Université de Montréal

Propriétés algébriques d'une algèbre de convolution

par

Magnifo Kahou Florence Laure

Département de mathématiques et de statistique

Faculté des arts et des sciences

Thèse présentée à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Philosophiæ Doctor (Ph.D.)
en Mathématiques

Orientation mathématiques fondamentales

mai 2009

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Cette thèse intitulée

Propriétés algébriques d'une algèbre de convolution

présentée par

Magnifo Kahou Florence Laure

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes :

Benabdallah, Khalid
(président-rapporteur)

Rosenberg, Ivo
(directeur de recherche)

Haddad, Lucien
(co-directeur)

Broer, Abraham
(membre du jury)

Leoreanu-Fotea, Violeta
(examinateur externe)

Hamel, Sylvie
(représentant du doyen de la FES)

Thèse acceptée le:
22 avril 2009

SOMMAIRE

Dans cette thèse, nous étudions les propriétés algébriques d'une algèbre de convolution généralisée.
Nombreux sont ceux qui ont travaillé sur les algèbres d'incidence et qui se sont intéressés aux problèmes d'isomorphisme entre ces algèbres d'incidence dont il existe plusieurs applications en théorie combinatoire. (Voir [DRS 71], [OS 97], [St 70]).
Les algèbres d'incidence généralisées sont une généralisation des algèbres d'incidence. Premièrement, nous remplaçons l'anneau par une algèbre générale $\mathbb{A} = \langle A; +, \cdot, 0\rangle$ où $\langle A; +, 0\rangle$ est un monoïde abélien dont l'élément neutre 0 est absorbant dans $\langle A; \cdot\rangle$. Par exemple, $\mathbb{A}$ peut être un treillis avec 0. Deuxièment, la relation sous-jacente est générale, plus nécessairement un ordre. La somme se fait sur une structure générale qui respecte la finitude. Nous caractérisons ici le centre, l'élément unité et les éléments idempotents dans certains cas.
Nous généralisons la notion de S-relation d'équivalence pour les algèbres d'incidence classiques définies dans [OS 97]. Le radical de Jacobson pour une algèbre d'incidence généralisée est défini et une caractérisation partielle de cette notion est donnée. Comme $\mathbb{A}$ est plus général qu'un anneau commutatif et unitaire, le radical de Jacobson de l'algèbre $\mathbb{A}$ ici est défini comme l'intersection des congruences maximales de $\mathbb{A}$. Il en est de même pour l'algèbre d'incidence généralisée $\mathbb{D}_{\mathbb{A}\mathbb{B}C}$. Nous donnons deux constructions des congruences de $\mathbb{D}_{\mathbb{A}\mathbb{B}C}$.
Les algèbres de convolution en théorie des anneaux étaient utilisées séparément des algèbres d'incidence. Un cadre plus général pour les algèbres d'incidence et de convolution est donné dans [Ro 86] en utilisant le groupoïde partiel. Inspiré de

[Ve 07], nous allons plus loin en remplaçant le groupoïde partiel par un multigroupoïde partiel. Nous caractérisons certaines propriétés algébriques d'une algèbre de convolution généralisée telles que la commutativité, l'associativité, la distributivité, l'existence d'un élément neutre et de certains éléments idempotents. La généralisation rend le travail beaucoup plus difficile.
Dans le dernier chapitre, l'algèbre $\mathbb{A}$ est remplacée par une hyperalgèbre dont les propriétés sont similaires à celles de $\mathbb{A}$. On peut donc caractériser $\mathbb{D}$ comme un hypergroupe. La commutativité et l'associativité de $\mathbb{D}$ sont aussi étudiées.

Mots clés : Algèbre d'incidence, algèbre de convolution, multigroupoïde, demi-anneau, hyperconvolution, S-relation d'équivalence, groupe-anneau.

SUMMARY

In this thesis, we study the algebraic properties of generalized convolution algebras.

Many authors worked on incidence algebras, the isomorphism problem between them. There are many applications of incidence algebras in combinatorics (see e.g. [DRS 71], [OS 97], [St 70]).

Generalized incidence algebras are a generalization of incidence algebra. First, we replace rings by very general algebras $\mathbb{A} = \langle A; +, \cdot, 0\rangle$ where $\langle A; +, 0\rangle$ is an abelian monoid whose neutral element 0 is absorbing in $\langle A; \cdot\rangle$; for example $\mathbb{A}$ could be a lattice with 0. Secondly the underlying relation can be more general than an order. The summation does not involve all consecutive triples and the local finiteness is replaced by a more general structure. We characterize here the center, the neutral elements and idempotent elements in a special case study.

We extend the notion of S-equivalence relation of classical incidence algebra defined in [OS 97]. The Jacobson radical of an incidence algebra is also extended and partially characterized. As $\mathbb{A}$ is much more general than a commutative ring with 1, the radical is defined as the intersection of maximal congruences of $\mathbb{A}$ and of the generalized incidence algebra $\mathbb{D}_{\mathbb{A}\mathbb{B}\mathcal{C}}$. We give two constructions of congruences of $\mathbb{D}_{\mathbb{A}\mathbb{B}\mathcal{C}}$.

Convolution algebras were used in ring theory separately from incidence algebras. A general framework for both the incidence algebras and convolution algebras was given in [Ro 86] in terms of a partial groupoid $\mathbb{B}$. Inspired by [Ve 07] we go much further by replacing the partial groupoid by a partial multigroupoid. We characterize some algebraic properties of a general convolution algebra ; such as

commutativity, associativity, distributivity, existence of unit elements and idempotency. As it can be expected the generality greatly complicates matters.
In the last chapter $\mathbb{A}$ is replaced by a hyperalgebra with similar properties as $\mathbb{A}$. We can characterize $\mathbb{D}$ whose additive structure is a hypergroup, $\mathbb{D}$ whose convolution is commutative and $\mathbb{D}$ whose convolution is associative.

Keywords : Incidence algebre, convolution algebra, multigroupoïd, semi-anneau, hyperconvolution, S-equivalence relation, group-ring.

TABLE DES MATIÈRES

À la mémoire de Gaston Kahou, mon père ;

À Lottin Wekape, mon époux.

REMERCIEMENTS

Ce travail n'aurait jamais vu le jour sans les efforts considérables de nombreuses personnes qui m'ont encadrée et encouragée sans relâche, me permettant ainsi de développer ce que j'ai reçu du Très Haut.

Ma dette est immense envers mon directeur de thèse, Ivo Rosenberg, dont les aides académique, financière et morale, ont eu raison des difficultés que j'aurais pu endurer pendant la réalisation de ce travail. Sa rigueur à la tâche, son goût de la précision, son ouverture d'esprit, ses précieux conseils et ses encouragements m'ont sans cesse soutenue dans cette entreprise. Je lui dis également merci pour m'avoir fait comprendre l'importance de la patience dans la réalisation d'un travail de recherche.

Je remercie Lucien Haddad, mon co-directeur, qui m'a soutenue par ses conseils, par sa précieuse aide financière, et par toutes les discussions que nous avons partagées. Je remercie tout le personnel du département de mathématiques et de statistiques : les professeurs pour leurs enseignements et leurs encouragements, les étudiants pour les échanges fructueux que nous avons partagés, et le personnel administratif, pour sa sympathie et sa disponibilité.

Mes remerciements vont aussi à mon époux, Lottin Wekape, qui a toujours partagé mes joies et mes peines pendant mes études académiques à travers ses encouragements, ses conseils, sa patience et son sens du sacrifice qui m'ont par ailleurs permis de me consacrer entièrement à ce travail. Je remercie de tout coeur ma famille qui a toujours été là pendant les moments d'hésitation et de difficulté pour me relever et m'encourager à aller de l'avant.

Merci à Lottin Wekape, à Calvin Wuntcha et à Octave Keutiben, pour la lecture et la correction de cette thèse.

INTRODUCTION

L' algèbre d'incidence classique a commencé au 19ème siècle avec l'inversion de Möbius et la fonction ζ de Riemann. Dans les années 50 - 60 du 20ème siècle, elle a été developpée par G. C. Rota et son école centrée à M.I.T. Une telle algèbre est définie par la donnée d'un ensemble ordonné localement fini et d'un corps (un anneau). Plusieurs résultats sur les algèbres d'incidences sont exposés dans la monographie de E. Spiegel et O'Donnell, [OS 97]. Plusieurs constructions se trouvent dans [St 86]. Une construction voisine, mais différente, l'algèbre de convolution, est donnée par les applications à support fini d'un demigroupe dans un anneau. Le résultat est les anneaux-demigroupes ; en particulier l'anneau-groupe, important en théorie des anneaux. Les algèbres d'incidence et les algèbres de convolution sont des cas particuliers des algèbres de convolution généralisées proposées il y a de cela plus de 21 ans. Dans ce cas, on se donne une algèbre $\langle A; +, \cdot, 0\rangle$, une algèbre partielle $\langle B; \circ\rangle$; et une famille non vide $\mathcal{C}$ de sous-ensembles de B. Ici $+$ est une opération binaire commutative et associative, 0 est son élément neutre tel que $a \cdot 0 = 0 = 0 \cdot a$ pour tout $a \in A$, et $\circ$ est une opération partielle binaire sur B (c'est-à-dire qu'il existe $N \subseteq B^2$ tel que $(x, y) \mapsto x \circ y$ est une application de N dans B). $\mathcal{C}$ est une famille de sous-ensembles de B fermée pour l'union, héréditaire (c'est-à-dire telle que $X \in \mathcal{C}$ si $X \subseteq Y$ pour un $Y \in \mathcal{C}$) et satisfait certaines conditions par rapport à $N \subseteq B^2$. L'algèbre de convolution généralisée est définie sur des applications de B dans A dont le support est un ensemble dans $\mathcal{C}$. Elle est munie de deux opérations binaires $+$ et $*$; où $+$ est la somme point par point (calculée dans $\langle A; +, 0\rangle$) et $*$ est le produit de convolution. Dans notre travail, nous allons plus loin en remplaçant le groupoïde partiel $\langle B; \circ\rangle$ par un hypergroupoïde partiel (c'est-à-dire une application $(x, y) \longmapsto x \circ y$ de B^2 dans la famille $\mathcal{P}(B)$ des parties de B). Dans la dernière partie, nous remplaçons aussi $\langle A; +, \cdot, 0\rangle$ par une hyperstructure.

Ce travail est divisé en quatre parties. Dans la première partie, nous nous inspirons des résultats de [OS 97] pour démontrer aussi certains résultats semblables dans le cas d'une algèbre d'incidence généralisée. Ici, nous caractérisons particulièrement le centre, les éléments idempotents. Dans la deuxième partie nous introduisons la notion de S-relation d'équivalence pour les algèbres d'incidence généralisées. Nous cherchons à caractériser un analogue du radical de Jacobson d'une algèbre d'incidence généralisée. Après la détermination des liens qui existent entre certaines congruences maximales de l'algèbre $\langle A; +, \cdot, 0\rangle$ et certaines congruences maximales de l'algèbre d'incidence généralisée, nous donnons une caractérisation restreinte du radical de l'algèbre d'incidence généralisée. Dans la troisième partie, nous introduisons une algèbre de convolution généralisée, où $\langle B; \circ\rangle$ est un multigroupoïde partiel. Particulièrement, nous déterminons les propriétés algébriques, à savoir, la caractérisation pour qu'elle soit commutative, associative, l'existence des éléments unité et des éléments idempotents. Les résultats ici sont inspirés de ceux de [Ro 86]. Dans la dernière partie, nous introduisons les hyperstructures pour les algèbres de convolution : les hyperconvolutions. Particulièrement, nous déterminons les conditions pour qu'une telle algèbre soit commutative et associative. On note aussi que $\langle D_{\mathbb{A}\mathbb{B}C}, +\rangle$ peut avoir une structure d'hypergroupe.

Chapitre 1

ALGÈBRE D'INCIDENCE GÉNÉRALISÉE

Dans cette première partie, nous définissons la notion d'algèbre de convolution généralisée et nous en donnons des exemples. Nous nous intéressons au cas particulier des algèbres d'incidence généralisées. Précisement, nous caractérisons leur centre, certains éléments idempotents et l'élément unité.

Nous rappelons la définition d'une algèbre d'incidence. Soit $\mathbb{A} = \langle A; +, -, \cdot, 0\rangle$ un anneau (pas nécessairement commutatif ou unitaire) et soit $(X; \leq)$ un ensemble ordonné localement fini (c'est-à-dire la relation $\leq$ est réflexive, antisymétrique et transitive sur X et pour tous $x \leq y$, l'intervalle $[x, y] = \{z \in X : x \leq z \leq y\}$ est fini).

Définition 1.0.1. *Soit $f : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{A}$ une application. On apppelle* ***support de*** *f, noté* ***Supp(f)****, l'ensemble $\{x \in \mathrm{X} : \ f(x) \neq 0\}$.*

Définition 1.0.2. *Soit $\langle X; \leq\rangle$ un ensemble ordonné localement fini. Soit $\mathbb{A} = \langle A; +, -, \cdot, 0\rangle$ un anneau. L'***algèbre d'incidence** *définie par X et A , notée $I(X, A)$, est l'ensemble des applications $f : X^2 \longrightarrow A$ telles que $f(x, y) = 0$ si $x \not\leq y$ muni de l'addition $+$ point par point et du produit défini pour tous $f, g \in I(X, A)$ et pour tous $x, y \in X$ par :*

$$(f + g)(x, y) = f(x, y) + g(x, y),$$

$$(f * g)(x, y) = \sum_{x \leq t \leq y} f(x, t)g(t, y).$$

Dans la suite, nous définissons les algèbres de convolution généralisées, et montrons en quoi elles étendent les algèbres d'incidence. Nous donnons de nouveaux résultats en nous référant à certains résultats exposés dans [OS 97].

1.1. Algèbres de convolutions généralisées

Nous utilisons la définition des algèbres de convolution généralisées telle que présentée dans [Ro 86]. Nous désignons par :

• $\mathbb{A} = \langle A; +, \cdot 0\rangle$ où A est un ensemble de cardinalité strictement supérieure à 1 et $\langle A; +, 0\rangle$ est un monoïde abélien, c'est-à-dire l'opération binaire + est commutative, associative et 0 est son élément neutre ($a+0 = a$ pour tout $a \in A$).

$\langle A; \cdot\rangle$ est un groupoïde (c'est-à-dire "·" est une opération binaire sur A) tel que pour tout $a \in A$, on a que $a \cdot 0 = 0 = 0 \cdot a$.

• $\mathbb{B} = \langle B; \circ\rangle$ est un groupoïde partiel ; c'est-à-dire, il existe $\emptyset \neq N \subset B^2$ tel que $\circ : (x_1, x_2) \longmapsto x_1 \circ x_2$ est une application de N vers B.

• $\mathcal{C}$ est une famille non vide de sous-ensembles de B vérifiant les propriétés i) à iii) :

i) $\mathcal{C}$ est héréditaire, c'est-à-dire $Z \subseteq X \in \mathcal{C} \Rightarrow Z \in \mathcal{C}$; et

$X, Y \in \mathcal{C} \Rightarrow X \cup Y \in \mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ contient tous les singletons de B.

ii) $X, Y \in \mathcal{C} \Rightarrow X \circ Y := \{x \circ y \mid (x, y) \in N \cap (X \times Y)\} \in \mathcal{C}$

iii) Si $b \in B$, et $X, Y \in \mathcal{C}$ alors $\{(x, y) \in N \cap (X \times Y),\ x \circ y = b\}$ est fini.

Définition 1.1.1. *On note par A^B, l'ensemble des applications de B vers A.* ***L'algèbre de convolution*** *de B vers A, que nous notons $\mathbb{D}_{\mathbb{A}\mathbb{B}\mathcal{C}} = \langle D_{\mathbb{A}\mathbb{B}\mathcal{C}}; +, \mathbf{0}, *\rangle$, est définie comme il suit :*

$D := D_{\mathbb{A}\mathbb{B}\mathcal{C}} := \{f \in A^B : supp(f) \in \mathcal{C}\ \}$,

$\forall f, g \in D,\ \ \forall\ x \in B,$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f * g)(x) = \sum \{f(y)g(t);\ (y, t) \in N,\ y \circ t = x\ \} \qquad (1)$$

$\mathbf{0} : B \longrightarrow A;\ x \longmapsto 0$, *la fonction nulle.*

Remarque : Nous abrégeons la somme dans (1) par $(f*g)(x) = \sum\limits_{y\circ t = x} f(y)g(t)$. On note aussi $D_{\mathbb{A}\mathbb{B}\mathcal{C}}$ tout simplement par D si $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ et $\mathcal{C}$ sont clairs du contexte.

• Toutes ces opérations sont bien définies.

En effet, pour $X = Supp(f)$, $Y = Supp(g) \in \mathcal{C}$, et par (ii),

$Supp(f * g) \subseteq \{x \circ y : (x, y) \in N \cap (Supp(f) \times Supp(g))\} \in \mathcal{C}$.

$Supp(\mathbf{0}) = \emptyset \in \mathcal{C}$; car $\emptyset \in \mathcal{C}$.

$Supp(f + g) \subset Supp(f) \cup Supp(g) \in \mathcal{C}$;

Pour tout $b \in B$, la somme $\sum_{y \circ t = b} f(y)g(t)$ est finie par (iii).

• Sur D, on peut aussi définir les opérations suivantes. Soit $f, g \in D$ et $r \in A$.

Produit direct : $f.g$ est défini par $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$ pour $x \in B$,

Produit par un scalaire : $r.f$ est défini par $(r \cdot f)(x) = r \cdot f(x)$ pour tout $x \in B$.

Le produit direct et le produit par un scalaire ne seront pas utilisés dans la thèse.

• $f * \mathbf{0} = \mathbf{0} * f = \mathbf{0}$ pour tout $f \in D$; c'est-à-dire $\langle D; +, 0\rangle$ est un monoïde abélien (commutatif, associatif avec un élément neutre) .

• Soit $\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}} = \langle D_{\mathbb{ABC}}; +, \mathbf{0}, *\rangle$ une algèbre de convolution. Posons $\mathcal{F} := \mathcal{P}_{fin}(B) :=$ l'ensemble des parties finies de B. Ici $\mathcal{F}$ vérifie les conditions i) à iii) de $\mathcal{C}$. En effet,

i) $\mathcal{F}$ est héréditaire, fermé pour l'union et contient tous les singletons de B,

ii) $\mathcal{F}$ est fermé pour $\circ$,

iii) Si $X, Y \in \mathcal{F}$ et $b \in B$, alors $\{\ (x, y) \in N \cap (X \times Y) :\ x \circ y = b\}$ est fini.

Alors $\mathbb{D}_{\mathbb{AB}\mathcal{F}} = \langle D_{\mathbb{AB}\mathcal{F}}; +, \mathbf{0}, *\rangle$ est une sous-algèbre de $\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}}$. En effet, $\mathbf{0} \in D_{\mathbb{AB}\mathcal{F}}$.

Soit $f, g \in D_{\mathbb{AB}\mathcal{F}}$. Alors, $Supp(f + g) \subseteq Supp(f) \cup Supp(g) \in \mathcal{F}$ montre que $f + g \in D_{\mathbb{AB}\mathcal{F}}$.

$Supp(f * g) \subset \{x \circ y;\ (x, y) \in N \cap (Supp(f) \times Supp(g)\} \in \mathcal{F}$.

On dit que $\mathbb{D}_{\mathbb{AB}\mathcal{F}}$ est **l'algèbre réduite** de $\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}}$. **Exemples**

1: Soit X un ensemble non vide et soit φ une relation binaire sur X, transitive et localement finie (c'est-à-dire pour chaque $(x, y) \in \varphi$, l'intervalle $\{z \in X : (x, z) \in \varphi,\ (z, y) \in \varphi\}$ est fini. Posons $B = \varphi$, $N = \{\big((p, q), (q, r)\big) :\ (p, q) \in \varphi, (q, r) \in \varphi\ \}$ et pour $\big((p, q), (q, r)\big) \in N$, $(p, q) \circ (q, r) = (p, r)$. L'application $\circ$ de N dans φ est bien définie. Pour $\mathcal{C} := \mathcal{P}(\mathrm{B})$, l'algèbre $\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}}$ est essentiellement l'algèbre considérée dans [Fi 70].

2: Si φ est une relation d'ordre localement finie sur X et $\langle A; +, -, ., 0\rangle$ un anneau, on retrouve l'algèbre d'incidence $I\big(\mathrm{X}, \mathrm{A}\big)$.

3: Soit $N = \{(b,b) : b \in B\}$ avec $b \circ b = b$ et soit $\mathcal{C} = \mathcal{P}(B)$, alors $D := \{f \in A^B;\ Suppf \in \mathcal{C}\} := A^B$. Pour tous $f, g \in A^B$ et $x \in B$,

$$(f * g)(x) = \sum_{b \circ y = x} f(b)g(y) = f(x)g(x) = (f \cdot g)(x).$$

Donc $f * g = f \cdot g$ et $\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}} = \langle A^B; +, \cdot, \mathbf{0}\rangle$.

4: Dans l'exemple **1**, posons $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ (où n est un entier positif, $\varphi = X^2 = \{(i,j) : 1 \leq i, j \leq n\}$).

a) Soit $\mathbb{A}$ un anneau ; alors $\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}}$ est isomorphe à $M_n(A)$, l'anneau des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans A équipé de la somme et du produit matriciel. En effet, pour $f \in A^B$, posons $\psi(f) = \big[f(i,j)\big]_{ij}$, où $\big[f(i,j)\big]_{ij}$ est la matrice carrée d'ordre n sur A aux entrées $f(i,j)$. Une vérification directe montre que ψ est un isomorphisme.

b) Soit $\mathbb{A} := \langle A; \wedge, \vee, 0\rangle$ un treillis, avec 0 pour le plus petit élément . Alors $\langle A; \vee, 0\rangle$ est un monoïde abélien et $a \wedge 0 = 0 = 0 \wedge a$, pour tout $a \in A$. Alors $\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}}$ est isomorphe à $M_n(A)$, l'anneau des matrices carrées d'ordre n sur A. Pour tous $M = [a_{ij}]_{ij}$ et $N = [b_{ij}]_{ij} \in M_n(A)$,

$$M + N = [a_{ij} \vee b_{ij}]_{ij}, \quad MN = [\bigvee_{k=1}^{n} (a_{ik} \wedge b_{kj})]_{ij}.$$

5: Soit $\langle B; \circ\rangle = \langle \mathbb{Z}^+; +\rangle$, où $\mathbb{Z}^+$ est l'ensemble des entiers positifs et $+$ la somme ordinaire, $N = B^2$, $\mathcal{C} = \mathcal{P}_{fin}(B)$; l'ensemble des parties finies de B et $\mathbb{A}$ un anneau. Alors $\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}}$ est isomorphe à $A[X]$, l'anneau des polynômes formels à coefficients dans A. En effet, $\theta : D \longrightarrow A[X]$ avec $f \longmapsto \sum_{i \in B} f(i)X^i$ est un isomorphisme.

6: Supposons que $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ et $\mathcal{C}$ satisfont aux conditions données au début de la section. Nous disons que $\mathbb{B}$ est **commutatif** si pour tous $a, b \in B$,

$$(a,b) \in N \;\Leftrightarrow\; (b,a) \in N \;\text{ et } (a,b) \in N \;\Rightarrow\; a \circ b = b \circ a.$$

De même, $\mathbb{B}$ est **associatif** si pour tous $a, b, c \in B$,

$$(a,b), (a \circ b, c) \in N \;\Leftrightarrow\; (a, b \circ c), (b,c) \in N,$$

$$et\;\; (a,b), (a \circ b, c) \in N \;\Rightarrow\; (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c).$$

Si $\langle A; \cdot\rangle$ et $\mathbb{B}$ sont commutatifs, alors $\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}}$ est commutatif. En particulier, si $\mathbb{A}$ est un anneau et $\mathbb{B}$ est un demi-groupe (avec $N = B^2$) et $\mathcal{C} = \mathcal{F}$, l'ensemble des parties finies de B; alors $\mathbb{D}_{\mathbb{AB}\mathcal{F}}$ est un demi anneau de groupe. Si de plus $\mathbb{B}$ est un groupe et $|A| > 1$, l'anneau $\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}}$ est un anneau de groupe.

Ces exemples nous donnent des cas particuliers d'algèbres de convolution qu'on rencontre couramment dans la littérature. Au chapitre trois, nous explorons plus en profondeur un cas particulier.

Définition 1.1.2. *Une* ***algèbre d'incidence généralisée*** *est une algèbre de convolution* $\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}} = \langle D_{\mathbb{ABC}}; +, \mathbf{0}, *\rangle$ *où* B *est une relation binaire sur un ensemble* X *(c'est-à-dire un sous-ensemble de* X^2*); et l'opération binaire* $\circ$ *est définie sur* N*, où* N *est une partie de* $\{((a,y),(y,b)) \in B^2 : a,b,y \in X,\ (a,b) \in B\}$ *et pour* $((a,y),(y,b)) \in N$*, on pose* $(a,y)\circ(y,b) = (a,b)$.

1.2. Centre d'une algèbre d'incidence généralisée

Dans cette partie, $\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}} = \langle D_{\mathbb{ABC}}; +, \mathbf{0}, *\rangle$ est une algèbre d'incidence généralisée, où B est une relation binaire transitive sur un ensemble X.

Définition 1.2.1. ***Le centre*** *de* $\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}}$*, noté* ***Cen(*** $\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}}$***)****, est défini par*

$$Cen(\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}}) = \{f \in D_{\mathbb{ABC}} :\ g*f = f*g,\ \forall g \in D_{\mathbb{ABC}}\}.$$

La notation suivante sera utilisée partout dans la thèse.

Définition 1.2.2. *Pour tout* $b \in \mathrm{B}$ *et pour tout* $x \in \mathrm{A}$*, on définit*

$$\ulcorner x \urcorner_b(t) = \begin{cases} x & si\ \ t = b \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Comme le Supp $(\ulcorner x \urcorner_b) = \{b\}$, cette application est un élément de l'algèbre de convolution $\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}}$. On note par $\mathbb{R}$ (respectivement $\mathbb{L}$) l'ensemble des annihilateurs à droite (respectivement à gauche) de $\langle A; \cdot\rangle$; c'est-à-dire l'ensemble des $a \in A$ tels que $x \cdot a = 0$ (respectivement $a \cdot x = 0$) pour tout $x \in A$. Comme d'habitude, on écrit $a < b$ si $a \leq b$ et $a \neq b$.

Théorème 1.2.3. *Soit* $(X; \leq)$ *; où* $\leq$ *est une relation transitive et reflexive sur* X*,* $B \subseteq X^2$ *et* $N \subseteq \{((a,b),(b,c)) :\ a \leq b \leq c\}$ *tel que pour tous* $((a,b),(b,c)) \in N$*,* $(a,b)\circ(b,c) = (a,c)$*.* $f \in Cen(\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}})$ *si et seulement si*

1) Si $a < b$ et $((c,a),(a,b)) \in \mathrm{N}$ pour un $c \leq a$ alors $f(a,b) \in \mathbb{R}$,

2) Si $a < b$ et $((a,b),(b,c)) \in \mathrm{N}$ pour un $c \geq b$ alors $f(a,b) \in \mathbb{L}$,

3) Si $a \in X$ est tel que $f(a,a) \notin \mathbb{L}$ et $((a,a),(a,b)) \in \mathrm{N}$ pour un $b > a$ alors $((a,b),(b,b)) \in \mathrm{N}$ et $xf(b,b) = f(a,a)x$ pour tout $x \in A$,

4) Si $b \in X$ est tel que $f(b,b) \notin \mathbb{R}$ et $((a,b),(b,b)) \in \mathrm{N}$ pour un $a < b$ alors $((a,a),(a,b)) \in N$ et $f(a,a)x = xf(b,b)$ pour tout $x \in A$.

5) Si $a < b$, $((a,a),(a,b)) \in \mathrm{N}$ et $((a,b),(b,b)) \in \mathrm{N}$, alors $f(a,a) \in \mathbb{L}$ si et seulement si $f(b,b) \in \mathbb{R}$.

Preuve : $(\Rightarrow)$ Soit $f \in Cen(\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}})$.

1) Soit $c \leq a < b$, $((c,a),(a,b)) \in \mathrm{N}$ et $x \in A$. Alors $f * \ulcorner x \urcorner_{(c,a)} = \ulcorner x \urcorner_{(c,a)} * f$. Pour (c,b) on obtient

$$\sum_{((c,u),(u,b))\in N} f(c,u)\ulcorner x \urcorner_{(c,a)}(u,b) = \sum_{((c,t),(t,b))\in N} \ulcorner x \urcorner_{(c,a)}(c,t)f(t,b). \qquad (2)$$

Ici $\ulcorner x \urcorner_{(c,a)}(u,b) = 0$ pour tout $u \in X$ tandis que $\ulcorner x \urcorner_{(c,a)}(c,t)$ est égal à x pour $t = a$ et 0 sinon. Alors l'équation (2) se réduit à $0 = xf(a,b)$ pour tout $x \in A$, ce qui démontre que $f(a,b) \in \mathbb{R}$.

