\
&= \frac{1}{\xi(u)}\left(u - e^{\xi}\right) + \frac{\xi(u)u}{\log(u)} = o(u).
\end{aligned}$$

□

PROOF OF PROPOSITION 5.1.3. Let $\zeta(u)$ be the unique continuous solution to the equation $u = e^{\zeta(u)T}/\zeta(u)$. Since $\chi(t) \leq 1$ for all t, we have

$$\frac{e^{\zeta(u)T}}{\zeta(u)} = \int_1^T \chi(v)e^{\xi(u)v}dv \leq \frac{e^{\xi(u)T} - e^{\xi(u)}}{\xi(u)} < \frac{e^{\xi(u)T}}{\xi(u)},$$

and since the function $f(\xi) = e^{\xi T}/\xi$ is non-decreasing for $\xi > 1$ we deduce that $\zeta(u) \leq \xi(u)$. Now fix $\epsilon > 0$ (such that $T(1-\epsilon) > 1$), and suppose that there is arbitrary large u for which $\xi(u) > \zeta(u)(1+\epsilon)$. Define $s_\epsilon = \int_{T(1-\epsilon/3)}^T \chi(t)dt > 0$ (by the definition of T) . We deduce under our assumption that

$$s_\epsilon e^{\zeta(u)(1+\epsilon/3)T} \leq s_\epsilon e^{T(1-\epsilon/3)\xi(u)} \leq \int_{T(1-\epsilon/3)}^T \chi(v)e^{\xi(u)v}dv \leq \frac{e^{\zeta(u)T}}{\zeta(u)},$$

which is impossible if u is large enough. Thus $\xi(u) = \zeta(u)(1+o(1))$ as $u \to \infty$. Now we trivially have $1 \ll \zeta(u) \ll \log(u)$, then

$$\zeta(u) = \frac{\log(u)}{T} + \frac{\log(\zeta(u))}{T} = \frac{\log(u)}{T}(1+o(1)).$$

We deduce that $\xi(u) = \frac{\log(u)}{T}(1+o(1))$, and the result follows combining Theorem 5.1.3 and the fact that $\int_1^T \frac{\chi(v)e^{\xi(u)v}}{v}dv = O(u)$. □

Now we prove Proposition 5.1.4; define $g(u) := h(u)/(uh'(u))$.

Lemma 5.6.2. *Let $h(u)$ be a real differentiable function with $uh'(u)/h(u) = n + o(1)$, where n is a positive real number. Then for all $k > 0$ we have*

$$h(ku) = h(u)k^{n+o(1)}.$$

PROOF. We have that

$$\log\left(\frac{h(ku)}{h(u)}\right) = \int_u^{ku} \frac{h'(t)}{h(t)}dt = \int_u^{ku} \frac{(n+o(1))}{t}dt = (n+o(1))\log k.$$

□

Lemma 5.6.3. *Assume the hypothesis of Proposition 5.1.4 b). Then*

$$h(v(u)\log(u)) = (1+o(1))h(\log u),$$

where

$$v(u) := \min\left(\log(u), \min_{\log(u)\le t\le \log^2(u)} g(t)\right),$$

and $v(u) \to \infty$ as $u \to \infty$.

PROOF. Since $g(t) \to \infty$ as $t \to \infty$ then $v(u) \to \infty$ as $u \to \infty$, so if u is large then $v(u)\log(u) > \log u$ so that $h(v(u)\log(u)) \ge h(\log u)$. On the other hand

$$\log\left(\frac{h(v(u)\log(u))}{h(\log(u))}\right) = \int_{\log(u)}^{v(u)\log(u)} \left(\frac{h'(t)}{h(t)}\right)dt = \int_{\log(u)}^{v(u)\log(u)} \frac{1}{tg(t)}dt$$
$$\le \frac{1}{\min_{\log(u)\le t\le v(u)\log(u)} g(t)} \int_{\log(u)}^{v(u)\log(u)} \frac{dt}{t} \le \frac{1}{v(u)}(1+\log(v(u))) = o(1).$$

□

PROOF OF PROPOSITION 5.1.4. Fix $\epsilon > 0$ and suppose that there is arbitrary large u for which $\xi(u) > \log(h(\zeta\log(u))) + \epsilon$. Then for such u we have in case a) by equation (5.5.8), Lemma 5.6.2 and the fact that h is non-decreasing

$$\begin{aligned} u &= \int_1^\infty \chi(t) e^{\xi(u)t} dt > A_\epsilon \int_1^\infty \left(\frac{e^{\xi(u)-\epsilon/16}}{h(t)} \right)^t dt \\ &\geq A_\epsilon \int_{\log\log(u)}^{\log(u)/n} e^{(\epsilon/2)t} \left(\frac{h(e\log(u)/n)}{h(\log(u)/n)} \right)^t dt \\ &= A_\epsilon \int_{\log\log(u)}^{\log(u)/n} e^{(\epsilon/2+n+o(1))t} dt > A_\epsilon \int_{\log\log(u)}^{\log(u)/n} e^{(\epsilon/4+n)t} dt > u, \end{aligned}$$

for u large enough, which gives a contradiction.

Now in case b), our assumption and Lemma 5.6.3 imply that

$$\xi(u) > \log\left(h(v(u)\log(u))\right) + \epsilon/2.$$

Then by equation (5.5.8) and since h is non-decreasing and $v(u) \to \infty$ as $u \to \infty$

$$\begin{aligned} u &= \int_1^\infty \chi(t) e^{\xi(u)t} dt > A_\epsilon \int_1^\infty \left(\frac{e^{\xi(u)-\epsilon/16}}{h(t)} \right)^t dt \geq A_\epsilon \int_1^{v(u)\log(u)} e^{(\epsilon/3)t} dt \\ &= A_\epsilon \frac{3}{\epsilon} \left(u^{v(u)\epsilon/3} - e^{\epsilon/3} \right) > u, \end{aligned}$$

for u large enough, which gives a contradiction.

