Université de Montréal

# Le développement d'une séquence d'enseignement/apprentissage basée sur l'histoire de la numération pour des élèves du troisième cycle du primaire

par

Julie Poirier

Département de didactique

Faculté des sciences de l'éducation

Thèse présentée à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de Ph.D.
en didactique, option mathématiques

Juillet 2011

Cette thèse intitulée :

**Le développement d'une séquence d'enseignement/apprentissage basée sur l'histoire de la numération pour des élèves du troisième cycle du primaire**

Présentée par :

Julie Poirier

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes :

Marcel Thouin, président-rapporteur

Louise Poirier, directrice de recherche

Gisèle Lemoyne, membre du jury

Françoise Cerquetti-Aberkane, examinatrice externe

François Bowen, représentant du doyen de la FESP

# Résumé

Notre contexte pratique — nous enseignons à des élèves doués de cinquième année suivant le programme international — a grandement influencé la présente recherche. En effet, le *Programme primaire* international (Organisation du Baccalauréat International, 2007) propose un enseignement par thèmes transdisciplinaires, dont un s'intitulant *Où nous nous situons dans l'espace et le temps*. Aussi, nos élèves sont tenus de suivre le *Programme de formation de l'école québécoise* (MÉLS Ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport, 2001) avec le développement, notamment, de la compétence *Résoudre une situation-problème* et l'introduction d'une nouveauté : *les repères culturels*. Après une revue de la littérature, l'histoire des mathématiques nous semble tout indiquée. Toutefois, il existe peu de ressources pédagogiques pour les enseignants du primaire. Nous proposons donc d'en créer, nous appuyant sur l'approche constructiviste, approche prônée par nos deux programmes d'études (OBI et MÉLS).

Nous relevons donc les avantages à intégrer l'histoire des mathématiques pour les élèves (intérêt et motivation accrus, changement dans leur façon de percevoir les mathématiques et amélioration de leurs apprentissages et de leur compréhension des mathématiques). Nous soulignons également les difficultés à introduire une approche historique à l'enseignement des mathématiques et proposons diverses façons de le faire. Puis, les concepts mathématiques à l'étude, à savoir l'arithmétique, et la numération, sont définis et nous voyons leur importance dans le programme de mathématiques du primaire. Nous décrivons ensuite les six systèmes de numération retenus (sumérien, égyptien, babylonien, chinois, romain et maya) ainsi que notre système actuel : le système indo-arabe. Enfin, nous abordons les difficultés que certaines pratiques des enseignants ou des manuels scolaires posent aux élèves en numération.

Nous situons ensuite notre étude au sein de la recherche en sciences de l'éducation en nous attardant à la recherche appliquée ou dite pédagogique et plus particulièrement aux apports des recherches menées par des praticiens (un rapprochement entre la recherche et la pratique, une amélioration de l'enseignement et/ou de l'apprentissage, une réflexion de l'intérieur sur la pratique enseignante et une meilleure connaissance du milieu). Aussi, nous exposons les risques de biais qu'il est possible de rencontrer dans une recherche pédagogique, et ce, pour mieux les éviter. Nous enchaînons avec une description de nos outils de collecte de données et rappelons les exigences de la rigueur scientifique.

Ce n'est qu'ensuite que nous décrivons notre séquence d'enseignement/apprentissage en détaillant chacune des activités. Ces activités consistent notamment à découvrir comment différents systèmes de numération fonctionnent (à l'aide de feuilles de travail et de notations anciennes), puis comment ces mêmes peuples effectuaient leurs additions et leurs soustractions et finalement, comment ils effectuaient les multiplications et les divisions.

Enfin, nous analysons nos données à partir de notre journal de bord quotidien bonifié par les enregistrements vidéo, les affiches des élèves, les réponses aux tests de compréhension et au questionnaire d'appréciation. Notre étude nous amène à conclure à la pertinence de cette séquence pour notre milieu : l'intérêt et la motivation suscités, la perception des mathématiques et les apprentissages réalisés. Nous revenons également sur le constructivisme et une dimension non prévue : le développement de la communication mathématique.

**Mots-clés** : Enseignement, séquence, numération, arithmétique, addition, soustraction, multiplication, division, histoire des mathématiques, système de numération, troisième cycle primaire, éducation internationale, élèves en facilité d'apprentissage, recherche-action.

# Abstract

Our practical context -we teach gifted fifth grade students in an International School- has greatly influenced this research. Indeed, the International Primary Years Programme (International Baccalaureate Organization, 2007) fosters *transdisciplinary* themes, including one intitled *Where we are in place and time*. Our students are also expected to follow the Quebec education program schools (Ministry of Education, Recreation and Sport, 2001) with the development of competencies such as: *To solve situational problem* and the introduction of a novelty: the *Cultural References*. After the literature review, the history of mathematics seems very appropriate. However, there are few educational resources for primary teachers. This is the reason why we propose creating the resources by drawing upon the constructivist approach, an approach recommended by our two curricula (OBI and MELS).

We bring to light the advantages of integrating the history of mathematics for students (increased interest and motivation, change in their perception of mathematics and improvement in learning and understanding mathematics). We also highlight the difficulties in introducing a historical approach to teaching mathematics and suggest various ways to explore it. Then we define the mathematical concepts of the study: arithmetic and counting and we remark their importance in the Primary Mathematics Curriculum. We then describe the six selected number systems (Sumerian, Egyptian, Babylonian, Chinese, Roman and Mayan) as well as our current system: the Indo-Arabic system. Finally, we discuss the difficulties students may encounter due to some teaching practices or textbooks on counting.

We situate our study in the research of science of education especially on applied research and the contributions of the teacher research reconciliation between research and practice, the improvement of teaching and / or learning and a reflection within the teaching practice). Also, we reveal the possible biases that can be encountered in a pedagogical

research and thus, to better avoid them. Finally, we describe the tools used to collect our data and look at the requirements for scientific rigor.

Next, we describe our teaching sequence activities in details. These activities include the discovery of how the different number systems work (using worksheets and old notations) and how the people using the same systems do their additions and subtractions and how they do their multiplications and divisions. Finally, we analyze our data from a daily diary supported by video recordings, students' posters, the comprehension tests and the evaluation questionnaire. Our study leads us to conclude the relevance of this sequence in our context: interest and motivation, perception of mathematics and learning achieved. We also discuss constructivism and a dimension not provided: the development of mathematical communication.

**Keywords** : Teaching, sequence, counting, arithmetic, addition, subtraction, multiplication, division, history of mathematics, number system, elementary graduate, international education, gifted students, action research.

# Table des matières

# Liste des tableaux



# Liste des figures

«*Qui ne continue pas à apprendre est indigne d'enseigner.*»

Gaston Bachelard

# Remerciements

J’aimerais tout d’abord remercier ma directrice de thèse, Louise Poirier, pour son soutien indéfectible durant cette longue période de gestation. D’ailleurs, jamais cette thèse n’aurait vu le jour sans elle. Enseignante au primaire à temps plein, maman d’un garçon de deux ans et enceinte (sans le savoir) de mon deuxième enfant, ma directrice de travail dirigé de maîtrise m’a encouragée à poursuivre ma recherche puisqu’elle me passionnait encore. Merci, Louise, pour tout le temps que tu as consacré à la lecture des très nombreuses versions de cette thèse. Tu étais toujours disponible, à l’écoute, encourageante et stimulante.

J’aimerais également remercier mon conjoint qui a démontré beaucoup d’enthousiasme pour mon projet doctoral dès le début. Étant passé par là quelques années auparavant, il savait pourtant tout le travail qui m’attendait et les sacrifices que cette aventure allait tous nous demander. Merci, Philippe, pour ton soutien, tes encouragements, ton aide à la mise en page et à la correction de ma thèse et pour m’avoir permis de travailler à quatre jours/semaine pendant des années. Nous n’avons pas le même rythme de travail et les mêmes capacités de concentration en soirée… mais tu as toujours été encourageant et compréhensif.

Mes deux merveilleux garçons, Mathis et Youri, ont parfois ralenti mon travail (par leurs rhumes, leurs vacances, leur énergie sans fin…), mais ils ont été une source d’inspiration et d’énergie. Voulant être un modèle de persévérance pour mes enfants, j’ai mené à terme ce projet de longue haleine (7 ans!). Mes garçons ont aussi dû passer quelques semaines par été au camp de jour pour permettre à maman d’avancer sa thèse et se sont sacrifiés en allant au cinéma et au musée avec papa pour laisser maman terminer « son gros livre ». Merci mes chéris!

# Introduction générale

Qu'est-ce qui pousse une enseignante du primaire à entreprendre une thèse de doctorat en didactique des mathématiques? Pour notre part, il s'agit principalement de changements considérables survenus dans notre contexte d'enseignement. En effet, le Québec a connu un tournant majeur avec une profonde réforme de l'éducation et en même temps, nous avons obtenu un poste dans une école internationale. Ainsi, en une seule année, nous avons dû nous approprier deux nouveaux programmes : le programme de formation de l'école québécoise (MÉLS Ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport, 2001) qui arrivait à ce moment au troisième cycle et le Programme primaire international (Organisation de Baccalauréat International — OBI, 2001 et modifié en 2007). Nous avons donc voulu explorer certains éléments de ces programmes et répondre aux besoins de notre clientèle particulière : des élèves en facilité d'apprentissage puisque ces derniers sont sélectionnés sur la base de leurs résultats à des tests d'entrée. Cette thèse prend ainsi sa source du fait que ces deux programmes cherchent notamment à rehausser la culture générale des élèves ainsi que de notre découverte de l'histoire des mathématiques dans le cadre d'une maîtrise professionnelle.

Pour mieux situer le lecteur, nous présentons d'abord ces deux programmes. Puis, nous dégageons de la littérature les raisons pour lesquelles nous devrions, ou non, aborder l'histoire des mathématiques dans notre enseignement. Enfin, nous voyons ce que proposent les manuels scolaires québécois. Une fois ce contexte dégagé, une revue de la littérature a permis d'explorer les différentes façons d'intégrer l'histoire des mathématiques à notre enseignement et les contenus mathématiques que nous devrions privilégier. Ainsi, la numération et les opérations arithmétiques occupant une place centrale dans le programme de mathématiques au primaire et ayant été abordées à chaque année avec ces élèves doués, notre choix s'arrête sur ces contenus pour en renouveler l'angle d'approche puisque des difficultés peuvent subsister, et ce, même au troisième cycle. Nous voyons également en quoi notre recherche repose sur le constructivisme. La problématique ayant été dégagée et le cadre conceptuel délimité, nous voyons les aspects méthodologiques à privilégier, notamment lorsque nous portons le double rôle de chercheure et d'enseignante. Ensuite, nous proposons notre séquence d'enseignement/apprentissage basée sur l'évolution historique de la numération. Chaque activité y est décrite, justifiée et à la lumière de notre cadre conceptuel, nous y anticipons la conduite attendue des élèves. Le cinquième chapitre consiste en l'analyse du travail des élèves à l'aide de nos outils de collecte de données. Finalement, la discussion permet de revenir sur nos questions de départ et les postulats de notre cadre conceptuel.

# 1. Problématique

## Introduction

Cette recherche découlant du contexte pratique d'enseignement de la chercheure, il convient de situer ce contexte pour mieux dégager la problématique. La chercheure enseigne dans une école du monde (dite « internationale ») primaire accréditée par l'Organisation du Baccalauréat International (OBI ou IBO) et travaille auprès d'élèves doués ou en facilité d'apprentissage. Il conviendra, à l'intérieur de ce chapitre, de décrire les grandes lignes et les valeurs du programme primaire international (le PP) développé par le BI, ainsi que les principales caractéristiques des élèves doués. De plus, cette étude s'inscrit dans la foulée d'une refonte du programme de formation de l'école québécoise amorcée en 2001 (MÉLS Ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport, 2001). Ce nouveau programme amène son lot de changements, notamment avec sa volonté de rehausser la culture générale des élèves et ce, aussi en mathématiques avec l'introduction de repères culturels. Nous voyons qu'on y demande notamment d'aborder l'histoire des mathématiques. Comme il s'agit d'une nouveauté par rapport aux programmes antérieurs, on pourrait se demander pourquoi devrait-on aborder une dimension historique des mathématiques? Et quelles sont les difficultés que l'on peut rencontrer? Enfin, toute réforme s'accompagne habituellement d'un renouvellement des collections de manuels scolaires; nous analysons celles de mathématiques afin de voir la place qu'y occupe l'histoire des mathématiques.

### 1.1. Le programme primaire international et sa clientèle

De plus en plus d'écoles à vocation spéciale voient le jour au Québec (écoles axées sur les arts, programmes sport-étude, écoles internationales, etc.) pour répondre à la fois aux besoins particuliers des enfants et aux demandes des parents. Au primaire, sur une cinquantaine d'écoles canadiennes certifiées par l'Organisation du Baccalauréat International, la moitié d'entre elles sont québécoises et plusieurs autres sont en voie d'accréditation, traduisant ainsi la popularité de cette vocation au Québec. Bien que ce programme ne soit pas élitiste, certaines commissions scolaires choisissent d'offrir ce programme aux élèves en facilité d'apprentissage. En effet, comme les places sont limitées, on sélectionne parfois les élèves à partir d'un test de Q.I. et/ou de grilles d'observation. C'est notamment le cas de l'école Wilfrid-Pelletier qui n'offre qu'une classe internationale par niveau (entre 20 et 29 élèves) pour tous les élèves de la Commission scolaire de la Pointe-de-l'Île. La chercheure y enseigne en cinquième année depuis presque huit ans.

## Une clientèle douée

Comme les élèves sont sélectionnés, la plupart sont particulièrement doués, sans pour autant être surdoués. Dans *le dictionnaire actuel de l'éducation*, Legendre (2005) décrit de la façon suivante les caractéristiques des enfants doués :

> « […] élèves possédant une bonne capacité à résoudre des problèmes, appréciant leur résolution, menant habituellement leurs travaux à terme et ayant une bonne capacité de concentration ».

Les enfants doués ont souvent un goût avide pour la lecture, ce qui contribue à enrichir leurs expressions et leur vocabulaire. Ils sont souvent aventureux, imaginatifs et aiment prendre des risques. Ces élèves ont besoin de stimulation dans les domaines où ils excellent. Les études antérieures (citées dans Legendre, 2005) préconisent d'ailleurs un complément de formation ou un cheminement particulier pour cette clientèle. Parmi les modes d'intervention les plus fréquemment évoqués dans la littérature, on préconise habituellement l'enrichissement ou l'accélération : l'enrichissement pouvant se faire en classe régulière ou en classe spéciale (c'est notamment, le cas du programme primaire de l'OBI lorsque les élèves sont sélectionnés); l'accélération, pour sa part, consistant à une entrée précoce à l'école par dérogation et/ou à des sauts de classe. Il est à noter que ces enfants souffrent parfois d'une pression de la performance exercée par eux-mêmes, leurs parents ou encore par leurs enseignants. Comme ils ont toujours bien réussi, une difficulté ou un échec peut se traduire par de l'angoisse, du stress ou des larmes (Legendre, 2005).

Toujours selon Legendre, avec les élèves doués, il importe de proposer des conditions favorables à leur épanouissement avec une bonne dose de stimulation; sinon, on risque de voir apparaître une sous-performance de ces élèves, c'est-à-dire une actualisation partielle de leurs aptitudes. Il est donc primordial de renouveler l'enseignement de certains concepts de base du primaire, notamment de l'arithmétique qui est vue en spirale chaque année et qui pourrait blaser les élèves qui la maîtrisent ou pensent bien la maîtriser. Nous reviendrons sur les contenus enseignés dans la prochaine partie portant sur le nouveau programme du MÉLS.

Pour contrer ce risque d'ennui chez les élèves, l'introduction de l'histoire des mathématiques semble une avenue intéressante. En effet, Daniel (2000) affirme que l'histoire des mathématiques est particulièrement appropriée pour les enfants doués puisqu'elle permet notamment de découvrir plusieurs solutions à un problème, d'explorer plusieurs méthodes (qui ne sont pas celles de l'enseignant) et de percevoir différents points de vue. Elle dit également que l'histoire des mathématiques offre des défis, stimule et permet de constater que certains mathématiciens (doués) étaient incompris ou pénalisés pour leurs idées. Elle rejoint ainsi les propos de Legendre. Il s'agit ici d'une piste d'intervention intéressante auprès de ces élèves doués, mais cette piste serait-elle en accord avec le programme international? Dans la section qui suit, nous précisons la philosophie de ce programme enrichi qu'est le Programme Primaire international (Organisation du Baccalauréat International, 2007) ainsi que ses grandes lignes. Les élèves inscrits à l'école internationale suivent d'abord le programme de formation de l'école québécoise régulier du Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport (2001) avec le développement des compétences spécifiques à chaque discipline, ainsi que l'acquisition des savoirs essentiels propres à chaque matière. Nous verrons que le programme international est enrichi par une sensibilité internationale que l'on retrouve d'abord dans le profil de l'apprenant et dans les cinq éléments essentiels du programme que sont les connaissances, les concepts, les savoir-faire, les savoir-être et le passage à l'action.

## Les valeurs du programme primaire international (PP)

Pour décrire les valeurs directrices du programme primaire, nous exposons la Déclaration de mission de l'Organisation du Baccalauréat International (IBO), une fondation à but non lucratif créée en 1968 et ayant pour vocation l'éducation internationale. Cette organisation s'est donné pour but :

> « De développer chez les jeunes la curiosité intellectuelle, les connaissances et la sensibilité nécessaires pour contribuer à bâtir un monde meilleur et plus paisible, dans un esprit d'entente mutuelle et de respect interculturel. À cette fin, l'IBO collabore avec des établissements scolaires, des gouvernements et des organisations internationales pour mettre au point des programmes d'éducation internationale stimulants et des méthodes d'évaluation rigoureuses. Ces programmes encouragent les élèves de tout pays à apprendre activement tout au long de leur vie, à être empreints de compassion, et à comprendre que les autres, en étant différents, puissent

> aussi être dans le vrai » (Organisation du Baccalauréat International, 2007, p. 2).

Le PP s'efforce de former des personnes sensibles à la réalité internationale en se basant sur les qualités que l'IBO espère développer chez les élèves et qui sont décrites dans le profil de l'apprenant. Ainsi, les apprenants du BI s'efforcent d'être *investigateurs, informés et instruits, penseurs, communicateurs, intègres, ouverts d'esprit, altruistes, audacieux, équilibrés* et *réfléchis*. Les enseignants tentent de développer ces qualités, au quotidien, chez leurs élèves.

## Les connaissances

Dans le PP, se retrouvent ensuite les éléments essentiels du programme établi. Le premier de ces éléments concerne les connaissances que les élèves doivent acquérir. Le programme propose six thèmes transdisciplinaires et chaque année, les élèves mènent une enquête dans le contexte de modules de recherche, un pour chaque thème transdisciplinaire. Les modules de recherche sont élaborés à l'aide d'un canevas précis –le plan de travail– pour s'assurer d'y inclure tous les éléments du PP. Un exemplaire vierge avec « info-bulles » est présenté à l'annexe 1. Ces thèmes, qui sont les mêmes pour toutes les écoles internationales du monde, ont été retenus notamment pour leur résonance universelle, c'est-à-dire leur signification pour tous les élèves quelle que soit leur culture. La richesse de ces thèmes tient au fait qu'ils touchent à de nombreuses disciplines –telles que les sciences humaines, les arts ou les sciences. Comme ils sont planifiés à l'avance, les thèmes abordés diffèrent et ne sont jamais redondants d'une année à l'autre dans une même école.

Les six thèmes transdisciplinaires sont : 1) *Qui nous sommes;* 2) *Où nous nous situons dans l'espace et le temps;* 3) *Comment nous nous exprimons;* 4) *Comment le monde fonctionne;* 5) *Comment nous nous organisons* et 6) *Le partage de la planète*. Un de ces thèmes nous intéresse plus particulièrement, celui qui s'intitule : O*ù nous nous situons dans l'espace et le temps* et la description qu'en propose le PP est la suivante :

> « Une recherche sur notre position dans l'espace et le temps, sur notre vécu personnel; sur nos domiciles et nos voyages; sur les découvertes, les explorations et les migrations des êtres humains; sur les relations entre les individus et les civilisations, et sur leur corrélation. Cette recherche doit être menée en adoptant un point de vue local et mondial » (Organisation du Baccalauréat International, 2007, p. 14).

## Les concepts

Dans le PP, viennent ensuite les concepts[1] qui font référence à une question conceptuelle clé (en italique) qui peut être adaptée à toutes les matières et fort utile pour mener une enquête (dans le cadre d'un module de recherche notamment). En effet, la recherche structurée étant au cœur de la philosophie du PP, les concepts encouragent la construction de sens et la compréhension. Au nombre de huit, ces concepts augmentent en complexité. Il y a la forme (*comment est-ce?*), la fonction (*comment cela fonctionne-t-il?*), la causalité (*pourquoi est-ce ainsi?*), le changement (*comment cela change-t-il?*), la relation (*comment est-ce lié à d'autres choses?*), la perspective (*quels sont les différents points de vue?*), la responsabilité (*quelle est notre responsabilité?*) et finalement, la réflexion (*comment savons-nous?*) (Organisation du Baccalauréat International, 2007, pp. 20-22).

## Les savoir-faire

Dans le programme international, les savoir-faire transdisciplinaires sont divisés en cinq grandes catégories : savoir-faire sociaux (*accepter ses responsabilités, respecter les autres, coopérer, résoudre des conflits, prendre des décisions collectives et adopter des rôles divers dans le groupe*); savoir rechercher (*formuler des questions, observer, préparer, planifier, recueillir, consigner, organiser et interpréter des données et présenter les résultats de ses recherches*); savoir penser (*acquérir des connaissances, comprendre, appliquer, analyser, faire des synthèses, évaluer, utiliser la pensée dialectique et la métacognition*); savoir communiquer (*écouter, parler, lire, écrire, regarder, présenter et communiquer de façon non-verbale*); savoir se maîtriser (*exercer sa motricité globale, sa motricité fine, sa conscience de l'espace, son organisation, sa gestion du temps, sa sécurité, son hygiène de vie, ses codes de conduite et ses choix avisés*) (Organisation du Baccalauréat International, 2007, pp. 23-25). Le programme primaire reconnaît l'importance de développer ces savoir-faire dans des situations réelles telles que proposées dans les modules de recherche.

## Les savoir-être

Le programme primaire international préconise aussi le développement de savoir-être et propose donc aux établissements d'encourager : *l'émerveillement, l'engagement, la*

[1] Nous reprenons le vocabulaire du programme primaire international, mais il ne s'agit pas ici de concepts disciplinaires, mais bien d'angles d'approche des objets du savoir.

*confiance en soi, la coopération, la créativité, la curiosité, l'empathie, l'enthousiasme, l'indépendance, l'intégrité, le respect et la tolérance* (Organisation du Baccalauréat International, 2007, p. 26). Les savoir-être sont chargés de valeurs et rejoignent les qualités décrites dans le profil de l'apprenant; ils doivent faire partie intégrante de la vie quotidienne de la classe.

### L'action

En plus des concepts, connaissances, savoir-faire et savoir-être, le PP inclut l'action comme élément essentiel du programme. Pour les concepteurs du PP, une recherche réussie conduirait à une action responsable et serait initiée par les élèves à la suite d'un apprentissage. Les écoles du monde « peuvent et doivent relever le défi qui consiste à donner à tous les apprenants la possibilité, ainsi que le pouvoir, de choisir d'agir, de décider de leurs actions, et d'y réfléchir, afin de contribuer à bâtir un monde meilleur » (Organisation du Baccalauréat International, 2007, p. 27). On entend par « action », le service offert aux autres élèves, au personnel de l'école et à la communauté. Une action doit demeurer volontaire, engager les élèves dans l'exercice de l'initiative personnelle et être à leur mesure.

Nous avons vu un des aspects du contexte pratique de la chercheure et bien que le programme primaire de l'IBO ne soit pas élitiste, nous sommes à même de constater à quel point le profil de l'apprenant et les cinq éléments essentiels (connaissances, concepts, savoir-faire, savoir-être et action) du PP peuvent contribuer à l'enrichissement et à la stimulation que nécessitent les élèves doués. Notons que les élèves suivant le Programme Primaire international (PP) sont également tenus de suivre le programme local, ici le Programme de formation de l'école québécoise (MÉLS Ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport, 2001).

## 1.2. Le Programme de formation de l'école québécoise

En 2001, le Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport du Québec (MÉLS) proposait une réforme majeure des programmes de formation du primaire qui a amené des changements importants pour les enseignants et les élèves. Le nouveau programme repose sur le constructivisme qui accorde un rôle central à l'apprenant. Avec ce programme, on souhaite en plus rehausser la culture générale des élèves. Dès son introduction, le nouveau programme affiche ses couleurs :

> « L'école a donc un rôle actif à jouer au regard de la culture, entendue comme le fruit de l'activité de l'intelligence humaine, non seulement d'hier, mais d'aujourd'hui. […] Par ailleurs, chaque discipline est porteuse de culture tant par son histoire que par les questionnements particuliers qu'elle suscite. Aussi, importe-t-il que l'élève comprenne l'origine des disciplines enseignées […] » (MÉLS Ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport, 2001, p. 4).

Le nouveau programme met en valeur l'aspect culturel de toutes les matières, que ce soit par les compétences disciplinaires telles que « *apprécier des œuvres littéraires* » en français, « *apprécier des œuvres théâtrales* » en art dramatique, « *apprécier des œuvres d'art, des objets du patrimoine artistique, des images médiatiques […]* » en arts plastiques; le programme a comme mission de rehausser la culture générale des élèves. Qu'en est-il d'une matière à première vue moins « *culturelle* » comme les mathématiques? Dans la présentation de la discipline des mathématiques, on précise :

> « […] l'introduction d'une dimension historique dans l'enseignement de la mathématique constitue une excellente façon de rehausser le niveau culturel. C'est l'occasion pour les élèves de percevoir l'évolution, le sens et l'utilité de cette discipline […]. Un survol historique peut aussi illustrer le fait que les savoirs mathématiques sont le fruit du long travail de mathématiciens passionnés par leur discipline » (MÉLS Ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport, 2001, p. 125).

Nous faisons ici une brève description du programme de mathématiques en mettant en lumière les différents aspects qui seront traités dans cette recherche. Nous voyons notamment les compétences mathématiques, les savoirs essentiels et les repères culturels.

## Les compétences disciplinaires en mathématiques

Voyons d'abord l'importance qu'on accorde à la résolution de problèmes dans ce nouveau programme. En effet, la compétence *résoudre une situation-problème mathématique* est la première compétence en mathématiques. Le programme précise que cette compétence permet à l'élève de s'engager :

> « […] dans un processus où il exerce différentes stratégies de compréhension, d'organisation, de solution, de validation et de communication. Elle est également l'occasion d'employer un raisonnement mathématique et de communiquer à l'aide du langage mathématique (les deux autres compétences du programme de mathématiques) » (MÉLS Ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport, 2001, p. 130).

Le programme souligne qu'une situation-problème comporte un but à atteindre, une solution à trouver. Elle va bien au-delà de l'exercice d'application puisqu'elle nécessite une série d'actions de la part de l'élève : comprendre, raisonner, rechercher des stratégies, les essayer avec une suite d'opérations, vérifier, expliquer et communiquer. La situation-problème doit aussi être contextualisée et représenter un défi stimulant pour l'élève. Ces précisions rejoignent celles de Poirier qui affirme que « s'il n'y a pas de problème à résoudre, de défi à relever, il n'y aura aucune motivation (pour l'élève) à construire de nouvelles connaissances » (Poirier, 2001, p. 5).

La deuxième compétence mathématique à développer est : *raisonner à l'aide de concepts et de processus mathématiques* et le programme décrit ses composantes comme suit : « cerner les éléments de la situation mathématique, mobiliser des concepts et des processus mathématiques appropriés à la situation, appliquer des processus mathématiques appropriés à la situation et justifier des actions ou des énoncés en faisant appel à des concepts et à des processus mathématiques » (MÉLS, 2001, p. 130).

Finalement, la dernière compétence en mathématiques consiste à : *communiquer à l'aide du langage mathématique* et ses composantes sont « s'approprier le vocabulaire mathématique, établir des liens entre le langage mathématique et le langage courant et interpréter ou produire des messages à caractère mathématique » (MÉLS, 2001, p. 133). Il est à noter que ces trois compétences s'imbriquent : lorsque l'élève résout un problème, il raisonne à l'aide de concepts et de processus mathématiques et il communique à l'aide du langage mathématique. Ces trois compétences s'actualisent autour de savoirs mathématiques appelés *savoirs essentiels* dans le programme.

## Les savoir essentiels

La partie du programme sur les savoirs essentiels est une énumération des notions mathématiques à aborder pour chacun des trois cycles et est divisée en cinq parties : arithmétique, mesure, géométrie, statistiques et probabilité. Notons que les quatre dernières parties occupent deux pages et demie de l'énoncé du programme, tandis que la seule partie sur l'arithmétique en occupe autant. C'est dire l'importance qu'on accorde à l'arithmétique au primaire. Cette partie est divisée en trois sous-parties : on retrouve le sens et l'écriture des nombres (nombres naturels, fractions, nombres décimaux, utilisation des nombres et nombres entiers), le sens des opérations et les opérations sur des nombres (naturels, décimaux et fractions). Dans la réalité de la classe, l'arithmétique occupe une place centrale dans l'enseignement des mathématiques, les autres domaines étant souvent vus par les enseignants comme secondaires et de moindres importances. Même si beaucoup de temps est consacré à l'arithmétique au primaire, nous verrons plus loin que de grandes difficultés dans son apprentissage peuvent persister chez les élèves (2.2.3).

### Les repères culturels

Dans le but d'améliorer la culture générale des élèves, le programme prévoit une section *repères culturels* dans quelques matières. Dans cette section, on retrouve les notions historiques et de culture générale à aborder pour cette matière. Cela se traduit dans le programme de mathématiques par la nécessité d'aborder, notamment, les origines et la création des nombres, l'évolution dans l'écriture des nombres, l'étude de différents systèmes de numération (le programme donne en exemple les systèmes arabe, romain, babylonien et maya) avec leurs caractéristiques, leurs avantages et leurs inconvénients. De plus, le programme suggère de voir les opérations par le biais des processus personnels ou conventionnels de calculs en mettant en lumière l'évolution, les limites, les avantages et les inconvénients de chacun. Toujours au niveau des opérations, on préconise d'aborder l'évolution des outils de calcul (bâtonnets, traits, boulier, abaque, calculatrice, logiciels) avec leurs limites, avantages et inconvénients. En outre, le programme propose d'aborder les mathématiques dans un contexte interdisciplinaire (notamment par l'histoire et la géographie). Par contre, le programme de mathématiques n'est pas très exigeant à cet égard; seul un projet ou une activité par cycle est demandé.

Finalement, on retrouve en vrac à la fin de l'énoncé du programme de mathématiques, les symboles à utiliser et le vocabulaire à voir selon les cycles et des suggestions pour l'utilisation des technologies de l'information et de la communication.

## 1.3. L'enseignement des mathématiques par son histoire

L'introduction de *repères culturels* en mathématiques, bien que peu exigeante dans le programme, combinée au thème transdisciplinaire *Où nous nous situons dans l'espace et le temps* du Programme primaire international, ainsi que les besoins particuliers des élèves doués nous amènent à nous intéresser à l'utilisation de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement.

Cette partie de la problématique s'appuie sur une vingtaine d'études et d'expériences récentes (1994-2005) vécues en classe qui relatent la pertinence d'enseigner l'histoire des mathématiques. Elles sont résumées dans un tableau synthèse à l'annexe 2 où l'on retrouve pour chacune des études le ou les auteurs et l'année de parution, le pays de l'expérimentation, le niveau scolaire, les notions mathématiques abordées, les types d'activités, les avantages pour les étudiants et les enseignants, les limites et les inconvénients, le type d'articles et la méthodologie utilisée. Nous voyons d'abord la pertinence de l'enseignement de l'histoire des mathématiques du point de vue des élèves, puis de celui des enseignants. Ensuite, nous exposons les difficultés parfois invoquées par les enseignants pour ne pas faire d'histoire des mathématiques. Dans le cadre conceptuel, nous verrons les nombreuses façons d'intégrer l'histoire des mathématiques à notre enseignement et commenterons la méthodologie utilisée dans les études consultées.

## La pertinence pour les élèves

Les études consultées soulignent qu'intégrer l'histoire des mathématiques à notre enseignement peut affecter positivement les élèves de trois façons : un intérêt et une motivation accrus, un changement dans leur façon de percevoir les mathématiques et une amélioration de leurs apprentissages et de leur compréhension des mathématiques.

#### Un intérêt et une motivation accrus

La plupart des études portant sur l'histoire des mathématiques réalisées auprès d'élèves font état d'une motivation accrue, d'un intérêt marqué, d'enthousiasme et même de passion de ces derniers pour cet aspect des mathématiques (Bartolini Bussi, 2000; Cerquetti-Aberkane & Rodriguez, 2002; Jahnke et al., 2000; Laubenbacher & Pengelley, 1996; Michel-Pajus, 2000; Poisard, 2005b; Ponza, 2000a; Siu, 1997; Swetz, 1995, 2000, 2001). Pour sa part, Katz (2000) indique qu'il s'agit d'une merveilleuse ressource pour motiver et captiver les élèves et les étudiants. Laubenbacher et Pengelley (1994) abondent dans le même sens, intitulant un de leurs articles : *Recovering motivation in mathematics: teaching with original sources*. De son côté, Barbin va encore plus loin :

> « L'enjeu d'une perspective historique est tout autant de faire mieux comprendre l'activité mathématique aux élèves, que de les y intéresser. Aujourd'hui, l'ambition d'intéresser semble un peu abandonnée, au profit d'un simple besoin de motiver. La motivation est passagère, l'intérêt est durable » (Barbin, 1997, p. 25).

Swetz (1994) et Avital (1995) sont d'avis que d'exposer les élèves au développement des mathématiques anime et égaye le sujet abordé. Cette notion d'intérêt ou de motivation chez les élèves pour l'histoire des mathématiques et des sciences ne date pas d'hier. En effet, dès 1953, Sarton parle même d'amour pour les sciences. Cet historien des sciences avançait:

> « I said that if you do not love and know science, one cannot expect you to be interested in its history; on the other hand, the teaching of humanities of science would create the love of science as well as a deeper understanding of it. Too many of our scientists (even the most distinguished ones) are technicians and nothing more. Our aim is to humanize science, and the best way of doing that is to tell and discuss history of science » (Sarton, 1953, cité dans Swetz, 1994).

Un groupe d'enseignants ayant expérimenté des activités d'histoire des mathématiques (M :ATH, 1991, cité dans Barbin et al., 2000) avance que celles-ci ont suscité la curiosité et encouragé les questions de leurs élèves. Aussi, des élèves de CM2 (cinquième année) ayant expérimenté des opérations sur le boulier chinois ont dit : « Les math. comme cela, c'est amusant, rigolo et plus facile »; « J'avais l'impression de m'amuser un peu plus. J'apprenais en même temps je réfléchissais mais je m'amusais. C'était sympa! »; (Poisard, 2005a, p. 96). Pour sa part, Guedj, ancien enseignant de mathématiques et auteur de romans historiques, affirme que nous nous devons de « rendre les mathématiques aimables. Certains (enseignants) découvrent que l'histoire des mathématiques, domaine qu'on ne leur a jamais enseigné, captive les jeunes » (Guedj, 2000, p. 10). Nous présumons qu'elle captiverait particulièrement des élèves doués que tout intéresse déjà et qui ont besoin d'être stimulés.

**Une amélioration de la perception des mathématiques**

L'histoire des mathématiques capte l'attention des élèves et soutient leur intérêt, mais elle améliore aussi l'image de cette matière auprès des élèves qui ne l'aiment pas ou qui éprouvent de la difficulté (Hayes cité dans Heiede, 1996). Dans la même lignée, l'histoire des mathématiques change la perception qu'ont les élèves des mathématiques et modifie leur relation avec ces dernières (Laubenbacher & Pengelley, 1994; C. Tzanakis et al., 2000). Les mathématiques cessent d'être vues comme un «[…] finished product but with something in continuous evolution; it is no longer a case of accepting a discipline of divine nature, but of understanding tools, methods and concepts » (Farey et Métin, 1993, cités dans Barbin et al., 2000, p. 67).

En outre, de nombreux auteurs ont soulevé le fait que l'histoire des mathématiques permettait d'humaniser cette science aux yeux des élèves (Avital 1995; Dennis, 2000; Ponza, 2000; Rickey, 1996; Sarton cité dans Swetz, 1994; Siu, 1997). Elle permet aussi de rendre les grands mathématiciens plus humains, en faisant voir qu'ils avaient des émotions, qu'ils ont fait des erreurs avant de faire leurs grandes découvertes (Avital, 1995; Hitchcock, 1996) et qu'en tentant d'arriver aux résultats connus, ils ont pu errer, ne pas comprendre, se tromper et recommencer. « Mathematics becomes alive, it is no longer a rigid object. It is the object of enquiry, controversy, contains mistakes and uses methods of trial or error » (M:ATH, 1991, cité dans Barbin et al., 2000, p. 67). L'histoire des mathématiques peut rendre cette matière plus vivante aux yeux des élèves. De plus, les recherches en épistémologie et en histoire des mathématiques « ont préparé un terrain où les mathématiques cessent de jouer un rôle de monstre froid qui normalise, juge et condamne pour être rétablies dans leur statut d'activité culturelle, indissociable des autres pratiques humaines » (Inter-IREM, 1984, p. 6).

De plus, certains auteurs révèlent que l'histoire des mathématiques permet de comparer l'efficacité de certaines procédures entre elles ou avec nos procédures actuelles (Cerquetti-Aberkane & Rodriguez, 2002; Grugnetti, 2000; Michel-Pajus, 2000) ou encore, de voir l'intérêt et la supériorité de notre système positionnel (Bednarz & Janvier, 1984; Moyer, 2001; Poisard, 2005b). À cet effet, Ifrah précise que :

> « Quiconque réfléchit à l'histoire universelle des numérations écrites ne peut qu'être frappé par l'ingéniosité de ce système (actuel), puisque le concept du zéro et la valeur de position attachée à chacun de ses chiffres de base dans les représentations numériques lui offrent un avantage immense sur l'ensemble des notations numériques imaginées par les peuples au cours des âges » (1994a, p. 758).

Dans un survol historique, Swetz (2001) avance que l'histoire des mathématiques permet aux élèves de constater que les mathématiques ne sont pas magiques, mais le résultat d'une participation humaine longue et persévérante. Il poursuit, en citant le National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), que les élèves peuvent apprécier le rôle des mathématiques dans le développement de notre société contemporaine et explorer les relations entre les mathématiques et les autres disciplines.

De plus, intégrer l'histoire des mathématiques à l'enseignement de cette matière apporte un aspect multiculturel qui peut valoriser les élèves provenant de minorités ethniques. En effet, en découvrant diverses contributions venant de toutes les parties du monde (l'Europe bien sûr, mais aussi le Moyen-Orient, l'Inde, la Chine, l'Amérique Centrale et du Sud et autres), les élèves provenant de ces régions peuvent en retirer une certaine fierté (Grugnetti & Rogers, 2000; Michalowicz, Daniel, FitzSimons, Ponza, & Troy, 2000; Swetz, 2001). Aussi, l'histoire des mathématiques permet de voir et de faire des liens avec d'autres disciplines, notamment avec l'histoire, les sciences (physique et biologie), la géographie, l'économie, l'art visuel et la musique, de même que la religion et la philosophie (Barbin, 1997; Grugnetti & Rogers, 2000; Swetz, 2001; Wilson & Chauvot, 2000). Encore une fois, nous croyons que nos élèves, curieux et audacieux, seront d'autant plus intéressés par cet aspect des mathématiques.

**Une amélioration de l'apprentissage et de la compréhension**

Certains auteurs affirment que l'histoire des mathématiques permet d'approfondir les connaissances des élèves et contribue à construire des habiletés et des concepts mathématiques (Barbin, 1996, 2000; Fauvel, 1995; Grugnetti, 2000; Rubenstein & Schwartz, 2000; Swetz, 2000; Wilson & Chauvot, 2000). De plus, comme nous avons vu que l'histoire des mathématiques intéresse et enthousiasme habituellement les élèves, Barbin (2000) affirme que plus les élèves sont intéressés par les mathématiques, plus ils fourniront d'efforts et si plus d'efforts sont fournis, les apprentissages et la compréhension seront améliorés. En outre, l'histoire des mathématiques permet une compréhension profonde de ce que sont vraiment les mathématiques et aide aussi à comprendre les processus de formation de la pensée mathématique (Radford et al., 2000).

Laubenbacher et Pengelley (1994) affirment que la lecture de textes anciens permet de saisir l'évolution de la rigueur et de l'abstraction des mathématiques et qu'habituellement, les élèves en sortent fascinés. Pour sa part, Grugnetti avance que « By using old problems, students can compare their strategies with the original ones. This is an interesting way for understanding the economy and the effectiveness of our present algebraic process » (2000, p. 30). Barbin, dans la préface du livre *Histoire de problèmes, histoire des mathématiques*, aborde également la pertinence des problèmes historiques :

> « L'histoire des mathématiques le montre, ce sont les problèmes qu'ils permettent de résoudre qui donnent sens aux concepts et aux théories mathématiques » (Inter-IREM-épistémologie, 1993, p. préface).

De son côté, Swetz soutient qu'une approche historique permet aux élèves de constater le sens de continuité des mathématiques par des problèmes ou types de problèmes que l'on peut trouver dans diverses sociétés et à différentes époques (1994, 2000). Il poursuit en disant que l'histoire des mathématiques motive les apprentissages, permet de « toucher le passé » et expose les élèves à l'universalité des idées mathématiques (Swetz, 1995). Dans le cadre de son étude sur le boulier chinois, Poisard a questionné les élèves sur leur expérience. Voici ce que deux élèves ont répondu : « Je me suis rendue compte que les multiplications, c'était pas si compliqué, en fait. C'était facile. Et puis, calculer, ça m'a plu alors en classe, j'ai plus de volonté pour calculer. […] Maintenant que ça me plaît, je finis un peu plus vite le travail […] avant je pouvais pas faire parce que j'avais pas très bien compris et puis j'aimais pas trop alors je passais beaucoup de temps […] » (Poisard, 2005a, pp. 98, 123)

Par ailleurs, rappelons que pour Daniel (2000), l'histoire des mathématiques est particulièrement appropriée pour les enfants doués puisqu'elle permet notamment de découvrir plusieurs solutions à un problème, d'explorer plusieurs méthodes et de percevoir différents points de vue. L'histoire des mathématiques offre également des défis stimulants, et ce, à tous les élèves, doués ou non.

Les élèves sont habituellement très intéressés par l'histoire des mathématiques et cette dernière permet d'améliorer l'image de cette matière. La recension des écrits permet même d'affirmer qu'en plus, l'histoire des mathématiques pourrait améliorer la compréhension des élèves. Qu'en est-il des enseignants ? Comment perçoivent-ils l'introduction de l'histoire des mathématiques dans leur enseignement?

## La pertinence pour les enseignants

Il convient d'abord de souligner que tous les bénéfices que retirent les élèves sont profitables aux enseignants. En effet, si les élèves sont motivés et intéressés, ont une meilleure perception des mathématiques et sont prêts à fournir plus d'efforts pour comprendre, le travail des enseignants est d'autant plus agréable et motivant. Dans cette section, nous voyons qu'il y a aussi des avantages pour les enseignants à intégrer l'histoire des mathématiques à leur enseignement. On peut remarquer trois changements majeurs chez les enseignants ayant fait le grand saut, soit au niveau de leur conception des mathématiques, de leur rôle en tant qu'enseignant et leur façon d'enseigner et finalement, de leur compréhension du cheminement des élèves.

**Une conception des mathématiques enrichie**

Lorsqu'un enseignant commence à s'intéresser à l'histoire des mathématiques, il en découle habituellement un changement d'attitude et une nouvelle compréhension de la nature des mathématiques. Intégrer l'histoire des mathématiques change notre façon de voir les mathématiques « […] non pas comme un produit achevé, mais comme un processus intellectuel, non pas comme un langage, mais comme une activité » (Barbin, 1997, p. 20). En outre, l'histoire des mathématiques permet de mieux s'approprier et maîtriser les contenus à enseigner (Commission inter-IREM, 1984). De plus, Barbin précise qu'elle nous permet de « […] comprendre les contenus autrement que comme des morceaux épars d'une théorie » (1997, p. 24). Selon Swetz (2000), l'histoire des mathématiques nous permet d'avoir un aperçu historique et culturel des personnes et des périodes de même que d'apprécier l'universalité des idées mathématiques.

L'histoire des mathématiques, en plus de changer la conception qu'ont les enseignants des mathématiques, leur permet de mieux les apprécier. LeGoff affirme qu'elle peut même augmenter le plaisir d'enseigner (LeGoff dans Barbin et al., 2000, p. 68) et peut même nous rendre plus heureux. En effet, pour Siu :

> « The study of history of mathematics, though it does not make me a better mathematician, does make me a happier man who is ready to appreciate the multi-dimensional splendour of the discipline and its relationship to other cultural endeavours » (1997, p. 12).

**Une modification du rôle de l'enseignant et de sa façon d'enseigner**

En plus d'un changement de perception des mathématiques, une meilleure connaissance de son histoire vient indéniablement changer notre façon de voir notre rôle d'enseignant et notre manière d'enseigner (Barbin, 1996, 1997, 2000; Barbin et al., 2000; Lakoma, 2000). En effet, l'histoire des mathématiques change habituellement notre approche pédagogique : d'une approche plus traditionnelle où l'enseignant transmet les savoirs à une approche plus heuristique décrite par Barbin et al. :

> « The heuristic view is associated with a constructivism view of mathematics in which knowledge is constructed step by step and concepts

> are clarified through solving new problems. History here is not only a revelation but also a source of reflection for the teacher […] » (2000, p. 64).

Farey et Métin (cités dans Barbin et al., 2000) vont dans le même sens en affirmant qu'en plus d'améliorer la culture mathématique des enseignants qui s'y frottent, l'histoire des mathématiques change leur façon d'enseigner et leur façon de percevoir le rôle de l'apprenant. Pour sa part, Swetz (1995) précise que l'histoire des mathématiques permet d'enrichir nos leçons.

Plusieurs méthodes (ou manières) d'intégrer l'histoire des mathématiques seront décrites plus loin, mais certains auteurs ont parfois abordé des façons spécifiques pour développer certaines habiletés chez leurs élèves. Ainsi, selon Swetz (1995, 2000) et Grugnetti (2000), utiliser des problèmes de l'histoire aide à développer des stratégies de résolution de problèmes, à clarifier certains concepts et illustre l'évolution des processus de solution. De plus, l'histoire des mathématiques contient beaucoup de matériel utilisable dans les classes d'aujourd'hui (un vrai réservoir de problèmes et d'exercices, selon Swetz, 2000). Avital ajoute qu'en utilisant des problèmes provenant de l'histoire, on donne un sens aux apprentissages. « An important activity doing mathematics is asking questions. Each achievement, each creation, has its origin in questions which, when answered, are usually followed by more questions » (Avital, 1995, p. 8).

Bruckheimer et Arcavi (2000) affirment que la lecture de textes anciens permet également de rehausser notre sensibilité aux façons de penser et de communiquer les mathématiques que nous avons l'habitude d'utiliser. Ponza (2000b) soutient même que l'histoire des mathématiques peut contribuer à ramener le calme dans une classe difficile. Elle décrit l'effet magique que procuraient ses anecdotes et ses capsules informatives provenant de l'histoire des mathématiques sur ses élèves venant d'écoles publiques de milieu défavorisé lorsque ces derniers étaient trop turbulents pour leur enseigner quoi que ce soit :

> « In moments when disorder impeded hearing any possible explanation of usual mathematical curriculum, I found that telling, by way of story, the history of the symbols + (plus), of – (minus), of mathematicians such as Euclid or Galois., succeeded in calming everyone and aided in the progress of the lesson » (Ponza, 2000b, p. 176).

**Une meilleure compréhension du cheminement des élèves**

L'histoire des mathématiques permet également de mieux comprendre le cheminement des élèves. Selon Barbin (1996), l'approche historique permet d'être plus attentif aux étapes qui doivent être franchies pour acquérir des connaissances et aux obstacles rencontrés par les élèves. Elle permet aussi de mieux comprendre les erreurs des élèves (Avital, 1995; Barbin, 1996; Grugnetti, 2000). Une perspective historique nous aide à comprendre pourquoi certains concepts sont plus difficiles à assimiler –par exemple : les opérations avec zéro– (Avital, 1995; Grugnetti, 2000) puisqu'on se rend compte qu'ils ont été plus longs à être acceptés par la communauté scientifique de l'époque (Polya cité dans Kelley, 2000 et Nouet cité dans Barbin et al., 2000). De plus, l'histoire des mathématiques permet de répondre plus aisément aux questions des élèves, notamment : « *À quoi ça sert? Et pourquoi on fait comme ça? »* (Barbin, 1997, p. 23).

De telles études démontrant la pertinence de l'histoire des mathématiques tant pour les élèves que pour les enseignants devraient nous convaincre d'introduire l'histoire des mathématiques à notre enseignement, mais nous constatons qu'il n'est pas si facile de se « convertir ». En effet, si l'histoire des mathématiques n'est pas plus présente dans nos classes, c'est sans doute dû aux nombreuses difficultés évoquées par les enseignants pour ne pas l'introduire.

## Les difficultés d'intégrer l'histoire des mathématiques

Un tel portrait de l'enseignement de l'histoire des mathématiques serait biaisé si nous n'expliquions pas les raisons parfois invoquées pour ne pas l'intégrer dans nos classes. Tzanakis, Arcavi, Isoda, Lit, Niss, Pitombeira, Rodriguez et Siu (2000) en énumèrent d'ailleurs plusieurs**.** Nous partirons de leur liste de raisons bien documentée et dans le but de ne pas alourdir le texte, nous ne référerons qu'aux autres auteurs qui abondent dans le même sens.

**Le manque de temps**

La raison la plus souvent invoquée demeure celle du temps. En effet, selon plusieurs enseignants, il manque déjà de temps pour enseigner les notions mathématiques de base, alors l'histoire des mathématiques semble difficile à ajouter (C. Tzanakis et al., 2000). Cette raison est aussi évoquée par Swetz (1995), Jahnke *in* Dennis (2000), Hitckock (1996), Ponza (2000a) et Charbonneau (2006). Le temps peut aussi manquer aux enseignants pour la planification des activités, la recherche de documents et de matériel et l'appropriation des contenus. Dans le contexte actuel où plusieurs jeunes enseignants sont en début de carrière et ont beaucoup d'éléments à s'approprier, l'enseignement de l'histoire des mathématiques peut sembler fastidieux et long à préparer, à moins que les manuels scolaires ne présentent déjà des activités. Nous verrons plus loin ce qui en est.

**Le manque de ressources**

Un autre constat évoqué par Tzanakis et al. (2000) et Michel-Pajus (2000) est le manque de ressources pour les enseignants. Heiede (1996) et Michalowicz, Daniel, Fitzsimons, Ponza et Troy (2000) vont d'ailleurs dans le même sens et précisent que ce manque est particulièrement criant pour les enseignants du primaire. Pour sa part, Roy (citée dans Charbonneau, 2006), dans son mémoire intitulé « *Usage des textes anciens et activités multidisciplinaires* », souligne qu'il est difficile d'obtenir des informations sur l'élaboration d'activités sur l'histoire des mathématiques. En outre, elle a trouvé peu d'informations dans les bibliothèques scolaires, aucune ressource chez les conseillers pédagogiques des commissions scolaires et bien qu'Internet soit d'un grand secours pour trouver des textes anciens numérisés, certains doutes subsisteraient quant à la fiabilité des informations collectées sur ce média. Aussi, parmi toute la littérature consultée, très peu d'études concernent les élèves du primaire; elles visaient principalement les élèves du secondaire, du collège ou de l'université. Nous verrons plus loin ce que les collections de manuels de mathématiques québécoises nous proposent.

**Le manque d'expertise des enseignants**

Une autre raison d'ordre pratique évoquée par Tzanakis et al. (2000) est le manque d'expertise des enseignants dans ce domaine. En effet, comme l'histoire des mathématiques a récemment fait son entrée au programme, il s'agit d'une nouveauté pour les enseignants qui ne l'ont pas abordée en formation des maîtres. Charbonneau (2006) parle du préjugé défavorable de certains enseignants face à l'histoire et d'une méconnaissance de l'histoire en général et celle des mathématiques en particulier. Il utilise même le mot *historiophobie* et parle d'un sentiment d'incompétence (par rapport aux connaissances préalables). Dans ce contexte, il peut être difficile d'enseigner un contenu que l'on ne maîtrise pas ou qu'on pense ne pas aimer.

**Une perception de détournement**

Tzanakis et al. (2000) évoquent que pour certains enseignants, l'histoire, ce n'est pas des mathématiques. Aussi, on dit que les étudiants qui n'apprécient pas l'histoire n'aimeront pas plus l'histoire des mathématiques. On évoque de plus que l'histoire peut être tortueuse, confuse et pas toujours révélatrice. À l'instar de Tzanakis et al. (2000), Pascale Roy *in* Charbonneau (2006), relève aussi le fait que les mathématiques anciennes peuvent être difficiles à comprendre pour les enseignants et les élèves. Aussi, certains enseignants pensent que si ce n'est pas évalué, les élèves ne s'y intéresseront pas.

**Le rapport des élèves au temps**

Charbonneau (2006), tout comme Tzanakis et al. (2000), parle du rapport des élèves au temps. En effet, il cite Micheline Johnson *(L'histoire apprivoisée*, Montréal : Boréal Express, 1979) sur l'acquisition du temps historique chez les jeunes. Selon cette dernière, il faut attendre que les élèves atteignent l'âge de 11 ans pour s'approcher du point de maturation du temps historique. Il en découle que si on peut faire des évocations du passé et l'étude du changement, il ne faut pas s'attendre à ce qu'elles s'intègrent dans une vision claire du temps historique.

**Le risque d'introduire des anachronismes**

Tzanakis et al. (2000) rappellent les propos d'enseignants qui affirment qu'il faut une bonne base d'histoire pour réussir à situer l'histoire des mathématiques dans leur contexte. Grugnetti (2000) nous met même en garde sur le risque d'introduire des anachronismes lorsqu'on aborde l'histoire des mathématiques. Celle-ci demande une bonne analyse du contexte social, politique, économique et culturel de l'époque abordée. À l'instar de Grugnetti, Roy, (citée dans Charbonneau, 2006) mentionne aussi qu'il est facile de faire des anachronismes. De son côté, Charbonneau (2006) précise que des enseignants évitent de faire de l'histoire des mathématiques de crainte de ne pas être conformes à la vérité historique.

Malgré toutes ces difficultés inhérentes à l'introduction de l'histoire des mathématiques à notre enseignement, nous croyons que les avantages et la pertinence pour les élèves et les enseignants surpassent amplement ces difficultés. Voyons maintenant ce que proposent les nouveaux manuels de mathématiques québécois approuvés par le Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport quant aux repères culturels et à l'histoire des mathématiques.

## 1.4. L'analyse des manuels de mathématiques du 3e cycle

Pour se conformer au nouveau programme de formation, les maisons d'édition de manuels scolaires ont renouvelé leurs collections. Nous avons donc consulté les trois seules collections de manuels de mathématiques du troisième cycle du primaire actuellement approuvées par le Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport (MÉLS)[2] pour voir la place qu'y occupent les repères culturels et plus particulièrement, l'histoire des mathématiques. Nous avons donc examiné les collections Clicmaths, Presto et Défi mathématiques, ainsi que de nombreux cahiers d'exercices. Voyons ce qu'offrent ces nouvelles collections de manuels scolaires en mathématiques.

### La collection Clicmaths, 3e cycle

La collection Clicmaths de la maison d'éditions Grand Duc –HRW– (Guay, 2003) a été la première à être approuvée par le MÉLS en mai 2004. Elle contient quatre manuels au troisième cycle pour un total de 560 pages. Chaque manuel contient 20 situations d'apprentissage qui abordent chacune une notion, nouvelle ou non. L'histoire des mathématiques est abordée dans les situations particulières intitulées *Le savais-tu ?* qui se retrouvent à la fin de chaque manuel sur quatre pages. Le premier manuel traite des fractions unitaires égyptiennes, de l'écriture des nombres babyloniens et du nombre *pi*. Le deuxième manuel traite des fractions vues par Theano au 6e siècle av. J.-C., de la contribution d'Euclide à la géométrie et des multiplications de Brahmagupta. Le troisième manuel nous présente Fibonacci et sa fameuse suite, Pierre de Fermat et sa théorie moderne des nombres et Florence Nightingale et ses diagrammes. Le dernier manuel traite des graphes d'Euler, des nombres premiers examinés par Sophie Germain et deux problèmes de Gauss : la somme des entiers de 1 à 100 et le problème des huit reines sur un échiquier.

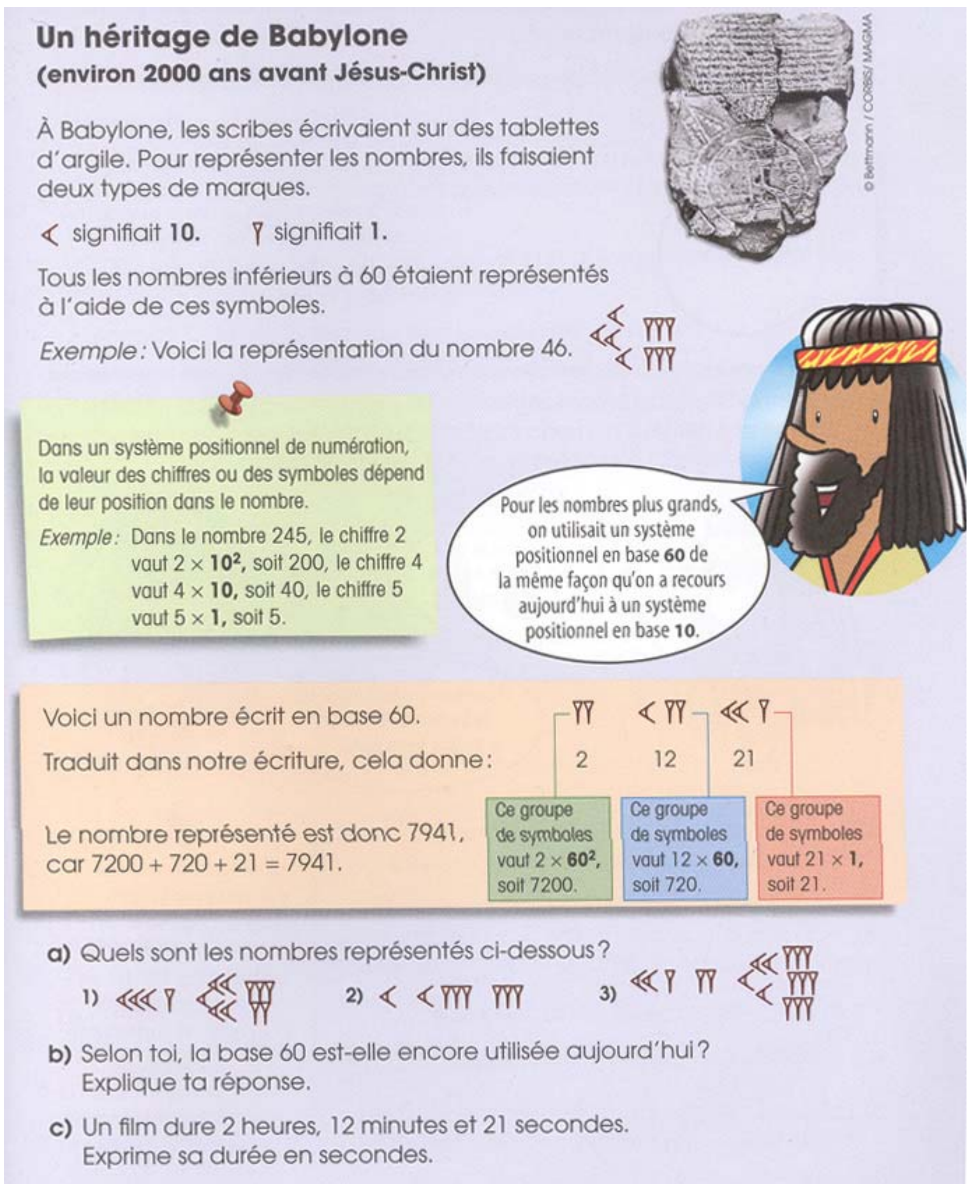
Notons également que lorsque le manuel aborde les multiplications à deux chiffres (nouveau en cinquième année), il le fait avec une situation-problème sur un abaque romain, propose, entre autres, la méthode par jalousie et conclut avec la multiplication égyptienne. Les activités proposées ne permettent toutefois pas nécessairement de faire des liens avec l'algorithme conventionnel.

---

[2] Site Internet du MÉLS consulté le 5 juillet 2010 à l'adresse : http://www3.mels.gouv.qc.ca/BAMD/new_primaire.asp?no=1

En somme, on nous présente soit des peuples et leur façon de représenter les nombres (dans le premier manuel seulement), soit des mathématiciens (plus ou moins connus) et leur contribution aux mathématiques. Par contre, ces capsules restent très anecdotiques et les tâches demandées, à notre avis, ne sont pas très stimulantes, comme le lecteur peut le constater dans l'extrait d'un manuel à la figure 1. En effet, les explications sont données et on demande à l'élève de simplement appliquer un processus, plutôt que de le placer en situation où il aurait à le découvrir par lui-même. De plus, puisque ces capsules sont placées en fin de manuel, nous parions qu'elles sont rarement vues par les élèves et les enseignants, comme l'a révélé un petit sondage informel à l'école de la chercheure.

