Université de Montréal

Types de généralisations et épistémologie des mathématiques : de l'intégrale de Cauchy à l'intégrale de Lebesgue

Par
Jean-Philippe Villeneuve

Département de philosophie
Faculté des arts et des sciences

Thèse présentée à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de Doctorat
en philosophie

Août, 2007

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Cette thèse intitulée :

Types de généralisations et épistémologie des mathématiques :
de l'intégrale de Cauchy à l'intégrale de Lebesgue

Présenté par :
Jean-Philippe Villeneuve

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes :

François Lepage
----
président-rapporteur

Jean-Pierre Marquis
----
directeur de recherche

François Duchesneau
----
membre du jury

Mathieu Marion
----
examinateur externe

François Lepage
----
représentant du doyen de la FES

Résumé

Nous proposons une réflexion sur les processus de généralisations non pas des énoncés, mais des notions mathématiques. Pour ce faire, nous résumerons d'abord les recherches faites sur la généralisation par les mathématiciens George Pólya et Saunders Mac Lane, le philosophe Imre Lakatos et le psychologue Jean Piaget. Ces quelques recherches, car peu de recherches ont été faites sur la généralisation, et nos réflexions nous amèneront à considérer deux types de généralisations.

La première est la généralisation logique ou l'inférence inductive. Elle porte initialement sur les énoncés et, comme nous nous sommes plutôt intéressés à la généralisation de notions, nous développerons la généralisation logique étendue, laquelle sera caractérisée par une relation fixe-variable entre la notion initiale et la nouvelle notion.

La seconde est celle que nous appellerons la généralisation notionnelle et peut être illustrée par cet exemple : la notion de félin est une généralisation notionnelle de la notion de chat, car tous les chats sont des félins, mais il existe des félins qui ne sont pas des chats.

Notons que nous trouverons une caractérisation commune à ces deux processus : l'extension de la notion initiale est strictement incluse dans l'extension de la nouvelle notion.

Ensuite, nous produirons une étude historique sur la notion mathématique d'intégrale telle que développée au 19^{e} siècle par les mathématiciens Cauchy, Dirichlet, Lipschitz, Riemann, Darboux, Jordan et Lebesgue. Cette étude nous permettra d'établir un lien entre les processus de généralisation et les processus de changement de notions.

Nous proposerons deux types de changements : la nouvelle interprétation lorsque la nouvelle notion se définit de la même façon que la notion initiale et la réinterprétation lorsque la notion initiale est redéfinie. Dans le premier cas, nous retrouverons une relation fixe-variable entre les notions et ainsi un lien fort avec la généralisation logique. Ce ne sera pas le cas pour le second cas, car il sera possible qu'une notion soit réinterprétée, et ce, sans qu'il y ait généralisation.

Ajoutons en terminant que nous avons développé une variante de la logique typée pour formaliser nos résultats.

Mots-clés : Philosophie, Philosophie des mathématiques, Épistémologie des mathématiques, Généralisation, Intégrale, Histoire de l'analyse mathématique.

Abstract

We offer a study on the process of generalization, not of statements but of mathematical notions. We will first consider research on that process by two mathematicians, George Pólya and Saunders Mac Lane, a philosopher, Imre Lakatos and a psychologist, Jean Piaget. That relatively small research corpus represents almost all of the research published on the subject, because little research has been done on generalization. Our analysis enables us to introduce two types of generalization.

The first type is the logical generalization or the inductive inference. Initially this process only applies to statements and, because our considerations are mathematical notions, we will develop the extended logical generalization process which will be characterized by a fixed-variable relation between the initial notion and the new notion.

The second type is what we will call the "notional" generalization process. This process can be illustrated as follows: the notion of feline is a notional generalization of the notion of cat, because all cats are felines but there are some felines that are not cats.

In both processes, we will find that the extension of the initial notion is strictly included in the extension of the new notion.

Following that analysis and also to illustrate it, we will produce an historical study of the mathematical notion of integral as developed in the 19th century by Cauchy, Dirichlet, Lipschitz, Riemann, Darboux, Jordan and Lebesgue. This study will enable us to link the generalization process with the notion of change process.

To that effect, we will propose two types of change: the new interpretation, when the new notion is defined in the same way of the initial notion, and the reinterpretation, when the initial notion is redefined completely. In the first case, we will find a fix-variable relation between notions and, by the way, a strong link with the logical generalization process. This will not be the case for the second case, because it will be possible to find a notion that can be reinterpreted without being generalized.

Note that we will also develop a variant of typed logic to formalize our results.

Key Words°: Philosophy, Philosophy of Mathematics, Theory of Mathematical Knowledge, Generalization, Integral, History of Mathematical Analysis.

Table des matières

Liste des tableaux

Liste des figures

Remerciements

Je voudrais remercier Jean-Pierre Marquis pour son support tant philosophique que financier et pour le temps qu'il m'a consacré et tous les autres concernés. J'aimerais aussi remercier amis et famille.

Introduction

Précision et rigueur d'un langage formel

Une généralisation se présente intuitivement comme un processus qui nous permet d'étendre l'extension d'une notion ou la portée d'un énoncé. Nous retrouvons cette intuition à la fois dans certaines logiques et dans les classifications biologiques. En effet, d'une part, un processus de généralisation peut être défini en logique comme l'introduction d'un quantificateur universel ($Pa \mid\!- (\forall x)Px$). L'extension de la propriété est donc portée à son maximum.

D'autre part, une hiérarchie de notions biologiques peut être utilisée dans une classification des espèces. Nous avons, par exemple, que tous les lions sont des félins, mais qu'il existe des félins qui ne sont pas des lions. Dans ce cas, la notion de félin semble être une notion plus générale que la notion de lion mais cette généralisation semble être d'un autre type que la généralisation précédente. L'une peut donc être appelée logique, l'autre notionnelle.

Par ailleurs, certains mathématiciens n'hésitent pas à affirmer qu'une notion est plus générale ou plus abstraite qu'une autre. Lebesgue écrit par exemple :

> [L]'intégrale de Riemann apparaît comme la généralisation naturelle de l'intégrale de Cauchy, que l'on se place au point de vue analytique ou géométrique.[1]

---

[1] [Lebesgue, 1928, p. 36]

Au sujet de l'intégrale de Lebesgue, le mathématicien Walter Rudin écrit :

> In this chapiter, we shall present an abstract (axiomatic) version of the Lebesgue integral, relative to *any* countably additive measure on *any* set.[2]

De plus, Jean Piaget a développé, dans sa psychologie (génétique), le processus d'abstraction réfléchissante qui se présente à la fois comme une généralisation et une abstraction. Y a-t-il donc un lien entre le processus de généralisation et celui d'abstraction?

Ajoutons que nous retrouvons aussi, dans la langue naturelle, une distinction entre parler en général et parler en particulier : dans un cas, on ne fixe pas les propriétés des entités dont on parle et, dans l'autre, on les fixe.

Ceci nous amène donc aux questions suivantes :

a) Y a-t-il plusieurs processus de généralisation?
b) Y a-t-il un lien entre la généralisation « logique », la généralisation « notionnelle » et la généralisation de l'intégrale de Cauchy?
c) Qu'est-ce qui distingue un processus d'abstraction d'un processus de généralisation? Est-ce que toutes les abstractions sont aussi des généralisations?
d) Les processus de généralisation sont-ils tous caractérisés par le passage de quelque chose de fixe à quelque chose de variable?
e) Pouvons-nous élaborer une théorie générale de la généralisation? S'agit-il plutôt de formuler une théorie abstraite de la généralisation?

[2] [Rudin, 1987, p. 6]

1 La méthodologie

Pour répondre rigoureusement à ces questions, nous proposons de présenter une étude historique détaillée de l'évolution d'une notion mathématique, en l'occurrence la notion d'intégrale telle que développée au 19e siècle. Cette étude nous permettra de trouver des exemples clairs et précis qui illustreront sans ambiguïté les processus de généralisation de notions mathématiques. Nous pourrons alors tirer de ces exemples des propriétés qui caractériseront les deux types de généralisations que nous introduirons.

Nous avons aussi choisi de développer un langage formel, qui sera une variante de la logique typée, et de l'utiliser pour la rigueur qu'il offre. En fait, ce langage formel conservera toute la précision de notre étude de cas, tout en permettant de faire des liens entre les diverses théories qui seront tirées de la philosophie (Lakatos), de la psychologie (Piaget), de la logique ou d'expériences de certains mathématiciens (Pólya, Mac Lane) portant sur les processus de généralisation.

Nous proposons, avant de présenter un plan sommaire de cette thèse, de revenir sur la justification du choix de la logique typée et de notre étude de cas.

1.1 La justification de l'utilisation de la logique typée

Nous avons choisi une logique typée au détriment d'une logique d'ordre supérieur non typée, car la logique typée décrit bien la pratique mathématique, s'avère simple à utiliser pour formaliser les notions mathématiques et offre la possibilité de formaliser les processus de généralisation et d'abstraction.

Premièrement, les mathématiciens ne quantifient pas sur n'importe quoi, mais sur des entités ayant un type. En effet, nous retrouvons dans la littérature mathématique des énoncés tels « Toute fonction continue sur un compact est bornée » et non « Pour toute entité, si cette entité est une fonction continue définie sur un compact, alors cette entité est bornée ». Ainsi, la quantification se fait sur des entités typées. Une logique typée permet donc de rendre compte de la pratique mathématique.

Deuxièmement, il est fréquent de retrouver, à l'intérieur d'une même théorie mathématique, des entités de différents types. Les notions de mesure, d'espace de mesure, d'espace topologique, d'espace métrique et de fonction sont utilisées par exemple dans la théorie moderne de l'intégrale. Aussi, plusieurs types de structures peuvent être définies sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{R}^n$ et attachées l'une à l'autre au moyen, par exemple, de relations métriques ou topologiques. De plus, les mathématiciens introduisent des notations différentes pour chacune de ces entités typées, comme le symbole f est réservé pour la notion de fonction et μ, pour la notion de mesure. Une logique typée permettra donc de mettre en évidence ces différents types à l'aide d'une notation simple, en l'occurrence l'entité f est une fonction sera notée f: Fonction.

Ajoutons que nous retrouvons, parmi les énoncés mathématiques, des quantifications sur des propriétés, comme l'exemple de l'axiomatisation de la géométrie de Hilbert. D'une part, la formalisation de tels énoncés se fait simplement en logique typée, alors que celle-ci est nettement plus complexe pour une logique d'ordre supérieur. D'autre part, bien que la logique du second ordre se réduise à une logique du premier ordre, cette réduction nous semble artificielle et difficile à utiliser pour formaliser notre étude de cas.

Nous en concluons donc que la logique typée semble a priori très efficace pour formaliser les notions et les énoncés mathématiques.

Finalement, nous verrons qu'un des processus de généralisation implique qu'une notion mathématique devienne une instance de la nouvelle notion, comme l'illustre le passage de l'intégrale de Cauchy à la définition de l'intégrale par une liste de propriétés telle que proposée par Lebesgue. Ainsi, ce passage peut se formaliser par le passage d'une sorte à son type : le passage d'une sorte d'intégrale au type intégrale.

En somme, nous considérons que la logique typée est un bon outil de formalisation puisqu'il s'agit d'un formalisme simple et facile à manipuler et qu'elle comble a priori nos besoins de formalisation. Il faut toutefois noter que nous n'avons pas l'intention de développer une logique mais d'utiliser une logique adaptée à nos besoins. Nos résultats nous donneront une bonne justification du fait que la logique typée offre tout ce dont nous avons besoin en termes de formalisation.

1.2 La justification du choix de notre étude de cas

L'étude de cas que nous avons choisie regroupe les travaux de certains mathématiciens du 19e siècle qui ont été faits sur la notion d'intégrale. Nous aborderons, entre autres, les recherches de Cauchy, Dirichlet, Riemann, Jordan et Lebesgue. Mentionnons d'emblée que nous étudierons quatre sortes d'intégrales : l'intégrale de Cauchy, l'intégrale de Riemann, la version calculatoire de l'intégrale de Lebesgue et une forme spéciale de définition de l'intégrale par une liste de propriétés développée par Lebesgue. Cette dernière aura un statut particulier, car elle sera définie sur les opérations et non sur les fonctions et ainsi elle permet non pas de calculer la valeur de l'intégrale, mais de déterminer si un opérateur est du « type » intégrale.

Certains mathématiciens, au lieu de proposer une nouvelle définition de l'intégrale, ont voulu en déterminer l'extension, soit le plus grand sous-ensemble de fonctions qui satisfont la propriété d'être intégrable. Par exemple, Riemann a présenté un critère d'intégrabilité, et ce, sans redéfinir l'intégrale.

D'autres ont voulu généraliser la notion existante en la modifiant quelque peu ou en la redéfinissant. Par exemple, Cauchy a réussi à accommoder la notion d'intégrale (de Cauchy) pour les fonctions continues aux fonctions continues par morceaux; Jordan a défini l'intégrale en remplaçant les notions de partition et de longueur euclidienne par des notions issues de sa théorie de la J-étendue. Darboux, quant à lui, redéfinit l'intégrale : l'intégrale n'est plus définie comme la limite des sommes de Cauchy mais comme l'égalité entre les intégrales par défaut et par excès.

Nous trouverons ainsi un lien entre les processus de changements de notions mathématiques et le processus de généralisation et ce lien nous permettra de distinguer deux types de généralisations.

Notre étude de cas se veut donc représentative de la pratique mathématique, sans prétendre représenter exhaustivement les mathématiques. En effet, nous avons choisi un épisode de développement de connaissances dans le domaine de l'analyse réelle et ainsi nous nous sommes restreints aux connaissances dans cette discipline mathématique. Par contre, nous disposons quand même d'un épisode de développement des connaissances mathématiques qui nous permettra de tirer des conclusions sur l'organisation des connaissances et donc sur l'épistémologie des mathématiques.

Ajoutons, en terminant, que nous suivrons la pratique mathématique du 19e siècle en nous basant sur les textes originaux trouvés dans les oeuvres complètes ou dans les revues de recherches de l'époque et sur les interprétations des historiens.

2 Le plan sommaire de la thèse

L'objectif de cette thèse est d'étudier les types de généralisations et leurs impacts sur l'organisation des connaissances mathématiques.

Nous débuterons, au premier chapitre, par analyser les recherches philosophiques faites sur les processus de généralisation. Nous aborderons d'abord les recherches des mathématiciens George Pólya et Saunders Mac Lane. Le premier proposa une définition de la généralisation, mais dans le contexte de la résolution de problèmes mathématiques. Le second compara le processus de généralisation au processus d'abstractions en introduisant plusieurs sortes et en donnant beaucoup d'exemples. Nous en conclurons que tous les deux présentent le processus de généralisation comme une caractérisation de l'extension d'une notion mathématique.

Nous passerons ensuite aux recherches du philosophe Imre Lakatos qui plaça le processus de généralisation au centre de sa méthode de preuves et réfutations. Il affirme que les connaissances mathématiques, tout comme les connaissances scientifiques, se développent selon la méthode suivante. D'abord une conjecture est démontrée puis immédiatement généralisée à sa plus grande extension. Ensuite, un contre-exemple est trouvé et une nouvelle conjecture est posée, qui est immédiatement généralisée à sa plus grande extension. Nous obtiendrons donc la même caractérisation du processus que celle proposée par les deux mathématiciens.

Nous terminerons cette revue de littérature avec les recherches du psychologue Jean Piaget qui s'est intéressé au développement de l'intelligence chez l'enfant. Il soutient que le développement de l'intelligence est possible grâce à quatre processus cognitifs, dont un est présenté à la fois comme une généralisation et une abstraction. Nous utiliserons ces processus cognitifs pour introduire nos processus de changements de notions mathématiques. Nous pourrons ainsi caractériser la généralisation non plus par extension mais par compréhension ou par la façon de définir la notion.

L'analyse de ces recherches nous conduira donc à définir intuitivement la généralisation de notions mathématiques comme suit : la notion mathématique N' est une généralisation de la notion N si l'extension de N est strictement incluse dans l'extension de N'. Pour mieux rendre compte de cette intuition, nous suggérerons alors une caractérisation de la généralisation par compréhension. En effet, une telle caractérisation nous permettra d'introduire deux types de généralisations de notions mathématiques : la généralisation conservative et la généralisation innovante. Le premier type sera caractérisé par la conservation de la façon de définir la notion initiale, alors que le second, par une innovation dans la façon de définir la notion initiale.

Nous proposerons, au deuxième chapitre, une nouvelle version de la logique typée. Cette logique typée nous permettra d'introduire une formalisation des notions mathématiques : la définition par compréhension d'une notion mathématique. À l'aide de celle-ci, nous développerons trois types de notions mathématiques dont les distinctions mettront en évidence les différences dans la compréhension ou la façon de définir les notions. Nous conclurons ce chapitre en formalisant les deux types de généralisations pour le premier type de notions que nous aurons alors introduit.

Le troisième chapitre constituera notre étude historique de la notion mathématique d'intégrale telle que développée au 19^e siècle. Nous passerons en revenue les travaux des mathématiciens Cauchy, Dirichlet, Lipschitz, Riemann, Darboux, Jordan et Lebesgue. Nous pourrons alors tester notre formalisation des notions mathématiques par la définition par compréhension, en plus d'obtenir plusieurs exemples de généralisations et de changements de notions mathématiques.

Nous mettrons ainsi en évidence le rôle de certaines relations dans les processus de changements de notions mathématiques. Par exemple, nous dirons que la notion initiale et la nouvelle notion se définissent de la même façon lorsque ces notions entretiennent une relation fixe-variable entre leur compréhension : quelque chose qui est fixé dans la compréhension initiale devient variable dans la nouvelle.

Nous pourrons ainsi distinguer deux processus de changements : les nouvelles interprétations et les réinterprétations. Le premier conservera la même façon de définir la notion initiale, d'où le lien possible avec la généralisation logique. Le second cas innovera dans la façon de définir la notion initiale et cette innovation pourra même empêcher la généralisation.

Le dernier chapitre sera consacré à la présentation de nos résultats quant aux processus de changements, aux processus de généralisation et de leurs impacts sur la connaissance mathématique. Nous montrerons alors que certaines variations dans la compréhension d'une notion mathématique impliquera un certain type de généralisations. Un autre type de généralisations sera plutôt le produit d'un changement radical dans la compréhension de la notion initiale et, dans ce cas, il pourra y avoir un lien avec les processus d'abstraction.

Chapitre 1 : Revue de littérature

Les processus de généralisation dans la littérature

Les recherches sur les processus de généralisation que nous avons retenues constituent en fait l'essentiel de la littérature philosophique sur cette problématique. Nous aborderons ainsi les travaux des mathématiciens George Pólya et Saunders Mac Lane, du philosophe Imre Lakatos et du psychologue Jean Piaget. Comme deux de ces chercheurs feront un lien entre les processus de généralisation et les processus d'abstraction, nous avons décidé de présenter un très court résumé des nombreuses et intéressantes recherches philosophiques sur l'abstraction.

Nous en conclurons que le processus de généralisation est considéré par ces chercheurs comme un processus qui augmente l'extension d'une notion ou d'un énoncé. Or, comme aucune généralisation coextensive ne peut être expliquée par ce processus, nous proposerons alors de développer une caractérisation de la généralisation en utilisant la compréhension ou la façon de définir la notion. En fait, cette caractérisation par compréhension nous permettra de distinguer deux processus de généralisation de notions mathématiques : la généralisation conservative et la généralisation innovante. Dans le premier cas, la façon de définir la notion initiale sera conservée, alors que, dans le second, elle changera mais, dans les deux cas, l'extension de la nouvelle notion inclura strictement l'extension de la notion initiale. Nous utiliserons ainsi la distinction, introduite en théorie des ensembles, entre la définition par extension et la définition par compréhension d'un ensemble pour préciser les processus de généralisation.

1 Pólya et la résolution de problèmes

George Pólya est un mathématicien qui s'est beaucoup intéressé à la résolution de problèmes mathématiques. En lien avec ses recherches, il a proposé deux définitions du processus de généralisation dont la plus précise se lit comme suit :

> La généralisation consiste à passer de l'examen d'un objet à celui d'un groupe d'objets parmi lesquels figure le premier; ou encore de l'examen d'un groupe limité d'objets à celui d'un groupe plus important de ces *mêmes* objets.[1]

Il semble qu'il y ait deux types de généralisations : la généralisation des énoncés lors du passage de l'examen d'un objet à un groupe d'objets ou la généralisation de notions lors du passage de l'examen d'un groupe d'objets à un plus « grand » groupe comprenant ces *mêmes* objets. Passons-les en revue.

1.1 La généralisation des énoncés

En interprétant, dans la citation, l'examen d'un objet a comme l'attribution d'une propriété, la généralisation se présente comme un processus d'inférence inductive :

$$\mathrm{P}a \mid\!- (\forall x)\mathrm{P}x.$$

Ainsi, nous inférons de la vérité que a a la propriété P que tous les individus d'un groupe dont a fait partie ont tous la propriété P.

---

[1] [Pólya, 1965 p. 91].

Pour y voir plus clair, Pólya propose trois exemples dont le premier s'applique à ce premier type de généralisations :

> 1. Si, par hasard, nous rencontrons la somme $1 + 8 + 27 + 64 = 100$, nous remarquons qu'elle peut s'exprimer sous la forme curieuse : $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2$. Il est alors naturel de se poser la question : arrive-t-il souvent qu'une somme de cubes successifs, tels que $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$ soit un carré? Et voilà un exemple de généralisation. Celle-ci est heureuse puisqu'elle conduit d'une observation particulière à un loi générale remarquable.[1]

Pour cet exemple, les « individus » sont les nombres naturels et certains satisfont une propriété fixée. Ensuite, cette même propriété est « généralisée » à tous les nombres naturels pour en constituer une « loi générale », c'est-à-dire que la propriété est fixée et on recherche sa plus grande extension. De façon plus précise, nous avons :

$$\mathrm{P}(4) := 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2 \mid\!-$$
$$(\forall n \in \mathbf{N})\mathrm{P}(n) := (\forall n \in \mathbf{N})(\exists m \in \mathbf{N})(1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = m^2).$$

Nous concluons donc que la généralisation des énoncés est caractérisée par un accroissement de l'extension de la propriété. Ainsi, ce processus nécessite que la propriété soit fixée et qu'on recherche sa plus grande extension. Or, il est parfois difficile de fixer la propriété. En effet, comme nous le verrons, la propriété « être continue » se présente différemment selon que les individus sont des espaces métriques ou des espaces topologiques. Nous obtenons donc qu'il soit nécessaire de développer un autre type de généralisation.

Ajoutons qu'il semble que cette généralisation soit possible grâce à la présence d'une relation que nous appellerons une relation « fixe-variable ». Cette relation permet de

---

[1] [Pólya, 1965 p. 92].

changer quelque chose qui est fixe en quelque chose de variable. Dans cette exemple, l'individu 4 représente le fixe et la variable *n*, le variable.

1.2 La généralisation de notions

La deuxième partie de la définition d'une généralisation proposée par Pólya mentionne le passage d'un « groupe limité d'objets » à un « groupe plus important de ces *mêmes* objets ». Pour l'illustrer, il donne les deux exemples suivants :

> 2. La généralisation peut servir à la solution de certains problèmes. Considérons le problème suivant (...) : « Une droite et un octaèdre régulier sont dans une position relative donnée. Trouvez un plan qui passe par la droite et coupe le volume en deux parties égales ». Ce problème peut sembler difficile, mais en fait, il n'est nul besoin d'être très familiarisé avec la forme de l'octaèdre régulier pour que vienne à l'esprit le problème suivant, plus général : « Une ligne droite et un solide ayant un centre de symétrie sont dans une position relative donnée. Trouver un plan qui passe par la droite et coupe le solide en deux parties égales ». Le plan demandé passe, naturellement, par le centre de symétrie du solide; il est déterminé par ce point et par la droite donnée. Comme l'octaèdre a lui aussi un centre de symétrie, le problème original est également résolu. (...) Ce faisant, nous reconnaissions le rôle du centre de symétrie; nous *faisons ressortir* la propriété essentielle de l'octaèdre par rapport au problème qui nous était proposé. (...)
> 3. « Trouver le volume d'une pyramide tronquée de base carrée, sachant que le côté de la base inférieure est de 10 centimètres, celui de la base supérieure de 5 et la hauteur du tronc, de 6 ». En substituant aux nombres 10, 5 et 6 des lettres telles que *a*, *b*, *h* nous généralisons.[1]

Pólya affirme, dans l'exemple 2, faire une généralisation du problème initial parce que la notion N d'octaèdre régulier est remplacée par la notion N' de solide ayant un centre de symétrie. La nouvelle notion est alors obtenue en identifiant la propriété essentielle de la notion initiale, soit celle qui nous permet de résoudre le problème : c'est

---

[1] [Pólya, 1965 p. 92-93]

par le fait que l'octaèdre régulier est un solide ayant un centre de symétrie que le problème se résout.

De plus, la relation entre ces notions est la suivante : tous les octaèdres réguliers sont des solides ayant un centre de symétrie mais il existe des solides ayant un centre de symétrie qui ne sont pas des octaèdres réguliers. Cette relation n'est pas caractérisée par le passage de quelque chose de fixe à quelque chose de variable; elle est plutôt produit par un choix de propriétés essentielles.

Pour faire un lien avec sa définition, nous ne pouvons pas dire qu'une notion est un groupe limité d'objets; on parle plutôt de son extension. De plus, comme les objets du premier groupe sont conservés durant ce passage (Pólya parle de ces *mêmes* objets), nous comprenons que l'extension de la nouvelle notion contient strictement l'extension de la notion initiale, c'est-à-dire que toutes les instances N sont aussi des instances de N', mais il existe des instances de N' qui ne sont pas des instances de N. Tout comme pour l'exemple 1, nous obtenons une caractérisation de la généralisation en terme d'extensions des notions en jeu.

Dans l'exemple 3, la nouvelle notion est obtenue par le changement d'une instance par un paramètre. En effet, la notion de pyramide dont les valeurs des bases et de la hauteur sont fixées devient la notion de pyramide dont les valeurs sont arbitraires. Nous retrouvons dans cet exemple une relation fixe-variable et aussi une inclusion stricte d'extensions de notions.

1.3 La généralisation en terme d'extension d'une notion

L'analyse des résultats de Pólya nous amène à caractériser la généralisation de notions mathématiques par une inclusion stricte d'extensions de notions :

Définition intuitive (La généralisation d'une notion)
Une notion N' est une *généralisation* d'une notion initiale N si l'extension de N est strictement incluse dans l'extension de N'.

Cette caractérisation par extension ne nous permet pas de distinguer ce que nous pensons être deux types de généralisations différents, soit celui où nous retrouvons une relation fixe-variable et celui où il ne semble pas y en avoir.

De plus, elle reste muette pour les cas de généralisations coextensives, comme le passage de la continuité définie dans un espace métrique à la continuité définie dans un espace topologique. Pour combler cette lacune, nous proposons d'étudier la compréhension des notions, c'est-à-dire en étudiant la façon dont elles sont définies.

2 Mac Lane et les exemples mathématiques

Le mathématicien Saunders Mac Lane a proposé une réflexion sur les mathématiques dans son livre *Mathematics, form and function*[1] et celle-ci l'a conduit à s'intéresser aux processus de généralisation. Il en a conclu que le processus de généralisation est relié au processus d'abstraction, tout en étant différent. Il écrit :

> Generalization and abstraction, though closely related, are best distinguished. A « generalization » is intended to subsume all the prior

[1] [Mac Lane, 1986]

> instances under some common view which includes the major properties of all those instances. An « abstraction » is intended to pick out certain central aspects of the prior instances, and to free them from aspects extraneous to the purpose at hand.[1]

La distinction que semble faire Mac Lane entre le processus de généralisation et celui d'abstraction est la suivante : une généralisation nous permet de trouver un point de vue commun, alors qu'une abstraction, de cibler les propriétés essentielles à un problème donné. Ainsi, ces processus ne jouent pas le même rôle : celui de la généralisation est de trouver un tronc commun entre des théories ou entre des notions et celui de l'abstraction, de résoudre un problème donné.

Nous avons besoin d'être plus précis. Pour ce faire, rappelons que Pólya affirmait que le remplacement de l'octaèdre par le solide ayant un centre de symétrie généralisait le problème à résoudre, car ce remplacement produisait plus d'instances du nouveau problème. Or, le processus, qui permet de faire cette généralisation, est un processus de recherche de propriétés essentielles. Mac Lane propose maintenant que cette recherche de propriétés essentielles caractérise plutôt le processus d'abstraction. Est-ce que la notion de solide ayant un centre de symétrie est une notion plus abstraite que celle d'octaèdre? Sans répondre à cette question, on comprend qu'il y a nettement plus d'instances de la nouvelle notion que la notion initiale et que celles-ci sont beaucoup plus diversifiées.

Pour y voir plus clair, Mac Lane ajoute, à cette définition, des sortes de généralisations et d'abstractions. Étudions-les.

---

[1] [Mac Lane, 1986, p. 436]

2.1 Les sortes de généralisations

Les trois sortes de généralisations sont la généralisation à partir de cas, la généralisation par étapes analogues et la généralisation par modifications.

2.1.1 La généralisation à partir de cas

Le premier processus s'apparente à la généralisation des énoncés présentée lors de notre analyse de Pólya. En effet, Mac Lane donne l'exemple du passage de la formule

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

à la formule du binôme de degré n. Or, dans ce passage, on remplace une instance (n = 2) par le paramètre n et on obtient une loi « générale ». Nous retrouvons donc une relation fixe-variable entre les formules et aussi la recherche de la plus grande extension.

Par contre, il ajoute deux possibilités qui le distingue de notre analyse de Pólya : certains résultats ne sont pas toujours conservés lors de la généralisation et la nouvelle notion peut être modifiée. Pour illustrer le premier cas, il donne l'exemple du développement de la théorie algébrique des nombres qui s'est fait en commençant avec certaines propriétés des corps de nombres quadratiques et cyclotomiques. Dans ce cas, les principaux résultats concernant les corps des nombres algébriques s'appliquent seulement aux extensions abéliennes et non aux théories algébriques des nombres. Ainsi, il semble qu'on perde des résultats lors du passage des extensions abéliennes aux théories algébriques des nombres.

Or, nous ne pouvons pas caractériser le processus de généralisation en affirmant qu'une théorie est plus générale qu'une autre si elle produit moins de résultats. Il faut plutôt utiliser cet exemple pour illustrer qu'il est possible de perdre certains résultats lorsqu'une théorie (ou une notion) est généralisée.

Il présente ensuite un exemple de géométrie dans lequel il faut interpréter (donc modifier) une notion lorsqu'on veut généraliser un théorème. L'exemple en question est celui de la notion d'intersection telle qu'utilisée en géométrie euclidienne dans le théorème de Bézout sur le nombre de points d'intersections entre deux courbes. La généralisation de ce théorème à la géométrie projective nécessite de bien interpréter la notion d'intersection.

Dans ce cas, nous pouvons affirmer que la nouvelle notion regroupe toutes les instances précédentes. Ainsi, nous introduisons une nouvelle sorte de relation fixe-variable, car une instance est remplacée par une notion. Nous retrouvons la même idée lorsque la notion de continuité d'une fonction en un point réel est remplacée par la notion de continuité d'une fonction en un point d'un espace métrique.

2.1.2 La généralisation par étapes analogues

La généralisation par étapes analogues porte sur le parallèle entre des théories et ce parallèle nous permet d'identifier une théorie plus générale qui ne remplace ni ne subsume les théories initiales. Mac Lane donne les exemples du parallèle entre les nombres réels, les nombres complexes et les quaternions et du parallèle entre l'analyse réelle et l'analyse complexe.

Il n'est cependant pas évident que ces exemples soient des exemples de généralisation : l'analyse complexe n'est pas vraiment une généralisation de l'analyse réelle.

Pourtant, il est clair que nous avons un parallèle ou une analogie entre ces théories et il faudrait seulement « convertir » cette analogie en théorie pour affirmer que nous avons une généralisation.

Dans ce cas, un autre problème survient, car cette théorie « convertie » (issue de l'analogie) ne doit, selon la définition proposée, ni remplacer ni subsumer les théories initiales. Ceci nous amène à chercher le lien possible entre la nouvelle théorie et les théories initiales et à conclure que cette sorte de généralisation se présente plutôt comme une heuristique de recherche en tant que recherche d'analogies : si deux théories sont analogues et qu'on a démontré un résultat dans l'une, alors on peut espérer démontrer un résultat analogue dans l'autre.

Ajoutons que cette recherche d'analogies nous permet de faire un lien avec la définition initiale proposée par Mac Lane de la généralisation comme la recherche du tronc commun entre deux théories, car un parallèle ou une analogie entre théories peut être considéré comme un tronc commun. Encore une fois, pour obtenir une généralisation, il faut introduire une nouvelle théorie .

Nous en concluons que la recherche d'analogies peut être considérée comme une heuristique de recherche mais ne constitue pas une généralisation comme telle.

2.1.3 La généralisation par modifications

Cette dernière sorte de généralisation se caractérise par la modification de certaines notions d'un théorème pour qu'il soit généralisable. Mac Lane donne l'exemple du théorème de décomposition d'un nombre entier en un produit de nombres premiers. Ce théorème est valide pour une certaine classe de nombres algébriques. Pour étendre son extension aux anneaux par exemple, il faut remplacer la notion d'entier par la notion d'idéal, ce qui nous donne le théorème affirmant tout nombre idéal est un produit de nombres idéaux premiers. Ce théorème devient valide.

Ajoutons que si un nombre entier est une instance d'un nombre idéal dans le contexte des nombres entiers, alors le nouveau théorème est obtenu en remplaçant une instance par une notion. Si ce n'est pas le cas, les deux théorèmes sont analogues.

Nous n'en concluons donc rien de nouveau sauf que, dans ce cas, Mac Lane considère la généralisation d'un théorème comme la recherche de sa plus grande extension valide.

2.1.4 Certaines caractéristiques de la généralisation

Nous obtenons premièrement une nouvelle sorte de relations fixes-variables. En effet, il est possible de remplacer une constante par une variable, mais aussi une instance d'une notion par une notion.

Deuxièmement, nous concluons qu'il est nécessaire d'introduire une nouvelle notion pour faire une généralisation, sinon nous n'obtenons qu'une analogie entre notions. Cette caractéristique nous permettra de distinguer la généralisation d'une notion de l'étude plus générale d'une notion. Nous utiliserons cette distinction dans l'analyse des travaux de Riemann : Riemann a présenté une étude plus générale de la notion d'intégrale de Cauchy, car il n'a pas proposé de nouvelle définition de l'intégrale.

Troisièmement, il est possible de perdre des résultats lorsqu'on généralise une théorie ou, comme pour le cas qui nous intéressera, une notion. Nous verrons que certains résultats sur l'intégrale de Cauchy, comme ceux de Lipschitz, seront perdus avec l'arrivée de l'intégrale de Riemann. Ceci constitue une sorte de réorganisation des connaissances mathématiques.

Finalement, nous pouvons déduire de notre analyse des sortes de généralisations proposées par Mac Lane que la généralisation d'une notion peut être encore considérée comme la recherche de la plus grande extension d'une notion.

2.2 Les sortes d'abstractions

L'abstraction par omission, l'abstraction par analogie et l'abstraction par changement d'attention sont les trois sortes d'abstractions proposées par Mac Lane.

2.2.1 L'abstraction par omission

La première sorte est caractérisée par l'omission de certaines données pour décrire la notion mathématique. Les exemples sont les suivants : la notion de groupe est abstraite par omission des éléments d'un groupe de transformations, la notion d'algèbre de Boole, par omission des éléments sur lesquels les opérations algébriques sont appliqués, la notion d'espace de Banach ou de Hilbert, par omission des nombres sur lesquels la fonction est appliquée.

On omet en quelques sortes les éléments de la structure pour ne considérer que la structure. Le problème est d'identifier la « bonne » structure, c'est-à-dire qu'on ne peut pas omettre n'importe quoi.. Par exemple, on pourrait omettre les éléments des exemples du paragraphe précédent pour abstraire (ou généraliser?) que ce sont des notions mathématiques. En fait, une « bonne » abstraction consiste justement à trouver ce « bon » niveau, c'est-à-dire à trouver les propriétés qui nous permettent de résoudre le problème ou d'effectuer la tache planifiée.

De plus, nous retrouvons une nouvelle sorte de relations entre notions : la relation d'instanciation. Dans ce cas, les notions initiales deviennent des instances de la nouvelle notion, comme le groupe de transformations devient une instance de la notion de groupe. Nous avons ainsi l'impression de monter d'un niveau dans la hiérarchie des notions mathématiques.

2.2.2 L'abstraction par analogie

L'abstraction par analogie se produit lorsqu'une théorie nous permet d'identifier les aspects centraux de théories. Mac Lane écrit :

> *Abstraction by analogy* occurs when a visible and strong parallel between two different theories raises the suggestion that there should be one underlying, less specific theory sufficient to give the common results.[1]

Premièrement, ce processus s'apparente au processus de généralisation par étapes analogues, sauf que, dans ce cas, il est explicite : une nouvelle théorie est introduite. Or, une théorie « moins spécifique » n'est-elle pas plus générale?

---

[1] [Mac Lane, 1986, p. 436]

Deuxièmement, le choix des propriétés est basé sur la conservation des résultats communs. Ainsi, nous assistons à la recherche de propriétés qui sont essentielles au même sens que, dans le deuxième exemple de Pólya, la propriété d'avoir un centre de symétrie nous permettait de résoudre le problème. Or, dans ce cas, il était question de la généralisation de notions et non de l'abstraction de théories par analogie, d'où le retour à la question de savoir si cette recherche de propriétés essentielles est un processus d'abstraction ou un processus de généralisation.

Finalement, ces propriétés changent de fonction : ces propriétés deviennent constitutives de la nouvelle théorie, alors qu'elles n'étaient que les propriétés des théories initiales et analogues. Nous reviendrons sur cette caractéristique lorsque nous aborderons le processus d'abstraction réfléchissante de Piaget.

2.2.3 L'abstraction par changement d'attention

L'abstraction par changement d'attention est la dernière sorte d'abstraction présentée par Mac Lane. Nous affirmons que ce changement d'attention se compare à la recherche des propriétés qui sont vraiment à l'oeuvre lorsqu'on utilise la notion :

> Some abstractions arise when the study of a Mathematical situation gradually makes it clear that certain features of the situation (perhaps features which were originally obscure) are really the main carriers of the structure. These features, with their properties, are then suitably abstracted.[1]

On a l'impression que ces propriétés étaient « obscures » parce qu'elles n'avaient pas été bien comprises : on ne savait pas trop quoi faire avec celles-ci. Maintenant qu'on leur a trouvé une fonction, un rôle ou une utilité, on les abstrait.

---

[1] [Mac Lane, 1986, p. 437]

Comme exemples, Mac Lane propose entre autres le passage du groupe de permutations au groupe de Galois. Galois étudia les permutations des racines d'un polynôme donné et cette étude l'a conduit, par changement d'attention, à introduire la notion de groupe. Il donne aussi l'exemple de la continuité dans un espace topologique. Dans cet exemple, le changement d'attention se fait dans le passage de la tradition ε-δ à la considération de l'image inverse d'ouverts. Le fait de savoir « calculer » l'intervalle autour du point où on évalue la continuité n'est plus important : il faut seulement étudier l'image inverse d'ouverts. Nous reviendrons sur cet exemple dans le prochain chapitre.

Ce changement d'attention semble impliquer que certaines propriétés ou certains éléments ont été omis et ainsi la distinction entre la première et la troisième sorte d'abstractions n'est pas aussi claire qu'il le prétend. En fait, le changement d'attention représente un processus qui justifie le choix des propriétés à conserver en leur attribuant une nouvelle fonction ou un nouveau rôle.

Nous retrouvons aussi le problème de « suitably abstracted ». Dans ce cas-ci, Mac Lane insiste sur le fait de trouver le « bon » niveau, mais ne précise pas comment le faire. Il ne fait que donner des exemples dans lesquels ce niveau a été trouvé.

2.2.4 L'abstraction comme la recherche de propriétés essentielles

Les problématiques de l'abstraction semblent être en lien avec la recherche de propriétés « essentielles » qui ne sont pas trop « générales ». Il semble aussi que ce processus implique une nouvelle sorte de relation entre notions : la relation d'instanciation. De plus, il est possible que le statut de certaines propriétés change, passant de simples propriétés d'une notion à propriétés constitutives de la notion.

2.3 Les exemples mathématiques

Notre analyse des sortes de généralisations proposées par Mac Lane nous amène à considérer deux sortes de relations fixes-variables : la relation instance-paramètre et la relation instance-notion. Par exemple, le passage de la notion de continuité sur $\mathbf{R}$ à la notion de continuité sur $\mathbf{R}^n$ est illustré par une relation instance-paramètre ($\mathbf{R}$ devient $\mathbf{R}^1$ qui se généralise à $\mathbf{R}^n$), alors que le passage à la continuité dans un espace métrique est plutôt caractérisé par le remplacement d'une instance (la métrique naturelle sur $\mathbf{R}$) par la notion de métrique.

Par contre, le passage à la notion de continuité dans un espace topologique n'est pas caractérisé par une relation fixe-variable, car il est impossible de faire varier quelque chose qui était fixe pour expliquer ce passage. Dans ce cas, Mac Lane propose plutôt ce passage soit caractérisé par un changement d'attention.

Nous retrouvons dans un changement d'attention que le statut de certaines propriétés change, passant de propriété connexe ou inconnue à propriété constitutive de la nouvelle notion. Ainsi, nous pouvons affirmer que la compréhension de la nouvelle notion change « radicalement » par rapport à la compréhension de la notion initiale. De plus, ce changement « drastique » ou « radical » se distingue du cas où les notions entretiennent une relation fixe-variable, puisque cette relation semble permettre la conservation de la façon de comprendre les notions.

Ajoutons qu'il faut introduire une nouvelle notion pour faire une généralisation, sinon nous n'obtenons qu'une étude plus générale. Il est aussi possible de perdre certains résultats lorsqu'une notion est généralisée.

3 Lakatos et la méthode de preuves et réfutations

Imre Lakatos a développé la méthode de preuves et réfutations pour justifier que les mathématiques sont une science selon la caractérisation popperienne de la science[1]. Ainsi, il a voulu montrer que les connaissances mathématiques sont faillibles, c'est-à-dire que tout énoncé mathématique ou toute démonstration peut être réfuté et, de ce fait, il pourra en conclure que ces connaissances sont scientifiques.

Comme nous retrouvons une sorte de généralisation dans cette méthode, nous proposons de la présenter.

3.1 La généralisation dans la méthode de preuves et réfutations

Il applique cette méthode à deux épisodes de développements de connaissances mathématiques : la formule d'Euler et la convergence uniforme. On peut lire au sujet de la formule d'Euler :

> After much trial and error they notice that for all regular polyhedra $V - E + F = 2$. Somebody *guesses* that this may apply for any polyhedron whatsoever. Others try to falsify this *conjecture*, try to test it in many different ways – it holds good. The results *corroborate* the conjecture, and suggest that it could be *proved*.[2]

Ainsi, la méthode commence par une conjecture basée sur une généralisation. En effet, le sujet vérifie que la propriété (la formule en question) est satisfaite par un certain

---

[1] Il reprend aussi la caractérisation kuhnienne de la science en développant la méthode des programmes de recherches, mais celle-ci ne fait pas intervenir des processus de généralisation proprement dit. Consulter au besoin [Lakatos, 1978a].

[2] [Lakatos, 1976, p. 6]

nombre fini de polyèdres réguliers. Cette vérification lui permet d'inférer que cette propriété est satisfaite par, non pas tous les polyèdres réguliers, mais par tous les polyèdres. La propriété est, en quelque sorte, fixée et généralisée à son extension maximale. Nous retrouvons donc la généralisation des énoncés telle que proposée par Pólya.