Now we suppose that there is arbitrary large u for which $\xi(u) < \log\left(h(\zeta\log(u))\right) - \epsilon$. Then for such u let $q(t) := (\xi(u) + \epsilon/16 - \log(h(t)))t$, so that

$$q'(t) = \xi(u) + \frac{\epsilon}{16} - \log(h(t)) - \left(\frac{th'(t)}{h(t)} \right).$$

Now in case (a) $q'(t) = \xi(u) + \epsilon/16 - \log(h(t)) - n + o(1)$, therefore the maximum of $q(t)$ holds at some point t_0 for which $q'(t_0) = 0$ so that, under our assumption

$$h(t_0) = e^{\xi(u)+\epsilon/16-n+o(1)} < h(e\log(u)/n) e^{-n-\epsilon/2}. \tag{5.6.1}$$

Now we must have

$$t_0 < \log(u)(1 - \epsilon/(4n))/n, \tag{5.6.2}$$

otherwise since h is non-decreasing and by Lemma 5.6.2

$$\frac{h(t_0)}{h(e\log(u)/n)} \geq \frac{h\left(\frac{\log(u)}{n}\left(1 - \frac{\epsilon}{4n}\right)\right)}{h(e\log(u)/n)} = \left(\left(1 - \frac{\epsilon}{4n}\right) e^{-1} \right)^{n+o(1)} > e^{-n-\epsilon/2},$$

contradicting equation (5.6.1). Further by equations (5.5.8), (5.6.1) and (5.6.2) and since h is non-decreasing we deduce that

$$\begin{aligned}
u &= \int_1^\infty \chi(t)e^{\xi(u)t}dt < B_\epsilon \int_1^\infty \left(\frac{e^{\xi(u)+\epsilon/16}}{h(t)}\right)^t dt \\
&= B_\epsilon \int_1^{e\log(u)/n} \left(\frac{e^{\xi(u)+\epsilon/16}}{h(t)}\right)^t dt + B_\epsilon \int_{e\log(u)/n}^\infty \left(\frac{e^{\xi(u)+\epsilon/16}}{h(t)}\right)^t dt \\
&\leq B_\epsilon \frac{e\log(u)}{n} \left(\frac{e^{\xi(u)+\epsilon/16}}{h(t_0)}\right)^{t_0} + B_\epsilon \int_{e\log(u)/n}^\infty e^{-\epsilon/2t}dt \\
&= B_\epsilon \frac{e\log(u)}{n}(e^{n+o(1)})^{t_0} + o(1) < u,
\end{aligned}$$

for u large enough, which gives a contradiction.

For case (b) $q'(t) = \xi(u) + \epsilon/16 - \log(h(t)) - \frac{1}{g(t)}$, and the maximum of $q(t)$ holds at some point t_0 for which $q'(t_0) = 0$ (to avoid redundancy we take $t_0 = \min\{t : q'(t) = 0\}$, which is possible by the continuity of $h(t)$ and $g(t)$). Now $t_0 \to \infty$ as $u \to \infty$, otherwise $q'(t_0) > 0$ for u large enough. Thus

$$\left(\frac{e^{\xi(u)+\epsilon/16}}{h(t_0)}\right)^{t_0} = \exp\left(\frac{t_0}{g(t_0)}\right) = e^{o(t_0)}. \tag{5.6.3}$$

Now by equation (5.5.8)

$$\begin{aligned}
u &= \int_1^\infty \chi(t)e^{\xi(u)t}dt \leq B_\epsilon \int_1^\infty \left(\frac{e^{\xi(u)+\epsilon/16}}{h(t)}\right)^t dt \\
&= B_\epsilon \int_1^{\log(u)} \left(\frac{e^{\xi(u)+\epsilon/16}}{h(t)}\right)^t dt + B_\epsilon \int_{\log(u)}^\infty \left(\frac{e^{\xi(u)+\epsilon/16}}{h(t)}\right)^t dt.
\end{aligned} \tag{5.6.4}$$

Considering the cases $t_0 \leq \log(u)$ and $t_0 > \log(u)$ (in which case $q(t)$ is increasing on $[1, \log(u)]$), and using equation (5.6.3) and our assumption on $\xi(u)$ we get that

$$\int_1^{\log(u)} \left(\frac{e^{\xi(u)+\epsilon/16}}{h(t)}\right)^t dt \leq \max\left(\log(u)e^{o(\log(u))}, \log(u)\exp(-\epsilon/2\log(u))\right) = u^{o(1)},$$

using this fact along with equation (5.6.4) and the assumption on $\xi(u)$ we deduce that

$$u \leq B_\epsilon u^{o(1)} + B_\epsilon \int_{\log(u)}^\infty e^{-\epsilon/2t}dt = u^{o(1)} + o(1),$$

which contradicts our hypothesis.

Now in both cases we have

$$\frac{h'(t)}{h(t)} \leq \frac{c}{t},$$

for some positive constant c and for all t. Then integrating both sides gives $h(t) \ll t^c$, and this with our result implies

$$\xi(u) \ll \log(\log(u)).$$

Thus by Lemma 5.6.1 and Theorem 5.1.3 the Proposition follows. $\square$

Chapitre 6

ON THE NUMBER OF LINEAR FORMS IN LOGARITHMS

Résumé : Soit n un entier positif. On prouve une formule asymptotique pour le nombre des formes linéaires $b_1 \log a_1 + b_2 \log a_2 + ... + b_n \log a_n$, où $|b_i| \leq B_i$ et $1 \leq a_i \leq A_i$ sont des entiers, quand $A_i, B_i \to \infty$.

