

Université de Montréal

**Représentation et détection  
des images et des surfaces déformables**

par  
**Justine C. Barolet**

Département de mathématiques et de statistique  
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures et postdoctorales  
en vue de l'obtention du grade de Maître ès sciences (M.Sc.)  
en mathématiques

août, 2011

© Justine C. Barolet, 2011.



Université de Montréal  
Faculté des études supérieures et postdoctorales

Ce mémoire intitulé:

**Représentation et détection  
des images et des surfaces déformables**

présenté par:

**Justine C. Barolet**

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes:

<b>Jacques Bélair,</b>	président-rapporteur
<b>Michel Delfour,</b>	directeur de recherche
<b>André Giroux,</b>	membre du jury

Mémoire accepté le: 29 septembre 2011



## Résumé

La représentation d'une surface, son lissage et son utilisation pour l'identification, la comparaison, la classification, et l'étude des variations de volume, de courbure ou de topologie sont omniprésentes dans l'aire de la numérisation. Parmi les méthodes mathématiques, nous avons retenu les transformations difféomorphiques d'un *pattern de référence*.

Il y a un grand intérêt théorique et numérique à approcher un difféomorphisme arbitraire par des difféomorphismes engendrés par des champs de vitesse. Sur le plan théorique la question est : "est-ce que le sous-groupe de difféomorphismes engendrés par des champs de vitesses est dense dans le groupe plus large de Micheletti pour la métrique de Courant ?" Malgré quelques progrès réalisés ici, cette question demeure ouverte.

Les pistes empruntées ont alors convergé vers le sous-groupe de Azencott et de Trouvé et sa métrique dans le cadre de l'imagerie. Elle correspond à une notion de géodésique entre deux difféomorphismes dans leur sous-groupe. L'optimisation est utilisée pour obtenir un système d'équations état adjoint caractérisant la solution optimale du problème d'identification à partir des observations.

Cette approche est adaptée à l'identification de surfaces obtenues par un numériseur tel que, par exemple, le scan d'un visage. Ce problème est beaucoup plus difficile que celui d'imagerie. On doit alors introduire un système de référence courbe et une surface à facettes pour les calculs. On donne la formulation du problème d'identification et du calcul du changement de volume par rapport à un scan de référence.

**Mots clés : Numérisation, images, surfaces, métriques, difféomorphismes, représentation, identification.**



## Abstract

The representation of a surface, its smoothing, and its use in identification, comparison, classification, and in the study of changes in volume, curvature, and topology are ubiquitous in the area of the scanning. Among mathematical methods, we have retained the diffeomorphisms of a *reference pattern*.

There is a considerable interest, both theoretical and numerical, in approximating an arbitrary diffeomorphism by diffeomorphisms generated by velocity fields. On the theoretical front the question is : “is the subgroup of diffeomorphisms generated by velocity fields dense in Micheletti’s larger group endowed with the Courant metric ?” In spite of some progress, the question remains open.

The tracks followed have converged towards the subgroup of Lipschitzian diffeomorphisms of Azencott and Trouvé and its metric developed for imaging. It corresponds to a notion of geodesic between two diffeomorphisms in their subgroup. Optimization is then used to obtain a system of equations of the state adjoint state type characterizing the optimal solution of the identification problem from observations.

This approach is adapted to the identification of surfaces obtained from a scanner such as, for instance, the scan of a face. This problem is much more difficult than the one of imaging. We introduce a curvilinear reference system and a faceted surface for numerical computations. We provide a formulation of the identification problem and of the computation of the change of volume from a reference scan.

**Keywords : Scanning, images, surfaces, metrics, diffeomorphisms, representation, identification.**





# Table des matières

Résumé	i
Abstract	iii
Remerciements	vii
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
1 Motivation . . . . .	1
2 Objectifs . . . . .	2
3 Objets $N$ -dimensionnels . . . . .	2
4 Brève revue de la littérature . . . . .	3
5 Contenu du mémoire . . . . .	5
<b>2 La métrique de Courant</b>	<b>7</b>
1 Introduction . . . . .	7
2 Constructions de Micheletti . . . . .	10
2.1 Espace $\mathcal{F}(\Theta)$ de transformation de $\mathbb{R}^N$ . . . . .	10
2.2 Interprétation des trajectoires avec sauts . . . . .	15
3 Les métriques sur des transformations générées par un champ de vitesses	25
3.1 Sous-groupe $G_\Theta$ de transformations générées par un champ de vitesses . . . . .	25
3.2 Métrique complète sur $G_\Theta$ et les géodésiques . . . . .	32
3.2.1 Rappels sur la métrique $d$ . . . . .	33
3.2.2 Nouvelle métrique $d_G$ sur $G_\Theta$ . . . . .	34
3.2.3 Comparaison des métriques $(G_\Theta, d)$ et $(G_\Theta, d_G)$ . . . . .	35
3.2.4 Complétude de $(G_\Theta, d_G)$ ? . . . . .	36
<b>3 La métrique d’Azencott et de Trouvé en imagerie</b>	<b>41</b>
1 Introduction . . . . .	41
1.1 Images à niveaux de gris . . . . .	41
1.2 Constructions d’Azencott et de Trouvé . . . . .	42
1.3 Constructions via la viabilité bilatérale et le cône de Bouligand	44
2 Automorphismes par la viabilité bilatérale . . . . .	44
2.1 Condition de viabilité bilatérale . . . . .	44

2.2	Transformations de la condition de viabilité bilatérale en une contrainte linéaire . . . . .	52
3	Métrique d’Azencott et de Trouvé . . . . .	54
4	Semi-différentielle par la théorie des points de selle . . . . .	59
4.1	Contrôle optimal via les points de selle . . . . .	59
4.1.1	Exemple simple . . . . .	60
4.1.2	Trouver le point de selle . . . . .	60
4.2	Le problème d’imagerie revisité . . . . .	62
4.2.1	Position du problème . . . . .	62
4.2.2	Trouver le point de selle . . . . .	62
<b>4</b>	<b>Détection des surfaces à partir de scans tridimensionnels</b>	<b>65</b>
1	Introduction . . . . .	65
1.1	Notations . . . . .	66
1.2	Fonction distance orientée et géométrie . . . . .	66
1.3	L’application bi-lipschitzienne et le repère curviligne . . . . .	67
2	Formulation du problème d’imagerie . . . . .	68
2.1	Numérisation . . . . .	69
2.2	Triangulation . . . . .	69
2.3	Construction d’une surface $C^{1,1}$ . . . . .	69
2.4	Voisinage tubulaire . . . . .	71
2.5	Comparaison . . . . .	71
	<b>Annexe A. Compléments de géométrie différentielle</b>	<b>75</b>
1	La formule de Federer-Young . . . . .	75
2	Formule de changement de variable . . . . .	76
3	Expression de $j_z$ . . . . .	79
	<b>Références</b>	<b>81</b>

## Remerciements

Ce travail est motivé par le traitement automatique d'images ou de scans médicaux et s'inscrit dans le cadre du projet "Design et contrôle des dispositifs médicaux" entre M. Michel Delfour du Département de mathématiques et de statistique de l'Université de Montréal et le groupe de M. André Garon du Département de génie mécanique de l'École Polytechnique de Montréal. Un des membres de ma famille, plus précisément mon père, avait des problèmes avec un logiciel de comparaison d'images. À la suite d'une discussion avec M. Michel Delfour, ce dernier contacta son collègue M. André Garon qui a eu la bonté d'organiser une démonstration sur le numériseur 3D de Créaform. Cette démonstration de François Ménardet, un professeur au Département de génie mécanique de l'École Polytechnique de Montréal, a couvert plusieurs aspects dont les problèmes associés à son utilisation pour l'acquisition des données, le traitement des données, la construction et la représentation de la surface. Ces nouvelles informations permirent de mieux motiver et d'orienter ce mémoire.

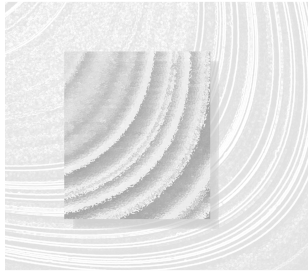
Michel Delfour est hors de tout doute la première personne que je souhaite remercier. Ce professeur titulaire m'a tout d'abord ouvert les yeux sur la recherche. Il m'a ensuite permis d'évoluer dans ce projet en acceptant de diriger celui-ci. Ses encouragements soutenus, ses contributions constantes et son aide pédagogique ont assurément enrichi sans équivoque à la fois mon savoir et ce travail.

Je tiens aussi à remercier M. Jacques Bélair et M. André Giroux qui ont accepté de faire partie de mon jury. Je remercie également les professeurs de l'École Polytechnique de Montréal pour m'avoir aidé à découvrir plusieurs branches des mathématiques, ainsi que les professeurs de l'Université de Montréal qui m'ont permis d'élargir mes connaissances et, par le fait même, qui ont nourri ma passion pour la science.

Je ne peux conclure ces remerciements sans mentionner ceux et celles qui ont été présents pour me soutenir durant cette période. Entre autres, je remercie mes amis(es), les gens du département et tout *spécialement* les membres de ma famille qui m'ont toujours soutenu et encouragé dans tous mes projets.

Merci !





## Chapitre 1

# Introduction

---

---

## 1 Motivation

Dans ce mémoire, on s'intéresse à l'identification biométrique et à l'amélioration d'image (*image enhancement*). Par exemple, le problème d'identification des différentes caractéristiques de la main droite ou du visage d'une population à l'autre ou le suivi du processus de cicatrisation d'une plaie à partir des données générées par le numériseur (*scanner*) 3D de la compagnie Créaform.<sup>1</sup> Comme cet appareil est relativement bon marché et facile à utiliser, il y a un marché énorme pour les mathématiques et l'ingénierie de ce type d'imagerie. Dans un autre domaine très différent, on a aussi la production d'une image nette à partir d'images produites par un ensemble de très grands télescopes (VLT) comme l'*European Southern Observatory* (ESO). Un jour, le VLT sera composé de quatre télescopes de 8m qui devraient travailler à l'unisson par interférométrie - une technique analogue à l'utilisation de radio-télescopes par les astronomes et simuler la résolution d'un unique immense instrument.<sup>2</sup>

À l'École Polytechnique de Montréal, les professeurs en génie mécanique, François Ménard et André Garon, m'ont fait la démonstration du numériseur 3D de Créaform et expliqué les problèmes mathématiques et informatiques associés à son utilisation pour l'acquisition des données, le traitement des données, la construction et la représentation de la surface, le lissage (*rendering*) et, enfin, l'utilisation des surfaces générées pour fins d'identification, de comparaison, de classification, d'étude des variations de volume, de courbure ou de topologie.

---

1. Voir le reportage de l'émission Découverte de Radio-Canada sur le numériseur 3D de la compagnie Créaform de Lévis, à l'adresse : <http://www.radio-canada.ca/emissions/decouverte/2009-2010/Reportage.asp?idDoc=93618>.

2. <http://www.eso.org/public/teles-instr/vlt.html>. Le Very Large Telescope (VLT) est un ensemble de quatre télescopes principaux et quatre auxiliaires à l'Observatoire du Cerro Paranal, situé dans le désert d'Atacama, au nord du Chili, à une altitude de 2 635 mètres. Il permet l'étude des astres dans les longueurs d'onde allant de l'ultraviolet à l'infrarouge. C'est un projet européen de l'Observatoire européen austral (ESO).

Ce travail, motivé par le traitement automatique d’images ou de scans médicaux, s’inscrit dans le cadre du projet intitulé “Design et contrôle des dispositifs médicaux” entre M. Michel Delfour du Département de mathématiques et de statistique de l’Université de Montréal et le groupe de M. André Garon du Département de génie mécanique de l’École Polytechnique de Montréal.

## 2 Objectifs

L’imagerie est un domaine immense avec une activité intense dans toutes les disciplines, si bien qu’il y a de nombreuses écoles qui la traitent, sans compter tous les logiciels commerciaux disponibles pour tous et à tous les prix. Les versions évoluées de ces logiciels utilisent des outils et des notions mathématiques dignes d’intérêt pour un mathématicien.

En attendant de s’attaquer aux mesures brutes du numériseur, ce mémoire se concentre sur un ensemble de méthodes mathématiques sous-jacentes à l’identification des objets et des surfaces.

On supposera l’existence d’un *pattern de référence* et les images observées seront des transformations difféomorphiques de ce *pattern de référence*. Une fois le difféomorphisme identifié, il devient alors possible d’étudier les changements de volume, de surface ou de courbure des objets observés par rapport au pattern ou par rapport à une ou plusieurs observations antérieures. On rencontre ce type de problème en imagerie bidimensionnelle monochrome ou polychrome et dans l’identification de surfaces.

On étudie donc les variations par rapport à ce pattern pour des fins de classification, de suivi, de diagnostique ou de traitement.

La première étape est le choix de la représentation de ces images. Il y a évidemment de nombreuses technologies pour l’acquisition et de nombreuses méthodes pour le traitement des images obtenues, qu’elles soient bi ou tridimensionnelles.

## 3 Objets $N$ -dimensionnels

Pour représenter un objet tridimensionnel (ou  $N$ -dimensionnel)  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ , il y a de nombreuses options (voir, par exemple, M. C. DELFOUR et J.-P. ZOLÉSIO [10]). L’une d’entre elles est d’utiliser certaines familles de fonctions paramétrisées par l’ensemble  $\Omega$ , comme la fonction caractéristique  $\chi_\Omega$ , la fonction distance  $d_\Omega$  ou la fonction distance orientée  $b_\Omega$ . Cette approche a pour avantage que la topologie des domaines variables n’est pas fixée.

Une autre façon de voir est de se restreindre à une famille d’ensembles  $\Omega$  paramétrisés par des scalaires, des fonctions ou des difféomorphismes de  $\mathbb{R}^N$ . Par exemple, les images d’un ensemble de référence fixe  $\Omega_0$  par une famille  $\mathcal{A}$  de difféomorphismes. Ici, la topologie des domaines variables est fixée. Si  $\Omega_0$  a un trou, toutes ses images auront un trou. On met les images en bijection avec la famille de difféomorphismes et on définit la métrique sur les images à partir de celle sur la famille de difféomorphismes. Cette construction est à l’origine de la métrique de Courant introduite par A. M. MICHELETTI [1] en 1972, ou d’autres métriques

du même type introduites plus tard pour l'imagerie par R. AZENCOTT [2] en 1994 et son étudiant A. TROUVÉ [1] en 1995, autour desquelles toute une école s'est développée.

Donc, si on n'est intéressé qu'à des déformations régulières d'un objet, on peut travailler avec une famille  $\mathcal{F} = \{F\}$  de difféomorphismes  $F$  et les images  $\{F(\Omega_0) : F \in \mathcal{F}\}$  d'un objet fixe  $\Omega_0$ . Si on se fixe l'objet de référence  $F_r(\Omega_0)$ , il faudra trouver une métrique pour le comparer à une observation  $F_o(\Omega_0)$ . Par exemple, pour une métrique  $\rho$  sur  $\mathcal{F}$  dans la norme  $L^p$ ,  $1 \leq p < \infty$ ,

$$\inf_{F \in \mathcal{F}} \rho(F \circ F_r, F_o)_{\mathcal{F}}.$$

On peut aussi concevoir un mélange des deux points de vue où l'on utilise les métriques associées aux fonctions  $\chi_\Omega$ ,  $d_\Omega$ ,  $b_\Omega$  avec les familles de difféomorphismes du pattern  $\Omega_0$  de base contenu dans un fourre-tout  $D$  :

$$\begin{aligned} & \inf_{F \in \mathcal{F}} \int_D |\chi_{F(F_r(\Omega_0))} - \chi_{F_o(\Omega_0)}|^2 dx, \\ & \inf_{F \in \mathcal{F}} \sup_{x \in D} |d_{F(F_r(\Omega_0))}(x) - d_{F_o(\Omega_0)}(x)|, \\ & \inf_{F \in \mathcal{F}} \int_D |b_{F(F_r(\Omega_0))} - b_{F_o(\Omega_0)}|^2 + |\nabla b_{F(F_r(\Omega_0))} - \nabla b_{F_o(\Omega_0)}|^2 dx. \end{aligned}$$

On pourra alors combiner les aspects complémentaires des deux points de vue.

Lorsque l'on veut comparer un objet géométrique  $\Omega$  à un objet de référence  $\Omega_0$ , on ne change pas sa *forme* en lui faisant subir une translation ou une rotation et, de façon générale, lorsqu'on lui applique une *isométrie*  $G \in \text{Iso}(\Omega_0, \Omega_0)$ . Dans  $\mathbb{R}^N$ , une isométrie est une transformation  $I : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  qui préserve les distances : si  $\rho$  est une métrique sur  $\mathbb{R}^N$ , alors

$$\rho(I(y), I(x)) = \rho(y, x), \quad \text{pour tout } x, y \in \mathbb{R}^N.$$

Par exemple, avec la norme euclidienne

$$|I(y) - I(x)|_{\mathbb{R}^n} = |y - x|_{\mathbb{R}^n}, \quad \text{pour tout } x, y \in \mathbb{R}^N.$$

La même approche s'applique à des variétés riemanniennes de métrique  $\rho$ . C'est le point de vue pris par M. GROMOV [1], le lauréat du prix Abel 2009. On pourra alors quotienter par des familles d'isométries de  $\Omega_0$ .

## 4 Brève revue de la littérature

On donne une brève revue de la littérature en mettant l'accent sur les formulations mathématiques des problèmes de base en identification, classification et déformation par des groupes de difféomorphismes.

Comme on parle d'objets géométriques et de calculs reliés à ces objets, on est dans le domaine de la géométrie différentielle où les groupes de transformations, d'homéomorphismes et de difféomorphismes jouent un rôle central. Il y a donc de

nombreux outils disponibles de ce côté, à condition de formuler et de bien maîtriser le formalisme de la géométrie moderne. Ce formalisme peut devenir lourd lorsque la géométrie est la variable de modélisation, d'optimisation, d'identification ou de contrôle.

Le domaine de l'optimisation de forme s'est donc développé et a évolué en parallèle, mais il parle des mêmes objets. Le calcul différentiel de forme fut introduit dans les années soixante-dix autour de l'équipe de Jean Céa, à l'Université de Nice, à partir des techniques utilisées en mécanique de fluides et, plus particulièrement, dans les deux thèses de J.-P. ZOLÉSIO [1, 2] en 1973 et 1979. Le premier théorème de compacité pour l'existence de formes optimales remonte à la thèse de D. CHENAIS vers 1973.

Ce n'est que beaucoup plus tard, soit en 1954, que furent connus les travaux de E. DE GIORGI [1, 2] sur les surfaces minimales et le théorème de compacité pour les ensembles de R. CACCIOPOLI [1], en 1952. Cela prit des années avant qu'il y ait rencontre avec l'école américaine de H. FEDERER [1, 2], dans les années cinquantes, et de W. H. FLEMING et R. RISHEL [1], en 1960. Tout cela pour dire que les communications n'étaient pas aussi rapides à l'époque et que les écoles ont souvent évolué en parallèle.

Rapprochons-nous des méthodes qui nous intéressent. Une fois de plus, les travaux de l'italienne A. M. MICHELETTI [1] sur les métriques de Courant, en 1972, ont été ignorés jusqu'en 2001. Elle s'intéressait à la variation de la valeur propre du laplacien par rapport à la forme du domaine sous-jacent. Dans cet article, elle construit une métrique complète sur un groupe de transformations de classe  $C^k$  zéro à l'infini de l'espace euclidien en s'inspirant d'une construction suggérée dans le livre de R. COURANT et D. HILBERT [1], en 1953.

En 1994, à un congrès d'imagerie à Cortona, R. AZENCOTT [1] lance l'idée de *distance de déformation* entre des formes à partir de géodésiques dans des groupes de difféomorphismes. C'est son étudiant A. TROUVÉ [2] qui rédigera sa thèse sur ce sujet en intégrant, en dimension infinie, des idées de géométrie différentielle (action de groupe de dimension infinie et reconnaissance de formes [1]). Il propose aussi un algorithme qui requiert, à chaque itération, la construction d'un champ de vitesses assez régulier pour générer des difféomorphismes qui restent dans la classe dans laquelle on travaille. En dimension trois, par exemple, cela demande de résoudre les équations de l'élasticité. Pour cette raison, ces métriques ont été appelées *métriques élastiques* (*elastic distances*) par L. YOUNES [1, 2, 3], un autre étudiant d'Azencott. Le livre de L. YOUNES [6] en 2010 est également à souligner.

Dans l'introduction de son article de 1998, A. TROUVÉ [3] esquisse essentiellement le début de la construction de la métrique de Courant de A. M. MICHELETTI [1] et passe à "*A fully rigorous construction of this distance, in the context of infinite dimensional Lie groups...*". La situation se présente donc comme ce qui suit. Le plus gros groupe de difféomorphismes avec une métrique et complet est celui de Micheletti. Sa construction sous-tend une idée de géodésique dont elle a besoin pour obtenir l'inégalité du triangle. D'autres constructions dans un rapport interne de F. MURAT et J. SIMON [1] n'aboutissent qu'à une pseudo-métrique, en 1976, sans référence à Micheletti, publiée en 1972. Trouvé se restreint au sous-groupe de difféomorphismes générés par des champs de vitesses lipschitziens pour lequel il in-



troduit comme métrique la norme de la vitesse correspondant à la géodésique entre deux difféomorphismes du sous-groupe. C'est une métrique plus forte que celle de Micheletti et, pour s'assurer de l'existence de géodésiques, il se limite à des champ de vitesses  $L^2$  en temps et à valeur dans un espace hilbertien comme le Sobolev  $H^k(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ . L'utilisation de champs de vitesse était nouveau en imagerie, mais elle était utilisée en optimisation et calcul de forme depuis la thèse de Zolésio, en 1973.

Pour la construction de distances (métriques) géodésiques sur des géométries riemanniennes et de difféomorphismes, il faut signaler les travaux de P. W. MICHOR et D. MUMFORD [1, 2, 2]. Les groupes métriques de Micheletti seraient des *variétés de Finsler* (avec une norme (Banach) dans l'espace tangent).

Ce n'est qu'un bref survol de la littérature mathématique sur le sujet. On a trouvé, entre autres, des articles de O. BIHUN et C. CHICOINE [1, 2], ainsi que O. BIHUN, C. CHICOINE et S. G. HARRIS [1] rédigés dans le formalisme de la géométrie différentielle. Il est clair que l'imagerie est devenue un thème très actuel. Il existe aussi un immense volet computationnel et des travaux dirigés vers des applications spécifiques.

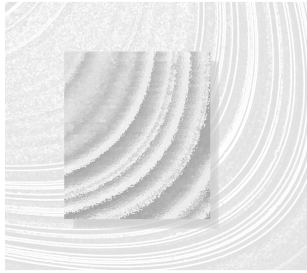
## 5 Contenu du mémoire

Le mémoire comprend trois chapitres. Le premier porte sur la métrique de Courant à partir de la seconde édition 2011 du livre de M. C. DELFOUR et J.-P. ZOLÉSIO [10], où tout un chapitre est consacré à cette question. On développe plus en avant l'étude du sous-groupe de difféomorphismes généré par des champs de vitesse lipschitziens. Il y a plusieurs questions ouvertes. Est-ce que ce sous-groupe est dense dans le groupe de Micheletti pour la métrique de Courant? Si c'était vrai, cela impliquerait que, avec des champs de vitesses lipchitziens, on pourrait approcher n'importe quel difféomorphisme, ce qui est d'un grand intérêt pour les méthodes numériques. On peut, sur ce sous-groupe, introduire une métrique basée sur la distance géodésique. Cette métrique est plus forte que la métrique de Courant. On donne plusieurs pistes pour essayer de montrer que, pour cette métrique, le sous-groupe serait complet. Cette partie du chapitre contient donc de nouveaux résultats, mais il n'a pas été possible de dire s'il y a complétude ou non. La difficulté de cette question explique bien qu'Azencott et Trouvé se soient montrés moins ambitieux et soient passés à un sous-espace hilbertien.

Le second chapitre adopte l'approche hilbertienne d'Azencott et de Trouvé, nous libérant de la question fondamentale de complétude de la métrique. Le second avantage est qu'une fois dans un hilbert, la métrique devient différentiable. On utilise alors tout le bagage de l'optimisation en dimension finie pour obtenir des équations qui caractérisent la solution optimale d'un problème type d'imagerie. Ces équations peuvent être discrétisées et l'algorithme suggéré par A. TROUVÉ [3] est utilisable. Dans cet article, on y retrouve d'ailleurs des calculs sur des figures de personnes. Un article de 2000 par A. TROUVÉ et L. YOUNES [1] se spécialise à une "*class of diffeomorphic matching problems in one dimension*".

Dans le dernier chapitre, on plonge dans l'application qui a motivé à faire notre

étude. Ainsi, on donne les détails théoriques sur la quantification de changements entre une image de visage référence et une image de visage observée. La structure du problème est la même qu'au chapitre précédent, mais le fait que l'on travaille maintenant avec une surface dans l'espace tridimensionnel amène des difficultés techniques supplémentaires. Il faut travailler avec un système de référence courbe, une surface à facettes triangulaires sous-jacente à la surface et, enfin, faire des calculs et de l'identification dans ce repère. Pour éviter les bases locales et les symboles de Christoffel, on travaillera dans le cadre développé par M. C. DELFOUR et J.-P. ZOLÉSIO [2, 3, 4, 5, 6] et M. C. DELFOUR [2] à [7] pour la théorie des coques minces. Ce cadre se marie bien avec la surface à facettes sur laquelle sont faits tous les calculs de reconstruction. Il s'agit d'une première étude pour mettre les idées, les notions et l'ensemble de l'approche en place.



## Chapitre 2

# La métrique de Courant

---

---

## 1 Introduction

Une façon naturelle de construire une famille de parties variables de  $\mathbb{R}^N$  est de considérer les images d'un ensemble fixe  $D \subset \mathbb{R}^N$  par une famille de transformations de  $\mathbb{R}^N$ . Les structures algébriques et topologiques de cette famille de parties ou de classes d'équivalence de parties peuvent alors être spécifiées par celles de la famille de transformations, ce qui rend disponible toute la machinerie de l'analyse fonctionnelle. Le choix des familles de transformations et de la partie fixe est évidemment dépendant du problème considéré.

En 1972, A. M. MICHELETTI [1] introduisit ce qui est peut-être une des premières topologies métriques complètes pour une famille de domaines de classe  $C^k$  qui sont les images d'un ouvert de classe  $C^k$  fixe, par une famille de  $C^k$ -difféomorphismes de  $\mathbb{R}^N$ . Ici, la structure algébrique naturelle est celle de *groupe* pour la composition avec la transformation identité comme élément neutre. Son analyse culmine avec la construction d'une métrique complète sur le groupe quotienté par le sous-groupe des transformations qui laissent l'ensemble fixe inaltéré. Elle l'appelle *métrique de Courant*<sup>1</sup> parce qu'il est démontré dans le livre de R. COURANT et D. HILBERT [1, p. 420] que la  $n$ -ème valeur propre du laplacien dépend de façon continue du domaine  $\Omega$ , où  $\Omega = (I + f)\Omega_0$  est l'image d'un domaine fixé  $\Omega_0$  par  $I + f$  et  $f$  est une application  $C^k$ . Il n'y a cependant pas de métrique dans ce livre.

---

1. "Nello studiare la continuità dell' $n$ -esimo autovalore dell'operatore di Laplace -  $\Delta_\Omega$  relativo ad un aperto limitato  $\Omega$  con dati di Dirichlet nulli, considerato come funzione dell'aperto  $\Omega$ , Courant introduce una nozione di vicinanza tra due domini basata su un diffeomorfismo del tipo  $I + \psi$  con  $\psi \in C^1(\mathbb{R}^m)$ , che trasforma l'uno nell'altro." (cf. A. M. MICHELETTI [1]).

## Quelques définitions et notations

Soit  $\mathbb{N}$  l'ensemble des entiers naturels et  $\mathbb{R}$  l'ensemble des nombres réels. Le produit scalaire et la norme sur  $\mathbb{R}^N$  seront notés

$$x \cdot y \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{i=1}^N x_i y_i, \quad |x| = \sqrt{x \cdot x}.$$

Notons  $\mathbb{N}^N$  l'ensemble de tous les  $N$ -tuples  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^N$ . Un élément de  $\mathbb{N}^N$  sera nommé un *multi-index*. Pour chaque  $\alpha \in \mathbb{N}^N$ , définissons l'*ordre*  $|\alpha|$  de  $\alpha$  et la *dérivée partielle*  $\partial^\alpha$  comme suit :

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i, \quad \partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}. \quad (1.1)$$

### Les fonctions continues et $C^k$

Soit  $\Omega$  un sous-espace ouvert de  $\mathbb{R}^N$ . Notons par  $C(\Omega)$  ou  $C^0(\Omega)$  l'espace des fonctions continues de  $\Omega$  à  $\mathbb{R}$ . Pour un entier  $k \geq 1$ ,

$$C^k(\Omega) \stackrel{\text{déf}}{=} \{f \in C^{k-1}(\Omega) : \partial^\alpha f \in C(\Omega), \forall \alpha, |\alpha| = k\}.$$

Par convention et pour donner un sens au cas  $\alpha = 0$ ,  $\partial^0 f$  sera la fonction  $f$ . Quand  $|\alpha| = 1$ , nous utilisons la notation standard  $\partial_i f$  ou  $\partial f / \partial x_i$ .  $\mathcal{D}^k(\Omega)$  ou  $C_c^k(\Omega)$  (resp.,  $\mathcal{D}(\Omega)$  ou  $C_c^\infty(\Omega)$ ) dénoteront les espaces de fonctions  $k$ -fois (resp., infiniment) continuellement différentiables avec un support compact contenu dans l'ensemble ouvert  $\Omega$ .

On note par  $\mathcal{B}^0(\Omega)$  l'espace des fonctions ( $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ) continues bornées. Pour un entier  $k \geq 1$ ,

$$\mathcal{B}^k(\Omega) \stackrel{\text{déf}}{=} \{f \in \mathcal{B}^{k-1}(\Omega) : \partial^\alpha f \in \mathcal{B}^0(\Omega), \forall \alpha, |\alpha| = k\} \quad (1.2)$$

est l'espace des fonctions dans  $\mathcal{B}^0(\Omega)$  qui ont des dérivées d'ordre plus petite ou égale à  $k$  continues et bornées dans  $\Omega$ . Avec la norme

$$\|f\|_{C^k(\Omega)} \stackrel{\text{déf}}{=} \max_{0 \leq |\alpha| \leq k} \sup_{x \in \Omega} |\partial^\alpha f(x)|, \quad (1.3)$$

$\mathcal{B}^k(\Omega)$  est un espace Banach.

Si la fonction  $f$  est bornée et uniformément continue<sup>2</sup> sur  $\Omega$ , elle possède une unique extension continue ( $\overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ ). Notons  $C^k(\overline{\Omega})$  l'espace des fonctions  $f$  dans  $C^k(\Omega)$  pour lesquelles  $\partial^\alpha f$  est bornée et uniformément continue sur  $\Omega$  pour tout  $\alpha$ ,  $0 \leq |\alpha| \leq k$ . Une fonction  $f$  dans  $C^k(\Omega)$  est dite *nulle aux bords* de  $\Omega$  si pour tout  $\alpha$ ,  $0 \leq |\alpha| \leq k$ , et  $\varepsilon > 0$  il existe un sous-espace compact  $K$  de  $\Omega$  tel que, pour tout  $x \in \Omega \cap \mathcal{U}K$ ,  $|\partial^\alpha f(x)| \leq \varepsilon$ . Notons  $C_0^k(\Omega)$  l'espace de ces fonctions. Clairement,

2. Une fonction  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est uniformément continue si pour chaque  $\varepsilon > 0$  il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout  $x$  et  $y$  dans  $\Omega$  tel que  $|x - y| < \delta$  nous avons  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ .

$C_0^k(\Omega) \subset C^k(\overline{\Omega}) \subset \mathcal{B}^k(\Omega) \subset C^k(\Omega)$ . De plus, avec la norme (1.3),  $C_0^k(\Omega)$ ,  $C^k(\overline{\Omega})$ , et  $\mathcal{B}^k(\Omega)$  sont des espaces de Banach. Finalement, on a

$$C^\infty(\Omega) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \bigcap_{k \geq 0} C^k(\Omega), \quad C_0^\infty(\Omega) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \bigcap_{k \geq 0} C_0^k(\Omega), \quad \text{et} \quad \mathcal{B}(\Omega) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \bigcap_{k \geq 0} \mathcal{B}^k(\Omega).$$

Quand  $f$  est une fonction vectorielle de  $\Omega$  à  $\mathbb{R}^m$ , les espaces correspondants seront not\u00e9s par  $C_0^k(\Omega)^m$  ou  $C_0^k(\Omega, \mathbb{R}^m)$ ,  $C^k(\overline{\Omega})^m$  ou  $C^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ ,  $\mathcal{B}^k(\Omega)^m$  ou  $\mathcal{B}^k(\Omega, \mathbb{R}^m)$ ,  $C^k(\Omega)^m$  ou  $C^k(\Omega, \mathbb{R}^m)$ , etc.

### Les fonctions continues de H\u00f6lder ( $C^{0,\ell}$ ) et lipschitz ( $C^{0,1}$ )

Soit  $\lambda$ ,  $0 < \lambda \leq 1$ , une fonction  $f$  est  $(0, \lambda)$ -H\u00f6lder continue dans  $\Omega$  si

$$\exists c > 0, \forall x, y \in \Omega, \quad |f(y) - f(x)| \leq c |x - y|^\lambda.$$

Quand  $\lambda = 1$ , on dit \u00e9galement que  $f$  est *Lipschitz* ou *Lipschitz continue*. De fa\u00e7on similaire, si  $k \geq 1$ ,  $f$  est  $(k, \lambda)$ -H\u00f6lder continue dans  $\Omega$  si

$$\forall \alpha, 0 \leq |\alpha| \leq k, \exists c > 0, \forall x, y \in \Omega, \quad |\partial^\alpha f(y) - \partial^\alpha f(x)| \leq c |x - y|^\lambda.$$

On note par  $C^{k,\lambda}(\Omega)$  l'espace de toutes les fonctions  $(k, \lambda)$ -H\u00f6lder continues sur  $\Omega$ . D\u00e9finissons pour  $k \geq 0$  les sous-espaces<sup>3</sup>

$$C^{k,\lambda}(\overline{\Omega}) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \left\{ f \in C^k(\overline{\Omega}) : \forall \alpha, 0 \leq |\alpha| \leq k, \exists c > 0, \forall x, y \in \Omega \right. \\ \left. |\partial^\alpha f(y) - \partial^\alpha f(x)| \leq c |x - y|^\lambda \right\} \quad (1.4)$$

de  $C^k(\overline{\Omega})$ . Par d\u00e9finition, pour chaque  $\alpha$ ,  $0 \leq |\alpha| \leq k$ ,  $\partial^\alpha f$  a une extension born\u00e9e ( $\overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ ), continue unique. De plus, avec la norme

$$\|f\|_{C^{k,\lambda}(\Omega)} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \max \left\{ \|f\|_{C^k(\Omega)}, \max_{0 \leq |\alpha| \leq k} \sup_{\substack{x, y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|\partial^\alpha f(y) - \partial^\alpha f(x)|}{|x - y|^\lambda} \right\} \quad (1.5)$$

$C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})$  est un espace de Banach. Finalement, on note par  $C_0^{k,\lambda}(\Omega)$  l'espace  $C^{k,\lambda}(\overline{\Omega}) \cap C_0^k(\Omega)$ .