Une preuve est ensuite présentée et on tente de la réfuter par un contre-exemple. Pour ce cas-ci, le contre-exemple est une figure « bizarre » qui semble être un polyèdre et pour laquelle la propriété est fausse. Ce contre-exemple réfute l'énoncé et ainsi il faut le modifier. On introduit alors une nouvelle conjecture qui est immédiatement généralisée à son extension maximale.

Notons que Lakatos introduit la distinction entre un contre-exemple global et local, selon que le contre-exemple réfute l'énoncé ou l'un des lemmes utilisés dans la preuve, et cette distinction influencera la façon de modifier l'énoncé. Cependant, ce qui nous importe est qu'une fois la notion de polyèdre modifiée, on généralise encore la propriété à son extension la plus grande.

3.2 Une mise en garde quant à la portée de nos résultats

Nous retrouvons encore une fois que la généralisation est vue comme un processus qui permet d'étendre l'extension d'une notion ou d'une propriété. En effet, dans cette méthode, il y a plusieurs façons de réfuter un énoncé, mais qu'une seule façon de généraliser : on recherche la plus grande portée de la propriété (ou de façon équivalente la plus grande extension) en précisant les concepts utilisés.

Contrairement à Lakatos, nous n'affirmons rien, dans cette thèse, quant à la méthode utilisée par les mathématiciens pour développer des nouvelles connaissances. Nous nous intéressons plutôt aux processus de généralisation en tant que processus et non en tant que moteur de recherche mathématique ou de connaissance mathématique. Notre objectif est donc de clarifier les processus de généralisation de notions mathématiques et non de caractériser la méthode mathématique.

4 La généralisation et l'abstraction dans la théorie de Piaget

Le psychologue Jean Piaget s'est intéressé au développement de l'intelligence chez l'enfant[1]. Il divise ce développement en quatre niveaux : sensori-moteur (0 à 2 ans), préopératoire (2 à 8 ans), opérations concrètes (8 à 12 ans) et opérations hypothético-déductives (12 ans et plus). Au sein d'un même niveau, les connaissances du sujet se développent grâce à deux processus complémentaires : l'assimilation et l'accommodation; tandis que le passage d'un niveau inférieur à un niveau supérieur se fait en reconstruisant ces connaissances et, dans ce cas, ce sera le processus d'abstraction réfléchissante qui sera à l'oeuvre.

Ce processus d'abstraction réfléchissante semble être à la fois une généralisation et une abstraction. Il écrit :

> [P]our construire une structure plus abstraite et plus générale à partir d'une structure plus concrète et plus particulière, il est d'abord nécessaire d'abstraire certaines liaisons opératoires de la structure antérieure de manière à les généraliser dans la structure ultérieure.[2]

---

[1] Pour une introduction, consulter [Chalon-Blanc, 1997].
[2] [Beth, Piaget, 1961, p. 259]

Ainsi, ce processus permet au sujet de généraliser une structure en réfléchissant certaines de ses propriétés dans une structure plus abstraite. Ce réfléchissement n'est pas une copie de propriétés, mais plutôt une reconstruction de la structure initiale au sein de la nouvelle en utilisant des propriétés essentielles. De plus, la nouvelle structure est plus générale que la structure initiale parce que l'extension de la nouvelle structure contient l'extension de la structure initiale. L'abstraction et la généralisation se retrouvent donc dans ce processus comme des processus qui, respectivement, recherchent des propriétés essentielles et la plus grande extension.

Avant de présenter ces trois processus, identifions la place que prendra les recherches de Piaget dans nos recherches sur la généralisation.

4.1 La place de Piaget dans nos recherches

Nous avons choisi de considérer les recherches de Piaget, car il s'intéresse à la réorganisation des connaissances lors du développement de l'intelligence de l'enfant. Il existe aussi en mathématique des épisodes de réorganisation des connaissances mathématiques, par exemple lorsque certaines propriétés de notions initiales deviennent constitutives d'une nouvelle notion.

De plus, Piaget introduit explicitement des processus de généralisation et d'abstraction. De façon plus détaillée, les processus complémentaires d'assimilation et d'accommodation nous permettront d'illustrer des sortes de relations fixes-variables et ainsi de faire un lien avec les processus de généralisation. Quant au processus d'abstraction réfléchissante, il nous servira à étudier les changements dans la compréhension de la nouvelle notion.

Évidemment les schèmes[1] sur lesquels s'appliquent les processus de Piaget sont des structures génétiques (issues de la psychologie génétique de Piaget) et non des structures mathématiques. Cependant, comme ce sont aussi des connaissances, nous pouvons à un certain niveau faire une analogie.

Ajoutons en terminant que certaines structures mathématiques sont utilisées pour décrire ces processus de développement. En effet, les structures-mères de Bourkaki, en l'occurrence les structures algébriques, d'ordres et topologiques, sont des structures présentes dans tous les niveaux de développement. Par exemple, au niveau des opérations concrètes, le sujet développe deux types de groupements : la classification et la sériation, l'une est issue de l'opération d'inversion (structures algébriques), l'autre issue de l'opération de réciprocité (structures d'ordre). De plus, les symétries de figures représentent les structures topologiques[2].

4.2 Les processus d'assimilation et d'accommodation

Selon Piaget, le développement de l'intelligence est possible grâce à deux processus complémentaires : les processus d'assimilation et d'accommodation. Il les présente une première fois dans un texte de 1957 ([Piaget, 1957]), mais les révise dans les années soixante-dix ([Piaget, 1970], [Piaget, 1975]). Cette révision le conduit à proposer les deux postulats suivants :

> *Premier postulat :* Tout schème d'assimilation tend à s'alimenter, c'est-à-dire à s'incorporer les éléments extérieurs à lui et compatibles avec sa nature. (...)

---

[1] Un schème est une structure d'actions qui peut être transférée et généralisée. Ils peuvent portés sur des objets (schème sensori-moteur), sur des représentations immédiates d'objets (opérations concrètes) ou sur des représentations de représentations d'objets (opérations hypothético-déductives).

[2] Pour un exposé plus complet, consulter [Beth, Piaget, 1961, p. 178].

> *Deuxième postulat :* Tout schème d'assimilation est obligé de s'accommoder aux éléments qu'il assimile, c'est-à-dire de se modifier en fonction de leurs particularités.[1]

Par exemple, la nourriture est assimilée par l'organisme, qui s'en accommode en activant les différentes fonctions de son système digestif en fonction de l'aliment assimilé : un aliment riche en gras ne sera pas assimilé de la même façon qu'un aliment riche en sucre. Un bébé assimile le monde à ce qu'il peut saisir, sucer, secouer et doit s'accommoder à l'objet du monde qu'il assimile, comme par exemple un gros objet ne sera pas saisi de la même façon qu'un petit objet.

Nous affirmons que ces processus conduisent le sujet à faire une généralisation en introduisant une *nouvelle interprétation* du schème en jeu.

4.2.1 Le processus d'assimilation comme généralisation

Dans le cas du développement de l'intelligence, le sujet assimile une situation ou un objet, lorsqu'il sait quoi en faire. Par exemple, un sujet assimile un problème lorsqu'il peut le résoudre. Or, lorsque le sujet assimile un objet à un schème d'assimilation, il généralise ce schème à tous les objets car, selon le premier postulat, l'assimilation pousse le sujet à incorporer le plus de situations possibles. Piaget écrit :

> [Le premier postulat] se borne à assigner un moteur à la recherche, donc à considérer comme nécessaire une activité du sujet, mais il n'implique pas par lui-même la construction de nouveautés, car un schème assez large (comme celui d'« être ») pourrait s'assimiler tout l'univers sans modifier celui-ci ni s'enrichir lui-même en compréhension.[2]

---

[1] [Piaget, 1975, p. 13]
[2] [Piaget, 1975, p. 13]

Ainsi, le processus d'assimilation n'implique pas de nouveauté, mais une activité d'assimilation du plus grand nombre d'objets possibles par le schème d'assimilation. Tout comme assimiler le monde à l'Être, le sujet, qui résout un problème mathématique, pourrait généraliser en assimilant les mathématiques à ce problème.

L'idée d'une assimilation est donc que, d'un cas particulier assimilé, le sujet en infère qu'il peut tout assimiler. Cette généralisation porte donc sur la recherche de la plus grande extension de la notion assimilée et non sur une réorganisation des connaissances.

4.2.2 Le schème de déplacement de la période préopératoire

Illustrons ces processus à l'aide du développement du schème de déplacement lors de la période préopératoire[1]. Pour ce faire, nous utiliserons un problème et nous étudierons ses variantes. Le problème est le suivant : représenter le chemin de la maison à l'école sur une maquette tridimensionnelle.

Nous supposons d'abord que le sujet a assimilé le problème initial, c'est-à-dire qu'il a été capable de le résoudre. Dans ce cas, par le premier postulat, le sujet généralisera en assimilant que tout problème se résout de cette façon. Par le second postulat, le sujet peut s'accommoder des variantes du problème et ce sera cette accommodation qui nous intéressera. Nous proposons trois sortes de variantes.

La première variante est lorsque nous faisons varier le point d'arrivée (représenter le chemin de la maison à la maison d'un ami, au dépanneur, au terrain de jeux, etc.) ou le

---

[1] Aux environs de quatre ans, le petit enfant reconstruit en « mots » les schèmes sensori-moteurs qu'il a développés au cours de la première période de développement. En fait, cette reconstruction s'effectue en assimilant une langue naturelle pour décrire ses actions : le petit enfant « met des mots » sur les actions qu'il est capable de poser.

point de départ (représenter le chemin de l'épicerie, du dépanneur, etc., à l'école) ou bien les deux points en même temps (représenter le chemin de l'école au dépanneur). Nous pouvons même suggérer l'opération inverse par opposition à l'opération directe de partir de la maison à l'école et aussi l'opération nulle soit le chemin d'un lieu au même lieu.

Nous introduisons, pour la deuxième variante, un point intermédiaire (aller de la maison à l'école en passant par le dépanneur) ou un deuxième point d'arrivée (aller de la maison à l'école, puis de l'école au dépanneur). Dans le premier cas, on ajoute une variable au schème initial; dans le deuxième cas, on applique le schème deux fois.

La dernière variante est de changer le contexte du problème ou des variables (changer le type des variables). Nous pourrions par exemple utiliser une carte électronique au lieu de la maquette tridimensionnelle et conserver les sortes de variables ou bien les remplacer : au lieu du quartier, prendre la maison et chercher les chemins possibles entre la salle à dîner et une chambre. Il semble que ce changement de contextes du problème n'a pas d'influence sur la façon de le résoudre. Par contre, le changement de sorte de variable peut en avoir car il serait possible de « réfléchir » ce problème au niveau de la géométrie euclidienne en considérant (assimilant) les lieux à des points et les chemins à des lignes.

4.2.3 Les nouvelles interprétations

Le fait que le sujet réussit ou non à s'accommoder des variantes n'est pas tant important pour notre étude. Nous nous intéressons plutôt à la possibilité d'accommodation du sujet et nous essayerons de classifier ces variantes. Pour ce faire, notons N(*a*, *b*), la solution du problème de trouver le chemin sur la marquette entre la maison *a* et l'école *b* et présentons maintenant chacune des variantes.

Pour la première variante, le petit enfant fait une généralisation logique car le point de départ ou le point d'arrivée qui étaient fixés dans le problème initial deviennent maintenant variables. Cette variante se formalise comme suit :

1) $N(a, b) \vdash (\forall x)(\forall y)\, N(x, y)$ La généralisation logique

Remarquons que la solution inverse du problème, de même que la solution nulle, sont aussi des instances de cette généralisation, qui ne sont probablement pas évidentes pour le petit enfant.

Pour la seconde variante, nous retrouvons deux possibilités, soit le petit enfant introduit une nouvelle variable dans le schème, soit il applique deux fois le même schème. Dans ces cas, nous obtenons :

2a) $N(a, b) \vdash$
$N(a, b, c) \vdash (\forall x)(\forall y)(\forall z)\, N(x, y, z)$ La nouvelle interprétation[1] par ajout de paramètres

2b) $N(a, b) \vdash N'(a, c) = N(a, b) \wedge N(b, c)$
$\vdash (\forall x)(\forall y)\, N'(x, y) = N(x, y) \wedge N(y, c)$ La nouvelle interprétation par transfert de la notion initiale dans la formule de la nouvelle notion

Dans les deux cas (2a et 2b), nous retrouvons encore une relation fixe-variable : le nombre de variables qui était fixé à deux devient variable ou le nombre de fois que le schème a été appliqué qui était aussi fixé à deux devient variable.

---

[1] La notion de nouvelle interprétation est de notre crû.

Pour la dernière variante, le contexte du problème ou celui des variables ont été changés. Dans le cas des variables, le type des variables utilisées change disons de T à T'. En forçant quelque peu la notation standard, nous obtenons :

3) $N(a : T, b : T)$ $\vdash (\forall x : T')(\forall y : T')\ N(x, y)$	La nouvelle interprétation par remplacement du contexte

La relation fixe-variable est plus subtile dans cette variante car le sujet doit remarquer que ces problèmes se résolvent de la même façon.

Pour chacune de ces variantes, nous retrouvons intuitivement que le sujet conserve sensiblement la même façon de résoudre le problème. Ainsi, nous dirons que le sujet donne une *nouvelle interprétation* du problème initial. De façon plus précise, il est possible d'expliquer le passage d'une variante à une autre par une relation fixe-variable et par conséquent la résolution proposée ne change pas : il y a seulement quelque chose qui été fixe et qui maintenant varie. De plus, dans ces nouvelles interprétations, l'extension du schème, en l'occurrence l'ensemble des problèmes qui peuvent être résolus par ce schème, augmente. Nous en concluons donc que le sujet fait aussi une généralisation.

Le sujet aurait pu assimiler ce problème comme un problème de géométrie euclidienne mais, pour ce faire, il aurait fallu qu'il franchisse une nouvelle période de développement. Dans ce cas, les schèmes auraient été reconstruits par le biais du processus d'abstraction réfléchissante que nous proposons maintenant d'étudier.

4.3 Les processus d'abstraction simple et réfléchissante

Le sujet applique le processus d'abstraction réfléchissante pour passer d'une période de développement à une autre. Nous utiliserons, tout comme le fit Piaget, le passage de la période des opérations concrètes à la période des opérations hypothético-déductives pour illustrer ce processus, mais d'abord étudions la distinction entre le processus d'abstraction simple et le processus d'abstraction réfléchissante.

4.3.1 La distinction entre l'abstraction simple et l'abstraction réfléchissante

Piaget écrit :

> En effet, contrairement à l'abstraction empirique, qui consiste simplement à tirer d'une classe d'objets leurs caractères communs (par combinaison de l'abstraction et de la seule généralisation), l'abstraction réfléchissante consiste à tirer d'un système d'actions ou d'opérations de niveau inférieur certains caractères dont elle assure la réflexion (au sens quasi physique du terme) sur les actions ou opérations de niveau supérieur (...) En un mot l'abstraction réfléchissante procède par reconstructions qui dépassent, en les intégrant, les constructions antérieures[1]

Le processus d'abstraction empirique ou simple s'apparente au processus d'abstraction aristotélicienne, car Aristote[2] a présenté un opérateur d'abstraction « quod » qui isole une propriété d'un objet. Par exemple, il est possible d'isoler la propriété « la somme des angles internes est égale à deux droits » de la notion de triangle pour considérer l'entité triangle quod P. Par contre, Piaget n'applique ce processus qu'aux objets physiques et

---

[1] [Beth, Piaget, 1961, p. 203]

[2] En fait, selon entre autres Cleary (voir [Cleary, 1985]), Aristote présente un premier processus d'abstraction consistant à soustraire ou à omettre des propriétés d'un objet et un second consistant à trouver le sujet principal d'une propriété donnée.

non, comme c'est le cas pour l'abstraction aristotélicienne, aux représentations d'objets ou aux représentations de représentations.

Quant au processus d'abstraction réfléchissante, il ne s'applique pas aux objets physiques mais aux représentations d'objets et surtout aux représentations de représentations d'objets. Par exemple, le schème de déplacement que nous avons présenté dans la section précédente provient de la reconstruction du schème sensori-moteur de déplacement au niveau préopératoire. Le sujet reconstruit « en mots » ses actions.

Nous utiliserons le passage de la période des opérations concrètes aux opérations hypothético-déductives pour illustrer le processus d'abstraction réfléchissante. Piaget a aussi précisé ce processus en le divisant en quatre étapes. Nous les présenterons ensuite.

4.3.2 Des opérations concrètes aux opérations hypothético-déductives

Durant la période des opérations concrètes, le sujet a développé les groupements de classes et de relations, basés sur les transformations d'inversions ou de réciprocités. Par exemple, l'opération de classer des éléments (un objet est un élément d'une classe ou non) est une transformation d'inversion, alors qu'une sériation (ordonner des objets selon la grandeur) est une transformation de réciprocité[1]. La principale distinction entre

[1] Piaget va en fait beaucoup plus loin en présentant huit formes de groupements. Les groupements de classe peuvent être additifs (symétriques ou asymétriques), comme l'opération de classer des éléments (un objet est un élément d'une classe ou non) ou d'unir des classes d'éléments, ou multiplicatifs (co-univoques ou bi-univoques), comme le classement selon une table à deux ou plusieurs entrées ou selon un arbre généalogique. Les groupements de relation peuvent aussi être additifs (asymétrique ou symétrique), comme les sériations (ordonner des objets selon la grandeur), ou multiplicatifs, comme ordonner deux séries d'objets selon la même relation (ordonner des réglettes et des figurines selon la grandeur) ou selon deux relations (ordonner des objets selon le volume et le poids).

ces formes de réversions est que l'inversion conduit à une annulation, alors que la réciprocité, à une équivalence.

Cependant, le sujet n'est pas en mesure de combiner ces deux opérations, c'est-à-dire qu'il n'a pas de vue d'ensemble de ces transformations : chacune d'elles est appliquée en ses circonstances propres. De plus, ces opérations portent, au cours de cette période de développement, directement sur des objets physiques ou sur des représentations immédiates de ces objets et non sur des opérations.

Pour passer à la prochaine période, le sujet devra reconstruire ces deux structures indépendantes au sein d'une même structure pour produire une opération qui deviendra l'inverse d'une autre, la réciproque d'une troisième, etc. Cette reconstruction donnera lieu à quatre opérations d'un même système de déduction : directe (I), inverse (N), réciproque (R) et l'inverse de la réciproque (C).

Ajoutons que cette reconstruction n'est pas une juxtaposition d'opérations mais bien une fusion de ces opérations au sein d'un nouveau système INRC, dans le sens où lorsqu'une opération est appelée, sa combinaison avec les autres sera toujours possible. De plus, le sujet décrochera de la nature de l'opération : l'opération n'est plus seulement une opération concrète et pourra être n'importe quelle opération.

4.3.3 Les étapes du processus d'abstraction réfléchissante

Piaget divise ce processus en quatre étapes : les propriétés sont d'abord identifiées (étape a)[1], ensuite réfléchies au niveau supérieur (étape b), puis reconstruites en de

---

[1] Ces quatre étapes sont décrites à la p.259 de [Beth, Piaget, 1961].

nouvelles opérations (étape c) et finalement ces nouvelles opérations réunissent des systèmes d'actions ou d'opérations de niveau inférieur jusqu'alors séparés. Détaillons chacune de ces étapes.

Premièrement, des liaisons opératoires sont identifiées[1] dans des schèmes du niveau inférieur. Par exemple, les groupements de classes et les groupements de relations sont des schèmes du niveau inférieur et chacun a des liaisons opératoires, soit la propriété d'inversion de l'opération concrète d'inversion (groupement de classes) ou la propriété de réciprocité de l'opération concrète de réciprocité (groupement de relations). De plus, ces deux sortes de groupements sont des systèmes séparés, car la combinaison entre eux n'est pas possible.

Deuxièmement, ces liaisons sont réfléchies au niveau supérieur. Par exemple, la propriété d'inversion et la propriété de réciprocité sont réfléchies au niveau hypothético-déductif. Il faut bien comprendre que ce ne sont pas les opérations concrètes qui sont réfléchies, mais certaines de leurs propriétés.

Troisièmement, ces liaisons deviennent des propriétés d'une nouvelle opération. Par exemple, l'opération inverse, qui est une nouvelle opération, satisfait la propriété d'inversion de l'opération concrète d'inversion, de même que la nouvelle opération réciproque satisfait la propriété de réciprocité de l'opération concrète de réciprocité. De plus, une nouvelle opération est possible, car il est possible de combiner l'opération inverse avec l'opération réciproque. Cette dernière opération constitue la nouveauté de ce système, alors que les opérations inverses et réciproques assurent la continuité avec les systèmes antérieurs.

---

[1] Arbib ([Arbib, 1990]) propose que la première étape résulte de la vérification par les pairs, c'est-à-dire que c'est en discutant avec nos collègues qu'on identifie les relations qu'il faut abstraire.

Finalement, la dernière étape est la fusion des systèmes séparés de niveau inférieur en une même totalité. Dans ce cas-ci, le système est nommé INRC et permet d'identifier seize combinaisons possibles pour résoudre un problème.

4.3.4 La reconstruction/réinterprétation

Nous avons ainsi que le processus d'abstraction réfléchissante implique la reconstruction du schème initial au niveau supérieur. Cette reconstruction est caractérisée par une fusion entre systèmes, par le changement dans le rôle de certaines propriétés et par une façon équivalente de définir le schème initial.

Premièrement, la fusion entre systèmes donne au sujet une vue d'ensemble. Cette vue d'ensemble implique une réorganisation des connaissances du sujet puisque le sujet, en fusionnant ces systèmes, se rend compte que ces systèmes ne sont que des cas particuliers d'un système plus général.

Cette fusion illustre aussi que le sujet « monte » de niveaux de développement car, en plus de cette vue d'ensemble, l'abstraction réfléchissante permet au sujet de construire des opérations sur des opérations. Nous retrouvons ainsi la même relation d'instanciation que nous avions trouvée dans l'analyse de l'abstraction par omission de Mac Lane. Dans ce cas, les instances sont reconstruites en instances d'une même notion, comme ce fut le cas par exemple pour la notion de groupe.

Deuxièmement, la troisième étape nous assure que le sujet introduit un nouveau schème dont les propriétés sont des propriétés reconstruites du schème initial. Ainsi, ces propriétés n'ont plus la même fonction ou ne jouent plus le même rôle : pour le schème initial, elles sont connexes, voire utilisées à l'insu du sujet; pour le nouveau schème, elles sont « essentielles ». Dans ce cas, nous retrouvons également une réorganisation des connaissances du sujet, car il identifie la propriété qui est vraiment utilisée pour combler le besoin, c'est-à-dire que c'est par cette propriété que l'action posée comble le besoin.

Nous retrouvons cette même quête de propriétés essentielles dans notre analyse du processus d'abstraction par changement d'attention proposé par Mac Lane. Le passage de la notion de continuité telle que définie dans un espace métrique à celle telle que définie dans une espace topologique illustre ce changement d'attention par rapport au rôle de certaines propriétés.

Finalement ce changement dans le rôle des propriétés est plus qu'un simple passage de l'utilisation inconsciente des propriétés à son utilisation consciente; Le nouveau schème est plus qu'une simple réplique. Piaget écrit :

> Tirer une connaissance nouvelle de ses propres actions consiste, en effet, non pas simplement à projeter la lumière de la conscience sur une organisation préalable sans la modifier autrement que par le passage de l'inconscience à la conscience, mais bien à généraliser cette organisation préalable et à la représenter (au sens psychologique du terme) sous la forme d'un modèle plus large d'opérations pouvant être conçues simultanément.[1]

Ce processus d'abstraction réfléchissante permet au sujet de généraliser le schème initial en le reconstruisant dans un schème plus large au sens où l'extension du nouveau schème contient l'extension du schème initial. Le processus de généralisation se présente encore comme la recherche de la plus grande extension.

---

[1] [Beth, Piaget, p.254]

Au sein de ce nouveau schème, nous retrouvons plusieurs nouvelles façons de définir le schème initial et ces nouvelles façons sont toutes équivalentes. En effet, l'opération, en s'inscrivant maintenant dans un système de déduction, peut être définie comme l'inversion ou la réciproque d'une autre. Nous pouvons donc affirmer que le schème initial se définit de plusieurs nouvelles façons équivalentes.

Nous en concluons d'une part que cette reconstruction implique une réorganisation de la connaissance du sujet, car ses trois caractéristiques agissent sur les connaissances du sujet. D'autre part, cette reconstruction propose une *réinterprétation* du schème dans le sens où certaines propriétés deviennent constitutives et ainsi la compréhension de la notion initiale change radicalement.

4.4 Les nouvelles interprétations et les réinterprétations

L'analyse de Piaget nous permet de mettre en évidence certaines caractéristiques que nous utiliserons pour développer deux processus de changement de notions mathématiques : les nouvelles interprétations et les réinterprétations. La distinction intuitive entre ceux-ci est que, dans le premier cas, la compréhension de la notion demeure sensiblement la même alors qu'elle change radicalement dans le second.

Une caractéristique que nous avons trouvée lors de notre analyse des processus d'assimilation et d'accommodation est qu'un schème d'assimilation s'accommode des variantes. Dans l'exemple du problème des déplacements entre la maison et l'école, la résolution du problème initial demeure sensiblement la même que la résolution des problèmes issus de ces variantes, car le passage de l'un à l'autre peut être expliqué par une relation fixe-variable. Ainsi, nous retrouvons le « même » schème d'assimilation dont nous avons fait varier certaines parties. Ces nouvelles interprétations semblent donc produire des schèmes dont la compréhension reste sensiblement la même.

Par contre, lorsque le sujet réfléchit le problème au niveau supérieur, qui pourra être celui de la géométrie euclidienne, la résolution nécessite la compréhension d'une nouvelle théorie. Dans ce cas, le sujet, au niveau de la géométrie euclidienne, assimile ce problème à un problème de géométrie euclidienne. Ainsi, le chemin est maintenant assimilé à la ligne, les points de départ et d'arrivée, à des points et l'objectif du problème, à trouver la ligne entre des points.

Ce sont donc certaines propriétés des objets du problème initial qui permettent au sujet de réfléchir ces objets au niveau supérieur, comme par exemple, ce sont certaines propriétés de la notion chemin qui permettent au sujet de l'assimiler comme une ligne. Nous en concluons que le schème initial est réinterprété au niveau supérieur en un schème équivalent dont la compréhension est différente.

De plus, une fois le problème assimilé à un problème de géométrie euclidienne, les variantes de changement de contextes, comme le problème des déplacements entre les chambres dans une maison ou celui sur une carte électronique, sont unifiés sous un même type de problème et se résolvent donc de la même façon. Les problèmes ne sont plus alors séparés.

Ajoutons que, dans le cas d'une relation fixe-variable entre notions, l'extension de la nouvelle notion augmente nécessairement. En effet, toutes les instances de la notion initiale sont conservées et on ajoute les instances issues du passage au variable. Nous obtenons donc que cette relation implique une généralisation. Ce qui n'est pas le cas lorsqu'on change la compréhension de la notion initiale, car il est possible de perdre certains résultats, voire des instances.

5 Les processus d'abstraction dans la littérature philosophique

Nous proposons un très court résumé des nombreuses et intéressantes recherches philosophiques sur les processus d'abstraction.

Premièrement nous retrouvons le processus d'abstraction aristotélicien qui consiste, d'une part, en un opérateur « quod » qui isole une propriété d'une notion et, d'autre part, en la recherche du sujet principal d'une propriété donnée (voir [Cleary 1985]). Nous avons comparé l'opération « quod » au processus d'abstraction simple introduit par Piaget, alors que la recherche du sujet principal peut être interprétée par la recherche de propriétés essentielles. Dans ce dernier cas, nous retrouvons un lien avec notre analyse de Mac Lane.

Deuxièmement, Frege ([Frege, 1889] paragraphe 68-69) propose ce que nous pouvons appelé une définition par abstraction (voir [Angelelli, 1984]). En effet, un objet est abstrait s'il est le quotient d'une classe d'équivalence. Nous retrouvons aussi une interprétation néo-frégéenne donnée par Kit Fine (voir [Fine, 2002]).

Troisièmement, nous retrouvons d'autres processus d'abstraction. Hermann Weyl ([Weyl, 1949]) propose le principe de la définition créative qui nous permet d'introduire une notion abstraite (voir [Pollard, 1987] et [Pollard, 1988]). Le processus d'abstraction cantorien ([Fine, 1998]) se définit par une abstraction sur une abstraction. Il semble donc être possible de combiner ce processus.

Finalement certaines recherches portent non pas sur les processus d'abstraction mais sur les entités abstraites (voir entre autres [Lowe, 1995] et [Cartwright, 1989]).

6 Manques et lacunes

Bien que nous ayons traité de la généralisation de théorèmes, d'énoncés, de théories, nous nous intéresserons uniquement à la généralisation de notions mathématiques. Dans ce cas, ce processus implique un changement de notions : la notion initiale est généralisée à la nouvelle notion[1]. Nous retrouverons ainsi que certains changements seront des généralisations et que d'autres n'en seront pas.

Notre revue de littérature, en particulier les recherches de Pólya et de Lakatos, nous a amené à caractériser la généralisation d'une notion de la façon suivante :

Définition intuitive (La généralisation par extension d'une notion)
Une notion N' est une *généralisation* (*par extension*) d'une notion N lorsque toutes les instances de N sont aussi des instances de N' et qu'il y a des instances de N' qui ne sont pas des instances de N.

Cette définition semble bien expliquer les cas pour lesquels la relation entre la notion initiale et la nouvelle notion se caractérise par une relation fixe-variable, comme par exemple le passage de la notion de continuité en un point à la notion de continuité sur un intervalle. En effet, toutes les instances de la notion initiale sont conservées et on ajoute les instances issues de l'introduction du variable.

Par contre, nous soutenons que cette définition ne rend pas compte de la généralisation de notions coextensives. Par exemple, les notions de continuité dans un espace

---

[1] Cette terminologie (notion initiale et nouvelle notion) sera abondamment utilisée dans cette thèse.

métrique et de continuité dans un espace topologique sont coextensives dans le contexte des espaces métriques. Nous proposons plutôt d'étudier la compréhension de la notion.

En effet, dans ce passage, la compréhension de la notion change radicalement : il n'est plus possible d'expliquer le changement de notions par une relation fixe-variable. Mac Lane explique ce passage par un changement d'attention de la part du chercheur : certaines propriétés deviennent constitutives de la nouvelle notion.

Nous pouvons aussi utiliser les travaux de Piaget sur son processus d'abstraction réfléchissante pour affirmer qu'à ce changement de statut de certaines propriétés s'ajoute une réorganisation de la connaissance du sujet. En effet, la reconstruction du schème permet au sujet d'unir des systèmes jusqu'alors séparés ou de trouver une analogie entre des problèmes jusqu'alors séparés et donc de réorganiser ses connaissances. Cette réorganisation change la compréhension du problème.

De plus, une fois reconstruit, le nouveau schème permet au sujet de résoudre le problème initial de façon équivalente. Cette équivalence s'oppose à l'égalité dans le cas d'accommodation des variantes d'un problème. En fait, nous retrouvons le même schème d'assimilation lorsqu'on passe d'une variante du problème initial au problème initial : le sujet résout le problème initial de la même façon et non de façon équivalente. Nous reviendrons sur cette tension entre équivalence et égalité.

En introduisant une étude de la compréhension des notions, nous sommes en mesure de regrouper les caractéristiques en proposant deux types de processus de généralisation dont les définitions intuitives sont les suivantes :

Définition intuitive (La généralisation conservative)

Soit N, une notion mathématique. Alors N' est une *généralisation conservative* de N si la compréhension des notions est similaire, c'est-à-dire qu'il existe une relation fixe-variable entre ces notions.

Définition intuitive (La généralisation innovante)

Soit N, une notion mathématique. Alors N' est une *généralisation innovante* de N si la compréhension de N' change radicalement, c'est-à-dire que la compréhension de N est remplacée par une compréhension équivalente.

Ajoutons, en terminant, que la généralisation innovante semble caractériser les hiérarchies de notions. Par exemple, nous retrouvons, dans certains langages de programmation (voir [Page-Jones, 1999]), la notion de superclasse, soit la notion de laquelle toutes les autres notions héritent de ses propriétés. Dans une hiérarchie de notions biologiques, nous retrouvons aussi cette caractéristique, comme par exemple tous les lions sont des félins, mais il existe des félins qui ne sont pas des lions.

Insistons une dernière fois sur l'importance de la relation fixe-variable en remarquant que cette relation n'intervient non seulement entre la notion initiale et la nouvelle notion, mais aussi entre les notions utilisées dans la compréhension des notions. Par exemple, le passage de la notion de partition à la notion de recouvrement d'ouverts est caractérisé par une relation fixe-variable et ces notions sont utilisées dans la définition de la notion d'intégrale.

Chapitre 2 : Résultats préliminaires

Logique typée, formalisation des notions mathématiques et des processus de généralisation

Notre analyse de la littérature nous a conduit à définir les notions mathématiques par compréhension pour nous permettre de mieux caractériser les processus de généralisation. De plus, nous avons remarqué que ce processus impliquait un changement de notions et pouvait faire intervenir plusieurs sortes de relations fixes-variables entre notions de même qu'une relation d'instanciation et une réorganisation possible des connaissances mathématiques.

Dans ce deuxième chapitre, nous proposons de combler ces besoins en formalisation en développant une variante de la logique typée. Nous présentons donc cette variante que nous ferons suivre de la formalisation des notions mathématiques et du processus de généralisation restreint aux propriétés mathématiques.

En fait, nous introduirons d'abord trois types de notions ou trois façons de définir une notion que nous appellerons des définitions par compréhension. Ensuite, nous développerons deux processus de changements de notions : les nouvelles interprétations et les réinterprétations, dont la distinction sera basée sur la présence ou l'absence de relations fixes-variables.

Ces deux processus de changements nous permettront aussi de préciser les processus de généralisation conservative et innovante tels que présentés intuitivement à la fin de notre revue de littérature.

1 Notre version de la logique typée

Une logique est composée d'une syntaxe, d'une sémantique et des méthodes syntaxiques et sémantiques de vérification de la validité. Nous développerons seulement la syntaxe de notre version de la logique typée, car l'objectif est de formaliser le langage mathématique et les processus de généralisation.

Mentionnons d'emblée que cette nouvelle version sera inspirée des travaux de Pitts sur le logique catégorique ([Pitts, 1995]), de Bell sur la logique sortale ([Bell, 2001]), de Constable sur la logique typée ([Constable, 1999]) et de Gries et Schneider sur la logique équationnelle ([Gries, 1993], [Gries, 1995])[1].

Avant de développer la syntaxe de cette logique et d'en donner quelques exemples de formalisation, revenons sur la relation d'instanciation. Dans ce cas, comme la notion initiale devient une instance de la nouvelle notion, nous affirmons que cette relation illustre le passage de l'étude d'une sorte d'un type à l'étude du type. Nous proposons donc une logique dans laquelle le type aura des sortes.

---

[1] En fait, les travaux de Gries et Schneider portent sur des méthodes de démonstration et ceux de Constable sont des notes de cours. Aucune référence explicite ne sera faite dans nos travaux.

1.1 Le type et ses sortes

Nous voulons permettre qu'un type ait plusieurs sortes[1], comme un genre, dans une classification biologique, peut avoir plusieurs espèces. Par exemple, en géométrie euclidienne, le triangle peut être considéré comme un type ayant sept sortes : équilatéral, isocèle obtuangle, isocèle rectangle, isocèle aiguangle, scalène obtuangle, scalène rectangle, scalène aiguangle. Ceci nous amène à proposer la notation suivante :

x_1 : Triangle | équilatéral ou a_1 : Triangle | scalène.

Nous récupérons donc le symbole : de la notation proposée, entre autres, par Pitts ([Pitts, 1995]), mais nous introduisons un nouveau symbole, en l'occurrence |, pour indiquer le niveau hiérarchique des sortes de l'éventuel type. De plus, nous retrouvons la distinction le fixe (la constance a_1) et le variable (la variable x_1).

Il est aussi possible que la hiérarchie change : au lieu de considérer par exemple les sortes de triangles, on aurait pu considérer les sortes de figures de géométrie euclidienne et obtenir les variables suivantes :

x_2 : Figure euclidienne | triangle | | équilatéral,
x_3 : Figure euclidienne | carré.

Dans ces cas, deux sortes du type Figure euclidienne sont présentées, dont une possède une sous-sorte, d'où l'utilisation de la double barre. En fait, dans cet exemple, la notion de triangle équilatéral est en relation d'instanciation avec la notion de figure

---

[1] Ajoutons qu'aucune logique sortale que nous avons trouvée ne fait explicitement la distinction entre la sorte et le type.

euclidienne, car le triangle équilatéral n'est plus vu comme une instance du type Triangle mais du type Figure euclidienne.

Ajoutons que le changement de racine de la hiérarchie implique un changement de la vue d'ensemble ou une réorganisation des connaissances mathématiques et un changement « radical » dans la compréhension de la notion. Nous reviendrons sur ces implications épistémologiques.

Nous sommes conscients que la distinction entre les sortes d'un type et les propriétés d'un type mérite d'être approfondie et que certaines théories ont été élaborées sur cette distinction. Cependant cette distinction est connexe à notre thèse.

1.2 La syntaxe

La syntaxe d'une logique est composée du vocabulaire et des règles de grammaire. En fait, le vocabulaire est la liste des symboles acceptés et ces symboles sont divisés en symboles non logiques (les constantes, les fonctions et les prédicats) et logiques (les variables et les connecteurs logiques), auxquels s'ajoutent les symboles de manipulations et les symboles qui agissent sur les types (: et |).

Les règles de grammaire sont des règles de constructions des expressions bien formées et nous retrouvons deux sortes d'expressions bien formées : les termes et les formules. Les termes seront évidemment typés et nous retrouvons dans la littérature la notion de signature pour permettre à un terme d'être typé.

Présentons le vocabulaire, les règles de grammaire, mais débutons d'abord avec une discussion sur la notion de signature d'une logique typée et de contexte de type. Notons que cette dernière notion nous permettra de bien identifier où la relation fixe-variable s'appliquera lors d'un changement de notions.

1.2.1 La signature en logique typée et le contexte d'un type

Pour développer une logique typée, il est nécessaire que les termes soient typés. Pour ce faire, certains logiciens introduisent la notion de signature. En effet, Bell ([Bell, 2001]) assigne une signature aux symboles non logiques comme suit :

Définition logique (La signature du vocabulaire non logique)
Soit S l'ensemble des sortes. Alors

a) Une signature s est assignée aux individus de sorte s.
b) Si P est un prédicat n-aire, alors une signature $\langle s_1, ..., s_n \rangle$, avec $s_i \in S$ est assignée à P.
c) Si f est une fonction n-aire, alors une signature $\langle s_1, ..., s_n \rangle \rightarrow s_{n+1}$, avec $s_i \in S$ est assignée à f.

Ainsi, cette notion de signature va plus loin que la simple assignation d'une sorte aux termes, puisque les prédicats ont aussi une signature. En effet, il faut par exemple spécifier la sorte des termes et la signature du prédicat avant de former une formule : un prédicat ayant une signature $\langle s_1, ..., s_n \rangle$ utilise seulement des termes dont les sortes sont respectivement $s_1, ..., s_n$. Le problème est que nous n'avons pas besoin de signer de cette façon les prédicats, car on peut très bien le faire en utilisant les règles de grammaire. De plus, la notation développée par Bell est loin d'être simple[1].

[1] La notation de Bell est issue d'une modification de la notation de la logique des prédicats qui lui permit de signer les symboles non logiques. En plus, il propose une façon de réduire les logiques sortales aux logiques non sortales. Nous avons ainsi l'impression qu'il ne fait qu'adapter la logique des prédicats pour développer une logique sortale.

Pitt ([Pitt, 1995]), quant à lui, ne présente pas la signature comme l'assignation de sortes aux symboles non logiques mais comme l'ensemble des sortes et des fonctions typées. Il la note de la façon suivante :

$$Sg = \{\sigma_1, .., \sigma_n, F : \sigma_1, ..., \sigma_m \rightarrow \tau\}.$$

Ensuite, il introduit la notion de contexte et la définit comme la liste des variables d'individus sortées. La notation est la suivante :

$$\Gamma = [x_1 : \sigma_1, ..., x_n : \sigma_n].$$

Pour notre part, nous récupérons la notion de contexte pour assigner non seulement un type aux variables d'individus, mais aussi à tous les symboles non logiques (individus, fonctions et prédicats), de même qu'à leurs variables[1]. Ceci nous permettra de mettre en évidence les relations fixes-variables, en plus d'obtenir une notion simple. Nous résumons donc notre notation comme suit :

Tableau 2.1 : Le contexte des symboles typés

Contextes	Le fixe	Le variable
Individu	$a : T_1 \mid S_1$	$x : T_1 \mid S_1$
Fonction n-aire	$f : (T_1 \mid S_1, \ldots, T_n \mid S_n) \rightarrow T' \mid S'$	$F : (T_1 \mid S_1, \ldots, T_n \mid S_n) \rightarrow T' \mid S'$
Prédicat n-aire	$P : (T_1 \mid S_1, \ldots, T_n \mid S_n)$	$P : (T_1 \mid S_1, \ldots, T_n \mid S_n)$

Notons qu'une fonction mathématique sera considérée comme un symbole d'individus. Dans ce cas, nous noterons f_i : Fonction pour la constante et f : Fonction pour la variable. De plus, nous ne considérons pas le type Booléen dans la liste des types T_i, car il est difficile d'attribuer par exemple une signification aux fonctions suivantes :

[1] En fait, en logique typée, les formules ne sont pas typées, mais les termes primitifs (les individus et les variables d'individus), les termes complexes (formés en utilisant des fonctions et des variables de fonctions), les prédicats et les variables de prédicats doivent l'être. La notion de contexte permet de les typer adéquatement.

$f: (\mathbf{B}, T_1 | S_1, \ldots, T_n | S_n) \rightarrow T' | S'$, ou $f: (\mathbf{B}, \ldots, \mathbf{B}) \rightarrow T' | S'$.