2) Soit $a < b \leq c$, $((a,b),(b,c)) \in N$ et $x \in A$. Alors $f * \ulcorner x \urcorner_{(b,c)} = \ulcorner x \urcorner_{(b,c)} * f$ évaluée à (a,c) donne

$$\sum_{((a,u),(u,c))\in N} f(a,u)\ulcorner x \urcorner_{(b,c)}(u,c) = \sum_{((a,t),(t,c))\in N} \ulcorner x \urcorner_{(b,c)}(a,t)f(t,c). \qquad (3)$$

Ici $\ulcorner x \urcorner_{(b,c)}(u,c) = x$ pour $u = b$ et 0 sinon tandis que $\ulcorner x \urcorner_{(b,c)}(a,t) = 0$ pour tout $t \in X$. Alors, l'équation (3) se réduit à $f(a,b)x = 0$ pour tout $x \in A$, ce qui démontre que $f(a,b) \in \mathbb{L}$.

Pour 3)-5), nous utilisons $f * \ulcorner x \urcorner_{(a,b)} = \ulcorner x \urcorner_{(a,b)} * f$ évaluée à (a,b) :

$$\sum_{((a,u),(u,b))\in N} f(a,u)\ulcorner x \urcorner_{(a,b)}(u,b) = \sum_{((a,t),(t,b))\in N} \ulcorner x \urcorner_{(a,b)}(a,t)f(t,b). \qquad (4)$$

3) Soit $a < b$ tels que $f(a,a) \notin \mathbb{L}$ et $((a,a),(a,b)) \in N$. Comme plus haut,(4) se réduit à

$$f(a,a)x = \begin{cases} xf(b,b) & \text{si} \quad ((a,b),(b,b)) \in N, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \qquad (5)$$

Par hypothèse $f(a,a) \notin \mathbb{L}$ et donc $f(a,a)x' \neq 0$ pour un $x' \in A$. Alors (5) montre que $((a,b),(b,b)) \in N$ et $f(a,a)x = xf(b,b)$ pour tout $x \in A$.

4) Soit $a < b$ tels que $f(b,b) \notin \mathbb{R}$ et $((a,b),(b,b)) \in N$. Alors (4) se réduit à

$$xf(b,b) = \begin{cases} f(a,a)x & \text{si} \quad ((a,a),(a,b)) \in N, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{6}$$

Par hypothèse $x'f(b,b) \neq 0$ pour un $x' \in A$ et donc $((a,a),(a,b)) \in N$ et $f(a,a)x = xf(b,b)$ pour tout $x \in A$.

5) Soit $a < b$, $((a,a),(a,b)) \in N$ et $((a,b),(b,b)) \in N$. Alors (4) se réduit à $f(a,a)x = xf(b,b)$ pour tout $x \in A$. On voit bien que $f(a,a) \in \mathbb{L}$ entraîne $xf(b,b) = 0$ pour tout $x \in A$, c'est-à-dire $f(b,b) \in \mathbb{R}$. Le même argument montre que $f(b,b) \in \mathbb{R} \Rightarrow f(a,a) \in \mathbb{L}$.

($\Leftarrow$) Supposons que $f \in D$ satisfait 1)-5). Soit $g \in D$ et $a < b$ arbitraires. Posons

$$\alpha = \sum_{((a,u),(u,b)) \in N} f(a,u)g(u,b). \tag{7}$$

Pour $a < u \leq b$ avec $((a,u),(u,b)) \in N$ par 2) nous avons $f(a,u) \in \mathbb{L}$ et donc $f(a,u)g(u,b) = 0$. Alors (7) se réduit à

$$\alpha = \begin{cases} f(a,a)g(a,b) & \text{si} \quad ((a,a),(a,b)) \in N, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{8}$$

Posons

$$\beta = \sum_{((a,t),(t,b)) \in N} g(a,t)f(t,b). \tag{9}$$

Pour $a \leq t < b$ avec $((a,t),(t,b)) \in N$ par 1) nous avons $f(t,b) \in \mathbb{R}$ et donc $g(a,t)f(t,b) = 0$. Alors (9) se réduit à

$$\beta = \begin{cases} g(a,b)f(b,b) & \text{si} \quad ((a,b),(b,b)) \in N, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{10}$$

(i) Supposons que $\alpha \neq 0$. Alors (8) montre que $((a,a),(a,b)) \in N$ et $f(a,a)g(a,b) \neq 0$. Il s'ensuit que $f(a,a) \notin \mathbb{L}$ et 3) donne $((a,b),(b,b)) \in N$ et $xf(b,b) = f(a,a)x$ pour tout $x \in A$. En particulier, pour $x = g(a,b)$ on a $f(a,a)g(a,b) =$

$g(a,b)f(b,b)$ et $\alpha = \beta$ par (10).

(ii) Le même argument (basé sur 4)) montre que $\beta \neq 0 \Rightarrow \alpha = \beta$.

Alors (8) et (10) entraînent $\alpha = \beta$. Ceci prouve que $f \in Cen(\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}})$ $\square$

Corollaire 1.2.4. *Si* $((a,a),(a,b)) \in N$, $((a,b),(b,b)) \in N$ *pour tous* $a < b$, *alors,* $f \in Cen(\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}})$ *si et seulement si pour tous* $a < b$

a) $f(a,b)$ *est un annulateur de* A,

b) $f(a,a) \notin \mathbb{L}$ *ou* $f(b,b) \notin \mathbb{R} \;\Rightarrow\; xf(b,b) = f(a,a)x$, *pour tout* $x \in A$,

c) $f(a,a) \in \mathbb{L} \;\Leftrightarrow\; f(b,b) \in \mathbb{R}$.

1.3. Eléments Idempotents

Soit $\mathbb{A}$ un anneau commutatif et $(X_i; \leq_i)$ deux ensembles ordonnés localement finis, $i = 1, 2$. Si les algèbres d'incidence $I(X_1, A)$ et $I(X_2, A)$ sont des anneaux isomorphes, qu'en est il des ensembles ordonnés $(X_1; \leq_1)$ et $(X_2; \leq_2)$? Ceci est un des problèmes étudiés en profondeur en algèbres d'incidence classiques. Ce problème a été soulevé et résolu par R. Stanley dans le cas où $\mathbb{A}$ est un corps. Son idée de base était d'utiliser des systèmes particuliers d'idempotents de $I(X_i, A)$ $(i = 1, 2)$, un système maximal d'idempotents primitifs et orthogonaux. Pour un anneau commutatif et unitaire $\mathbb{A}$ dont les seuls idempotents sont 0 et 1, le problème est aussi résolu en utilisant des familles d'idempotents centraux.

Dans cette section, nous caractérisons les idempotents d'une algèbre d'incidence généralisée. $\leq$ est une relation binaire sur un ensemble X. On suppose que $\langle A; \cdot \rangle$ possède un élément neutre 1 ; 0 et 1 sont les seuls idempotents de $\langle A; \cdot \rangle$ (un exemple d'un tel $\mathbb{A}$ est tout domaine d'intégrité) ; et $\langle A; +, 0 \rangle$ est tel que pour tous $x, y \in A$,

$$x + y = x \Leftrightarrow y = 0, \tag{11}$$

et pour tout $x \in A$, il existe un élément unique y satisfaisant

$$x + x + y = x. \tag{12}$$

La solution unique y est alors notée $-x$.

Remarque : Si $\mathbb{A} = \langle A; +, 0 \rangle$ est "cancellative" (c'est-à-dire si pour tous $x, y, z \in A$, l'équation $x + y = x + z$ implique $y = z$), alors A est un groupe.

Nous supposons que pour tous $b \leq c$, on a $\big((b,b),(b,c)\big)$, $\big((b,c),(c,c)\big) \in N$ et $\big((b,t),(t,b)\big) \in N \Leftrightarrow b = t$. Pour $a < b$ et $e \in D_{\mathbb{ABC}}$, on note par E_{ab} la somme

$$\mathrm{E_{ab}} = \sum_{((a,t),(t,b)) \in N, a \neq t \neq b} e(a,t)e(t,b).$$

Définition 1.3.1. *Un élément e de $D_{\mathbb{ABC}}$ est dit* ***idempotent*** *si $e^2 := e * e = e$.*

Proposition 1.3.2. *On suppose que $\mathbb{A}$ vérifie (11) et (12) ; et N vérifie les conditions de la remarque précédente. Alors, $e \in D_{\mathbb{ABC}}$ est un idempotent de $\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}}$ si et seulement si*

1) $e(b,b) \in \{0,1\}$ pour tout $b \in \mathrm{X}$.

2) Pour tous $b < c$,

a): $e(b,b) = e(c,c) = 0 \Rightarrow \mathrm{E_{bc}} = e(b,c)$,

b): $e(b,b) = e(c,c) = 1 \Rightarrow \mathrm{E_{bc}} = -e(b,c)$,

c): $\{e(b,b), e(c,c)\} = \{0,1\} \Rightarrow \mathrm{E_{bc}} = 0$.

Preuve : $(\Rightarrow)$ Soit e un idempotent de $D_{\mathbb{ABC}}$.

1) Soit $b \in X$, $\big((b,b),(b,b)\big) \in \mathrm{N}$. Alors

$$e(b,b) = (e * e)(b,b) = e(b,b)e(b,b)$$

car $\big((b,t),(t,b)\big) \in \mathrm{N} \Leftrightarrow t = b$. Donc $e(b,b)$ est un idempotent de $\langle \mathrm{A}; \cdot \rangle$. Ainsi, $e(b,b) \in \{0,1\}$ par hypothèse.

2) Soit $b < c$. Alors

$$e(b,c) = (e * e)(b,c) = e(b,b)e(b,c) + \mathrm{E_{bc}} + e(b,c)e(c,c). \tag{13}$$

D'après 1), $e(b,b)$ et $e(c,c)$ sont des éléments de $\{0,1\}$. Donc, si $e(b,b) = e(c,c) = 0$, alors $\mathrm{E_{bc}} = e(b,c)$, ce qui démontre a). Si $e(b,b) = e(c,c) = 1$, alors par (12) nous avons $\mathrm{E_{bc}} = -e(b,c)$, ce qui démontre b). Si $\{e(b,b), e(c,c)\} = \{0,1\}$, alors (13) et (11) entraînent $\mathrm{E_{bc}} = 0$.

$(\Leftarrow)$ Supposons que $e \in D$ satisfait 1) et 2) et montrons que e est idempotent. Soit $b \in X$. Par hypothèse, $\big((b,t),(t,b)\big) \in \mathrm{N} \Leftrightarrow t = b$ et par 1), $e(b,b) \in \{0,1\}$; donc $(e * e)(b,b) = e(b,b)e(b,b) = e(b,b)$. Soit $b < c$. Nous avons trois cas :

(1) Soit $e(b,b) = 0 = e(c,c)$. Alors, par a) et (13),

$$e(b,c) = 0 + e(b,c) + 0 = e(b,b) + \mathrm{E_{bc}} + e(c,c) = (e * e)(b,c).$$

(2) Soit $e(b,b) = 1 = e(c,c)$. Alors, par b), (12) et (13),

$$e(b,c) = e(b,c) - e(b,c) + e(b,c) = 1 \cdot e(b,c) + \mathrm{E_{bc}} + e(b,c) \cdot 1 = (e * e)(b,c).$$

(3) Soit $\{e(b,b); e(c,c)\} = \{0,1\}$. i) Si $e(b,b) = 1$ et $e(c,c) = 0$, alors,

$$e(b,c) = 1 \cdot e(b,c) = 1 \cdot e(b,c) + 0 + 0 = e(b.b) \cdot e(b,c) + \mathrm{E_{bc}} + e(b,c) \cdot e(c,c) = (e * e)(b,c).$$

ii) Si $e(b,b) = 0$ et $e(c,c) = 1$, de même $e(b,c) = (e * e)(b,c)$.

Donc $e = e * e$ et e est un idempotent de $\mathbb{D}_{\mathbb{AB}C}$. $\square$

Remarque : La famille des idempotents primitifs dans [St 70] est de la forme $\{e_x : \ x \in X \}$, où $e_x(a,b) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad a = b = x \\ 0 & \quad \text{sinon.} \end{cases}$

Nous montrons que pour une algèbre d'incidence généralisée, il peut exister un idempotent non nul, e, qui prend la valeur nulle sur la diagonale ; c'est-à-dire $e(x,x) = 0$ pour tout $x \in X$. On pose

$$J = \left\{ \frac{m}{2^n} : \ n, m \in \mathbb{Z}^+, 1 \leq m \leq 2^n \text{ et } (n > 0 \Rightarrow m \text{ impair}) \right\}.$$

Il est facile de voir que $J \subseteq [0,1] \cap \mathbb{Q}$, c'est-à-dire que J est un ensemble des nombres rationnels de l'intervalle $[0,1]$.

Théorème 1.3.3. *Supposons que $\langle A; \cdot \rangle$ possède un élément idempotent 1 distinct de 0. Alors $\mathbb{D}_{\mathbb{AB}C}$ admet un idempotent non nul e, tel que : $e(b,b) = 0$ pour tout $b \in \mathrm{X}$, si et seulement s'il existe $\{a_i, \ i \in J\} \subset \mathrm{X}$ tel que :*

a) Pour chaque $i = \frac{m}{2^n} \in J$,

$$\big((a_i, a_{i+2^{-n-2}}), (a_{i+2^{-n-2}}, a_{i+2^{-n-1}})\big) \in \mathrm{N} \tag{14}$$

$$\big((a_{i+2^{-n-2}}, a_{i+2^{-n-2}+2^{-n-3}}), (a_{i+2^{-n-2}+2^{-n-3}}, a_{i+2^{-n-1}})\big) \in \mathrm{N} \tag{15}$$

b)L'union des ensembles $\{(a_i, a_{i+2^{-n-2}}) : i \in J\}$, $\{(a_{i+2^{-n-2}}, a_{i+2^{-n-1}}) : i \in J\}$, $\{(a_{i+2^{-n-2}}, a_{i+2^{-n-2}+2^{-n-3}}) : i \in J\}$ et $\{(a_{i+2^{-n-2}+2^{-n-3}}, a_{i+2^{-n-1}}) : i \in J\}$ appartient à C.

Preuve : ($\Rightarrow$) : Soit e un idempotent non nul de D tel que $e(b,b)=0$ pour tout $(b,b)\in$ B. Comme e est non nul, alors il existe $a_0<a_1$ tels que $e(a_0,a_1)\neq 0$. Or $e*e=e$ d'où

$$\sum_{((a_0,t),(t,a_1))\in \mathrm{N}} e(a_0,t)e(t,a_1)\neq 0.$$

Ainsi il existe $a_{\frac{1}{2}}$ tel que $e(a_0,a_{\frac{1}{2}})\neq 0$, $e(a_{\frac{1}{2}},a_1)\neq 0$ et $((a_0,a_{\frac{1}{2}}),\ (a_{\frac{1}{2}},a_1))\in$ N. De même, pour $(a_0,a_{\frac{1}{2}})$ et $(a_{\frac{1}{2}},a_1)$, il existe $a_{\frac{1}{4}}$ et $a_{\frac{3}{4}}$ tels que

$$e(a_0,a_{\frac{1}{4}})\neq 0,\ e(a_{\frac{1}{4}},\ a_{\frac{1}{2}})\neq 0,\ e(a_{\frac{1}{2}},a_{\frac{3}{4}})\neq 0,\ e(a_{\frac{3}{4}},a_1)\neq 0,$$

$$((a_0,a_{\frac{1}{4}}),\ (a_{\frac{1}{4}},a_{\frac{1}{2}})),\ et\ ((a_{\frac{1}{2}},\ a_{\frac{3}{4}}),(a_{\frac{3}{4}},a_1))\in \mathrm{N}.$$

Continuant cette construction, on obtient ainsi un ensemble $\{a_i : i\in \mathrm{J}\}$ avec les propriétés énoncées dans le théorème.

($\Leftarrow$) Supposons construit un sous-ensemble $\{a_i : i\in \mathrm{J}\}$ satisfaisant les conditions du théorème. Nous construisons un idempotent $e\in D_{\mathbb{ABC}}$. Posons

$$e(x,y)=\begin{cases} 1 & \text{si } (x,y) \text{ est une paire qui figure dans (14) ou (15) ,}\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

On a que $e(b,b)=0$ pour tout $b\in X$. Nous montrons que e est un idempotent. Soit $x,y\in B$, $x<y$. D'abord soit $e(x,y)\neq 0$. Alors $e(x,y)=1$ et il existe z unique tels que $((x,z),(z,y))$ est une des paires dans (14) ou (15). Alors $(e*e)(x,y)=e(x,z)e(z,y)=1.1=1=e(x,y)$. Soit $(e*e)(x,y)\neq 0$. Alors il existe $((x,z),(z,y))\in N$ tel que $e(x,z)=e(z,y)=1$. Alors $((x,z),(z,y))$ est une des paires de (14) ou (15) et donc $e(x,y)=1$. Le support de e est un ensemble de $\mathcal{C}$. Donc e est un idempotent non nul de $\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}}$ dont la diagonale est nulle. □

1.4. Elément unité

Pour l'algèbre d'incidence généralisée de cette section, B est une relation binaire réflexive sur un ensemble X et telle que pour tous $s,x\in X$,

$$\big((s,x),(x,s)\big)\in N \Leftrightarrow x=s.$$

Proposition 1.4.1. *On suppose que pour tout* (s,t) *de* B*, on a que* $((s,s),(s,t))\in$ N*. Alors* $e\in D_{\mathbb{ABC}}$ *est une unité à gauche dans* $\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}}$ *si et seulement si*

i) Si $s\neq t$ *et pour un* $u\in X$, $\big((s,t),(t,u)\big)\in$ N*, alors* $e(s,t)$ *est un annulateur à* *gauche de* $\langle A;\cdot\rangle$,

ii) $e(s,s)$ *est une unité à gauche de* $\langle A;\cdot\rangle$ *pour tout* $s \in X$.

Preuve : $(\Rightarrow)$ Soit $e \in D_{\mathbb{ABC}}$ une unité à gauche dans $\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}}$.

i) Soit $((s,t),(t,u)) \in \mathrm{N}$ et $s \neq t$. Pour tous $a \in \mathrm{A}$ et $b \in \mathrm{B}$, $\ulcorner a \urcorner_b(x) = a$ si $x = b$ et $\ulcorner a \urcorner_b(x) = 0$ sinon. Soit $a \in A$, arbitraire. Comme e est une unité à gauche de $\mathbb{D}$ et $s \neq t$, alors

$$\begin{aligned} 0 = \ulcorner a \urcorner_{(t,u)}(s,u) &= (e * \ulcorner a \urcorner_{(t,u)})(s,u) = \textstyle\sum_{((s,x),(x,u))\in \mathrm{N}} e(s,x)\ulcorner a \urcorner_{(t,u)}(x,u) \\ &= e(s,t)\ulcorner a \urcorner_{(t,u)}(t,u) = e(s,t)a. \end{aligned}$$

ii) Soit $(s,u) \in B$ et $a \in \mathrm{A}$ arbitraire. Alors

$$\begin{aligned} a = \ulcorner a \urcorner_{(s,u)}(s,u) &= (e * \ulcorner a \urcorner_{(s,u)})(s,u) = \textstyle\sum_{((s,t),(t,u))\in \mathrm{N}} e(s,t)\ulcorner a \urcorner_{(s,u)}(t,u) \\ &= e(s,s)\ulcorner a \urcorner_{(s,u)}(s,u) = e(s,s)a. \end{aligned}$$

$(\Leftarrow)$ Supposons que e satisfait i) et ii). Soit $f \in D_{\mathbb{ABC}}$ et $(s,t) \in \mathrm{B}$ arbitraire.

a) Soit $s \neq t$. Alors par hypothèse, $\big((s,s),(s,t)\big) \in N$ et

$$\begin{aligned} (e*f)(s,t) &= \textstyle\sum_{((s,x),(x,t))\in \mathrm{N}} e(s,x)f(x,t) \\ &= e(s,s)f(s,t) + \textstyle\sum_{((s,x),(x,t))\in \mathrm{N}, x\neq s} e(s,x)f(x,t) = f(s,t). \end{aligned}$$

b) Soit $s = t$. Alors par l'hypothèse et ii), on a que $(e*f)(s,s) = e(s,s)f(s,s) = f(s,s)$. Donc $e * f = f$. ☐

Proposition 1.4.2. *On suppose que* $((s,t),(t,t)) \in \mathrm{N}$ *pour tout* $(s,t) \in \mathrm{B}$. *Alors* $r \in D_{\mathbb{ABC}}$ *est une unité à droite de* $\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}}$ *si et seulement si*

i) Si $t \neq u$ *et pour un* $t \in X$, $((s,t),(t,u)) \in \mathrm{N}$, *alors* $r(t,u)$ *est un annulateur à droite de* $\langle A;\cdot\rangle$,

ii) $r(s,s)$ *est une unité à droite de* $\langle A;\cdot\rangle$ *pour tout* $s \in \mathrm{X}$.

Preuve : Elle se fait de la même façon que celle de la proposition précédente.
☐

Théorème 1.4.3. $e \in D_{\mathbb{ABC}}$ *est l'élément unité de* $\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}}$ *si et seulement si*

i) $\langle A;\cdot\rangle$ *est unitaire (d'élément unité* 1 *),*

ii) $e(s,s) = 1$ *est l'unité de* $\mathbb{A}$, *pour tout* $s \in \mathrm{X}$,

iii) Si $((s,t),(t,u)) \in \mathrm{N}$ *ou* $((u,s),(s,t)) \in \mathrm{N}$ *et* $s \neq t$, *alors* $e(s,t) = 0$.

Preuve : Elle découle des deux propositions précédentes et du fait que 0 est le seul annulateur pour $\langle A;\cdot\rangle$ unitaire. ☐ **Remarque** : Supposons que pour chaque $(s,t) \in B$, $s \neq t$, on a que $((s,t),(t,u)) \in N$, $((v,s),(s,t)) \in N$ pour un u et un v. Alors pour que $D_{\mathbb{ABC}}$ possède un élément unité, il faut et il suffit que la diagonale de B, c'est-à-dire l'ensemble des couples (b,b), avec $b \in X$ soit dans $\mathcal{C}$ et que$\langle A; \cdot \rangle$ soit unitaire. Cet élément unité est alors noté δ et est défini par :

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 1 & si \;\; x = y \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soient $p, q \in$ B ; $a \in$ A. On définit une application, que nous notons $\delta_{pq}(a)$ de $B \times B \times A$ dans A par

$$\delta_{pq}(a) = \begin{cases} a & si \; p = q \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Pour la proposition suivante, $\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}}$ est une algèbre de convolution généralisée.

Proposition 1.4.4. *(Rosenberg, [Ro 86]) On suppose que $\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}}$ est une algèbre de convolution généralisée. Soit $e \in D_{\mathbb{ABC}}$. Alors e est une unité à gauche (respectivement à droite) si et seulement si $\sum_{xop=q} e(x)a = \delta_{pq}(a)$ (respectivement $\sum_{pox=q} ae(x) = \delta_{pq}(a)$).*

Corollaire 1.4.5. *Soit $e \in D_{\mathbb{ABC}}$. e est l'élément unité de $D_{\mathbb{ABC}}$ si et seulement si $\sum_{xop=q} e(x)a = \delta_{pq}(a)$ et $\sum_{pox=q} ae(x) = \delta_{pq}(a)$.*

Remarque Si pour une algèbre de convolution, l'ensemble N est la diagonale, c'est-à-dire N $= \{(p,p) : \; p \in$ B $\}$, et $p \circ p = p$; alors, e est l'élément unité de l'algèbre de convolution si et seulement si pour tout $p \in$ B, $e(p)$ est l'unité de $\langle A; \cdot \rangle$.

Dans le cas où $\mathbb{B}$ n'est pas réflexive, nous ne parvenons pas à caractériser l'élément unité de l'algèbre d'incidence généralisée.

Chapitre 2

CONGRUENCES DE $\mathbb{D}_{\mathbb{AB}C}$

Nous considérons les algèbres de convolution comme définies par Rosenberg [Ro 86]. La notion de S-relation d'équivalence pour les algèbres d'incidence classiques est définie dans [OS 97]. Nous montrons comment elle se généralise dans le cas des algèbres d'incidence généralisées.

Pour un anneau R, le radical de Jacobson, $Rad(R)$ est défini comme l'intersection de ses idéaux maximaux. Lorsque $(X;\leq)$ est un ensemble ordonné localement fini et K un corps, [DRS 71] montre que le radical de Jacobson de l'algèbre d'incidence $I(X;K)$ est

$$Rad(I(X,K)) = \{f \in I(X,K) : \ f(x,x) = 0, \ \forall x \in X\}.$$

Plus tard, Nachev dans [Na 77] montre que lorsque le corps est remplacé par un anneau semi-simple (c'est un anneau où tout R-module est projectif) et $(X;\leq)$ est un ensemble préordonné (la relation $\leq$ est reflexive et transitive) localement fini, alors

$$Rad(I(X,R)) = \{f \in I(X,R) : \ \overline{x} = \overline{y} \Rightarrow f(x,y) = 0, \ \forall x,y \in X\};$$

où $\overline{x}$ est la classe de la relation d'équivalence induite par $\leq$ de x sur $(X;\leq)$. Ensuite, [Vo 80] montre que lorsque R est un anneau et $(X;\leq)$ un ensemble préordonné,

$$Rad(I(X,R)) = \{f \in I(X,R) : \ f(x,y) \in Rad(R) \ \text{ si}, \ x \leq y \leq x\}.$$

Nous définissons la notion parallèle pour les algèbres de convolution généralisées et donnons une description partielle de celle-ci. Pour la convénience du lecteur, nous répétons la définition d'une algèbre de convolution généralisée.

Nous désignons par :

• $\mathbb{A} = \langle A; +, ., 0\rangle$ où A est un ensemble de cardinalité strictement supérieure à 1. $\langle A; +, 0\rangle$ est un monoïde abélien.

$\langle A; .\rangle$ est un groupoïde (i.e. "$\cdot$" est une opération binaire sur A) tel que $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ pour tout $a \in A$.

• $\mathbb{B} = \langle B; \circ\rangle$ est un groupoïde partiel, c'est-à-dire il existe $\emptyset \neq N \subset B^2$ tel que $\circ : (x_1, x_2) \longmapsto x_1 \circ x_2$ est une application de N vers B.

• $\mathcal{C}$ est une famille de sous-ensembles de B vérifiant les propriétés i) et iii) :

i) $\mathcal{C}$ est héréditaire i.e., $Z \subseteq X \in \mathcal{C} \Rightarrow Z \in \mathcal{C}$;

$X, Y \in \mathcal{C} \Rightarrow X \cup Y \in \mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ contient tous les singletons de B.

ii) $X, Y \in \mathcal{C} \Rightarrow\ X \circ Y := \{x \circ y \mid (x, y) \in N \cap (X \times Y)\} \in \mathcal{C}$.

iii) Si $b \in B$ et $X, Y \in \mathcal{C}$, alors $\{(x, y) \in N \cap (X \times Y) :\ x \circ y = b\}$ est fini.

Soit θ une relation d'équivalence sur B. On note par T l'ensemble dont les éléments sont des classes d'équivalence de θ appartenant à $\mathcal{C}$; c'est-à-dire $\mathrm{T} = \mathcal{C} \cap (\mathrm{B}/\theta)$.

On pose

$$\mathrm{D}^{(\theta)}_{\mathbb{A}\mathbb{B}\mathcal{C}} = \{f \in \mathrm{D}_{\mathbb{A}\mathbb{B}\mathcal{C}} :\ x\theta y \Rightarrow f(x) = f(y)\ \}.$$

Donc $f \in \mathrm{D}^{(\theta)}_{\mathbb{A}\mathbb{B}\mathcal{C}}$ si et seulement si f est constante sur chaque classe d'équivalence de θ. Pour $f \in \mathrm{D}^{(\theta)}_{\mathbb{A}\mathbb{B}\mathcal{C}}$, son support est une réunion des éléments de T.

Soit $b \in \mathrm{B}$. On pose $\mathrm{F}_b = \{(u, v) \in \mathrm{N} :\ u \circ v = b\ \}$; alors $\{\mathrm{F}_b :\ b \in B\}$ est une famille d'ensembles deux à deux disjoints dont la réunion est N.