**Figure 1** Extrait du manuel Clic Math 3$^{e}$ cycle, vol. A, p. 139



**Un héritage de Babylone**
**(environ 2000 ans avant Jésus-Christ)**

À Babylone, les scribes écrivaient sur des tablettes d'argile. Pour représenter les nombres, ils faisaient deux types de marques.

signifiait **10.** signifiait **1.**

Tous les nombres inférieurs à 60 étaient représentés à l'aide de ces symboles.

*Exemple :* Voici la représentation du nombre 46.

© Bettmann / CORBIS/ MAGMA

Dans un système positionnel de numération, la valeur des chiffres ou des symboles dépend de leur position dans le nombre.

*Exemple :* Dans le nombre 245, le chiffre 2 vaut $2 \times \mathbf{10^2}$, soit 200, le chiffre 4 vaut $4 \times \mathbf{10}$, soit 40, le chiffre 5 vaut $5 \times \mathbf{1}$, soit 5.

Pour les nombres plus grands, on utilisait un système positionnel en base **60** de la même façon qu'on a recours aujourd'hui à un système positionnel en base **10**.

Voici un nombre écrit en base 60.

Traduit dans notre écriture, cela donne : 2 12 21

Le nombre représenté est donc 7941, car 7200 + 720 + 21 = 7941.

Ce groupe de symboles vaut $2 \times \mathbf{60^2}$, soit 7200.

Ce groupe de symboles vaut $12 \times \mathbf{60}$, soit 720.

Ce groupe de symboles vaut $21 \times \mathbf{1}$, soit 21.

**a)** Quels sont les nombres représentés ci-dessous ?

1) 2) 3)

**b)** Selon toi, la base 60 est-elle encore utilisée aujourd'hui ? Explique ta réponse.

**c)** Un film dure 2 heures, 12 minutes et 21 secondes. Exprime sa durée en secondes.

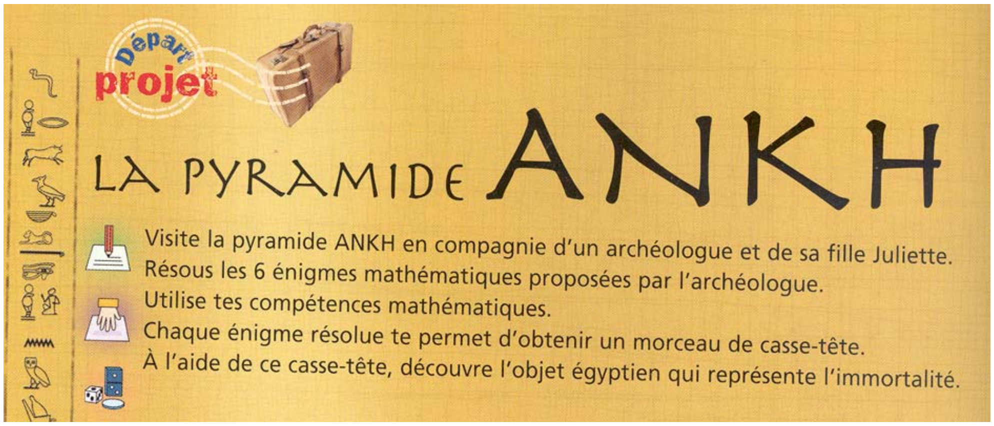
## La collection Presto mathématique, 3e cycle

La deuxième collection approuvée par le MÉLS (en février 2005) est la collection Presto (Lacasse, 2005) de la maison des Éditions CEC. Cette collection contient huit manuels pour le troisième cycle (quatre par année) pour un total de 844 pages. Dans ces pages, on retrouve une quinzaine de rubriques *culture* et deux « projets » à caractère historique.

Les rubriques *culture*, identifiées par un petit symbole de planète, se retrouvent habituellement en bas des pages et occupent un quart à une demi-page. Ce sont de petites capsules informatives sur des sujets variés (*calculi* mésopotamiens, système chinois de baguettes, fractions égyptiennes, apparition des nombres décimaux, apparition des symboles mathématiques (+, -, x, ÷, =, < et >), numération babylonienne en base 60, symboles romains, anciennes unités de mesure, etc.). Certaines rubriques comportent des questions de discussion ou de petits exercices d'application.

Aussi, le premier manuel (manuel A, volume 1, p. 8 à 14) s'ouvre sur un « projet » qui s'appelle *La pyramide Ankh* et qui traite de l'Égypte ancienne. On y explique le système de numération égyptien et ses hiéroglyphes, mais la tâche demandée n'est pas pertinente. On aborde aussi les fractions égyptiennes, mais elles ne sont pas expliquées et on ne précise pas que les Égyptiens utilisaient surtout des fractions unitaires. En fait, ce « projet » n'est qu'un prétexte pour résoudre des « énigmes » qui ne sont en réalité que de simples exercices d'application qui n'ont rien à voir avec la numération égyptienne ou leur façon de faire les opérations, comme vous pouvez le constater à la figure 2. Le manuel B (volume 1, p. 8 à 14) s'ouvre aussi sur un projet appelé *La cité quetzal* et traite du système de numération maya. On y explique les différents symboles et leur valeur et la base 20 de ce système. On demande à l'élève de résoudre quatre « énigmes », à savoir déchiffrer les symboles mayas qui représentent les nombres 13, 32, 20 et 21. Les pages suivantes sont aussi un prétexte pour faire de simples exercices d'application qui n'ont pas de lien avec la numération maya.

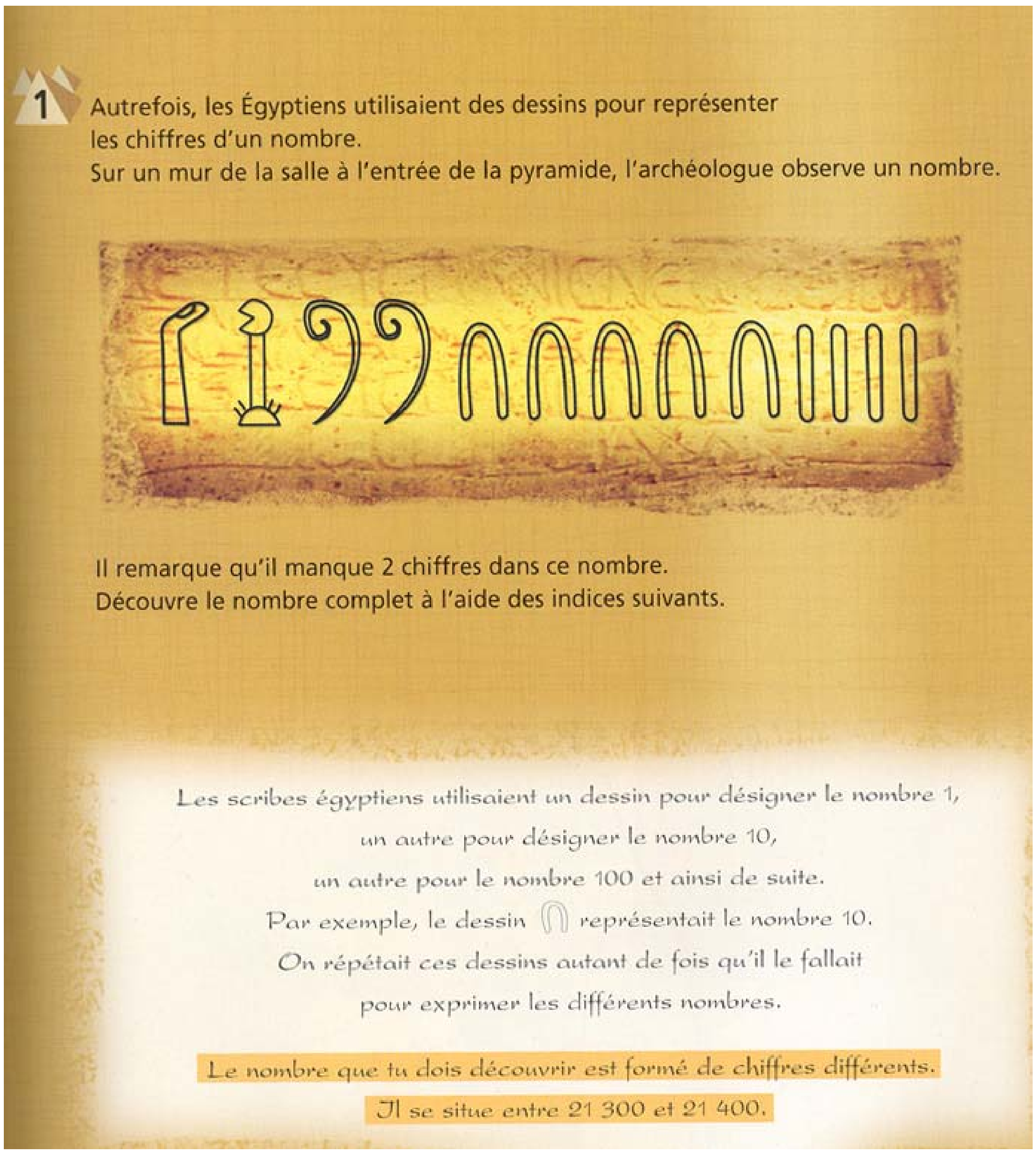
**Figure 2** Extraits du manuel Presto mathématique, 3e cycle, vol. A, pages 8 et 9



départ projet

LA PYRAMIDE ANKH

Visite la pyramide ANKH en compagnie d'un archéologue et de sa fille Juliette.
Résous les 6 énigmes mathématiques proposées par l'archéologue.
Utilise tes compétences mathématiques.
Chaque énigme résolue te permet d'obtenir un morceau de casse-tête.
À l'aide de ce casse-tête, découvre l'objet égyptien qui représente l'immortalité.



1 Autrefois, les Égyptiens utilisaient des dessins pour représenter les chiffres d'un nombre.
Sur un mur de la salle à l'entrée de la pyramide, l'archéologue observe un nombre.

Il remarque qu'il manque 2 chiffres dans ce nombre.
Découvre le nombre complet à l'aide des indices suivants.

Les scribes égyptiens utilisaient un dessin pour désigner le nombre 1,
un autre pour désigner le nombre 10,
un autre pour le nombre 100 et ainsi de suite.
Par exemple, le dessin ∩ représentait le nombre 10.
On répétait ces dessins autant de fois qu'il le fallait
pour exprimer les différents nombres.

Le nombre que tu dois découvrir est formé de chiffres différents.
Il se situe entre 21 300 et 21 400.

Bref, selon nous, l'histoire des mathématiques est abordée de façon superficielle dans cette collection. La façon dont les rubriques sont dispersées fait en sorte qu'elles ne sont nullement en lien avec les contenus enseignés et nous présumons que de nombreux enseignants doivent les ignorer ou les négliger.

## La collection Défi mathématique, 3e cycle

La dernière collection approuvée par le MÉLS, Défi mathématique (Lyons & Lyons, 2005), nous vient de la maison d'édition La Chenelière. Cette collection contient deux manuels pour le troisième cycle pour un total de 431 pages. Bien que les manuels de cette collection soient ceux qui contiennent le moins de pages, c'est avec eux qu'on va le plus en profondeur dans l'histoire des mathématiques. En effet, la collection Défi mathématique, même dans sa version précédant la réforme, abordait l'histoire des mathématiques pour l'intérêt qu'elle suscite et les contenus mathématiques qu'on peut y greffer. Les manuels de Défi mathématique sont divisés en cinq parties : logique, numération, fraction, jeux de nombres et géométrie. C'est surtout dans les parties *numération* et *jeux de nombres* que l'on traite de l'histoire des mathématiques.

Dans la section *numération* du manuel de cinquième année, dès le début de l'année, on fait un survol historique sur trois pages consécutives (voir l'annexe 3). On y voit une façon primitive de compter sur son corps, les bulles d'argile des Sumériens, les tables à calcul du XVIe siècle, l'abaque de Gerbert d'Aurillac, la numération additive égyptienne et la numération hybride chinoise. À la suite de chaque information, l'élève est invité à expliquer les différents systèmes ou à « traduire » certains symboles en nombres indo-arabes et vice-versa. Plus loin, lorsqu'on aborde la division avec un diviseur à deux chiffres, on évoque le calcul à la plume italien datant du XVIe siècle et le calcul scolaire italien de la fin du XXe siècle. Dans la section *jeux de nombres*, lorsqu'on aborde les multiplications à deux chiffres, on nous présente, entre autres, « le procédé arabe » que d'autres nomment « par jalousie » ou « *per gelosia* ».

Pour ce qui est du manuel de sixième année, la section *numération* présente une *Petite histoire des chiffres et du calcul* et dans la section *jeux de nombres,* trois pages sont consacrées aux instruments de calcul, notamment le fonctionnement de l'abaque romain, du boulier chinois et des *calculi* sumériens. L'élève est invité à expliquer leur fonctionnement et à expérimenter quelques manipulations (vous pouvez consulter ces pages à l'annexe 4).

Enfin, soulignons que la collection Défi mathématique est celle qui aborde le plus en profondeur l'histoire des mathématiques, mais elle se contente d'enrichir la culture générale des élèves (ce qui est déjà bien) plutôt que d'améliorer la compréhension de concepts arithmétiques comme la numération et les opérations (addition, soustraction, multiplication et division). En effet, il s'agit de petites activités regroupées sur quelques pages, que l'on voit habituellement en une leçon. Bien que ces activités suscitent la discussion et permettent de survoler des notations et des méthodes anciennes, elles ne s'inscrivent pas dans une séquence didactique visant à améliorer la compréhension de notre système de numération ou de nos algorithmes.

### Les différents cahiers d'exercices du 3e cycle

De tous les cahiers d'exercices consultés à la didacthèque de l'Université de Montréal[3], aucun n'aborde de près ou de loin l'histoire des mathématiques ou autres repères culturels. Seuls les cahiers d'exercices de Défi mathématique les abordent, mais ces cahiers d'exercices remplacent les manuels dans certaines écoles, plutôt que de les compléter comme à l'habitude.

L'analyse de ces divers manuels nous amène à constater que les différentes maisons d'édition scolaire ont respecté les exigences minimales du programme de formation, qui relativement aux repères culturels, demande de réaliser un projet ou une activité par cycle. Seule la collection Défi mathématique utilise l'histoire des mathématiques pour expliquer aux élèves notre système de numération actuel et notre façon d'effectuer les opérations. Par contre, ces activités restent des survols et aucun système ou procédé n'est étudié en profondeur.

## Conclusion

La chercheure se trouve devant un problème pratique d'enseignement/ apprentissage : elle souhaite en effet stimuler ses élèves doués pour éviter leur sous-performance et pense que les repères culturels en mathématiques représentent une voie intéressante. Ainsi, nous avons cru bon de souligner sa pertinence pour les élèves et pour les enseignants et également, de présenter les difficultés inhérentes à son intégration. De

[3] *Croque-Math, Résolu Math, Missions mathématiques, Je m'entraîne en mathématique, Connexions en mathématiques, Au fil des jours avec Mathieu et ses amis et amies* et *Les Activités de Pri-math*.

plus, le Programme primaire international propose un module de recherche sur l'histoire et la géographie et demande entre autres de porter « sur les découvertes […] des êtres humains; sur les relations entre les individus et les civilisations […] » (Organisation du Baccalauréat International, 2007, p. 14). Rappelons que Daniel (2000) affirme que l'histoire des mathématiques est particulièrement appropriée pour les enfants doués puisqu'elle leur offre des défis stimulants. Nous avons aussi vu l'importance que le programme du MÉLS accorde à la compétence *résoudre une situation-problème mathématique*. Toutefois, du côté des manuels, tous les exemples abordant l'histoire des mathématiques restent en surface et ne proposent pas de réelles résolutions de problèmes.

De plus, comme l'histoire des mathématiques a récemment fait son entrée au programme, il s'agit d'une nouveauté pour les enseignants qui ne l'ont pas abordée lors de leur formation des maîtres (s'ils ont terminé avant 2002), ni durant leur scolarité préuniversitaire. La chercheure aura donc à se pencher sur ces notions dans le prochain chapitre. Aussi, à l'instar de Tzanakis et al. (2000), Michalowicz et al. (2000) et Heiede (1996), nous constatons qu'il existe peu de ressources pédagogiques pour les enseignants du primaire (comme nous l'avons vu dans la revue des manuels scolaires).

À la lumière de ce qui a été dit plus haut sur les exigences des deux programmes, les caractéristiques des élèves et la pertinence d'introduire l'histoire des mathématiques, le but de cette thèse est de développer et de mettre à l'essai une séquence d'enseignement/apprentissage adaptée aux élèves voulant à la fois répondre aux exigences du Programme primaire international (PP) de l'OBI et à celles du MÉLS et qui serait basée sur l'histoire des mathématiques. Cet objectif se précisera suite au deuxième chapitre où nous verrons différentes façons d'introduire l'histoire des mathématiques et sur quelles notions mathématiques nous devrions nous pencher.

# 2. Cadre conceptuel

# Introduction

Notre objectif général étant de développer une séquence d'enseignement/ apprentissage basée sur l'histoire des mathématiques et de la mettre à l'essai, nous avons retenu trois grands volets à développer pour cette recherche : 1) l'intégration de l'histoire des mathématiques à l'enseignement; 2) les contenus mathématiques à aborder lors de la séquence d'enseignement et leur développement historique; 3) la conception de l'apprentissage sous-jacente au développement de cette séquence d'enseignement. Dans la première section de ce chapitre, nous discutons des différentes manières d'aborder l'histoire des mathématiques dans les classes que nous avons recensées et nous pointons les plus adaptées pour les élèves du primaire. Nous voyons également sous quels aspects méthodologiques ont été menées les études consultées pour éventuellement guider nos choix. Dans la seconde section de ce chapitre, nous abordons les principales notions mathématiques utilisées dans la séquence d'enseignement, à savoir l'arithmétique et la numération, et voyons la place importante que ces notions occupent actuellement dans l'enseignement des mathématiques au primaire. Afin de comprendre la séquence d'enseignement de la numération basée sur son développement historique, il convient d'expliquer le fonctionnement de différents systèmes (sumérien, babylonien, égyptien, romain, chinois et maya) et leurs symboles respectifs, les façons d'effectuer les additions, les soustractions, les multiplications et les divisions dans ces systèmes. Enfin, nous voyons les difficultés que rencontrent les élèves dans l'apprentissage de la numération. Dans la dernière partie, nous décrivons comment notre séquence d'enseignement sera développée en s'inspirant du constructivisme. Nous terminons ce deuxième chapitre avec notre objectif spécifique de recherche.

## 2.1. L'intégration de l'histoire des mathématiques à l'enseignement

La recension des écrits nous a permis de constater qu'il existe de nombreuses façons d'intégrer l'histoire des mathématiques à notre enseignement. Ces diverses façons sont ici présentées et discutées à la lumière de leur pertinence dans une classe du primaire. Nous évoquons ensuite le peu de détails sur la méthodologie utilisée dans les nombreuses études consultées.

## Les différentes façons d'intégrer l'histoire des mathématiques

Suite au changement du programme de formation au primaire, la plupart des maisons d'édition de matériel pédagogique québécoises ont créé de nouveaux manuels scolaires afin de répondre aux nouveaux contenus et exigences du programme. La consultation des différentes collections de manuels québécois dédiés à l'enseignement des mathématiques nous a amenée, au chapitre précédent (section 1.3), à constater que les activités faisant référence aux repères culturels sont rares et superficielles. Ce n'est donc pas seulement vers les manuels que l'on devrait se tourner pour avoir des idées de pratiques. Les études consultées nous proposent une panoplie de manières d'intégrer l'histoire des mathématiques à notre enseignement.

Dans la problématique (1.2), nous avons également vu les avantages et les inconvénients à introduire l'histoire des mathématiques à l'enseignement et avons constaté qu'il existe une grande variété d'approches et de façons de le faire. La littérature consultée comporte plusieurs recherches-actions (voir le tableau synthèse à l'annexe 2) où l'on a expérimenté des activités en histoire des mathématiques. Bien que la plupart des études fasse état de recherches menées au secondaire, ou même à l'université, nous croyons que certaines approches sont adaptables pour les élèves du primaire (particulièrement des élèves doués du troisième cycle). Dans ce qui suit, nous proposons diverses manières d'intégrer l'histoire des mathématiques à l'enseignement recensées dans les écrits et nous discutons de leur pertinence pour des élèves du primaire. Le lecteur remarquera que plusieurs façons se recoupent ou peuvent se combiner. L'ordre de présentation suit l'importance, en termes de fréquence, accordée à chacune de ces façons de procéder dans la littérature consultée.

#### La lecture de sources originales, de textes anciens

De toutes les façons d'intégrer l'histoire des mathématiques à l'enseignement inventoriées dans la littérature, la lecture de sources originales et de textes anciens reste la plus populaire, du moins la plus citée ou expliquée (Barbin, 1997; Bruckheimer & Arcavi, 2000; Fauvel, 1996; Laubenbacher & Pengelley, 1994; Siu, 1997; C. Tzanakis et al., 2000; Constantinos Tzanakis & Thomaidis, 2000). Bien que nous ayons vu en détail la pertinence de cette approche, tant pour les élèves que pour les enseignants dans la problématique, ces textes sont habituellement difficiles à lire et abordent des notions plutôt vues au secondaire.

Par contre, comme le suggèrent Tzanakis et Thomaidis (2000, p. 48), l'enseignant peut adapter (vulgariser) les sources originales et secondaires pour permettre aux élèves de comprendre. Avec ces précautions, il serait possible de l'introduire au primaire.

**Les problèmes provenant de l'histoire**

De nombreux auteurs ont vanté les mérites d'utiliser des problèmes puisés au fil des siècles dans les livres anciens (Avital, 1995; Barbin, 1997; Inter-IREM-épistémologie, 1993; Swetz, 1994, 1995, 2000, 2001; C. Tzanakis et al., 2000). On a retrouvé des traces de problèmes dans des civilisations millénaires telles les babyloniennes, les égyptiennes et les chinoises. Swetz (2000) parle même d'un immense réservoir contenant des milliers de problèmes qui peuvent être utilisés encore aujourd'hui. Barbin, dans la préface du livre : *Histoire de problèmes, histoire des mathématiques* (Inter-IREM-épistémologie, 1993), précise que d'aborder l'histoire des mathématiques du point de vue des grands problèmes apparus au cours des siècles permet de « présenter une histoire des mathématiques qui ne soit pas parcellisée selon les différentes périodes historiques ou par les différents champs du savoir mathématique, mais qui prenne pour point de départ les grands problèmes de l'histoire des mathématiques » (1993, p. préface). Ils permettent aussi de traiter de la naissance et de l'évolution de problèmes et de concepts et aident à démontrer la création ou la transformation des outils mathématiques qui permettent de les résoudre.

Il existe plusieurs types de problèmes et chacun permet de présenter une facette de l'activité mathématique. Tzanakis et al. (2000) proposent cinq types de problèmes : 1) des problèmes impossibles, 2) des célèbres problèmes non résolus ou résolus avec grandes difficultés, 3) des problèmes avec des solutions ingénieuses, alternatives ou exemplaires, 4) des problèmes qui ont motivé ou anticipé le développement de tout un champ mathématique et 5) des problèmes pour s'amuser. Les ouvrages mentionnés précédemment donnent de nombreux exemples de problèmes, mais ils abordent tous des notions vues au secondaire (algèbre, fonctions, etc.). Nous n'avons pas retenu cette approche, bien qu'il ait peut-être été possible de trouver des problèmes adaptables pour des élèves du primaire. Comme nous le verrons plus loin, d'autres façons d'aborder l'histoire des mathématiques touchent davantage les notions vues au primaire.

**Les anecdotes et les capsules (*snippets)***

Plusieurs auteurs suggèrent les anecdotes pour aborder l'histoire des mathématiques. Certains ne font que l'évoquer (Rickey, 1996; Swetz, 1994, 2001), d'autres en parlent de façon plus substantielle. Siu (1997) aborde l'intérêt que peuvent susciter les anecdotes et cite Howard Eves qui résume bien cet intérêt :

> « These stories and anecdotes have proved very useful in the classroom –as little interest-rousing atoms, to add spice and a touch of entertainment, to introduce a human element, to inspire the students. To instill respect and admiration for the great creators, to yank back flagging interest, to forge some links of cultural history, or to underline some concept or idea » (Siu, 1997, p. 3).

Tzanakis et al. (2000) préfèrent utiliser l'expression *historical snippets* (capsules historiques) plutôt que de parler d'anecdotes. Ces capsules sont des informations historiques incorporées dans les manuels de mathématiques. Leur contenu peut être très varié et toucher à peu près toutes les façons vues dans cette section. D'ailleurs, la collection québécoise Presto utilise surtout les anecdotes et les capsules pour aborder les repères culturels.

**À l'intérieur d'une leçon**

Rickey (1996) propose aussi un inventaire des différentes manières d'utiliser l'histoire dans les cours de mathématiques, notamment en l'utilisant pour aborder un nouveau sujet. On peut aussi faire la petite histoire d'un concept ou des symboles. L'histoire permet aussi de discuter de sujets modernes et avancés. Tout comme Tzanakis et al. (2000), il préconise d'utiliser des erreurs qui viennent du passé pour que les élèves apprécient davantage nos façons de faire et autres preuves modernes. D'autres auteurs vont dans le même sens en ajoutant l'origine de procédures et de termes mathématiques (Swetz, 2001). De son côté, Siu (1997) propose de commencer une leçon en donnant un aperçu historique du sujet et affirme que l'on peut facilement aller puiser dans les livres d'histoire des mathématiques pour arriver à cette fin.

D'autres façons d'introduire l'histoire des mathématiques dans une leçon sont détaillées par Tzanakis et al. (2000). Ils préconisent de présenter des conceptions alternatives – en présentant l'histoire de la notion de fonction par exemple –, des changements de perspectives survenus au cours de l'histoire, des révisions d'hypothèses et des arguments intuitifs. À tout moment et ce, même au primaire, il est possible de présenter l'histoire du concept que l'on aborde. Par contre, comme le programme primaire met l'accent sur la numération, que ce concept n'est pas nouveau pour les élèves et que son histoire est riche et s'étirant sur plusieurs millénaires, nous croyons que son apprentissage devrait se faire sur plusieurs jours et pas nécessairement à l'intérieur d'une seule leçon.

**Les projets de recherche**

Rickey (1996) propose de réaliser une recherche sur un ou une mathématicien(ne) célèbre. Pour sa part, Swetz (2001) préconise une mini-recherche sur la découverte, l'approche ou la vie d'un mathématicien. Dans tous ces cas, la recherche avec Internet peut s'avérer fort utile pour trouver des informations, des biographies, des photographies ou des dessins de mathématiciens ou des instruments mathématiques. Par contre, les textes de la plupart des sites consultés sont quelque peu ardus pour des élèves du primaire[4].

**Les pièces de théâtre**

Les pièces de théâtre, en plus de captiver les élèves, leur permettent de revivre des moments historiques et rendent les mathématiciens plus humains. Ces pièces peuvent être préalablement écrites par l'enseignant ou une autre personne ou encore, être construites par les élèves dans le cadre d'un projet de classe.

Hitchcock (1996) propose le théâtre pour présenter les découvertes de certains mathématiciens. Selon cet auteur, comme la lecture de textes anciens peut être trop difficile pour certains élèves (du secondaire, encore plus du primaire) et que les textes officiels ne révèlent souvent rien du « drame de la création », les élèves n'ont pas toutes les données entourant le travail des mathématiciens (leurs motivations, leurs émotions, les faux départs, les erreurs et les changements d'idée). En intégrant une approche multidisciplinaire (cognitive, psychologique, sociale, ethnique, rhétorique, philosophique et évidemment historique et mathématique) et en incorporant des informations moins formelles provenant de la correspondance ou de journaux personnels, ainsi que de la littérature non mathématique, les élèves ont moins l'impression d'avoir à faire face à une « boîte noire », un concept ou une idée démontré, achevé et indiscutable, mais plutôt à une science en mouvement, construite peu à peu.

---

[4] http://www.col-camus-soufflenheim.ac-strasbourg.fr/Page.php?IDP=79; http://www.math93.com/index.html; http://www.edunet.tn/maths/indexhist.htm; http://fr.wikipedia.org/wiki/Histoire_des_math%C3%A9matiques; http://www.chronomath.com/; http://www.math-rometus.org/mathematiques; http://www.matoumatheux.info-divers/histoire/accueil.htm; http://www.radio-canada.ca/tv/decouverte/3_chif/index.html; http://www.lechiffre.free.fr/page_som.html .

Ponza (2000) décrit aussi une expérience vécue en Argentine où les élèves ont eux-mêmes proposé de jouer des extraits de la vie de Galois. Elle en fait un compte-rendu très positif, affirmant que : « This method is not just intuitive. When students write or dance or perform mathematics they work out, they analyze, organize and solve » (Ponza, 2000a, p. 341). Elle rapporte de nombreux bénéfices de cette approche avec ses élèves provenant d'un milieu défavorisé. L'histoire des mathématiques a mobilisé les élèves à apporter de la documentation, à consulter la bibliothèque et à lire de nombreux textes. Ce projet a développé l'expression du langage en général et du langage mathématique avec une terminologie nouvelle. De plus, l'introduction d'anecdotes concernant le mathématicien a permis d'humaniser les mathématiques. Ce projet a aussi révélé des aspects cachés de la personnalité des élèves tout comme il a suscité beaucoup d'intérêt chez eux. Elle apporte toutefois des bémols en précisant les limites de cette approche. Il faut s'assurer d'une bonne rigueur mathématique et d'un langage approprié pour vraiment atteindre des objectifs historiques et mathématiques et ne pas juste le faire pour motiver les élèves. Bien que les élèves construisent eux-mêmes leurs connaissances, sont très motivés et par le fait même, devraient mieux retenir les contenus, le facteur temps est le plus grand problème puisque cette méthode en demande beaucoup. Aussi, selon l'auteure, les connaissances préalables de certains enseignants et les efforts investis ne sont pas toujours une garantie de réussite. Cette approche nous semble intéressante, mais peu réaliste dans une classe internationale qui fait déjà six modules de recherche (projets) par année.

**La feuille de travail (*worksheet*) et « *historical packages* »**

De nombreux enseignants utilisent déjà des feuilles de travail dans leur classe. Celles-ci permettent aux élèves de travailler individuellement, en dyades ou en petits groupes et le rôle de l'enseignant est plutôt de guider et d'accompagner. Ces feuilles prennent habituellement en considération les connaissances préalables des élèves et sont graduées pour amener les élèves à approfondir un sujet ou à en aborder de nouveaux. Les feuilles peuvent être construites à partir de courts extraits de textes anciens et de questions s'y rattachant. Elles peuvent aussi demander de comparer une procédure ancienne à une méthode moderne, de résoudre un problème ou de « traduire » des nombres ou des symboles inconnus des élèves par exemple. Ce type d'activités nous semble particulièrement bien indiqué pour des élèves du primaire, pourvu que le travail soit à leur portée. Par contre, les auteurs consultés proposent les feuilles de travail, mais ne donnent pas d'exemples précis de celles-ci.

Les mêmes auteurs proposent aussi les *historical packages* qui consistent en une collection de matériel sur un sujet précis lié au curriculum et qui est vue sur deux ou trois périodes. Contrairement aux feuilles de travail présentées précédemment, l'enseignant expose le contexte historique et/ou quelques notions, propose des questions et des problèmes et guide la discussion. Ces *packages* sont prêts à être utilisés et fournissent à l'enseignant une description détaillée de l'activité, des informations historiques et didactiques, prévoient les réponses ou réactions des élèves et fournissent ou détaillent le matériel requis (transparents, etc.). L'article mentionne cinq *packages* : *Ancient numerals and number systems*, *Arithmetic in ancient Egypt*, *Pi and the circumference of the circle*, *Word problems and equations* et *Casting out nines*. Par contre, nous n'avons pas réussi à nous les procurer. Néanmoins, l'idée d'une séquence d'enseignement *clé en main* nous apparaît très intéressante.

**L'exploration d'artefacts et d'objets du passé**

Certains auteurs proposent l'exploration d'artefacts mathématiques ou d'objets venant du passé (objets, textes, images) pour inspirer les élèves et susciter leur intérêt (Bartolini Bussi, 2000; Fauvel, 1996; Poisard, 2005a; Rickey, 1996; Swetz, 1994, 2001). Une multitude d'instruments peuvent être achetés ou reproduits facilement pour permettre aux élèves de les manipuler. Bartolini Bussi (2000) en inventorie plusieurs et les divise selon le domaine mathématique, soit l'arithmétique, l'algèbre, la géométrie et les mathématiques appliquées. Nous nous attardons aux suggestions concernant l'arithmétique puisqu'elles sont plus facilement adaptables et intéressantes pour les élèves du primaire. On peut aisément reproduire des tablettes à calculer mésopotamiennes en pâte à modeler et jouer aux scribes pour représenter les nombres babyloniens en base soixante. Différents types d'abaques peuvent être reproduits : l'abaque en sable babylonien, l'abaque à lignes grec, l'abaque romain, le *soroban* japonais et le *s'choty* russe. On peut même acheter un abaque chinois dans un quartier ou un magasin chinois. Il est également possible de reproduire les bandes de Napier pour réaliser des multiplications à la *gelosia* comme on les faisait au 17$^{e}$ siècle. Nous trouvons ces manipulations particulièrement pertinentes pour aborder la numération sous un angle nouveau pour les élèves (particulièrement des élèves doués qui maîtrisent ou qui pensent maîtriser notre système de numération et ses opérations).

**Les films et les émissions de télévision**

Certains auteurs favorisent l'utilisation de films ou d'émissions de télévision éducatives (Swetz, 1994, 2001; C. Tzanakis et al., 2000). La littérature consultée fait état de l'existence de plusieurs films sur l'histoire des mathématiques, entre autres produits par l'Open University en Angleterre. Par contre, ils sont en anglais, donc moins utiles pour nos élèves. Aussi, bien qu'ils puissent contribuer à améliorer la culture générale des élèves, ces courts-métrages n'amènent pas ces derniers à résoudre des situations-problèmes mathématiques, mais peuvent faire de très bons déclencheurs (c'est-à-dire intriguer les élèves, susciter leur intérêt, améliorer leur culture générale, etc.).

**Les expériences à l'extérieur**

Les expériences à l'extérieur incluent des sorties dans des musées de sciences dans lesquels les collections peuvent rassembler quelques instruments mathématiques. Les sorties extérieures peuvent aussi consister à observer des formes, des motifs et des frises dans l'architecture ou dans l'art (ancien ou moderne). Il peut aussi s'agir d'expérimenter des instruments de navigation ou de survie pour aborder la géométrie (C. Tzanakis et al., 2000). Ces activités peuvent facilement être vécues avec des élèves du primaire, mais toutes celles que nous avons analysées concernent la géométrie. Il est plus difficile de retrouver, dans notre milieu, des artefacts de numérations anciennes sinon, peut-être, de la numération romaine.

**L'étymologie**

L'origine des termes utilisés en mathématiques est une bonne façon d'approfondir la compréhension des mathématiques et de l'histoire, d'enrichir le langage des élèves, mais aussi d'établir des ponts avec d'autres disciplines ou sujets. Rubenstein et Schwartz précisent: « […] words are often preserved fossils from older times, and digging them can result in a fascinating discovery of how mathematics developed » (2000, p. 664). Les auteurs nous invitent d'ailleurs à consulter le livre de Steven Schwartzman : *The words of mathematics*. Rickey (1996) et Swetz (2001) évoquent également l'étymologie pour apporter une perspective historique à l'enseignement, mais ces auteurs ne donnent aucun exemple précis dans leur article.

**La construction de lignes du temps**

Swetz (2001) inclut, dans ses stratégies pour intégrer l'histoire des mathématiques à notre enseignement, la construction et l'utilisation de lignes du temps pour illustrer le développement des mathématiques. Les lignes du temps peuvent être construites par les élèves en grand groupe ou en projet individuel. Elles permettent de placer les mathématiciens et les découvertes dans le temps et en incluant des événements historiques non mathématiques, elles favorisent la mise en contexte et l'interdisciplinarité dont on a vu l'importance précédemment. Cette approche nous semble pertinente pour des élèves du primaire et complémentaire à d'autres approches.

**Les activités mathématiques expérimentales**

Tzanakis et al. (2000) proposent quatre types d'activités expérimentales qui permettent aux élèves de revivre des façons anciennes de faire des mathématiques. Il s'agit d'arguments, de notations, de méthodes et de jeux. Les arguments consistent en une question ou un problème spécifique amené et mis en contexte par l'enseignant. Les élèves sont ensuite encouragés à en discuter, à y travailler en équipe ou à la maison pour ensuite rediscuter de leurs trouvailles et donner leur opinion. Les notations anciennes peuvent être présentées et expliquées aux élèves et ceux-ci ont l'opportunité d'écrire des nombres dans différents systèmes et de trouver leur équivalent en chiffres indo-arabes. Par ces activités, les élèves peuvent apprécier l'efficacité de notre système positionnel. Nous trouvons ce type d'activités particulièrement adaptées pour des élèves du primaire puisqu'elles touchent des notions du primaire (telles que demandées dans les repères culturels). Pour ce qui est des méthodes, on peut inviter les élèves à s'exercer à compter sur leurs doigts pour effectuer des multiplications avec des nombres de 5 à 10 (les plus difficiles à mémoriser). Aussi, certains auteurs préconisent l'utilisation du boulier chinois puisqu'il facilite la gestion des retenues et des échanges (Balacheff & Neyret, 1982; Poirier, 2001; Poisard, 2005a, 2005b). Finalement, les élèves peuvent jouer à des jeux de dés pour les rudiments des probabilités ou à d'autres jeux anciens et analyser leurs stratégies et le contexte socioculturel dans lequel le jeu est apparu.

**Les citations**

Rickey (1996) met dans sa liste des façons d'intégrer l'histoire aux mathématiques les citations de mathématiciens célèbres. Il ne donne pas d'exemple, mais les textes originaux et les livres sur l'histoire des mathématiques regorgent de phrases clés qui peuvent introduire ou conclure une activité ou une leçon. Cette approche peut être intéressante pour les élèves du primaire dans la mesure où les citations concernent des notions du primaire.

**Les opérations à la manière de…**

À part les collections Clicmath et Défi mathématique qui abordent la multiplication par jalousie (Italie, XVII$^{e}$ siècle), quelques études proposent d'effectuer des opérations à la manière de nos prédécesseurs. En effet, Cerquetti-Aberkane et Rodriquez (2002) ont développé des activités destinées à des élèves du cours moyen (fin du primaire) et du collège (début du secondaire). Elles suggèrent de travailler les additions et les soustractions à partir de cahiers du XVII$^{e}$ siècle et des multiplications à partir des différents exemples d'un autre cahier datant de 1602 (méthodes conventionnelle, dite retournée, en losange, en soleil, par jalousie, etc.). Julie Corbeil (2004), dans son mémoire de maîtrise, a également expérimenté ces activités. Ces façons d'aborder les opérations nous semblent très intéressantes, mais sont relativement récentes et utilisent toutes notre système positionnel actuel. Notons également que Cerquetti-Aberkane, Rodriguez et Johan (1997) ont publié un livre : « Les maths ont une histoire. Activités au cycle 3 » sur la numération romaine et les opérations sur des abaques et des bouliers. Cette avenue nous semble fort pertinente et adaptée à notre clientèle du primaire.

Bien que Poirier nous fasse « *un brin d'histoire* » dans son livre (2001), elle ne propose pas de faire découvrir aux élèves du primaire les façons anciennes de faire les quatre opérations (addition, soustraction, multiplication et division). Elle le faisait cependant avec ses étudiants du DESS en didactique qu'a suivi la chercheure. Il est vrai que les multiplications égyptiennes ou les additions sumériennes en base 60 peuvent paraître complexes, mais nous croyons que des élèves doués du troisième cycle du primaire pourraient les expérimenter à partir de documents explicatifs vulgarisés. Nous pensons que de travailler sur des systèmes de numération qui ont précédé le nôtre et de faire des opérations à la manière de nos prédécesseurs peut aider les élèves à surmonter les difficultés reliées à l'apprentissage de la numération et des algorithmes. C'est ce que nous verrons prochainement (2.2.3).

## La méthodologie employée dans les études consultées

À la lumière de toutes les recherches consultées dans cette recension des écrits et résumées dans le tableau à l'annexe 2, nous sommes à même de constater que très peu d'auteurs proposent une méthodologie de recherche précise. En effet, la plupart des études citées décrivent différentes façons d'introduire l'histoire des mathématiques en classe en vantant les avantages à le faire, mais très peu détaillent une méthodologie de recherche rigoureuse, notamment comment les données sont collectées et analysées.

Notons tout de même Jahnke et al. (2000) qui précisent avoir donné un questionnaire après chacune des 16 séances de cours pour évaluer la compréhension des contenus mathématiques et voir les difficultés éventuelles. Malheureusement, l'article consulté ne fournissait pas ces questionnaires. À la fin de l'expérimentation, ils ont distribué un questionnaire ouvert pour mesurer la perception des étudiants relativement à l'utilisation de l'histoire des mathématiques. Cette approche nous semble intéressante.

Aussi, Cerquetti-Aberkane et Rodriguez proposent une méthodologie avec pré-test et post-test pour déceler les difficultés des élèves lors de leur séquence sur l'addition. Dans leur prétest, qu'elles font passer dès le mois de septembre, elles ont observé des erreurs sur « […] le positionnement des chiffres dans l'opération posée; des erreurs de somme (table d'addition non sue); des retenues non maîtrisées (oubliées ou mal placées) » (2002, p. 24). Elles proposent ensuite une séquence d'enseignement en trois étapes : étape d'exploration, étape d'approfondissement et étape de réinvestissement, chacune avec une gradation du degré de difficulté. À l'étape d'exploration, les élèves travaillaient d'abord individuellement sur deux calculs anciens, tels des « chercheurs-découvreurs », puis collectivement pour comparer les propositions. À l'étape d'approfondissement, on reprenait la deuxième opération (avec retenues) et les explications de l'époque étaient données à lire. Enfin, à l'étape de réinvestissement, l'élève devait retrouver une addition à partir d'une explication ancienne. Ensuite, on invitait les élèves à trouver des erreurs dans des calculs.

Elles travaillaient notamment les additions et les soustractions à partir de cahiers du XVIIe siècle et de leur traduction. Elles concluent la partie sur l'addition en donnant des résultats :

> « […] réussite totale pour la moitié des élèves qui ne respectaient pas, lors du pré-test, les alignements ni les retenues; le travail autour des anciens procédés leur a permis d'assimiler ces manques algorithmiques. D'autres élèves ont pris conscience de la nécessité de connaître les tables d'addition afin d'être plus efficaces! » (2002, p. 34).

Corbeil (2004) a également utilisé un pré test et deux post-tests pour son étude et a analysé les types d'erreurs des élèves. Les questions des tests demandaient de dénombrer et comparer des collections, trouver le nombre de dizaines et de centaines dans certains nombres, arrondir des nombres à la centaine et à l'unité de mille près, effectuer des soustractions (par écrit et sur un abaque dessiné) et effectuer des multiplications. Elle a ensuite analysé les résultats (entre le pré test et les post-tests) selon que ses élèves étaient forts, moyens ou en difficulté. Les résultats font état d'une meilleure compréhension des concepts mathématiques sous-jacents à l'algorithme conventionnel de la multiplication et moins d'erreurs dans cette opération.

Dans une autre étude, Cerquetti-Aberkane et Rodriguez (2006) décrivent la méthodologie utilisée auprès d'élèves de CM2 (cinquième année). Elles sont parties de textes anciens traitant d'additions, de soustractions, de multiplications et de « tours de magie ». Une des chercheures est intervenue en classe une quinzaine de fois, à raison d'une heure et quart par semaine. Elle a été filmée par l'enseignante de la classe afin d'améliorer les séances (dans le but d'en faire un livre). Si cela s'avérait nécessaire, l'enseignante revenait sur les notions abordées ou elle proposait un exercice d'évaluation pour s'assurer de leur compréhension. Les chercheures ont ensuite étudié les enregistrements vidéo et les travaux d'élèves et distribué un questionnaire d'appréciation. Voici quelques exemples de questions : *Quelles sont les activités qui t'ont le plus intéressé et pourquoi? Que penses-tu de cette façon de faire des mathématiques? Qu'as-tu retenu de tout ce travail?* Cette méthodologie semble nous convenir.

En outre, Poisard (2005a) précise que ses observations ont porté sur quatre classes de CM2 (cinquième année). Elle a filmé les séances en classe, a réalisé des entretiens avec les élèves et les enseignants et leur a distribué des questionnaires. Elle donne un aperçu de son analyse avec un extrait d'entretien avec un élève quelques semaines après l'expérimentation.

Finalement, la recension des écrits n'a pas permis de préciser une méthodologie de recherche idéale pour une recherche-action se basant sur l'histoire des mathématiques. Nous croyons toutefois que l'on peut s'inspirer de l'ingénierie didactique avec ses phases d'analyse *a priori* (conduite attendue des élèves) et d'analyse *a posteriori* (ce qui s'est réellement passé) de Michèle Artigue (1996), sans toutefois suivre cette approche à la lettre.

En guise de conclusion de cette première partie du cadre conceptuel, il convient de souligner que même si le nouveau programme de formation prescrit d'aborder l'histoire des mathématiques dans ses repères culturels, il demeure, par contre, très peu exigeant puisque « Les élèves de la classe, individuellement ou en équipe, réalisent au moins un projet ou une activité par cycle (deux ans) relativement aux repères culturels » (MÉLS Ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport, 2001, p. 139). Les raisons qui nous motivent à intégrer une dimension historique à l'enseignement des mathématiques sont plutôt les nombreux avantages tant pour les élèves que pour les enseignants. Aussi, nous croyons que la grande variété des manières d'intégrer l'histoire des mathématiques en classe ne peut que favoriser et faciliter son intégration, et ce, même au primaire. Voilà pourquoi nous avons pris soin de décrire une quinzaine d'approches pour l'intégration de l'histoire des mathématiques, en pointant celles qui pourraient s'adresser à une clientèle du primaire. Nous avons terminé en décrivant la méthodologie de quelques études consultées, mais avons surtout constaté que la plupart des études vantaient les mérites de l'utilisation de l'histoire des mathématiques, mais sans expliquer en détail la méthodologie utilisée auprès des élèves et des étudiants.

Rappelons que notre objectif général de recherche est de développer une séquence d'enseignement/apprentissage basée sur l'histoire des mathématiques et de la valider afin de répondre aux exigences du Programme primaire international (PP) de l'IBO et de celui du MÉLS et ainsi, mieux adapter l'enseignement aux caractéristiques de nos élèves. Nous avons vu qu'un des modules de recherche du PP doit porter sur le thème transdisciplinaire : *Où nous nous situons dans l'espace et le temps* où l'on doit, notamment, aborder les découvertes des humains et les relations entre les individus et les civilisations. Nous avons également vu que le programme du MÉLS contient une section de repères culturels à aborder qui fait une bonne place à l'arithmétique. On propose de travailler sur l'origine et la création des nombres, sur l'évolution de l'écriture des nombres et des différents systèmes de numération ainsi que sur l'évolution des techniques et des outils de calculs. Ce contenu mathématique étant très riche d'un point de vue historique, il nous permet ainsi de revisiter notre système avec les élèves. Notre choix s'est donc arrêté sur l'arithmétique. En effet, bien qu'étudiée depuis le début du primaire, l'arithmétique est souvent une source de difficultés pour les élèves (comme nous le verrons à la section 2.2.3) et son enseignement peut être morcelé. Nous croyons qu'un retour sur l'arithmétique (la numération, les opérations et les liens entre les deux) permettra aux élèves de mieux la comprendre notre système de numération et ses opérations.

## 2.2. L'arithmétique

Rappelons d'abord que la partie sur l'arithmétique occupe la moitié du programme de mathématiques du MÉLS (plus de deux pages sur cinq) et que celle-ci comprend le sens et l'écriture des nombres, le sens des opérations sur les nombres et les opérations sur les nombres (MÉLS Ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport, 2001, pp. 134-136). Dans cette partie, nous commençons par définir l'arithmétique et la numération et nous voyons les différents systèmes de numération retenus et leurs caractéristiques. Finalement, nous abordons les principales difficultés que rencontrent les élèves du primaire en numération.

### L'arithmétique et la numération

Le mot arithmétique vient du grec et signifie la *science des nombres.* Selon Mathieu, Champlain et Tessier cités dans Poirier, il s'agit de l'« étude des nombres rationnels et des procédés de calcul (opérations)» (2001, p. 14). Dans son livre qui s'adresse aux enseignants, Poirier (2001) inclut ces thèmes dans sa partie sur l'arithmétique : nombre, numération, addition, soustraction, multiplication, division. Lorsqu'on parle des opérations, on parle souvent d'algorithmes que Nantais (1991) définit ainsi :

> « […] ensemble de procédures ou d'étapes ou d'actions ordonnées nécessaires pour arriver à obtenir un résultat. L'algorithme permet de résoudre des opérations arithmétiques sur de grands nombres et qui dépassent la simple mémorisation des jeux d'additions ou des tables de multiplication » (Nantais, 1991, p. 5).

Elle poursuit en précisant que le but d'un algorithme est de trouver une solution à une opération le plus efficacement possible. Tout comme le programme du MÉLS (2001) et Madell (1979), Nantais (1991) préconise d'abord la construction et l'expérimentation de processus personnels des élèves avant l'enseignement formel ou l'imposition de processus ou d'algorithmes conventionnels.

Selon Poirier, un des thèmes de l'arithmétique est la numération qu'elle définit comme étant « un système de représentation des nombres qui permet de désigner les nombres et d'effectuer des opérations sur ceux-ci » (2001, p. 28). Pour leur part, Fénichel et Pauvert définissent la numération comme étant « le système qui permet d'écrire et d'énoncer les nombres. À l'école, il s'agit de l'étude de l'organisation des signes et des mots qui permettent de désigner les nombres » (Fénichel & Pauvert, 1997, p. 136). Elles poursuivent en précisant qu'« Apprendre la numération décimale, c'est acquérir la connaissance des règles qui permettent de dire et d'écrire les nombres entiers et décimaux avec les mots et les signes conventionnels » (Fénichel & Pauvert, 1997, p. 136).

La numération occupe une place considérable dans l'enseignement des mathématiques au primaire, particulièrement si on associe numération et opérations comme nous devrions le faire (voir plus loin). Poirier précise que « Notre système de numération repose sur trois principes : le groupement, l'échange et la valeur positionnelle » (2001, p. 28). Nous verrons en détail ces principes après l'explication des systèmes qui ont précédé notre système de numération actuel.

## L'histoire de la numération

Avant de voir les difficultés rencontrées par les élèves du primaire dans l'apprentissage de la numération, faisons un retour dans le passé pour voir les différents systèmes de numération développés par des peuples qui nous ont précédés. Dans la section des *repères culturels* du programme de formation, on propose d'aborder différents systèmes de numération, notamment les systèmes arabe, romain, babylonien et maya. Nous croyons que les systèmes sumérien, égyptien et chinois peuvent également être étudiés pour voir une plus grande diversité de systèmes de numération (différents types de systèmes -additifs, hybrides et positionnels- et des bases différentes : 10, 20, 60).

Comme l'histoire des mathématiques a récemment fait son entrée au programme, il s'agit d'une nouveauté pour les enseignants qui ne l'ont pas abordée lors de leur formation des maîtres. Avant d'enseigner de nouveaux contenus aux élèves, il importe donc de bien se les approprier. À cet égard, Georges Ifrah (1994a, 1994b), dans son *Histoire universelle des chiffres,* réalise un travail remarquable de vulgarisation des différents systèmes de numération de l'histoire. Il est d'ailleurs cité dans la plupart des ouvrages francophones subséquents.

Dans cette partie, nous décrivons d'abord le fonctionnement des différents systèmes de numération qui peuvent être travaillés au primaire (sumérien, égyptien, babylonien, chinois, romain et maya), ainsi que les façons d'effectuer les additions, les soustractions, les multiplications et les divisions dans ces systèmes avec une description des outils utilisés à l'époque. Nous les présentons en ordre d'apparition, bien que certaines dates soient approximatives et que plusieurs systèmes se soient chevauchés dans le temps ou développés en parallèle sur des continents différents. Le lecteur peut consulter un tableau synthèse des différents systèmes à la page 62.

**Le système de numération des Sumériens**

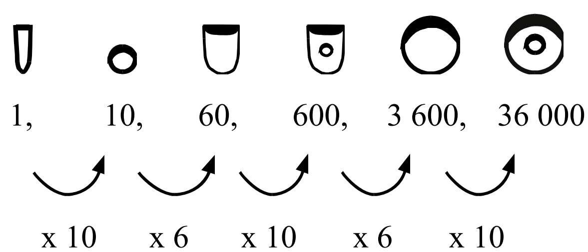
Le système sumérien est le premier système de numération écrite de l'histoire. Il est apparu aux alentours de l'an 3 300 av. J.-C. au pays de Sumer en Basse-Mésopotamie. Plutôt que de compter en base dix (dizaines, centaines, milliers, etc.), les Sumériens ont opté pour la base 60. Encore aujourd'hui, notre culture a gardé des traces de ce vieux système pour la mesure du temps : c'est pourquoi nos heures comprennent 60 minutes et nos minutes, 60 secondes. C'est aussi des Sumériens que nous viennent les 360 degrés du cercle et la mesure de la latitude.

Comme le précise Ifrah dans son Histoire universelle des chiffres :

> « La soixantaine, considérée en tant que base d'un système de numération, constitue certes un nombre élevé chargeant considérablement la mémoire, car elle exige, -théoriquement du moins- la connaissance de soixante mots ou signes différents pour traduire les nombres de 1 à 60. Mais les Sumériens surmontèrent la difficulté en admettant la dizaine comme unité auxiliaire déchargeant la mémoire, c'est-à-dire comme palier intermédiaire entre les différentes unités sexagésimales (1, 60, 3600…) » (1994a, p. 200).

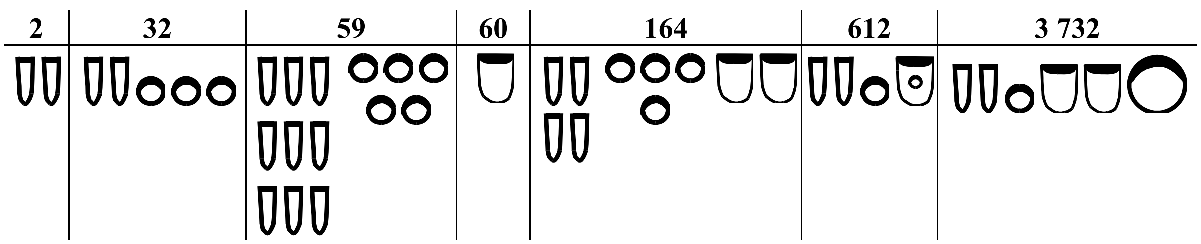
Par contre, la base 60 a aussi ses avantages : étant donné le grand nombre de facteurs de 60: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60, cela facilitait le travail avec les fractions. La numération écrite sumérienne vient directement de leur numération orale qui l'a précédée. Aussi, pour décharger la mémoire, ils donnèrent un symbole à chacun des nombres suivants (figure 3) :

**Figure 3** Les symboles sumériens



La structure de leur numération reposait sur la base 60, mais comportait les bases auxiliaires alternées 10 et 6. Il s'agit d'une numération additive, c'est-à-dire que pour les neuf premiers nombres, par exemple, on répète le signe des unités autant de fois que nécessaire. Ifrah précise que c'est une numération additive de la deuxième espèce puisqu'en plus d'attribuer un symbole distinct pour chaque unité et à chaque puissance de 60, on donne aussi un symbole particulier aux nombres suivants : 10, 600, 36 000, bien évidemment pour en alléger l'écriture puisque la base est très élevée. Aussi, les Sumériens écrivaient habituellement de droite à gauche, c'est-à-dire que les unités étaient à gauche, plutôt qu'à droite. Ils étaient parfois écrits de gauche à droite et même de haut en bas. Comme il s'agit d'une numération additive, la position des symboles n'a d'ailleurs pas d'importance. Notons que les Sumériens, afin de diminuer le nombre de symboles, utilisaient parfois la méthode soustractive (pour 9, ils pouvaient écrire 10 – 1, par exemple). À titre d'exemple, voyez quelques nombres sumériens à la figure 4.

**Figure 4** Des exemples de nombres sumériens




Comme le papier n'existait pas à cette époque lointaine, les Sumériens gravaient ces chiffres sur des tablettes d'argile. Les chiffres ont évolué dans le temps, mais ceux présentés dans le cadre de ce travail sont les chiffres dits archaïques, connus depuis 3 200 à 3 100 av. J.-C. Comme le précise Ifrah dans ses repères chronologiques, entre les années 2700 à 2300 av. J.-C.,

> « […] pour effectuer leurs opérations arithmétiques, les Sumériens abandonnent l'usage des vieux *calculi* (cailloux) en inventant leur abaque : sorte de « tableau » où des colonnes successives, tracées d'avance, délimitent les ordres d'unités consécutifs de leur système sexagésimal, et sur lequel un jeu subtil de petites billes ou de bûchettes permet de faire toutes sortes de calculs » (1994b, p. 400).

Aucune fouille archéologique n’a permis de prouver son existence, mais comme le précise Ifrah, on peut supposer qu’après l’abandon des *calculi*, les Sumériens utilisèrent un instrument s’apparentant à l’abaque. On suppose qu’il ressemblait à l’abaque de la figure 5.

**Figure 5** L’abaque sumérien

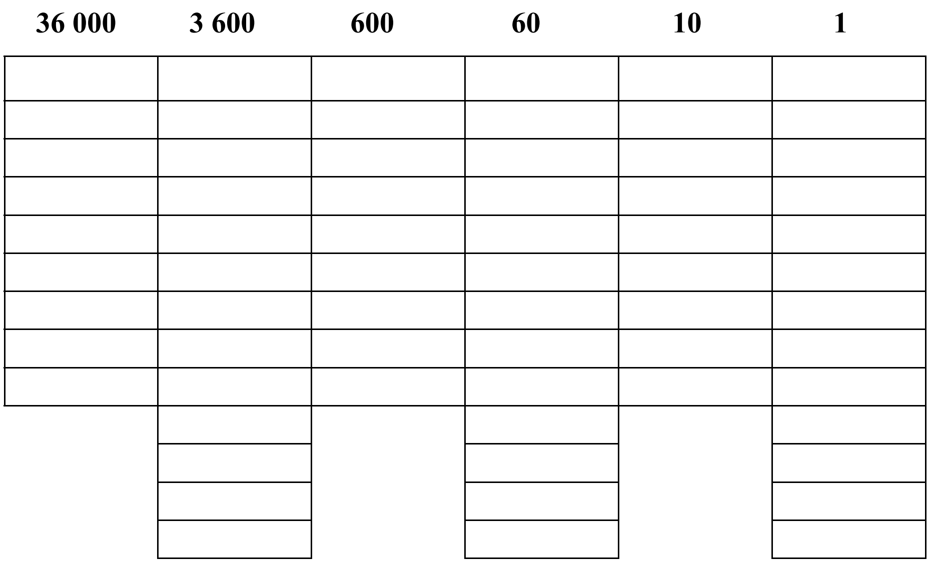



Figure tirée de Ifrah (1994a, p. 302)

Pour représenter un nombre, il suffisait de mettre dans chaque colonne le nombre de pièces voulues. Pour les additions, on n’avait qu’à représenter les deux nombres, effectuer les réductions nécessaires (remplacer 10 pièces de la colonne de droite par une pièce de la colonne immédiatement à gauche, remplacer 6 pièces de cette colonne par une pièce de sa voisine de gauche et ainsi de suite). La difficulté, pour nous qui sommes habitués à la base 10, est d’abord de représenter un nombre en base soixante. Par exemple, pour effectuer 328 + 4 327, on doit d’abord décomposer ces nombres avec les bases alternées de 10 et 60. Ainsi, comme dans l’exemple d’une addition sumérienne à la figure 6, 328 devient (5 x 60) + (2 x 10) + (8 x 1) et 4 327 devient (1 x 3 600) + (1 x 600) + (2 x 60) + (7 x 1).

**Figure 6** Une addition sumérienne

| | 36 000 | 3 600 | 600 | 60 | 10 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1er nombre | | | | IIIII | II | IIIIIIII |
| 2ème nombre | | I | I | II | | IIIIIII |
| Retenues | | | | | I | |
| réponse | | I | I | IIIIIII | III | IIIII |

Pour les soustractions, il suffisait de faire l’inverse; on représentait le premier nombre (toujours en base 60), puis on venait enlever le nombre de pièces représentant le deuxième nombre en faisant des « emprunts » à la colonne de gauche, lorsque nécessaire. Pour plus de détails, voyez les additions et soustractions expliquées aux élèves à l'annexe 6.

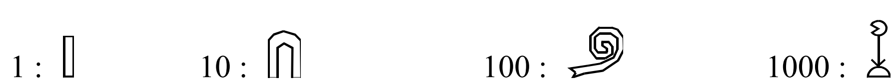
Du fait de leurs bases auxiliaires alternées (10 et 6), le procédé pour les multiplications et les divisions était plus long; on devait effectuer des additions ou des soustractions répétées lorsque l'opération comprenait des petits nombres. Ifrah explique une façon plutôt complexe d'effectuer une division en six étapes (l'explication prend cinq pages!). Pour les divisions où le diviseur est un petit nombre, il suffit de « distribuer » sur autant de lignes nécessaires le dividende en faisant les échanges nécessaires (Ifrah, 1994a). C'est cette technique plus simple que nous verrons avec les élèves. Pour plus de détails sur la manière d'effectuer ces opérations à la manière des Sumériens, le lecteur peut consulter le feuillet explicatif destiné aux élèves à l'annexe 7.