Abstract : Let n be a positive integer. We find an asymptotic formula for the number of linear forms $b_1 \log a_1 + b_2 \log a_2 + ... + b_n \log a_n$, where $|b_i| \leq B_i$ and $1 \leq a_i \leq A_i$ are integers, as $A_i, B_i \to \infty$.

6.1. Introduction

The theory of linear forms in logarithms, developed by A. Baker (**[Ba1]** and **[Ba2]**) in the 60's, is a powerful method in the transcendental number theory. It consists of finding lower bounds for $|b_1 \log a_1 + b_2 \log a_2 + ... + b_n \log a_n|$, where the b_i are integers and the a_i are algebraic numbers for which $\log a_i$ are linearly independent over $\mathbb{Q}$. We consider the simpler case where the $a_i > 0$ are integers, and we let $B_j = \max\{|b_j|, 1\}$, and $B = \max_{1\leq j\leq n} B_j$.

Lang and Waldschmidt (**[Lan]**, Introduction to chaper X and XI, p.212) conjectured the following

Conjecture 6.1.1. *Let $\epsilon > 0$. There exists $C(\epsilon) > 0$ depending only on ϵ, such that*

$$|b_1 \log a_1 + b_2 \log a_2 + ... + b_n \log a_n| > \frac{C(\epsilon)^n B}{(B_1 ... B_n a_1 ... a_n)^{1+\epsilon}}.$$

One part of the argument they used to motivate the Conjecture, is that the number of distinct linear forms $b_1 \log a_1 + b_2 \log a_2 + ... + b_n \log a_n$, where $|b_j| \leq B_j$ and $0 < a_j \leq A_j$, is $\asymp B_1...B_n A_1...A_n$, if the A_i and the B_i are sufficiently large.

In this paper we estimate the number of these linear forms as $A_i, B_i \to \infty$.

An equivalent formulation of the problem is to estimate the size of the following set

$$R = R(A_1, ..., A_n, B_1, ..., B_n) := \{r \in \mathbb{Q} : r = a_1^{b_1} a_2^{b_2} ... a_n^{b_n}, 1 \leq a_i \leq A_i, |b_i| \leq B_i\},$$

as $A_i, B_i \to \infty$.

For the easier case $A_i = A$ and $B_i = B$ for all i, a trivial upper bound on $|R|$ is $2^n A^n B^n / n! + o(A^n B^n)$, since permuting the numbers $a_i^{b_i}$ gives rise to the same number r.

We prove that this bound is attained asymptotically as $A, B \to \infty$. Also we deal with the general case, which is harder since not every permutation is allowed for all the ranges. Indeed the size of R depends on the ranges of the A_i and the B_i, as we shall see in Corollaries 6.1.1 and 6.1.2.

Let $E \subset \{(a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n), 1 \leq a_i \leq A_i, |b_i| \leq B_i\}$. We say that $r \in \mathbb{Q}$ has a representation in E, if $r = a_1^{b_1} a_2^{b_2} ... a_n^{b_n}$, for some $(a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n) \in E$.

For $r \in R$, if $\sigma \in S_n$ satisfies $1 \leq a_{\sigma(i)} \leq A_i$, and $|b_{\sigma(i)}| \leq B_i$ for all i, we say that σ permutes r, or σ is a possible permutation for the $a_i^{b_i}$. Finally we say that a permutation $\sigma \in S_n$ is permissible if

$$|\{r \in R : \sigma \text{ permutes } r\}| \gg A_1...A_n B_1...B_n.$$

The main result of this paper is the following

Theorem 6.1.1. *There exists a set* $E \subset \{(a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n), 1 \leq a_i \leq A_i, |b_i| \leq B_i\}$ *satisfying*

$$|E| \sim 2^n A_1 A_2 ... A_n B_1 B_2 ... B_n,$$

as $A_i, B_i \to \infty$, *such that any rational number*

$$r \in \{a_1^{b_1} a_2^{b_2} ... a_n^{b_n} : (a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n) \in E\},$$

has a unique representation in E *up to permissible permutations.*

From this result we can deduce that $|R|$ is asymptotic to the cardinality of the set of $2n$-tuples $\{(a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n), 1 \leq a_i \leq A_i, |b_i| \leq B_i\}$ modulo permissible permutations.

In the case $A_i = A$, $B_i = B$, every permutation is permissible and we deduce the following Corollary

Corollary 6.1.1. *As $A, B \to \infty$, we have*

$$|\{r \in \mathbb{Q} : r = a_1^{b_1} a_2^{b_2} ... a_n^{b_n}, 1 \leq a_i \leq A, |b_i| \leq B\}| = \frac{2^n A^n B^n}{n!} + o(A^n B^n).$$

Now suppose that $A_i = o(A_{i+1})$ for all $1 \leq i \leq n-1$, or $B_i = o(B_{i+1})$ for all $1 \leq i \leq n-1$. For a non-identity permutation $\sigma \in S_n$, there exists j for which $\sigma(j) \neq j$. Therefore if σ permutes $r = a_1^{b_1} a_2^{b_2} ... a_n^{b_n}$, we must have $1 \leq a_j, a_{\sigma(j)} \leq \min(A_j, A_{\sigma(j)})$ and $-\min(B_j, B_{\sigma(j)}) \leq b_j, b_{\sigma(j)} \leq \min(B_j, B_{\sigma(j)})$. And so we deduce that

$$\begin{aligned} &|\{r \in \mathbb{Q} : r = a_1^{b_1} a_2^{b_2} ... a_n^{b_n}, 1 \leq a_i \leq A_i, |b_i| \leq B_i : \sigma \text{ permutes } r\}| \\ &\leq 2^n A_1 ... A_n B_1 ... B_n \left(\frac{\min(A_j, A_{\sigma(j)}) \min(B_j, B_{\sigma(j)})}{\max(A_j, A_{\sigma(j)}) \max(B_j, B_{\sigma(j)})} \right) = o(A_1 ... A_n B_1 ... B_n), \end{aligned}$$

by our assumption on the A_i and B_i. Thus in this case no permutation $\sigma \neq 1$ is permissible. Therefore we have