2.1. S-RELATION D'ÉQUIVALENCE.

Définition 2.1.1. *Pour $a \in \mathrm{A}$ et $m \in \mathbb{N}$, on pose $ma = \underbrace{a + a + a + \cdots + a}_{m\ fois}$.*

*Un élément a de A est de **caractéristique zéro** si $ma = na \Rightarrow m = n$.*

*L'élément $a \in \mathrm{A}$ **n'est pas de caractéristique zéro** s'il existe des entiers uniques $m_a \geq 0$ et $n_a \geq 1$ tels que*

i) $1a, 2a, \cdots, (m_a + n_a - 1)a$ sont deux à deux distincts,

ii) $pa = (p - n_a)a$ pour tout entier $p \geq m_a + n_a$.

*Dans ce cas, le couple (m_a, n_a) est appelé la **caractéristique de** a.*

Remarque : Si $\langle \mathrm{A}; +, 0\rangle$ est cancellative (c'est-à-dire $x+y=x+z \Rightarrow y=z$), la notion de caractéristique habituelle est donné par le couple $(0, n_a)$ pour désigner la caractéristique d'un élément a de caractéristique non nulle.
Soit H un sous ensemble non vide de A n'ayant pas d'éléments de caractéristique zéro. On pose $\Pi(\mathrm{H}) = \{m_h + n_h : \; h \in \mathrm{H}\ \}$. Alors, si $\Pi(\mathrm{H})$ a un plus grand élément, μ, alors $\Pi(\mathrm{H})$ est un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}^* = \mathbb{Z}^+ \setminus \{0\}$ et donc, le plus petit multiple commun de $\{n_h : \; h \in \mathrm{H}\ \}$ est bien défini.

Définition 2.1.2. *Soit θ une relation d'équivalence sur* B *et* $\mathrm{T} = C \cap (B/\theta)$. *Soit* $\mathrm{H} = \{ab : a, b \in \mathrm{A}, \; ab \neq 0\ \}$. *On suppose que* H *est non vide. On dit que θ est une* ***S-relation d'équivalence*** *si pour tous* $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathrm{T}$ *et pour tous $b\theta b'$, la propriété suivante est vérifiée : on note par x la cardinalité* $\mid \mathrm{F_b} \cap (\mathrm{P} \times \mathrm{Q}) \mid$ *et on pose* $x' = \mid \mathrm{F_{b'}} \cap (\mathrm{P} \times \mathrm{Q}) \mid$ *(notons que $x, x' \in \mathbb{Z}^+$). Si $x \neq x'$, alors* $\Pi(\mathrm{H})$ *est fini et*

$$min\{x, x'\} \geq m, \; x \equiv x'(mod\, n);$$

avec $m = max\{m_h, \; h \in \mathrm{H}\ \}$ *et n le plus petit multiple commun de* $\{n_h : \; h \in \mathrm{H}\ \}$.
Théorème 2.1.3. *Soit* $\mathrm{H} = \{ab : a, b \in \mathrm{A}, ab \neq 0\ \}$ *non vide et θ une relation d'équivalence sur* B. *Alors* ${\mathbb{D}^{(\theta)}}_{\mathbb{ABC}}$ *est une sous-algèbre de* $\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}}$ *si et seulement si θ est une S-relation d'équivalence.*

Preuve : Rappelons que $D^{(\theta)}_{\mathbb{ABC}} = \{f \in \mathrm{D_{ABC}} : \; x\theta y \Rightarrow f(x) = f(y)\ \}$.
($\Rightarrow$) Supposons que ${\mathbb{D}^{(\theta)}}_{\mathbb{ABC}}$ est une sous-algèbre de $\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}}$. Soit $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathrm{T}$, $b\theta b'$ et

$$x = \mid \mathrm{F_b} \cap (\mathrm{P} \times \mathrm{Q}) \mid, \;\text{ et }\; x' = \mid \mathrm{F_{b'}} \cap (\mathrm{P} \times \mathrm{Q}) \mid.$$

A noter que x et x' sont des nombres car $\mathrm{F_b}$ et $\mathrm{F_{b'}}$ sont des ensembles finis par (iii). Soit $h \in \mathrm{H}$ tel que $h = ac \neq 0$. On définit $f, g \in A^B$ par

$$f(x) = \begin{cases} a & si \quad x \in \mathrm{P}, \\ 0 & sinon, \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} c & si \quad x \in \mathrm{Q}, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Les fonctions f et g sont dans $D^{(\theta)}_{\mathbb{ABC}}$. Donc $f * g$ est aussi un élément de $D^{(\theta)}_{\mathbb{ABC}}$, car ${\mathbb{D}^{(\theta)}}_{\mathbb{ABC}}$ est une sous-algèbre de $\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}}$. Par définition,

$$(f * g)(b) = \sum_{u \circ v = b} f(u)g(v) = \sum_{(u,v) \in \mathrm{F_b} \cap (\mathrm{P} \times \mathrm{Q})} f(u)g(v) = \sum_{(u,v) \in \mathrm{F_b} \cap (\mathrm{P} \times \mathrm{Q})} ac = x(ac).$$

De même, $(f * g)(b') = x'(ac)$. De plus $b\theta b'$ implique $(f * g)(b) = (f * g)(b')$ et donc $x(ac) = x'(ac)$. Ainsi, pour tout $h \in \mathrm{H}$ on a $xh = x'h$.

Lemme 2.1.4. *Soit $x \neq x'$. Alors*

a) Tout élément de H *est de caractéristique non zéro,*

b) $\Pi(\mathrm{H})$ *a un plus grand élément μ,*

et c) $max\{x, x'\} \geq \mu$.

Preuve du lemme :

a) Par la contraposée, supposons qu'il existe un élément h de H de caractéristique zéro. Alors , $xh = x'h$ entraine que $x = x'$.

b) Par contraposée, supposons que $\Pi(\mathrm{H})$ n'a pas un plus grand élément. Alors, il existe $h \in \mathrm{H}$ tel que $m_h + n_h > max\{x, x'\}$. Comme $xh = x'h$, par définition de la caractéristique, on a $x = x'$. Finalement

c) Par contraposée, supposons que $max\{x, x'\} < \mu$. Alors, par définition de la caractéristique, on a $x = x'$. $\square$

Soit $m = max\{m_h : h \in \mathrm{H}\ \}$. Alors, il existe $v \in \mathrm{H}$ tel que $m = m_v$. Soit n le plus petit multiple commun de $\{n_h : h \in \mathrm{H}\ \}$. Sans perdre de généralité, nous pouvons supposer que $x' > x$. Montrons que

$$m = m_v = max\{m_h : h \in \mathrm{H}\ \} \leq x = min\{x, x'\}.$$

Par la contraposée, supposons que $x < m_v \leq \mu$. Comme $x < x'$, et par définition de la caractéristique, on a $x' \geq \mu$. D'où $x' \geq m_v + n_v$ et $x' - m_v \geq 0$. Ainsi, il existe $q, r \in \mathbb{N}$ avec $0 \leq r < n_v$ et $x' = m_v + qn_v + r$. On a montré $x'v = (x' - qn_v)v = (m_v + r)v$. On a ainsi $x'v = xv = (m_v + r)v$. Comme $x < m_v$, on a $x < m_v + n_v - 1$, $m_v + r \leq m_v + n_v - 1$ et $xv = (m_v + r)v$.

Montrons que $x \equiv x'(mod\ n)$. On a $x' > x \geq max\{m_h, h \in \mathrm{H}\}$. Ainsi, $x' > x \geq m_h$ pour tout $h \in \mathrm{H}$ Il existe donc $q, q', r, r' \in \mathbb{N}$, $0 \leq r < n_h$, $0 \leq r' < n_h$ avec

$$x = m_h + qn_h + r \text{ et } x' = m_h + q'n_h + r';$$

d'où

$$x'h = (x' - q'n_h)h = (m_h + r')h \text{ et } xh = (x - qn_h)h = (m_h + r)h.$$

On a $xh = x'h$, donc $(m_h+r')h = (m_h+r)h$. Et par définition de la caractéristique, $r = r'$ et $x - x' = (q - q')n_h$.

($\Leftarrow$) Supposons que θ est une S-relation d'équivalence. Soit $f, g \in D^{(\theta)}_{\mathbb{A}\mathbb{B}C}$. Montrons que $f*g \in D^{(\theta)}_{\mathbb{A}\mathbb{B}C}$. Posons $\mathrm{X} = Supp(f)$ et $\mathrm{Y} = Supp(g)$. Comme $f, g \in D^{(\theta)}_{\mathbb{A}\mathbb{B}C}$, les ensembles X et Y s'écrivent comme union d'éléments de T : $\mathrm{X} = \cup \mathrm{U_i}$ et $\mathrm{Y} = \cup \mathrm{V_j}$, avec $\mathrm{U}_i, \mathrm{V}_j \in \mathrm{T} = \mathcal{C} \cap (\mathrm{B}/\theta)$. Soit $b, b' \in \mathrm{B}$ tels que $b\theta b'$. Alors

$$(f * g)(b) = \sum_{(r,s)\in \mathrm{F_b}\cap(\mathrm{X}\times\mathrm{Y})} f(r)g(s),$$

et

$$f * g(b') = \sum_{(r,s)\in \mathrm{F_{b'}}\cap(\mathrm{X}\times\mathrm{Y})} f(r)g(s).$$

On a $\mathrm{X} \times \mathrm{Y} = \cup \mathrm{U_i} \times \cup \mathrm{V_j} = \bigcup_{i,j} (\mathrm{U_i} \times \mathrm{V_j})$. Ainsi, $(f * g)(b) = (f * g)(b')$ dès que

$$\sum_{(r,s)\in \mathrm{F_b}\cap(\mathrm{U_i}\times\mathrm{V_j})} f(r)g(s) \;=\; \sum_{(r,s)\in \mathrm{F_{b'}}\cap(\mathrm{U_i}\times\mathrm{V_j})} f(r)g(s).$$

Posons $x = \mid \mathrm{F_b} \cap (\mathrm{U_i} \times \mathrm{V_j}) \mid$, $x' = \mid \mathrm{F_{b'}} \cap (\mathrm{U_i} \times \mathrm{V_j}) \mid$ et supposons que $x \leq x'$. On désigne par c_i, la valeur constante de f sur $\mathrm{U_i}$ et par d_j, la valeur constante de g sur $\mathrm{V_j}$ et on pose $h = c_i d_j$. Il suffit donc de montrer que $xh = x'h$. Par la contraposée et la symétrie supposons $x' > x$ et $h \neq 0$. Comme $h \in \mathrm{H}$, et θ est une S-relation d'équivalence, on a que $x > m$ et $x \equiv x'(mod\ n)$, avec $m = max\{m_h : h \in \mathrm{H}\}$, n le plus petit multiple commun de $\{n_h : h \in \mathrm{H}\}$ et (m_h, n_h) la caractéristique de h. Comme $x \equiv x'(mod\ n)$, alors pour h, on a que $x \equiv x'(mod\ n_h)$ et il existe donc $q' \in \mathbb{N}$ tel que $x' - x = q'n_h$. Comme $x > m \geq m_h$, il existe $q, r \in \mathbb{Z}$, avec $0 \leq r < n_h$ tel que $x - m_h = qn_h + r$. Ainsi,

$$x' = x + q'n_h = m_h + qn_h + r + q'n_h = m_h + (q' + q)n_h + r$$

et

$$x'h = (x' - q'n_h)h = (m_h + qn_h + r)h = xh.$$

Ainsi, $x'h = xh$ et $f * g \in D^{(\theta)}_{\mathbb{A}\mathbb{B}C}$. $\square$

Corollaire 2.1.5. *Soit* $(\mathrm{X}, \leq)$ *est un ensemble ordonné. Posons* $\mathrm{B} = \mathrm{X}^2$. *On suppose que*

• $\mathcal{C}$ *est une famille de sous-ensembles de* B *telle que* $\mathrm{Y} \in \mathcal{C}$ *entraine que pour tout* $(a, b) \in \mathrm{Y};\ a \leq b$.

• *Soit* $\mathbb{B} = \langle B; \circ \rangle$ *un groupoïde partiel avec* $N = \left\{ \Big((a, b), (b, c) \Big) : a \leq b \leq c \right\}$ *et pour* $\Big((a, b), (b, c) \Big) \in N$, *on a que* $((a, b) \circ (b, c)) = (a, c)$.

• *Soit* $\mathbb{A} = \langle A; +, \cdot, 0 \rangle$ *un anneau commutatif de caractéristique zéro,* $\mathrm{H} = \{ab : a, b \in \mathrm{A}, ab \neq 0\}$ *non vide et* θ *une relation d'équivalence sur* B. *Alors* ${\mathbb{D}^{(\theta)}}_{\mathbb{ABC}}$ *est une sous-algèbre de* $\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}}$ *si et seulement si* θ *est une S-relation d'équivalence.* $\square$

Remarque : Dans ces conditions, la définition d'une S-relation d'équivalence se réduit à la condition : pour tous $P, Q \in T$, pour tous $b, b' \in B$, tels que $b\theta b'$,

$$x = |F_b \cap (P \times Q)| = |F'_b \cap (P \times Q)|$$

car l'anneau est de caractéristique zéro. De plus, si $(b_1, b_2)\theta(b'_1, b'_2)$ et $b_1 \not\leq b_2$, alors $b'_1 \not\leq b'_2$. On constate ainsi qu'on peut restreindre θ sur l'ensemble des intervalles non nuls. $\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}}$ est tout simplement l'algèbre d'incidence sur X et A, et le corollaire se réduit à la proposition 1.3.5 page 20 dans [OS 97].

2.2. Radical de Jacobson de $\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}}$.

Pour un anneau $\mathbb{A}$, le radical de Jacobson sert à la caractérisation de deux algèbres d'incidence avec le même anneau $\mathbb{A}$ et isomorphes comme anneaux. (Voir [OS 97] pp 259). Il est bien connu et facile à vérifier que a) un idéal d'un anneau $\mathbb{A}$ est une classe d'équivalence d'une et une seule congruence de $\mathbb{A}$ (voir définition plus bas) contenant 0. Le radical de Jacobson d'un anneau peut être caractérisé de plusieurs façons (voir [SO 97] pp 168-170). Pour $\mathbb{A}$ qui n'est pas un anneau, nous avons pris pour le départ la caractérisation du radical de Jacobson comme l'intersection des congruences maximales de $\mathbb{A}$. Dans la suite de cette partie, pour une algèbre d'incidence généralisée $\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}}$, nous définissons le **radical de Jacobson**, $\mathcal{J}(\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}})$, comme l'intersection des congruences maximales de $\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}}$. Rota et Stanley ont pu montrer que le radical d'une algèbre d'incidence

$\underline{I}(\underline{X},\underline{R}) := \big(I(X,R);+,*,\cdot,0\big)$ est entièrement déterminé par le radical de l'anneau R. Plus précisement,

$$\mathcal{J}\Big(\underline{I}(\underline{X},\underline{R})\Big) = \{f \in \underline{I}(\underline{X},\underline{R}) \ : f(x,x) \in \mathcal{J}(\mathrm{R}),\ \forall x \in \mathrm{X}\ \}.$$

On donne un résultat analogue pour les algèbres d'incidence généralisées. Pour ce faire, nous montrons comment partir d'une congruence maximale de l'algèbre d'incidence généralisée et obtenir une congruence maximale de l'algèbre $\mathbb{A}$; et réciproquement.

Définition 2.2.1. *Une relation d'équivalence, θ, sur une algèbre $\mathbb{A} = \langle A;+,\cdot,\rangle$ est **une congruence sur** $\mathbb{A}$ si $a\theta b$ et $c\theta d$ impliquent $(a+c)\ \theta\ (b+d)$ et $(a\cdot c)\ \theta\ (b\cdot d)$.*

On suppose que B est une relation réflexive et transitive sur un ensemble X. Le groupoide partiel $\mathbb{B}$ est défini par $(x,y)\circ(y,b) = (x,b)$, avec $N \subseteq \{((a,b),(b,c)) : (a,b),(b,c) \in B\ \}$ et $((a,b),(b,a)) \in N \Leftrightarrow a = b$.

Remarque : Nous notons dans la suite $Con(\mathbb{A})$ l'ensemble des congruences de l'algèbre $\mathbb{A}$. En considérant chaque relation d'équivalence sur $\mathbb{A}$ comme un sous-ensemble de A^2, on peut ordonner $Con(\mathbb{A})$ par l'inclusion. Dans $(Con(\mathbb{A});\subseteq)$ la congruence A^2 (avec un seul bloc A) est le plus grand élément. On dit que $\theta \in Con(\mathbb{A})$ est **maximale** si $\theta \neq A^2$ et $\theta \subset \tau \subset A^2$, alors $\theta = \tau$ ou $\tau = A^2$, pour tout $\tau \in Con(\mathbb{A})$. En supposant l'axiome de Choix (AC), ou le lemme de Zorn équivalent à (AC), on a le résultat suivant (Voir [MMW 87], pp 27) :

Proposition 2.2.2. *Soit θ une congruence sur $\mathbb{A}$ et soit $(a,b) \in \mathrm{A}^2$ tel que $(a,b) \notin \theta$. Alors il existe une congruence maximale $\widetilde{\theta}$ sur $\mathbb{A}$ telle que $\theta \subseteq \widetilde{\theta} \subseteq \mathrm{A}^2 \setminus \{(a,b)\}$.*

Remarque : Pour $\mathrm{H} \subset \mathrm{B}$, on pose

$R_{\mathrm{H}} = \{(x,x) \in \mathrm{B} :\ \exists (x,y) \in \mathrm{H}\}$, $\mathbf{L}_{\mathrm{H}} = \{(y,y) \in \mathrm{B} :\ \exists (x,y) \in \mathrm{H}\}$.

Définition 2.2.3. *Une fonction f de $D_{\mathbb{ABC}}$ est dite **diagonale** si $f(x,y) = 0$ pour tous $x,y \in X$, $x \neq y$.*

Lemme 2.2.4. *On suppose que l'algèbre* $\mathbb{A}$ *est unitaire avec identité* 1. *Soit* θ *une congruence sur* $\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}}$ *telle que* $(p, \mathbf{0}) \in \theta$ *pour chaque fonction diagonale* p *de* $\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}}$. *Soit* $\mathrm{H} \in \mathcal{C}$ *tel que* $R_{\mathrm{H}} \in \mathcal{C}$ *ou* $\mathrm{L}_{\mathrm{H}} \in \mathcal{C}$. *Alors,* $f \in D_{\mathbb{ABC}}$ *avec* $Supp(f) \subseteq \mathrm{H}$ *satisfait* $(f, \mathbf{0}) \in \theta$.

Preuve : On écrira $f \ \theta \ g$ pour $(f, g) \in \theta$. Soit $\mathrm{H} \in \mathcal{C}$ tel que $R_{\mathrm{H}} \in \mathcal{C}$ ou $\mathrm{L}_{\mathrm{H}} \in \mathcal{C}$. Soit $f \in D_{\mathbb{ABC}}$ telle que $Supp(f) \subseteq \mathrm{H}$.
Soit $R_{\mathrm{H}} \in \mathcal{C}$. Soit $d \in A^B$ diagonale telle que $Supp(d) = R_H$ et $d(x, x) = 1$ pour chaque $(x, x) \in R_H$. Comme $R_H \in \mathcal{C}$ et d est diagonale, on a $d \in D_{\mathbb{ABC}}$ et par hypothèse $(d, \mathbf{0}) \in \theta$. Nous montrons que $g = d * f = f$. En effet, soit $(x, y) \in \mathrm{B}$. Alors pour tout $(x, y) \in B$,

$$g(x, y) = (d * f)(x, y) = \sum_{((x,t),(t,y)) \in \mathrm{N}} d(x, t) f(t, y) = d(x, x) f(x, y).$$

Si $(x, y) \in \mathrm{H}$, alors $(x, x) \in R_{\mathrm{H}}$ et $d(x, x) = 1$, d'où $g(x, y) = f(x, y)$. Si $(x, y) \notin \mathrm{H}$, alors $f(x, y) = 0$ car $Supp(f) \subseteq \mathrm{H}$ et $g(x, y) = 0$. Donc $g = f$. Comme $(d, \mathbf{0}) \in \theta$ et θ est une congruence, $(d * f, \mathbf{0} * f) = (f, \mathbf{0}) \in \theta$.
Soit $L_H \in \mathcal{C}$. Par un argument pareil, $(f, \mathbf{0}) \in \theta$. $\square$

Corollaire 2.2.5. *On suppose que* $\mathcal{C}$ *est tel que* $R_{\mathrm{H}} \in \mathcal{C}$ *ou* $\mathrm{L}_{\mathrm{H}} \in \mathcal{C}$ *pour tout* $\mathrm{H} \in \mathcal{C}$. *Soit* θ *une congruence de* $\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}}$ *telle que toute fonction diagonale* p *est dans la même classe d'équivalence que la fonction nulle* $\mathbf{0}$. *Alors* θ *est la plus grande congruence* $D^2_{\mathbb{ABC}}$.

Preuve : Soit θ une congruence de $\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}}$ telle que pour toute fonction $p \in D_{\mathbb{ABC}}$ diagonale, on a que $(p, \mathbf{0}) \in \theta$. Par définition, on sait que $Supp(f) \in \mathcal{C}$, pour chaque $f \in D_{\mathbb{ABC}}$. Ainsi, d'après le lemme précédent, on a $(f, \mathbf{0}) \in \theta$, pour chaque $f \in D_{\mathbb{ABC}}$. Donc pour tous $f, g \in D_{\mathbb{ABC}}$, par la transitivité et la symétrie de θ, $(f, g) \in \theta$ car $(f, \mathbf{0}) \in \theta$ et $(\mathbf{0}, g) \in \theta$. $\square$
Dans le cas où la relation B est un ordre localement fini sur un ensemble X, on a $\mathcal{C} = \mathcal{P}(X)$ et le résultat est vérifié.

Corollaire 2.2.6. *Soit* $\Delta = \{(x, x) \in \mathrm{B} : x \in \mathrm{X}\}$. *On suppose que* $\Delta \in \mathcal{C}$. *Soit* θ *une congruence de* $\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}}$ *telle que* $(p, \mathbf{0}) \in \theta$ *pour chaque* $p \in D_{\mathbb{ABC}}$ *diagonale. Alors* $\theta = D^2_{\mathbb{ABC}}$.

Remarque : Soit $x \in \mathrm{X}$ et τ une congruence de $\mathbb{A}$. Pour tous $f, g \in D_{\mathbb{A}\mathbb{B}C}$, on définit une relation binaire sur $\mathbb{D}_{\mathbb{A}\mathbb{B}C}$, notée τ_x, par $(f,g) \in \tau_x$ si $(f(x,x), g(x,x)) \in \tau$.

Lemme 2.2.7. *Soit $x \in \mathrm{X}$ et τ une congruence de $\mathbb{A}$. Alors τ_x est une congruence de $\mathbb{D}_{\mathbb{A}\mathbb{B}C}$.*

Preuve : L'application $\varphi : D \to A$ définie par $f \mapsto f(x,x)$ est un homomorphisme de $\mathbb{D}$ sur $\mathbb{A}$. Pour l'opération $+$, c'est évident. Pour le produit, soit $f, g \in D$. Alors

$$\varphi(f * g) = (f * g)(x,x) = \sum_{((x,y),(y,x)) \in N} f(x,y)g(y,x) = f(x,x)g(x,x).$$

Alors τ_x est la préimage de τ induite par l'homomorphisme φ et donc τ_x est une congruence de $\mathbb{D}_{\mathbb{A}\mathbb{B}C}$. □

Remarque : Soit τ une congruence de $\mathbb{A}$. On définit une relation $\widetilde{\tau}$ sur $\mathbb{D}_{\mathbb{A}\mathbb{B}C}$ par $(f,g) \in \widetilde{\tau}$ si $(f(x,x), g(x,x)) \in \tau$, pour tout $x \in \mathrm{X}$. Alors $\widetilde{\tau} = \cap_{x \in X} \tau_x$ et donc $\widetilde{\tau}$ est une congruence de $\mathbb{D}_{\mathbb{A}\mathbb{B}C}$.

Théorème 2.2.8. *Soit $x \in \mathrm{X}$ et τ une congruence de $\mathbb{A}$. Alors τ est maximale dans $\mathbb{A}$ si et seulement si τ_x est maximale dans $\mathbb{D}_{\mathbb{A}\mathbb{B}C}$.*

Preuve : $(\Rightarrow)$. Soit τ congruence maximale de $\mathbb{A}$ et soit θ une congruence de $\mathbb{D}_{\mathbb{A}\mathbb{B}C}$ telle que $\tau_x \subset \theta$. On définit une relation $\widetilde{\theta}$ sur $\mathbb{A}$ par $\widetilde{\theta} = \{(f(x,x), g(x,x)) : (f,g) \in \theta\}$.

Lemme 2.2.9. *$\widetilde{\theta}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{A}$.*

Preuve du lemme : a) $\widetilde{\theta}$ est réflexive , car pour chaque $a \in A$, pour $f = g = \ulcorner a \urcorner_{(x,x)}$ on obtient $(a,a) = (\ulcorner a \urcorner_{(x,x)}(x,x), \ulcorner a \urcorner_{(x,x)}(x,x)) \in \widetilde{\theta}$. b) $\widetilde{\theta}$ est symmétrique, En effet, soit $(a,b) \in \widetilde{\theta}$. Alors $(a,b) = (f(x,x), g(x,x))$ pour certain $(f,g) \in \theta$. Comme $(g,f) \in \theta$, on obtient $(b,a) = (g(x,x), f(x,x)) \in \widetilde{\theta}$. c) $\widetilde{\theta}$ est transitive. En effet, soit $(a,b) \in \widetilde{\theta}$, $(b,c) \in \widetilde{\theta}$. Alors, il existe $(f,g) \in \theta$ tel que $f(x,x) = a$ et $g(x,x) = b$; et il existe $(h,l) \in \theta$ tel que $h(x,x) = b$ et $l(x,x) = c$. Ainsi, $g(x,x) = b = h(x,x)$ et $(g(x,x), h(x,x)) \in \tau$. Par suite $(g,h) \in \tau_x$ et $(g,h) \in \theta$ car $\tau_x \subseteq \theta$. On a ainsi $(f,g) \in \theta$, $(g,h) \in \theta$ et $(h,l) \in \theta$. Donc

$(f,l) \in \theta$ telle que $f(x,x) = a$, $l(x,x) = c$ et $(a,c) \in \widetilde{\theta}$. $\widetilde{\theta}$ est ainsi une relation d'équivalence.. $\square$

Lemme 2.2.10. *$\widetilde{\theta}$ est une congruence de $\mathbb{A}$.*

Preuve du lemme :Soit $(a,b) \in \widetilde{\theta}$ et $c \in A$ arbitraires. Alors $(a,b) = (f(x,x), g(x,x))$ pour une paire $(f,g) \in \theta$ et $(ca, cb) = (cf(x,x), cg(x,x)) = (\ulcorner c \urcorner_{(x,x)} * f(x,x), \ulcorner c \urcorner_{(x,x)} * g(x,x))$. Comme θ est une congruence de $\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}}$, on a que $(\ulcorner c \urcorner_{(x,x)} * f, \ulcorner c \urcorner_{(x,x)} * g) \in \theta$, ce qui montre que $(ca, cb) \in \widetilde{\theta}$. La même preuve montre que $(ac, bc) \in \widetilde{\theta}$. La preuve que $(c+a, c+b) \in \widetilde{\theta}$ est similaire. Donc $\widetilde{\theta}$ est une congruence. $\square$.

Montrons que $\tau \subset \widetilde{\theta}$. En effet, soit $(a,b) \in \tau$. Alors $(\ulcorner a \urcorner_{(x,x)}, \ulcorner b \urcorner_{(x,x)}) \in \tau_x$ et $(\ulcorner a \urcorner_{(x,x)}, \ulcorner b \urcorner_{(x,x)}) \in \theta$ car $\tau_x \subset \theta$. Ceci montre que $(a,b) \in \widetilde{\theta}$. Comme τ est une congruence maximale de $\mathbb{A}$, nous avons $\widetilde{\theta} = \tau$ ou $\widetilde{\theta} = \mathrm{A}^2$.

1) Soit $\widetilde{\theta} = \tau$. Nous montrons alors que $\theta = \tau_x$. En vue de $\tau_x \subseteq \theta$, il suffit de montrer que $\theta \subseteq \tau_x$. Soit $(f,g) \in \theta$, alors $(f(x,x), g(x,x)) \in \widetilde{\theta} = \tau$ et donc $(f,g) \in \tau_x$.