### Les espaces de Sobolev

Pour une analyse d\u00e9taill\u00e9e des espaces de Sobolev, le lecteur est r\u00e9f\u00e9r\u00e9 \u00e0 R. A. ADAMS [1], J. NE\u010cAS [1], and VO-KHAC KHOAN [1]. Soit  $\Omega$  un sous-espace ouvert born\u00e9 de  $\mathbb{R}^N$ .  $\mathcal{D}(\Omega)$  est l'espace des fonctions ind\u00e9finiment diff\u00e9rentiables avec un support compact sur  $\Omega$  muni de la topologie de Schwartz. Son dual topologique  $\mathcal{D}(\Omega)^*$  est appel\u00e9 *l'espace des distributions*.

3. La notation  $C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})$  ne doit pas \u00eatre confondue avec la notation  $C^{k,\lambda}(\Omega)$  pour les fonctions  $(k, \lambda)$ -H\u00f6lder continues dans  $\Omega$  mais pas uniform\u00e9ment born\u00e9es dans  $\Omega$ . En particulier,  $C^{k,\lambda}(\mathbb{R}^N)$  n'est pas \u00e9gale \u00e0  $C^{k,\lambda}(\mathbb{R}^N)$ , il est en fait contenu dedans.

L'espace de Sobolev  $W^{m,p}(\Omega)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , est l'espace des distributions  $T \in L^p(\Omega)^*$  avec les dérivées distributions partielles  $D^\alpha T \in L^p(\Omega)^*$  pour tout  $\alpha$ ,  $|\alpha| \leq m$ . Pour  $p = 2$  on utilise la notation  $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$ . Par densité de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $L^p(\Omega)$  pour  $1 \leq p < \infty$ , on identifie souvent une distribution  $T \in L^p(\Omega)^*$  avec une fonction  $f \in L^q(\Omega)$ ,  $p^{-1} + q^{-1} = 1$  :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle T, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f \varphi \, dx.$$

Avec la norme

$$\|v\|_{m,p,\Omega} \stackrel{\text{déf}}{=} \left[ \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}^p \, dx \right]^{1/p}, \quad \|v\|_{m,\infty,\Omega} \stackrel{\text{déf}}{=} \max_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha v\|_{L^\infty(\Omega)} \, dx, \quad (1.6)$$

l'espace  $W^{m,p}(\Omega)$  est un espace de Banach. Nous pouvons également utiliser la semi-norme

$$|v|_{m,p,\Omega} = \left[ \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} |\partial^\alpha v|_{L^p(\Omega)}^p \, dx \right]^{1/p}, \quad |v|_{m,\infty,\Omega} \stackrel{\text{déf}}{=} \|\partial^m v\|_{L^\infty(\Omega)} \, dx. \quad (1.7)$$

Quand  $p = 2$ , on ne note pas l'index  $p$  et on écrit  $\|v\|_{m,\Omega}$  et  $|v|_{m,\Omega}$ . Par le théorème de Meyers et Serrin,  $W^{m,p}(\Omega)$  coïncide avec la complétion de  $\{\varphi \in C^m(\Omega) : \|\varphi\|_{m,p} < \infty\}$  avec la norme  $\|\varphi\|_{m,p}$  de  $1 \leq p < \infty$ .<sup>4</sup>

Nous référons le lecteur à R. A. ADAMS [1] pour les détails et les extensions des définitions pour les cas où  $m$  n'est pas un entier. Quand  $f$  est une fonction vectorielle de  $\Omega$  à  $\mathbb{R}^m$ , les espaces correspondants sont notés par  $W^{s,p}(\Omega)^m$  ou  $W^{s,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ .

## 2 Constructions de Micheletti

La construction de A. M. MICHELETTI [1] pour les espaces de Banach  $C_0^k(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ ,  $k \geq 0$  se généralise pour des espaces de Banach  $\Theta$  de transformations de  $\mathbb{R}^N$  dans  $\mathbb{R}^N$  sous certaines conditions générales.

### 2.1 Espace $\mathcal{F}(\Theta)$ de transformations de $\mathbb{R}^N$

Considérons l'espace de transformations de  $\mathbb{R}^N$  associé à un espace vectoriel réel  $\Theta$  de transformations de  $\mathbb{R}^N$  dans  $\mathbb{R}^N$  :

$$\mathcal{F}(\Theta) \stackrel{\text{déf}}{=} \{I + f : f \in \Theta, (I + f) \text{ bijectif et } (I + f)^{-1} - I \in \Theta\}, \quad (2.1)$$

4.  $C^m(\Omega)$  définie dans la section 1.

où  $x \mapsto I(x) \stackrel{\text{déf}}{=} x : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  est l'identité.  $\mathcal{F}(\Theta)$  est un groupe de transformations de  $\mathbb{R}^N$  pour la composition  $(F \circ G)(x) \stackrel{\text{déf}}{=} F(G(x))$ . Soit  $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^N$  le domaine fixe et

$$\mathcal{X}(\Omega_0) \stackrel{\text{déf}}{=} \{F(\Omega_0) : \forall F \in \mathcal{F}(\Theta)\} \quad (2.2)$$

la famille des images de  $\Omega_0$  par les éléments de  $\mathcal{F}(\Theta)$ . En introduisant le sous-groupe

$$\mathcal{G}(\Omega_0) \stackrel{\text{déf}}{=} \{F \in \mathcal{F}(\Theta) : F(\Omega_0) = \Omega_0\},$$

on obtient la bijection suivante :

$$\mathcal{X}(\Omega_0) \leftrightarrow \mathcal{F}(\Theta)/\mathcal{G}(\Omega_0) \quad (2.3)$$

avec les images.

Elle introduit une métrique  $d$  (invariante à droite par construction) sur  $\mathcal{F}(\Theta)$  sous les hypothèses 2.1 et 2.2. Elle définit ensuite la métrique quotient suivante

$$\forall F, G \in \mathcal{F}(\Theta), \quad d_{\mathcal{G}}([F], [H]) \stackrel{\text{déf}}{=} \inf_{G, \tilde{G} \in \mathcal{G}} d(F \circ G, H \circ \tilde{G}), \quad [F] \stackrel{\text{déf}}{=} F \circ \mathcal{G}(\Omega_0) \quad (2.4)$$

sur le groupe quotient  $\mathcal{F}(\Theta)/\mathcal{G}(\Omega_0)$  qu'elle appelle *métrique de Courant*.

La complétude de  $\mathcal{F}(\Theta)$  nécessitera l'hypothèse 2.3 et également

- (i) l'hypothèse que  $\Theta \subset C^0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$  et que pour tout  $x \in \mathbb{R}^N$ , les transformations  $f \mapsto f(x) : \Theta \rightarrow \mathbb{R}^N$  sont continues, ce qui rend le groupe un espace métrique complet, ou
- (ii) l'hypothèse 2.4 qui rend le groupe un groupe topologique complet (métrique).

Les résultats s'appliquent avec  $\Theta$  un espace de Banach tel  $C_0^k(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \subset C^k(\overline{\mathbb{R}^N}, \mathbb{R}^N) \subset \mathcal{B}^k(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$  et  $C^{k,1}(\overline{\mathbb{R}^N}, \mathbb{R}^N)$ ,  $k \geq 0$  et, des constructions spéciales à des espaces de Fréchet  $C_0^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) = \bigcap_{k \geq 0} \mathcal{B}^k(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ .

Nous allons introduire les hypothèses étape par étape.

### Hypothèse 2.1.

$\Theta$  est un espace vectoriel réel de transformations de  $\mathbb{R}^N$  dans  $\mathbb{R}^N$  et

$$\forall g \in \Theta, \forall I + f \in \mathcal{F}(\Theta), \quad g \circ (I + f) \in \Theta. \quad \square$$

**Théorème 2.1.** *Soit  $\Theta$  un espace vectoriel réel de transformations de  $\mathbb{R}^N$  dans  $\mathbb{R}^N$ .  $\mathcal{F}(\Theta)$  est un groupe avec la composition  $\circ$  si et seulement si l'hypothèse 2.1 est vérifiée. En particulier  $(I + f)^{-1} - I = -f \circ (I + f)^{-1} \in \Theta$ .*

*Démonstration.* Cf. M. C. DELFOUR et J.-P. ZOLÉSIO [10]. □

On associe à  $F \in \mathcal{F}(\Theta)$  la distance à  $I$

$$d(I, F) \stackrel{\text{déf}}{=} \inf_{\substack{F = F_1 \circ \dots \circ F_n \\ F_i \in \mathcal{F}(\Theta)}} \sum_{i=1}^n \|F_i - I\|_{\Theta} + \|F_i^{-1} - I\|_{\Theta}, \quad (2.5)$$

où l'infimum est sur toutes les *factorisations finies* de  $F$  dans  $\mathcal{F}(\Theta)$  de la forme

$$F = F_1 \circ \cdots \circ F_n, \quad F_i \in \mathcal{F}(\Theta).$$

En particulier  $d(I, F) = d(I, F^{-1})$ . Élargissons cette fonction sur tous les  $F$  et  $G$  dans  $\mathcal{F}(\Theta)$

$$\boxed{d(F, G) \stackrel{\text{déf}}{=} d(I, G \circ F^{-1})}. \quad (2.6)$$

Par définition,  $d$  est invariante à droite et pour tout  $F, G$  et  $H$  dans  $\mathcal{F}(\Theta)$

$$d(F, G) = d(F \circ H, G \circ H).$$

Pour montrer que  $d$  est une métrique<sup>5</sup> sur  $\mathcal{F}(\Theta)$ , il est nécessaire d'avoir une seconde hypothèse.

**Hypothèse 2.2.**

$(\Theta, \|\cdot\|)$  est un espace vectoriel normé de transformations de  $\mathbb{R}^N$  dans  $\mathbb{R}^N$  et pour chaque  $r > 0$  il existe une fonction continue  $c_0(r)$  telle que

$$\forall \{f_i\}_{i=1}^n \subset \Theta \text{ tel que } \sum_{i=1}^n \|f_i\| < \alpha < r; \quad (2.7)$$

alors

$$\|(I + f_1) \circ \cdots \circ (I + f_n) - I\| < \alpha c_0(r). \quad (2.8)$$

□

**Théorème 2.2.** *Sous les hypothèses 2.1 et 2.2,  $d$  est une métrique invariante à droite sur  $\mathcal{F}(\Theta)$ .*

*Démonstration.* Cf. M. C. DELFOUR et J.-P. ZOLÉSIO [10]. □

Un aspect important de la construction précédente est d'y avoir implicitement incorporé l'*inégalité du triangle*.

En effet, il y a plusieurs autres façons d'introduire une topologie sur  $\mathcal{F}(\Theta)$ . L'intérêt pour ce choix spécifique sera précisé ultérieurement. La *métrique de Courant* originale de A. M. MICHELETTI [1] en 1972 a été construite à partir d'une métrique invariante à droite quelque peu différente sur  $\mathcal{F}(\Theta)$ . Pour  $H \in \mathcal{F}(\Theta)$ ,

5. Une fonction  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  est dite une *métrique* sur  $X$  si (cf. J. DUGUNDJI [1])

- (i)  $d(F, G) \geq 0$ , pour tout  $F, G$ ,
- (ii)  $d(F, G) = 0 \iff F = G$ ,
- (iii)  $d(F, G) = d(G, F)$ , pour tout  $F, G$ ,
- (iv)  $d(F, H) \leq d(F, G) + d(G, H)$ , pour tout  $F, G, H$ .

Une métrique  $d$  sur un groupe  $(\mathcal{F}, \circ)$  est dite *invariante à droite* si pour tout  $H \in \mathcal{F}$ ,  $d(F \circ H, G \circ H) = d(F, G)$ .



considérons les factorisations finies  $H_1 \circ \cdots \circ H_m$ ,  $H_i \in \mathcal{F}(\Theta)$ ,  $1 \leq i \leq m$ , de  $H$  et les factorisations finies  $G_1 \circ \cdots \circ G_n$ ,  $G_j \in \mathcal{F}(\Theta)$ ,  $1 \leq j \leq n$ , de  $H^{-1}$ , et définissons

$$d_1(I, H) \stackrel{\text{déf}}{=} \inf_{\substack{H=H_1 \circ \cdots \circ H_m \\ m \geq 1}} \sum_{i=1}^m \|H_i - I\| + \inf_{\substack{H^{-1}=G_1 \circ \cdots \circ G_n \\ n \geq 1}} \sum_{i=1}^n \|G_i - I\|, \quad (2.9)$$

où l'infimum est sur toutes les *factorisations finies* de  $H$  et  $H^{-1}$  dans  $\mathcal{F}(\Theta)$  et

$$\forall F, G \in \mathcal{F}(\Theta), \quad d_1(G, F) \stackrel{\text{déf}}{=} d_1(I, F \circ G^{-1}). \quad (2.10)$$

Un autre exemple est la topologie générée par la *semi-métrique* invariante à droite<sup>6</sup>

$$\begin{aligned} \forall H \in \mathcal{F}(\Theta), \quad d_0(I, H) &\stackrel{\text{déf}}{=} \|H - I\| + \|H^{-1} - I\|, \\ \forall F, G \in \mathcal{F}(\Theta), \quad d_0(G, F) &\stackrel{\text{déf}}{=} d_0(I, F \circ G^{-1}). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Soit  $r > 0$  et  $F \in \mathcal{F}(\Theta)$ , soit  $B_r(F) = \{G \in \mathcal{F}(\Theta) : d_0(F, G) < r\}$ . Soit  $\tau_0$  la plus faible topologie sur  $\mathcal{F}(\Theta)$  telle que la famille  $\{B_r(F) : 0 \leq r < \infty\}$  est une base pour  $\tau_0$ . Par définition

$$d_1(F, G) \leq d(F, G) \leq d_0(F, G)$$

et l'injection  $(\mathcal{F}, d_1) \rightarrow (\mathcal{F}, d) \rightarrow (\mathcal{F}, d_0)$  est continue.

**Théorème 2.3.** *Sous les hypothèses 2.1 et 2.2, les topologies générées par  $d_1$ ,  $d$ , et  $d_0$  sont équivalentes.*

*Démonstration.* Cf. M. C. DELFOUR et J.-P. ZOLÉSIO [10]. □

La construction de Micheletti avec la métrique  $d_1$  a été donnée en 2001 pour les espaces  $C^k(\overline{\mathbb{R}^N}, \mathbb{R}^N)$  et  $C^{k,1}(\overline{\mathbb{R}^N}, \mathbb{R}^N)$ ,  $k \geq 0$ , dans M. C. DELFOUR et J.-P. ZOLÉSIO [9]. Ainsi, les pseudodistances peuvent être évitées. Les métriques  $d$  et  $d_1$  construites à partir de la semi-métrique  $d_0$  sous les conditions générales 2.1 et 2.2 sont toutes deux plus générales et intéressantes, car elles utilisent un infimum sur toutes les factorisations finies  $(I + \theta_1) \circ \cdots \circ (I + \theta_n)$  de  $I + \theta$ . Cela sous-tend la recherche d'une trajectoire *géodésique* entre  $I$  et  $I + \theta$ .

La semi-métrique  $d_0$ , peut s'interpréter comme une *énergie* minimum

$$\sum_{i=1}^n d_0(I + \theta_i, I) = \sum_{i=1}^n \|\theta_i\| + \|\theta_i \circ (I + \theta_i)^{-1}\| \quad (2.12)$$

6. Soit un espace  $X$ , une fonction  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  est dite *semi-métrique* si

- (i)  $d(F, G) \geq 0$ , pour tout  $F, G$ ,
- (ii)  $d(F, G) = 0 \iff F = G$ ,
- (iii)  $d(F, G) = d(G, F)$ , pour tout  $F, G$ .

Cette notion vient de Fréchet et Menger.

par rapport à toutes les trajectoires constantes par morceaux  $T : [0, 1] \rightarrow \mathcal{F}(\Theta)$  partant de  $I$  au temps 0 et allant à  $I + \theta$  au temps 1 dans le groupe  $\mathcal{F}(\Theta)$  en reliant le temps  $t_i$ ,  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} = 1$ , à chaque saut :

$$T(t) \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} I, & 0 \leq t < t_1, \\ (I + \theta_1), & t_1 < t < t_2, \\ (I + \theta_2) \circ (I + \theta_1), & t_2 < t < t_3, \\ \dots & \\ (I + \theta_i) \circ \dots \circ (I + \theta_1), & t_i < t < t_{i+1}, \\ \dots & \\ (I + \theta_n) \circ \dots \circ (I + \theta_1), & t_n < t \leq 1. \end{cases} \quad (2.13)$$

Le saut dans le groupe  $\mathcal{F}(\Theta)$  au temps  $t_i$  est donné par

$$\begin{aligned} [T(t)]_{t_i} &\stackrel{\text{déf}}{=} T(t_i^+) \circ T(t_i^-)^{-1} - I \\ &= [(I + \theta_i) \circ \dots \circ (I + \theta_1)] \circ [(I + \theta_{i-1}) \circ \dots \circ (I + \theta_1)]^{-1} - I = \theta_i \end{aligned}$$

un élément de  $\Theta$  qui peut alors être vu comme l'espace tangent à l'espace  $\mathcal{F}(\Theta) \subset I + \Theta$ .

Le choix de  $d$  dans le *contexte de géodésique* est plus intéressant que le choix de  $d_1$  qui implique un infimum double en terme d'énergie (2.12). Ainsi, avec le théorème d'équivalence (théorème 2.3), travailler avec la métrique  $d$  ou  $d_1$  est complètement équivalent.

### Hypothèse 2.3.

$(\Theta, \|\cdot\|)$  est un espace vectoriel normé de transformations de  $\mathbb{R}^N$  dans  $\mathbb{R}^N$  et il existe une fonction continue  $c_1$  telle que pour tout  $I + f \in \mathcal{F}(\Theta)$  et  $g \in \Theta$

$$\|g \circ (I + f)\| \leq \|g\| c_1(\|f\|). \quad (2.14)$$

□

La prochaine hypothèse est une sorte de *continuité uniforme*.

### Hypothèse 2.4.

$(\Theta, \|\cdot\|)$  est un espace vectoriel normé de transformations de  $\mathbb{R}^N$  dans  $\mathbb{R}^N$ . Pour chaque  $g \in \Theta$ , pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que

$$\forall \gamma \in \Theta \text{ tel que } \|\gamma\| < \delta, \quad \|g \circ (I + \gamma) - g\| < \varepsilon. \quad (2.15)$$

□

**Théorème 2.4.** *Sous les hypothèses 2.1 à 2.4,  $\mathcal{F}(\Theta)$  est un groupe topologique (métrique).*

*Démonstration.* Cf. M. C. DELFOUR et J.-P. ZOLÉSIO [10]. □

L'hypothèse 2.4 est un peu truquée. Elle implique non seulement une norme, mais aussi une "continuité uniforme" de la fonction  $g$  qui n'est pas vérifiée pour  $g \in \mathcal{B}^0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$  et pour la partie Lipschitz  $c(g)$  de la norme de  $C^{0,1}(\overline{\mathbb{R}^N}, \mathbb{R}^N)$ .

Comme les espaces  $C_0^k(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \subset C^k(\overline{\mathbb{R}^N}, \mathbb{R}^N) \subset \mathcal{B}^k(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$  ont la même norme et comme les hypothèses 2.2 et 2.3 impliquent seulement la norme, elles seront toujours vérifiées pour  $C_0^k(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$  et  $C^k(\overline{\mathbb{R}^N}, \mathbb{R}^N)$  si elles sont vérifiées pour  $\mathcal{B}^k(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ ,  $k \geq 0$ . Il y aura seulement l'hypothèse 2.1 qui demandera une attention particulière.

Le fait que l'hypothèse 2.4 n'est pas toujours vérifiée n'aide pas pour prouver la complétude de l'espace  $(\mathcal{F}(\Theta), d)$ . La complétude sera prouvée dans le théorème 2.6 sous les hypothèses 2.1 à 2.3, où l'hypothèse 2.4 sera remplacée par la condition  $\Theta \subset C^0(\overline{\mathbb{R}^N}, \mathbb{R}^N)$  et, pour tout  $x \in \mathbb{R}^N$ , la transformation  $f \mapsto f(x) : \Theta \rightarrow \mathbb{R}^N$  est continue.

**Théorème 2.5.** *Soit  $k \geq 0$  un entier.*

- (i)  $C_0^k(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$  et  $C^k(\overline{\mathbb{R}^N}, \mathbb{R}^N)$  satisfont les hypothèses 2.1 à 2.4,  $C_0^k(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \subset C^k(\overline{\mathbb{R}^N}, \mathbb{R}^N) \subset C^0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ , et, pour tout  $x \in \mathbb{R}^N$ , la transformation  $f \mapsto f(x) : C^k(\overline{\mathbb{R}^N}, \mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}^N$  est continue.
- (ii)  $\mathcal{B}^k(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$  et  $C^{k,1}(\overline{\mathbb{R}^N}, \mathbb{R}^N)$  vérifient les hypothèses 2.1 à 2.3,  $C^{k,1}(\overline{\mathbb{R}^N}, \mathbb{R}^N) \subset \mathcal{B}^k(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \subset C^0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ , et, pour tout  $x \in \mathbb{R}^N$ , la transformation  $f \mapsto f(x) : \mathcal{B}^k(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}^N$  est continue.

**Théorème 2.6.** (i) *Si les hypothèses 2.1 à 2.3 sont vérifiées pour un espace de Banach  $\Theta$  contenu dans  $C^0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$  tel que, pour tout  $x \in \mathbb{R}^N$ , la transformation  $f \mapsto f(x) : \Theta \rightarrow \mathbb{R}^N$  est continue. Alors  $(\mathcal{F}(\Theta), d)$  est un espace métrique complet.*

- (ii) *Si les hypothèses 2.1 à 2.4 sont vérifiées pour un espace de Banach  $\Theta$ . Alors  $\mathcal{F}(\Theta)$  est un groupe topologique complet (métrique).*

*Démonstration.* Cf. M. C. DELFOUR et J.-P. ZOLÉSIO [10]. □

**Remarque 2.1.**

$\mathcal{F}(C^{0,1}(\overline{\mathbb{R}^N}, \mathbb{R}^N))$  est un espace métrique complet si les hypothèses du théorème 2.6 sont vérifiées, mais ce n'est pas un groupe topologique tant que l'hypothèse 2.4 n'est pas vérifiée. □

## 2.2 Interprétation des trajectoires avec sauts

Pour être plus concret, on choisit pour l'espace de Banach  $\Theta = C^{0,1}(\overline{\mathbb{R}^N}, \mathbb{R}^N)$  de norme

$$\|\theta\|_{\Theta} \stackrel{\text{déf}}{=} \max \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |\theta(x)|, c(\theta) \right\}, \quad c(\theta) \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{y \neq x} \frac{|\theta(y) - \theta(x)|}{|y - x|}. \quad (2.16)$$

Revenons à la trajectoire  $T(t)$  définie en (2.13) avec sauts dans  $\Theta$ . Plus précisément, on s'intéresse à  $f(t) = T(t) - I$

$$f(t) \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} 0, & 0 \leq t < t_1, \\ (I + \theta_1) - I, & t_1 < t < t_2, \\ (I + \theta_2) \circ (I + \theta_1) - I, & t_2 < t < t_3, \\ \dots & \\ (I + \theta_i) \circ \dots \circ (I + \theta_1) - I, & t_i < t < t_{i+1}, \\ \dots & \\ (I + \theta_n) \circ \dots \circ (I + \theta_1) - I, & t_n < t \leq 1, \end{cases} \quad (2.17)$$

où il sera utile de poser  $t_0 = 0$  et  $t_{n+1} = 1$ . De la même façon, on définit  $g(t) = T(t)^{-1} - I$

$$g(t) \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} 0, & 0 \leq t < t_1, \\ (I + \theta_1)^{-1} - I, & t_1 < t < t_2, \\ (I + \theta_1)^{-1} \circ (I + \theta_2)^{-1} - I, & t_2 < t < t_3, \\ \dots & \\ (I + \theta_1)^{-1} \circ \dots \circ (I + \theta_i)^{-1} - I, & t_i < t < t_{i+1}, \\ \dots & \\ (I + \theta_1)^{-1} \circ \dots \circ (I + \theta_n)^{-1} - I, & t_n < t \leq 1, \end{cases} \quad (2.18)$$

qui a la même structure. Pour chaque  $X$ , la fonction  $t \mapsto f(t)(X); [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^N$  est une *fonction étagée* (“*step function*” en anglais<sup>7</sup>) ou fonction avec un nombre fini de sauts se produisant dans l'ouvert  $(0, 1)$ . En particulier, ces fonctions appartiennent au plus gros espace  $BV(0, 1; \mathbb{R}^N)$ . Soit

$$\text{Step}(0, 1; \mathbb{R}^N) \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ f \in BV(0, 1; \mathbb{R}^N) : \begin{array}{l} \exists k \geq 1, 0 < t_1 < \dots < t_k < 1, \text{ et } \{f_i\} \subset \mathbb{R}^N \\ \text{tel que } f = \sum_{i=1}^k f_i \chi_{[t_{i-1}, t_i)} + f_k \chi_{[t_k, 1]} \end{array} \right\}, \quad (2.19)$$

où  $\chi_{[t_{i-1}, t_i)}$  est la fonction caractéristique de l'intervalle  $[t_{i-1}, t_i)$ , auquel on peut associer le sous-espace de  $M^1(0, 1; \mathbb{R}^N)$  des impulsions finies en un nombre de points finis

$$\Delta^1(0, 1; \mathbb{R}^N) \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ a \in M^1(0, 1; \mathbb{R}^N) : \begin{array}{l} \exists k \geq 1, 0 < t_1 < \dots < t_k < 1, \text{ et } \{a_i\} \subset \mathbb{R}^N \\ \text{tel que } a = \sum_{i=1}^k a_i \delta_{t_i} \end{array} \right\}, \quad (2.20)$$

7. Comme on utilise déjà BV pour *bounded variation* au lieu de VB pour *variation bornée*, on utilise Step pour rester cohérent.

où  $\delta_{t_i}$  est la masse de Dirac en  $t_i$ . La norme dans  $BV(0, 1; \mathbb{R}^N)$  est

$$\|f\|_{BV(0,1;\mathbb{R}^N)} = \|f\|_{\mathbf{L}^1(0,1;\mathbb{R}^N)} + \|f'\|_{M^1(0,1;\mathbb{R}^N)} \quad (2.21)$$

**Théorème 2.7.** Soit  $f(t) = T_t - I$  tel que défini en 2.18, alors

$$f'(\cdot)(X) = \theta_1(X) \delta_{t_1} + \sum_{i=2}^n \theta_i \circ (I + \theta_{i-1}) \circ \cdots \circ (I + \theta_1)(X) \delta_{t_i} \quad (2.22)$$

$$X \mapsto f'(\cdot)(X) : \mathbb{R}^n \rightarrow M^1(0, 1; \mathbb{R}^N) \quad (2.23)$$

en tant que distribution dans  $M^1(0, 1; \mathbb{R}^N)$  et

$$\begin{aligned} & \sup_{X \in \mathbb{R}^N} \{ \|f(\cdot)(X)\|_{L^1(0,1;\mathbb{R}^N)} + \langle f'(\cdot)(X) \rangle_{M^1(0,1;\mathbb{R}^N)} \} \\ & \leq 3 \sum_{i=1}^n \|\theta_i\|_{\Theta} \exp^{\sum_{j=1}^n \|\theta_j\|_{\Theta}}. \end{aligned}$$

*Démonstration.* Trouvons une borne pour  $\|f(t)(X)\|_{\Theta}$ .

Sur  $[0, t_1]$  on a 0.

Sur  $(t_1, t_2)$

$$\begin{aligned} |f(t)(X)| &= |(I + \theta_1)(X) - X| \leq \|\theta_1\|_{C^0(\overline{\mathbb{R}^N}; \mathbb{R}^N)} \\ |f(t)(Y) - f(t)(X)| &= |\theta_1(Y) - \theta_1(X)| \leq c(\theta_1)|Y - X| \Rightarrow c(f(t)) \leq c(\theta_1) \\ \Rightarrow \|f(t)\|_{\Theta} &= \max\{\|f(t)\|_{C^0(\overline{\mathbb{R}^N}; \mathbb{R}^N)}, c(f(t))\} \\ &\leq \max\{\|\theta_1\|_{C^0(\overline{\mathbb{R}^N}; \mathbb{R}^N)}, c(\theta_1)\} = \|\theta_1\|_{\Theta}. \end{aligned}$$

Sur  $(t_2, t_3)$

$$\begin{aligned} (I + \theta_2) \circ (I + \theta_1) - I &= (I + \theta_1) + \theta_2 \circ (I + \theta_1) - I = \theta_1 + \theta_2 \circ (I + \theta_1) \\ |f(t)(X)| &= |((I + \theta_2) \circ (I + \theta_1) - I)(X)| = |\theta_1 + \theta_2 \circ (I + \theta_1)| \\ &\leq \|\theta_1\|_{C^0(\overline{\mathbb{R}^N}; \mathbb{R}^N)} + \|\theta_2\|_{C^0(\overline{\mathbb{R}^N}; \mathbb{R}^N)}. \\ |f(t)(Y) - f(t)(X)| &= |\theta_1(Y) - \theta_1(X) + \theta_2(Y + \theta_1(Y)) - \theta_2(X + \theta_1(X))| \\ &\leq c(\theta_1)|Y - X| + c(\theta_2)(1 + c(\theta_1))|Y - X| \\ \Rightarrow c(f(t)) &\leq c(\theta_1) + c(\theta_2)(1 + c(\theta_1)) \leq [c(\theta_1) + c(\theta_2)] \exp^{c(\theta_1) + c(\theta_2)} \\ \Rightarrow \|f(t)\|_{\Theta} &\leq [\|\theta_1\|_{\Theta} + \|\theta_2\|_{\Theta}] \exp^{\|\theta_1\|_{\Theta} + \|\theta_2\|_{\Theta}}. \end{aligned}$$

Ainsi de suite jusqu'à l'intervalle  $(t_n, 1)$

$$|((I + \theta_n) \circ \cdots \circ (I + \theta_1) - I)(X)| \leq \sum_{i=1}^n \|\theta_i\|_{C^0(\overline{\mathbb{R}^N}; \mathbb{R}^N)} \quad (2.24)$$

$$c(f(t)) \leq \sum_{i=1}^n \|c(\theta_i)\| \exp^{\sum_{j=1}^n c(\theta_j)}. \quad (2.25)$$

Nous en concluons que  $f$  est ponctuellement uniformément bornée pour presque tout  $t$  dans  $[0, 1]$  car

$$\|f(t)\|_{\Theta} \leq \sum_{i=1}^n \|\theta_i\|_{\Theta} \exp^{\sum_{j=1}^n \|\theta_j\|_{\Theta}}$$

et donc

$$\|f(\cdot)(X)\|_{L^1(0,1;\mathbb{R}^N)} \leq \|f(\cdot)(X)\|_{L^\infty(0,1;\mathbb{R}^N)} \leq \sum_{i=1}^n \|\theta_i\|_{\Theta} \exp^{\sum_{j=1}^n \|\theta_j\|_{\Theta}} .$$

Calculons la dérivée distribution  $f'(\cdot)(X)$  de  $f(\cdot)(X)$ .