Corollary 6.1.2. *If $A_i = o(A_{i+1})$ for all $1 \leq i \leq n-1$, or $B_i = o(B_{i+1})$ for all $1 \leq i \leq n-1$, then*

$$|\{r \in \mathbb{Q} : r = a_1^{b_1} a_2^{b_2} ... a_n^{b_n}, 1 \leq a_i \leq A_i, |b_i| \leq B_i\}| \sim 2^n A_1 ... A_n B_1 ... B_n,$$

as $A_i, B_i \to \infty$.

We can observe that Corollaries 6.1.1 and 6.1.2 correspond to extreme cases : in Corollary 6.1.1 all permutations are permissible, while none is permissible in Corollary 6.1.2. Indeed we can prove

Corollary 6.1.3. *As $A_i, B_i \to \infty$, we have*

$$\frac{(2^n + o(1))}{n!} A_1 ... A_n B_1 ... B_n \leq |R| \leq (2^n + o(1)) A_1 ... A_n B_1 ... B_n.$$

Moreover the two bounds are optimal.

PROOF. From Theorem 6.1.1 we have that

$$|R| \sim \sum_{\substack{1\le a_1\le A_1\\ |b_1|\le B_1}} \cdots \sum_{\substack{1\le a_n\le A_n\\ |b_n|\le B_n}} \frac{1}{|\{\sigma\in S_n : \sigma \text{ is possible for the } a_i^{b_i}\}|}.$$

The result follows from the fact that $1 \le |\{\sigma \in S_n : \sigma \text{ is possible for the } a_i^{b_i}\}| \le n!$. □

For the simple case $n = 2$, there is only one non-trivial permutation $\sigma = (12)$. This permutation is possible only if $1 \le a_1, a_2 \le \min(A_1, A_2)$ and $|b_1|, |b_2| \le \min(B_1, B_2)$. Then by Theorem 6.1.1, and after a simple calculation we deduce that

$$\begin{aligned}&|\{r\in\mathbb{Q} : r = a_1^{b_1}a_2^{b_2}, 1\le a_1\le A_1, 1\le a_2\le A_2, |b_1|\le B_1, |b_2|\le B_2\}|\\ &\sim 4A_1A_2B_1B_2 - 2\min(A_1,A_2)^2\min(B_1,B_2)^2.\end{aligned}$$

In general the size of $|R|$ is asymptotic to an homogeneous polynomial of degree $2n$ in the variables $A_1, ..., A_n, B_1, ..., B_n$. Moreover it's also necessary to order the A_i's and B_i's, so without loss of generality we assume that $A_1 \le A_2 \le ... \le A_n$ and $B_{\pi(1)} \le B_{\pi(2)} \le ... \le B_{\pi(n)}$, where $\pi \in S_n$ is a permutation.

We prove the following

Proposition 6.1.1. *Suppose that $A_1 \le A_2 \le ... \le A_n$ and $B_{\pi(1)} \le B_{\pi(2)} \le ... \le B_{\pi(n)}$, where $\pi \in S_n$ is a permutation. Also let $A_0 = B_{\pi(0)} = 1$.*
Then $|R|$ is asymptotic to

$$2^n \sum_{\substack{i_1=1\\ 1\le j_1\le \pi^{-1}(1)}} \cdots \sum_{\substack{1\le i_n\le n\\ 1\le j_n\le\pi^{-1}(n)}} \frac{\prod_{k=1}^n (A_{i_k} - A_{i_k-1})(B_{\pi(j_k)} - B_{\pi(j_k-1)})}{|\{\sigma\in S_n : i_{\sigma(l)}\le l, j_{\sigma(l)}\le \pi^{-1}(l), \forall 1\le l\le n\}|},$$

as $A_i, B_i \to \infty$.

6.2. PRELIMINARY LEMMAS

Let C be a positive real number. We say that the n-tuple $(a_1, ..., a_n)$ satisfies condition (1_C), if there exists a prime p, such that $p^k | a_1a_2...a_n$ where $k \ge 2$, and $p^k \ge C$.

Lemma 6.2.1. *We have*

$$|\{(a_1,...,a_n), 1\le a_i\le A_i : \textit{which satisfy } (1_C)\}| \ll_n \frac{A_1...A_n(\log C)^n}{\sqrt{C}}.$$

PROOF. First we have

$$\begin{aligned}&|\{(a_1,...,a_n), 1 \le a_i \le A_i : \text{which satisfy } (1_C)\}|\\ &\le \sum_p |\{(a_1,...,a_n), 1 \le a_i \le A_i : \exists k \ge 2, p^k \ge C, \text{and } p^k | a_1 a_2 ... a_n\}|.\end{aligned} \tag{6.2.1}$$