**Le système de numération des Égyptiens**

En même temps que se développaient l'écriture et la numération sumériennes, les Égyptiens inventaient aussi leur propre écriture hiéroglyphique et leur système de numération écrite. C'est sur les bords du Nil qu'on en a découvert les premiers vestiges qui remonteraient aux alentours de l'an 3 000 av. J.-C. Selon Vercoutter, cité dans Ifrah (1994a), malgré des échanges possibles entre les Égyptiens et les Sumériens, leurs systèmes demeurent distincts et bien différents, ce qui laisse croire que ces systèmes seraient indépendants l'un de l'autre.

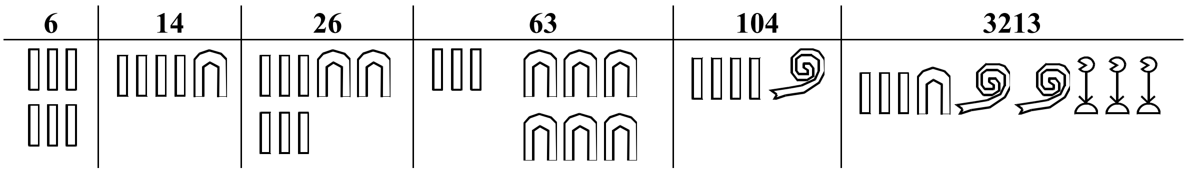
Première différence notoire : la base, puisque comme la majorité des civilisations, les Égyptiens optèrent pour la base 10. Aussi, les pictogrammes utilisés étaient fort différents de ceux des Sumériens. Par contre, il s'agit aussi d'une numération additive, mais cette fois-ci de la première espèce. Ainsi, on « attribue un chiffre spécial à l'unité et à chaque puissance de dix et on procède par répétition de ces signes pour la notation des autres nombres » (Ifrah, 1994a, p. 782). Nul besoin de base intermédiaire puisque la base 10 est plus commode que la base 60 des Sumériens (sauf pour ce qui est des fractions). Voici les principaux symboles égyptiens.

**Figure 7** Quelques symboles égyptiens



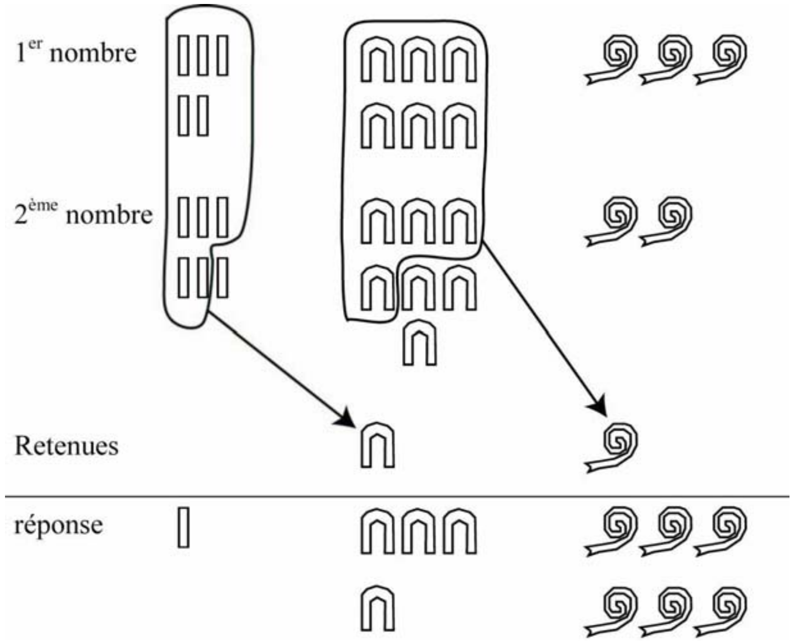
L'écriture des nombres égyptiens a aussi évolué dans le temps. On sait que les scribes ont inventé une notation rapide dite « hiératique » pour consigner les comptes, les recensements, les inventaires, etc. On gardait les minutieux dessins des hiéroglyphes pour la décoration des tombes, des monuments funéraires ou des palais. C'est de ces dessins dont il est question dans le présent travail. Notons que les scribes écrivaient habituellement les nombres de droite à gauche. Voici donc quelques exemples de nombres égyptiens :

**Figure 8** Des exemples de nombres égyptiens




Pour effectuer les additions et les soustractions, le procédé était plutôt simple. On représentait chacun des nombres à additionner ou à soustraire en plaçant vis-à-vis les symboles de chaque puissance de dix ensemble. On additionnait ou soustrayait ensuite les barres verticales des unités en faisant des retenues et des emprunts lorsque nécessaire, on continuait avec les jougs des dizaines, puis les cordes des centaines et ainsi de suite. À la figure 9, on retrouve un exemple d'addition égyptienne (365 + 276). Pour un exemple de soustraction égyptienne, veuillez vous référer à l'annexe 6.

**Figure 9** Une addition égyptienne




Pour les multiplications, le procédé était différent. Il peut sembler complexe à première vue, mais il reste relativement simple et peut être réalisé sans recourir aux tables de multiplication. Il suffit de savoir doubler (ou additionner deux fois le même nombre). Ifrah (1994a, p. 425), tout comme Ross et Charbonneau (2002), donne un exemple de multiplication par duplications successives. Il utilise les chiffres indo-arabes, mais il faut imaginer qu'à l'époque, les Égyptiens procédaient avec leurs chiffres hiéroglyphiques. Donc, pour effectuer 84 x 15, les Égyptiens faisaient deux colonnes.

Dans la colonne de gauche, ils écrivaient toujours 1 et le multiplicateur dans la colonne de droite (15 dans ce cas). Ensuite, ils doublaient successivement ces deux nombres. Ils s'arrêtaient normalement lorsque le nombre de gauche atteignait le multiplicande (soit 84), mais on remarque qu'en doublant le nombre 64, on obtiendrait 128, un nombre trop élevé. Ils s'arrêtaient donc à 64 et cherchaient dans cette première colonne, les nombres dont la somme était égale à 84. Ils marquaient d'un petit trait ces nombres (64 + 16 + 4 = 84) et marquaient d'une barre oblique les nombres correspondants de la colonne de droite. Ils n'avaient ensuite qu'à additionner les nombres cochés de la colonne de droite (960 + 240 + 60 = 1260) pour arriver à la réponse.

**Figure 10** Une multiplication égyptienne (84 x 15)

| | |
|---|---|
| 1 | 15 |
| 2 | 30 |
| - 4 | 60/ |
| 8 | 120 |
| - 16 | 240/ |
| 32 | 480 |
| - 64 | 960/ |

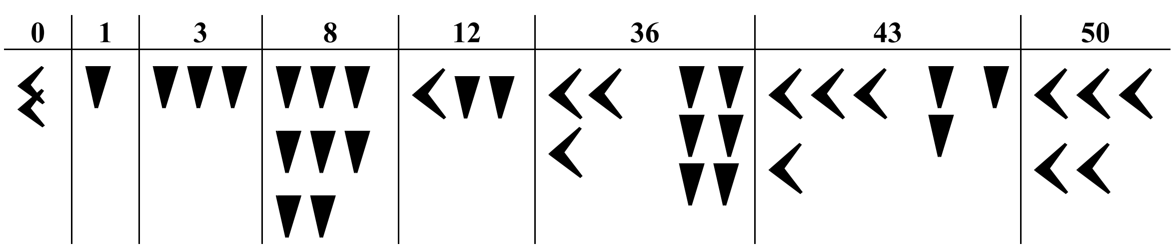
Pour la division, il s'agit du même principe de duplications successives, mais en sens inverse. À l'annexe 7, le lecteur trouvera le feuillet explicatif remis aux élèves lors des activités sur ces opérations.

#### Le système de numération des Babyloniens

Une numération babylonienne écrite, plus abstraite et supérieure fait son apparition dans la première moitié du II^e^ millénaire avant notre ère, soit vers les années 1 800 av. J.-C. Après les Sumériens, les Babyloniens occupent la Mésopotamie (aujourd'hui l'Irak) et ce, jusqu'à l'est de la Syrie.

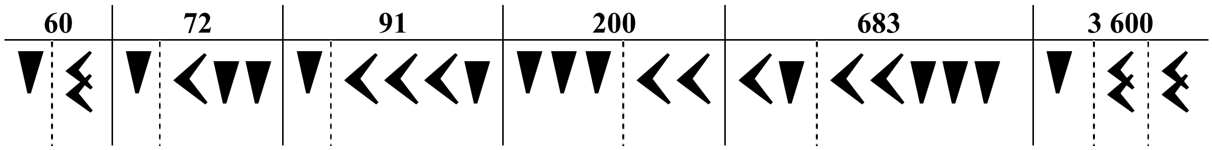
Il s'agit du premier système de type positionnel fondé sur le principe « selon lequel les chiffres employés ont une valeur variable qui dépend de la position qu'ils occupent dans l'écriture des nombres » (Ifrah, 1994a, p. 339). Seulement quatre groupes ont inventé cette numération avancée dans l'histoire, soit les savants babyloniens, les savants chinois, les prêtres astronomes mayas et les Indiens qui ont créé notre système de numération moderne. Le système babylonien est une numération positionnelle de la première espèce ayant une base sexagésimale (60) et seulement trois signes pour la notation : le zéro , l'unité et la dizaine ici aussi employée pour alléger l'écriture des nombres. Aux figures 11 et 12 se trouvent des exemples de nombres babyloniens.

**Figure 11** Des exemples de nombres babyloniens (plus petits que 60)




Pour ces nombres de 0 à 59, on pourrait penser qu'il s'agit d'une numération additive, comme celle des Égyptiens, mais c'est en observant les nombres supérieurs à la base que l'on constate le système positionnel. Ainsi, les Babyloniens représentaient leurs nombres de cette façon :

**Figure 12** Des exemples de nombres babyloniens (plus grands que 60)



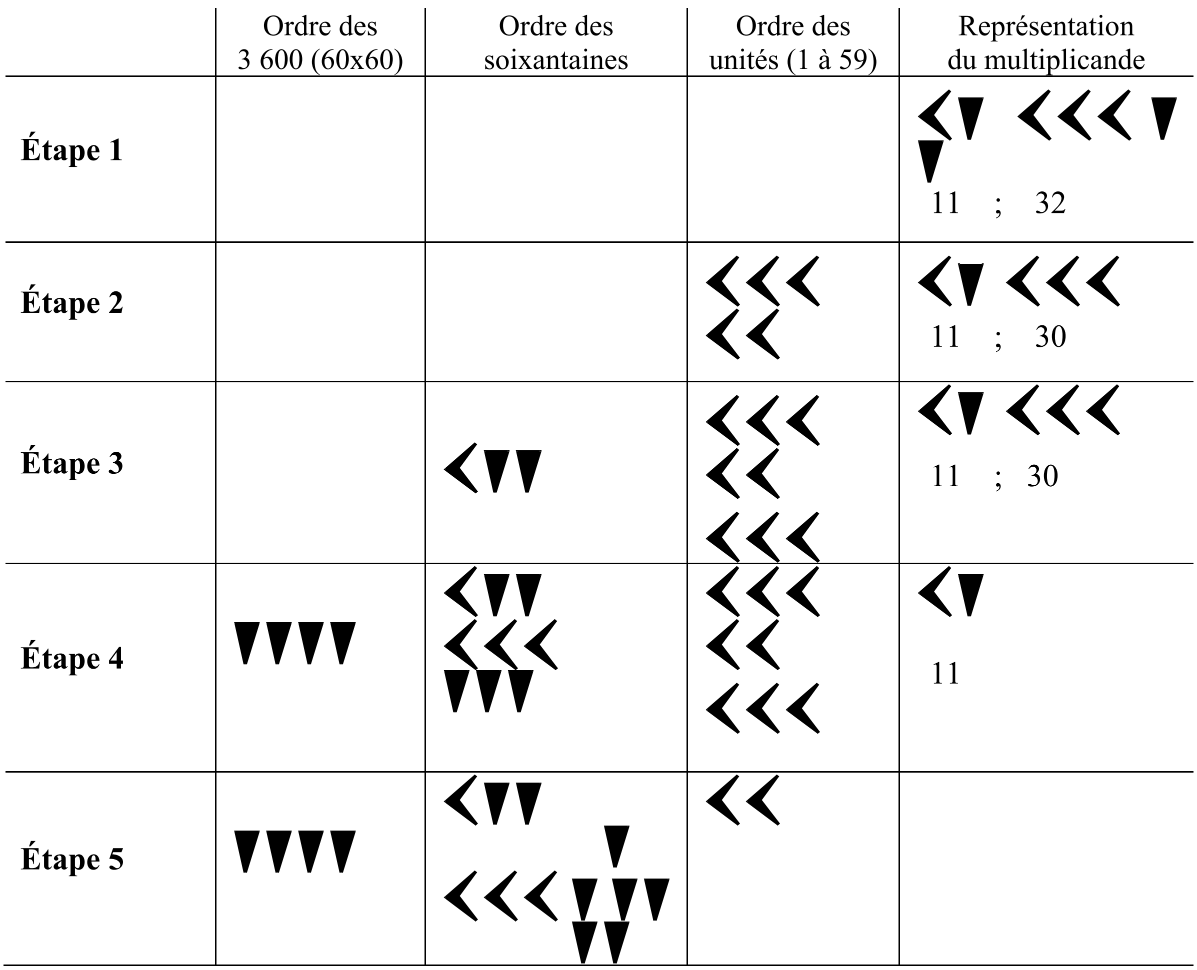

Cette première numération positionnelle a obligé la création d'un concept nouveau : le zéro. Il semble qu'il soit apparu tardivement dans l'histoire des Babyloniens, soit à partir du III$^{e}$ siècle av. J.-C. Par contre, ce zéro n'avait pas la même signification que notre zéro actuel. En effet, il n'était pas un nombre, mais représentait le vide « ou plutôt, la place du vide à l'intérieur d'une représentation chiffrée, mais il ne paraît pas avoir été pensé dans le sens de « rien » (celui de 10 – 10 par exemple) » (Ifrah, 1994a, p. 336) .

Aucune archive archéologique ne fournit une description précise des méthodes de calcul des Babyloniens. Par contre, Ifrah présume qu'ils utilisaient l'abaque hérité des Sumériens, mais qu'ils ont su l'adapter à leurs besoins. Pour les additions et les soustractions, les Babyloniens ont sûrement procédé de la même façon que les Sumériens (nous ne trouvons aucune trace ou exemple d'additions ou de soustractions effectuées par les Babyloniens dans la littérature consultée).

Par contre, pour effectuer les multiplications, de nombreux textes mathématiques de l'époque révèlent l'utilisation de tables de multiplication gravées que les scribes se transmettaient de génération en génération. La base sexagésimale élevée aurait trop chargé la mémoire (imaginez apprendre par cœur des tables de multiplication jusqu'à 59 x 59). À la figure 13, on voit les étapes pour réaliser une multiplication babylonienne (692 x 25, exemple tiré d'Ifrah, 1994a p. 369) que les scribes faisaient sur un pain d'argile molle.

Notons d'abord que 692 devient (11;32), c'est-à-dire (11 x 60 + 32 x 1). On vient placer la représentation du multiplicande à l'extrême droite du tableau (étape 1). Ensuite, le scribe cherchait dans sa table de multiplication par 25 le correspondant de 2, soit 50, qu'il venait inscrire dans la colonne des unités -parce que ce nombre ne dépasse pas 60- (étape 2). Il pouvait ensuite effacer le 2 du multiplicande et chercher le correspondant de 30 dans sa table de multiplication soit 750 pour nous, mais 12:30 en base 60 (12 x 60 + 30). Il venait inscrire 30 dans la colonne des unités et 12 dans la colonne des soixantaines (étape 3). Puis, le scribe pouvait effacer le 30 du multiplicande et chercher dans sa table de multiplication de 25, le correspondant de 11, soit 275 pour nous ou plutôt, 4 : 35 (4 x 60 + 35) qu'il reproduisait en mettant 35 dans la colonne des soixantaines et 4 dans la colonne des 3 600 -puisque le 11 que nous multiplions est dans le deuxième ordre, il vaut 11 x 60-. (étape 4). Finalement, il effaçait le 11 dans la colonne du multiplicande et effectuait les transferts nécessaires pour ne pas dépasser la base 60 dans chaque colonne (étape 5). Le lecteur trouvera une explication détaillée de la multiplication babylonienne dans le feuillet explicatif pour les élèves à l'annexe 7.

**Figure 13** Multiplication babylonienne




Représentation du résultat.

Pour les divisions, les Babyloniens procédaient indirectement grâce aux tables d'inverses : « pour diviser un nombre par un autre, il suffisait de le multiplier par son inverse » (Ifrah, 1994a, p. 371). Poirier précise qu'« Ils ont développé des tables de division qui leur permettaient de multiplier le dividende par la réciproque du diviseur » (Poirier, 2001, p. 77). À cet effet, la base soixante est riche puisqu'elle possède de nombreux diviseurs. Comme cette méthode est plutôt complexe pour des élèves du primaire, nous ne l'abordons pas dans notre recherche.

**Le système de numération des Chinois**

Vers 1450 avant notre ère, la numération chinoise archaïque fait son apparition en Chine. Elle évoluera vers un système positionnel dit « savant », mais dans le cadre de ce travail, nous nous attarderons au système archaïque. Il s'agit d'un système en base 10 qui comprend treize signes différents : les neuf unités et les quatre premières puissances de dix (à la figure 14).

**Figure 14** Les symboles chinois

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 100 | 1 000 | 10 000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 | 九 | 十 | 百 | 千 | 萬 |

Il s'agit d'une numération de type hybride « puisque les dizaines, les centaines, les milliers et les dizaines de mille s'expriment suivant le principe multiplicatif » (Ifrah, 1994a, p. 624). Pour tous les autres nombres, les Chinois procèdent par addition et multiplication en décomposant les nombres. Ainsi, comme à la figure 15, pour représenter le nombre 8 642 ou 8 020, les Chinois écrivent encore aujourd'hui :

**Figure 15** Exemples de nombres chinois

八 千 六 百 四 十 二

(8 × 1 000) + (6 × 100) + (4 × 10) + 2

八 千 二 十

(8 × 1 000) + (2 × 10)

Notons qu'il y a une adéquation parfaite entre la numération écrite et orale chinoise. En effet, pour dire le nombre 20, les Chinois disent 2-10, exactement comme ils l'écrivent. Nous verrons plus loin que notre système de numération écrit actuel est positionnel, mais que notre numération orale est en grande partie hybride puisque nous disons dix-sept ou quatre-cents par exemple. Un système de type hybride n'a pas besoin de zéro. S'il y a absence d'une puissance de dix, on n'en fait tout simplement pas mention. Il existe plusieurs graphies différentes pour représenter les nombres chinois, un peu comme notre écriture qui peut être tantôt cursive, tantôt scripte ou en caractère d'imprimerie. Celle retenue ici est la plus couramment utilisée (encore aujourd'hui) et elle est qualifiée de « classique ». Aussi, à partir du VIII^e^ siècle de notre ère, les savants chinois ont introduit le zéro à leur système devenu positionnel, mais nous ne nous attarderons pas sur ce système.

Pour ce qui est des opérations, le fameux boulier-compteur est encore très utilisé en Extrême-Orient. Sa création est assez récente puisqu'elle remonte au XIV^e^ siècle de notre ère. Le boulier chinois, tel qu'on le trouve à la figure 16, possède un cadre rectangulaire en bois et est composé d'un certain nombre de broches verticales sur lesquelles on retrouve sept billes de bois mobiles que l'on peut approcher d'une bande transversale qui divise le cadre en deux. On retrouve toujours cinq billes sous la barre et deux au-dessus. Chaque tige représente une puissance de dix et les deux premières (situées à droite) sont généralement réservées aux fractions (dixièmes et centièmes).

**Figure 16** Un boulier chinois

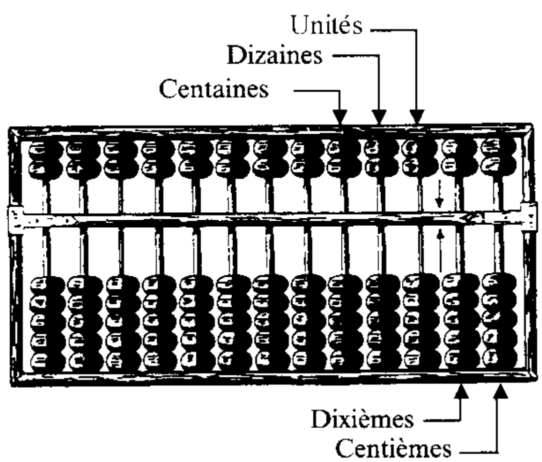
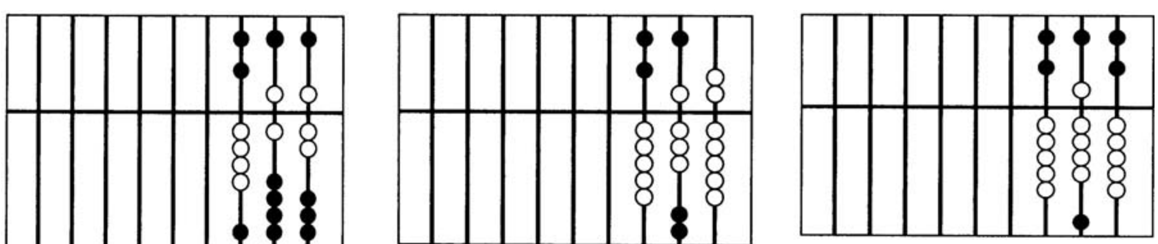



Figure tirée de Ifrah (1994a, p. 680)

Par contre, pour faciliter les explications qui vont suivre, nous placerons les unités dans la tige à l'extrême droite. Ainsi, sur une tige, chaque bille de la partie inférieure a une valeur d'unité de son ordre tandis que chaque bille de la partie supérieure vaut cinq unités. Il suffit d'approcher de la barre transversale le nombre de billes nécessaires pour représenter un nombre.

Pour effectuer les additions, le procédé est fort simple. En effet, à la figure 17, on trouve un exemple d'addition chinoise sur le boulier. Pour additionner 467 + 128, il suffit d'abord de représenter le premier nombre. Sur la tige à droite (les unités), on abaisse une boule du haut (qui vaut cinq) et on lève deux boules du bas. Puis, sur la deuxième tige à partir de la droite, on abaisse aussi une boule qui vaut cinq et on lève une boule. Puis, sur la troisième tige, on déplace vers le haut quatre boules. Voici donc le nombre 467 (étape 1). Puis on vient ajouter le deuxième nombre au premier. Sur la tige des centaines, on retrouve déjà quatre billes, on lève une boule supplémentaire et on arrive à cinq centaines. Sur la tige des dizaines, on procède de la même manière, à la boule de la partie inférieure (bas), on ajoute les deux dizaines du nombre 128 et on obtient donc huit dizaines (6 + 2). Pour les unités, on vient abaisser une boule du haut (qui vaut cinq) et on lève 2 boules du bas (étape 2). Ensuite, on doit faire les réductions nécessaires à chaque fois qu'une tige excède 10. Sur la tige des unités, on relève les deux billes du haut (qui valent 10) pour les remplacer par une bille du bas sur la tige des dizaines. On obtient donc neuf dizaines. La réponse de l'addition est donc 595 (étape 3). Notons que dans un souci d'efficacité et de rapidité, les Chinois (et les Japonais sur leur soroban) font leurs opérations en bougeant le moins de boules possible. Ainsi, ils utilisent souvent les compléments à 10 et à 5 (pour ajouter 7, par exemple, ils ajoutent 10 et enlèvent 3).

**Figure 17** Une addition chinoise

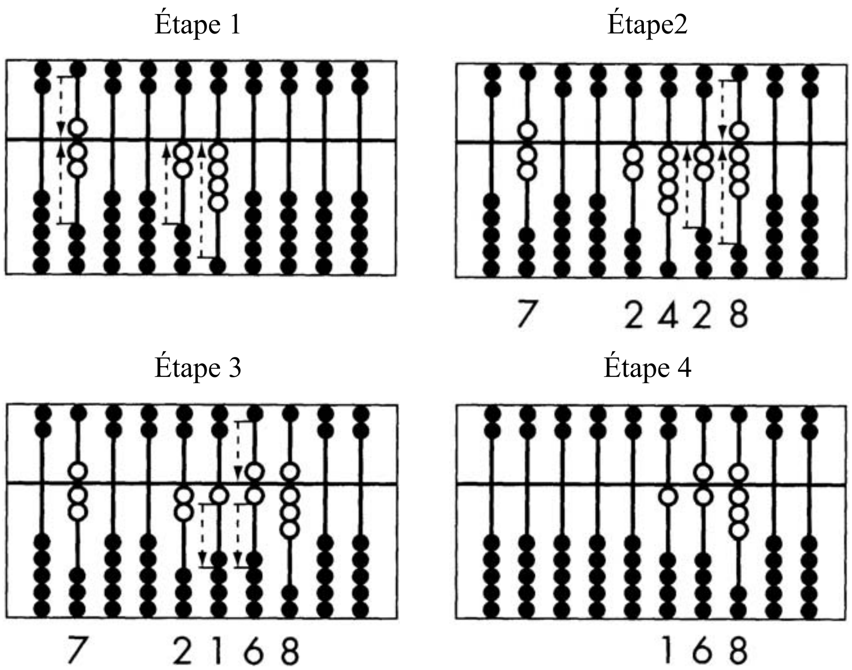


étape 1 étape 2 étape 3

Pour les soustractions, le principe est le même, mais à l'inverse. On représente d'abord le premier nombre. Puis, on vient enlever le nombre de billes du deuxième nombre. Bien sûr, il faut parfois recourir aux « emprunts » à la tige de gauche lorsqu'on doit enlever plus de billes qu'il n'y en a sur une tige. Pour un exemple, le lecteur peut consulter l'annexe 6.

Pour effectuer une multiplication, Ifrah nous explique qu'on doit répéter « l'addition du multiplicande autant de fois que le multiplicateur comporte d'unités dans chaque ordre décimal » (1994a, p. 685). Aussi, il décrit la technique pour effectuer 24 x 7 sur le boulier chinois que l'on reproduit à la figure 18. On représente d'abord le multiplicateur (7) sur la tige de gauche du boulier et le multiplicande (24), trois tiges plus à droite (étape 1). On commence par multiplier mentalement les unités, soit 4 x 7 et on vient placer le résultat (28) sur les tiges des dizaines et des unités (étape 2). On enlève ensuite le 4 du multiplicande. Cette partie de l'opération étant terminée, on trouve ensuite mentalement le résultat de 7 x 2. On place la réponse (14) sur les tiges des dizaines et des centaines puisque le 2 avait une valeur de 20 (étape 3). On peut maintenant enlever le 2 du multiplicande et le multiplicateur puisque l'opération est terminée. On peut ainsi lire la réponse, soit 168, qu'on aurait pu aussi représenter à l'extrême droite puisque nous ne nous préoccupons pas des décimales (étape 4).

**Figure 18** Une multiplication chinoise




Bien qu'Ifrah précise que pour les divisions, on retranche « le diviseur du dividende un nombre de fois aussi élevé que possible, ce nombre fournissant alors le quotient recherché » (1994a, p. 685), on ne retrouve aucun exemple détaillé de division sur un boulier dans la littérature consultée.

**Le système de numération des Romains**

Bien qu'apparus aux alentours de l'an 100 av. J.-C., les chiffres romains représentés par des lettres (I, V, X…) seraient nés bien avant la civilisation romaine. Ainsi, Ifrah explique que plusieurs siècles avant Jules César, les Étrusques (qui dominaient l'Italie à l'époque) :

> « […] ont en effet inventé des signes de numération d'une graphie et d'une structure identiques à celles des chiffres romains archaïques. L'unité fut représentée par un trait vertical, le nombre 5 par un angle aigu de sommet dirigé vers le haut, la dizaine par une croix ou une sorte d'« X » […] » (1994a, p. 460).

Ces signes découleraient directement de la pratique préhistorique de l'entaille qui consiste à faire des encoches sur un os ou un bâton de bois.

Tout comme la numération sumérienne, il s'agit d'une numération additive de la deuxième espèce, mais cette fois, « fondée sur une base décimale, celle-ci met à contribution le principe d'addition en donnant un chiffre particulier à chacun des nombres 1, 10, 100, 1 000, etc., ainsi qu'à chacun des suivants : 5, 50, 500, 5 000, et ainsi de suite » (Ifrah, 1994a, p. 783). La figure 19 présente les chiffres romains et leur valeur, chiffres encore utilisés aujourd'hui pour numéroter les siècles et les chapitres d'un livre notamment.

**Figure 19** Les chiffres romains

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| I | V | X | L | C | D | M |
| 1 | 5 | 10 | 50 | 100 | 500 | 1 000 |

Il s'agit donc d'un système additif puisqu'on procède par répétition pour représenter les autres nombres. Par exemple : 278 s'écrivait CCLXXVIII, soit 100 + 100 + 50 + 10 + 10 + 5 + 1 + 1 + 1. Cependant, après un certain temps, pour raccourcir certaines annotations, Ifrah précise que :

> « Les Romains compliquèrent cependant leur système en y introduisant la règle selon laquelle tout signe numérique placé à gauche d'un chiffre de valeur supérieure s'en retranche. Et c'est ainsi que les nombres 4, 9, 19, 40, 90, 400 et 900 par exemple, furent bien souvent représentés sous les formes que voici :

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | IV | (= 5 – 1) | au lieu de IIII |
| 9 | IX | (= 10 – 1) | au lieu de VIIII |
| 19 | XIX | (= 10 + 10 – 1) | au lieu de XVIIII |
| 40 | XL | (= 50 – 10) | au lieu de XXXX |
| 90 | XC | (= 100 – 10) | au lieu de LXXXX |
| 400 | CD | (= 500 – 100) | au lieu de CCCC |
| 900 | CM | (=1000 – 100) | au lieu de DCCCC » |

(Ifrah, 1994a, p. 455).

À l'instar d'Ifrah (1994a), Ross et Charbonneau (2002) relèvent le désavantage commun à tous les systèmes additifs : la longueur du nombre n'a pas de lien avec sa valeur. Ce dernier donne en exemple le nombre 1999 qui s'écrit MCMXCIX, tandis que 2000 (plus grand) s'écrit MM. Les chiffres romains ne sont que des symboles destinés à représenter et à retenir les nombres, mais ne permettent pas d'effectuer des opérations arithmétiques. Vous pouvez toujours tenter l'expérience! C'est pourquoi les comptables romains ont dû utiliser des abaques à jetons pour effectuer leurs opérations. Plusieurs types d'abaques ont existé, mais le principe était toujours le même; chaque colonne représentait une puissance de dix et de droite à gauche, on retrouvait donc : les unités (I), les dizaines (X), les centaines (C), les unités de mille (M), etc. Vous trouvez un exemple à la figure 20.

**Figure 20** Un abaque romain

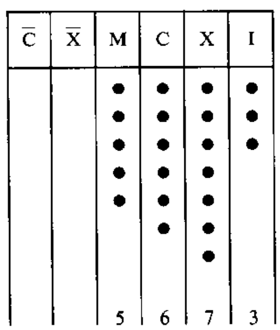



Figure tirée de Ifrah (1994a, p. 492)

Ensuite, pour simplifier l'utilisation de l'abaque, on subdivisa chaque colonne en deux et comme pour le boulier chinois, chaque jeton du bas valait une unité de l'ordre correspondant, tandis que les jetons du haut en valaient 5. La figure 21 présente un abaque romain « de poche » au début de l'ère chrétienne.

**Figure 21** Un abaque romain de poche

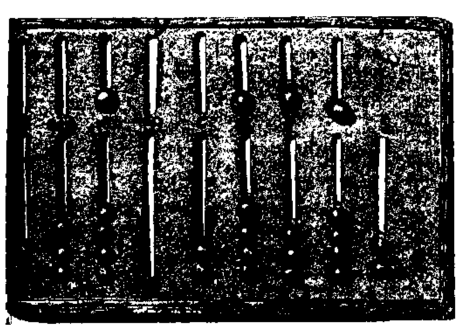
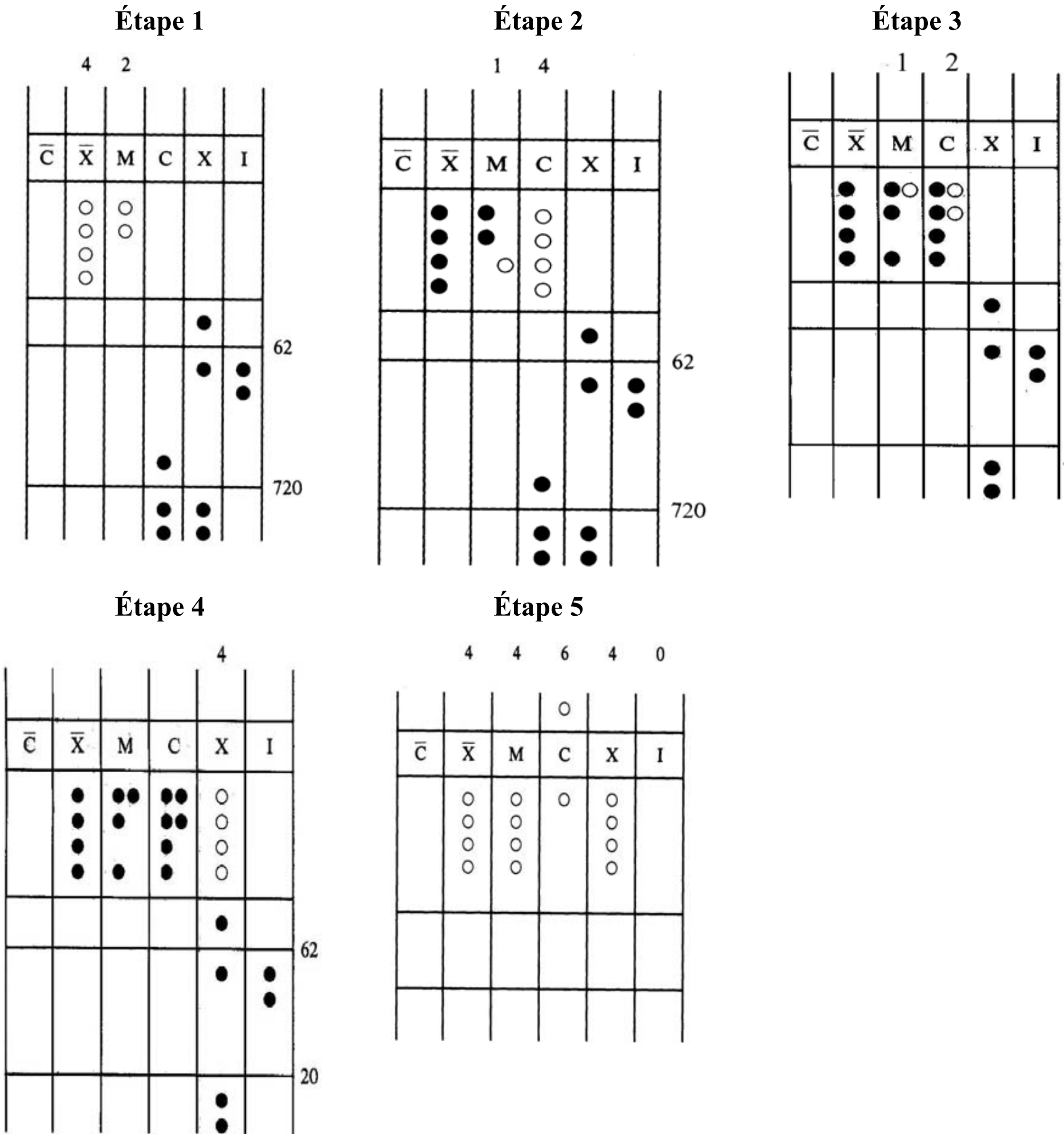


Figure tirée de Ifrah (1994a, p. 507)

Nous ne nous attardons pas ici sur les additions et les soustractions sur l'abaque romain puisqu'elles s'effectuaient exactement comme sur le boulier chinois (voir annexe 6). La seule différence étant que les billes n'étaient pas fixes. Pour ce qui est des multiplications, les Romains utilisaient un abaque à jetons qui était en fait une table sur laquelle il y avait des lignes parallèles pour former des colonnes représentant les différents ordres (unités, dizaines, centaines…). La figure 22 présente un exemple de multiplication (720 x 62) sur l'abaque à jetons tiré de *l'Histoire universelle des chiffres* de Ifrah.

On commence par représenter le multiplicande (720) et le multiplicateur (62) –en noir à l'étape 1–. Ensuite, on multiplie le 7 du multiplicande (qui vaut 700) par le 6 du multiplicateur (qui vaut 60). Le résultat est 42, mais il vaut 42 000 (une astuce : comme il y a deux zéros à 700 et un zéro à 60, on ajoute ces trois zéros à 42). On place donc deux jetons dans la colonne des unités de mille et quatre jetons dans la colonne des dizaines de mille -en blanc à l'étape 1-. Puis, on multiplie le 7 du multiplicande (qui vaut toujours 700) par le 2 du multiplicateur (qui vaut 2 unités) et on place le résultat, 14 ou plutôt 1 400 dans les colonnes appropriées –en blanc à l'étape 2–. On peut maintenant effacer le 7 du multiplicande et multiplier le 2 de 720 (qui vaut 20) par le 6 du multiplicateur (qui vaut toujours 60). On obtient 12 ou 1 200 que l'on vient placer en posant deux jetons dans la colonne des centaines et un dans la colonne des unités de mille –en blanc à l'étape 3–. Finalement, on multiplie encore le 2 du multiplicande (qui vaut toujours 20) par le 2 du multiplicateur (qui vaut deux unités), on obtient donc 4 ou 40 –en blanc à l'étape 4–. Il reste ensuite à faire les transferts pour ne pas avoir plus de neuf jetons dans chaque colonne et on obtient le résultat : 44 640 (étape 5).

**Figure 22** Une multiplication romaine



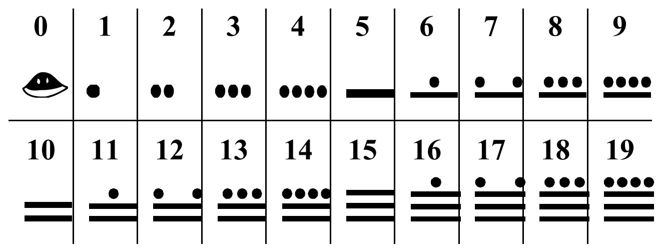

Il est possible de faire des divisions sur l'abaque romain, mais le procédé est plutôt complexe.

#### Le système de numération des Mayas

La civilisation maya est de loin la plus prestigieuse des cultures précolombiennes d'Amérique Centrale. Ifrah (1994a) compare même son influence sur les autres civilisations, celle des Aztèques du moins, à celle des Grecs durant l'Antiquité. C'est entre l'an 300 et 800 de notre ère que sont apparus les plus anciens exemples connus de l'emploi d'un système d'expression des dates et des durées utilisé par les astronomes mayas.

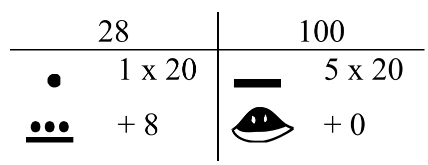
Ces astronomes inventèrent un système positionnel en base 20, ayant le 5 comme base intermédiaire puisque seulement deux signes existaient : le point pour l'unité et la barre horizontale pour le 5. Un système positionnel exige évidemment l'utilisation du zéro pour représenter le vide puisque les chiffres ont une valeur déterminée par leur position dans le nombre. C'est ce qu'ont inventé les astronomes mayas. Comme on peut le constater à la figure 23, pour les nombres de 1 à 19, on pourrait penser qu'il s'agit d'un système additif puisque pour représenter un nombre, on doit répéter le nombre de points et de barres nécessaires.

**Figure 23** Les nombres mayas (plus petits que 20)




Pour les nombres supérieurs à 20, on les écrivait en étage avec le même nombre d'étages qu'il y avait de puissances de 20. À la figure 24, on montre comment les Mayas écrivaient 28 et 100.

**Figure 24** Exemples de nombres mayas (plus grands que 20)




Nous pourrions continuer ainsi jusqu'au troisième ordre qui logiquement, devrait être 400 (puisque 20 x 20 = 400). Cependant, une irrégularité établit cet ordre à 360, qui s'explique par la volonté des Mayas de refléter le nombre de jours dans une année (ces inventeurs du calendrier). Notons que cet ordre à 360 permet une plus grande divisibilité (par 3 et par 12) que le 400 n'offre pas, mais elle rend toutes les opérations au-delà de ce nombre impossibles. C'est dommage puisque le zéro inventé par les Mayas a été privé de bien des possibilités opératoires.

Bien que Ross et Charbonneau (2002) proposent une façon d'additionner et de soustraire à la manière des Mayas, nous croyons qu'il s'agit d'une supposition puisque les fouilles archéologiques n'ont pas permis de telles découvertes. Ces auteurs précisent d'ailleurs que :

> « Le système de numération maya était à la portée de tous les membres de la société, même les analphabètes. Sur la place du marché, des bâtons et des petits cailloux ou des petits os et des fèves pouvaient être utilisés pour représenter les nombres et effectuer les opérations » (2002, p. 55).

**Le système de numération indo-arabe**

Nous avons longtemps appelé nos chiffres actuels les chiffres arabes, mais ce n'est pas rendre justice à leurs créateurs : les Indiens. Apparus en Inde entre l'an 300 et 500 après Jésus-Christ, ce sont les commerçants arabes qui ont apporté ce système en Europe bien plus tard. Sur ce système maintenant utilisé de façon universelle, Ifrah précise :

> « […] il nous faut d'abord mesurer l'importance de ce système de numération écrite dont l'usage est devenu aujourd'hui si fréquent, si familier, que nous avons fini par en oublier la profondeur et les véritables mérites » (1994a, p. 758).

L'auteur rappelle les principales étapes de l'évolution de la numération. L'humanité est passée de systèmes additifs (sumérien, égyptien et plus tard, romain) qui exigeaient la répétition fastidieuse de signes identiques à des systèmes hybrides (chinois), plus efficaces. C'est finalement la découverte du principe de position qui a permis un pas décisif (systèmes babylonien, chinois avancé, maya), mais il aura fallu attendre l'élaboration d'une notation dynamique avec des chiffres significatifs distincts pour chaque unité et une découverte fondamentale : le zéro. Les Babyloniens et les Mayas avaient déjà utilisé le zéro, mais il ne faisait que représenter le vide, il n'était pas conçu comme un nombre. Ifrah ajoute que :

> « […] l'humanité avait expérimenté les diverses solutions possibles au problème de la représentation et de la manipulation des nombres, avant de retenir celle qui devait apparaître finalement comme la plus abstraite, la plus perfectionnée et la plus efficace de toutes » (1994a, p. 759).

Rappelons ici les principales caractéristiques de notre système de numération telles qu'expliquées par Poirier (2001), à savoir le principe de groupement, d'échange et de position. Le principe de groupement réfère à la base. Notre système de numération est décimal, c'est-à-dire qu'il est en base 10. Lorsqu'il y a dix unités, nous pouvons les regrouper en une dizaine, lorsqu'il y a dix dizaines, nous pouvons les regrouper en une centaine et ainsi de suite. Nous avons vu que les systèmes développés par les diverses cultures qui nous ont précédés n'ont pas toujours été en base 10 ; certains systèmes étaient en base 20 (maya) ou 60 (sumérien, babylonien).

Le principe de groupement est intimement lié au principe d'échange qui permet d'échanger une dizaine contre dix unités ou l'inverse. Ce principe permet de faire des opérations, notamment des soustractions comme 83 – 6, où l'on doit aller « emprunter » une dizaine pour l'échanger contre dix unités pour ainsi pouvoir soustraire 6.

Enfin, le principe de position où la valeur positionnelle renvoie au principe voulant que selon sa place dans un nombre, un chiffre puisse avoir une valeur différente. Dans 777, le premier sept a une valeur de sept centaines ou 700, le deuxième, une valeur de sept dizaines ou 70 et le troisième, une valeur de sept unités. C'est ce qu'on entend par système positionnel. Nous avons vu que d'autres peuples dans l'histoire utilisaient un tel type de système (les Babyloniens, les Chinois après leur système hybride et les Mayas), mais pas tous. Comme le soulignent Ifrah (1994a), Cerquetti-Aberkane (2000) et Guedj (2004), notre système de numération est supérieur puisqu'il permet d'écrire tous les nombres avec un ensemble fini de chiffres (dans notre cas, 10 : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Il est aussi plus pratique pour effectuer les opérations et facilite la comparaison de nombres, uniquement en tenant compte de la longueur de leur écriture.

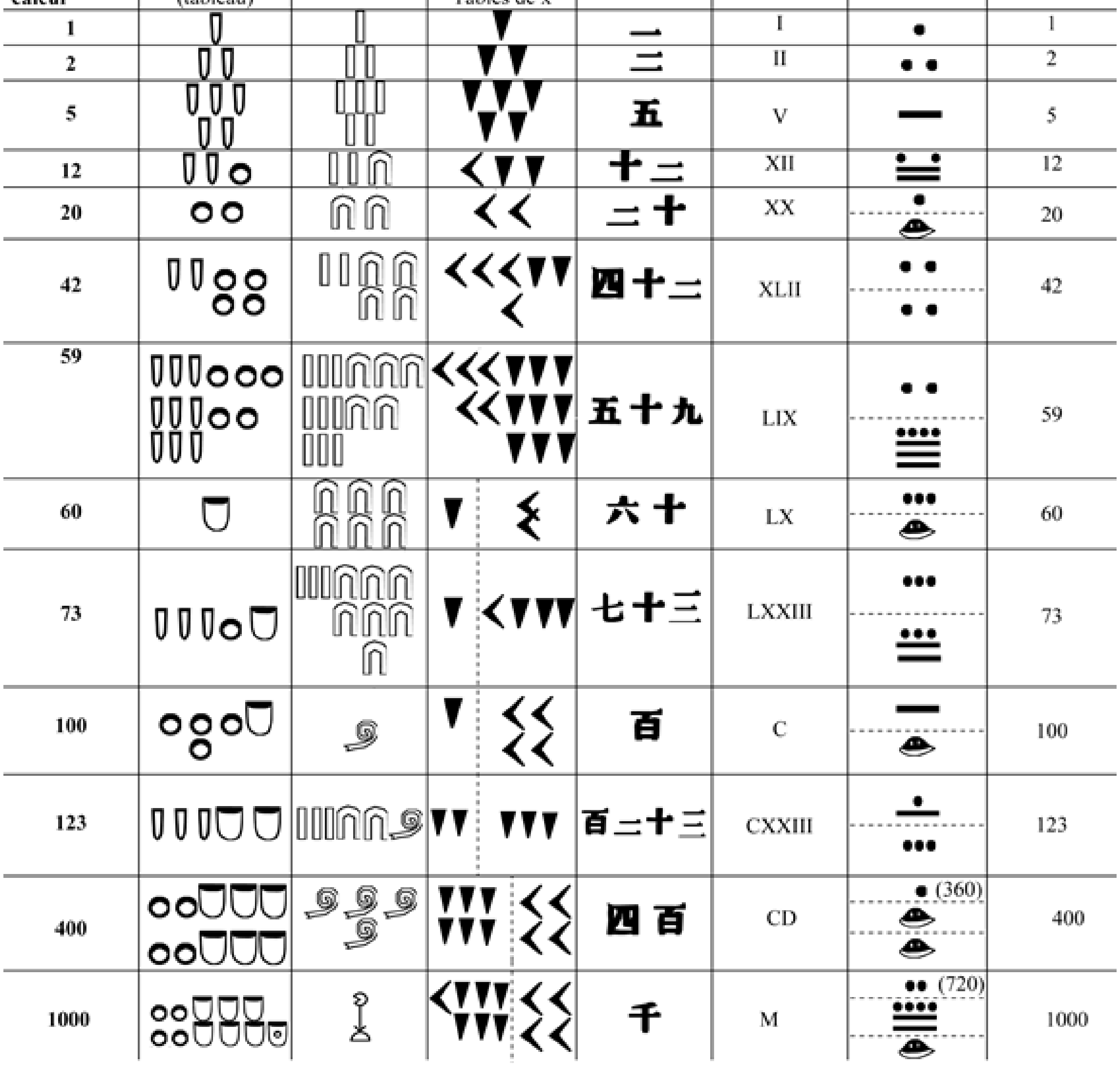
Pour sa part, De Blois (1996), dans un article consacré à la numération de position au primaire, précise que :

> « Nous appellerons donc numération de position à la fois, les règles d'organisation et la valeur sous-entendue par les symboles dans l'écriture des nombres. À ce titre, nous distinguons deux aspects au concept de numération de position : la *notation* positionnelle, appelée aussi aspect lexical (Perret, 1985) et la *valeur* positionnelle, appelée aussi aspect sémantique. Le premier aspect concerne les *relations* créées entre les différents éléments du code que sont les chiffres (Fuson, 1992, Bergeron, Herscovics et Bergeron, 1996). Le second concerne le *sens* représenté par les symboles et par leur organisation : position, base, opérations (Ross, 1989) » (De Blois, 1996, p. 76).

Au tableau 1, le lecteur trouvera un tableau récapitulatif des systèmes de numération abordés dans cette recherche. Ce tableau permet une vue d'ensemble des systèmes à l'étude, notamment avec leur date approximative d'apparition, le lieu où il a été découvert et employé, la base, la base intermédiaire, le type de système (additif, positionnel ou hybride), s'il a besoin d'un zéro et/ou d'un instrument de calcul et finalement, on retrouve les principaux symboles utilisés et la façon d'écrire certains nombres.

**Tableau 1** Un tableau récapitulatif des systèmes de numération à l'étude

| **Date d'app.** | 3300 av. J.C. | 3000 av. J.C. | 1800 av. J.C. | 1450 av. J.C. | 100 av. J.C. | 500 ap. J.C. | 500 ap. J.C. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Lieu** | Basse-Mésopotamie | Égypte (bord du Nil) | Mésopotamie (Irak) | Chine | Empire romain | Sud Mexique / Guatemala | Inde |
| **Base** | 60 | 10 | 60 | 10 | 10 | 20 | 10 |
| **Base auxil.** | 10 | - | 10 | - | 5 | 5 | - |
| **Type** | Additif | Additif | Positionnel | Hybride | Additif | Positionnel | Positionnel |
| **Zéro** | Non | Non | Oui | Non/Oui | Non | Oui | Oui |
| **Outil calcul** | Abaque (tableau) | - | Abaque (tab.) Tables de x | Boulier | Abaque | - | Pas besoin |
| **1** | | | | 一 | I | | 1 |
| **2** | | | | 二 | II | | 2 |
| **5** | | | | 五 | V | | 5 |
| **12** | | | | 十二 | XII | | 12 |
| **20** | | | | 二十 | XX | | 20 |
| **42** | | | | 四十二 | XLII | | 42 |
| **59** | | | | 五十九 | LIX | | 59 |
| **60** | | | | 六十 | LX | | 60 |
| **73** | | | | 七十三 | LXXIII | | 73 |
| **100** | | | | 百 | C | | 100 |
| **123** | | | | 百二十三 | CXXIII | | 123 |
| **400** | | | | 四百 | CD | (360) | 400 |
| **1000** | | | | 千 | M | (720) | 1000 |



La description du fonctionnement des différents systèmes de numération –sumérien, égyptien, babylonien, chinois, romain, maya et indo-arabe – nous a permis de mettre en évidence qu'ils sont moins complexes qu'ils ne le paraissent à première vue et qu'ils pourraient éventuellement être explorés au troisième cycle du primaire. En outre, pour chaque système, nous avons expliqué les manières d'effectuer les quatre opérations et décrit les outils de calcul utilisés à l'époque.

## L'enseignement de la numération et ses difficultés

Nous avons vu plus tôt la place centrale qu'occupe la numération dans l'enseignement des mathématiques au primaire. Quelles sont donc les difficultés que rencontrent les élèves ? Bednarz et Janvier (1984), dans un article phare sur la numération, font état des résultats de leur réflexion sur l'enseignement de la numération après un travail de cinq ans auprès d'élèves du primaire. Bien que l'étude ne soit pas récente, elle n'en demeure pas moins la plus complète dans le domaine et est fréquemment citée dans les recherches subséquentes québécoises, américaines et européennes. Les résultats étonnent et nous informent sur un grand éventail d'aspects. Les auteures relèvent les aspects qui caractérisaient et parfois caractérisent encore l'enseignement de la numération au Québec et pointent les erreurs et les difficultés liées à chacune de ces caractéristiques. Elles dégagent ensuite la conception, parfois erronée, de la numération véhiculée par un tel enseignement. Bien que l'étude date d'une vingtaine d'années et qu'elle a été réalisée auprès d'élèves du deuxième cycle, nous croyons que les difficultés rencontrées par ces élèves ont dû se poursuivre jusqu'au troisième cycle.

En effet, au troisième cycle, on tient souvent pour acquis que les élèves comprennent bien notre système positionnel décimal et maîtrisent la gestion des retenues et des emprunts dans les algorithmes. Cependant, nos élèves, bien que doués, ne sont pas à l'abri d'erreurs de compréhension de notre système de numération. Poisard (2005a; 2005b), dans sa thèse de doctorat et dans un article sur les objets mathématiques, remarque les mêmes difficultés en France et précise que : « En fin de primaire, la notion de numération positionnelle est souvent mal installée et constitue un obstacle concernant l'apprentissage des techniques opératoires » (Poisard, 2005b, p. 43). Nous complétons également ce portrait avec des données plus récentes provenant de France et des États-Unis. Nous décrivons ici les difficultés relevées par Bednarz et Janvier (1984) et verrons au prochain chapitre comment un travail sur la numération basé sur son développement historique peut contribuer à surmonter ces difficultés.

**L'ordre de l'écriture des nombres**

La première caractéristique relevée par Bednarz et Janvier (1984), énoncée comme suit : « Grande insistance mise sur le passage de l'écriture symbolique du nombre *chiffre, position* à la symbolisation *unités, dizaines, centaines*,… » (1984, p. 7), fait état des exercices qui consistent à lire et à écrire les nombres, à dire le nombre de dizaines ou de centaines de tel nombre, ou encore le chiffre à la position des unités ou des centaines pour faire comprendre la valeur de position. Malgré les nombreux exercices répertoriés dans les manuels scolaires de l'époque, les résultats étonnent : pour beaucoup d'enfants, « un nombre est une suite de chiffres », les mots *unité, dizaine, centaine* ne sont pas pris en considération ou sont associés à un découpage, un ordre dans l'écriture. En effet, seulement 27% des élèves de 3e année et 44% des élèves de 4e année accordent au symbolisme *centaine, dizaine, unité*:

> « […] une signification véritable en termes de groupements et l'utilisent pour reconstruire l'écriture conventionnelle. En fait ce symbolisme n'a pas pour l'enfant plus de signification que celui de l'écriture. Il reste une convention à apprendre, à mémoriser, un vocabulaire qui ne renvoie pas du tout à l'image d'un groupement » (1984, p. 10).

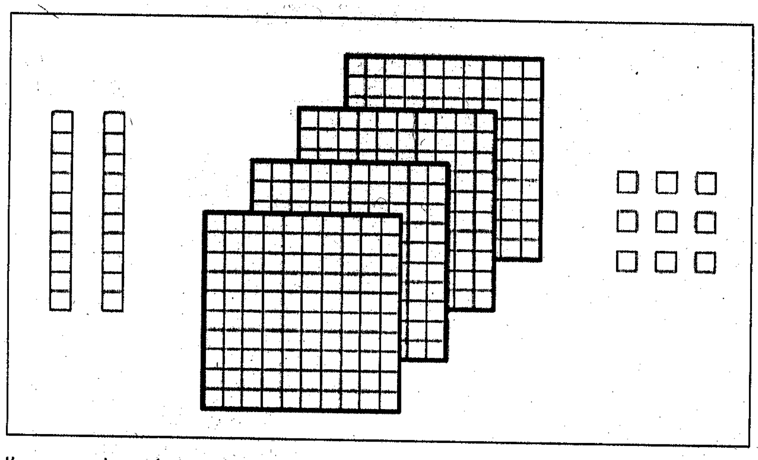
Il y a tout lieu de croire que cela se poursuit au troisième cycle et même au-delà. En effet, dans sa thèse, Poisard rapporte les résultats des tests nationaux français réalisés en juin 1999 dans les classes de CM2 (cinquième année). Elle relève que :

> « Les résultats sur la numération de position font ressortir que 2/3 des élèves de CM2 reconnaissent le chiffre des dizaines dans un nombre, pour le chiffre des centièmes, ils sont un peu plus de la moitié. […] Ce qui valide bien notre hypothèse, la compréhension de la numération positionnelle n'est que partielle à l'entrée de la 6$^{e}$ (sixième année ici aussi) (Poisard, 2005a, p. 108).

Aux États-Unis, les résultats des tests nationaux tendent à s'améliorer. Dans un article, Warfield et Kloosterman (2006) commentent les résultats des tests nationaux des élèves de quatrième année; nous nous concentrerons sur les questions portant sur « number sense, properties and operations » qui comptaient pour 40% des items du test. À la question posée à la figure 25, on apprend que 76% des élèves avaient obtenu la bonne réponse en 1996, 78% en 2000 et 83% en 2003. Bien qu'encourageants, ces résultats ne nous semblent pas si bons puisque les élèves pouvaient dénombrer les carrés ou encore, additionner la valeur de chaque item puisque celles-ci étaient données (10 + 10 + 100 + 100 + 100 + 100 + 9).

**Figure 25** Test national américain, 2003

**NAEP fourth-grade item from place-value strand**



**Each small square above is equal to 1. There are 10 small squares in each strip. There are 100 small squares in each large square. What number is shown?**

A) 4,029
B) 492
C) 429
D) 249

Les auteurs relèvent également (mais sans les chiffrer) des améliorations dans des items où on demandait de choisir le plus grand nombre parmi quatre nombres de quatre chiffres, de choisir un nombre qui avait 10 de plus qu'un autre nombre et d'écrire un nombre à trois chiffres selon des positions données.

Nous parlons ici des résultats des items concernant les opérations puisque nous verrons plus loin à quel point la numération et les opérations devraient être liées. Pour ce qui est des additions et des soustractions, les performances sont stables depuis 1990. En effet, 90% des élèves de quatrième année étaient capables d'additionner 238 et 462 (choix de réponses), mais seulement 75% des élèves pouvaient soustraire un nombre à un chiffre d'un nombre à deux chiffres ou un nombre à deux chiffres d'un nombre à trois chiffres et ce, malgré un choix de réponses! Pour ce qui est des multiplications et des divisions, 82% des élèves de quatrième année pouvaient multiplier et diviser des nombres à deux chiffres en 1990 et 1992, tandis que 86% réussissaient en 1996 et 2000. Rappelons que les élèves avaient un choix de réponses, leur permettant ainsi de reprendre leurs calculs si leur réponse ne figurait pas parmi les choix.

Aussi, lors d’une charge de cours en didactique de l’arithmétique que nous avons donnée, nous avons noté les mêmes lacunes chez plusieurs de nos étudiants en formation des maîtres. On ne parle pas ici de décrocheurs, mais d’étudiants qui se sont rendus à l’université!

La deuxième caractéristique décrite dans l’article de Bednarz et Janvier se lit : « Toute représentation d’un nombre apparaît selon un alignement reprenant l’ordre de l’écriture conventionnelle du nombre » (1984, p. 11). Ainsi, dans la plupart des manuels qui font référence à du matériel de manipulation (multi bases, bâtonnets, abaques et autres), les unités sont toujours à droite, les dizaines ensuite, puis les centaines, etc. Les auteures soulignent que :

> « […] cet alignement systématique dans les représentations du nombre n’a pas sa raison d’être […] Imposer prématurément une présentation ordonnée conduit nécessairement l’enfant à une représentation de l’écriture en termes de découpage, d’ordre, de position, et écarte toute signification véritable accordée à cette position en termes de groupements » (1984, p. 13).

**Le matériel de manipulation**

Dans la même veine, « Les images de matériel et même le matériel utilisé dans l’enseignement le sont essentiellement à des fins de passage à l’écriture » (1984, p. 14). Ainsi, Bednarz et Janvier (1984) ont observé qu’en classe, un effort est fait pour utiliser du matériel concret. Malheureusement, plutôt que d’être utilisé dans une démarche d’apprentissage de la numération, il ne sert souvent qu’à passer directement à l’écriture symbolique. Lorsqu’elles ont demandé à des élèves de soustraire 128 de 3152 sur l’abaque, la plupart des élèves (93%) pouvaient représenter le premier nombre sans problème. Par contre, plus de la moitié des élèves de 3e et 4e année accordaient la même valeur à tous les jetons.

> « Il n’est (donc) pas étonnant de voir que les enfants ne sont pas à même d’opérer concrètement sur ces groupements, puisque les interventions sur l’écriture n’ont jamais été associées à des actions effectives sur du matériel (ici, échange d’un jeton de la tige des dizaines contre dix jetons de la tige des unités) » (1984, p. 16).

De plus, les chercheures ont constaté que « la manipulation de matériel est essentiellement conçue en fonction d’un travail sur l’écriture » et que la manipulation est souvent présentée aux élèves au début d’une démarche pour les amener à constater quelque chose que l’enseignant a en tête. Dans leur étude, les enfants interrogés n’avaient pas tendance à manipuler le matériel mis à leur disposition. Pire, le travail sur l'écriture et le travail de manipulation sont si distincts chez les élèves que certains ne sont pas étonnés d'obtenir deux résultats différents pour un même problème puisque les moyens utilisés ne sont pas les mêmes. Piaget semble être du même avis. Il encourage évidemment la manipulation de matériel, mais il nous met en garde sur la façon de le faire. Il prend l'exemple des réglettes Cuisenaire, imposées par l'État de Genève et précise que :

> « Ce matériel peut donner lieu à la tentation de démonstrations faites devant l'enfant par l'adulte seul […] ce qui risque (et ce qui est renforcé par la présence de couleurs) de faire primer […] les aspects figuratifs (perception, imitation et images) sur les aspects opératifs (action et opérations) » (Piaget, 1969, p. 76).