Soit  $\varphi \in \mathcal{D}(0, 1)$ .

$$\begin{aligned} \langle f'(\cdot)(X), \varphi \rangle &= - \int_0^1 f(t)(X) \varphi'(t) dt \\ &= - \sum_{i=1}^n [(I + \theta_i) \circ \dots \circ (I + \theta_1)(X) - X] \int_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi'(t) dt \\ &= - \sum_{i=1}^n [(I + \theta_i) \circ \dots \circ (I + \theta_1)(X) - X] (\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)) \\ &= - \sum_{i=2}^{n+1} [(I + \theta_{i-1}) \circ \dots \circ (I + \theta_1)(X) - X] \varphi(t_i) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n [(I + \theta_i) \circ \dots \circ (I + \theta_1)(X) - X] \varphi(t_i) \\ &= \sum_{i=2}^n ((I + \theta_i) \circ \dots \circ (I + \theta_1)(X) \\ &\quad - (I + \theta_{i-1}) \circ \dots \circ (I + \theta_1)(X)) \varphi(t_i) \\ &\quad - [(I + \theta_n) \circ \dots \circ (I + \theta_1)(X) - X] \varphi(t_{n+1}) \\ &\quad + [(I + \theta_1)(X) - X] \varphi(t_1) \\ &= \sum_{i=2}^n ((I + \theta_i) \circ \dots \circ (I + \theta_1)(X) \\ &\quad - (I + \theta_{i-1}) \circ \dots \circ (I + \theta_1)(X)) \varphi(t_i) \\ &\quad + [(I + \theta_1)(X) - X] \varphi(t_1). \end{aligned}$$

Ceci nous donne

$$\begin{aligned}
|\langle f'(\cdot)(X), \varphi \rangle| &\leq \sum_{i=2}^n \prod_{j=1}^{i-1} (1 + c(\theta_j)) |\theta_i(X)| |\varphi(t_i)| \\
&\quad + |\theta_1(X)| |\varphi(t_1)| \\
&\leq \sum_{i=2}^n \prod_{j=1}^{i-1} \exp^{c(\theta_j)} |\theta_i(X)| |\varphi(t_i)| \\
&\quad + |\theta_1(X)| |\varphi(t_1)| \\
&\leq \sum_{i=2}^n \exp^{\sum_{j=1}^{i-1} c(\theta_j)} |\theta_i(X)| |\varphi(t_i)| \\
&\quad + |\theta_1(X)| |\varphi(t_1)|.
\end{aligned}$$

Nous avons finalement

$$\begin{aligned}
|\langle f'(\cdot)(X), \varphi \rangle| &\leq 2 \exp^{\sum_{j=1}^n c(\theta_j)} \left[ \sum_{i=1}^n |\theta_i(X)| \right] \|\varphi\|_{C^0([0,1];\mathbb{R}^N)} \\
&\leq 2 \exp^{\sum_{j=1}^n c(\theta_j)} \left[ \sum_{i=1}^n \|\theta_i\|_{C^0(\overline{\mathbb{R}^N};\mathbb{R}^N)} \right] \|\varphi\|_{C^0([0,1];\mathbb{R}^N)} \\
\Rightarrow \|f'(\cdot)(X)\|_{M^1(0,1;\mathbb{R}^N)} &\leq 2 \exp^{\sum_{j=1}^n \|\theta_j\|_{\Theta}} \left[ \sum_{i=1}^n \|\theta_i\|_{\Theta} \right] \\
\|f'(\cdot)(Y) - f'(\cdot)(X)\|_{M^1(0,1;\mathbb{R}^N)} &\leq 2 \exp^{\sum_{j=1}^n \|\theta_j\|_{\Theta}} \left[ \sum_{i=1}^n |\theta_i(Y) - \theta_i(X)| \right] \\
&\leq 2 \exp^{\sum_{j=1}^n \|\theta_j\|_{\Theta}} \left[ \sum_{i=1}^n c(\theta_i) \right] |Y - X| \\
c(f'(\cdot)) = \sup_{X \neq Y} \frac{\|f'(\cdot)(Y) - f'(\cdot)(X)\|_{M^1(0,1;\mathbb{R}^N)}}{|Y - X|} &\leq 2 \exp^{\sum_{j=1}^n \|\theta_j\|_{\Theta}} \left[ \sum_{i=1}^n \|\theta_i\|_{\Theta} \right].
\end{aligned}$$

Comme nous avons déjà

$$\|f(\cdot)(X)\|_{L^1(0,1;\mathbb{R}^N)} \leq \|f(\cdot)(X)\|_{L^\infty(0,1;\mathbb{R}^N)} \leq \sum_{i=1}^n \|\theta_i\|_{\Theta} \exp^{\sum_{j=1}^n \|\theta_j\|_{\Theta}},$$

nous avons  $f(\cdot)(X) \in \text{BV}(0, 1; \mathbb{R}^N) \cap L^\infty(0, 1; \mathbb{R}^N)$  et

$$\begin{aligned}
&\sup_{X \in \mathbb{R}^N} \left\{ \|f(\cdot)(X)\|_{L^1(0,1;\mathbb{R}^N)} + \|f'(\cdot)(X)\|_{M^1(0,1;\mathbb{R}^N)} \right\} \\
&\leq 3 \sum_{i=1}^n \|\theta_i\|_{\Theta} \exp^{\sum_{j=1}^n \|\theta_j\|_{\Theta}}.
\end{aligned}$$

Dans les lignes précédentes, nous avons montré

$$\begin{aligned}
 \langle f'(\cdot)(X), \varphi \rangle &= \sum_{i=2}^n [(I + \theta_i) \circ \cdots \circ (I + \theta_1) \\
 &\quad - (I + \theta_{i-1}) \circ \cdots \circ (I + \theta_1)](X) \varphi(t_i) \\
 &\quad + [(I + \theta_1)(X) - X] \varphi(t_1) \\
 &= \sum_{i=2}^n [(I + \theta_i - I) \circ (I + \theta_{i-1}) \circ \cdots \circ (I + \theta_1)](X) \varphi(t_i) \\
 &\quad + [(I + \theta_1)(X) - X] \varphi(t_1) \\
 &= \theta_1(X) \varphi(t_1) + \sum_{i=2}^n [\theta_i \circ (I + \theta_{i-1}) \circ \cdots \circ (I + \theta_1)](X) \varphi(t_i) \\
 &= \sum_{i=1}^n [\theta_i \circ (I + \theta_{i-1}) \circ \cdots \circ (I + \theta_1)](X) \varphi(t_i)
 \end{aligned}$$

et  $f'(\cdot)(X) \in M^1(0, 1; \mathbb{R}^N)$ . On constate que

$$\langle f'(\cdot)(X), \varphi \rangle = \sum_{i=1}^n [\theta_i \circ (I + \theta_{i-1}) \circ \cdots \circ (I + \theta_1)](X) \varphi(t_i)$$

et donc

$$f'(\cdot)(X) = \theta_1(X) \delta_{t_1} + \sum_{i=2}^n \theta_i \circ (I + \theta_{i-1}) \circ \cdots \circ (I + \theta_1)(X) \delta_{t_i}.$$

□

Une question se pose alors, existe-t-il un  $V(t)$  tel que

$$\frac{dT_t}{dt} = V(t) \circ T_t$$

ou

$$f'(t) = V(t) \circ (I + f(t))$$

tout en donnant un sens à ces équations ? Rappelons que nous avons

$$I + f(t) \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} I, & 0 \leq t < t_1, \\ (I + \theta_1), & t_1 < t < t_2, \\ (I + \theta_2) \circ (I + \theta_1), & t_2 < t < t_3, \\ \dots \\ (I + \theta_i) \circ \cdots \circ (I + \theta_1), & t_i < t < t_{i+1}, \\ \dots \\ (I + \theta_n) \circ \cdots \circ (I + \theta_1), & t_n < t \leq 1, \end{cases}$$



qui est constante par morceaux. Un  $V(t)$  potentiel serait

$$V(t)(X) = \sum_{i=1}^n \theta_i(X) \delta_{t_i}(t) \in M^1(0, 1; \mathbb{R}^N).$$

Malheureusement, on peut seulement composer une fonction  $M^1(0, 1; \mathbb{R}^N)$  avec une fonction continue et  $I + f(t)$  est seulement dans  $BV(0, 1; \mathbb{R}^N)$ . Pour contourner ce problème, on peut faire l'approximation de  $I + f(t)$  par des fonctions continues en régularisant autour de chaque  $t_i$ .

Premièrement, linéarisons pour obtenir une approximation à droite.

Soit  $0 < \epsilon < \inf_{i=1 \dots n} |t_{i+1} - t_i|$

$$I + f_\epsilon^+(t) \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} I, & 0 \leq t \leq t_1 - \epsilon, \\ (I + \theta_1) \left[ \frac{t - t_1 + \epsilon}{\epsilon} \right] + I \left[ \frac{t_1 - t}{\epsilon} \right], & t_1 - \epsilon < t < t_1, \\ (I + \theta_1), & t_1 \leq t \leq t_2 - \epsilon, \\ \dots \\ (I + \theta_{i-1}) \circ \dots \circ (I + \theta_1), & t_{i-1} \leq t \leq t_i - \epsilon, \\ (I + \theta_i) \circ \dots \circ (I + \theta_1) \left[ \frac{t - t_i + \epsilon}{\epsilon} \right] + \\ (\theta_{i-1}) \circ \dots \circ (I + \theta_1) \left[ \frac{t_i - t}{\epsilon} \right], & t_i - \epsilon < t < t_i, \\ (I + \theta_i) \circ \dots \circ (I + \theta_1), & t_i \leq t \leq t_{i+1} - \epsilon, \\ \dots \\ (I + \theta_{n-1}) \circ \dots \circ (I + \theta_1), & t_{n-1} \leq t \leq t_n - \epsilon, \\ (I + \theta_n) \circ \dots \circ (I + \theta_1) \left[ \frac{t - t_n + \epsilon}{\epsilon} \right] + \\ (\theta_{n-1}) \circ \dots \circ (I + \theta_1) \left[ \frac{t_n - t}{\epsilon} \right], & t_n - \epsilon < t < t_n, \\ (I + \theta_n) \circ \dots \circ (I + \theta_1), & t_n \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Lorsque  $\epsilon$  est assez petit, nous avons  $I + f_\epsilon^+(t) \in \mathcal{F}(\Theta)$ . De plus, lorsque  $\epsilon$  tend vers 0, nous avons que  $I + f_\epsilon^+(t)$  tend vers

$$I + f^+(t) \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} I, & 0 \leq t < t_1, \\ (I + \theta_1), & t_1 \leq t < t_2, \\ (I + \theta_2) \circ (I + \theta_1), & t_2 \leq t < t_3, \\ \dots \\ (I + \theta_i) \circ \dots \circ (I + \theta_1), & t_i \leq t < t_{i+1}, \\ \dots \\ (I + \theta_n) \circ \dots \circ (I + \theta_1), & t_n \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Nous obtenons donc que

$$\begin{aligned}
 V(t) \circ (I + f^+(t)) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} V(t) \circ (I + f_\epsilon^+(t)) \\
 &= \sum_{i=1}^n \theta_i \circ (I + \theta_i) \circ \dots \circ (I + \theta_1) \delta_{t_i}(t)
 \end{aligned}$$

et ainsi

$$\begin{aligned}
 &\langle V(\cdot) \circ (I + f^+(\cdot))(X), \varphi \rangle \\
 &= \sum_{i=1}^n \langle \theta_i(X) \circ (I + \theta_i) \circ \dots \circ (I + \theta_1) \circ \varphi(t_i) \rangle \\
 &\neq \langle f'(\cdot)(X), \varphi \rangle.
 \end{aligned}$$

Deuxièmement, linéarisons pour obtenir une approximation à gauche.

Soit  $0 < \epsilon < \inf_{i=1 \dots n} |t_{i+1} - t_i|$

$$I + f_\epsilon^-(t) \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} I, & 0 \leq t \leq t_1, \\
 (I + \theta_1) \left[ \frac{t - t_1}{\epsilon} \right] + I \left[ \frac{t_1 - t + \epsilon}{\epsilon} \right], & t_1 < t < t_1 + \epsilon, \\
 (I + \theta_1), & t_1 + \epsilon \leq t \leq t_2, \\
 \dots & \\
 (I + \theta_{i-1}) \circ \dots \circ (I + \theta_1), & t_{i-1} + \epsilon \leq t \leq t_i, \\
 (I + \theta_i) \circ \dots \circ (I + \theta_1) \left[ \frac{t - t_i}{\epsilon} \right] + \\
 (\theta_{i-1}) \circ \dots \circ (I + \theta_1) \left[ \frac{t_i - t + \epsilon}{\epsilon} \right], & t_i < t < t_i + \epsilon, \\
 (I + \theta_i) \circ \dots \circ (I + \theta_1), & t_i + \epsilon \leq t \leq t_{i+1}, \\
 \dots & \\
 (I + \theta_{n-1}) \circ \dots \circ (I + \theta_1), & t_{n-1} + \epsilon \leq t \leq t_n, \\
 (I + \theta_n) \circ \dots \circ (I + \theta_1) \left[ \frac{t - t_n}{\epsilon} \right] + \\
 (\theta_{n-1}) \circ \dots \circ (I + \theta_1) \left[ \frac{t_n - t + \epsilon}{\epsilon} \right], & t_n < t < t_n + \epsilon, \\
 (I + \theta_n) \circ \dots \circ (I + \theta_1), & t_n + \epsilon \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Lorsque  $\epsilon$  est assez petit, nous avons  $I + f_\epsilon^-(t) \in \mathcal{F}(\Theta)$ . De plus, lorsque  $\epsilon$  tend vers

0, nous avons que  $I + f_\epsilon^-(t)$  tend vers

$$I + f^-(t) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \begin{cases} I, & 0 \leq t \leq t_1, \\ (I + \theta_1), & t_1 < t \leq t_2, \\ (I + \theta_2) \circ (I + \theta_1), & t_2 < t \leq t_3, \\ \dots \\ (I + \theta_i) \circ \dots \circ (I + \theta_1), & t_i < t \leq t_{i+1}, \\ \dots \\ (I + \theta_n) \circ \dots \circ (I + \theta_1), & t_n < t \leq 1. \end{cases}$$

Nous obtenons donc que

$$\begin{aligned} V(t) \circ (I + f^-(t)) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} V(t) \circ (I + f_\epsilon^-(t)) \\ &= \sum_{i=1}^n \theta_i \circ (I + \theta_{i-1}) \circ \dots \circ (I + \theta_1) \delta_{t_i}(t) \end{aligned}$$

et ainsi

$$\begin{aligned} &\langle V(\cdot) \circ (I + f^-(\cdot))(X), \varphi \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n (\theta_i(X) \circ (I + \theta_{i-1}) \circ \dots \circ (I + \theta_1) \circ \varphi(t_i)) \\ &= \langle f'(\cdot)(X), \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Troisi\u00e8mement, dans le m\u00eame ordre d'id\u00e9es, lin\u00e9arisons pour obtenir une approximation \u00e0 combinaison convexe  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ).

Soit  $0 < \epsilon < \inf_{i=1 \dots n} |t_{i+1} - t_i|$ , dans ce cas-ci, la droite autour de chaque saut sera celle qui passe par le point

$$(t_i, \alpha[(I + \theta_{i-1}) \circ \dots \circ (I + \theta_1)] + (1 - \alpha)[I + \theta_i] \circ \dots \circ (I + \theta_1))$$

o\u00f9  $\alpha[(I + \theta_{i-1}) \circ \dots \circ (I + \theta_1)] + (1 - \alpha)[I + \theta_i] \circ \dots \circ (I + \theta_1)$  est la combinaison convexe  $\alpha$  dans  $\mathcal{F}(\Theta)$  et qui a une pente \u00e9gale \u00e0

$$\frac{(I + \theta_i) \circ \dots \circ (I + \theta_1) - (I + \theta_{i-1}) \circ \dots \circ (I + \theta_1)}{\epsilon}.$$

Encore une fois, lorsque  $\epsilon$  est assez petit, nous avons  $I + f_\epsilon^\alpha(t) \in \mathcal{F}(\Theta)$ . De plus,

lorsque  $\epsilon$  tend vers 0, nous avons que  $I + f_\epsilon^\alpha(t)$  tend vers

$$I + f^\alpha(t) \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \begin{cases} I, & 0 \leq t < t_1, \\ \alpha I + (1 - \alpha)(I + \theta_1), & t = t_1, \\ (I + \theta_1), & t_1 < t < t_2, \\ \alpha(I + \theta_1) + (1 - \alpha)(I + \theta_2) \circ (I + \theta_1), & t = t_2, \\ (I + \theta_2) \circ (I + \theta_1), & t_2 < t < t_3, \\ \dots & \\ (I + \theta_i) \circ \dots \circ (I + \theta_1), & t_i < t < t_{i+1}, \\ \alpha(I + \theta_i) \circ \dots \circ (I + \theta_1) + \\ (1 - \alpha)(I + \theta_{i+1}) \circ \dots \circ (I + \theta_1), & t = t_{i+1}, \\ \dots & \\ (I + \theta_n) \circ \dots \circ (I + \theta_1), & t_n < t \leq 1. \end{cases}$$

Nous obtenons donc que

$$\begin{aligned} & V(t) \circ (I + f^\alpha(t)) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} V(t) \circ (I + f_\epsilon^\alpha(t)) \\ &= \sum_{i=1}^n \theta_i \circ (\alpha(I + \theta_{i-1}) \circ \dots \circ (I + \theta_1) + (1 - \alpha)(I + \theta_i) \circ \dots \circ (I + \theta_1)) \delta_{t_i}(t) \end{aligned}$$

et ainsi

$$\begin{aligned} & \langle V(\cdot) \circ (I + f^\alpha(\cdot))(X), \varphi \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n (\theta_i(X) \circ (\alpha(I + \theta_{i-1}) \circ \dots \circ (I + \theta_1) + (1 - \alpha)(I + \theta_i) \circ \dots \circ (I + \theta_1)) \circ \varphi(t_i)) \\ & \neq \langle f'(\cdot)(X), \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Ces trois exemples d'approximation illustrent bien le caractère multivoque de la fonction  $V(t) \circ (I + f(t))$ . On constate que pour la même fonction  $I + f(t) \in BV(0, 1; \mathbb{R}^N)$ ,  $V(t) \circ (I + f(t))$  donne plusieurs fonctions dans  $M^1(0, 1; \mathbb{R}^N)$ . Bien entendu, notre  $f'(t)$  figure dans ces fonctions.

$$f'(t) \in \{ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} V(t) \circ (f_\epsilon(t) + I) : f_\epsilon(t) \text{ est une approximation continue de } f(t) \}$$

Nous savons même le choix précis que nous devons prendre comme approximation continue pour obtenir  $f'(t) = V(t) \circ (I + f(t))$ , c'est  $f_\epsilon^-(t)$  et ainsi

$$f'(t) \in \{ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} V(t) \circ (I + f_\epsilon^\alpha) : 0 \leq \alpha \leq 1 \}.$$

Pour continuer dans cette voie, l'étude des équations différentielles multivoques avec

sauts semble obligatoire. Par choix, nous ne nous aventurerons pas dans ce sujet qui, de par sa complexité, demanderait une revue intégrale de la littérature couvrant les fonctions multivoques, à la suite de quoi l'étude de notre contexte ne pourrait que débiter. Toutefois, avis aux intéressés, le sujet est ouvert et il pourrait être innovateur de l'analyser en profondeur.

### 3 Les métriques sur des transformations générées par un champ de vitesses

#### 3.1 Sous-groupe $G_\Theta$ de transformations générées par un champ de vitesses

Rappelons la définition du groupe  $\mathcal{F}(\Theta)$

$$\mathcal{F}(\Theta) \stackrel{\text{déf}}{=} \{I + \theta : \theta \in \Theta, (I + \theta)^{-1} \exists, \text{ et } (I + \theta)^{-1} - I \in \Theta\}$$

pour l'espace de Banach  $\Theta = C^{0,1}(\overline{\mathbb{R}^N}, \mathbb{R}^N)$  de norme

$$\|\theta\|_\Theta \stackrel{\text{déf}}{=} \max \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |\theta(x)|, c(\theta) \right\}, \quad c(\theta) \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{y \neq x} \frac{|\theta(y) - \theta(x)|}{|y - x|}. \quad (3.1)$$

On a vu que la métrique  $d$  définie précédemment en (2.6) fait de  $\mathcal{F}(\Theta)$  un espace complet. Cette section se concentre sur le sous-groupe de transformations dans  $\mathcal{F}(\Theta)$  qui sont générées par un champ de vecteurs  $V$  variant sur l'intervalle  $[0, 1]$  avec les propriétés suivantes :

- (i) pour tout  $x \in \mathbb{R}^N$ , la fonction  $t \mapsto V(t, x) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^N$  est dans  $L^1(0, 1; \mathbb{R}^N)$  et

$$\int_0^1 \|V(t)\|_C dt = \int_0^1 \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |V(t, x)| dt < \infty; \quad (3.2)$$

- (ii) pour presque tout  $t \in [0, 1]$ , la fonction  $x \mapsto V(t, x) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  est lipschitzienne et

$$\int_0^1 c(V(t)) dt = \int_0^1 \sup_{x \neq y} \frac{|V(t, y) - V(t, x)|}{|y - x|} dt < \infty. \quad (3.3)$$

Il est donc naturel d'introduire pour ces vitesses  $V$  la norme

$$\|V\|_{L^1(0,1;\Theta)} \stackrel{\text{déf}}{=} \int_0^1 \|V(t)\|_\Theta dt.$$

On associe à  $V \in L^1(0, 1; \Theta)$  la famille de transformations  $T_t(V)$  définies via les solutions de l'équation différentielle

$$x'(t; X) = V(t, x(t; X)), \quad x(0; X) = X.$$

Elle a une solution unique dans  $W^{1,1}(0,1;\mathbb{R}^N) \subset C([0,1],\mathbb{R}^N)$ , la transformation  $X \mapsto x(\cdot; X) : \mathbb{R}^N \rightarrow C([0,1],\mathbb{R}^N)$  est continue et, pour chaque  $t \in [0,1]$ , la transformation  $X \mapsto T_t(V)(X) \stackrel{\text{déf}}{=} x(t; X) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  est bijective. Ceci donne un sens à l'équation d'évolution suivante pour  $T_t(V)$  :

$$\frac{dT_t(V)}{dt} = V(t) \circ T_t(V), \quad T_0(V) = I.$$

Définissons

$$G_\Theta \stackrel{\text{déf}}{=} \{T_1(V) : \forall V \in L^1(0,1;\Theta)\}.$$

**Théorème 3.1.** (i) *L'ensemble  $G_\Theta$  avec la composition  $\circ$ ,*

$$\forall V_1, V_2 \in L^1(0,1;\Theta), \quad T_1(V_1) \circ T_1(V_2),$$

*est un sous-groupe de  $\mathcal{F}(\Theta)$  et pour tout  $V \in L^1(0,1;\Theta)$ ,*

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \|T_t(V) - I\|_\Theta = \sup_{0 \leq t \leq 1} \|\theta_V(t)\|_\Theta \leq \|V\|_{L^1} \exp^{2(1+\|V\|_{L^1})}, \quad (3.4)$$

*où  $\theta_V(t) \stackrel{\text{déf}}{=} T_t(V) - I$  et  $L^1$  pour  $L^1(0,1;\Theta)$ . En particulier, pour tout  $t$ ,  $T_t(V) \in \mathcal{F}(\Theta)$ ,  $t \mapsto T_t(V) : [0,1] \rightarrow \mathcal{F}(\Theta)$  est une trajectoire absolument continue, et pour toute paire  $0 \leq s \leq t \leq 1$*

$$\|T_t(V) - T_s(V)\|_\Theta \leq \max_{0 \leq r \leq 1} \|T_r(V)\|_\Theta \int_s^t \|V(r)\|_\Theta dr. \quad (3.5)$$

(ii) *Pour tout  $V \in L^1(0,1;\Theta)$ ,  $(T_1(V))^{-1} = T_1(V^-)$  pour  $V^-(t,x) = -V(1-t,x)$ ,*

$$-\theta_V \circ (I + \theta_V)^{-1} = (T_1(V))^{-1} - I = T_1(V^-) - I = \theta_{V^-}, \quad (3.6)$$

$$\|V^-\|_{L^1(0,1;\Theta)} = \|V\|_{L^1(0,1;\Theta)}, \quad (3.7)$$

*et*

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \|T_t(V)^{-1} - I\|_\Theta = \sup_{0 \leq t \leq 1} \|\theta_{V^-}(t)\|_\Theta \leq \|V\|_{L^1} \exp^{2(1+\|V\|_{L^1})}. \quad (3.8)$$

(iii) *Pour tout  $V \in L^1(0,1;\Theta)$ ,*

$$\|T_1(V) - I\|_\Theta + \|(T_1(V))^{-1} - I\|_\Theta \leq 2\|V\|_{L^1(0,1;\Theta)} \exp^{2(1+\|V\|_{L^1(0,1;\Theta)})} \quad (3.9)$$

$$\Rightarrow d(T_1(V), I) \leq 2\|V\|_{L^1(0,1;\Theta)} \exp^{2(1+\|V\|_{L^1(0,1;\Theta)})}. \quad (3.10)$$

(iv) *Pour tout  $V, W \in L^1(0,1;\Theta)$ ,*

$$\begin{aligned} & \max \left\{ \sup_{0 \leq t \leq 1} \|\theta_W(t) - \theta_V(t)\|_\Theta, \sup_{0 \leq t \leq 1} \|\theta_{W^-}(t) - \theta_{V^-}(t)\|_\Theta \right\} \\ & \leq \|V\|_{L^1} \exp^{(1+\|V\|_{L^1})} \left( 1 + \|W\|_{L^1} \exp^{2(1+\|W\|_{L^1})} \right) \|W - V\|_{L^1}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

*où  $L^1$  signifie  $L^1(0,1;\Theta)$ .*

(v) Pour tout  $V \in L^1(0, 1; \Theta)$  et  $\theta_V(t) = T_t(V) - I$ , on a

$$\|\theta'_V\|_{L^1} \leq \left(1 + \|V\|_{L^1} \exp^{2(1+\|V\|_{L^1})}\right) \|V\|_{L^1}, \quad (3.12)$$

où  $L^1$  signifie  $L^1(0, 1; \Theta)$ .

**Remarque 3.1.**

Il est à noter que la condition d'existence de  $(I-\theta)$  et  $(I-\theta)^{-1} \in \Theta$  dans la définition de  $\mathcal{F}(\Theta)$  est automatiquement vérifiée pour les tranformations  $I + \theta_V$  générées par un champ de vitesses  $V \in L^1(0, 1; \Theta)$ .  $\square$

*Démonstration.* (i) L'identité  $I$  qui correspond à  $V = 0$  est dans  $G_\Theta$ . Pour montrer que  $G_\Theta$  est fermé sous la composition, il est suffisant de construire  $W \in L^1(0, 1; \Theta)$  tel que  $T_1(W) = T_1(V_1) \circ T_1(V_2)$ . Soit  $\tau \in (0, 1)$  définissons la *concaténation*

$$(V_1 * V_2)(t, x) \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} \frac{1}{\tau} V_2\left(\frac{t}{\tau}, x\right), & 0 \leq t \leq \tau, \\ \frac{1}{1-\tau} V_1\left(\frac{t-\tau}{1-\tau}, x\right), & \tau < t \leq 1. \end{cases} \quad (3.13)$$

Il est simple de vérifier que  $W = V_1 * V_2 \in L^1(0, 1; \Theta)$ , la concaténation des fonctions  $V_1$  et  $V_2$  dans  $L^1$  est tel que

$$\frac{dT_t(W)}{dt} = W(t) \circ T_t(W), \quad T_0(W) = I$$

a une solution unique et  $T_1(W) \in G_\Theta$ . Sur l'intervalle  $[0, \tau]$

$$\begin{aligned} T_t(W)(X) - X &= \int_0^t V_2\left(\frac{s}{\tau}, T_s(W)(X)\right) d\left(\frac{s}{\tau}\right) = \int_0^{t/\tau} V_2(s', T_{s'\tau}(W)(X)) ds' \\ \Rightarrow T_{t'\tau}(W)(X) - X &= \int_0^{t'} V_2(s', T_{s'\tau}(W)(X)) ds', \quad 0 \leq t' \leq 1 \\ \Rightarrow T_{t'\tau}(W)(X) &= T_{t'}(V_2)(X) \quad \text{et} \quad T_\tau(W) = T_1(V_2). \end{aligned}$$

Sur l'intervalle  $[\tau, 1]$

$$\begin{aligned} T_t(W)(X) - T_1(V_2) &= \int_\tau^t V_1\left(\frac{s-\tau}{1-\tau}, T_s(W)(X)\right) d\left(\frac{s-\tau}{1-\tau}\right) \\ &= \int_0^{\frac{t-\tau}{1-\tau}} V_2(s', T_{\tau+s'(1-\tau)}(W)(X)) ds' \\ \Rightarrow T_{\tau+t'(1-\tau)}(W)(X) - T_1(V_2) &= \int_0^{t'} V_2(s', T_{\tau+s'(1-\tau)}(W)(X)) ds', \quad 0 \leq t' \leq 1, \\ T_{\tau+t'(1-\tau)}(W)(X) &= T_{t'}(V_1) \circ T_1(V_2) \quad \text{et} \quad T_1(W)(X) = T_1(V_1) \circ T_1(V_2). \end{aligned}$$

Pour montrer que chaque  $T_1(V)$  a un inverse dans  $G_\Theta$ , considérons une nouvelle fonction

$$y(t; X) \stackrel{\text{déf}}{=} [T_{1-t}(V) \circ (T_1(V))^{-1}](X) = x(1-t; (T_1(V))^{-1}(X)), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

tel que  $y(0; X) = [T_1(V) \circ (T_1(V))^{-1}](X) = X$  et  $y(1; X) = (T_1(V))^{-1}(X)$ . Nous avons que

$$\frac{dy}{dt}(t; X) = -V(1-t, y(t; X)), \quad y(0; X) = X,$$

et son champ vectoriel associé  $V^-(t, x) \stackrel{\text{déf}}{=} -V(1-t, x)$  est clairement dans  $L^1(0, 1; \Theta)$ . Donc,  $G_\Theta$  est un groupe d'homéomorphisme de  $\mathbb{R}^N$ , ce qui implique que  $G_\Theta \subset \text{Hom}(\mathbb{R}^N)$ .

Pour montrer que  $G_\Theta \subset \mathcal{F}(\Theta)$ , il est nécessaire de montrer que pour chaque  $V$ ,  $\theta = T_1(V) - I \in \Theta$ . Soit  $X \in \mathbb{R}^N$ , considérons les fonctions  $x(t) = T_t(V)(X)$  et  $\theta(t; X) = x(t) - X$ . Par définition

$$\begin{aligned} \theta(t; X) &= x(t) - X = \int_0^t V(s, X + \theta(s; X)) ds, \\ |\theta(t; X)| &\leq \int_0^t |V(s, X + \theta(s; X)) - V(s, X)| ds + \int_0^t |V(s, X)| ds \\ &\leq \int_0^t c(V(s)) |\theta(s; X)| ds + \int_0^t |V(s, X)| ds, \\ \sup_X |\theta(t; X)| &\leq \int_0^t c(V(s)) \sup_X |\theta(s; X)| ds + \int_0^t \sup_X |V(s, X)| ds. \end{aligned}$$

Soit  $0 < \alpha < 1$ , posons  $g_\alpha(t) = \exp(\int_0^t c(V(s)) ds/\alpha)$ . Ainsi,  $g'_\alpha(t) = \frac{1}{\alpha} c(V(t)) g_\alpha(t)$ . Alors, nous avons l'inégalité de Gronwald qui se démontre comme suit :

$$\sup_X |\theta(t; X)| \leq \int_0^t c(V(s)) g_\alpha(s) \frac{\sup_X |\theta(s; X)|}{g_\alpha(s)} ds + \int_0^t \sup_X |V(s, X)| ds.$$

Comme

$$\begin{aligned} \int_0^t c(V(s)) g_\alpha(s) \frac{\sup_X |\theta(s; X)|}{g_\alpha(s)} ds &\leq \sup_{s \in [0, t]} \frac{\sup_X |\theta(s; X)|}{g_\alpha(s)} \int_0^t c(V(s)) g_\alpha(s) ds \\ &= \sup_{s \in [0, t]} \frac{\sup_X |\theta(s; X)|}{g_\alpha(s)} \int_0^t \alpha g'_\alpha(s) ds \\ &= \sup_{s \in [0, t]} \frac{\sup_X |\theta(s; X)|}{g_\alpha(s)} \alpha (g_\alpha(t) - g_\alpha(0)) \\ &= \sup_{s \in [0, t]} \frac{\sup_X |\theta(s; X)|}{g_\alpha(s)} \alpha (g_\alpha(t) - 1) \\ &\leq \sup_{s \in [0, t]} \frac{\sup_X |\theta(s; X)|}{g_\alpha(s)} \alpha g_\alpha(t), \end{aligned}$$



donc

$$\frac{\sup_X |\theta(t; X)|}{g_\alpha(t)} \leq \alpha \sup_{s \in [0, t]} \frac{\sup_X |\theta(s; X)|}{g_\alpha(t)} + \frac{1}{g_\alpha(t)} \int_0^t \sup_X |V(s, X)| ds$$

et

$$\sup_{t \in [0, 1]} \frac{\sup_X |\theta(t; X)|}{g_\alpha(t)} \leq \alpha \sup_{t \in [0, 1]} \frac{\sup_X |\theta(t; X)|}{g_\alpha(t)} + \int_0^1 \sup_X |V(s, X)| ds.$$

Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, 1]} \frac{\sup_X |\theta(t; X)|}{g_\alpha(t)} &\leq \frac{1}{1 - \alpha} \int_0^1 \sup_X |V(s, X)| ds \\ \Rightarrow \sup_{t \in [0, 1]} \|\theta(t)\|_C &\leq \frac{g_\alpha(1)}{1 - \alpha} \int_0^1 \|V(s)\|_C ds. \end{aligned}$$

Pour montrer que  $\theta$  est lipschitzienne, prenons  $X, Y \in \mathbb{R}^N$ ,  $X \neq Y$  et considérons les fonctions  $x(t) = T_t(V)(X)$ ,  $y(t) = T_t(V)(Y)$ ,  $\theta(t; X) = x(t) - X$ , et  $\theta(t; Y) = y(t) - Y$ . Par définition,

$$\begin{aligned} \theta(t; X) - \theta(t; Y) &= \int_0^t V(s, Y + \theta(s; Y)) - V(s, X + \theta(s; X)) ds, \\ |\theta(t; X) - \theta(t; Y)| &\leq \int_0^t c(V(s)) |\theta(s; Y) - \theta(s; X)| ds + \int_0^t c(V(s)) |Y - X| ds \\ \Rightarrow \sup_{X \neq Y} \frac{|\theta(t; X) - \theta(t; Y)|}{|Y - X|} &\leq \int_0^t c(V(s)) \sup_{X \neq Y} \frac{|\theta(s; Y) - \theta(s; X)|}{|Y - X|} ds + \int_0^t c(V(s)) ds \\ &\Rightarrow \sup_{t \in [0, 1]} c(\theta(t)) \leq \frac{g_\alpha(1)}{1 - \alpha} \int_0^1 c(V(s)) ds. \end{aligned}$$

La dernière inégalité et celle de la première partie donne que pour tout  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ ,

$$\sup_{t \in [0, 1]} \|\theta(t)\|_\Theta \leq \frac{g_\alpha(1)}{1 - \alpha} \int_0^1 \|V(t)\|_\Theta dt.$$

Pour  $V = 0$ ,  $\theta = 0$ ; pour  $V \neq 0$ , prenons  $\alpha = \int_0^1 \|V(t)\|_\Theta dt / (\int_0^1 \|V(t)\|_\Theta dt + 1)$ . Ainsi, (3.4) est satisfaite car

$$\begin{aligned} &\frac{g_\alpha(1)}{1 - \alpha} \int_0^1 \|V(t)\|_\Theta dt \\ &= g_\alpha(1) (\int_0^1 \|V(t)\|_\Theta dt + 1) \int_0^1 \|V(t)\|_\Theta dt \\ &\leq \exp\left(\int_0^1 \|V(t)\|_\Theta dt + 1\right) \exp\left(\int_0^1 \|V(t)\|_\Theta dt + 1\right) \int_0^1 \|V(t)\|_\Theta dt. \end{aligned}$$

Comme  $(I + \theta)^{-1} = (T_1(V))^{-1} = T_1(V^-)$  est de la même forme avec un champ vectoriel  $V^-$ , alors  $(I + \theta)^{-1} - I = (T_1(V))^{-1} - I = T_1(V^-) - I \in \Theta$ . Donc  $G_\Theta$  est un sous-groupe de  $\mathcal{F}(\Theta)$ .