Case 1. $p \le \sqrt{C}$

In this case pick k to be the smallest integer such that $p^k \ge C$, ie $k = [\log C/\log p] + 1$. Then the number of $(a_1, ..., a_n)$ such that $p^k | a_1 a_2 ... a_n$ is equal to

$$\sum_{d_1 d_2 ... d_n = p^k} \prod_{i=1}^{n} \sum_{\substack{1 \le a_i \le A_i \\ d_i | a_i}} 1 \le d_n(p^k) \frac{A_1 ... A_n}{p^k} \le d_n(p^k) \frac{A_1 ... A_n}{C}.$$

Now $d_n(p^k) = \binom{n+k-1}{k}$, and by Stirling's formula, for k large enough we have

$$\begin{aligned}\log d_n(p^k) &= (n + k - 1 + \frac{1}{2}) \log(n + k - 1) - (k + \frac{1}{2}) \log k\\ &- (n - 1 + \frac{1}{2}) \log(n - 1) + O(1)\\ &\le (k + \frac{1}{2}) \log \left(1 + \frac{n-1}{k}\right) + (n - \frac{1}{2}) \log \left(\frac{n - 1 + k}{n - 1}\right)\\ &\le n \log k.\end{aligned}$$

Then summing over these primes gives

$$\sum_{p \le \sqrt{C}} |\{(a_1, ..., a_n), 1 \le a_i \le A_i : p^k | a_1 a_2 ... a_n\}| = O_n \left(\frac{A_1 ... A_n (\log C)^n}{\sqrt{C}}\right). \tag{6.2.2}$$

Case 2. $p > \sqrt{C}$

In this case pick $k = 2$. Then the number of $(a_1, ..., a_n)$ such that $p^2 | a_1 a_2 ... a_n$ is $O(A_1 ... A_n / p^2)$, where the constant involved in the O depends only on n. Therefore summing over these primes gives

$$\sum_{p > \sqrt{C}} |\{(a_1, ..., a_n), 1 \le a_i \le A_i : p^2 | a_1 a_2 ... a_n\}| = O_n \left(\frac{A_1 ... A_n}{\sqrt{C}}\right). \tag{6.2.3}$$

Thus combining equations (6.2.1)-(6.2.3) gives the result. □

We say that $(a_1, ..., a_n)$ satisfies condition (2_C) if at least one of the a_i is C-smooth : that is has all its prime factors lying below C.

Lemma 6.2.2. *Write $C^{u_i} = A_i$ for all $1 \le i \le n$. Then uniformly for $\min_{1\le i\le n} A_i \ge C \ge 2$, we have*

$$|\{(a_1, ..., a_n), 1 \le a_i \le A_i : \textit{which satisfy } (2_C)\}| \ll_n A_1A_2...A_n \left(\sum_{i=1}^{n} e^{-u_i/2}\right).$$

PROOF. We have that

$$|\{(a_1, ..., a_n), 1 \le a_i \le A_i : \text{which satisfy } (2_C)\}| \ll_n A_1A_2...A_n \sum_{i=1}^{n} \frac{\Psi(A_i, C)}{A_i},$$

where $\Psi(x, y)$ is the number of y-smooth positive integers below x. The result follows by the following Theorem of de Bruijn **[Br]**

$$\Psi(A_i, C) \ll A_i e^{-u_i/2},$$

uniformly for $A_i \ge C \ge 2$. □

We say that $(b_1, b_2, ..., b_n)$ satisfy condition (3_C), if there exists an n-tuple of integers $|c_i| \le 2\log C$ not all zero, such that $c_1b_1 + c_2b_2 + ... + c_nb_n = 0$.

Lemma 6.2.3. *We have that*

$$\begin{aligned} &|\{(b_1, ..., b_n), |b_i| \le B_i : \textit{which satisfy condition } (3_C)\}| \\ &\le B_1B_2...B_n \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{(9\log C)^n}{B_i}\right). \end{aligned}$$

PROOF. We note that

$$\begin{aligned} &|\{(b_1, ..., b_n), |b_i| \le B_i : \text{which satisfy condition } (3_C)\}| \\ &\le \sum_{\substack{|c_i|\le 2\log C \\ (c_1,...,c_n)\ne(0,...,0)}} |\{(b_1, ..., b_n), |b_i| \le B_i : c_1b_1 + c_2b_2 + ... + c_nb_n = 0\}| \\ &\le \sum_{\substack{|c_i|\le 2\log C \\ (c_1,...,c_n)\ne(0,...,0)}} (2B_1 + 1)...(2B_n + 1) \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2B_i + 1}\right) \\ &\le B_1B_2...B_n \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{(9\log C)^n}{B_i}\right). \end{aligned}$$

□

6.3. Proof of the results

Proof of Theorem 6.1.1. We begin by choosing

$$C := \min(B_1, ..., B_n, \log A_1, ..., \log A_n).$$

We consider the following set

$$\begin{aligned} E :=& \{(a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n), 1 \le a_i \le A_i, |b_i| \le B_i : \\ & (a_i) \text{ do not satisfy any of } (1_C),(2_C), (b_i) \text{ do not satisfy } (3_C)\}. \end{aligned}$$

Then by our choice of C, if we combine Lemmas 6.2.1-6.2.3, we observe that

$$|E| = 2^n A_1...A_n B_1...B_n(1 + o(1)).$$

Therefore it remains to prove that any representation of a rational number r as $a_1^{b_1}a_2^{b_2}...a_n^{b_n}$ where $(a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n)$ belongs to E, is unique up to possible permutations of the $a_i^{b_i}$, and finally we can consider only permissible permutations (since the number of $r \in R$ which can be permuted by a non-permissible permutation is negligible).