2) Soit $\widetilde{\theta} = \mathrm{A}^2$ et $f, g \in D_{\mathbb{ABC}}$ arbitraires. Alors $(f(x,x), g(x,x)) \in \mathrm{A}^2 = \widetilde{\theta}$, donc il existe $(h,l) \in \theta$ avec $h(x,x) = f(x,x)$ et $l(x,x) = g(x,x)$. Il est évident que $(f,h) \in \tau_x \subseteq \theta$, $(h,l) \in \theta$ et $(l,g) \in \tau_x \subseteq \theta$. Ceci prouve que $(f,g) \in \theta$, comme f, et g étaient arbitraires, $\theta = D^2_{\mathbb{ABC}}$.

$(\Leftarrow)$ Soit τ_x une congruence maximale de $\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}}$ et θ une congruence de $\mathbb{A}$ telle que $\tau \subset \theta$. Evidemment,$\tau_x \subset \theta_x$ et ainsi, $\theta_x = \tau_x$ ou $\theta_x = D^2_{\mathbb{ABC}}$ car τ_x est une congruence maximale de $\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}}$.

1) Soit $\theta_x = \tau_x$ et soit $(a,b) \in \theta$ arbitraire. Alors $(\ulcorner a \urcorner_{(x,x)}, \ulcorner b \urcorner_{(x,x)}) \in \theta_x = \tau_x$ entraîne $(a,b) \in \tau$. Ce qui montre que $\theta \subseteq \tau$ et donc $\theta = \tau$.

2) Soit $\theta_x = D^2_{\mathbb{ABC}}$ et soit $(a,b) \in \mathrm{A}^2$ arbitraires. Alors $(\ulcorner a \urcorner_{(x,x)}, \ulcorner b \urcorner_{(x,x)}) \in D^2_{\mathbb{ABC}} = \theta_x$ et $(a,b) \in \theta$. Alors $\theta = \tau$ ou $\theta = \mathrm{A}^2$ et τ est une congruence maximale de $\mathbb{A}$.

$\square$

Définition 2.2.11. *Soit θ une congruence de $\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}}$. Soit $x \in \mathrm{X}$. On définit la relation binaire θ^x sur $\mathbb{A}$, en posant $(a,b) \in \theta^x$ s'il existe $(f,g) \in \theta$ tel que $f(x,x) = a$ et $g(x,x) = b$.*

Lemme 2.2.12. *Soit θ une congruence de $\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}}$. Soit $x \in$ X. Alors la relation binaire θ^x est une congruence de $\mathbb{A}$.*

Preuve : Soit $a \in$ A. Alors $(\ulcorner a \urcorner_{(x,x)}, \ulcorner a \urcorner_{(x,x)}) \in \theta$. Donc $(a,a) \in \theta^x$ et θ est réflexive. Le fait pour θ^x d'être symétrique découle du fait que θ l'est. Pour la transitivité, on suppose $(a,b) \in \theta^x$ et $(b,c) \in \theta^x$. Alors, il existe $(t,g) \in \theta$ tel que $t(x,x) = a$, $g(x,x) = b$; et il existe $(f,m) \in \theta$ tel que $f(x,x) = b$ et $m(x,x) = c$. Ainsi, $g(x,x) = b = f(x,x)$. Comme θ est une congruence, $(t,g) \in \theta$ et $(f,m) \in \theta$, alors $(t + f_h, g + f_h) \in \theta$ et $(g_h + f, g_h + m) \in \theta$; où

$$f_h(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si} \quad x \neq y \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On remarque que $g+f_h = g_h+f$ car $g(x,x) = b = f(x,x)$ et ainsi $(t+f_h, g_h+m) \in \theta$. De plus,

$$(t + f_h)(x,x) = t(x,x) = a, \quad (g_h + m)(x,x) = m(x,x) = c;$$

donc $(a,c) \in \theta^x$ et θ^x est transitive. Pour $(a,b) \in \theta^x$ et $c \in$ A, il existe $(h,g) \in \theta$ tel que $h(x,x) = a$ et $g(x,x) = b$. Comme θ est une congruence de $\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}}$, on a

$$(h * \ulcorner c \urcorner_{(x,x)}, g * \ulcorner c \urcorner_{(x,x)}) \in \theta, \quad (h + \ulcorner c \urcorner_{(x,x)}, g + \ulcorner c \urcorner_{(x,x)}) \in \theta.$$

Donc θ^x est une congruence. □

Lemme 2.2.13. *Soit θ une congruence de $\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}}$, soit $x \in$ A et soit τ une congruence sur $\mathbb{A}$. Alors $\theta^x \subseteq \tau \Longrightarrow \theta \subseteq \tau_x$.*

Preuve : Soit $(f,g) \in \theta$. Alors $(f(x,x), g(x,x)) \in \theta^x \subseteq \tau$ et donc $\theta \subseteq \tau_x$.

□

Proposition 2.2.14. *Si θ est une congruence maximale de $\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}}$, alors $\theta^x = \mathrm{A}^2$ ou θ^x est une congruence maximale de $\mathbb{A}$.*

Preuve : Supposons que $\theta^x \neq \mathrm{A}^2$. Soit τ une congruence de $\mathbb{A}$ telle que $\theta^x \subset \tau$. Alors $\theta \subset \tau_x$ d'après le lemme précédent. Ainsi, $\tau_x = \theta$ ou $\tau_x = D^2_{\mathbb{ABC}}$, car θ est une congruence maximale de $\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}}$.

1) Soit $\tau_x = \theta$. Soit $(a,b) \in \tau$ arbitraire. Alors $(\ulcorner a \urcorner_{(x,x)}, \ulcorner b \urcorner_{(x,x)}) \in \tau_x = \theta$; ainsi $(a,b) \in \theta^x$ et donc $\tau \subseteq \theta^x$. Comme $\theta^x \subseteq \tau$ par hypothèse, $\theta^x = \tau$.

2) Soit $\tau_x = D^2_{\mathbb{ABC}}$. Pour chaque $(a,b) \in \mathrm{A}^2$, on a que $(\ulcorner a \urcorner_{(x,x)}, \ulcorner b \urcorner_{(x,x)}) \in D^2_{\mathbb{ABC}} = \tau_x$ et donc $(a,b) \in \tau$. Ceci montre que $\tau = \mathrm{A}^2$. Donc θ^x est maximale. $\square$

Définition 2.2.15. *(AC) Soit $\mathbb{A}$ une algèbre. On appelle le* ***radical de Jacobson de*** *$\mathbb{A}$, noté $\mathcal{J}(\mathbb{A})$, l'intersection de toutes les congruences maximales de $\mathbb{A}$.*

Proposition 2.2.16.

$$\mathcal{J}(\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}}) \subset \{(f,g) \in D^2_{\mathbb{ABC}} : \ (f(x,x), g(x,x)) \in \mathcal{J}(\mathbb{A}), \ \ \forall x \in \mathrm{X}\}.$$

Preuve : Soit $(f,g) \in D^2_{\mathbb{ABC}}$ tel que $(f,g) \in \theta$ pour toutes congruences maximales θ de $\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}}$. Soit $x \in \mathrm{X}$ et τ une congruence maximale de $\mathbb{A}$. Alors par le théorème 2.2.8, τ_x est une congruence maximale de $\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}}$. Ainsi, $(f,g) \in \tau_x$, d'où $(f(x,x), g(x,x)) \in \tau$. Ceci montre la proposition. $\square$

Proposition 2.2.17. *Si $\mathbb{A}$ est une algèbre et il existe $x \in \mathrm{X}$ tel que $\theta^x \neq \mathrm{A}^2$ pour toutes les congruences maximales θ de $\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}}$, alors*

$$\mathcal{J}(\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}}) = \{(f,g) \in D^2_{\mathbb{ABC}} : \ (f(x,x), g(x,x)) \in \mathcal{J}(\mathbb{A}), \ \forall x \in \mathrm{X}\}.$$

Preuve : Supposons que (f,g) appartient au côté droit de la formule et soit θ une congruence maximale de $\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}}$. Alors, par l'hypothèse et la proposition 2.2.14, on a que θ^x est une congruence maximale de $\mathbb{A}$. Ainsi, $(f(x,x), g(x,x)) \in \theta^x$; donc $(f,g) \in (\theta^x)_x$. Or $\theta \subset (\theta^x)_x$ et θ et $(\theta^x)_x$ sont des congruences maximales, alors $\theta = (\theta^x)_x$ et $(f,g) \in \mathcal{J}(\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}})$. $\square$

Proposition 2.2.18. *Si $\mathbb{A}$ est telle que pour toute congruence maximale θ de $\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}}$, il existe $x_\theta \in \mathrm{X}$ avec $\theta^{x_\theta} \neq \mathrm{A}^2$, alors*

$$\mathcal{J}(\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}}) = \{(f,g) \in D^2_{\mathbb{ABC}} : \ (f(x,x), g(x,x)) \in \mathcal{J}(\mathbb{A}), \ \forall x \in \mathrm{X}\}.$$

Preuve : Supposons que (f,g) appartient au côté droit de la formule et soit θ une congruence maximale de $\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}}$. Alors par l'hypothèse et la proposition 2.2.14, il existe $x_\theta \in \mathrm{X}$ tel que $\theta^{x_\theta} \neq \mathrm{A}^2$ et θ^{x_θ} est une congruence maximale de $\mathbb{A}$. Ainsi, $(f(x_\theta, x_\theta), g(x_\theta, x_\theta)) \in \theta^{x_\theta}$; donc $(f,g) \in (\theta^{x_\theta})_{x_\theta}$. Or $\theta \subset (\theta^{x_\theta})_{x_\theta}$ et θ et $(\theta^{x_\theta})_{x_\theta}$ sont des congruences maximales, alors $\theta = (\theta^{x_\theta})_{x_\theta}$ et $(f,g) \in \mathcal{J}(\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}})$. $\square$

Remarque : 1) Nous n'arrivons pas encore à conclure le cas où l'algèbre $\mathbb{A}$ ne vérifie pas les conditions de la proposition précédente, c'est-à-dire le cas où il existe une congruence maximale θ de $\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}}$ telle que $\theta^x = \mathrm{A}^2$ pour tout $x \in \mathrm{X}$.

2) La construction suivante est en partie inspirée de [OS 97], 5.1-5.3.

Définition 2.2.19. *Soit $k \in \mathbb{N}$. Une **chaîne** est un ensemble $\{(x_i, y_i) \in \mathrm{B} : 1 \leq i \leq k\}$ tel que*

a) $y_i < x_{i+1}$ pour $i = 1, \cdots, k-1$, et

b) Si $x_i \leq z \leq y_i$ alors $((x_i, z), (z, y_i)) \in \mathrm{N}$.

Définition 2.2.20. *Une sous-relation ρ de* B *est dite **fine** s'il existe un entier positif n tel que $\mid \rho \cap \mathrm{Z} \mid < n$ pour toute chaîne* Z *de* B.

Remarque : L'union de deux sous-relations fines est une sous-relation fine. En effet, soient ρ_1 et ρ_2 deux sous-relations fines. Alors, il existe n_1 et n_2 des entiers respectifs tels que $\mid \mathrm{Z} \cap \rho_1 \mid < n_1$ et $\mid \mathrm{Z} \cap \rho_2 \mid < n_2$ pour toute chaîne Z de B. Ainsi,

$$\mid \mathrm{Z} \cap (\rho_1 \cup \rho_2) \mid = \mid (\mathrm{Z} \cap \rho_1) \cup (\mathrm{Z} \cap \rho_2) \mid \leq \mid \mathrm{Z} \cap \rho_1 \mid + \mid \mathrm{Z} \cap \rho_2 \mid < n_1 + n_2.$$

Soit $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(B)$. Soit φ une fonction de B vers $Con(\mathbb{A})$ (c'est-à-dire $\varphi(x,y)$ est une congruence de $\mathbb{A}$ pour tout $(x,y) \in B$). On définit une relation binaire $\theta_\varphi^\mathcal{U}$ sur $D_{\mathbb{ABC}}$ par : $(f,g) \in \theta_\varphi^\mathcal{U}$ s'il existe $\mathrm{V} \in \mathcal{U}$ tel que la relation

$$\varphi_{fg}^{\mathrm{V}} = \{(x,y) \in \mathrm{V} : (f(x,y), g(x,y)) \notin \varphi(x,y) \}$$

soit fine.

Lemme 2.2.21. *Si $\mathcal{U}$ est fermé pour l'intersection, alors $\theta_\varphi^\mathcal{U}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}}$.*

Preuve : Pour tout $f \in D_{\mathbb{ABC}}$ et $\mathrm{V} \in \mathcal{U}$, on a que $\varphi_{ff}^{\mathrm{V}} = \emptyset$ et $\emptyset$ est fine. Donc $\theta_\varphi^\mathcal{U}$ est réflexive.

Pour tous $f, g \in D_{\mathbb{ABC}}$ et $\mathrm{V} \in \mathcal{U}$, on a par définition $\varphi_{fg}^{\mathrm{V}} = \varphi_{gf}^{\mathrm{V}}$, donc $\theta_\varphi^\mathcal{U}$ est symétrique.

Soient $f, g, h \in D_{\mathbb{ABC}}$ tels que $(f,g), (g,h) \in \theta_\varphi^\mathcal{U}$. Alors il existe $\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2 \in \mathcal{U}$ tels que $\varphi_{fg}^{\mathrm{U}_1}$ et $\varphi_{gh}^{\mathrm{U}_2}$ sont fines. Posons $\mathrm{U} = \mathrm{U}_1 \cap \mathrm{U}_2$. Alors $\mathrm{U} \in \mathcal{U}$ car $\mathcal{U}$ est fermé pour l'intersection. On a $\varphi_{fh}^{\mathrm{U}} \subset \varphi_{fg}^{\mathrm{U}_1} \cup \varphi_{gh}^{\mathrm{U}_2}$. En effet, soit $(x,y) \in \mathrm{U}$ tel que $(x,y) \notin \varphi_{fg}^{\mathrm{U}_1} \cup \varphi_{gh}^{\mathrm{U}_2}$. Comme $\mathrm{U} = \mathrm{U}_1 \cap \mathrm{U}_2$, alors $(f(x,y), g(x,y)) \in \varphi(x,y)$ et $(g(x,y), h(x,y)) \in \varphi(x,y)$. Comme la congruence $\varphi(x,y)$ est transitive, on a $(f(x,y), h(x,y)) \in \varphi(x,y)$ et $(x,y) \notin \varphi_{fh}^{\mathrm{U}}$. Ceci montre que $\varphi_{fg}^{\mathrm{U}} \subseteq \varphi_{fg}^{\mathrm{U}_1} \cup \varphi_{gh}^{\mathrm{U}_2}$. Ici,

$\varphi_{fg}^{\mathrm{U}_1} \cup \varphi_{gh}^{\mathrm{U}_2}$ est fine comme la réunion de deux relations fines et $\varphi_{fh}^{\mathrm{U}}$ est fine. Donc $\theta_{\varphi}^{\mathcal{U}}$ est transitive. $\square$

Lemme 2.2.22. *1) Soit $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(\mathrm{B})$ tel que pour chaque $\mathrm{U} \in \mathcal{U}$ et tout $(x,y) \in \mathrm{U}$ et $a \in X$,*

$$((x,a),(a,y)) \in \mathrm{N} \Rightarrow (x,a),(a,y) \in \mathrm{U}.$$

2) Soit $\varphi : \mathrm{B} \to Con(\mathbb{A})$ une fonction telle que pour tous $(x,y) \in B$ et $a \in X$,

$$((x,a),(a,y)) \in N \Rightarrow \varphi(x,a) \cup \varphi(a,y) \subset \varphi(x,y).$$

Alors $\theta_{\varphi}^{\mathcal{U}}$ est une congruence de $\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}}$.

Preuve : Soit $h \in D_{\mathbb{ABC}}$ et $(f,g) \in \theta_{\varphi}^{\mathcal{U}}$. Alors, il existe $\mathrm{U} \in \mathcal{U}$ tel que $\varphi_{fg}^{\mathrm{U}}$ est une relation fine. Alors il existe un entier positif n tel que $\mid \mathrm{Z} \cap \varphi_{fg}^{\mathrm{U}} \mid < n$ pour toute chaîne Z de B.

On montre que $\varphi_{(f+h)(g+h)}^{\mathrm{U}} \subset \varphi_{fg}^{\mathrm{U}}$. En effet, soit $(x,y) \notin \varphi_{fg}^{\mathrm{U}}$. Alors $(f(x,y),g(x,y)) \in \varphi(x,y)$. Comme $\varphi(x,y) \in Con(\mathbb{A})$,

$$(f(x,y)+h(x,y),g(x,y)+h(x,y)) \in \varphi(x,y),$$

ce qui signifie que $(x,y) \notin \varphi_{(f+h)(g+h)}^{\mathrm{U}}$ et démontre l'inclusion. Par hypothèse, $\varphi_{fg}^{\mathrm{U}}$ est fine, donc $\varphi_{f+h,g+h}^{\mathrm{U}}$ est fine et $(f+h,g+h) \in \theta_{\varphi}^{\mathcal{U}}$.

Posons $f^{'} = f*h$ et $g^{'} = g*h$. Montrons que $\varphi_{f'g'}^{\mathrm{U}}$ est fine. Supposons le contraire. Alors, pour tout entier positif m, il existe une chaîne $\mathrm{Z_m}$ de B telle que $\mid \mathrm{Z_m} \cap \varphi_{f'g'}^{\mathrm{U}} \mid \geq m$. En particulier, pour notre n, il existe $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$ une chaîne de $\mathbb{B}$ telle que pour tout $i=1,\cdots,n$, on a que $(x_i,y_i) \in \varphi_{f'g'}^{\mathrm{U}}$; c'est-à-dire $(f^{'}(x_i,y_i),g^{'}(x_i,y_i)) \notin \varphi(x_i,y_i)$.

Soit $i=1,\ldots,n$. Nous montrons qu'il existe $((x_i,z_i),(z_i,y_i)) \in \mathrm{N}$ tel que $(x_i,z_i) \in \varphi_{fg}^{\mathrm{U}}$. En effet, supposons le contraire. Alors, pour tous $((x_i,z),(z,y_i)) \in \mathrm{N}$, on a que $(x_i,z) \notin \varphi_{fg}^{\mathrm{U}}$. Par hypothèse, $(x_i,y_i) \in \mathrm{U}$ et $((x_i,z),(z,y_i)) \in \mathrm{N}$, alors $(x_i,z) \in \mathrm{U}$ d'après 1). Ainsi, de $(x_i,z) \notin \varphi_{fg}^{\mathrm{U}}$, il découle que $(f(x_i,z),g(x_i,z)) \in \varphi(x_i,z)$. Comme $\varphi \in Con(\mathbb{A})$, on a $(f(x_i,z)h(z,y_i),g(x_i,z)h(z,y_i)) \in \varphi(x_i,z)$ et

$$\left(\sum_{((x_i,z),(z,y_i))\in\mathrm{N}} (f(x_i,z)h(z,y_i), \sum_{((x_i,z),(z,y_i)\in\mathrm{N}} g(x_i,z)h(z,y_i) \right) \in \varphi(x_i,z).$$

Ainsi, $(f'(x_i,y_i),g'(x_i,y_i)) \in \varphi(x_i,z)$ et $(f'(x_i,y_i),g'(x_i,y_i)) \in \varphi(x_i,y_i)$ car $\varphi(x_i,z) \subset \varphi(x_i,y_i)$ et $(x_i,y_i) \notin \varphi^{\mathrm{U}}_{f'g'}$. Ce qui est absurde , car $(x_i,y_i) \in \varphi^{\mathrm{U}}_{f'g'}$. Ainsi, pour $i \in \{1,2,\dots\ n\}$, Il existe $((x_i,z_i),(z_i,y_i)) \in \mathrm{N}$ tel que $(x_i,z_i) \in \varphi^{\mathrm{U}}_{fg}$. On obtient ainsi une chaîne $\mathrm{Z_n}' = \{(x_i,z_i),(z_i,y_i)\ \}$ contenant au moins n éléments de $\varphi^{\mathrm{U}}_{fg}$. Ce qui est impossible. Donc $\varphi^{\mathrm{U}}_{f'g'}$ est fine et $(f',g') \in \theta^{\mathcal{U}}_{\varphi}$.
Posons $f'' = h*f$ et $g'' = h*g$. De façon analogue, on montre que $\varphi^{\mathrm{U}}_{f''g''}$ est fine.
□

Proposition 2.2.23. *Soit F un filtre sur* $(\mathrm{X};\leq)$ $(\mathrm{B} \subset \mathrm{X}^2)$*. On définit une relation binaire $\equiv_F$ sur $\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}}$ par : pour tous $f,g,\in D_{\mathbb{ABC}}$,*

$$f \equiv_F g \iff \exists \mathrm{Y} \in F \text{ tel que } \quad f(x,x) = g(x,x), \ \ \forall x \in \mathrm{Y}.$$

Alors la relation $\equiv_F$ ainsi définie est une congruence de $\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}}$.

Preuve : Nous montrons que $\equiv_F$ est une relation d'équivalence sur $D_{\mathbb{ABC}}$. $\mathrm{X} \in F$ car F est un filtre. Et pour tout $f \in D_{\mathbb{ABC}}$, pour tout $x \in \mathrm{X}$, $f(x,x) = f(x,x)$. Donc $f \equiv_F f$ et $\equiv_F$ est réflexive.
Soit $f,g \in D_{\mathbb{ABC}}$ tels que $f \equiv_F g$. Alors il existe $\mathrm{Y} \in F$ tel que $f(x,x) = g(x,x)$ pour tout $x \in \mathrm{Y}$. Donc $g \equiv_F f$ et $\equiv_F$ est symétrique.
Soit $f,g,h \in D_{\mathbb{ABC}}$ tels que $f \equiv_F g$ et $g \equiv_F h$. Alors, il existe $\mathrm{Y} \in F$ et $\mathrm{Z} \in F$ tels que $f(x,x) = g(x,x)$, pour tout $x \in \mathrm{Y}$ et $g(x,x) = h(x,x)$, pour tout $x \in \mathrm{Z}$. Comme $\mathrm{Y},\mathrm{Z} \in F$ et F est un filtre, alors $\mathrm{Y} \cap \mathrm{Z} \in F$. Pour tout $x \in \mathrm{Y} \cap \mathrm{Z}$, on a $f(x,x) = g(x,x) = h(x,x)$. Donc $f \equiv_F h$ et $\equiv_F$ est transitive.
Soit $f \equiv_F g$ et $h \in D_{\mathbb{ABC}}$. Alors il existe $\mathrm{Y} \in F$ tel que $f(x,x) = g(x,x)$ pour tout $x \in \mathrm{Y}$. Soit $x \in \mathrm{Y}$, alors

$$(f+h)(x,x) = f(x,x) + h(x,x) = g(x,x) + h(x,x) = (g+h)(x,x).$$

De même,

$$(f*h)(x,x) = f(x,x)h(x,x) = g(x,x)h(x,x) = (g*h)(x,x).$$

Ainsi, $(f+h) \equiv_F (g+h)$ et $(f*h) \equiv_F (g*h)$ □

Chapitre 3

PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DE $\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}}$

Dans ce chapitre, nous introduisons et étudions certaines propriétés algébriques de base sur une algèbre de convolution définie par un multigroupoïde partiel et une structure qui ressemble à un anneau . Ce travail est inspiré des travaux de Veldsman sur les types de convolution et ceux de Rosenberg sur les propriétés algébriques d'une algèbre de convolution généralisée. En effet, nous généralisons certains résultats de [Ro 86].

L'algèbre est un ensemble $D_{\mathbb{AB}C}$ de fonctions définies d'un multigroupoïde partiel $\mathbb{B} = \langle B, \circ \rangle$ vers une algèbre $\mathbb{A} = \langle A; +, \cdot, 0 \rangle$ où $\langle A; +, 0 \rangle$ est un monoïde abélien avec 0 un élément neutre et 0 un annulateur à gauche et à droite pour la multiplication. Pour deux éléments f et g de $D_{\mathbb{AB}C}$, on note $f * g$ un élément de $D_{\mathbb{AB}C}$ défini par

$$(f * g)(x) = \sum_{x \in t \circ v} f(t)g(v) \tag{16}$$

On impose à un ensemble $\mathcal{C}$ des parties de B des conditions pour que la somme dans (16) soit finie.

Dans la première partie de ce travail, nous donnons des correspondances entre la définition de Veldsman sur les types de convolution et celle que nous utilisons. Ensuite, nous établissons les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une algèbre de convolution définie pour un multigroupoide partiel soit commutative, associative, distributive, anneau, idempotente, bidemitreillis et admette un élément unité. Plus loin, nous étudions certaines de ces propriétés si $\langle A; +, \cdot \rangle$ est aussi une hyperstructure.

La définition suivante est celle du type de convolution donnée par Veldsman.

Définition 3.0.24. *(Veldsman [Ve 06]) Un* ***type de convolution*** *est un quadruplet $\mathcal{T} = (X, \mathcal{S}, \sigma, \tau)$, où X est un ensemble non vide, $\mathcal{S}$ est un ensemble non vide des parties de X, avec $\mathcal{S} \neq \{X\}$; $\sigma(x)$ est un sous-ensemble non vide de $X \times X$ pour tout $x \in X$ et τ est une fonction définie de $X \times X$ vers $\mathbb{Z}$, tels que pour tous $Y_1, Y_2 \in \mathcal{S}$,*

C1 : $Y_1 \cap Y_2$ contient un $Y \in \mathcal{S}$,

C2 : Il existe $Y \in \mathcal{S}$ tel que pour tout $y \in Y$ et pour tout $(s,t) \in \sigma(y)$, on a que $s \in Y_1$ ou $t \in Y_2$,

C3 : Pour tout $x \in X$, l'ensemble $\{(s,t) \in \sigma(x) : \ s \in X \setminus Y_1 \text{ et } t \in X \setminus Y_2 \}$ est fini,

A1 : Pour tout $x \in X$, $(s,t) \in \sigma(x)$ et $(p,q) \in \sigma(s)$, il existe $v \in X$ unique, avec $(p,v) \in \sigma(x)$, $(q,t) \in \sigma(v)$ et tel que $\tau(s,t)\tau(p,q) = \tau(p,v)\tau(q,t)$,

A2 : Pour tous $x \in X$, $(s,t) \in \sigma(x)$ et $(p,q) \in \sigma(t)$ il existe $u \in X$ unique , avec $(u,q) \in \sigma(x)$, $(s,p) \in \sigma(u)$ et tel que $\tau(s,t)\tau(p,q) = \tau(u,q)\tau(s,p)$.

Définition 3.0.25. *Soit X un ensemble non vide. Soit $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X. Un* ***multigroupoïde partiel*** *sur X, est une application de $X \times X$ vers $\mathcal{P}(X)$.*

Remarque : Si pour tous $x, y \in X$, $|x \circ y| \leq 1$, c'est-à-dire $x \circ y$ est un singleton ou l'ensemble vide, alors le multigroupoïde peut être identifié à un groupoïde partiel dont le domaine est l'ensemble $\{(x,y) \in X^2 : |x \circ y| = 1\}$.
Si $|x \circ y| = 1$ pour tous $x, y \in X$, le multigroupoïde est un **groupoïde**.
Pour des formules formées des produits $\circ$ et des symboles ensemblistes, le produit prend une priorité aux symboles ensemblistes ; c'est-à-dire $x \circ y \cap z \circ t$ représente $(x \circ y) \cap (z \circ t)$ et $x \in a \circ b$ représente $x \in (a \circ b)$.

3.1. Type de convolution et algèbre de convolutions définie par un multigroupoïde partiel.

Pour les lemmes suivants, les définitions sont celles de type de convolution, $\mathcal{T} = (X, \mathcal{S}, \sigma, \tau)$. Pour la définition de $D_{\mathbb{ABC}}$, la famille $\mathcal{C}$ est le complémentaire de $\mathcal{S}$ et le multigroupoïde est défini comme il suit : $x \circ y = \{a \in X : (x,y) \in \sigma(a)\}$, où $\mathcal{S}$ et $\sigma(a)$ sont définis par le type de convolution. Pour tout ensemble H, on note H^c son complémentaire.

Lemme 3.1.1. *La condition C1 (de la définition (3.0.24)) est équivalente à la condition :*

D1 : La famille $\mathcal{C}$ est filtrante supérieurement dans $(\mathcal{P}(X);\subseteq)$, c'est-à-dire, pour tous $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$, il existe $C_3 \in \mathcal{C}$ tel que $C_1 \cup C_2 \subseteq C_3$.

Preuve : Supposons C1 vraie. Soit $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$. Alors $C_1^c, C_2^c \in \mathcal{S}$ et d'après C1, il existe un $Y \in \mathcal{S}$ tel que $Y \subseteq C_1^c \cap C_2^c$, c'est-à-dire $Y \subseteq (C_1 \cup C_2)^c$. D'où $C_1 \cup C_2 \subseteq Y^c$. Il suffit de prendre $C_3 = Y^c$.