1.2.2 Le vocabulaire

Nous retrouvons, dans le tableau 2.1, les principaux symboles de notre logique typée. De façon plus détaillée, le vocabulaire se définit comme suit :

Définition (Le vocabulaire du langage $\mathcal{L}_T$)

Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des types de $\mathcal{L}_T$ et soit **B** le type Booléen. Alors

I. Les symboles de manipulations du langage $\mathcal{L}_T$ sont donnés comme suit :
   a. Le symbole d'assignation d'un type possiblement sorté :
   b. Les parenthèses (,)
   c. Le symbole d'assignation d'une expression bien formée à un symbole :=
   d. Le symbole de sorte |

II. Le vocabulaire non logique du langage $\mathcal{L}_T$ est composé des symboles suivants :
   a. Les symboles de constantes $a_1^{11} : T_1 | S_1$, $a_2^{11} : T_1 | S_1$, ..., $a_1^{12} : T_1 | S_2$, ..., $a_1^{21} : T_2 | S_1$, ...
   b. Les symboles de fonctions n-aires f_1^n, f_2^n, ... ou de prédicats n-aires P_1^n, P_2^n, ... dont les contextes sont respectivement les suivants :
      $f_i^n : (T_1 | S_1, \ldots, T_n | S_n) \rightarrow T' | S'$
      $P_i^n : (T_1 | S_1, \ldots, T_n | S_n)$

III. Le vocabulaire logique du langage $\mathcal{L}_T$ est composé des symboles suivants :
   a. Les symboles de constantes booléennes $0 : \mathbf{B}$ et $1 : \mathbf{B}$ et les variables booléennes $x_{b1} : \mathbf{B}$, $x_{b2} : \mathbf{B}$, ...
   b. Les symboles de variables suivants :
      i. Les variables d'individus $x_1^{11} : T_1 | S_1$, $x_2^{11} : T_1 | S_1$, ..., $x_1^{12} : T_1 | S_2$, ..., $x_1^{21} : T_2 | S_1$, ...
      ii. Les variables de fonctions F_1^n, F_2^n, ... ou de prédicats P_1^n, P_2^n, ... s'appliquant respectivement aux symboles suivants :
         $F_1^n : (T_1 | S_1, \ldots, T_n | S_n) \rightarrow T' | S'$
         $P_1^n : (T_1 | S_1, \ldots, T_n | S_n)$
   c. Les symboles de fonctions n-aires booléennes dont les plus communs sont notés $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\supset$, $\equiv$, comme par exemple
      $\wedge : (\mathbf{B}, \mathbf{B}) \rightarrow \mathbf{B}$,
      $(x_{b1} : \mathbf{B}, x_{b2} : \mathbf{B}) \mapsto \wedge(x_{b1} : \mathbf{B}, x_{b2} : \mathbf{B}) : \mathbf{B}$.
   d. Les symboles de quantification universelle $\forall$ et existentielle $\exists$ et le symbole d'égalité =

1.2.3 Les expressions bien formées

Les règles de grammaire nous permettent de construire des expressions bien formées qui sont soit des termes typés, soit des formules. Par exemple, l'expression suivante est une expression bien formée et représente une formule :

$$(\forall F : (\mathrm{T}_1 | \mathrm{S}_1, \mathrm{T}_2 | \mathrm{S}_2) \rightarrow \mathrm{T'} | \mathrm{S'}) ((\forall x : \mathrm{T}_2 | \mathrm{S}_2)\ \mathrm{P}_1(F(a, x)) \vee ((\exists P : \mathrm{T}_1 | \mathrm{S}_1)\ P(a))).$$

Dans cette formule, F est une variable bornée de fonctions binaires, P_1 est un prédicat unaire fixé, a est une constante, x est une variable d'individus, P est une variable de prédicats unaires.

Les expressions bien formées sont construites par récurrence sur les termes ou les formules dites primitives; cette approche est standard.

Ajoutons en terminant notre notation pour définir les fonctions et les prédicats :

$f : (\mathrm{T}_1 | \mathrm{S}_1, \ldots, \mathrm{T}_n | \mathrm{S}_n) \rightarrow \mathrm{T'} | \mathrm{S'}$
$\quad f(x_1, \ldots, x_n) :=$ terme de type $\mathrm{T'} | \mathrm{S'}$ ouvert en $x_1, \ldots, x_n$.
$\mathrm{P} : (\mathrm{T}_1 | \mathrm{S}_1, \ldots, \mathrm{T}_n | \mathrm{S}_n)$
$\quad \mathrm{P}(x_1, \ldots, x_n) :=$ formule ouverte en $x_1, \ldots, x_n$.

Notons que la première ligne représente le *contexte* du symbole, alors que la seconde, sa *partie interne*. Les fonctions se distinguent donc des prédicats à la fois dans le contexte et dans la partie interne.

1.3 Les formalisations possibles

Pour illustrer notre formalisme, nous proposons de formaliser des énoncés de la langue naturelle et aussi de discuter de la formalisation des mathématiques.

1.3.1 Quelques exemples de formalisations en langue naturelle

Formalisons les trois propositions suivantes :

a) Toutes les carottes sont des légumes.
b) Cette carotte a toutes les propriétés d'un légume.
c) Il y a au moins une propriété qui est satisfaite par tous les légumes.

Pour formaliser le premier énoncé, fixons la propriété d'un objet comme suit :

L : (Objet)
  Lx := x est un légume

Comme le symbole est fixé, il n'est pas en italique. Ensuite, en quantifiant sur les carottes, nous obtenons :

Toutes les carottes sont des légumes.
 se formalise comme[1]
  ($\forall x$: Carotte) Lx

Le second exemple illustre la possibilité de quantifier sur les propriétés. Dans ce cas, nous n'avons pas besoin de fixer la propriété et ainsi nous utiliserons une variable de propriétés, d'où le symbole L sera en italique. De plus, nous introduirons une constante pour formaliser cette carotte. Notre résultat est le suivant :

---

[1] Nous remarquons que la logique typée propose une meilleure formalisation de cet énoncé qu'une logique des prédicats puisque, dans ce cas, il aurait fallu quantifier sur toutes entités.

Cette carotte a toutes les propriétés d'un légume.
se formalise comme
$(\forall L : (\text{Légume}))La$

Dans le dernier exemple, nous ne fixons pas la ou les propriétés qui sont satisfaites par les légumes. Nous avons besoin d'une variable de propriété et d'une variable d'individus; les deux seront en italique. Nous obtenons la formalisation suivante :

Il y a au moins une propriété qui est satisfaite par tous les légumes.
se formalise comme
$(\exists L : (\text{Légume}))(\forall x : \text{Légume})Lx$

Ajoutons que, dans ce dernier exemple, il aurait été possible de choisir ou de fixer une des propriétés, comme par exemple la propriété d'être comestible. Dans ce cas, le symbole n'aurait plus été en italique et notre formalisation aurait été :

Il y a au moins une propriété qui est satisfaite par tous les légumes.
se formalise comme
$(\forall x : \text{Légume})\mathrm{L}x$

1.3.2 La formalisation du langage mathématique

Nous retrouvons, dans le langage mathématique, plusieurs expressions bien formées, comme des définitions de notions, des théorèmes, des exemples, des preuves, etc.. Les énoncés seront formalisés par des formules, en l'occurrence fermées, et cette formalisation ne sera pas tant différente, du point de vue de l'étude des processus de généralisation, de la formalisation de la langue naturelle.

Par contre, la formalisation des notions mathématiques nous aidera à préciser les processus de généralisation. Celles-ci seront formalisées par un type et nous proposons de les étudier à l'instant.

2 La formalisation des notions mathématiques

Notre formalisation des notions mathématiques a comme objectif de mettre en évidence certaines caractéristiques des processus de généralisation. Or, nous avons convenu, à la suite de notre analyse de la littérature, d'une part, que la généralisation de notions est un processus qui se définit intuitivement par l'inclusion d'extensions. Nous avons donc besoin de déterminer facilement l'extension d'une notion.

D'autre part, nous avons proposé deux types de généralisations dont la distinction est basée sur la compréhension de la notion. Nous formaliserons donc la notion mathématique par une définition par compréhension.

Dans cette section, nous discuterons d'abord des définitions par compréhension, ensuite des conditions de validité pour déterminer l'extension d'une notion mathématique et finalement du rôle ou de la fonction d'une notion mathématique.

2.1 Les définitions par compréhension

Nous retrouvons deux façons de définir une notion mathématique, soit par une « formule mathématique », soit par une liste des propriétés à satisfaire par la notion. Par exemple, la notion d'intégrale de Cauchy est définie par une formule mathématique, alors que la notion de groupe, par une liste de propriétés.

Or, il s'avère que la « formule mathématique » peut aussi être une propriété à satisfaire. Par exemple, la continuité et l'intégrabilité sont des propriétés de fonctions, mais ces deux notions ont la différence suivante : il est possible de calculer la valeur de l'intégrale d'une fonction (intégrable), alors qu'il est insensé de calculer la valeur de la continuité d'une fonction.

Ceci nous amène donc à considérer trois types de notions : les notions dont la formule est une propriété (les propriétés-mathématiques), les notions dont la formule est un calcul mathématique (les notions-calculs) et les notions qui sont définies par une liste de propriétés (les notions-propriétés). Comme la compréhension de la notion mathématique dépendra du type de notions, passons-les en revue.

2.1.1 Les propriétés-mathématiques

Commençons par un exemple d'une propriété-mathématique : la notion de continuité d'une fonction en un point. La définition standard est la suivante :

Définition mathématique (La continuité en un point)
Soit f une fonction réelle à valeurs réelles définie sur $[a, b]$ et soit c tel que $a < c < b$. Alors f est *continue* en $x = c$ si

$$(\forall \varepsilon \in \mathbf{R}^+)(\exists \delta \in \mathbf{R}^+)(\forall x \in \mathbf{R})(|x - c| < \delta \supset |f(x) - f(c)| < \varepsilon).$$

D'abord, la notion de continuité en un point, que nous nommerons N_1, est une sorte du type continuité. Dans ce cas, nous utiliserons la barre verticale, d'où

N_1 : Continuité | en un point.

Ensuite, cette notion détermine un sous-ensemble de fonctions réelles à valeurs réelles, soit celui pour lequel les fonctions sont continues en un point. Ainsi, cette notion se formalise par un prédicat qui est une propriété puisque, dans ce cas-ci, le point est fixé. Le contexte de la notion est donc le suivant :

$N_1 : (\text{Fonction} \mid \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \mathbf{R})$.

Finalement, la « formule mathématique », qui constitue de ce nous appellerons la partie interne de la notion, est formalisée par une formule au sens logique du terme, c'est-à-dire une expression bien formée qui n'est pas un terme. En logique typée, cette formule s'écrit comme suit :

$$N_1(f, c) := (\forall \varepsilon : \mathbf{R}^+)(\exists \delta : \mathbf{R}^+)(\forall x : \mathbf{R})\ (|x - c| < \delta \supset |f(x) - f(c)| < \varepsilon).$$

En somme, la définition par compréhension d'une propriété-mathématique se détermine en identifiant le type de notion, le contexte du type et la partie interne. Nous obtenons donc la définition par compréhension suivante :

Définition par compréhension (N_1 : Continuité | en un point)
$N_1 : (\text{Fonction} \mid \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \mathbf{R})$
$N_1(f, c) := (\forall \varepsilon : \mathbf{R}^+)(\exists \delta : \mathbf{R}^+)(\forall x : \mathbf{R})\ (|x - c| < \delta \supset |f(x) - f(c)| < \varepsilon)$

2.1.2 Les notions-calculs

La distinction entre les propriétés-mathématiques et les notions-calculs se situe à la fois dans le contexte et dans la partie interne. Pour les premières, le contexte est un prédicat n-aire et la partie interne, une formule. Pour les secondes, le contexte est une fonction n-aire et la partie interne, un terme complexe.

Par exemple, les sortes d'intégrales (l'intégrale de Cauchy, de Riemann, etc.), les séries trigonométriques ou les notions euclidiennes d'aire ou de volume sont des notions-calculs, car elles se définissent par une formule mathématique qui n'est pas une propriété. De façon plus détaillée, considérons la notion-calcul suivante :

Définition mathématique (Longueur d'un intervalle)
Soit $[x,y]$ un intervalle réel. Alors la *longueur* de l'intervalle est :
$L(x,y) = |x-y|$.

Pour formaliser cette notion, il faut d'abord identifier le type. Dans ce cas, la longueur d'un intervalle est une sorte de mesure et ainsi nous écrivons :

L : Mesure | Longueur d'un intervalle.

Ensuite, le contexte de cette notion est une fonction dont le domaine est un intervalle et le codomaine, les nombres réels positifs, d'où :

L_I: (Intervalle) $\rightarrow \mathbf{R}^+$

Finalement, la formule mathématique ne se formalise plus comme une formule (logique) mais comme un terme ouvert en la notion d'intervalle, en l'occurrence :

$L([x,y]) := |x-y|$.

Nous proposons donc la formalisation suivante :

Définition par compréhension (L : Mesure | Longueur d'un intervalle)
L: ([Intervalle]) $\rightarrow \mathbf{R}^+$
$L([x,y]) := |x-y|$

2.1.3 Les notions-propriétés

La dernière façon de définir une notion est de présenter la liste des propriétés que la notion doit satisfaire. Utilisons la notion de métrique (et aussi d'espace métrique) pour illustrer notre formalisation. La définition standard est la suivante :

Définition mathématique (Les métriques et les espaces métriques)
Soit X un ensemble et soit d_X une fonction de $X \times X$ vers $\mathbf{R}^+$ telle que
1) $d_X(x,y) = 0$ ssi $x = y$, pour tout $x, y \in X$
2) $d_X(x,y) = d_X(y, x)$, pour tout $x, y \in X$
3) $d_X(x, z) \leq d_X(x,y) + d_X(y,z)$ pour tout $x, y, z \in X$

Alors, d_X est une *métrique* et (X, d_X) devient un *espace métrique*.

Nous avons que les trois propriétés listées sont des propriétés de fonctions binaires. Ainsi, une fonction sera une métrique si elle satisfait ces trois propriétés. Or, contrairement aux notions-calculs, la notion-propriété ne nous permet pas de calculer « effectivement » la distance entre deux points. En fait, il est impossible d'écrire une formule mathématique à la place du ? dans l'expressions suivantes :

$$\begin{aligned} d_X : (X : \text{Ensemble}, X : \text{Ensemble}) &\rightarrow \mathbf{R}^+ \\ (x,y) &\mapsto d_X(x,y) := ? \end{aligned}$$

De plus, même si la métrique peut être considérée comme une propriété qui définit un sous-ensemble de fonctions binaires à valeurs réelles positives ou nulles, la métrique n'est pas une propriété-mathématique, car on peut faire un calcul avec une métrique, ce qui n'est pas le cas pour une propriété-mathématique (rappelons la distinction entre les notions de continuité et d'intégrale).

Nous en concluons que le contexte de la notion de métrique sera un prédicat (la propriété « être une métrique » définit un sous-ensemble) et que la partie interne de la notion sera la liste des propriétés. La formalisation devient ainsi :

Définition par compréhension (M : Métrique)
M : (Fonction | (X : Ensemble, X : Ensemble) → $\mathbf{R}^+$)
$M(d) := M_1(d) \wedge M_2(d) \wedge M_3(d)$
où $M_1(d) := (\forall x : X)(\forall y : X)(d(x,y) = 0) \equiv (x = y))$
$M_2(d) := (\forall x : X)(\forall y : X)(d(x,y) = d(y, x))$
$M_3(d) := (\forall x : X)(\forall y : X)(\forall z : X)(d(x, z) \leq d(x,y) + d(y,z))$

Notons que nous avons écrit « X : Ensemble » dans la sorte de fonction pour indiquer que le domaine de la fonction binaire est le produit cartésien du même ensemble. Ajoutons aussi qu'un espace métrique est un ensemble pour lequel une métrique est définie, d'où la définition suivante :

Définition par compréhension (E_M : Espace métrique)
E_M : (Ensemble, Fonction | (X : Ensemble, X : Ensemble) → $\mathbf{R}^+$)
$E_M(X, d_X) := M(d_X)$

2.1.4 La formalisation des notions mathématiques

Nous avons donc mis en évidence la façon de définir une notion mathématique en identifiant son contexte et sa partie interne. Nous avons appelé cette formalisation, une définition par compréhension et nous avons trouvé trois façons de définir une notion mathématique : les propriétés-mathématiques, les notions-calculs et les notions-propriétés. Les formalisations sont les suivantes :

Définition par compréhension (Symbole_du_type : Type | sorte)
Symbole_du_type : (T_1 | S_1, ..., T_n | S_n) [Le contexte]
Symbole_du_type(r_1, ..., r_n) := A(r_1, ..., r_n) [La partie interne]

Définition par compréhension (Symbole_du_type : Type | sorte)
Symbole_du_type : $(T_1 | S_1, ..., T_n | S_n) \rightarrow T_{n+1} | S_{n+1}$ [Le contexte]
Symbole_du_type$(r_1, ..., r_n) := U(r_1, ..., r_n)$ [La partie interne]

Définition par compréhension (Symbole_du_type : Type | sorte)
Symbole_du_type : $((T_1 | S_1, ..., T_n | S_n) \rightarrow T_{n+1} | S_{n+1})$ [Le contexte]
Symbole_du_type$(d) := M_1(d) \wedge ... \wedge M_m(d)$ [La partie interne]
où $M_1(d) := A_1(d)$ ... $M_m(d) := A_m(d)$

2.2 L'extension d'une notion et ses conditions de validité

Nous avons défini intuitivement la généralisation d'une notion en terme de son extension. Or il semble que la détermination de l'extension d'une notion dépende de la validité de celle-ci parce que l'extension est vue comme l'ensemble des instances *valides* de la notion. Nous proposons donc une analyse des conditions de validité.

Mentionnons d'emblée, et ceci déterminera la suite de cette section, que les conditions de validité d'une notion dépende de la façon de définir la notion : la validité de la notion-calcul d'intégrale semble se différencier de la validité de la propriété-mathématique de continuité et même de la validité de la notion-propriété de groupe.

2.2.1 L'extension des notions-calculs

Commençons par un exemple. Une condition de validité de la notion-calcul d'intégrale de Riemann est appelée une condition d'intégrabilité (au sens de Riemann) et la propriété d'être continue en est une. Ainsi, dans le contexte des fonctions continues, la notion d'intégrale de Riemann est valide, c'est-à-dire que toutes les fonctions continues sont intégrables au sens de Riemann. Ceci peut être démontré et nous proposons la formalisation suivante :

Condition de validité (Extension de I_R)
($\forall f$: Fonction | $[a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ | | Bornée)($\forall [a, b]$: Intervalle)
{P(f, $[a, b]$) := f est continue sur l'intervalle $[a, b]$}
P(f, $[a, b]$) $\supset$ ($\exists r$: **R**) ($I_R(f, [a, b]) = r$)

Une conditions d'intégrabilité est donc une propriété à satisfaire par une fonction bornée sur un intervalle pour qu'elle soit intégrable. Cependant, ces conditions d'intégrabilité ne nous permettent pas de calculer effectivement la valeur de l'intégrale, seulement de déterminer une partie de son extension.

Une condition de validité d'une notion-calcul est donc une propriété du domaine de la notion et non une propriété de la notion. De plus, la satisfaction de celle-ci nous assure que la notion-calcul est valide et nous évite de faire le calcul. De façon plus précise, soit N : $(T_1 | S_1, ..., T_n | S_n) \rightarrow T_{n+1} | S_{n+1}$, une notion-calcul et P : $(T_1 | S_1, ..., T_n | S_n)$, un prédicat n-aire. Alors P est une condition de validité si ce théorème peut être démontré :

Condition de validité (Extension de N)
$(\forall r_1 : T_1 | S_1) ... (\forall r_n : T_n | S_n)$ [Quantification sur le domaine]
$\{P(r_1, ..., r_n) := A(r_1, ..., r_n)\}$ [Condition de validité]
$P(r_1, ..., r_n) \supset (\exists r_{n+1} : T_{n+1} | S_{n+1}) (N(r_1, ..., r_n) = r_{n+1})$

2.2.2 L'extension des propriétés-mathématiques

Nous avons vu qu'une condition de validité d'une notion-calcul est une propriété du domaine de la notion-calcul et cette propriété nous permet de circonscrire une partie de l'extension de la notion-calcul. Ainsi, la satisfaction de cette propriété nous évite de faire le calcul et nous assure que l'instance est valide.

Nous ne retrouvons pas cette recherche de conditions de validité dans le cas d'une propriété-mathématique, car la notion est d'emblée une propriété et ainsi on serait amené à remplacer une propriété par une autre[1].

Or, ce n'est pas vraiment ce que nous entendons par validité d'une propriété-mathématique. D'une part, une propriété-mathématique est valide si elle est la « bonne » propriété dans le sens où on a besoin de cette propriété pour résoudre le problème ou pour définir une autre notion. Bref, la propriété remplit « sa » fonction ou joue bien son rôle. Ainsi, nous sommes renvoyés aux conditions d'utilisation.

D'autre part, une propriété-mathématique peut aussi être mathématiquement valide, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'erreur syntaxique dans sa formule mathématique et que l'énoncé n'est pas faux. Cette dernière caractéristique nous assure que l'extension de la propriété-mathématique n'est pas nulle.

La recherche de l'extension d'une propriété-mathématique ne passe donc pas par les conditions de validité de la notion. L'extension d'une propriété-mathématique est trivialement l'ensemble des notions qui satisfont la propriété.

---

[1] Par exemple, la propriété d'être constant est une condition de validité (selon la définition précédente) de la propriété-mathématique de continuité, puisqu'il est possible de montrer que toutes les fonctions constantes sont continues. Ainsi, la satisfaction de cette propriété nous assure que la fonction est continue, et ce, sans vérifier la formule de continuité.

2.2.3 L'extension des notions-propriétés

Comme une notion-propriété est une notion définie par une liste de propriétés, nous ne retrouvons pas de recherche de condition de validité comme ce fut le cas pour les notions-calculs. Ainsi, la notion de validité se présente de la même façon que la notion de validité d'une propriété-mathématique, à savoir si les propriétés identifiées sont les « bonnes » propriétés. Nous assistons donc encore à un glissement vers les conditions d'utilisation de la notion.

Ajoutons que l'extension d'une notion-propriété est aussi définie trivialement. Or, la détermination de celle-ci est nettement plus compliquée et vaste que pour le cas des propriétés-mathématiques. Pour s'en convaincre, il suffit de comparer l'extension des fonctions continues à l'extension des groupes.

2.2.4 La formalisation des conditions de validité

Nous avons introduit les conditions de validité pour nous aider à identifier des instances ou à circonscrire l'extension d'une notion-calcul. Ceci nous permettra de comparer les extensions de deux notions-calculs pour en conclure que l'une est ou non une généralisation de l'autre.

Quant aux propriétés-mathématiques et aux notions-propriétés, il n'y a pas de condition de validité comme telle; elles se présentent plutôt comme des conditions d'utilisation que nous proposons à l'instant de discuter.

2.3 Les conditions d'utilisation de notions mathématiques

Les conditions d'utilisation d'une notion mathématique peuvent se présenter comme un rôle ou une fonction dans la résolution de problème (la fonction de l'intégrale de Riemann est de calculer une aire). Elle peut aussi être utilisée dans la définition d'une autre notion (les séries trigonométriques utilisent la notion d'intégrale) ou dans la recherche de ses propriétés (la propriété de linéarité de l'intégrale de Riemann).

Sans en faire une étude exhaustive, nous voulons seulement mentionner qu'il est possible que les conditions d'utilisation nous aident à caractériser un changement de notions. En effet, lorsque deux notions entretiennent une relation d'instanciation, le rôle de chacune change. Par exemple, le rôle de la notion-calcul d'intégrale de Riemann n'est pas le même que le rôle de la notion-propriété d'intégrale de Lebesgue (l'intégrale est un opérateur défini par la liste de six propriétés) : dans un cas, le rôle est calculatoire, dans l'autre, le rôle est normatif. De plus, lorsque le rôle change, il y a un changement de conditions d'utilisation et ceci implique une réorganisation du savoir mathématique.

2.4 Les trois types de notions mathématiques

Nous avons introduit trois types de notions mathématiques : celles pour lesquelles la formule mathématique est soit un calcul (les notions-calculs), soit une propriété (les propriétés-mathématiques) ou bien celles qui sont définies par une liste de propriétés à satisfaire (les notions-propriétés). Nous proposons d'étudier les processus de généralisation en fonction de ces trois types de notions.

3 La généralisation des propriétés-mathématiques

Nous avons convenu au premier chapitre de développer deux types de généralisations (la généralisation conservative et la généralisation innovante) en lien avec deux processus de changements de notions mathématiques (les nouvelles interprétations et les réinterprétations) dont la distinction serait basée sur le changement ou non dans la compréhension de la nouvelle notion. Nous proposons donc de préciser ces processus pour le cas des propriétés-mathématiques.

En fait, les propriétés-mathématiques constituent des notions mathématiques simples et l'analyse de celles-ci nous aidera à mieux comprendre la généralisation des notions-calculs et des notions-propriétés que nous traiterons par la suite.

De plus, nous retrouvons, dans certains livres de logique, un processus de généralisation logique et, comme celui-ci s'applique uniquement à des formules logiques et que les propriétés en sont, nous obtenons un lien entre la généralisation logique et la généralisation des propriétés-mathématiques.

Nous proposons donc de commencer cette dernière section avec l'analyse du processus de généralisation logique. Cette analyse nous permettra de mettre en évidence l'importance des relations fixes-variables et leurs implications dans les processus de changements de notions mathématiques.

3.1 La généralisation logique

Dans certains livres de logique (voir [Robinson, 1969]), la généralisation est définie comme l'introduction d'un quantificateur universel[1]. Ce processus est plus précis que celui proposé par, entre autres, Pólya (la généralisation des énoncés) et les relations fixes-variables y jouent un rôle central. La définition est la suivante :

Définition formelle (La généralisation logique)
Soit x une variable du premier ordre (du second ordre), φ une formule du premier ordre (du second ordre) pour laquelle x est libre et a, une constante. Alors l'inférence suivante est une *généralisation logique*
$\varphi a \mid - (\forall x)\, \varphi x$.

Par exemple, les inférences suivantes sont des généralisations logiques :

(1) $Pa \mid - (\forall x)Px$, (2) $Px \mid - (\forall P)Px$ et (3) $Pa \mid - (\forall x)Px \mid - (\forall P)(\forall x)Px$[2].

Ainsi, ce processus inclut une relation fixe-variable car, avant d'introduire un quantificateur universel, il est nécessaire de transformer une constante en variable.

Présentons maintenant, en étudiant les variantes de la propriété-mathématique de continuité, des applications positives et négatives de ce processus.

---

[1] L'introduction d'un quantificateur existentiel peut aussi être considéré comme une généralisation car l'inférence $Pa \mid - (\exists x)Px$ ajoute des instances dans l'extension de la propriété P.

[2] L'inférence (3) illustre qu'il est possible de faire une généralisation d'une généralisation en bornant une nouvelle variable. Dans ce cas, nous n'avons pas l'impression que nous avons fait une abstraction, seulement que nous avons introduit de la complexité dans l'énoncé final.

3.1.1 Des applications positives de la généralisation logique

Nous utiliserons la généralisation logique pour étudier les changements de la propriété-mathématique de continuité en un point (N_1). Les nouvelles notions seront successivement la continuité sur un intervalle réel (N_2), la continuité en un vecteur réel (N_3) et la continuité en un point d'un espace métrique (N_4). Commençons par le passage de N_1 à N_2, dont les définitions sont les suivantes :

Définition mathématique (La continuité en un point)
Soit f une fonction réelle à valeurs réelles définie sur $[a, b]$ et soit c tel que $a < c < b$. Alors f est *continue* en $x = c$ si
$(\forall \varepsilon \in \mathbf{R}^+)(\exists \delta \in \mathbf{R}^+)(\forall x \in \mathbf{R})\ (|x - c| < \delta \supset |f(x) - f(c)| < \varepsilon)$.

Définition par compréhension (N_1 : Continuité | en un point)
N_1 : (Fonction | $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \mathbf{R}$)
$N_1(f, c) := (\forall \varepsilon : \mathbf{R}^+)(\exists \delta : \mathbf{R}^+)(\forall x : \mathbf{R})(|x - c| < \delta \supset |f(x) - f(c)| < \varepsilon)$

Définition mathématique (La continuité sur un intervalle)
Soit f une fonction réelle à valeurs réelles définie sur $[a, b]$. Alors f est *continue* sur l'intervalle si f est continue en tout point de l'intervalle.

Définition par compréhension (N_2 : Continuité | sur un intervalle)
N_2 : (Fonction | $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, Intervalle)
$N_2(f, [a, b]) := (\forall x$: Point | de $[a, b])\ N_1(f, x)$

Dans ce premier changement, le point de continuité, qui était fixé dans N_1, devient une variable de N_2. La généralisation logique s'applique donc directement :

$$N_1(f, c)\ |\!-\ (\forall x \in [a, b])\ N_1(f, x) = N_2(f, [a, b]).$$

Changeons ensuite le contexte de N_1 pour celui de $\mathbf{R}^n$:

Définition mathématique (La continuité en un vecteur réel)

Soit f une fonction réelle à plusieurs variables réelles. Alors f est *continue* en $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ si

$$(\forall \varepsilon \in \mathbf{R}^+)(\exists \delta \in \mathbf{R}^+)(\forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n)$$
$$(\sqrt{(x_1 - c_1)^2 + \cdots + (x_n - c_n)^2} < \delta \supset |f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{c})| < \varepsilon).$$

> **Définition par compréhension** (N_3 : Continuité | en un vecteur réel)
> N_3 : (Fonction | $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $\mathbf{R}^n$)
> $$N_3(f, \boldsymbol{c}) := (\forall \varepsilon : \mathbf{R}^+)(\exists \delta : \mathbf{R}^+)(\forall \boldsymbol{x} : \mathbf{R}^n)$$
> $$(\sqrt{(x_1 - c_1)^2 + \cdots + (x_n - c_n)^2} < \delta \supset |f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{c})| < \varepsilon)$$

Nous n'avons qu'à fixer, dans la formule de N_3, la variable n à 1 pour obtenir la formule de N_1. En effet, la métrique euclidienne sur $\mathbf{R}^n$ devient $\sqrt{(x_1 - c_1)^2}$ qui est en fait la définition de $|x - c|$. On obtient donc la généralisation logique suivante :

$$N_1(f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, c : \mathbf{R}) = N_3(f : \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}, c_1 : \mathbf{R}^1)$$
$$\vdash (\forall n) N_3(f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, (c_1, \ldots, c_n) : \mathbf{R}^n)$$

Finalement, en changeant le contexte de N_3 pour celui des espaces métriques, nous obtenons la notion suivante :

Définition mathématique (La continuité en un point d'un espace métrique)

Soit f une fonction réelle à plusieurs variables réelles d'un espace métrique (X, d_X) vers un espace métrique (Y, d_Y). Alors f est *continue* en $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ si

$$(\forall \varepsilon \in \mathbf{R}^+)(\exists \delta \in \mathbf{R}^+)(\forall \boldsymbol{x} \in X)((d_X(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}) < \delta \supset d_Y(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{c})) < \varepsilon)$$

> **Définition par compréhension** (N_4: Continuité | en un point d'un espace métrique)
> N_4 : (Fonction | $(X, d_X) \to (Y, d_Y)$, Vecteur de X, Espace métrique, Espace métrique)
> $$N_4(f, \boldsymbol{c}, (X, d_X), (Y, d_Y)) := (\forall \varepsilon : \text{Réel}^+)(\exists \delta : \text{Réel}^+)(\forall \boldsymbol{x} : \text{Vecteur})$$
> $$(d_X(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}) < \delta \supset d_Y(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{c})) < \varepsilon)$$

Dans ce cas, la métrique euclidienne sur $\mathbf{R}^n$ est un cas particulier ou une instance de la notion de métrique, c'est-à-dire que

$$(\mathbf{R}^n, \mathrm{d}_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2})$$

est un espace métrique particulier. Nous retrouvons donc le passage d'une instance d'une notion à la notion. Par l'inférence qui suit, la formule de N_4 est une généralisation logique de la formule de N_3 :

$$
\begin{aligned}
&N_3(f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, (c_1, \ldots, c_n) : \mathbf{R}^n) \\
&\quad = N_4(f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, c : \mathbf{R}^n, (\mathbf{R}^n, d_n) : (X, d_X), (\mathbf{R}^n, d_n) : (Y, d_Y)) \\
&\qquad\qquad \vdash (\forall X)(\forall Y)N_4(f: X \to Y, c : X, (X, d_X), (Y, d_Y))
\end{aligned}
$$

Nous avons donc réussi à appliquer la généralisation logique pour expliquer le changement de la notion initiale à la nouvelle notion. Dans chacun des cas, nous avons trouvé une relation fixe-variable entre les formules. La chaîne de généralisations logiques suivante résume nos résultats :

$$
\begin{aligned}
&N_1(f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, c: \mathbf{R}) = N_3(f: \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}, c_1 : \mathbf{R}^1) \vdash (\forall n)N_3(f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, c : \mathbf{R}^n) = \\
&\quad (\forall n)N_4(f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, c : \mathbf{R}^n, (\mathbf{R}^n, d_n) : (X, d_X), (\mathbf{R}^n, d_n) : (Y, d_Y)) \\
&\qquad\qquad \vdash (\forall X)(\forall Y)N_4(f: X \to Y, c : X, (X, d_X), (Y, d_Y))
\end{aligned}
$$

Il est donc possible d'obtenir des généralisations de plus en plus complexes et ainsi la complexité est une propriété de ce processus.

3.1.2 Une application négative de la généralisation logique

Le généralisation logique ne peut pas être appliquée au passage de la notion de continuité dans un espace métrique à la notion de continuité dans un espace topologique. Introduisons cette dernière notion comme suit :

Définition mathématique (La continuité en un point d'un espace topologique)

Soit f une fonction d'un espace topologique X vers un espace topologique Y. Alors f est *continue* en $x = x_0$ si

$$(\forall V \subseteq \Gamma_Y)\ (f(x_0) = y_0 \in V \supset (\exists U \subseteq \Gamma_X)\ U = f^{-1}(V)).$$

> **Définition par compréhension** (N_5 : Continuité | en un point d'un espace topologique)
>
> N_5 : (Fonction | $(X, \Gamma_X) \to (Y, \Gamma_Y)$, Élément de X, Espace topologique, Espace topologique)
>
> $$N_5(f, c, (X, \Gamma_X), (Y, \Gamma_Y)) := (\forall V : \Gamma_Y)\ (f(x_0) = y_0 : V \supset (\exists U : \Gamma_X)\ U = f^{-1}(V))$$

Il est impossible de trouver une relation fixe-variable entre ces notions. En effet, dans le nouveau contexte des espaces topologiques, il est impossible de définir une limite en terme d'ouverts. Dans ce cas, la fonction est continue en c non pas parce que la limite, lorsque x tend vers c, de la fonction en f égale à $f(c)$, mais parce que l'image inverse de tout ouvert contenant $f(c)$ est aussi un ouvert.

Ainsi, aucune constante ni aucune instance n'a été remplacée par une variable et donc le processus de généralisation logique ne peut s'appliquer.

3.1.3 L'importance des relations fixes-variables

Nous concluons que l'absence ou la présence de relations fixes-variables nous permet d'affirmer que la compréhension de la nouvelle notion change ou non par rapport à la compréhension de la notion initiale. En effet, il semble que la façon de définir les notions N_1 à N_4 se ressemble (on conserve la terminologie ε-δ) alors que la façon de définir la notion N_5 est nouvelle (on parle d'ouverts et non d'intervalles).

Ainsi, nous introduisons deux types de changements : les nouvelles interprétations et les réinterprétations. Dans le premier cas, les nouvelles notions sont en relation fixe-variable avec la notion initiale, alors que, dans le second cas, il n'y en a pas. Dans ce cas, nous retrouverons une façon équivalente de définir la nouvelle notion ou un changement de statut de certaines propriétés.

3.2 Les nouvelles interprétations

Nous développerons un processus de changement de notions : le processus de nouvelle interprétation. Ce processus ne changera pas la compréhension de la notion parce que la notion initiale et la nouvelle notion seront définies de la « même » façon.

De façon plus précise, nous avons formalisé une notion par un contexte et une partie interne. Nous affirmons que les deux notions sont définies de la même façon lorsqu'il y aura une relation fixe-variable entre les contextes des notions et une égalité entre les formules de la partie interne.

3.2.1 La relation fixe-variable entre les contextes

Pour identifier une relation fixe-variable, il nous faut étudier le passage des notions du contexte de la notion initiale (le contexte initial) aux notions du contexte de la nouvelle notion (le nouveau contexte). De plus, le contexte initial devra être réécrit pour mettre en évidence ces relations. Reprenons les exemples des applications positives du processus de généralisation logique pour illustrer notre procédure.

Premièrement, pour expliquer le passage de la continuité en un point (N_1) à la continuité en un point de $\mathbf{R}^n$ (N_3), le contexte initial se réécrit comme suit :

N_1 : (Fonction | $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, c : $\mathbf{R}$) devient N_1 : (Fonction | $\mathbf{R}^1 \rightarrow \mathbf{R}$, c_1 : $\mathbf{R}^1$).

Ainsi, l'instance 1 : **N** est remplacée par le paramètre n : **N** pour obtenir

N_3 : (Fonction | $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, c : $\mathbf{R}^n$).

Certaines notions du contexte initial ont donc été réécrites pour mettre en évidence les constantes qu'on fera varier dans le nouveau contexte.

Deuxièmement, au lieu de remplacer une instance par une paramètre, on peut remplacer une instance par une notion. Par exemple, pour passer de N_3 à N_4 (la continuité dans un espace métrique), il faut réécrire le contexte initial comme suit :

N_3 : (Fonction | $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, c : $\mathbf{R}^n$) devient
N_3 : (Fonction | $(\mathbf{R}^n, d_n) \rightarrow (\mathbf{R}, d_n)$, c : $\mathbf{R}^n$, $(\mathbf{R}^n, d_n)$, $(\mathbf{R}^n, d_n)$).

Ainsi, nous avons mis en évidence l'instance $(\mathbf{R}^n, d_n)$ d'un espace métrique et il est maintenant possible de remplacer cette instance (fixe) par la notion (variable), d'où

N_4 : (Fonction | $(X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$, c : X, (X, d_X), (Y, d_Y)).

Finalement, nous retrouvons deux sortes de relations fixes-variables entre les contextes : le remplacement d'une instance par un paramètre et le remplacement d'une instance par une notion. Pour les identifier, il a fallu étudier le passage du contexte initial au nouveau contexte et cette étude a impliqué une réécriture.

3.2.2 L'égalité entre les formules

Une autre caractéristique du processus des nouvelles interprétations est l'égalité entre les formules dans le contexte initial. Pour le montrer, il faut restreindre le nouveau contexte au contexte initial en choisissant le bon paramètre ou la bonne instance, dépendamment de la sorte de relations fixes-variables en jeu.

Par exemple, le contexte de

$N_3 : (f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}, c : \mathbf{R}^n)$ devient

$N_3 : (f: \mathbf{R}^1 \rightarrow \mathbf{R}, c_1 : \mathbf{R}^1)$,

qui est le même contexte que la notion initiale N_1. On peut alors quantifier sur les notions de ce contexte pour trouver l'égalité. Nous obtenons donc un théorème dont la présentation proposée est la suivante :

Théorème (Nouvelle interprétation)

$(\forall f: \text{Fonction} \mid \mathbf{R}^1 \rightarrow \mathbf{R})(\forall c: \text{Réel})$

$$N_3(f, c_1) = (\forall \varepsilon \in \mathbf{R}^+)(\exists \delta \in \mathbf{R}^+)(\forall x_1 \in \mathbf{R}^1)\left(\sqrt{(x_1 - c_1)^2} < \delta \supset |f(x_1) - f(c_1)| < \varepsilon\right)$$
$$= N_1(f, c_1)$$

Notons que nous introduirons plusieurs sortes de nouvelles interprétations mais, pour l'instant, nous nous satisferons d'un seul exemple.

3.2.3 La généralisation conservative

Nous avons analysé les changements de propriétés-mathématiques pour lesquelles nous retrouvons une généralisation logique entre leurs formules. Ainsi, nous avons obtenu que les relations fixes-variables y jouent un rôle central.

En effet, la présence de relation fixe-variable implique que la nouvelle notion se définit ou se comprend de la même façon que la notion initiale car, pour obtenir la nouvelle notion, il suffit de faire varier une constante ou remplacé une instance par une notion. Nous conservons donc la même compréhension de la notion initiale lorsque les notions entretiennent une relation fixe-variable et ainsi la nouvelle notion est appelée une *nouvelle interprétation* de la notion initiale.

De plus, la présence de cette relation nous permet de démontrer l'égalité entre les formules. En fait, les propriétés sont syntaxiquement égales dans le contexte de la notion initiale car, en fixant les variables ou en choisissant les bonnes instances, on obtient exactement la formule de la notion initiale.

Finalement, la nouvelle notion est nécessairement une généralisation de la notion initiale, puisque le passage du fixe au variable conserve les instances initiales et en ajoute de nouvelles instances. L'extension de la notion initiale est donc strictement incluse dans l'extension de la nouvelle notion.

Nous appellerons ce processus la généralisation conservative puisqu'il conserve la compréhension de la notion initiale. Nous avons retenu la définition suivante :

Résultat préliminaire (La généralisation conservative d'une propriété-mathématique)
Soit N, une propriété-mathématique. Alors, la notion N' est une *généralisation conservative* de N si les conditions suivantes sont satisfaites :

1) La compréhension de la notion demeure sensiblement la même : il est possible d'expliquer le passage de N à N' en utilisant une relation fixe-variable. De façon plus détaillée, N' est dite une *nouvelle interprétation* de N si :
   a. Il y a une relation fixe-variable entre les éléments des contextes. Les relations possibles sont instance-paramètre et instance-notion.
   b. En restreignant le nouveau contexte au contexte initial, il est possible de trouver une égalité syntaxique entre les propriétés.
2) L'extension de N est strictement incluse dans l'extension de N'.

3.3 Les réinterprétations

Nous analyserons maintenant le cas où il n'y a pas de relation fixe-variable entre les propriétés-mathématiques. Nous affirmons que l'absence d'une telle relation implique une réinterprétation de la notion initiale, c'est-à-dire que la façon de définir (ou de comprendre) la nouvelle notion change « radicalement » par rapport à la façon de définir (ou de comprendre) la notion initiale.

Nous trouverons deux sortes de réinterprétations. La première est caractérisée par une façon équivalente de définir la nouvelle notion. Ainsi, la caractéristique d'égalité entre formules des nouvelles interprétations est remplacée par l'équivalence entre les notions et cette équivalence ne se fera pas nécessairement dans le contexte initial, mais dans un certain contexte commun aux deux notions.

La seconde sorte de réinterprétations est caractérisée par un changement de statut de certains propriétés. Certaines propriétés connexes à la notion initiale deviennent constitutives de la nouvelle notion.

Dans le cas des propriétés-mathématiques, les deux sortes de réinterprétations ne constituent qu'une seule, car les deux caractéristiques sont indissociables. De plus, la généralisation n'est pas nécessairement automatique.

3.3.1 L'équivalence entre notions

La relation fixe-variable du processus des nouvelles interprétations nous permettait de réduire le nouveau contexte au contexte initial et ainsi de trouver une égalité entre les formules. Or, il n'y a pas de telle relation dans une réinterprétation et, de ce fait, cette réduction n'est plus possible.

En fait, nous trouverons plutôt un contexte commun dans lequel les formules ne sont pas égales, mais dans lequel les notions sont logiquement équivalentes. Pour illustrer cette différence, reprenons l'exemple du passage de la notion N_4 de continuité dans un espace métrique à la notion N_5 de continuité dans un espace topologique. Dans ce cas, nous ne retrouvons pas de relation fixe-variable car, d'un côté, la continuité se définit en terme de métrique, de l'autre, en terme d'ouverts.

Par contre, il y a un contexte commun entre le contexte des espaces métriques et celui des espaces topologiques, en l'occurrence le contexte initial. En effet, il est possible de démontrer que tous les espaces métriques sont aussi des espaces topologiques, mais non la converse.

Dans ce contexte commun, on peut aussi montrer que les deux propriétés sont équivalentes, c'est-à-dire que si une fonction entre espaces métriques est continue selon N_4 alors elle l'est selon N_5 et vice versa. Nous obtenons donc un théorème dont la présentation proposée est la suivante :

Théorème (Réinterprétation par équivalence)
$(\forall f : \text{Fonction} \mid (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y))(\forall c : X)(\forall (X, d_X) : \text{Espace Métrique})$
$(\forall (Y, d_Y) : \text{Espace Métrique})$
$N_4(f, c, (X, d_X), (Y, d_Y)) \equiv N_5(f, c, (X, d_X), (Y, d_Y))$

La forme de ce théorème est similaire à la forme du théorème de nouvelle interprétation. Cependant, la quantification se fait sur les notions du contexte commun et l'égalité est remplacée par la démonstration d'une équivalence entre les notions.

Notons que ce contexte commun n'est pas nécessairement le contexte initial, comme ce fut le cas pour cet exemple. Il peut donc y avoir ce que nous appellerons un point de bifurcation dans le sens où certains résultats antérieurs sont perdus. Nous obtenons alors une différence épistémologique avec les nouvelles interprétations.