We begin by considering the following equation

$$a_1^{b_1}a_2^{b_2}...a_n^{b_n} = e_1^{f_1}e_2^{f_2}...e_n^{f_n}, \tag{6.3.1}$$

where $(a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n)$ and $(e_1, ..., e_n, f_1, ..., f_n)$ are in E. If for some i, a_i contains a prime factor p such that $p^2 \nmid a_1a_2...a_n$ and $p^2 \nmid e_1e_2...e_n$, then $b_i \in \{f_1, f_2, ...f_n\}$. Now suppose that there exists $1 \le j \le n$ such that $b_j \notin \{f_1, f_2, ...f_n\}$, then for all the primes p that divides a_j, there exists $k \ge 2$ for which $p^k|a_1a_2...a_n$ or $p^k|e_1e_2...e_n$, but the (a_i) and the (e_i) don't satisfy condition (1_C) and so we must have $p^k \le C$, which implies that a_j is C-smooth ; however this contradicts the fact that the (a_i) do not satisfy condition (2_C). Therefore we deduce that

$$\{b_1, b_2, ..., b_n\} = \{f_1, f_2, ..., f_n\}.$$

Then up to permutations, we have that $b_i = f_i$, and so equation (6.3.1) becomes

$$a_1^{b_1}a_2^{b_2}...a_n^{b_n} = e_1^{b_1}e_2^{b_2}...e_n^{b_n}. \tag{6.3.2}$$

Let p be any prime dividing $a_1a_2...a_n$, and let $\alpha_i \geq 0$ and $\beta_i \geq 0$ be the corresponding powers of p in a_i and e_i respectively, and let $c_i = \alpha_i - \beta_i$. Then equation (6.3.2) implies that

$$c_1b_1 + c_2b_2 + ...c_nb_n = 0.$$

Now the (a_i) and the (e_i) do not satisfy condition (1_C), and so $0 \leq \alpha_i, \beta_i \leq \log C/\log 2 \leq 2\log C$, which implies that $|c_i| \leq 2\log C$. And since the (b_i) do not satisfy condition (3_C), we deduce that $c_i = 0$, and then $\alpha_i = \beta_i$ for all $1 \leq i \leq n$. Since this is true for every prime factor of $a_1a_2...a_n$, we must have $a_i = e_i$ for all $1 \leq i \leq n$, and our Theorem 6.1.1 is proved. □

Proof of Proposition 6.1.1. We want to count the number of elements $r = (r_1, ..., r_n)$, where $r_i = (a_i, b_i) \in [1, A_i] \times [-B_i, B_i] \cap \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, modulo possible permutations of the r_i's.

Since the number of r for which some b_i is 0, is $o(A_1...A_nB_1...B_n)$, we can suppose that all the b_i's are positive by symmetry.

Moreover let $R_i := [1, A_i] \times [1, B_i] \cap \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, and define the following distinct discrete sets $R_{ij} := [A_{i-1}, A_i] \times [B_{\pi(j-1)}, B_{\pi(j)}] \cap \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, for $1 \leq i, j \leq n$.
For every $1 \leq k \leq n$, we have

$$R_k = \bigsqcup_{\substack{1\leq i_k \leq k \\ 1 \leq j_k \leq \pi^{-1}(k)}} R_{i_kj_k}. \tag{6.3.3}$$

This implies

$$R_1 \times R_2 \times ... \times R_n = \bigsqcup_{\substack{i_1=1 \\ 1\leq j_1\leq \pi^{-1}(1)}} \bigsqcup_{\substack{1\leq i_2\leq 2 \\ 1\leq j_2\leq \pi^{-1}(2)}} \cdots \bigsqcup_{\substack{1\leq i_n\leq n \\ 1\leq j_n\leq \pi^{-1}(n)}} R_{i_1j_1} \times R_{i_2j_2} \times ... \times R_{i_nj_n}.$$

Now consider the elements $r \in R_{i_1j_1} \times R_{i_2j_2} ... \times R_{i_nj_n}$, with $1 \leq i_k \leq k$ and $1 \leq j_k \leq \pi^{-1}(k)$ being fixed. If $\sigma \in S_n$ permutes r, then $r_{\sigma(k)} \in R_k$ for all $1 \leq k \leq n$, but $r_{\sigma(k)} \in R_{i_{\sigma(k)}j_{\sigma(k)}}$ also, which implies that $R_{i_{\sigma(k)}j_{\sigma(k)}} \bigcap R_k \neq \emptyset$. From equation (6.3.3) this is equivalent to $R_{i_{\sigma(k)}j_{\sigma(k)}} \subseteq R_k$, and thus to the fact that $i_{\sigma(k)} \leq k$ and $j_{\sigma(k)} \leq \pi^{-1}(k)$ for all $1 \leq k \leq n$.

Therefore for any $r \in R_{i_1j_1} \times R_{i_2j_2} ... \times R_{i_nj_n}$, the number of $\sigma \in S_n$ which permutes r is constant and equal to

$$|\{\sigma \in S_n : i_{\sigma(l)} \leq l, j_{\sigma(l)} \leq \pi^{-1}(l), \forall 1 \leq l \leq n\}|.$$

Thus the number of elements in $R_1 \times R_2 ... \times R_n$, modulo possible permutations is

$$\sum_{\substack{i_1=1 \\ 1\leq j_1 \leq \pi^{-1}(1)}} \sum_{\substack{1\leq i_2 \leq 2 \\ 1\leq j_2 \leq \pi^{-1}(2)}} \cdots \sum_{\substack{1\leq i_n \leq n \\ 1\leq j_n \leq \pi^{-1}(n)}} \frac{\prod_{k=1}^{n}(A_{i_k} - A_{i_k-1})(B_{\pi(j_k)} - B_{\pi(j_k-1)})}{|\{\sigma \in S_n : i_{\sigma(l)} \leq l, j_{\sigma(l)} \leq \pi^{-1}(l), \forall 1 \leq l \leq n\}|},$$

which implies the result. $\square$

BIBLIOGRAPHIE

[Ba1] A. BAKER, *Linear forms in the logarithms of algebraic numbers I*, Mathematika **13** (1966), 204-216.