Pour la propriété (3.5)

$$\|T_t(V) - T_s(V)\|_\Theta \leq \max_{0 \leq r \leq 1} \|T_r(V)\|_\Theta \int_s^t \|V(r)\|_\Theta dr. \quad (3.14)$$

On a pour  $0 \leq s \leq t \leq 1$

$$\begin{aligned} T_t(V)(X) - T_s(V)(X) &= \int_s^t V(r, T_r(V)(X)) dr \\ |T_t(V)(X) - T_s(V)(X)| &\leq \int_s^t \|V(r)\|_{C^0} dr \\ \Rightarrow \|\theta_V(t) - \theta_V(s)\|_{C^0} &= \|T_t(V) - T_s(V)\|_{C^0} \leq \int_s^t \|V(r)\|_{C^0} dr. \end{aligned}$$

Pour  $X, Y \in \mathbb{R}^N$

$$\begin{aligned} &T_t(V)(Y) - T_s(V)(Y) - [T_t(V)(X) - T_s(V)(X)] \\ &= \int_s^t [V(r, T_r(V)(Y)) - V(r, T_r(V)(X))] dr \\ &|T_t(V)(Y) - T_s(V)(Y) - [T_t(V)(X) - T_s(V)(X)]| \\ &\leq \int_s^t c(V(r)) c(T_r(V)) |Y - X| dr \\ c(\theta_V(t) - \theta_V(s)) &= c(T_t(V) - T_s(V)) \\ &\leq \int_s^t c(V(r)) c(T_r(V)) dr \leq \max_{0 \leq r \leq 1} c(T_r(V)) \int_s^t c(V(r)) dr \\ \Rightarrow \|\theta_V(t) - \theta_V(s)\|_\Theta &= \|T_t(V) - T_s(V)\|_\Theta \leq \max_{0 \leq r \leq 1} \|T_r(V)\|_\Theta \int_s^t \|V(r)\|_\Theta dr. \end{aligned}$$

Il y a bien continuité et même continuité absolue dans la topologie métrique de  $G_\Theta$ , puisque  $T_t(V) - T_s(V) = \theta_V(t) - \theta_V(s)$ , car c'est  $\theta_V(t)$  qui entre dans la définition de la métrique.

(ii) Par la construction de l'inverse dans la partie (i) et le fait que  $(T_1(V))^{-1} - I = -\theta_V \circ (I + \theta_V)^{-1}$ .

(iii) Par l'inégalité (3.4) appliquée à  $\theta_V$  et  $\theta_{V^-}$  et l'identité (3.7).

(iv) Soit  $\theta_V(t) = T_t(V) - I$  et soit  $\theta_W(t) = T_t(W) - I$  :

$$\begin{aligned}\theta_W(t) - \theta_V(t) &= \int_0^t W(s) \circ T_s(W) - V(s) \circ T_s(V) ds \\ &= \int_0^t (W(s) - V(s)) \circ T_s(W) ds \\ &\quad + \int_0^t V(s) \circ T_s(W) - V(s) \circ T_s(V) ds, \\ \|\theta_W(t) - \theta_V(t)\|_C &\leq \int_0^t \|W(s) - V(s)\|_C ds \\ &\quad + \int_0^t c(V(s)) \|\theta_W(s) - \theta_V(s)\|_C ds \\ \Rightarrow \sup_{0 \leq t \leq 1} \|\theta_W(t) - \theta_V(t)\|_C &\leq \frac{g_\alpha(1)}{1 - \alpha} \int_0^1 \|W(s) - V(s)\|_C ds\end{aligned}$$

pour  $0 < \alpha < 1$  et  $g_\alpha(t) = \exp \int_0^t c(V(s)) ds / \alpha$ . De façon similaire,

$$\begin{aligned}\theta_W(t) - \theta_V(t) &= \int_0^t (W(s) - V(s)) \circ T_s(W) ds \\ &\quad + \int_0^t V(s) \circ T_s(W) - V(s) \circ T_s(V) ds, \\ c(\theta_W(t) - \theta_V(t)) &\leq \int_0^t c(W(s) - V(s)) (1 + c(\theta_W(s))) ds \\ &\quad + \int_0^t c(V(s)) c(\theta_W(s) - \theta_V(s)) ds \\ \Rightarrow \sup_{0 \leq t \leq 1} c(\theta_W(t) - \theta_V(t)) &\leq \frac{g_\alpha(1)}{1 - \alpha} \int_0^1 c(W(s) - V(s)) (1 + c(\theta_W(s))) ds.\end{aligned}$$

Par (i)

$$\sup_{0 \leq s \leq 1} c(\theta_W(s)) \leq \|W\|_{L^1(0,1;\Theta)} \exp^{2(1+\|W\|_{L^1(0,1;\Theta)})}$$

et finalement

$$\begin{aligned}&\sup_{0 \leq t \leq 1} \|\theta_W(t) - \theta_V(t)\|_\Theta \\ &\leq \frac{g_\alpha(1)}{1 - \alpha} (1 + \|W\|_{L^1(0,1;\Theta)} \exp^{2(1+\|W\|_{L^1(0,1;\Theta)})}) \|W(s) - V(s)\|_{L^1(0,1;\Theta)} ds.\end{aligned}$$

Posons  $\alpha = \|V\|_{L^1(0,1;\Theta)} / (1 + \|V\|_{L^1(0,1;\Theta)})$

$$\begin{aligned}&\sup_{0 \leq t \leq 1} \|\theta_W(t) - \theta_V(t)\|_\Theta \\ &\leq \|V\|_{L^1} \exp^{(1+\|V\|_{L^1})} (1 + \|W\|_{L^1(0,1;\Theta)} \exp^{2(1+\|W\|_{L^1})}) \|W(s) - V(s)\|_{L^1} ds.\end{aligned}$$

(v) On pose  $f(t)(V) = T_t(V) - I$  et, pour chaque  $X$ ,

$$f'(t)(V)(X) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{d}{dt} T_t(V)(X) = \frac{d}{dt} [T_t(V)(X) - X].$$

Par définition,

$$f'(t)(V)(X) = V(t, X + f(t)(V)(X))$$

et l'on peut faire quelques estimés

$$\begin{aligned} |f'(t)(V)(X)| &\leq |V(t, X)| + |V(t, X + f(t)(V)(X)) - V(t, X)| \\ &\leq |V(t, X)| + c(V(t)) |f(t)(V)(X)| \\ \|f'(t)(V)\|_{C^0} &\leq \|V(t)\|_{C^0} + c(V(t)) \|f(t)(V)\|_{C^0} \\ \|f'(t)(V)\|_{C^0} &\leq \|V(t)\|_{C^0} + c(V(t)) \max_{t \in [0,1]} \|f(t)(V)\|_{C^0}. \end{aligned}$$

Pour tout  $X, Y$

$$\begin{aligned} f'(t)(V)(Y) - f'(t)(V)(X) &= V(t, Y + f(t)(V)(Y)) - V(t, X + f(t)(V)(X)) \\ |f'(t)(V)(Y) - f'(t)(V)(X)| &\leq c(V(t)) (|Y - X| + |f(t)(V)(Y) - f(t)(V)(X)|) \\ &\leq c(V(t)) (1 + c(f(t)(V))) |Y - X| \\ \Rightarrow c(f'(t)(V)) &\leq c(V(t)) (1 + c(f(t)(V))) \leq c(V(t)) \left(1 + \max_{t \in [0,1]} c(f(t)(V))\right). \end{aligned}$$

En combinant les deux estimés

$$\int_0^1 \|f'(t)(V)\|_{\Theta} dt \leq \left(1 + \max_{t \in [0,1]} \|f(t)(V)\|_{\Theta}\right) \int_0^1 \|V(t)\|_{\Theta} dt.$$

Mais de (3.4) de la partie (i)

$$\max_{0 \leq t \leq 1} \|f(t)(V)\|_{\Theta} \leq \|V\|_{L^1} \exp^{2(1+\|V\|_{L^1})} \quad (3.15)$$

$$\Rightarrow \|f'(\cdot)(V)\|_{L^1} \leq \left(1 + \|V\|_{L^1} \exp^{2(1+\|V\|_{L^1})}\right) \|V\|_{L^1}. \quad (3.16)$$

□

### 3.2 Métrique complète sur $G_{\Theta}$ et les géodésiques

Comme  $G_{\Theta}$  est un sous-groupe du groupe complet  $\mathcal{F}(\Theta)$ , sa fermeture  $\overline{G}_{\Theta}$  selon la métrique  $d$  de  $\mathcal{F}(\Theta)$  est un sous-groupe fermé dont les éléments peuvent être “approximés” par des éléments construits avec des champs de vitesses. Est-ce que  $(G_{\Theta}, d)$  est complet ? Est-ce qu’un champ de vitesses  $V$  peut être associé à un élément limite ?

### 3.2.1 Rappels sur la métrique $d$

Nous avons vu que pour chaque  $V \in L^1(0, 1; \Theta)$ , nous avons une trajectoire continue  $t \mapsto T_t(V)$  dans  $G_\Theta$ . Lorsque la partie de la métrique sur  $I + \theta_V$  est définie comme un infimum sur toutes les factorisations finies  $(I + \theta_{V_1}) \circ \cdots \circ (I + \theta_{V_n})$  de  $I + \theta_V$  et  $(I + \theta_{V_1^-}) \circ \cdots \circ (I + \theta_{V_n^-})$  de  $(I + \theta_V)^{-1}$ ,

$$T_1(V) = T_1(V_1) \circ T_1(V_2) \circ \cdots \circ T_1(V_n),$$

$$d(I, T_1(V)) = \inf_{\substack{T_1(V) = \\ T_1(V_1) \circ \cdots \circ T_1(V_n)}} \sum_{i=1}^n \|\theta_{V_i}\|_\Theta + \|\theta_{V_i^-}\|_\Theta,$$

y-a-t-il un  $V^* \in L^1(0, 1; \Theta)$  qui atteint cet infimum ? Avons-nous une *géodésique* entre  $I$  et  $T_1(V)$  parcourue par  $V^* \in L^1(0, 1; \Theta)$  ?

Soit un champ de vitesses, on construit une trajectoire continue  $t \mapsto T_t(V) : [0, 1] \rightarrow \mathcal{F}(\Theta)$ . À chaque  $t$ , il existe  $\delta > 0$  suffisamment petit pour que la trajectoire  $t \mapsto T_{t+s}(V) \circ T_t^{-1}(V) : [0, \delta] \rightarrow \mathcal{F}(\Theta)$  soit différentiable en  $t$  dans le groupe  $\mathcal{F}(\Theta)$  :

$$\frac{T_{t+s}(V) \circ T_t^{-1}(V) - I}{s} = \frac{1}{s} \int_t^{t+s} V(r) \circ T_r(V) dr \circ T_t^{-1}(V) \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow V(t) \circ T_t(V) \circ T_t^{-1}(V) = V(t) \\ &\Rightarrow \frac{d_{\mathcal{F}} T_t}{dt} = V(t) \quad \text{i.e. dans } \Theta. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Avec cette définition, un saut de  $I + \theta_1$  à  $[I + \theta_2] \circ [I + \theta_1]$  au temps  $1/2$  devient

$$T_{1/2+s}(V) \circ T_{1/2}^{-1}(V) - I = [I + \theta_2] \circ [I + \theta_1] \circ [I + \theta_1]^{-1} - I = I + \theta_2 - I = \theta_2,$$

qui est la *fonction delta de Dirac*  $\theta_2$  dans l'espace tangent  $\Theta$  à  $\mathcal{F}(\Theta)$  en  $1/2$ . Nous avons posé l'espace des fonctions delta de Dirac  $\Delta^1(0, 1; \Theta)$ . La norme de la vitesse  $V = \theta_2 \delta_{1/2}$  dans l'espace de mesure devient

$$\|V\|_{M^1((0,1);\Theta)} = \int_0^1 \|\theta_2\|_\Theta \delta_{1/2} dt = \|\theta_2\|_\Theta.$$

Si nous avons  $n$  sauts,

$$\|V\|_{M^1((0,1);\Theta)} = \sum_{i=1, \dots, n} \|\theta_i\|_\Theta.$$

La métrique de Micheletti est un infimum de ces normes sur toutes les factorisations finies.

Notre analyse montre que la factorisation d'un élément  $I + \theta$  de la forme  $(I + \theta_1) \circ (I + \theta_2) \circ \cdots \circ (I + \theta_n)$  est en fait une trajectoire  $t \mapsto T_t : [0, 1] \rightarrow \mathcal{F}(\Theta)$  bornée dans  $\mathcal{F}(\Theta)$  entre  $I$  et  $I + \theta$  en associant les temps  $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < 1$

à chaque saut dans le groupe  $\mathcal{F}(\Theta)$  :

$$T_t(V) \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} I, & 0 \leq t < t_1, \\ I + \theta_1, & t_1 \leq t < t_2, \\ (I + \theta_1) \circ (I + \theta_2), & t_2 \leq t < t_3, \\ \dots \\ (I + \theta_1) \circ (I + \theta_2) \circ \dots \circ (I + \theta_n), & t_n \leq t \leq 1, \end{cases}$$

$$V(t) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{i=1}^n \theta_i \delta(t_i) \Rightarrow \frac{d_{\mathcal{F}} T_t}{dt} = V(t), \quad \|V\|_{M^1((0,1);\Theta)} = \sum_{i=1,\dots,n} \|\theta_i\|_{\Theta},$$

où la dérivée est dans le groupe (3.17) et  $V$  est de mesure bornée. Nous avons donc approximé la trajectoire par une succession de plateaux.

### 3.2.2 Nouvelle métrique $d_G$ sur $G_{\Theta}$

Il est intéressant de se demander qu'arrive-t-il si nous approximons la trajectoire avec des fonctions dans  $L^1(0, 1; \Theta)$ ? Ainsi, pour  $V \in L^1(0, 1; \Theta)$ , est-ce que la métrique de Micheletti se réduit à

$$d_G(I, T_1(V)) = \inf_{\substack{v \in L^1(0,1;\Theta) \\ T_1(v)=T_1(V)}} \int_0^1 \|v(t)\|_{\Theta} dt = \inf_{\substack{v \in L^1(0,1;\Theta) \\ T_1(v)=T_1(V)}} \int_0^1 \left\| \frac{d_{\mathcal{F}} T_t(v)}{dt} \right\|_{\Theta} dt,$$

où la dérivée est dans le groupe  $\mathcal{F}(\Theta)$ ? Dans le cas positif, on pourrait parler de *géodésique* dans  $\mathcal{F}(\Theta)$  entre  $I$  et  $T_1(V)$ . Si c'était justifié, la prochaine question serait : est-ce que  $G_{\Theta}$  est complet avec la métrique

$$d_G(I, T_1(V)) \stackrel{\text{déf}}{=} \inf_{\substack{v \in L^1(0,1;\Theta) \\ T_1(v)=T_1(V)}} \int_0^1 \|v(t)\|_{\Theta} dt, \quad (3.19)$$

$$d_G(T_1(V), T_1(W)) \stackrel{\text{déf}}{=} d(T_1(V) \circ T_1(W)^{-1}, I)? \quad (3.20)$$

Par définition

$$d_G(T_1(V)^{-1}, I) = d_G(T_1(V), I), \quad d_G(T_1(V), T_1(W)) = d_G(T_1(W), T_1(V))$$

et  $d_G$  est invariante à droite. L'infimum est nécessaire, car la vitesse  $V$  prise pour aller de  $I$  à  $T_1(V)$  n'est pas unique.

**Théorème 3.2.** *Soit  $\Theta$  égal à  $C^{k,1}(\overline{\mathbb{R}^N}, \mathbb{R}^N)$ ,  $C^{k+1}(\overline{\mathbb{R}^N}, \mathbb{R}^N)$ ,  $C_0^{k+1}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$  ou  $\mathcal{B}^{k+1}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ ,  $k \geq 0$ . Alors  $d_G$  est une métrique invariante-droite sur  $G_{\Theta}$ .*

#### Remarque 3.2.

Le théorème est aussi vrai pour

$$d'_G(T_1(V), I) \stackrel{\text{déf}}{=} d(T_1(W), T_1(V)) + \inf_{\substack{W \in L^1(0,1;\Theta) \\ T_1(W)=T_1(V)}} \|W\|_{L^1(0,1;\Theta)}, \quad (3.21)$$

$$d'_G(T_1(V), T_1(W)) \stackrel{\text{déf}}{=} d'_G(T_1(V) \circ T_1(W)^{-1}, I). \quad (3.22)$$

□

*Démonstration.* Nous allons seulement donner la démonstration pour  $C^{0,1}(\overline{\mathbb{R}^N}, \mathbb{R}^N)$ . Rappelons que l'inégalité du triangle est respectée et que  $d_G(T_1(W), T_1(V)) = 0$  si et seulement si  $T_1(W) = T_1(V)$ . Soit  $U, V, W$  dans  $L^1(0, 1; \Theta)$ ,  $T_1(W) \circ T_1(U)^{-1} = T_1(W) \circ T_1(V)^{-1} \circ T_1(V) \circ T_1(U)^{-1}$ . Pour tout  $v \in L^1(0, 1; \Theta)$  tel que  $T_1(v) = T_1(W) \circ T_1(V)^{-1}$  et pour tout  $u \in L^1(0, 1; \Theta)$  tel que  $T_1(u) = T_1(V) \circ T_1(U)^{-1}$ , la concaténation  $v * u$  est telle que  $T_1(v * u) = T_1(W) \circ T_1(U)^{-1}$ . Par définition

$$d_G(T_1(W) \circ T_1(U)^{-1}, I) \leq \|v * u\|_{L^1} = \|v\|_{L^1} + \|u\|_{L^1}.$$

En prenant l'infimum respectivement par  $v$  et  $u$ , nous obtenons l'inégalité du triangle

$$d_G(T_1(W) \circ T_1(U)^{-1}, I) \leq d_G(T_1(W) \circ T_1(V)^{-1}, I) + d_G(T_1(V) \circ T_1(U)^{-1}, I).$$

Si  $T_1(V) = I$ , alors

$$\inf_{\substack{w \in L^1(0,1;\Theta) \\ T_1(w)=I}} \|w\|_{L^1(0,1;\Theta)} = 0$$

et  $d_G(T_1(V), I) = 0$ . Réciproquement, si  $d_G(T_1(V), I) = 0$ , alors

$$\inf_{\substack{v \in L^1(0,1;\Theta) \\ T_1(v)=T_1(V)}} \|v\|_{L^1(0,1;\Theta)} = 0$$

et il existe une suite  $v_n \in L^1(0, 1; \Theta)$  telle que  $v_n \rightarrow 0$  dans  $L^1(0, 1; \Theta)$  et  $T_1(v_n) = T_1(V)$ . Par continuité de  $T_1(v_n) - I$  selon  $v_n$  et par le théorème 3.1 (iv),  $T_1(V) - I = T_1(v_n) - I \rightarrow T_1(0) - I = 0$  et  $T_1(V) = I$ . □

### 3.2.3 Comparaison des métriques $(G_\Theta, d)$ et $(G_\Theta, d_G)$

On peut comparer la métrique  $d_G$  avec celle de Micheletti ( $d$ ) et constater qu'elle est plus forte que cette dernière.

**Théorème 3.3.** *L'injection de  $(G_\Theta, d)$  dans  $(G_\Theta, d_G)$  est continue.*

*Démonstration.* Comme nous avons deux espaces métriques, on peut démontrer le résultat à partir de suites de Cauchy. On rappelle que l'injection ci-haut est continue si toute suite de Cauchy  $\{T_1(V_n)\}$  dans  $(G_\Theta, d_G)$ , c'est-à-dire,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \text{ tel que } \forall n, m > N, \quad d_G(T_1(V_n), T_1(V_m)) < \varepsilon,$$

est Cauchy dans  $(G_\Theta, d)$ . Les deux métriques sont invariantes à droite (cf. (3.19) pour  $d_G$ )

$$\begin{aligned} d_G(T_1(V_n), T_1(V_m)) &= d_G(T_1(V_n) \circ T_1(V_m)^{-1}, I) \\ d(T_1(V_n), T_1(V_m)) &= d(T_1(V_n) \circ T_1(V_m)^{-1}, I). \end{aligned}$$

On sait de l'inégalité (3.9) que, pour tout  $v \in L^1(0, 1; \Theta)$ ,

$$\|T_1(v) - I\|_\Theta + \|(T_1(v))^{-1} - I\|_\Theta \leq 2 \|v\|_{L^1(0,1;\Theta)} \exp^{2(1+\|v\|_{L^1(0,1;\Theta)})}. \quad (3.23)$$

Soit  $v \in L^1(0, 1; \Theta)$  tel que  $T_1(v) = T_1(V_n) \circ T_1(V_m)^{-1}$ , alors par définition de la métrique de Micheletti

$$\begin{aligned} & d(T_1(V_n) \circ T_1(V_m)^{-1}, I) \\ & \leq \|T_1(V_n) \circ T_1(V_m)^{-1} - I\|_{\Theta} + \|(T_1(V_m) \circ T_1(V_n)^{-1} - I)\|_{\Theta} \\ & = \|T_1(v) - I\|_{\Theta} + \|(T_1(v))^{-1} - I\|_{\Theta} \leq 2 \|v\|_{L^1(0,1;\Theta)} \exp^{2(1+\|v\|_{L^1(0,1;\Theta)})}. \end{aligned}$$

Donc, pour tout  $v \in L^1(0, 1; \Theta)$  tel que  $T_1(v) = T_1(V_n) \circ T_1(V_m)^{-1}$

$$d(T_1(V_n) \circ T_1(V_m)^{-1}, I) \leq 2 \|v\|_{L^1(0,1;\Theta)} \exp^{2(1+\|v\|_{L^1(0,1;\Theta)})} \quad (3.24)$$

et on peut prendre l'infimum par rapport à tous ces  $v$ . Mais, la définition (3.9) de  $d_G$  donne

$$d_G(T_1(V_n) \circ T_1(V_m)^{-1}, I) \stackrel{\text{déf}}{=} \inf_{\substack{v \in L^1(0,1;\Theta) \\ T_1(v) = T_1(V_n) \circ T_1(V_m)^{-1}}} \int_0^1 \|v(t)\|_{\Theta} dt.$$

En prenant l'infimum du membre de droite de (3.24) par rapport à  $v$ , il vient

$$\begin{aligned} & d(T_1(V_n) \circ T_1(V_m)^{-1}, I) \\ & \leq 2 d_G(T_1(V_n) \circ T_1(V_m)^{-1}, I) \exp^{2(1+d_G(T_1(V_n) \circ T_1(V_m)^{-1}, I))} \end{aligned}$$

et par invariance à droite

$$d(T_1(V_n), T_1(V_m)) \leq 2 d_G(T_1(V_n), T_1(V_m)) \exp^{2(1+d_G(T_1(V_n), T_1(V_m)))}.$$

Donc, pour tout  $m, n > N$

$$d(T_1(V_n), T_1(V_m)) \leq 2\varepsilon \exp^{2(1+\varepsilon)}.$$

Comme la fonction  $f(\varepsilon) = 2\varepsilon \exp^{2(1+\varepsilon)}$  est telle que  $f(0) = 0$ ,  $f$  est strictement croissante dans  $[0, \infty)$  et va à  $+\infty$  lorsque  $\varepsilon$  va à  $+\infty$ , pour tout  $\eta > 0$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $f(\varepsilon) < \eta$  et il existe  $N$  tel que pour tout  $n, m > N$

$$d(T_1(V_n), T_1(V_m)) \leq 2\varepsilon \exp^{2(1+\varepsilon)} < \eta.$$

La suite  $\{T_1(V_n)\}$  est donc Cauchy dans  $(G_{\Theta}, d)$ , d'où la continuité de l'injection  $(G_{\Theta}, d) \rightarrow (G_{\Theta}, d_G)$ .  $\square$

### 3.2.4 Complétude de $(G_{\Theta}, d_G)$ ?

Avoir la complétude avec la métrique  $d_G$  et  $d'_G$  n'est pas aussi simple. Pour une suite de Cauchy  $\{T_1(V_n)\}$ , la convergence  $L^1$  des vitesses  $\{V_n\}$  vers  $V$  donnerait la convergence de  $\{T_1(V_n)\}$  à  $T_1(V)$  et donc la convergence de géodésiques, mais les métriques ne sont pas suffisamment fortes pour qu'il en soit ainsi. Pour s'en convaincre, établissons une inégalité qui suit directement de l'inégalité du triangle de  $d_G$ . Associons avec  $W$  un  $w$  tel que  $T_1(w) = T_1(W)$ , avec  $V$  un  $v$  tel que



$T_1(v) = T_1(V)$ , et soit  $u$  tel que  $T_1(u) = T_1(W) \circ T_1(V)^{-1}$ . Alors, la concaténation  $w * v^-$  est telle que  $T_1(u * v) = T_1(W)$ . Ainsi, nous avons

$$\inf_{T_1(w)=T_1(W)} \|w\|_{L^1} \leq \|u * v\|_{L^1} = \|u\|_{L^1} + \|v\|_{L^1}$$

en prenant l'infimum nous obtenons

$$\begin{aligned} \inf_{T_1(w)=T_1(W)} \|w\|_{L^1} &\leq \inf_{T_1(u)=T_1(W) \circ T_1(V)^{-1}} \|u\|_{L^1} + \inf_{T_1(v)=T_1(V)} \|v\|_{L^1} \\ \Rightarrow \left| \inf_{T_1(w)=T_1(W)} \|w\|_{L^1} - \inf_{T_1(v)=T_1(V)} \|v\|_{L^1} \right| &\leq \inf_{T_1(u)=T_1(W) \circ T_1(V)^{-1}} \|u\|_{L^1}. \end{aligned}$$

Prenons une suite de Cauchy  $\{T_1(V_n)\}$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N$  tel que pour tout  $n, m > N$

$$\left| \inf_{T_1(w)=T_1(V_m)} \|w\|_{L^1} - \inf_{T_1(v)=T_1(V_n)} \|v\|_{L^1} \right| \leq \inf_{T_1(u)=T_1(V_m) \circ T_1(V_n)^{-1}} \|u\|_{L^1} < \varepsilon.$$

De plus, il existe une suite  $\{v_n\}$  telle que  $T_1(v_n) = T_1(V_n)$  et

$$0 \leq \|v_n\|_{L^1} - \inf_{T_1(v)=T_1(V_n)} \|v\|_{L^1} < \varepsilon.$$

Par les inégalités précédentes, on obtient

$$\begin{aligned} & \left| \|v_m\|_{L^1} - \|v_n\|_{L^1} \right| \\ &= \left| \left( \|v_m\|_{L^1} - \inf_{T_1(v)=T_1(V_m)} \|v\|_{L^1} \right) - \left( \|v_n\|_{L^1} - \inf_{T_1(v)=T_1(V_n)} \|v\|_{L^1} \right) + \inf_{T_1(v)=T_1(V_n)} \|v\|_{L^1} - \inf_{T_1(v)=T_1(V_m)} \|v\|_{L^1} \right| \\ &< \left| \|v_m\|_{L^1} - \inf_{T_1(v)=T_1(V_m)} \|v\|_{L^1} \right| + \left| \|v_n\|_{L^1} - \inf_{T_1(v)=T_1(V_n)} \|v\|_{L^1} \right| + \\ & \left| \inf_{T_1(v)=T_1(V_m)} \|v\|_{L^1} - \inf_{T_1(v)=T_1(V_n)} \|v\|_{L^1} \right| \\ &< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon \\ &\Rightarrow \left| \|v_m\|_{L^1} - \|v_n\|_{L^1} \right| < 3\varepsilon. \end{aligned}$$

La suite  $\{\|v_n\|_{L^1}\}$  est bornée dans  $L^1(0, 1; \Theta)$ , mais ce n'est pas suffisant pour avoir la convergence de  $v_n$  dans  $L^1(0, 1; \Theta)$ .

Que peut-on faire de plus ? On a une suite  $\{V_n\} \subset L^1(0, 1; \Theta)$  bornée dans  $L^1(0, 1; \Theta)$ . Pour chaque  $V_n$  on a une trajectoire continue  $t \mapsto T_t(V_n) : [0, 1] \rightarrow \mathcal{F}(\Theta)$ . Pour chaque  $X$ , nous prenons  $x_n = T_t(V_n)(X) \in W^{1,1}(0, 1; \mathbb{R}^N)$  la solution de l'équation

$$x'_n(t) = V_n(t, x_n(t)), \quad x_n(0) = X \quad (3.25)$$

Du théorème 3.1 (i) et (v), pour tout  $V_n \in L^1(0, 1; \Theta)$ ,

$$\max_{0 \leq t \leq 1} \|\theta_{V_n}(t)\|_{\Theta} \leq \|V_n\|_{L^1} \exp^{2(1+\|V_n\|_{L^1})}, \quad (3.26)$$

$$\|\theta_{V_n}(t) - \theta_{V_n}(s)\|_{\Theta} \leq \max_{0 \leq r \leq 1} \|T_r(V_n)\|_{\Theta} \int_s^t \|V_n(r)\|_{\Theta} dr, \quad (3.27)$$

$$\|\theta'_{V_n}\|_{L^1} \leq \left(1 + \|V_n\|_{L^1} \exp^{2(1+\|V_n\|_{L^1})}\right) \|V_n\|_{L^1}, \quad (3.28)$$

où  $\theta_{V_n}(t) = x_n(t) - X$ .

En conséquence, les suites  $\{V_n(\cdot, X) : X \in \mathbb{R}^N\} \subset L^1(0, 1; \mathbb{R}^N)$  sont uniformément bornées dans  $L^1(0, 1; \mathbb{R}^N)$  (ceci indique que notre suite est dans une boule fermée de  $L^1(0, 1; \mathbb{R}^N)$ ). Comme nous n'avons pas un espace de Banach réflexif, on projète  $L^1(0, 1; \mathbb{R}^N)$  sur son bidual et on utilise le théorème de Banach-Alaoglu pour obtenir une sous-suite convergente pour chaque  $X$ .

**Théorème 3.4.** *Soit  $E$  un espace normé. Alors la boule unité fermée de  $E^*$  est compacte pour la topologie faible- $*$ .*

Ceci revient à considérer la suite  $\{V_n(\cdot, X)\}$  dans  $L^1(0, 1; \mathbb{R}^N)^{**}$ , se souvenir que  $L^1(0, 1; \mathbb{R}^N)^* = L^\infty(0, 1; \mathbb{R}^N)$  et que l'on travaille dans la paire d'espaces duaux  $O^* \times E$

$$(L^1(0, 1; \mathbb{R}^N)^*)^* \times L^1(0, 1; \mathbb{R}^N)^* = L^\infty(0, 1; \mathbb{R}^N)^* \times L^\infty(0, 1; \mathbb{R}^N).$$

C'est la topologie  $\sigma(E^*, E)$  de  $E^*$  pour  $E = L^\infty(0, 1; \mathbb{R}^N)$ . Donc, pour chaque  $X \in \mathbb{R}^N$ , il existe  $V_X \in L^\infty(0, 1; \mathbb{R}^N)^*$  et une sous-suite, que l'on étiquettera encore avec les indices  $n$ , tel que

$$\forall g \in L^\infty(0, 1; \mathbb{R}^N), \quad \int_0^1 V_n(t, X) \cdot g(t) dt \rightarrow \langle V_X, g \rangle_{(L^\infty)^* \times L^\infty}.$$

On construit ainsi une vitesse

$$X \mapsto V(X) \stackrel{\text{déf}}{=} V_X : \mathbb{R}^N \rightarrow L^\infty(0, 1; \mathbb{R}^N)^*$$

qui sera la candidate pour le champ de vitesses limite recherché.

On a aussi que, pour une suite de Cauchy  $\{T_1(V_n)\}$  dans la métrique  $d_G$ , la suite de Cauchy  $\{T_1(V_n)\}$  converge dans la métrique  $d$  vers un  $F \in \mathcal{F}(\Theta)$ . Il reste à connecter les deux morceaux ; montrer que  $V \in L^1(0, 1; \Theta)$  et que  $F = T_1(V)$ .

Pour tout  $E \subset [0, 1]$  mesurable et  $a \in \mathbb{R}^N$

$$\int_E V_n(t, a) dt = \int_0^1 V_n(t, a) \chi_E(t) dt \rightarrow \langle V_a, \chi_E \rangle_{(L^\infty)^* \times L^\infty} \in \mathbb{R}^N.$$

Donc, pour toute fonction escalier  $s(t) = \sum_i a_i \chi_{E_i}$ , on a

$$\begin{aligned} \int_E V_n(t, s(t)) dt &= \sum_i \int_0^1 V_n(t, a_i) \chi_{E_i \cap E}(t) dt \in \mathbb{R}^N \\ &\rightarrow \sum_i \langle V_{a_i}, \chi_{E_i \cap E} \rangle_{(L^\infty)^* \times L^\infty} \in \mathbb{R}^N. \end{aligned}$$

On peut approcher toute fonction continue  $f \in L^1(0, 1; \mathbb{R}^N)$  par des fonctions escaliers  $\{s_k\}$  :

$$s_k \rightarrow f \in L^1(0, 1; \mathbb{R}^N) \text{ et } s_k(t) \rightarrow f(t) \text{ p.p. dans } [0, 1].$$

Comme

$$\begin{aligned} V_n(t, s_k(t)) &\rightarrow V_n(t, f(t)) \text{ p.p. dans } [0, 1] \\ \|V_n(t, s_k(t))\| &\leq \|V_n(t)\|_{C^0} \text{ et } \|V_n\|_{L^1(0, 1; C^0(\overline{\mathbb{R}^N}, \mathbb{R}^N))} \leq c \end{aligned}$$

pour une constante  $c$  indépendante de  $n$ , par la convergence dominée de Lebesgue, on a

$$\begin{aligned} V_n(\cdot, s_k(\cdot)) &\rightarrow V_n(\cdot, f(\cdot)) \text{ dans } L^1(0, 1; \mathbb{R}^N) \\ \Rightarrow \int_E V_n(t, f(t)) dt &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E V_n(t, s_k(t)) dt. \end{aligned}$$

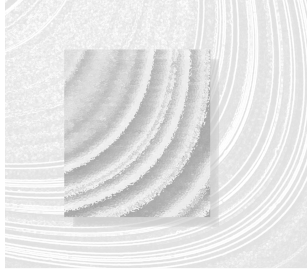
Donc, on se retrouve avec

$$\begin{aligned} \int_E V_n(t, f(t)) dt &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E V_n(t, s_k(t)) dt \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_i \int_0^1 V_n(t, a_{k,i}) \chi_{E_{k,i} \cap E}(t) dt \\ &\stackrel{??}{\rightarrow} \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_i \langle V_{a_{k,i}}, \chi_{E_{k,i} \cap E} \rangle_{(L^\infty)^* \times L^\infty}. \end{aligned}$$

Nous constatons que les difficultés techniques s'accroissent. Nous n'avons pas encore utilisé tous les renseignements. Il y a aussi une question de choix. Par exemple, beaucoup de problèmes techniques disparaissent si on fait l'hypothèse que  $V \in L^2(0, 1; \Theta)$  dans la définition de  $G_\Theta$ , car pour chaque  $X$ , la suite  $\{V_n(\cdot, X)\}$  se retrouve dans  $L^2(0, 1; \mathbb{R}^N)$  et il existe alors  $V_X \in L^2(0, 1; \mathbb{R}^N)$  et une sous-suite qui converge faiblement dans  $L^2(0, 1; \mathbb{R}^N)$  plutôt que  $V_X \in L^\infty(0, 1; \mathbb{R}^N)^*$ . Cela amène la question suivante : étant donné  $T_1(V) \in \mathcal{F}(\Theta)$  pour  $V \in L^1(0, 1; \Theta)$ , est-il possible de trouver une autre vitesse  $\bar{V} \in L^2(0, 1; \Theta)$  telle que  $T_1(V) = T_1(\bar{V})$  ? Si c'est vrai, passer à des vitesses  $L^2(0, 1; \Theta)$  changerait la métrique, sans changer le sous-groupe  $G_\Theta$ .