Supoposons D1 vraie. Soit $Y_1, Y_2 \in \mathcal{S}$. Alors $Y_1^c, Y_2^c \in \mathcal{C}$ et d'après D1, il existe un $Y_3 \in \mathcal{C}$ tel que $Y_1^c \cup Y_2^c \subseteq Y_3$, c'est-à-dire $(Y_1 \cap Y_2)^c \subseteq Y_3$. D'où $Y_3^c \subseteq Y_1 \cap Y_2$. Il suffit de prendre $Y = Y_3^c \in \mathcal{S}$. $\square$

Lemme 3.1.2. *La condition C2 (de la définition (3.0.24)) est équivalente à la condition :*

D2 : Pour tous $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$, il existe $C_3 \in \mathcal{C}$ tel que $C_1 \circ C_2 \subseteq C_3$.

Preuve : Supposons C2 vraie. Soit $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$. Alors $C_1^c, C_2^c \in \mathcal{S}$ et d'après C2, il existe $Y \in \mathcal{S}$ tel que pour tous $y \in Y$ et $(s,t) \in \sigma(y)$, on a que $s \in C_1^c$ ou $t \in C_2^c$; c'est-à-dire $\bigcup_{y\in Y} \sigma(y) \subseteq (C_1^c \times X) \cup (X \times C_2^c)$. On obtient

$$\Big(\bigcup_{y\in Y} \sigma(y)\Big)^c \supseteq [(C_1^c \times X) \cup (X \times C_2^c)]^c$$

et donc

$$\bigcap_{y\in Y} \sigma(y)^c \supseteq (C_1^c \times X)^c \cap (X \times C_2^c)^c.$$

De plus,

$$(s,t) \in (C_1^c \times X)^c \cap (X \times C_2^c)^c \Leftrightarrow (s,t) \notin (C_1^c \times X)$$

et

$$(s,t) \notin X \times C_2^c \Leftrightarrow (s,t) \in (C_1 \times X)$$

et

$$(s,t) \in X \times C_2 \Leftrightarrow (s,t) \in (C_1 \times X) \cap (X \times C_2) \Leftrightarrow (s,t) \in C_1 \times C_2.$$

Donc $(C_1^c \times X)^c \cap (X \times C_2^c)^c = C_1 \times C_2$, c'est-à-dire $\bigcap_{y\in Y} \sigma(y)^c \supseteq C_1 \times C_2$.

$\bigcap_{y\in Y} \sigma(y)^c = \{(s,t) \in X^2 : (s,t) \notin \sigma(y), \forall y \in Y\}$

$= \{(s,t) \in X^2 : (s \circ t) \cap Y = \emptyset\} = \{(s,t) \in X^2 : (s \circ t) \subseteq Y^c\}$.

On a donc que $\{(s,t) \in X^2 : (s \circ t) \subseteq Y^c\} \supseteq C_1 \times C_2$. Posons $C_3 = Y^c \in \mathcal{C}$. Pour tout $(c_1, c_2) \in C_1 \times C_2$, $c_1 \circ c_2 \subseteq C_3$. Ainsi, $C_1 \circ C_2 \subseteq C_3$ et la condition D2 est vérifiée.

Supposons D2 vraie. Soit $Y_1, Y_2 \in \mathcal{S}$. Alors $Y_1^c, Y_2^c \in \mathcal{C}$ et d'après D2, il existe un $C_3 \in \mathcal{C}$ tel que $Y_1^c \circ Y_2^c \subseteq C_3$, c'est-à-dire $C_3^c \subseteq (Y_1^c \circ Y_2^c)^c$. Posons $Y = C_3^c \in \mathcal{S}$. Soit $y \in Y$ et $(s,t) \in \sigma(y)$; alors $y \in s \circ t$. De plus,

$$y \in C_3^c \Rightarrow y \in (Y_1^c \circ Y_2^c)^c \Rightarrow y \notin (Y_1^c \circ Y_2^c).$$

$y \in s \circ t$ et $y \notin Y_1^c \circ Y_2^c \Rightarrow s \circ t \not\subset Y_1^c \circ Y_2^c \Rightarrow s \notin Y_1^c$ ou $t \notin Y_2^c \Rightarrow s \in Y_1$ ou $t \notin Y_2$. Alors C2 est vérifiée. $\square$

Remarque : Pour $U, V \subset X$ et $x \in X$, on pose

$N_{UV}(x) = \{(a,b) \in U \times V : x \in a \circ b\} = \{(a,b) \in U \times V : (a,b) \in \sigma(x)\} = \sigma(x) \cap (U \times V)$.

Lemme 3.1.3. *La condition C3 (de la définition (3.0.24)) est équivalente à la condition :*

D3 : Pour tous $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$, et $x \in X$, l'ensemble $N_{C_1C_2}(x)$ est fini.

Preuve : Soit $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ et $x \in X$. Alors $C_1^c, C_2^c \in \mathcal{S}$ et d'après C3 l'ensemble $\{(s,t) \in \sigma(x) : s \in (C_1^c)^c,\ t \in (C_2^c)^c\}$ est fini. Or

$$\{(s,t) \in \sigma(x) : s \in (C_1^c)^c,\ t \in (C_2^c)^c\} = N_{C_1C_2}(x),$$

d'où $N_{C_1C_2}(x)$ est fini et D3 est vraie.

La réciproque se démontre de la même manière. $\square$

Lemme 3.1.4. *La condition A1 (de la définition (3.0.24)) est équivalente à la condition :*

E1 : Pour tous $p, q, t \in X$,

i) $(p \circ q) \circ t \subseteq p \circ (q \circ t)$,

ii) Pour tous $s \in p \circ q$ et $x \in s \circ t$, il existe $v_{sx} \in q \circ t$ unique tel que $x \in p \circ v_{sx}$ et $\tau(s,t)\tau(p,q) = \tau(p, v_{sx})\tau(q,t)$.

Preuve : On se rappelle que

$$(p \circ q) \circ t = \bigcup_{x \in p \circ q} x \circ t = \bigcup_{x \in p \circ q} \{a \in X : (x,t) \in \sigma(a)\}.$$

Supposons que A1 est vraie. Soit $p, q, t \in X$ et $a \in (p \circ q) \circ t$. Alors, il existe $x \in p \circ q$, $(x, t) \in \sigma(a)$, c'est-à-dire il existe $x \in X$ tel que $(p, q) \in \sigma(x)$ et $(x, t) \in \sigma(a)$. Comme $(x, t) \in \sigma(a)$ et $(p, q) \in \sigma(x)$, d'après A1, il existe un unique $v \in X$ tel que $(p, v) \in \sigma(a)$, $(q, t) \in \sigma(v)$ et tel que $\tau(x, t)\tau(p, q) = \tau(p, v)\tau(q, t)$; c'est-à-dire, il existe un unique $v \in X$ tel que $a \in (p \circ v)$, $v \in (q \circ t)$ et $\tau(x, t)\tau(p, q) = \tau(p, v)\tau(q, t)$. En particulier, $a \in p \circ (q \circ t)$ et $(p \circ q) \circ t \subseteq p \circ (q \circ t)$. Supposons E1 vraie. Soit $x \in X$, soit $(s, t) \in \sigma(x)$ et $(p, q) \in \sigma(s)$. Alors $x \in s \circ t$ et $s \in p \circ q$ et d'après E1, il existe un unique $v_{sx} \in q \circ t$ tel que $x \in p \circ v_{sx} \subseteq p \circ (q \circ t)$ et $\tau(s, t)\tau(p, q) = \tau(p, v_{sx})\tau(q, t)$. C'est-à-dire, il existe un unique $v_{sx} \in X$, tel que $(q, t) \in \sigma(v_{sx})$, $(p, v_{sx}) \in \sigma(x)$ et $\tau(s, t)\tau(p, q) = \tau(p, v_{sx})\tau(q, t)$. $\square$

Remarque : La condition E1 i) peut juste être vue comme une conséquence de A1. L'application $\tau : X \times X \to \mathbb{Z}$ reste inchangée dans les conditions A1, E1, A2 et E2.

Lemme 3.1.5. *La condition A2 (de la définition (3.0.24) est équivalente à la condition :*

E2 : Pour tous $p, q, t \in X$

i) $p \circ (q \circ t) \subseteq (p \circ q) \circ t$,

ii) Pour tous $s \in (q \circ t)$ et $x \in (p \circ s)$, il existe $u_{sx} \in (q \circ q)$ unique tel que $x \in (u_{sx} \circ t)$ et $\tau(p, q)\tau(q, t) = \tau(u_{sx}, q)\tau(s, p)$.

Preuve : Elle se fait de manière analogue à celle du lemme précédent. $\square$

Remarque : Pour Veldsman, les algèbres de convolution sont des anneaux et la convolution est définie par des "poids" ($\tau : X \times X \to \mathbb{Z}$) ; ce qui n'est pas le cas pour les algèbres de convolution que nous considérons dans notre travail. Certainement, ces poids ne figurent pas dans les algèbres de convolution et les algèbres d'incidence classique. Comme pour notre travail, $\langle A; +, 0\rangle$ n'est pas nécessairement un groupe, il aurait fallu restreindre les valeurs de τ à des entiers non négatifs. Les conditions de Veldsman aussi impliquent que $\mathbb{B}$ est associatif, ce que nous ne supposons pas.

Après ces différentes interprétations, nous donnons la définition de l'algèbre de convolution généralisée, $\mathbb{D}_{\mathbb{A}\mathbb{B}C} = \langle D_{\mathbb{A}\mathbb{B}C}; +, *, \mathbf{0}\rangle$, dont nous allons étudier certaines propriétés algébriques. $\langle B; \circ\rangle$ est un multigroupoïde partiel ; c'est-à- dire $\circ$ est une application définie de B^2 vers l'ensemble des parties de B. L'algèbre $\langle A; +, \cdot, 0\rangle$ est définie comme dans les sections précédentes. En particulier, on suppose que $A^2 \neq \{0\}$. L'ensemble $\mathcal{C}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{P}(B)$ fermé pour l'union et est héréditaire (c'est-à-dire $Y \subseteq S \in \mathcal{C} \Rightarrow Y \in \mathcal{C}$). En d'autres termes, $\mathcal{C}$ est un idéal du treillis $(\mathcal{P}(X); \cup, \cap)$. De plus, tous les singletons sont dans $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ vérifie : pour tous $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$,

$$C_1 \circ C_2 \in \mathcal{C}; \quad C_1 \circ C_2 = \bigcup_{c_i \in C_i} c_1 \circ c_2.$$

Pour tous $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ et $x \in B$, l'ensemble $N_{C_1C_2}(b) = \{(c_1, c_2) \in C_1 \times C_2 : b \in c_1 \circ c_2\}$ est fini.
Nous donnons les conditions pour qu'une algèbre de convolution généralisée soit commutative, associative, distributive, un anneau, idempotente, un bidemitreillis ou unitaire.

3.2. Commutativité

Nous donnons les conditions pour qu'une algèbre de convolution, $\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}} := \langle D_{\mathbb{ABC}}; +, *, \mathbf{0}\rangle$, définie par un multigroupoïde partiel soit commutative.

Définition 3.2.1. *Un multigroupoïde patiel $(B; \circ)$ est dit **commutatif** si $p \circ q = q \circ p$ pour tous $p, q \in B$.*

Remarque : Pour $\mathcal{C} := \mathcal{F}$, l'ensemble des parties finies de B, on appelle $\mathbb{D}_{\mathbb{AB}\mathcal{F}} = \langle D_{\mathbb{AB}\mathcal{F}}; +, *, \mathbf{0}\rangle$, l'algèbre de convolution **restreinte**. Cette algèbre est une sous-algèbre de $\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}}$.
Pour éviter le cas trivial de $x \circ y = \emptyset$ pour tous $x, y \in B$, nous supposons dans la suite qu'il existe $x, y \in B$ tels que $x \circ y \neq \emptyset$. Pour $a \in A$ et $z \in B$, on définit l'application $\ulcorner a \urcorner_z : B \longrightarrow A$ par $\ulcorner a \urcorner_z(z) = a$ et $\ulcorner a \urcorner_z(b) = 0$, pour $b \neq z$. Evidemment, pour $a \neq 0$, $Supp(\ulcorner a \urcorner_z) = \{z\}$ et $\ulcorner a \urcorner_z \in D_{\mathbb{AB}\mathcal{F}}$.

Proposition 3.2.2. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

A) : $\langle D_{\mathbb{ABC}}; *\rangle$ est commutative,

B) : $\langle D_{\mathbb{AB}\mathcal{F}}; *\rangle$ est commutative,

C) : Tous les $\ulcorner a \urcorner_x$, $a \in A$, et $x \in B$ commutent,

D) : $\langle A; \cdot\rangle$ et $\langle B; \circ\rangle$ sont commutatives.

Preuve : A) $\Rightarrow$ B) $\Rightarrow$ C) sont évidentes.

C) $\Rightarrow$ D). Supposons que C) est vraie ert utilisons le lemme suivant :

Lemme 3.2.3. *Soit $z, t \in B$ et $c, d \in A$ tels que $z \circ t \neq \emptyset$ et $cd \neq 0$. Alors $z \circ t \subseteq t \circ z$ et $cd = dc$.*

Preuve du lemme : Soit $u \in z \circ t$, arbitraire. Alors

$$0 \neq cd = (\ulcorner c \urcorner_z * \ulcorner d \urcorner_t)(u) = (\ulcorner d \urcorner_t * \ulcorner c \urcorner_z)(u) = \sum_{u \in r \circ s} \ulcorner d \urcorner_t(r) \ulcorner c \urcorner_z(s);$$

d'où on obtient $r = t$, $s = z$, $u \in t \circ z$ et $cd = dc$. Comme u était arbitraire, on obtient $z \circ t \subseteq t \circ z$. $\square$

Par hypothèse, on a que $z \circ t \neq \emptyset$. Par le lemme, $cd = dc$ si au moins un des cd et dc est non nul. Ceci montre que $\langle A; \cdot \rangle$ est commutative. Par le même raisonnement, $z \circ t = t \circ z$ si au moins un des ensembles $z \circ t$ et $t \circ z$ est non vide. Donc $\mathbb{B}$ est commutative.

D) $\Rightarrow$ A). Soit $\langle A; \cdot \rangle$ et $\langle B; \circ \rangle$ commutatives. Alors pour tous $f, g \in D_{\mathbb{ABC}}$ et $x \in B$,

$$(f * g)(x) = \sum_{x \in u \circ v} f(u) g(v) = \sum_{x \in v \circ u} g(v) f(u)$$

car $\langle B; \circ \rangle$ et $\langle A; \cdot \rangle$ sont commutatives. D'où $(f * g)(x) = (g * f)(x)$ et $\langle D_{\mathbb{ABC}}; * \rangle$ est commutative. $\square$

3.3. Associativité et distributivité

Nous donnons les conditions pour qu'une algèbre de convolution générale définie par un multigroupoïde soit associative et distributive. Pour le multigroupoïde $\mathbb{B}$, la composition est basée sur l'union : Pour $p, q, r \in B$, on pose

$$(p \circ q) \circ r = \bigcup_{x \in p \circ q} x \circ r \quad \text{et} \quad p \circ (q \circ r) = \bigcup_{y \in q \circ r} p \circ y.$$

Définition 3.3.1. *$\langle B; \circ \rangle$ est dite **associative** si $(p \circ q) \circ t = p \circ (q \circ t)$ pour tous $p, q, t \in B$.*

Remarque Nous notons :

$A^2.A = \{(ab)c : \ a, b, c \in A\}$, $\quad A.A^2 = \{a(bc) : \ a, b, c \in A\}$,

$B \circ B^2 = \{x \circ (y \circ z) : \ x, y, z \in B\}$, $\quad B^2 \circ B = \{(x \circ y) \circ z : \ x, y, z \in B\}$.

Définition 3.3.2. *i)* $\langle B, \circ \rangle$ *est* ***trivialement associative à droite (respectivement à gauche)*** *si* $B \circ B^2 = \{\emptyset\}$ *(respectivement* $B^2 \circ B = \{\emptyset\}$*).*

ii) $\langle B; \circ \rangle$ *est* ***trivialement associative*** *si elle est trivialement associative à gauche et à droite.*

iii) Soit Z *un sous-ensemble fini de* B*. On note pour tout* $x \in B$,

$$N_Z(x) = \{(p, q) \in Z^2 : x \in p \circ q \}.$$

Soit $\mathbb{B}$ *associative. Pour tous sous-ensemble fini* Z *de* B *et* $z \in B$*, on appelle* ***loi pseudo-distributive induite par*** Z ***et*** z ***de*** B*, l'identité de* $\mathbb{A}$ *suivante :*

$$\sum_{r \in Z} \left(\sum_{p,q \in Z, u \in p \circ q \circ r} a_p b_q \right) c_r \;=\; \sum_{p \in Z} a_p \left(\sum_{q,r \in Z, u \in p \circ q \circ r} b_q c_r \right) \tag{17}$$

où $a_t, b_t, c_t \in A$ $(t \in Z)$.

Proposition 3.3.3. *On suppose que l'algèbre* $\mathbb{A}$ *satisfait la condition* $(\star)$ *suivante :*

Si $A^2.A = \{0\}$ $\Big(A.A^2 = \{0\}\Big)$ *alors pour tous* $k \geq 1$ *et* $a_1, \cdots, a_k, b_1, \cdots b_k, c \in A$,

$$(a_1 b_1 + \cdots + a_k b_k)c = 0 \;\; \Big(\; c(a_1 b_1 + \cdots + a_k b_k) = 0) \Big). \tag{18}$$

Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) : $\langle D_{\mathbb{A}\mathbb{B}\mathcal{C}}; * \rangle$ *est associative.*

2) : $\langle D_{\mathbb{A}\mathbb{B}\mathcal{F}}; * \rangle$ *est associative.*

3) : Au moins une des conditions suivantes est vérifiée :

- **(i):** $A^2.A = \{0\} = A.A^2$,
- **(ii):** $A^2.A = \{0\}$ *et* $\langle B; \circ \rangle$ *est trivialement associative à droite,*
- **(iii):** $A.A^2 = \{0\}$ *et* $\langle B; \circ \rangle$ *est trivialement associative à gauche,*
- **(iv):** $\langle B; \circ \rangle$ *est trivialement associative,*
- **(v):** $\langle A; \cdot \rangle$ *et* $\langle B; \circ \rangle$ *sont associatives; et* $\mathbb{A}$ *satisfait toutes les lois pseudo-distributives induites par tout sous-ensemble fini* Z *de* B *et tout* $z \in B$.

Preuve : 1) $\Rightarrow$ 2) est évident. 2) $\Rightarrow$ 3). Supposons 2) vraie. Alors pour tous $a, b, c \in A$ et tous $p, q, r \in B$,

$$(\ulcorner a \urcorner_p * \ulcorner b \urcorner_q) * \ulcorner c \urcorner_r = \ulcorner a \urcorner_p * (\ulcorner b \urcorner_q * \ulcorner c \urcorner_r)$$

si et seulement si pour tout $z \in B$,

$$\sum_{z \in x \circ y} \Big(\sum_{x \in u \circ v} \ulcorner a \urcorner_p(u) \ulcorner b \urcorner_q(v) \Big) \ulcorner c \urcorner_r(y) = \sum_{z \in x' \circ y'} \ulcorner a \urcorner_p(x') \Big(\sum_{y' \in u' \circ v'} \ulcorner b \urcorner_q(u') \ulcorner c \urcorner_r(v') \Big). \tag{19}$$

Supposons que les propriétés (i) à (iv) ne sont pas vérifiées et montrons que (v) l'est. Comme (iv) n'est pas vérifiée, $\mathbb{B}$ n'est pas trivialement associative à droite ou n'est pas trivialement associative à gauche.

α) Supposons que $\mathbb{B}$ n'est pas trivialement associative à gauche. Montrons que $A^2.A \neq \{0\}$. Supposons le contraire. $A^2.A = \{0\}$. Comme (i) n'est pas vérifiée, on a $A.A^2 \neq \{0\}$ et donc il existe $a, b, c \in A$ tels que $d = a(bc) \neq 0$. Comme (ii) n'est pas vérifiée, et $A^2.A = \{0\}$ on obtient que $\mathbb{B}$ n'est pas trivialement associative à droite et donc $z \in p \circ (q \circ r)$ pour certains $z, p, q, r \in B$. Par définition de $\mathbb{B}$, $z \in p \circ y'$ avec $y' \in q \circ r$. Pour les valeurs $a, b, c, d \in A$ et $p, q, r, y' \in B$, la partie droite de (19) (avec $x' = p$, $u' = q$, $v' = r$) se réduit à d. Tous les produits de la partie gauche de (19) sont 0, sauf possiblement $(ab)c$ (qui correspond à $u = p$, $v = q$ et $y = r$). Par hypothèse, $(ab)c \in A^2.A = \{0\}$ et donc la partie gauche de (19) est 0, ce qui contredit $d \neq 0$. Ainsi, $A^2.A \neq \{0\}$. Soit $a, b, c \in A$ tels que $(ab)c \neq 0$ et soit $p, q, r, z \in B$ tels que $z \in (p \circ q) \circ r$. Alors $z \in x \circ r$ pour un certain $x \in p \circ q$. La partie gauche de (19) est alors $(ab)c \neq 0$ (avec $u = p$, $v = q$ et $y = r$). Le seul terme non nul de la partie droite de (19) doit alors être $a(bc)$ (correspondant à $x' = p$, $u' = q$ et $v' = r$). Ainsi, $z \in p \circ y'$ et $y' \in q \circ r$ pour un certain $y' \in B$. Ce qui signifie que $z \in p \circ (q \circ r)$. Comme z est un élément arbitraire de $(p \circ q) \circ r$, on obtient que pour tous $p, q, r \in B$,

$$(p \circ q) \circ r \subseteq p \circ (q \circ r). \tag{20}$$

Plus encore, nous avons montré que pour tous $a, b, c \in A$,

$$(ab)c \neq 0 \Rightarrow (ab)c = a(bc). \tag{21}$$

Supposons qu'il existe $p, q, r \in B$ tels que $(p \circ q) \circ r \neq \emptyset$. D'après (20), on a que $p \circ (q \circ r) \neq \emptyset$. Soit $z \in p \circ (q \circ r)$ arbitraire. Soit $a, b, c \in A$ tels que $d = a(bc) \neq 0$. De manière analogue à ce qui précéde et d'après (19), on a que $p \circ (q \circ r) \subseteq (p \circ q) \circ r$ et $a(bc) = (ab)c$. Comme $\mathbb{B}$ n'est pas trivialement associative à gauche, il existe

$p', q', r' \in B$ avec $(p' \circ q') \circ r' \neq \emptyset$. On dit donc que pour tous $a, b, c \in A$

$$a(bc) \neq 0 \Rightarrow a(bc) = (ab)c. \tag{22}$$

Ceci montre que $\langle A; \cdot \rangle$ est associative. On a donc montré que pour tous $p, q, r \in B$,

$$p \circ (q \circ r) \subseteq (p \circ q) \circ r. \tag{23}$$

Ainsi, les équations (20) et (23) montrent que $\mathbb{B}$ est associative.

β) Supposons que $\mathbb{B}$ n'est pas trivialement associative à droite. Ce cas se déduit du cas α) par l'introduction du dual de $\mathbb{D}_{\mathbb{A}\mathbb{B}C}$. Posons $\overline{B} = \langle B; \bar{\circ} \rangle$, où $p \bar{\circ} q = q \circ p$ pour tous $p, q \in B$. Posons $\overline{\mathbb{A}} = \langle A; +, \bar{\cdot}, 0 \rangle$ où $a \bar{\cdot} b = b \cdot a$ pour tous $a, b \in A$. On vérifie que $D_{\overline{\mathbb{A}}\,\overline{\mathbb{B}}\,C} = D_{\mathbb{A}\mathbb{B}C}$. En notant la convolution de $\mathbb{D}_{\overline{\mathbb{A}}\,\overline{\mathbb{B}}C}$ par $\bar{*}$, on obtient que pour tous $f, g \in D_{\mathbb{A}\mathbb{B}C}$ et $z \in B$,

$$(f \bar{*} g)(z) = \sum_{z \in x \bar{\circ} y} f(x) \bar{\cdot} g(y) = \sum_{z \in y \circ x} g(y) f(x) = (g * f)(z)$$

d'où $f \bar{*} g = g * f$. On vérifie que $\mathbb{D}_{\mathbb{A}\mathbb{B}C}$ ne satisfait pas (i)-(iv) si et seulement si $\mathbb{D}_{\overline{\mathbb{A}}\,\overline{\mathbb{B}}\,C}$ ne les satisfait pas aussi. En appliquant α) à $\mathbb{D}_{\overline{\mathbb{A}}\,\overline{\mathbb{B}}\,C}$, on obtient que $\langle A; \bar{\cdot} \rangle$ et $\overline{\mathbb{B}}$ sont associatives. Ce qui implique que $\langle A; \cdot \rangle$ et $\mathbb{B}$ sont aussi associatives.

Montrons que $\mathbb{A}$ satisfait toutes les lois pseudo-distributives induites par les sous-ensembles finis et les éléments de B. En effet, l'équation (19) n'est rien d'autre que $(f * (g * h))(z) = ((f * g) * h)(z)$ avec

$$f = \sum_{p \in Z} \ulcorner a_p \urcorner_p, \quad g = \sum_{p \in Z} \ulcorner b_p \urcorner_p, \quad h = \sum_{p \in Z} \ulcorner c_p \urcorner_p.$$

Ainsi, (v) est vérifiée ; ce qui montre 3).

3) $\Rightarrow$ 1). Supposons que 3) est vérifiée. On a l'affirmation suivante :

Affirmation :

A): *Si* $A^2.A = \{0\}$ *alors* $(f * g) * h = \mathbf{0}$ *pour tous* $f, g, h \in \mathbb{D}_{\mathbb{A}\mathbb{B}C}$, *et*

B): *Si* $A.A^2 = \{0\}$ *alors* $f * (g * h) = \mathbf{0}$ *pour tous* $f, g, h \in \mathbb{D}_{\mathbb{A}\mathbb{B}C}$.

Preuve de l'Affirmation : Soit $z \in B$ arbitraire. Par définition, $\big((f*g)*h\big)(z) = \sum_{z \in x \circ y} \big(\sum_{x \in u \circ v} f(u) g(v)\big) h(y)$. Pour x fixé, la somme $\sum_{x \in u \circ v} f(u) g(v)$ est finie et est du type $a_1 b_1 + \cdots + a_k b_k$. Comme $A^2.A = \{0\}$ et par $(\star)$, on obtient que $\Big(\sum_{x \in u \circ v} f(u) g(v)\Big) h(y) = 0$. Ce qui prouve que $((f * g) * h)(z) = \mathbf{0}$ et A). Pour B), il suffit d'appliquer A) à $\overline{\mathbb{D}}_{\overline{\mathbb{A}}\,\overline{\mathbb{B}}\,C}$ $\square$.

1): Supposons que (i) est vérifiée. Alors, par l'affirmation, l'algèbre $\langle D_{\mathbb{AB}C}; *\rangle$ est trivialement associative.

2): Supposons que (ii) est vérifiée. Soit $f, g, h \in D$ arbitraires. Par l'affirmation A), on a que $(f * g) * h = \mathbf{0}$. Comme $\mathbb{B}$ est trivialement associative à droite, alors $p \circ (q \circ r) = \emptyset$ pour tous $p, q, r, \in B$. Soit $z \in B$ arbitraire. Alors

$$(f * (g * h))(z) = \sum_{z \in x \circ y} f(x)\Big(\sum_{y \in u \circ v} g(u)h(v)\Big). \tag{24}$$

Supposons par l'absurde qu'il existe $x, y, u, v \in B$ avec $z \in x \circ y$ et $y \in u \circ v$. Alors par définition, $z \in x \circ (u \circ v) = \emptyset$. Ainsi, la somme de la partie droite de l'equation (24) est 0. Ce qui prouve que $f*(g*h)(z) = 0$ et $f*(g*h) = \mathbf{0}$. Ainsi, l'algèbre $\langle D_{\mathbb{AB}C}; *\rangle$ est trivialement associative.

3): Supposons que (iii) est vérifiée. Alors $\overline{\mathbb{D}}_{\overline{\mathbb{A}}\,\overline{\mathbb{B}}\,C}$ satisfait (ii) et par 2), l'algèbre $\mathbb{D}_{\mathbb{AB}C}$ est trivialement associative.

4): Supposons que (iv) est vérifiée. En combinant les preuves de (iii) et (ii), on obtient que l'algèbre $\langle D_{\mathbb{AB}C}; *\rangle$ est trivialement associative.