3.3.2 Le changement de statuts

Nous avons mentionné que le changement de statuts se caractérisait comme suit : certaines propriétés, qui étaient connexes à la notion initiale, deviennent constitutives de la nouvelle notion. En fait, pour le cas des propriétés-mathématiques, les notions sont d'emblée des propriétés et ainsi ce changement de statuts se produit comme suit : les deux propriétés coexistent dans le contexte commun, mais n'ont pas le même statut par rapport à la nouvelle notion.

Par exemple, nous avons montré que les propriétés $N_4(f, c, (X, d_X), (Y, d_Y))$ et $N_5(f, c, (X, d_X), (Y, d_Y))$ étaient coextensives dans le contexte des espaces métriques. Or, la propriété $N_5(f, c, (X, d_X), (Y, d_Y))$ est constitutive de la propriété-mathématique N_5, ce qui n'est pas le cas pour la propriété $N_4(f, c, (X, d_X), (Y, d_Y))$.

De plus, la notion N_4 ne peut pas être interprétée dans le contexte des espaces topologiques; elle est donc « abandonnée » au profit de la nouvelle propriété.

Ce changement de statuts nous permet de faire un parallèle avec le processus d'abstraction réfléchissante de Piaget. En effet, le passage de la propriété connexe à la propriété constitutive n'est pas une simple addition ou soustraction de propriétés comme dans le cas d'une généralisation conservative, mais bien une réflexion au sens de Piaget. On « réfléchit » les propriétés qui sont vraiment utilisées.

Ajoutons que, pour le cas des propriétés-mathématiques, ces notions n'entretiennent pas de relation d'instanciation, car les notions sont des propriétés et qu'une propriété ne peut pas devenir une instance d'une autre. Ainsi, ce changement de statuts n'est pas accompagné par une nouvelle vue d'ensemble, mais plutôt d'une meilleure compréhension de la propriété en question.

3.3.3 La généralisation innovante

Lors d'une réinterprétation, il faut, contrairement aux nouvelles interprétations, montrer qu'il y a une généralisation. En effet, même si les deux caractéristiques d'une réinterprétation sont satisfaites, nous avons seulement montré que les notions étaient équivalentes dans le contexte commun. Ainsi, elles ont les mêmes instances dans ce contexte, d'où la coextensivité, et il reste à montrer qu'il y a plus d'instances de la nouvelle notion.

Pour le cas des propriétés-mathématiques, la coextensivité de propriétés et la validité de la nouvelle notion sont suffisantes pour que la nouvelle notion soit une généralisation de la notion initiale. En effet, lorsque nous avons discuté des conditions de validité, nous avons conclu que les propriétés-mathématiques n'en avaient pas. Ainsi, comme la nouvelle notion est définie pour un contexte plus grand, son extension inclut donc l'extension de la notion initiale.

Il faut dire que le cas des notions-calculs sera différent. D'une part, les conditions de validité devront être utilisées pour montrer la généralisation. D'autre part, les deux caractéristiques ne peuvent pas être satisfaites en même temps. En fait, la réinterprétation par équivalence s'appliquera à des notions-calculs et la réinterprétation par changement nécessitera l'introduction d'une notion-propriété. Nous obtiendrons donc deux sortes distinctes de réinterprétations.

Finalement, comme nous ne retrouvons pas de relation fixe-variable entre ces notions et donc un changement dans la compréhension de la notion, le type de généralisations ne sera pas conservatif, mais innovant. La définition proposée est :

Résultat préliminaire (La généralisation innovante d'une propriété-mathématique)
Soit N une propriété-mathématique. Alors N' est une *généralisation innovante* de N si les conditions suivantes sont satisfaites :

1) La compréhension de N' change radicalement par rapport à la compréhension de N : il n'y a pas de relation fixe-variable entre ces notions. De façon plus détaillée, N' est dite une *réinterprétation* de N si :
   a. Dans un contexte commun, les deux propriétés sont équivalentes.
   b. Une propriété équivalente à la propriété N devient constitutive de N'.
2) L'extension de N est strictement incluse dans l'extension de N' par rapport au contexte commun.

3.4 Les types de généralisations

Les deux types de changements nous ont permis de développer deux types de généralisations. Les nouvelles interprétations s'illustrent par la conservation de la façon de définir les notions et se caractérisent par la présence de relations fixes-variables. Cette relation implique une généralisation, appelée la généralisation conservative.

Les réinterprétations, quant à elles, changent la façon de définir la nouvelle notion, soit en introduisant une nouvelle façon équivalente de définir la nouvelle notion, soit en introduisant certaines propriétés constitutives de la nouvelle notion. Dans le premier cas, il faudra démontrer que l'extension de la nouvelle notion inclut strictement l'extension de la notion initiale et, dans l'affirmative, la généralisation sera appelée innovante. Dans le second cas, comme il y a aura une relation d'instanciation, nous remarquerons que ce processus s'apparente à un processus d'abstraction.

4 En route vers notre étude de cas

Nous avons formalisé des notions mathématiques par une définition par compréhension, qui nous a permis de mettre en évidence la façon de définir la notion. Nous avons alors introduit trois façons de définir une notion, soit les propriétés-mathématiques, les notions-calculs et les notions-propriétés. Nous avons ensuite analysé le cas de la généralisation de propriétés-mathématiques. Nous proposons maintenant de préciser ces résultats en présentant notre étude de cas dont les notions étudiées seront principalement des notions-calculs.

Chapitre 3 : Étude de cas

La généralisation dans les travaux sur la notion d'intégrale au 19e siècle

L'objectif de cette étude de cas est de présenter les recherches sur la notion mathématique d'intégrale faites au cours du 19e siècle. Nous passerons ainsi en revue les travaux de Cauchy, Dirichlet, Lipschitz et Riemann sur l'intégrale de Cauchy, les travaux de Darboux et de Jordan sur l'intégrale de Riemann et finalement les travaux de Lebesgue sur l'intégrale de Lebesgue.

Ces divers changements de l'intégrale nous permettront de mettre en évidence l'importance des relations fixes-variables et leurs rôles dans les processus de changements et de généralisations de notions mathématiques.

De plus, ces exemples renforceront la thèse que nous défendons : la définition par compréhension propose une meilleure caractérisation du processus de généralisation que la définition par extension.

Nous proposons d'abord de faire un résumé de notre étude de cas.

1 Le résumé de notre étude de cas

Cette étude sera composée de quatre sortes d'intégrales : l'intégrale de Cauchy, l'intégrale de Riemann et les deux versions de l'intégrale de Lebesgue.

Premièrement, Cauchy (1823) définit l'intégrale d'une fonction continue comme la limite des sommes de Cauchy. Il démontra que toute fonction continue est intégrable et présenta deux généralisations : les intégrales impropres et l'intégrale des fonctions continues par morceaux. Ces généralisations ne modifient pas la compréhension de la notion et entretiennent une relation fixe-variable avec la notion initiale.

Les recherches sur l'intégrale de Cauchy sont axées sur la caractérisation de l'ensemble des points de discontinuité de la fonction. Dirichlet (1829) propose que cet ensemble soit partout non dense, alors que Lipschitz (1864) considère cet ensemble de type 1. Il faut ajouter que Dirichlet présente en fait une conjecture et Lipschitz, une preuve constructive, soit un critère d'intégrabilité qui lui permet de calculer l'intégrale.

Les recherches de Riemann (1854, posthume 1867) ne s'inscrivent pas dans les recherches sur l'intégrale de Cauchy, car elles ne tentent pas de caractériser l'ensemble des points de discontinuité, mais l'oscillation d'une fonction bornée en ses points de discontinuité. Il présente aussi deux conditions d'intégrabilité dont il démontre l'équivalence. Le problème est qu'il suppose que ces conditions sont équivalentes à la convergence des sommes de Cauchy.

Deuxièmement, Darboux, en démontrant l'hypothèse laissée en suspens par Riemann, introduit une nouvelle façon de définir (ou de comprendre) l'intégrale. En effet, l'intégrale de Riemann est définie comme l'égalité entre l'intégrale par défaut et l'intégrale par excès. Il n'y a donc pas de relation fixe-variable entre cette notion et l'intégrale de Cauchy. De plus, Darboux démontra que, dans le contexte des fonctions continues, les deux notions sont équivalentes. Ainsi, ces deux notions sont coextensives et syntaxiquement différentes.

Jordan (1892), quant à lui, s'attaque à un des problèmes de l'intégrale : son interprétation en plusieurs dimensions. Il introduit la notion de J-étendue d'un ensemble borné de $\mathbf{R}^n$. En utilisant cette notion, il propose une nouvelle interprétation des intégrales de Cauchy et de Riemann. En fait, il le suggère dans le premier cas et le fait explicitement dans le second. On obtient alors que l'intégrale de Jordan est une nouvelle interprétation de l'intégrale de Riemann en remplaçant les notions de partition et de longueur par la notion de recouvrement d'ensembles J-étendus et de J-étendue. Nous retrouvons ainsi un premier exemple d'une relation fixe-variable dans laquelle une instance a été remplacée par une notion.

Finalement, Lebesgue présente en 1901, puis en 1904, deux versions de l'intégrale de Lebesgue. Nous nous intéresserons d'abord à la version de 1904 qui est le produit d'une réflexion autour des notions d'intégrale et de primitive. Il faut dire qu'à cette époque, il y avait plusieurs versions d'intégrales dont certaines ne réussissaient pas à résoudre le problème de la recherche de primitives pour une certaine classe de fonctions. Or, cette réflexion le mena à affirmer que l'intégrale doit résoudre ce problème et, pour ce faire, l'intégrale doit satisfaire une liste de six propriétés. Ainsi, l'intégrale devient une sorte d'opérateurs, soit les opérateurs qui satisfont les six propriétés.

Nous obtenons donc un exemple dans lequel la notion-calcul devient une notion-propriétés, soit une notion-calcul définie par une liste de propriétés. Cette nouvelle façon de définir l'intégrale se distinguera des autres façons par, entre autres, le changement dans le statut de certaines propriétés : ces propriétés sont constitutives de la nouvelle notion. De plus, la nouvelle notion est en relation d'instanciation avec les notions précédentes d'intégrale, car celles-ci satisfont ou non la liste de propriétés.

Nous conclurons cette étude en présentant la version calculatoire de l'intégrale de Lebesgue et son interprétation contemporaine. Nous verrons alors que les deux notions se définissent de la même façon, mais dans deux contextes différents.

2 Cauchy et l'intégrale définie

Augustin Louis Cauchy présente, dans son livre *Résumé des Leçons sur le calcul infinitésimal* de 1823[1], la notion d'intégrale définie. Cette notion sera considérée comme le point de départ de notre recherche et ainsi nous n'attacherons pas beaucoup d'importance aux liens qu'on peut faire avec les recherches antérieures.

Cauchy définit l'intégrale comme la limite des sommes de Cauchy d'une fonction continue. Avant d'entrer dans les détails et de s'intéresser aux généralisations qu'il a faites, présentons les sommes de Cauchy.

2.1 Les sommes de Cauchy

Cauchy propose deux sortes de sommes de Cauchy dont nous montrerons que la seconde est une généralisation conservative de la première.

1 [Cauchy, 1823]

2.1.1 Les sommes de Cauchy I

À la première Leçon sur le calcul intégral (Leçon 21), Cauchy introduit la première sorte de sommes de Cauchy. Il la définit comme suit :

Définition mathématique (Les sommes de Cauchy I)

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, avec $a < b$, deux nombres réels, soit $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$, tels que $a = x_0 < \ldots < x_n = b$, une partition du même intervalle. Alors une *somme de Cauchy* est

$$S_{C1}(f, a, b, n) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(x_{i-1}).$$

Exemple

$P = \{0, 1/2, 1\}$ est une partition de $[0, 1]$; $P' = \{0, 1, 2\}$ n'en est pas une. Cette somme $S_{C1}(f, P) = (1/2 - 0) f(0) + (1 - 1/2) f(1/2) = 1/8$ est une somme de Cauchy de la fonction $f(x) = x^2$ définie sur $[0, 1]$, mais ni $(1 - 0) f(1/2)$ ni $(1/2 - 0) f(1/2)$ n'en sont. Notons que les exemples utilisés par Cauchy sont des fonctions polynomiales.

Définition par compréhension (P : Partition)

P : (Intervalle, $\mathbf{N}$) $\rightarrow \{[x_0, x_1], [x_1, x_2]\ldots, [x_{n-1}, x_n]\}$

$P([a, b], n) := \{[x_0, x_1], [x_1, x_2]\ldots, [x_{n-1}, x_n] : a = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_{n-1} \leq x_n = b\}$

Définition par compréhension (S_{C1} : Somme | de Cauchy I)

S_{C1} : (Fonction | $[a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ | | continue, Intervalle, Partition) $\rightarrow \mathbf{R}$

$$S_{C1}(f, [a, b], P([a, b], n)) := \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(x_{i-1})$$

Nous n'avons pas besoin de condition de validité pour déterminer l'extension de cette notion, car il est évident qu'elle est valide pour toutes les fonctions continues et donc son extension est totale.

2.1.2 Les sommes de Cauchy II

À la Leçon suivante, Cauchy propose, en résumant les résultats de la Leçon précédente, une seconde définition d'une somme de Cauchy :

Définition mathématique (Les sommes de Cauchy II)

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, avec $a < b$, deux nombres réels, soit P une partition du même intervalle et soit $\theta_0, \ldots, \theta_{n-1}$ des nombres positifs inférieurs à l'unité. Alors une *somme de Cauchy II* est

$$S_{C2}(f, n, \theta) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(x_{i-1} + \theta_{i-1}(x_i - x_{i-1})).$$

Exemple

Si les θ_i sont tous nuls, alors nous obtenons les bornes de gauche, s'ils sont égaux à 1, les bornes de droite.

Définition par compréhension (S_{C2} : Somme | de Cauchy II)

S_{C2} : (Fonction | $[a, b] \to \mathbf{R}$ | | continue, Intervalle, Partition, Liste) $\to \mathbf{R}$

$$S_{C2}(f, [a, b], P([a, b], n), \boldsymbol{\theta}) := \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(x_{i-1} + \theta_{i-1}(x_i - x_{i-1}))$$

Il va sans dire que cette notion est valide pour toutes les fonctions continues.

Notons que certains commentateurs, comme Lützen [Lützen, 2003, p.170], Hawkins [Hawkins, 1975, p.9], ne mentionnent pas cette autre définition, d'autres, comme Pier [Pier, 1996, p.81] et Lebesgue [Lebesgue, 1928, p.5-6] le font. En fait, il est bien indiqué à la suite de l'équation (3) de la page 128 de [Cauchy, 1823] que les nombres positifs θ_i sont quelconques mais inférieurs à l'unité. Il nous semble donc évident que Cauchy a introduit cette variante.

2.1.3 Une généralisation conservative

La notion-calcul S_{C2} se définit de la même façon que la notion-calcul S_{C1} sauf que, dans un cas, la borne est fixée, dans l'autre, elle est variable. De façon plus détaillée, nous affirmons que S_{C2} est une nouvelle interprétation de S_{C1} par ajout de paramètres. Un nouveau paramètre est ajouté dans le contexte et l'égalité entre les formules peut être démontrée dans le contexte initial.

Premièrement, pour passer du contexte initial au nouveau contexte, il faut ajouter un paramètre, en l'occurrence la notion de Liste, d'où

S_{C1} : (Fonction | $[a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ | | continue, Intervalle, Partition) $\rightarrow \mathbf{R}$, se réécrit

S_{C1} : (Fonction | $[a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ | | continue, Intervalle, Partition, $\{\mathbf{0}\}$) $\rightarrow \mathbf{R}$.

Ainsi, en remplaçant l'instance $\{\mathbf{0}\}$ par la notion Liste, nous obtenons le contexte de la nouvelle notion, soit :

S_{C2} : (Fonction | $[a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ | | continue, Intervalle, Partition, Liste) $\rightarrow \mathbf{R}$.

Deuxièmement, en restreignant le nouveau contexte au contexte initial, il est possible de choisir le bon paramètre et d'obtenir une égalité entre les formules mathématiques. Le théorème suivant peut donc être démontré :

Théorème (Nouvelle interprétation par ajout)
($\forall f$: Fonction | $[a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ | | continue)($\forall a$: Réel)($\forall b$: Réel)($\forall n$: Naturel)
($\exists\{\mathbf{0}\} = \{0, ..., 0\} : \theta$)
$S_{C2}(f, [a, b], P([a, b], n), \{\mathbf{0}\}) = S_{C1}(f, [a, b], P([a, b], n))$

Finalement, ce théorème implique une généralisation logique des formules :

$S_{C1}(f, [a, b], P([a, b], n)) = S_{C2}(f, [a, b], P([a, b], n), \{\mathbf{0}\})$

$\vdash (\forall \boldsymbol{\theta} : \theta)\ S_{C2}(f, [a, b], P([a, b], n), \boldsymbol{\theta})$.

Par conséquent, l'extension de la nouvelle notion inclut strictement l'extension de la notion initiale et donc la nouvelle notion est une généralisation.

Résultat 1 S_{C2} est une généralisation conservative de S_{C1}, car S_{C2} est une nouvelle interprétation (par ajout de paramètres) valide de S_{C1}.

2.2 L'intégrale de Cauchy pour les fonctions continues

La première interprétation de Cauchy de l'intégrale définie se fait dans le contexte des fonctions continues. Dans ce contexte, l'intégrale (de Cauchy) se définit comme la limite des sommes de Cauchy :

Définition mathématique (L'intégrale de Cauchy pour les fonctions continues)
Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$. Alors f est *intégrable au sens de Cauchy* si les sommes de Cauchy I convergent. Dans ce cas on a

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} S_{C1}(f, a, b, n).$$

Exemple

$$\int_a^b x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{x=a}^{x=b} = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}.$$

Définition par compréhension (I_{C1} : Intégrale | de Cauchy I)
I_{C1} : (Fonction | $[a, b] \to \mathbf{R}$ | | continue, Intervalle) $\to \mathbf{R}$
$I_{C1}(f, [a, b]) := \lim_{n\to\infty} S_{C1}(f, [a, b], P([a, b], n))$

De plus, Cauchy démontre, en utilisant le Théorème de la moyenne et en manipulant de façon ingénieuse les sommes de Cauchy, que toute fonction (uniformément) continue est intégrable. La notion est donc définie pour toutes les notions de son contexte, c'est-à-dire que son extension est l'ensemble des fonctions continues sur un intervalle. En somme, nous avons ce théorème et sa formalisation :

Théorème T1 (Le premier critère d'intégrabilité de Cauchy, 1823)
Soit f une fonction continue définie sur l'intervalle $[a, b]$. Alors f est intégrable au sens de Cauchy.

Conditions de validité (Extension totale de I_{C1})
$(\forall f : \text{Fonction} \mid [a, b] \rightarrow \mathbf{R} \mid \mid \text{continue})(\forall a : \text{Réel})(\forall b : \text{Réel})$
$(\exists r : \text{Réel})\ (I_{C1}(f, [a, b]) = r)$

3 Cauchy et les premières généralisations

Au tout début de la Leçon 24, soit après avoir défini et démontré que toute fonction continue est intégrable, Cauchy écrit :

> Dans les leçons précédentes, nous avons démontré plusieurs propriétés remarquables de l'intégrale définie
>
> (1) $$\int_{x_0}^{X} f(x)dx \ [= \lim_{n \to \infty} S_{C1}(f, x_0, X, n)],$$
>
> mais en supposant : 1- que les limites x_0, X étaient des quantités finies, 2- que la fonction $f(x)$ demeurait finie et continue entre ces mêmes limites. (...) Lorsque les valeurs extrêmes x_0, X deviennent infinie, ou lorsque la fonction $f(x)$ ne reste pas finie et continue depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = X$, on ne peut plus affirmer que la quantité désignée par S dans les leçons précédentes ait une limite fixe, et par suite on ne voit plus quel sens on doit attacher à la notation (1) qui servait à représenter généralement la limite de $[S_{C1}(f, a, b, n)]$[1]

Cauchy propose donc deux nouvelles études de la notion d'intégrale définie. Nous pouvons expliquer, en utilisant une relation fixe-variable, le passage de la notion initiale d'intégrale de Cauchy pour les fonctions continues sur un intervalle fini (I_{C1}) aux deux nouvelles études[2] : d'une part, on permet à l'intervalle d'être infini, de l'autre, à la fonction d'être discontinue.

---

[1] [Cauchy, 1823, p.140-141].

[2] Bien qu'il soit possible d'expliquer ces nouvelles recherches par une telle relation, il n'est pas certain, et même très improbable, que cette relation ait guidée les recherches de Cauchy. En fait, le livre, dans lequel

Dans les deux cas, la même technique est utilisée pour accommoder la notion initiale à son nouveau contexte. Passons-les en revue.

3.1 Les intégrales impropres

Dans le premier cas, la fonction continue n'est plus intégrée sur un intervalle fini, mais sur un intervalle infini. Pour définir cette nouvelle notion, appelée intégrale impropre, on choisit une borne finie, donc un intervalle (fini) sur lequel la fonction est intégrable, on intègre et on passe ensuite à la limite. Nous avons par exemple :

$$\int_a^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{X \to \infty} \int_a^{X} \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{X \to \infty} [\frac{1}{X} - \frac{1}{a}] = -\frac{1}{a}.$$

Ainsi, la notion d'intervalle est remplacée par la notion d'intervalle étendu, car une des bornes peut être infinie. L'intégrale impropre se définit donc comme suit[1] :

Définition par compréhension (I^*_{C1} : Intégrale | de Cauchy impropre)
I^*_{C1} : (Fonction | Intervalle étendue $\rightarrow$ **R** | | continue, Intervalle | étendu) $\rightarrow$ **R**
$I^*_{C1}(f, [a, +\infty]) := \lim_{X \to \infty} I_{C1}(f, [a, X])$

L'intégrale est toujours définie comme la limite des sommes de Cauchy. Ainsi, la façon de définir la notion initiale est conservée. En effet, nous retrouvons une relation fixe-variable entre les contextes, car Cauchy a supprimé une condition imposée à la notion d'intervalle du contexte initial. De plus, lorsque nous restreignons le nouveau contexte au contexte initial, nous pouvons démontrer une égalité entre les formules :

---

il est présenté, ces recherches constitue des notes de cours et ainsi les relations fixes-variables semblent y jouer un rôle pédagogique et non heuristique.

[1] Nous introduisions seulement l'intégrale impropre à droite, celle de gauche se définit de la même façon, de même que celle pour laquelle les deux extrémités sont infinies.

Théorème (Nouvelle interprétation par transfert de la notion initiale)
$(\forall f\text{: Fonction} \mid [a, b] \rightarrow \mathbf{R} \mid \mid \text{continue})(\forall a\text{: Réel})(\forall b\text{: Réel})$
$$\mathrm{I}^*_{C1}(f, [a, b]) = \lim_{X \to b} \mathrm{I}_{C1}(f, [a, X]) = \mathrm{I}_{C1}(f, [a, b])$$

Nous obtenons une nouvelle sorte de nouvelles interprétations. Dans ce cas, la notion initiale est transférée dans la formule de la nouvelle notion, ce qui n'était pas le cas pour les sommes de Cauchy. Ce transfert est une conséquence de la technique d'accommodation de la notion initiale à son nouveau contexte.

Il n'est cependant pas possible de trouver une généralisation logique entre les formules des notions. En fait, nous avons utilisé une forme particulière de relations fixes-variables, soit la suppression de conditions, et cette relation ne nous permet pas d'introduire un quantificateur universel.

Par contre, la nouvelle notion est quand même une généralisation de la notion initiale. En effet, nous avons montré que les deux notions avaient les mêmes instances dans le contexte initial (Théorème de nouvelles interprétations) et, comme la nouvelle notion est valide dans le nouveau contexte, nous obtenons une inclusion d'extensions. En somme, nous avons le résultat suivant :

Résultat 2 I^*_{C1} est une généralisation conservative de I_{C1}, car I^*_{C1} est une nouvelle interprétation de I_{C1} par transfert de la notion initiale dans la partie interne de la nouvelle notion.

3.2 L'intégrale de Cauchy pour les fonctions discontinues

La seconde généralisation proposée par Cauchy est celle où il s'intéresse aux fonctions discontinues et, pour le cas particulier des fonctions continues par morceaux, il démontre le théorème suivant :

Théorème T2 (Le second critère d'intégrabilité de Cauchy, 1823)

Soit $n \in \mathbf{N}$ et soit f une fonction continue possédant n points de discontinuité sur l'intervalle $[a, b]$. Alors, si les limites à gauche et à droite de l'intégrale définie de f aux points de discontinuité existent[1] alors la fonction f est intégrable. Dans ce cas, l'intégrale est :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{c_1-\varepsilon} f(x)dx + \ldots + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{c_n+\varepsilon}^b f(x)dx$$

Exemple

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{2} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$$
$$= \lim_{\varepsilon \to 0} [x^{2/3}]_{-1}^{-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon \to 0} [x^{2/3}]_{\varepsilon}^{2} = \sqrt[3]{4} - 1.$$

Ce critère d'intégrabilité est constructif, c'est-à-dire qu'il donne à la fois la définition de la notion d'intégrale et ses conditions de validité. Présentons-les.

3.2.1 La définition par compréhension

La nouvelle notion est le produit de l'accommodation la notion initiale au nouveau contexte. En effet, pour intégrer une fonction continue par morceaux, on tronque l'intervalle autour des points de discontinuité, ce qui nous donne une liste finie d'intervalles sur lesquels la fonction est continue, on intègre la fonction sur ces intervalles et on passe ensuite à la limite. Nous retrouvons ainsi la même technique que celle utilisée pour définir les intégrales impropres.

---

[1] Notons que la condition sur l'existence des limites est une interprétation des travaux de Cauchy. En effet, Cauchy mentionne que l'équation (*) peut prendre trois sortes de valeurs, soit une valeur infinie, une valeur finie et déterminée ou une valeur finie et indéterminée. La limite va exister uniquement dans le second cas, puisqu'une valeur finie et déterminée est un nombre. Dans les deux autres, la limite est soit infinie ou soit elle peut prendre plusieurs valeurs finies, d'où l'indétermination. Pour ces cas, la limite n'existera pas. Il est donc légitime d'ajouter notre condition.

De façon formelle, le nouveau contexte est obtenu en remplaçant les notions de continuité et d'intervalle par la continuité par morceaux et l'intervalle par morceaux. La définition proposée se présente donc comme suit :

Définition par compréhension (I_{C2} : Intégrale | de Cauchy II)

I_{C2} : (Fonction | $[a, b] \to \mathbf{R}$ | | continue par morceaux, Intervalle | par morceaux) $\to \mathbf{R}$

$$I_{C2}(f, [a, c_1, \ldots, c_n, b]) := \lim_{\varepsilon \to 0} I_{C1}(f, [a, c_1 - \varepsilon]) + \lim_{\varepsilon \to 0} I_{C1}(f, [c_1 + \varepsilon, c_2 - \varepsilon]) + \ldots + \lim_{\varepsilon \to 0} I_{C1}(f, [c_{n-1} + \varepsilon, c_n - \varepsilon]) + \lim_{\varepsilon \to 0} I_{C1}(f, [c_n + \varepsilon, b])$$

3.2.2 La nouvelle interprétation par transfert

La nouvelle notion I_{C2} est définie de la même façon que la notion initiale I_{C1}, puisque l'intégrale est toujours définie comme la limite des sommes de Cauchy. De façon plus détaillée, nous retrouvons une relation fixe-variable entre les contextes et une égalité entre les formules.

En effet, d'une part, il est possible de réécrire le contexte initial comme une fonction continue ayant 0 point de discontinuité :

I_{C1} : (Fonction | $[a, b] \to \mathbf{R}$ | | continue, Intervalle) $\to \mathbf{R}$, devient

I_{C1} : (Fonction | $[a, b] \to \mathbf{R}$ | | continue ayant 0 point de discontinuité, Intervalle par 0 + 1 morceau) $\to \mathbf{R}$.

Dans ce cas, on introduit un nouveau paramètre. Ensuite, on fait varier le nombre de points de discontinuité et on obtient le nouveau contexte :

I_{C2} : (Fonction | $[a, b] \to \mathbf{R}$ | | continue ayant n point de discontinuité, Intervalle par n morceaux) $\to \mathbf{R}$.

Nous concluons que la relation instance-paramètre a été appliquée aux notions du contexte initial. Il y a donc une relation fixe-variable entre les contextes

D'autre part, pour obtenir l'égalité entre les formules, il faut restreindre le contexte de I_{C2} au contexte de I_{C1}. En fait, dans le contexte des fonctions continues, il n'y a pas de point de discontinuité. Or, comme le point de discontinuité est aussi un nombre réel, on peut forcer le paramètre en le remplaçant par un nombre réel quelconque, comme la moyenne de l'intervalle, d'où le résultat suivant :

Théorème (Nouvelle interprétation par transfert de la notion initiale)
($\forall f$: Fonction | $[a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ | | continue)($\forall a$: Réel)($\forall b$: Réel)
($\exists c_0 = (a + b)/2$: Réel) $I_{C2}(f, [a, (a + b)/2, b]) = I_{C1}(f, [a, b])$

Comme la notion initiale est utilisée dans la formule de la nouvelle notion, nous obtenons le résultat qui suit :

Résultat 3 I_{C2} est une nouvelle interprétation de I_{C1} par transfert car il y a une relation fixe-variable entre les notions et la notion initiale est utilisée dans la formule de la nouvelle notion.

3.2.3 La généralisation conservative

Contrairement à la notion I_{C1}, l'extension de I_{C2} ne contient pas toutes les notions de son contexte. En effet, le théorème T2 nous donne les conditions de validité et se formalise comme suit :

Conditions de validité (Extension partielle de I_{C2})
($\forall f$: Fonction | $[a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ | | continue par morceaux)($\forall a$: Réel)($\forall b$: Réel)
($\exists c_1$: Point de discontinuité), ..., ($\exists c_n$: Point de discontinuité)
{$P_1(f, c_1, ..., c_n)$:= les limites à gauche et à droite de l'intégrale définie de f aux points de discontinuité existent}
$P_1(f, c_1, ..., c_n) \supset (\exists r$: Réel) $I_{C2}(f, [a, c_1, ..., c_n, b]) = r$.

La propriété qu'il faut imposer aux fonctions continues par morceaux est triviale pour les fonctions continues et ainsi, par ce théorème, l'extension de I_{C1} est strictement incluse dans l'extension de I_{C2}. Nous obtenons donc une généralisation.

Ajoutons que nous avons notre premier exemple pour lequel l'extension de la nouvelle notion n'est pas totale. Par conséquent, il se peut que l'inférence de la généralisation logique soit fausse (i.e. la propriété P_1 n'est pas satisfaite par la fonction continue par morceaux et ainsi l'énoncé inféré sera faux). Dans ce cas, il faut, pour appliquer la généralisation logique aux formules, ajouter la condition de validité de la nouvelle notion, d'où

$$I_{C1}(f, [a, b]) = (\exists c_0 = (a + b)/2)\ I_{C2}(f, [a, (a + b)/2, b])$$
$$|\!-\ (\forall n : \mathbf{N})\ (P_1(f, c_1, \ldots, c_n) \supset (\exists r : \text{Réel})\ I_{C2}(f, [a, c_1, \ldots, c_n, b]))$$

Nous obtenons donc qu'il faut que la nouvelle notion soit valide pour qu'elle puisse être une généralisation.

Résultat 4 I_{C2} est une généralisation conservative de I_{C1}, car I_{C2} est une nouvelle interprétation valide de I_{C1} par transfert.

3.3 L'influence de Cauchy sur les recherches sur l'intégrale

Cauchy fixe les recherches subséquentes sur l'intégrale : l'intégrale est définie comme la limite des sommes de Cauchy et les critères d'intégrabilité doivent caractériser l'ensemble des points de discontinuité. En fait, les résultats de Cauchy sont assez solides pour influencer les recherches : la démonstration du théorème fondamental de l'analyse pour le cas des fonctions continues et la généralisation aux intervalles infinis et aux fonctions ayant *n* points de discontinuité.

4 Dirichlet et la convergence des séries de Fourier

En 1829, Dirichlet présente un article célèbre intitulé : *Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données*[1]. L'objectif de cet article est d'étudier la convergence des séries de Fourier[2] de fonctions « arbitraires »[3] définies sur $[-\pi, \pi]$. En fait, Dirichlet montre que les séries de Fourier d'une fonction continue par morceaux et ayant un nombre fini d'extremums convergent. Pour ce faire, il utilise des résultats entourant la convergence des séries et l'intégrale de Cauchy pour les fonctions continues.

À la fin de l'article, il écrit :

> Il nous resterait à considérer les cas où les suppositions que nous avons faites sur le nombre de solutions de continuité et sur celui des valeurs maxima et minima cessent d'avoir lieu.[4]

Il lève donc les contraintes imposées et ceci le conduit à s'intéresser à un critère d'intégrabilité pour les fonctions continues ayant une infinité de points de discontinuité. Il ne redéfinit toutefois pas l'intégrale et le critère d'intégrabilité proposé portera sur une caractérisation de l'ensemble des points de discontinuité.

---

1 [Dirichlet, 1829]
2 Évidemment, Dirichlet utilise le terme de séries trigonométriques et non de Fourier. Il faut attendre les travaux de Riemann pour introduire cette distinction.
3 Selon Dirichlet, une fonction est arbitraire si elle n'est pas donnée par une équation analytique.
4 [Dirichlet 1829, p. 169]

Nous avons choisi de présenter ces travaux pour les raisons suivantes. Premièrement, Dirichlet a fait une généralisation logique et non une généralisation conservative. Deuxièmement, la conjecture sera étudiée par d'autres mathématiciens : Lipschitz voudra la démontrer, Riemann y trouvera un contre-exemple. Finalement, elle illustre les recherches sur l'intégrabilité au sens de Cauchy.

4.1 La caractérisation de l'ensemble des points de discontinuité

Pour énoncer son critère d'intégrabilité, Dirichlet introduit ce que nous appellerons la notion d'ensemble partout non dense. La définition est la suivante :

Définition mathématique (Les ensembles partout non denses)

Un ensemble $D \subset \mathbf{R}$ est *partout non dense* si pour tout couple c, d de points de l'ensemble, il existe un autre couple r, s de points entre c et d tels que l'intervalle $[r, s]$ n'appartient pas à D.

Exemple

L'ensemble $A = \{1/2^m + 1/2^n \colon n, m \in \mathbf{N}\}$ est partout non dense, mais l'ensemble des rationnels ne l'est pas.

Il donne un exemple d'une fonction dont l'ensemble des points de discontinuité n'est pas partout non dense. Cette fonction porte maintenant son nom :

Définition mathématique (La fonction de Dirichlet)

La *fonction de Dirichlet* f_D est définie comme suit : $f_D(x)$ est égale à c si x est rationnel et d si x est irrationnel.

4.2 La conjecture de Dirichlet et l'utilisation de la généralisation logique

Dirichlet affirme que f_D n'est pas intégrable et, comme l'ensemble de ses points de discontinuité n'est pas partout non dense, il induit la conjecture suivante :

Conjecture T3 (Le critère d'intégrabilité de Dirichlet, 1829)
Soit f une fonction continue ayant un nombre infini de point de discontinuité sur l'intervalle $[a, b]$ inclus dans $(-\pi, \pi)$ et ne prenant pas la valeur infinie. Alors f est une fonction intégrable au sens de Cauchy ssi l'ensemble des points de discontinuité de f est un ensemble partout non dense.

Il est bien conscient qu'il faudra y revenir avec une preuve, mais il ne le fait pas. Il faut attendre la publication des travaux posthumes de Riemann en 1867 et ceux de Smith de 1870 pour démontrer que cette conjecture n'est ni nécessaire ni suffisante. En attendant, cette conjecture s'inscrit dans les recherches sur l'intégrale de Cauchy.

Résultat 5 Dirichlet a fait une généralisation logique (inférence inductive) pour justifier son critère d'intégrabilité.

5 Lipschitz et la suite des travaux de Dirichlet

En 1864, Lipschitz présente, comme thèse de Doctorat, un article intitulé : *Recherches sur le développement en séries trigonométriques des fonctions arbitraires d'une variable et principalement de celles qui, dans un intervalle fini, admettent une infinité de maxima et de minima*[1], dans lequel il propose de poursuivre les travaux de Dirichlet de 1829.

---

[1] [Lipschitz, 1864].

Lipschitz mentionne qu'il y a trois sortes de fonctions définies sur $(-\pi, \pi)$ qui ne satisfont pas les conditions de la preuve de Dirichlet sur la convergence des séries de Fourier d'une fonction : les fonctions prenant des valeurs infinies, celles possédant un nombre infini de points de discontinuité et celles ayant un nombre infini de maximums et de minimums. L'objectif de cet article est de présenter sous quelles conditions les séries de Fourier convergent pour chacun de ces cas.

Le contexte des travaux de Lipschitz est ainsi l'étude de la convergence des séries de Fourier, soit exactement le même que Dirichlet. Il est donc, tout comme Dirichlet, mené à développer un critère d'intégrabilité pour faire cette étude[1].

Nous proposons de passer en revue les recherches de Lipschitz sur l'intégrabilité des deux premiers cas, soit les fonctions continues par morceaux et les fonctions continues ayant une infinité de points de discontinuité.

5.1 Le cas des fonctions continues par morceaux

Lipschitz commence par étudier l'intégration des fonctions prenant un nombre fini de fois la valeur infinie. Il montre que ces fonctions sont intégrables, mais en supposant que les intégrales aux points de discontinuité peuvent devenir aussi petites que l'on veut, condition qui est équivalente à l'existence des limites à gauche et à droite de l'intégrale de la fonction aux points de discontinuité.

[1] Il le mentionne explicitement à la page 283 de [Lipschitz, 1864].

Ainsi, il obtient la même condition que Cauchy pour le théorème T2 et, en ajoutant le cas traité par Dirichlet, soit celui des fonctions bornées et ayant un nombre fini de points de discontinuité, nous obtenons le même résultat que Cauchy.

Résultat 6 Lipschitz démontre le même théorème que Cauchy (Théorème T2) sur les fonctions continues ayant un nombre fini de points de discontinuité.

5.2 L'intégrale de Cauchy pour les fonctions de type n

Passons maintenant à l'étude de l'intégrabilité des fonctions ayant un nombre infini de points de discontinuité. Rappelons que Lipschitz reprend les travaux de Dirichlet et ainsi il suppose que l'ensemble des points de discontinuité est partout non dense. Cependant, il ajoute qu'il est possible de « dédui[re] de là, par un raisonnement convenable »[1] que cet ensemble est équivalent à un ensemble qui sera appelé de type 1. Or, ces deux sortes d'ensembles ne seront pas équivalents[2] et, une fois cette confusion levée, nous trouvons que Lipschitz a démontré un critère d'intégrabilité pour les fonctions continues dont le dérivé de l'ensemble des points de discontinuité est de cardinalité fini (cet ensemble est de type 1).

Avant de présenter son critère, introduisons les ensembles de type *n*.

---

[1] [Lipschitz, 1864, p.284]

[2] Les ensemble de type *n* et les ensembles partout non denses ne sont pas équivalents. En effet cette équivalence est issue d'une confusion à laquelle Hankel ajouta en 1870 les ensembles de mesure nulle, soit ceux qui peuvent être inclus dans un nombre fini ou infini d'intervalles de longueurs arbitrairement petites. Il faut attendre les années 1875 et les travaux de Dini et de Smith pour lever cette confusion; le premier montra que les ensembles de type *n* sont tous de mesure nulle, alors que le second construisit un ensemble partout non dense de mesure positive. Ajoutons que ce dernier ensemble montre aussi que le critère d'intégrabilité de Dirichlet n'est pas suffisant.

5.2.1 Les ensembles de type *n*

Lipschitz développe la notion d'ensemble dérivé d'un ensemble de points et non celle de type *n*. Comme le traducteur de son article (Montel) et Lebesgue ont utilisé cette notion pour résumer les travail de Lipschitz, nous présenterons ces travaux en utilisant cette notion. Les définitions sont les suivantes :

Définition mathématique (L'ensemble dérivé)
Soit D un ensemble de points. Alors l'ensemble D' est appelé l'*ensemble dérivé* de D s'il contient les points limites de D. De même, par récurrence, $D^{(n)}$ est l'ensemble des points limites de l'ensemble $D^{(n-1)}$ et appelé le *n-ième ensemble dérivé*.

Définition mathématique (Les ensembles de type *n*)
Soit D un ensemble de points. Alors s'il existe un n tel que $D^{(n)}$ est un ensemble fini, alors l'ensemble D est appelé de *type n*.

Exemple

L'ensemble $A = \{1/2^m + 1/2^n : n, m \in \mathbf{N}\}$ est de type 2, car $A' = \{0, 1/2^n : n \in \mathbf{N}\}$, $A^{(2)} = \{0\}$ et $A^{(3)} = \varnothing$. Remarquons de plus que A est partout non dense et que A' est de type 1.

5.2.2 Le critère d'intégrabilité de Lipschitz

Pour faire cette démonstration, Lipschitz suppose que l'intégrale aux points de discontinuité peut être rendue aussi petite que l'on veut[1]. Nous interprétons cette hypothèse comme suit : la fonction doit satisfaire les propriétés suivantes :

$P_1(f)$:= les limites à gauche et à droite des intégrales de f aux points de discontinuité existent;
$P_2(f)$:= les limites à gauche et à droite de l'intégrale de f aux points du dérivé de l'ensemble des points de discontinuité existent.

[1] Hawkins ([Hawkins, 1975, p. 14]) a interprété cette hypothèse en supposant que la fonction était bornée. Or, il nous semble que cette condition soit trop forte.

Lipschitz démontre le théorème suivant :

Théorème T4 (Le critère d'intégrabilité de Lipschitz, 1864)
Soit f une fonction continue ayant des points de discontinuité sur l'intervalle $[a, b]$. Alors f est intégrable sur l'intervalle $[a, b]$ si l'ensemble D des points de discontinuité est de type 1[1] et que les propriétés P_1 et P_2 sont satisfaites.

Démonstration

Comme l'ensemble D des points de discontinuité forment un ensemble type 1, nous pouvons supposer que D' ne contienne seulement qu'un point sur $[a, b]$. Notons-le c et considérons deux suites de points $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ telles que

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ a_n<c}} a_n = \lim_{\substack{n\to\infty \\ b_n>c}} b_n = c.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Alors f possède au plus un nombre fini de points de discontinuité sur $(a, c-\varepsilon)$ et sur $(c+\varepsilon, b)$ et, de ce fait, nous pouvons appliquer le Théorème T2. Par exemple nous obtenons sur $(a, c-\varepsilon)$ que les points de discontinuité sont $\{a_1, \ldots, a_n\}$ et ainsi,

$$\text{(1g)}\ \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx = \lim_{\delta\to 0^+}\int_a^{a_1-\delta} f(x)dx + \sum_{k-1}^{n-1}\lim_{\delta\to 0^+}\int_{a_k+\delta}^{a_{k+1}-\delta} f(x)dx + \lim_{\delta\to 0^+}\int_{a_n+\delta}^{c-\varepsilon} f(x)dx.$$

Par la propriété P_1, cette intégrale existe. Par conséquent,

$$\text{(2)}\ \int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx,$$

et ces limites existent par la propriété P_2. Notons que pour calculer la limite, nous devons recalculer les intégrales (1g) et (1d) à chaque fois qu'une discontinuité apparaît. Lorsqu'il a y plus d'un point limite dans D', nous répétons le même argument avec les autres points. []

Ce critère d'intégrabilité est constructif, c'est-à-dire qu'il présente à la fois la définition de la notion et ses conditions de validité. Introduisons sa formalisation.