[Ba2] A. BAKER, *Linear forms in the logarithms of algebraic numbers II, III*, Mathematika **14** (1967), 102-107, 220-228.

[BH] R. C. BAKER AND G. HARMAN, *Shifted primes without large prime factors*, Acta Arith. **83** (1998), no. 4, 331-361.

[BMV] J.T. BARTON, H.L. MONTGOMERY AND J.D. VAALER, *Note on a Diophantine inequality in several variables*, Proc. Amer. Math. Soc. **129** (2001), 337-345.

[Be] A.C. BERRY, *The accuracy of the Gaussian approximation to the sum of independent variables*, Trans. Amer. Math. Soc. **49** (1941), 122-136.

[Bo] E. BOMBIERI, *Le grand crible en théorie analytique des nombres*, Astérisque **18** (1987/1974), 103 pp.

[Br] N.G. DE BRUIJN, *On the number of positive integers $\leq x$ and free of prime factors $> y$. II*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A **69**, 239-247= Indag. Math **28** (1966), 239-247.

[Co] J.B. CONREY, *More than two fifths of the zeros of the Riemann zeta function are on the critical line*, J. Reine Angew. Math. **399** (1989), 1-26.

[CM] J. COGDELL AND P. MICHEL, *On the complex moments of symmetric power L-functions at $s = 1$*, IMRN **31** (2004), 1561-1617.

[Da] H. DAVENPORT, *Multiplicative number theory*, Springer Verlag, New York, 1980.

[Du] W. DUKE, *Extreme values of Artin L-functions and class numbers*, Compositio Math. **136** (2003), no. 1, 103-115.

[El1] P.D.T.A. ELLIOTT, *On the size of $L(1,\chi)$*, J. reine angew. Math. **236** (1969), 26-36.

[El2] P.D.T.A. ELLIOTT, *On the distribution of the values of quadratic L-series in the half-plane $\sigma > 1/2$*, Invent. Math. **21** (1973), 319-338.

[Er1] P. ERDÖS, *On the normal number of prime factors of $p-1$ and some other related problems concerning Euler's ϕ-function*, Quart. J. Math. **6** (1935), 205-213.

[Er2] P. ERDÖS, *Some remarks on the iterates of the ϕ and σ functions*, Colloq. Math. **17** (1967), 195-202.

[EGPS] P. ERDÖS, A. GRANVILLE, C. POMERANCE, AND C. SPIRO, *On the normal behavior of the iterates of some arithmetic functions*, Analytic Number Theory. Progr. Math. 85, Birkhäuser, Boston (1990), 165-204.

[EP] P. ERDÖS AND C. POMERANCE, *On the normal number of prime factors of $\phi(n)$*, Rocky Mountain Math. J. **15** (1985), 343-352.

[Es] C.G. ESSEEN, *Fourier analysis of distribution functions, A mathematical study of the Laplace-Gaussian law*, Acta Math. **77** (1945), 1-125

[Gr] A. GRANVILLE, *Smooth numbers : computational number theory and beyond*, Algorithmic number theory : lattices, number fields, curves and cryptography, Math. Sci. Res. Inst. Publ., Cambridge Univ. Press, Cambridge (2008), 267-323.

[GS1] A. GRANVILLE AND K. SOUNDARARAJAN, *The spectrum of multiplicative functions*, Annals of Math. **153** (2001), 407-470.

[GS2] A. GRANVILLE AND K. SOUNDARARAJAN, *The distribution of values of $L(1,\chi_d)$* , Geometric and Funct. Anal **13** (2003), 992-1028.

[GS3] A. GRANVILLE AND K. SOUNDARARAJAN, *The number of unsieved integers up to x*, Acta Arith. **115** (2005), 305-328.

[GS4] A. GRANVILLE AND K. SOUNDARARAJAN, *Extreme values of $|\zeta(1+it)|$*, The Riemann zeta function and related themes : papers in honour of Professor K. Ramachandra, Ramanujan Math. Soc. Lect. Notes Ser. **2** (2006), 65-80.

[HR] L. HABSIEGER AND E. ROYER, *L-functions of automorphic forms and combinatorics : Dyck paths*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **54** (2004), no.7, 2105-2141.

[Ha] G. HALÁSZ, *On the distribution of additive and the mean values of multiplicative arithmetic functions*, Stud. Sci. Math. Hungar. **6** (1972), 211-233.

[Hi1] A. HILDEBRAND, *Quantitative mean value theorems for nonnegative multiplicative functions I*, J. London Math. Soc. **30** (1985), 394-406.

[Hi2] A. HILDEBRAND, *Quantitative mean value theorems for nonnegative multiplicative functions II*, Acta Arith. **XLVIII** (1987), 209-260.

[HT] A. HILDEBRAND AND G. TENENBAUM, *Integers without large prime factors*, J. de Théorie des Nombres de Bordeaux **5** (1993), 411-484.

[Iw] H. IWANIEC, *Topics in classical automorphic forms*, Graduate Studies in Mathematics, **17** American Mathematical Society 1997.

[IK] H. IWANIEC AND E. KOWALSKI, *Analytic Number Theory*, A.M.S Colloquium Publications, vol **53** (2004).

[KP1] J. KACZOROWSKI AND A. PERELLI, *The Selberg class : a survey.*, Number theory in progress. **2** de Gruyter, Berlin, (Zakopane-Kościelisko, 1997), (1999), 953-992.