5): Supposons que (v) est vérifiée. Soit $f, g, h \in D_{\mathbb{ABC}}$ et $z \in B$ arbitraires. Par la définition de $\mathbb{D}$, les supports de f, g, h, $f * g$ et $g * h$ sont dans $\mathcal{C}$; et par définition, l'ensemble

$$S = \{(p, q, r) \in B^3 : z \in p \circ q \circ r,\ p \in Supp(f),\ q \in Supp(g),\ r \in Supp(h)\}$$

est fini. Posons $p = pr_1 S$, $Q = pr_2 S$ et $R = pr_3 S$; où $pr_1 S = \{p \in B :\ (p, r, s) \in S\ \}$; $pr_2 S$ et $pr_3 S$ sont définis de manière similaire. Posons $Z = P \cup Q \cup R$ et

$$a_p = \begin{cases} f(p) & \text{si} \quad p \in P, \\ 0 & \text{si} \quad p \in Z \setminus P. \end{cases} \quad ; \quad b_q = \begin{cases} g(q) & \text{si} \quad q \in Q, \\ 0 & \text{si} \quad q \in Z \setminus Q. \end{cases} \quad ;$$

$$c_r = \begin{cases} h(r) & \text{si} \quad r \in R, \\ 0 & \text{si} \quad r \in Z \setminus R. \end{cases}$$

Dire que $\Big((f * g) * r\Big)(z) = \Big(f * (g * r)\Big)(z)$ revient à une loi pseudo-distributive induite par Z et z. Ce qui montre 1) et le théorème. $\square$

Remarque : 1) Dans le cas particulier où $\mathbb{B}$ est un groupoïde partiel (c'est-à-dire $\mid p \circ q \mid \leq 1$ pour tous $p, q \in B$), la condition $(\star)$ a été omise dans [Ro 86]

Proposition 3.4.

2) Nous n'avons pas étudié les cas où $A^2 \cdot A = \{0\}$ et $D^2 * D = \{\mathbf{0}\}$.

3) Si $\mathbb{A}$ est distributive et $\mathbb{B}$ associative, alors toutes les lois pseudo-distributives sont vérifées par $\mathbb{A}$ et $\langle D_{\mathbb{ABC}}; *\rangle$ est associative.

4) Les conditions pour que $*$ soit distributive sur $+$ dans $\mathbb{D}_{\mathbb{AB}C}$ sont relativement simples. Nous disons que $\mathbb{A}$ satisfait **la loi distributive à gauche** (droite) si $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \ \Big((a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c\Big)$, pour tous $a, b, c \in A$.

Théorème 3.3.4. *Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(A): $\mathbb{D}_{\mathbb{AB}C}$ *satisfait la loi distributive à gauche (droite),*

(B): *L'algèbre restreinte* $\mathbb{D}_{\mathbb{AB}\mathcal{F}}$ *satisfait la loi distributive à gauche (droite),*

(C): $\mathbb{A}$ *satisfait la loi distributive à gauche (droite).*

Preuve : Nous ne démontrons le théorème que pour la distributivité à gauche, car celle de droite s'obtient par dualité. (A)$\Rightarrow$ (B) est évidente. (B)$\Rightarrow$ (C). Supposons (B) vraie et soit $a, b, c \in A$ arbitraires. Il existe $p, q, r \in B$ tels que $r \in p \circ q$. On peut vérifier que

$$a(b+c) = \ulcorner a \urcorner_p * (\ulcorner b \urcorner_q + \ulcorner c \urcorner_q)(r) = (\ulcorner a \urcorner_p * \ulcorner b \urcorner_q)(r) + (\ulcorner a \urcorner_p * \ulcorner c \urcorner_q)(r) = ab + ac.$$

Donc $\mathbb{A}$ satisfait la loi distributive à gauche. (C)$\Rightarrow$ (A). Supposons (C) vraie. Soit $f, g, h \in D$ et $r \in B$ arbitraires. Par définition,

$$\big(f * (g+h)\big)(r) = \sum_{r \in x o y} f(x)\big(g(y) + h(y)\big).$$

Comme $\mathbb{A}$ satisfait la loi distributive à gauche, les termes de cette somme sont alors $(f * g)(r) + (f * h)(r)$; ce qui prouve que $f * (g+h) = f * g + f * h$. □

Remarque : Une algèbre $\mathbb{S} = \langle S; +, \cdot \rangle$ est **distributive** si elle satisfait les lois distributives à gauche et à droite. De plus, $\mathbb{S}$ est un **demi-anneau** si $\mathbb{S}$ est distributive et $\langle S; + \rangle$ et $\langle S; \cdot \rangle$ sont des demi-groupes.

Corollaire 3.3.5. *Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(A): $\mathbb{D}_{\mathbb{AB}C}$ *est un demi-anneau,*

(B): *L'algèbre restreinte* $\mathbb{D}_{\mathbb{AB}\mathcal{F}}$*est un demi-anneau,*

(C): *L'une des deux conditions suivantes est vraie : a) $\mathbb{A}$ est distributive et au moins une des conditions 3) (i)-(iv) de la proposition 3.3.3 est satisfaite ou b) $\mathbb{B}$ est associative et $\mathbb{A}$ est un demi-anneau.*

Preuve : Elle découle de la proposition 3.3.3; du théorème 3.3.4 et du fait que si **A** est un demi-anneau et $\mathbb{B}$ associative, toutes les lois pseudo-distributives sont satisfaites. □

Corollaire 3.3.6. *On suppose que $A^2.A \neq \{0\} \neq A.A^2$, $B^2 \circ B \neq \{\emptyset\} \neq B \circ B^2$. Alors $\langle D_{\mathbb{A}\mathbb{B}C}; +, *, \mathbf{0}\rangle$ est un anneau si et seulement si $\langle A; +, \cdot, 0\rangle$ est un anneau et $\langle B; \circ\rangle$ est associative.*

Preuve : Soit $\mathbb{D}_{\mathbb{A}\mathbb{B}C}$ un anneau. Alors $\langle D_{\mathbb{A}\mathbb{B}C}; +, -, \mathbf{0}\rangle$ est un groupe abélien. Il est facile de voir que $\langle A; +, -, 0\rangle$ est aussi un groupe abélien, et réciproquement. $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ sont associatives d'après la proposition 3.3.3 ; et $\mathbb{A}$ est distributives d'après le théorème 3.3.4. Ainsi, $\mathbb{A}$ est un anneau. Si $\mathbb{B}$ est associative et $\mathbb{A}$ est un anneau, d'après la même proposition et le même théorème, $\mathbb{D}_{\mathbb{A}\mathbb{B}C}$ est un anneau. □

3.4. Idempotence

On dit qu'une algèbre $\langle S, \cdot\rangle$ est idempotente si $s \cdot s = s$ pour tout $s \in S$. Les demi-treillis et particulièrement les treillis sont des algèbres idempotentes. Nous donnons les conditions pour qu'une algèbre de convolution généralisée soit idempotente.

Définition 3.4.1. *Le multigroupoïde partiel $\langle B; \circ\rangle$ est dit* ***idempotent*** *si $p \circ p = \{p\}$, pour tout $p \in B$.*

Théorème 3.4.2. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(A): *$\langle D_{\mathbb{A}\mathbb{B}C}; *\rangle$ est idempotente,*

(B): *L'algèbre restreinte $\mathbb{D}_{\mathbb{A}\mathbb{B}\mathcal{F}}$ est idempotente, et*

(C): *Les affirmations suivantes sont toutes vraies :*

1) $\langle A; \cdot\rangle$ et $\mathbb{B}$ sont idempotentes,

2) Pour tous $p, q \in B$ la différence symétrique des ensembles $q \circ p$ et $p \circ q$, est un sous-ensemble de $\{p, q\}$ et

$$p \circ q \not\subseteq \{p, q\} \Rightarrow ab + ba = 0 = a + a$$

pour tous $a, b \in A$.

3) S'il existe $p, q \in B$, $p \neq q$ tels que $p \in (p \circ q) \cap (q \circ p)$, alors $a = a + ab + ba$ pour tous $a, b \in A$.

4) S'il existe $p, q \in B$ tels que $p \in (q \circ p) \setminus (p \circ q)$, alors $a = a + ba$ pour tous $a, b \in A$.

5) Si $p \in p \circ q \setminus q \circ p$ alors $a = a + ab$ pour tous $a, b \in A$.

6) S'il existe $p, q \in B$ tels que $(p \circ q) \cap (q \circ p) \setminus \{p, q\} \neq \emptyset$, alors $ab + ba = 0$ pour tous $a, b \in A$.

Preuve : (A)$\Rightarrow$(B) est évidente.

(B)$\Rightarrow$(C).

Soit $a, b \in A$, $a \neq 0$ et $p, q, r \in B$ arbitraires. Comme $f = \ulcorner a \urcorner_p + \ulcorner b \urcorner_q$ est idempotente, on a

$$\ulcorner a \urcorner_p + \ulcorner b \urcorner_q = (\ulcorner a \urcorner_p + \ulcorner b \urcorner_q) * (\ulcorner a \urcorner_p + \ulcorner b \urcorner_q).$$

La fonction f évaluée au point r donne

$$\ulcorner a \urcorner_p(r) + \ulcorner b \urcorner_q(r) = \sum_{r \in x \circ y} \Big(\ulcorner a \urcorner_p(x) + \ulcorner b \urcorner_q(x)\Big)\Big(\ulcorner a \urcorner_p(y) + \ulcorner b \urcorner_q(y)\Big). \qquad (25)$$

En supprimant les termes nuls de la partie droite de l'équation (25), on peut supposer que (x, y) satisfait $x, y \in \{p, q\}$.

Pour prouver 1), posons $b = 0$ et $r = p$. Alors la partie gauche de l'équation (25) se réduit à $a \neq 0$. À la partie droite de (25), on doit alors avoir $(x, y) = (p, p)$; ainsi $p \in p \circ p$ et $a = a \cdot a$. Évidemment, $0 = 0 \cdot 0$, et on a que $\langle A; \cdot \rangle$ est idempotente. Supposons par l'absurde qu'il existe $r \in (p \circ p) \setminus \{p\}$. Pour $b = 0$ l'équation (25) donne la contradiction $0 = a \cdot a = a$. Ainsi, $p \circ p = \{p\}$ et $\mathbb{B}$ est idempotente..

Prouvons 2). Supposons que $p \circ q \setminus \{p, q\} \neq \emptyset$. Comme $\mathbb{B}$ est idempotente, alors $p \neq q$. Soit $r \in p \circ q \setminus \{p, q\}$ arbitraire. La partie gauche de (25) est 0. Regardons la partie droite de (25) et rappelons qu'on peut supposer que (x, y) satisfait $x, y \in \{p, q\}$. Comme $\mathbb{B}$ est idempotente, on a $r \notin p \circ p = \{p\}$ et $r \notin q \circ q = \{q\}$. Supposons par l'absurde que $r \notin q \circ p$ et posons $b = a$. Alors, la partie droite de (25) impose que $(x, y) = (p, q)$ et elle est égale à $a \cdot a$. Comme $\langle A; \cdot \rangle$ est idempotente, $a \cdot a = a = 0$, ce qui est absurde. Ainsi, $r \in q \circ p$ et pour tous $a \neq 0$ et $b \in A$, on a $0 = ab + ba$. Ceci est évidemment aussi vrai pour $a = 0$. Pour $a = b$ on a $a + a = a \cdot a + a \cdot a = 0$. Puisque $r \in p \circ q \setminus \{p, q\}$ était arbitraire, ceci prouve que $p \circ q \setminus \{p, q\} \subseteq q \circ p$. Par symmétrie $q \circ p \setminus \{p, q\} \subseteq p \circ q$. Les deux inclusions impliquent donc que $(p \circ q) \Delta (q \circ p) \subseteq \{p, q\}$. Donc 2) est vérifiée.

Considérons (25) avec $a \neq 0$ et $r = p$. Alors la partie gauche de (25) est $a \neq 0$. Sur la partie droite de (25), les termes non nuls imposent que $p \in x \circ y$ avec $x, y \in \{p, q\}$.

Pour prouver 3), supposons que $p \in (p \circ q) \cap (q \circ p)$ pour certains $p, q \in B,\ p \neq q$. Alors pour $(x, y) = (p, q)$, on a le terme ab et pour $(x, y) = (q, p)$ on a le terme ba. Comme $\mathbb{B}$ est idempotente, $p \in \{p\} = p \circ p$ et donc pour $(x, y) = (p, p)$, on a le terme $aa = a$ comme $\langle \mathbb{A}; \cdot \rangle$ est idempotente. Comme $p \notin \{q\} = q \circ q$, il est impossible que $(x, y) = (q, q)$. Ainsi, (25) donne $a = ab + ba + a$, ce qui prouve 3).

Pour prouver 4), soit $p \in (q \circ p) \setminus (p \circ q)$. À la partie droite de l'équation (25), seulement les termes ba (pour $(x, y) = (p, q)$) et aa (pour $(x, y) = (p, p)$) peuvent être non nuls, ce qui implique que $a = a + ba$ et on a 4).

Pour prouver 5), supposons que $p \in (p \circ q) \setminus (q \circ p)$ pour certains $p, q \in B$. Alors $p \neq q$. À la partie droite de l'équation (25), on n'a que les termes ab (pour $(x, y) = (p, q)$) et aa (pour $(x, y) = (p, p)$) ; ainsi $a = a + ab$ et on a 5).

Pour prouver 6), supposons que $r \in (p \circ q) \cap (q \circ p) \setminus \{p, q\}$ pour certains $p, q, r \in B$. D'après l'équation (25), on a que $0 = ab + ba$ et 6). Donc (C) est vraie.

(C) $\Rightarrow$(A). Supposons (C) vraie . Soit $f \in D_{\mathbb{ABC}}$ et $p \in B$ arbitraire. On veut montrer que $(f * f)(p) = f(p)$. Posons $X = Supp(f)$. Comme $\mathbf{0} * \mathbf{0} = \mathbf{0}$, on peut supposer que $X \neq \emptyset$. Par la définition de $\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}}$, la relation binaire $F = \{(x, y) \in X^2 :\ p \in x \circ y\}$ sur X est finie et

$$(f * f)(p) = \sum_{(x,y) \in F} f(x) f(y). \tag{26}$$

Posons $P = \{x :\ (x, y) \in F\} \cup \{y :\ (x, y) \in F\}$ et $a = f(p)$. Nous montrons qu'on peut supposer que $p \in P$. En effet, comme $\mathbb{B}$ est idempotente, $p \in \{p\} = p \circ p$. Si $a \neq 0$, alors $p \in X$ et $p \in P$. Si $a = 0$, on peut ajouter (p, p) à F, puisque ceci n'affecte pas l'équation (25). Ici P est un ensemble fini et on peut donc écrire $P = \{q_1, q_2, \cdots, q_k\}$ avec $p = q_1$. Pour $m = 1, \cdots, k$, posons

$$Q_m = \{q_1, q_2, \cdots, q_m\}^2 \cap F \text{ et } g_m = \sum_{(x,y)\in Q_m} f(x)f(y).$$

Par induction sur $m = 1, \cdots, k$ nous montrons que $g_m = a$. Pour $m = 1$, on a $g_m = a \cdot a = a$ car $q_1 = p$ et $\langle A; \cdot\rangle$ est idempotente. Pour le pas d'induction, supposons que $g_m = a$ pour un m, $1 \leq m < k$. Notons q_{m+1} par q et remarquons que $p \notin \{q\} = q \circ q$ d'où $(q, q) \notin F$. Posons

$$K = \{(q_i, q) \in F : \ 1 \leq i \leq m\}; \quad L = \{(q, q_t) \in F : \ 1 \leq t \leq m\}.$$

D'après l'hypothèse d'induction, la partie droite de l'equation (26) devient

$$a + \sum_{(x_i,q)\in K} f(x_i)f(q) + \sum_{(q,x_i)\in L} f(q)f(x_i). \tag{27}$$

Nous distinguons les cas suivants : 1) Soit $i = 1$. Alors $q_1 = p$. a) Supposons $(p, q) \in K$ et $(q, p) \in L$. Alors $p \in (p \circ q) \cap (q \circ p)$ et d'après (C) 3), on a $a + af(q) + f(q)a = a$; ce qui montre que les deux produits dans (27) sont absorbés par a. b) Supposons que $(q, p) \in L$ et $(p, q) \notin K$. Alors d'après (C) 4), on a $a + f(q)a = a$. c) Si $(p, q) \in K$ et $(q, p) \notin L$, alors d'après (C) 5), on a que $a = a + af(q)$.

2) Soit $2 \leq i \leq m$. a) Supposons que $(q_i, q) \in K$ et $(q, q_i) \in L$. Alors $p \in (q_i \circ q) \cap (q \circ q_i)$ et $q_1 = p \notin \{q_i, q\}$. D'après (C) 6), on a $f(q_i)f(q) + f(q)f(q_i) = 0$. b) Supposons par l'absurde que $(q_i, q) \in K$ et $(q, q_i) \notin L$. Alors $p \in q_i \circ p \setminus q \circ q_i \subseteq (q_i \circ q)\Delta(q \circ q_i)$, ce qui contredit (C) 2). On a le même résultat si $(q_i, q) \notin K$ et $(q, q_i) \in L$. Ceci conclut la preuve par induction. Ainsi, $g_k = a$ et $(f*f)(p) = f(p)$. Ceci démontre (A). $\square$

Corollaire 3.4.3. *On suppose que $\langle A; +, \cdot\rangle$ vérifie : pour tous $a, x \in A$, $a = a + x \Leftrightarrow x = 0$. Alors l'algèbre $\langle D_{\mathbb{ABC}}, *\rangle$ est idempotente si et seulement si*

1) $\langle A; \cdot\rangle$ est idempotente ;

2) $\langle B; \circ\rangle$ est idempotente et commutative et

3) $a + a = ab + ba = 0$ pour tous $a, b \in A$.

Peuve : ($\Rightarrow$) Supposons que $\langle D_{\mathbb{ABC}}, *\rangle$ est idempotente. D'après le théorème 3.4.2, $\langle A;\cdot\rangle$ et $\langle B;\circ\rangle$ sont idempotentes. D'après (C) 2) du théorème 3.4.2, la différence symétrique de $p \circ q$ et $q \circ p$ est une partie de $\{p, q\}$. Si $p \in p \circ q \setminus q \circ p$, d'après le (C) 5) du héorème 3.4.2 et l'hypothèse, on a $ab = 0$ pour tous $a, b \in A$. En particulier pour $a = b$, on a $a = a^2 = 0$, ce qui est impossible. Donc $p \circ q = q \circ p$ et $\langle B;\circ\rangle$ est commutative. Aussi d'après (C) 3) et 6) du théorème 3.4.2 et l'hypothèse, on obtient $ab+ba = 0$ pour tous $a, b \in B$. En particulier, pour $a = b$, on a que $a + a = 0$.
($\Leftarrow$) Toutes les conditions de (C) du théorème 3.4.2 sont vérifées et donc $\langle D_{\mathbb{ABC}}, *\rangle$ est idempotente. $\square$
Dans le corollaire suivant, nous combinons les conditions pour que $\langle D_{\mathbb{ABC}}, *\rangle$ soit commutative et idempotente.
Corollaire 3.4.4. *Les propositions suivantes sont équivalentes pour* $\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}}$ *:*
(I) $\langle D_{\mathbb{ABC}}; *\rangle$ *est commutative et idempotente,*
(II) $\langle D_{\mathbb{AB}\mathcal{F}}; *\rangle$ *est commutative et idempotente,*
(III)

i): $\langle A;\cdot\rangle$ *et* $\mathbb{B}$ *sont commutatives et idempotentes,*

ii): $a = a + 2ab$ *pour tous* $a, b \in A$*, s'il existe* $p, q \in B$, $p \neq q$*, avec* $p \in p \circ q$.

iii): $2a = 0$ *pour tout* $a \in A$*, s'il existe* $p, q \in B$ *tels que* $p \circ q \not\subseteq \{p, q\}$.

Preuve : (I)$\Rightarrow$(II) est evidente.
(II)$\Rightarrow$(III). Supposons (II) vraie. Alors la condition D) de la proposition 3.2.2 est vérifiée, et donc $\langle A;\cdot\rangle$ et $\mathbb{B}$ sont commutatives. L'idempotence de $\langle A;\cdot\rangle$ et de $\mathbb{B}$ découlent de la condition (C) 1) du théorème 3.4.2. Ainsi (III) i) est vérifiée. Pour (III) ii), supposons qu'il existe $p, q \in B$, $p \neq q$ tels que $p \in p \circ q \subseteq \{p, q\}$. Comme $\mathbb{B}$ et $\langle A;\cdot\rangle$ sont commutatives, la condition (C) 4) du Théorème 3.4.2 4) donne $a = a + 2ab$ pour tous $a, b \in A$. Pour (III) iii), supposons $p \circ q \not\subseteq \{p, q\}$ pour certains $p, q \in B$. La condition (C) 2) du théorème 3.4.2 donne $2a = 0$.
(III)$\Rightarrow$(I). Supposons que (III) est vérifiée. Alors D) de la proposition 3.2.2 est vérifiée et alors $\langle D_{\mathbb{ABC}}; *\rangle$ est commutative. Pour prouver l'idempotence de $\langle D_{\mathbb{ABC}}; *\rangle$, nous vérifions la condition (C) du théorème 3.4.2. La condition (C) 1) découle de (III) i). De même, (C) 2) découle de (III) iii) et de la commutativité de $\mathbb{B}$.

La condition (C) 3)découle de (III) ii) et de la commutativité de $\mathbb{B}$. Les conditions (C) 4) et 5) sont triviales. La condition (C) 6) découle de (III) iii) et de la commutativité de $\langle A; \cdot \rangle$. Ainsi $\langle D_{\mathbb{A}\mathbb{B}C}; * \rangle$ est idempotente. $\square$

Corollaire 3.4.5. *Les affirmations suivantes sont équivalentes sur $\mathbb{D}_{\mathbb{A}\mathbb{B}C}$:*

(1) $\langle D_{\mathbb{A}\mathbb{B}C}; + \rangle$ et $\langle D_{\mathbb{A}\mathbb{B}C}; * \rangle$ sont commutatives et idempotentes,

(2) $\langle D_{\mathbb{A}\mathbb{B}\mathcal{F}}; + \rangle$ et $\langle D_{\mathbb{A}\mathbb{B}\mathcal{F}}; * \rangle$ sont commutatives et idempotentes,

(3)

i): *$\langle A; + \rangle$; $\langle A; \cdot \rangle$ et $\mathbb{B}$ sont commutatives et idempotentes,*

ii): *$p \circ q \subseteq \{p, q\}$ pour tous $p, q \in B$, et*

iii): *Si $p \circ q \neq \emptyset$ pour certains $p, q \in B$, $p \neq q$, alors $a = a + ab$ pour tous $a, b \in A$.*

Preuve : (1)$\Rightarrow$(2) est évidente.

(2) $\Rightarrow$(3). Supposons (2) vraie. Soit $a \in A$ et $p \in B$ arbitraires. Alors

$$a = \ulcorner a \urcorner_p(p) = \ulcorner a \urcorner_p(p) + \ulcorner a \urcorner_p(p) = a + a$$

et $\langle A; + \rangle$ est idempotente. D'après le corolaire 3.4.4 (III) i), on voit que $\langle A; \cdot \rangle$ et $\mathbb{B}$ sont idempotentes ; ce qui prouve (3) i).

Pour montrer (3) ii), supposons par l'absurde qu'il existe $p, q \in B$ tels que $p \circ q \not\subseteq \{p, q\}$. D'après (III) iii) du corollaire 3.4.4, on a que $a + a = 0$ pour tout $a \in A$, ce qui contredit l'idempotence de $\langle A; + \rangle$.

Pour (3) iii), soit $p \circ q \neq \emptyset$ pour certains $p, q \in B$, $p \neq q$. D'après ii), on a $p \circ q \subseteq \{p, q\}$. Comme $\mathbb{B}$ est commutative, on peut écrire $p \in p \circ q$. D'après (III) ii) du corollaire 3.4.4, on a que $a = a + 2ab$ pour tous $a, b \in A$.

(3) $\Rightarrow$(2). Supposons (3) vraie. Alors $\langle D_{\mathbb{A}\mathbb{B}C}; + \rangle$ est à la fois commutative et idempotente. On peut vérifier que (3) entraîne la condition (III) du corollaire 3.4.4 et ainsi $\langle D_{\mathbb{A}\mathbb{B}C}; * \rangle$ est aussi à la fois commutative et idempotente. $\square$

Définition 3.4.6. *Une relation binaire $\leq$ sur un ensemble B est* ***un quasi-ordre*** *si elle est réflexive et transitive.*

Une ***chaîne*** *dans un quasi-ordre $\langle B; \leq \rangle$ est un sous-ensemble C de B tel que pour tous $x, y \in C$, on a $x \leq y$ ou $y \leq x$.*

Soit $C \subseteq B$. On dit que $z \in C$ est ***un plus grand élément*** *de C si $x \leq z$, pour* *tout $x \in C$. Un plus grand élément dans ce cas n'est donc pas unique, puisque la relation n'est pas nécessairement antisymmétrique.*

Un quasi-ordre $\langle B; \leq\rangle$ est appelé ***forêt orientée*** *si tout sous-ensemble borné supérieurement de B est une chaîne.*

Dans ce cas, on note par $m_\leq$, le plus petit cardinal plus grand que les longueurs des chaînes finies dans $\langle B; \leq\rangle$ (c'est-à-dire que $m_\leq$ vaut $l+1$ si la plus longue chaîne a l éléments et $m_\leq = \aleph_0$ sinon).

Sur le multigroupoïde partiel $\langle B; \circ\rangle$, On définit une relation binaire $\leq$ par : pour tous $p, q \in B$,

$$p \leq q \text{ si } q \in p \circ q.$$

Soit $\mathbb{C} = \langle C; \circ\rangle$ un multigroupoïde partiel. On dit que $\mathbb{C}$ est un ***demi-treillis*** *si $\mathbb{C}$ est idempotent, commutatif et associatif. Si $\mathbb{C}$ est un groupoïde (c'est-à-dire $| x \circ y |= 1$ pour tous $x, y \in C$), alors c'est la définition algébrique d'un demi-treillis.*

Proposition 3.4.7. *Les propositions suivantes sont équivalentes pour l' algèbre $\mathbb{D}_{\mathbb{A}\mathbb{B}C}$:*

- **(A):** *$\langle D_{\mathbb{A}\mathbb{B}C}; +\rangle$ et $\langle D_{\mathbb{A}\mathbb{B}C}; *\rangle$ sont des demi-treillis (c'est-à-dire sont idempotentes, commutatives et associatives).*
- **(B):** *$\langle D_{\mathbb{A}\mathbb{B}\mathcal{F}}; +\rangle$ et $\langle D_{\mathbb{A}\mathbb{B}\mathcal{F}}; *\rangle$ sont des demi-treillis.*
- **(C):** *i) $\langle B; \circ\rangle$, est un demi-treillis tel que $p \circ q \subseteq \{p, q\}$ pour tous $p, q \in B$; et le quasi ordre $\leq$ est une forêt orientée, (ii) $\langle A; +\rangle$, $\langle A; \cdot\rangle$ sont des demi-treillis tels que a) s'il existe $p, q \in B$, $p \circ q \neq \emptyset$, alors $a = a + ab$ pour tous $a, b \in A$, et b) si $k < m_\leq$ et $a, b_1, \cdots, b_k, c_1, \cdots c_k \in A$, alors*

$$a\Big(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} b_i c_j\Big) = \sum_{j=1}^{k}\Big(\sum_{i=1}^{k} ab_i\Big)c_j. \tag{28}$$

Preuve : (A)$\Rightarrow$ (B) est évidente.

(B) $\Rightarrow$ (C). Supposons (B) vraie. D'après le corollaire 3.4.4, l'algèbre $\langle A; \cdot\rangle$ est commutative et idempotente. D'après la proposition 3.3.3 2)$\Rightarrow$ 3), une des conditions (i)-(v) est vérifiée. Évidemment, les conditions (i)-(iv) ne sont pas satisfaites car $\langle A; \cdot\rangle$ est idempotente. Ainsi, (v) est vraie, ce qui prouve que $\langle B; \circ\rangle$ est associative et $\langle A; \cdot\rangle$ est un demi-groupe. Alors $\mathbb{A} = \langle A; +, \cdot, 0\rangle$ est un demi-treillis et d'après le corollaire 3.4.5 (3) (ii) $p \circ q \subseteq \{p, q\}$ pour tous $p, q \in B$. Dans l'affirmation 1 ci-dessous, nous montrons que la relation $\leq$ sur B est un quasi-ordre. Il est évident que $\leq$ est réflexive, puisque $p \circ p = \{p\}$ pour tout $p \in B$.