---

[1] Montel, le traducteur de l'article, mentionne qu'on peut généraliser cette preuve au cas où l'ensemble des points de discontinuité est de type n. Lebesgue le fait explicitement dans son livre (voir [Lebesgue, 1928, p. 11-14]).

5.2.3 La définition par compréhension

Nous affirmons que Lipschitz a réussi à accommoder la notion d'intégrale de Cauchy au contexte des fonctions continues dont l'ensemble D des points de discontinuité est de type 1.

En effet, il a appliqué la même technique utilisée par Cauchy pour développer ses deux généralisations (I^*_{C1} et I_{C2}) : il tronque l'intervalle autour des points limites de l'ensemble D, ce qui nous donne une liste finie d'intervalles sur lesquels la fonction est continue par morceaux, il intègre la fonction sur ces intervalles (en utilisant la notion I_{C2}) et il passe ensuite à la limite.

La nouvelle notion est donc définie en utilisant la notion I_{C2} et deux sortes de points de discontinuité ont été introduits : les points de discontinuité à gauche du point limite $\{a_1, a_2, ...\}$ et ceux à droite $\{b_1, b_2, ...\}$. La définition par compréhension suivante est proposée :

Définition par compréhension (I_{C3} : Intégrale | de Cauchy III)
I_{C3} : (Fonction | [a, b] $\rightarrow$ **R** | | continue dont les points de discontinuité forment un ensemble de type 1, Intervalle contenant l'ensemble des points de discontinuité de type 1) $\rightarrow$ **R**

$$I_{C3}(f, [a, a_1, a_2, ..., c', ..., b_2, b_1, b]) := \lim_{\varepsilon \to 0} I_{C2}(f, [a, a_1, ..., a_m, c' - \varepsilon]) + \lim_{\varepsilon \to 0} I_{C2}(f, [c' + \varepsilon, b_m, ..., b_1, b])$$

5.3 *Les généralisations de l'intégrale de Cauchy*

La nouvelle notion I_{C3} est définie de la même façon que les notions I_{C1} et I_{C2}, puisque l'intégrale est toujours définie comme la limite des sommes de Cauchy. Ainsi, nous retrouvons une relation fixe-variable entre les contextes et une égalité entre les formules, d'où I_{C3} sera une nouvelle interprétation des notions initiales.

Nous montrerons aussi que I_{C3} est une généralisation conservative des notions initiales, mais d'abord analysons la relation fixe-variable.

5.3.1 La relation fixe-variable entre les contextes

Pour étudier la relation fixe-variable entre les contextes de I_{C2} et de I_{C3}, il faut d'abord remarquer que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction continue par morceaux forme un ensemble de type 0. Ainsi, le passage à l'ensemble de type 1 illustre le passage d'un ensemble fini ayant 0 point limite (type 0) à un ensemble infini ayant *n* points limites (type 1).

La relation fixe-variable, dans les travaux de Lipschitz, ne se situe donc pas dans le passage du type 0 au type 1 ni du type 1 au type *n*, mais plutôt dans le passage de 0 point limite à *n* points limites. Notons que le passage du type 1 au type *n* est une généralisation conservative faite par Montel et par Lebesgue.

De façon détaillée, le contexte initial est

I_{C2} : (Fonction | $[a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ | | continue ayant *n* point de discontinuité,

Intervalle par *n* morceaux) $\rightarrow \mathbf{R}$,   devient

I_{C2} : (Fonction | $[a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ | | continue dont les points de discontinuité forment un ensemble de type 0 (0 point limite), Intervalle contenant l'ensemble des points de discontinuité de type 0 (0 point limite)) $\rightarrow \mathbf{R}$

Un nouveau paramètre est donc mis en évidence et, en faisant varier son nombre, on obtient le nouveau contexte :

I_{C3} : (Fonction | [*a*, *b*] → **R** | | continue dont les points de discontinuité forment un ensemble de type 1 (*n* points limites), Intervalle contenant l'ensemble des points de discontinuité de type 1 (*n* points limites)) → **R**

Nous concluons qu'un paramètre a été introduit dans les notions du nouveau contexte, d'où la relation fixe-variable entre les notions des contextes de I_{C2} et de I_{C3}.

5.3.2 Les nouvelles interprétations de l'intégrale de Cauchy

Nous avons trouvé une relation fixe-variable entre les contextes : le passage d'un ensemble de points de discontinuité ayant 0 point limite à un ensemble ayant *n* points limites. Il est ainsi possible d'obtenir une égalité entre les formules des notions I_{C2} et I_{C3}, de même qu'entre I_{C1} et I_{C3}.

Pour ce faire, il faut forcer les valeurs des points de discontinuité : pour le cas de I_{C2}, on utilise la suite $\{c_1, ..., c_n, (a + b)/2, (a + b)/2, ...\}$, pour celui de I_{C1}, la suite constante $\{(a + b)/2, (a + b)/2, ...\}$. Cette technique nous permet de démontrer les théorèmes de nouvelles interprétations suivants :

Théorème (Nouvelle interprétation par transfert de la notion initiale I_{C2})
($\forall f$: Fonction | [*a*, *b*] → **R** | | continue par morceaux)($\forall a$: Réel)($\forall b$: Réel)
($\exists c_1$: Point de discontinuité)...($\exists c_n$: Point de discontinuité)
$(\exists a_1 = c_1)...(\exists a_n = c_n)(\exists a_{n+1} = (c_n + b)/2)...(\exists c' = (c_n + b)/2)$
$(\exists b_1 = (c_n + b)/2)(\exists b_2 = (c_n + b)/2)...$
$I_{C3}(f, [a, a_1, a_2, ..., c, ..., b_2, b_1, b])$
$= I_{C3}(f, [a, c_1, c_2, ..., c_n, (c_n + b)/2, ..., (c_n + b)/2, ..., (c_n + b)/2, b])$
$= I_{C2}(f, [a, c_1, ..., c_n, b])$

Théorème (Nouvelle interprétation par transfert de la notion initiale I_{C1})
$(\forall f$: Fonction | $[a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ | | continue$)(\forall a$: Réel$)(\forall b$: Réel$)$
$(\exists a_1 = (a + b)/2)(\exists a_2 = (a + b)/2)\ldots(\exists c' = (a + b)/2)$
$(\exists b_1 = (c_n + b)/2)(\exists b_2 = (c_n + b)/2)\ldots$
$I_{C3}(f, [a, a_1, a_2, \ldots, c, \ldots, b_2, b_1, b])$
$= I_{C3}(f, [a, (a + b)/2, \ldots (a + b)/2, \ldots, (a + b)/2, b])$
$= I_{C1}(f, [a, b])$

Comme la notion initiale est utilisée dans la formule de la nouvelle notion, nous obtenons le résultat qui suit :

Résultat 7 I_{C3} est une nouvelle interprétation (par transfert) de I_{C2} (et de I_{C1}), car il y a une relation fixe-variable entre les contextes et la notion initiale est utilisée dans la formule de la nouvelle notion.

5.3.3 Une généralisation conservative par transfert

Nous avons montré comment utiliser le critère d'intégrabilité de Lipschitz pour développer une nouvelle interprétation de l'intégrale de Cauchy. Ce même critère nous permet aussi de déterminer l'extension de la nouvelle notion. En fait, ce ne sont pas toutes les fonctions continues dont les points de discontinuité forment un ensemble de type 1 qui sont intégrables mais celles qui satisfont les propriétés P_1 et P_2. De façon formelle, les conditions de validité de I_{C3} se présentent comme suit :

Conditions de validité (Extension partielle de I_{C3})
$(\forall f$: Fonction continue dont les points de discontinuité | forment un ensemble de type 1$)(\forall a$: Réel$)(\exists a_1$: Point de discontinuité | à gauche$)$ $(\exists a_2$: Point de discontinuité | à gauche$)\ldots(\exists c'$: Point | limite de $D)$ $(\exists b_1$: Point de discontinuité | à droite$)$ $(\exists b_2$: Point de discontinuité | à droite$)$ ... $(\forall b$: Réel$)$
{$P_1(f)$:= les limites à gauche et à droite de l'intégrale définie de f aux points de discontinuité existent
$P_2(f)$:= les limites à gauche et à droite de l'intégrale définie de f aux points du dérivé de l'ensemble des points de discontinuité existent}
$((P_1(f) \wedge P_2(f)) \supset (\exists r : \text{Réel})\ (I_{C3}(f, [a, a_1, a_2, \ldots, c, \ldots, b_2, b_1, b]) = r)$

On peut maintenant utiliser la généralisation logique pour montrer que I_{C3} est une généralisation conservative de I_{C2}. En effet, dans le contexte de I_{C2}, les formules sont égales et la généralisation logique est obtenue en introduisant un quantificateur universel sur le nombre de points de discontinuité, d'où :

$$
\begin{aligned}
I_{C2}(f, [a, c_1, ..., c_n, b]) = {} & (\exists a_{n+1} = (c_n + b)/2)...(\exists c = (c_n + b)/2) \\
& (\exists b_1 = (c_n + b)/2)(\exists b_2 = (c_n + b)/2)... \\
& I_{C3}(f, [a, c_1, c_2, ..., c_n, (c_n + b)/2, ..., (c_n + b)/2, b]) \\
\vdash (\forall c' : \text{Point limite})\ & I_{C3}(f, [a, a_1, a_2, ..., c', ..., b_2, b_1, b])
\end{aligned}
$$

Or, pour que cette inférence soit valide, c'est-à-dire pour que la formule inférée soit vraie, il faut utiliser les conditions d'intégrabilité de la nouvelle notion. Dans ce cas, les conditions de validité de I_{C3} s'applique aussi au contexte de I_{C2} et nous obtenons ainsi que l'extension de I_{C2} est strictement incluse dans l'extension de I_{C3}.

$$
\begin{aligned}
& (P_1(f) \supset (\exists\, r : \text{Réel})\ I_{C2}(f, [a, c_1, ..., c_n, b]) = r) \\
& \quad \vdash (\forall c' : \text{Point limite})\ ((P_1(f) \wedge P_2(f)) \\
& \qquad\qquad \supset (\exists\, r : \text{Réel})\ (I_{C3}(f, [a, a_1, a_2, ..., c', ..., b_2, b_1, b]) = r)
\end{aligned}
$$

Résultat 8 I_{C3} est une généralisation conservative (par transfert) de I_{C2} et aussi de I_{C1}.

5.4 Remarque sur la complexité

Nous retrouvons, dans les travaux de Lipschitz, la même technique d'accommodation de la notion d'intégrale de Cauchy que celle utilisée par Cauchy pour introduire ses deux généralisations (I_{C2} et I^*_{C1}) : on tronque l'intervalle d'intégration pour être en mesure d'appliquer l'intégrale de Cauchy, on l'applique et ensuite on passe à la limite. Cependant, la technique d'accommodation développée par Lipschitz est beaucoup plus complexe que celle de Cauchy, car elle nécessite l'utilisation de plus de variables.

Les travaux de Lipschitz et ceux de Dirichlet s'inscrivent dans les recherches de l'intégrale de Cauchy, puisqu'ils ont défini l'intégrale comme la limite des sommes de Cauchy et qu'ils ont tenté de caractériser l'ensemble des points de discontinuité de la fonction. Bien que Riemann définit l'intégrale comme la limite des sommes de Cauchy, il s'intéressera plutôt au comportement de la fonction aux points de discontinuité.

6 Riemann et ses travaux sur l'intégrale de Cauchy

L'article de Riemann que nous considérerons est *La possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique*[1]. Il a été présenté en 1854 dans le cadre de son *Habilitation*, mais il fut connu de la communauté mathématique seulement en 1867 lors de la publication posthume de ses recherches.

Riemann débute son article par une étude historique dans laquelle il traite de la notion de fonction arbitraire et de la possibilité de la représenter par des séries de Fourier. Dans cette partie, il résume, entre autres, l'article de Dirichlet de 1829 et distingue la fonction-équation de la fonction-correspondance. Il termine son article en démontrant que toute fonction arbitraire peut être représentée non pas par une série de Fourier mais par une série trigonométrique. Or pour y parvenir, Riemann affirme qu'« [i]l a été nécessaire de faire précéder cette étude d'une courte Note sur la notion

---

[1] [Riemann, 1873]

d'intégrale définie, et sur l'étendue dans laquelle cette notion est applicable »[1]. Dans cette Note, il définit l'intégrale comme la convergence des sommes de Cauchy II d'une fonction bornée. Il est donc intéressé à l'intégrale au sens de Cauchy.

Il démontre ensuite l'équivalence entre deux conditions d'intégrabilité (R1 et R2). Le problème est qu'il suppose l'équivalence entre R1 et la convergence de Cauchy[2]. Cette hypothèse sera démontrée par Darboux et cette démonstration le mènera à introduire une nouvelle façon de définir l'intégrale.

Ajoutons, avant de présenter son critère, que Riemann l'utilise pour montrer que la conjecture de Dirichlet (voir la section 4.2 de ce présent chapitre) n'est pas nécessaire. En effet, il construit une fonction continue dont les points de discontinuité sont denses sur un intervalle et qui satisfait la condition R2.

6.1 Le critère d'intégrabilité de Riemann

Pour définir le critère d'intégrabilité, Riemann introduit la notion d'oscillation. Mentionnons qu'à cette époque la topologie n'est encore qu'à ses débuts et, de ce fait, la distinction entre supremum et maximum (de même qu'entre infimum et minimum) n'est pas encore claire. Par conséquent, nous avons décidé d'interpréter, tout comme le fit ses successeurs et des historiens[3], « la plus grande valeur » comme le supremum, d'où :

---

[1] [Riemann, 1873, p. 226]
[2] Riemann le dit explicitement à la page p. 241 de [Riemann, 1873].
[3] Voir [Hochkirchen, 2003, p.265] ou [Darboux, 1875].

Définition mathématique (L'oscillation d'une fonction)

Soit f une fonction bornée définie sur un intervalle $I = [a, b]$. Alors l'*oscillation* de f sur l'intervalle I est

$$D_I = \sup_I \mid f(x) \mid - \inf_I \mid f(x) \mid .$$

Exemple

L'oscillation de la fonction de Dirichlet est égale à 1 sur n'importe quel intervalle.

Le critère d'intégrabilité de Riemann s'énonce comme suit :

Théorème T5 (Le critère d'intégrabilité de Riemann, posthume 1867)

Soit une fonction bornée f entre M et m, et définie sur un intervalle $[a, b]$, alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(R1) $\lim\limits_{\|P\|\to 0} D_1\delta_1 + \ldots + D_n\delta_n = 0$

où les δ_i sont les longueurs des intervalles I_i d'une partition P de $[a, b]$.

si et seulement si

(R2) pour tout nombre réel ε et σ, il existe un nombre réel positif d tel que si P est une partition de norme inférieure ou égale à d, alors

$$s(P, \sigma) < \varepsilon,$$

où $s(P, \sigma)$ représente la somme des δ_i dans lesquels $D_i > \sigma$.

Exemple

Soit $f(x) = 2x$ définie entre 0 et 1, avec $P_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n} = 1\}$. Alors, pour tout i, nous avons que

$$D_i = \frac{2i}{n} - \frac{2(i-1)}{n} = \frac{2}{n} \qquad \text{et} \qquad \delta_i = \frac{1}{n}.$$

D'où $D_i\,\delta_i = \frac{2}{n^2}$ et

$$\lim_{\|P\|\to 0} (D_1\delta_1 + \ldots + D_n\delta_n) = \lim_{n\to\infty}\left(n\frac{2}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}\right) = 0$$

La fonction f vérifie aussi l'autre condition. Soient ε et σ. Alors choisissons $d = 1/n$ inférieure à $\sigma/2$. Ainsi, le pas de la partition P_n est inférieur à $2/\sigma$ et

$$D_i = \frac{2}{n} < \sigma, \text{ pour tout } i,$$

d'où $s(P, \sigma) = 0$, car aucun D_i n'est supérieur à σ, et $0 < \varepsilon$.

6.2 L'étude plus générale

Riemann n'a pas proposé une nouvelle façon de définir l'intégrale, car il a défini l'intégrale comme la convergence des sommes de Cauchy. De plus, il n'a pas présenté une démonstration constructive, c'est-à-dire qu'elle ne donne pas une nouvelle façon de calculer l'intégrale. Ainsi, nous en concluons qu'il n'était pas intéressé à la définition de la notion mais plutôt à caractériser son extension.

En effet, en présentant un critère d'intégrabilité qui fut aussi utilisé pour montrer que la conjecture de Dirichlet n'était pas nécessaire, Riemann a plutôt caractérisé l'extension de ce qu'il croyait être la notion d'intégrale de Cauchy. Or, il n'est pas possible d'affirmer que Riemann a généralisé l'intégrale de Cauchy. D'une part, il n'a pas montré que ce critère s'appliquait à l'intégrale de Cauchy. D'autre part, il n'a pas introduit une nouvelle notion. Riemann a donc fait une étude plus générale.

Résultat 9 Riemann a fait une étude plus générale et non une généralisation de l'intégrale de Cauchy, car il n'a pas introduit de nouvelles notions, mais démontré un critère d'intégrabilité pour étendre l'extension de ce qu'il croyait être l'intégrale de Cauchy.

6.3 L'influence de Riemann sur les recherches sur l'intégrale

Riemann présente une toute nouvelle façon de faire les recherches sur l'intégrale en changeant les objectifs de recherche et le contexte de la notion d'intégrale.

En effet, les recherches faites par Cauchy, Dirichlet et même Lipschitz avaient comme objectif de trouver les conditions à imposer aux points de discontinuité d'une fonction « continue » pour qu'elle soit intégrable[1]; Riemann caractérise plutôt la fonction. Il y a donc un point de bifurcation dans les objectifs de recherche entourant les conditions de validité de l'intégrale.

Il change aussi le contexte de la notion d'intégrale : ce ne sont plus les fonctions discontinues qui sont intéressantes, mais les fonctions bornées. Or, il existe des fonctions discontinues qui ne sont pas bornées et ainsi, certaines recherches sur les fonctions discontinues, soit celles pour lesquelles la fonction n'est pas bornée, sont mises de côté. Il a donc introduit un autre point de bifurcation.

Les recherches de Darboux s'inscriront dans cette nouvelle avenue.

7 Darboux et l'intégrale de Riemann

Darboux démontre, dans son long article *Mémoire sur les fonctions discontinues*, l'hypothèse de Riemann sur l'équivalence entre la condition d'intégrabilité R1 et la convergence des sommes de Cauchy. Cette démonstration le conduit à développer une nouvelle notion d'intégrale, soit l'intégrale de Riemann[2].

En fait, Darboux définit l'intégrale comme l'égalité entre deux sortes d'intégrales : l'intégrale par excès et celle par défaut. Chacune de ces intégrales sont définies à partir des sommes de Riemann[3]. Nous présenterons donc les sommes de Riemann et l'inté-

---

[1] Notre interprétation va dans le même sens que celle de Michel [Michel, 1992, p. 30-31].
[2] En même temps que Darboux, soit en 1875, les mathématiciens Ascoli, Smith et Thomae ont démontré le même résultat. La notation adoptée est celle développée par Volterra (voir [Hochkirchen, 2003, p. 270]) et Peano (voir [Hawkins, 1975]).
[3] Certains les nomment les sommes de Darboux. Nous préférons les appeler ainsi, car elles ont été inspirées de Riemann.

grale de Riemann et discuterons en quoi l'intégrale de Riemann est une généralisation de l'intégrale de Cauchy.

7.1 Les sommes de Riemann

Les sommes de Riemann sont introduites en paires : les sommes inférieures et supérieures et représenteront un exemple d'une réinterprétation sans généralisation.

7.1.1 Les sommes de Riemann inférieures et supérieures

Dans la section I (*Des fonctions et de la continuité*) de son article, Darboux introduit les définitions qu'il adopte. En particulier, il fait la distinction entre le supremum et le maximum, de même qu'entre l'infimum et le minimum d'une fonction sur un intervalle. À la section suivante (*Division des fonctions discontinues en deux classes*), il présente trois sommes. Il écrit :

> Intercalons, entre a et b, $n-1$ valeurs $x_1, \ldots, x_{n-1}$, et posons pour abréger $x_1 - a = \delta_1$, $x_2 - x_1 = \delta_2$, …, $[b] - x_{n-1} = \delta_n$. Nous formerons ainsi n intervalles, et nous désignons par M_i, m_i, Δ_i la limite maximum, la limite minimum et l'oscillation dans le i^e intervalle. Formons les trois sommes [$\sum_{i=1}^{n} M_i\delta_i$, $\sum_{i=1}^{n} m_i\delta_i$, $\sum_{i=1}^{n} \Delta_i\delta_i$] entre lesquelles existent la relation unique.[1]

Il définit donc les sommes de Riemann comme suit :

---

[1] [Darboux, 1875, p. 65]

Définition mathématique (Les sommes de Riemann)

Soit f une fonction bornée[1] sur l'intervalle $[a, b]$ et soit P une partition de l'intervalles. Alors les *sommes de Riemann supérieures* et *inférieures* sont :

$$\overline{S_{RI}}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{\delta_i} f(x)\delta_i = \sum_{i=1}^{n} M_i \delta_i \quad \text{et}$$

$$\underline{S_{RI}}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} \inf_{\delta_i} f(x)\delta_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \delta_i \,.$$

Exemple

Soit $f(x) = 2x$ définie entre 0 et 1, avec $P = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n} = 1\}$. Alors

$$\overline{S_{RI}}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \delta_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{2i}{n}\frac{1}{n} = \frac{2n(n+1)}{n^2} \quad \text{et}$$

$$\underline{S_{RI}}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \delta_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{2(i-1)}{n}\frac{1}{n} = \frac{2n(n-1)}{n^2}.$$

Définition par compréhension ($\underline{S_{RI}}$: Somme | de Riemann inférieure; $\overline{S_{RI}}$: Somme | de Riemann supérieure)

$\underline{S_{RI}}$, $\overline{S_{RI}}$: (Fonction | $[a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ | | bornée, Intervalle, Partition) $\rightarrow \mathbf{R}$

$$\underline{S_{RI}}\ (f, [a, b], \mathrm{P}([a, b], n)) := \sum_{i=1}^{n} \inf_{(x_i - x_{i-1})} f(x)(x_i - x_{i-1})$$

$$\overline{S_{RI}}\ (f, [a, b], \mathrm{P}([a, b], n)) := \sum_{i=1}^{n} \sup_{(x_i - x_{i-1})} f(x)(x_i - x_{i-1})$$

7.1.2 La réinterprétation des sommes de Cauchy

La façon de définir les sommes de Riemann change « radicalement » par rapport à la façon de définir les sommes de Cauchy. En effet, une somme de Riemann se présente d'abord par paires : la somme inférieure et la somme supérieure, ce qui n'est pas le cas pour les sommes de Cauchy. De plus, on choisit une borne pour définir une somme de Cauchy, alors que, pour les sommes de Riemann, on calcule un extremum. Il est donc

[1] La version géométrique de l'intégrale est le calcul d'aire sous une courbe. Si on ne veut pas que l'intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle $[-a, a]$ soit nulle, il faut considérer différemment les intervalles où la fonction est positive des intervalles où elle est négative.

impossible de faire varier quelque chose de fixe dans la compréhension de la notion initiale pour obtenir la compréhension de la nouvelle notion.

Par contre, il est possible de montrer que les deux notions sont équivalentes dans le contexte des fonctions bornées :

Théorème (Réinterprétation par équivalence)

$(\forall f : \text{Fonction} \mid [a, b] \rightarrow \mathbf{R} \mid \mid \text{bornée})(\forall a : \text{Réel})(\forall b : \text{Réel})(\forall n : \text{Naturel})$

$((\exists r_1 : \text{Réel})\ \underline{S_{R1}}(f, [a, b], P([a, b], n)) = r_1)$

$\equiv ((\exists r_2 : \text{Réel})\ \overline{S_{R1}}(f, [a, b], P([a, b], n)) = r_2)$

$\equiv ((\exists r_3 : \text{Réel})\ S_{C1}(f, [a, b], P([a, b], n)) = r_3)$

$\equiv ((\exists \theta : \text{Liste})(\exists r_4 : \text{Réel})\ S_{C2}(f, [a, b], P([a, b], n), \theta(n)) = r_4)$

Il est donc impossible de trouver une égalité entre les formules, car la valeur des r_i est toujours différentes. Ainsi l'égalité est remplacée par une équivalence.

Nous en concluons qu'il n'y a pas de relation fixe-variable entre les compréhensions des notions, plutôt une nouvelle façon équivalente de comprendre la notion a été introduite. Nous disons donc que les sommes de Riemann sont une réinterprétation (par équivalence) des sommes de Cauchy.

7.1.3 Une réinterprétation sans généralisation

Nous avons vu que les sommes de Riemann sont une réinterprétation des sommes de Cauchy dans le contexte des fonctions bornées. Ainsi, comme il n'y a pas de relation fixe-variable, il ne sera pas possible d'appliquer une généralisation logique entre les formules des notions. Il nous faut ainsi revenir à la définition de généralisation par extension et étudier si la nouvelle notion produit plus d'instances que la notion initiale.

Pour ce faire, nous utilisons d'abord le théorème de réinterprétation par équivalence. Nous obtenons ainsi que les sommes de Riemann et les sommes de Cauchy sont coextensives dans le contexte des fonctions bornées. Il nous reste à montrer que la nouvelle notion produit plus d'instances.

Il faut donc montrer qu'il existe un nouveau contexte dans lequel les sommes de Riemann sont définies et non les sommes de Cauchy. Or, ce n'est pas possible, car ces notions sont toujours définies dans les mêmes contextes. Nous en concluons qu'il n'y a pas d'inclusion d'extensions et donc qu'il n'y a pas de généralisation.

Les sommes de Riemann ne sont pas non plus une étude plus générale des sommes de Cauchy, puisque les sommes de Riemann sont une notion. Rappelons que nous avons qualifié les recherches de Riemann sur l'intégrabilité, d'étude plus générale, car Riemann n'avait pas introduit de nouvelle notion.

Résultat 10 Les sommes de Riemann sont une réinterprétation (par équivalence) des sommes de Cauchy. Elles ne sont ni une généralisation ni une étude plus générale des sommes de Cauchy. Dans le premier cas, l'extension n'est pas strictement incluse et, dans l'autre, une nouvelle notion a été introduite.

7.2 L'intégrale de Riemann

Darboux utilise les sommes de Riemann pour définir l'intégrale de Riemann. En effet, il montre d'abord que les sommes de Riemann inférieures et supérieures convergent toujours vers les valeurs des intégrales par défaut et par excès. Ensuite, il définit l'intégrale de Riemann comme l'égalité entre l'intégrale par défaut et l'intégrale par excès. Finalement, il détermine l'extension de l'intégrale de Riemann en utilisant la condition R2 du critère d'intégrabilité de Riemann.

Étudions ces étapes en détails.

7.2.1 Les intégrales de Riemann par excès et par défaut

Darboux écrit :

> Je dis que, lorsqu'on prendra n suffisamment grand, et que tous les intervalles δ tendront vers zéro, les trois sommes précédentes [$M = \sum_{i=1}^{n} M_i \delta_i$, $m = \sum_{i=1}^{n} m_i \delta_i$, $\Delta = M - m = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i \delta_i$], quelle que soit la fonction considérée, continue ou discontinue, tendront chacune vers une limite finie et déterminée, ne dépendant que de la nature de la fonction et des valeurs extrêmes a, b qui limitent l'intervalle considéré.[1]

Il montre ainsi que les sommes de Riemann inférieures et supérieures convergent chacune vers une limite. Quant à la dernière limite ($\lim\limits_{n\to\infty} \Delta$), il l'utilisera pour diviser les fonctions bornées en deux classes, soit celles intégrables au sens de Riemann (lorsque $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta$ est nulle) et les autres. De façon plus détaillée, nous avons la définition et la formalisation qui suivent :

Définition mathématique (Les intégrales par défaut et par excès)
Soit f une fonction bornée sur l'intervalle $[a, b]$. Alors l'***intégrale par défaut*** et l'***intégrale par excès*** sont respectivement :

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \underline{S_{R1}}(f, P), \text{ et}$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \overline{S_{R1}}(f, P).$$

Exemple
Soit $f(x) = 2x$ définie entre 0 et 1, avec $P_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n} = 1\}$. Alors

[1] [Darboux, 1875, p. 65]

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \underline{S_{R1}}(f, P) = \lim_{n\to\infty} \frac{2n(n-1)}{n^2} = 2 \quad \text{et}$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \overline{S_{R1}}(f, P) = \lim_{n\to\infty} \frac{2n(n+1)}{n^2} = 2.$$

Définition par compréhension ($\underline{I_{R1}}$: Intégrale | de Riemann par défaut; $\overline{I_{R1}}$: Intégrale | de Riemann par excès)

$\underline{I_{R1}}, \overline{I_{R1}}$: (Fonction | $[a, b] \to \mathbf{R}$ | | bornée, Intervalle)$\to \mathbf{R}$

$\underline{I_{R1}}(f, [a, b]) := \lim_{n\to\infty} \underline{S_{R1}}(f, [a, b], P([a, b], n))$

$\overline{I_{R1}}(f, [a, b]) := \lim_{n\to\infty} \overline{S_{R1}}(f, [a, b], P([a, b], n))$

De plus, ces limites existent toujours pour les fonctions bornées, c'est-à-dire que leur extension est totale dans ce contexte. Ainsi, ces deux notions sont toujours valides dans ce contexte, d'où le résultat suivant :

Théorème T6 (L'existence des intégrales par défaut et par excès, Darboux, 1875)
Soit f une fonction bornée sur l'intervalle $[a, b]$. Alors les intégrales par défaut et par excès existent.

Conditions de validité (Extension totale de $\underline{I_{R1}}$ et de $\overline{I_{R1}}$)

($\forall f$: Fonction | $[a, b] \to \mathbf{R}$ | | bornées)($\forall a$: Réel)($\forall b$: Réel)

$((\exists r_1 : \text{Réel})\ \underline{I_{R1}}(f, [a, b]) = r_1) \wedge ((\exists r_2 : \text{Réel})\ \overline{I_{R1}}(f, [a, b]) = r_2)$

7.2.2 La définition par compréhension de l'intégrale de Riemann

L'intégrale de Riemann est donc définie et formalisée comme suit :

Définition mathématique (L'intégrale de Riemann)
Soit f une fonction bornée sur l'intervalle $[a, b]$. Alors f est *intégrable au sens de Riemann* si

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Exemple

Soit $f(x) = 2x$. Alors $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx = 2$

Définition par compréhension (I_{R1} : Intégrale | de Riemann)
I_{R1} : (Fonction | $[a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ | | bornée, Intervalle) $\rightarrow \mathbf{R}$
$(\underline{I_{R1}}(f, [a, b]) = \overline{I_{R1}}(f, [a, b]))$
$\supset (I_{R1}(f, [a, b]) := \overline{I_{R1}}(f, [a, b]))$

7.2.3 Les conditions de validité de l'intégrale de Riemann

Darboux affirme, en reprenant la démonstration de l'équivalence des conditions d'intégrabilité R1 et R2, que : « Riemann a fait connaître un caractère simple qui permet de reconnaître si la somme Δ tend vers zéro »[1]. Ce caractère est la condition R2 et, de ce fait, nous avons un critère d'intégrabilité pour identifier si une fonction bornée est intégrable au sens de Riemann.

Théorème T7 (Le critère d'intégrabilité de Darboux, Darboux, 1875)
Soit f une fonction réelle à valeurs réelles bornée. Alors si $R2(f)$ alors f est intégrable au sens de Riemann.

Ce théorème nous permet donc d'identifier l'extension (partielle) de la notion d'intégrale de Riemann dans le contexte des fonctions bornées :

Condition de validité (Extension partielle de I_{R1})
$(\forall f$: Fonction | $[a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ | | bornée$)(\forall a$: Réel$)(\forall b$: Réel$)$
$R2(f) \supset (\exists r$: Réel$)(I_{R1}(f, [a, b]) = r)$

[1] [Darboux, 1875, p. 71]

7.3 Une généralisation innovante

Darboux change complètement la façon de définir la notion d'intégrale, puisqu'il présente l'intégrale, non plus comme la limite des sommes de Cauchy, mais comme l'égalité entre l'intégrale par défaut et l'intégrale par excès. Ainsi, il est impossible d'expliquer ce changement dans la compréhension de la notion par une relation fixe-variable. Darboux réinterprète donc la notion d'intégrale de Cauchy au lieu d'en donner une nouvelle interprétation.

De plus, Darboux montre que, dans le contexte des fonctions continues, les notions d'intégrale de Cauchy et d'intégrale de Riemann sont équivalentes. Il généralise donc la notion d'intégrale de Cauchy.

Revenons plus en détails sur ces deux thèses.

7.3.1 La réinterprétation par équivalence

Darboux remplace la façon de comprendre la notion initiale par une nouvelle façon de la comprendre qui lui est *équivalente*. En effet, il a montré[1] que, dans le contexte des fonctions continues, les deux notions sont équivalentes, c'est-à-dire que si une fonction est intégrable au sens de Cauchy, elle l'est aussi au sens de Riemann et vice versa. Nous obtenons donc le théorème suivant :

---

[1] Darboux le démontre (voir Théorème III de [Darboux, 1875, p. 73]).

Théorème (Réinterprétation par équivalence)
$(\forall f : \text{Fonction} \mid [a, b] \rightarrow \mathbf{R} \mid \mid \text{continue})(\forall a : \text{Réel})(\forall b : \text{Réel})$
$(\exists r : \text{Réel})\ (I_{R1}(f, [a, b]) = r) \equiv (I_{C1}(f, [a, b]) = r)$

Nous ne retrouvons donc plus d'égalité entre les formules des notions, mais une équivalence entre les notions dans le contexte des fonctions continues. La nouvelle notion est ainsi appelée une réinterprétation par équivalence de la notion initiale.

7.3.2 La généralisation innovante avec bifurcation

Le théorème de réinterprétation nous assure que les notions d'intégrale de Riemann et d'intégrale de Cauchy sont coextensives dans le contexte initial. Or, pour affirmer que l'intégrale de Riemann est une généralisation de l'intégrale de Cauchy, il faut montrer que l'inclusion est stricte.

Pour ce faire, nous remarquons que l'intégrale de Riemann est définie dans son contexte et, comme le contexte des fonctions bornées comprend celui des fonctions continues, nous obtenons plus d'instances de l'intégrale de Riemann.

Nous en concluons donc que l'intégrale de Riemann est une généralisation innovante de l'intégrale de Cauchy (I_{C1}).

Il faut cependant ajouter qu'il faut choisit une *branche* pour affirmer qu'il y a généralisation, car certaines fonctions intégrables au sens de Cauchy ne sont plus intégrables au sens de Riemann, en l'occurrence les fonctions discontinues qui ne sont pas bornée. Ainsi, l'intégrale de Riemann n'est ni une généralisation des notions I_{C2} et I_{C3}, ni une réinterprétation. Il y a donc un point de bifurcation et il faut suivre ce point pour affirmer que l'intégrale de Riemann est une généralisation innovante de l'intégrale de Cauchy.

Résultat 11 L'intégrale de Riemann est une généralisation innovante de l'intégrale de Cauchy pour les fonctions continues.

8 Jordan, la J-étendue et l'intégrale de Jordan

En 1892, Jordan publie un article intitulé *Remarques sur les intégrales définies*[1] dans lequel il réussit à interpréter l'intégrale de Riemann, de même que l'intégrale de Cauchy, dans le contexte des fonctions réelles à plusieurs variables[2]. En fait, les principaux problèmes[3], à cette époque, de l'intégrale de Riemann sont les suivants :

1) Aucune interprétation en plusieurs variables n'a encore été satisfaisante.
2) Il existe des fonctions dérivées bornées qui ne sont pas intégrables.
3) L'intégrale d'une suite n'est pas nécessairement égale à la suite des intégrales.

Jordan réussit à résoudre le premier problème en développant la notion de J-étendue, alors qu'il faut attendre les recherches de Lebesgue de 1904 pour résoudre les deux autres. Nous reviendrons sur les travaux de Lebesgue.

En introduisant la notion de J-étendue, Jordan a présenté une nouvelle interprétation de l'intégrale de Riemann dans laquelle la relation fixe-variable se caractérise par le remplacement d'instances de la notion de J-étendue par la notion. Nous obtenons ainsi une nouvelle sorte de relations fixes-variables.

---

[1] [Jordan, 1892]
[2] Entre 1870 et 1890, plusieurs mathématiciens, dont Thomae, Cantor et Peano, ont développé une notion d'intégrale en plusieurs dimensions mais, selon Hochkirchen (voir [Hochkirchen, 2003, p. 274-5]) celle de Jordan s'avère être la plus précise.
[3] Consulter au besoin [Hochkirchen, 2003, p. 275].

De plus, Jordan ne démontre pas de critère de validité, soit des conditions d'intégrabilité. Il considère plutôt la définition triviale qu'une fonction est intégrale si et seulement si elle rend compte de la définition. Lebesgue introduira plutôt une nouvelle classe de fonctions : les fonctions sommables.

L'article est divisé en trois parties : *Notions générales sur les ensembles*, *Intégrale indéfinie* et *Changement de variables*. Les notions de J-étendue et d'intégrale de Jordan sont développées dans les deux premières parties et nous proposons de les présenter.

8.1 La notion de J-étendue

Jordan définit la J-étendue[1] pour un ensemble E à n dimensions mais, « pour fixer les idées », il ne considère que le cas à deux dimensions. Ainsi, il représente l'ensemble E sur un plan cartésien et il calcule la J-étendue de la façon suivante :

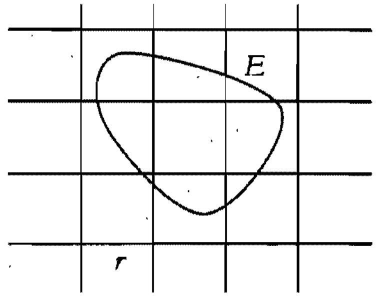
> Décomposons ce plan par des parallèles aux axes en carrés de côté r. L'ensemble de ceux de ces carrés dont tous les points sont intérieurs à E forme un domaine S intérieur à E; l'ensemble de ceux qui sont intérieurs à E ou qui contiennent un point de sa frontière forment un nouveau domaine $S + S'$, auquel E est intérieur. Ces domaines, étant formés par la réunion de carrés, ont des aires déterminées, qu'on peut également représenter par S et $S + S'$. Faisons varier la décompositions en carrés, de telle sorte que r tende vers zéro : les aires S et $S + S'$ tendront vers des limites fixes.[2]

Exemple

Soit E, l'ensemble dans le plan suivant :

[1] En fait Jordan parle d'étendue et non de J-étendue. Nous introduisons cette distinction, car d'autres théories de l'étendue ont été proposées, comme par exemple celle de Cantor ou celle de Peano.
[2] [Jordan, 1892, p. 77]

Figure 3.1 :
Calcul de la J-étendue de l'ensemble E



Alors S est composé d'un seul carré et S', de neuf.

La J-étendue d'un ensemble est donc obtenue en approximant l'ensemble par deux suites de n-cellules. Formalisons cette notion pour ensuite montrer que la J-étendue est une nouvelle façon de calculer la longueur d'un intervalle.

8.1.1 Les étendues intérieure et extérieure

Les limites des volumes des suites S et S' sont respectivement appelées l'étendue intérieure et l'étendue extérieure de l'ensemble E et sont définies comme suit :

Définition mathématique (Les étendues intérieure et extérieure d'un ensemble)
Soit E un ensemble borné de $\mathbf{R}^n$ et soient deux suites de n-cellules $\{P_i : r_i > r_{i+1}\}_{i=1}^{\infty}$ et $\{Q_i : r_i > r_{i+1}\}_{i=1}^{\infty}$ telles que $P_i \subset E$ et $E \subset Q_i$, pour tout i.
Alors l'*étendue intérieure* et l'*étendue supérieure* de E sont :
$c_i(E) = \lim\limits_{r \to 0} V(P_i)$ et $c_e(E) = \lim\limits_{r \to 0} V(Q_i)$.

Notons que la limite ne sera pas simplement $\lim\limits_{r \to 0} r^2 = 0$. En effet, même si le volume d'une n-cellule est r^n, les ensembles P_i et Q_i peuvent contenir plusieurs n-cellules. Dans l'exemple précédent, les aires de P et de Q sont respectivement r^2 et $9r^2$. Ainsi, lorsque r diminue, il y aura plus de carrés qui seront utilisés pour approximer l'aire de E et donc la limite ne sera pas nulle.

Nous proposons la formalisation suivante :

Définition par compréhension (c_i : Étendue | intérieure; c_e : Étendue | extérieure)
c_i, c_e : (Ensemble borné de $\mathbf{R}^n$) $\rightarrow$ $\mathbf{R}$
$c_i(E) := \lim_{r \to 0} V(P(r, E))$ et $c_e(E) := \lim_{r \to 0} V(Q(r, E))$

8.1.2 La J-étendue d'un ensemble

Jordan montre que ces deux limites existent toujours, c'est-à-dire que leur extension est totale dans le contexte de ensembles bornés de $\mathbf{R}^n$, et dans le cas où elles sont égales, l'ensemble est dit J-étendu :

Définition mathématique (la J-étendue d'un ensemble)
Soit E un ensemble borné de $\mathbf{R}^n$. Alors E est *J-étendu* si et seulement si $c_i(E) = c_e(E)$ et, dans ce cas, $c(E) = c_e(E)$.

Définition par compréhension (c : J-étendue)
c : (Ensemble borné de $\mathbf{R}^n$) $\rightarrow$ $\mathbf{R}$
$(c_i(E) = c_e(E)) \supset (c(E) := c_e(E))$

Illustrons cette notion en calculant la J-étendue d'un intervalle réel. Dans le cas d'une seule variable, le volume devient une longueur et, pour l'intervalle (a, b), la longueur euclidienne vaut $|a - b| = r$. Or, la J-étendue de l'intervalle vaut aussi r. En effet, l'union des sous-intervalles de la suite P_k et l'union de ceux de la suite Q_k, donnent respectivement :

$$P_k = (a + 1/k, b - 1/k) \qquad \text{et} \qquad Q_k = (a - 1/k, b + 1/k).$$

Ainsi,

$V(P_k) = |b - 1/k - (a + 1/k)| = |b - a - 2/k|,$
$V(Q_k) = |b + 1/k - (a - 1/k)| = |b - a + 2/k|,$
d'où,

$$c_i((a, b)) = \lim_{k\to\infty} |b - a - 2/k| = |b - a| = r,$$
$$c_e((a, b)) = \lim_{k\to\infty} |b - a + 2/k| = |b - a| = r,$$
donc $\quad c((a, b)) = r.$

Nous obtenons donc une façon, plus complexe certes, mais équivalente, de calculer la longueur d'un intervalle. Il est ainsi possible de montrer que la notion de J-étendue est une réinterprétation et aussi une généralisation de notion de la longueur euclidienne, ce que nous proposons de faire à l'instant.

8.1.3 Une réinterprétation et une généralisation de la notion de longueur euclidienne

En fait, l'illustration précédente est la démonstration du théorème de réinterprétation par équivalence suivant :

Théorème (Réinterprétation par équivalence)
$(\forall a : \text{Réel})(\forall b : \text{Réel})$
$(\exists r : \text{Réel})\ (c([a, b] = r) \equiv (|a - b| = r)$

Ainsi, la façon de calculer la J-étendue d'un intervalle réel diffère de la façon de calculer la longueur euclidienne de cet intervalle, car aucune relation fixe-variable n'a été utilisée lors de ce changement. Cependant, dans le contexte des intervalles de nombres réels, les deux notions sont équivalentes et, comme la notion de J-étendue est aussi définie pour les ensembles bornées de $\mathbf{R}^n$, on obtient que l'extension de la notion d'intervalle est strictement incluse dans la notion de J-étendue.