En outre, Poisard (2005a) cite les travaux plus récents d'Uttal, Scudder et Deloache (1997) sur les objets concrets en mathématiques et rapporte que pour eux :

> « Ces objets concrets sont des symboles mathématiques, dans le sens où l'intention des professeurs est de travailler un concept ou un symbole écrit à l'aide d'un support concret. Pour les auteurs, la distinction ferme entre les formes abstraites et concrètes des expressions mathématiques n'est pas justifiée parce que justement, un enseignement en mathématiques avec un support matériel n'est efficace que s'il permet de faire des liens entre le support et d'autres formes d'expression mathématique. Mais, si les élèves ne font pas ce lien, il leur devient nécessaire d'apprendre deux systèmes séparés et l'enseignement est ainsi contre-productif » (Poisard, 2005a, p. 40).

Tout comme Bednarz et Janvier (1984), Poisard (2005a) et Piaget (1969), nous croyons que les enfants doivent manipuler eux-mêmes le matériel et ne pas seulement observer quelqu'un d'autre le faire. Nous croyons également qu'en demandant aux élèves de faire des opérations sur du matériel et d'expliquer leurs manipulations, ils devront faire des liens avec les algorithmes conventionnels et notre système de numération. Nous devrons donc avoir cette préoccupation en tête lors de l'élaboration de notre séquence.

Certains manuels datant de l'époque où Bednarz et Janvier (1984) ont réalisé leur étude préconisaient l'utilisation de « tout matériel approprié pour la numération » (1984, p. 17). Les auteures citent un manuel qui s'adresse aux petits du premier cycle et qui fait la promotion de l'abaque pour comprendre les nombres. À l'instar de Bednarz et Janvier (1984) et de Poirier (2001), nous ne croyons pas que l'abaque soit utile à des enfants de première année pour comprendre le passage aux dizaines puisque celui-ci est beaucoup trop abstrait pour eux. Notons toutefois que les avis divergent puisque des expériences positives d'utilisation de l'abaque au CP (première année) ont été recensées sur le site internet de la Télé Formation Mathématique TFM[5] et dans le récent livre de Cerquetti-Aberkane (2007). Ces activités s'inséraient dans une séquence didactique plus longue à partir du jeu du banquier et du principe d'échanges.

En effet, Poirier (2001) explique qu'il y a trois grands types de matériel de manipulation pour travailler la numération et qu'il faut faire des choix éclairés selon la notion étudiée et le niveau des élèves. On retrouve d'abord le matériel *aux groupements apparents et accessibles*, le plus concret et le plus facile pour les élèves du premier cycle. Ce matériel est facile à créer : des bâtonnets-unités, des paquets de 10 bâtonnets et des paquets de 10 paquets de bâtonnets par exemple. En manipulant ce type de matériel, les enfants peuvent voir concrètement les groupements et peuvent surtout défaire ces groupements (aller chercher des unités dans une dizaine par exemple).

Il existe aussi le matériel *aux groupements apparents, mais non accessibles*. Le matériel « blocs base 10 », aussi appelé « matériel multi bases » est un exemple de ce type de matériel. Les petits cubes représentent les unités, la barre est formée de 10 petits cubes, mais on ne peut la défaire et la plaque-centaine est formée de 10 barres que l'on peut voir, mais qu'on ne peut défaire. Avec ce matériel, les enfants voient les groupements et leur composition, mais on introduit le principe d'échange. On ne peut « casser » une dizaine, on doit donc l'échanger contre dix petits cubes. Ce matériel se rapproche du système de numération égyptien.

Finalement, le matériel *aux groupements symboliques* devrait être vu plus tard dans le cheminement scolaire des enfants puisque les groupements sont ni accessibles, ni apparents, mais purement symboliques. En effet, dans un abaque romain ou un boulier chinois, chaque ordre (unité, dizaine, centaine…) est représenté par des boules de la même grosseur et de la même couleur. On se rapproche ici de notre système de numération positionnel où c'est la place qu'occupe un chiffre (ou une boule) dans un nombre qui détermine sa valeur. Comme le suggèrent Poirier (2001) et Poisard (2005a; 2005b), l'abaque et le boulier sont tout à fait appropriés et utiles pour des élèves du troisième cycle. En effet, s'approprier les techniques d'addition, de soustraction ou de multiplication sur un

---

[5] http://www.uvp5.univ-paris5.fr/tfm/

abaque romain ou un boulier chinois permet de manipuler les nombres et surtout, les valeurs attribuées à chaque tige ou colonne du matériel.

Pour sa part, Poisard (2005a) fait une classification différente de ce qu'elle appelle les objets matériels. Après avoir demandé à vingt professeurs de mathématiques du secondaire et de l'université de nommer chacun cinq objets mathématiques, elle les a classés en trois catégories selon la raison de leur invention ou de leur utilisation. On trouve d'abord les objets créés pour un besoin social ou les *instruments scientifiques* qui sont des avancées techniques pour l'homme et ils ont été (ou sont encore) utilisés dans la vie de tous les jours ou par les savants et répondent aux besoins de faire des calculs et des mesures simples, efficaces et fiables. L'auteure précise que « Ils témoignent du savoir savant et permettent de développer une dimension historique et épistémologique de l'enseignement des mathématiques » (Poisard, 2005a, p. 42). Dans cette catégorie, on trouve les instruments à calculer : abaque, boulier, bâtons de Néper, règle à calcul, additionneuse, calculatrice mécanique, calculatrice électronique, ordinateur et les instruments à mesurer : le temps (cadran solaire, clepsydre, sablier, horloge, montre électronique), la masse (balances), la distance (cercle répétiteur, lunette astronomique, laser), la température, la pression et l'humidité. Elle place également dans cette catégorie les machines à tracer (pantographes et traceur de courbes). L'auteure affirme que ces instruments suivent une progression historique; pour les machines à calculer, l'homme est passé du calcul sur les doigts, aux jetons de l'abaque, au boulier chinois notamment.

Ensuite, elle met ensemble les objets résultant de recherches en mathématiques ou *des jeux mathématiques* (pavages, tangrams, rectangle de Lewis Carroll, ruban de Möbius, mystère de Pythagore, patrons, dés empilements, polyèdres, kaléidoscopes, miroirs).

Finalement, Poisard (2005a) regroupe les objets créés pour l'école ou le *matériel pédagogique.* On trouve pour le calcul : bande numérique, réglettes Cuisenaire, balance mathématique, boulier-compteur et en géométrie : triangles en plastique, équerre, rapporteur, compas d'école. L'auteure se demande : « Pourquoi utiliser des artifices quand l'histoire nous donne des objets pour apprendre à compter? Les réglettes Cuisenaire ont-elles un intérêt supplémentaire (au boulier notamment)? » (Poisard, 2005a, p. 43). Plus loin, elle distingue deux utilités au boulier chinois, elle distingue le boulier-instrument qui permet l'acquisition du calcul, du boulier-machine qui est une machine arithmétique lorsque les automatismes gestuels sont acquis. Rappelons que Poirier (2001), elle, classait le boulier dans le matériel pédagogique abstrait.

**Des bases différentes**

Bien que Bednarz et Janvier aient remarqué que « Le travail dans différentes bases se veut un support à la compréhension de notre système de numération » (1984, p. 22), les exercices proposés dans les manuels scolaires ne vont pas dans ce sens. En effet, les exercices recensés demandent habituellement de grouper selon différentes bases (rarement supérieures à dix) et de coder en colonnes le nombre d'unités, de « paquets » de 4, 6 ou autre, de « paquets de paquets », mais sans que les élèves y voient une quelconque utilité ou un lien avec l'écriture des nombres en base décimale.

Plus récemment, deux professeures en *Mathematic Education* à l'université du Tennessee ont expérimenté un atelier sur la valeur positionnelle avec des enseignants expérimentés du primaire (Hopkins & Cady, 2007). Elles rappellent d'abord ce qu'est le concept de valeur positionnelle, qui rejoint la définition de Poirier (2001) vue plus tôt (2.2.2.). Dans leur atelier, elles ont créé un système de numération qu'elles ont appelé Orpda et qui est en base 5. À l'aide de dessins, elles ont fait découvrir aux participants comment on représentait : pas d'objet (~), un objet (*), deux objets (@), trois objets (#) et quatre objets (&). Elles ont ensuite dessiné cinq objets et demandé aux participants comment le représenter dans le système Orpda et à leur grande surprise, aucun des 50 enseignants n'a proposé la réponse anticipée, à savoir *~ (1-0, soit un paquet de 5 et aucune unité). Comme certains peuples avant nous, ils ont plutôt proposé une écriture additive, soit *& (1-4) ou #@ (3-2). Les professeures sont donc revenues aux connaissances antérieures des enseignants, à savoir notre système de numération positionnelle et décimale. Même après plusieurs discussions, certains enseignants avaient du mal à accepter et à comprendre cette représentation.

C'est la manipulation de cubes emboîtables qui a permis aux enseignants de mieux comprendre notre système de numération, mais surtout, de voir l'importance de la manipulation en classe. En effet, lorsqu'ils ont eu à représenter un lot de 30 cubes emboîtables dans le système Orpda (en base 5), quelques enseignants ont fait le lien avec notre système positionnel décimal et le matériel multi bases en faisant des paquets de cinq et des paquets de paquets (25). Certains ont eu besoin de plus de temps et d'assistance et ont vécu une réelle frustration au point d'arrêter de tenter une représentation. Un enseignant a proposé de représenter les paquets de cinq en barres et les paquets de paquets en plaques.

Ensuite, les enseignants ont convenu de faire des gros cubes avec cinq plaques (lorsque nécessaire). En discutant, les enseignants ont relevé que c'est en manipulant que « les ampoules se sont allumées » et qu'ils ont compris. Ils ont été à même de comprendre l'importance de la manipulation par les élèves et non seulement par l'enseignant qui veut démontrer un concept. Ils rejoignent en ce sens les observations de Bednarz et Janvier (1984) et de Piaget (1969).

**La numération et les opérations**

Finalement, la dernière caractéristique relevée par Bednarz et Janvier est que « L'enseignement de la numération est détaché de celui des quatre opérations » (1984, p. 26). Elles précisent que :

> « L'étude de l'évolution historique de la numération nous révèle combien représenter un nombre et calculer ne font qu'un, la survie d'un système et son évolution étant étroitement liées à son efficacité calculatoire » (1984, p. 26).

Suite à différentes tâches de soustraction à partir de matériel concret et dessiné, les auteures ont constaté que plusieurs enfants ne se préoccupaient même pas de la règle de groupement et si on la leur donnait, ils n'en tenaient pas compte. Ils ont fait le même type d'erreurs que l'on retrouve dans les algorithmes de soustraction (enlever le plus petit nombre du plus gros dans une colonne ou emprunter aux centaines pour donner aux dizaines et aux unités en même temps). Ceci s'explique par le fait que l'enseignement de la numération (groupements) est détaché de celui des opérations. Les enfants ne voient pas de liens entre les algorithmes écrits et le matériel; ils sont incapables d'illustrer avec du matériel un calcul écrit (1984). Poisard remarque que « […] en fin de primaire, la notion de numération positionnelle est souvent mal installée et constitue un obstacle concernant l'apprentissage des techniques opératoires » (Poisard, 2005b, p. 43).

Nantais (1991) met également en lumière les liens entre la numération et les opérations. Elle précise que :

> « Si la compréhension de la numération positionnelle est aussi importante dans l'apprentissage d'un algorithme, c'est qu'en fait, les algorithmes sont des applications de la numération sur des opérations arithmétiques (addition, soustraction, multiplication, division), mais comportant des règles et des propriétés propres à chacune d'elles. Par conséquent, lorsque l'élève effectue des opérations arithmétiques sur les grands nombres, cela lui permet d'approfondir davantage notre système de numération et d'établir des liens

> non seulement entre la numération et les opérations mais aussi entre les opérations elles-mêmes » (Nantais, 1991, p. 6).

Dans son article, elle identifie d'ailleurs sept erreurs possibles pour une soustraction, les causes possibles de ces erreurs et propose un plan d'intervention corrective selon le type d'erreurs des élèves. Parmi les causes possibles, dans l'exemple d'une soustraction d'un nombre à trois chiffres à un autre nombre à trois chiffres, elle suppose que des enfants «  considèrent chaque colonne de la soustraction comme étant trois soustractions distinctes sans voir globalement le nombre composé d'unités, de dizaines et de centaines » (Nantais, 1991, p. 7). Aussi, lorsqu'un élève emprunte directement sur le chiffre des centaines pour donner aux dizaines et aux unités, « il sait qu'il doit emprunter et il sait qu'il a besoin de placer $^{1}$ devant chaque chiffre afin de pouvoir soustraire par la suite, mais ne comprend pas le rôle de l'emprunt et la valeur de cet emprunt (Nantais, 1991, p. 8). Pour établir son plan d'intervention corrective, elle propose notamment de s'assurer de connaître les préalables des élèves, de relier l'algorithme à une situation signifiante pour l'enfant, elle prône l'utilisation de matériel concret pour illustrer l'algorithme, d'estimer l'ordre de grandeur de la réponse, de vérifier sa réponse à l'aide d'une preuve et de comparer une mauvaise réponse avec celle d'un problème semblable.

Bednarz et Janvier, quant à elles, concluent leur article ainsi :

> « Même si la numération occupe une place importante dans le programme du primaire, son rôle véritable dans l'apprentissage mathématique est très mal perçu. […] On dicte à l'enfant beaucoup de règles ou de procédures qu'il apprend et applique, le plus souvent, mécaniquement » (1984, p. 30).

Ce constat a eu lieu avant la récente réforme de l'éducation au Québec qui repose sur le constructivisme et le rôle actif de l'élève, mais dans la réalité de la classe, est-ce que cela a tant changé? Elles terminent leur article avec quelques recommandations pour l'enseignement. Elles y recommandent notamment de :

> « […] s'inspirer davantage de l'évolution historique des systèmes de numération. […] (Le recours au groupement) a été motivé par un souci d'efficacité dans le dénombrement et le traitement des collections. L'histoire nous apprend également combien l'évolution d'un système est liée à son efficacité calculatoire » (1984, p. 31).

Notre séquence d'enseignement portera sur l'arithmétique et fera intervenir le développement historique des systèmes de numération et des opérations. Notre séquence devant s'inscrire dans l'épistémologie de nos deux programmes, soit le constructivisme, nous abordons donc cette conception de l'apprentissage qui est aussi la nôtre.

## 2.3. Le constructivisme

Notre but étant de développer une séquence d'enseignement basée sur l'histoire des mathématiques et de la valider, nous devons d'abord nous positionner sur notre conception de l'apprentissage. En effet, tout concepteur a une épistémologie sous-jacente qui vient éclairer ses choix. Tout comme les deux programmes que nous sommes tenus de suivre (PP et Programme de formation de l'école québécoise), notre recherche repose sur le constructivisme et son dérivé : le socioconstructivisme. Nous voyons ici ses grandes lignes puisque nous nous en inspirerons au moment d'élaborer notre séquence.

Autant le Programme primaire international (Organisation du Baccalauréat International, 2007) que le programme de formation de l'école québécoise (MÉLS Ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport, 2001) s'appuient sur une épistémologie constructiviste comme théorie de l'apprentissage. En effet, dès son introduction, le PP avance que : « Le modèle du PP dépend de notre engagement envers une conviction particulière concernant la façon dont les enfants apprennent et qui est clairement représentée par l'approche constructiviste » (OBI, 2007, p. 6). Les concepteurs du PP poursuivent sur l'importance des expériences et des connaissances préalables des apprenants qui sont constamment revus et révisés à la lumière des nouveaux apprentissages.

> « Dans le PP, ce défi est relevé en donnant aux élèves des possibilités de construire du sens et d'améliorer leur compréhension, principalement à travers la recherche structurée. Étant donné que l'apprentissage des élèves et leurs tentatives pour comprendre le monde qui les entoure sont essentiellement des actes sociaux de communication et de collaboration, cette recherche peut prendre plusieurs formes et parfois requérir des élèves qu'ils travaillent seuls, par deux ou dans des groupes plus importants » (OBI, 2007, p. 7).

On rejoint ici le socioconstructivisme, une variante du constructivisme qui accorde une grande importance au rôle des pairs.

D'autre part, dans la présentation du Programme de formation de l'école québécoise, on reconnaît l'apprentissage comme un processus actif. En effet, on y précise que :

> « […] beaucoup d'éléments du Programme de formation, en particulier ceux qui concernent le développement de compétences et la maîtrise de savoirs complexes, font appel à des pratiques basées sur une conception de l'apprentissage d'inspiration constructiviste. Dans cette perspective, l'apprentissage est considéré comme un processus dont l'élève est le premier artisan. Il est favorisé de façon toute particulière par des situations qui représentent un réel défi pour l'élève, c'est-à-dire des situations qui entraînent une remise en question de ses connaissances et de ses représentations personnelles » (Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport, 2001, p.5).

Et maintenant, que dit la littérature sur ces théories de l'apprentissage?

Les auteurs consultés s'entendent pour dire que le constructivisme est une théorie très importante de l'apprentissage que l'on attribue aux travaux de Piaget. Elle est fondée sur l'idée que la connaissance se construit par l'apprenant à partir d'une activité mentale. Les apprenants sont donc considérés comme des êtres actifs qui cherchent du sens (Astolfi, 1997; EdutechWiki, 2009a; Morissette, 2002; Piaget, 1969; Poirier, 2001). En effet, selon Piaget, « […] les connaissances dérivent de l'action […]. Connaître un objet, c'est agir sur lui et le transformer […] » (Piaget, 1969, p. 48). Il poursuit sur l'importance de l'action par l'enfant. « La démonstration par l'adulte […] montre une fois de plus qu'en faisant des expériences devant l'enfant au lieu de les lui faire faire lui-même, on perd toute la valeur formatrice que présente l'action propre comme telle » (Piaget, 1969, p. 59). Il donne un exemple probant : on ne peut apprendre à nager en regardant des nageurs. Il précise que « Les méthodes actives ne conduisent nullement à un individualisme anarchique, mais, et notamment s'il y a combinaison du travail individuel et du travail par équipe, à une éducation de l'autodiscipline et de l'effort volontaire » (Piaget, 1969, p. 102). Il explique que ces méthodes dites actives (centrées sur l'action de l'enfant) sont beaucoup plus difficiles qu'un enseignement plus traditionnel et qu'elles supposent une formation des maîtres beaucoup plus poussée (notamment en psychologie de l'enfant) afin de bien comprendre les démarches spontanées de l'élève.

En parlant du développement intellectuel de l'enfant, Piaget parle d'opérativité qui serait irréductible et spontanée. Il précise d'ailleurs :

> « elle est le produit de constructions successives et le facteur principal de ce constructivisme est une équilibration par autorégulations permettant de remédier aux incohérences momentanées, de résoudre les problèmes et de surmonter les crises ou les déséquilibres par une constante élaboration de

> structures nouvelles que l'école peut ignorer ou favoriser selon les méthodes employées » (Piaget, 1969, p. 66).

Selon le site Internet EdutechWiki de la Faculté de Psychologie et des Sciences de l'Éducation de l'Université de Genève (EdutechWiki, 2009a) et Astolfi (1997), cette théorie repose sur l'idée que lorsqu'un individu est confronté à une situation donnée, il va tenter de mobiliser un certain nombre de structures cognitives, que Piaget nomme schèmes opératoires. Les auteurs du site poursuivent en précisant que « l'assimilation crée une perturbation au sein des structures cognitives que Piaget nomme *conflit cognitif* qui est elle-même régulée afin d'arriver à une nouvelle forme d'équilibre » (EdutechWiki, 2009a). À la source, Piaget explique que :

> « Toute intelligence est une adaptation; toute adaptation comporte une assimilation des choses de l'esprit, de même que le processus complémentaire d'accommodation. Donc tout travail d'intelligence repose sur un intérêt. L'intérêt n'est autre chose, en effet, que l'aspect dynamique de l'assimilation » (Piaget, 1969, p. 232).

Toujours sur le site d'Edutech, on y mentionne que :

> « L'enseignement constructiviste est fondé sur la croyance que les étudiants apprennent mieux quand ils s'approprient la connaissance par l'exploration et l'apprentissage actif. Les mises en pratique remplacent les manuels et les étudiants sont encouragés à penser et à expliquer leur raisonnement au lieu d'apprendre par cœur et d'exposer des faits » (EdutechWiki, 2009a).

Dans son livre sur la construction des savoirs, Morissette (2002) différencie la transmission des savoirs (reliée à un enseignement plus traditionnel) de la construction des connaissances. Elle y explique, elle aussi, l'importance de s'appuyer sur les connaissances antérieures des élèves et de leurs représentations, particulièrement lorsqu'elles sont erronées. Tout comme Piaget (1969) et Poirier (2001), elle préconise le conflit cognitif et l'interaction entre les élèves. Nous verrons plus loin comment nous mettrons en place ces principes.

Astolfi (2008), quand à lui, distingue trois types de constructivisme : le constructivisme épistémologique, le constructivisme psychologique et le constructivisme pédagogique. Selon lui, le constructivisme épistémologique insiste sur le caractère construit des savoirs disciplinaires et notre conception des liens entre les observations empiriques et les constructions théoriques. Ainsi, il s'oppose à une conception empiriste et positiviste de la connaissance. Il se fonde plutôt « sur le fait que les savoirs sont construits au sein des disciplines. Ce sont des réponses actuelles à des problèmes qui ont longtemps fait controverse » (Astolfi, 2008, p. 127). L'auteur présente également le constructivisme psychologique qui met en lumière le fait que c'est l'apprenant qui construit lui-même son savoir et qu'on ne peut le lui imposer de l'extérieur. Il ne s'agit ni d'accumulation, ni d'imitation. Ce type de constructivisme vient en opposition au behaviorisme qui mettait plutôt l'accent sur les stimuli et les réponses à ces stimuli. Chaque sujet doit donc reconstruire activement les savoirs « bien qu'ils soient déjà culturellement présents, en transformant à mesure ses structures intellectuelles » (Astolfi, 2008, p. 128). Enfin, le constructivisme pédagogique, qui s'oppose à un enseignement par transmission dogmatique, est celui qui s'approche le plus de notre conception de l'apprentissage en tant que praticienne. Il met l'accent sur le caractère construit des pratiques d'enseignement. Selon Astolfi, ce type de constructivisme

> « vise l'élaboration de modalités d'enseignement autres que les pratiques frontales. Dans un travail d'équipe, par exemple, l'enseignant délègue aux groupes des points à débattre et des choses à produire, mais il intervient à différents stades et sous différentes formes » (Astolfi, 2008, p. 129).

Ainsi, pour chaque objet d'enseignement, l'auteur précise qu'il faut construire et tester des dispositifs que l'on peut évaluer selon deux critères : leur acceptabilité et leur adéquation. L'acceptabilité est la réception qu'en font les apprenants, la mobilisation qu'il provoque et détermine l'investissement qu'ils auront dans la tâche. Ce critère, bien qu'important, n'est pas suffisant pour s'assurer les apprentissages visés. Il faut donc observer l'adéquation, c'est-à-dire la correspondance entre l'objectif visé et le résultat.

Le socioconstructivisme est une théorie qui découle du constructivisme, mais qui met de l'avant le rôle des pairs dans la construction du savoir. En effet, « plutôt qu'un processus solitaire, ces nouvelles perspectives supposent que l'apprentissage efficace arrive via des interactions avec des gens ou des objets du monde. » (EdutechWiki, 2009b). En effet, pour Piaget :

> « La coopération des enfants entre eux présente à cet égard une importance aussi grande que l'action de l'adulte. Du point de vue intellectuel, c'est elle qui est le plus apte à favoriser l'échange réel de la pensée et la discussion, c'est-à-dire toutes les conduites susceptibles d'éduquer l'esprit critique, l'objectivité et la réflexion discursive » (Piaget, 1969, p. 263).

Nous apprécions particulièrement la façon dont Poirier décrit le socioconstructivisme à travers cinq balises qui rejoignent évidemment les principes du constructivisme, soit : le rôle actif de l'élève, ses représentations, l'état de déséquilibre, le conflit cognitif et l'importance des interactions sociales (Poirier, 2001). Nous partons donc de ces balises pour décrire le socioconstructivisme et c'est à elles que nous référerons lorsque nous justifierons nos activités (au chapitre 4).

Piaget, en 1972 (cité dans Poirier, 2001), disait que « c'est en agissant que l'on apprend ». Cette phrase résume bien l'importance du rôle actif de l'élève qui est en opposition avec les approches plus traditionnelles de transmission des connaissances. En parlant de la construction du savoir et de la manipulation de matériel, Piaget explique :

> « C'est pourquoi les méthodes actives d'éducation des petits réussissent tellement mieux que les autres dans l'enseignement des branches abstraites telles que l'arithmétique et la géométrie : lorsque l'enfant a, pour ainsi dire, manipulé des nombres ou des surfaces avant de les connaître par la pensée, la notion qu'il en acquiert ultérieurement consiste véritablement en une prise de la conscience des schèmes actifs déjà familiers, et non pas comme dans les méthodes ordinaires, en un concept verbal s'accompagnant d'exercices formels et sans intérêts, sans substructure expérimentale antérieure » (Piaget, 1969, p. 238).

Aussi, l'élève analyse une situation à partir de ses conceptions, de ses représentations, ce qui nous amène à parler de la deuxième balise du socioconstructivisme. En effet, l'élève apprend à partir de ses représentations (images mentales, techniques, processus) qui proviennent de ses apprentissages antérieurs. Faire émerger les connaissances antérieures et comprendre les erreurs des élèves permet de découvrir leurs représentations.

Lorsque les connaissances antérieures sont insuffisantes ou remises en question, l'élève se trouve en état de déséquilibre. Il doit donc réorganiser ses connaissances pour les intégrer au savoir antérieur. La mémorisation ou l'accumulation de connaissances sont donc insuffisantes pour retrouver un état d'équilibre.

La quatrième balise de l'approche socioconstructiviste préconise un moyen pour faciliter ou rendre pertinent un apprentissage : la situation-problème. On peut présenter un problème à l'élève qui le placera face à un conflit cognitif. Ce type de problème, dont on sait que les connaissances antérieures de l'élève sont insuffisantes pour le résoudre ou que les solutions à ce problème sont contradictoires aux représentations et aux conceptions initiales de l'élève font intervenir les phénomènes d'assimilation et d'accommodation décrits plus haut. Cette réorganisation permet de passer d'un état de déséquilibre à celui d'équilibre.

Finalement, la dernière balise concerne l'importance des interactions sociales dans les apprentissages des élèves. En effet, en travaillant en équipe ou lors de retours en grand groupe, l'élève voit les différentes stratégies utilisées par ses pairs, ce qui l'amène à ajuster sa façon de procéder et à préciser sa pensée.

Lorsqu'on veut créer des situations d'apprentissage basées sur le socioconstructivisme, on doit penser à «  l'enseignement dans des contextes qui pourraient être personnellement significatifs pour les apprenants, les négociations de significations partagées entre apprenants, les discussions de classe, la collaboration de petits groupes » (EdutechWiki, 2009b). Nous verrons plus concrètement ces principes dans notre séquence d'enseignement.

## 2.4. Conclusion et objectif spécifique de la thèse

Lors de la délimitation du cadre conceptuel, nous avons d'abord proposé diverses manières d'intégrer l'histoire des mathématiques en classe et avons vu que certaines façons sont plus appropriées pour une clientèle du primaire. En effet, les feuilles de travail, les activités mathématiques expérimentales, dont les notations anciennes et les opérations à la manière de nos prédécesseurs, nous semblent particulièrement pertinentes (que ce soit les algorithmes ou l'utilisation d'outils de calculs comme le boulier chinois).

Dans un second temps, nous avons précisé ce que sont l'arithmétique et la numération et avons rappelé leur importance dans le programme de mathématiques au primaire. Il s'agit en effet des concepts les plus abordés et approfondis en mathématiques au primaire puisqu'ils en sont la base. Nous avons ensuite décrit les six systèmes de numération retenus (sumérien, égyptien, babylonien, chinois, romain et maya) et notre système actuel –le système indo-arabe– avec leurs principales caractéristiques (base, type de système, symboles, ordre de l'écriture des nombres) et les façons d'effectuer les additions, les soustractions, les multiplications et les divisions dans ces systèmes. Ensuite, à partir de l'importante étude de Bednarz et Janvier (1984) sur l'enseignement de la numération et d'autres études subséquentes, nous avons abordé les difficultés que certaines pratiques des enseignants ou des manuels scolaires posent aux élèves.

Ainsi, à l'instar de Bednarz et Janvier (1984), nous pensons que l'étude de l'histoire de la numération permet aux élèves de constater la pertinence du recours au groupement, de mieux apprécier la puissance de notre système de numération actuel et d'en apprécier l'efficacité opératoire. Aussi, nous croyons qu'effectuer des opérations à la manière de nos prédécesseurs permet de tisser des liens étroits entre notre numération et ses opérations, ce que préconisent Bednarz et Janvier (1984). De plus, pour Caron :

> « Il est aussi vraisemblable de croire que l'enfant qui reconstruit pour lui cet édifice mathématique qu'est le système numérique, rencontre certains obstacles et est appelé à résoudre un certain nombre de problèmes pour en arriver à le concevoir comme une structure logique et articulée » (Caron, 1984, p. 7).

Par contre, la recension des écrits nous a aussi fait constater que parmi toute la littérature consultée, très peu d'études s'adressaient aux élèves du primaire; elles visaient principalement les élèves du secondaire, du collège ou de l'université. De plus, très peu d'expériences décrivaient une méthodologie rigoureuse; celles-ci vantaient plutôt les bienfaits de l'histoire des mathématiques. Finalement, nous avons décrit l'épistémologie sous-jacente à nos deux programmes d'étude et qui servira d'assise au développement de notre séquence d'enseignement/apprentissage, soit le constructivisme.

Ce cadre conceptuel étant délimité, nous croyons qu'explorer les systèmes de numération de diverses civilisations permet d'aborder la numération d'une façon différente. Puisqu'elle représente l'aspect des mathématiques le plus travaillé au primaire, cela peut éviter la redondance lorsque les élèves atteignent le troisième cycle et qu'ils sont particulièrement doués.

Concrètement, **l'objectif spécifique de la thèse** consiste à concevoir, élaborer, mettre à l'essai et analyser une séquence d'enseignement/apprentissage de l'arithmétique basée sur son développement historique dans une classe de 5$^{e}$ année du primaire suivant le Programme primaire international (PP). Cette séquence s'inscrit dans un module de recherche du PP dont l'idée maîtresse est : *Plusieurs peuples ont contribué à l'évolution de la pensée mathématique à travers le temps* et les pistes de recherche sont les suivantes : 1) la représentation des nombres et le fonctionnement des systèmes de numération dans différentes civilisations; 2) les quatre opérations dans ces systèmes; 3) les facteurs et les besoins ayant conduit à la création et à l'évolution de la numération et 4) l'évolution des systèmes jusqu'à notre système actuel.

Cette recherche traitant de l'histoire des mathématiques, nous devrions être en mesure d'observer, ou non, si les avantages dégagés dans la problématique se manifesteront avec nos élèves. En effet, les études consultées révélaient que l'histoire des mathématiques suscitait de l'intérêt et de la motivation chez les élèves et pouvait améliorer leur perception et leur compréhension des mathématiques. Avant de concevoir notre séquence, quels sont les aspects méthodologiques à mettre en place pour que notre recherche soit la plus rigoureuse possible?

# 3. Les aspects méthodologiques

# Introduction

Dans ce chapitre d'ordre méthodologique, nous commençons en faisant un tour d'horizon de la recherche en éducation avec ses particularités et les divers types de recherches qu'on y rencontre. Nous nous attardons particulièrement à la recherche appliquée ou dite pédagogique (avec enjeux pragmatiques et ontogéniques) pour finalement parvenir aux recherches menées par des praticiens puisque c'est le cas dans cette recherche. Nous évoquons les apports spécifiques des recherches menées par des enseignants, sans toutefois négliger les exigences de la rigueur scientifique. En outre, nous abordons les biais qu'il est possible de rencontrer dans une recherche menée par un praticien et les conditions particulières à mettre en place pour maximiser les apports et réduire les risques de biais (notamment par une variété d'outils de collecte de données). En effet, comment pouvons-nous être à la fois une chercheure neutre et objective et l'enseignante du groupe où se déroulera l'expérimentation ? C'est ce que nous proposons de voir dans ce chapitre.

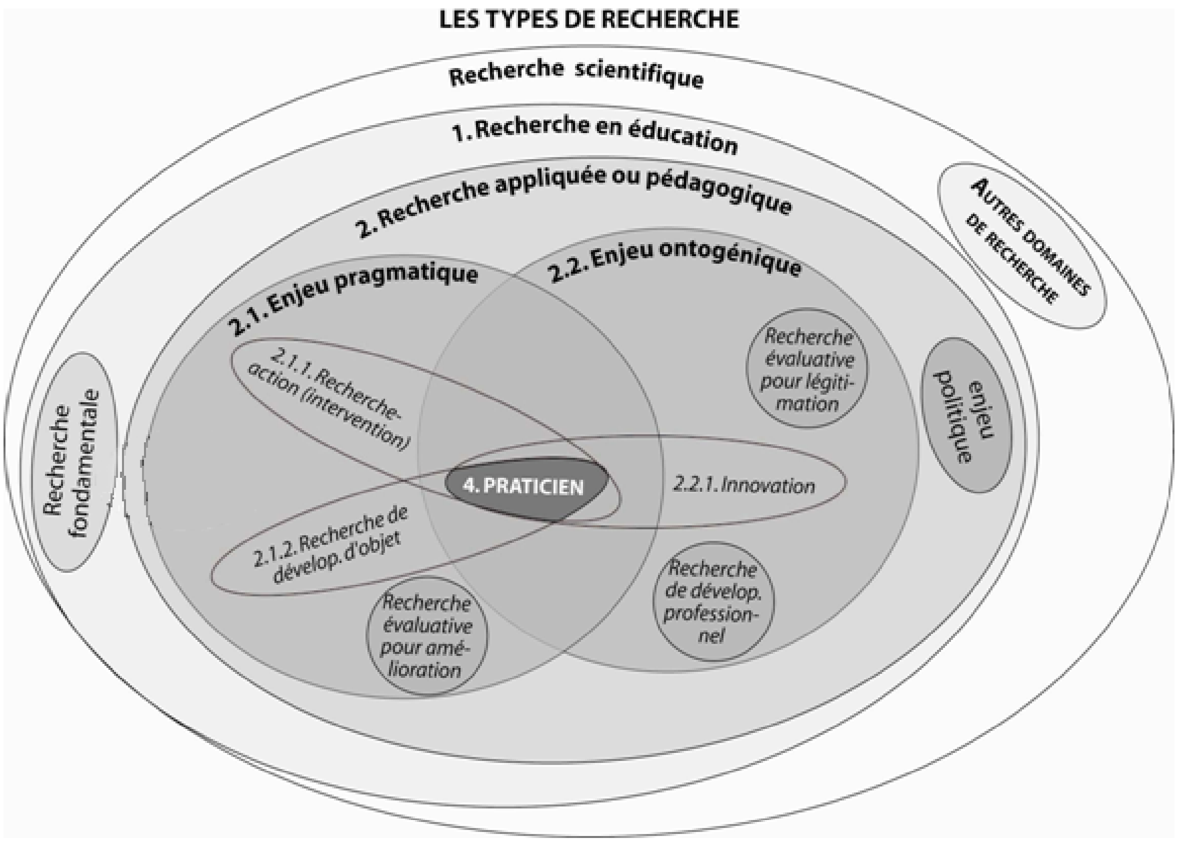
## 3.1. La recherche en éducation

Il est indéniable que les mondes de la recherche en sciences de l'éducation et celui des enseignants dans leur classe sont très éloignés l'un de l'autre (Dadds & Hart, 2001; Gattuso, 1993; Lankshear & Knobel, 2004; Mertler, 2006; Mialaret, 2004; Mills, 2000; Van Der Maren, 1995, 1999; Van Der Maren & Poirier, 2007). On pourrait se demander pourquoi ou pour qui fait-on de la recherche en éducation? Dans son livre qui s'adresse aux enseignants-chercheurs, Van der Maren (1999) rappelle les recommandations qu'avait formulées Huberman pour que les praticiens utilisent la recherche et profitent de ses retombées. Les recherches consultées par les praticiens devraient résoudre rapidement des problèmes, être utiles et augmenter le répertoire des enseignants, être validées par des praticiens, utilisables ou adaptables et finalement, ne pas être déconnectées de la pratique. Dans un tel contexte, quelle est la place des recherches menées par des enseignants?

À partir de la classification des recherches selon leurs enjeux présentés par Van der Maren (1999), nous proposons un schéma que nous expliquons ensuite en y greffant les éléments de la littérature consultée. Nous avons privilégié une structure concentrique puisque chaque type de recherche que nous détaillons est inclus dans un plus vaste. Nous avons numéroté les types de recherches et respectons cet ordre dans notre explication. Vous suivez donc le chemin de notre approche qui a la prétention d'être une recherche scientifique en éducation avec toutes les exigences que cela implique, mais du côté de la recherche appliquée. Elle vise un enjeu pragmatique de développement d'objet et un enjeu ontogénique d'innovation.

Nous voyons que les différents types de recherches décrits dans les premières parties ne sont pas spécifiquement des recherches menées par des enseignants, soit : la recherche en éducation et la recherche appliquée ou pédagogique. Nous les survolons pour bien démontrer où se situe notre recherche.

**Figure 26** Les types de recherche




## Les types de recherche en éducation

Plusieurs auteurs s'entendent pour dire que la recherche en éducation a des spécificités et une complexité que l'on ne retrouve pas dans d'autres domaines (Artigue, 1996; Mialaret, 2004; Van Der Maren, 1995, 1999). Van der Maren aborde également la spécificité des sciences de l'éducation comme discipline bien différente des autres. Il propose un *savoir stratégique* qui est « une sorte de savoir appliqué utilisable dans l'action, parce que ses règles sont plus immédiates, plus souples, plus concrètes, utilisant des signaux perceptibles plutôt que des instruments de mesure et des calculs » (1995, p. 48). Selon lui, le savoir en éducation devrait être stratégique. On ne peut se passer du savoir appliqué, mais il doit aussi être pragmatique et tenir compte des contraintes de la situation. Il doit découler de la praxis (réflexion sur le savoir pratique), mais il doit permettre aux enseignants de réagir aux différentes situations auxquelles ils doivent faire face. Van der Maren conclut son chapitre sur les savoirs en éducation en précisant que « le savoir stratégique exigera peut-être un chercheur qui, sans être un spécialiste de la praxis ou du savoir appliqué, pourra se situer à leur interface et établir les ponts entre les deux » (1995, p. 57). Nous nous sentons interpellée.

Van der Maren (1999) propose de classifier les recherches selon quatre types d'enjeux, chacun ayant un rôle différent. On retrouve l'enjeu nomothétique (qui relève davantage de la recherche fondamentale, dite « scientifique ») et les enjeux plus appliqués, soit l'enjeu politique, l'enjeu pragmatique et l'enjeu ontogénique.

**La recherche appliquée ou pédagogique**

Van der Maren explique ce qu'est la recherche pédagogique, qu'il sous-titre « une recherche appliquée sur le terrain des acteurs par et avec les acteurs » (1999, p. 37). Lorsqu'une enseignante du primaire (comme nous) veut réfléchir sur sa pratique et améliorer de façon concrète son enseignement et l'apprentissage de ses élèves, elle se tourne naturellement vers la recherche appliquée. Selon Van der Maren, la recherche pédagogique tient sa validité de sa contribution à la pratique pédagogique des enseignants et n'a pas la prétention d'une science universelle. Elle vise à instrumenter, à guider l'action et à interpréter les difficultés des enseignants pour améliorer leur pratique. Son objectif n'est donc pas la vérité, mais plutôt la fonctionnalité.

Toujours selon Van der Maren, la recherche pédagogique est souvent *transdisciplinaire*, c'est-à-dire que l'on emprunte divers éléments de diverses théories et disciplines pour rendre le tout satisfaisant et efficace. C'est ce que nous avons fait dans notre cadre conceptuel : nous avons exploré plusieurs avenues, quelques théories et avons opté pour celles qui servaient le mieux notre réalité. Elle est aussi *contextualisée*, c'est-à-dire qu'elle doit prendre en considération les caractéristiques et les exigences du milieu pour produire un résultat fonctionnel. C'est ce que nous avons fait puisque nous sommes partie de notre contexte pratique: deux nouveaux programmes et des élèves doués. La recherche pédagogique est aussi *opportuniste* puisqu'elle tente de « faire bien dans les conditions qu'on vit et avec les ressources que l'on a » (1999, p. 39). Ce type de recherche privilégie des valeurs *écologiques*, dans le sens qu'elle veut enrichir les relations entre praticiens, partenaires et milieu. Elle prône aussi des valeurs *professionnelles* puisqu'elle cherche à améliorer la maîtrise du praticien sur son activité professionnelle.

**L'enjeu pragmatique (la recherche de développement d'objet)**

Selon Van der Maren (1999), les recherches à enjeu pragmatique visent la résolution d'un problème de fonctionnement (du système, des acteurs ou des moyens). On ne peut pas dire que nous vivions un problème majeur de fonctionnement, mais nous cherchions des moyens à mettre en place pour respecter nos deux programmes d'étude, satisfaire les exigences d'une clientèle douée et renouveler l'enseignement de la numération que les élèves voyaient en spirale depuis leur première année. Ce type de recherches consiste à concevoir un outil -ici une séquence d'enseignement basée sur l'évolution historique de la numération- et à le tester avant une utilisation régulière.

**L'enjeu ontogénique (l'innovation)**

Comme nous portons le double rôle de chercheure et de praticienne, notre recherche a aussi un enjeu ontogénique et propose une innovation. Un des objectifs de la recherche ontogénique est le perfectionnement professionnel (outils, interventions ou compétences). Jusqu'à tout récemment, ce type de recherche n'était pas considéré comme de la vraie recherche. En effet, on soupçonnait les praticiens de manquer de recul et d'objectivité. Or, Van der Maren soutient plutôt ceci « de mon point de vue, les recherches qui visent de telles finalités sont non seulement souhaitables, mais souvent plus enrichissantes que les recherches objectives mais décontextualisées et aseptisées » (1999, p. 123). Il est aussi convaincu qu'un cumul de ce type de recherches permettra éventuellement de construire une théorie de la pédagogie qui manque pour le moment. Toujours selon Van der Maren (1999), la recherche ontogénique implique l'acteur à deux niveaux : il est à la fois objet de la recherche et sujet. Cette forme de recherche doit évidemment respecter des exigences particulières pour atteindre une certaine crédibilité (Gattuso, 1993; Mills, 2000; Van Der Maren, 1999). Nous les verrons un peu plus loin.

L'innovation est un des types de recherche que Van der Maren (1999) décrit parmi les recherches à enjeu ontogénique. Il s'agit d'un type de recherche-action, mais qui porte sur soi-même ou sur son milieu. Dans notre cas, l'innovation porte plutôt sur notre classe et non directement sur nous-même, contrairement à Gattuso (1993), par exemple, qui était le principal sujet de sa thèse de doctorat. En effet, ce n'est pas tant notre enseignement qui sera scruté à la loupe, mais comment les élèves comprennent, agissent et s'intéressent à la séquence d'activités proposées. Bref, comment se négocie le contrat didactique et comment s'effectue la dévolution (Brousseau, 1996).

Selon Van der Maren, il est rare qu'une recherche soit une réelle innovation puisque ce que nous pensons être nouveau a souvent déjà été fait ailleurs. Dans notre cas, la recherche documentaire réalisée pour soutenir le cadre conceptuel nous a permis de constater que seule une recherche française (Cerquetti-Aberkane et Rodriguez, 2002) avait tenté d'amener des élèves à faire des opérations arithmétiques à la manière de nos prédécesseurs. Les images de la recherche provenaient de la Bibliothèque nationale de France et dataient des XVI^e^ au XVIII^e^ siècle. Nous pouvons donc considérer notre recherche comme une réelle innovation puisqu'elle recule jusqu'à quatre mille ans en arrière.

L'innovation est parfois spontanée, improvisée et analysée ensuite, mais dans notre cas, il s'agit plutôt d'une innovation planifiée et réfléchie. Selon Van der Maren (1999), l'intérêt d'une recherche innovatrice, ce sont les leçons que l'on peut en retirer, les stratégies utilisées pour surmonter les obstacles. C'est ce que nous tenterons de faire lors de la discussion.

## La recherche menée par un praticien : ses apports

De plus en plus fréquentes en éducation, les recherches effectuées par des praticiens sont de mieux en mieux documentées. En effet, des ouvrages entiers s'adressent aux enseignants-chercheurs, mais tous n'ont pas les mêmes exigences de rigueur (Dadds & Hart, 2001; Lankshear & Knobel, 2004; Mertler, 2006; Van Der Maren, 1999). À l'instar de Lankshear et Knobel (2004), Van der Maren (1999) et Van der Maren et Poirier (2007), nous croyons que les recherches menées par des enseignants ont leur place dans les programmes formels (universitaires). Ces derniers précisent même que « la situation idéale de recherche […] serait celle où la recherche est menée par les enseignants eux-mêmes avec d'autres enseignants » (Van Der Maren & Poirier, 2007, p. 200). Que pourraient donc apporter les recherches menées par des praticiens ?

Bien que convaincue du bien-fondé des recherches effectuées par les enseignants, nous avons constaté quatre avantages ou apports de ces dernières dans les ouvrages consultés. D'abord, elles favorisent un rapprochement entre la recherche et la pratique. Puis, elles permettent une amélioration de la qualité de l'enseignement et/ou de l'apprentissage. En outre, elles favorisent la réflexion sur la pratique de l'enseignant-chercheur et finalement, la bonne connaissance qu'ont les praticiens de leur milieu favorise une meilleure compréhension des enjeux et une expérimentation plus naturelle.

**Un rapprochement entre la recherche et la pratique**

La plupart des ouvrages consultés soulignent que les recherches menées par les enseignants dans leur classe permettent de rapprocher le monde de la recherche du monde de la pratique des enseignants (Dadds & Hart, 2001; Gattuso, 1993; Lankshear & Knobel, 2004; Mertler, 2006; Mills, 2000; Van Der Maren, 1995, 1999; Van Der Maren & Poirier, 2007). Van der Maren (1995) discute de la distance qui sépare le développement des connaissances scientifiques du développement des habiletés professionnelles des enseignants. Il fait état d'une recherche menée auprès de 30 chercheurs québécois sur les pratiques de recherche en éducation et deux malaises semblent toucher l'ensemble des chercheurs. D'abord, les chercheurs observent un double écart entre les discours et les pratiques. D'une part, les prescriptions méthodologiques sont parfois inapplicables lorsqu'on veut tenir compte du contexte et de l'objet de la recherche et d'autre part, un fossé se creuse entre les connaissances que mettent de l'avant la recherche et les pratiques pédagogiques observées au quotidien. Bref, la recherche n'arrive pas à influencer la pratique des enseignants, qui de leur côté, se plaignent que les recherches en sciences de l'éducation ne sont pas guidées par leurs problèmes ou sont écrites dans un langage inaccessible.

Dans son ouvrage plus récent qui s'adresse aux praticiens-chercheurs, Van der Maren (1999) évoque les études de Huberman (qui datent de 1980) qui faisait une synthèse des travaux nord-américains sur la question des enseignants qui font de la recherche. Huberman constatait que « les praticiens utilisent peu la recherche éducationnelle parce qu'elle est peu utilisable comme telle » (1999, p. 7) puisque la culture respective des enseignants et des chercheurs est fort différente. Dans le même sens, Kincheloe observe que les enseignants « do not live in the same professional culture as researchers, and that the knowledge base informing educational direction and emphases is still… produced far away from the school by experts in a rarefied domain » (cité dans Lankshear et Knobel, 2004, p. 6). Kincheloe propose aux enseignants-chercheurs de joindre la culture des chercheurs, notamment afin d'apprécier les bénéfices de la recherche; mieux comprendre leurs expériences et leurs perceptions; voir comment ils peuvent contribuer à la recherche en éducation; réfléchir sur leur propre pratique professionnelle. Lankshear et Knobel (2004) affirment que:

> « As an identifiable movement, teacher research has been conceived and grown as intentional oppositional practice to the fact that classroom life and practice is driven by research based on narrow experimental, psychometric (rats and stats) approaches to social science (see Fishman and McCarthy, 2000, Ch. 1) » (2004, p. 4).

Gattuso (1993) rapporte les écrits de Cochran-Smith et Lyte (qui remontent à 1989) qui affirment qu'on ne devrait pas limiter le savoir officiel sur l'enseignement à ce qu'ont choisi d'étudier les universitaires. Cela contribue à creuser le fossé entre ce qui est enseigné à l'université et ce qui se passe réellement dans les classes. Selon elle, on se doit de prendre en considération la parole des enseignants, leurs questions, leurs préoccupations. Lankshear et Knobel (2004) vont plus loin et proposent la recherche menée par les enseignants pour résister à la domination des programmes officiels qui uniformisent et standardisent les contenus à enseigner, sans tenir compte de la diversité des milieux et des besoins spécifiques des élèves. Nous croyons que notre démarche va justement dans ce sens : nous tentons de répondre aux besoins spécifiques de nos élèves (des élèves doués) et de notre milieu particulier (une école internationale au Québec).

Aussi, selon Stenhouse (1975, cité dans Gattuso, 1993), si l'on veut améliorer la qualité de l'enseignement, on se doit de rendre la recherche accessible aux enseignants. Gattuso rapporte que déjà en 1904, Dewey suggérait d'intégrer les observations des enseignants dans les théories d'enseignement et d'apprentissage qui émergeaient. De plus, nous sommes d'accord avec Mills (2000) qui croit que la recherche menée par des enseignants rapproche la recherche des enseignants. Sans rejeter la recherche dite traditionnelle, il est convaincu du bien-fondé de la recherche-action (menée par un enseignant). Il affirme qu'elle est persuasive et légitime puisque l'enseignant est la meilleure personne pour développer des solutions à ses propres problèmes. Toujours selon Mills, la recherche-action est pertinente puisqu'elle concerne et touche directement les enseignants et favorise l'accès à ses résultats, ou du moins intéresse davantage ces derniers. Notre démarche doctorale amène ainsi la recherche universitaire sur le terrain et nous pensons que les résultats de cette recherche, s'ils sont publiés dans une revue professionnelle ou partagés dans des colloques, pourraient intéresser les enseignants et être accessibles pour eux.

**Une amélioration de la qualité de l'enseignement et/ou de l'apprentissage**

En plus de rapprocher la recherche de la pratique, la recherche menée par des enseignants permet concrètement d'améliorer l'enseignement et/ou l'apprentissage. Selon Lankshear et Knobel (2004), cette amélioration peut être atteinte de diverses façons. À travers leur recherche, les enseignants peuvent identifier les approches ou les interventions qui font mieux comprendre certaines notions à leurs élèves. Des enseignants dans un contexte semblable pourraient adapter cette approche et améliorer du même coup leur enseignement et/ou les apprentissages de leurs élèves.

Bref, en portant le double rôle, nous croyons améliorer concrètement la qualité de notre enseignement puisque la revue de littérature nous a permis de voir ce qui se faisait et ce qui était le mieux pour nos élèves. De plus, nous pensons que les tâches d'enseignement-apprentissage seront appropriées pour les élèves puisque nous sommes partie de notre contexte particulier et avons exploré plusieurs options avant de choisir celles que nous considérions les plus appropriées.

**Une réflexion de l'intérieur sur la pratique enseignante**

Schön (1983, cité dans Gattuso, 1993) reconnaît que les praticiens peuvent être des chercheurs réflexifs. Selon lui, la recherche est une activité du praticien lorsqu'elle est déclenchée par des aspects de la situation et liée à l'action. Il affirme que lorsqu'un praticien réfléchit pendant l'action, il devient un chercheur pratique ; il construit une théorie à partir d'un cas unique qu'il observe. L'auteur parle de la « science de l'action » qui ne peut être déployée que par des praticiens qui ont un penchant pour la réflexion systématique.

Lankshear et Knobel n'aiment pas l'expression « teachers researching in their own classroom » (2004, p. 8), la trouvant réductrice. En menant des recherches, les enseignants ont une meilleure compréhension d'eux-mêmes et de leur pratique, de leurs croyances et de leurs valeurs et cela leur permet de voir ce qui se fait ailleurs et d'en faire une évaluation critique. Pour sa part, Gattuso rappelle les propos de Stenhouse (1975) qui « […] souligne qu'il n'est pas suffisant que le travail des enseignants soit étudié de l'extérieur par un observateur : ils ont besoin de l'étudier eux-mêmes » (1993, p. 41). En effet, nous sommes à même de constater que nos nombreuses lectures nous ont amenée à nous perfectionner, à réfléchir sur notre pratique et à la situer dans un contexte plus large et à développer un sens critique pour examiner les recherches consultées, les programmes d'enseignement et les manuels scolaires notamment.

**Une meilleure connaissance du milieu**

Évidemment, la personne qui connaît le mieux le milieu et les sujets dans une recherche appliquée est bien évidemment l'enseignant de ces sujets. Cette bonne connaissance du milieu et des élèves permet à l'enseignant de créer des situations naturelles d'étude, dans une atmosphère habituelle pour les élèves. Ces derniers sont moins impressionnés par le « chercheur » et les situations sont plus authentiques. Aussi, nous croyons que de voir leur propre enseignant mener une recherche « scientifique » peut démystifier le monde lointain de la recherche universitaire. Gattuso (1993) va dans le même sens et précise que les enseignants ont un accès privilégié au contexte de la pratique et aux élèves puisqu'ils y sont longtemps, « alors que le chercheur universitaire n'est présent que quelques heures par semaine » (Van der Maren, 1990, cité dans Gattuso, 1993).

De son côté, Mills (2000) soutient que les enseignants, qui sont des professionnels de la résolution de problèmes à propos de leurs élèves ou d'eux-mêmes, fournissent une puissante raison de mener des recherches-actions. Selon lui, l'enseignant ne manque pas d'opportunités pour observer dans sa propre classe. Il ajoute qu'utiliser l'observation directe comme stratégie de collecte de données est familier à l'enseignant puisqu'il le fait quotidiennement dans sa pratique.

Nous croyons également qu'une bonne connaissance du milieu et une immersion permanente permet une bonne critique externe et interne des documents collectés et observés. En effet, Mialaret (2004) explique que pour tous documents étudiés, le chercheur doit se poser des questions, à savoir, « Qui l'a produit ? Pour quoi? Pour qui? Quand? Comment? Où? Dans quelles conditions? En présence de qui? » (2004, p. 40). Il précise que cette critique préliminaire des documents doit être réalisée pour tout travail d'analyse, sinon l'analyse perd de sa valeur scientifique. Évitant un intermédiaire, nous aurons ces préoccupations en tête et nous les consignerons dans notre journal de bord.

Nous pensons donc qu'en tant que chercheure et enseignante des sujets, nous favorisons un rapprochement entre le monde de la recherche et la pratique sur le terrain; nous améliorons la qualité de notre enseignement et par le fait même, l'apprentissage de nos élèves; nous réfléchissons sur notre pratique en particulier et sur l'enseignement en général et finalement, notre bonne connaissance du milieu favorise des situations d'enseignement-apprentissage naturelles pour les élèves. Maintenant que nous avons justifié le fait que l'on peut tenir le rôle de chercheure et d'enseignante, quelles sont les conditions à respecter et les précautions à prendre pour éviter les risques de biais?

## 3.2. Les conditions à respecter ou les outils de collecte de données

Tous les auteurs consultés s'entendent pour dire que la recherche, même si elle est menée par un enseignant, se doit de rencontrer toutes les exigences de la rigueur scientifique, mais qu'on ne peut exiger autant de robustesse qu'une étude menée en laboratoire (Dadds & Hart, 2001; Gattuso, 1993; Lankshear & Knobel, 2004; Mertler, 2006; Mialaret, 2004; Mills, 2000; Van Der Maren, 1995, 1999). Lankshear et Knobel rappellent que pour être considérée comme telle, une recherche doit détenir un minimum de caractéristiques et de qualités. Pour eux, le mot d'ordre pour toute recherche, qu'elle soit académique ou « professionnelle » est *systématique*. Ils poursuivent :

> « A key difference between academic and practitioner research is that practitioner researchers aim to tackle practical problems or issues as efficiently as possible. They are not concerned with demonstrating a sophisticated knowledge of the theory and methodology of an academic discipline area (or a particular paradigm) as an end in itself » (2004, p. 20).

Le praticien-chercheur s'attardera davantage à sélectionner intelligemment les méthodes systématiques et les outils pour répondre à ses préoccupations pratiques qu'à exposer avec finesse les théories et les disputes conceptuelles de sa discipline. Par contre, les auteurs considèrent que les normes de rigueur sont les mêmes pour les chercheurs-praticiens que pour les chercheurs académiques. Cependant, Gattuso (1993) rapporte que :

> « D'autres chercheurs (Mohr et MacLean, 1987; Bissex et Bullock, 1987) soutiennent que la recherche menée par les enseignants (teacher research) est

> un nouveau genre et elle ne doit pas nécessairement être liée par les contraintes des paradigmes de la recherche traditionnelle » (1993, p. 69).

Dans son chapitre sur la collecte de données en recherche-action, Mills (2000) affirme que c'est la nature du problème qui va déterminer quels sont les meilleurs outils pour collecter les données de la recherche. Il rappelle que l'approche qualitative, largement utilisée dans les recherches-action, n'est pas la voie « facile » pour ceux qui craignent les statistiques. Il avance que la rigueur pour mener des recherches qualitatives est la même que la rigueur requise pour les recherches quantitatives.

Selon Van der Maren (1999), aucune technique n'est parfaite, mais on doit tenter de produire des données fidèles, valides, vraisemblables et pertinentes par rapport aux questions de recherche. On doit se poser deux questions : quels sont les instruments les plus pertinents? Et l'échantillon est-il suffisant pour répondre et éclairer notre problème? Le problème de l'échantillon est présent ici : les participants ne sont pas choisis de façon aléatoire ni par boule de neige, mais bien parce qu'ils sont les élèves de la chercheure. Cependant, nous avons montré que la recherche appliquée a sa place et qu'elle veut « faire bien dans les conditions qu'on vit et avec les ressources que l'on a » (1999, p. 39). Ainsi, notre recherche est une mise à l'essai d'une séquence d'enseignement/apprentissage que nous ne prétendons pas généralisable à l'ensemble des élèves de la province.

Toujours selon Van der Maren (1999), pour être crédible, une recherche ontogénique doit respecter trois exigences, trois contraintes vu la position précaire dans laquelle se trouve l'enseignant qui examine sa pratique. Il s'agit de la constitution d'une trace primaire (notamment par enregistrement vidéo), la tenue d'une chronique dans un journal de bord et le recours à un tiers analyste. Bien que plus intrusifs, nous ajoutons le test et le questionnaire pour nous permettre une forme de triangulation.

Par contre, cette recherche n'étant que partiellement ontogénique, le rôle de l'enseignante dans cette recherche ne prend pas une place prépondérante. En effet, contrairement à Gattuso (1993), notre expérimentation n'est pas spécifiquement sur notre pratique, mais met plutôt les élèves en situation de résolution de problèmes. C'est pourquoi nous n'aurons pas recours à un tiers témoin.

## L’obtention d’une trace primaire par enregistrement vidéo

Van der Maren (1999) rappelle que si on veut observer ce qui se passe dans l’action, on doit se rappeler que le praticien est justement concentré sur la tâche. Il est plus difficile pour lui de réfléchir et d’analyser l’action en même temps que son déroulement puisqu’il doit gérer entre 20 et 30 élèves et les événements qui se déroulent de façon simultanée. Bien qu’il soit expérimenté, le praticien ne peut construire une praxis (conscience réfléchie) sans prendre du recul. La seule mémoire du praticien n’est donc pas suffisante; elle filtre les événements, en embellit, en enlaidit, en oublie. D’où l’importance de constituer une trace primaire, physique des événements tels que vécus dans le temps et l’espace et ce, le plus fidèlement possible, avec toute leur complexité et les interactions.

Une façon privilégiée par ce chercheur pour recueillir ces traces primaires est l’enregistrement vidéo. Par contre, cette méthode n’est pas sans inconvénients. D’abord, l’introduction d’une caméra vidéo peut contaminer la situation. Elle ne passe pas inaperçue et doit être accompagnée d’un opérateur. Certains élèves peuvent manifester des réactions de défense comme ne pas vouloir se montrer ou au contraire, d’autres peuvent s’exhiber et faire les clowns. Van der Maren (1999) propose de donner la chance aux élèves de manipuler ces appareils pour les apprivoiser. Nous suggérons également de les introduire quelques jours ou semaines avant l’expérimentation pour que les élèves s’y habituent.

Dans un souci de fidélité et de crédibilité, nous comptons utiliser l’enregistrement vidéo dans le cadre de notre recherche. Les élèves étant habitués d’être filmés (plusieurs de leurs anciennes enseignantes les ont filmés tout au long de l’année et leur ont donné le DVD en souvenir), nous croyons que les caméras ne contamineront pas la situation outre mesure. Aussi, nous installerons les caméras vidéo sur des trépieds et éviterons ainsi de recourir à des opérateurs qui pourraient exciter ou gêner les élèves.