Affirmation 1 : *La relation $\leq$ est transitive.*

Preuve de l'Affirmation 1. Soit $p \leq q \leq r$. Alors par définition on a que $q \in p \circ q$ et $r \in q \circ r$. Il n'y a rien à prouver si $p = q$, $q = r$ ou $p = r$. Ainsi, supposons que p, q, r sont deux à deux distincts. Nous considérons quatre cas :

1) Soit $p \circ q = \{q\}$ et $q \circ r = \{r\}$, alors

$$\{r\} = q \circ r = (p \circ q) \circ r = p \circ (q \circ r) = p \circ r$$

montre que $r \in p \circ r$ et $p \leq r$.

2) Soit $p \circ q = \{q\}$ et $q \circ r = \{q, r\}$. Alors

$$\{r\} \in q \circ r = (p \circ q) \circ r = p \circ (q \circ r) = p \circ \{q, r\} = (p \circ q) \cup (p \circ r) = \{q\} \cup (p \circ r).$$

Comme $r \neq q$, on a $r \in p \circ r$ et $p \leq r$.

3) Soit $p \circ q = \{p, q\}$ et $q \circ r = \{r\}$, alors

$$(p \circ r) \cup (q \circ r) = \{p, q\} \circ r = (p \circ q) \circ r = p \circ (q \circ r) = p \circ r$$

montre que $\{r\} = q \circ r \subseteq p \circ r$ et $p \leq r$.

4) Soit $p \circ q = \{p, q\}$ et $q \circ r = \{q, r\}$, alors

$$\{p, q\} \cup (p \circ r) = (p \circ q) \cup (p \circ r) = p \circ \{q, r\} = p \circ (q \circ r) = (p \circ q) \circ r$$

$$= \{p, q\} \circ r = (p \circ r) \cup (p \circ r) = (p \circ r) \cup \{q, r\}.$$

D'après ce qui précède, $\{p, q\} \cup (p \circ r) = (p \circ r) \cup \{q, r\}$ et $r \notin \{p, q\}$. On a donc $r \in p \circ r$ (en effet, même $p \in p \circ r$; c'est-à-dire $p \circ r = \{p, r\}$) et $p \leq r$.

Ceci prouve que $\leq$ est transitive. $\square$

Affirmation 2 : *Le quasi-ordre $\leq$ est une forêt orientée.*

Preuve de l'Affirmation 2 : Il suffit de montrer que pour tous $p, q, r \in B$,

$$p \leq r \geq q \Rightarrow (p \leq q \text{ ou } q \leq p).$$

On a que $r \in (p \circ r) \cap (q \circ r)$ et donc

$$r \in p \circ r \subseteq p \circ (q \circ r) = (p \circ q) \circ r$$

prouve que $p \circ q \neq \emptyset$. Comme $\emptyset \neq p \circ q \subseteq \{p, q\}$, alors $p \in p \circ q$ ou $q \in q \circ p$ et donc $p \leq q$ ou $q \leq p$. $\square$

Notons que (C) implique la condition (3) du corollaire 3.4.5 et donc $\langle D; +\rangle$ et $\langle D; *\rangle$ sont commutatives et idempotentes. Pour montrer que $\langle D; *\rangle$ est associative, il suffit de vérifier la condition 3 (v) de la proposition 3.3.3. Comme $\langle A; \cdot\rangle$ et $\mathbb{B}$ sont associatives, il reste à vérifier que $\mathbb{A}$ satisfait toutes les lois pseudo-distributives induites par les sous-ensembles finis de B et les éléments de B. Pour montrer (28), soit $k < m_{\leq}$ et $a, b_1, \cdots, b_k, c_1, \cdots, c_k \in B$ arbitraires. Par la définition de $m_{\leq}$, comme $k < m_{\leq}$, il existe une chaîne $d_1 < \cdots < d_k$ de B. Posons $Z = \{d_1, d_2, \cdots d_k\}$, $\tilde{a}_{d_1} = \cdots = \tilde{a}_{d_{k-1}} = 0$, $\tilde{a}_{d_k} = a$ et $\tilde{b}_{d_i} = b_i$, $\tilde{c}_{d_i} = c_i$ $(i = 1, \cdots, k)$. Pour Z, $\tilde{a}_{d_1}, \cdots, \tilde{a}_{d_k}$, $\tilde{b}_{d_1}, \cdots, \tilde{b}_{d_k}$, $\tilde{c}_{d_1}, \cdots, \tilde{c}_{d_k}$, et $z = d_k$, la loi pseudo-distributive se réduit à

$$a\Big(\sum\{b_i c_j :\ 1 \leq i, j \leq k;\ d_k \in d_k \circ d_i \circ d_j\}\Big) =$$

$$\sum_{j=1}^{k} \Big(\sum\{ab_i :\ 1 \leq i, j \leq k;\ d_k \in d_k \circ d_i \circ d_j\}\Big)c_j. \tag{29}$$

Remarquons que dans la chaîne $d_1 < \cdots < d_k$, l'élément d_k vérifie $d_k \geq d_l$ pour tout $l = 1, \cdots, k$. D'après la commutativité et l'associativité de $\mathbb{B}$, la condition $d_k \in d_k \circ d_i \circ d_j$ dans (29) est équivalente à $d_k \in d_i \circ d_j \circ d_k$. Par la définition de $\leq$, cette dernière condition est équivalente à $x \leq d_k$ pour tout $x \in d_i \circ d_j$. Dans la chaîne $d_1 < \cdots < d_k$ ceci signifie que $d_{min(i,j)} \leq d_k$, ce qui est vrai. Donc la restriction $d_k \in d_k \circ d_i \circ d_j$ n'est pas nécessaire et (29) se réduit à (28) ; ce qui prouve (C).

(C) $\Rightarrow$ (A). Supposons que (C) est vraie. Alors $\langle D; *\rangle$ est commutative et idempotente. Pour vérifier la proposition 3.3.3, 3)(v), nous montrons que toutes les lois pseudo-distributives sont vraies. Soit Z un sous-ensemble fini de B, $b \in Z$ et $a_i, b_i, c_i \in A$ pour tout $i \in Z$.

Affirmation 3 : *Pour tous* $p, q, r, z \in B$,

$$z \in p \circ q \circ r \Leftrightarrow z \in \{p, q, r\}, z \geq p, z \geq q, z \geq r.$$

Preuve de l'Affirmation 3 : ($\Rightarrow$) Soit $z \in p \circ q \circ r$. Alors

$$z \in (p \circ q) \circ r \subseteq \{p, q\} \circ r = (p \circ r) \cup (q \circ r) \subseteq \{p, q, r\}.$$

Supposons par l'absurde que $z \geq p$, $z \geq q$, $z \geq r$ ne sont pas vraies. Par symmétrie, on peut supposer que $z \not\geq p$. Par la définition de $\leq$, on a alors $z \notin p \circ z \subseteq \{z, p\}$. Nous distinguons deux cas.

a) Supposons que $p \circ z = \emptyset$. Comme $\{p\} = p \circ p$ et $z \in \{p, q, r\}$, on a que $z \in \{q, r\}$. Par symétrie, on peut supposer que $z = q$. Ainsi, $q \circ p = z \circ p = \emptyset$ et on a la contradiction $q = z \in p \circ q \circ r = \emptyset \circ r = \emptyset$.

b) Ainsi, supposons $p \circ z \neq \emptyset$. Comme $z \notin p \circ z$, alors $p \circ z = \{p\}$. $z \neq p$ et donc $z \in \{r, q\}$. Une fois de plus, on peut supposer par symétrie que $z = q$. Ainsi $\{q\} = p \circ q$ implique $p \leq q = z$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

($\Leftarrow$) Soit $z \in \{p, q, r\}$, $z \geq p$, $z \geq q$, $z \geq r$. Par symétrie, on peut supposer que $z = p$. Alors $p \geq q$, $p \geq r$ et $p \in p \circ q$, $p \in p \circ r$ entraînent que $z = p \in p \circ q \subseteq (p \circ r) \circ q = p \circ q \circ r$. $\square$

Affirmation 4 : *Soit $Z \subseteq B$ fini, $z \in B$ et soit T l'union de tous les $\{p, q, r\} \subseteq Z$ tels que $z \in p \circ q \circ r$. Alors T est une chaîne dans $\leq$ et z est l'un de ses plus grands éléments.*

Preuve de l'Affirmation 4 : D'après l'affirmation 3, z est un plus grand élément de T. Comme $\leq$ est une forêt orientée, T est une chaîne. $\square$

Affirmation 5 : *Si $k < m_{\leq}$ et $a, b_i, c_i \in A$ $(i = 1, \cdots, k)$ alors*

$$\sum_{j=1}^{k} \Big(\sum_{i=1}^{k} ab_i \Big) c_j = \sum_{i=1}^{k} \Big(\sum_{j=1}^{k} ac_j \Big) b_i. \tag{30}$$

Preuve de l'Affirmation 5 : Comme $\langle A; + \rangle$ et $\langle A; \cdot \rangle$ sont des demi-treillis, en appliquant deux fois (28), on a

$$\sum_{j=1}^{k} \Big(\sum_{i=1}^{k} ab_i \Big) c_j = a \Big(\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} b_i c_j \Big) = a \Big(\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{k} c_j b_i \Big) = \sum_{i=1}^{k} \Big(\sum_{j=1}^{k} ac_j \Big) b_i. \quad \square$$

Montrons que la loi pseudo-distributive induite par un sous-ensemble fini Z de B et $z \in B$ est vérifiée par $\mathbb{A}$. Pour tout $i \in Z$, soient $a_i, b_i, c_i \in A$ arbitraires. La partie droite de (17) est

$$\sum_{p\in Z} a_p\Big(\sum\{b_q c_r :\ q,r\in Z,\ z\in p\circ q\circ r\ \}\Big). \tag{31}$$

Posons $T=\{(p,q,r)\in Z^3:\ z\in p\circ q\circ r\ \}$. Si $T=\emptyset$ alors (17) est trivialement satisfaite. Ainsi, supposons $T\neq\emptyset$. D'après l'affirmation 4, T est une chaîne dans Z et z est l'un de ses plus grands éléments. Par l'affirmation 3,

$$\{(p,q,r)\in Z^3:\ z\in p\circ q\circ r\ \}=\Big(\{z\}\times Z^2\Big)\cup\Big(Z\times\{z\}\times Z\Big)\cup\Big(Z^2\times\{z\}\Big)$$

et donc (31) peut s'écrire comme

$$a_z\Big(\sum_{q,r\in Z} b_q c_r\Big)+\sum_{p\in Z} a_p\Big(\sum_{r\in Z} b_z c_r\Big)+\sum_{p\in Z} a_p\Big(\sum_{q\in Z} b_q c_z\Big). \tag{32}$$

En appliquant respectivement (28), (30) et (28) à la première, deuxième et troisième partie de (32) (avec l'ensemble des indices $\{1,\cdots,k\}$ remplacé par Z), on transforme (32) à

$$\sum_{r\in Z}\Big(\sum_{q\in Z} a_z b_q\Big)c_r+\sum_{r\in Z}\Big(\sum_{p\in Z} a_p b_z\Big)c_r+\Big(\sum_{p,q\in Z} a_p b_q\Big)c_z,$$

Ce qui est la partie de gauche de (17). $\square$

Remarque : Il est bien connu qu'un treillis $\langle L;\vee,\wedge\rangle$ est un bidemitreillis où $\vee$ et $\wedge$ sont liées par les lois absorptives : $a\vee(a\wedge b)=a=a\wedge(a\vee b)$ pour tous $a,b\in L$.

Pour $\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}}$ arbitraire, on caractérise la **loi d'absorption** $f*(f+g)=f$ (parmi les plusieurs possibles), pour tous $f,g\in D_{\mathbb{ABC}}$.

Proposition 3.4.8. *Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1) $\langle D_{\mathbb{ABC}};+,*\rangle$ *vérifie la loi d'absorption ci-dessus,*

2) $\langle D_{\mathbb{AB}\mathcal{F}};+,*\rangle$ *vérifie la loi d'absorption ci-dessus,*

3)

- **i):** $a(a+b)=a$ *pour tous* $a,b\in A$,
- **ii):** $\langle B;\circ\rangle$ *est idempotente,*
- **iii):** *pour tous* $p,q\in B$, *si* $p\circ q\neq\emptyset$, *alors* $p\circ q=\{p\}$ *et* $a+ab=a$, *pour tous* $a,b\in A$.

Preuve : 1) $\Rightarrow$ 2) est évidente.

2) $\Rightarrow$ 3). Supposons que $\langle D_{\mathbb{A}\mathbb{B}\mathcal{F}}; +, *\rangle$ vérifie la loi d'absorption.

i) Soit $a, b \in A$, $a \neq 0$. Soit $p \in B$. Alors on a $\ulcorner a \urcorner_p * (\ulcorner a \urcorner_p + \ulcorner b \urcorner_p) = \ulcorner a \urcorner_p$ et donc

$$\sum_{p \in tov} \ulcorner a \urcorner_p(t) \left(\ulcorner a \urcorner_p + \ulcorner b \urcorner_p\right)(v) = \ulcorner a \urcorner_p(p).$$

Comme $a = \ulcorner a \urcorner_p(p) \neq 0$,

$$\sum_{p \in tov} \ulcorner a \urcorner_p(t) \left(\ulcorner a \urcorner_p + \ulcorner b \urcorner_p\right)(v) \neq 0.$$

D'où $p \in p \circ p$ et $a(a+b) = a$.

ii) Soit $p \in B$. On a montré d'après i) que $p \in p \circ p$. Supposons qu'il existe $m \in p \circ p$; $m \neq p$. Alors pour $a \neq 0$, on a

$$\sum_{m \in tov} \ulcorner a \urcorner_p(t) \left(\ulcorner a \urcorner_p + \ulcorner b \urcorner_p\right)(v) = \ulcorner a \urcorner_p(m);$$

c'est-à-dire $0 = a(a+b)$. D'après i), on a $a(a+b) = a$; d'où $a = 0$, ce qui est absurde. Donc $m \notin p \circ p$ et $p \circ p = \{p\}$.

iii) Soit $p, q \in B$, $p \circ q \neq \emptyset$, $p \neq q$. Soit $m \in p \circ q$, $m \neq p$. Soit $a, b \in A$. On a $\ulcorner a \urcorner_p * (\ulcorner a \urcorner_p + \ulcorner a + b \urcorner_q) = \ulcorner a \urcorner_p$. Ainsi,

$$\sum_{m \in tov} \ulcorner a \urcorner_p(t) \left(\ulcorner a \urcorner_p + \ulcorner a + b \urcorner_q\right)(v) = \ulcorner a \urcorner_p(m);$$

c'est-à-dire $a(a + (a+b)) = 0$ et $a = 0$; ce qui est absurde. Donc $m = p$ et $p \circ q = \{p\}$. En plus,

$$\sum_{p \in tov} \ulcorner a \urcorner_p(t) \left(\ulcorner a \urcorner_p + \ulcorner b \urcorner_q\right)(v) = \ulcorner a \urcorner_p(p),$$

c'est-à-dire $a^2 + ab = a$, car $p \in p \circ p$ et $p \in p \circ q$, d'où $a = a + ab$.

3) $\Rightarrow$ 1). Soit $f, g \in D_{\mathbb{ABC}}$. Soit $x \in B$.

$$\begin{aligned}
f * (f+g)(x) &= \sum_{x \in tov} f(t)\,(f(v) + g(v)) \\
&= \sum_{x \in xov} f(x)\,(f(v) + g(v)) \quad \text{car} \quad p \circ q = \{p\}, p \neq q \\
&= f(x)\,(f(x) + g(x)) + \sum_{x \in xov, x \neq v} f(x)\,(f(v) + g(v)) \\
&= f(x) + \sum_{x \in xov, x \neq v} f(x)\,(f(v) + g(v)) \quad \text{car} \quad a(a+b) = a \\
&= f(x) \quad \text{car} \quad a + ab = a
\end{aligned}$$

Donc $f * (f+g) = f$ $\square$

3.5. ELÉMENT UNITÉ

Dans cette section, nous explorons les conditions d'existence de l'élément unité pour l'algèbre de convolution.

Proposition 3.5.1. *Un élément $e \in D_{\mathbb{ABC}}$ est **une unité à gauche** (respectivement **à droite**) de $\langle D_{\mathbb{ABC}}; * \rangle$ si et seulement si pour tous $p, q \in B$, $p \neq q$ et tout $a \in A$,*

$$\sum_{p \in xop} e(x)a = a, \quad \sum_{q \in xop} e(x)a = 0, \tag{33}$$

$$\Big(\textit{respectivement} \sum_{p \in pox} ae(x) = a, \quad \sum_{q \in pox} ae(x) = 0\Big). \tag{34}$$

Preuve : ($\Rightarrow$) Soit e une unité à gauche de $\mathbb{D}$ et $a \in A$. Alors pour tous $p, q \in B$,

$$\ulcorner a \urcorner_p(q) = (e * \ulcorner a \urcorner_p)(q) = \sum_{q \in xoy} e(x) \ulcorner a \urcorner_p(y) = \sum_{q \in xop} e(x)a$$

ce qui prouve (33). L'équation (34) se démontre par dualité.

($\Leftarrow$) Par dualité, il suffit de considérer le cas où e vérifie (33). Soit $f \in D_{\mathbb{ABC}}$ et $q \in B$ arbitraires. Alors

$$(e * f)(q) = \sum_{q \in xoy} e(x)f(y) = \sum_{y \in B} \sum_{q \in xoy} e(x)f(y) = \sum_{y \in B} \ulcorner f(y) \urcorner_y(q) = f(q),$$

d'où $e * f = f$ et e est une unité à gauche de $D_{\mathbb{ABC}}$. $\square$

Les conditions (33) et (34) sont simplifiées si $\mathbb{A}$ est distributive.

Corollaire 3.5.2. *Si $\mathbb{A}$ satisfait la loi distributive à droite (gauche), alors $e \in D_{\mathbb{ABC}}$ est une unité à gauche (droite) de $\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}}$ si et seulement si pour tous $p, q \in B$, $p \neq q$, on a*

(i) $s_p = \sum_{p \in x o p} e(x)$ est un unité à gauche (droite) de $\langle A; \cdot \rangle$.

(ii) $s_{pq} = \sum_{q \in x o p} e(x)$ est un annulateur à gauche (droite) de $\langle A; \cdot \rangle$.

Preuve : Si e est une unité à gauche de $\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}}$, alors comme $\mathbb{A}$ satisfait la loi distributive à droite, la première équation de (33) devient $s_p a = a$; et la seconde équation de (33) devient $s_{pq} a = 0$ pour tout $a \in A$; d'où s_p est une unité à gauche de $\langle A; \cdot \rangle$ et s_{pq} un annulateur à gauche de $\langle A; \cdot \rangle$. On utilise un argument similaire pour montrer l'autre cas. $\square$

Corollaire 3.5.3. *On suppose $\mathbb{A}$ distributive. Alors $e \in D_{\mathbb{ABC}}$ est une unité de $\mathbb{D}_{\mathbb{ABC}}$ si et seulement si (i) $\langle A; \cdot \rangle$ a une unité 1 et (ii) Pour tous $p, q \in B$, $p \neq q$*

$$\sum_{p \in x o p} e(x) = 1 = \sum_{p \in p o x} e(x), \tag{35}$$

$$\sum_{q \in x o p} e(x) = 0 = \sum_{q \in p o x} e(x) \tag{36}$$

Preuve : Ce résultat découle du corollaire 3.5.2 et du fait que si a est un annulateur de $\langle A; \cdot, 1 \rangle$ alors $a = a.1 = 0$. $\square$

Corollaire 3.5.4. *On suppose que le multigroupoïde partiel $\langle B; \circ \rangle$ est commutatif et vérifie les deux conditions suivantes :*

α) Pour tout $p \in B$, l'équation $p \in x \circ p$ a au plus une solution x.

β) Pour tous $p, q \in B$, si $p \circ q \neq \emptyset$, alors $t \in (q \circ p) \cap (x \circ p) \Rightarrow x = q$.

Alors e est une unité à gauche de $\langle D_{\mathbb{ABC}}; * \rangle$ si et seulement s'il existe une application φ définie de B vers B telle que pour tous $p, q \in B$, $p \neq q$, $p \in \varphi(p) \circ p$ et $\varphi(q) \circ p \subseteq \{p\}$; et

i): *Pour tout $x \in Im\varphi$, $e(x)$ est une unité à gauche de $\langle A; \cdot \rangle$,*

ii): *Pour tout $x \in B \setminus Im\varphi$, $e(x)$ est un annulateur à gauche de $\langle A; \cdot \rangle$.*

Preuve : ($\Rightarrow$) Soit e une unité à gauche de $\langle D_{\mathbb{ABC}}; *\rangle$. Alors d'après l'équation (33), on a que : $\sum_{q\in xop} e(x)a = 0$ et $\sum_{p\in xop} e(x)a = a$, pour tous $p, q \in B$, $p \neq q$ et pour tout $a \in A$. Soit $a \in A$, $a \neq 0$. Soit $p \in B$. Alors $\sum_{p\in xop} e(x)a = a$. Ainsi, $\sum_{p\in xop} e(x)a \neq 0$. D'où il existe $x \in B$ tel que $p \in x \circ p$ et x est unique d'après α). Pour $p \in B$, on pose $\varphi(p) = x$, où x est l'unique élément tel que $p \in x \circ p$. On définit ainsi une application φ de B vers B telle que $p \in \varphi(p) \circ p$. Soit $x = \varphi(y) \in Im\varphi$. Montrons que $e(x)$ est une unité à gauche de A. Soit $a \in A$. Alors $e(x)a = e(\varphi(y))a = \sum_{y\in moy} e(m)a = a$. Donc $e(x)$ est une unité à gauche de A.

Soit $q, p \in B$, $q \neq p$. Montrons que $\varphi(q) \circ p \subseteq \{p\}$. Supposons qu'il existe $t \in \varphi(q) \circ p$. Alors $t \neq q$. En effet, si $q \in \varphi(q) \circ p \cap \varphi(q) \circ q$, alors d'après β), $q = p$, ce qui est absurde. Si $t \neq p$, alors $\sum_{t\in xop} e(x)a = 0$, pour tout $a \in A$. Pour β) appliqué à t et p, on a que

$$t \in (\varphi(q) \circ p) \cap (x \circ p) \;\Rightarrow\; \varphi(q) = x.$$

Donc $\sum_{t\in xop} e(x)a = e(\varphi(q))a = 0$, pour tout $a \in A$; ce qui est absurde car $e(\varphi(q))$ est une unité à gauche de A. Ainsi, $\varphi(q) \circ p \subseteq \{p\}$.

Soit $x \in B \setminus Im\varphi$. Montrons que $e(x)$ est un annulateur à gauche de A. Soit $a \in A$. Comme $x \in B \setminus Im\varphi$, pour tout $p \in B$, $p \notin x \circ p$. Or $x \in \varphi(x) \circ x$; il existe donc $p \in B$ tel que $p \circ x \neq \emptyset$. Soit $t \in x \circ p$. Alors $e(x)a = \sum_{t\in mop} e(m)a = 0$ car $t \neq p$.

($\Leftarrow$) Supposons l'existence de l'application φ définie de B vers B telle que $p \in \varphi(p) \circ p$ et $\varphi(q) \circ p \subseteq \{p\}$ pour tous $p, q \in B$, $p \neq q$, et qui vérifie les propriétés i) et ii). Il suffit de montrer que $\sum_{q\in xop} e(x)a = 0$ et $\sum_{p\in xop} e(x)a = a$, pour tout $a \in A$, pour tous $p, q \in B$, $p \neq q$. Soit $p, q \in B$, $p \neq q$, $a \in A$. $\sum_{q\in xop} e(x)a = \sum_{q\in xop; x\in Im\varphi} e(x)a + \sum_{q\in xop; x\notin Im\varphi} e(x)a = \sum_{q\in xop; x\in Im\varphi} e(x)a$ d'après ii). D'où $\sum_{q\in xop} e(x)a = \sum_{q\in\varphi(y)op} a = 0$ d'après i) et le fait que $\varphi(y) \circ p \subseteq \{p\}$. Maintenant $\sum_{p\in xop} e(x)a = \sum_{p\in\varphi(y)op} a = a$ d'après α). Donc e est une identité à gauche de A. $\square$

Définition 3.5.5. *On dit que $v \in B$ est un* ***élément neutre à gauche (droite)*** *de $\langle B; \circ\rangle$ si $v \circ p = \{p\}$ ($p \circ v = \{p\}$) pour tout $p \in B$. On dit que $v \in B$ est un* ***élément neutre*** *de $\langle B; \circ\rangle$ s'il est neutre à gauche et à droite.*

Corollaire 3.5.6. *Si i est un élément unité à gauche (droite) de $\langle A; \cdot\rangle$ et si v est un élément neutre à gauche (droite) de $\langle B; \circ\rangle$, alors $\ulcorner i \urcorner_v$ est un élément unité à gauche (droite) de $\langle D_{\mathbb{ABC}}; *\rangle$.*

Preuve : Nous montrons juste le cas où $\langle A; \cdot\rangle$ a un élément unité à gauche et $\langle B; \circ\rangle$ un élément neutre à gauche. (l'autre cas suit par dualité et il est aussi semblable). Soit $f \in D_{\mathbb{ABC}}$ et soit $x \in B$ arbitraires. Alors $(\ulcorner i \urcorner_v * f)(x) = \sum_{x \in r \circ s} \ulcorner i \urcorner_v(r) f(s) = \sum_{x \in v \circ s} i f(s) = \sum_{x \in v \circ s} f(s) = f(x)$, car $v \circ s = \{s\}$.
$\square$

Remarque : On a vu que l'existence d'une unité dans $\langle D_{\mathbb{ABC}}; *\rangle$ est en général complexe. Il faudrait probablement chercher l'existence des unités pour des algèbres de convolutions particulières afin d'avoir de meilleurs résultats.

Chapitre 4

HYPERCONVOLUTION

4.1. Hyperstructure

Une hyperopération binaire sur un ensemble E est une application de $E \times E$ dans $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$. Dans cette section, nous abordons des propriétés algébriques de l'hyperalgèbre que l'on obtient en supposant que $\langle A; +, ., \{0\}\rangle$ est une hyperalgèbre et $\langle B; \circ\rangle$ un multigroupoïde partiel. L'hyperalgèbre $\langle D_{\mathbb{ABC}}; +, *\rangle$ sera alors appelée **hyperconvolution**. Dans la suite, nous considérons les hyperstructures suivantes :

1) $\langle A; +, \cdot, \{0\}\rangle$ où $+$ et $\cdot$ sont des hyperopérations binaires ; $\langle A; +\rangle$ est commutative et associative et telle qu'il existe $0 \in A$ vérifiant pour tout $a \in A$, $a + 0 = \{a\} = 0 + a$, et $a \cdot 0 = \{0\} = 0 \cdot a$. On étend $+$ et $\cdot$ aux sous-ensembles de A. Pour $X, Y \subseteq A$, on pose

$$X + Y = \bigcup_{x \in X, y \in Y} (x + y); \quad X \cdot Y = \bigcup_{x \in X, y \in Y} (x \cdot y).$$

Par exemple, pour $x, y, z \in A$,

$$x + (y + z) = \bigcup_{v \in y+z} (x + v), \quad x \cdot (y \cdot z) = \bigcup_{v \in y \cdot z} (x \cdot v).$$

Dans les formules basées sur les opérations et les relations ensemblistes (comme $\cup$, $\cap$, $\setminus$, $\subseteq$) et les hyperopérations (comme $+$ et $\cdot$), on adopte la convention que les hyperopérations ont la précédence ; par exemple, pour $x, y, z \in A$ on lit $\{x\} \cup y \cdot z$ comme $\{x\} \cup (y \cdot z)$. Pour éviter le cas trivial $A^2 = A \cdot A = \{0\}$, nous supposons que $A^2 \neq \{0\}$; c'est-à-dire qu'il existe $a, b \in A$ tels que $a \cdot b \neq \{0\}$.

2) $\langle B; \circ \rangle$ est un multigroupoïde partiel (c'est-à-dire une application de $B \times B$ dans $\mathcal{P}(B)$) tel que $B^2 = B \circ B \neq \{\emptyset\}$.

3) On considère $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(B)$ qui vérifie pour tous $X, Y \in \mathcal{C}$ et $b \in B$ les propriétés :
i) $Z \subset X \Rightarrow Z \in \mathcal{C}$; et $X \cup Y \in \mathcal{C}$,
ii) $X \circ Y = \bigcup\{x \circ y : \ x \in X, \ y \in Y\} \in \mathcal{C}$,
iii) $\{(x, y) \in X \times Y ; \ b \in x \circ y\}$ est fini.
iv) $\{b\} \in \mathcal{C}$.