Résultat 12 La notion de J-étendue est une généralisation innovante par réinterprétation de la notion d'intervalle.

8.2 L'intégrale de Jordan

Dans la seconde partie de l'article, Jordan utilise la notion de J-étendue pour donner une nouvelle interprétation en plusieurs dimensions des intégrales de Cauchy et de Riemann. Nous retrouvons ainsi le premier exemple d'une nouvelle interprétation par remplacement d'une notion du contexte par une nouvelle notion.

Nous avons choisi de présenter l'interprétation de Jordan de l'intégrale de Riemann, car il mentionne comment faire une interprétation en plusieurs variables pour l'intégrale de Cauchy, mais il le fait explicitement seulement pour l'intégrale de Riemann.

Comme cette interprétation utilise une notion introduite par Jordan, nous la nommerons l'intégrale de Jordan. L'intégrale de Jordan se définit donc comme l'égalité entre les intégrales par défaut et par excès et nécessite les notions de sommes de Jordan.

8.2.1 Le rôle de la notion de J-étendue

Comme nous l'avons mentionné, un des problèmes de l'intégrale de Riemann est son interprétation en plusieurs dimensions. Or, l'interprétation de la partition en plusieurs dimensions est sans équivoque la division de $\mathbf{R}^n$ en n-cellules. Le problème était donc de déterminer les n-cellules à utiliser lors d'un changement de partitions. La notion de J-étendue résout ce problème.

En effet, la notion de J-étendue permet de développer la notion de recouvrement d'ensembles J-étendus disjoints deux à deux[1] et ainsi de remplacer la notion de partition par cette notion de recouvrement. Les ensembles J-étendus déterminent alors les n-cellules à conserver lors du changement de partitions.

8.2.2 Les sommes de Jordan : une généralisation des sommes de Riemann

Jordan définit les sommes de Jordan de la même façon que Darboux a défini les sommes de Riemann. Ainsi, la définition proposée est la suivante :

Définition mathématique (Les sommes de Jordan)

Soit f, une fonction bornée sur E, avec E un sous-ensemble J-étendu de $\mathbf{R}^n$. Alors, il existe une suite d'ensembles J-étendus telle que $E = \bigcup_{i=1}^{n} e_i$. Les *sommes de Jordan inférieures* et *supérieures* sont :

$$\overline{S_J}(f, e_1, \ldots, e_n) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{e_i} f(x)\, c(e_i) = \sum_{i=1}^{n} M_i\, c(e_i) \text{ et}$$

$$\underline{S_J}(f, e_1, \ldots, e_n) = \sum_{i=1}^{n} \inf_{e_i} f(x)\, c(e_i) = \sum_{i=1}^{n} m_i\, c(e_i)$$

Définition par compréhension ($\underline{S_J}$: Somme | de Jordan inférieure; $\overline{S_J}$: Somme | de Jordan supérieure)

$\underline{S_J}$, $\overline{S_J}$: (Fonction | $E \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ | | bornée, Ensemble J-étendu de $\mathbf{R}^n$ borné, Recouvrement d'ensembles J-étendus) $\to \mathbf{R}$

$$\underline{S_J}(f, E, \{e_1, \ldots, e_n\}) := \sum_{i=1}^{n} \inf_{e_i} f(x)\, c(e_i),$$

$$\overline{S_J}(f, E, \{e_1, \ldots, e_n\}) := \sum_{i=1}^{n} \sup_{e_i} f(x)\, c(e_i).$$

[1] Selon [Hawkins, 1980, p. 164], les ensembles du recouvrement sont disjoints.

Nous obtenons que les sommes de Jordan sont une nouvelle interprétation des sommes de Riemann. En effet, en faisant les remplacements suivants, nous obtenons une relation fixe-variable entre les contextes :

a) La partition est remplacée par le recouvrement d'ensemble J-étendus :
$P([a, b], n) = \{[x_0, x_1], ..., [x_{n-1}, x_n]\}$ devient $\{e_1, ..., e_n\}$.

b) L'intervalle est remplacé par l'ensemble J-étendue borné :
$[a, b]$ devient E.

c) La longueur euclidienne devient la J-étendue d'un ensemble :
$|a - b|$ devient $c([a, b])$

Aussi, nous obtenons une égalité entre les formules mathématiques lorsqu'on restreint le nouveau contexte au contexte initial :

Théorème (Nouvelle interprétation par remplacement)
$(\forall f : \text{Fonction} \mid [a, b] \to \mathbf{R} \mid \mid \text{bornée})(\forall a : \text{Réel})(\forall b : \text{Réel})(\forall n : \text{Naturel})$
$(\exists E = [a, b])(\exists e_1 = [x_0 = a, x_1]) \ldots (\exists e_n = [x_{n-1}, x_n = b])$
$\underline{\mathbf{S}}_{\mathbf{J}}(f, [a, b], \{[x_0, x_1], ..., [x_{n-1}, x_n]\}) = \underline{\mathbf{S}}_{\mathbf{R1}}(f, [a, b], \{[x_0, x_1], ..., [x_{n-1}, x_n]\})$
$\overline{\mathbf{S}}_{\mathbf{J}}(f, [a, b], \{[x_0, x_1], ..., [x_{n-1}, x_n]\}) = \overline{\mathbf{S}}_{\mathbf{R1}}(f, [a, b], \{[x_0, x_1], ..., [x_{n-1}, x_n]\})$

De plus, il y a une généralisation logique possible entre les formules :

$$\underline{\mathbf{S}}_{\mathbf{R1}}(f, [a, b], \{[x_0, x_1], ..., [x_{n-1}, x_n]\}) = \underline{\mathbf{S}}_{\mathbf{J}}(f, [a, b], \{[x_0, x_1], ..., [x_{n-1}, x_n]\})$$

$$\vdash (\forall E : \text{Ensemble J-étendu})\ \underline{\mathbf{S}}_{\mathbf{J}}(f, E, \{e_1, ..., e_n\})$$

En somme, nous avons le résultat suivant :

Résultat 13 Les sommes de Jordan sont une généralisation conservative des sommes de Riemann, car elles sont une nouvelle interprétation par remplacement de notions.

8.2.3 Les intégrales de Jordan par défaut et par excès

Jordan reprend la preuve de Darboux sur l'existence des intégrales par défaut et par excès et l'adapte à sa définition. En effet il écrit : « M. Darboux a montré que, si l'on fait varier la décomposition de telle sorte que les diamètres des éléments tendent vers zéro, $[\overline{\mathrm{S}}_{\mathrm{J}}(f, e_1, \ldots, e_n)]$ et $[\underline{\mathrm{S}}_{\mathrm{J}}(f, e_1, \ldots, e_n)]$ tendront vers des limites fixes. »[1]. Nous avons ainsi la définition et le théorème suivants :

Définition mathématique (Les intégrales par défaut et par excès de Jordan)
Soit f, une fonction bornée sur un ensemble J-étendu E de $\mathbf{R}^n$. Alors *l'intégrale par défaut* et *l'intégrale par excès de* f sont

$$\underline{\int_E} f\,dE = \lim_{n \to \infty} \underline{\mathrm{S}}_{\mathrm{J}}(f, E, \{e_1, \ldots, e_n\}) \text{ et}$$

$$\overline{\int_a^b} f dE = \lim_{n \to \infty} \overline{\mathrm{S}}_{\mathrm{J}}(f, E, \{e_1, \ldots, e_n\})$$

Définition par compréhension ($\underline{\mathrm{I}}_{\mathrm{J}}$: Intégrale | de Jordan par défaut,
$\overline{\mathrm{I}}_{\mathrm{J}}$: Intégrale | de Jordan par excès)
$\underline{\mathrm{I}}_{\mathrm{J}}, \overline{\mathrm{I}}_{\mathrm{J}}$: (Fonction | $E \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ | | bornée, Ensemble J-étendu borné de $\mathbf{R}^n$) $\to \mathbf{R}$

$$\underline{\mathrm{I}}_{\mathrm{J}}(f, E) := \lim_{n \to \infty} \underline{\mathrm{S}}_{\mathrm{J}}(f, E, \{e_1, \ldots, e_n\}),$$

$$\overline{\mathrm{I}}_{\mathrm{J}}(f, E) := \lim_{n \to \infty} \overline{\mathrm{S}}_{\mathrm{J}}(f, E, \{e_1, \ldots, e_n\}).$$

Théorème T10 (L'existence des intégrales par défaut et par excès, (Jordan, 1892))
Soit f une fonction bornée sur un ensemble E J-étendu de $\mathbf{R}^n$. Alors les intégrales par défaut et par excès existent.

Conditions de validité (Extension totale de $\underline{\mathrm{I}}_{\mathrm{J}}$ et de $\overline{\mathrm{I}}_{\mathrm{J}}$)
($\forall f$: Fonction | $E \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ | | bornée) ($\forall E$: Ensemble J-étendu borné de $\mathbf{R}^n$)
(($\exists r_1$: Réel) $\underline{\mathrm{I}}_{\mathrm{J}}(f, E) = r_1$) $\wedge$ (($\exists r_2$: Réel) $\overline{\mathrm{I}}_{\mathrm{J}}(f, E) = r_2$)

[1] [Jordan, 1892, p. 82]

Il va sans dire que nous retrouvons une analogie forte entre ces résultats et les résultats de Darboux.

8.2.4 L'intégrale de Jordan

Finalement Jordan conclut sa définition de l'intégrale (de Jordan) :

Définition mathématique (L'intégrale de Jordan)
Soit f, une fonction bornée sur un ensemble E J-étendu de $\mathbf{R}^n$. Alors f est *intégrable* ssi

$$\underline{\int_E} f\,dE = \overline{\int_a^b} f dE.$$

Définition par compréhension (I_J : Intégrale de Jordan)
I_J : (Fonction | $E \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ | | bornée, Ensemble J-étendu borné de $\mathbf{R}^n$) $\to \mathbf{R}$
$(\underline{\mathrm{I}_J}\,(f, E) = \overline{\mathrm{I}_J}\,(f, E)) \supset (\mathrm{I}_J(f, E) := \underline{\mathrm{I}_J}\,(f, E))$

8.3 *Une généralisation de l'intégrale de Riemann*

Même si Jordan ne présente pas de conditions de validité autres que celles de satisfaire la définition, nous obtenons que l'intégrale de Jordan est une nouvelle interprétation et une généralisation de l'intégrale de Riemann.

Ajoutons que Jordan indique comment définir son intégrale dans le cas où l'ensemble E n'est pas J-étendu. Nous retrouvons ainsi une sorte d'intégrale impropre.

8.3.1 Une nouvelle interprétation de l'intégrale de Riemann

L'intégrale de Jordan est définie de la même façon que l'intégrale de Riemann. En effet, une fois que nous avons remplacé les notions de J-étendue par leur instance, nous retrouvons exactement la même façon de définir l'intégrale. Il y a donc conservation de la compréhension et une relation fixe-variable entre les compréhension des notions.

De plus, lorsqu'on restreint le nouveau contexte au contexte initial, nous retrouvons une égalité entre les formules mathématiques :

Théorème (Nouvelle interprétation par remplacement)
$(\forall f$: Fonction | $[a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ | | bornée$)(\forall a$: Réel$)(\forall b$: Réel$)$
$I_J(f, [a, b]) = I_{R1}(f, [a, b])$

8.3.2 La généralisation conservative

Nous ne retrouvons pas de conditions de validité pour cette notion. Cependant, nous avons montré l'égalité entre les notions dans le contexte initial. Ainsi, les instances de la notion initiale sont conservées parmi les nouvelles. De plus, la nouvelle notion est valide dans son contexte et, comme ce contexte contient strictement le contexte initial, nous obtenons l'inclusion d'extensions.

Il est aussi possible d'utiliser la généralisation logique pour lier les formules :

$I_{R1}(f, [a, b]) = I_J(f, [a, b])$

$\quad\quad |-$ $(\forall E$: Ensemble J-étendu$)$ $I_J(f, E)$

En somme, nous avons le résultat suivant :

Résultat 14 L'intégrale de Jordan est une généralisation conservative de l'intégrale de Riemann, car l'intégrale de Jordan est une nouvelle interprétation valide de l'intégrale de Riemann.

9 Lebesgue et la définition par propriétés

Lebesgue, dans son livre intitulé *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*[1], propose une nouvelle façon de définir l'intégrale : la définition par propriétés. Il définit alors ce que nous avons appelé une notion-propriétés.

Pour ce faire, il s'intéresse à la « nature » de la notion d'intégrale : Quels sont les problèmes mathématiques qui doivent être résolus par cette notion? Quelles sont les propriétés qu'une intégrale doit satisfaire pour résoudre ces problèmes? En répondant à ces questions, il pourra ainsi bien choisir les propriétés de l'intégrale.

De plus, il montre, après avoir choisi les propriétés, que cette nouvelle façon de définir l'intégrale lui permet de déduire une théorie de la mesure et de construire une version calculatoire de l'intégrale de Lebesgue. Cette version s'avèrera être une réinterprétation (par équivalence) de l'intégrale de Riemann, mais nous y reviendrons à la section 10.

Notons que Lebesgue ne fut pas le seul au début des années 1900 à présenter une définition par propriétés; nous retrouvons aussi les mathématiciens Young et Stieltjies. Cependant, nous nous intéresserons pas à ces nouvelles interprétation[2].

Avant de présenter la définition par propriétés de Lebesgue, nous proposons de débuter par une discussion sur les objectifs de Lebesgue.

---

[1] [Lebesgue, 1928]

[2] Consulter au besoin [Daniell, 1917-18].

9.1 Les objectifs de Lebesgue

Pour définir l'intégrale par une liste de propriétés, Lebesgue ne cherche plus à caractériser l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction (comme le fit Cauchy et ses successeurs) ni à étudier le comportement d'une fonction bornée (comme le fit Riemann et ses successeurs). Il s'intéresse plutôt aux opérateurs[1] sur les fonctions et aux propriétés que ces opérateurs doivent satisfaire pour être une intégrale.

Cependant, ce changement dans l'attention de Lebesgue est issu de son désir de résoudre les problèmes de l'intégrale de Riemann et de l'importance de résoudre le problème de la recherche de primitives.

9.1.1 Les problèmes de l'intégrale de Riemann

Trois ans avant la publication des *Leçons*, Lebesgue écrit :

> Dans le cas des fonctions continues, il y a identité entre les notions d'intégrale et de fonction primitive. Riemann a défini l'intégrale de certaines fonctions discontinues, mais toutes les fonctions dérivées ne sont pas intégrables, au sens de Riemann. Le problème de la recherche des fonctions primitives n'est donc pas résolu par l'intégration, et l'on peut désirer une définition de l'intégrale comprenant comme cas particulier celle de Riemann et permettant de résoudre le problème des fonctions primitives. [2]

Ainsi, Lebesgue mentionne un des problèmes de l'intégrale de Riemann discutés dans la section sur les travaux de Jordan. En effet, il remarque que certaines fonctions, qui sont des dérivées, ne sont pas intégrables au sens de Riemann. Par conséquent,

---

[1] Lebesgue ne parle pas d'opérateur sur des fonctions, il écrit plutôt : « d'attacher à toute fonction bornée (...) un nombre fini » [Lebesgue, 1928, p. 105].

[2] [Lebesgue, 1901, p. 1025]

l'intégrale de Riemann ne résout pas le problème de la recherche de primitives pour cette classe de fonctions. Or, selon Lebesgue, l'intégrale *doit* résoudre ce problème.

L'objectif de recherche de Lebesgue est clair. Il veut trouver une intégrale qui est une généralisation de l'intégrale de Riemann et qui résout le problème de la recherche de primitives. Cet objectif sera atteint avec la publication des *Leçons*, mais avant de présenter ses résultats, rappelons le problème de la recherche de primitives.

9.1.2 Le problème de la recherche de primitives

Le problème de la recherche de primitives est le suivant. L'intégrale fut initialement définie comme l'opérateur inverse de la dérivée, c'est-à-dire

$$\int \frac{d}{dx}(f(x))dx = \frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right).$$

Ainsi, l'intégrale peut être utilisée pour trouver des primitives. En effet, soit $f(x)$, une fonction. Alors nous cherchons une fonction $F(x)$ (dite une primitive) telle que

$$\frac{d}{dx}(F(x)) = f(x).$$

En intégrant de part et d'autre de l'équation, nous avons

$$\int \frac{d}{dx}(F(x))dx = \int f(x)dx.$$

Comme l'intégrale et la dérivée sont des opérateurs inverses, nous obtenons

$$F(x) = \int f(x)dx.$$

Nous en concluons donc que l'intégrale peut être utilisée pour trouver des primitives et, selon Lebesgue, la notion d'intégrale *doit* résoudre ce problème.

9.2 La définition par propriétés

Lebesgue propose une nouvelle façon de définir l'intégrale : la définition par propriétés. En effet, il définit l'intégrale comme un opérateur sur les fonctions qui satisfait certaines propriétés. Il obtient ainsi une nouvelle façon de définir l'intégrale qui sera appelée une réinterprétation par changement dans le statut de certaines propriétés, car certaines propriétés deviennent constitutives de l'intégrale.

Bien qu'une définition par propriétés ne permet pas de calculer effectivement l'intégrale, Lebesgue construit une intégrale qui satisfait ces propriétés et qui résout le problème de la recherche de primitives. En fait, cette intégrale se calcule en prenant la limite, non plus des sommes de Cauchy, mais de fonctions simples. Cette version calculatoire sera présentée à la section 10.

Commençons par sa justification du choix des propriétés.

9.2.1 Le choix des six propriétés de l'intégrale

Lebesgue présente, dans les premiers chapitres de son livre, une excellente étude historique des travaux sur les intégrales de Cauchy et de Riemann. Cette étude est tout de même dirigée vers la recherche de propriétés « essentielles » à l'intégrale. En effet, tout juste avant de présenter sa définition par propriétés, Lebesgue écrit :

> Les applications classiques de l'intégration des fonctions continues, les applications faites précédemment de l'intégration au sens de Riemann ou au

> sens de Duhamel et Serret[1], suffisent pour mettre en évidence le rôle de certaines propriétés simples, conséquences de toutes les définitions de l'intégrale déjà étudiées, et pour convaincre que ces propriétés doivent nécessairement appartenir à l'intégrale, si l'on veut qu'il y ait quelque analogie entre cette intégrale et l'intégrale des fonctions continues.[2]

Ainsi, les propriétés, qui constitueront l'intégrale, *doivent* être simples, *doivent* découler des définitions antérieures de l'intégrale et *doivent* permettre de résoudre le problème de la recherche de primitives[3]. En fait, Lebesgue propose six propriétés.

Les cinq premières sont simples et sont satisfaites par les versions antérieures de l'intégrale. Ces propriétés lui permettront de déduire une théorie de la mesure[4] qui sera ensuite utilisée pour construire et calculer effectivement l'intégrale.

La sixième propriété a un statut particulier, car elle ne semble pas être aussi simple que les autres. Il note que cette propriété « paraît si peu nécessaire qu'elle est généralement inconnue, même pour le cas où f et f_n sont intégrables au sens de Riemann ou même continues. »[5]. En fait, cette propriété est maintenant appelée le théorème de la convergence dominée de Lebesgue et nous assure que l'intégrale résoudra le problème de la recherche de primitives pour la classe de fonctions laissées de côté par l'intégrale de Riemann.

---

[1] Voir [Lebesgue, 1928, p. 99 à 104].
[2] [Lebesgue, 1928, p. 105]
[3] Lebesgue affirme que cette intégrale doit être analogue à l'intégrale des fonctions continues parce que cette-dernière résout le problème de la recherche de primitives. Il réaffirme donc que l'intégrale *doit* résoudre ce problème.
[4] En effet, Lebesgue a déduit une théorie de la mesure qui peut à la fois être comparée avec la théorie de la J-étendue de Jordan ou avec la théorie de la mesure d'Émile Borel développé en 1898 [Borel, 1898]. En fait, à l'époque, la théorie de la mesure de Borel fut marginalisée par le rapport de Schoenflies sur la théorie des ensembles de 1900. Ce rapport reprochait à cette théorie le fait de ne pas être applicable. Ainsi, Lebesgue réussit à lui donner l'importance qu'elle mérite.
[5] [Lebesgue 1928 p. 106n]

Lebesgue est donc normatif dans cette nouvelle façon de définir l'intégrale en choisissant des propriétés que l'intégrale doit satisfaire.

9.2.2 L'introduction d'une notion-propriétés

Lebesgue présente la définition suivante de l'intégrale par propriétés :

Définition mathématique (La définition de l'intégrale par propriétés (Lebesgue 1904))

L'opérateur qui associe un nombre réel $\int_a^b f(x)dx$ à une fonction réelle à valeurs réelles $f(x)$ est une ***intégrale*** si les propriétés suivantes sont satisfaites :

Pr.1 $\int_a^b f(x)dx = \int_{a+h}^{b+h} f(x-h)dx, \forall h \in \mathbf{R}$,

Pr.2 $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx + \int_c^a f(x)dx = 0, \forall c \in (a, b)$,

Pr.3 $\int_a^b [f(x)+\varphi(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b \varphi(x)dx$, avec une fonction $\varphi(x)$ définie sur (a, b),

Pr.4 Soit $\varphi \geq 0$ et $b > a$, alors $\int_a^b \varphi(x)dx \geq 0$,

Pr.5 $\int_0^1 1dx = 1$,

Pr.6 Soit une suite de fonctions $f_n(x)$ qui tendent en croissant vers $f(x)$. Alors l'intégrale de $f_n(x)$ tend vers celle de $f(x)$.

Ces propriétés sont des propriétés de l'intégrale, c'est-à-dire que ce sont des propriétés d'un opérateur à valeurs réelles sur les fonctions que l'on note comme suit :

O : (Fonction | $[a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ | | bornée, Intervalle) $\rightarrow \mathbf{R}$.

Ainsi, un opérateur est une intégrale si et seulement s'il satisfait ces propriétés.

Lebesgue développe donc une toute nouvelle façon de définir l'intégrale. D'abord, il introduit un nouveau type pour cette notion :

I : Opération | intégrale.

Ensuite, le contexte de cette nouvelle notion devient un sous-ensemble d'opérateurs à valeurs réelles sur les fonctions, en l'occurrence ceux qui satisfont les propriétés de la partie interne. Nous proposons la formalisation suivante :

Définition par compréhension (I : Opérateur | Intégrale)
I : ((Fonction | $[a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ | | bornée, Intervalle) $\rightarrow \mathbf{R}$)
$I(O) := P_1(O) \wedge P_2(O) \wedge P_3(O) \wedge P_4(O) \wedge P_5(O) \wedge P_6(O)$

Finalement, Lebesgue change radicalement la façon de définir l'intégrale, car la définition par propriétés lui permet de distinguer les opérateurs qui sont des intégrales de ceux qui n'en sont pas, et ce, sans être en mesure de calculer la valeur. Il définit alors une notion-calcul par une liste de propriétés et non par un calcul.

9.3 Une réinterprétation par changement

La nouvelle façon de définir l'intégrale proposée par Lebesgue est appelée une réinterprétation par changement dans le statut de certaines propriétés. Ce changement de notions mathématiques est caractérisé par le choix de certaines propriétés de la notion initiale qui deviennent constitutives de la nouvelle notion et par une relation d'instanciation entre la notion initiale et la nouvelle notion.

Ajoutons que, cette sorte de réinterprétations s'applique au passage d'une notion-calcul à une notion-propriétés, soit une notion-calcul définie par une liste de propriétés.

Nous obtenons ainsi notre premier cas du passage d'une notion-calcul à une notion-propriété, car tous les cas que nous avons considérés étaient des cas du passage d'une notion-calcul à une autre (les notions d'intégrales) ou d'une propriété-mathématique à une autre (les notions de continuités).

Passons en revue ces deux caractéristiques

9.3.1 Le changement dans le statut de propriétés

La nouvelle façon de définir la notion-calcul est par une liste de propriétés. Ainsi, ces propriétés sont constitutives de la nouvelle notion, car elles constituent la partie interne de la nouvelle notion. Or, ces propriétés étaient connexes aux notions initiales. Par exemple, Cauchy a montré, entre autres, que I_{C1} satisfaisait la propriété Pr.3 dans la Leçon 27 de [Cauchy, 1823]. Ces résultats étaient alors connexes à la notion d'intégrale et non constitutifs de celles-ci.

Ce changement dans le statut empêche les notions d'entretenir une relation fixe-variable entre leur compréhension. En effet, d'un côté, on étudie des formules mathématiques, de l'autre, on choisit des propriétés. Ainsi, comme ce sont des activités de recherche indépendantes, aucune relation fixe-variable n'est possible. Nous en concluons que cette réinterprétation n'est pas une nouvelle interprétation.

9.3.2 La relation d'instanciation

Cette nouvelle façon de définir l'intégrale introduit aussi un nouveau type qui implique une relation d'instanciation avec les notions initiales. En effet, la notion d'intégrale de Cauchy ou l'intégrale de Riemann deviennent des instances de la notion d'intégrale, car ces opérateurs satisfont les six propriétés.

Cette relation d'instanciation empêche l'équivalence entre les notions initiales et la nouvelle notion. En effet, d'une part, l'équivalence se démontre toujours dans un contexte commun. Or, il n'est pas possible de trouver un contexte commun entre la notion initiale et la nouvelle notion, puisque la notion initiale devient une instance de la nouvelle notion. On change ainsi de « niveaux ».

D'autre part, la nouvelle notion ne propose aucune façon de calculer effectivement l'intégrale. Par exemple, I_{C1} et I_{R1} proposent deux façons équivalentes de calculer l'intégrale, c'est-à-dire que ces deux façons de calculer l'intégrale produisent des solutions différentes qui donnent la même réponse. La définition de l'intégrale par propriétés n'en propose aucune; il est impossible de calculer la valeur de l'intégrale.

En somme, ce changement n'est ni caractérisé par une équivalence entre la notion initiale et la nouvelle notion, ni par une relation fixe-variable entre la compréhension entre la notion initiale et la nouvelle notion. Ces deux caractéristiques le distinguent donc des autres processus de changement de notions mathématiques.

9.4 Une forme d'abstraction

Pour qu'une nouvelle notion soit une généralisation (par extension) d'une notion initiale, il faut que l'extension de la notion initiale soit strictement incluse dans l'extension de la notion initiale. Le problème est que, dans le cas d'une réinterprétation par changement, la notion initiale devient une instance de la nouvelle notion et il y a alors deux niveaux d'extensions. Par exemple, l'extension de l'intégrale de Riemann est constituée des fonctions bornées tandis que celle de l'intégrale de Lebesgue, d'opérateurs sur les fonctions. Cette relation d'instanciation nous empêche donc de comparer les extensions des notions et d'affirmer qu'il y a une généralisation (par extension).

Par contre, ce changement implique une autre forme de généralisation dans le sens où la notion initiale devient un cas particulier de la nouvelle notion. En effet, la définition par propriétés de l'intégrale est plus générale que l'intégrale de Riemann, car l'intégrale de Riemann devient un cas particulier.

Ce passage des fonctions aux opérateurs sur les fonctions et aussi cette recherche de propriétés essentielles s'apparentent au processus d'abstraction réfléchissante introduit par Jean Piaget pour formaliser le passage entre niveaux de développement chez l'enfant. Piaget écrit :

> Le propre (...) de l'abstraction réfléchissante (...) est d'être tirée non pas des objets, mais des actions que l'on peut exercer sur eux et essentiellement des coordinations les plus générales de ces actions, telles que de réunir, ordonner, mettre en correspondances, etc.[1]

Le sujet passe des objets aux actions sur ces objets et, en interprétant « des coordinations les plus générales de ces actions » comme des propriétés essentielles de ces actions, ou des propriétés qui sont vraiment à l'oeuvre lorsque le sujet pose une telle action, nous retrouvons que Lebesgue a fait ce qui s'apparente à une abstraction.

De plus, il y a une relation d'instanciation entre l'action (mentale) de réunir et l'action (physique) de réunir des objets, tout comme il y a une relation d'instanciation

---

[1] [Piaget, 1968, p. 20]

entre l'intégrale de Riemann et la version axiomatique de l'intégrale. Or, cette relation d'instanciation génère aussi une généralisation : l'intégrale de Riemann devient un cas particulier d'intégrale.

Nous obtenons donc le résultat suivant :

Résultat 15 La définition de l'intégrale par propriétés proposée par Lebesgue est une réinterprétation (par changement de statut) de la notion d'intégrale de Cauchy. De plus, cette nouvelle notion est obtenue par un processus qui s'apparente à une abstraction.

10 La version contemporaine de l'intégrale

Nous proposons, en guise de conclusion de cette étude de cas, de présenter la version contemporaine de l'intégrale. Nous avons mentionné que la définition de l'intégrale par propriétés développée par Lebesgue lui permettait de construire une intégrale pour les fonctions bornées à valeurs réelles qui résolvait le problème de la recherche de primitives. En fait, cette intégrale se définit comme le supremum sur les intégrales de certaines fonctions dites simples. Nous obtenons ainsi une réinterprétation par équivalence de l'intégrale de Cauchy.

La version contemporaine, quant à elle, est une nouvelle interprétation (par remplacement) de la version calculatoire de l'intégrale de Lebesgue. Pour la définir, nous avons besoin d'abord de définir un espace de mesure et ensuite de montrer comment on calcule l'intégrale des fonctions simples.

10.1 Les espaces de mesure

Intuitivement, une mesure est une fonction qui associe, à un sous-ensemble d'un ensemble donné, un nombre réel positif. Pour être plus précis, il faut définir comment on choisit les sous-ensembles et quelles sont les fonctions appropriées.

Introduisons d'abord les σ-algèbres et les espace mesurables.

Définition mathématique (Les σ-algèbres et les espaces mesurables)
Une famille **X** de sous-ensembles d'un ensemble X est une *σ-algèbre* si
a) $\varnothing \in \mathbf{X}$, $X \in \mathbf{X}$.
b) Si $A \in \mathbf{X}$, alors le complément de A appartient aussi à **X**.
c) Si (A_n) est une suite d'ensembles de **X**, alors l'union $\bigcup_n A_n \in \mathbf{X}$.

Dans ce cas, (X, **X**) est appelé un *espace mesurable.*

Ainsi, un espace mesurable est un ensemble dont les sous-ensembles peuvent être mesurés. En fixant la mesure, nous obtenons un espace de mesure :

Définition mathématique (Les espaces de mesure)
Une fonction μ à valeurs réelles étendues définie sur une σ-algèbre **X** d'un ensemble X est une *mesure* si
a) $\mu(0) = \varnothing$.
b) $\mu(A) \geq 0$, pour tout $A \in \mathbf{X}$.
c) Si (A_n) est une suite d'ensembles de **X** disjoint deux à deux, alors

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Dans ce cas, (X, **X**, μ) est appelé un *espace de mesure.*

Notons qu'en théorie de la mesure, on considère les nombres réels étendus.

10.2 L'intégration de fonctions simples

Fixons-nous maintenant un espace de mesure. Cette mesure nous permettra d'intégrer des fonctions dites simples, soit des fonctions qui prennent un nombre fini de valeurs. En fait, les fonctions, qui nous intéresseront, seront les fonctions caractéristiques d'un ensemble. Ainsi, l'intégration de ces fonctions se fait comme suit :

Définition mathématique (L'intégration de fonctions simples)
Soit $(X, \mathbf{X}, \mu)$, un espace de mesure et soit $E \in \mathbf{X}$, un ensemble mesurable. Soit $\varphi = k\chi_E$, avec χ_E la fonction caractéristique de E avec k une constante réelle. Alors $\mu = k\,\chi_E$ est une *fonction simple* et son *intégrale* est calculée comme suit :

$$\int_E \varphi d\mu = \int_E k\chi_E d\mu = k\,\mu(E)$$

En fait, comme l'ensemble E est mesurable, cette intégrale est définie, mais peut prendre la valeur infinie, car la mesure d'un ensemble peut être infinie.

10.3 L'intégrale comme le supremum de fonctions simples

Pour montrer que l'intégrale résout le problème de la recherche de primitives, nous introduisons la notion de fonction mesurable. En fait, il sera possible de montrer que toute fonction mesurable est intégrable.

Définition mathématique (Les fonctions mesurables)
Soit $(X, \mathbf{X}, \mu)$, un espace de mesure, soit Y, un espace topologique et soit $f : X \rightarrow Y$, une fonction. Alors la fonction f est dite *mesurable* si $f^{-1}(V)$ est un ensemble mesurable pour tout ouvert V de Y.

Ensuite, l'intégrale est calculée comme suit :

Définition mathématique (L'intégrale de Lebesgue)

Soit (X, **X**, μ), un espace de mesure, soit $E \in \mathbf{X}$, un ensemble mesurable et soit $f : E \rightarrow [0, \infty]$, une fonction mesurable. Alors f est *intégrable* et l'*intégrale* se définit comme le supremum des intégrales calculé sur les fonctions simples positives et inférieures à f :

$$\int_E f d\mu = \sup_{0 \leq s \leq f} \int_E s d\mu$$

Exemple

Soit f, une fonction telle que définie par le graphique de la Figure 3.2. Alors, pour calculer son intégrale, on partitionne non plus le domaine de f mais son image. Supposons ainsi que les extremums de f sont l et L. Soit la partition suivante :

$P = \{l = l_0, l_1, l_2, L = l_3\}$.

À l'aide de cette partition, on construit les ensembles suivants :

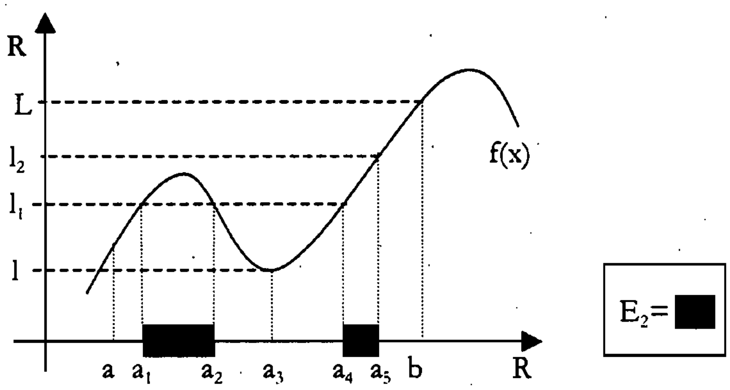
$E_i = \{x : l_{i-1} \leq f(x) < l_i\}$.

Par exemple $E_2 = \{x : l_1 \leq f(x) < l_2\} = [a_1, a_2] \cup [a_4, a_5]$ et l'intégrale de la fonction simple est :

$$\int_a^b \mu(x) dx = l_1 * m(E_2)$$

Ainsi, en raffinant la partition, nous obtenons l'intégrale.

Figure 3.2 : Partition de l'image de la fonction



Une autre innovation de Lebesgue fut donc de partitionner non plus le domaine de la fonction mais son image. De cette façon, il est possible d'utiliser les fonctions simples pour intégrer la fonction.

11 Le résumé de nos résultats

Nous avons produit un tableau résumant nos résultats. Nous retrouvons les trois sortes de nouvelles interprétations (NI), soit l'ajout de paramètres (Aj), le transfert de la notion initiale dans le formule de la nouvelle notion (Tr) et le remplacement d'une notion du contexte par une autre (Re). Nous retrouvons également les deux sortes de réinterprétations (RI) : l'équivalence entre les notions (Éq) et le changement de statuts de propriétés (Ch).

Tableau 3.1 Résumé de nos résultats

Résultats		NI			RI		Généralisation
#	Passage	Aj	Tr	Re	Éq	Ch	
1	S_{C1} à S_{C2}	X	--	--	--	--	Conservative
2	I_{C1} à I^*_{C1}	--	X	--	--	--	Conservative
3	I_{C1} à I_{C2}	--	X	--	--	--	Conservative
4	I_{C1} à I_{C2}	--	X	--	--	--	Conservative
5	Conjecture de Dirichlet	--	--	--	--	--	Inférence inductive
6	I_{C1} à I_{C2}	--	X	--	--	--	Conservative
7	I_{C1} à I_{C3}	--	X	--	--	--	Conservative
8	I_{C2} à I_{C3}	--	X	--	--	--	Conservative
9	Critère d'intégrabilité Riemann	--	--	--	--	--	Étude plus générale (pas de nouvelles notions)
10	S_C à S_R	--	--	--	X	--	Pas de généralisation
11	I_{C1} à I_R	--	--	--	X	--	Innovante
12	La notion de J-étendue	--	--	--	X	--	Innovante
13	S_R à S_l	--	--	X	--	--	Innovante
14	I_R à I_l	--	--	X	--	--	Conservative
15	La définition par propriétés	--	--	--	--	X	Abstraction
--	I_{C1} à I_L	--	--	--	X	--	Innovante
--	Version contemporaine	--	--	X	--	--	Conservative

Chapitre 4 : Les deux types de généralisations

Le rôle des processus de changement dans les processus de généralisation

Nous avons conclu notre chapitre 1 en affirmant rechercher une caractérisation des processus de généralisation qui serait basée sur la compréhension de la notion.

Pour ce faire, nous avons développé, au chapitre 2, une formalisation des notions mathématiques que nous avons appelée : la définition par compréhension. Cette formalisation nous a ensuite permis de mettre en évidence la compréhension de la notion en introduisant trois types de notions.

Puis, nous sommes passés aux exemples de généralisations de propriétés-mathématiques et de notions-calculs en considérant respectivement les notions de continuité et d'intégrale. Ces exemples ont ainsi suggéré qu'une caractérisation des processus de généralisation basée sur l'étude non pas de l'extension des notions, mais de leurs compréhensions était possible, voire très efficace.

Nous proposons maintenant de développer précisément deux types de généralisations de notions mathématiques : la généralisation conservative et la généralisation innovante. La distinction entre ces processus repose sur deux processus de changement dans la compréhension d'une notion : les nouvelles interprétations, qui conservent la même façon de définir la notion, et les réinterprétations, qui innovent dans la façon de définir la notion. Pour être plus précis, nous utiliserons les relations fixes-variables et nous étudierons où elles s'appliquent lors du changement.

Dans ce chapitre, nous présenterons donc la généralisation conservative et la généralisation innovante.

1 La généralisation conservative

Nous affirmons qu'une nouvelle interprétation ne change pas la façon de comprendre la nouvelle notion, car ces façons de comprendre entretiennent une relation fixe-variable entre elles, c'est-à-dire qu'il est possible de faire varier quelque chose dans la compréhension initiale pour obtenir la nouvelle compréhension.

Nous commencerons donc par préciser cette notion de relation fixe-variable pour ensuite présenter les sortes de nouvelles interprétations et finalement conclure avec notre définition du processus de généralisation conservative.

Nous verrons qu'il est possible d'utiliser les relations fixes-variables pour appliquer le processus de généralisation logique aux formules mathématiques des notions en jeu et, de ce fait, de montrer qu'il y a une généralisation.

1.1 Les sortes de relations fixes-variables

Nous proposons d'étudier les relations fixes-variables entre les expressions bien formées de notre version de la logique typée. Cette étude nous permettra de mettre en évidence les relations fixes-variables entre notions mathématiques, puisque s'il y a une telle relation entre deux notions, alors elle se situe entre leurs compréhensions, donc entre des expressions bien formées.

Les possibilités de relations fixes-variables entre expressions bien formées que nous offre la logique typée sont les suivantes :

a) La relation constant-variable : un individu a_1 : T | S est remplacé par plusieurs individus a_1 : T | S, ..., a_n : T | S, avec n : **N**. Dans ce cas, le nombre d'individus considérés varie. Notons que cette relation s'applique aussi aux nombres de paramètres et de variables.
b) La relation instance-paramètre : un individu a : T | S est remplacé par un paramètre a : T | S. Dans ce cas, un paramètre est introduit.
c) La relation instance-notion : une notion N : T | S est remplacée par une variable de notions N : T | S. Dans ce cas, une nouvelle notion est introduite.
d) La relation de suppression de conditions : une condition imposée à la définition de la notion initiale est supprimée.

Nous présenterons ces quatre sortes de relations fixes-variables et nous conclurons en étudiant les combinaisons possibles entre ces relations, mais débutons par une remarque sur la notion mathématique de paramètre.

1.1.1 La notion mathématique de paramètre

Nous aborderons deux problèmes : la nature du paramètre et son implication dans une éventuelle relation fixe-variable.

Pour discuter de la nature du paramètre, commençons avec un exemple. Nous retrouvons dans l'équation d'une ellipse :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

un nombre réel ($1 : \mathbf{R}$), deux paramètres ($a : \mathbf{R}$, $b : \mathbf{R}$) et deux variables ($x : \mathbf{R}, y : \mathbf{R}$). Il est clair que le nombre et les variables sont respectivement formalisés par une constante logique et par une variable logique. Qu'en est-il des paramètres?

Le paramètre nous permet de conserver de l'arbitraire dans une formule mathématique et, dans ce sens, il représente quelque chose de variable. Le paramètre n'est cependant pas une variable, car sa valeur, bien que quelconque, reste toujours la même.

Le paramètre ne représente pas quelque chose de fixe non plus, car il n'est pas une constante logique au sens strict, c'est-à-dire au sens où le nombre 1 est une constante. Par contre, il peut être considéré comme une constante logique au sens large[1].

Or, pour éviter cette ambiguïté, nous n'utiliserons pas, dans notre formalisation des notions mathématiques, la notion logique de constante, mais plutôt la notion mathématique de paramètre. Nous obtenons donc qu'un paramètre représente du variable.

Ainsi, le remplacement d'une instance par un paramètre constitue une relation fixe-variable et non le remplacement d'un paramètre par une variable. Par exemple, le passage du cercle de rayon 3 au cercle de rayon r illustre une relation fixe-variable, car on introduit de l'arbitraire dans la nouvelle notion.

Par contre, le remplacement du rayon $r : \mathbf{R}$ par une variable $x_3 : \mathbf{R}$ ne constitue pas une relation fixe-variable puisqu'on change le type des notions en jeu, et ce, sans qu'il y ait un lien entre ces types. En effet, la sorte de figure euclidienne devient maintenant

[1] En fait, le problème de déterminer ce qu'est une constante logique au sens large est un problème ouvert en philosophie de la logique mais, en bref, une constante représente les composantes d'une proposition qui *doivent* rester invariantes lorsqu'on fait varier certaines parties de la proposition. Dans ce sens, le paramètre mathématique est une constante logique (au sens large).

une courbe de $\mathbf{R}^3$. Nous perdons ainsi le lien entre les notions et nous en concluons que ces deux notions ne peuvent pas être en relation.

1.1.2 La relation constant-variable

La première sorte de relations fixes-variables est celle dans laquelle un individu $\mathrm{a}_1 : \mathrm{T}|\mathrm{S}$, un paramètre $a_1 : \mathrm{T}|\mathrm{S}$ ou une variable d'individus $x_1 : \mathrm{T}|\mathrm{S}$ sont respectivement remplacés par n individus $\mathrm{a}_1 : \mathrm{T}|\mathrm{S}, ..., \mathrm{a}_n : \mathrm{T}|\mathrm{S}$, n paramètres $a_1 : \mathrm{T}|\mathrm{S}, ..., a_n : \mathrm{T}|\mathrm{S}$ ou n variables $x_1 : \mathrm{T}|\mathrm{S}, ..., x_n : \mathrm{T}|\mathrm{S}$, avec $n : \mathbf{N}$. Cette relation fait varier le nombre de symboles, passant d'une nombre constant d'éléments considérés à un nombre arbitraire d'éléments considérés.