## La consignation des observations dans un journal de bord

Lorsque l’enregistrement vidéo ne peut se faire, Van der Maren (1999) préconise la tenue d’une chronique des événements, d’un journal de bord quotidien. Même lorsqu’il y a captation vidéo (personne n’est à l’abri d’un problème technique), le journal de bord, en plus d’une description des événements, permet d’ajouter les souvenirs, les perceptions, les observations et les émotions du moment. Bien que cette démarche puisse être astreignante, il est important de faire le récit des événements de façon quotidienne pour ne pas laisser le temps altérer la mémoire. Nul besoin de justifier quelle qu'action que se soit à cette étape, la chronique est la description de la succession des actions. Ce n'est qu'ultérieurement, à l'étape de l'analyse, que l'on viendra faire les liens entre les activités, entre les données recueillies et le cadre conceptuel. À l'instar de plusieurs auteurs, (Gattuso, 1993; Lankshear & Knobel, 2004; Mertler, 2006; Mills, 2000; Van Der Maren, 1999), nous préconisons la tenue d'un journal de bord quotidien.

## Le test et le questionnaire

Bien que Van der Maren (1999) considère les données provoquées moins pertinentes en recherche pédagogique (parce que non naturelles et intrusives), nous croyons toutefois que le test et le questionnaire peuvent compléter nos observations. En effet, un petit test sur le fonctionnement du système de numération travaillé nous permettra d'évaluer la compréhension qu'ont les élèves de leur système de numération (*Retour sur votre système de numération* à l'annexe 11a). Ce test demande à l'élève de faire ressortir les ressemblances et les différences entre son système et le système indo-arabe et entre son système et les autres systèmes vus en classe. Aussi, le test reprend les notions de « base » et « base intermédiaire », la nécessité ou non du zéro et si le système travaillé est positionnel ou non. Nous croyons que le travail en équipe sur un système de numération, les présentations orales, les discussions qui les suivent et où l'on fait justement ressortir les ressemblances et les différences entre les différents systèmes et notre système actuel et la petite récapitulation pour voir les caractéristiques communes et le vocabulaire liés à la numération vont permettre aux élèves de répondre à la plupart des réponses.

Un autre petit test (*Retour sur les opérations dans votre système de numération* à l'annexe 11d) sera distribué à la fin des activités sur les opérations et demandera à l'élève de nommer les ressemblances et les différences entre les façons d'effectuer les opérations dans leur système et la méthode conventionnelle. Le questionnaire demande également à l'élève de réfléchir sur la supériorité de notre système positionnel indo-arabe en le comparant à leur système. Deux questions concernent l'évolution de la numération : « En quoi le peuple que vous avez présenté à la classe a contribué à l'évolution des mathématiques? » et « Nomme deux avancées majeures survenues dans l'évolution des mathématiques ». Cette réflexion personnelle précèdera et aidera à préparer une discussion (la dernière activité de la séquence).

Finalement, un questionnaire (*Retour sur l'ensemble des activités du projet* à l'annexe 11f), sous forme d'échelle, sur l'appréciation des diverses activités vécues dans le cadre de l'étude viendra nous renseigner sur l'intérêt qu'ont suscité les différentes tâches. On demande également à l'élève ce qu'il a le plus et le moins apprécié dans ce projet et pourquoi et ce, pour vérifier une hypothèse de notre recension des écrits qui faisait état de l'intérêt habituellement suscité par l'histoire des mathématiques. Nous posons aussi des questions aux élèves pour venir vérifier d'autres postulats de notre cadre conceptuel, à savoir si ce projet a modifié leur façon de percevoir les mathématiques et s'il leur a permis de mieux comprendre notre système de numération ou nos façons d'effectuer les quatre opérations. Nous sollicitons également les élèves pour des suggestions dans le but d'améliorer ce projet. Combinés à l'observation directe, au visionnement des enregistrements vidéo, à la lecture du journal de bord et à l'observation des affiches des élèves, le test et le questionnaire vont permettre une certaine triangulation des données.

## La triangulation des données

Mills (2000) rappelle que pour assurer sa crédibilité, le chercheur ne devrait pas se fier à une seule source de données. Il cite Sagor (en 1992) qui suggère que l'on devrait compléter un plan de collecte de données et identifier au moins trois sources différentes. Mills se veut moins prescriptif, mais il supporte le principe de triangulation.

Van der Maren (1999) explique que la triangulation des données peut être restreinte ou élargie. Elle est restreinte lorsqu'elle recueille de l'information sur un même événement ou objet auprès de différents informateurs en ayant recours à plusieurs techniques afin d'effectuer des comparaisons pour évaluer la relativité des traces obtenues. Ces comparaisons permettent de déceler les variations, les imprécisions et les désaccords et de préciser à quel point on est proche de la « vérité ». C'est la manière qualitative d'estimer la fidélité des traces. La triangulation élargie est plutôt une cueillette d'informations sur un même événement ou objet, mais auprès de personnes ayant un rôle différent (élève, parent, enseignant par exemple). Elle cherche à mettre en lumière la complexité de la situation et permet de compléter les informations provenant des différentes personnes. Mialaret (2004) parle aussi de la triangulation des données pour renforcer nos affirmations. Elle permet de s'assurer d'une meilleure objectivité des observations recueillies.

Nous nous en tiendrons à une triangulation restreinte dans le cadre de notre recherche. En fait, nous analyserons notre journal de bord parallèlement aux enregistrements vidéo et parallèlement aux questionnaires aux élèves. En effet, Van der Maren (1999) met en garde les chercheurs ontogéniques et précise que tout ce qui se passe dans une pratique professorale ne peut être analysé rationnellement, de façon logique. On ne peut s'imposer les caractéristiques du discours scientifique pour orienter notre action.

Par contre, lorsqu'on porte le double rôle de chercheure et d'enseignante, les risques de biais par manque d'objectivité sont grands. Voyons les précautions à prendre.

## 3.3. Les risques de biais

Nous avons vu que pour assurer une certaine objectivité du chercheur, celui-ci doit tenter de prévoir les risques de biais pour pouvoir les éviter. Les risques de biais décrits ici proviennent de l'ouvrage de Van der Maren (1995, pp. 244-250), mais ne sont pas spécifiques aux recherches menées par des enseignants, mais bien aux recherches en éducation en général. Nous pointons au passage les biais qui peuvent être accentués par notre double rôle et ceux qui peuvent être atténués. Nous voyons que le chercheur doit prendre conscience qu'il peut y avoir des biais à toutes les étapes de la recherche, particulièrement lors de la collecte de données et que les biais peuvent venir des élèves, du personnel de l'école ou encore, du chercheur lui-même.

### Les biais lors de la collecte des données

Selon Van der Maren (1995), quatre types de biais peuvent survenir à l'étape de la collecte des données. Il décrit d'abord l'effet de *stéréotypie*, quand l'observateur classe le sujet dans une catégorie (à partir d'informations préalables), ce qui l'amène à ne percevoir que les traits attachés à cette catégorie. L'auteur donne en exemple les examinateurs qui « oublient » de compter des erreurs chez un bon élève. L'effet de *halo* est proche du précédent; il se manifeste lorsque la première impression laissée par un sujet fait faire des liens non objectifs à l'examinateur. Nous croyons que l'enregistrement vidéo devrait nous permettre de contrer ces biais. Van der Maren (1995) détaille aussi l'*hyper* ou l'*hypoperception*, cette propension de l'observateur à noter ses informations en fonction de ses hypothèses (pour les favoriser ou pour les défavoriser). Notre recherche est plutôt construite à partir d'un objectif spécifique, on ne présume donc de rien. L'analyse *a priori* (la conduite attendue des élèves au chapitre 4) tente de prévoir ce que feront les élèves, mais l'intérêt de l'analyse *a posteriori* sera justement de confronter ce qui s'est réellement passé avec ce que l'on avait prévu. L'auteur aborde également le phénomène de la *perception sélective*, proche de l'effet précédent. Il se trouve chez certains chercheurs qui pourraient avoir tendance à protéger leurs hypothèses en laissant tomber des catégories d'éléments ou de faits, en ne considérant pas les effets secondaires.

Bref, la connaissance de l'existence possible de ces biais nous met en garde. Nous croyons que la bonne connaissance que nous avons de nos élèves et l'enregistrement vidéo peuvent aider à éviter ces biais.

## Les biais dus aux élèves

Les élèves se sentent concernés par une expérimentation sur eux. En effet, à peu près toutes les expérimentations impliquent une modification plus ou moins grande de leur environnement. Les élèves peuvent manifester une *exaltation* à l'idée qu'on expérimente sur eux, qu'on leur accorde une certaine importance. Ces réactions peuvent aller dans le sens des hypothèses ou non ou n'avoir rien à voir avec celles-ci, mais peuvent brouiller les cartes. Le contraire serait une forme d'*apathie,* si les élèves sont trop souvent sollicités pour participer à des recherches. Toujours selon Van der Maren (1995), la perception qu'ont les élèves de certains indices peut prendre la valeur de *consigne implicite* liée à leur statut dans la recherche. Par exemple, s'ils découvrent qu'ils font partie d'un groupe expérimental, ils peuvent être plus motivés ou intéressés ou tenter de mieux performer. À l'inverse, si les élèves découvrent qu'ils font partie d'un groupe témoin, cela peut les décevoir et affecter leur intérêt ou leur performance. En outre, les élèves peuvent se faire une idée des hypothèses de la recherche et selon leur lien affectif avec les expérimentateurs, peuvent être tentés de faire plaisir pour confirmer les hypothèses qu'ils croient connaître ou au contraire, vouloir faire rater l'expérimentation.

Ici encore, nous croyons qu'une bonne connaissance préalable des élèves, le fait qu'il y ait très peu de modifications dans leur environnement et que les situations soient habituelles et authentiques peut contribuer à diminuer ces effets. En effet, les élèves qui suivent le programme international ont l'habitude de faire six modules de recherche par année et ce projet en est un. On n'a donc pas ajouté une nouveauté ou modifié le fonctionnement habituel de la classe. De plus, comme il n'y a pas de groupe expérimental et de groupe témoin, cela contribue à éviter le principe de consigne implicite. Par contre, comme le lien effectif est fort entre la chercheure et ses élèves, elle devra être particulièrement vigilante pour que les élèves n'agissent ou ne répondent pas ce qu'elle veut voir ou entendre, pour lui faire plaisir. Elle mettra donc ses élèves en garde de ne pas répondre « pour lui faire plaisir », mais de la façon la plus naturelle et authentique possible. Les mêmes biais dus aux élèves peuvent se retrouver chez le personnel impliqué dans une telle recherche, mais nous ne nous étendons pas sur le sujet puisque dans notre cas, il n'y a pas de personnel intermédiaire entre la chercheure et les sujets. Il s'agit donc d'un avantage.

### Les biais dus au chercheur

Van der Maren (1995) parle de l'effet Rosenthal ou de l'effet Pygmalion qui impliquerait que le simple fait de vouloir vérifier une hypothèse contamine d'emblée les résultats. En effet, l'auteur explique que les attentes du chercheur « influencent la performance des sujets, qui dès lors comblent ses espoirs. […] il apparaît que ces attentes vont être communiquées aux sujets par des canaux variables » (1995, p. 250). Il existerait une dynamique de la communication entre l'expérimentateur et le sujet qui serait semblable à celle qu'on retrouve entre le maître et l'élève, quand chacun tente de s'ajuster aux messages et aux signaux de l'autre.

Ici encore, nous devrons être particulièrement vigilante à l'effet Pygmalion et le recours à une instrumentation rigoureuse peut améliorer la situation.

## 3.4. Les exigences de la rigueur scientifique

Nous allons maintenant voir les cinq exigences auxquelles toute recherche ayant une prétention scientifique est confrontée. En effet, qu'une recherche soit quantitative ou qualitative, elle doit rencontrer des exigences scientifiques de rigueur pour être considérée comme une recherche « scientifique ». Van der Maren (1999) les explique clairement dès le début de son ouvrage destiné aux praticiens chercheurs. Comme dans toutes les recherches, on mentionne : la fidélité, la validité ou la pertinence, la validité interne ou la consistance, la validité externe ou la transférabilité et l'objectivité. Pour chaque exigence dite « scientifique », nous viendrons nuancer et voir comment on peut les interpréter ou les adapter pour répondre aux particularités d'une recherche conduite par un enseignant.

## La fidélité ou la vraisemblance

Selon Van der Maren (1999), la fidélité des données exige que les traces de l'activité des sujets de l'étude doivent être le reflet de la réalité. Aussi appelé vraisemblance, ce critère exige une instrumentation qui permet d'éviter les déformations du contenu et de la forme. Nous avons déjà décrit l'instrumentation privilégiée pour notre recherche, soit le journal de bord, la captation vidéo et les tests pour assurer la fidélité des données.

## La validité ou la pertinence

Pour Van der Maren (1999), la validité des données ou leur pertinence demande au chercheur de dénommer, classer, catégoriser de la même manière les traces. Si sa façon de faire n'est pas consensuelle parmi les chercheurs du domaine, l'interprétation de cette trace n'est pas valide. Concernant la fidélité et la validité dans les recherches pédagogiques, Van der Maren met cependant un bémol. Il précise que :

> « […] en recherche appliquée, si on doit poser la question de la fidélité et de la validité des traces, on n'en fera pas une obsession. On ne va pas s'énerver avec ces questions comme on le fait dans la recherche scientifique. Pourquoi ? Parce que dans la pratique, le praticien ne va pas poser des questions métaphysiques, épistémologiques, académiques sur la valeur des observations qu'il recueille : il n'a pas le temps de se construire une instrumentation sophistiquée » (1999, p. 43).

L'auteur ajoute que la situation du praticien est plus complexe que celle du psychologue. En effet, il n'a pas un sujet, mais bien vingt à trente à observer. On ne peut donc pas demander une validité et une fidélité aussi robustes que l'on trouverait en laboratoire. Par contre, même s'il ne peut pas construire des instruments de mesure pour toutes ses observations, le praticien devra néanmoins le faire *a posteriori* et se demander quelle valeur a telle ou telle observation et le préciser dans son interprétation. Ainsi,

> « La prise en compte des caractéristiques de la pratique n'élimine pas les exigences méthodologiques de rigueur ; elle renverse simplement les priorités. Bien qu'analogique et floue, la trace pratique devra cependant être toute la trace, rien que la trace et la bonne trace » (1999, p. 45).

## La validité interne, la consistance ou la crédibilité

En ce qui concerne la validité interne du plan de recherche, Van der Maren (1999) fait référence à la consistance et à l'argumentation développée dans le programme de recherche. Y a-t-il cohérence entre les questions, les objectifs, la méthodologie préconisée et les conclusions ? Gattuso (1993) rapporte les propos de Goetz et Le Compte (en 1984) et de Van der Maren (en 1985) pour qui une longue présence sur le terrain, une bonne connaissance de celui-ci et une participation aux événements permet d'assurer une certaine crédibilité à la recherche. Elle se réfère aussi aux écrits de House, Mathison et McTaggart (parus en 1989) qui élargissent le concept de validité et considèrent que les enseignants peuvent se fier à leur expérience personnelle puisqu'une grande partie de ce qu'ils font a du sens et qu'une répétition d'événements qui seraient semblables ou une certaine régularité permettrait de faire de bonnes déductions, donc d'avoir une certaine crédibilité. Notre double rôle favorise donc la validité interne.

## La validité externe ou la transférabilité

Quant à elle, la validité externe du plan de recherche se rapporte à une connaissance suffisante des sujets, du terrain, des situations pour pouvoir transposer les conclusions de la recherche à d'autres échantillons. Si ce n'est pas le cas, la portée scientifique de l'étude est moindre (Van Der Maren, 1999). Pour décrire la validité externe, Lankshear et Knobel (2004) parlent plutôt de fiabilité, de consistance, de stabilité ou de « *replication* ».

Le fait que la chercheure soit aussi l'enseignante des élèves de l'étude amène une excellente connaissance du milieu (élèves, école, parents, quartier, etc.) pour pouvoir bien décrire ces sujets et ce milieu et pouvoir circonscrire à qui s'adresseront les conclusions de la recherche. De plus, en évitant un intermédiaire (le chercheur et l'enseignant ne faisant qu'un), on évite une étape dans l'interprétation des résultats (jeu du téléphone). Nous croyons que cela peut aussi favoriser la fidélité ou la vraisemblance de la recherche. Lankshear et Knobel aussi parlent de validité interne et externe, mais ils précisent que ces exigences découlent de :

> « […] an assumption that by doing research it was possible to arrive at –or at least, to get close to- a true or correct account of how things are in the world. […] This view of research quality was developed within quantitative inquiry and is usually associated with a positivistic approach to research» (2004, p. 361).

## L'objectivité

Finalement, l'objectivité ou la neutralité exige d'examiner l'indépendance de la démarche à toutes les étapes pour éviter les biais techniques, théoriques ou idéologiques du chercheur. On vérifie l'objectivité par l'explication transparente des démarches et par l'anticipation des biais (Van der Maren, 1999). En effet, si le chercheur annonce clairement les risques de biais, il a davantage l'assurance de mettre en place des dispositifs pour les éviter. C'est ce que nous avons fait dans les sections précédentes. Mialaret (2004) nous met en garde contre le problème d'objectivité des observations lorsque le chercheur est aussi l'enseignant des élèves. Puisque le chercheur est directement impliqué dans les situations, l'auteur préconise une équipe d'intervention et d'observation où le rôle de l'enseignant doit être pris en considération.

Concernant l'objectivité, Van der Maren fait ressortir des risques et des avantages à porter le double rôle de chercheur et d'enseignant. Dans sa partie intitulée *De la participation observante à la participation participante* (1999, p. 148), il explique les niveaux d'implication du chercheur et les dilemmes sous-jacents. À une extrémité, le chercheur est complètement impliqué, il est participant, comme c'est le cas ici. Selon lui, cette implication peut avoir des avantages. En effet, il avance que « l'implication maximale favorise la pertinence : on observe bien le problème observé ». Par contre, un des risques associés est le manque de recul pour observer de façon objective. Les préconceptions du chercheur participant peuvent interférer l'observation. À l'autre extrémité, le chercheur est plutôt un observateur. Bien qu'ayant plus de recul et d'objectivité et qu'il puisse observer plusieurs acteurs en même temps, les élèves peuvent être différents à cause de sa présence ou bien, il peut ne pas observer les éléments les plus pertinents en raison d'une méconnaissance du contexte de la classe. Il y a donc diminution de la pertinence des observations. Bref, si le chercheur est participant, il y a moins d'objectivité et de vraisemblance, mais plus de pertinence. Si le chercheur est plutôt observateur, il y a plus d'objectivité et un meilleur contrôle de ses biais, mais il y a moins de pertinence.

# Conclusion

Ce troisième chapitre méthodologique s'est ouvert sur une mise en contexte de notre recherche en la situant dans le vaste monde de la recherche en sciences de l'éducation. Nous avons utilisé la classification des types de recherche de Van der Maren (1999) selon quatre types d'enjeux, chacun ayant un rôle différent. Nous nous sommes particulièrement attardée à la recherche appliquée ou dite pédagogique (avec enjeux pragmatiques et ontogéniques) pour finalement parvenir aux recherches menées par des praticiens. Cette partie a mis en lumière les apports spécifiques des recherches menées par des enseignants, qui rappelons-le, permettent un rapprochement entre la recherche et la pratique, améliorent la qualité de l'enseignement et/ou de l'apprentissage, favorisent la réflexion sur la pratique de l'enseignant-chercheur et finalement, favorisent une meilleure compréhension des enjeux et une expérimentation plus naturelle vu la bonne connaissance du milieu par celui-ci.

En outre, nous avons vu les conditions particulières à mettre en place pour éviter les biais et satisfaire aux exigences de la recherche scientifique, c'est-à-dire l'utilisation d'une variété d'outils de collecte de données. En effet, nous allons constituer une trace primaire à l'aide d'enregistrements vidéo, tenir un journal de bord quotidien et passerons deux petits tests et un questionnaire fermé pour nous permettre une forme de triangulation. Ensuite, nous avons évoqué les biais qu'il est possible de rencontrer dans une recherche menée par un praticien pour mieux les éviter. Ceux-ci peuvent survenir lors de la collecte de données ou peuvent provenir des élèves, du personnel de l'école ou encore, du chercheur lui-même. Puis, nous avons rappelé les exigences de la rigueur scientifique de toute recherche digne de ce nom. On ne pouvait passer à côté de la fidélité, la validité ou la pertinence, la validité interne ou la consistance, la validité externe ou la transférabilité et l'objectivité. Comment tous ces aspects méthodologiques vont-ils se traduire dans la salle de classe? Le prochain chapitre présentera la séquence d'enseignement et le déroulement sommaire de la mise à l'essai.

# 4. La séquence d'enseignement/apprentissage

# Introduction

Notre cadre conceptuel délimité, notre objectif de recherche défini et les aspects méthodologiques de l'étude présentés, la séquence d'enseignement/apprentissage est développée dans ce chapitre. Rappelons que notre contexte d'enseignement, une école internationale, dicte les grandes lignes de notre séquence d'enseignement. Le chapitre s'ouvre d'ailleurs sur une description des sujets de l'étude, les élèves à qui s'adresse cette séquence. Le lecteur peut consulter à nouveau le *Plan de travail* à l'annexe 12, ce canevas de planification que l'on doit utiliser lors de l'élaboration d'un module de recherche. De plus, afin de respecter le programme du MÉLS, l'approche développée respectera les balises du socioconstructivisme. Finalement, les diverses pistes pour introduire des éléments de l'histoire des mathématiques dégagées au cadre conceptuel viendront alimenter notre réflexion.

Pour chaque activité, le lecteur trouvera une description, une justification, la conduite attendue des élèves, la conduite attendue de l'enseignante lorsque cela est pertinent, la durée et le matériel nécessaire. Nous avons divisé nos activités en trois types : les activités de mise en contexte, les activités d'apprentissage et les activités d'intégration. Pour que l'analyse soit plus riche et moins redondante au chapitre cinq, nous avons choisi de venir décrire brièvement comment se sont déroulées les activités au fur et à mesure que nous les présentons, pour voir immédiatement si elles se sont déroulées tel que prévu. Le lecteur trouvera ces descriptions en italique après chaque activité.

## 4.1. Les sujets

L'expérimentation a lieu dans la classe de la chercheure, une classe de cinquième année (élèves de 10-11 ans) suivant le Programme primaire international du Baccalauréat International (BI). L'école Wilfrid-Pelletier est située dans l'arrondissement Anjou, à l'est de Montréal. Comme il n'y a que 29 places offertes à l'ensemble des élèves de la Commission scolaire de la Pointe-de-l'Île (CSPÎ), les élèves sont sélectionnés à l'aide d'un test de Q.I. passé alors qu'ils sont en maternelle (dans notre classe, une vingtaine d'élèves, les autres s'étant ajoutés au fil des ans selon les changements de ratio et les déménagements. Ces autres élèves ont été admis après une demande de leurs parents et l'étude de leur dossier académique). L'ensemble des élèves de la classe (18 garçons et 11 filles) ont participé au projet et tous ont fait partie des observations de la chercheure. Évidemment, tous les parents des élèves ont signé un formulaire de consentement pour que leur enfant participe à la recherche et tous les élèves ont signé un formulaire d'assentiment. Les élèves sont généralement forts académiquement, quoique certains peuvent éprouver quelques difficultés en français ou en mathématiques. Dans la classe, aucun élève ne présente des troubles de comportement. Toutefois, ces élèves (particulièrement les garçons) sont très bavards. Ils ont toujours quelque chose à dire et habituellement, le propos est pertinent, intéressant ou drôle.

## 4.2. Les activités de mise en contexte

Les activités de mise en contexte permettent d'entrer dans le sujet et de faire surgir les connaissances antérieures des élèves. Elles permettent aussi de susciter le questionnement et de réaliser un survol du sujet. Cette première étape de notre séquence permettra la mise en commun et la catégorisation des connaissances des élèves. Cette étape s'apparente à ce que Suzanne Francoeur-Bellavance –spécialiste québécoise du travail en projet- appelle le « temps global » (Francoeur-Bellavance, 2008).

### Activité A : Ce que je sais… la carte d'exploration

Description : Faire une carte d'exploration des connaissances préalables des élèves sur l'histoire des chiffres. Inscrire au centre d'un grand papier accroché au tableau : *Histoire de la numération (des chiffres)* et demander aux élèves ce qu'ils connaissent de ce sujet. Leur demander de regrouper les éléments qui vont ensemble et les écrire d'une seule couleur.

Justification : Cette activité de préparation vise à faire surgir les connaissances des élèves puisque lorsque nous entamons un projet, il importe de connaître les connaissances que les élèves possèdent déjà. Le programme primaire international (PP) précise que :

> « […] lorsque nous planifions l'enseignement, il est important d'établir quelles sont les connaissances antérieures des élèves et de leur proposer […] des activités leur donnant l'occasion de vérifier et de réviser leurs modèles, d'établir des liens entre leurs perceptions antérieures et actuelles, et de construire eux-mêmes du sens en toute liberté » (Organisation du Baccalauréat International, 2007, p. 7).

Conduite attendue des élèves : À cette étape, les élèves ne devraient pas avoir une grande connaissance du sujet, mais comme ils sont cultivés et qu'ils utilisent la collection Défi mathématique depuis leur première année, ils pourraient nous surprendre. En effet, la collection Défi des niveaux antérieurs présente aux élèves divers aspects reliés aux systèmes de numération. Nous savons, par contre, que nos collègues ne font que les survoler puisqu'elles savent que ces systèmes seront vus en profondeur lorsque leurs élèves seront en cinquième année.

Conduite attendue de l'enseignante : Sur son site Internet, Francoeur-Bellavance propose différents outils pour les enseignants, notamment *les interventions possibles dans le travail en projet* et *l'interrogation méthodologique dans le travail en projet,* et ce, pour chaque étape du projet. À l'étape du temps global, elle préconise entre autres que l'enseignant :

> « réalise la mise en situation ou énonce une question de départ; fait l'inventaire des intérêts, des connaissances et des interrogations des élèves (nous garderons les interrogations pour une activité ultérieure intitulée « Questions des élèves et de l'enseignant »); respecte les idées de tous en évitant de porter des jugements hâtifs; regroupe les idées avec les élèves et utilise un code visuel facile à comprendre » (Francoeur-Bellavance, 2008).

La consultante propose aussi des questions possibles de l'enseignant dont nous nous inspirerons :

> « Qu'est-ce que vous connaissez déjà sur ce sujet ? Qu'est-ce qui se ressemble dans toutes ces idées et qu'on pourrait mettre ensemble? Qu'ont-elles en commun? Quel est le lien? Quel terme général, quel nom pourrait convenir à tel ou tel groupe? Quels autres éléments peut-on placer sous ce terme? Pourquoi? Quels liens peut-on faire entre les différents regroupements ou ensembles? » (Francoeur-Bellavance, 2008).

Lors de cette activité, nous demanderons aux élèves ce qu'ils connaissent de l'histoire des chiffres, ce qu'on peut regrouper, quel titre peut-on donner aux regroupements et nous demanderons aux élèves de justifier leur proposition de groupement et/ou leur titre. Comme il s'agit de faire surgir les connaissances antérieures des élèves, il faut écrire toutes leurs propositions, qu'elles soient justes ou non et à une étape ultérieure, ils pourront rectifier s'ils jugent avoir écrit des informations fausses.

Durée : 15 minutes

Matériel : Grand papier blanc, marqueur

*L'activité s'est déroulée sensiblement telle que prévue. Les élèves ont bien participé. Le lecteur pourra consulter la carte d'exploration dans le journal de bord à l'annexe 13. Durée réelle : 15 minutes.*

## Activité B : Compter sur son corps

Description : Distribuer à chaque équipe la figure de l'annexe 8 et expliquer comment les peuples autochtones d'Océanie comptaient non seulement avec leurs doigts, mais avec toutes les parties de leur corps (voir image et explications à l'annexe 8). Faire « compter » les élèves de cette façon (ou plus spécifiquement réciter la comptine des nombres).

Justification : Avant d'aborder des systèmes de numération complexes, on peut aborder des façons plus « primitives » de compter afin que les élèves remarquent les limites de cette méthode et voient qu'un système de numération répond avant tout aux besoins des gens d'un endroit. Cette activité s'inspire d'une façon présentée dans notre cadre conceptuel. En effet, elle relève des « opérations à la manière de…. » dans la mesure où le comptage s'apparente à une opération. Il s'agit d'un déclencheur pour piquer la curiosité des élèves, susciter leur intérêt, les faire réagir.

Conduite attendue des élèves : Les élèves risquent de trouver cette façon de compter très « enfantine » et surtout, très limitée au niveau des opérations.

Conduite attendue de l'enseignante : Nous demanderons aux élèves comment ils pensent que les Papous désignaient les grands nombres et comment ils effectuaient des opérations (addition, soustraction, multiplication et division) sur ces grands nombres.

Durée : 15 minutes

Matériel : Figure de l'annexe 8 en 30 exemplaires

*L'effet escompté s'est révélé; cette activité a fait réagir les élèves et a capté leur intérêt. Aussi, nous avons raconté l'anecdote de la rançon de guerre (tirée d'Ifrah, 1994a, mais racontée de mémoire) pour leur expliquer comment les Papous pouvaient effectuer des opérations qui donnaient des réponses beaucoup plus élevées que 41 (le dernier « nombre » papou à avoir un nom). Nous avons aussi parlé d'une tribu amazonienne qui avait un mot pour « un », un mot pour « deux » et ensuite, elle utilisait le mot « cheveux » pour beaucoup. Évidemment, les élèves trouvaient ces systèmes limités, mais nous avons* *fait ressortir que les humains inventent pour répondre à leurs besoins et que tous les peuples n'ont pas eu nécessairement besoin d'un système de numération élaboré. Durée réelle : 20 minutes.*

## Activité C : Un survol historique

Description : Lire ensemble les pages 80 à 83 et 86 des anciens manuels Défi sixième année (voir annexe 5) et discuter de ces façons de compter en répondant aux diverses questions posées au fil des pages.

Justification : En peu de temps, cette activité permet de voir plusieurs millénaires d'histoire des mathématiques. Ces façons de compter sont variées et parfois amusantes. Elles font référence à des activités des enfants (comptines et traits), ou à des objets que certains connaissent (chapelets). Ces quelques pages décrivent aussi l'apparition de la numération écrite sumérienne en racontant l'histoire d'une comptable mésopotamienne qui enfermait d'abord dans une bulle d'argile un nombre de moutons à se rappeler, pour ensuite imprimer sur la bulle son contenu et enfin, écrire sur une tablette d'argile avec les premiers chiffres de l'humanité. La page 86 présente différents outils de calcul comme les abaques romains primitifs et simplifiés, les bouliers chinois et russe et le quipu inca. Ces quelques pages permettent de sensibiliser les élèves à l'évolution de la numération et de montrer l'existence de différents outils de calcul. Aussi, l'exploration des différents outils de calcul permet de préparer l'activité 6 où les élèves recevront un outil de calcul et devront émettre des hypothèses quant à son fonctionnement.

Conduite attendue des élèves : Les élèves devraient être intéressés de voir des façons aussi originales de compter, bien que certains élèves risquent d'en connaître déjà quelques-unes.

Conduite attendue de l'enseignante : Faire lire les élèves, mener et alimenter la discussion. Poser des questions comme *: que pensez-vous de cette façon de faire? Avez-vous rencontré des difficultés en comptant de cette manière (chanson)? Etc.*

Durée : 30 minutes

Matériel : Anciens manuels de Défi mathématique de sixième année ou photocopies de l'annexe 5.

*Les élèves ont semblé trouver ce survol intéressant (participation, questions), mais l'heure de la fin des classes approchant, nous avons conclu un peu plus rapidement que prévu la dernière page sachant que nous allions revenir à ces instruments plus tard. Durée réelle : 25 minutes.*

## Activité D : La carte d'exploration (ajouts)

Description : Reprendre la carte d'exploration de l'activité A et ajouter des éléments que les élèves ont appris avec une nouvelle couleur.

Justification : Les élèves peuvent constater qu'ils ont déjà acquis de nouvelles connaissances. Ces ajouts permettent également de susciter de nouvelles questions pour la prochaine étape.

Conduite attendue des élèves : Les élèves devraient ajouter des éléments et les organiser (façons de compter, objets utilisés, etc.).

Conduite attendue de l'enseignante : Prendre en note les suggestions des élèves, ne rien proposer et rappeler de regrouper les éléments qui vont ensemble.

Durée : 10 minutes

Matériel : Grand papier blanc, marqueur

*Nous avons cette fois-ci utilisé un marqueur rouge pour mettre en lumière les nouvelles connaissances. L'annexe 13 présente la carte d'exploration enrichie. Durée réelle : 10 minutes.*

## Activité E : Les questions de l'enseignant et des élèves

Description : Demander aux élèves d'écrire les questions qu'ils se posent ou ce qu'ils aimeraient connaître sur l'histoire de la numération sur des fiches autocollantes et les ramasser. Avec l'aide de la classe, les relier aux quatre pistes de recherche suivantes :

A. La représentation des nombres et le fonctionnement des systèmes de numération dans différentes civilisations;

B. Les quatre opérations dans ces systèmes;

C. Les facteurs et les besoins ayant conduit à la création et à l'évolution de la numération

D. L'évolution des systèmes jusqu'à notre système actuel.

Dévoiler ensuite les cinq questions de l'enseignante qui viendront enrichir la recherche des élèves.

1) Quelles sont les ressemblances et les différences entre les différents systèmes à l'étude et le système actuel ?
2) Comment les premiers systèmes de numération et leurs opérations mathématiques fonctionnaient-ils ?
3) Quels sont les facteurs et les besoins humains qui ont pu influencer la création et l'évolution des divers systèmes de numération ?
4) Comment la numération a évolué jusqu'à notre système actuel ?

Justification : Dans le but de répondre aux exigences du programme primaire international qui considère les questions des élèves et de l'enseignant comme un des éléments essentiels du programme d'étude, une véritable « force motrice des recherches » (Organisation du Baccalauréat International, 2007, p. 18). Rappelons que les concepteurs du PP ont élaboré huit concepts pour enrichir la recherche. Ils y ont rattaché une question clé générale en exemple. Il s'agit de la forme (*comment est-ce?*), la fonction (*comment cela fonctionne-t-il?*), la causalité (*pourquoi est-ce ainsi?*), le changement (*comment cela change-t-il?*), la relation (*comment est-ce lié à d'autres choses?*), la perspective (*quels sont les différents points de vue?*), la responsabilité (*quelle est notre responsabilité?*) et la réflexion (*comment savons-nous?*). Aussi, les interrogations des élèves font également partie du temps global, la première étape du travail en projet proposée par Francoeur-Bellavance.

Conduite attendue des élèves : Les élèves devraient être curieux et souhaiter en apprendre plus suite à la carte d'exploration et aux différentes activités de mise en contexte.

Conduite attendue de l'enseignante : Voici quelques questions proposées par Francoeur-Bellavance et dont nous nous inspirerons :

> « Qu'est-ce que vous aimeriez comprendre que vous ne comprenez pas actuellement sur ce sujet? Que désirez-vous apprendre sur ce sujet? Qu'aimeriez-vous approfondir sur ce sujet? Quelles questions vous posez-vous sur ce sujet? » (Francoeur-Bellavance, 2008)

Durée : 20 minutes

Matériel : Grand papier blanc, marqueur, affiches autocollantes

*Les élèves ont écrit des questions qu'ils avaient sur l'histoire des chiffres et ils tentaient de les relier à une des questions de l'enseignante (écrites sur du papier-conférence). Si une question d'élève ne pouvait être reliée à une question de l'enseignante, nous la mettions dans une catégorie à part. En présentant les questions de l'enseignante, nous avons mentionné sur quels systèmes nous allions travailler. Quelques élèves avaient des connaissances de certains de ces peuples. Dans la mesure du possible, nous avons tenté de faire travailler les élèves sur un peuple qui les intéressait. Nous leur avons d'ailleurs ouvert la porte à nous faire des demandes spéciales que nous allions tenter de respecter lors de l'attribution des systèmes aux équipes. Le lecteur peut consulter les questions des élèves à l'annexe 13. Durée réelle : 30 minutes.*

## 4.3. Les activités d'apprentissage

Les activités de mise en contexte ayant suscité l'intérêt des élèves, nous passerons aux activités d'apprentissage qui sont au cœur de notre séquence. D'approche socioconstructiviste, ces activités placeront les élèves en état de déséquilibre. Pour retrouver l'équilibre, l'élève devra réorganiser ses connaissances, interagir avec ses pairs, faire des essais et des erreurs et finalement, s'approprier d'autres façons de représenter les nombres et d'effectuer les opérations qui ne sont pas les siennes. Les activités d'intégration se retrouvent évidemment en fin de séquence puisqu'elles visent l'intégration et la réorganisation des nouveaux apprentissages, mais certaines se trouvent intercalées aux activités d'apprentissage. Comme les activités sont présentées dans l'ordre chronologique, nous préciserons lesquelles sont considérées comme des activités d'intégration. Notons que les trois activités où les élèves présentent leurs trouvailles sont en quelque sorte des activités d'intégration puisqu'elles permettent aux élèves d'expliquer leurs découvertes au reste de la classe et permettent à l'enseignante de voir ce qu'ils comprennent.

### Activité 1 : Le fonctionnement des différents systèmes de numération

Description : Chaque équipe de la classe (six équipes de quatre ou cinq élèves) reçoit la fiche (feuille de travail) d'un système de numération présenté, mais non expliqué (systèmes sumérien, égyptien, babylonien, romain, chinois, maya, voir fiches en annexe 9). En équipe, les élèves doivent comprendre le fonctionnement du système et compléter la feuille de travail en inscrivant les nombres ou symboles manquants. Un corrigé sera disponible lorsque les élèves auront terminé.

Justification : Cette activité combine deux façons d'intégrer l'histoire des mathématiques présentées dans la section 2.1. En effet, nous utilisons *la feuille de travail* où le degré de difficulté augmente graduellement et les notations anciennes présentées dans la partie : *les activités expérimentales.* Cette activité permet aux élèves de découvrir un système de numération du passé. Comme certains systèmes sont plus complexes que d'autres, le travail en équipe s'avère être une bonne option. Rappelons l'importance des interactions sociales dans le socioconstructivisme. En effet, celles-ci permettent de voir différentes stratégies pour résoudre un problème et de ne pas être seul face au conflit cognitif s'il se présente. Les équipes de travail seront les équipes de base pour la troisième étape de l'année scolaire et par souci d'hétérogénéité, elles seront formées par l'enseignante à l'aide d'un sociogramme. En effet, l'enseignante fait remplir un questionnaire à ses élèves (voir annexe 10) qui l'aide à déterminer différents statuts et répartit les hauts statuts (les participants, les populaires et les compétents) et les bas statuts (les agressifs et les passifs) (Sabourin, 2006). Elle ajoutera une nouvelle variable pour la formation des équipes : au moins un élève par équipe sera fort en mathématiques dans les deux premières compétences (résoudre des situations-problèmes et raisonner à l'aide de concepts et processus mathématiques).

Rappelons la première caractéristique de l'enseignement de la numération évoquée par Bednarz et Janvier : « Grande insistance mise sur le passage de l'écriture symbolique du nombre « chiffre, position » à la symbolisation « unités, dizaines, centaines,… » (1984, p. 7). Les auteures avaient remarqué que malgré les nombreux exercices répertoriés dans les manuels scolaires, les résultats étaient décevants : pour beaucoup d'enfants, un nombre n'était qu'une suite de chiffres, les mots *unité, dizaine, centaine* n'étant pas véritablement compris. Nous croyons qu'un travail sur plusieurs systèmes de numération présentant des bases, des types et des ordres de présentation différents viendra contrer cette difficulté. En effet, le travail dans différentes bases fait directement référence à l'idée de groupements. En base 20 par exemple, on doit parler de « paquets de 20 » ou de vingtaines pour décrire le système. De plus, apprendre qu'ont existé des systèmes additifs et hybrides, en plus des systèmes positionnels améliorera sans doute l'interprétation véritable de la valeur de position des élèves. En outre, voir des systèmes qui présentent les unités à gauche (égyptien, sumérien) plutôt qu'à droite ou des positions en étages (maya) plutôt qu'en colonnes aidera l'enfant à accorder une signification véritable aux expressions *unités, dizaines, centaines.*

Revoyons également la deuxième caractéristique décrite dans l'article de Bednarz et Janvier : « Toute représentation d'un nombre apparaît selon un alignement reprenant l'ordre de l'écriture conventionnelle du nombre » (1984, p. 11) et qui fait état des manuels qui font référence à du matériel de manipulation (multi bases, bâtonnets, abaques et autres). Dans ces représentations, les unités sont toujours à droite, les dizaines ensuite, puis les centaines, etc. alors que cet alignement systématique n'est pas nécessaire. En outre, nous croyons qu'un travail sur les systèmes égyptien et sumérien, qui se présentent de droite à gauche (les plus petits ordres à gauche), sera une façon de déjouer cette caractéristique. Aussi, les systèmes additifs, avec leurs symboles différents pour chaque ordre, font directement référence aux groupements. Comme nous l'avons vu plus tôt, peu importe sa place dans le nombre, une corde vaut toujours cent chez les Égyptiens.

Aussi, Bednarz et Janvier avaient remarqué que même si « le travail dans différentes bases se veut un support à la compréhension de notre système de numération » (1984, p. 22), les exercices proposés dans les manuels ne vont pas dans ce sens. En effet, les élèves n'y voient aucun lien avec l'écriture des nombres en base décimale. Pour nous, il est évident qu'un travail sur les systèmes sumérien et babylonien (en base 60) et maya (en base 20) permet de faire des liens avec notre système en base 10, surtout si on demande aux élèves d'expliquer au reste de la classe le fonctionnement du système de numération qui leur était attribué. Des caractéristiques vont se préciser quant aux différentes bases et aux différents types de systèmes (additifs, positionnels, hybride). Des élèves pourraient utiliser les termes « vingtaine » et « soixantaine » pour décrire leur système ou mieux, faire le lien avec le terme plus familier « dizaine ». Moyer (2001) est aussi d'avis que l'exploration de différents modèles de groupements venant de nos prédécesseurs peut renforcer la compréhension de notre système de numération décimal.

<u>Conduite attendue des élèves :</u> Comme chaque équipe travaille sur un système différent, les élèves risquent de rencontrer des difficultés spécifiques à chaque système. C'est pourquoi nous détaillons la conduite attendue des élèves séparément, pour chaque système travaillé. Avant de voir le détail de chaque système, voyons un aperçu de l'activité.

*Pour cette première activité d'apprentissage, trois équipes sont allées dans un autre local pour travailler une autre matière avec l'enseignante du lundi et du mardi. Les trois autres équipes sont restées en classe pour travailler à leur système de numération. Chaque équipe était filmée par une caméra. Pour la première fois avec les caméras, nous avons rappelé aux élèves que nous allions sans doute être la seule à visionner ces enregistrements, que nous souhaitions qu'ils reflètent le plus fidèlement possible la réalité et nous espérions qu'ils ne soient pas plus excités ou plus sages puisqu'ils se savaient filmés. Nous leur avons toutefois mentionné que de très courts extraits pouvaient éventuellement être montrés à des étudiants en éducation ou à des participants à des colloques internationaux. Ils étaient d'ailleurs très impressionnés de savoir qu'ils allaient peut-être être vus à l'étranger. Ces mises au point face à la caméra faites, les équipes se sont mises au travail. Lorsqu'ils terminaient leur feuille de travail, les élèves se corrigeaient à l'aide des corrigés. Ils décidaient ensuite ce qu'ils allaient mettre sur leur affiche et commençaient à la faire. Plus de temps était accordé cette semaine-là pour compléter la confection des affiches.*

Système sumérien : La difficulté de ce système est bien évidemment sa base 60. Certains élèves de cette équipe vont peut-être avoir de la difficulté à concevoir un système avec une base autre que décimale, mais comme il s'agit d'un système additif, il est relativement facile à comprendre puisqu'il suffit de savoir additionner pour représenter les nombres. Nous présumons donc qu'au moins un élève de l'équipe le comprendra rapidement et pourra l'expliquer à ses coéquipiers. La première partie du travail (première colonne) est relativement facile puisqu'elle ne dépasse pas 60, la base de ce système. Cela permet aux élèves de comprendre le principe de système additif avec des symboles pour 1 et pour 10. Certains élèves vont peut-être faire référence à la planche à calculer qu'ils connaissent bien pour avoir travaillé dessus au deuxième cycle . Voici à quoi ressemble cette planche. Elle peut avoir trois ou six colonnes (ou plus) selon le niveau des élèves. Les élèves manipulent d'abord des jetons sur cette planche, tel un abaque romain ou lorsqu'elle est plastifiée, ils écrivent des petits tirets ou des chiffres avec un crayon effaçable.

**Figure 27** Un exemple de planche à calculer

| Centaines de mille | Dizaines de mille | Unités de mille | Centaines | Dizaines | Unités |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |

La deuxième partie de la feuille de travail se corse, mais comme la complexité augmente graduellement et que la valeur de chaque nouveau symbole est clairement indiquée, les élèves devraient continuer à additionner ces symboles.

*Nous avons attribué le système sumérien à une équipe dont un membre avait fait une recherche sur l'écriture sumérienne l'année d'avant; nous trouvions que cela faisait une belle continuité. L'équipe était composée de deux filles et deux garçons. Les élèves de cette équipe ont terminé la feuille très rapidement (en seulement 9 minutes) et ce, sans erreur.*

Système égyptien : Le système égyptien demeure le plus facile à comprendre. En base dix comme notre système moderne, il suffit d'additionner la valeur de chaque hiéroglyphe. Les élèves ne devraient donc pas éprouver de difficulté. De plus, la valeur de certains nouveaux symboles étant clairement donnée (1, 10, 100 000 et 1 000 000) et les autres (100, 1 000, 10 000) étant introduits graduellement un à la fois, les élèves devraient relever le défi assez facilement. Certains élèves feront peut-être référence à la planche à calculer qu'ils utilisaient au deuxième cycle.

*L'équipe travaillant sur le système égyptien était composée de trois garçons et deux filles. Nous leur avons attribué ce système parce qu'un membre de cette équipe nous avait informée qu'il s'intéressait au peuple égyptien. Ces élèves ont terminé très rapidement (en neuf minutes), se sont corrigés (ils n'avaient pas d'erreurs) et ont commencé leur affiche.*

Système babylonien : Ce système est de loin le plus difficile de tous ceux présentés dans ce projet. La base soixante peut poser problème, mais encore plus que pour le système sumérien puisqu'ici, il s'agit d'un système positionnel. Les repères des élèves seront changés; ils ne devront plus compter en unités, dizaines, centaines…, mais en unités, « soixantaines » et « soixantaines de soixantaines ». Une telle complexité nécessite de réserver ce système à une équipe plus forte, à laquelle il faudra fournir plus d'aide afin qu'elle puisse relever le défi. L'aide apportée sera sous forme de questions aux élèves et est plus amplement détaillée dans la partie *Conduite attendue de l'enseignante* à la page suivante. Ici aussi, la première partie devrait se faire relativement facilement puisque les nombres à découvrir sont inférieurs à 60, la base de ce système. À cette étape, le système babylonien semble être un système additif en base 10. Le passage aux « colonnes » se fait dans la deuxième partie. Les élèves connaissent la valeur des trois symboles utilisés (0, 1 et 10), mais ils risquent de ne pas comprendre sur le coup. Ils devront regarder l'exemple suivant qui est donné pour déduire que le 1 dans la colonne de gauche vaut 60. Si aucun élève de l'équipe le déduit, le questionnement de l'enseignante devrait les aider (voir la conduite attendue de l'enseignante). Lorsque les élèves arriveront à la troisième colonne, c'est ici que ça risque d'être vraiment difficile. Surtout que Bednarz et Janvier (1984, p. 21) ont remarqué que le passage aux premiers groupements (ici les soixantaines) est plus facile que le passage aux groupements de groupements (ici les soixantaines de soixantaines). En effet, selon les auteures, les élèves peuvent voir les deux ordres de groupements, mais les confondre ou mal les coordonner. Le support de l'enseignante sera sans doute requis.

*Le système babylonien, tel que prévu, a été réservé à une équipe plus forte, elle aussi formée de trois garçons et deux filles. Un élève de cette équipe nous a rappelée qu'il souhaitait justement travailler sur ce système. Un autre élève de l'équipe, qui a beaucoup de difficulté au niveau de ses habiletés sociales, prenait toute la place et ne laissait pas placer un mot aux autres élèves de l'équipe. Nous avons même dû intervenir et rappeler que dans un travail d'équipe, tout le monde devait émettre ses hypothèses. Cette intervention l'a calmé et il a plus écouté ses coéquipiers. Ils ont mis 30 minutes à terminer la feuille de travail.*

Système romain : Si certains élèves connaissent déjà ce système dans l'équipe, sa compréhension devrait en être grandement facilitée. Par contre, il s'agit d'un système assez complexe puisqu'il est tantôt additif, tantôt soustractif, avec une base auxiliaire 5. Ainsi, les nombres formés en ayant recours à la soustraction comme 14, 49 ou 92 risquent d'être plus difficiles à trouver, mais les premiers exemples (4 et 9) sont donnés dans le travail à réaliser. Une autre difficulté est le fait de ne pas donner clairement la valeur du symbole du 50 et de l'introduire dans un exemple qui a recourt à la soustraction. Si jamais les élèves ne l'identifient pas, les questions de l'enseignante ou le corrigé devraient leur permettre de trouver sa valeur. Même si la valeur des nombres 100 et 1 000 n'est pas clairement donnée, nous croyons que les élèves les trouveront facilement, surtout que ce sont les premières lettres des mots *cent* et *mille*.

*L'équipe des Romains voulait travailler sur ce système. Les cinq membres de l'équipe (trois garçons et deux filles) se sont rapidement mis à la tâche. Après 16 minutes, ils avaient terminé, mais ils ont commis deux erreurs concernant le L (50). Cela leur a pris 8 minutes à corriger leurs erreurs. Ils ont pu nous expliquer le fonctionnement du système avant de se mettre à faire l'affiche. Ils ont terminé la feuille de travail en 25 minutes.*

Système chinois : Le fait que ce système soit en base dix va aider à sa compréhension, mais le recours à la multiplication peut poser problème. Les élèves qui maîtrisent bien la décomposition des nombres devraient avoir plus de facilité à relever le défi. Dans la feuille de travail, la valeur de tous les symboles devait être clairement donnée pour que les élèves comprennent le principe additif et multiplicatif. C'est pourquoi, nous donnons la valeur des nombres de 1 à 10 et donnons un exemple du nombre 23 (2-10-3). Le symbole du cent est jumelé au symbole du 4 pour un exemple du nombre 104. La valeur du nombre 1 000 est donnée, mais la valeur du symbole de 10 000 doit être déduite. Comme la complexité augmente graduellement, nous croyons que les élèves devraient réussir. Ici aussi, le questionnement de l'enseignante devrait guider les élèves vers la résolution de ce problème s'ils éprouvent de la difficulté.

*Le système chinois a été attribué à une équipe composée aussi de trois garçons et deux filles, dont une des filles, d'origine chinoise, nous avait suppliée de lui donner ce système. Nous hésitions puisqu'elle connaissait déjà les symboles, mais elle nous affirmait qu'elle ne savait pas comment les Chinois comptaient. Les élèves ont terminé la feuille de travail en 16 minutes et n'avaient pas d'erreurs.*

Système maya : Bien que sa base 20 soit moins grande, ce système demeure aussi complexe que le système babylonien car il est positionnel. L'irrégularité du troisième ordre qui est 360 au lieu d'être 400 risque de brouiller les cartes des élèves et de les mêler davantage. Les aider par le questionnement et leur expliquer l'irrégularité s'ils sont bloqués.

*L'équipe qui a travaillé sur le système maya se l'est vu attribuer car une des élèves de cette équipe avait voyagé au Mexique et connaissait l'existence des chiffres et du calendrier mayas; elle a d'ailleurs démontré son intérêt pour ce peuple. Comme prévu, ce système positionnel a posé des problèmes, mais surtout à cause de l'irrégularité du troisième ordre qui est à 360 plutôt qu'à 400 (20 vingtaines). Ils ont terminé en 30 minutes.*

Conduite attendue de l'enseignante : Soutenir les élèves, leur demander d'expliquer le fonctionnement du système travaillé, les encourager, les questionner pour vérifier ce qu'ils comprennent et où ils ne comprennent pas. Si nécessaire, questionner les élèves sur le fonctionnement de notre système actuel. Ils devraient parler des chiffres et des colonnes (unités, dizaines, centaines…). Pour les élèves travaillant sur les systèmes babylonien et maya, leur faire voir la similitude entre le fonctionnement de notre système et celui à l'étude. Lorsqu'ils auront compris le premier groupement, les laisser continuer pour voir s'ils réussiront à comprendre le troisième ordre (les soixantaines de soixantaines) et si non, revenir à notre système actuel et à la formation de la centaine. Pour s'assurer de demeurer dans une approche constructiviste, il est important, dans la mesure du possible, de ne pas montrer aux élèves comment faire, ni leur donner des réponses. C'est par le questionnement et en partant de leurs connaissances antérieures (ici, notre système de numération ou de la planche à calculer) que les élèves vont construire leurs connaissances.

Durée : 60 minutes

Matériel : Six fiches des systèmes de numération (annexe 9) et crayons

*L'activité 1 s'est déroulée sensiblement tel que prévu. Certaines équipes ont terminé particulièrement rapidement (systèmes égyptien et sumérien en neuf minutes). Le fonctionnement des systèmes babylonien et maya a été plus long à dégager. Toutes les équipes ont eu une période de 60 minutes pour trouver le fonctionnement du système, compléter la feuille de travail, se corriger et commencer leur affiche pour la présentation.*

## Activité 2 : La présentation des systèmes de numération (intégration)

Description : Sur un grand carton, chaque équipe prépare une affiche expliquant son système de numération et présente ses découvertes à la classe. Après sa présentation, pour impliquer les élèves de la classe, chaque équipe les met au défi de « déchiffrer » un nombre de leur système en nombres indo-arabes et d'écrire avec les symboles de ce nouveau système, un nombre indo-arabe donné par l'équipe.

Justification : Comme chaque système est fort différent des autres et que chacun permet de faire différents apprentissages, il serait pertinent que les élèves voient les autres systèmes (voir la justification de l'activité 1). Aussi, comme l'enseignante questionnera les élèves pour faire ressortir les avantages et les limites de chaque système, ainsi que les ressemblances et les différences avec notre système actuel ou un autre système déjà présenté, cette activité permet à chacun de profiter des apprentissages de l'activité précédente et d'avoir une vue d'ensemble de l'évolution de la numération. Cette activité devrait être très riche en observations pour la chercheure. Elle pourra ainsi constater ce que les élèves ont compris et réajuster le tir s'il y a lieu. Nous considérons cette activité une activité d'intégration puisque les élèves de chaque équipe doivent expliquer le fonctionnement de leur système. Comme les élèves de la classe seront invités à relever deux défis de « déchiffrage », ils auront un rôle actif pendant les présentations et pourront vérifier s'ils ont compris. Cette partie des présentations s'inspire des notations anciennes décrites dans les activités expérimentales. De plus, la présentation des différents systèmes par les élèves mise sur les interactions sociales, si importantes dans une approche socioconstructiviste, et permet également de travailler la compétence 3 en mathématiques : communiquer à l'aide du langage mathématique.

Conduite attendue des élèves : Les élèves de la classe devraient être curieux et intéressés, poser des questions, tenter de compléter, enrichir la discussion.

Conduite attendue de l'enseignante : Après chaque présentation, questionner les élèves sur les ressemblances et les différences entre le système présenté et les autres systèmes (dont le système indo-arabe). Introduire le vocabulaire si c'est pertinent (base, système additif, hybride, positionnel).

Durée : 60 minutes (préparation des affiches et des présentations)

90 minutes (15 minutes par présentation)

Matériel : Six fiches des systèmes de numération de l'activité précédente, six grands cartons et marqueurs

*Toutes les équipes avaient commencé leur affiche suite à l'activité sur les systèmes de numération. Nous n'avons pas filmé cette période supplémentaire de préparation puisque les six équipes étaient en même temps dans la classe. Nous avons accordé une heure, mais la plupart des équipes avaient terminé dans la première demi-heure. Plusieurs équipes étaient volontaires pour briser la glace. L'équipe des Égyptiens a été tirée au sort. Elle a fait une présentation courte et efficace. Cette première présentation a été plus courte que les autres puisque d'une part, le système égyptien est le plus simple et que d'autre part, nous ne pouvions faire ressortir les ressemblances et les différences qu'avec notre système actuel, les autres systèmes n'ayant pas encore été présentés. La présentation, le défi et la discussion ont duré 15 minutes.*

*La deuxième équipe à présenter a été celle des Chinois. Les élèves ont nommé en chinois tous les symboles de leur affiche puisque l'élève chinoise prend des cours de chinois. La présentation, le défi et les questions ont duré 25 minutes.*

*Ce jour-là, trois équipes ont présenté leur système. La première équipe pigée a été celle des Romains, un autre système en base 10. Les élèves avaient écrit des jeux de mots qu'ils ont lus au début de leur présentation, mais qu'ils ont expliqués à la fin. Ils ont écrit « M choses à apprendre » pour « mille choses à apprendre » et « C complication » pour « cent/sans complication ». La présentation, le défi et les questions ont duré 25 minutes.*

*La deuxième équipe de la journée à présenter a été celle des Sumériens. La présentation, le défi et les questions ont duré 27 minutes. Enfin, la dernière équipe à présenter ce jour-là a été l'équipe ayant travaillé sur le système maya, le premier système positionnel. Après quelques minutes d'explication, comme plusieurs élèves ne comprenaient toujours pas, nous avons invité l'équipe à présenter des nombres plus petits comme 42, 56, etc. Par la suite, le système semblait mieux saisi par les élèves. La présentation, le défi et les questions ont duré 33 minutes.*

*L'équipe ayant travaillé sur le système babylonien, qui n'avait pas pu présenter la semaine précédente, a présenté son système à la classe. Malgré la difficulté de ce système positionnel en base 60, les élèves l'ont très bien expliqué, faisant de nombreux liens avec le système maya déjà présenté, notre système indo-arabe et la planche à calculer. La présentation, le défi et les questions ont duré 25 minutes.*

*Cette activité s'est déroulée tel que prévu sauf pour la durée des présentations. Nous avions alloué seulement 15 minutes par présentation, alors que dans la réalité, il en a fallu entre 15 et 33. Le temps des présentations a doublé puisqu'il y a eu les défis que les élèves* *de la classe devaient relever (traduire des symboles en nombres indo-arabes et vice-versa) et il y avait également la discussion où nous faisions ressortir les ressemblances et les différences entre le système présenté, notre système actuel et les autres systèmes présentés.*

### Activité 3 : Une activité d'enrichissement : les autres systèmes de numération

Description : Donner les 6 feuilles de travail des différents systèmes de numération à tous les élèves de la classe pour qu'ils puissent les faire en travail personnel (TP). Le TP est l'ensemble des devoirs de la semaine que les élèves doivent compléter. Ils ont deux à trois périodes de 54 minutes en classe pour s'avancer et pour consulter leurs coéquipiers ou l'enseignante lorsqu'ils ne comprennent pas. Il s'agit du mode de fonctionnement habituel de cette classe pour les devoirs. Laisser les corrigés à leur portée pour qu'ils fassent ensuite une autocorrection.

Justification : Cette activité permet à chaque élève de se familiariser avec l'ensemble des autres systèmes de numération, pas seulement celui sur lequel il avait travaillé en équipe. De plus, comme le TP se fait en partie à la maison, il permet de poursuivre la discussion à la maison avec les parents.

Conduite attendue des élèves : Après avoir vu les présentations de leurs compagnons de classe, les élèves devraient être intéressés à relever le défi et devraient pouvoir y arriver.

Conduite attendue de l'enseignante: Elle devrait encourager les élèves à consulter l'équipe « experte » s'ils ont des difficultés avec un système. Si trop d'élèves éprouvent des difficultés avec les systèmes babylonien et maya, notamment, il pourrait être pertinent de faire un retour collectif.

Durée : 60 minutes ou à temps perdu

Matériel : Six feuilles de travail (annexe 9) en 30 copies

*Cette activité a permis aux élèves d'expliquer ces systèmes à leur famille. Ils n'ont pas semblé éprouver de difficultés à le faire puisqu'ils ont peu consulté les équipes expertes comme nous leur avions suggéré et que lors de l'autocorrection, la plupart des élèves avait tout bon ou très peu de fautes. Cependant, nous n'avons pas vérifié ou ramassé les feuilles. Aussi, comme nous leur avions annoncé ce devoir avant les présentations, nous croyons* *qu'il a peut-être contribué à conserver leur attention et leur participation lors des présentations.*

## Activité 4 : Une récapitulation (intégration)

Description : Écrire le nom de chaque système travaillé (sumérien, égyptien, babylonien, chinois, romain et maya) ainsi que le système indo-arabe sur des cartons et demander aux élèves de classer les systèmes selon des caractéristiques communes.

Justification : Cette activité ne s'inspire pas directement d'une façon décrite dans notre cadre conceptuel. Cependant, nous la trouvons très pertinente puisqu'elle permet aux élèves de construire eux-mêmes leurs apprentissages (tel que prôné par une approche socioconstructiviste), de dégager les caractéristiques des différents systèmes de numération et de nommer certaines de leurs caractéristiques (base, base intermédiaire, système additif, hybride, positionnel, etc.). Elle mise également sur les interactions sociales puisque c'est avec la contribution de plusieurs élèves que les différentes classifications devraient émerger. Aussi, elle prépare le terrain pour remplir la fiche « Retour sur votre système de numération ». Même si les élèves ne possèdent pas encore le vocabulaire spécifique, cette activité permet de l'introduire.

Conduite attendue des élèves : Les élèves devraient d'abord proposer un classement selon la base, car c'est la caractéristique la plus évidente. Ensuite, ils devraient classer selon le type de système (additif, hybride, positionnel). Ils pourraient également parler de la présence ou non du zéro dans les systèmes.