Définition 4.1.1. *Soit $D_{\mathbb{ABC}} = \{f \in A^B : Supp f \in \mathcal{C} \}$. Pour tous $f, g \in D_{\mathbb{ABC}}$, on définit*

$$f + g = \{h \in D_{\mathbb{ABC}} : h(x) \in f(x) + g(x) \text{ pour tous } x \in B\}, \qquad (37)$$

$$f * g = \{h \in D_{\mathbb{ABC}} : h(x) \in \sum_{x \in t \circ v} f(t) \cdot g(v) \text{ pour tous } x \in B\}. \qquad (38)$$

Si $x \notin B \circ B$, alors par définition la somme dans (38) est égale à $\{0\}$. Soit $\mathbf{0}$ l'application de B dans A constante à la valeur 0.

Lemme 4.1.2. *(AC) (i) Soit $f, g \in D_{\mathbb{ABC}}$. Alors $f + g$ et $f * g$ sont des sous-ensembles non vides de $D_{\mathbb{ABC}}$ et donc $+$ et $*$ sont des hyperopérations binaires sur $D_{\mathbb{ABC}}$.*
(ii) L'hyperopération $+$ est asociative et commutative et $\mathbf{0}$ est son élément neutre.
(iii) $\mathbf{0}$ est un élément absorbant de $*$: pour tous $f \in D_{\mathbb{ABC}}$, on a que
$f * \mathbf{0} = \mathbf{0} = \mathbf{0} * f$.

Preuve : (i) Soit $f, g \in D_{\mathbb{ABC}}$, $X = Supp(f)$ et $Y = Supp(g)$. Soit $x \in B$ arbitraire. Alors $f(x), g(x) \in A$ et $\emptyset \neq f(x) + g(x) \subseteq A$. Par (AC), il existe $h \in A^B$ avec $h(x) \in f(x) + g(x)$ pour tous $x \in B$. Montrons que $Supp(h) \in \mathcal{C}$. En effet, soit $x \in B \setminus (X \cup Y)$. Alors $f(x) = 0 = g(x)$ et $f(x) + g(x) = 0 + 0 = \{0\}$ montre que $h(x) = 0$ et $x \in B \setminus Supp(h)$. Donc on a que $Supp(h) \subseteq X \cup Y$ et $X \cup Y \in \mathcal{C}$, par conséquent $Supp(h) \in \mathcal{C}$ par 3) i) et $h \in D_{\mathbb{ABC}}$.

Soit maintenant h dans l'ensemble donné par (38). Soit $b \in Supp(h)$. Par 3) iii), l'ensemble $\{(x, y) \in X \times Y : \ b \in x \circ y \}$ est fini ; disons $\{(x_1, y_1), \cdots, (x_k, y_k)\}$ avec $k \geq 1$, $x_1, \cdots, x_k \in X$ et $y_1, \cdots, y_k \in Y$. Alors

$$h(b) \in \sum_{i=1}^{k} f(x_i)g(y_i).$$

Ici, $\{b\} = (x_1 \circ y_1) \cap \cdots \cap (x_k \circ y_k) \in X \circ Y \in \mathcal{C}$. Alors $Supp(h) \subseteq X \circ Y \in \mathcal{C}$ et donc $Supp(h) \in \mathcal{C}$ par 3) i). Donc $h \in D_{\mathbb{ABC}}$ et ceci démontre (i).

(ii) $\langle D_{\mathbb{ABC}}; +\rangle$ est commutative. En effet, soit $f, g \in D_{\mathbb{ABC}}$, et $h \in f+g$. Soit $x \in B$ arbitraire. Alors $h(x) \in f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$ montre que $f + g = g + f$. L'associativité de $\langle D_{\mathbb{ABC}}; +\rangle$ découle de l'associativité de $\langle A; +\rangle$ ainsi que du fait que $\mathbf{0}$ est un élément neutre de $\langle D_{\mathbb{ABC}}; +\rangle$.

(iii) La preuve est immédiate de l'équation (38). $\square$

Nous donnons des caractérisations pour que certaines propriétés algébriques soient vérifiées par $\langle D_{\mathbb{ABC}}; +, *\rangle$. Une partie majeure de la théorie des hyperstructures porte sur les hypergroupes. Les hypergroupes datent de 1934, [Ma 34]. La littérature sur les hypergroupes comporte plus de 400 articles (voir [CL 03])

Définition 4.1.3. *Une hyperalgèbre binaire $\langle H; +\rangle$ est un* ***hypergroupe*** *si elle est associative et reproductive : $x + H = H = H + x$, pour tous $x \in H$.*

Lemme 4.1.4. *$\langle D_{\mathbb{ABC}}; +\rangle$ est reproductive si et seulement si $\langle A; +\rangle$ est reproductive.*

Preuve : ($\Rightarrow$). Soit $\langle D_{\mathbb{ABC}}; +\rangle$ reproductive et soit $a, b \in A$. Fixons $x \in B$. Alors il existe $f \in D_{\mathbb{ABC}}$ telle que $\ulcorner b \urcorner_x \in \ulcorner a \urcorner_x + f$; en particulier $b \in a + f(x)$; donc $A = a + A$. Le même raisonnement montre que $A = A + a$.

($\Leftarrow$). Soit $\langle A; +\rangle$ reproductive et $f, g \in D_{\mathbb{ABC}}$ arbitraires. Posons $F = Supp(f)$ et $G = Supp(g)$. Il faut montrer l'existence de $h \in D_{\mathbb{ABC}}$ telle que $g \in f + h$. Nous définissons $h \in A^B$ de la façon suivante :

a) Pour $x \in F \setminus G$, soit $h(x) \in A$ tel que $0 \in f(x) + h(x)$.

b) Pour $x \in F \cap G$, soit $h(x) \in A$ tel que $g(x) \in f(x) + h(x)$.

c) Pour $x \in G \setminus F$, soit $h(x) \in A$ tel que $h(x) = g(x)$.

d) Pour $x \in B \setminus (F \cup G)$, soit $h(x) = 0$

Dans les cas a) et b), l'existence de $h(x)$ est garantie par la reproductivité de $\langle A; + \rangle$. On peut vérifier que $g \in f + h$. De plus, $Supp(h) \subseteq F \cup G \in \mathcal{C}$. et donc $h \in D_{\mathbb{ABC}}$. Nous avons ainsi montré que $D_{\mathbb{ABC}} = f + D_{\mathbb{ABC}}$. L'égalité $D_{\mathbb{ABC}} + f = D_{\mathbb{ABC}}$. $\square$

Proposition 4.1.5. *$\langle D_{\mathbb{ABC}}; + \rangle$ est un hypergroupe si et seulement si $\langle A; + \rangle$ est un hypergroupe.*

Preuve : Découle des deux lemmes précédents. $\square$

Dans la suite, nous nous intéressons à la structure de $\langle D_{\mathbb{ABC}}; * \rangle$. Nous caractérisons la commutativité et l'associativité de $\langle D_{\mathbb{ABC}}; * \rangle$. Les énoncés sont les mêmes que dans le cas de l'algèbre $\mathbb{A}$. Les preuves sont presque semblables au cas de l'algèbre $\mathbb{A}$. Nous les repétons pour la convenience du lecteur.

4.2. Commutativité

Proposition 4.2.1. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

i) $\langle D_{\mathbb{ABC}}; * \rangle$ est commutative,

ii) $\langle D_{\mathbb{AB}\mathcal{F}}; * \rangle$ est commutative,

iii) Les fonctions $\ulcorner a \urcorner_x$ ($a \in A$, $x \in B$) commutent entre elles,

iv) $\langle A; \cdot \rangle$ et $\langle B; \circ \rangle$ sont commutatives.

Preuve i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii) sont évidentes.

iii) $\Rightarrow$ iv). D'après l'hypothèse sur $\langle A; . \rangle$, il existe $a, b \in A$ tels que $ab \neq \{0\}$. Soit $x, y \in B$ tels que $x \circ y \neq \emptyset$ et $z \in B$ arbitraire. Par hypothèse, $\ulcorner a \urcorner_x * \ulcorner b \urcorner_y = \ulcorner b \urcorner_y * \ulcorner a \urcorner_x$. Cette équation évaluée à z donne

$$\{0\} \neq ab = (\ulcorner a \urcorner_x * \ulcorner b \urcorner_y)(z) = (\ulcorner b \urcorner_y * \ulcorner a \urcorner_x)(z).$$

Du côté droit, le seul terme non nul s'obtient de $z \in y \circ x$ et il est égal à ba. Comme $z \in x \circ y$ était arbitraire, on obtient que $x \circ y \subseteq y \circ x$. Comme $\emptyset \neq x \circ y \subseteq y \circ x$, on a $y \circ x \neq \emptyset$ et donc $y \circ x \subseteq x \circ y$; c'est-à-dire $x \circ y = y \circ x$. On obtient $x \circ y = \emptyset \Leftrightarrow y \circ x = \emptyset$ et donc $\mathbb{B}$ est commutative. Plus haut, nous avons obtenu que $ab \neq \{0\} \Rightarrow ab = ba$. Si $ab = \{0\}$, alors $ba = \{0\}$ et donc $\langle A; \cdot \rangle$ est commutative.

iv) $\Rightarrow$ i) Soit $f, g \in D_{\mathbb{ABC}}$. Soit $h \in f * g$ et $x \in B$ arbitraires. Alors par la commutativité de $\mathbb{B}$ et $\langle A; \cdot \rangle$,

$$h(x) \in \sum_{x \in tou} f(t)g(u) = \sum_{x \in uot} g(u)f(t)$$

et donc $f * g \subseteq g * f$. Par symmétrie, $g * f \subseteq f * g$ et donc $f * g = g * f$. $\square$

4.3. Associativité

Définition 4.3.1. *Pour $a, b, c \in A$, on pose*

$$(ab)c = \bigcup_{x \in ab} xc; \quad a(bc) = \bigcup_{x \in bc} ax.$$

$\langle A; \cdot \rangle$ est associative si $(ab)c = a(bc)$, pour tous $a, b, c \in A$.

Pour $Z \subseteq B$ sous ensemble fini et $z \in B$, la loi pseudo-distributive est définie de la même manière que dans le cas où $\mathbb{A}$ ets une algèbre. Donc l'équation est la même ; même si maintenant elle représente l'égalité de deux ensembles. Pour l'associativité de $\langle D_{\mathbb{ABC}}; * \rangle$, nous avons la caractérisation suivante :

Proposition 4.3.2. *On suppose que $\langle A; +, \cdot, \{0\} \rangle$ satisfait la condition $(\star)$ suivante :*

Si $A^2.A = \{0\}$ $\left(A.A^2 = \{0\}\right)$ alors pour tous $k \geq 1$ et $a_1, \cdots, a_k, b_1, \cdots b_k, c \in A$,

$$(a_1b_1 + \cdots + a_kb_k)c = \{0\} \quad \Big(c(a_1b_1 + \cdots + a_kb_k) = \{0\}) \Big).$$

Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) $\langle D_{\mathbb{ABC}}; * \rangle$ est associative.

(2) $\langle D_{\mathbb{AB}\mathcal{F}}; * \rangle$ est associative.

(3) L'une des conditions suivantes est vérifiée :

i) $A^2.A = \{0\} = A.A^2$.

ii) $A^2.A = \{0\}$ et $\mathbb{B}$ est trivialement associative à droite.

iii) $A.A^2 = \{0\}$ et $\mathbb{B}$ est trivialement associative à gauche.

iv) $\mathbb{B}$ est trivialement associative.

v) $\langle A; \cdot\rangle$ est associative ; $\mathbb{B}$ est associative et la loi pseudo-distributive est valide pour tout sous-ensemble fini Z de B et chaque $z \in B$.

Preuve : (1) $\Rightarrow$ (2) est évidente.

(2) $\Rightarrow$ (3) Supposons que les propriétés i)-iv) ne sont pas vérifiées et montrons que v) l'est.

a) Montrons que $A^2.A \neq \{0\}$. Supposons le contraire, alors $A^2.A = \{0\}$. Puisque i) n'est pas vraie, on a que $A.A^2 \neq \{0\}$ et alors il existe $a, b, c \in A$ tels que $a(bc) \neq \{0\}$. Comme ii) n'est pas vraie et $A^2.A = \{0\}$, B n'est pas trivialement associative à droite ; c'est-à-dire il existe $x, t, u, v, w \in B$ tels que $x \in t \circ u$ et $u \in v \circ w$. Comme $\langle D_{\mathbb{AB}\mathcal{F}}; *\rangle$ est associative, on a :

$$\left(\ulcorner a \urcorner_t * (\ulcorner b \urcorner_v * \ulcorner c \urcorner_w)\right)(x) = \left((\ulcorner a \urcorner_t * \ulcorner b \urcorner_v) * \ulcorner c \urcorner_w\right)(x).$$

Alors

$$\sum_{x \in mon} \ulcorner a \urcorner_t(m) \left(\sum_{n \in ros} \ulcorner b \urcorner_v(r) \ulcorner c \urcorner_w(s)\right) = \sum_{x \in zol} \left(\sum_{z \in poq} \ulcorner a \urcorner_t(p) \ulcorner b \urcorner_v(q)\right) \ulcorner c \urcorner_w(l).$$

Du côté gauche, le seul produit distinct de $\{0\}$ est $a(bc)$, qui s'obtient pour $m = t$, $v = r$ et $w = s$. Alors

$$\{0\} \neq a(bc) = \sum_{x \in zol} \left(\sum_{z \in poq} \ulcorner a \urcorner_t(p) \ulcorner b \urcorner_v(q)\right) \ulcorner c \urcorner_w(l).$$

Du côté droit de cette équation, tous les produits sont $\{0\}$, sauf possiblement $(ab)c$ (qui correspond à $p = t$, $q = v$ et $l = w$). Alors $a(bc) = (ab)c \neq \{0\}$, ce qui montre que $A.A^2 \neq \{0\}$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc $A^2.A \neq \{0\}$. De la même façon ou par dualité, on montre que $A.A^2 \neq \{0\}$.

Montrons que $\langle B; \circ\rangle$ est associative. Comme iv) n'est pas vraie, $B^2.B \neq \emptyset$ ou $B.B^2 \neq \emptyset$. Supposons que $B^2.B \neq \emptyset$. Alors il existe $p, q, r \in B$ tels que $(p \circ q) \circ r \neq \emptyset$. Soit $x \in (p \circ q) \circ r$ arbitraire. Alors, il existe $t \in p \circ q$ tel que $x \in t \circ r$. Comme $A^2.A \neq \{0\}$, il existe $a, b, c \in A$ tels que $(ab)c \neq \{0\}$. On a

$$\left((\ulcorner a \urcorner_p * \ulcorner b \urcorner_q) * \ulcorner c \urcorner_r\right)(x) = \left(\ulcorner a \urcorner_p * (\ulcorner b \urcorner_q * \ulcorner c \urcorner_r)\right)(x);$$

$$\{0\} \neq \sum_{x \in mon} \left(\sum_{m \in uov} \ulcorner a \urcorner_p(u) \ulcorner b \urcorner_q(v)\right) \ulcorner c \urcorner_r(n)$$

et

$$\sum_{x\in m\circ n}\left(\sum_{m\in u\circ v}\ulcorner a\urcorner_p(u)\ulcorner b\urcorner_q(v)\right)\ulcorner c\urcorner_r(n)=\sum_{x\in m\circ n}\ulcorner a\urcorner_p(m)\left(\sum_{n\in u\circ v}\ulcorner b\urcorner_q(u)\ulcorner c\urcorner_r(v)\right);$$

C'est-à-dire

$$\{0\}\neq(ab)c=\sum_{x\in m\circ n}\ulcorner a\urcorner_p(m)\left(\sum_{n\in u\circ v}\ulcorner b\urcorner_q(u)\ulcorner c\urcorner_r(v)\right)$$

car $x\in t\circ r$ et $t\in p\circ q$. Le seul produit du côté droit qui puisse être $\neq\{0\}$ est $a(bc)$ qui s'obtient pour $m=p$, $n=q$ et $r=v$. Alors $a(bc)=(ab)c$ et $x\in p\circ(q\circ r)$. Comme $x\in(p\circ q)\circ r$ était arbitraire, on a que $\emptyset\neq(p\circ q)\circ r\subseteq p\circ(q\circ r)$. Par un raisonnement pareil ou par dualité, on montre que $x\circ(y\circ z)\neq\emptyset\Rightarrow x\circ(y\circ z)\subseteq(x\circ y)\circ z$. Dans notre cas, $p\circ(q\circ r)\neq\emptyset$ et donc $p\circ(q\circ r)\subseteq(p\circ q)\circ r$. Ainsi $p\circ(q\circ r)=(p\circ q)\circ r$ et $\mathbb{B}$ est associative.

<u>Montrons que $\langle A;\cdot\rangle$ est associative</u> . On vient de montrer que $\mathbb{B}$ est associative. On conclut que $\mathbb{B}$ est trivialement associative à gauche si et seulement si $\mathbb{B}$ est trivialement associative à droite et dans ce cas $\mathbb{B}$ est trivialement associative. Par hypothèse, iv) n'est pas vraie, donc $\mathbb{B}$ n'est trivialement associative ni à gauche, ni à droite.

Soit $a,b,c\in A$. Supposons que $a(bc)\neq\{0\}$. Comme $\mathbb{B}$ n'est pas trivialement associative à droite, il existe $p,w,t,u,x\in B$ tels que $x\in p\circ w$ et $w\in t\circ u$. On a :

$$\begin{aligned}\{0\}\neq a(bc)&=\left(\ulcorner a\urcorner_p*(\ulcorner b\urcorner_t*\ulcorner c\urcorner_u)\right)(x)\\&=\left((\ulcorner a\urcorner_p*\ulcorner b\urcorner_t)*\ulcorner c\urcorner_u\right)(x)\\&=(\sum_{x\in m\circ n}\left(\sum_{m\in r\circ s}\ulcorner a\urcorner_p(r)\ulcorner b\urcorner_t(s)\right)\ulcorner c\urcorner_u(n).\end{aligned}$$

Le seul produit distinct de $\{0\}$ est $(ab)c$ (qui correspond à $r=p$, $s=t$ et $n=u$). Alors

$$\begin{aligned}a(bc)\neq\{0\}&\Rightarrow\ \Sigma_{x\in m\circ n}\left(\Sigma_{m\in r\circ s}\ulcorner a\urcorner_p(r)\ulcorner b\urcorner_t(s)\right)\ulcorner c\urcorner_u(n)\neq\{0\}\\&\Rightarrow\ x\in m\circ u,\ m\in p\circ t\text{ et }(ab)c\neq\{0\};\end{aligned}$$

Ce qui est absurde. Donc $(ab)c=\{0\}\Longrightarrow a(bc)=\{0\}$. Ainsi d'après (39) $(ab)c\neq\{0\}\Longrightarrow a(bc)\neq\{0\}$ et $(ab)c=a(bc)$. Ainsi $\langle A;\cdot\rangle$ est associative.

Montrons que pour tout sous-ensemble fini Z de B et chaque $z \in B$, la loi pseudo-distributive est vérifiée.

Posons pour tout $t \in B$,

$$f(t) = a_t,\ g(t) = b_t,\ h(t) = c_t \text{ si } t \in Z$$

et

$$f(t) = g(t) = h(t) = 0 \text{ si } t \in B \setminus Z.$$

A noter que f, g et h sont bien des éléments de l'hyperalgèbre $\langle D_{\mathbb{AB}\mathcal{F}}; *\rangle$. En effet, $Supp(f) \subseteq Z$, $Supp(g) \subseteq Z$, $Supp(h) \subseteq Z$ et Z est fini. On a $(f*g)*h = f*(g*h)$, en particulier pour z, on a $\Big((f*g)*h\Big)(z) = \Big(f*(g*h)\Big)(z)$. D'où

$$\begin{aligned}
\sum_{z\in uov}\left(\sum_{u\in sot} a_s b_t\right) c_v &= \sum_{z\in uov}\left(\sum_{u\in sot} f(s)g(t)\right) h(v) \\
&= \sum_{z\in mon} f(m)\left(\sum_{n\in ros} g(r)h(s)\right) \\
&= \sum_{x\in mon} a_m\left(\sum_{n\in ros} b_r c_s\right).
\end{aligned}$$

Comme $\langle A; .\rangle$ est associative, on peut écrire ces sommes comme

$$\sum_{v\in Z}\left(\sum_{s,t\in Z;\ z\in sotov} a_s b_t\right) c_v = \sum_{m\in Z} a_m\left(\sum_{r,s\in Z;\ x\in moros} b_r c_s\right).$$

Ceci est la loi peudo-distributive qui correspond à Z et z.

(3) $\Rightarrow$ (1). Soit (3) vraie et soit $f, g, h \in D_{\mathbb{AB}\mathcal{C}}$. Montrons que $(f*g)*h = f*(g*h)$

a) Si l'une des propositions i), ii), iii) ou iv) est vérifée, alors $(f*g)*h = \{0\} = f*(g*h)$ d'après $(\star)$.

b)Soit v) vérifiée. Posons

$$F = supp(f),\quad G = supp(g),\quad H = supp(h).$$

Alors $F, G, H \in \mathcal{C}$. Par définition, l'ensemble $N_{FG}(x) = \{(t,u) \in F\times G :\ x \in tou\}$ est fini. Ainsi, pour chaque $x \in B$, l'ensemble $S_x = \{(p,q,t) \in F\times G\times H :\ x \in p \circ q \circ t\}$ est fini.

Posons $F_1 = \Pi_1(S_x)$, $G_1 = \Pi_2(S_x)$ et $H_1 = \Pi_3(S_x)$ où $\Pi_i(S_x)$ désigne la i-ème projection de S_x, $i = 1,2,3$. Ici $Z = P_1 \cup G_1 \cup H_1$ est aussi fini. Posons $a_p = f(p)$

si $p \in P_1$, $b_q = g(q)$ si $q \in G_1$, $c_t = h(t)$ si $t \in H_1$, $a_i = b_j = c_k = 0$ pour $i \in Z \setminus P_1$, $j \in Z \setminus G_1$, $k \in Z \setminus H_1$.

Soit $z \in B$ arbitraire. Alors par la loi pseudo-distributive induite par Z et z, on a :

$$\begin{aligned}
\Big((f * g) * h\Big)(z) &= \sum_{z \in u \circ r} (f * g)(u) h(r) \\
&= \sum_{z \in u \circ r} \left(\sum_{u \in m \circ n} f(m) g(n) \right) h(r) \\
&= \sum_{t \in Z} \left(\sum_{z \in p \circ q \circ t} a_p b_q \right) c_t \\
&= \sum_{p \in Z} a_p \left(\sum_{z \in p \circ q \circ t} b_q c_t \right) \\
&= \Big(f * (g * h)\Big)(z). \quad \square
\end{aligned}$$

CONCLUSION

Dans cette thèse, nous avons traité des propriétés algébriques pour une algèbre d'incidence généralisée et pour une algèbre de convolution généralisée. Plus précisément, nous avons donné les conditions pour qu'elles soient commutatives, associatives, distributives, idempotentes et pour qu'elles admettent un élément unité etc. Nous avons constaté que ces conditions étaient pour la plupart très complexes. Dans certains cas, nous n'avons pas pu donner une caractérisation détaillée .

Les éléments idempotents centraux et le radical de Jacobson jouent un rôle important dans les problèmes d'isomorphie des algèbres d'incidence. Nous avons voulu résoudre le problème d'isomorphie pour les algèbres d'incidence généralisées lorsque l'algèbre $\mathbb{A}$ est fixée ; mais pour le moment , nous n'avons pas encore la piste de la solution. Nous pensons que le manque de certaines propriétés sur $\mathbb{A}$ est un gros handicap. Le radical de Jacobson de $\mathbb{D}_{\mathbb{AB}C}$ a été caractérisé partiellement pour une algèbre d'incidence généralisée. Cette caractérisation découle du lien qui existe entre les congruences maximales de $\mathbb{D}_{\mathbb{AB}C}$ et les congruences maximales de $\mathbb{A}$ pour un x dans X. Nous pensons que la connaissance de certaines congruences de $\mathbb{D}_{\mathbb{AB}C}$ pourrait nous aider dans cette résolution.

Les hyperconvolutions ont été aussi abordées ; particulièrement la commutativité et l'associativité ont été caractérisées. Nous n'avons pas encore des résultats sur la caractérisation des autres propriétés algébriques telles que l'idempotence, l'existence de l'élément unité, ... Nous pensons qu'ils seront semblables à ceux obtenus dans le cas où $\mathbb{A}$ est une algèbre.

BIBLIOGRAPHIE

[Be 85] BETSCH G., *The Algebra of Lattice functions*, Proceedings of a conference held at the University of Tübingen, F.R.G. 4-10 August, 1985.

[Co 81] COHN P. M., *Universal Algebra. Mathematics and its Applications/6*, D. Reidel Publishing Company, 1981.

[CL 03] CORSINI P., LEOREANU V., *Applications of Hyperstructures Theory*, Advances in mathematics, Kluwer Academic Publishers, 2003.

[DF 99] DUMMIT D.S., FOOTE R.M. , *Abstract Algebra, Second edition* , John Wiley and Sons Inc, 1999.

[DP 99] DAVEY B.A., PRIESTLEY H.A., *Introduction to Lattices and Order* , Cambridge University Press, 1999.

[DRS 71] DOUBILET P., ROTA G.C. AND STANLEY R. P., *On the foundations of combinatorial theory (VI) : the idea of generating function*, Proceedings of the sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, University of California Press, vol. **2** (1970-71), 267-318.

[Fi 70] FINCH P.D., *On the Möbius function of a non-singular binary relation*, Bull. Austral. Math. Soc, Vol **3** (1970), 155-162.

[Gr 79] GRATZER G., *Universal Algebra Second edition* , Springer-Verlag, New York, 1979.

[HR 52] HARDY G.H., RIESZ M., *The general theory of Dirichlet's series* , Cambridge University Press, 1952.

[Ko 95] KOPPINEN M., *Automorphisms and higher derivations of Incidence Algebras*, Journal of Algebra **174** (1995), 698-723.

[KM 94] KONINCK J.M., MERCIER A., *Introduction à la théorie des nombres*, Modulo Editeur, 1994.

[Ku 65] KUROSH A. G., *Lectures on General Algebra*, Chelsea Publishing company, New York, 1965.

[Ma 34] MARTY F., *Sur une généralisation de la notion de groupe*, 8e Congrès Math. Scandinaves, Stockholm, 45-49, 1934.

[Me 85] MELDRUM J.D.P., *Near-rings and their links with groups*, Pitman Advanced Publishing Program, 1985.

[MMW 87] MCKENZIE R. N., MCNULTY G. F. AND WALTER F. T., *Algebras Lattices, varieties volume IA*, Wadsworth and Brooks / Cole, 1987.

[Na 77] NAČEV, N. A., *Incidence rings over quasi-ordered sets. (Bulgarian. Russian, English summaries)*, Plovdiv. Univ. Naučn. Trud. **13**(1975), no 1, 65-79(1977).

[OS 97] O'DONNELL C.J., SPIEGEL E., *Incidence Algebras*, Marcel Dekker Inc, 1997.

[Pi 77] PILZ G., *Near-rings : The theory and its applications*, North-Holland Publishing Company, 1977.

[Ro 95] ROMAN S., *Field Theory* , Springer-Verlag, New York 1995.

[Ro 86] ROSENBERG I., *Algebraic properties of a general convolution, Algebraic, Extremal and Metric Combinatorics 1986 (Deza, M.; Frankl, P.; Rosenberg, I. G. eds* . London Math. Soc. Lecture Notes Ser. **131**, Cambridge University Press 1988, 175-204.

[Ro 64] ROTA G.C., *On the foundation of combinatorial theory I. Theory of Möbius Functions*, Z. Wahrscheinlichkeits Theorie und Verw. Gebiete **2** (1964), 340-368.

[St 86] STANLEY R.P., *Enumerative Combinatorics volume 1* , Wadsworth, Inc., Belmont California, 1986.

[St 70] STANLEY R.P., *Structure of incidence algebras and their automorphism groups*, Bull. Amer. Math. Soc. **76** (1970), 1236-1239.

[SS 78] SALOMAA A., SOITTOLA M., *Automata-theoretic aspect of formal power series* , Springer-Verlag, New York, 1978.

[Ve 06] VELDSMAN S., *Convolution rings* , Algebra Colloquium **13** :2 (2006), 211-238.

[Ve 07] VELDSMAN S., *Chain conditions on convolution rings*, Communications in Algebra, **35** : (2007), 371-388.

[Vo 80] VOSS E. R., *On the isomorphism problem for incidence rings* , Illinois Journal of Mathematics, volume **24**, number 4, Winter 1980.

[Wa 37] WARD M., *The algebra of lattice functions, Arithmetic functions on ring*, Ann. Math. **38** (1937).