Nous retrouvons ainsi une forme d'induction dans ce passage. Par exemple, si une propriété P est satisfaite par un individu alors elle est satisfaite par n individus. Dans ce cas, l'expression initiale est une propriété et la nouvelle expression, un prédicat n-aire. Les formalisations sont les suivantes :

$\mathrm{A} : (\mathrm{a}_1 : \mathrm{T}|\mathrm{S})$	$\mathrm{A'} : (\mathrm{a}_1 : \mathrm{T}|\mathrm{S}, ..., \mathrm{a}_n : \mathrm{T}|\mathrm{S})$
$\mathrm{A}(\mathrm{a}_1) := \mathrm{Pa}_1$	$\mathrm{A}(\mathrm{a}_1, ..., \mathrm{a}_n) := \mathrm{Pa}_1 \wedge ... \wedge \mathrm{Pa}_n$

A et A' sont donc en relation constant-variable sur le nombre d'individus.

Définition finale (La relation constant-variable pour les expressions bien formées)
Soit $\mathrm{A} : (r_1 : \mathrm{T}_1|\mathrm{S}_1, \mathrm{T}_2|\mathrm{S}_2, ..., \mathrm{T}_n|\mathrm{S}_n)$, une formule[1]. Alors une nouvelle formule A' est en *relation constant-variable* si

a) Le nouveau contexte devient
$$\mathrm{A'} : (r_1 : \mathrm{T}_1|\mathrm{S}_1, ..., r_m : \mathrm{T}_1|\mathrm{S}_1, \mathrm{T}_2|\mathrm{S}_2, ..., \mathrm{T}_n|\mathrm{S}_n)$$
avec r, une variable générique, c'est-à-dire qu'elle peut être égale à un individu a, un paramètre a ou une variable x.

b) La formule initiale $\mathrm{A}(r_1, x_2, ..., x_n)$ devient $\mathrm{A'}(r_1, ..., r_m, x_2, ..., x_n)$

[1] Le cas d'un terme complexe se fait de la même façon. On change alors le contexte de la définition.

Pour discuter du cas des notions mathématiques, prenons deux exemples. D'abord, le passage d'une fonction ayant un point de discontinuité à une fonction ayant plusieurs points de discontinuité illustre le passage d'un paramètre (c_1 : Point de discontinuité) à plusieurs paramètres (c_1 : Point de discontinuité, ..., c_n : Point de discontinuité), d'où la notation suivante :

N(c) : Fonction | continue ayant 1 point de discontinuité à

N'(c_1, ..., c_n) : Fonction | continue ayant n point de discontinuité

Ainsi, le type de la notion est conservé et nous affirmons que nous conservons la même sorte car, dans le premier cas, on a fixé le nombre de points de discontinuité, dans l'autre cas, on l'a laissé variable.

Le passage de l'ensemble $\mathbf{R}$ à $\mathbf{R}^n$ illustre aussi cette relation, car

$x_1 : \mathbf{R}^1$ devient $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n) : \mathbf{R}^n$.

Ajoutons que cette relation n'explique ni le passage d'une fonction continue à une fonction continue par morceaux, ni celui de $\mathbf{R}^n$ à un espace métrique. Dans le premier cas, un paramètre a été introduit (par la relation instance-paramètre), dans le second, une nouvelle notion a été introduite (par la relation instance-notion).

En somme, cette relation ajoute n éléments de même type sorté dans le contexte de la notion et laisse inchangé le type sorté de la notion initiale.

Définition finale (La relation constant-variable pour les notions mathématiques)

Soit N : T | S, une notion dont la sorte dépend d'un individu, d'un paramètre, ou d'une variable d'individus. Alors la nouvelle notion N' : T | S est en relation *constant-variable* si une des conditions suivantes est satisfaite :

a) N(a) : T | S devient N'(a_1, ..., a_n) : T | S, avec a_1 : T' | R, ..., a_n : T' | R,
b) N(a) : T | S devient N'(a_1, ..., a_n) : T | S, avec a_1 : T' | R, ..., a_n : T' | R,
c) N(x) : T | S devient N'(x_1, ..., x_n) : T | S, avec x_1 : T' | R, ..., x_n : T' | R.

1.1.3 La relation instance-paramètre

Une relation est dite instance-paramètre si un individu ($a_1 : T \mid S$), qui est utilisé dans une expression bien formée, est remplacé par un paramètre ($a_1 : T \mid S$). La définition suivante est proposée pour les expressions bien formées :

Définition finale (La relation instance-paramètre pour les expressions bien formées)
Soit A : ($T_1 \mid S_{,1,}, ..., T_n \mid S_n$), une formule[1]. Alors une nouvelle formule A' : ($T_1 \mid S_{,1,}, ..., T_n \mid S_n, a_1 : T_{n+1} \mid S_{n+1}, ..., a_m : T_{n+m} \mid S_{n+m}$) est en relation *instance-paramètre* si m instances ont été mises en évidence dans le contexte et ensuite remplacées par m constantes.
Dans ce cas, nous réécrivons A comme suit :

$A : (T_1 \mid S_{,1,}, ..., T_n \mid S_n, a_1 : T_{n+1} \mid S_{n+1}, ..., a_m : T_{n+m} \mid S_{n+m})$
$A(x_1, ..., x_n, a_1, ..., a_m)$.

Puis, en remplaçant les individus par des constantes, nous obtenons :

$A' : (T_1 \mid S_{,1,}, ..., T_n \mid S_n, a_1 : T_{n+1} \mid S_{n+1}, ..., a_m : T_{n+m} \mid S_{n+m})$
$A(x_1, ..., x_n, a_1, ..., a_m)$.

Pour discuter du cas des notions mathématiques, prenons deux exemples. D'abord, le cercle de rayon 3 est formalisé par une propriété-mathématique, donc un prédicat défini par une formule, dont la définition est la suivante :

$A : (\mathbf{R}^2)$

$A(x_1, x_2) := x_1^2 + x_2^2 = 9.$

Le contexte peut être réécrit pour mettre en évidence la valeur du rayon. Dans ce cas, un individu, qui était déjà utilisé dans la formule, est *ajouté* au contexte :

$A : (\mathbf{R}^2, 3 : \mathbf{R})$

$A((x_1, x_2), 3) := x_1^2 + x_2^2 = 9$

Ensuite, cet individu est remplacé par le paramètre $a : \mathbf{R}$ pour obtenir le cercle de rayon a :

[1] Le cas d'un terme complexe se fait de la même façon. On change alors le contexte de la définition.

$A' : (\mathbf{R}^2, a : \mathbf{R})$

$A'((x_1, x_2), a) := x_1^2 + x_2^2 = a^2.$

La notion de cercle dépend donc d'un paramètre $a : \mathbf{R}$, qui est mis en évidence dans le symbole du type comme suit :

A'(a) : Figure Euclidienne | Cercle

Le prochain exemple est celui du passage des fonctions continues aux fonctions continues par morceaux. Dans ce cas, le passage se fait en forçant la valeur du paramètre. En effet, la notion initiale se réécrit dans la nouvelle sorte comme suit :

N : Fonction | continue devient

N(c_0) : Fonction | continue ayant 0 point de discontinuité,

avec c_0 un nombre réel bidon de l'intervalle de continuité. Ensuite on introduit le paramètre (ou n paramètres si on utilise la relation constant-variable) :

N'(c_1) : Fonction | continue ayant 1 point de discontinuité, ou

N'(c_1, ..., c_n) : Fonction | continue ayant n points de discontinuité.

Ainsi, le passage de c_0 à c_1 (ou à c_1, ..., c_n) se fait en forçant la sorte du paramètre, c'est-à-dire que l'individu et le paramètre n'ont pas la même sorte :

c_0 : **R** et c_1 : **R** | Point de discontinuité.

Dans ces deux exemples, un paramètre a donc été ajouté au contexte dont l'instance a été mise en évidence dans la formule initiale puis remplacée par le paramètre. Pour faire ce remplacement, il est parfois nécessaire de forcer la valeur du paramètre, en l'occurrence de changer la sorte de l'instance. De plus, le type est conservé, mais il est possible qu'il y ait un changement de sorte.

En appliquant la relation constant-variable, c'est-à-dire en faisant varier le nombre de paramètres ajoutés[1], nous obtenons la définition suivante :

Définition finale (La relation instance-paramètre pour les notions mathématiques)

Soit $N : T|S$, une propriété-mathématique[2] dont la définition par compréhension est la suivante :

$N : (T_1|S_1, ..., T_n|S_n)$
$N(x_1, ..., x_n) := A(x_1, ..., x_n)$.

Alors $N' : T|S'$ est en *relation instance-paramètre* si

a) m paramètres $(a_1 : T_{n+1}|S_{n+1}, ..., a_m : T_{n+m}|S_{n+m})$ ou, dans le cas où on force les paramètres, $(a_1 : T_{n+1}|S'_{n+1}, ..., a_m : T_{n+m}|S'_{n+m})$ ont été ajoutés au contexte :

$N : (T_1|S_1, ..., T_n|S_n)$ devient
$N' : (T_1|S_1, ..., T_n|S_n, a_1 : T_{n+1}|S_{n+1}, ..., a_m : T_{n+m}|S_{n+m})$, ou
$N' : (T_1|S_1, ..., T_n|S_n, a_1 : T_{n+1}|S'_{n+1}, ..., a_m : T_{n+m}|S'_{n+m})$

b) m individus $(a_1 : T_{n+1}|S_{n+1}, ..., a_m : T_{n+m}|S_{n+m})$ ont été mis en évidence et remplacés par ces m paramètres dans la formule initiale :

$N(x_1, ..., x_n) := A(x_1, ..., x_n)$ devient
$N(x_1, ..., x_n, a_1, ..., a_m) := A(x_1, ..., x_n, a_1, ..., a_m)$, puis
$N'(x_1, ..., x_n, a_1, ..., a_m) := A'(x_1, ..., x_n, a_1, ..., a_m)$.

1.1.4 La relation instance-notion

La relation instance-notion se caractérise comme une relation fixe-variable au niveau des types utilisés : une instance d'une sorte $(N_1 : T_1|S_1)$ est remplacée par une variable de sortes $(N'_1 : T_1|S'_1)$. De façon détaillée, nous avons :

Définition finale (La relation instance-notion pour les expressions bien formées)

Soit $A : (T_1|S_1, ..., T_n|S_n, N_1 : T_{n+1}|S_{n+1}, ..., N_m : T_{n+m}|S_{n+m})$, une formule[3]. Alors une nouvelle formule $A' : (T_1|S_1, ..., T_n|S_n, N'_1 : T_{n+1}|S_{n+1}, ..., N'_m : T_{n+m}|S'_{n+m})$ est en *relation instance-notion* si m instances de notions ont été remplacées par m notions dans la formule initiale.

---

[1] Par exemple, il est possible d'ajouter les coordonnées (h, k) du centre du cercle pour mettre en évidence trois paramètres de la notion $A(r, (h, k))$.

[2] Le cas d'une notion-calcul se fait de la même façon. On change alors le contexte de la définition.

[3] Le cas d'un terme complexe se fait de la même façon. On change alors le contexte de la définition.

Cette relation se distingue de la relation instance-paramètre, d'une part, par le fait qu'aucune notion n'a été ajoutée au contexte, car les deux contextes conservent le même nombre de notions et, d'autre part, par l'intuition qu'on change la notion de contexte d'utilisation et non qu'on lui ajoute des variantes.

Par exemple, le passage du cercle à la sphère de centre $\boldsymbol{b}$ dans $\mathbf{R}^n$ fait intervenir une relation instance-paramètre et une relation constant-variable :

$A' : (\mathbf{R}^2, a : \mathbf{R})$	$A'' : (\mathbf{R}^n, a : \mathbf{R}, \boldsymbol{b} : \mathbf{R}^n)$
$A'((x_1, x_2), a) := x_1^2 + x_2^2 = a^2$	$A''((x_1, ..., x_n), a, (b_1, ..., b_n)) :=$ $(x_1 - b_1)^2 + ... + (x_n - b_n)^2 = a^2.$

Par contre, le passage de la sphère dans un espace métrique n'est pas caractérisé par ces relations, mais par la mise en évidence de la métrique. En effet, A" devient :

$A'' : ((\mathbf{R}^n, \mathrm{d}_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|) : \mathrm{E_M}, a : \mathbf{R}, \boldsymbol{b} : \mathbf{R}^n)$

$A''(\boldsymbol{x}, a, \boldsymbol{b}) := \mathrm{d}_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}) = a$

Cette réécriture met en évidence une instance de la notion d'espace métrique, en l'occurrence $\mathrm{E_M} = (\mathbf{R}^n, \mathrm{d}_n)$: Espace|Métrique est une instance de $E_M = (E, d)$: Espace|Métrique, avec l'ensemble $E = \mathbf{R}^n$ et la métrique $d = \mathrm{d}_n$:

$A''' : (E_M : \text{Espace|Métrique}, a : \mathbf{R}, b : E)$

$A'''((E, d(x,y)), a, b) := d(x, b) = a$

Nous en concluons donc qu'on a changé le contexte de la notion de sphère et non qu'on a mis en évidence ses dépendances, comme c'est le cas pour la relation instance-paramètre. Nous retenons la définition suivante :

Définition finale (La relation instance-notion pour les notions mathématiques)

Soit $N : T | S$, une propriété-mathématique[1] dont la définition par compréhension est la suivante :

$N : (T_1 | S_1, ..., T_{n+m} | S_{n+m})$
$N(x_1, ..., x_{n+m}) := A(x_1, ..., x_{n+m})$.

Alors $N' : T | S'$ est en relation instance-notion si

a) m instances de notions ($N_1 : T_{n+1} | S_{n+1}, ..., N_m : T_{n+m} | S_{n+m}$) sont mises en évidence dans le contexte et dans la partie interne

$N : (T_1 | S_1, ..., T_{n+m} | S_{n+m})$ devient
$N(x_1, ..., x_{n+m}) := A(x_1, ..., x_{n+m})$.
$N : (T_1 | S_1, ..., T_n | S_n, N_1 : T_{n+1} | S_{n+1}, ..., N_m : T_{n+m} | S_{n+m})$,
$N(x_1, ..., x_{n+m}) := A(x_1, ..., x_n, N_1, ..., N_m)$.

b) Ensuite, ces m instances sont remplacées par $N'_1 : T_{n+1} | S'_{n+1}, ..., N'_m : T_{n+m} | S'_{n+m}$ avec $N'_1 = N_1, ..., N'_m = N_m$ pour constituer la nouvelle notion :

$N' : (T_1 | S_1, ..., T_n | S_n, N'_1 : T_{n+1} | S_{n+1}, ..., N'_m : T_{n+m} | S_{n+m})$,
$N'(x_1, ..., x_{n+m}) := A(x_1, ..., x_n, N'_1, ..., N'_m)$.

1.1.5 La suppression de conditions

Comme nous avons formalisé une notion mathématique par une définition par compréhension, certaines conditions peuvent être imposées soit aux notions qui composent le contexte de la notion initiale, soit à sa partie interne.

Dans le premier cas, il est possible par exemple d'exiger que le domaine d'une fonction binaire soit le produit cartésien d'un même ensemble :

Fonction | (X : Ensemble, X : Ensemble) $\rightarrow \mathbf{R}^+$.

Ainsi, la suppression de cette condition nous donne la notion suivante :

Fonction | (Ensemble, Ensemble) $\rightarrow \mathbf{R}^+$.

Il est aussi possible de supprimer des conditions imposées au domaine d'une notion du contexte, comme par exemple permettre à un intervalle de devenir infini :

$[a : \mathbf{R}, b : \mathbf{R}]$: Intervalle, devient

[1] Le cas d'une notion-calcul se fait de la même façon. On change alors le contexte de la définition.

$[a : \mathbf{R} \cup \{\infty\}, b : \mathbf{R} \cup \{\infty\}]$: Intervalle étendu.

Pour le second cas, prenons l'exemple du passage de la notion de partition à la notion de recouvrement d'intervalles avec chevauchements possibles d'intervalles. Cet exemple est caractérisé par la suppression de deux conditions : l'ordre des intervalles de la partition et l'interdiction de chevauchements. Rappelons les définitions :

Définition par compréhension (P : Partition)
P : (Intervalle, $\mathbf{N}$) $\rightarrow \{[x_0, x_1], [x_1, x_2]..., [x_{n-1}, x_n]\}$
$P([a, b], n) := \{[x_0, x_1], [x_1, x_2]..., [x_{n-1}, x_n] : a = x_0 \leq x_1 \leq ... \leq x_{n-1} \leq x_n = b\}$

Définition par compréhension (P' : Recouvrement | d'intervalles avec chevauchements)
$P' : ([a, b] : \text{Intervalle}, n : \mathbf{N}) \rightarrow \{[x_0, y_1], [x_1, y_2]..., [x_{n-1}, y_n]\}$
$P'([a, b], n) := \{[x_0, y_1], [x_1, y_2]..., [x_{n-1}, y_n] : a = x_0, a \leq x_1 \leq b, ..., a \leq x_{n-1} \leq b, a \leq y_1 \leq b, ..., a \leq y_{n-1} \leq b, y_n = b\}$

Ainsi, en remplaçant dans la nouvelle notion les y_i par x_i pour tout i, nous obtenons la notion initiale. On diminue alors le nombre de variables en fixant la valeur de certaines.

En somme, nous proposons la définition suivante :

Définition finale (Suppression de conditions)
La nouvelle notion est obtenue en supprimant certaines conditions qui avaient été imposées aux notions du contexte ou à la partie interne de la notion initiale.

1.1.6 La combinaison de relations fixes-variables

Nous avons proposé quatre sortes de relations fixes-variables, dont les trois premières peuvent être résumées dans le tableau suivant :

Tableau 4.1 : Les sortes de relations fixes-variables

Sortes de relations	Le fixe	Le variable	Remarque
Constant-variable	$a_1 : T \mid S$ $a_1 : T \mid S$ $x_1 : T \mid S$	$a_1 : T \mid S, ..., a_n : T \mid S$ $a_1 : T \mid S, ..., a_n : T \mid S$ $x_1 : T \mid S, ..., x_n : T \mid S$	Le nombre d'éléments qui est constant devient variable.
Instance-paramètre	$a : T \mid S$	$a : T \mid S$ $a : T \mid S'$	L'instance a est remplacée par un paramètre.
Instance-notion	$N : T \mid S$	$N' : T \mid S'$	L'instance N est remplacée par une notion.

Les deux relations les plus importantes sont la relation instance-paramètre et la relation instance-notion. Dans le premier cas, on introduit un paramètre (la notion N : T | S est réécrit N'(a) : T | S' puis devient N'(*a*) : T | S'). Dans le second cas, on remplace au moins une notion du contexte par une nouvelle (la notion $N_1 : T_1 \mid S_1$ du contexte de N devient $N_1' : T_1 \mid S'_1$).

Ces deux relations peuvent être complexifiées en faisant varier le nombre de paramètres introduits ou de notions remplacées. Dans ces cas, la relation constant-variable est combinée à la relation instance-paramètre ou instance-notion.

De plus, le changement de notions proposé par la relation instance-notion peut être un changement par introduction de paramètres ou par suppression de conditions. En fait, la notion $N_1 : T_1 \mid S_1$ du contexte de N qui devient $N_1' : T_1 \mid S'_1$ peut dépendre d'un paramètre et ainsi $N_1' = N_1(a_1)$. Par exemple, le passage de l'intégrale de Cauchy pour les fonctions continues par morceaux (I_{C2}) à l'intégrale de Cauchy pour les fonctions discontinues dont l'ensemble des points de discontinuité forment un ensemble de type 1 (I_{C3}) illustre cette combinaison de relations.

Ajoutons, en terminant, que ces relations s'appliquent à des parties de notions et non aux notions entières : l'introduction de paramètre ajoute des notions au contexte de la notion initiale; la relation instance-notion remplace une notion du contexte de la notion initiale par une nouvelle notion; la suppression de conditions s'applique à la formule de la notion initiale. Ainsi, les relations fixes-variables n'impliquent pas de relation d'instanciation entre les notions en jeu.

1.2 Les sortes de nouvelles interprétations

Nous utiliserons les sortes de relations fixes-variables pour développer trois sortes de nouvelles interprétations. Pour ce faire, nous identifierons où se trouve la relation fixe-variable et de quelle sorte il s'agit. De plus, nous montrerons qu'il y a une égalité entre les formules lorsqu'on restreint les deux notions au contexte initial.

Rappelons qu'une nouvelle notion est une nouvelle interprétation d'une notion initiale, si les deux notions se définissent de la même façon, c'est-à-dire que la compréhension de la nouvelle notion est en relation fixe-variable avec la compréhension de la notion initiale.

1.2.1 Les nouvelles interprétations par ajout de paramètres

La première sorte de nouvelles interprétations est caractérisée par l'introduction d'au moins un paramètre dans la compréhension de la nouvelle notion.

Par exemple, une somme de Cauchy peut être calculée en utilisant la borne de gauche (S_{C1} : Somme de Cauchy | I) ou en utilisant n'importe quelle borne (S_{C2} : Somme de Cauchy | II). Ainsi, un paramètre ($\boldsymbol{\theta}$: Liste) est introduit pour illustrer le passage de la borne de gauche à n'importe quelle borne.

De façon plus précise, nous avons la définition par compréhension suivante :

S_{C1} : (Fonction | [*a*, *b*] → **R** | | continue, Intervalle, Partition) → **R**

$$S_{C1}(f, [a, b], P([a, b], n)) := \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(x_{i-1}).$$

Une instance de la notion de Liste (**0** : Liste) est ajoutée au contexte et mise en évidence dans la formule mathématique comme suit :

S_{C1} : (Fonction | [*a*, *b*] → **R** | | continue, Intervalle, Partition, **0** : Liste) → **R**

$$S_{C1}(f, [a, b], P([a, b], n), \mathbf{0}) := \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(x_{i-1} + 0 \cdot (x_i - x_{i-1}))$$

Ensuite, l'instance est changée en paramètre pour obtenir la définition par compréhension de la nouvelle notion :

S_{C2} : (Fonction | [*a*, *b*] → **R** | | continue, Intervalle, Partition, $\boldsymbol{\theta}$: Liste) → **R**.

$$S_{C2}(f, [a, b], P([a, b], n), \boldsymbol{\theta}) := \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(x_{i-1} + \theta_{i-1}(x_i - x_{i-1}))$$

Nous obtenons donc qu'un paramètre a été introduit dans la compréhension de la nouvelle notion pour permettre de faire varier le choix de la borne. De plus, en fixant correctement le paramètre, nous obtenons le même contexte et une égalité entre les formules mathématiques :

Théorème (Nouvelle interprétation par ajout)

($\forall f$: Fonction | [*a*, *b*] → **R** | | continue)($\forall a$: Réel)($\forall b$: Réel)($\forall n$: Naturel)

($\exists \mathbf{0} = \{0, ..., 0\} : \theta$)

$S_{C2}(f, a, b, P(a, b, n), \mathbf{0}) = S_{C1}(f, a, b, P(a, b, n))$

Nous avons donc un exemple dans lequel nous avons ajouté un paramètre à une instance d'une notion-calcul. Ainsi, pour *généraliser* cet exemple, on applique la relation constant-variable au nombre de paramètres et on remplace l'instance par une notion-calcul ou une propriété-mathématique[1] en appliquant de la relation instance-notion. Nous obtenons alors la définition finale suivante :

Définition finale (Les nouvelles interprétations par ajout de paramètres)
Soit N : $(T_1|S_1, ..., T_n|S_n) \to T_k|S_k$, une notion-calcul[2]. Alors, N' est une nouvelle interprétation de N par ajout de paramètres si

a) m paramètres ont été ajoutés au contexte de la notion initiale :
$N' : (T_1|S_1, ..., T_n|S_n, a_1 : T_{n+1}|S_{n+1}, ..., a_m : T_{n+m}|S_{n+m}) \to T_k|S_k$.

b) Le théorème suivant peut être démontré :

$$(\forall x_1 : T_1|S_1)... (\forall x_n : T_n|S_n)$$
$$(\exists a_1 : T_{n+1}|S_{n+1})...(\exists a_m : T_{n+m}|S_{n+m})$$
$$N'(x_1, ..., x_n, a_1, ..., a_m) = N(x_1, ..., x_n)$$

1.2.2 Les nouvelles interprétations par transfert

Une nouvelle interprétation par transfert est un processus qui utilise une technique pour accommoder la notion initiale au nouveau contexte. En fait, cette technique permet d'utiliser validement la notion initiale dans le nouveau contexte et ainsi de transférer de la notion initiale dans la partie interne de la nouvelle notion.

Pour ce faire, la relation instance-paramètre est appliquée aux notions du contexte initial. En effet, on modifie les notions du contexte initial pour être en mesure de retrouver, en fixant certains paramètres du nouveau contexte, le contexte initial et, dans ce contexte initial, d'appliquer la notion initiale.

Prenons l'exemple du passage de la notion I_{C1} : Intégrale de Cauchy|pour les fonctions continues à la notion de I_{C2} : Intégrale de Cauchy|pour les fonctions continues par morceaux. Dans ce cas, pour intégrer une fonction continue par morceaux, on

---

[1] Dans ce cas, les notions-calculs et les propriétés-mathématiques se comportent de la même façon.

[2] Le cas d'une propriété-mathématique N : $(T_1|S_1, ..., T_n|S_n)$ se définit de la même façon. On change alors le contexte de la définition.

tronque d'abord l'intervalle d'intégration autour des points de discontinuité, on intègre ensuite la fonction sur ces intervalles, car la fonction est continue sur ces intervalles, et puis on passe à la limite.

De façon plus détaillée, nous avons que les deux notions du contexte initial ont été chacune remplacée, en utilisant une relation instance-paramètre, par une notion. En effet, pour faire apparaître les dépendances aux paramètres, nous réécrivons la compréhension de la notion initiale comme suit :

$$\mathrm{I}_{\mathrm{C1}} : (\text{Fonction} \,|\, [a, b] \to \mathbf{R} \,|\,|\, \text{continue, Intervalle}) \to \mathbf{R}$$
$$\mathrm{I}_{\mathrm{C1}}(f, [a, b]) = \lim_{n \to \infty} \mathrm{S}_{\mathrm{C1}}(f, [a, b], \mathrm{P}(a, b, n)),$$

est réécrit :

$$\mathrm{I}_{\mathrm{C1}} : (\text{Fonction} \,|\, [a, b] \to \mathbf{R} \,|\,|\, \text{continue ayant 0 point de discontinuité,}$$
$$\text{Intervalle} \,|\, \text{ayant } (0 + 1) \text{ morceaux}) \to \mathbf{R}$$
$$\mathrm{I}_{\mathrm{C1}}(f, [a, \mathrm{c}_0 = (a + b)/2, b]) := \lim_{\varepsilon \to 0} \mathrm{I}_{\mathrm{C1}}(f, a, \mathrm{c}_0 - \varepsilon) + \lim_{\varepsilon \to 0} \mathrm{I}_{\mathrm{C1}}(f, \mathrm{c}_0 + \varepsilon, b).$$

Ensuite, le paramètre c_1 : Point de discontinuité est introduit :

$$\mathrm{I}_{\mathrm{C2}} : (\text{Fonction} \,|\, [a, b] \to \mathbf{R} \,|\,|\, \text{continue ayant 1 point de discontinuité,}$$
$$\text{Intervalle} \,|\, \text{ayant } (1 + 1) \text{ morceaux}) \to \mathbf{R}$$
$$\mathrm{I}_{\mathrm{C2}}(f, [a, c_1, b]) := \lim_{\varepsilon \to 0} \mathrm{I}_{\mathrm{C1}}(f, a, c_1 - \varepsilon) + \lim_{\varepsilon \to 0} \mathrm{I}_{\mathrm{C1}}(f, c_1 + \varepsilon, b).$$

Puis, on fait varier leur nombre :

$$\mathrm{I}_{\mathrm{C2}} : (\text{Fonction} \,|\, [a, b] \to \mathbf{R} \,|\,|\, \text{continue ayant } n \text{ points de discontinuité,}$$
$$\text{Intervalle} \,|\, \text{ayant } (n + 1) \text{ morceaux}) \to \mathbf{R}$$
$$\mathrm{I}_{\mathrm{C2}}(f, [a, c_1, \ldots, c_n, b]) := \lim_{\varepsilon \to 0} \mathrm{I}_{\mathrm{C1}}(f, a, c_1 - \varepsilon) + \lim_{\varepsilon \to 0} \mathrm{I}_{\mathrm{C1}}(f, c_1 + \varepsilon, c_2 - \varepsilon) + \ldots$$
$$+ \lim_{\varepsilon \to 0} \mathrm{I}_{\mathrm{C1}}(f, c_{n-1} + \varepsilon, c_n - \varepsilon) + \lim_{\varepsilon \to 0} \mathrm{I}_{\mathrm{C1}}(f, c_n + \varepsilon, b).$$

Notons qu'une fois que le sujet a compris comment accommoder la notion d'intégrale de Cauchy à un point de discontinuité, il est facile de passer à *n* points de discontinuité, car le sujet applique *n* fois l'argument initial[1].

Nous avons donc réussi à établir les dépendances aux paramètres dans les notions du contexte initial et à mettre en évidence les paramètres dans les formules.

De plus, en forçant la valeur des paramètres, nous obtenons le même contexte et une égalité entre les formules mathématiques :

Théorème (Nouvelle interprétation par transfert de la notion initiale)
$(\forall f : \text{Fonction} \mid [a, b] \rightarrow \mathbf{R} \mid \mid \text{continue})(\forall a : \text{Réel})(\forall b : \text{Réel})$
$(\exists c_0 = (a + b)/2)\ I_{C2}(f, [a, (a + b)/2, b]) = I_{C1}(f, [a, b])$

Nous avons donc un exemple dans lequel des paramètres ont été ajoutés, non pas au contexte de la notion initiale, mais aux notions du contexte. Ainsi, pour *généraliser* cet exemple, nous remplaçons des notions I_{C1} et I_{C2} par des notions-calculs (ou des propriétés-mathématiques). Nous obtenons alors que le contexte initial :

$N : (N_1 : T_1 \mid S_1, N_2 : T_2 \mid S_2) \rightarrow T_k \mid S_k,$

est réécrit pour mettre en évidence les individus :

$N : (N_1(a_1) : T_1 \mid S'_1, N_2(a_2) : T_2 \mid S'_2) \rightarrow T_k \mid S_k.$

Ensuite, les individus sont remplacés par les paramètres pour former le contexte de la nouvelle notion :

$N' : (N_1(a_1) : T_1 \mid S'_1, N_2(a_2) : T_2 \mid S'_2) \rightarrow T_k \mid S_k.$

[1] On obtient la même chose pour I_{C3} : on fait l'argument avec un point limite et ensuite on fait varier le nombre de points limites. Cependant, le passage du type 1 au type *n* est un peu plus complexe, car il faut expliquer comme on passe de type 1 à type 2 à type 3 etc.

Notons que nous pouvons aussi faire varier le nombre de notions du contexte et le nombre de paramètres par notion. Nous avons décidé, pour des fins de simplicité, de présenter la définition pour le cas où il n'y a qu'un seul paramètre par notion. Nous proposons donc la définition finale suivante :

Définition (Les nouvelles interprétations par transfert)

Soit $N : (T_1 | S_1, ..., T_n | S_n, T_{n+1} | S_{n+1}, ..., T_{n+m} | S_{n+m}) \rightarrow T_k | S_k$, une notion-calcul[1]. Alors, N' est une ***nouvelle interprétation*** de N ***par transfert*** de la notion initiale dans la formule mathématique de la nouvelle notion si

a) m instances $(a_1 : T'_1 | R_1 ... a_m : T'_m | R_m)$ ont été ajoutées à m notions du contexte initial $(N_{n+1} : T_{n+1} | S_{n+1}, ..., N_{n+1} : T_{n+m} | S_{n+m})$ du contexte initial. Pour ce faire, le contexte initial est réécrit comme suit :

$N : (T_1 | S_1, ..., T_n | S_n, N_{n+1} : T_{n+1} | S_{n+1}, ..., N_{n+m} : T_{n+m} | S_{n+m}) \rightarrow T_k | S_k$

devient

$N : (T_1 | S_1, ..., T_n | S_n, N_{n+1}(a_1) : T_{n+1} | S'_{n+1}, ..., N_{n+m}(a_m) : T_{n+m} | S'_{n+m}) \rightarrow T_k | S_k.$

Ensuite, les instances sont remplacées par les paramètres pour obtenir le nouveau contexte :

$N' : (T_1 | S_1, ..., T_n | S_n, N_{n+1}(a_1) : T_{n+1} | S'_{n+1}, ..., N_{n+m}(a_m) : T_{n+m} | S'_{n+m}) \rightarrow T_k | S_k.$

b) Le théorème suivant peut être démontré :

$$(\forall x_1 : T_1 | S_1) ... (\forall x_n : T_n | S_n)$$
$$(\exists a_1 : T'_1 | R_1) ... (\exists a_m : T'_m | R_m)$$
$$N'(x_1, ..., x_n, N_{n+1}(a_1), ..., N_{n+m}(a_m)) = N(x_1, ..., x_n, N_{n+1}(a_1), ..., N_{n+m}(a_m))$$

1.2.3 Les nouvelles interprétations par remplacement

La dernière sorte de nouvelles interprétations est caractérisée par le changement du contexte d'utilisation de la notion initiale. En fait, les notions du contexte initial sont remplacées par de nouvelles, tel que le permet l'utilisation de la relation instance-notion, et ainsi la partie interne est interprétée dans ce nouveau contexte.

---

[1] Le cas d'une propriété-mathématique $N : (T_1 | S_1, ..., T_n | S_n)$ se définit de la même façon. On change alors le contexte de la définition.

Le passage des sommes de Riemann aux sommes de Jordan illustre cette sorte de nouvelle interprétation. En effet, Jordan interprète les sommes de Riemann dans le contexte des ensembles J-étendus. Pour ce faire, il définit la fonction non plus sur un intervalle mais sur un ensemble J-étendu borné. Il remplace alors l'intervalle par un ensemble J-étendu borné et la partition par un recouvrement d'ensembles J-étendus. Ainsi, le contexte des sommes de Riemann :

$\underline{\mathrm{S}}_{\mathrm{RI}}$, $\overline{\mathrm{S}}_{\mathrm{RI}}$: (Fonction | $[a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ | | bornée, Intervalle, Partition) $\rightarrow \mathbf{R}$,

devient

$\underline{\mathrm{S}}_{\mathrm{J}}$, $\overline{\mathrm{S}}_{\mathrm{J}}$: (Fonction | $E \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ | | bornée, Ensemble J-étendu de $\mathbf{R}^n$ borné, Recouvrement d'ensembles J-étendus) $\rightarrow \mathbf{R}$.

Par conséquent, en choisissant correctement les instances des nouvelles notions du contexte, nous trouvons une égalité dans le contexte initial :

Théorème (Nouvelle interprétation par remplacement)

$(\forall f : \text{Fonction} \mid [a, b] \rightarrow \mathbf{R} \mid \mid \text{bornée})(\forall a : \text{Réel})(\forall b : \text{Réel})(\forall n : \text{Naturel})$

$(\exists E = [a, b])(\exists e_1 = [x_0 = a, x_1]) \ldots (\exists e_n = [x_{n-1}, x_n = b])$

$\underline{\mathrm{S}}_{\mathrm{J}}(f, [a, b], \{[x_0, x_1], \ldots, [x_{n-1}, x_n]\}) = \underline{\mathrm{S}}_{\mathrm{RI}}(f, [a, b], \{[x_0, x_1], \ldots, [x_{n-1}, x_n]\})$

$\overline{\mathrm{S}}_{\mathrm{J}}(f, [a, b], \{[x_0, x_1], \ldots, [x_{n-1}, x_n]\}) = \overline{\mathrm{S}}_{\mathrm{RI}}(f, [a, b], \{[x_0, x_1], \ldots, [x_{n-1}, x_n]\})$

Cette dernière sorte se distingue donc d'une nouvelle interprétation par ajout, car les deux notions ont le même nombre de notions dans leur contexte. Elle se distingue aussi d'une nouvelle interprétation par transfert puisque la relation instance-notion est utilisée au lieu de la relation instance-paramètre. La recherche de paramètres a donc laissé sa place à la recherche de bonnes instances.

De façon plus *générale*, ce processus se définit comme suit :

Définition (Les nouvelles interprétations par remplacement)

Soit N : $(T_1|S_1, ..., T_n|S_n, T_{n+1}|S_{n+1}, ..., T_{n+m}|S_{n+m}) \rightarrow T_k|S_k$, une notion-calcul[1]. Alors, N' est une nouvelle interprétation de N par remplacement de notions du contexte de la notion initiale si

a) m instances de notions $(N_1 : T_{n+1}|S'_{n+1}, ..., N_m : T_{n+m}|S'_{n+m})$ ont été remplacées par m notions $(\mathcal{N}_1 : T_{n+1}|S'_{n+1}, ..., \mathcal{N}_m : T_{n+m}|S'_{n+m})$. Ainsi, le contexte initial :
$N : (T_1|S_1, ..., T_n|S_n, T_{n+1}|S_{n+1}, ..., T_{n+m}|S_{n+m}) \rightarrow T_k|S_k$ se réécrit
$N' : (T_1|S_1, ..., T_n|S_n, N_1 : T_{n+1}|S'_{n+1}, ..., N_m : T_{n+m}|S'_{n+m}) \rightarrow T_k|S_k$.
Ensuite, les instances sont remplacées par les notions :
$N' : (T_1|S_1, ..., T_n|S_n, \mathcal{N}'_1 : T_{n+1}|S'_{n+1}, ..., \mathcal{N}'_m : T_{n+m}|S'_{n+m}) \rightarrow T_k|S_k$.

b) Le théorème suivant peut être démontré :

$$(\forall x_1 : T_1|S_1)... (\forall x_n : T_n|S_n)$$
$$(\exists N_1 : T_{n+1}|S'_{n+1})...(\exists N_m : T_{n+m}|S'_{n+m})$$
$$N'(x_1, ..., x_n, N_1, ..., N_m) = N(x_1, ..., x_n, N_1, ..., N_m)$$

1.2.4 La place des relations fixes-variables dans les nouvelles interprétations

Nous avons donc développé trois sortes de nouvelles interprétations. Pour chacune de ces sortes, nous avons utilisé une relation fixe-variable. En fait, nous avons deux sortes de relations fixe-variables importantes : l'introduction d'un paramètre et le remplacement d'une instance par une notion. Nous avons aussi deux possibilités d'application de ces relations : soit à la notion initiale, soit à au moins une des notions de son contexte. Nous obtenons ainsi quatre possibilités.

En rafale : l'introduction d'au moins un paramètre à la notion initiale est appelée une nouvelle interprétation par ajout, l'introduction d'au moins un paramètre à au moins une notion du contexte de la notion initiale est appelé une nouvelle interprétation par transfert, le remplacement d'au moins une instance d'au moins une notion du contexte initial est appelé une nouvelle notion par remplacement.

---

[1] Le cas d'une propriété-mathématique $N : (T_1|S_1, ..., T_n|S_n)$ se définit de la même façon. On change alors le contexte de la définition.

Par contre, la relation instance-notion ne peut pas être appliquée directement à la notion initiale, car ceci entraînerait une relation d'instanciation entre les notions en jeu et donc un changement dans la façon de définir la notion initiale.

Le tableau suivant résume nos résultats :

Tableau 4.2 : La place des relations fixes-variables

Sortes de nouvelles interprétations	Relation instance-paramètre	Relation instance-notion
Nouvelle interprétation par ajout	Notion initiale	---
Nouvelle interprétation par transfert	Notions du contexte initial	---
Nouvelle interprétation par remplacement	---	Notions du contexte initial
Non applicable (Relation d'instanciation)	---	Notion initiale

1.3 Le processus de généralisation conservative

Le processus de généralisation logique est caractérisé par une inférence logique qui produit une nouvelle formule dans laquelle une variable de la formule initiale est bornée par un quantificateur universel. Nous avons ainsi que ce processus s'applique à des formules logiques et non à des notions mathématiques.

Nous proposons d'utiliser ce processus pour développer un processus qui s'applique aux notions mathématiques et que nous nommerons le processus de généralisation conservative. En fait, la clef de l'argument est la présence d'une relation fixe-variable entre les notions et, comme cette relation conserve la même compréhension de la notion initiale, ce processus produira une généralisation conservative d'une notion initiale.

Nous présenterons donc deux thèses. La première montrera comment le processus de généralisation logique peut être utilisé par chacune des sortes de nouvelles interprétations pour caractériser le passage de la notion initiale à la nouvelle notion; la seconde définira le processus de généralisation conservative comme une nouvelle interprétation valide d'une notion initiale.

1.3.1 L'utilisation de la généralisation logique

Nous montrerons la thèse suivante :

Thèse 1

Les nouvelles interprétations permettent l'utilisation de la généralisation logique pour caractériser le passage de la notion initiale à la nouvelle notion.

Argument

Pour chacune des sortes de nouvelles interprétations, nous avons montré que les formules mathématiques étaient égales dans le contexte initial, (voir les théorèmes de nouvelles interprétations). Or, cette égalité nous permet de lier, dans le contexte initial, la formule mathématique initiale à la nouvelle formule.
Ensuite, comme la nouvelle notion est en relation fixe-variable avec la notion initiale, nous obtenons que la seule différence entre leurs formules est que du variable a été introduit dans la nouvelle formule.
Par conséquent, nous pouvons appliquer la généralisation logique à la nouvelle formule en bornant ce variable par un quantificateur universel[1].
Détaillons cet argument par sortes. Nous avons alors les inférences suivantes :
a) Les nouvelles interprétations par ajout de paramètres :

$$\mathrm{N}(x_1, ..., x_n) = \mathrm{N'}(x_1, ..., x_n, \mathrm{a}_1, ..., \mathrm{a}_m)$$
$$|\!- (\forall y_1 : \mathrm{T}_{n+1} \,|\, \mathrm{S}_{n+1})...(\forall y_m : \mathrm{T}_{n+m} \,|\, \mathrm{S}_{n+m})\ \mathrm{N'}(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m)$$

b) Les nouvelles interprétations par transfert :

$$\mathrm{N}(x_1, ..., x_n, \mathrm{N}_{n+1}(\mathrm{a}_1), ..., \mathrm{N}_{n+m}(\mathrm{a}_m)) = \mathrm{N'}(x_1, ..., x_n, \mathrm{N}_{n+1}(\mathrm{a}_1), ..., \mathrm{N}_{n+m}(\mathrm{a}_m))$$
$$|\!- (\forall y_1 : \mathrm{T}_{n+1} \,|\, \mathrm{R'}_{n+1})...(\forall y_m : \mathrm{T}_{n+m} \,|\, \mathrm{R'}_{n+m})$$
$$\mathrm{N'}(x_1, ..., x_n, \mathrm{N}_{n+1}(y_1), ..., \mathrm{N}_{n+m}(y_m))$$

---

[1] Nous forçons alors la notion de quantificateur universel, car nous avons affirmé qu'un paramètre n'est pas une variable mais du variable. Ainsi, nous écrivons $(\forall y_1 : \mathrm{T}_1 \,|\, \mathrm{S}_1)$ avec y un paramètre pour signifier que nous considérons n'importe quelle instance.

c) Les nouvelles interprétations par remplacement :

$$\mathrm{N}(x_1, \ldots, x_n, \mathrm{N}_1, \ldots, \mathrm{N}_m) = \mathrm{N}'(x_1, \ldots, x_n, \mathrm{N}_1', \ldots, \mathrm{N}_m')$$
$$\vdash (\forall N_1': \mathrm{T}_{n+1} \,|\, \mathrm{S}'_{n+1}) \ldots (\forall N_m': \mathrm{T}_{n+m} \,|\, \mathrm{S}'_{n+m})$$
$$\mathrm{N}'(x_1, \ldots, x_n, N_1, \ldots, N_m)$$

Nous avons ainsi montré que les trois sortes de nouvelles interprétations nous permettent de caractériser le passage de la formule initiale à la nouvelle formule par une généralisation logique de la formule initiale. Nous en inférons donc une caractéristique du passage de la notion initiale à la nouvelle notion.