Conduite attendue de l'enseignante : L'enseignante profite de ce classement pour rappeler ou introduire le vocabulaire spécifique aux systèmes, à savoir les mots : base, base intermédiaire, système additif, système hybride et système positionnel. Si au moment des présentations (activité 2), l'enseignante trouve plus approprié d'introduire le vocabulaire, le faire à ce moment. On présente ce vocabulaire pour que les élèves puissent mettre des mots sur ces nouveaux concepts, mais ils pourront continuer de dire « font des paquets de 20 » ou «ils ont des colonnes » par exemple.

Durée : 10 minutes

Matériel : Sept cartons avec le nom des systèmes inscrit dessus, gommette

*Tout de suite après la dernière présentation, nous avons fait l'activité de classement des différents systèmes (incluant notre système) afin de voir des éléments communs aux différents systèmes. Durée réelle : 8 minutes*

### Activité 5 : La fiche : Retour sur votre système de numération (intégration)

Description : Après avoir fait le tour des différents systèmes de numération, les élèves sont invités à remplir la feuille « Retour sur votre système de numération » (à l'annexe 11a) et ce, de façon individuelle.

Justification : Cette activité de synthèse permet d'évaluer la compréhension qu'a chaque élève du système de numération qu'il a étudié. Il est l'un de nos moyens de collecter les données et est plus amplement décrit au chapitre 3.

Conduite attendue des élèves : Les élèves devraient remplir la feuille sans trop de difficulté, mais certains qui auront moins bien compris risquent de faire des erreurs (à savoir si leur système est positionnel ou non, par exemple ou quelle est la base ou plus difficile, la base intermédiaire de leur système).

Durée : 20 minutes

Matériel : Feuille « Retour sur votre système de numération » (annexe11a) en 29 copies

*Nous avons distribué la feuille « Retour sur votre système de numération » et avons lu chacune des questions. Nous avons rappelé qu'ils ne devaient parler que du système sur lequel ils avaient travaillé en le comparant aux autres systèmes lorsque demandé. Certains élèves ont terminé en 15 minutes, d'autres en 30 minutes.*

### Activité 6 : Les additions et les soustractions dans les différents systèmes de numération

Description : Chaque équipe reçoit l'instrument de calcul utilisé par son peuple pour faire les additions et les soustractions. Les élèves doivent d'abord émettre des hypothèses quant à la manière d'effectuer les additions et les soustractions du peuple sur lequel ils travaillent. Puis, lorsqu'ils pensent avoir compris, l'enseignante leur remet le feuillet explicatif de l'annexe 6 pour qu'ils vérifient si leurs hypothèses étaient justes ou non. Ils doivent ensuite tenter d'effectuer l'addition et la soustraction données (dans le feuillet) avec la même méthodologie employée par les savants de l'époque. Finalement, les élèves préparent une affiche pour expliquer à la classe comment on effectuait ces opérations dans leur système. Les équipes travaillant avec le boulier chinois et l'abaque romain sont invitées à choisir entre faire une démonstration de leur outil sur le rétroprojecteur ou faire une affiche avec toutes les étapes des opérations.

Aussi, comme il n'existe pas de trace d'opérations effectuées par les astronomes mayas, les élèves ayant travaillé sur le système maya travailleront maintenant sur le système égyptien. Bien que ce soit le système de numération le plus simple à comprendre et le plus facile pour effectuer les additions et les soustractions, le procédé pour effectuer les multiplications et les divisions est tellement différent, que ce ne sera pas trop de le voir présenté par deux équipes. De plus, il y a une ressemblance entre les opérations sumériennes et babyloniennes (en base 60) et entre les opérations romaines et chinoises (fonctionnement du boulier et de l'abaque semblable), donc il nous semblait moins redondant de voir le système égyptien se répéter.

Justification : Cette activité s'inspire des *activités expérimentales* ainsi que d*es opérations à la manière de…* présentées dans la partie 2.1. Elle permet d'approfondir chacun des systèmes et les élèves y découvriront différentes façons d'additionner et de soustraire. Ils pourront aussi comparer les méthodes de calcul actuelles avec celles de ces différents systèmes. Aussi, certains auteurs (Balacheff & Neyret, 1982; Poirier, 2001; Poisard, 2005b) préconisent l'utilisation du boulier chinois (ou de l'abaque de poche romain qui fonctionne de la même manière) avec des élèves du troisième cycle puisqu'ils ont remarqué la facilité de gestion des retenues que permet le boulier (ou l'abaque), tout comme celui d'échange (le passage de dix unités en une dizaine, par exemple).

En effet, Balacheff et Neyret (1982) proposent l'utilisation du boulier, notamment pour effectuer des additions et des soustractions avec des élèves de CM2 (cinquième année). Ils le trouvent particulièrement utile pour provoquer l'apparition de la retenue que l'on retrouve dans l'algorithme conventionnel d'addition. Ils précisent que « avec le boulier cette situation est matérialisée par le dépassement de capacité de la broche correspondante, pour résoudre ce problème on procède par compensation » (1982, p. 78). Ce procédé de compensation rappelle une des conclusions de Madell (1979) qui décrit les processus naturels des enfants de la Community School de New York. Ces enfants, à qui on n'enseigne pas les algorithmes conventionnels avant la deuxième moitié de leur troisième année, développent leurs propres méthodes pour faire les additions et les soustractions. Trois régularités sont remarquées par l'auteur « 1) l'enfant ne fonctionne pas toujours par colonnes; 2) lorsqu'il le fait, il va invariablement de gauche à droite; 3) il évite tout nombre supérieur à dix dans ses retenues ou emprunts » (1979, p. 21). C'est cette troisième caractéristique naturelle et personnelle de calcul chez les élèves que l'on croit pouvoir faire surgir avec le travail sur le boulier chinois ou l'abaque romain.

De plus, Poisard (2005b) propose, elle aussi, l'étude du boulier chinois à partir de la découverte par les élèves de son fonctionnement et établit des liens avec les algorithmes conventionnels de calcul. Selon l'auteure, le boulier chinois :

> « […] permet de réfléchir sur l'intérêt du système décimal positionnel et sur les techniques opératoires (addition, soustraction, multiplication, division). Il est aussi un support pour se poser de nouvelles questions qui aboutissent en particulier à un questionnement sur les bases de numération » (2005b, p. 41).

Elle poursuit en affirmant qu'en plus, le boulier intéresse autant les élèves que les enseignants. L'auteure ajoute que le boulier démontre concrètement le fonctionnement de notre système positionnel puisqu'un trois sur la tige des dizaines ou des centaines s'écrit de même façon (on remonte trois boules), mais la position de la tige est déterminante. À l'instar de Bednarz et Janvier (1984), Poisard remarque que :

> « […] en fin de primaire, la notion de numération positionnelle est souvent mal installée et constitue un obstacle concernant l'apprentissage des techniques opératoires. L'étude du boulier permet de remonter au sens mathématique en se posant des questions sur l'écriture des nombres, la notion de position d'un chiffre dans un nombre, sur la définition des retenues… » (2005b, p. 43).

Tout comme Balacheff et Neyret (1982), Poisard remarque la facilité de gestion des retenues que permet le boulier, tout comme celui d'échange (le passage de dix unités en une dizaine et vice-versa). Poisard définit d'ailleurs ce qu'est une retenue : « La retenue permet de gérer le changement de la valeur de position, elle réalise un transfert des nombres entre les rangs » (Poisard, 2005a, p. 78). Dans sa thèse, elle a :

> « (…) montré que l'étude du fonctionnement des instruments à calculer […] implique l'étude et la compréhension approfondie du système de numération décimale, lui-même indissociable des algorithmes de calcul et de la notion de retenue. Aussi, l'étude des instruments met à jour différentes manières de calculer et différents algorithmes de calcul ce qui implique que le rôle du professeur est de permettre aux élèves de faire les liens entre les différentes

> techniques : celles déjà connues avec le papier-crayon ou la calculatrice et l'ensemble des techniques disponibles avec des instruments à calculer » (Poisard, 2005a, pp. 82-83).

Bref, s'approprier les techniques d'addition ou de soustraction sur un abaque romain ou un boulier chinois permet de manipuler les nombres et surtout, les valeurs attribuées à chaque tige ou colonne du matériel. Si en plus, on demande aux équipes de faire une démonstration des opérations au reste de la classe, nous croyons qu'ils devront clairement verbaliser et expliquer le principe des positions et les échanges nécessaires. De plus, ils seront contraints de travailler directement sur le matériel ou encore, de représenter en dessins ou sur un rétroprojecteur leur démarche. D'ailleurs, selon les propos recueillis parmi les enseignants des élèves de CM2 (cinquième année) ayant expérimenté la construction et la manipulation d'un boulier chinois, la plupart des enseignants ont été surpris de la richesse de son utilisation. Un enseignant explique que :

> « C'est bien de proposer quelque chose qui, normalement est su et connu des élèves et de les mettre sur cette même notion, de les mettre devant un problème qui l'aborde, mais de manière différente. […] Au départ, je pensais pas du tout qu'on pouvait en tirer tout ça pour être honnête » (Poisard, 2005a, p. 94).

Un autre précise que :

> « Je me rends compte que c'est une situation qui est beaucoup plus riche que ce qui ne paraît au départ. Pour moi, c'était réglé en quelques manipulations, et en fait non. Il y a tellement de choses en fait! Puisqu'il faut d'abord lire, écrire les nombres et il y a toute la base compter, calculer en fait » (2005a, p. 94).

Le boulier (ou l'abaque) semble donc être un excellent support favorisant les liens entre la numération et les opérations, tel que préconisé par Bednarz et Janvier. En effet, les auteures avaient remarqué que :

> « L'enseignement de la numération est détaché de celui des quatre opérations […] l'étude de l'évolution historique de la numération nous révèle combien représenter un nombre et calculer ne font qu'un, la survie d'un système et son évolution étant étroitement liées à son efficacité calculatoire » (1984, p. 26).

Pour ce qui est des balises du socioconstructivisme, notons que cette activité permet à l'élève de jouer un *rôle actif* dans son apprentissage, d'être en situation de *déséquilibre* et devoir réorganiser ses connaissances, d'explorer par lui-même des concepts nouveaux et de les rattacher à ses connaissances antérieures (les algorithmes personnels et conventionnels) et enfin, d'être en *interaction avec ses pairs* et partager sa compréhension du problème et de sa solution.

Conduite attendue des élèves : Cette activité risque d'être difficile pour certaines équipes dont la façon d'effectuer les opérations est bien différente de la nôtre. Avant de voir comment devraient réagir les élèves de chaque équipe, le lecteur peut voir un aperçu de l'activité.

*Cette activité se faisait simultanément à raison de trois équipes un jour et trois autres équipes le lendemain. Tel qu'anticipé, l'équipe ayant travaillé sur les opérations égyptiennes (une élève en particulier) a rapidement émis une hypothèse sur la façon dont les scribes égyptiens effectuaient les additions et les soustractions. Elle a semblé être la bonne puisque nous leur avons apporté le feuillet explicatif après seulement deux minutes de travail. Les élèves ont ensuite vérifié leur hypothèse et discuté. Après seulement 22 minutes, nous sommes venus les voir et ils nous ont expliqué leur travail. Ils avaient compris puisqu'ils se sont installés pour faire l'affiche afin de présenter leurs opérations.*

Système sumérien : Lorsqu'ils recevront l'abaque mésopotamien (annexe 11b), les élèves risquent de le comparer à la planche à calculer qu'ils ont utilisée au deuxième cycle. Comme ils ont la même fonction, ils vont peut-être proposer la bonne façon de l'utiliser du premier coup. Par contre, ils vont peut-être être tentés d'utiliser les symboles sumériens, mais ce n'est pas nécessaire. Comme la planche à calculer, des jetons ou des petites barres suffisent. Aussi, la principale difficulté pour ce système, que ce soit pour les additions ou les soustractions, sera sans doute la décomposition en base 60. En effet, pour réussir leurs opérations avec la méthode des Sumériens, les élèves devront d'abord prendre les nombres indo-arabes donnés et les convertir en unités, « soixantaines » et « soixantaines de soixantaines ». Ils penseront peut-être à se faire une table de conversion. Une fois cette étape réussie (les élèves l'auront déjà expérimentée lors de l'activité 1 lorsqu'ils dessinaient le bon nombre de symboles pour représenter un nombre indo-arabe), ils pourront effectuer les opérations sur une planche à calculer qu'ils maîtrisent déjà pour l'avoir fréquemment utilisée en troisième année. Ensuite, ils pourront formuler la réponse en base 60, mais pourront également la reconvertir en base 10 pour donner la réponse avec un nombre indo-arabe à la classe. Lors de leurs opérations, les élèves devront prendre conscience que lorsqu'on « emprunte » à la colonne de gauche, on échange une dizaine contre dix unités, mais une soixantaine contre six dizaines et ainsi de suite. Ce n'est pas comme dans notre système où les échanges sont toujours de dix. Cela sera peut-être difficile pour les élèves, mais avec les exemples du feuillet explicatif, ils devraient pouvoir l'appliquer à leurs opérations.

*L'équipe qui a travaillé sur les additions et les soustractions sumériennes a aussi reçu un abaque mésopotamien pour émettre des hypothèses quant à la façon d'effectuer ces opérations. Ils maniaient l'abaque (planche à calculer) avec aise. Ils ont réussi leurs opérations en 23 minutes.*

Système égyptien : C'est la seule équipe qui ne recevra pas d'outil de calcul. Les élèves devraient proposer de représenter les nombres en hiéroglyphes un au-dessus de l'autre, tel que le faisaient les scribes égyptiens. Ils vérifieront ensuite en consultant le feuillet explicatif. Comme les élèves sont habitués à travailler avec des planches à calculer (ils utilisent les manuels Défi Mathématique depuis leur première année) ou du matériel multi bases, ils ne devraient pas rencontrer trop de problèmes. En outre, comme il s'agit d'un système en base 10, cela facilitera les opérations. Bien qu'il y ait des retenues et des emprunts dans les additions et soustractions demandées, les élèves de ces équipes devraient réussir ces opérations sans trop de difficulté.

*Tel qu'anticipé, l'équipe ayant travaillé sur les opérations égyptiennes (une élève en particulier) a rapidement émis une hypothèse sur la façon dont les scribes égyptiens effectuaient les additions et les soustractions. Elle a semblé être la bonne puisque nous leur avons apporté le feuillet explicatif après seulement deux minutes de travail. Les élèves ont ensuite vérifié leur hypothèse. Après seulement 22 minutes, nous sommes venus les voir et ils nous ont expliqué leur travail. Ils semblaient avoir compris puisqu'ils se sont installés pour faire l'affiche afin de présenter leurs opérations. Comme on ne trouve pas de traces d'opérations à la manière des mayas, l'équipe qui avait travaillé sur le système maya a plutôt travaillé sur les additions et les soustractions égyptiennes. L'équipe a d'abord récupéré l'affiche de l'équipe ayant travaillé sur le système égyptien pour se rappeler les symboles puisque ces élèves n'avaient travaillé sur ce système qu'en devoir. Au début, ils ne savaient pas ce qu'ils devaient faire. Après seulement quatre minutes, nous leur avons remis le feuillet explicatif et ils l'ont lu rapidement, avec attention. Ils ont ensuite effectué* *les opérations demandées. Nous allions les voir régulièrement et tout semblait bien aller. Après 25 minutes, ils commençaient leur affiche.*

Système babylonien : Comme l'on présume que les Babyloniens effectuaient leurs additions et soustractions exactement comme les Sumériens et que le même document explicatif sera remis aux élèves, la conduite attendue pour cette équipe est la même. Bien que les Babyloniens additionnaient et les soustrayaient comme le faisaient les Sumériens, nous trouvons pertinent de faire travailler ce système. D'abord, une équipe a déjà travaillé sur ce système, donc peut continuer avec la même civilisation, puis nous verrons plus loin que la façon d'effectuer les multiplications (activité 8) est différente chez ces deux peuples.

*Pour l'équipe travaillant sur les opérations babyloniennes, lorsqu'ils ont reçu l'abaque mésopotamien, un élève a fait remarquer aux autres membres de son équipe la régularité entre les colonnes de l'abaque. Après quatre minutes, nous sommes allés les voir et ils nous ont expliqué leur hypothèse. L'hypothèse émise s'est avérée la bonne. Nous leur avons ensuite remis le feuillet expliquant leur procédure d'addition. Huit minutes plus tard, ils n'avaient pas encore commencé à faire l'addition demandée. Nous sommes venus à leur rescousse et leur avons demandé de nous expliquer comment on faisait. L'explication n'étant pas exacte, nous avons rappelé les différentes étapes. 20 minutes après le début de l'activité, nous leur avons demandé de nous expliquer ce qu'ils avaient fait jusque là. À 25 minutes, nous sommes encore venus les observer. Ils avaient compris l'addition puisque nous leur avons proposé d'essayer de faire la soustraction demandée. Ils ont terminé les deux opérations en 40 minutes.*

Système romain : La difficulté des opérations pour ce système est certainement la compréhension et la manipulation de l'abaque romain. En effet, comme il s'agit d'un abaque dit *simplifié* (mais par contre plus compliqué pour les élèves…) où chaque colonne est subdivisée en deux : les jetons du bas valant une unité de l'ordre correspondant (unité, dizaine, centaine…) et ceux du haut en valant cinq, cette particularité risque de compliquer la compréhension de l'abaque de poche. Par contre, comme ils ont sommairement vu son fonctionnement lors du survol historique (activité C), les élèves proposeront peut-être une hypothèse sur le fonctionnement de l'abaque. Cependant, même après la consultation de la page 86 (activité C) et la lecture du document explicatif, la subdivision des colonnes va peut-être poser un problème lorsqu'il y aura des échanges à réaliser entre les subdivisions du haut et celles du bas ou entre les colonnes. En effet, même s'il comprenait 10 billes par tige (colonne) comme l'abaque utilisé dans la recherche de Bednarz et Janvier (1984), très peu d'élèves savent le manipuler correctement. Rappelons que 93% des élèves de 3e et 4e année pouvaient représenter un nombre sur l'abaque (1984, p. 15), mais « très peu d'enfants font la tâche demandée (une soustraction) en démontrant qu'ils accordent une valeur de groupements aux jetons de l'abaque (5% en 3e année, 27% en 4e année). Parmi ces enfants, très peu font l'échange concrètement sur l'abaque (5%) » (1984, p. 16). Les élèves pourraient faire une démonstration sur le rétroprojecteur, l'affiche étant ardue à réaliser puisqu'elle devrait contenir de nombreuses étapes (représentation du premier nombre, ajout ou retrait du deuxième nombre, retenues ou emprunts, réponse). Par contre, les élèves devront s'exercer longuement pour éviter les erreurs et les hésitations lors de la présentation.

*L'équipe travaillant sur le système romain s'est vue remettre une reproduction maison d'un abaque romain dit simplifié. Tout comme l'équipe travaillant sur le système chinois, cette équipe a consulté ses pages de Défi mathématique vues lors du survol historique. Même après la lecture du feuillet, le procédé ne semblait pas clair pour ces élèves. Nous avons donc repris avec eux les différentes étapes. Ils ont ensuite tenté de faire les opérations par eux-mêmes, mais cela semblait laborieux. Nous leur avons alors fait une petite démonstration qui a semblé un peu plus claire. Ils ont dû s'exercer longuement et faire de nombreux essais pour confirmer qu'ils comprenaient tous bien. Après 30 minutes, certains membres de l'équipe comprenaient, mais pas tous. Ils ont continué de s'expliquer et de s'exercer pour le reste de la période.*

Système chinois : Comme les Chinois effectuaient et effectuent encore pour certains d'entre eux leurs opérations sur un boulier s'apparentant à l'abaque romain, la conduite attendue des élèves est donc la même que pour l'équipe travaillant sur le système romain. Nous pourrions ajouter les commentaires d'élèves de CM2 (cinquième année) ayant expérimenté le fonctionnement du boulier chinois dans l'étude de Poisard (2005a). Ces derniers ont apprécié travailler sur le boulier et ont fait des apprentissages. Voici quelques paroles d'élèves en vrac :

> « Les math. comme cela, c'est amusant, rigolo et plus facile »; « J'avais l'impression de m'amuser un peu plus. J'apprenais en même temps je réfléchissais mais je m'amusais. C'était sympa! »; « Je me suis rendue compte que les multiplications, c'était pas si compliqué, en fait. C'était

> facile. Et puis, calculer, ça m'a plu alors en classe, j'ai plus de volonté pour calculer. […] Maintenant que ça me plaît, je finis un peu plus vite le travail […] avant je pouvais pas faire parce que j'avais pas très bien compris et puis j'aimais pas trop alors je passais beaucoup de temps […] » (Poisard, 2005a, pp. 96-98-123).

*Les élèves de l'équipe travaillant sur les additions et les soustractions chinoises, comme nous nous y attendions, se sont référés à leur page du survol historique dédiée aux outils de calcul. Ils ont donc rapidement saisi comment représenter un nombre, mais ils ont plus longuement hésité à savoir comment additionner. Lorsque nous leur avons proposé le feuillet explicatif, ils ont préféré continuer par eux-mêmes. Plus tard, les élèves ont lu le feuillet explicatif, fait les opérations demandées et comme ils n'avaient pas d'affiche à préparer (ils ont opté pour une présentation sur le rétroprojecteur), ils ont passé les dernières 35 minutes à faire des additions et des soustractions chacun leur tour.*

Durée : 90 minutes

Matériel : Dessins de deux abaques mésopotamiens vierges (annexe 11b)

Boulier chinois

Abaque romain

Les additions et soustractions expliquées aux élèves (annexe 6)

*Encore une fois, cette activité s'est déroulée sensiblement telle que planifiée. En 60 minutes (au lieu des 90 prévues), les élèves ont reçu un outil de calcul (sauf les Égyptiens), ont émis des hypothèses quant à son fonctionnement, ont lu le feuillet explicatif pour valider leur hypothèse, ont fait l'addition et la soustraction demandées et ont commencé leur affiche (ou se sont exercés pour les Romains et les Chinois).*

### Activité 7 : La présentation des additions et soustractions (intégration)

Description : Chaque équipe présente la technique d'addition et de soustraction de son peuple et se fait aider par la classe pour aller plus loin, s'il y a lieu.

Justification : La présentation par chaque équipe d'une addition et d'une soustraction dans leur système permet à tous de voir différentes façons d'effectuer ces opérations. Les bienfaits de l'utilisation du boulier chinois et de l'abaque romain profiteront en effet à toute la classe.

Conduite attendue des élèves : Les difficultés rencontrées lors de l'activité précédente (s'il y a lieu) risquent de resurgir lors des présentations. Aussi, ce n'est pas certain que les élèves de la classe comprendront les opérations en une quinzaine de minutes alors que chaque équipe aura travaillé beaucoup plus longtemps sur son système pour bien le maîtriser. Cependant, comme il y deux équipes qui présenteront les additions et soustractions égyptiennes, nous proposerons aux équipes concernées qu'une équipe présente l'addition et l'autre, la soustraction. De plus, les techniques sur le boulier chinois et l'abaque de poche romain sont très semblables et les additions et soustractions babyloniennes et sumériennes sont identiques. Nous croyons donc que de voir chaque technique deux fois devrait permettre aux élèves de la classe de bien comprendre. Enfin, les élèves découvriront que s'approprier une nouvelle connaissance n'est pas toujours aisé, mais que la transmettre l'est souvent encore moins.

Conduite attendue de l'enseignante : Après chaque présentation, questionner les élèves sur les ressemblances et les différences entre les différentes façons présentées entre elles et avec les algorithmes conventionnels. Faire remarquer la base, la valeur de position, les échanges (les retenues et les emprunts) si les élèves ne les relèvent pas.

Durée : 60 minutes (préparation des affiches et des présentations)

90 minutes (15 minutes par présentation, à raison de deux par jour)

Matériel : Grands cartons et marqueurs

*La plupart des équipes avaient déjà commencé leur affiche à la suite de l'activité précédente. Ils ont donc eu du temps (60 minutes) pour compléter leur affiche présentant les additions et les soustractions dans leur système. Les équipes ayant travaillé sur les systèmes romain et chinois se sont exercées sur le rétroprojecteur à tour de rôle.*

*Pour la présentation des additions et des soustractions sumériennes, nous avons oublié d'installer la caméra vidéo. Comme l'équipe avait déjà commencé lorsque nous nous en sommes rendu compte, nous avons pris plus de notes que nous avons phrasées dans le journal de bord tout de suite après. Durée de la présentation : 20 minutes. Malgré la chaleur et le bruit qui venait de la cour (plusieurs classes étaient sorties en fin de journée), l'équipe travaillant sur le système égyptien a présenté les additions et les soustractions. Les élèves de la classe sont restés relativement concentrés malgré tout. Durée de la présentation : 15 minutes. Pour ce qui est des opérations à la manière des Chinois, l'option* *de faire la présentation sur le rétroprojecteur s'est avérée judicieuse. Les élèves manipulaient les billes du boulier avec un crayon et les élèves de la classe voyaient très bien le boulier (les tiges, les billes, la barre transversale et les manipulations). Durée de la présentation : 20 minutes. L'équipe travaillant sur les additions et soustractions romaines a fait sa présentation immédiatement après celle sur les opérations chinoises. Les élèves ont fait référence au procédé sur le boulier chinois et ont eu le souci de ne pas être redondants. Ils avaient préparé un deuxième exemple d'addition avec des unités de mille, mais nous leur avons rappelé que nous avions demandé qu'une seule démonstration de chaque opération. Durée de la présentation : 15 minutes. Afin d'éviter de dessiner trois abaques comme dans le feuillet explicatif, l'équipe des Babyloniens a décidé de faire toutes les étapes de leur addition au crayon à mine et de faire « en direct » la démonstration avec leur marqueur. Cette façon était très intéressante parce que les élèves étaient bien préparés, ne se sont pas trompés et ont pu montrer la technique d'addition une étape à la fois. Durée de la présentation : 11 minutes. Comme les additions et les soustractions égyptiennes avaient déjà été présentées par une autre équipe et que toute la classe avait bien compris, cette deuxième équipe a été très expéditive. Nous ne nous sommes pas attardés sur les ressemblances et les différences avec d'autres systèmes puisque nous en avions déjà discuté la veille (avec l'autre équipe présentant les opérations égyptiennes). Durée de la présentation : 9 minutes.*

*Encore une fois, cette activité s'est déroulée tel que prévu. Nous avions prévu 15 minutes par présentation pour un total de 90 minutes. Avec des présentations et des discussions entre 9 et 20 minutes, le total fait également 90 minutes.*

### Activité 8 : Les multiplications et les divisions dans les différents systèmes de numération

Description : Cette activité ressemble à celle des additions et soustractions, sauf que cette fois, il s'agit pour les équipes d'effectuer une multiplication et une division dans leur système. Chaque équipe reçoit à nouveau un instrument de calcul utilisé par leur peuple pour faire les multiplications et dans certains cas, les divisions (annexe 11c). Ils doivent d'abord émettre des hypothèses quant à la manière d'effectuer ces opérations à la manière du peuple sur lequel ils travaillent. Ensuite, lorsqu'ils pensent avoir trouvé, l'enseignante leur remet le feuillet explicatif de l'annexe 7. Les élèves vérifient leurs hypothèses et doivent ensuite tenter de faire une multiplication et une division à la manière des savants de l'époque.

Justification : Cette activité s'inspire *des opérations à la manière de…* mais les auteurs consultés parlaient peu des multiplications et des divisions. Cette activité permet d'approfondir chacun des systèmes et de voir comment on effectuait les multiplications et les divisions, ce qui aura permis de s'approprier les quatre opérations arithmétiques. Aussi, elle permet de voir les liens existant entre les méthodes utilisées par nos prédécesseurs et les algorithmes conventionnels et de constater les limites de certaines techniques (l'addition répétée ou le partage chez les Sumériens notamment).

Comme cette activité est plutôt difficile et que les différentes techniques ressemblent très peu à ce que les élèves connaissent, ils risquent de vivre un véritable *conflit cognitif*. Ils se trouveront également dans un état de *déséquilibre* et devront assimiler les nouvelles connaissances. En outre, les élèves auront un *rôle actif* dans leurs apprentissages et les *interactions sociales* dans l'équipe seront primordiales pour résoudre le problème.

Conduite attendue des élèves : Comme ces deux opérations sont encore plus difficiles que les additions et les soustractions, les élèves risquent d'être un peu dépassés au début de l'exercice et devront par conséquent avoir beaucoup de support et d'encouragement de la part de l'enseignante. Ces élèves doués, qui ne connaissent pas souvent de tels déséquilibres, risquent peut-être de vivre un conflit cognitif. En effet, leurs façons actuelles de faire les multiplications et les divisions n'ont rien à voir avec celles qu'ils devront expérimenter. Comme chaque système est fort différent, la conduite attendue des élèves sera présentée séparément.

Système sumérien : À l'aide de l'abaque mésopotamien (annexe 11c), les élèves tenteront d'émettre leurs hypothèses. S'ils ne savent pas comment procéder, leur suggérer une multiplication avec un petit multiplicateur par exemple. Ils proposeront peut-être l'addition répétée, si non, leur donner le feuillet explicatif. Tout comme pour les opérations précédentes, la principale difficulté pour ce système sera encore la décomposition en base 60. L'expérience acquise par les élèves lors de l'activité sur les additions et les soustractions devrait néanmoins faciliter l'exercice. Comme la multiplication sumérienne est une addition répétée, si les élèves ont bien compris l'addition, ils devraient réussir la multiplication. Pour la division, comme l'exemple donné a un diviseur à un chiffre et que pour les Sumériens, la division s'effectuait comme un partage, cette façon s'apparente à la division sur la planche à calculer que les élèves ont déjà expérimentée. Ils ne devraient donc pas rencontrer trop de difficulté (sauf pour les conversions en base 60, comme pour les additions et les soustractions).

*Pour l'équipe des Sumériens, nous ne savons pas pour quelles raisons, mais nous avons été plutôt directive. D'emblée, nous leur avons dit que la multiplication sumérienne était une addition répétée plutôt que de leur laisser le découvrir. Puis, pour les divisions, nous sommes très rapidement intervenus (immédiatement après la lecture du feuillet explicatif) parce qu'ils ne semblaient pas savoir comment faire. Ils ont commencé leur affiche après seulement 20 minutes, alors qu'ils avaient deux opérations à comprendre (au lieu d'une seule pour d'autres civilisations -Romains, Chinois et Babyloniens-).*

Système égyptien : Lorsque les élèves de cette équipe recevront le tableau à deux colonnes avec les chiffres et les tirets (annexe 12c), ils risquent de ne rien comprendre. Si l'enseignante leur donne ensuite les nombres à multiplier de l'exemple donné, peut-être qu'un élève comprendra et pourra expliquer son hypothèse aux autres élèves. Si non, leur donner le feuillet explicatif (annexe 7). La multiplication égyptienne est moins compliquée qu'il n'en paraît. Comme ce procédé est complètement nouveau pour les élèves (rien à voir avec la planche à calculer), les élèves seront certainement déstabilisés au début de l'exercice. Par contre, une fois que l'on saisit le principe des duplications successives, l'opération se fait quand même assez facilement. L'objectif ici est que les élèves comprennent comment les multiplications égyptiennes fonctionnent, mais aussi, qu'ils comprennent pourquoi ce procédé fonctionne (la distributivité de la multiplication sur l'addition). Une fois la multiplication maîtrisée, la division ne devrait pas poser trop de problèmes puisqu'il s'agit du même procédé, mais à l'inverse.

*Ce jour-là, il y avait des absents et ils n'étaient que 3 dans l'équipe des Égyptiens. Après avoir fait la multiplication, une élève a proposé de faire l'affiche, mais elle s'est ensuite rappelé que l'équipe avait aussi une division à faire. Plus tard (23 minutes après le début de l'activité), nous les avons laissés discuter de l'organisation de leur affiche, mais lorsqu'ils ont réalisé tous les hiéroglyphes qu'ils devaient dessiner, ils n'étaient plus sûrs. Nous leur avons suggéré de faire un brouillon avant de faire leur affiche. Pour la deuxième* *équipe à avoir travaillé les multiplications et les divisions égyptiennes, les élèves ont rapidement observé la régularité dans le tableau de multiplication égyptien Après 28 minutes, nous sommes venus les voir et ça y était, ils avaient réussi la multiplication égyptienne. Nous leur avons ensuite proposé de poursuivre avec les divisions.*

Système babylonien : Pour ce qui est des multiplications babyloniennes, le procédé se complique. En recevant le tableau utilisé par les savants babyloniens et les tables de multiplication (annexe 12c), les élèves risquent de ne pas savoir comment procéder. L'enseignante devrait les laisser proposer des hypothèses, puis leur donner le feuillet explicatif assez rapidement. En effet, toujours en base 60 et cette fois en symboles babyloniens, l'exemple donné aux élèves s'étale sur trois pages et comporte de nombreuses étapes. Le procédé est différent de l'addition répétée dans le tableau sumérien, il se fait à l'aide de colonnes en base 60 (unités, soixantaines et « soixantaines de soixantaines »). Aussi, les scribes de l'époque avaient recours à des « tables de multiplication ». Toutes ces nouveautés rendent la multiplication très ardue pour les élèves, c'est pourquoi ils auront besoin d'être épaulés et encouragés. Ils n'aborderont pas la division, le procédé étant trop complexe pour des élèves du primaire.

*Après sept minutes, nous sommes venus leur expliquer que les tables de multiplication étaient gravées et transmises de génération en génération. Après 12 minutes, nous sommes venus nous asseoir avec eux et les avons accompagnés dans la lecture du feuillet explicatif pour revoir les étapes avec eux. Comme nous savions que ce procédé était le plus difficile, nous venions les observer souvent. À 37 minutes, ils sont venus nous chercher parce qu'ils avaient terminé et que ça fonctionnait, ils avaient vérifié leur réponse. Ils semblaient épuisés, mais fiers d'eux.*

Système romain : Les élèves recevront un modèle d'abaque à jetons romain (annexe 12c) et devraient émettre des hypothèses quant à son fonctionnement. À l'aide du feuillet explicatif, ils apprendront à faire une multiplication avec la méthode des Romains. Comme l'exemple donné contient un multiplicateur à deux chiffres et que les élèves ont récemment appris ce type de multiplication, les élèves risquent de faire des liens avec les méthodes vues en classe (algorithme conventionnel, par jalousie, en colonnes et en tableau). Bref, la manipulation de l'abaque à jetons est ardue puisqu'elle nécessite plusieurs étapes, comprend plusieurs résultats partiels et demande une bonne compréhension du système positionnel pour savoir dans quelles colonnes placer les résultats. Par exemple, dans quelles colonnes aller placer le résultat partiel d'une multiplication de dizaines par des centaines ? Le feuillet explicatif remis aux élèves a beau donner une astuce, il faut toutefois bien la maîtriser.

*Un élève nous a demandé si son équipe allait recevoir « quelque chose qu'on peut manipuler ». Nous lui avons précisé que pour la multiplication, le procédé se ferait plutôt sur papier. En effet, pour les additions et les soustractions, les élèves de cette équipe avaient expérimenté ces opérations sur une reproduction d'un abaque de poche romain. Pour les multiplications, nous voulions qu'ils expérimentent sur la reproduction d'un abaque sur table qui était plus facile à dessiner qu'à construire. Nous avons remis aux élèves de cette équipe l'abaque romain du feuillet explicatif sur les multiplications. Très rapidement (après seulement deux minutes), nous leur avons remis le feuillet explicatif. Après neuf minutes, ils semblaient perdre leur temps ou ne pas comprendre. Nous les avons alors informés que le feuillet comptait trois pages. Ils semblaient surpris, mais étaient rassurés de ne pas comprendre (ils n'avaient lu que la première page).*

Système chinois : L'exemple de la multiplication sur le boulier chinois donné aux élèves (tiré d'Ifrah) est plus simple que la multiplication romaine puisqu'elle contient un multiplicande à deux chiffres et un multiplicateur à un chiffre (24 x 7). Une difficulté que les élèves vont peut-être rencontrer est de se mélanger en plaçant les résultats partiels sur les tiges, tout comme ils oublient parfois (ou ne comprennent pas) qu'il faut mettre un zéro au résultat d'une multiplication d'unités par des dizaines. Si c'est le cas, l'enseignante questionnera les élèves sur la valeur des résultats partiels dans l'exemple donné et dans l'algorithme conventionnel. Par exemple, elle pourra demander « Si je multiplie 7 par 2 dizaines, qu'est-ce que ça va donner? » L'enseignante s'attend à ce qu'ils répondent 14 dizaines ou 140. Si ce n'est pas le cas, l'enseignante insistera sur le fait que le 2 de 24 ne vaut pas 2. Elle en profitera également pour faire le lien avec l'algorithme conventionnel.

*L'équipe travaillant sur les opérations chinoises a reçu encore une fois le boulier chinois. Après six minutes de manipulation, nous leur avons demandé de nous faire une démonstration. Comme leur démonstration était plutôt boiteuse, nous leur avons remis le feuillet explicatif. Nous sommes quand même venus les voir à quelques reprises et leur avons donné quelques précisions. Les filles se plaignaient du manque de sérieux des garçons. Après 27 minutes, nous sommes venus les voir pour leur demander si c'était plus* *clair. Ils nous ont répondu que oui et nous leur avons proposé d'essayer sur le boulier à tour de rôle, ce qu'ils ont fait sous la supervision de l'élève qui comprenait bien. Quatre minutes plus tard, un élève moins impliqué a dit encore ne pas comprendre. L'élève qui avait compris le premier a repris ses explications. Durée réelle : 35 minutes.*

Conduite attendue de l'enseignante : Circuler parmi les équipes et questionner les élèves sur leur compréhension des opérations. Faire des liens entre les algorithmes conventionnels (ce qui est connu des élèves) et les nouvelles techniques qu'ils doivent s'approprier (le nouveau). Encourager les équipes, les soutenir, revoir avec eux les étapes du procédé, une par une.

Durée : 90 minutes

Matériel : Dessin d'un abaque mésopotamien (annexe 11b)
Tableau d'une multiplication égyptienne (annexe 11c)
Tableau utilisé par les scribes babyloniens (annexe 11c)
Tables de multiplication babylonienne (annexe 11c)
Dessin d'un abaque à jetons (annexe 11c)
Boulier chinois
Les multiplications et divisions expliquées aux élèves (annexe 7)

*Le calendrier prévu n'a pas pu être respecté. En effet, nous avions consacré beaucoup de temps à la séquence depuis un mois et d'autres matières commençaient à en souffrir. Le fait que nous ne soyons avec nos élèves que trois jours par semaine n'aidait pas. Finalement, la chaleur exceptionnelle des semaines précédentes avait rendu le travail encore plus ardu, c'est pourquoi nous avons fait une petite pause d'une semaine.*

## 4.4. Les activités d'intégration

Comme nous l'avons vu plus tôt, ces activités visent l'intégration et la réorganisation des nouveaux apprentissages. Elles permettent aux élèves de mettre des mots sur les nouveaux apprentissages, de comparer des stratégies et des méthodes, de classer et d'organiser les apprentissages. De plus, lorsque les élèves ont à expliquer à leurs camarades de classe un nouveau procédé, ils intègrent leurs apprentissages. Aussi, lorsqu'on leur demande de faire des liens entre les différents systèmes et notre système actuel, de situer sur une carte du monde les peuples et sur une ligne du temps les découvertes mathématiques, les élèves mettent en œuvre leurs apprentissages et font des liens vers d'autres disciplines.

## Activité 9 : La présentation des multiplications et des divisions

Description : Chaque équipe présente les multiplications et dans certains cas, les divisions et se fait aider par la classe pour aller plus loin s'il y a lieu.

Justification : Comme pour les présentations des additions et soustractions, cette activité, quoiqu'ardue, devrait être riche en observations pour la chercheure et intéressante pour le reste de la classe. Nous croyons que de voir différentes façons d'effectuer des multiplications et des divisions et d'établir des parallèles avec les algorithmes conventionnels devraient permettre aux élèves de mieux comprendre ces opérations et/ou les algorithmes qu'ils utilisent (on multiplie les unités par les unités, puis les dizaines (ou soixantaines) par les unités et ainsi de suite. En outre, la multiplication égyptienne permet d'aborder la propriété de la distributivité de la multiplication sur l'addition. En effet, les élèves devraient réaliser que pour effectuer une multiplication (par exemple 84 x 15), on peut « distribuer » notre multiplicande pour faciliter l'opération (après avoir fait leurs colonnes, les Égyptiens se trouvaient à faire : 64 x 15 + 16 x 15 + 4 x 15).

Conduite attendue des élèves : Selon les difficultés qu'ils auront rencontrées et surmontées lors de l'activité précédente et le degré de compréhension de chaque équipe, les présentations en seront d'autant plus intéressantes bien que parfois ardues à mener. Peut-être que ce ne sont pas tous les élèves de la classe qui comprendront toutes les méthodes présentées, mais ils auront quand même été mis en contact avec différentes façons de faire et outre le système égyptien, tous les autres ont des points communs avec nos algorithmes conventionnels.

Durée : 60 minutes (préparation des affiches et des présentations)

90 minutes (15 minutes par présentation, à raison de deux par jour)

Matériel : Grands cartons et marqueurs

*Du temps a été accordé pour terminer les affiches pour la présentation des multiplications et des divisions. Comme cela faisait déjà neuf jours que les élèves les avaient découvertes, il y en a qui avaient oublié depuis. Ils s'aidaient à l'intérieur de leur équipe et consultaient leur feuillet explicatif. Le travail n'était pas toujours sérieux et un avertissement a été* *donné, c'est le seul temps qu'ils avaient pour terminer leur affiche et préparer les présentations puisqu'ils allaient commencer le lendemain. Des équipes ont dû prendre une partie de leur période de T.P. (travaux obligatoires à faire dans la semaine) pour terminer. Durée réelle : 60 minutes (un peu plus pour quelques équipes).*

*Malgré de nombreux imprévus qui nous ont fait commencer plus tard et une chaleur accablante, les élèves ont été extrêmement coopératifs. Plusieurs équipes étaient volontaires et nous avons tiré au sort afin de déterminer la première équipe à passer (celle des Chinois). Elle a fait une démonstration sur le rétroprojecteur. La présentation et la discussion n'ont duré que 10 minutes. Puis, l'équipe des Romains a présenté sa multiplication. Les élèves ont choisi de dessiner un abaque à jetons vierge sur leur affiche et de nous faire la démonstration. La présentation et la discussion ont duré 12 minutes. Pour faciliter la compréhension des élèves de la classe, nous avions pensé qu'une équipe travaillant les opérations égyptiennes pouvait présenter les multiplications et les divisions avec des chiffres indo-arabes (comme dans le feuillet explicatif remis aux élèves) et que l'autre équipe pouvait présenter les mêmes opérations, mais avec des hiéroglyphes tels que les faisaient les scribes égyptiens. L'équipe qui avait préalablement travaillé sur le système maya a donc choisi de présenter les multiplications et les divisions égyptiennes avec les chiffres indo-arabes. La présentation a duré 10 minutes. Tout de suite après, nous avons enchaîné avec la deuxième équipe des Égyptiens. Ils ont d'abord rappelé brièvement le fonctionnement du tableau et ont fait leur multiplication. Cette deuxième présentation suivie de la discussion a duré à peine plus de 10 minutes. La troisième équipe à présenter ce jour-là a été celle des Sumériens. La base 60 ou la décomposition en base 60 n'a pas semblé poser problème aux élèves de l'équipe ni au reste de la classe. La présentation et la discussion ont duré 15 minutes. Comme dernière présentation, l'équipe des Babyloniens a été un peu bousculée. En effet, l'équipe n'a eu que 10 minutes pour faire la démonstration d'une multiplication babylonienne (la plus complexe). À notre suggestion, les élèves avaient préparé leur tableau en base 60, avaient écrit le multiplicande et le multiplicateur en base 60 au crayon-feutre. Cependant, ils avaient écrit tous les résultats partiels au crayon à mine pour ne pas se tromper lors de la démonstration. Cela s'est avéré une bonne idée puisqu'ils ont présenté sans trop d'hésitations. Les élèves de la classe ont semblé comprendre, mais le manque de temps ne nous a pas permis de vérifier cette apparente compréhension. Nous n'avons pas eu le temps non plus de relever les ressemblances et les différences entre ce procédé et les autres présentés ou les algorithmes conventionnels.*

*Ces dernières présentations ont été plus rapides que les précédentes. Nous avions prévu 15 minutes par présentation, mais plusieurs (quatre) n'ont duré que 10 minutes. Par contre, nous n'avons pas pu respecter le fait d'écouter deux présentations par jour, ce qui aurait été vraiment mieux pour maintenir l'attention et l'intérêt des élèves.*

### Activité 10 : La fiche : Retour sur les opérations dans votre système de numération

Description : Après avoir vu diverses façons d'effectuer les opérations avec différents systèmes de numération, les élèves sont invités à remplir la feuille « Retour sur les opérations dans votre système de numération » (à l'annexe 11d) et ce, de façon individuelle. Ce petit test de compréhension permet également d'établir des comparaisons entre les différents procédés et les algorithmes conventionnels.

Justification : Cette activité de synthèse permet d'évaluer la compréhension qu'a chaque élève des opérations dans son système de numération. Il est l'un de nos moyens de collecter les données.

Conduite attendue des élèves : Les élèves devraient remplir la feuille avec plus ou moins de difficulté, selon leur niveau de compréhension. Certains aborderont probablement la supériorité de notre système actuel.

Matériel : Feuille « Retour sur les opérations dans votre système de numération » (annexe 11d) en 29 copies

Durée : 30 minutes

*Les élèves ont rempli la feuille sans trop nous poser de questions. Nous leur avons rappelé qu'il s'agissait d'un instrument de collecte de données pour notre thèse, que « ça ne comptait pas » pour le bulletin et de répondre au meilleur de leurs connaissances et de leur compréhension des opérations dans leur système. Durée réelle : 30 minutes.*

### Activité 11 : La ligne du temps et la carte du monde

Description : Sur une ligne du temps dessinée au tableau (qui part de 4000 avant Jésus-Christ jusqu'à maintenant), inviter les élèves à émettre des hypothèses sur l'année approximative de l'apparition des différents systèmes. Les remettre aux bons endroits ensuite. Puis, inviter les élèves à situer les différents systèmes sur une carte du monde; corriger s'il y a lieu. (Voir ligne du temps et carte à l'annexe 11e).

Justification : Cette activité est inspirée d'une activité de la section 2.1 (*ligne du temps*) de notre cadre conceptuel et permet aux élèves de situer dans le temps et l'espace les différents systèmes sur lesquels ils auront travaillés pendant plusieurs semaines. Aussi, rappelons que ces activités se vivent dans le cadre d'un module de recherche du programme international qui entre dans le thème transdisciplinaire : où nous nous situons dans l'espace et le temps. De plus, ils découvriront qu'il y a une certaine évolution dans le temps, mais que cette évolution n'est pas linéaire (les systèmes ne sont pas nécessairement passés d'un système additif à un système hybride à un système positionnel).

Conduite attendue des élèves : Les élèves ne devraient pas trop savoir à quelle époque sont apparus les systèmes, à moins que certains élèves ne s'intéressent aux pharaons égyptiens ou à l'Empire romain. Par contre, ils devraient être très curieux d'apprendre à quelle époque est apparu leur système et où il se situe dans le temps par rapport aux autres systèmes. Pour ce qui est de situer géographiquement les systèmes, certains sont faciles à localiser sur une carte (égyptien, romain, chinois, maya), contrairement à d'autres (sumérien, babylonien).

Conduite attendue de l'enseignante : Si les élèves ne relèvent pas l'évolution (non linéaire) des différents systèmes, l'enseignante leur fait remarquer que c'est surtout au début que les systèmes étaient additifs (avec leurs limites) et que c'est généralement plus tard que des systèmes hybrides et positionnels sont apparus.

Durée : 45 minutes

Matériel : Ligne du temps et carte du monde de l'annexe 11e, craie et tableau (pour la ligne du temps) et la grande carte du monde de la classe.

*Sur la ligne du temps dessinée au tableau et qui allait de 5 000 ans avant Jésus-Christ jusqu'à maintenant, les élèves ont émis des hypothèses quant à la date d'apparition des différents systèmes. Durée réelle : 35 minutes.*

### Activité 12 : Ce que j'ai appris… un retour sur la carte d'exploration

Description : À la lumière de tous les apprentissages des élèves, demander à la classe de compléter la carte d'exploration entamée à l'activité A et enrichie à l'activité D.

Justification : Pour que les élèves réalisent tous les apprentissages qu'ils ont effectués pendant ce module de recherche. Aussi, le programme primaire international préconise de faire un bilan des connaissances acquises au cours de chacun des modules de recherche. C'est le A du SVA (ce que j'ai **a**ppris).

Conduite attendue des élèves : Les élèves devraient participer avec enthousiasme à ce retour et prendre conscience de tout ce qu'ils ont appris.

Durée : 10 minutes

Matériel : Carte d'exploration de l'activité A, marqueur.

*La carte d'exploration élaborée en début de projet et enrichie après les activités de mise en contexte a été complétée avec l'ensemble des connaissances acquises dans le module de recherche. Le lecteur peut la consulter à l'annexe 13. Durée réelle : 15 minutes.*

## Activité 13 : Un retour sur les questions des élèves et de l'enseignant

Description : Effectuer un retour sur les questions de l'enseignante et des élèves. Relire chaque question des élèves et leur demander en quoi le projet a permis de répondre à cette question.

Justification : Cette activité permet de boucler la boucle et vérifier si des questions sont demeurées sans réponse. Si oui, les envoyer comme questions-souper à la maison[6].

Durée : 15 minutes

Matériel : Questions de l'enseignante et des élèves vues à l'activité E.

*Nous avons repris les questions des élèves suscitées au début du projet (activité E) et nous avons invité les élèves à expliquer comment les différentes activités avaient permis de répondre à ces questions. Les élèves ont démontré une réelle compréhension des systèmes de numération, des besoins qui ont poussé les peuples à inventer et perfectionner leur système et l'évolution de la numération. Par contre, cette discussion n'a pas été captée sur vidéo, il aurait été pertinent de le faire. Durée réelle : 20 minutes.*

---

[6] À l'école internationale Wilfrid-Pelletier, il est fréquent d'envoyer des questions à la maison pour que les élèves en discutent au souper avec le reste de leur famille. Un retour est prévu à la fin de la semaine pour partager le fruit des discussions familiales.

### Activité 14 : Un retour sur l'ensemble des activités du projet

Description : Inviter les élèves à remplir de façon individuelle la feuille de retour sur l'ensemble des activités (annexe 11f). Lire avec eux les énoncés du numéro 1 et rappeler brièvement chacune des activités pour que les élèves puissent donner leur appréciation.

Justification : Cette activité permet de connaître le degré de satisfaction des élèves pour chacune des activités proposées et vérifier si les élèves sont aussi intéressés et motivés par l'histoire des mathématiques que le suggèrent les auteurs cités dans la section 2.1.

Durée : 20 minutes

Matériel : Feuille « Retour sur l'ensemble des activités » (annexe 11f) en 29 copies

*Nous avons lu et détaillé chacune des questions du questionnaire (annexe 11e). Pour la question 1, nous avons brièvement rappelé les différentes activités que nous avions faites. Nous avons aussi rappelé aux élèves que nous ne voulions pas qu'ils écrivent leurs réponses pour nous faire plaisir, mais qu'ils écrivent la vérité. Nous leur avons d'ailleurs offert le choix d'écrire leur nom ou non sur la feuille pour les inciter à critiquer ouvertement les différentes activités.*

### Activité 15 : La discussion sur l'évolution des mathématiques

Description : Les élèves doivent d'abord réfléchir individuellement sur certaines questions synthèses: Comment la numération a-t-elle évolué jusqu'à notre système actuel? Pourquoi a-t-elle évolué ainsi? Quel impact l'évolution de la pensée mathématique a-t-elle eu sur le monde? Si une machine à voyager dans le temps permettait à un scribe égyptien (ou autre peuple) de venir à notre époque et de découvrir notre système de numération, que dirait-il à ses semblables pour les convaincre d'adopter ce nouveau système? Ils devront ensuite discuter en équipe de ces mêmes questions afin d'être en mesure de nommer les manifestations de l'évolution de la pensée mathématique à travers le temps. Durant cette discussion, des élèves de 6$^{e}$ année joueront le rôle d'observateurs et noteront, à l'aide d'une grille d'observation critériée (à l'annexe 11g), les manifestations soulevées durant la discussion. À la fin de la discussion, chaque élève s'autoévaluera sur ces mêmes critères.

Justification : Dans le but de vérifier la compréhension de l'idée maîtresse du module de recherche du programme international qui s'énonce ainsi : *Plusieurs peuples ont* *contribué à l'évolution de la pensée mathématique à travers le temps.* En effet, comme son nom l'indique, l'idée maîtresse occupe une place centrale dans le module de recherche et se doit d'être en lien avec le thème transdisciplinaire (où nous nous situons dans l'espace et le temps). C'est le premier élément à définir dans notre plan de travail (canevas de planification des modules de recherche sur quatre pages, à l'annexe 12). Dans un exemple de plan de travail avec « info-bulles » pour guider les enseignants, le programme précise que :

> «L'idée maîtresse doit être formulée en une phrase concise qui permet une compréhension durable. Elle doit être d'une ampleur suffisante pour générer une recherche approfondie, être basée sur des concepts et encourager la capacité de réflexion critique. Elle doit remettre en question et étendre les connaissances antérieures des élèves, tout en leur permettant d'approfondir leur compréhension d'un thème transdisciplinaire » (Organisation du Baccalauréat International, 2007, p. 40).

Toujours dans le plan de travail, on doit ensuite planifier la ou les tâches d'évaluation sommative pour évaluer la compréhension de l'idée maîtresse par les élèves. C'est ce que les concepteurs du programme appellent la conception inversée (planifier l'évaluation sommative avant les activités d'apprentissage). Le lecteur peut d'ailleurs consulter le plan de travail de ce module de recherche à l'annexe 12. De plus, cette activité permettra à la chercheure de voir le degré de compréhension des élèves sur l'évolution des mathématiques, la supériorité de notre système actuel, les contributions de certains peuples à la pensée mathématique, l'utilisation du langage utilisé dans ce projet, etc. Bien que la question 6 (En quoi le peuple que vous avez présenté à la classe a contribué à l'évolution des mathématiques?) semble ambitieuse, nous croyons que certaines équipes (notamment les équipes ayant travaillé avec des systèmes positionnels -maya et babylonien-) pourront parler de cette avancée et de l'invention du zéro. N'oublions pas qu'outre tout ce qui est prévu et écrit, il y aura de nombreuses discussions et lectures de semaine tout au long du projet. Aussi, les différentes activités d'apprentissage et d'intégration devraient permettre aux élèves de tenter une réponse.

Durée : 30 minutes

Matériel : La grille d'observation critériée en annexe 11g.

*Étant donné la fin de l'année et la multitude d'activités spéciales dans notre école dynamique, cette activité n'a malheureusement pas été réalisée. Pour l'avoir réalisée dans les années suivant cette expérimentation, c'est une très belle activité synthèse.*

Voici la planification dans le temps que nous avions prévue, suivie du calendrier réel.

**Calendrier prévu des activités**

| Lundi | Mardi | Mercredi | Jeudi | Vendredi |
|---|---|---|---|---|
| | | 18 **avril**<br>Act. A : Carte<br>Act. B : Papous | 19<br>Act. C : Survol | 20<br>Act. D : Ajouts carte<br>Act. E : Questions |
| 23<br>Act. 1 : Systèmes (égyptien, chinois, babylonien) | 24<br>Act. 1 : Système (sumérien, romain, maya) | 25<br>Act. 2 : Présentations (deux équipes) | 26<br>Act. 2 : Présentations (deux équipes) | 27<br>Act. 2 : Présentations (deux équipes) |
| 30 | 1er **mai** | 2<br>Act. 3 : Récapitulation | 3 | 4<br>Act. 4 : enrichissement<br>Act. 5 : Retour |
| 7<br>Act. 6 : + et – (égyptien, chinois, babylonien) | 8<br>Act. 6 : + et – (égyptien, sumérien, romain) | 9<br>Act. 7 : Présentations (deux équipes) | 10<br>Act. 7 : Présentations (deux équipes) | 11<br>Act. 7 : Présentations (deux équipes) |
| 14<br>Act. 8 : x et ÷ (chinois, égyptien babylonien) | 15<br>Act. 8 : x et ÷ (sumérien, égyptien romain) | 16<br>Act. 9 : Présentations (deux équipes) | 17<br>Act. 9 : Présentations (deux équipes) | 18<br>Act. 9 : Présentations (deux équipes) |
| 21<br>Congé férié | 22 | 23<br>Act. 10 : Retour opérations<br>Act. 11 : Ligne du temps et carte | 24<br>Act. 12 : Ce que j'ai appris<br>Act. 13 : Retour questions élèves | 25<br>Act. 14 : Retour activités |

*Tel qu'on peut le voir dans le calendrier des activités telles qu'elles se sont réalisées (à la page suivante), la séquence s'est étirée sur neuf semaines plutôt que les six semaines prévues. Le temps beau et exceptionnellement chaud et les nombreuses activités de notre école dynamique ont contribué à ces ajouts puisqu'à part quelques exceptions, la durée prévue des activités a été respectée.*

***Calendrier des activités telles que vécues en classe du 19 avril au 14 juin 2007***

| **Lundi** | **Mardi** | **Mercredi** | **Jeudi** | **Vendredi** |
|---|---|---|---|---|
| | | | *19* ***avril***<br>*Act. A : Carte*<br>*Act. B : Papous*<br>*Act. C : Survol* | *20*<br>*Act. D : Ajouts carte*<br>*Act. E : Questions* |
| *23*<br>*Act. 1 : Systèmes (égyptien, chinois, babylonien)* | *24*<br>*Act. 1 : Système (sumérien, romain, maya)* | *25*<br>*Act. 2 : Présentations (égyptien)* | *26*<br>*Act. 2 : Présentations (chinois)* | *27*<br>*Act. 2 : Présentations (romain, sumérien, maya)* |
| *30* | ***1er mai*** | *2*<br>*Act. 2 : Présentations (babylonien)*<br>*Act. 3 : Récapitulation* | *3*<br>*Act. 4 : enrichissement*<br>*Act. 5 : Retour* | *4* |
| *7*<br>*Act. 6 : + et – (égyptien, chinois, babylonien)* | *8*<br>*Act. 6 : + et – (égyptien, sumérien, romain)* | *9*<br>*Act. 7 : Présentations (sumérien, égyptien)* | *10*<br>*Act. 7 : Présentations (chinois, romain babylonien)* | *11*<br>*Act. 7 : Présentations (égyptien)* |
| *14*<br>*Act. 8 : x et ÷ (chinois, égyptien babylonien)* | *15*<br>*Act. 8 : x et ÷ (sumérien, égyptien romain)* | *16* | *17* | *18* |
| *21* | *22* | *23*<br>*Act. 9 : Préparation des présentations* | *24*<br>*Act. 9 : Présentation (chinois, romain)* | *25* |
| *28* | *29* | *30* | *31*<br>*Act. 9 : Présentations (égyptien, égyptien, sumérien, babylonien)* | ***1er juin*** |
| *4* | *5* | *6*<br>*Act. 10 : Retour opérations*<br>*Act. 11 : Ligne du temps et carte* | *7* | *8* |
| *11* | *12* | *13*<br>*Act. 12 : Ce que j'ai appris* | *14*<br>*Act. 13 : Retour questions élèves*<br>*Act. 14 : Retour activités* | *15* |

# Conclusion

Ce quatrième chapitre consistait à décrire la planification de chacune des activités qu'allaient vivre les élèves en classe. On retrouvait d'abord les activités de mise en contexte pour entrer dans le sujet et faire surgir les connaissances antérieures des élèves. Ensuite, nous avons décrit les activités d'apprentissage que nous proposons aux élèves pour construire de nouvelles connaissances et faire des liens avec notre système de numération actuel et les algorithmes personnels et conventionnels. En bref, il s'agissait, pour les élèves, de découvrir le fonctionnement de différents systèmes de numération qu'a connu l'humanité (sumérien, égyptien, babylonien, romain, chinois et maya) et de s'approprier les différents procédés pour effectuer les opérations dans ces systèmes (additions, soustractions, multiplications et divisions). Finalement, nous avons décrit les activités d'intégration qui permettent de faire des liens entre les différents systèmes et notre système actuel, d'intégrer les apprentissages et d'ouvrir vers d'autres disciplines. Pour chacune des activités, le lecteur trouvait une description, sa justification qui reprenait des éléments du cadre conceptuel (notamment sur le type d'activités -2.1-, les difficultés en numération -2.2- et le constructivisme -2.3-), la conduite anticipée des élèves et parfois de l'enseignante, la durée et le matériel nécessaire à leur réalisation. Nous y avons également décrit, en italique, le déroulement sommaire des activités pour une meilleure comparaison avec ce qui avait été prévu.

Maintenant que nous avons planifié notre séquence d'enseignement, comment toutes ces activités se sont-elles vécues en classe? Comment les élèves s'y sont-ils intéressés ? Ont-ils changé leur perception des mathématiques ? Ont-ils mieux compris? C'est ce qui nous attend dans le prochain chapitre : les analyses.

# **5.** Analyses

# Introduction

Au chapitre précédent, nous avons présenté notre séquence d'enseignement en y intégrant, au fur et à mesure, le déroulement des activités telles qu'elles avaient été vécues en classe avec les modifications apportées (notamment à l'horaire). Dans ce chapitre, nous nous concentrons sur l'analyse de la séquence que nous avons divisée en trois blocs : 1) les systèmes de numération; 2) les additions et les soustractions dans ces systèmes et 3) les multiplications et les divisions. Nous analysons la compréhension qu'ont les élèves des systèmes de numération qui nous ont précédés à partir de notre journal de bord bonifié, des affiches et des tests de compréhension. Les autres aspects, tels l'intérêt et la motivation, seront traités au chapitre suivant.