[KP2] J. KACZOROWSKI AND A. PERELLI, *On the prime number theorem for the Selberg class*, Arch. Math. (Basel), **80** (2003), 255-263.

[KM] E. KOWALSKI AND P. MICHEL, *Zeros of families of Automorphic L-functions close to* 1, Pacific J. Math. **207** (2002), 411-431.

[Lam1] Y. LAMZOURI, *Smooth values of the iterates of the Euler's Phi function*, Canadian Journal of Mathematics, Vol. **59**, No. 1 (2007), 127-147.

[Lam2] Y. LAMZOURI, *On the number of linear forms in logarithms*, Journal of Number Theory, Vol. **125** (2007), 247-253.

[Lam3] Y. LAMZOURI, *The two dimensional distribution of values of* $\zeta(1+it)$, Int. Math. Res. Not. **IMRN** (2008) Vol. 2008, article ID rnn106, 48 pp.

[Lam4] Y. LAMZOURI, *Distribution of values of L-functions at the edge of the critical strip*, (2009). 30 pages. Submitted. ArXiv :0810.2292.

[Lan] S. LANG, *Elliptic curves : Diophantine analysis*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], **231**. Springer-Verlag, Berlin-New York 1978.

[LW] Y.-K. LAU AND J. WU, *Extreme values of symmetric power L-functions at* 1, Acta Arith. **126** (2007), no.1, 57-76.

[Le1] N. LEVINSON, *Ω-theorems for the Riemann zeta-function*, Acta Arith. **20** (1972), 319-332.

[Le2] N. LEVINSON, *More than one third of the zeros of Riemann's zeta function are on $\sigma = 1/2$*, Adv. Math. **13** (1974), 383-436.

[Li1] J.E. LITTLEWOOD, *On the function $1/\zeta(1+it)$*, Proc. London Math. Soc **27** (1928), 349-357.

[Li2] J.E. LITTLEWOOD, *On the class number of the corpus $P(\sqrt{-k})$*, Proc. London Math. Soc **27** (1928), 358-372.

[LRW] J.Y. LIU, E. ROYER AND J. WU, *On a conjeture of Montgomery-Vaughan on extreme values of automorphic L-functions at* 1, Anatomy of integers, CRM Proceedings and Lecture Notes, **46**, American Mathematical Society, Providence, RI, (2008) 217-245.

[Mi] P. MICHEL, *Familles de fonctions L de formes automorphes et applications.*, Proceedings des Journées Arithmétiques de Lille. Journ. Th. Nombres Bordeaux, Vol **15**, Fasc. 1, (2003), 275-307.

[Mo] H.L. MONTGOMERY, *Ten lectures on the interface between Analytic Number Theory and Harmonic Analysis*, American Mathematical Society, Providence, RI (1994).

[MV] H.L. MONTGOMERY AND R.C. VAUGHAN, *Extreme values of Dirichlet L-functions at* 1, "Number Theory in Progress"(K. Györy, H. Iwaniec, J. Urbanowicz, eds.), de Gruyter, Berlin (1999), 1039-1052.

[No] K.K. NORTON, *Upper bounds for sums of powers of divisor functions*, J. Number Theory **40** (1992), 60-85.

[Po] C. POMERANCE, *Popular values of Euler's function*, Mathematika **27** (1980), 84-89.

[PS] C. POMERANCE AND I.E. SHPARLINSKI, *Smooth orders and cryptographic applications*, Proc. ANTS-V, Springer Lecture Notes in Computer Science **2369** (2002), 338-348.

[Ro1] E. ROYER, *Statistique de la variable aléaoire $L(sym^2 f, 1)$*, Math. Ann. **321** (2001), no. 3, 667-687.

[Ro2] E. ROYER, *Interprétation combinatoire des moments négatifs des valeurs de fonctions L au bord de la bande critique*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **36** (2003), no. 4, 601-620.

[RW1] E. ROYER AND J. WU, *Taille des valeurs de fonctions L de carrés symétriques au bord de la bande critique*, Rev. Mat. Iberoamericana **21** (2005), no. 1, 263-312.

[RW2] E. ROYER AND J. WU, *Special values of symmetric power L-functions and Hecke eigenvalues*, J. Théor. Nombres Bordeaux **19** (2007), no. 3, 703-753.

[Sel] A. SELBERG, *Old and new conjectures and results about a class of Dirichlet series*, Proceedings of the Amalfi Conference on Analytic Number Theory (Maiori, 1989) Univ. Salerno, Salerno (1992), 367-385.

[Ser] J.-P. SERRE, *Abelian l-adic representation and elliptic curves*, New York, Benjamin (1968). Reprinted by A.K. Peters : Wellesley (1998).

[Sh] H. SHAPIRO, *An arithmetic function arising from the ϕ-function*, American Math. Monthly **50**, (1943), 18-30.

[So] K. SOUNDARARAJAN, *Degree 1 elements of the Selberg class*, Expo. Math **23** no.1 (2005), 65-70.

[Te] G. TENENBAUM, *Introduction à la théorie analytique et probabilistique des nombres*, Publ. Inst. Elie Cartan **13**, 1990.

[Ti] E.C. TITCHMARSH, *The theory of the Riemann zeta-function*, Oxford University Press, Oxford, 1986.

[Vi] I.M. VINOGRADOV, *A new estimate for $\zeta(1+it)$*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat **22** (1958), 161-164.

[Win] A. WINTNER, *The theory of Measure in Arithmetical Semi-Groups*, The Waverly press, Baltimore, MD, 1944.

[Wir] E. WIRSING, *Das asymptotishe Verhalten von Summen über multiplikative Funktionen II*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **18** (1967), 411-467.