Nous avons donné quelques pistes, mais, comme cela devient de plus en plus lourd, nous nous arrêtons ici et nous laissons la question de la complétude de  $(G_\Theta, d_G)$  ouverte.





## Chapitre 3

# La métrique d’Azencott et de Trouvé en imagerie

## 1 Introduction

### 1.1 Images à niveaux de gris

L’exemple le plus simple est celui d’une image bidimensionnelle qui se présente comme une fonction  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , où  $M \subset \mathbb{R}^2$  serait le *cadre* (souvent un rectangle) et la valeur de  $f$  les différents niveaux de gris. Si l’on se donne une *image de référence* (*pattern*)  $f_r$  et une observation  $f_o$ , on cherche un difféomorphisme  $F : M \rightarrow M$  tel que  $f_r \circ F : M \rightarrow \mathbb{R}$  soit aussi proche que possible de  $f_o$ , par exemple dans le sens  $L^2(M)$

$$\inf_{F \in \mathcal{F}(M, M)} J_0(F), \quad J_0(F) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_M |f_r(F(x)) - f_o(x)|^2 dx$$

pour une famille  $\mathcal{F}(M, M)$  de difféomorphismes de  $M$  et un *pattern*  $f_r \in L^2(M)$ . Si l’on a une image à  $n$  couleurs de base, alors on remplace la famille de fonctions  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  par une famille de fonctions à valeurs vectorielles  $\vec{f} : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  et la fonction objectif par

$$\inf_{F \in \mathcal{F}(M, M)} J_0(F), \quad J_0(F) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_M |\vec{f}_r(F(x)) - \vec{f}_o(x)|_{\mathbb{R}^n}^2 dx.$$

Dans les deux cas, il faut préciser le groupe de transformations de  $M$  et s’assurer que, dans le processus de “*matching*” de l’image observée par rapport au “*pattern*” ou de l’“*image enhancing*”, la suite de transformations minimisantes tend vers une transformation dans le même groupe. On y arrive en introduisant une métrique  $d$  sur le groupe ou le sous-groupe des automorphismes de  $M$  et en ajoutant dans la fonction objectif cette métrique pondérée qui, dans de bonnes conditions, réalisera un équilibre entre la minimisation et la conservation de la régularité de l’automor-

phisme

$$\inf_{F \in \mathcal{F}(M, M)} J_\alpha(F), \quad J_\alpha(F) \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \int_M |\vec{f}_r(F(x)) - \vec{f}_o(x)|_{\mathbb{R}^N}^2 dx + \alpha d(I, F),$$

pour un scalaire  $\alpha > 0$ .

## 1.2 Constructions d’Azencott et de Trouvé

En 1994, R. AZENCOTT [1] suggère de choisir des automorphismes  $T_1(V)$  générés par un champ de vitesses  $V$  de la même nature que ceux du sous-groupe  $G_\Theta$  du chapitre précédent où  $\Theta = C^{0,1}(\overline{\mathbb{R}^N}, \mathbb{R}^N)$  et  $T_t(V)$  est solution de l’équation

$$\frac{\partial T_t}{\partial t} = V(t) \circ T_t, \quad T_0 = I. \quad (1.1)$$

On a vu que l’on pouvait associer à  $G_\Theta$  la métrique de Courant  $d$  ou la métrique  $d_G$

$$d_G(I, T_1(V)) = \inf_{\substack{v \in L^1(0,1;\Theta) \\ T_1(v) = T_1(V)}} \int_0^1 \|v(t)\|_\Theta dt = \inf_{\substack{v \in L^1(0,1;\Theta) \\ T_1(v) = T_1(V)}} \int_0^1 \left\| \frac{d_{\mathcal{F}} T_t(v)}{dt} \right\|_\Theta dt$$

$$d_G(T_1(V), T_1(W)) = d_G(T_1(V) \circ T_1(W)^{-1}, I),$$

où la dérivée est dans le groupe  $\mathcal{F}(\Theta)$ .

Il est instructif de citer ces quelques lignes de l’introduction de A. TROUVÉ [3] en 1998 :

“[...] Hence, for a large deformation  $\phi$ , one can consider  $\phi$  as the concatenation of small deformations  $\phi_{u_i}$ . More precisely, if  $\phi = \Phi_n$ , where the  $\Phi_k$  are recursively defined by  $\Phi_0 = Id$  and  $\phi_{k+1} = \phi_{u_{k+1}} \circ \Phi_k$ , the family  $\Phi = (\Phi_k)_{0 \leq k \leq n}$  defines a polygonal line in  $Aut(M)$  whose length  $l(\Phi)$  can be approximated by  $l(\phi) = \sum_{k=1}^n |u_k|_e$ . At a naive level, one could define the distance  $d(Id, \phi)$  as the infimum of  $l(\Phi_n)$  for all family  $\Phi$  such that  $\Phi_n = \phi$ . For a more rigorous setting, one should consider the time continuous curve  $\Phi = (\Phi_t)_{0 \leq t \leq 1}$  in  $Aut(M)$ . [...]”

Ce qu’il décrit comme l’approche naïve est précisément la construction de A. M. MICHELETTI [1], en 1972. Il n’est certainement pas le premier auteur à être passé à côté de cet article en italien, où le résultat d’intérêt pour nous ne figure que sous la forme d’un lemme de son analyse de la continuité de la première valeur propre du Laplacien par rapport au domaine. Cet article a été remis en valeur dans l’édition 2001 du livre de M. C. DELFOUR et J.-P. ZOLÉSIO [9], où on peut trouver la traduction de cet article ainsi que le prolongement de la construction de la métrique de Courant à d’autres espaces  $\Theta$  de transformation de  $\mathbb{R}^N$  ou de transformations d’un sous-ensemble  $D$  de  $\mathbb{R}^N$  qui est soit fermé, soit un ouvert *crack-free*, c’est-à-dire,  $D = \text{int}(\overline{D})$ .<sup>1</sup>

1. Cf. M. C. DELFOUR et J.-P. ZOLÉSIO [10, Lem. 2.3 p. 138 et Th. 2.8, p. 141].

Il reste cependant deux problèmes techniques en suspend. Le premier est celui de la complétude de l'espace métrique  $(G_\Theta, d_G)$  et le second celui de passer d'automorphismes de  $\mathbb{R}^N$  à des automorphismes de la variété  $M$ . Dans R. AZENCOTT [1] et A. TROUVÉ [3], le cadre théorique est élargi, en supposant  $M$  une variété lisse et le problème de complétude est court-circuité en introduisant un sous-espace hilbertien

$$\mathcal{H} \subset C^{0,1}(\overline{\mathbb{R}^N}; \mathbb{R}^N) \quad (1.2)$$

et la métrique

$$d_{\mathcal{H}}(I, T_1(V)) = \inf_{\substack{v \in L^2(0,1;\mathcal{H}) \\ T_1(v) = T_1(V)}} \int_0^1 \|v(t)\|_{\mathcal{H}}^2 dt$$

$$d_{\mathcal{H}}(T_1(V), T_1(W)) = d_{\mathcal{H}}(T_1(V) \circ T_1(W)^{-1}, I).$$

Nous verrons plus loin la condition naturelle à imposer sur les  $V$  pour que non seulement  $T_t(V) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  soit un difféomorphisme, mais aussi  $T_t(V) : M \rightarrow M$  soit une bijection.

Avant de poursuivre, nous devons nous interroger sur la présence d'espaces hilbertiens contenus dans  $C^{0,1}(\overline{\mathbb{R}^N}; \mathbb{R}^N)$ . Il suffit de considérer, pour un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  vérifiant la condition de cône local stricte ( $\Omega$  est donc lipschitzien) ou  $\Omega = \mathbb{R}^N$ , les Hilberts  $H$  tel que  $H \subset C^{0,1}(\overline{\Omega})$ . Tout d'abord, nous savons que

$$C_B^j(\Omega) = \mathcal{B}^j(\Omega)$$

$$C^{0,1}(\overline{\Omega}) = \{f \in C^{0,1}(\Omega) : f \text{ est uniformément continue et bornée dans } \Omega\}$$

$$\Rightarrow C_B^1(\Omega) \subset C^{0,1}(\overline{\Omega}),$$

où  $\mathcal{B}^j(\Omega)$  l'espace des fonctions continues bornées sur  $\Omega$ , ainsi que toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre  $j$  tel que défini en (1.2) du Chapitre 2. Enfin, pour le cas  $\Omega = \mathbb{R}^N$ , on utilisera le corollaire de R. A. ADAMS [1, corollaire 3.19, p. 56]

**Corollaire 1.**  $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^N) = W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ .

Le théorème de R. A. ADAMS [1, théorème 5.4 partie I, cas C et partie III, p. 97–98] nous donne exactement ce que l'on cherche.

**Théorème 1.1.** *Soit  $\Omega$  un domaine ouvert dans  $\mathbb{R}^N$  vérifiant la condition de cône local stricte ou  $\Omega = \mathbb{R}^N$ . Soit  $j$  et  $m$  des entiers positifs et  $p$  satisfaisant  $1 \leq p < \infty$ . Si  $mp > N$  alors*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \subset C_B^j(\Omega) \quad \text{et} \quad W^{j+m,p}(\mathbb{R}^N) \subset C_B^j(\mathbb{R}^N)$$

Pour  $p = 2$ ,  $H^{j+m}(\Omega) = W^{j+m,2}(\Omega)$  est un Hilbert. Donc, pour  $j = 1$

- (i) pour  $N = 1$ , on va prendre  $H^2(\Omega) = W^{2,2}(\Omega) \subset C_B^1(\Omega) \subset C^{0,1}(\overline{\Omega})$  ;
- (ii) pour  $N = 2$ , on va prendre  $H^3(\Omega) = W^{3,2}(\Omega) \subset C_B^1(\Omega) \subset C^{0,1}(\overline{\Omega})$  ;
- (iii) pour  $N = 3$ , on peut encore prendre  $H^3(\Omega)$ .

On pourra donc prendre  $\mathcal{H} = H^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$  pour  $N = 1$  et  $\mathcal{H} = H^3(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$  pour  $N = 2, 3$  qui sont les cas d'intérêt pour les applications.

Le fait que l'on travaille avec le Hilbert  $L^2(0, 1; \mathcal{H})$  plutôt que le Banach  $L^1(0, 1; \Theta)$  donne la complétude, car, dans un Hilbert, on peut extraire de toute suite bornée une sous-suite convergeant faiblement vers un élément du Hilbert. On a donc bien l'existence d'une trajectoire géodésique dans ce cadre un peu plus restrictif.

L'essentiel du développement théorique de cette approche se trouve dans le rapport de A. TROUVÉ [2] et l'article [3]. Il utilise les idées et constructions typiques de la géométrie différentielle, mais dans le cadre d'un groupe de transformations qui est essentiellement une *variété riemannienne* de dimension infinie avec un produit scalaire dans l'espace hilbertien tangent  $\mathcal{H}$ , alors que les groupes métriques de Micheletti seraient plutôt des *variétés de Finsler* avec une norme (de Banach) dans l'espace tangent  $\Theta$ .

### 1.3 Constructions via la viabilité bilatérale et le cône de Bouligand

Comme le cadre d'une variété lisse de la géométrie différentielle peut se révéler restrictif en raison du formalisme qui lui est associé, nous allons suivre une approche constructive comme au chapitre précédent. La variété lisse  $M$  va être remplacée par une partie  $D$  de  $\mathbb{R}^N$ , sur laquelle on imposera une *condition de viabilité bilatérale*. Le terme *bilatérale* exprime la propriété que, si la solution de l'équation différentielle

$$x'(t) = V(t, x(t)), \quad x(0) = X$$

part d'un point  $X \in \overline{D}$ , elle reste dans  $\overline{D}$  et si elle part d'un point  $X \in \overline{\mathbb{C}D}$ , elle reste dans  $\overline{\mathbb{C}D}$ . En conséquence, si elle part d'un point  $X \in \partial D$ , elle reste dans  $\partial D$ . C'est ce qui nous permettra de construire une trajectoire de difféomorphismes  $T_t(V) : \overline{D} \rightarrow \overline{D}$  pour un  $D$  arbitraire, plutôt que de se restreindre à une variété lisse compacte  $M$ .

## 2 Automorphismes par la viabilité bilatérale

### 2.1 Condition de viabilité bilatérale

Revenons au sous-groupe  $G_\Theta$ . Nous avons vu que chaque champ de vitesses  $V \in L^1(0, 1; \Theta)$  génère une trajectoire  $t \mapsto T_t(V) : [0, 1] \rightarrow G_\Theta$  d'automorphismes de  $\mathbb{R}^N$ . Nous voulons maintenant remplacer la variété lisse  $M$  par une partie arbitraire  $D$  de  $\mathbb{R}^N$ . Nous cherchons donc des conditions nécessaires et suffisantes sur  $V \in L^1(0, 1; \Theta)$  pour que  $T_t(V)$  soit un automorphisme de  $\overline{D}$  :

$$\forall t \in [0, 1], \quad T_t(V)(\overline{D}) = \overline{D}. \quad (2.1)$$

En 1942, M. NAGUMO [1] donna une condition nécessaire et suffisante sur un champ autonome<sup>2</sup> continu  $V$  pour que toutes les trajectoires partant d'un point

2. Un champ  $V$  est autonome s'il ne dépend pas de  $t$ .



$x \in \overline{D}$  demeurent dans  $\overline{D}$ . Intuitivement, la trajectoire restera dans  $\overline{D}$  si, lorsqu'elle atteint la frontière de  $\overline{D}$ , la vitesse  $V$  en ce point pointe vers l'intérieure de  $\overline{D}$  ou reste tangente à  $\overline{D}$ . Lorsque  $\overline{D}$  est régulier, disons de classe  $C^2$ , il suffit donc qu'en tout point frontière  $x \in \partial\overline{D}$ , on ait

$$V(t, x) \cdot n(x) \leq 0,$$

où  $n(x)$  est la normale unitaire extérieure à  $D$  au point  $x$ . La vitesse doit donc se trouver dans le demi-espace

$$V(t, x) \in \{h \in \mathbb{R}^N : h \cdot n(x) \leq 0\}.$$

Lorsque  $D$  est un sous-ensemble arbitraire de  $\mathbb{R}^N$  pour lequel il n'y a pas de normale, il faut remplacer le demi-espace par un cône en 0 tangent à  $D$  au point  $x$ .

**Définition 2.1.**

Soit  $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^N$  et  $x \in \overline{D}$ . Le vecteur  $h \in \mathbb{R}^N$  est une *direction tangente* pour  $D$  en  $x$ , s'il existe une suite  $\{\varepsilon_n > 0\}$ ,  $\varepsilon_n \searrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ , pour laquelle

$$\exists \{x_n\} \subset D \text{ tel que } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x}{\varepsilon_n} = h. \quad (2.2)$$

On désignera par  $T_D(x)$  l'ensemble de toutes les directions tangentes pour  $D$  en  $x$  et on l'appellera *cône tangent de Bouligand*<sup>3</sup> à  $D$  en  $x$ .  $\square$

Il est facile de vérifier que pour tout  $x \in \text{int } D$ , on a  $T_D(x) = \mathbb{R}^N$ .

**Théorème 2.1.** Soit  $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$  et  $x \in \overline{D}$ .

(i)  $T_D(x)$  est un cône fermé de sommet 0 et

$$T_D(x) = \left\{ h \in \mathbb{R}^n : \liminf_{t \searrow 0} \frac{d_D(x + th)}{t} = 0 \right\} \subset S_D(x), \quad (2.3)$$

où

$$S_D(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \text{adhérence } \{\lambda(y - x) : \forall \lambda > 0, \forall y \in D\} = \overline{\mathbb{R}^+(D - x)} \quad (2.4)$$

et  $\mathbb{R}^+ \stackrel{\text{déf}}{=} \{\lambda \in \mathbb{R} : \forall \lambda > 0\}$ .

(ii)  $T_{\overline{D}}(x) = T_D(x)$  et  $S_{\overline{D}}(x) = S_D(x)$ .

*Démonstration.* (i) On se donne  $\lambda > 0$  et  $h \in T_D(x)$  et l'on veut montrer que  $\lambda h \in T_D(x)$ . Par définition de  $T_D(x)$ , pour tout  $h \in T_D(x)$ , il existe une suite  $\{t_n > 0\}$ ,  $t_n \searrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ , pour laquelle

$$\forall n, \exists x_n \in D \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x}{t_n} = h.$$

---

3. Le cône tangent  $T_D(x)$  a été introduit en 1930 indépendamment par G. BOULIGAND [1] et F. SEVERI [1] dans le même volume 9 des Annales de la Société Polonaise de Mathématiques (Kraków) fondées en 1921 par Stanislaw Zaremba. Il intervient dans la *théorie de la viabilité* des équations différentielles ordinaires (cf. M. NAGUMO [1] ou J.-P. AUBIN et A. CELLINA [1, p. 174 et p. 180]).

On prend  $\bar{t}_n = t_n / \lambda > 0$  et  $\bar{x}_n = x_n$ . Par construction,  $\bar{x}_n \in D$  et

$$\frac{\bar{x}_n - x}{\bar{t}_n} = \frac{x_n - x}{t_n / \lambda} = \lambda \left[ \frac{x_n - x}{t_n} \right].$$

En passant à la limite, il vient

$$\bar{t}_n \rightarrow 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{x}_n - x}{\bar{t}_n} = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{x_n - x}{t_n} \right] = \lambda h.$$

Par définition,  $\lambda h \in T_D(x)$  et  $T_D(x)$  est un cône de sommet 0.

Pour tout  $t > 0$ ,  $y \in D$ , et  $h \in T_D(x)$ ,

$$\frac{\|y - x - th\|}{t} \geq \frac{d_D(x + th)}{t} \geq 0.$$

Puisque  $h \in T_D(x)$ , il existe des suites  $t_n \searrow 0$  et  $\{y_n\} \subset D$  tel que  $(y_n - x)/t_n \rightarrow h$ . D'où, pour tout  $\varepsilon > 0$  et  $\rho > 0$ , il existe  $t_n$ ,  $0 < t_n < \rho$ , et  $y_n \in D$  tel que

$$\begin{aligned} \varepsilon > \left\| \frac{y_n - x}{t_n} - h \right\| &\geq \inf_{0 < t < \rho} \inf_{y \in D} \left\| \frac{y - x - th}{t} \right\| = \inf_{0 < t < \rho} \frac{d_D(x + th)}{t} \geq 0 \\ &\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \forall \rho > 0, \quad 0 \leq \inf_{0 < t < \rho} \frac{d_D(x + th)}{t} < \varepsilon \\ &\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \quad 0 \leq \liminf_{t \searrow 0} \frac{d_D(x + th)}{t} = \sup_{\rho > 0} \inf_{0 < t < \rho} \frac{d_D(x + th)}{t} < \varepsilon \end{aligned}$$

et la limite inférieure est 0. Réciproquement, on considère  $h$  tel que

$$0 = \liminf_{t \searrow 0} \frac{d_D(x + th)}{t} = \lim_{t \searrow 0} \inf_{0 < t < \rho} \inf_{y \in D} \left\| \frac{y - x - th}{t} \right\|$$

et l'on construit la suite suivante : soit  $0 < \rho_1 < 1$  tel que

$$\inf_{\substack{0 < t < \rho_1 \\ y \in D}} \left\| \frac{y - x - th}{t} \right\| < \frac{1}{2^2}.$$

À l'étape  $n$ , soit  $0 < \rho_n < 1/n$  tel que

$$\inf_{\substack{0 < t < \rho_n \\ y \in D}} \left\| \frac{y - x - th}{t} \right\| < \frac{1}{2^{n+1}}.$$

On associe à chaque  $n$  les points  $t_n$ ,  $0 < t_n < \rho_n$ , et  $y_n \in D$  tel que

$$\begin{aligned} \inf_{\substack{0 < t < \rho_n \\ y \in D}} \left\| \frac{y - x - th}{t} \right\| &\leq \left\| \frac{y_n - x - t_n h}{t_n} \right\| < \inf_{\substack{0 < t < \rho_n \\ y \in D}} \left\| \frac{y - x - th}{t} \right\| + \frac{1}{2^{n+1}} \\ &\Rightarrow \left\| \frac{y_n - x}{t_n} - h \right\| < \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n} \text{ et } 0 < t_n < 1/n. \end{aligned}$$

Alors, par définition,  $h \in T_D(x)$ .

Pour montrer que  $T_D(x)$  est fermé, on considère  $h$  dans la fermeture de  $T_D(x)$  et l'on montre que  $h \in T_D(x)$ . Alors, il existe une suite  $\{h_n\} \subset T_D(x)$  tel que  $h_n \rightarrow h$  et

$$\liminf_{t \searrow 0} \frac{d_D(x + th_n)}{t} = 0.$$

Mais, puisque  $d_D$  est lipschitzienne de constante 1,

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{d_D(x + th)}{t} &\leq \frac{d_D(x + th_n)}{t} + \frac{\|d_D(x + th) - d_D(x + th_n)\|}{t} \\ &\leq \frac{d_D(x + th_n)}{t} + \|h - h_n\| \\ \Rightarrow 0 \leq \liminf_{t \searrow 0} \frac{d_D(x + th)}{t} &\leq \liminf_{t \searrow 0} \frac{d_D(x + th_n)}{t} + \|h - h_n\| = \|h - h_n\|. \end{aligned}$$

Alors, comme  $n$  tend vers l'infini, la  $\lim \inf$  est 0 et  $h \in T_D(x)$ .

La propriété (2.3) est vraie par définition d'un élément  $h$  de  $T_D(x)$  : il existe une suite  $\{t_m > 0 : m \geq 1\}$  tel que  $t_m \rightarrow 0$  lorsque  $m$  tend vers l'infini et, pour chaque  $m$ , il existe un point  $x_m \in D$  tel que

$$\frac{x_m - x}{t_m} \rightarrow h \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{t_m}(x_m - x) \in \mathbb{R}^+(D - x) \quad \Rightarrow \quad h \in S_D(x) = \overline{\mathbb{R}^+(D - x)}$$

et nécessairement  $T_D(x) \subset S_D(x)$ .

(ii) Par définition,  $D \subset \overline{D}$  entraîne  $T_D(x) \subset T_{\overline{D}}(x)$  et  $S_D(x) \subset S_{\overline{D}}(x)$ . Soit  $h \in T_{\overline{D}}(x)$ . Pour chaque  $m \geq 1$ , il existe des suites  $t_m, 0 < t_m < 1/m$ , et  $y_m \in \overline{D}$  tel que

$$\left\| \frac{y_m - x}{t_m} - h \right\| < 1/(2m).$$

Comme  $y_m \in \overline{D}$ , il existe  $x_m \in D$  tel que

$$\|x_m - y_m\| < t_m/(2m).$$

On a donc construit des suites  $\{t_m\}, 0 < t_m < 1/m$ , et  $\{x_m\} \subset D$  tel que

$$\forall m \geq 1, \quad \left\| \frac{x_m - x}{t_m} - h \right\| \leq \left\| \frac{y_m - x}{t_m} - h \right\| + \left\| \frac{y_m - x_m}{t_m} \right\| < 1/m.$$

Donc  $h \in T_D(x)$  et  $T_{\overline{D}}(x) \subset T_D(x)$ . Pour l'autre cône, il suffit de remarquer que  $R^+(\overline{D} - x) \subset R^+(D - x) \subset R^+(\overline{D} - x)$ .  $\square$

**Théorème 2.2.** Soit  $D$  une partie non vide de  $\mathbb{R}^N$ ,  $V \in L^1(0, 1; C^{0,1}(\overline{\mathbb{R}^N}; \mathbb{R}^N))$ , les solutions de l'équation

$$\frac{dx}{dt}(t) = V(t, x(t)), \text{ dans } (0, 1) \text{ et } x(0) = X, \quad (2.5)$$

et la transformation (bijection)

$$X \mapsto T_t(V)(X) \stackrel{\text{déf}}{=} x(t; X; V) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N. \quad (2.6)$$

(i) Une condition nécessaire et suffisante pour que

$$\forall t \in [0, 1], \quad T_t(V)(\overline{D}) = \overline{D} \quad (2.7)$$

est que, pour presque tout  $t \in [0, 1]$ ,

$$\forall x \in \overline{D}, \quad \pm V(t, x) \in T_{\overline{D}}(x). \quad (2.8)$$

(ii) Dans les conditions de la partie (i),

$$\forall t \in [0, \tau], \quad T_t(V) : \overline{D} \rightarrow \overline{D} \quad \text{est un homéomorphisme.} \quad (2.9)$$

Elle transforme les points intérieurs de  $D$  en points intérieurs de  $D$  et les points du bord en points du bord.<sup>4</sup>

*Démonstration.* Nous allons uniquement démontrer la partie (i).

(i) ( $\Rightarrow$ ) Supposons que nous ayons la propriété (2.7). On utilise la caractérisation de  $T_D(x)$  du Théorème 2.1. Alors, pour tout  $t$  et tout  $X \in \overline{D}$ ,  $x(t) \in \overline{D}$ . En tout point  $t$  où  $x'(t)$  existe, pour  $\delta > 0$  on a  $x(t + \delta) \in \overline{D}$  et

$$\begin{aligned} 0 \leq d_D(x(t) + \delta x'(t)) &\leq |x(t) + \delta x'(t) - x(t + \delta)| \leq \delta \left| x'(t) - \frac{x(t + \delta) - x(t)}{\delta} \right| \\ \Rightarrow 0 &\leq \frac{d_D(x(t) + \delta x'(t))}{\delta} \leq \left| x'(t) - \frac{x(t + \delta) - x(t)}{\delta} \right| \\ &\Rightarrow \liminf_{\delta \searrow 0} \frac{d_D(x(t) + \delta x'(t))}{\delta} = 0, \end{aligned}$$

$x'(t) \in T_D(x(t))$ , et  $V(t, T_t(V)(X)) \in T_D(T_t(V)(X))$ . Puisque  $T_t(V) : \overline{D} \rightarrow \overline{D}$  est une bijection, pour tout  $x \in \overline{D}$ ,  $V(t, x) \in T_D(x)$ . On répète maintenant la même démarche avec  $-x'(t)$  à la place de  $x'(t)$  :

$$\begin{aligned} 0 \leq d_D(x(t) - \delta x'(t)) &\leq |x(t) - \delta x'(t) - x(t - \delta)| \leq \delta \left| x'(t) - \frac{x(t) - x(t - \delta)}{\delta} \right| \\ \Rightarrow 0 &\leq \frac{d_D(x(t) - \delta x'(t))}{\delta} \leq \left| x'(t) - \frac{x(t) - x(t - \delta)}{\delta} \right| \\ &\Rightarrow \liminf_{\delta \searrow 0} \frac{d_D(x(t) - \delta x'(t))}{\delta} = 0, \end{aligned}$$

$-x'(t) \in T_D(x(t))$ , et, pour tout  $x \in \overline{D}$ ,  $-V(t, x) \in T_D(x)$ .

( $\Leftarrow$ ) Dans l'autre sens, le résultat est vrai pour des champs de vitesses  $V \in C^0(0, 1; \Theta)$ .<sup>5</sup> Pour  $V \in L^1(0, 1; \Theta)$ , on construit des approximations  $C^0(0, 1; \Theta)$  par le théorème de Lusin pour des fonctions Lebesgue mesurables de  $[0, 1]$  dans l'espace

4. Cf. J. DUGUNDJI [1, pp. 87–88].

5. Cf. J.-P. AUBIN et A. CELLINA [1, p. 174 et p. 180] et M. C. DELFOUR et J.-P. ZOLÉSIO [10, partie (i) de la démonstration du Théorème 5.1 p. 195].

de Banach séparable<sup>6</sup>  $\Theta$  : pour tout  $\varepsilon_k = 1/k > 0$ , il existe un compact  $K_k \subset [0, 1]$  tel que

$$(i) \quad m([0, 1] \setminus K_k) < \varepsilon_k \quad \text{et} \quad (ii) \quad V : K_k \rightarrow \Theta \text{ continue.} \quad (2.10)$$

Le second élément est un théorème de prolongement<sup>7</sup> qui dit que, pour tout compact  $K_k \subset [0, 1]$  et une fonction continue  $V : K_k \rightarrow \Theta$ , il existe une fonction continue  $V_k : \mathbb{R} \rightarrow \Theta$  tel que  $V_k|_{K_k} = V$ . Ce qui est particulièrement intéressant dans la démonstration de ce dernier théorème, c'est que l'extension est construite à partir de points de  $K_k$ , si bien que, si la condition de viabilité est vérifiée presque partout pour  $V$ , elle l'est partout pour  $V_k$

$$\pm V_k(t, x) \in T_D(x) \text{ pour tout } x \in \overline{D} \text{ et } t \in [0, 1].$$

Comme  $V_k \in C^0(0, 1; \Theta)$ , les solutions  $x_k$  de

$$\frac{dx_k}{dt}(t) = V_k(t, x_k(t)), \text{ dans } (0, 1) \text{ et } x_k(0) = X \in \overline{D} \quad (2.11)$$

restent donc dans  $\overline{D}$ . Il reste à montrer que les  $x_k(t)$  convergent vers la solution  $x(t)$  de (2.5). Comme  $\overline{D}$  est fermé, ce sera suffisant pour conclure que  $x(t) \in \overline{D}$ . On a

$$\begin{aligned} x_k(t) - x(t) &= \int_0^t V_k(s, x_k(s)) - V(s, x(s)) ds \\ &= \int_0^t V_k(s, x_k(s)) - V_k(s, x(s)) ds + \int_0^t V_k(s, x(s)) - V(s, x(s)) ds. \end{aligned}$$

Puisque, par construction  $c(V_k(t)) \leq c(V(t))$  et  $\|V_k(t)\|_{C^0} \leq \|V(t)\|_{C^0}$ ,

$$|x_k(t) - x(t)| \leq \int_0^t c(V(s)) |x_k(s) - x(s)| ds + \int_0^t |V_k(s, x(s)) - V(s, x(s))| ds.$$

Le dernier terme tend vers 0 par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue puisque, par la construction du théorème de Lusin,  $V_k(s, x(s)) \rightarrow V(s, x(s))$  presque partout et la norme  $L^1$  de  $s \mapsto V_k(s, x(s))$  est dominée par la même norme avec  $V$  à la place de  $V_k$ . Le résultat final suit par une inégalité du type Gronwall puisque  $s \rightarrow c(V(s))$  est  $L^1(0, 1)$ .

Soit  $0 < \alpha < 1$ , posons  $g_\alpha(t) = \exp(\int_0^t c(V(s)) ds / \alpha)$ . Ainsi, nous avons  $g'_\alpha(t) = \frac{1}{\alpha} c(V(t)) g_\alpha(t)$ . Alors, nous avons une version de l'inégalité de Gronwald qui se démontre comme suit :

$$|x_k(t) - x(t)| \leq \int_0^t c(V(s)) |x_k(s) - x(s)| ds + \int_0^t |V_k(s, x(s)) - V(s, x(s))| ds.$$

6. Cf. P. A. LOEB et E. TALVILA [1, Thm. 1].

7. Cf. L. C. EVANS et R. F. GARIEPY [1, Thm. 1, p. 13] dont la démonstration demeure vraie pour une fonction à valeur dans un Banach.

comme

$$\begin{aligned}
\int_0^t c(V(s)) g_\alpha(s) \frac{|x_k(s) - x(s)|}{g_\alpha(s)} ds &\leq \sup_{s \in [0, t]} \frac{|x_k(s) - x(s)|}{g_\alpha(s)} \int_0^t c(V(s)) g_\alpha(s) ds \\
&= \sup_{s \in [0, t]} \frac{|x_k(s) - x(s)|}{g_\alpha(s)} \int_0^t \alpha g'_\alpha(s) ds \\
&= \sup_{s \in [0, t]} \frac{|x_k(s) - x(s)|}{g_\alpha(s)} [\alpha(g_\alpha(t) - g_\alpha(0))] \\
&= \sup_{s \in [0, t]} \frac{|x_k(s) - x(s)|}{g_\alpha(s)} [\alpha(g_\alpha(t) - 1)] \\
&\leq \sup_{s \in [0, t]} \frac{|x_k(s) - x(s)|}{g_\alpha(s)} [\alpha g_\alpha(t)]
\end{aligned}$$

donc

$$\frac{|x_k(t) - x(t)|}{g_\alpha(t)} \leq \alpha \sup_{s \in [0, t]} \frac{|x_k(s) - x(s)|}{g_\alpha(s)} + \frac{1}{g_\alpha(t)} \int_0^1 |V_k(s, x(s)) - V(s, x(s))| ds$$

et ainsi

$$\sup_{t \in [0, 1]} \frac{|x_k(t) - x(t)|}{g_\alpha(t)} \leq \alpha \sup_{t \in [0, 1]} \frac{|x_k(t) - x(t)|}{g_\alpha(t)} + \int_0^1 |V_k(s, x(s)) - V(s, x(s))| ds.$$

Nous obtenons

$$\sup_{t \in [0, 1]} \frac{|x_k(t) - x(t)|}{g_\alpha(t)} \leq \frac{1}{1 - \alpha} \int_0^1 |V_k(s, x(s)) - V(s, x(s))| ds.$$

Nous avons donc

$$0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, 1]} \frac{|x_k(t) - x(t)|}{g_\alpha(t)} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \alpha} \int_0^1 |V_k(s, x(s)) - V(s, x(s))| ds = 0.$$

Ainsi, pour tout  $t \in [0, 1]$ , nous avons que  $x_k(t)$  converge vers  $x(t)$  et donc  $x(t) \in \overline{D}$ .