## 5.1. Premier bloc : analyse des activités sur les systèmes de numération

Pour rendre l'analyse la plus cohérente et compréhensible possible, nous traitons chaque système de numération séparément, c'est-à-dire que nous analysons d'abord le travail d'équipe sur un système de numération, puis la présentation par l'équipe responsable de ce même système et finalement, le test *Retour sur votre système de numération* sur la compréhension de ce système. L'ordre de l'analyse suit l'ordre des présentations dans la classe pour une meilleure compréhension des discussions suite à chacune des présentations. En effet, après chaque présentation, la chercheure demandait aux élèves de la classe les ressemblances et les différences entre le système présenté et notre système de numération actuel. À partir de la deuxième présentation, nous demandions également les ressemblances et les différences avec les systèmes déjà présentés.

### Analyse du travail sur le système égyptien

Comme nous l'avions anticipé lors de l'élaboration de notre séquence d'enseignement/apprentissage dans la partie *conduite attendue des élèves*, les élèves ont semblé saisir facilement et rapidement comment fonctionnait le système égyptien. Ainsi, ils ont terminé la tâche en seulement 9 minutes, et ce, sans fautes. Les réponses individuelles au test de compréhension (activité 5) viendront appuyer cette observation. Lors de la réalisation de leur affiche, les élèves ont également réalisé qu'ils n'avaient pas besoin de mettre les nombres de 2 à 9 puisqu'on représente ceux-ci en répétant le symbole du 1. En effet, une élève de l'équipe a proposé de mettre « 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 100 » sur leur affiche et un autre élève lui a répondu : « mais non, on n'a pas besoin de faire ça ». Elle s'est ravisée et a dit : « OK, on va mettre 1, 10, 100, 1 000, 100 000 et 1 000 000 ». Comme il s'agissait du système le plus facile, les élèves étaient très autonomes et ont vite terminé leur affiche.

### Analyse de la présentation du système égyptien

Comme ce système additif est assez simple, les élèves l'ont présenté de manière simple et leurs camarades de classe ont semblé le comprendre rapidement. Lorsque les élèves ont présenté leurs défis (traduire un nombre indo-arabe en symboles égyptiens et vice versa), les élèves de la classe qui ont donné les réponses ont réussi du premier coup. Lorsque nous leur avons demandé les ressemblances et les différences entre ce système et le nôtre, les élèves ont remarqué « qu'ils comptent par 10 comme nous », mais qu'« eux, ils font des dessins au lieu des chiffres ». Un élève de la classe a précisé que « les nombres s'écrivent en ordre croissant dans le système égyptien » ayant remarqué que les plus petits ordres étaient à gauche, contrairement au système indo-arabe. Les élèves n'ont toutefois pas remarqué la lourdeur de ce système additif et les éventuelles difficultés associées aux opérations. Ils pourront le constater plus tard. Nous présentons, ci-dessous, l'affiche que cette équipe a réalisée pour sa présentation. On constate que tous les symboles sont présents, mais qu'un seul exemple de nombre composé de plusieurs hiéroglyphes est présenté. Comme le système est simple, cela s'est avéré suffisant.

**Figure 28** Affiche du système égyptien


Dans la section suivante, nous présentons et analysons les résultats au test de compréhension de cette équipe. Un tableau synthèse présentant toutes les réponses des élèves se trouve dans le journal de bord (annexe 13).

## Analyse des résultats du test sur le système égyptien

Rappelons que ce test de compréhension (annexe 11a) se faisait après l'ensemble des présentations et des discussions sur les ressemblances et les différences de chaque système avec les autres systèmes présentés et le système indo-arabe. Juste avant ce test, nous avions également fait une petite récapitulation où les élèves devaient proposer différentes classifications des systèmes selon des caractéristiques communes. Les élèves répondaient aux questions en fonction du système qu'ils avaient exploré. Pour ce qui est de la ressemblance entre le système égyptien et notre système indo-arabe, 4 élèves sur 5 ont précisé sa base 10. Le cinquième élève n'a rien écrit. De plus, un élève a précisé que le 1 est une ligne droite dans les deux systèmes.

Quant aux ressemblances avec les autres systèmes présentés en classe, un élève a répondu qu'« Il a des signes pour identifier les chiffres et les nombres », et un autre qu' « il y a des signes pour les différencier », mais on ne sait pas trop ce qu'ils veulent dire. Un élève précise que d'un à neuf, on additionne des unités comme les Babyloniens (il oublie les Sumériens) et qu'on ne doit pas placer plus de trois symboles identiques par ligne comme les Sumériens. Un élève avance à juste titre qu'« Un signifie une barre dans presque tous les systèmes (sic) » et un autre trouve que les Égyptiens utilisaient des symboles comme les Sumériens, les Chinois et les Mayas. Personne ne fait mention de sa base 10 commune aux systèmes chinois et romain et au type additif, commun aux systèmes sumérien et romain.

Quant aux différences avec notre système, un seul élève fait directement référence aux types de systèmes : « notre système qu'on utilise est un système positionnel et le système égyptien est additif », mais il ne précise pas que les Égyptiens n'avaient pas besoin de zéro. Deux autres élèves soulignent qu'il faut répéter les symboles, contrairement à nous : « Pour 17, il faut mettre un fer à cheval et 7 barres tandis que nous c'est juste un 1 et un 7 » et « C'est des dessins (hiéroglyphes), le un million n'est pas composé de 7 chiffres, mais 1. Les chiffres 1 à 9 sont  avec 1 à 9 barres, nous c'est un seul chiffre ». Trois élèves ont mentionné que les Égyptiens utilisaient des dessins pour leurs chiffres et deux élèves ont précisé que nous avions plus de chiffres que les Égyptiens : « Il n'y a pas autant de chiffres » et « Nous avons + de chiffres qu'eux ». Bien qu'en principe, le système égyptien requiert un nouveau symbole pour chaque puissance de dix, les élèves ont localement raison puisque le système présenté aux élèves comprenait les sept symboles pour les sept premières puissances de 10 : 1, 10, 100, 1 000, 10 000, 100 000 et 1 000 000, alors que le système indo-arabe contient dix chiffres : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Par contre, ces derniers permettent d'écrire tous les nombres jusqu'à l'infini.

En ce qui a trait aux différences avec les autres systèmes présentés en classe, les réponses ne sont pas très claires et très peu comparent vraiment deux systèmes. Un élève s'est contenté de nommer des caractéristiques du système, mais sans donner son équivalent dans les autres systèmes « Il y a une barre pour dire 1, un arc pour dire 10, une corde pour dire 100, une fleur de lotus qui égale à 1 000, etc. » et un autre avance qu'« il faut additionner ». Un autre élève a parlé uniquement des autres systèmes : « Maya et babylonien : il n'y a pas de zéro » et « Chinois est hybride ». C'est comme si ces élèves se concentraient sur un système et avaient de la difficulté à articuler leur pensée sur deux systèmes en même temps. Deux élèves sont restés plutôt vagues : « Il est plus facile, car il y a moins de choses à retenir » et « Tous les systèmes comptent différemment ». Finalement, un élève se trompe complètement lorsqu'il affirme qu'« Il n'est pas additif comme d'autres systèmes de numération ».

Pour ce qui est de la base du système égyptien, les cinq élèves ont répondu qu'il est bien en base 10 et quatre élèves l'ont justifié en expliquant qu'il y a un symbole pour 1, 10, 100, 1 000, etc., ce qui est une réponse juste. Quant à savoir si ce système a besoin d'un zéro, les cinq élèves ont bien répondu que non. Un seul élève, toutefois, le justifie en précisant que ce n'est pas nécessaire puisqu'il s'agit d'un système additif. Les quatre autres élèves ont expliqué à leur façon et pas toujours clairement pourquoi les Égyptiens n'utilisaient pas le zéro : « Non, car zéro, c'est donc ils ne mettent rien »; « non, sûrement car ils n'avaient pas pensé de l'inventer »; « non, car ce sont des dessins parce que les zéros sont déjà mis dans le dessin »; « pas besoin de zéro pour atteindre la réponse ». Finalement, les cinq élèves ont répondu correctement que le système égyptien n'était pas positionnel. Quatre élèves l'ont justifié en invoquant qu'il était plutôt additif. Un élève est un peu moins précis, mais il a fait référence à la valeur des chiffres (ou des symboles) dans un nombre : « Non, car même si les dessins sont mis en croissant ou décroissant, c'est le même résultat. »

## Analyse du travail sur le système chinois

Tel que nous l'avions anticipé, les élèves ont saisi rapidement le fonctionnement du système chinois qui ressemble à la décomposition qu'ils ont connue avec les manuels Défi mathématique dans les années passées. Ils n'ont pas eu de difficultés majeures, un élève ayant rapidement remarqué : « Ah oui! Ils font 2 x 10 + 2 » en décrivant les symboles. L'élève chinoise de l'équipe a précisé que 22 se disait justement « deux-dix-deux » en chinois, exactement comme cela s'écrivait en symboles. Un autre élève a supposé que pour écrire 30, il fallait mettre le symbole de 3 avec celui de 10. Tel que nous l'avions anticipé, le recours à la multiplication n'a pas posé de problème. En effet, lors de la correction de leur feuille de travail, les élèves n'avaient pas fait d'erreurs et ils ont terminé en 16 minutes. Nous supposons que le fait que le système était en base 10 les a aidés. Les élèves ont réalisé qu'il était impératif de mettre tous les symboles de 1 à 9 et les puissances de 10 (10, 100, 1 000, 10 000) sur leur affiche.

## Analyse de la présentation du système chinois

Au moment de présenter leur système de numération, les élèves de cette équipe se sont empêtrés dans des détails (la date, la prononciation en chinois) et ont perdu de vue le but de la présentation : faire comprendre le système chinois aux élèves de la classe. Leur affiche comprenait néanmoins tous les symboles, mais ils n'ont pas donné suffisamment d'exemples de nombres pour que tous les élèves comprennent. Ils ont bien tenté quelques explications : « nous, en français, on dit vingt, mais en chinois, on dit deux dix ». Il aurait fallu accompagner cette explication d'une démonstration du nombre 23, par exemple, qui aurait permis de démontrer le principe hybride (multiplicatif et additif). Un autre élève a précisé qu'on faisait « comme une multiplication », mais n'a pas donné d'exemple clair ou une décomposition telle que les élèves l'avaient apprise dans les années antérieures (par exemple : 3 x 100 + 4 x 10 + 7). Le défi qu'ils avaient écrit sur leur affiche était un « défi ultime ». En effet, ils avaient écrit le nombre 95 476 en symboles chinois. Nous leur avons demandé s'ils étaient sûrs qu'avec leurs explications, les élèves de la classe seraient capables de relever le défi. Une élève a donc donné d'autres exemples en disant que 200 se dit « deux cents » en pointant les symboles. Ils ont ensuite demandé qui ne comprenait pas et environ la moitié des élèves ont levé la main. Pour compliquer le tout, un élève a fait une erreur quand il a dit que pour écrire 20 000, on prenait les deux symboles qui forment 20 (2 et 10) et qu'on les plaçait devant le 1 000. Lorsque nous lui avons précisé que ce n'était pas tout à fait cela, une élève de l'équipe a ajouté que, comme il y avait un symbole pour 10 000, il fallait juste mettre le symbole du 2 devant. Peut-être est-ce l'influence du français oral qui a causé cette erreur (on dit vingt milles, 20-1000)? Le premier élève n'avait pas compris que l'on utilisait toutes les puissances de 10, mais sa coéquipière l'a rapidement corrigé.

À la période de questions, un élève a demandé s'il y avait un zéro dans le système chinois. Comme cet élève avait travaillé sur le système babylonien positionnel, nous croyons qu'il était curieux de savoir si ce système en requérait un. Un élève qui présentait a précisé qu'« on ne dit rien quand il y a rien ». On ne dit effectivement rien quand un ordre est absent (par exemple les centaines), mais on n'écrit rien également. Un autre élève a demandé si les multiplications fonctionnaient juste avec 10, mais un élève a injustement précisé que ce n'était pas vraiment une multiplication. À ce moment, il aurait été judicieux de lui demander pourquoi il pensait que ce n'était pas « vraiment » une multiplication, mais nous avons laissé la discussion continuer. Un autre élève a résumé qu'il « ne faut jamais oublier quand tu parles de dizaines, de centaines ou d'unités de mille ou peu importe, de mettre les unités plus 10, 100 ou 1 000, sinon, tu vas avoir l'impression de passer tout de suite aux unités. Ça ne marche pas, il faut toujours écrire les dizaines, les centaines… » Il a pris en exemple le défi et il a effacé le symbole du 10 dans 5 038 (qui s'écrit 5, 1000, 3, 10, 8) et il a expliqué qu'un *trois* à côté d'un *huit*, ça ne se pouvait pas. Un élève de la classe a ensuite demandé si pour écrire 18, il fallait écrire 2-9. Apparemment, il avait compris le principe multiplicatif, mais n'avait pas compris la base 10 et le fait que ce ne sont que les puissances de 10 que l'on multiplie. Nous aurions pu demander à l'équipe de répondre, mais nous avons plutôt décidé d'intervenir au tableau pour clarifier le tout.

Pour les ressemblances entre ce système et notre système actuel ou le système égyptien déjà présenté, les élèves de la classe ont remarqué que les symboles chinois étaient plus des dessins, un peu comme les hiéroglyphes égyptiens. Un élève de la classe a noté aussi qu'il y avait un symbole particulier pour 1 000, mais il n'a pas relevé qu'il y avait un symbole particulier pour toutes les puissances de 10 comme le système égyptien et un symbole pour chaque unité, comme dans notre système actuel.

L'affiche qu'ont préparée les élèves qui travaillaient sur le système chinois est reprise ci-dessous. Ici aussi, tous les symboles sont présents, mais un seul exemple de nombres est présenté. Il est cependant écrit de façon confuse. En effet, les élèves sont venus mettre le symbole +, alors qu'il s'agissait plutôt d'une multiplication et le symbole =, mais ces deux symboles ressemblent précisément au 10 (十) et au 2 chinois (二) qui composent le nombre 20 qu'ils tentaient de présenter. Qu'en est-il de leur compréhension personnelle?

**Figure 29** Affiche du système chinois

## Analyse des résultats du test sur le système chinois

Commençons par les ressemblances entre le système chinois et le système indo-arabe. Un élève a précisé à juste titre que le système chinois « est en base 10 » et un autre a remarqué que « de 1 à 9, les chiffres ou les signes sont différents » tout comme dans notre système. Est-ce qu'un autre élève a voulu dire la même chose? Difficile à dire avec l'exemple qu'il donne : « Ils ont un dessin par chiffre comme nous (ex : 10 000 =萬 ) ». Un élève a seulement remarqué que : « Le 7 chinois est un 7 à l'envers en indo-arabe ». Finalement, un élève, pas toujours engagé dans les tâches scolaires, n'a pas dû lire la question puisqu'il a répondu « le système chinois ».

En ce qui concerne les ressemblances avec les autres systèmes présentés en classe, trois élèves ont fait référence au fait que le système chinois n'a pas de zéro : « Le (système) chinois n'a pas de zéro »; « Il y en a qui n'ont pas de zéro », mais un seul le met en parallèle avec d'autres systèmes « il est pareil que les Sumériens, les Romains et les Égyptiens, car ils n'ont pas de zéro ». Un seul élève précise que ce système est en base 10, mais ne précise pas quels autres systèmes le sont également. Ce même élève a affirmé que : « En quelque sorte, on multiplie les chiffres comme mayas. » Il devait se rappeler qu'avec le système maya, lorsqu'on arrive au deuxième « étage », on parle de vingtaines, donc on doit multiplier les unités ou le symbole de 5 par 20. Un autre élève devait faire référence à la partie additive de ce système hybride puisqu'il a répondu un peu confusément : « Sumérien, car il est additif (en fait, le système chinois est hybride) comme le système égyptien ». Enfin, un élève a également remarqué que dans presque tous les systèmes, le 1 est une barre.

Pour ce qui est des différences avec le système indo-arabe, on a décrit de bonnes caractéristiques du système chinois, mais sans le comparer à notre système actuel, c'est-à-dire en opposant ces caractéristiques à celles du système indo-arabe. En effet, deux élèves ont précisé qu'il n'avait pas de zéro et deux autres que c'était un système hybride. Aussi, une élève a rappelé que les Chinois écrivaient de haut en bas et de droite à gauche. Enfin, deux élèves ont encore fait référence à la prononciation différente, dont un qui a plutôt expliqué que le système oral est le même que le système écrit : « Le 20 ne se prononce pas 20, mais bien 2-10, comme pour 2 000 = 2-1 000 ».

Quant aux différences avec les autres systèmes, un élève a dit qu' « Il est le seul à être hybride » tandis qu'un autre a répondu qu' « il est hybride, donc on additionne et multiplie ». Une élève a répété qu'ils écrivaient de haut en bas et de droite à gauche et a précisé comment on écrivait la date. Enfin, un élève a précisé qu' « Il est différent du système babylonien et le maya, car ils ont des zéros. » La plupart des élèves se sont encore attardés à des différences de surface plutôt qu'à des différences de fond.

Pour la base, les cinq élèves ont bien répondu que le système chinois est en base 10, mais les explications diffèrent. Deux n'ont pas justifié leur réponse, un a fait référence aux puissances de 10 « car c'est 10, 100, 1 000, pas comme le babylonien : 60, 3 600. »; un a répondu « parce que nous n'avons pas de 11, ils écrivent 10 + 1 = 11 ». Un élève avait une réponse plus confuse puisqu'il a fait référence au type de système et non de sa base : « car il n'a pas des colonnes, mais par exemple ceux qui ont des colonnes sont ceux-ci : babylonien, maya ». Aussi, les cinq élèves ont répondu que les Chinois n'avaient pas besoin de zéro, mais les explications varient en pertinence et en clarté. Un seul élève a fait référence au fait que seuls les systèmes positionnels ont besoin d'un zéro : « car il n'est pas positionnel. Quand ils veulent (les Chinois) dire zéro, ils ne disent rien ». D'autres élèves ont tenté d'expliquer ce concept à leur façon, mais c'est moins clair : « parce qu'il y a des milles, dix et des cents! »; « Parce qu'il y a un nom à chaque signe, il n'en a pas besoin » ou « parce que si nous voulons dire 80, nous disons 8 x 10 ». Finalement, trois élèves ont répondu que le système chinois n'était pas positionnel puisqu'il était hybride et ont précisé qu'il était à la fois additif et multiplicatif. Un élève s'est référé à notre système et pensait que le système chinois était positionnel « car il a un symbole pour chaque chiffre ». Enfin, un élève a oublié ce que voulait dire positionnel.

## Analyse du travail sur le système romain

Comme nous l'avions anticipé, le fait de ne pas donner la valeur du L (50) a posé problème aux élèves. Ils ont émis l'hypothèse qu'il valait 30, mais n'ont pas vérifié dans toutes les cases où le L était présent ou requis. Ils n'avaient donc pas remarqué la régularité entre les symboles (1, 5, 10, 50, 100, 500, 1 000, etc.). Ils ont réalisé leur erreur en faisant leur autocorrection et ils ont su nous l'expliquer rapidement. Le recours à la soustraction n'a pas semblé être trop problématique. Une élève a rapidement remarqué que « quand il y a un plus petit à gauche, on dirait qu'il faut le soustraire. »

## Analyse de la présentation du système romain

Les élèves de cette équipe n'ont pas commencé par présenter les symboles de ce système et leur valeur respective. Cela aurait été judicieux. Ils ont d'abord parlé du recours à la soustraction ainsi « Les anciens Romains, ils ne se compliquaient pas la vie, au lieu d'écrire 4 fois le chiffre I, ils écrivaient IV, IV ça signifiait 5 – 1. » Ils ont enchaîné en expliquant que « les Romains avaient des signes particuliers pour…, il y avait comme des bonds de fois 5, fois 2, fois 5 fois 2, etc. » Une autre élève a poursuivi : « par exemple, ici le I est égal à 1 et le V, c'est 5 et le 10, ben c'est 2 fois 5. Fait que ça continue toujours comme ça ». Leurs explications étaient justes, mais ils ne les ont peut-être pas faites dans le bon ordre. Ce n'est qu'ensuite qu'ils ont présenté tous les symboles (1, 5, 10, 50, 100, 500, 1 000) en faisant remarquer une certaine régularité entre la valeur des symboles « fois 5, fois 2, fois 5, fois 2 ». Ils ont ensuite donné des astuces pour retenir la valeur des lettres (M = mille et C = cent, entre autres). Ils pensaient qu'ils pouvaient déjà passer au défi, mais nous ne le croyions pas puisqu'ils n'avaient pas donné d'exemples de nombres romains. Ils ont précisé alors qu'on faisait « une soustraction à partir de la droite et une addition à partir de la gauche ». Ils ont donné comme exemple que pour écrire 6, c'est 5 + 1, soit V + I, mais que pour 4, 40 et 400 et 9, 90 et 900, il faut soustraire. Cette explication manquait de clarté et les élèves de la classe ne semblaient pas bien saisir.

À une question d'élève : « comment on écrit 48? », l'équipe a précisé « tu fais comme L et X, le X avant, fait que ça fait 40 et tu mets un V et trois barres ». Une élève de l'équipe a ajouté : «  on ne peut pas mettre deux barres avant un V, ça ne se peut pas. » Les membres de l'équipe ont ajouté qu'on ne pouvait avoir 4 chiffres pareils collés comme IIII et que c'était dans ces cas-là qu'on avait recours à la soustraction de 5 – 1 : IV. Cette explication a semblé efficace. Il y a tout de même eu des questions de clarification des élèves, dont une intéressante : « est ce qu'il y a qu'une seule bonne réponse » (qu'une seule façon d'écrire un nombre précis) et on lui a répondu que oui. Ils sont donc passés aux défis qui étaient de trouver le nombre 3 678 en symboles romains et de « traduire » MMDCLXXI en un nombre indo-arabe. Voici l'affiche de cette équipe pour leur présentation.

**Figure 30** Affiche du système romain


Pour les ressemblances avec d'autres systèmes déjà présentés, un élève de l'équipe a fait référence au système égyptien : « c'est comme un peu égyptien, sauf que ce n'est pas les mêmes symboles, c'est comme il faut énumérer les choses. Comme par exemple pour faire 3, il fallait faire 3 barres ». Aussi, un élève de la classe a remarqué qu'on additionne les symboles comme le système égyptien (par exemple, 3000 s'écrit avec trois symboles de mille dans les deux systèmes). Un autre élève a aussi remarqué qu'on écrivait les plus gros ordres à gauche, comme dans le système indo-arabe actuel. L'explication est maladroite, mais juste : « Ben, il y a aussi, c'est comme un petit peu, on commence comme, le plus haut chiffre est à gauche, comme maintenant. Par exemple dans 3 678, le 8 est moins, donc il est à la fin, comme indo-arabe ». Pour les différences, ils ont remarqué qu'il n'y avait pas un symbole pour chaque unité comme dans notre système : « il n'y a pas de signe particulier pour admettons 6, donc, ils marquaient 5 et 1. » Ils ont également remarqué que c'était plus long d'écrire les nombres qu'avec le système chinois (l'élève a comparé la façon d'écrire le nombre 3000).

## Analyse des résultats du test sur le système romain

Pour les ressemblances avec notre système, pas grand-chose n'en est sorti. Deux élèves ont parlé de la base 10, qui est effectivement commune aux deux systèmes, mais ils ont aussi parlé de la base intermédiaire 5 que l'on retrouve uniquement dans le système romain. Deux élèves n'ont rien écrit et enfin, un élève a remarqué la similitude dans la façon d'écrire 1.

Pour ce qui est des ressemblances avec d'autres systèmes, cette équipe est elle aussi restée en surface. Elle a toutefois été plus complète puisqu'elle a nommé une caractéristique et les systèmes qui possédaient cette même caractéristique : « Pour représenter 3, il faut faire 3 fois le chiffre 1 (Mayas, Sumériens, Chinois, Babylonien, Égyptien) »; « Ils ressemblent aux chiffres mayas parce qu'ils ont un symbole pour cinq et ils rajoutent 1, 2 ou 3, etc. » et « Il est additif comme le système égyptien ». Par contre, ils n'ont pas tous trouvé la caractéristique la plus évidente : sa base 10 comme les systèmes égyptien et chinois. Enfin, une dernière réponse parle d'une caractéristique commune à trois systèmes, mais pas avec le système romain tel que demandé dans la question : « il ressemble au système maya, car en maya, il y a un zéro et babylonien aussi comme indo-arabe ». Pourtant, ce même élève a répondu, à la question sur le zéro, que ce système n'en avait pas besoin.

En ce qui concerne les différences avec notre système actuel, les réponses sont variées, mais elles ne touchent qu'une seule différence dans chaque réponse alors qu'il y en a plusieurs. Un élève a judicieusement remarqué qu': « ils n'ont pas de signe particulier pour quatre, c'est IV (5 – 1 = 4) », tandis qu'un autre élève parle de la différence des symboles : « Les chiffres romains ont des lettres et notre système, ce sont des chiffres. » Deux élèves ont fait référence au fait que c'était un système additif (ou additif et soustractif), mais sans dire que notre système était plutôt positionnel. Enfin, un élève a écrit que « la différence entre le système romain et maintenant est que les Romains n'avaient pas de zéro ». Donc, les cinq élèves ont relevé une différence, mais la plupart sont des différences de symbolisme ou d'écriture, peu en sont de fonctionnement des systèmes de numération.

À la question sur les différences avec les autres systèmes, deux élèves ont nommé une seule caractéristique du système romain, sans la mettre en opposition avec les autres systèmes : « ils ont un signe pour 500 » et « les chiffres romains c'est juste des lettres. » Les trois autres élèves ne nomment qu'une caractéristique, mais l'opposent au moins aux autres systèmes : « Il y a des systèmes comme chinois qui ont un chiffre spécifique de 1 à 10, tandis que les Romains ont cinq plus 1, 2 ou 3, etc. » et « il n'est pas positionnel et ni hybride comparé aux Chinois, Mayas et Babyloniens » et « les chiffres romains sont représentés en lettres et les autres systèmes en dessins, etc. ».

Pour ce qui est de la base, la base intermédiaire semble avoir brouillé les cartes des élèves. En effet, seulement deux élèves ont affirmé que le système romain est en base 10. Le premier a répondu : « Base 10 et base intermédiaire, parce que c'est 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1 000 ». Son explication manque toutefois de clarté, tout comme le deuxième : « Il est en base 10 parce que c'est plus simple qu'en base ex. 60 ». Ensuite, deux élèves ont répondu que la base était 5 en faisant référence à la régularité entre les différents ordres et ont répondu : « Les chiffres romains ont une base de 5, parce que ça commence 1, après 5, après 10, 50, 100, 500, 1 000 » et « Le système romain est en base de x 5, x 2, x 5, x 2, etc. ex. I x 5 = 5 V, V x 2 = 10 X, etc. » Enfin, une élève a précisé qu'elle était « Absente quand on a appris », mais ce concept a été mentionné à presque toutes les présentations qui se sont échelonnées sur plusieurs jours. Cette élève n'a toutefois pas été absente à toutes ces périodes.

Pour ce qui est de la nécessité du zéro, les cinq élèves ont répondu que le système romain n'en avait pas besoin, mais les explications ne sont pas toutes valables « non, parce que c'est des lettres » ou claires. En effet, aucun élève n'a fait référence au fait qu'il est additif ou que seuls les systèmes positionnels ont besoin d'un zéro. Voici les réponses en vrac : « non, car ex. 500 s'écrit D, on n'a pas besoin d'écrire CCCCC000 »; « non, parce qu'exemple, les Romains faisaient deux fois le symbole 10 »; « non, parce que les Romains commençaient à un » et finalement, « non, car si nous voulons écrire 10, ils écrivent tout simplement X au lieu de 1 et 0 = 10. » Pour terminer, trois élèves ont répondu que le système romain n'était pas positionnel parce qu'il était plutôt additif. L'élève souvent absente ne savait pas et un élève a écrit : « Additif, parce qu'on a besoin de faire des additions ». Nous pouvons questionner sa compréhension d'un système additif.

## Analyse du travail sur le système sumérien

Les élèves ont très rapidement terminé la feuille (en seulement 9 minutes). Malgré la mauvaise qualité de l'enregistrement, on entendait des bribes d'explication qu'ils se donnaient dans l'équipe : « Ça, c'est des dix »; « Ça, c'est 600 »; « À chaque fois qu'il y a un rond à l'intérieur, on fait fois 10 ». « Ok, ça, ça fait 36 000. » Pour l'affiche, ils ont mis tous les symboles du système sumérien avec leur équivalent indo-arabe, mais ils n'avaient pas pensé mettre des exemples de nombres composés de plusieurs symboles. Nous leur avons donc proposé d'en mettre et nous verrons les résultats lors de la présentation.

## Analyse de la présentation du système sumérien

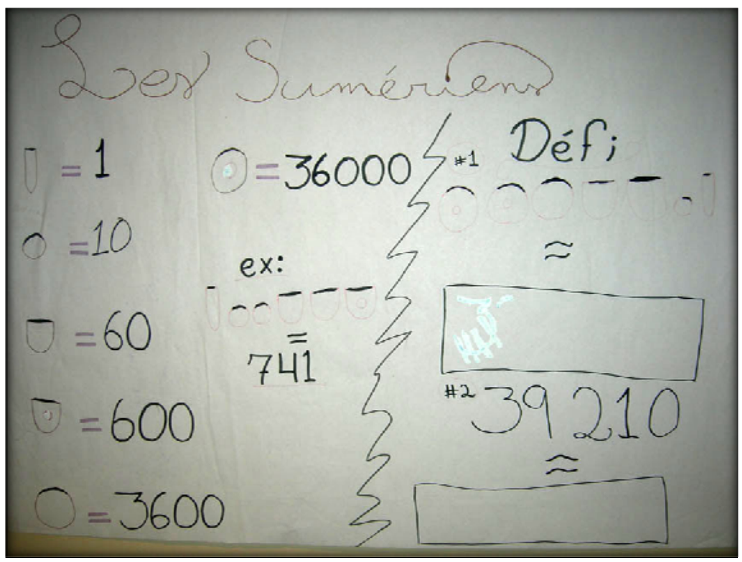
Cette équipe a fait une présentation courte, mais efficace. Les élèves ont d'abord présenté tous les symboles et ont fait remarquer aux auditeurs que lorsqu'il y avait un petit cercle dans un symbole, il valait 10 fois plus. Ils ont ensuite donné quelques exemples de nombres composés de plusieurs symboles dont le nombre 741 « en tout, ça donne 741 parce que c'est comme un petit peu eux, ils comptent de droite à gauche, ici on a 600; ça, ça fait 60 et 60. Donc 600 + 60 + 60, ça fait 720 + 20 + 1, ça fait 741 ». Lorsque nous leur avons demandé comment ils écriraient 1 000, un élève de l'équipe nous a répondu : « on écrirait 600, et beaucoup de 60 et de 10 ». Il semblait ainsi avoir compris comment former des nombres plus élevés. Une élève de l'équipe a précisé que les Sumériens faisaient toujours des additions. Un élève de la classe a fait une observation intéressante sur la régularité entre les symboles sumériens « ça fait fois 10, fois 6, fois 10, fois 6 » et a fait le parallèle avec la régularité du système romain : fois 5, fois 2, fois 5, fois 2. Un autre élève de la classe a posé une autre question pertinente, à savoir, si pour écrire 100, on pouvait faire un petit cercle dans le cercle, mais un membre de l'équipe des Sumériens a répondu que ce n'était pas possible, mais sans plus d'explication.

Pour leur défi, un élève de la classe a remarqué qu'ils avaient écrit les nombres sumériens avec les plus gros ordres à gauche (ce qui est une erreur). Les membres de l'équipe ont quand même constaté que ce n'était pas très grave puisqu'ils ont précisé que « ça ne change pas la valeur ». Nous en avons profité pour donner l'exemple du système indo-arabe : « nous, si, admettons, j'écris 123, est-ce que c'est la même chose que 321? » Les élèves ont évidemment répondu que non. Nous avons ajouté « nous, l'ordre des chiffres a beaucoup d'importance. Dans le cas des Sumériens, c'est plus une question d'habitude et de disposition, mais effectivement, ça ne change pas la valeur du nombre ». Cette erreur a permis à un élève de comparer le système sumérien au matériel multi bases déjà connu : « c'est comme les bases unités (sic)… que tu mettes ta plaque en haut, en bas ou à côté de la barre, ça va toujours être le même nombre ».

Pour ce qui est des défis, cela a été fastidieux. En effet, le premier défi était en symboles sumériens et représentait le nombre 75 731 (36 000 + 36 000 + 3 600 +60 + 60 +

10 + 1). Les élèves de la classe ont tenté de le faire, mais trois personnes sont venues au tableau avec des mauvaises réponses. On ne voyait pas la réponse de la première, la deuxième personne a écrit 73 931, il y a donc 1 800 de différence, mais nous avons raté une bonne occasion de questionner l'erreur, qui devait en être une de calcul. La troisième personne a écrit 79 811, une différence de 4 070, difficilement explicable à part plusieurs erreurs de calcul. La quatrième personne a réussi et a expliqué brillamment comment elle avait procédé. Le lecteur peut consulter l'affiche de cette équipe à la figure 31. Ici aussi, nous avons un seul exemple d'un nombre composé de plusieurs symboles; il aurait été profitable d'en mettre plus.

**Figure 31** Affiche du système sumérien




## Analyse des résultats du test sur le système sumérien

À la question sur les ressemblances entre le système sumérien et notre système actuel, les élèves ont réalisé qu'il n'y en avait pas beaucoup. Un élève n'a rien écrit et un a fait trois points d'interrogation. Une élève a écrit : « Il n'y en a pas beaucoup, mais j'en ai trouvé une : ils additionnent comme nous », mais elle est erronée puisque notre système n'est pas additif et que nous n'avions pas encore vu les opérations. Finalement, un élève a remarqué que : « Le 1 est un genre de barre (▯). Il ressemble aux plaques, bandes et jetons (☐, l, o). » Il fait référence au matériel multi bases qu'ils ont utilisé au deuxième cycle. Il est vrai que ce matériel permet de travailler la notion de groupements avec les élèves et qu'il se compare à un système additif.

Pour ce qui est des ressemblances avec les autres systèmes présentés en classe, les élèves en ont trouvé davantage. Deux élèves sur quatre ont fait référence au fait que le système sumérien était un système additif comme le système égyptien et un seul l'a trouvé semblable au système babylonien vu leur base 60. Un élève l'a plutôt comparé au système babylonien parce que « (…) de un jusqu'à neuf, c'est le même signe, mais plusieurs fois. Ex. lllllllll = 9. » Dans ce cas, il aurait pu le comparer également au système égyptien. Finalement, une élève a remarqué que dans plusieurs systèmes, le un s'écrivait avec une barre.

Les élèves ont trouvé peu de différences avec notre système et pourtant, ils auraient pu en relever plusieurs. Ainsi, deux élèves ont fait référence au fait que notre système était positionnel, mais un seul a précisé que le système sumérien était plutôt additif. Un seul élève nous a parlé de la base qui est différente. Cela nous étonne puisqu'il s'agit d'une différence importante. Un élève a tout de même remarqué que « nous on a un « signe » pour chaque chiffre, pas eux. » Finalement, la même élève qui faisait référence au matériel multi bases dans les ressemblances, a répondu : « C'est comme du matériel ». Pour cette élève, ce serait à la fois une ressemblance et une différence ?

Pour les différences avec les autres systèmes, ici aussi les élèves nomment certaines caractéristiques du système sumérien, mais sans les opposer aux autres systèmes. Un seul parle du type de système : « Il est additif, mais il y en a que non. » Un autre parle indirectement du type de système : « Romain : s'écrit avec des lettres. Chinois : il est multiplicatif. » Un seul élève parle de la base 60 qui est pourtant différente des trois systèmes en base 10 (égyptien, romain et chinois) et du système maya en base 20. Finalement, un élève a remarqué que « chaque fois qu'on rajoute un petit rond dans un autre signe, on fait fois 10. »

Pour la base, les quatre élèves ont répondu que le système sumérien est en base 60, mais la richesse des explications varie grandement. Ça va de « parce que c'est comme ça » à « parce qu'il multiplie comme ça x 6 x 10, x 6 x 10, etc. » en passant par deux réponses semblables : « Le système sumérien est en base 10 et 60, car ça fonctionne par x 10, x 60, x 10, etc. » et « parce qu'il a une régularité : x 10, x 60 ». Nous croyons qu'ils se mélangent avec la base (60) et la base intermédiaire (10) ou le fait qu'il y a un symbole particulier pour 10 et pour 60. Les quatre élèves ont également répondu que les Sumériens n'avaient pas besoin de zéro. Trois élèves ont précisé que c'est parce que ce système est additif.

L'élève qui ne mentionne pas cette caractéristique a quand même une explication, maladroite, mais compréhensible : « parce que quand on met un zéro ou pas, ça va donner pareil ». Un autre élève est encore moins clair : « alors si l'on met 36 000 plus 600, nous savons que le zéro reste automatiquement à la fin du chiffre ». Finalement, les quatre élèves mentionnent que le système sumérien n'est pas positionnel. Un élève a effacé son explication et un seul précise que : « il est additif et qu'un système additif ne peut être positionnel ». Deux élèves abordent la position des symboles, un avec maladresse : « parce qu'au lieu de mettre de droite à gauche, ça fera le même résultat » et un qui répond peut-être le contraire de ce qu'il veut dire… « Parce qu'on ne peut pas les placer n'importe où, ils vont valoir pareil ». En effet, pendant la présentation de ce système, l'équipe s'était trompée et avait mis les plus gros ordres à gauche. Un élève de l'équipe avait alors remarqué que la position des symboles ne changeait pas la valeur du nombre. Sinon, on peut relever que cet élève a de la difficulté à exprimer sa pensée.

## Analyse du travail sur le système maya

Il est intéressant de constater que les élèves ont attribué au deuxième étage du système maya la caractéristique de notre deuxième colonne (à partir de la droite). Par contre, ils ne pensaient pas en termes de vingtaines, mais avaient remarqué que des dizaines qu'ils connaissaient, ils devaient faire « fois deux ». Tel que prévu, l'irrégularité du troisième ordre à 360 plutôt qu'à 400 (20 vingtaines) a été difficile à saisir pour les élèves. Même une fois que nous les avons informés que le troisième ordre devrait être 400, ils ne voyaient vraiment pas. C'est en les faisant comparer avec notre système qui possède des unités, des dizaines et des centaines et en faisant le lien avec le fait qu'une centaine, c'est dix dizaines qu'ils ont compris. En outre, pour une prochaine fois, nous préconisons de nous en tenir à des nombres inférieurs à 360, quitte à expliquer oralement aux élèves cette irrégularité.

## Analyse de la présentation du système maya

Les élèves ont d'abord présenté les symboles et les nombres jusqu'à 19. Les élèves de la classe semblaient comprendre; du moins, ils ne manifestaient pas de signes d'incompréhension. Cela s'est compliqué lorsqu'ils ont abordé le deuxième étage, le deuxième ordre. Ils auraient dû augmenter les nombres graduellement avec des exemples de nombres en bas de 100, puis un peu plus. Ils sont tout de suite passés au nombre 340 et ils ont perdu plusieurs élèves. Ils ont au moins fait le parallèle avec notre système en dessinant une planche à calculer que les élèves de la classe connaissaient bien, avec ses unités, ses dizaines, ses centaines et ils ont expliqué que pour les Mayas, il s'agit plutôt d'unités, de vingtaines et de « quatre centaines » et que la planche est verticale plutôt qu'horizontale. Plusieurs élèves de la classe ne comprenaient toujours pas. Ils ont tenté un exemple avec le nombre 173, un peu plus petit et ont dessiné à nouveau une planche à calculer. « Quand vous avez vos unités là, OK. Mettons ici (en pointant la deuxième colonne vers la droite) ça valait 10, eux, c'est des vingtaines. Un ici, ça vaut 20. C'est comme si on avait changé… euh… la valeur. » Avec cet exemple, environ la moitié de la classe a commencé à comprendre. Et c'est lorsque nous avons demandé à l'équipe de présenter des nombres plus petits comme 42 ou 56 que le reste de la classe a semblé comprendre. Un élève de la classe a bien résumé « ce qui veut dire qu'en haut de la barre, c'est 20, c'est des vingtaines ». Un élève qui présentait a précisé que « nous, on a des dizaines et des centaines, eux, ils ont des vingtaines et des « quatre centaines ». Lorsqu'un élève a demandé pourquoi on met un melon (zéro) pour écrire 20, un élève de l'équipe a expliqué que pour ne pas se mélanger avec une unité, on est obligé de mettre un zéro. Sur leur affiche, on remarque que les deux seuls nombres qu'ils ont présentés sont assez élevés : 173 et 340. Il aurait été préférable qu'ils commencent par des nombres plus petits, cela aurait facilité la compréhension des élèves de la classe.

**Figure 32** Affiche du système maya

Pendant la discussion, pour les ressemblances avec d'autres systèmes, ils ont relevé le fait que le système maya était additif jusqu'à 19. Pour les différences, ils ont aussi remarqué la régularité qui est le « fois 20 ». Il s'agit en fait de la base. Ils ont noté le fait que les Mayas représentaient leurs nombres « en étages » alors que nous c'était plutôt en « colonnes ».

## Analyse des résultats du test sur le système maya

Avant d'analyser les réponses des élèves, nous devons préciser que lorsque les élèves parlent de la planche à calculer dans le système maya, ils font référence au fait qu'il y a des positions. En effet, les Mayas représentaient leurs nombres en étages et le deuxième étage, notamment, représentait les vingtaines. Sur notre planche à calculer, qui nous sert dans l'apprentissage du calcul, la deuxième colonne, notamment, représente les dizaines. Dans plusieurs de leurs réponses, les élèves de cette équipe ont fait référence à la planche à calculer, paradoxalement autant dans les ressemblances que dans les différences entre les différents systèmes. Pour les ressemblances entre le système maya et notre système, deux élèves sur quatre ont fait référence à la planche à calculer et deux, le fait que les deux systèmes étaient positionnels. Un élève a répondu qu'"il a des chiffres », mais on ne sait pas de quel système il parle. Pour les ressemblances avec les autres systèmes, les quatre l'ont comparé au système babylonien, mais pas tous de la même façon. En effet, deux ont répondu qu'il était positionnel comme le système babylonien et deux qu' «il a une planche à calculer comme le babylonien ». Enfin, un élève a répondu qu'il avait un zéro comme le système babylonien.

En ce qui concerne les différences avec notre système actuel, deux élèves ont fait référence aux groupements différents, mais un élève ne le mettait pas en opposition avec notre système : « Il y a des vingtaines et des *quatre centaines* », tandis que l'autre l'a judicieusement comparé à notre système : « Les Mayas comptaient unités, vingtaines, *quatre centaines* au lieu d'unités, dizaines, centaines ». Deux élèves ont fait référence à la fameuse planche à calculer, mais dans un cas, ce n'était pas très clair, on ne savait pas de quel système il parlait : « Il n'y a pas de planche à calculer », mais l'autre élève apporte une nuance intéressante : « Le système maya utilise toujours la planche à calculer (pour représenter les nombres), tandis que nous l'utilisons seulement pour les calculs ». Enfin, un élève a indiqué que « de 1 à 4, c'est que des points », mais il ne précise pas que nous avons un chiffre particulier pour toutes les unités (de 0 à 9).

À la question sur les différences avec les autres systèmes présentés, les réponses étaient très disparates. Ici encore, peu d'élèves ont véritablement comparé le système maya en le mettant en opposition avec un autre système. Mentionnons tout de même cette réponse : « Il a une planche à calculer et non le chinois, sumérien, romain, égyptien » et celle-ci qui le compare avec un autre système, mais elle confond le système égyptien et romain : « Les chiffres mayas n'ont qu'un zéro, des points et des barres, mais l'égyptien c'est une ligne, un V, un X, un L, un C et un M. » Un élève n'a relevé qu'une caractéristique du système maya : « Son chiffre base est 20 », alors qu'un autre n'a parlé que des caractéristiques d'autres systèmes : « Ils n'ont pas de planche, pas les mêmes symboles et les Romains, au lieu d'écrire quatre, ils font 5 – 1 = 4 (IV) ».

Pour la base, les quatre élèves ont mentionné que le système maya était en base 20 et les explications étaient valables quoique pas toujours claires. On comprenait néanmoins ce qu'ils voulaient dire. Voici leurs réponses en vrac : « 20, parce qu'il a toujours la même régularité, à chaque fois qu'on change de colonne, ex. 1 x 20 =20 et 20 x 20 = 400 »; « 20, parce que c'est des unités, 20$^{aines}$ et serait des 400$^{aines}$, mais le système maya est irrégulier donc c'est 360 »; « La base du système maya est 20 parce qu'à partir de 0, c'est x 20 ensuite x 20 encore » et finalement, « Nous comptons unités, vingtaines, *quatre centaines* pour faciliter les planches. » Quant au zéro, les quatre élèves ont répondu que le système maya en avait bel et bien besoin, mais les explications diffèrent. Deux élèves ont mentionné encore la planche à calculer et précisé qu'on ne pouvait laisser une case ou une section vide, que l'on devait alors mettre un zéro. Un autre élève a précisé que « tous les systèmes positionnels ont besoin d'un zéro », mais il n'a pas expliqué pourquoi. Finalement, une explication était moins claire, mais évoquait tout de même qu'il faut mettre un symbole pour évoquer le fait que si un ordre ne contient rien, on doit le signifier : « Oui, pour quand on fait ex. 20, si on ne met pas de 0, ce sera 2 » (mais en fait, ce serait plutôt une unité…). Finalement, les quatre élèves ont répondu que le système maya était positionnel, mais ici encore, les explications nous ont peu éclairée. Celles de deux élèves se résument à « parce qu'il a des positions. » Un autre répond qu'"il est séparé en unités, vingtaines, *quatre centaines* » et pour finir, une réponse est incompréhensible : « il reste le même, pas comme d'autres systèmes ».

## Analyse du travail sur le système babylonien

Les élèves de cette équipe sont partis de ce qu'ils connaissaient (la planche à calculer et un système positionnel en base 10) pour tenter de l'appliquer au système babylonien. En effet, ils ont écrit U. au-dessus de la colonne de droite et D. au-dessus de la deuxième colonne. Ils ont constaté que ça ne fonctionnait pas avec les nombres donnés. Ils continuaient à chercher et à émettre des hypothèses, puis une élève s'est exclamée : « mon hypothèse était bonne, je le savais que dans cette colonne-là, ça valait 60! » À partir de là, ils avaient réalisé que la deuxième colonne représentait les soixantaines. Ils ont compris assez rapidement que la troisième colonne représentait les 3 600, c'est-à-dire les soixantaines de soixantaines. En effet, un peu plus tard : « C'est ça, 60 fois 60 ça fait 3 600! » et « OK, dans cette colonne-là, on fait fois 1, dans cette colonne-là, on fait fois 60 et dans cette colonne-là, on fait fois 3 600. » Contrairement à ce qu'avaient remarqué Bednarz et Janvier (1984), le fait de travailler sur deux ordres de groupements simultanément n'a pas posé problème pour cette équipe. Finalement, cette équipe a éprouvé moins de difficulté que ce à quoi nous nous attendions. Par contre, nous restions près d'elle et les encouragions souvent. Au moment de faire l'affiche pour expliquer ce système aux élèves de la classe, ils ne savaient pas trop quoi y mettre. Nous leur avons résumé : « Vous avez remarqué qu'ils comptaient par 60 et vous avez remarqué qu'il y avait des colonnes, vous avez tout ce qu'il faut pour expliquer ».

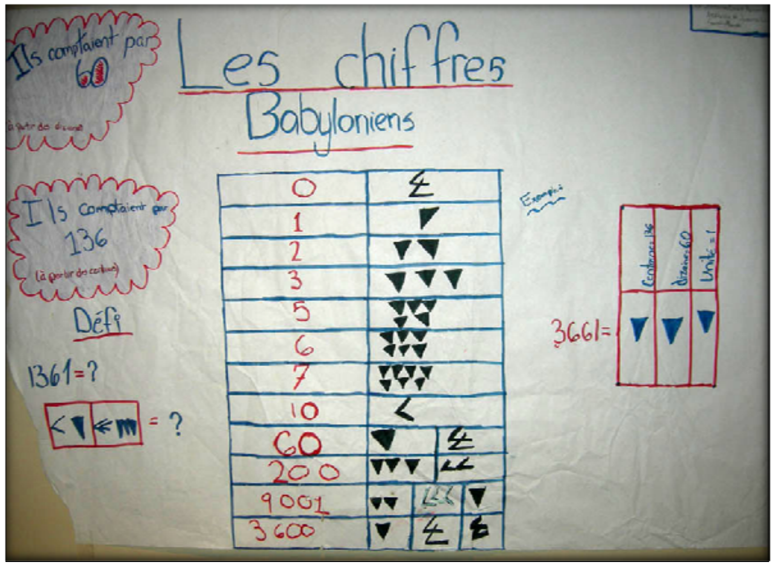
## Analyse de la présentation du système babylonien

Ici, lorsqu'on observe l'affiche, on remarque des faussetés. Dans cette équipe, un élève qui ne comprenait pas bien a pris l'initiative d'écrire l'affiche. Ce faisant, il y a introduit des erreurs et a commencé la présentation en disant : « Ils comptaient par 60 à partir des dizaines et ils comptaient par 136 à partir des centaines, pis à partir de l'autre colonne, par 3 600. » Un autre élève l'a repris en disant : « Les centaines, c'est pas par 136, on va l'expliquer plus tard ». Les élèves se sont repris et ont d'abord présenté les symboles du système babylonien et les colonnes. Ils l'ont judicieusement comparé au système maya déjà présenté en rappelant que les Mayas avaient « comme une planche à calculer » mais avec des « unités-vingtaines-*quatre centaines* » et que les Babyloniens, c'était plutôt des « unités-soixantaines-*trois milles six centaines*. » Ils ont enchaîné « Pour 60, on met un dans la deuxième colonne et on met zéro quand il y a zéro unité ». Ils avaient eux-mêmes le souci de partir de ce que les élèves connaissaient pour les amener plus loin. Ils ont donné de nombreux exemples avec de très bonnes explications, toujours en référant à ce qui était connu des élèves : « la troisième colonne, c'est les 3 600. Comme nous, on pourrait dire que c'est la colonne des centaines mais pour eux, c'est la colonne des 3 600. Ici, ce serait la colonne des 60, on pourrait dire… et ici ça serait la colonne des unités. » Plus tard, un élève a résumé le système babylonien en le comparant au nôtre : « dans notre système, c'est unités-dizaines-centaines, mais eux, c'est unités-soixantaines-*trois milles six centaines* ».

Un élève de la classe a demandé si on pouvait écrire de grands nombres comme 100 000 et un élève de l'équipe a très bien répondu : « Mettons qu'ils voulaient écrire 300 milliards, ils pouvaient sûrement se rendre jusqu'à 10 colonnes ». Un autre élève de cette équipe a précisé que « la quatrième colonne devrait être de 3 600 x 60, puisque la première colonne, c'est les unités, que la deuxième colonne, c'est les soixantaines, c'est 1 x 60, que la troisième colonne, c'est 60 x 60, c'est les 3 600… » Il l'a calculé à la calculatrice et il a trouvé que la quatrième colonne serait de 216 000. Nous avons alors demandé comment nous pourrions former une cinquième colonne et toujours le même élève a dit : « 216 000 x 60 et ainsi de suite.» On peut dire qu'il avait bien compris le principe du système positionnel qui permet de représenter tous les nombres jusqu'à l'infini. Le même élève de la classe a posé une autre question pertinente, à savoir si on était obligé de mettre un zéro dans les colonnes et l'élève de lui répondre : « oui, il faut absolument que tu fasses trois colonnes et que tu marques des zéros pour montrer qu'il n'y en a pas ». Un autre élève a complété en rappelant notre système aussi positionnel : « dans notre système, si tu veux écrire 3 600, dans la colonne des unités de mille, tu vas mettre 3, dans la colonne des centaines, tu vas mettre 6, mais dans le reste, si tu mets rien, ça va faire 36 ». Avec ces deux questions très pertinentes et les réponses de l'équipe qui présentait, on peut parler ici d'un réel transfert des connaissances et d'une compréhension de notre système positionnel.

Comme nous l'avons mentionné plus haut, l'affiche contient des faussetés. Les élèves se sont par contre remarquablement bien repris pour expliquer leur système. Ils ont donné plusieurs exemples de nombres, ce qui était une bonne idée compte tenu de la complexité de ce système.

**Figure 33** Affiche du système babylonien




## Analyse des résultats du test sur le système babylonien

À la question « En quoi ce système ressemble à notre système actuel de numération? » ici encore, peu d'élèves ont directement comparé des caractéristiques des deux systèmes de numération, mais ils ont néanmoins décrit des caractéristiques du système babylonien qui s'apparentent à celles de notre système actuel. Deux élèves font référence à la planche à calculer pour parler des colonnes et un parle du fait que « nous avons des colonnes », mais sans être plus précis. Deux élèves disent qu' « il est positionnel » et trois que nous comptons le temps en base 60. Un élève précise qu' « il n'est pas additif ». Par contre, on ne sait jamais qui est le « il » et le « nous ».

Pour les ressemblances avec les autres systèmes présentés en classe, deux élèves ont précisé le type de système, soit un système positionnel. Un élève a affirmé qu'il est comme notre système indo-arabe et le système sumérien, mais celui-ci fait erreur, l'autre système positionnel présenté est plutôt le système maya. L'autre élève précise qu'il ressemble au système maya. Deux élèves remarquent qu'il est en base 60 comme les Sumériens et un répond que « Comme les Sumériens, Égyptiens et Mayas, il y a des dessins ». Un élève qui a moins bien compris dit que « Il n'est pas additif comme indo-arabe, romain, maya et égyptien ». Pense-t-il que les systèmes romain et égyptien n'étaient pas additifs ou que ce sont les systèmes indo-arabe et maya qui ne le sont pas? Peu importe, les deux options comportent des erreurs.

Pour les différences avec notre système actuel, les cinq élèves ont parlé de la base 60 du système babylonien, mais seulement deux élèves ont précisé que notre système était plutôt en base 10. Une élève a été moins claire et a répondu : « Nous, on compte plus par 10. Eux comptent par 60 et par 3 600 à partir des centaines. » On présume qu'elle fait référence à la troisième colonne (3 600) qui pour nous représente les centaines. Deux élèves parlent qu'ils (Babyloniens?) faisaient des dessins.

Quant aux différences avec les autres systèmes présentés en classe, quatre élèves ont fait référence à la base 60 du système babylonien mais les comparaisons sont loin d'être claires ou véridiques. En effet, un élève répond : « Contrairement aux systèmes maya, égyptien, chinois et égyptien, il est positionnel et il est en base 10. » Un autre a répondu : « Il est le seul à avoir des bonds de 60. » Il a oublié le système sumérien. Puis, faisant probablement référence à la valeur de position ou aux colonnes, une élève a répondu : « Les Babyloniens comptent 60 à partir des dizaines et par 3 600 à partir des centaines et d'autres par 10 ou par 20 » et enfin : « Il a une base 60. Exception : Sumériens. » Deux seuls élèves font référence au type de système, mais ici aussi, les réponses sont erronées ou pas claires du tout : « Contrairement aux systèmes maya, égyptien, chinois et égyptien, il est positionnel et il est en base 10 » et « il est différent du système chinois, car il est additif ». Parle-t-il du système chinois ou babylonien qui serait additif? Peu importe, aucun ne l'est de toute façon.

Heureusement, la base est plus claire puisque les cinq élèves ont répondu que le système babylonien était en base 60, mais les explications ne sont pas toutes valables. Un élève a parlé de la deuxième colonne qui est 60 et de la troisième qui est 3 600 et il précise que c'est (60 x 60). Un autre élève parle de symboles différents à 60 et à 3 600, plutôt que de parler de positions ou de colonnes différentes. Les cinq élèves ont également répondu que le système babylonien avait besoin d'un zéro. Trois élèves ont donné des exemples de nombres en indo-arabe qui ont des zéros et que s'il n'y avait pas de zéro, le nombre n'aurait pas la même valeur. Deux explications sont moins claires : « Oui, car si je veux marquer 60, dans une colonne (dizaines), je vais mettre le signe qui fait 60 et dans l'autre, je n'ai rien à mettre, donc je mets le signe qui fait zéro » et « Oui, pour marquer ex. 9 001, 3 600, 216 000 et d'autres. Sinon, ils ne pourraient pas marquer beaucoup de chiffres ou nombres ». Finalement, les cinq élèves ont répondu correctement que le système babylonien était positionnel. Les explications étaient variées et correctes. Un élève a affirmé qu'à partir de 60, il est multiplicatif. Il voulait sûrement dire qu'on doit multiplier la valeur des symboles par 60 lorsqu'ils sont dans la colonne des soixantaines. Un élève a parlé des colonnes. Un élève l'a comparé à notre système actuel, mais un peu maladroitement : « car nous on fait 10 x 10 pour aller dans les centaines et eux font 60 x 60 pour aller dans les nombres de 1 000 et plus. » Enfin, un élève n'a pas donné d'explication et l'autre en a donné une erronée : « c'est la position des un, 60 et 360 ». Elle a probablement confondu 360 et 3 600.

## Conclusion de section

Bref, ce premier bloc d'activités s'est déroulé sensiblement tel qu'anticipé dans notre séquence (*conduite attendue des élèves* pour chaque système). Comme les équipes ont souvent terminé rapidement, on peut dire que la tâche était relativement facile pour la plupart des équipes. Notons que les réponses au test de compréhension étaient habituellement correctes, mais elles restaient souvent en surface. La comparaison avec d'autres systèmes était plus difficile pour les élèves, la plupart se contentaient de donner des caractéristiques de leur système, sans préciser à quels systèmes leur système ressemblait ou différait. Nous y reviendrons au prochain chapitre. Qu'en est-il de leur perception de leur compréhension de notre système actuel ?

Dans le questionnaire d'appréciation du projet rempli à la toute fin de la séquence, nous avions posé cette question, « Crois-tu que ce projet t'a aidé à mieux comprendre le fonctionnement de notre système de numération actuel? Comment? » Nous voulions voir si les élèves avaient l'impression qu'ils comprenaient mieux notre système actuel puisque nous l'avions souvent comparé aux systèmes qui l'avaient précédé. Ainsi, plus du tiers des élèves (10 sur 28, un élève étant absent le jour où nous avons passé le questionnaire) considèrent que le projet a amélioré leur compréhension de notre système de numération, mais les justifications rejoignent parfois la question précédente (sur l'amélioration de la perception des mathématiques) : « Oui, en voyant les différences entre tous ces systèmes, je vois notre système plus intéressant et fascinant » et « Oui parce qu'en voyant toutes les présentations, je vois d'une différente façon les maths. ». D'autres élèves donnent des exemples de ce qu'ils ont appris, mais ils n'expliquent pas clairement en quoi cela les aide à mieux comprendre : « Un peu, ex. j'ai plus compris la logique des calculs, etc. »; « Oui, pour la planche à calculer parce qu'eux aussi ont une planche »; « Oui, car il y avait des choses que je ne connaissais pas comme les bases »; « Oui, car j'ai remarqué c'est quoi une base et une base inférieure (sic) » et « Oui, car maintenant, je comprends les systèmes en base 10, 20 et 60 et les types hybride, positionnel et additif ». En outre, certains élèves soulignent l'évolution des mathématiques, mais encore une fois, sans expliquer en quoi cela les aide à comprendre notre système : « Oui parce que j'ai appris comment le système indo-arabe a évolué » et « Oui, maintenant je comprends pourquoi les chiffres sont comme ça aujourd'hui, surtout comment c'est venu ». Finalement, une réponse est positive, mais hors contexte : « Oui parce que pour les Babyloniens et les Sumériens sont (supposément) eux qui ont inventé le 60 secondes, 60 minutes » (la parenthèse est de l'élève).

Pour les autres réponses, précisons que nos élèves étant presque tous en facilité d'apprentissage, ils n'ont pas de grandes lacunes en mathématiques. Plusieurs d'entre eux n'ont pas eu l'impression que le projet les a aidés à mieux comprendre notre système de numération tout simplement parce qu'ils considéraient qu'ils le comprenaient déjà bien. Par exemple : « Non, car je comprenais déjà assez »; « Non, car je comprenais bien avant le projet ». Plusieurs autres élèves ont répondu que le projet ne les avait pas aidés à mieux comprendre le fonctionnement de notre système de numération parce qu'ils avaient surtout travaillé sur d'autres systèmes que le système indo-arabe. Pour ces élèves, nous avons raté notre objectif de faire des liens entre les différentes sortes de systèmes (additifs, hybride et positionnels) et les différentes bases de groupements pour améliorer la compréhension de notre système actuel : « Non, car j'ai plus travaillé sur les Sumériens que notre propre système »; « Non, car ça m'a juste montré d'autres systèmes »; « Non, car les systèmes de numération anciens sont très différents du nôtre »; « Non, car les autres systèmes sont différents » et « Non parce qu'on travaillait sur plusieurs systèmes qui ne ressemblent pas à notre système ». Enfin, six élèves n'ont répondu que « non ».

## 5.2. Deuxième bloc : analyse des activités sur les additions et les soustractions

Dans cette section, nous présentons, comme nous l'avons fait pour les différents systèmes de numération, les additions et les soustractions d'une équipe, suivies de leur présentation à la classe et des réponses au test *Retour sur les opérations dans votre système de numération*. Cette présentation reprend l'ordre dans lequel les équipes ont fait leur présentation à la classe. Rappelons que les mêmes équipes reprenaient les mêmes systèmes que pour le premier bloc d'activités.