1.3.2 Le processus de généralisation conservative

Nous montrerons la thèse suivante :

Thèse 2 (La généralisation conservative)

Soit N : T|S, une notion mathématique. Alors N' : T|S' est une généralisation conservative de N si N' est une notion mathématique valide et N' est une nouvelle interprétation de N.

Argument 1

Comme N' est une nouvelle interprétation de N, nous pouvons appliquer la thèse 1 et ainsi caractériser le passage de N à N' par le processus de généralisation logique. Or, ce processus est un processus de généralisation et donc nous en concluons que N' est une généralisation de N.

Argument 2

Pour être plus précis, il faut montrer que l'extension de N' inclut strictement l'extension de N. Pour ce faire, nous appliquons d'abord la thèse 1, ce qui est possible, car N' est une nouvelle interprétation de N. Ainsi, nous obtenons que le processus de généralisation logique permet de caractériser le passage de N à N'. En particulier, ce processus conserve les instances de N, c'est-à-dire que toutes les instances de N sont conservées parmi les instances de N'.
Ensuite nous utilisons la validité de N' pour affirmer que l'inclusion d'extensions est stricte. En effet, affirmer que N' est valide signifie que N' est définie dans le nouveau contexte, en l'occurrence qu'il existe au moins une instance de N' qui n'est pas dans le contexte initial. En fait, il est sous-entendu qu'une notion ne peut pas être valide dans un contexte qui ne contient aucune de ses instances. Nous en concluons donc que l'inclusion des extensions est stricte.
Nous obtenons ainsi plus d'instances de la notion initiale et donc ce processus est un processus de généralisation.

2 La généralisation innovante

Nous avons vu que le processus des nouvelles interprétations nous a permis de développer un processus de généralisation. Or, ce processus de changement conserve la même façon de définir la notion initiale et cette conservation est assurée grâce à la présence d'une relation fixe-variable entre les notions. En fait, cette relation implique un lien entre les compréhensions des notions : il est possible de faire varier quelque chose dans la compréhension de la notion initiale pour obtenir la compréhension de la nouvelle notion.

Intéresserons-nous maintenant au cas où la façon de définir la nouvelle notion est innovante par rapport à la façon de définir la notion initiale, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de relation fixe-variable entre les compréhensions des notions[1]. Dans ce cas, nous dirons que la notion initiale a été réinterprétée et nous en proposons deux sortes : la réinterprétation par équivalence et la réinterprétation par changement.

Dans le premier cas, la notion initiale est remplacée par une notion logiquement équivalente. Dans le second cas, certaines propriétés de la notion initiale deviennent constitutives de la nouvelle notion.

De plus, nous verrons que la réinterprétation par équivalence implique un point de bifurcation à partir duquel il est possible d'avoir une généralisation dite innovante, ce qui se présentera différemment pour la réinterprétation par changement, car ce processus

[1] En fait, cette absence de relation fixe-variable ne signifie pas une absence totale de relation, mais que le lien entre les façons de définir les notions n'est pas caractérisé par cette relation.

s'apparentera plutôt à une abstraction. La généralisation innovante se présentera donc selon deux sortes.

Étudions donc successivement la réinterprétation par équivalence, la réinterprétation par changement et les deux sortes de généralisation innovante.

2.1 Les réinterprétations par équivalence

Le premier processus de réinterprétation introduit une nouvelle façon *équivalente* de définir la notion initiale. Par exemple, l'intégrale de Cauchy et l'intégrale de Riemann proposent deux façons différentes, mais équivalentes, de calculer l'intégrale d'une fonction continue : l'une calcule la limite des sommes de Cauchy, l'autre vérifie l'égalité entre les intégrales par défaut et par excès.

Notons qu'il est impossible d'introduire un paramètre ou de changer une instance d'une notion par une notion pour expliquer le passage de l'intégrale de Cauchy à l'intégrale de Riemann et ainsi ce changement n'est pas une nouvelle interprétation.

Pour être plus précis, le processus de réinterprétation par équivalence est caractérisé par la conservation des mêmes conditions d'utilisation, par la nécessité de démontrer l'équivalence logique entre les notions et par la possibilité d'un point de bifurcation à partir duquel aucun contexte n'est commun aux deux notions.

Étudions en détails chacune de ces caractéristiques.

2.1.1 La conservation des conditions d'utilisation

La notion initiale et la nouvelle notion conservent les mêmes conditions d'utilisation, c'est-à-dire qu'elles résolvent les mêmes types de problèmes ou qu'elles comblent les mêmes besoins. Par exemple, l'intégrale de Cauchy et l'intégrale de Riemann ont les mêmes conditions d'utilisation, soit de calculer l'aire sous la courbe.

Par contre, la façon de calculer cette aire change : l'aire est calculée à l'aide de sommes de Cauchy ou de sommes de Riemann. Ainsi, les notions en jeu comblent les mêmes besoins, mais la façon de les combler change.

Pour illustrer cette caractéristique, les deux notions seront formalisées par le même type qui, pour notre exemple, est l'Intégrale. Ce même type nous permet aussi de conserver un lien systématique entre les notions en jeu.

2.1.2 L'équivalence logique entre les notions

Nous avons utilisé, dans le cas des nouvelles interprétations, un théorème pour montrer l'égalité entre les formules dans le contexte initial. En fait, ce théorème est issu du bon choix de paramètres ou d'instances et non d'une démonstration mathématique proprement dite. Il constitue plutôt un argument.

Dans le cas des réinterprétations, il faut faire une démonstration mathématique pour affirmer que les deux notions sont logiquement équivalentes. Pour faire cette démonstration, on restreint le nouveau contexte au contexte initial et on démontre que les notions sont équivalentes.

Par exemple, les notions I_{C1} et I_{R1} sont équivalentes dans le contexte initial, soit celui des fonctions continues puisqu'il est possible de démontrer qu'une fonction continue est intégrable au sens de Cauchy si et seulement si elle est intégrable au sens de Riemann. Pour cet exemple, Darboux a démontré[1] ce théorème :

Théorème (Réinterprétation par équivalence)
$(\forall f : \text{Fonction} \mid [a, b] \rightarrow \mathbf{R} \mid \mid \text{continue})(\forall a : \text{Réel})(\forall b : \text{Réel})$
$(\exists r : \text{Réel})\ (I_{R1}(f, [a, b]) = r) \equiv (I_{C1}(f, [a, b]) = r)$

Notons que si les formules des notions peuvent être égales, les notions seront également équivalentes. Ainsi, il est sous-entendu dans cette démonstration que les deux formules ne sont pas égales.

De façon plus *générale*, il est possible de remplacer les instances de notions-calculs par des notions-calculs et d'obtenir les notions et le théorème suivants :

$N : (T_1 \mid S_1, \ldots, T_n \mid S_n) \rightarrow T_k \mid S_k$, et $N' : (T_1 \mid S'_1, \ldots, T_n \mid S'_n) \rightarrow T_k \mid S_k$;

Théorème (Réinterprétation par équivalence)
$(\forall x_1 : T_1 \mid S_1) \ldots (\forall x_n : T_n \mid S_n)$
$((\exists r : T_k \mid S_k)\ N(x_1, \ldots, x_n) = r) \equiv ((\exists r' : T_k \mid S_k)\ N'(x_1, \ldots, x_n) = r')$

Ajoutons que nous avons le même résultat pour les propriétés-mathématiques, c'est-à-dire qu'il est possible de trouver des propriétés qui ne sont pas égales mais équivalentes dans le contexte initial. Pensons au passage de la continuité dans un espace métrique à la continuité dans un espace topologique.

[1] Darboux a en fait montré que les conditions de validité de l'intégrale de Riemann s'appliquaient aussi à l'intégrale de Cauchy pour les fonctions continues.

2.1.3 La possibilité d'un point de bifurcation

Pour montrer que les deux notions sont équivalentes, nous avons affirmé qu'il fallait restreindre le nouveau contexte au contexte initial. Or, pour ce faire, il faut qu'il y ait un lien entre les contextes des notions en jeu.

Notons que, dans le cas d'une nouvelle interprétation, le contexte initial est nécessairement inclus dans le nouveau contexte, car les notions entretiennent une relation fixe-variable et ainsi en fixant les bons paramètres ou les bonnes instances, nous retrouvons le contexte initial.

La situation est fort différente pour les réinterprétations par équivalence. Certes les contextes peuvent être égaux, mais il peut y avoir aussi un *point de bifurcation*.

Pour illustrer ce point de bifurcation reprenons l'exemple de l'intégrale de Cauchy (I_{C1}) et l'intégrale de Riemann (I_{R1}). Dans ce cas, il est possible de restreindre le nouveau contexte au contexte initial en *démontrant* que toute fonction bornée sur un compact est continue. Or, il existe des nouvelles interprétations de I_{C1}, en l'occurrence I_{C2}, pour lesquelles il n'est pas possible de restreindre le contexte de I_{R1}. En effet, il existe des fonctions continues par morceaux qui ne sont pas bornées et des fonctions bornées qui ne sont pas continues par morceaux.

Nous obtenons donc que, dans le contexte de I_{C1}, les deux façons de définir l'intégrale « cohabite ». Ainsi, il est possible de prendre une direction conservative (I_{C2}) ou une direction innovante (I_{R1}), c'est-à-dire que, de la notion initiale, on peut produire une nouvelle interprétation ou une réinterprétation. Lorsque ce choix est possible, nous dirons qu'il y a un point de bifurcation entre les contextes. Nous retenons donc la définition suivante :

Définition finale (Les points de bifurcation)

Soit N : T|S une notion mathématique et soit N' : T|S', une réinterprétation. Alors, nous disons qu'il y a un *point de bifurcation* dans le choix du contexte de N' s'il existe une nouvelle interprétation N" : T|S" telle qu'il est impossible de restreindre le contexte de N' au contexte de N".

Notons que le cas d'une réinterprétation avec des contextes différents et sans point de bifurcation est possible. En fait, le passage de la continuité dans un espace métrique à la continuité dans un espace topologique en est un exemple.

2.1.4 Les réinterprétations par équivalence

Pour résumer nos résultats, nous proposons la définition suivante :

Définition finale (La réinterprétation par équivalence)

Soit N : $(T_1|S_1, ..., T_n|S_n) \rightarrow T_k|S_k$, une notion-calcul de type T|S[1]. Alors, N' : $(T_1|S'_1, ..., T_n|S'_n) \rightarrow T_k|S_k$ est une *réinterprétation par équivalence* de N si

a) Le type des notions est le même. La notion N' est donc de type T|S'.
b) Il est possible de restreindre le nouveau contexte au contexte initial et de démontrer le théorème suivant :

$$(\forall x_1 : T_1|S_1)...(\forall x_n : T_n|S_n)$$
$$((\exists r : T_k|S_k)\, N(x_1,..., x_n) = r) \equiv ((\exists r' : T_k|S_k)\, N'(x_1, ..., x_n) = r')$$

c) Les contextes peuvent être égaux ou différents et, dans ce dernier cas, il est possible qu'il y ait un point de bifurcation.

Notons que *r* et *r'* ne sont pas nécessairement égaux, comme c'est le cas, par exemple, lors passage des sommes de Cauchy aux sommes de Riemann.

---

[1] Le cas d'une propriété-mathématique N : $(T_1|S_1, ..., T_n|S_n)$ se définit de la même façon. On change alors le contexte de la définition.

2.2 La réinterprétation par changement

La seconde sorte de réinterprétations est caractérisée par le changement dans le statut de certaines propriétés. Dans ce cas, certaines propriétés de la notion initiale deviennent constitutives de la nouvelle notion. Pour ce faire, il faut que la nouvelle notion soit définie par une ou plusieurs propriétés, d'où les possibilités suivantes :

a) Le passage d'une propriété-mathématique à une propriété-mathématique,
b) Le passage d'une notion-calcul à une notion-propriétés, soit une notion-calcul définie par une liste de propriétés,
c) Le passage d'une notion-propriétés à une nouvelle notion-propriétés.

Le premier cas est aussi lié au processus de réinterprétation par équivalence. En effet, il est évident que si on remplace une propriété par une propriété équivalente, alors cette nouvelle propriété deviendra constitutive de la nouvelle notion, puisque la partie interne n'est constituée que d'une seule formule. Par conséquent, la nouvelle notion sera à la fois une réinterprétation par équivalence et par changement de la notion initiale.

Le dernier cas ne sera pas traité dans cette thèse. D'une part, nous n'avons trouvé aucun exemple dans notre étude de cas. D'autre part, les notions-propriétés semblent caractériser plutôt les notions algébriques, car elles sont souvent définies par une liste de propriétés, et nous avons plutôt étudié des notions d'analyse.

Nous développerons donc un nouveau processus de changement de notions dans lequel la notion initiale est une notion-calcul et la nouvelle notion, une notion-propriétés. De plus, ce processus sera caractérisé par le changement dans le statut de certaines propriétés et par la relation d'instanciation entre la notion initiale et la nouvelle notion. Introduisons donc ces caractéristiques.

2.2.1 Le changement dans le statut de propriétés

Mentionnons d'emblée que le passage d'une notion-calcul définie par un calcul à une définition par une liste de propriétés change complètement la façon de définir la notion. En fait, il est impossible de trouver une relation fixe-variable entre la compréhension des notions en jeu et donc nous ne sommes pas en présence d'une nouvelle interprétation, mais bien d'une réinterprétation.

Ensuite, pour définir une notion-calcul par propriétés, il faut choisir ces propriétés. Or, ce choix n'est pas arbitraire mais déterminé par les propriétés nécessaires pour résoudre des problèmes choisis. Par exemple, Lebesgue avait comme objectif de recherche de trouver une généralisation de l'intégrale de Riemann qui résolvait le problème de la recherche de primitives. Il montrait ainsi que six propriétés de l'intégrale étaient nécessaires pour atteindre cet objectif. Ces six propriétés ont donc changé de statut pour devenir constitutives de l'opérateur d'intégrale.

Ajoutons qu'il faut insister sur le fait qu'une notion-calcul satisfait beaucoup de propriétés. Cauchy, Darboux et Jordan ont présenté, dans leurs recherches, des propriétés de l'intégrale dont certaines étaient parmi les six constitutives. Cependant, ces résultats étaient connexes à leurs recherches, car ils ne les ont pas réutilisés, ce qui n'est pas le cas pour Lebesgue.

Nous en concluons donc que ce changement dans le statut de certaines propriétés nous permet d'introduire une nouvelle sorte de réinterprétation. Pour être plus précis, reprenons l'exemple de Lebesgue.

Pour cet exemple, les notions initiales sont considérées comme des opérateurs, soit des notions-calculs, dont la forme est la suivante :

O : (Fonction | $[a, b] \to \mathbf{R}$ | | bornée, Intervalle) $\to \mathbf{R}$

La nouvelle notion fixe alors six propriétés d'un tel opérateur comme suit :

I : ((Fonction | $[a, b] \to \mathbf{R}$ | | bornée, Intervalle) $\to \mathbf{R}$)
$I(O) := P_1(O) \wedge P_2(O) \wedge P_3(O) \wedge P_4(O) \wedge P_5(O) \wedge P_6(O)$

De façon plus *générale*, la notion initiale se définit par comme suit :

$N : (T_1 | S_1, ..., T_n | S_n) \to T_k | S_k$
$N(r_1, ..., r_n) := U(r_1, ..., r_n)$.

Quant à la nouvelle notion, elle a la forme d'une notion-propriétés soit :

$N' : ((T_1 | S_1, ..., T_n | S_n) \to T_k | S_k)$
$N'(N) := M_1(N) \wedge ... \wedge M_m(N)$

2.2.2 La relation d'instanciation entre les notions

Dans ce changement de notions, la nouvelle notion est maintenant définie par une liste de propriétés. Ainsi, toute notion-calcul qui satisfait ces propriétés est une instance de la nouvelle notion. Or, comme certaines de ces notions sont des notions initiales, nous obtenons que les notions initiales entretiennent une relation d'instanciation avec la nouvelle notion.

Nous proposons de formaliser cette caractéristique par l'introduction d'un nouveau type. Dans ce cas, le type de la notion initiale (N : T | S) devient alors une sorte d'un nouveau type (N' : T' | T).

Une des conséquences de la présence d'une relation d'instanciation est qu'elle empêche l'équivalence entre les notions initiales et la nouvelle notion. En effet, d'une part, cette relation implique qu'il n'y a pas de contexte commun entre la notion initiale et la nouvelle notion et donc qu'il est impossible de restreindre le nouveau contexte au contexte initial. D'autre part, la nouvelle notion ne propose aucune façon de calculer effectivement l'intégrale et ainsi on ne peut pas remplacer une façon de calculer l'intégrale par une nouvelle façon équivalente.

Cette nouvelle caractéristique nous permet donc d'affirmer que nous avons une nouvelle sorte de réinterprétation.

2.2.3 Les réinterprétations par changement

Nous avons donc étudié un processus de changement de notions dans lequel certaines propriétés de notions-calculs deviennent constitutives de la nouvelle notion. Cette nouvelle façon de définir la notion n'est ni caractérisée par une équivalence entre la notion initiale et la nouvelle notion, ni par une relation fixe-variable entre ces notions.

En fait, dans le cas du passage d'une notion-calcul à une notion-propriétés, le changement dans le statut de certaines propriétés implique une relation d'instanciation entre la notion initiale et la nouvelle notion et donc un nouveau type est introduit. Par contre, ce ne sera pas le cas pour les propriétés-mathématiques car, bien qu'il y ait un changement dans le statut, la relation d'instanciation ne sera jamais possible entre ces deux propriétés, c'est-à-dire qu'il est impossible qu'une propriété ne soit une instance d'une autre.

De plus, certaines notions peuvent perdre leur statut. Par exemple, tous les opérateurs sur les fonctions qui ne satisfont pas les 6 propriétés de la définition de Lebesgue ne peuvent pas être considérés comme une intégrale.

Cette perte de statut a des conséquences plus importantes que la présence d'un point de bifurcation lors d'une réinterprétation par équivalence. En effet, les nouvelles interprétations qui sont laissées de côté lors de la bifurcation conservent leur statut de notions mathématiques qui résolvent les bons problèmes. Or, la perte de statut implique que la notion n'est plus en mesure de résoudre les bons problèmes et donc que cette notion est un cul-de-sac.

Résumons ces caractéristiques en introduisant la définition suivante :

Définition finale (La réinterprétation par changement)
Soit N : $(T_1 | S_1, ..., T_n | S_n) \rightarrow T_k | S_k$, une notion-calcul de type T | S. Alors, N' est une réinterprétation par changement de statut de N si

a) N' est une notion-propriétés de type T' | T.
b) N' est définie par une liste de propriétés :
$$N' : ((T_1 | S_1, ..., T_n | S_n) \rightarrow T_k | S_k)$$
$$N'(N) := M_1(N) \wedge ... \wedge M_m(N)$$
c) Le choix de propriétés est justifié par la preuve que ces propriétés peuvent résoudre les problèmes que la notion *doit* résoudre.

2.3 *Le processus de généralisation innovante*

Nous avons introduit, dans la première section, un premier type de généralisations, que nous avons appelé la généralisation conservative. Ce processus s'applique aux nouvelles interprétations et il est automatique dans le sens où il suffit de montrer, pour obtenir une généralisation, que la nouvelle notion est une interprétation valide de la notion initiale.

Nous proposons maintenant de développer un deuxième type de généralisations : la généralisation innovante. Dans ce cas, la façon de définir la notion initiale change, donc la notion initiale est réinterprétée et, comme il y a deux sortes de réinterprétations, nous retrouverons deux sortes de généralisations innovantes.

D'une part, le processus de réinterprétation par équivalence nous assurera que les notions sont équivalentes dans le contexte initial et ainsi qu'il sera possible de montrer l'inclusion d'extensions.

D'autre part, la relation d'instanciation du processus de réinterprétation par changement nous empêchera de comparer les extensions des notions. Par contre, comme la notion initiale devient une instance ou un *cas particulier*, nous obtiendrons une forme de généralisation. Ce processus s'apparentera aussi à un processus d'abstraction, puisqu'il y aura une recherche de propriétés essentielles.

Passons donc en revue les deux sortes de généralisations innovantes.

2.3.1 Le cas des réinterprétations par équivalence

Nous proposons de montrer la thèse suivante :

Thèse 3 (La généralisation innovante (par équivalence))
Soit N : T|S, une notion mathématique. Alors N' : T|S' est une *généralisation innovante (par équivalence)* de N si N' est une réinterprétation par équivalence pour laquelle il y a une différence entre les contextes.

Argument

Il faut montrer que l'extension de N est strictement incluse dans l'extension de N'. Pour ce faire, la réinterprétation par équivalence implique que les notions ont autant d'instances dans le contexte initial. Il y a ainsi inclusion d'extensions. Ensuite, la différence entre les contextes implique qu'il est possible de montrer que le contexte initial est strictement inclus dans le nouveau contexte, d'où il y a au moins une instance de la nouvelle notion qui n'est pas dans le contexte initial. Nous obtenons donc une inclusion stricte d'extensions.

Ajoutons que, dans le cas d'un point de bifurcation, la nouvelle notion est une généralisation de la notion initiale suivant cette bifurcation. En effet, les nouvelles interprétations qui causent cette bifurcation n'empêchent pas la généralisation, car elles sont mises de côté par la bifurcation.

Par contre, l'égalité entre les contextes empêche la généralisation puisque, dans ce cas, il est impossible de montrer l'inclusion stricte d'extensions.

2.3.2 Le cas des réinterprétations par changement

Nous montrons les deux thèses suivantes :

Thèse 4 (La généralisation innovante (par reconstruction) pour les notions-calculs)
Soit N : T|S, une notion-calcul. Alors une notion-propriétés N' : T'|T est *généralisation innovante (par reconstruction)* de N si N' est une réinterprétation par changement de N. Ce processus se présente à la fois comme une abstraction et une généralisation.

Argument

L'introduction d'un nouveau type implique une vue d'ensemble portant sur la nature des notions, le changement dans le statut de certains propriétés implique une recherche de propriétés essentielles et une réorganisation du savoir mathématique. Nous obtenons donc que la réinterprétation par changement est un processus d'abstraction, car les caractéristiques citées sont des caractéristiques d'un processus d'abstraction. La notion est alors reconstruite.

De plus, comme ce processus implique une relation d'instanciation entre les notions en jeu, il est impossible de comparer les extensions et donc de généraliser selon cette définition par extension d'une généralisation. Cependant, la notion initiale devient une instance ou un cas particulier de la nouvelle notion et produit une autre forme de généralisation : une notion N' est une généralisation d'une notion N si N est un cas particulier de N'. Nous obtient ainsi une définition par compréhension de la notion de généralisation.

Thèse 5 (Le processus de généralisation innovante pour les propriétés-mathématiques)
Soit N : T|S, une propriété-mathématique. Alors une propriété-mathématique N' : T|S' est une *généralisation innovante* de N si N' est une réinterprétation par équivalence de N et si les contextes des notions sont différents.

Argument

Dans ce cas, il n'y a pas de relation d'instanciation entre les notions. Ainsi, la généralisation (par extension) est possible et, en fait, en appliquant la thèse 3, elle se produit. De plus, nous retrouvons un changement de statut de la nouvelle propriété : elle est trivialement constitutive de la nouvelle notion. Nous obtenons donc un cas dans lequel nous avons à la fois une généralisation et une abstraction.

3 Le résumé des thèses soutenues

En somme, nous avons montré qu'une nouvelle interprétation valide produit une généralisation conservative (Thèse 2), soit une généralisation qui se caractérise par une inclusion stricte d'extensions et par la conservation de la même façon de définir les notions par la présence d'une relation fixe-variable.

Ensuite, une réinterprétation par équivalence, pour laquelle il y a une différence entre les contextes, produit une généralisation innovante (par équivalence) (Thèse 3), soit une généralisation qui se caractérise par une inclusion stricte d'extensions et par l'absence d'une relation fixe-variable entre les compréhensions des notions.

Nous avons de plus montré que le processus de réinterprétation par changement d'une notion-calcul est une généralisation innovante (par reconstruction) qui s'apparente à un processus d'abstraction puisqu'il y a une recherche de propriétés essentielles. Dans ce cas, il n'est pas possible de comparer les extensions, donc d'affirmer qu'il y a une inclusion d'extensions, mais la généralisation se produit quand même : la notion initiale devient un cas particulier de la nouvelle notion.

Finalement, le processus de réinterprétation par équivalence d'une propriété-mathématique se présente à la fois comme une généralisation et une abstraction (Thèse 5), car ce processus produit une inclusion stricte d'extensions et est le produit d'une recherche de propriétés essentielles.

Conclusion

Les impacts sur les connaissances mathématiques des processus de généralisation et de changement

Nous avons réussi à développer deux processus de généralisation dont la distinction repose sur la compréhension des notions en jeu. Dans le premier cas, la compréhension de la notion initiale est conservée et la généralisation se caractérise par une inclusion stricte d'extensions : la notion A est une généralisation de la notion B si l'extension de B est strictement incluse dans l'extension de A.

Dans le second cas, la compréhension de la notion initiale change et il y a deux possibilités. D'une part, la définition de la nouvelle notion est équivalente à la définition de la notion initiale et la généralisation se présente aussi comme une inclusion stricte d'extensions. D'autre part, certaines propriétés connexes à la notion initiale deviennent constitutives de la nouvelle notion. Dans ce cas, le processus s'apparente à une abstraction et peut impliquer une relation d'instanciation entre les deux notions.

De plus, nous avons montré que ces processus nous permettaient de rendre compte des généralisations coextensives. En effet, le processus de généralisation innovante (par équivalence) que nous avons développé est une généralisation coextensive, car ce processus montre que les deux notions sont coextensives dans le contexte initial.

Nous proposons maintenant de répondre aux questions que nous avions soulevées lors de notre introduction et de discuter des impacts sur des connaissances mathématiques des processus de généralisation et des processus de changement.

1 Quelques réponses aux questions initiales

Nous nous étions demandés s'il y avait plusieurs types de généralisations, s'il y avait un lien entre une généralisation et une abstraction, si les relations fixes-variables jouaient un rôle dans ces processus et si la théorie que nous développerons était une théorie générale ou abstraite de la généralisation.

1.1 Les types de généralisations

Nous avons donc développé deux processus de généralisation qui sont issus de deux processus de changement de notions mathématiques. En fait, nous avons formalisé les notions mathématiques par une définition par compréhension et nous avons trouvé deux types de changements de notions : les nouvelles interprétations et les réinterprétations.

Dans le premier cas, la compréhension de la notion initiale est conservée grâce à une relation fixe-variable entre les compréhensions. En fait, il est toujours possible de retrouver la compréhension initiale en choisissant le bon paramètre ou la bonne instance dans la nouvelle compréhension. La notion initiale devient alors un cas particulier de la nouvelle notion.

Dans le deuxième cas, la compréhension de la notion initiale change et ce changement peut être fait en introduisant une façon équivalente de définir la notion ou en changeant le statut de certaines propriétés de la notion initiale. Il y a alors innovation.

Ces deux types de changements nous ont permis de développer deux types de généralisations. Les nouvelles interprétations valides d'une notion initiale produisent une généralisation conservative. Cette généralisation est automatique, car la présence de la relation fixe-variable assure que la nouvelle interprétation conserve toutes les instances de la notion initiale, d'où l'inclusion stricte d'extensions.

Dans le cas d'une réinterprétation, nous retrouvons deux sortes de généralisation innovante. D'une part, il faut montrer qu'il y a une inclusion stricte d'extensions lorsque la notion initiale est réinterprétée (par équivalence) par la nouvelle notion. Dans l'affirmatif, la généralisation est dite innovante (par équivalence). D'autre part, le réinterprétation (par changement) implique une généralisation puisque la notion initiale devient une instance ou un cas particulier de la nouvelle notion. Dans ce cas, la généralisation est appelée une généralisation innovante (par reconstruction).

1.2 Les généralisations et les abstractions

Nous avons montré que le processus de réinterprétation par changement dans le statut de certaines propriétés d'une notion-calcul se présentait à la fois comme un processus d'abstraction et de généralisation. En effet, ce processus satisfait les caractéristiques d'un processus d'abstraction : il procure une vue d'ensemble; il est le produit de la recherche de propriétés essentielles ou constitutives; il permet de réorganiser le savoir mathématique. La relation d'instanciation empêche la comparaison des extensions, car les extensions sont sur deux niveaux, mais elle implique quand même une forme de généralisation : le passage d'un cas particulier à la notion générale.

De plus, nous avons montré que le processus de réinterprétation par équivalence d'une propriété-mathématique était à la fois une généralisation et une abstraction. D'une part, ce processus implique une inclusion stricte d'extensions. D'autre part, il change le statut de certaines propriétés de la notion initiale en propriétés constitutives de la nouvelle notion et ainsi nous obtenons une abstraction.

1.3 Le rôle des relations fixes-variables

Nous avons développé quatre sortes de relations fixes-variables : la variation du nombre d'éléments considérés (constant-variable), l'introduction d'un paramètre (instance-paramètre), le remplacement d'une instance par une notion (instance-notion) et la suppression de conditions. Nous avons vu comment combiner ces relations pour introduire trois sortes de nouvelles interprétations d'une notion initiale : l'ajout de paramètres, le transfert de la notion initiale dans la partie interne de la nouvelle notion, le remplacement des notions du contexte par de nouvelles.

En fait, les deux premières sortes ajoutent de la complexité à la nouvelle notion, car il y a plus de variables à manipuler. La troisième sorte change la notion initiale de contextes, comme ce fut le cas lorsque Jordan a interprété l'intégrale de Riemann dans le contexte des fonctions à plusieurs variables.

Donc, les sortes de relations fixes-variables nous permettent d'introduire deux sortes de généralisation conservative : l'ajout de complexité et le changement de contextes.

De plus, les relations fixes-variables nous permettent de conserver les instances de la notion initiale et aussi de considérer la notion initiale comme un cas particulier de la nouvelle notion. D'une part, l'introduction du variable conserve toutes les instances de la notion initiale parmi les instances de la nouvelle notion. Ainsi, nous obtenons une inclusion stricte d'extensions et donc une généralisation (par extension).

D'autre part, il est possible de modifier la nouvelle notion pour obtenir exactement la définition de la notion initiale, il suffit alors de fixer le variable introduit par la relation fixe-variable. La notion initiale devient donc un cas particulier de la nouvelle notion et la nouvelle notion est une généralisation (par cas particulier) de la notion initiale.

1.4 La théorie générale/abstraite de généralisation

Il est difficile de répondre à cette question, puisque nous n'avons pas beaucoup étudié les processus d'abstraction. Par contre, nous pouvons affirmer qu'une généralisation implique la recherche de la plus grande extension d'une notion ou le passage d'un cas particulier au cas général. L'abstraction implique plutôt la recherche de propriétés essentielles.

2 Les impacts sur la connaissance mathématique

Concluons cette thèse, en discutant des impacts sur les connaissances mathématiques des processus de généralisation et des processus de changement.

2.1 Les processus de généralisation

Nous affirmons qu'il est facile de généraliser une notion ou un énoncé, car il suffit de prendre sa plus grande extension. Par contre, il est difficile de trouver le bon niveau de généralité, c'est-à-dire de faire une bonne généralisation.

Ainsi, nous proposons qu'une bonne compréhension des processus de généralisation nous permettrait de faire de bonnes généralisations et par conséquent aurait un impact positif sur le développement de connaissances mathématiques.

Nous proposons donc de revoir les deux types de généralisations que nous avons développés et d'identifier comment leur caractérisation pourrait nous aider à faire de bonnes généralisations.

2.1.1 La généralisation conservative

Le processus de généralisation conservative est un processus qui nous permet d'étendre l'extension d'une notion, tout en conservant la même façon de la définir. Ainsi, une bonne généralisation conservative serait une variation valide de la façon de définir la notion initiale.

Pour obtenir une variation valide, il faut faire une étude exhaustive des relations fixes-variables. Cette étude nous permettrait alors de trouver tout ce qu'on peut faire varier dans une notion pour conserver la compréhension de la notion initiale et la validité de celle-ci.

Les bonnes variations produisent donc de bonnes généralisations.

2.1.2 La généralisation innovante

La généralisation innovante est nettement plus difficile à faire puisqu'elle implique une innovation dans la façon de comprendre la notion initiale.

Cependant, lorsque nous réussissons, nous introduisons une nouvelle façon de résoudre les problèmes et donc nous enrichissons les connaissances mathématiques par cette nouveauté.

De plus, il est possible d'étudier les variantes de cette nouvelle façon de comprendre la notion initiale. On peut alors appliquer le processus de généralisation conservative.

2.2 Les processus de changement

Nous avons différencié les processus de changement par la présence ou par l'absence d'une relation fixe-variable entre les compréhensions des notions. De plus, en l'absence d'une telle relation, nous avons mentionné que le processus de réinterprétation par changement engendrait une réorganisation du savoir mathématique. Nous proposons ainsi d'étudier l'impact de ces relations et des réorganisations sur les connaissances mathématiques

2.2.1 Le rôle des relations fixes-variables

La connaissance des relations fixes-variables que peuvent entretenir une notion initiale avec une nouvelle notion nous permet d'anticiper les problèmes que nous pourrons résoudre à l'aide de cette notion, d'identifier facilement les exemples et les contre-exemples impliquant cette notion et de développer des notions de plus en plus complexes, comme ce fut le cas pour la notion d'intégrale de Cauchy introduite par Lipschitz.

De plus, les sortes de relations fixes-variables nous permettent de développer des techniques d'accommodation, d'identifier les paramètres que nous pouvons introduire et les contextes dans lesquels il est possible de projeter la notion. Ajoutons qu'en mettant en évidence tous les paramètres ou tous les contextes d'une notion, nous obtenons une vue d'ensemble de ce que nous pouvons faire avec cette notion.

2.2.2 La réorganisation du savoir mathématique

Le processus de réinterprétation par changement de statut de certains propriétés d'une notion-calcul est un processus qui réorganise le savoir mathématique. En effet, la relation d'instanciation permet au sujet d'avoir une vue d'ensemble des notions en jeu. Par exemple, Lebesgue, en introduisant sa définition de l'intégrale par propriétés, ne s'intéressait plus à la façon de calculer l'intégrale mais à sa nature. Il tenta de répondre à la question : « en quoi un opérateur est-il une intégrale? ». Ses aspirations lui permirent de monter d'un niveau afin d'obtenir cette vue d'ensemble.

De plus, le choix de propriétés constitutives implique un choix de problèmes qu'une notion doit résoudre. On impose donc des normes aux notions et ainsi certaines notions peuvent perdre leur statut de notions mathématiques puisqu'elles ne satisfont plus ces normes. En fait, ces normes ne sont pas choisies au hasard, mais elles prennent plutôt la forme d'une liste de problèmes que la notion doit résoudre. Or, pour ce faire, la notion doit satisfaire certaines propriétés. Avec ce choix de propriétés, on comprend alors mieux comment se résolvent certains problèmes : ce sont les propriétés constitutives de la nouvelle notion qui permettent de les résoudre.

Cependant, les réinterprétations par équivalence ne permettent pas de réorganiser le savoir mathématique, car ces réinterprétations remplacent une notion par une notion équivalente. Ces réinterprétations introduisent quand même une innovation en mathématiques.

3 Le résumé des types de généralisations

Nous concluons donc qu'une bonne caractérisation des processus de généralisation et des processus de changement de notions mathématiques nous a permis de mieux comprendre le développement des connaissances mathématiques.

Nous proposons en terminant un tableau qui résume les types de généralisations que nous avons développés.

Tableau 5.1 : Les types de généralisations

Types de généralisations	Sortes	Inclusion stricte d'extensions	Cas particulier
Conservatif	Ajout de complexité	Oui	Relation fixe-variable (constrant-variable et instance-paramètre)
	Changement de contextes	Oui	Relation fixe-variable (instance-notion)
Innovant	Par équivalence	Oui	Non
	Par reconstruction	Non	Relation d'instanciation

Bibliographie

Angelelli, Ignacio, 1984, « Frege and Abstraction, » *Philosophia-Naturalis* (2), p.453-471.

Arbib, Michael A., 1990, « A Piagetian Perspective on Mathematical Construction, » *Synthese* 84, p.43-58.

Aristote, *Métaphysique*, Paris : Vrin, 1991.

Bartle, 1995, *The elements of Integration and Lebesgue Measure*, New York : John Wiley.

Bell, John L, 2001, *Logical options : An introduction to classical and alternative logics*, Peterborough : Broadview Pr.

Beth, Evert W., Piaget, Jean, 1961, *Épistémologie mathématique et psychologie : Essai sur les relations entre la logique formelle et la pensée réelle*, Paris : PUF.

Borel, Émile, 1898, *Leçons sur la théorie des fonctions : principes de la théorie des ensembles en vue des applications à la théorie des fonctions*, 4[e] éd., Paris : Gauthier-Villars, 1950.

Boyer, Carl B., 1949, *The History of the Calculus and its Conceptual Development*, 2[e] éd, New York : Dover, 1959.

Cartwright, Nancy, 1989, « Capacities and Abstractions », in *Scientific Explanation*, éd. Kitcher et Salmon, Minnesota Studies in the Philosophy of Science, vol. XIII, Minneapolis : University of Minnesota Press, p. 349-355.

Cauchy, Augustin Louis, 1821, *Analyse algébrique : cours d'analyse de l'École royale polytechnique*, Sceaux : Editions J. Gabay, 1989.

Cauchy, Augustin Louis, 1823, « Résumé des Leçons sur le calcul infinitésimal » in *Œuvres complètes*, vol. 16, Paris : Gauthier-Villars, 1903.

Chalon-Blanc, Annie, 1997, *Introduction à Jean Piaget*, Paris : L'Harmattan.

Cleary, John J., 1985, « On the Terminology of 'abstraction' in Aristotle, » *Phronesis* XXX/1, p.13-45.

Constable, Robert L., 1999, *Typed Logic*, Ithaca, NY : Cornell University.

Dirichlet, P. G. Lejeune, 1829, « Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données, » *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 4, p. 157-169.

Daniell, P. J., 1917-18, « A General Form of the Integral, » *Annals of Mathematics*, (2) 19, p. 279-294.

Darboux, Gaston, 1875, « Mémoire sur la théorie des fonctions discontinues, » *Annales scientifiques de l'École normale supérieure* (2) 4, p. 57-112.

Darboux, Gaston, 1879, « Addition au mémoire sur la théorie des fonctions discontinues, » *Annales scientifiques de l'École normale supérieure* (2) 8, p. 195-202.

Fine, Kit, 1998, « Cantorian abstraction : a reconstruction and defense, » *Journal of Philosophy* 95 no 12, p. 599-634.

Fine, Kit, 2002, *The limits of abstraction*, Oxford : OUP.

Frege, Gottlob, 1889, *Les fondements de l'arithmétique : recherche logico-mathématique sur le concept de nombre*, Paris : Editions du Seuil, 1969.

Gries, David, Schneider, Fred B., 1993, *A Logical Approach to Discrete Mathematics*, New York : Springer-Verlag.

Gries, David, Schneider, Fred. B., 1995, « Equational propositinal Logic, » *Information Processing Letters*, 53, p. 145-152.

Hawkins, Thomas, 1975, *Lebesgue's theory of integration : its origin and development*, New York : Chelsea Publishing company.

Hawkins, Thomas, 1980, « The origins of modern theories of integration, » in *From the calculus to set Theory 1630-1910*, éd Grattan-Guinness, London : Duckworth. p. 149-219.

Hochkirchen, Thomas, 2003, « Theory of Measure and Integration form Riemann to Lebesgue, » in *A History of Analysis*, éd. Hans Niels Jahnke, Providence, RI : American Mathematical Society, p. 261-290.

Inhelder, Bärbel, Piaget, Jean, 1966, *La psychologie de l'enfant*, Paris : PUF, 2004.

Jordan, Camille, 1892, « Remarques sur les intégrales définies, » *Journal de mathématiques pures et appliquées*, (4) 8, p. 69-99.

Kennedy, Hubert C., 1973, *Selected works of Giuseppe Peano*, Toronto°: University of Toronto Press.

Kitcher, Philip, 1983, *The Nature of Mathematical Knowledge*, Oxford : Oxford University Press.

Lakatos, Imre, 1976, *Proofs and Refutations*, Cambridge : Cambridge University Press.

Lakatos, Imre, 1978a, *The methodology of Scientific Research Programmes*, Cambridge : Cambridge University Press.

Lakatos, Imre, 1978b, *Mathematics, Science and Epistemology*, Cambridge : Cambridge University Press.

Lebesgue, Henri, 1901, « Sur une généralisation de l'intégrale définie, » *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 132, p. 1025-1028.

Lebesgue, Henri, 1904, *Intégration des fonctions primitives*, 2e éd, Paris : Gauthier-Villars. 1928.

Lipschitz, Rudolf, 1864, «°Recherches sur le développement en séries trigonométrique des fonctions arbitraires d'une variable et principalement de celles qui, dans un intervalle fini, admettent une infinité de maxima et de minima, » *Acta Mathematica*, 1913 (36) p. 281-294.

Lowe, E. J., 1995, « The Metaphysics of Abstract Objects, » *The Journal of Philosophy*, XCII, no 10, p. 509-524.

Lützen, Jesper, 2003, « The Foundation of Analysis in the 19th Century, » in *A History of Analysis*, éd. Hans Niels Jahnke, Providence, RI : American Mathematical Society, p. 155-195.

Mac Lane, Saunders, 1986, *Mathematics, form and function*, New York : Springer.

Michel, Alain, 1992, *Constitution de la théorie moderne de l'intégration*, Paris : Vrin.

Page-Jones, Meilir, 1999, *Fundamentals of Object-Oriented Design in UML*, New York: Addison-Wesley Professional.

Piaget, Jean, 1967, *La psychologie de intelligence*, Paris : Armand Colin,1998.

Piaget, Jean, 1970, « Piaget's Theory, » *Manual of Child Psychology*, éd. Paul H. Mussen, New York : John Willey & Sons, p. 703-732.

Piaget, Jean, 1975, *L'équilibration des structures cognitives : Problème central du développement*, Paris : PUF.

Piaget, Jean, 1977, *Studies in Reflecting Abstraction*, éd. et tr. Robert L. Campbell, E. Sussex : Psychology Press, 2001.

Pier, Jean-Paul, 1996, *Histoire de l'intégration : vingt-cinq siècles de mathématiques*, Paris°: Masson.

Pitts, Andrew M., 1995, « Categorical Logic, » *Algebraic and Logical Structures*, éd. Abramsky, S., Gabbay, D. M., Maibaum, T. S. E., Handbook of Logic in Computer Science, Vol. 5, Ch. 2.

Pollard, Stephen, 1987, « What is Abstraction?, » *Noûs* 21, p. 233-240.

Pollard, Stephen, 1988, « Weyl on sets and abstraction, » *Philosophical Studies*, 53, p. 131-140.

Pólya, George, 1958, *Les mathématiques et le raisonnement « plausible »*, Paris : Gauthier-Villars.

Pólya, George, 1965, *Comment poser et résoudre un problème*, 2e éd. Sceaux : J. Gabay, 1989.

Pólya, George, 1967, *La découverte des mathématiques; les modèles, une méthode générale*, Paris : Dunod.

Riemann, Bernhard, 1854, « La possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique, » *Bulletin des sciences mathématiques et astronomique*, Tome V, 1873, p. 225-279.

Robison, Gerson B., 1969, *An Introduction to Mathematical Logic*, London : Prentice-Hall.

Rudin, Walter, 1966, *Real and Complex Analysis*, 3e éd, New York : McGraw-Hill, 1987.

Schlimm, Dirk, 2001, *Abstraction in Mathematics*, Thesis Prospectus (Draft), Pittsburgh : Carnegie Mellon University.

Weyl, Hermann, 1949, *Philosophy of mathematics and natural science*, Princeton : University Press.