On a que, pour tout  $t$ ,  $T_t(V)(\overline{D}) \subset \overline{D}$ . Il reste à montrer que, pour tout  $x \in \overline{D}$ ,  $T_t(V)^{-1}(x) \in \overline{D}$ . On considère la solution de l'équation différentielle

$$\frac{dz}{ds}(s) = -V(t - s, z(s)) \text{ dans } [0, t] \text{ et } z(0) = x, \quad (2.12)$$

pour laquelle

$$\begin{aligned} z(t) &= z(0) - \int_0^t V(t-s, z(s)) ds = z(0) - \int_0^t V(s', z(t-s')) ds' \\ z(t-t) &= z(t-0) + \int_0^t V(s', z(t-s')) ds' = T_t(V)z(t) \\ \Rightarrow x &= z(0) = T_t(V)z(t) \quad \Rightarrow T_t(V)^{-1}(x) = z(t). \end{aligned}$$

On associe à  $z$  la solution de l'équation différentielle

$$\frac{dz_k}{ds}(s) = -V_k(t-s, z_k(s)) \text{ dans } [0, t] \text{ et } z_k(0) = x. \quad (2.13)$$

Par la condition (2.8),  $z_k(s) \in \bar{D}$ . En particulier,

$$\begin{aligned} z_k(t) &= z_k(0) - \int_0^t V_k(t-s, z_k(s)) ds = z_k(0) - \int_0^t V_k(s', z_k(t-s')) ds' \\ z_k(t-t) &= z_k(t-0) + \int_0^t V_k(s', z_k(t-s')) ds' \\ \Rightarrow x &= z(0) = T_t(V_k)z_k(t) \quad \Rightarrow T_t(V_k)^{-1}(x) = z_k(t) \in \bar{D}. \end{aligned}$$

Enfin, on utilise le même raisonnement que précédemment pour montrer que  $z_k(t) \rightarrow z(t)$  et donc que, pour tout  $x \in \bar{D}$ ,  $T_t(V)^{-1}(x) = z(t) \in \bar{D}$ .  $\square$

### Remarque 2.1.

Pour la partie (i) ( $\Leftarrow$ ) de la démonstration, il existe une démonstration directe qui fait appel à l'analyse multivoque (voir J.-P. AUBIN [1, section 11.7, p. 395]). Nous avons plutôt choisi de donner une démonstration directe pour éviter l'utilisation des notions de fonctions multivoques. Nous énonçons le théorème original de viabilité de P. TALLOS [1] et nous y référons le lecteur pour les définitions de semi-continuité supérieure (scs) des fonctions multivoques.

**Théorème 2.3** (Dépendance mesurable par rapport au temps). *Soit  $X$  un espace vectoriel de dimension finie,  $K$  une partie fermée de  $X$  et  $F : \mathbb{R}_+ \times K \rightsquigarrow X$  une fonction multivoque non-triviale satisfaisant*

- i)  $\forall x \in K, t \rightsquigarrow F(t, x)$  est mesurable
- ii)  $\forall t \geq 0, x \rightsquigarrow F(t, x)$  est scs à valeurs convexes compactes (2.14)
- iii)  $\exists c(\cdot) \in L^1(0, \infty; \mathbb{R}_+)$  tel que  $\|F(t, x)\| \leq c(t)(\|x\| + 1)$ .

Si nous avons la condition tangentielle

$$\text{pour presque tout } t \geq 0, F(t, x) \cap T_K(x) \neq \emptyset, \quad (2.15)$$

l'environnement  $K$  est viable sous  $F$  : pour tout état initial  $x_0 \in K$ , il existe une solution à l'inclusion différentielle  $x'(t) \in F(t, x(t))$  avec comme valeur initiale  $x_0$  qui est viable dans  $K$ .  $\square$

## 2.2 Transformations de la condition de viabilité bilatérale en une contrainte linéaire

Nous aimerions inclure la condition (2.7) comme une contrainte sur l'espace  $L^1(0, 1; \Theta)$  des vitesses  $V$ , c'est-à-dire,

$$V(t) \in \{\theta \in \Theta : \forall x \in \overline{D}, \theta(x) \in \{-T_D(x)\} \cap T_D(x)\}.$$

En général,  $\{-T_D(x)\} \cap T_D(x)$  n'est pas un sous-espace linéaire de  $\mathbb{R}^N$ . M. C. DELFOUR et J.-P. ZOLÉSIO [1, Thm. 2.4, p. 13]<sup>8</sup> ont montré que cette condition peut être remplacée par une condition linéaire en introduisant le *cône tangent de Clarke*

$$C_D(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ v \in \mathbb{R}^N : \lim_{\substack{t \searrow 0 \\ y \xrightarrow{\overline{D}} x}} \frac{d_D(y + tv)}{t} = 0 \right\}, \quad (2.16)$$

où  $\xrightarrow{\overline{D}}$  dénote la convergence dans  $\overline{D}$ . L'observation clef est que  $C_D(x)$  est un cône convexe fermé<sup>9</sup> en  $x$ , que  $C_{\overline{D}}(x) = C_D(x)$  et que

$$L_D(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \{-C_D(x)\} \cap C_D(x) \quad (2.17)$$

est un sous-espace linéaire fermé de  $\mathbb{R}^N$ .

**Lemme 2.1.** *Soit un champ vectoriel  $W \in C^0(\overline{D}; \mathbb{R}^N)$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

$$\forall x \in \overline{D}, \quad W(x) \in T_D(x), \quad (2.18)$$

$$\forall x \in \overline{D}, \quad W(x) \in C_D(x). \quad (2.19)$$

*Démonstration.* Comme on a toujours  $C_D(x) \subset T_D(x)$ <sup>10</sup>, la condition (2.19) implique la condition (2.18). Dans l'autre sens. Si  $x$  est un point isolé de  $\overline{D}$ , il existe  $\rho > 0$  tel que  $B_\rho(x) \cap \overline{D} = \{x\}$ . Si  $h \in T_D(x)$ , alors, par définition de  $T_D(x)$ ,

$$\liminf_{t \searrow 0} \frac{d_D(x + th)}{t} = 0.$$

Si  $h \neq 0$ , on a, lorsque  $t$  tend vers 0,  $x + th \in B_{\rho/4}(x)$  pour  $t < \rho/(4|h|)$  et

$$\forall t < \rho/(4|h|), \quad d_D(x + th) = |x + th - x| = t|h|,$$

puisque tous les autres points de  $\overline{D}$  sont au moins à une distance  $3\rho/4$  de  $x + th$ . Ceci donne

$$\liminf_{t \searrow 0} \frac{d_D(x + th)}{t} = |h| > 0.$$

8. Voir aussi M. C. DELFOUR et J.-P. ZOLÉSIO [10, Thm. 5.2, p. 200].

9. J.-P. AUBIN et H. FRANKOWSKA [1, Thm. 4.1.6, p. 128]

10. Cf. J.-P. AUBIN et H. FRANKOWSKA [1, Prop. 4.1.6, sect. 4.1.3, p. 128].



Donc  $C_D(x) \subset T_D(x) = \{0\}$  et  $W(x) \in T_D(x) = \{0\}$  implique  $W(x) = 0 \in C_D(x)$ . Si  $x$  n'est pas un point isolé, il y a des points  $y \in \bar{D}$  tel que  $y \neq x$  et  $y \rightarrow x$ . On a le résultat général suivant

$$\liminf_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in \bar{D}}} T_D(y) = C_D(x) \quad (2.20)$$

(cf. J.-P. AUBIN et H. FRANKOWSKA [1, Thm. 4.1.10, sect. 4.1.5, p. 130]), où la  $\lim \inf$  d'ensembles dépendants de  $y$  est définie par

$$\liminf_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in \bar{D}}} T_D(y) \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ h \in \mathbb{R}^N : \lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in \bar{D}}} d_{T_D(y)}(h) = 0 \right\}$$

(cf. J.-P. AUBIN et H. FRANKOWSKA [1, Def 1.4.6, sect. 1.4.1, p. 41]). Comme  $W$  est continu en  $x$ , on a en particulier

$$W(x) = \lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in \bar{D}}} W(y).$$

Comme, pour tout  $y \in \bar{D}$ ,  $W(y) \in T_D(y)$ , il vient

$$0 \leq d_{T_D(y)}(W(x)) \leq |W(x) - W(y)| \rightarrow 0$$

lorsque  $y \rightarrow x$ . Donc

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in \bar{D}}} d_{T_D(y)}(W(x)) &= 0 \\ \Rightarrow W(x) &\in \liminf_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in \bar{D}}} T_D(y). \end{aligned}$$

Par la propriété (2.20),  $W(x) \in C_D(x)$ . □

On a immédiatement le résultat souhaité.

**Théorème 2.4.** *Soit un champ vectoriel  $W \in C^0(\overline{\mathbb{R}^N}; \mathbb{R}^N)$  et  $x \in \bar{D}$ .*

(i) *Les conditions suivantes sont équivalentes*

(a)  $W(x) \in \pm T_D(x)$

(b)  $W(x) \in L_D(x) = \{-C_D(x)\} \cap C_D(x)$ .

(ii)  $L_D(x)$  est un sous-espace linéaire fermé de  $\mathbb{R}^N$ .

(iii)  $L$ 'ensemble  $L^1(0, 1; \Theta_D)$ , où

$$\Theta_D \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ \theta \in C^{0,1}(\overline{\mathbb{R}^N}; \mathbb{R}^N) : \forall x \in \bar{D}, \quad \pm \theta(x) \in L_D(x) \right\} \quad (2.21)$$

est un sous-espace linéaire fermé de  $L^1(0, 1; \Theta)$ .

*Démonstration.* (i) L'équivalence est une conséquence directe du lemme 2.1.

(ii) L'ensemble  $L_D(x)$  est fermé, car il est l'intersection de deux ensembles fermés. Pour montrer qu'il est linéaire, nous montrons que pour  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $V \in L_D(x)$ ,  $\alpha V \in L_D(x)$ , et pour tout  $V$  et  $W$  dans  $L_D(x)$ ,  $V + W \in L_D(x)$ . Comme  $\pm C_D(x)$  sont des cônes,

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall V \in L_D(x), \quad \pm|\alpha|V \in C_D(x) \quad \Rightarrow \quad \alpha V \in L_D(x).$$

Par convexité de  $C_D(x)$  et  $-C_D(x)$

$$\forall V, W \in L_D(x), \quad \pm(V + W) \in C_D(x) \Rightarrow V + W \in L_D(x).$$

(iii) De la partie (ii). Ceci complète la démonstration du théorème.  $\square$

**Remarque 2.2.**

D'après J.-P. AUBIN [2], une condition équivalente pour la viabilité est

$$V(t, x) \in \text{co} T_D(x) \tag{2.22}$$

ce qui donnerait

$$V(t, x) \in (-\text{co} T_D(x)) \cap \text{co} T_D(x) \tag{2.23}$$

qui donne aussi un sous-espace linéaire, mais qui est une condition moins contraignante que la condition

$$V(t, x) \in (-C_D(x)) \cap C_D(x) \tag{2.24}$$

puisque le premier sous-espace est plus grand.  $\square$

### 3 Métrique d'Azencott et de Trouvé

Comme nous l'avons indiqué en introduction du présent chapitre, la question de la complétude de  $G_\Theta$  est contournée par R. AZENCOTT [1] et A. TROUVÉ [3], en introduisant un espace de Hilbert

$$\mathcal{H} \subset \Theta_D \subset \Theta = C^{0,1}(\overline{\mathbb{R}^N}; \mathbb{R}^N) \tag{3.1}$$

le sous-groupe

$$G_{\mathcal{H}} \stackrel{\text{déf}}{=} \{T_1(V) : V \in L^2(0, 1; \mathcal{H})\} \tag{3.2}$$

et la métrique

$$d_{\mathcal{H}}(I, T_1(V)) \stackrel{\text{déf}}{=} \inf_{\substack{v \in L^2(0, 1; \mathcal{H}) \\ T_1(v) = T_1(V)}} \int_0^1 \|v(t)\|_{\mathcal{H}}^2 dt$$

$$d_{\mathcal{H}}(T_1(V), T_1(W)) \stackrel{\text{déf}}{=} d_{\mathcal{H}}(T_1(V) \circ T_1(W)^{-1}, I).$$

Le fait que l'on travaille avec le Hilbert  $L^2(0, 1; \mathcal{H})$  plutôt que le Banach  $L^1(0, 1; \Theta_D)$  donne la complétude. Effectivement, nous savons que tous les espaces de Hilbert sont réflexifs. De plus, par le théorème de Banach-Alaoglu, un fermé borné convexe pour la topologie forte est compacte pour la topologie faible. Ainsi, dans un espace de Hilbert, toute suite bornée admet une sous-suite faiblement convergente. Dans un Hilbert, on peut extraire de toute suite bornée une sous-suite convergeant faiblement vers un élément du Hilbert. On a donc bien l'existence de trajectoire géodésique dans ce cadre un peu plus restrictif.

On revient au problème d'imagerie du paragraphe 1.1, où l'on remplace la variété  $M$  par  $\overline{D}$ . On a défini la fonction *template*  $f_r : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ . On a également défini la fonction *observation*  $f_o : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ . On cherche le minimum de la fonctionnelle

$$J_1(V) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2} \int_{\overline{D}} |f_r \circ T_1(V) - f_o|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 (V(t), V(t))_{\mathcal{H}} dt \quad (3.3)$$

par rapport à  $L^2(0, 1; \mathcal{H})$ . La seconde intégrale est semi-continue inférieurement et bornée inférieurement. Comme la fonctionnelle

$$\begin{aligned} V &\mapsto f_r \circ T_1(V) \mapsto J_0(V) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\overline{D}} |f_r \circ T_1(V) - f_o|^2 dX \\ &: L^2(0, 1; \mathcal{H}) \rightarrow C^0(\overline{D}; \mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

est construite à partir de la fonctionnelle

$$f \mapsto \int_{\overline{D}} |f - f_o|^2 dx : L^2(\overline{D}) \rightarrow \mathbb{R}$$

qui est semi-continue inférieurement et bornée inférieurement, il y a des solutions minimisantes de la fonctionnelle  $J_1(V)$  en (3.3) par rapport à  $L^2(0, 1; \mathcal{H})$ .

On caractérise maintenant les éléments minimisants locaux.

**Théorème 3.1.** *S'il existe un élément minimisant local  $\hat{V} \in L^2(0, 1; \mathcal{H})$ , il est solution de l'inéquation variationnelle*

$$dJ_1(\hat{V}; W - \hat{V}) \geq 0, \quad \forall W \in L^2(0, 1; \mathcal{H}),$$

où la semi-différentielle est donnée par

$$dJ_1(V; W) = \int_0^1 \langle i^* (|j(DT_t^{-1})| P(t) \circ T_t^{-1}(V)) + AV(t), W(t) \rangle_{\mathcal{H}^* \times \mathcal{H}} dt, \quad (3.4)$$

où  $i : \mathcal{H} \rightarrow L^2(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$  est l'injection continue de  $\mathcal{H}$  dans  $L^2(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ ,  $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$  est l'opérateur linéaire et continu associé au produit scalaire dans le Hilbert  $\mathcal{H}$ ,

$$A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}', \quad \forall u, v \in \mathcal{H}, (u, v)_{\mathcal{H}} = \langle Au, v \rangle_{\mathcal{H}' \times \mathcal{H}},$$

$P(t)$  est la solution de l'équation adjointe

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} P(t) + DV(t) \circ T_t(V)^\top P(t) = 0 \text{ dans } [0, 1] \\ P(1) = [f_r(T_1(V)) - f_o] \nabla f_r(T_1(V)), \end{cases}$$

et

$$\frac{d}{dt}T_t = V(t) \cdot T_t \text{ dans } [0, 1] \text{ et } T_0 = I. \quad (3.5)$$

Si l'élément minimisant  $\hat{V}$  est caractérisé par

$$dJ_1(\hat{V}; W) = 0, \quad \forall W \in L^2(0, 1; \mathcal{H}),$$

on a

$$\begin{aligned} i^* (|j(DT_t^{-1})| P(t) \circ T_t^{-1}(V)) + AV(t) &= 0 \\ \hat{V}(t) &= -A^{-1} i^* (|j(DT_t^{-1})| P(t) \circ T_t^{-1}(V)). \end{aligned}$$

*Démonstration.* La condition nécessaire pour un minimum local est l'existence d'un  $\hat{V} \in L^2(0, 1; \mathcal{H})$  tel que

$$dJ_1(\hat{V}; V - \hat{V}) \geq 0, \quad \forall V \in L^2(0, 1; \mathcal{H}).$$

On calcule la semi-différentielle

$$dJ_0(V; W) \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{J_0(V + \varepsilon W) - J_0(V)}{\varepsilon}$$

de  $J_0$  en  $V$  dans la direction  $W$ . On peut expliciter

$$J_0(V) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} |f_r(T_1(V)(X)) - f_o(X)|^2 dX$$

où  $T_t(V)(X)$  est solution de l'équation

$$\frac{dT_t(V)(X)}{dt} = V(t, T_t(V)(X)) \text{ dans } [0, 1], \quad T_0(V)(X) = X. \quad (3.6)$$

On a

$$\begin{aligned} & \frac{J_0(V) - J_0(V + \varepsilon W)}{\varepsilon} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \frac{|f_r \circ T_1(V + \varepsilon W) - f_o|^2 - |f_r \circ T_1(V) - f_o|^2}{\varepsilon} dX \\ \Rightarrow dJ_0(V; W) &= \int_{\mathcal{D}} (f_r(T_1(V)) - f_o) DT_1(V; W) \nabla f_r(T_1(V)) dX. \end{aligned}$$

De plus, la fonction

$$t \mapsto DT_t(V; W)(X) \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{T_t(V + \varepsilon W)(X) - T_t(V)(X)}{\varepsilon} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

s'obtient en considérant la différence de l'équation différentielle (3.6) en  $V + \varepsilon W$  et en  $V$ , puis en divisant par  $\varepsilon$

$$\begin{aligned} \frac{dT_t(V + \varepsilon W)}{dt} &= (V + \varepsilon W)(t) \circ T_t(V + \varepsilon W) \text{ dans } [0, 1], \quad T_0(V + \varepsilon W) = I \\ \frac{dT_t(V)}{dt} &= V(t) \circ T_t(V) \text{ dans } [0, 1], \quad T_0(V) = I \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \left[ \frac{T_t(V + \varepsilon W) - T_t(V)}{\varepsilon} \right] & \\ &= W(t) \circ T_t(V + \varepsilon W) + \frac{V(t) \circ T_t(V + \varepsilon W) - V(t) \circ T_t(V)}{\varepsilon} \\ &\sim W(t) \circ T_t(V + \varepsilon W) + DV(t) \circ T_t(V) \left[ \frac{T_t(V + \varepsilon W) - T_t(V)}{\varepsilon} \right] \end{aligned}$$

et en passant à la limite lorsque  $\varepsilon \searrow 0$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} DT_t(V; W) = W(t) \circ T_t(V) + DV(t) \circ T_t(V) DT_t(V; W) \text{ dans } [0, 1] \\ DT_0(V; W) = 0. \end{cases}$$

Revenons à l'équation d'état qui est donnée par

$$\frac{d}{dt} T_t(V) = V(t) \circ T_t(V) \text{ dans } [0, 1], \quad T_0(V) = I$$

et la "dérivée de l'état" par

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} DT_t(V; W) = W(t) \circ T_t(V) + DV(t) \circ T_t(V) DT_t(V; W) \text{ dans } [0, 1] \\ DT_0(V; W) = 0 \end{cases}$$

car  $T(V + \varepsilon W)(0) = T(V)(0) = I$ . On introduit maintenant l'état adjoint

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} P(t) + (DV(t) \circ T_t(V))^\top P(t) = 0 \text{ dans } [0, 1] \\ P(1) = [f_r(T_1(V)) - f_o] \nabla f_r(T_1(V)) \end{cases}$$

que l'on va utiliser pour éliminer la dérivée de l'état

$$\begin{aligned}
dJ_0(V; W) &= \int_{\overline{D}} P(1) \cdot DT_1(V, W) dX \\
&= \int_{\overline{D}} \left( P(0) \cdot DT_0(V, W) + \int_0^1 \frac{d}{dt} [P(t) \cdot DT_t(V, W)] dt \right) dX \\
&= \int_{\overline{D}} \int_0^1 P' \cdot DT_t(V, W) + P \cdot (DT_t(V, W))' dt dX \\
&= \int_{\overline{D}} \int_0^1 -(DV \circ T_t(V))^\top P \cdot DT_t(V, W) + P \cdot (DT_t(V, W))' dt dX \\
&= \int_{\overline{D}} \int_0^1 P \cdot [-DV \circ T_t(V) DT_t(V, W) + (DT_t(V, W))'] dt dX \\
&= \int_{\overline{D}} \int_0^1 P(t) \cdot W(t) \circ T_t(V) dt dX.
\end{aligned}$$

En faisant un changement de variable, on obtient

$$dJ_0(V; W) = \int_{\overline{D}} \int_0^1 P(t) \circ T_t^{-1}(V) \cdot W(t) |j(DT_t^{-1})| dX dt.$$

Comme nous sommes intéressés à la fonction  $J_1(V)$  définie par

$$J_1(V) = J_0(V) + \frac{1}{2} \int_0^1 (V(t), V(t))_{\mathcal{H}} dt,$$

on a

$$\begin{aligned}
dJ_1(V; W) &= \int_0^1 \left( \int_{\overline{D}} P(t) \circ T_t^{-1}(V) \cdot W(t) |j(DT_t^{-1})| dX + (V, W)_{\mathcal{H}} \right) dt \\
&= \int_0^1 \left[ (|j(DT_t^{-1})| P(t) \circ T_t^{-1}(V), W(t))_{L^2(\overline{D}; \mathbb{R}^N)} + (V(t), W(t))_{\mathcal{H}} \right] dt
\end{aligned}$$

pour tout  $W \in L^2(0, 1; \mathcal{H})$ . Comme  $\mathcal{H}$  est un Hilbert, il existe un opérateur

$$A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$$

tel que  $\forall u, v \in \mathcal{H}$ , on ait  $(u, v)_{\mathcal{H}} = \langle Au, v \rangle$ . Comme  $\mathcal{H} \subset \Theta_D \subset C^{0,1}(\overline{\mathbb{R}^N}; \mathbb{R}^N) \subset L^2(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ , il y a une injection continue  $i : \mathcal{H} \rightarrow L^2(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ , ce qui permet d'envoyer le terme dans l'intégrale de  $L^2(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$  dans le  $\mathcal{H}^*$  ;

$$\begin{aligned}
&(|j(DT_t^{-1})| P(t) \circ T_t^{-1}(V), (iW)(t))_{L^2(\overline{D}; \mathbb{R}^N)} \\
&= \langle i^* (|j(DT_t^{-1})| P(t) \circ T_t^{-1}(V)), W(t) \rangle_{\mathcal{H}^* \times \mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

On obtient ainsi l'expression du gradient de  $J_1$

$$dJ_1(V; W) = \int_0^1 \langle i^* (|j(DT_t^{-1})| P(t) \circ T_t^{-1}(V)) + AV(t), W(t) \rangle dt,$$

car il y a linéarité par rapport à  $W \in L^2(0, 1; \mathcal{H})$ .

Dépendamment de l'espace de Hilbert dont il est question (en général un Sobolev), il est possible de résoudre cette équation. Derrière ceci se cache un problème vectoriel d'équations aux dérivées partielles de type elliptique avec des conditions de Neumann (comme les équations de l'élasticité, pour le vecteur de déformation  $\hat{V}$  du domaine  $D$ , d'où la terminologie métrique élastique).

Si l'élément minimisant  $\hat{V}$  était caractérisé par

$$dJ_1(\hat{V}; W) = 0, \quad \forall W \in L^2(0, 1; \mathcal{H})$$

nous aurions

$$\begin{aligned} i^* (|j(DT_t^{-1})| P(t) \circ T_t^{-1}(V)) + AV(t) &= 0 \\ \hat{V}(t) &= -A^{-1} i^* (|j(DT_t^{-1})| P(t) \circ T_t^{-1}(V)). \end{aligned}$$

□

## 4 Semi-différentielle par la théorie des points de selle

### 4.1 Contrôle optimal via les points de selle

Précédemment, nous avons introduit l'état adjoint un peu artificiellement, lors de la démonstration d'existence d'un minimum. Dans les prochaines lignes, il sera question d'élucider les fondements de cet état adjoint et la pertinence de son utilisation. Pour cela, on prend comme exemple le problème plus simple et classique du contrôle optimal pour une fonction objectif quadratique et une dynamique linéaire.

Soit  $A(t)$  une matrice  $n \times n$  mesurable et bornée par rapport à  $t$  dans  $[0, 1]$  et  $B(t)$  une matrice  $n \times m$  mesurable et bornée par rapport à  $t$  dans  $[0, 1]$ . Étant donné le contrôle  $v \in L^2(0, 1; \mathbb{R}^M)$ , l'état  $x \in H^1(0, 1; \mathbb{R}^N)$  est solution de l'équation différentielle vectorielle

$$x' = A(t)x + B(t)v \text{ dans } [0, 1], \quad x(0) = x^0. \quad (4.1)$$

On associe à la cible  $x_1 \in \mathbb{R}^N$ , l'état initial  $x_0 \in \mathbb{R}^N$  et le contrôle  $v \in L^2(0, 1; \mathbb{R}^M)$  la fonction objectif

$$J(v) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2} |x(1) - x_1|^2 + \frac{1}{2} \int_0^1 |v(t)|^2 dt$$

que l'on cherche à minimiser par rapport à  $v \in L^2(0, 1; \mathbb{R}^M)$ . Sous certaines conditions, pour chaque  $x_1 \in \mathbb{R}^N$ , il existe toujours un  $v \in L^2(0, 1; \mathbb{R}^M)$  pour lequel  $x(1; x_0, v) = x_1$ . C'est une condition de contrôlabilité qui sera vérifiée, par exemple lorsque  $A = 0$ ,  $m = n$ , et  $B = I$ ,  $I$  la matrice identité.

Afin d'éviter la dérivée de l'état par rapport au contrôle, on peut introduire un lagrangien, en mettant un multiplicateur  $p(t) \in \mathbb{R}^N$  devant l'équation d'état. Ce

multiplicateur sera solution d'une *équation différentielle adjointe* :

$$L(v, x, p, p^0) \stackrel{\text{déf}}{=} C(v, x) + \int_0^1 p \cdot [-x' + A(t)x + B(t)v] dt - p^0 \cdot [x(0) - x^0]$$

$$C(v, x) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2} |x(1) - x_1|^2 + \frac{1}{2} \int_0^1 |v(t)|^2 dt.$$

On vérifie alors que

$$J(v) = \inf_{x \in H^1(0,1;\mathbb{R}^N)} \sup_{\substack{p \in L^2(0,1;\mathbb{R}^N) \\ \text{et } p^0 \in \mathbb{R}^N}} L(v, x, p, p^0)$$

En effet, si  $x$  n'est pas solution de (4.1), alors

$$(-x' + Ax + Bv, x^0 - x(0)) \neq (0, 0).$$

Ensuite, on peut remplacer le problème de minimisation par

$$\inf_{v \in L^2(0,1;\mathbb{R}^M)} J(v) = \inf_{\substack{x \in H^1(0,1;\mathbb{R}^N) \\ \text{et } v \in L^2(0,1;\mathbb{R}^M)}} \sup_{\substack{p \in L^2(0,1;\mathbb{R}^N) \\ \text{et } p^0 \in \mathbb{R}^N}} L(v, x, p, p^0)$$

#### 4.1.1 Exemple simple

Nous avons le problème suivant :

$$\inf_{v \in L^2(0,1;\mathbb{U})} \left[ \frac{1}{2} |x(1) - x_1|^2 + \frac{1}{2} \int_0^1 |v(t)|^2 dt \right]$$

$$x' = Ax + Bv \text{ dans } [0, 1], \quad x(0) = x_0.$$

Ainsi, nous posons

$$L(v, x, p, p_0)$$

$$= \frac{1}{2} |x(1) - x_1|^2 + \frac{1}{2} \int_0^1 |v(t)|^2 dt$$

$$+ \int_0^1 p(t) \cdot [-x'(t) + Ax(t) + Bv(t)] dt + p_0 \cdot [-x(0) + x_0].$$

On constate que  $L$  est convexe en  $(v, x)$  et concave en  $(p, p_0)$  et ce, pour tout  $(v, x) \in L^2(0, 1; \mathbb{R}^M) \times H^1(0, 1; \mathbb{R}^N)$  et  $(p, p_0) \in \mathbb{R}^N \times L^2(0, 1; \mathbb{R}^M)$ .

#### 4.1.2 Trouver le point de selle

Soit  $(\hat{v}, \hat{x}, \hat{p}, \hat{p}_0)$  un point de selle. Premièrement, dérivons  $L$  par rapport à  $p$ . Nous obtenons que, pour tout  $q \in L^2(0, 1; \mathbb{R}^N)$ , nous avons

$$\int_0^1 q(t) \cdot [-\hat{x}'(t) + A\hat{x}(t) + B\hat{v}(t)] dt = 0.$$



Ainsi, on retrouve  $\hat{x}' = A\hat{x} + B\hat{v}$ . Deuxièmement, dérivons  $L$  par rapport à  $p_0$ . Nous obtenons que pour tout,  $q \in \mathbb{R}^N$ , nous avons

$$q_0 \cdot [-\hat{x}(0) - x_0] = 0.$$

Ainsi,  $\hat{x}(0) = x_0$ .

Troisièmement, dérivons  $L$  par rapport à  $x$ . Nous obtenons que, pour tout  $y \in H^1(0, 1; \mathbb{R}^N)$ , nous avons

$$(\hat{x}(1) - x_1) \cdot y(1) + \int_0^1 \hat{p}(t) \cdot [-y'(t) + Ay(t)] dt - \hat{p}_0 \cdot y(0) = 0.$$

1) Si on prend spécifiquement  $y \in \mathcal{D}((0, 1); \mathbb{R}^N)$ , on obtient

$$\int_0^1 \hat{p}(t) \cdot [-y'(t) + Ay(t)] dt = \int_0^1 -\hat{p}(t) \cdot y'(t) + A^\top \hat{p}(t) \cdot y(t) dt = 0.$$

Ainsi, nous avons  $D_t \hat{p} + A^\top \hat{p} = 0$  dans  $\mathcal{D}((0, 1); \mathbb{R}^N)'$ . Cela nous informe que  $D_t \hat{p} \in L^2(0, 1; \mathbb{R}^N)$  et donc que  $\hat{p} \in H^1(0, 1; \mathbb{R}^N)$ .

2) Si on effectue une intégration par partie, nous obtenons

$$\begin{aligned} & (\hat{x}(1) - x_1) \cdot y(1) + \int_0^1 (\hat{p}' + A^\top \hat{p}) \cdot y + \hat{p} \cdot (-y' + Ay) dt - \hat{p}_0 \cdot y(0) \\ &= (\hat{x}(1) - x_1) \cdot y(1) - \hat{p}(1) \cdot y(1) + \hat{p}(0) \cdot y(0) - \hat{p}_0 \cdot y(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons  $\hat{p}(1) = \hat{x}(1) - x_1$  et  $\hat{p}(0) = \hat{p}^0$ .

Quatrièmement, dérivons  $L$  par rapport à  $v$ . Nous obtenons que, pour tout  $v \in L^2(0, 1; \mathbb{R}^N)$ , nous avons que

$$\int_0^1 \hat{v}(t) \cdot v(t) + \hat{p}(t) \cdot Bv(t) dt = \int_0^1 (\hat{v}(t) + B^\top \hat{p}(t)) \cdot v(t) dt = 0.$$

Ainsi, on a que  $\hat{v}(t) = -B^\top \hat{p}(t)$ .

Nous avons donc trouvé les conditions nécessaires et suffisantes qui caractérisent le contrôle minimisant  $u$  du problème de minimisation de départ à un problème couplé d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} \hat{x}' = A\hat{x} + B\hat{v} \text{ dans } [0, 1] \\ \hat{x}(0) = x_0 \\ \hat{p}' + A^\top \hat{p} = 0 \text{ dans } [0, 1] \\ \hat{p}(1) = \hat{x}(1) - x_1 \\ \hat{v}(t) = -B^\top \hat{p}(t). \end{cases}$$

## 4.2 Le problème d'imagerie revisité

La structure est la même que le problème simple de contrôle optimal précédent, mais sa complexité augmente par le fait que nous ne sommes plus dans  $\mathbb{R}^N$ , mais dans un groupe de transformations de  $M$  et le contrôle  $V$  se trouve dans un espace  $L^2(0, 1; \mathcal{H})$ , où  $\mathcal{H}$  est un espace de Hilbert de transformations de  $M$  contenu dans  $C^{0,1}(\overline{\Omega}; \Omega)$ , un espace de fonctions lipschitziennes de  $\mathbb{R}^N$  dans  $\mathbb{R}^N$ . Nous repoussons les détails plus loin, pour nous concentrer sur la formulation et les résultats anticipés.

### 4.2.1 Position du problème

Nous avons le problème suivant :

$$\inf_V \left[ \frac{1}{2} \int_{\Omega} |f_r(T_1(V)(X)) - f_o(X)|^2 dX + \frac{1}{2} \int_0^1 \|V(t)\|_{\mathcal{H}}^2 dt \right]$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} T_t(V) = V(t) \circ T_t(V) \\ T_0(V) = I, \end{cases}$$

où  $T_t(V) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  et  $V(t) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ .

Ainsi, nous considérons maintenant des fonctions  $T(t) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ ,  $V(t) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ , et  $P(t) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , ainsi que  $P_0 : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ . Nous posons

$$L(T, V, P, P_0)$$

$$\stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |f_r(T(1)(X)) - f_o(X)|^2 dX + \frac{1}{2} \int_0^1 \|V(t)\|_{\mathcal{H}}^2 dt$$

$$+ \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^N} P(t)(X) \cdot [-T'(t)(X) + V(t, T(t)(X))] dX dt$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^N} P_0(X) \cdot [-T(0)(X) + X] dX.$$

Il faut préciser les régularités de ces fonctions. Par exemple, prenons

$$T \in H^1(0, 1; L^2(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)), P \in L^2(0, 1; L^2(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)), P_0 \in L^2(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N),$$

$$V \in L^2(0, 1; \mathcal{H}), \mathcal{H} \subset C^{0,1}(\overline{\mathbb{R}^N}; \mathbb{R}^N),$$

où  $\mathcal{H}$  est un espace de Hilbert.

### 4.2.2 Trouver le point de selle

Nous procédons formellement. Soit  $(\hat{T}, \hat{V}, \hat{P}, \hat{P}_0)$  un point de selle. Premièrement, dérivons  $L$  par rapport à  $P$  : pour tout  $P \in L^2(0, 1; L^2(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N))$

$$\int_0^1 \int_{\mathbb{R}^N} P(t)(X) \cdot [-\hat{T}'(t)(X) + \hat{V}(t, \hat{T}(t)(X))] dX = 0$$

$$\Rightarrow \exists \hat{T} \in H^1(0, 1; L^2(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)) \text{ tel que } \hat{T}'(t)(X) = \hat{V}(t, \hat{T}(t)(X)) \text{ p.p. en } X.$$

Deuxièmement, dérivons  $L$  par rapport à  $P_0$  : pour tout  $P_0 \in L^2(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$

$$\int_{\mathbb{R}^N} P_0(X) \cdot \left[ -\hat{T}(0)(X) + X \right] dX = 0 \Rightarrow \hat{T}(0)(X) = X \text{ p.p. en } X.$$

Donc, pour presque tout  $X \in \mathbb{R}^N$ ,  $\hat{T} \in H^1(0, 1; L^2(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N))$  est solution de l'équation différentielle avec donnée initiale

$$\frac{d}{dt} \hat{T}(t)(X) = \hat{V}(t, \hat{T}(t)(X)), \quad \hat{T}(0)(X) = X.$$

Troisièmement, dérivons  $L$  par rapport à  $T$  : pour tout  $T \in H^1(0, 1; L^2(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N))$

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} \chi_\Omega(X) \left( f_r(\hat{T}(1)(X)) - f_o(X) \right) \nabla f_r(\hat{T}(1)(X)) \cdot T(1)(X) dX \\ & + \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^1 \hat{P}(t)(X) \cdot \left[ -T'(t)(X) + D_x \hat{V}(t, \hat{T}(t)(X)) T(t)(X) \right] dt dX \\ & - \int_{\mathbb{R}^N} \hat{P}_0(X) \cdot T(0)(X) dX = 0 \end{aligned}$$

ce que l'on peut réécrire

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} \left[ \chi_\Omega(X) \left( f_r(\hat{T}(1)(X)) - f_o(X) \right) \nabla f_r(\hat{T}(1)(X)) \cdot T(1)(X) \right. \\ & \quad \left. + \int_0^1 \hat{P}(t)(X) \cdot \left[ -T'(t)(X) + D_x \hat{V}(t, \hat{T}(t)(X)) T(t)(X) \right] dt \right. \\ & \quad \left. - \hat{P}_0(X) \cdot T(0)(X) \right] dX = 0. \end{aligned}$$

En prenant des tests  $T \in \mathcal{D}(0, 1; L^2(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N))$ , on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[ \int_0^1 \hat{P}(t)(X) \cdot \left[ -T'(t)(X) + D_x \hat{V}(t, \hat{T}(t)(X)) T(t)(X) \right] dt \right] dX = 0.$$

Donc, pour presque tout  $X$ ,  $\hat{P}(\cdot)(X) \in H^1(0, 1; \mathbb{R}^N)$  est solution de l'équation linéaire

$$\frac{d}{dt} \hat{P}(t)(X) + D_x \hat{V}(t, \hat{T}(t)(X))^\top \hat{P}(t)(X) = 0.$$

En substituant et en intégrant par partie par rapport à  $t$ , il vient

$$\begin{aligned} \hat{P}(1)(X) &= \chi_\Omega(X) \left( f_r(\hat{T}(1)(X)) - f_o(X) \right) \nabla f_r(\hat{T}(1)(X)) \\ \hat{P}_0(X) &= \hat{P}(0)(X). \end{aligned}$$

Donc, il existe  $\hat{P} \in H^1(0, 1; L^2(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N))$  tel que, pour presque tout  $X \in \mathbb{R}^N$ ,

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \hat{P}(t)(X) + D_x \hat{V}(t, \hat{T}(t)(X))^\top \hat{P}(t)(X) = 0 \\ \hat{P}(1)(X) = \chi_\Omega(X) \left( f_r(\hat{T}(1)(X)) - f_o(X) \right) \nabla f_r(\hat{T}(1)(X)) \\ \hat{P}_0(X) = \hat{P}(0)(X). \end{cases}$$

En particulier, pour  $X \notin \Omega$ ,  $\hat{P}(1)(X) = 0$  et  $\hat{P}(t)(X) = 0$  dans  $[0,1]$ .

Quatrièmement, dérivons  $L$  par rapport à  $V$  : pour tout  $V \in L^2(0,1; \mathcal{H})$

$$\int_0^1 \langle A\hat{V}(t), V(t) \rangle_{\mathcal{H}} dt + \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^N} \hat{P}(t)(X) \cdot V(t, \hat{T}(t)(X)) dX dt = 0$$

ou

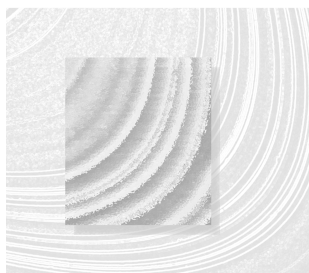
$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 \langle A\hat{V}(t), V(t) \rangle_{\mathcal{H}} + \int_{\mathbb{R}^N} \hat{P}(t)(X) \cdot V(t, \hat{T}(t)(X)) dX dt \\ &= \int_0^1 \langle A\hat{V}(t), V(t) \rangle_{\mathcal{H}} + \int_{\mathbb{R}^N} |\det D\hat{T}(t)(X)|^{-1} \hat{P}(t)(\hat{T}(t)^{-1}(X)) \cdot V(t, X) dX dt \\ &= \int_0^1 \langle A\hat{V}(t), V(t) \rangle_{\mathcal{H}} + (|\det D\hat{T}(t)|^{-1} \hat{P}(t) \circ \hat{T}(t)^{-1}, V(t))_{L^2} dt. \end{aligned}$$

Comme l'opérateur  $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$  associé au produit scalaire de  $\mathcal{H}$  est continu et inversible et que  $\mathcal{H} \in L^2(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$  est une injection continue, il existe un  $\hat{V} \in L^2(0,1; \mathcal{H})$  tel que, pour presque tout  $t$ ,

$$\hat{V}(t) = -A^{-1} \left( |\det D\hat{T}(t)|^{-1} \hat{P}(t) \circ \hat{T}(t)^{-1} \right).$$

En résumé, le point de selle est solution du système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{T}(t)(X) &= \hat{V}(t, \hat{T}(t)(X)), \quad \hat{T}(0)(X) = X \\ \begin{cases} \frac{d}{dt} \hat{P}(t)(X) + D_x \hat{V}(t, \hat{T}(t)(X))^\top \hat{P}(t)(X) = 0 \\ \hat{P}(1)(X) = \chi_\Omega(X) \left( f_r(\hat{T}(1)(X)) - f_o(X) \right) \nabla f_r(\hat{T}(1)(X)) \end{cases} \\ \hat{V}(t) &= -A^{-1} \left( |\det D\hat{T}(t)|^{-1} \hat{P}(t) \circ \hat{T}(t)^{-1} \right) \\ \hat{P}_0(X) &= \hat{P}(0)(X). \end{aligned}$$



## Chapitre 4

# Détection des surfaces à partir de scans tridimensionnels

---

---

## 1 Introduction

Revenons au problème de biométrie brièvement mentionné dans l'introduction, comme par exemple l'acquisition d'un visage que l'on assimilera à un objet tridimensionnel, dont une partie de la surface supérieure est variable. L'acquisition de l'objet et de sa surface se fait à l'aide d'un *scanner* (numériseur) portatif qui génère un ensemble de points sur la surface supérieure de l'objet. Cet ensemble possède des points qui sont bien situés dans l'espace, grâce à des cibles référentielles sur le visage qui sont détectées par la machine.

À partir de ces points, on choisit des triangles ou polygones assez petits pour approcher la surface avec des “pièces” (ou “*patch*” en anglais) construites à partir de polynômes sur chaque triangle, de façon qu'il y ait continuité de la surface et de la normale aux interfaces entre les pièces. C'est ce que l'on appelle une surface avec des joints de classe  $G^1$ . Les pièces se touchent le long des interfaces et elles ont des plans tangents parallèles, donc continuité de la normale, mais cela ne donne pas une courbe de classe  $C^1$  au sens de la géométrie différentielle. La *continuité géométrique*  $G^0$ ,  $G^1$ , etc. est une notion plus faible que la continuité  $C^0$ ,  $C^1$ , etc.

La comparaison de surfaces est utile dans plusieurs domaines. Que se soit dans l'analyse de l'évolution d'un visage avec les années, ou dans la détection de micro-bris d'une pièce mécanique, elle demeure centrale. Dans ce chapitre, nous allons faire cette comparaison à l'aide de minimisation et de calculs de volume. Cette quantification des différences entre deux surfaces mettra en évidence le degré de leur distinction qui nous intéresse.

Avant tout, nous allons installer les notions de géométrie différentielle nécessaires pour décrire nos surfaces et formuler le problème d'optimisation pour l'identification à partir des points obtenus par le numériseur. Ensuite, nous allons paramétriser nos surfaces pour pouvoir entreprendre nos calculs numériques, résoudre les équations du problème d'optimisation associé à l'identification et calculer les

changements géométriques qui nous intéressent : comparaisons de volumes, surfaces ou courbures.

## 1.1 Notations

Le produit scalaire dans  $\mathbb{R}^N$  et le double produit scalaire dans  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ , l'espace des matrices  $N \times N$  ou tenseurs, sont notés

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^N x_i y_i, \quad A \cdot B = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N A_{ij} B_{ij}.$$

\* $A$  sera la transposée de  $A$ .

## 1.2 Fonction distance orientée et géométrie

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  de frontière  $\Gamma \stackrel{\text{déf}}{=} \partial\Omega \neq \emptyset$ . La *fonction distance* (resp. *fonction distance orientée*) est définie comme suit

$$d_\Omega(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \inf_{y \in \Omega} |y - x| \quad (\text{resp. } b_\Omega(x) = d_\Omega(x) - d_{\mathbb{R}^N - \Omega}(x)).$$

On peut montrer les propriétés suivantes :

$$\Omega \text{ est de classe } C^{1,1}$$

$$\iff$$

$$b_\Omega \text{ est } C^{1,1} \text{ dans un voisinage de } \Gamma.$$

La fonction distance orientée capture toutes les caractéristiques de la frontière  $\Gamma$  :

$$\nabla b_\Omega|_\Gamma = \text{la normale extérieure } n \text{ unitaire sur } \Gamma$$

$$D^2 b_\Omega|_\Gamma = \text{seconde forme fondamentale}$$

$$(D^2 b_\Omega)^2|_\Gamma = \text{troisième forme fondamentale}$$

...

$$(D^2 b_\Omega)^{N-1}|_\Gamma = N\text{-ième forme fondamentale.}$$

La *projection*  $p_\Gamma(x)$  d'un point  $x \in \mathbb{R}^N$  sur  $\Gamma$  et la *projection orthogonale*  $P(x)$  d'un vecteur sur le *plan tangent*  $T_x(\Gamma)$  à  $\Gamma$  en  $x$  sont données en termes de  $b_\Omega$  par les formules suivantes

$$p_\Gamma(x) \stackrel{\text{déf}}{=} x - b_\Omega(x) \nabla b_\Omega(x), \quad P(x) \stackrel{\text{déf}}{=} I - \nabla b_\Omega(x) \cdot \nabla b_\Omega(x),$$

où  $\cdot V$  est la transposée du vecteur colonne  $V$  dans  $\mathbb{R}^N$ . Le terme  $\nabla b_\Omega(x) \cdot \nabla b_\Omega(x)$  est donc une matrice  $N \times N$ .

Il sera pratique d'utiliser la notation suivante pour la décomposition de vecteurs, ou de fonctions matricielles, en leur *partie normale* et *tangentielle* par rapport à  $\Gamma$ . Soit une fonction vectorielle  $V : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^N$ , les parties, normale et tangentielle, sont définies par

$$V_n(x) \stackrel{\text{déf}}{=} V(x) \cdot n(x), \quad V_\Gamma(x) \stackrel{\text{déf}}{=} P(x)V(x) = V(x) - V_n n(x).$$

Par définition,  $V_\Gamma(x)$  est dans le plan tangent  $T_x(\Gamma)$  à  $\Gamma$  en  $x$ .

Soit  $\omega$ , un domaine (relativement) ouvert dans  $\Gamma$ . Quand  $\omega = \Gamma$ ,  $\omega$  n'a pas de frontière; autrement, on note  $\gamma$  la *frontière* (relative) de  $\omega$  dans  $\Gamma$ . Soit  $h > 0$ . On définit le *sandwich* d'épaisseur  $2h$  autour de  $\omega$  et sa *frontière latérale* :

$$\begin{aligned} S_h(\omega) &\stackrel{\text{déf}}{=} \{x \in \mathbb{R}^N : |b_\Omega(x)| < h, p(x) \in \omega\} \\ \Sigma_h(\gamma) &\stackrel{\text{déf}}{=} \{x \in \mathbb{R}^N : |b_\Omega(x)| < h, p(x) \in \gamma\}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

La notation  $S_h(\gamma)$  peut aussi être utilisée, mais  $\Sigma_h(\gamma)$  souligne le fait que c'est une partie de la frontière de  $S_h(\omega)$ . Soit  $\gamma' \subset \gamma$ , on peut aussi définir  $\Sigma_h(\gamma')$  comme dans (1.1) avec  $\gamma'$  à la place de  $\gamma$ .

### 1.3 L'application bi-lipschitzienne et le repère curviligne

Lorsque  $\Omega$  est de classe  $C^{1,1}$  et que  $\Gamma$  est compact, il existe  $h > 0$  tel que  $b_\Omega \in C^{1,1}(S_h(\Gamma))$ , où

$$S_h(\Gamma) \stackrel{\text{déf}}{=} \{x \in \mathbb{R}^N : |b_\Omega(x)| < h, p_\Gamma(x) \in \Gamma\} \quad (1.2)$$

est le *voisinage tubulaire* de  $\Gamma$  d'épaisseur  $2h > 0$ . Dans ce cas, l'application

$$(X, z) \mapsto T(X, z) \stackrel{\text{déf}}{=} T_z(X) = X + z \nabla b_\Omega(X) : ]-h, h[ \times \Gamma \rightarrow S_h(\Omega) \quad (1.3)$$

est bien définie et bi-lipschitzienne. Son inverse est  $T^{-1}(x) = (p_\Gamma(x), b_\Omega(x))$ .

Ceci définit un *repère curviligne* dans le voisinage tubulaire  $S_h(\Gamma)$  dans lequel les notions de normale et de formes fondamentales sur la sous-variété  $\Gamma$  possèdent, par construction, des prolongements à tout  $S_h(\Gamma)$  dans lequel on peut utiliser le gradient euclidien dans  $\mathbb{R}^N$ . Ceci permet, entre autres, de faire du calcul différentiel (tangential) sur  $\Gamma$  à partir du calcul différentiel dans le voisinage euclidien  $S_h(\Gamma)$  de  $\Gamma$ . Par exemple, le gradient tangential  $\nabla_\Gamma f(x)$  d'une fonction régulière  $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  en un point  $x \in \Gamma$  est donné par la formule

$$\nabla_\Gamma f(x) = \nabla(f \circ p_\Gamma)(x), \quad (1.4)$$

où  $f \circ p_\Gamma$  est un prolongement de  $f$  à  $S_h(\Gamma)$ . De la même façon, pour une fonction vectorielle  $F : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^k$ , on obtient la matrice jacobienne tangentielle

$$D_\Gamma f(x) = D(f \circ p_\Gamma)(x). \quad (1.5)$$

À titre d'exemple, pour la fonction  $b_\Omega$ , on a  $b_\Omega \circ p_\Gamma = 0$  et donc

$$\nabla_\Gamma b_\Omega = 0,$$

ce qui confirme que  $\nabla b_\Omega$  est bien orthogonal au plan tangent en  $x$ . On peut aussi montrer que, pour des  $\Omega$  de classe  $C^{1,1}$ ,  $\nabla b_\Omega = \nabla b_\Omega \circ p_\Gamma$  dans  $S_h(\Gamma)$ . Donc

$$D_\Gamma \nabla b_\Omega = D(\nabla b_\Omega \circ p_\Gamma) = D(\nabla b_\Omega) = D^2 b_\Omega,$$

la restriction à  $\Gamma$  de la matrice hessienne dans  $\mathbb{R}^N$  de  $b_\Omega$ . C'est l'explication de la relation de  $D^2b_\Omega$  avec les formes fondamentales.

Définissons pour tout  $|z| < h$  et  $X \in \omega$ ,

$$j_z(X) \stackrel{\text{déf}}{=} \det DT_z(X) = \det[I + z D^2b_\Omega(X)],$$

où  $DT_z$  est la matrice jacobienne de  $T_z$  par rapport à  $X$ . C'est un polynôme d'ordre  $N - 1$  en  $z$ , car le déterminant de  $D^2b_\Omega$  est nul, puisque  $|\nabla b_\Omega(x)|^2 = 1$  et donc  $2 D^2b_\Omega(x) \nabla b_\Omega(x) = 0$ . Pour  $N = 3$

$$DT_z(X) = 1 + \kappa_1 z + \kappa_2 z^2, \quad (1.6)$$

où  $\kappa_1 = \Delta b_\Omega$  est deux fois la *courbure moyenne* et  $\kappa_2$  est la *courbure de Gauss*. En effet, si  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  sont les valeurs propres de la matrice  $D^2b_\Omega$ ,  $\det[\lambda I - D^2b_\Omega] = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) = 0$ , alors, comme une des valeurs propres est nulle (disons  $\lambda_3 = 0$ ),

$$\det DT_z(X) = 1 + (\lambda_1 + \lambda_2) z + (\lambda_1 \lambda_2) z^2, \quad (1.7)$$

où  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont les *courbures principales* de la seconde forme fondamentale  $D^2b_\Omega(x)$  de la sous-variété  $\Gamma$  en  $x$ .

Cette fonction  $j_z$  va intervenir dans la formule de changement de variable, lorsque l'on veut passer d'une intégrale sur la surface de niveau  $z$

$$\Gamma_z \stackrel{\text{déf}}{=} \{x \in \mathbb{R}^N : b_\Omega(x) = z\} \quad (1.8)$$

au niveau 0 :  $\Gamma_0 = \Gamma$ . On montre, en Annexe A, que

$$\int_{\Gamma_z} f d\Gamma_z = \int_{\Gamma} f \circ T_z j_z d\Gamma. \quad (1.9)$$

On montre aussi le changement de variable du repère orthonormal de  $\mathbb{R}^N$  au repère curviligne dans  $S_h(\Gamma)$  pour l'intégrale de volume via la formule de Federer

$$\int_{S_h(\Gamma)} f dx = \int_{-h}^h \int_{\Gamma} f \circ T_z j_z d\Gamma dz = \int_{\Gamma} \left[ \int_{-h}^h f \circ T_z j_z \right] dz d\Gamma \quad (1.10)$$

(voir le détail en Annexe A).

## 2 Formulation du problème d'imagerie

Nous allons développer la question de la comparaison de plusieurs numérisations d'une même surface. Nous allons d'abord expliquer comment, à partir du premier scan d'une surface, nous pouvons construire, avec les points captés, une surface bidimensionnelle connexe  $\omega_r$  dans  $\mathbb{R}^3$  de régularité  $C^{1,1}$  qui nous servira de *surface de référence* et, comme on l'a expliqué au paragraphe précédent, de *repère curviligne de référence* pour tous les autres scans de la même surface. Ensuite, nous allons introduire une paramétrisation des scans subséquents par rapport au repère de référence déjà établi. Finalement, nous allons aborder la quantification de la différence de volume entre les deux surfaces.



## 2.1 Numérisation

La numérisation d'une surface consiste à enregistrer un ensemble suffisamment riche de ses points pour pouvoir reconstruire numériquement une copie suffisamment approchée de la surface originale pour nos besoins. Nous supposons que chaque point capté connaît ses voisins immédiats, de façon à pouvoir construire une *surface à facettes triangulaires* proche de la surface scannée, à partir de laquelle les calculs numériques seront réalisés.

Dans notre cas, nous ne nous contenterons pas d'une surface visuellement proche car nous voulons au moins faire des calculs de différence de volume et, possiblement, de l'expérimentation sur les différences d'aires ou de courbures. Cette étape est hautement non triviale, car les logiciels commerciaux ne construisent en général que des surfaces de classe  $G^1$ . Il s'agit de *continuité géométrique* et non pas de continuité  $C^1$  au sens de la géométrie différentielle. Dans ce mémoire, nous supposons que cette étape peut être réalisée et mise en œuvre numériquement.

## 2.2 Triangulation

Une triangulation d'un ensemble de points  $P$  dans le plan est une triangulation de l'enveloppe convexe de  $P$ , tous les points de  $P$  formant alors des sommets de cette triangulation. Les triangulations sont un sous-ensemble de graphes planaires simples. Ici, c'est plus compliqué, car les points sont sur une surface et on ne peut pas prendre l'enveloppe convexe de ces points, car on obtiendrait un volume et non pas une surface. On a cependant un vieux rapport de P. J. FREY [1], *Génération et adaptation de maillages de surfaces à partir de données anatomiques discrètes*.

Soit un ensemble  $\mathcal{P} = \{P_i\}$  de points  $P_i$  dans  $\mathbb{R}^N$ , où  $N$  sera 2 ou 3. En deux dimensions, nous relierons deux voisins pour obtenir une ligne. En trois dimensions, nous relierons trois points voisins  $P_1, P_2$ , et  $P_3$  pour obtenir un triangle

$$K \stackrel{\text{déf}}{=} \text{co} \{P_1, P_2, P_3\}$$

d'où le nom : triangulation.

La triangulation permet d'obtenir une famille de facettes  $\mathcal{F} = \{K\}$  avec continuité aux interfaces et une surface connexe à facettes

$$S \stackrel{\text{déf}}{=} \bigcup_{K \in \mathcal{F}} K$$

(une facette étant une ligne en deux dimensions et un triangle en trois dimensions).

## 2.3 Construction d'une surface $C^{1,1}$

Nous voulons ensuite construire une surface  $C^{1,1}$  à partir de notre surface à facettes  $S$ . Par exemple, en deux dimensions, nous pouvons utiliser les *polynômes d'Hermite* pour chaque facette. En effet, un point sur la ligne  $K = [P_0, P_1]$  entre  $P_0$  et  $P_1$  sera donné par la fonction

$$\xi \mapsto x_K(\xi) \stackrel{\text{déf}}{=} (1 - \xi) P_0 + \xi P_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 .$$

Le vecteur tangent le long de  $K$  est donné par

$$x'_K(\xi) = P_2 - P_1$$

qui est constant. Soit  $n_K$  la normale unitaire obtenue par rotation de  $P_1 - P_0$  d'un angle de  $\pi/2$  dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. On suppose que l'on peut orienter la surface  $S$  de façon que la normale  $n_K$  pointe du même côté de  $S$ .

Sur l'intervalle  $[0, 1]$ , on considère le polynôme de degré 3

$$\begin{aligned} p(\xi) = & (2\xi^3 - 3\xi^2 + 1)p(0) + (\xi^3 - 2\xi^2 + \xi)p'(0) \\ & + (-2\xi^3 + 3\xi^2)p(1) + (\xi^3 - \xi^2)p'(1) \end{aligned} \quad (2.1)$$

paramétrisé par ses valeurs et la valeur de ses dérivées aux points  $\xi = 0$  et  $\xi = 1$  à l'aide des quatre polynômes d'Hermite :

$$\begin{aligned} p_{00}(\xi) &\stackrel{\text{déf}}{=} 2\xi^3 - 3\xi^2 + 1, & p_{01}(\xi) &\stackrel{\text{déf}}{=} \xi^3 - 2\xi^2 + \xi, \\ p_{10}(\xi) &\stackrel{\text{déf}}{=} 2\xi^3 + 3\xi^2, & p_{11}(\xi) &\stackrel{\text{déf}}{=} \xi^3 - \xi^2. \end{aligned}$$

On définit la courbe paramétrisée qui passe par  $P_0$  et  $P_1$

$$\xi \mapsto \varphi_K(\xi) \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{aligned} & (2\xi^3 - 3\xi^2 + 1)P_0 + (\xi^3 - 2\xi^2 + \xi)M_0 \\ & + (-2\xi^3 + 3\xi^2)P_1 + (\xi^3 - \xi^2)M_1 \end{aligned} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

où il reste à spécifier les deux vecteurs  $M_0$  et  $M_1$ . On vérifie que

$$\varphi_K(0) = P_0, \quad \varphi_K(1) = P_1, \quad \varphi'_K(0) = M_0, \quad \varphi'_K(1) = M_1.$$

On peut donc recoller les morceaux de courbes d'un segment  $K^1 = [P_0, P_1]$  à l'autre  $K^2 = [P_1, P_2]$

$$\begin{aligned} \xi \mapsto \varphi_{K^1}(\xi) &\stackrel{\text{déf}}{=} \begin{aligned} & (2\xi^3 - 3\xi^2 + 1)P_0 + (\xi^3 - 2\xi^2 + \xi)M_0^1 \\ & + (-2\xi^3 + 3\xi^2)P_1 + (\xi^3 - \xi^2)M_1^2 \end{aligned} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \xi \mapsto \varphi_{K^2}(\xi) &\stackrel{\text{déf}}{=} \begin{aligned} & (2\xi^3 - 3\xi^2 + 1)P_1 + (\xi^3 - 2\xi^2 + \xi)M_0^2 \\ & + (-2\xi^3 + 3\xi^2)P_2 + (\xi^3 - \xi^2)M_1^2 \end{aligned} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Il ne suffit cependant pas de faire  $M_1^2 = M_0^2$  pour recoller les tangentes au point  $P_1$ , puisqu'il y a un changement d'échelle et rotation de l'intervalle  $[0, 1]$  à la facelle  $[P_0, P_1]$  et de  $[0, 1]$  à la facelle  $[P_1, P_2]$  par rapport à un repère horizontal fixe. Comme ce n'est pas le thème central du chapitre, on renvoie le lecteur à A. FORTIN [1, pp. 247-305]. Nous n'avons pas abordé la construction en trois dimensions. La construction de la surface est aussi possible avec un cheminement semblable. La lourdeur des calculs explique principalement pourquoi nous n'avons pas développé sur le sujet.

Ainsi, nous supposons que l'on peut construire une surface  $C^{1,1}$  paramétrisée à partir de  $S$  et passant par l'ensemble  $\mathcal{P} = \{P_i\}$  des points numérisés et que, sur chaque triangle  $K$  de la triangulation  $\mathcal{F} = \{K\}$ , le morceau de surface est donné par l'application  $\varphi_K : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

## 2.4 Voisinage tubulaire

Pour travailler plus confortablement, nous supposons qu'à partir des points numérisés, on a non seulement construit un morceau de surface, mais un domaine connexe ouvert  $\Omega$  de classe  $C^{1,1}$  et de frontière  $\Gamma$  et que  $\Gamma$  est complètement paramétrisée à partir d'une surface à facettes triangulaires  $S$ .

On travaillera donc dans le repère curviligne  $S_h(\Gamma)$ . On désignera par  $\omega_r \subset \Gamma$ , la *surface de référence* construite au premier scan. De cette fonction, pour tout  $x \in \Gamma$ , on a accès à la normale orientée vers l'extérieur

$$n(x) = \nabla b_\Omega(x), \quad x \in \Gamma,$$

la première forme fondamentale

$$[\nabla b_\Omega(x) \cdot \nabla b_\Omega(x)]_{i,j} = \partial_i b_\Omega(x) \partial_j b_\Omega(x),$$

la seconde forme fondamentale

$$D^2 b_\Omega(x)_{i,j} = \partial_{ij}^2 b_\Omega(x)$$

et la troisième forme fondamentale  $(D^2 b_\Omega)^2$  de la surface  $\Gamma$  et donc de  $\omega_r$ . En dimension trois, les valeurs propres  $(0, \lambda_m, \lambda_M)$  de  $D^2 b_\Omega$  correspondent aux courbures principales de la surface  $\Gamma$  en  $x$ .

On revient maintenant à  $\omega_r \subset \Gamma$ . On dénote par  $\gamma_r$  sa frontière relative dans  $\Gamma$  et on considère le sandwich

$$S_h(\omega_r) = \{x \in \mathbb{R}^3 : p_\Gamma(x) \in \omega_r \text{ et } |b_\Omega(x)| < h\}$$

de frontière latérale

$$S_h(\gamma_r) = \{x \in \mathbb{R}^3 : p_\Gamma(x) \in \gamma_r \text{ et } |b_\Omega(x)| < h\}.$$

Les frontières supérieure et inférieure sont données par

$$T^\pm = \{x \in \mathbb{R}^3 : p_\Gamma(x) \in \overline{\omega_r} \text{ et } b_\Omega(x) = \pm h\}.$$

Tout le sandwich est donc décrit par la fonction  $b_\Omega$  et  $\omega_r$ .

Si  $S$  n'est pas contenu dans le voisinage tubulaire  $S_h(\Gamma)$ , alors on ajoute de nouveaux points sur la surface construite et l'on forme des triangles additionnels plus proches de  $\Gamma$ , de façon qu'ils soient tous contenus dans le voisinage tubulaire ( $S \subset S_h(\Gamma)$ ).

## 2.5 Comparaison

La seconde numérisation du visage donne un autre ensemble de points observés  $\{P_i^o\}$ . Nous allons poser l'hypothèse que cet ensemble de points soit dans le sandwich  $S_h(\Gamma) : \{P_i^o\} \subset S_h(\Gamma)$ . Ainsi, chaque point observé  $P_i^o$  peut s'exprimer en coordonnées curvilignes

$$(X_i^o, z_i^o) \stackrel{\text{déf}}{=} T^{-1}(P_i^o) = (p_\Gamma(P_i^o), b_\Omega(P_i^o)) \in \Gamma \times ]-h, h[.$$

Nous voulons maintenant construire, à partir des points  $\{(X_i^o, z_i^o)\}$ , une surface  $\omega_o$ . On choisit de le faire en déformant la surface de référence  $\omega_r$  par un difféomorphisme  $F$  de  $\mathbb{R}^3$  :  $\omega_o = F(\omega_r)$ . Pour trouver une telle transformation  $F$ , nous allons procéder à la minimisation de la somme des carrés de la différence entre la composante normale  $b_{F(\Omega)}(P_i^o)$  au point  $X_i^o$  et  $z_i^o$  :

$$\begin{aligned} \inf_{F \in \mathcal{Y}} \sum_{i=1}^n |b_{\Omega}(F(p_{\Gamma}(P_i^o))) - b_{\Omega}(P_i^o)|^2 + \|F\|_{L^2(S_h, S_h)}^2 = \\ \inf_{F \in \mathcal{Y}} \sum_{i=1}^n |b_{\Omega}(F(X_i^o)) - z_i^o|^2 + \|F\|_{L^2(S_h, S_h)}^2, \end{aligned}$$

où il reste à spécifier  $\mathcal{Y}$ .

Pour obtenir une surface  $F(\omega_r)$  de classe  $C^{1,1}$ , il faut, par exemple, choisir  $F \in C^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ . Dans le cadre des chapitres précédents, cela veut dire choisir des champs de vitesses  $V \in L^1(0, 1; \Theta)$  avec  $\Theta = C^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ , ce qui nous donnera le sous-groupe  $G_{\Theta}$ . Enfin, pour travailler avec la métrique d'Azencott, il nous faut un Hilbert  $\mathcal{H} \subset C^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ . D'après le Théorème 1.1 du Chapitre 3, il faut  $\mathcal{H} = H^4(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ .

En supposant que les points observés  $\{P_i^o\}$  soient dans  $S_h(\Gamma)$ , on peut imposer que le difféomorphisme  $F$  aille de  $S_h(\Gamma)$  sur  $S_h(\Gamma)$ . On a vu, au chapitre 3, qu'il suffit d'imposer sur le champ  $V$  la double condition de viabilité :

$$\pm V(t, x) \in T_{S_h(\Gamma)}(x), \quad (2.2)$$

pour tout  $x \in \partial S_h(\Gamma)$ . Enfin, comme nous ne sommes pas intéressés à des déformations tangentielles le long de  $\Gamma$ , on impose que le champ  $V$  n'ait pas de composante tangentielle :

$$\mathcal{V} \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ V \in L^2(0, 1; H^4(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)) : \begin{array}{l} \pm V(t, x) \in T_{S_h(\Gamma)}(x), \forall x \in \partial S_h(\Gamma), \\ P_{T_x \Gamma} V(t, x) = 0, \forall x \in S_h(\Gamma) \end{array} \right\}, \quad (2.3)$$

où  $P_{T_x \Gamma}$  est la projection orthogonale sur le plan tangent  $T_x \Gamma$  en  $x$  et des difféomorphismes

$$\mathcal{Y} \stackrel{\text{déf}}{=} \{T_1(V) : V \in \mathcal{V}\}.$$

Pour ces choix, on aura une simplification, car

$$b_{\Omega}(F(p_{\Gamma}(P_i^o))) = F(p_{\Gamma}(P_i^o)) - p_{\Gamma}(P_i^o) :$$

$$\begin{aligned} \inf_{F \in \mathcal{Y}} \sum_{i=1}^n |b_{\Omega}(F(p_{\Gamma}(P_i^o))) - b_{\Omega}(P_i^o)|^2 + \|F\|_{L^2(S_h, S_h)}^2 = \\ \inf_{F \in \mathcal{Y}} \sum_{i=1}^n |F(X_i^o) - X_i^o - z_i^o|^2 + \|F\|_{L^2(S_h, S_h)}^2. \end{aligned}$$

Si  $\tilde{F}$  est un difféomorphisme minimisant, on prend

$$\omega_o \stackrel{\text{déf}}{=} \tilde{F}(\omega_r) \subset S_h(\Gamma) \quad (2.4)$$

et on peut associer à  $\omega_o$  la fonction

$$X \mapsto a_0(X) \stackrel{\text{déf}}{=} b_\Omega(F(X)) : \omega_r \rightarrow \mathbb{R}. \quad (2.5)$$

Par choix de  $\tilde{F}$ , on a aussi

$$\omega_0 = \{X + a_0(X)\nabla b_\Omega(X) : X \in \omega_r\}. \quad (2.6)$$

Pour comparer le changement de volume, on considère les domaines tridimensionnels

$$\Omega_r \stackrel{\text{déf}}{=} \{X + z\nabla b_\Omega(X); X \in \omega_r \text{ et } -h < z < 0\} \quad (2.7)$$

et

$$\Omega_0 \stackrel{\text{déf}}{=} \{X + z\nabla b_\Omega(X); X \in \omega_r \text{ et } -h < z < a_0(X)\} \quad (2.8)$$

Un critère pour comparer les changements de volume est la différence entre les fonctions caractéristiques de  $\Omega_r$  et de  $\Omega_0$  :

$$\Delta V \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{S_h(\Gamma)} |\chi_{\Omega_r} - \chi_{\Omega_0}| dx,$$

où

$$\chi_{\Omega_r}(x) - \chi_{\Omega_0}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \Omega_o \cap \Omega_r \text{ ou } x \in \mathbb{C}\Omega_o \cap \mathbb{C}\Omega_r \\ 1 & \text{si } x \in \Omega_r \cap \mathbb{C}\Omega_o \\ -1 & \text{si } x \in \Omega_o \cap \mathbb{C}\Omega_r. \end{cases}$$

On invoque maintenant la formule de Federer pour écrire cette intégrale dans le repère curviligne de  $S_h(\Gamma)$

$$\begin{aligned} \Delta V &= \int_{S_h(\Gamma)} |\chi_{\Omega_r} - \chi_{\Omega_0}| dx \\ &= \int_\Gamma \int_{-h}^h |\chi_{\Omega_r} \circ T_z - \chi_{\Omega_o} \circ T_z| j_z(X) dz d\Gamma \\ &= \int_\Gamma \int_{-h}^h |\chi_{(-h,0)}(z) - \chi_{(-h,a_0(X))}(z)| j_z(X) dz d\Gamma. \end{aligned}$$

On obtient finalement

$$\Delta V = \int_\Gamma \int_{\min\{0, a_0(X)\}}^{\max\{0, a_0(X)\}} j_z(X) dz d\Gamma, \quad j_z(X) = 1 + \kappa_1(X)z + \kappa_2(X)z^2,$$

où  $\kappa_1(X)$  est la courbure moyenne en  $X$  et  $\kappa_2(X)$  est la courbure de Gauss en  $X$ . Nous laissons au lecteur le soin de faire l'intégration par rapport à  $z$  !



## Annexe A. Compléments de géométrie différentielle

### 1 La formule de Federer-Young

Ce théorème est dû à H. FEDERER [3] et L. C. YOUNG, [1]. Nous allons travailler avec la version donnée dans L. C. EVANS et R. F. GARIEPY [1]. La décomposition de Federer donne une décomposition de l'intégrale de volume en des intégrales sur les ensembles de niveaux d'une fonction lipschitzienne.

**Théorème 1.1.** *Soit  $g: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lipschitzienne continue tel que*

$$|\nabla g| > 0 \quad p.p.$$

*Pour toute fonction de Lebesgue  $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ , nous avons une décomposition de l'intégrale le long des ensembles de niveau de  $g$*

$$\int_{\{g>t\}} f \, dx = \int_t^\infty \left( \int_{\{g=z\}} \frac{f}{|\nabla g|} \, dH_{N-1} \right) dz.$$

Une application de ce théorème est l'obtention de la célèbre formule d'aire d'un ensemble dilaté de Steiner-Minkowski. Cette formule fut utilisée pour les ensembles à "positive reach" en 1959 par H. FEDERER [3] et nécessita l'introduction des *mesures de courbures*.

Pour un ensemble  $\Omega$  de frontière  $\Gamma = \partial\Omega$  et de classe  $C^{1,1}$ , on a  $b_\Omega \in C^{1,1}(S_h(\Gamma))$  pour un  $h > 0$ , où  $b = b_\Omega$  est la fonction distance orientée qui est lipschitzienne. De plus, la mesure de Lebesgue  $m(\Gamma) = 0$ . Comme  $|\nabla b| = 1$  dans  $S_h(\Gamma)$ , la formule devient

$$\int_{S_h(\Gamma)} f \, dx = \int_{-h}^h \left( \int_{\Gamma_z} f(x) \, dH_{N-1} \right) dz,$$

où

$$\Gamma_z \stackrel{\text{déf}}{=} \{x \in \mathbb{R}^N : b(x) = z\}. \quad (1.1)$$

On aimerait maintenant ramener l'intégrale sur  $\Gamma_z$  (au niveau  $z$ ) au niveau 0

$$\Gamma \stackrel{\text{déf}}{=} \{x \in \mathbb{R}^N : b(x) = 0\} \quad (1.2)$$

en utilisant le changement de variable

$$x \mapsto T_z(x) \stackrel{\text{déf}}{=} x + z \nabla b(x) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N \quad (1.3)$$

dont la matrice jacobienne et le jacobien sont

$$DT_z(x) = I - z D^2 b(x), \quad j_z(x) = \det DT_z(x). \quad (1.4)$$

Nous allons montrer dans le prochain paragraphe que

$$\int_{T_z(\Gamma)} f dH_{N-1} = \int_{\gamma} f \circ T_z j_z dH_{N-1}$$

ce qui donnera la formule finale

$$\int_{S_h(\Gamma)} f dx = \int_{\Gamma} \left( \int_{-h}^h f \circ T_z j_z dz \right) dH_{N-1}.$$

## 2 Formule de changement de variable

Nous voulons montrer les passages sous-entendus dans M. C. DELFOUR et J.-P. ZOLÉSIO [10, chapitre 2 section 3]).

Soit un ouvert  $\Omega$  de classe  $C^k$  de frontière  $\Gamma = \partial\Omega$ . Soit  $x \in \Gamma$ , il existe un voisinage  $U(x)$  tel qu'il existe une fonction bijective

$$\begin{aligned} h_x : B_1(0) &\rightarrow U(x) \\ h_x(B_1(0) \cap \mathbb{R}^{N-1}) &= \Gamma \cap U(x) \\ h_x(B_1(0) \cap \{\xi_1, \dots, \xi_N : N > 0\}) &= \Omega \cap U(x) \end{aligned}$$

où  $B_1(0)$  est la boule unité dans  $\mathbb{R}^N$ ,  $\{e_i\}$  est une base orthonormale dans  $\mathbb{R}^N$ , et  $\mathbb{R}^{N-1} = \{(\xi', 0) : \xi' \in \mathbb{R}^{N-1}\}$  est le sous-espace linéaire normal à  $e_N$  dans  $\mathbb{R}^N$ . Un élément  $\xi$  de  $\mathbb{R}^N$  sera souvent écrit  $\xi = (\xi', \xi_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}$ .

Si  $\Gamma$  est compact, il existe un nombre fini de points  $\{x_i\}_{i=1}^n$  et de voisinage associé  $U(x_i)$ , tel que  $\Gamma \subset \bigcup_{i=1}^n U(x_i)$ . Il existe partition de l'unité  $\{r_i\} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ , tel que, pour tout  $x \in \bigcup_{i=1}^n U(x_i)$ , on ait

$$0 \leq r_i(x) \leq 1, \quad \sum_{i=1}^n r_i(x) = 1.$$

Nous avons donc les outils pour intégrer une fonction  $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  que l'on exprime comme  $f = \sum_{i=1}^n f r_i$  et donc

$$\int_{\Gamma} f d\Gamma = \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_i} f r_i d\Gamma_i.$$

L'intégrale sur  $\Gamma$  peut donc être définie à partir de l'intégration sur chaque morceau  $\Gamma_i = \Gamma \cap U(x_i)$  de la fonction  $f r_i$

$$\int_{\Gamma_i} f d\Gamma_i \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\mathbb{R}^{N-1} \cap B_1(0)} f \circ h_x \omega_x d\xi',$$

où

$$\omega_x = \sqrt{|\det B|}$$



est la densité canonique et  $B$  est la matrice  $(N-1) \times (N-1)$  donnée par

$$B_{ij} = [Dh_x e_i] \cdot [Dh_x e_j], \quad 0 \leq i, j \leq N-1.$$

Par la définition du déterminant, de la définition de la matrice des cofacteurs et des propriétés suivantes,

$$\begin{aligned} M(A) &= \det(A)^* A^{-1} \\ M(^*A) &= ^* M(A) \\ M(A_1 A_2) &= M(A_1) M(A_2) \end{aligned}$$

nous avons que

$$\begin{aligned} \det B &= M(^*Dh_x Dh_x)_{(N,N)} \\ &= M(^*Dh_x) M(Dh_x) e_N \cdot e_N \\ &= M(Dh_x) e_N \cdot M(Dh_x) e_N \\ &= |M(Dh_x) e_N|^2. \end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} \omega_x &= |M(Dh_x) e_N| \\ &= |(\det Dh_x) ^*Dh_x^{-1} e_N| \\ &= |\det Dh_x| |^*Dh_x^{-1} e_N|. \end{aligned}$$

Prenons la fonction  $T_z(x) = x + z\nabla(x) : \Gamma \rightarrow S_h(\Gamma)$ . Soit  $x \in \Gamma$ , nous avons

$$B_1(0) \xrightarrow{h_x} U(x) \xrightarrow{T_z} T_z(U(x)).$$

Soit  $\Gamma_x = U(x) \cap \Gamma$ . Nous avons donc

$$\int_{T_z(\Gamma_x)} f d\Gamma_z = \int_{B_1(0) \cap R^{N-1}} f \circ (T_z \circ h_x) \omega_{T_z \circ h_x} d\xi'$$

avec

$$\begin{aligned} \omega_{T_z \circ h_x} &= |\det D(T_z \circ h_x)| |^*D(T_z \circ h_x)^{-1} e_N| \\ &= |\det(DT_z \circ h_x \cdot Dh_x)| |^*DT_z^{-1} \circ h_x ^*Dh_x^{-1} e_N| \\ &= |\det DT_z \circ h_x| |\det Dh_x| |^*DT_z^{-1} \circ h_x ^*Dh_x^{-1} e_N|. \end{aligned}$$

L'intégrale devient alors

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma_z(\Gamma_x)} f d\Gamma_z \\ &= \int_{B_1(0) \cap R^{N-1}} f \circ (T_z \circ h_x) |\det DT_z \circ h_x| |\det Dh_x| |^*DT_z^{-1} \circ h_x ^*Dh_x^{-1} e_N| d\xi' \\ &= \int_{B_1(0) \cap R^{N-1}} (f \circ T_z | \det DT_z| \circ h_x | \det Dh_x| |^*DT_z^{-1} \circ h_x ^*Dh_x^{-1} e_N|) d\xi'. \end{aligned}$$

Si  $|*DT_z^{-1} \circ h_x *Dh_x^{-1}e_N| = |*Dh_x^{-1}e_N|$  alors

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_z(\Gamma_x)} f d\Gamma_z &= \int_{B_1(0) \cap \mathbb{R}^{N-1}} (f \circ T_z | \det DT_z |) \circ h_x | \det Dh_x | |*Dh_x^{-1}e_N| d\xi' \\ &= \int_{\Gamma_x} f \circ T_z | \det DT_z | d\Gamma. \end{aligned}$$

Montrons que  $|*DT_z^{-1} \circ h_x *Dh_x^{-1}e_N| = |*Dh_x^{-1}e_N|$ . Le plan tangent en  $y = h_x(\xi', 0)$  à  $\Omega$  a pour base les vecteurs  $\{Dh_x(\xi', 0)e_i; 1 \leq i \leq N-1\}$ , où  $\{e_i; 1 \leq i \leq N-1\}$  sont une base orthonormal du sous-espace  $\mathbb{R}^{N-1}$  de  $\mathbb{R}^N$ .

Trouvons un champs normal  $m$  tel que, pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq N-1$ , on ait que  $Dh_x(\xi', 0)e_i \cdot m = 0$ . On choisit

$$m \stackrel{\text{déf}}{=} -*Dh_x(\xi', 0)^{-1}e_N$$

et, par sa propriété, il est dans la direction de la normale au plan tangent qui pointe vers l'extérieur de  $\Omega$ . La normale unitaire extérieure est donc donnée par

$$\nabla b_\Omega(h_x(\xi', 0)) = \frac{m}{|m|}(h_x(\xi', 0))$$

qui coïncide avec le gradient de  $b_\Omega$  en  $y = (h_x(\xi', 0))$ .

On sait que dans le sandwich  $S_h(\Gamma)$

$$b_\Omega(T_z(x)) = b_\Omega(x) + z$$

donc

$$\begin{aligned} *DT_z \nabla b_\Omega \circ T_z &= \nabla b_\Omega \\ \nabla b_\Omega \circ T_z &= *DT_z^{-1} \nabla b_\Omega. \end{aligned}$$

Finalement, nous avons que

$$\begin{aligned} |-*DT_z^{-1} \circ h_x *Dh_x^{-1}e_N| &= |*DT_z^{-1} \circ h_x \nabla b_\Omega \circ h_x| |Dh_x^{-1}e_N| \\ &= |(*DT_z^{-1} \nabla b_\Omega) \circ h_x| |Dh_x^{-1}e_N| \\ &= |\nabla b_\Omega \circ T_z \circ h_x| |Dh_x^{-1}e_N| \\ &= |Dh_x^{-1}e_N|. \end{aligned}$$

Nous avons donc que

$$\int_{\Gamma_z} f d\Gamma_z = \int_{T_z(\Gamma_x)} f d\Gamma_z = \int_{\Gamma_x} (f \circ T_z | \det DT_z |) d\Gamma$$

(attention à la double signification de  $\Gamma_z = T_z(\Gamma_x)$  et de  $\Gamma_x = \Gamma \cap U(x)$ ).

### 3 Expression de $j_z$

Pour une matrice  $A$  symétrique  $n \times n$ , la condition est que, s'il existe  $x \neq 0$  tel que  $Ax = 0$ , alors  $\det A = 0$ . L'équation de valeurs propres est

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

Si  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  sont les valeurs propres, alors le polynôme caractéristique est

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i).$$

En particulier, pour  $\lambda = 0$ , le dernier coefficient est  $(-)^n \det A$ . Revenons à  $I + zD^2b$

$$\det(I + zD^2b) = (-z)^n \det\left(-\frac{1}{z}I - D^2b\right) = (-z)^n p_{D^2b}\left(-\frac{1}{z}\right)$$

Pour  $n = 2$  avec une valeur propre  $\lambda_2 = 0$

$$\begin{aligned} p_{D^2b}(\lambda) &= \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + (\lambda_1 \lambda_2) \\ (-z)^2 p_{D^2b}\left(-\frac{1}{z}\right) &= z^2 \left[ \left(-\frac{1}{z}\right)^2 - z^2(\lambda_1 + \lambda_2)\left(-\frac{1}{z}\right) + (\lambda_1 \lambda_2)z^2 \right] \\ &= [1 + (\lambda_1 + \lambda_2)z + (\lambda_1 \lambda_2)z^2] \\ &\quad \boxed{\det[I + zD^2b] = 1 + \lambda_1 z.} \end{aligned}$$

Pour  $n = 3$  avec une valeur propre  $\lambda_3 = 0$

$$\begin{aligned} p_{D^2b}(\lambda) &= \lambda^3 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\lambda^2 + (\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1)\lambda - (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3) \\ (-z)^3 p_{D^2b}\left(-\frac{1}{z}\right) &= -z^3 \left[ \left(-\frac{1}{z}\right)^3 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\left(-\frac{1}{z}\right)^2 \right. \\ &\quad \left. + (\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1)\left(-\frac{1}{z}\right) - (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3) \right] \\ &= 1 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)z \\ &\quad + (\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1)z^2 + (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)z^3 \\ &\quad \boxed{\det[I + zD^2b] = 1 + (\lambda_1 + \lambda_2)z + (\lambda_1 \lambda_2)z^2.} \end{aligned}$$



# Références

- R. A. ADAMS  
[1], *Sobolev spaces*, Academic Press, New York, London, 1975.
- L. AMBROSIO  
[1], *Metric space valued functions of bounded variation*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **17** (1990), no. 3, 439–478.
- E. ASPLUND et L. BUNGART  
[1], *A first course in integration*, Holt, Rinehart and Winston, New York 1968.
- J.-P. AUBIN  
[1], *Viability theory*, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 1991.  
[2], Communication personnelle.
- J.-P. AUBIN et A. CELLINA  
[1], *Differential inclusions*, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- J.-P. AUBIN et H. FRANKOWSKA  
[1], *Set-valued analysis*, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 1990.
- R. AZENCOTT  
[1], *Random and deterministic deformations applied to shape recognition*, Cortona workshop, Italy 1994.  
[2], *Geodesics in diffeomorphisms groups : Deformation distance between shapes*, Int. Conf. Stoch. Structures and Monte-Carlo Optim., Cortona, Italy, 1994
- R. AZENCOTT, R. GLOWINSKI, et A. M. RAMOS  
[1], *A Controllability approach to shape identification*, Appl. Math. Lett. (8) **21** (2008), 861–865.  
[2], *Diffeomorphic matching and dynamic deformable surfaces in 3D medical imaging*, Comput. Methods Appl. Math. 10 (2010, No. 3, 235–274.
- A. BANYAGA  
[1], *The structure of classical diffeomorphism groups*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 1997.
- M. F. BEG, M. I. MILLER, A. TROUVÉ et L. YOUNES  
[1], *Computing large deformation metric mapping via geodesic flows of diffeomorphisms*, Int. J. Comput. Vis. (2) **61** (2005), 139–157.
- M. BERGER  
[1], *Geometry I, II*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1987 (transl. from the French *Géométrie*, Vols. 1, 2, 3, 4, 5, 6, CEDIC/Fernand Nathan, Paris, 1977).

- M. BERGER et B. GOSTIAUX  
 [1], *Differential geometry : Manifolds, curves and surfaces*, Springer-Verlag, New York, 1988 (transl. from the French 1987 edition of *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces*, 2nd ed., Presses Universitaire de France, Paris, 1992).
- A. BIELECKI  
 [1], *Une remarque sur la méthode de Banach–Cacciopoli–Tikhonov dans la théorie des équations différentielles ordinaires*, Bull. Acad. Polon. Sci. **4** (1956), 261–264.
- O. BIHUN et C. CHICOINE  
 [1], *Deformation minimal bending of compact manifolds : case of simple closed curves*, Opuscula Math. **28** (2008), no. 1, 19–28.  
 [2], *Distortion minimal morphing : the theory for stretching*, Rocky Mountain J. Math. **39** (2009), no. 1, 11–25.
- O. BIHUN, C. CHICOINE et S. G. HARRIS  
 [1], *Minimal distortion morphs generated by time-dependent vector fields*, J. Math. Anal. Appl. **364** (2010), no. 2, 324–340.
- H. BLUM  
 [1], *A transformation for extracting view description of shapes*, in “Models for perception of speech and visual form,” W. Wathen-Dunn, ed., 362–380, MIT Press, Cambridge Mass., (1967).
- G. BOULIGAND  
 [1], *Sur les surfaces dépourvues de points hyperlimités*, Ann. Soc. Polon. Math. **9** (1930), 32–41.  
 [2], *Introduction à la géométrie infinitésimale directe*, Gauthier-Villars, Paris, 1932.
- R. CACCIOPPOLI  
 [1], *Misura e integrazione sugli insiemi dimensionalmente orientati*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) **12** (1952), 3–11 ; 137–146.
- V. CASELLES, F. CATTÉ, T. COLL, et F. DIBOS  
 [1], *A geometric model for active contours*, Numer. Math. **66** (1993), 1–31.
- V. CASELLES, R. KIMMEL, et G. SAPIRO  
 [1], *Geodesic active contours*, Int.J. Comput.Vis. **22** (1997), 61–79.
- D. CHENAIS  
 [1], *Un résultat d’existence dans un problème d’identification de domaine*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A **276** (1973), 547–550.
- L. D. COHEN  
 [1], *On active contour models and ballons*, CVGIP : Image Understanding **53** (1991), 211–218.
- R. COURANT et D. HILBERT  
 [1], *Methods of mathematical physics*, Interscience Publishers, New York, 1953–1962 (1st English ed.).
- E. DE GIORGI  
 [1], *Su una teoria generale della misura*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **36** (1954), 191–213  
 [2], *Nuovi teoremi relativi alle misure  $(r - 1)$ -dimensionali in uno spazio ad  $r$  dimensioni*, Ricerche Mat. **4** (1955), 95–113.

M. DEHAES

[1], *Représentations analytiques des objets géométriques et contours actifs en imagerie*, Mémoire de maîtrise, Département de mathématiques et de statistique, Université de Montréal, 2004.

M. DEHAES et M. C. DELFOUR

[1], *Shape and geometric methods in image processing*, in “Free and moving boundaries analysis, simulation, and control,” R. Glowinski and J.-P. Zolésio, eds, 293–308, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics Volume 252, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2007.

M. C. DELFOUR

[1], *Intrinsic differential geometric methods in the asymptotic analysis of linear thin shells*, in “Boundaries, interfaces, and transitions” (Banff, AB, 1995), 19–90, CRM Proc. Lecture Notes, Vol. 13, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.

[2], *Intrinsic  $P(2,1)$  thin shell model and Naghdi’s models without a priori assumption on the stress tensor*, in “Proc International Conference on Optimal Control of Partial Differential Equations,” K.H. Hoffmann, G. Leugering, F. Tröltzsch, eds., 99–113, Internat. Ser. Of Numerical Mathematics, Vol. 133, Birkhäuser Verlag, Basel, 1999.

[3], *Membrane shell equation : characterization of the space of solutions*, in “Control of Distributed Parameter and Stochastic Systems,” Shuping Chen, Xunjing Li, Jiongmin Yong, Xun Yu Zhou, eds., 21–29, Chapman and Hall, New York, 1999.

[4], *Characterization of the space of the membrane shell equation for arbitrary  $C^{1,1}$  midsurfaces*, Control Cybernet. (3) **28** (1999), 481–501.

[5], *Tangential differential calculus and functional analysis on a  $C^{1,1}$  submanifold*, in “Differential-geometric methods in the control of partial differential equations,” R. Gulliver, W. Littman and R. Triggiani, eds., 83–115, Contemp. Math, 268, AMS Publications, 2000.

[6], *Representation of hypersurfaces and minimal smoothness of the midsurface in the theory of shells*, Control Cybernet. (4) **37** (2008), 879–911.

[7], *Representations, composition, and decomposition of  $C^{1,1}$ -hypersurfaces*, in “Optimal control of coupled systems of partial differential equations,” 85–104, Internat. Ser. Numer. Math., 158, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009.

M. C. DELFOUR et J.-P. ZOLÉSIO

[1], *Shape analysis via oriented distance functions*, J. Funct. Anal. (1) **123** (1994), 129–201.

[2], *A boundary differential equation for thin shells*, J. Differential Equations (2) **119** (1995), 426–449.

[3], *Tangential differential equations for dynamical thin/shallow shells*, J. Differential Equations **128** (1996), 125–167.

[4], *Differential equations for linear shells : comparison between intrinsic and classical models*, in “Advances in mathematical sciences : CRM’s 25 years” (Montreal, PQ, 1994), 41–124, CRM Proc. Lecture Notes, 11, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[5], *Convergence to the asymptotic model for linear thin shells*, in “Optimization methods in partial differential equations” (South Hadley, MA, 1996), 75–93, Contemp. Math., 209, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

- [6], *Convergence of the linear  $P(1, 1)$  and  $P(2_n, 1)$  thin shells to asymptotic shells* in “Plates and shells” (Québec, QC, 1996), 125–158, CRM Proc. Lecture Notes, 21, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
- [7], *Tangential calculus and shape derivatives*, in “Shape optimization and optimal design : Proc. of the IFIP Conference” J. Cagnol, M.P. Polis, and J.P. Zolésio, eds., 37–60, Marcel Dekker, New York, Basel, 2001.
- [8], *Velocity method and Courant metric topologies in shape analysis of partial differential equations*, in “Control of nonlinear distributed parameter systems” G. Chen, I. Lasiecka, and J. Zhou, eds., Chapter 3, 45–68, Marcel Dekker, New York, Basel, 2001.
- [9], *Shapes and geometries : Analysis, differential calculus and optimization*, SIAM series on Advances in Design and Control, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, USA (2001), first edition.
- [10], *Shapes and geometries : Metrics Analysis, differential calculus and optimization*, SIAM series on Advances in Design and Control, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, USA (2011), second edition.
- J. DUGUNDJI  
 [1], *Topology*, Allyn and Bacon, Boston, 1966.
- P. DUPUIS, U. GRENANDER, et M. MILLER  
 [1], *Variational problems on flows of diffeomorphisms for image matching*, Quart. Appl. Math. **56** (1998), 587–600.
- L. C. EVANS et R. F. GARIEPY  
 [1], *Measure theory and the properties of functions*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.
- H. FEDERER  
 [1], *Hausdorff measure and Lebesgue area*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **37** (1951), 90–94.  
 [2], *A note on the Gauss-Green theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **9** (1958), 447–451.  
 [3], *Curvature measures*, Trans. Amer. Math. Soc. **93** (1959), 418–419.
- W. H. FLEMING et R. RISHEL  
 [1], *An integral formula for total gradient variation*, Arch. Math.(Basel) **11** (1960), 218–222.
- A. FORTIN  
 [1], *Analyse numérique pour ingénieurs*, Presses internationales Polytechnique, École Polytechnique de Montréal, 2001.
- P. J. FREY  
 [1], *Génération et adaptation de maillages de surfaces à partir de données anatomiques discrètes*, Rapport INRIA no. 4764, INRIA, France, mars 2003.
- P. J. FREY et P.-L. GEORGE  
 [1], *Mesh generation. Application to finite elements*, Second edition. ISTE, London ; John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2008
- J. GLAUNÈS  
 [1], *Transport par difféomorphismes de points, de mesures et de courants pour la comparaison de forme et l’anatomie numérique*, Ph.D. thesis, 2005.



- J. GLAUNÈS, A. TROUVÉ, et L. YOUNES  
[1], *Diffeomorphic matching of distributions : A new approach for unlabelled point-sets and sub-manifolds matching*, Proceedings CVPR '04, 2004 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, 2004.
- R. GLOWINSKI et J.-L. LIONS  
[1], *Exact and approximate controllability for distributed parameter systems*, Acta numerica, 1994, 269–378, Acta Numer., Cambridge University Press, Cambridge, 1994.  
[2], *Exact and approximate controllability for distributed parameter systems*, Acta numerica, 1995, 159–333, Acta Numer., Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- M. GROMOV  
[1], *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, Prog. Math., 152, Birkhäuser Boston Inc., Boston, 1999.
- M. HIRSCH  
[1], *Differential topology*, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1997.
- D. H. HUBEL et T. N. WIESEL  
[1], *Receptive fields, binocular interaction and functional architecture in the cat's visual cortex*, J. Physiol., Lond. **160** (1962), 106–154.
- M. KASS, M. WITKIN, et D. TERZOPOULOS  
[1], *Snakes : Active contour models*, Int. J. Comput. Vis. (4) **1** (1988), 321–331.
- J. L. KELLEY  
[1], *General topology*, Van Nostrand, Toronto, New York, London, 1955.
- P. A. LOEB et E. TALVILA  
[1], *Lusins theorem and Bochner integration*, Sci. Math. Jpn. **60** (2004), no. 1, 113–120.
- E. W. MALYKHIN  
[1], *Connected set*, in “Encyclopaedia of mathematics,” M. Hazewinkel, ed., Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001.
- D. MARR  
[1], *Vision*, W.H. Freeman and Company, New York, 1982.
- D. MARR et E. HILDRETH  
[1], *Theory of edge detection*, Proc. R. Lond. B **207** (1980) 187–217.
- F. MÉMOLI  
[1], *On the use of Gromov-Hausdorff distances for shape comparison* in “Proceedings of PBG 2007,” Prague, Czech Republic, 2007.
- F. MÉMOLI et G. SAPIRO  
[1], *A theoretical and computational framework for isometry invariant recognition of point cloud data*, Found. Comput. Math. (3) **5** (2005), 313–347.
- A. M. MICHELETTI  
[1], *Metrica per famiglie di domini limitati e proprietà generiche degli autovalori*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) **26** (1972), 683–694.
- P. W. MICHOR et D. MUMFORD

- [1], *Vanishing geodesic distance on spaces of submanifolds and diffeomorphisms*, Doc. Math. **10** (2005), 217–245.
- [2], *Riemannian geometries on spaces of plane curves*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) (1) **8** (2006), 1–48.
- [3], *An overview of the Riemannian metrics on spaces of curves using the Hamiltonian approach*. Appl. Comput. Harmon. Anal. (1) **23** (2007), 74–113.
- M. MIRANDA  
 [1], *Functions of bounded variation on “good” metric spaces*, J. Math. Pures Appl. (9) **82** (2003), no. 8, 975–1004
- M. I. MILLER, A. TROUVÉ, et L. YOUNES  
 [1], *Computing large deformations via geodesic flows of diffeomorphisms*, Int. J. Comput. Vis. **61** (2) (2005), 139–157.  
 [2], *On the metrics and Euler-Lagrange equations of computational anatomy*, Annu. Rev. Biomed. Eng. **4** (2002), 375–405
- M. I. MILLER et L. YOUNES  
 [1], *Group action, diffeomorphism and matching : a general framework*, Int. J. Comput. Vis. **41** (2001), 61–84.
- D. MONTGOMERY et L. ZIPPIN  
 [1], *Topological transformation groups*, Tracts Pure Appl. Math., 1, Interscience, New York, 1953.
- J. R. MUNKRES  
 [1], *Topology*, Prentice Hall, 2000 (2nd ed.).
- F. MURAT et J. SIMON  
 [1], *Sur le contrôle par un domaine géométrique*, Rapport 76015, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1976.
- M. NAGUMO  
 [1], *Über die Loge der Integralkurven gewöhnlicher Differentialgleichungen*, Proc. Phys. Math. Soc. Japan **24** (1942), 551–559.
- J. NEČAS  
 [1], *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson, Paris and Academia, Prague, 1967.
- J.-B. POLY et G. RABY  
 [1], *Fonction distance et singularités*, Bull. Sci. Math. (2) **108** (1984), 187–195.
- G. SAPIRO  
 [1], *Geometric partial differential equations and image analysis*, Cambridge University Press 2001.
- G. SAPIRO et A. TANNENBAUM  
 [1], *Affine invariant scale-space*, Int. J. Comput. Vis. (1) **11** (1993), 25–44.
- F. SEVERI  
 [1], *Su alcune questioni di topologia infinitesimale*, Ann. Soc. Polon. Math. **9** (1930), 97–108.
- J. SHAN  
 [1], *Abstractly valued functions of bounded variation in (l) spaces*, Heilongjiang Daxue Ziran Kexue Xuebao **10** (1993),no. 1, 37-39.

P. TALLOS

[1], *Viability problems for nonautonomous differential inclusions*, SIAM J. Control and Optim. **29** (1991), 253–263.

A. TROUVÉ

[1], *Action de groupe de dimension infinie et reconnaissance de formes*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. (8) **321** (1995), 1031–1034.

[2], *An approach of pattern recognition through infinite dimensional group actions*, Rapport de recherche du LMENS, France, 1995.

[3], *Diffeomorphisms groups and pattern matching in image analysis*, Int. J. Comput. Vis. (3) **28** (1998), 213–221.

A. TROUVÉ et L. YOUNES

[1], *On a class of diffeomorphic matching problems in one dimension*, SIAM J. Control Optim. (4) **39** (2000), 1112–1135.

F. X. VIALARD et F. SANTAMBROGIO

[1], *Extension to BV functions of the large deformation diffeomorphisms matching approach*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris (1–2) **347** (2009), 27–32.

VO-KHAC KHOAN

[1], *Distributions, analyse de Fourier, opérateurs aux dérivées partielles, Tomes I et II*, Librairie Vuibert, Paris, 1972.

L. YOUNES

[1], *A distance for elastic matching in object recognition*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. (2) **322** (1996), 197–202.

[2], *Computable elastic distances between shapes*, SIAM J. Appl. Math. (2) **58** (1998), 565–586.

[3], *Optimal matching between shapes via elastic deformations*, Image Vision Comput. **17** (1999) 381–389.

[4], *Invariance, déformations et reconnaissance de formes*, Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications], 44, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[5], *Jacobi fields in groups of diffeomorphisms and applications*, Quart. Appl. Math. (1) **65** (2007), 113–134.

[6], *Shape and diffeomorphisms*, Applied Math. Sci., 171, Springer-Verlag, Berlin, 2010.

L. YOUNES, P. W. MICHOR, I. SHAH, et D. MUMFORD

[1], *A metric on shape space with explicit geodesics*, Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl. (1) **19** (2008), 25–57.

L. YOUNES, A. QIU, R. L. WINSLOW, et M. I. MILLER

[1], *Transport of relational structures in groups of diffeomorphisms*, J. Math. Imaging Vision (1) **32** (2008), 41–56.

L. C. YOUNG,

[1], *Partial area. I*, Riv. Mat. Univ. Parma **10** (1959), 103–113.

J.-P. ZOLÉSIO

[1], *Sur la localisation d'un domaine*, Thèse de docteur de spécialité en mathématiques, Université de Nice, France, 1973.

[2], *Identification de domaines par déformation*, Thèse de doctorat d'état, Université de Nice, France, 1979.

[3], *Numerical algorithms and existence result for a Bernoulli-like steady free boundary problem*, Large Scale Systems (3) **6** (1984), 263–278.