## Analyse du travail sur les additions et les soustractions sumériennes

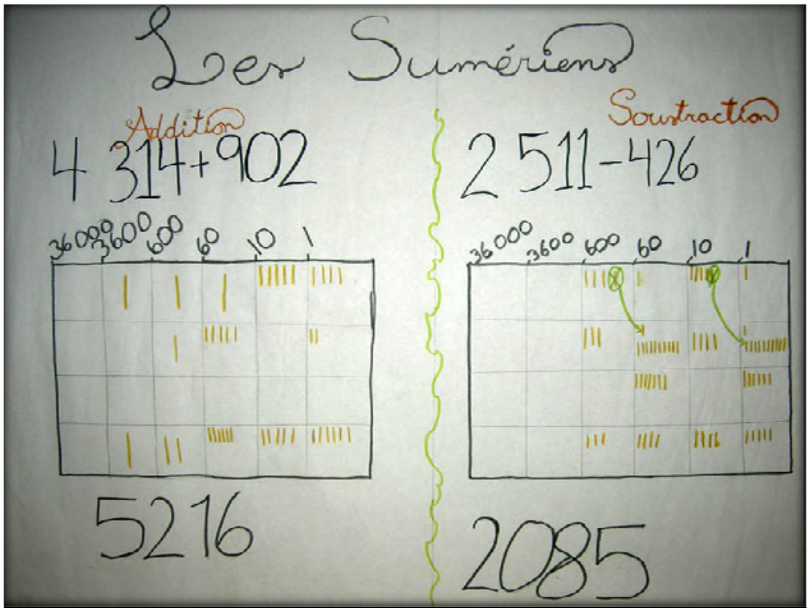
L'analyse de cette équipe est basée sur les notes prises dans le journal de bord ainsi que sur l'enregistrement visuel, l'enregistrement sonore n'ayant pas fonctionné. Sur l'enregistrement vidéo, on voit les quatre élèves qui discutent pendant quelques minutes. Ils ont rapidement conclu que c'était comme une planche à calculer, mais en base 60. Nous sommes venus les voir et après qu'ils nous aient expliqué leur hypothèse, nous leur avons remis le feuillet explicatif. Ils l'ont lu avec attention pour réaliser qu'ils avaient bien saisi. Comme prévu, le plus compliqué était de « décomposer » les nombres à additionner ou à soustraire en base 60. Une fois cette étape réalisée, les élèves semblaient manier la planche à calculer avec aise. Au bout de 22 minutes, une élève a levé la main pour nous souligner le fait que l'équipe avait terminé.

## Analyse de la présentation des additions et soustractions sumériennes

L'équipe a d'abord présenté l'abaque mésopotamien qu'ils ont appelé « la grille ». Ils ont précisé que l'on ne pouvait faire que des barres, qu'on ne devait pas mettre les symboles sumériens. Leur affiche était très claire (voir la figure 34). Ils avaient écrit les deux opérations en chiffres indo-arabes et ont bien expliqué qu'il fallait d'abord décomposer en base 60 les nombres à additionner. Les élèves ont précisé que dans 4 314, « il y a 1 fois 3 600, 1 fois 600, 1 fois 60, 5 fois 10 et 4 unités » qu'ils ont placés dans les bonnes colonnes. Ils ont ajouté le deuxième nombre sur la deuxième ligne. Il est à noter que l'addition présentée ne comprenait pas de retenues ou d'échanges.

Pour la soustraction, ils ont bien représenté le premier nombre et expliqué la décomposition (2 511 devient 4 fois 600, 1 fois 60, 5 fois 10 et 1 unité). Ils ont représenté le deuxième nombre sur la troisième rangée (426 qui devient 7 fois 60 et 6 unités), laissant ainsi la deuxième rangée pour les emprunts (échanges). Ils ont bien expliqué le besoin d'emprunter une dizaine et de rajouter dix unités pour pouvoir soustraire les six unités du deuxième nombre. Pour le deuxième échange, ils ajoutent « on a une soixantaine et il faut en enlever deux, alors il faut emprunter aux *six cents* ». Les élèves ont judicieusement expliqué que si on emprunte une dizaine, ça fait dix unités, mais que si on emprunte une soixantaine, ça ne fait que six dizaines et ainsi de suite. Notons que sur leur affiche, les emprunts (en vert) ont été faits devant les élèves au moment de présenter, ce qui rendait les échanges très clairs.

**Figure 34** Affiche des additions et des soustractions sumériennes




Un élève a demandé si les Sumériens avaient un signe particulier pour + et -. Les élèves ne pouvaient répondre. Nous avons précisé que ces symboles avaient été inventés beaucoup plus tard. Pour ce qui est des ressemblances avec des façons connues d'effectuer des additions et des soustractions, les élèves l'ont comparée à la planche à calculer, mais en précisant que la nôtre est en base 10 et que la planche sumérienne est en base 60. Ils ont trouvé qu'ici aussi, on faisait des échanges entre les colonnes, mais parfois de 10 et parfois de 6. L'équipe des Babyloniens a indiqué que la technique était identique pour eux. Pour les différences, ils ont trouvé que les Sumériens utilisaient des barres au lieu des chiffres (dans l'algorithme conventionnel), que la base est alternée (10 et 60) et que la dernière rangée de la grille est réservée pour la réponse.

## Analyse des résultats du test sur les additions et les soustractions sumériennes

Le lecteur trouvera les réponses complètes des élèves dans le journal de bord (annexe 13). Pour ce qui est des ressemblances entre la façon d'effectuer les additions et les soustractions des Sumériens et notre façon actuelle, les quatre élèves de cette équipe ont mentionné la planche à calculer ou un tableau. Comme ils ont utilisé la collection Défi mathématique au premier et au deuxième cycle, les élèves ont beaucoup utilisé la planche à calculer pour faire et comprendre les opérations. Ils ont ainsi tous comparé la méthode sumérienne à cet outil. Toutefois, personne ne l'a comparée aux algorithmes conventionnels.

En ce qui concerne les différences entre la manière d'effectuer les additions et les soustractions des Sumériens et la nôtre, deux élèves ont mentionné la règle de groupement ou les échanges entre les colonnes de l'abaque « eux, c'est par 10 et 60 qu'ils comptent » et « leur système est en base 6 et 10 et nous, en base 10 », mais les explications ne sont pas très claires et restent en surface. À la lumière des réponses de la question précédente, rappelons que les élèves comparent cette méthode à l'utilisation de la planche à calculer et non à l'algorithme conventionnel. Un seul élève semble la comparer à l'algorithme conventionnel : « Nous mettons les deux chiffres et nous additionnons ». Un élève semble s'être mélangé et a parlé du type de système (additif) « eux c'est un système additif », à moins qu'il réfère au fait qu'il faut répéter le bon nombre de petites barres pour représenter les nombres à additionner ou à soustraire.

## Analyse du travail sur les additions et les soustractions égyptiennes

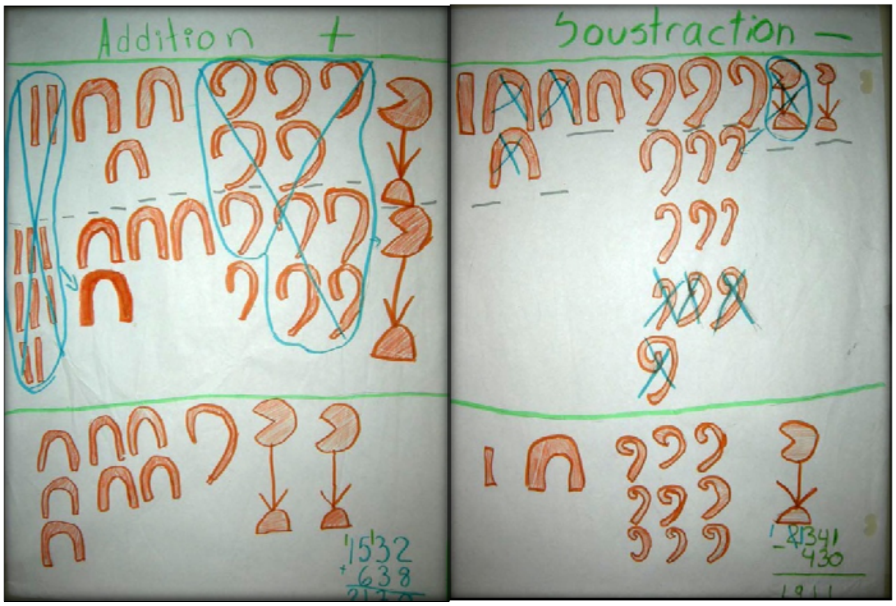
Tel qu'anticipé, cette première équipe à travailler sur les additions et les soustractions égyptiennes (une élève en particulier) a rapidement émis une hypothèse sur la façon dont les scribes égyptiens effectuaient les additions et les soustractions. Nous leur avons apporté le feuillet explicatif après seulement deux minutes de travail. Les élèves ont ensuite vérifié leur hypothèse et discuté. Ils ont partagé le travail, les filles travaillant sur une opération et les garçons, sur l'autre. Après seulement 22 minutes, nous sommes venus les voir et ils nous ont expliqué leur travail. Puis, ils se sont installés pour faire l'affiche afin de présenter leurs opérations.

## Analyse de la présentation des additions et soustractions égyptiennes

Les membres de cette équipe ont d'abord fait un rappel des hiéroglyphes égyptiens et de leur valeur avec l'affiche de leur première présentation, ce qui s'est avéré judicieux pour bien comprendre le procédé. Ils ont ensuite présenté les deux nombres à additionner en hiéroglyphes (1 532 plus 638) et ont fait les transferts nécessaires : « Comme il y a 11 cordes, on en entoure 10 et on le transforme en une fleur de lotus. C'est comme nous, quand il y a 10, on entoure et on transforme ». Un élève de la classe ne comprenait pas bien et des explications supplémentaires ont été données. Pour la soustraction, les élèves ont présenté les nombres à soustraire (2 341 - 430) et ont expliqué qu'on ne pouvait enlever 4 centaines, car il y en avait juste 3 : « on transforme une fleur de lotus en 10 cordes pour pouvoir enlever 4 ».

Précisons que sur leur affiche (figure 35), les élèves n'avaient d'abord représenté que les deux nombres à additionner ou à soustraire et la réponse. Ils ont fait les échanges (en bleu) devant les élèves. Les photographies ont été prises après la présentation.

**Figure 35** Affiche des additions et des soustractions égyptiennes




Pour les ressemblances avec d'autres façons d'effectuer les additions et les soustractions, un élève a remarqué que comme nous, « quand il y a 10, on l'enlève et on met une dizaine de plus ». La remarque aurait été plus juste s'il avait mentionné que c'est lorsqu'il y a dix unités qu'on les échange contre une dizaine et que lorsqu'on a dix dizaines, on les échange contre une centaine et ainsi de suite, mais on peut conclure que cet élève a saisi le principe d'échange dans une addition égyptienne. Un autre élève a observé que les Égyptiens disposaient leurs nombres comme nous : un en dessous de l'autre et la réponse en bas. Pour les différences, un élève a soulevé qu'il n'y avait pas de signe + et -. Personne n'a remarqué la ressemblance avec le matériel multi bases qu'ils ont déjà utilisé dans les années antérieures et personne n'a remarqué la lourdeur de cette façon de faire (répéter les symboles, encercler, échanger, tout cela avec des hiéroglyphes).

## Analyse des résultats du test sur les additions et les soustractions égyptiennes

Pour ce qui est des ressemblances entre la façon d'effectuer les additions et les soustractions chez les Égyptiens et maintenant, les réponses restent en surface et manquent de clarté. Deux élèves mentionnent la disposition semblable des nombres à additionner ou à soustraire et de la réponse dessous. Seulement deux élèves font référence au principe d'échange commun aux deux méthodes, mais ce n'est pas toujours expliqué clairement : « nous faisons des échanges quand nous sommes arrivés à dix » et « dans les soustractions, quand il manque, par exemple, une dizaine, on descend une centaine dans les dizaines ». Les autres réponses (ou parties de réponse) sont vagues « il y a le chiffre à additionner dans une colonne » ou inappropriées dans les ressemblances avec notre façon de faire actuelle : « ils n'ont pas de grille. (Je ne me souviens plus vraiment) ». Un seul élève a mentionné le groupement de dix, mais sans en faire une règle « nous faisons des échanges quand nous sommes arrivés à dix ».

Pour les différences, les réponses restent encore plus dans la superficialité et manquent de clarté. En effet, deux élèves ont seulement remarqué que ce ne sont pas les mêmes chiffres. Un élève a écrit : « Ce n'est pas la même planche à calculer », sûrement en faisant référence à la planche à calculer utilisée par les élèves les années antérieures et souvent comparée à l'abaque mésopotamien (des opérations sumériennes et babyloniennes) lors des présentations des autres équipes. Un autre élève a répondu qu' « ils ne détiennent pas tous les nombres ». On ne saisit pas ce qu'il voulait dire par là; peut-être voulait-il parler que les Égyptiens n'ont pas un symbole pour chaque unité comme nous? Enfin, un élève a observé que « les soustractions égyptiennes, c'est que l'on met le chiffre de départ et on soustrait le deuxième nombre ». Avec les symboles qu'il a utilisés, nous croyons que cet élève parlait du fait que l'on fait des « X » sur les hiéroglyphes que l'on soustrait, mais cela reste une supposition. Aucun élève n'a soulevé la lourdeur de ces techniques qui demandent de dessiner de nombreux hiéroglyphes pour représenter les nombres et d'en dessiner 10 supplémentaires à chaque échange.

## Analyse du travail sur les additions et les soustractions chinoises

Comme nous nous y attendions, les élèves se sont référés à leur page du survol historique dédiée aux outils de calcul. À ce moment, un élève a dit : « Si c'est écarté, ça veut dire qu'on ne les compte pas ». Ils ont rapidement saisi comment représenter un nombre, mais ils ont plus longuement hésité à savoir comment on additionnait. Lorsque nous leur avons proposé le feuillet explicatif, ils préféraient continuer par eux-mêmes en s'expliquant le fonctionnement du boulier : « Ça là, ça veut dire zéro. Il faut les écarter du centre pour faire zéro. » Ils se sont ensuite passé le boulier à tour de rôle en émettant des hypothèses : « c'est en haut, c'est en haut! »; « pour faire 10, c'est ça, pour faire 5, ce serait ça » et enfin, ils se sont lancé : « OK, on va faire une addition quelconque ».

Nous sommes venus les voir à ce moment et leur avons demandé de nous expliquer comment faire. Ils ont su représenter le nombre 1 642 que nous leur avions demandé. Nous leur avons proposé d'essayer d'ajouter le nombre 376 au premier nombre. Un élève a expliqué le principe : « quand il y en a trop dans une colonne, il faut les mettre dans l'autre à côté ». Après quelques hésitations, ils ont proposé une façon de faire, qui était sensiblement celle proposée par le feuillet explicatif qui leur a été remis. Un élève a même trouvé ces opérations assez faciles puisqu'il a dit : « ben c'est simple d'abord, y'avaient pas besoin de tout, heee… », mais il s'est arrêté à ce moment. Les élèves ont lu le feuillet explicatif, fait les opérations demandées et comme ils n'avaient pas d'affiche à préparer (ils ont opté pour une présentation sur le rétroprojecteur), ils ont passé les dernières 35 minutes à faire des additions et des soustractions chacun leur tour.

## Analyse de la présentation des additions et soustractions chinoises

Les élèves ont bien expliqué le fonctionnement du boulier chinois en expliquant la valeur de chaque tige et de chaque côté de la barre transversale (1 et 5). Avant de commencer, un élève a précisé que « *Les vrais Chinois* (!), eux, les deux premiers ici, c'est les dixièmes et les centièmes, mais nous on va mettre les unités ici (à l'extrême droite) pour ne pas trop vous mélanger ». Pendant qu'un élève présentait la valeur de chaque tige, un autre élève pointait avec une grande règle. « Ici c'est les unités, à côté on a les dizaines, après les centaines, les unités de mille, les dizaines de mille, les centaines de mille, etc. ça va jusqu'au million ». Une deuxième élève a ensuite expliqué que : « chacune des boules ici en haut compte pour 5. Si je fais ça ici (elle baisse une boule vers la barre transversale), c'est 5, ici c'est 50. Ici (en pointant les boules du bas), chacune des boules compte pour une unité ». Une fois le fonctionnement du boulier expliqué, les élèves ont procédé à une démonstration réussie de 321 plus 780 qui contenait une retenue. Ils ont d'abord représenté 321, puis au moment d'ajouter 780, un élève a expliqué : « comme ici, il ne faut pas en rajouter, 80 ici on a deux. 2 plus 8 (dizaines), ça fait 10, alors on va descendre ça ici (les 2 dizaines de 321) et on va en mettre un là (une centaine), pis… ». Elle était peut-être allée un peu rapidement puisqu'un élève de son équipe lui a demandé : « réexplique c'que tu viens de faire parce que j'ai entendu un gémissement dans la classe… ». Elle a donc expliqué plus lentement et en détail. Pour les centaines, elle a repris son explication et montré que 4 plus 7, ça faisait 11 (centaines), donc elle a enlevé les quatre centaines et a mis une boule dans la tige des unités de mille et une nouvelle boule dans la tige des centaines. Ils sont ainsi arrivés au résultat : 1 101. Une élève de l'équipe a tenu à bien clarifier les explications : « ici, c'est 780. Il y en a 2, ben 20, alors on en rajoute 80, donc 2 plus 8, ça donne 10, donc 100. Donc on enlève ceux-là et on met une centaine. Là, les 4 boules des centaines, on en ajoute 7, donc ça va donner 11, ça veut dire qu'on va toutes les enlever sauf une (et elle rajoute une unité de mille) ». Précisons qu'avec les manipulations simultanées sur le boulier, c'était très clair. Un élève ayant travaillé avec l'abaque romain a remarqué que c'était vraiment semblable à leur façon de faire.

Ils ont ensuite fait la démonstration d'une soustraction : « là, on va vous montrer la soustraction. C'est sensiblement la même affaire, mais à l'envers ». Leur soustraction (212 moins 123) comportait deux « emprunts » qu'ils ont associés au processus conventionnel de la soustraction. En effet, ils ont d'abord représenté le premier nombre. Puis, tout comme les Chinois, ils ont commencé par la gauche (les centaines) et ont expliqué : « là on peut enlever le 100 (de 123) facilement, c'est assez simple. Là faut enlever le 20, mais y a juste une dizaine… fait qu'il faut qu'on en prenne ici (en pointant les centaines) ». L'élève poursuit sur sa lancée : « là, j'ai un truc que je ne suis pas sûr que tout le monde va comprendre. Vous enlevez, lui, là ça vous fait 11 dizaines. Tout le monde comprend? Donc là il faut que j'enlève 2, fait que ça fait 11 – 2, ça fait 9, fait que tu mets 9 dans les dizaines. Pour les unités, on fait la même affaire, on fait 12 – 3, ça fait 9. » « Donc pour la réponse, ça fait 89. » Un élève conclut en disant : « c'est pas trop compliqué, il suffit juste de savoir comment faire les échanges et ensuite, c'est facile ». Ces élèves étaient vraiment à l'aise, comprenaient bien les procédés et les expliquaient très bien à la classe. Comme ils ont présenté sur le rétroprojecteur, ils n'avaient pas d'affiche.

Lors de la discussion sur les ressemblances et les différences entre cette façon de faire et d'autres présentées ou la nôtre, les élèves ont encore fait référence à la planche à calculer. Il est vrai que les colonnes de la planche à calculer ont la même fonction que les tiges du boulier. Aussi, un élève a précisé que le boulier était positionnel (le terme est de lui) et il a expliqué qu'on ne peut pas monter n'importe quelle boule et que les « transferts » (c'est-à-dire les échanges) se font par 10. Après une demande de précision, il ajoute : « si tu veux représenter 1, tu ne peux pas monter n'importe où, ça c'est comme un million, ça, c'est mille… ». On peut en conclure que cet élève avait bien compris l'importance des positions dans cette technique.

Pour ce qui est des différences, un élève a noté l'utilisation de boules plutôt que des chiffres dans l'algorithme conventionnel : «ben eux, pour calculer, ils utilisent des boules, tandis que nous on utilise des chiffres » et le fait que contrairement à la planche à calculer où on échange lorsqu'on atteint 10, ici on échange lorsqu'on atteint 5 (pour une boule du haut). Aussi, un élève a expliqué que contrairement à la planche à calculer, on montait et on descendait des boules plutôt que de déplacer ou enlever des jetons. En outre, on a relevé la manipulation au lieu du traditionnel papier crayon. Un élève a précisé que ce n'est pas un format « de poche » comme une calculatrice. Finalement, un élève a remarqué qu'il y avait un espace pour les dixièmes et les centièmes, contrairement aux autres opérations présentées (les autres procédés en avaient la possibilité, mais nous ne nous y sommes pas attardée). Étrangement, personne n'a relevé le fait que les Chinois commençaient par la gauche (les plus gros ordres). Nous supposons que c'est parce que c'est un procédé naturel pour les enfants, tout comme Madell (1979) l'avait expliqué dans son article sur l'apprentissage des algorithmes.

## Analyse des résultats du test sur les additions et les soustractions chinoises

Les réponses au test concernant les ressemblances entre notre façon de faire les additions et les soustractions et la méthode des Chinois ne sont pas claires et sont incomplètes. On ne sait pas ce que voulait dire cet élève : « Si vous voulez, par exemple 5 + 7 ou (7 – 5 = 2), le boulier ne fait pas de calcul mental tout comme notre façon. Il ajoute » ni celui-ci : « Tout ce travail sur un boulier. Si par ex : 8 + 9 = (dessin d'un boulier avec la réponse) (17) ». Un autre élève a tout de même remarqué que les plus petits ordres sont à droite comme nous : « La position des chiffres | centaines | dizaines | unités | ». Un élève a noté la similitude avec la planche à calculer : « Pour moi, le boulier chinois est comme la planche à calculer, alors quand on doit additionner ou soustraire, il faut ajouter un ou plus ou en enlever un ou plus ». Finalement, un seul élève a fait référence aux échanges : « Ils font aussi des retenues comme nous », mais il a oublié les emprunts des soustractions. C'est pourtant l'élément le plus semblable des deux procédés. Il est dommage que les élèves ne soient pas arrivés à voir des similitudes significatives entre les deux façons de faire.

Pour ce qui est des différences, trois élèves ont noté l'utilisation d'un outil de calcul chez les Chinois alors que nous n'en utilisons pas. Cette réponse est la plus complète : « Les Chinois utilisent un boulier, tandis qu'avec notre système à nous, tous les calculs sont sur papier ». Un autre écrit : « Ils font leurs opérations sur un boulier chinois ». Enfin, une élève note la différence, mais mélange langue et procédé : « Il n'y a pas de boulier *français*. En *français*, les échanges à faire se font pendant les soustractions tandis que les Chinois, c'est après », mais notons pourtant que les élèves les faisaient plutôt au fur et à mesure. Nous soupçonnons un élève de faire référence à la planche à calculer : « Nous on travaille sur un tableau et en chinois, c'est sur un boulier ». Finalement, un élève n'a pas vu de différences entre les deux procédés. À nouveau, ils ont fait référence à la planche à calculer.

## Analyse du travail sur les additions et les soustractions romaines

Les élèves ont vite saisi que chaque bille du haut valait 5 et celles du bas valaient 1. Par contre, ils ont d'abord cru qu'ils n'avaient qu'à représenter le résultat de leur addition qu'ils faisaient mentalement. Nous leur avons précisé que « l'abaque romain est un outil de calcul, ils s'en servaient pour calculer, ce n'était pas juste pour représenter la réponse ». Nous avons d'abord vérifié s'ils savaient représenter un nombre sur l'abaque romain; ils le pouvaient. Nous leur avons remis le feuillet explicatif qu'une élève a lu à son équipe. Même après la lecture du feuillet, le procédé ne semblait pas clair pour eux. Nous avons ainsi repris avec eux les différentes étapes en leur expliquant que les Romains commençaient par représenter le premier nombre à additionner, puis ils ajoutaient le deuxième et faisaient les échanges nécessaires. Ils ont ensuite tenté de faire les opérations par eux-mêmes, mais cela semblait laborieux. Le son de l'enregistrement n'étant pas très bon, on n'entend que des bribes : « 72, donc 2 retient 1 (?), la réponse va finir par un 2 »; « ça, ça fait 8 400… ». Aussi, nous avions noté dans notre journal de bord qu'ils trouvaient complexes les nombreux échanges entre les colonnes, mais surtout, entre la partie du haut et celle du bas. Pour éclaircir le tout, nous leur avons fait une petite démonstration et à notre question : « Est-ce plus clair? », les élèves de l'équipe ont dit oui. Ils ont dû s'exercer longuement et faire de nombreux essais pour confirmer qu'ils savaient tous faire l'opération.

## Analyse de la présentation des additions et soustractions romaines

Cette équipe a fait sa présentation immédiatement après celle sur les opérations chinoises. Les élèves ont fait référence au procédé sur le boulier chinois et ont eu le souci de ne pas être redondants. Ils ont expliqué que « Comme les Chinois, quand on met une bille en haut, ça vaut 5 et quand on met une bille en bas, ça vaut 1. » Un élève a enchaîné : « quand on en met un ici, c’est une unité, ici, quand on en met un, ça représente 5 unités; quand on en met un ici, c’est la colonne des dizaines, ça va donner une dizaine, ici 5 dizaines, etc. ». Une autre élève a précisé que « ça va jusqu’à 100 000 ». Dans leur exemple d’addition, un élève a expliqué les différentes étapes d’une seule traite: « L’addition, c’est 238 plus 349. On écrit le premier chiffre. Je mets 1 dans la colonne d’en haut parce que 8 c’est 5 plus 3 ». Il a mis toutes les billes nécessaires. Il a ensuite ajouté les billes du deuxième nombre : 3 billes de plus dans la colonne des centaines, 4 de plus dans la colonne des dizaines et 9 de plus dans la colonne des unités (une bille en haut valant 5 et 4 billes en bas valant un). « Là, je fais les transferts. Puisqu’il y en a 2 ici, dans la colonne des 5 unités, je le transfère en 1 dans la colonne des dizaines. Comme il y en a 7 dans la colonne des unités, alors j’en mets un en haut qui vaut 5 et j’en enlève 5. Comme ici il y en a 8 (dizaines), j’en mets un en haut. Ici (centaines), il y en a 5, fait que j’en mets un en haut et j’enlève les 5 du bas. Fait que ça fait 587 ». Précisons que c’était beaucoup plus clair lorsqu’on le voyait en même temps sur le rétroprojecteur. Le même élève, soulagé que la démonstration soit terminée, a expliqué que : « c’est un petit peu moins facile que le boulier, parce que les billes peuvent tomber ».

Pour la soustraction, les élèves ont fait une démonstration de 244 moins 116. Ils ont d’abord précisé qu’“on met le premier nombre, puis après ça, on met le deuxième nombre en dessous, comme sur le bord … ». Nous leur avons demandé s’ils étaient bien sûr que les Romains représentaient le deuxième nombre. Ils se sont repris et ont répondu que non, ils ne le représentaient pas. Ils ont donc décidé de venir enlever les billes du deuxième nombre (comme le faisaient effectivement les Romains). Une élève a expliqué que « pour enlever 116, on enlève une unité ». Cependant, elle s’est trompée puisqu’elle enlevait une centaine. Lorsque nous lui avons fait remarquer, elle s’est reprise et a dit qu’on enlevait plutôt une centaine. Elle a continué : « Ici (les dizaines), vu qu’il y en a 4 et qu’on en enlève un, il en reste 3. Là, ici vu qu’il y en a juste 4 (unités) et qu’il faut en enlever 6, alors on va aller en prendre un ici (dizaine) et on va en mettre 2 ici parce que ça représente 10 (colonne des unités, en haut où les billes valent chacun 5) pis après ça, on peut en enlever 6. On en enlève une en haut et une en bas ». Ils ont bien manipulé les billes et fait l'emprunt nécessaire. Cette équipe n'a pas d'affiche puisqu'elle a présenté sur le rétroprojecteur.

Avant même que nous leur demandions, l'équipe précisait que l'instrument ressemblait au boulier chinois, mais en moins pratique puisque les billes tombaient. Par contre, ils ont précisé qu'il était plus facile à utiliser pour les échanges puisqu'on pouvait enlever les billes non nécessaires. Ils n'ont pas précisé qu'il pouvait aussi être plus facile à manier que le boulier chinois puisqu'il était aussi possible de mettre temporairement plus de cinq billes dans les rainures du bas et plus de deux billes dans les rainures du haut, permettant ainsi d'attendre à la fin pour faire tous les échanges. Ils ont trouvé que l'abaque s'apparentait également à la planche à calculer, surtout que l'on pouvait enlever des billes (comme les jetons). Puis, ils ont fait référence aux emprunts et retenues de l'algorithme conventionnel. Par contre, ils ne l'ont fait que lorsque nous leur avons demandé s'il y avait des ressemblances avec notre façon actuelle de faire les additions et les soustractions. Ils ne l'avaient pas trouvé spontanément. Pour les différences, ils ont noté le fait que les billes n'étaient pas fixes (comme le boulier chinois) et que contrairement au système sumérien où on faisait « fois 10, fois 6 » entre les colonnes, ici on faisait toujours « fois 10 » quand on changeait de colonne.

## Analyse des résultats du test sur les additions et les soustractions romaines

Pour ce qui est des ressemblances entre la façon d'effectuer les additions et les soustractions romaines et notre façon de faire ces opérations aujourd'hui, ici encore, trois élèves sur cinq ont fait référence à la planche à calculer : « ça ressemble à la planche à calculer »; « leur abaque romain ressemble à notre planche à calculer » et « c'est positionnel comme la planche à calculer ». Cette dernière réponse n'est pas claire, mais nous supposons qu'elle fait référence au fait que chaque colonne a une valeur particulière et que la position des billes est importante. Un élève a parlé de la base (10) qui est commune aux deux systèmes. Bien que la réponse ne soit pas très explicite, on peut supposer qu'il comprenait que la règle de groupement est de dix, donc que les échanges entre les colonnes sont de dix. Un élève est passé complètement à côté puisqu'il a parlé de la façon dont les

Romains faisaient leurs *l,* faisant davantage référence au système qu'à leur façon d'effectuer les opérations sur l'abaque.

En ce qui concerne les différences entre la façon d'effectuer les additions et les soustractions chez les Romains et notre façon actuelle, seulement deux élèves ont parlé de l'utilisation d'un outil de calcul : « eux, ils utilisaient l'abaque » et « la différence est que les Romains utilisaient un abaque et que nous non ». Les trois autres réponses concernaient des élèves qui se référaient à la planche à calculer dans les ressemblances. Ces élèves ont donc noté des différences avec la planche à calculer et non avec l'algorithme conventionnel : « dans leur abaque, il y a des colonnes que chaque pierre compte pour cinq »; « que l'on doit mettre des billes » et finalement, beaucoup moins clair : « il y a une colonne qui représente 5 dans la colonne (dessin d'un abaque avec une flèche sur la rainure du haut, à droite) un jeton dans la colonne des unités représente 5 ». Il est dommage ici aussi de ne pas avoir insisté sur les ressemblances et les différences avec nos algorithmes conventionnels pour des réponses plus riches. Les réponses des élèves ne sont toutefois pas fausses, mais elles manquent de précision.

## Analyse du travail sur les additions et les soustractions babyloniennes

Rapidement après avoir reçu l'abaque mésopotamien, un élève a fait remarquer aux autres membres de son équipe la régularité entre les colonnes de l'abaque : « regarde, c'est fois 10, fois 6, fois 10, fois 6 ». Puis, un élève a proposé d'écrire les symboles babyloniens dans les colonnes de l'abaque. Nous l'avons questionné en lui demandant s'il croyait que c'était nécessaire d'écrire avec les symboles babyloniens. Un autre élève lui a répondu que ce n'était pas nécessaire puisque si on mettait le nombre de dizaines dans une colonne, on n'avait pas besoin d'écrire le symbole babylonien de 10. Il a lui-même fait le parallèle avec la planche à calculer et ajouté que lorsque nous l'utilisons pour faire des calculs, on ne met pas des chiffres, mais bien des barres ou des jetons. Nous leur avons ensuite remis le feuillet explicatif.

Après quelques minutes, nous sommes venus les voir et pour les aider, nous avons fait le parallèle avec notre planche à calculer où c'est toujours lorsqu'on atteint 10 qu'on doit changer de colonne. Nous leur avons proposé d'écrire au dessus de l'abaque la règle de groupements (le fameux *fois 10, fois 6, fois 10, fois 6* qu'ils avaient si rapidement trouvé en recevant l'abaque mésopotamien) pour éviter de se tromper dans les échanges. 20 minutes après le début de l'activité, nous leur avons demandé de nous expliquer ce qu'ils avaient fait jusque-là. Ils nous ont expliqué qu'ils avaient décomposé les deux nombres en soixantaines. À 25 minutes, nous sommes encore venus les observer. Ils semblaient avoir compris l'addition puisque nous leur avons proposé d'essayer de faire la soustraction demandée qu'ils ont réussie. En discutant avec eux de leur présentation, un élève nous a dit : « en tout cas, c'est compliqué en tabarouette! ».

## Analyse de la présentation des additions et soustractions babyloniennes

Afin d'éviter de dessiner trois abaques comme dans le feuillet explicatif, l'équipe des Babyloniens a décidé de faire toutes les étapes de leur addition au crayon à mine et de faire *en direct* la démonstration avec leur marqueur. Cette façon était très intéressante parce que les élèves étaient bien préparés, ne se sont pas trompés et ont pu montrer la technique d'addition une étape à la fois. Les élèves ont précisé, à juste titre, que la technique babylonienne était la même que celle des Sumériens. Ils ont fait une démonstration de l'addition avec les nombres 376 et 917, qu'ils ont bien décomposés. Une élève a d'abord expliqué la décomposition en base 60 : « 376, c'est 6 fois 60, plus 1 fois 10, plus 6 » et que 917 était « 1 fois 600, plus 5 fois 60, plus 1 fois 10, plus 7 ». Ils ont expliqué le fonctionnement de leur type d'abaque en le comparant judicieusement à la planche à calculer. Une autre élève a ajouté « moi je vais expliquer les échanges. Quand on a 10 ici mettons, il t'en faut 10 pour mettre une barre dans cette colonne-là. Ici, il en faut 6 pour en mettre là. C'est comme fois 10, fois 6, fois 10, fois 6 jusqu'à l'infini ». Dans leur addition, les élèves n'avaient pas encerclé et expliqué les échanges. Ils l'ont bien expliqué à notre demande. Sur leur affiche (figure 36), nous remarquons que les élèves ont indiqué la règle de groupement entre les colonnes qui n'est pas toujours la même (parfois 10 et parfois 6).

Pour la soustraction, ils ont également très bien expliqué le procédé. Ils ont choisi de faire deux abaques pour deux des étapes de la soustraction. Dans le premier, ils ont d'abord décomposé le premier nombre indo-arabe de la soustraction en *unités, dizaines, six centaines*, etc. « Nous, on a fait 2 453. On a mis 4 dans la colonne des 600, ça fait 2 400, 5 dans la colonne des dizaines, ça fait 50 pis 3 dans la colonne des unités ». Ils sont ensuite passés à leur deuxième abaque. « Nous, on a fait 2 453 moins 748, fait qu'après ça, on a retranscrit le premier nombre avec les emprunts. Ici, c'est la colonne (il parlait plutôt de la rangée) du deuxième nombre : 748. Ici, on voulait faire 0 moins 2, ça ne se pouvait pas, fait qu'on a barré une *six-centaines* et on les a mis dans les soixantaines, 10. Ici, c'est la même chose, 3 moins 8, ça ne se faisait pas, fait qu'on a mis 10 ici avec le 3, fait qu'à la fin, ça donnait (hésitations)… 1 505. 3 moins 1, 2 (colonne des *six centaines*); ici 10 moins 2, 8 (colonne des soixantaines); 4 moins 2, 2 (colonne des dizaines) et 13 moins 8, 5 (colonne des unités). La réponse est 1 505 ». Nous étions impressionnés de ce calcul mental, mais il comportait une erreur que nous n'avons pas réalisée sur le coup. En effet, la réponse de la soustraction était plutôt 1 705. Aussi, il aurait été intéressant que l'élève explique la réponse, à savoir que deux *six-centaines* plus 8 soixantaines plus 2 dizaines plus 5 unités donnaient 1 705. Un élève de la classe a demandé si on écrivait la réponse dans la dernière rangée. Les élèves de l'équipe ont répondu que oui et ont rappelé que la première rangée est pour le premier nombre et qu'"ici c'est le premier nombre avec les emprunts… ».

**Figure 36** Affiche des additions et des soustractions babyloniennes


Pour les ressemblances et les différences, les élèves de l'équipe ont vite conclu que « c'est la même affaire que les Sumériens ». Un élève de la classe a remarqué certaines similitudes entre différents procédés : « le romain ressemble au chinois, le sumérien est pareil au babylonien pis les Mayas, y calculent pas fait que les deux autres font comme les Égyptiens ». Un élève de l'équipe des Babyloniens a précisé, à juste titre, qu'"y a des systèmes qui n'ont pas retrouvé de traces, mettons les Sumériens pis les Babyloniens habitaient en Mésopotamie, fait que vu qu'ils n'ont pas retrouvé de traces, ils se sont dit que ça devait être pas mal ressemblant ». Les élèves avaient vu juste.

## Analyse des résultats du test sur les additions et les soustractions babyloniennes

Ici aussi, les cinq élèves de cette équipe ont parlé de la planche à calculer dans les ressemblances avec notre façon d'effectuer les additions et les soustractions. Certains n'ont relevé que cette ressemblance (deux sur cinq) et un élève a eu une réponse plus complète en abordant les échanges (emprunts et retenues): « Ils ont une planche à calculer, ils font des échanges, dans les soustractions, ils placent le plus gros chiffre en haut ». Nous soupçonnons un autre élève d'avoir voulu comparer la méthode des Babyloniens à celle de Sumériens, mais il a plutôt écrit : « leur système de calcul additions et soustractions est pareil que les Babyloniens ». Aucun élève n'a comparé la façon d'effectuer les additions et les soustractions des Babyloniens à nos algorithmes conventionnels.

Pour ce qui est des différences, trois élèves ont parlé de la base qui faisait surtout référence au système de numération (activité 1). Peut-être voulaient-ils parler des différentes colonnes de l'abaque mésopotamien? Les réponses ne sont pas claires : « Notre système est en base 10, donc, 1, 10, 100… Le système babylonien est en base 60, donc 1, 60, 600, 3600… » et « ils ont une base 60 ». Une autre réponse est fausse : « Ils ont une base six », mais cet élève voulait peut-être parler des échanges entre colonnes qui sont parfois de 6 (on échange une soixantaine contre 6 dizaines ou un paquet de trois-milles-six-cents contre 6 *six-centaines*). Un élève parle de l'irrégularité entre les colonnes de l'abaque, mais il n'est pas aussi précis et il ajoute une explication incompréhensible : « La base n'est pas toujours la même. Au lieu d'ajouter deux et deux, tu ajoutes un, un et un. Les échanges sont après toute l'addition ». Il a tout de même remarqué que les échanges se faisaient après et non au fur et à mesure comme dans notre algorithme conventionnel. Un seul élève a comparé la méthode babylonienne à l'algorithme conventionnel en relevant au passage la rapidité de notre façon de faire : « Notre système d'aujourd'hui (traditionnel) est plus rapide qu'eux et nous, on fait nos calculs avec des chiffres ou nombres (1, 2, 3, 21, 32, etc.) et eux ne les font pas avec leurs nombres et chiffres, mais avec des barres (lll, etc.) sur leur abaque ».

## Analyse du travail sur les additions et les soustractions égyptiennes

Au début, les élèves de cette deuxième équipe ne savaient pas du tout quoi faire. En effet, aux activités précédentes, ils avaient d'abord travaillé sur le système maya, mais faute de

preuves archéologiques sur la façon d'effectuer les opérations à la manière des Mayas, nous avons décidé de faire travailler sur les opérations égyptiennes. Une élève a proposé une hypothèse sur papier, mais on ne voyait pas de quoi il s'agissait. Un autre a dit : « Ils n'avaient qu'à additionner les chiffres ». Cette hypothèse était la bonne. Ils ont donc essayé de faire une addition quelconque, mais ils avaient mis plus de dix unités dans la réponse. Nous leur avons précisé qu'ils avaient trouvé la bonne façon de procéder, mais qu'il y avait un problème avec la réponse. Une élève de l'équipe a vite remarqué : « on ne peut pas mettre douze unités dans la réponse, il y a une dizaine là-dedans! » Ils avaient compris.
Ainsi, après seulement quatre minutes, nous leur avons remis le feuillet explicatif et ils l'ont lu rapidement, mais avec attention. Ils ont ensuite effectué les opérations demandées. Nous allions les voir régulièrement et tout semblait bien aller. Un élève à la fois seulement travaillait sur la feuille. Lorsque nous leur avons demandé si tout allait bien, une élève de l'équipe nous a dit que les Égyptiens comptaient « comme en français ». Nous avons répété : « en français? » et elle s'est rapidement reprise en disant : « en indo-arabe ». Après seulement 25 minutes, ils commençaient leur affiche.

## Analyse de la présentation des additions et soustractions égyptiennes

Comme les additions et les soustractions égyptiennes avaient déjà été présentées par une autre équipe et que toute la classe avait bien compris, cette deuxième équipe a été très expéditive. Un élève a commencé la présentation en comparant la façon de faire des Égyptiens avec la nôtre : « Les additions, c'est comme un peu le système indo-arabe pis la planche à calculer… Tu mets tous les chiffres, pis tu les additionnes ». Ils ont effectué l'addition 388 plus 2 196. Ils ont très bien expliqué les échanges, qu'ils ont faits devant la classe à notre demande. Pour la soustraction, ils ont effectué 4 321 moins 499, en écrivant également le deuxième nombre (ce qui n'était pas nécessaire). Les filles qui présentaient ont oublié de faire les échanges, qu'elles ont bien faits lorsque nous leur avons fait remarquer. Nous ne nous sommes pas attardés sur les ressemblances et les différences avec d'autres systèmes puisque nous en avions déjà discuté la veille (avec l'autre équipe présentant les opérations égyptiennes).

**Figure 37** Affiche des additions et soustractions égyptiennes


## Analyse des résultats du test sur les additions et les soustractions égyptiennes

Quatre des cinq élèves de l'équipe ont trouvé des ressemblances entre la méthode des Égyptiens pour effectuer les additions et les soustractions et notre méthode actuelle. Ainsi, un élève a relevé une ressemblance, toutefois une erreur s'est glissée, on aurait dû lire (en chiffres indo-arabes) dans la parenthèse : « On met les nombres à additionner ou à soustraire un au-dessus de l'autre (en chiffres égyptiens), les Égyptiens aussi. On écrit la réponse plus bas, les Égyptiens aussi ». D'autres élèves trouvaient que cette manière de procéder ressemblait à notre façon de faire, sans pour autant donner d'explication : « Manière de procéder » et « C'est comme notre façon d'addition ou de soustraction comme 393

-24 sauf en chiffres égyptiens ». Un élève devait penser à la planche à calculer puisqu'il a affirmé que : « ils ont le même tableau que nous et ils utilisent la même technique que nous », mais il ne donne pas plus d'explication. Enfin, un élève n'a rien vu en commun : « Ça ne ressemble pas vraiment à notre façon de faire aujourd'hui ».

En ce qui concerne les différences, quatre élèves sur cinq ont uniquement mentionné que les chiffres égyptiens sont différents des nombres indo-arabes : « on écrit les nombres à calculer en chiffres indo-arabes, les Égyptiens les écrivent en chiffres égyptiens »; « leurs symboles de nos chiffres (indo-arabes) »; « la façon d'écrire les chiffres, c'est tout! » et finalement, « les chiffres étaient différents ». Enfin, un élève a relevé que dans leurs opérations aussi, les Égyptiens « écrivaient de droite à gauche ». Ces ressemblances et ces différences restent encore une fois en surface.

## Conclusion de section

Tout comme le bloc précédent, ce bloc d'activités s'est déroulé tel que prévu. Les élèves ont généralement bien compris comment faire des additions et des soustractions à la manière de leur peuple. Toutes les équipes ont parlé des échanges nécessaires entre colonnes, certains en les nommant *emprunts* et *retenues*, comme dans notre algorithme conventionnel. Par contre, lors des discussions concernant les ressemblances et les différences entre les manières présentées et nos méthodes actuelles et lors du test de compréhension *Retour sur les opérations,* nous aurions dû insister pour que les élèves comparent les différentes méthodes avec les algorithmes conventionnels et non avec la planche à calculer. Les discussions et les liens entre les différentes techniques auraient été beaucoup plus riches. Par contre, il est vrai que toutes les méthodes présentées s'apparentaient plus à la planche à calculer qu'à notre algorithme conventionnel. Cependant, il est difficile d'évaluer les liens qu'ont faits les élèves entre les différents procédés. Ils ne semblent pas avoir fait de liens entre la nécessité du recours à un objet ou un outil de calcul et la lourdeur du système de numération.

Enfin, dans le questionnaire d'appréciation rempli en fin de projet, à la question : « Crois-tu que ce projet t'a aidé à mieux comprendre ou à mieux effectuer les quatre opérations? Comment? » Ici aussi, une dizaine d'élèves ont considéré que la séquence les a aidés à mieux comprendre les opérations, mais encore une fois, les justifications ne sont pas étoffées. Certains élèves nomment un apprentissage qu'ils ont fait, mais sans expliquer en quoi cet apprentissage les a aidés à mieux comprendre les quatre opérations actuelles : « Oui, car pour faire les opérations et même les chiffres, il faut savoir bien ses tables »; « Oui, un peu, ex : j'ai plus compris la logique des calculs »; « Oui, car on a appris d'autres méthodes pour les effectuer » et « Oui, avant je ne comprenais pas comment on arrivait à la réponse ». D'autres réponses sont très vagues : « Oui, je les comprends mieux parce qu'avant, il y avait des choses que je ne comprenais pas, mais maintenant, je les comprends »; « Oui, car je l'ai mieux compris »; « Plus ou moins, car je les savais bien, mais je les ai compris un peu mieux »; « Oui, un peu parce qu'il y a des systèmes qui ressemblent à celui de nos jours »; « Oui parce qu'avant, je le connaissais pas ». Plusieurs élèves ont utilisé le mot *comprendre* dans leur réponse, mais il se pourrait que pour eux, *comprendre* soit *être capable de faire*.

Par contre, on retrouve cinq réponses négatives. Tout comme à la question précédente (sur la compréhension du système indo-arabe), plusieurs élèves considéraient qu'ils n'avaient plus grand-chose à apprendre concernant les opérations : « Non, car je n'avais pas de difficultés » ou « Non, pas vraiment, car je les comprenais déjà » par exemple. De plus, d'autres élèves, comme à la question précédente, n'ont pas fait de liens entre les différents procédés de calcul avec différents groupements (10 et 60) et les algorithmes conventionnels. Ils considèrent que puisqu'ils ont peu travaillé sur le système indo-arabe, cette séquence ne les a pas aidés à mieux comprendre les quatre opérations : « Non, car je n'ai pas vraiment travaillé le système indo-arabe »; « Non parce que c'est presque tout différent »; « Pas vraiment, mais au moins, j'ai pu découvrir d'autres systèmes il y a longtemps »; « Non parce qu'on travaillait sur un système différent que le nôtre » et « Non, comme j'ai dit à la question 6, je n'ai pas plus compris notre système parce qu'on travaillait plus sur des systèmes qui ne ressemblent pas au nôtre ». Un élève a répondu par la négative parce que « (…) il y en a qui sont trop compliqués à comprendre ». Enfin, huit autres élèves ont répondu par la négative, mais sans préciser pourquoi. Nous avons donc partiellement raté notre cible qui était de faire des liens entre les différentes méthodes et les algorithmes conventionnels d'addition et de soustraction, tel que préconisé par Bednarz et Janvier (1984). Il est dommage que les élèves ne soient pas revenus sur le principe d'échanges (emprunts et retenues) commun à tous les procédés.

## 5.3. Troisième bloc : analyses des activités sur les multiplications et les divisions

Dans ce dernier bloc d'analyse, nous voyons le travail des élèves sur les multiplications et dans certains cas, les divisions à la manière de nos prédécesseurs. Nous analysons le travail de chaque équipe, soit la découverte des multiplications et des divisions, suivie de la présentation et des réponses au test de compréhension concernant ces opérations. Nous analysons les multiplications et les divisions dans l'ordre où les équipes les ont présentées à la classe (pour une meilleure compréhension des discussions à la fin de chaque présentation).

## Analyse du travail sur les multiplications chinoises

Après six minutes de manipulation du boulier chinois, nous avons demandé aux élèves de l'équipe de nous faire une démonstration puisqu'ils pensaient savoir comment faire les multiplications. Comme leur démonstration était plutôt boiteuse, nous leur avons remis le feuillet explicatif. Certains élèves ne comprenant pas la procédure, nous avons invité un de leurs coéquipiers qui semblait la maîtriser à l'expliquer au reste de son équipe. « Au début, il faut représenter le nombre qu'on veut multiplier : 7 x 24, on met 7 ici, ensuite on saute deux colonnes et on met le 24 (en le faisant). Vous comprenez jusque-là? Là on fait 7 x 2, mais vu que ça représente les dizaines, ça fait 14, on vient représenter 14 ici. » Une élève lui a dit : « mais il me semble que ça va pas là » et l'élève de répondre : « c'est parce que le 2, c'est des dizaines… le 7 x 4, on vient le mettre là. Là on a 4, pis il faut en mettre 2, fait que 4 + 2, ça fait 6… Les élèves ne comprenant pas tous, ils discutaient fort. Nous étions également sollicités par l'équipe des Babyloniens qui avait besoin de beaucoup de support. Nous sommes revenus les voir 27 minutes après le début pour leur demander si c'était plus clair. Ils nous ont répondu que oui et nous leur avons proposé d'essayer sur le boulier à tour de rôle, ce qu'ils ont fait sous la supervision de l'élève qui comprenait bien. Une élève a demandé à son équipe : « OK, quelle multiplication on va faire devant la classe? »

## Analyse de la présentation des multiplications chinoises

Les élèves ont fait une démonstration de 43 x 8 sur l'abaque qu'ils avaient disposé sur le rétroprojecteur. Ils ont très bien expliqué la disposition des deux nombres à multiplier et devant certains yeux interrogateurs des élèves de la classe, ont rappelé la valeur des colonnes et le fait que les boules du haut valent 5. Dans l'exemple choisi, ils ont expliqué que 8 x 3 égalait 24, qu'ils sont venus placer dans les colonnes des unités et des dizaines et que 8 x 40 égalait 320, qu'ils ont placés dans les bonnes colonnes. Malgré les difficultés rencontrées à l'activité précédente, les élèves étaient maintenant à l'aise puisqu'ils ont décidé de faire une autre démonstration avec un multiplicateur à deux chiffres, soit 37 x 12. Comme les chiffres à multiplier étaient petits, ils ont omis des étapes puisqu'ils ont fait 2 x 37 = 74 et 1 x 37 = 37 mais « comme c'est des dizaines qu'on multiplie, on met la réponse dans les dizaines et les centaines ». Malgré ce raccourci, on voyait qu'ils avaient bien compris le procédé chinois et la distributivité de la multiplication. Nous avons précisé à la classe que les Chinois auraient plutôt fait 2 x 7, puis 2 x 30. Ensuite, ils auraient fait 10 x 7 et 10 x 30.

À notre question « quelles sont les ressemblances et les différences entre cette façon de faire et d'autres que vous connaissez pour faire des multiplications ? », un élève a remarqué que ça ressemblait beaucoup à notre manière conventionnelle de faire les multiplications (prendre chaque chiffre du multiplicateur et le multiplier par chaque chiffre du multiplicande). Une autre élève a relevé que ça ressemblait beaucoup aux multiplications de la planche à calculer. Comme différence, la même élève a précisé que dans la planche à calculer, on n'écrivait pas les nombres à multiplier comme dans la multiplication sur le boulier.

## Analyse des résultats du test sur les multiplications chinoises

L'ensemble des réponses des élèves ayant travaillé sur le système chinois se trouve à l'annexe 13. À la question : En quoi la façon d'effectuer les multiplications dans votre système de numération ressemble à notre façon d'effectuer ces opérations aujourd'hui? deux élèves n'ont pas bien lu la question et ont comparé le procédé chinois au procédé romain : « Il ressemble aux multiplications sur l'abaque romain » et « la multiplication pour les Chinois ressemble beaucoup aux Romains. Les Chinois utilisent un boulier et les Romains, un abaque, mais il fonctionne pareil ». Deux élèves ont relevé le fait que dans les deux procédés, on pose le multiplicateur et le multiplicande avant de réaliser la multiplication, mais une élève parle du procédé sur la planche à calculer : « Il faut marquer le multiplicateur, ex. : (dessin de boulier avec *multip*. et des flèches vers les tiges de gauche et *rép*. avec des flèches vers les tiges de droite) » et « C'est peut-être une différente façon, mais pour faire les multiplications (français) sur une planche à calculer, il faut écrire les deux nombres et APRÈS, faire les échanges ». Une autre réponse ressemble à notre réponse (annexe 13) à savoir que l'on multiplie chaque chiffre du multiplicateur par chaque chiffre du multiplicande et qu'on additionne tous les résultats partiels, mais la réponse de l'élève est moins claire : « Les multiplications, on multiplie et par après, additionner les nombres que ça donne en faisant la multiplication et par la suite, ça donne la réponse ».

Ensuite, à la question : En quoi la façon d'effectuer les multiplications dans votre système de numération est différente de notre façon d'effectuer ces opérations aujourd'hui?, une seule réponse relève une vraie différence : « Ils utilisent un boulier tandis que notre système se fait sur papier ». Les autres réponses ne répondent pas à la question : « La seule différence avec les Romains, c'est que les billes, on peut les enlever et pas les Chinois » ou sont incompréhensibles : « La différence est que nous, nous comptons combien de fois le nombre rentre dans le diviseur » alors que cette équipe n'a pas expérimenté la division sur le boulier chinois. Enfin, une réponse est incomplète (elle n'aborde qu'un des deux procédés) : « Ils placent leurs billes sur différentes allées sur le boulier ». Enfin, une élève ne voit pas de différence : « Soit il n'y en a pas ou je l'ignore ». Bien que les élèves aient appris à effectuer les multiplications sur le boulier chinois, leurs réponses brèves nous amènent à questionner leur compréhension de la technique.

## Analyse du travail sur les multiplications romaines

Nous avons remis aux élèves de cette équipe l'abaque romain (annexe 11d) du feuillet explicatif sur les multiplications, puis deux minutes plus tard, le feuillet explicatif. Après neuf minutes, ils semblaient perdre leur temps ou ne pas comprendre. Nous les avons alors informés que le feuillet comptait trois pages. Ils semblaient surpris, mais étaient rassurés de ne pas comprendre (ils n'avaient lu que la première page). Ils nous ont alors demandé s'ils pouvaient faire la méthode traditionnelle au tableau (pour vérifier leur réponse). Les filles sont allées au tableau et les garçons ont essayé de faire la multiplication demandée. Plus tard, nous sommes revenus les voir et nous avons demandé à un élève: « c'est quelle étape que tu as sautée? » L'élève nous a expliqué qu'une fois, il n'avait pas multiplié les dizaines, puis les unités, mais qu'il avait calculé le nombre à deux chiffres ensemble. C'est un raccourci qu'avait aussi pris l'équipe des Chinois, surtout que le multiplicateur était un petit nombre (13), que l'on peut facilement calculer mentalement. Ce processus personnel fait appel à une propriété de la multiplication : la distributivité de la multiplication sur l'addition. En effet, les élèves ont fait (200 x 13) + (5 x 13) au lieu d'une étape supplémentaire qui aurait été (200 x 10) + (200 x 3) + (5 x 10) + (5 x 3). Nous le rassurons en lui disant que ce n'est pas très grave puisqu'ils semblaient avoir bien compris, mais un élève de l'équipe a dit : « Moi je n'ai pas compris ». Nous l'avons donc invité à se faire expliquer par un coéquipier.

Après avoir reproduit au tableau un abaque romain, un élève lui explique : « Le 200, tu le marques en bas, le 205 (le multiplicande de l'exemple). » Il dessine aussi le multiplicateur (13). « Le 2, dans le nombre au complet, il représente 200, fait que là, tu fais 200 x 10, parce que le 1, il représente 10, ça donne 2 000, là tu mets 2 000. Là tu fais 200 x

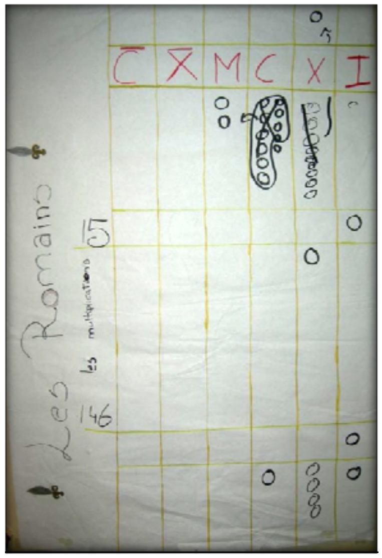
3, ça fait 600 ». Le fait que l'élève donne son explication en commençant par la gauche dénote une bonne compréhension de la valeur positionnelle et se rapproche des méthodes de calcul mental.

## Analyse de la présentation des multiplications romaines

L'équipe des Romains a présenté sa multiplication, soit 15 x 146. Les élèves ont choisi de dessiner un abaque à jetons vierge sur leur affiche et de nous faire la démonstration. Cette façon de faire s'est avérée judicieuse puisque les élèves de la classe découvraient une étape à la fois et l'équipe qui présentait n'avait pas à dessiner cinq abaques (un pour chaque étape) comme dans le feuillet explicatif. Ils ont expliqué toutes les étapes, soit 6 x 5 = 30, 6 x 10 = 60, 40 x 5 = 200, 40 x 10 = 400, 100 x 5 = 500 et 100 x 10 = 1000. Ils ont dessiné tous les résultats partiels avant de faire et d'expliquer tous les échanges. Ils étaient très à l'aise et expliquaient très clairement le procédé romain. Notons que cette fois-ci, ils ont commencé par multiplier les unités, puis les dizaines et les centaines, contrairement au feuillet explicatif et aux explications précédentes d'un élève de cette équipe.

Les élèves ont relevé comme ressemblance le fait que l'abaque était positionnel (c'est le terme utilisé) et qu'il ressemblait au boulier avec les échanges. Comme différence, un élève a expliqué que dans nos multiplications traditionnelles, on multipliait les unités, puis les dizaines et qu'on additionnait les réponses. Ici, on mettait plutôt les réponses partielles dans chaque colonne et on faisait les transferts (échanges) à la fin. Le lecteur peut consulter l'affiche de l'équipe à la figure 38).

**Figure 38** Affiche de la multiplication romaine




## Analyse des résultats du test sur les multiplications romaines

Pour ce qui est des ressemblances entre le procédé romain et notre façon de faire les multiplications aujourd’hui, deux élèves ont encore fait référence à la planche à calculer et ils n’ont pas tort, mais leur réponse n’est pas très claire : « Les échanges dans la planche à calculer » et « on place les symboles sur une planche comme nous ». Les deux autres réponses sont bonnes, mais n’abordent qu’une des deux ressemblances : « On doit représenter les nombres à multiplier avant de commencer » et « Ils multiplient les chiffres comme nous, ex. : 38 x 56, ils font 6 x 8, après 8 x 5, etc. ».

En ce qui concerne les différences, les réponses sont très partielles; on parle encore d’un seul système, sans trop savoir duquel des deux systèmes (romain ou indo-arabe) on parle : « On a un abaque »; « Ils ont des colonnes pour calculer » ou encore : « Il y a de différentes colonnes ». Un seul élève compare véritablement les deux procédés, mais il ne s’agit pas vraiment d’une différence : « La différence est que nous, pour faire 100 x 15, on fait 100 x 15, mais eux, ils font 100 x 10, 100 x 5, qui donne la réponse ».

## Analyse du travail sur les multiplications et les divisions égyptiennes

Rapidement, les élèves de cette première équipe à travailler sur les multiplications et les divisions égyptiennes ont observé la régularité dans le tableau de la multiplication égyptienne (qui permettait de faire 84 x 15) : « ok, ça doit être 1 x 15 + 2 x 30… » Ils avaient remarqué que c’est toujours « fois 2 ». Nous les avons questionnés : « c’est toujours fois 2 par rapport à quoi? » Un élève a répondu que c’était par rapport au nombre au-dessus. Ils pensaient que les petits tirets étaient des symboles de « moins ». Nous leur avons expliqué qu'il s'agissait en fait d'une petite marque. Plus tard, nous leur avons précisé que le tableau qu'ils avaient servait à effectuer la multiplication 84 x 15. Quelques minutes après, nous sommes revenus les voir et leur avons demandé où ils en étaient. Une élève nous a dit : « c'est toujours fois 15 » (en parlant de la première colonne par rapport à l'autre). Elle le démontre à ses coéquipiers : « regardez, 1 x 15, 15; 2 x 15, 30; 4 x 15, 60; 8 x 15, 120; 16 x 15, 240… ». Après 28 minutes, nous sommes venus les voir et ils avaient réussi la multiplication égyptienne. Nous les avons invités à poursuivre avec la division.

## Analyse de la présentation des multiplications et des divisions égyptiennes

Cette équipe est celle qui avait d'abord travaillé sur le système maya, mais faute de preuves archéologiques des opérations chez les Mayas, nous l'avons fait travailler sur les opérations égyptiennes. Pour faciliter la compréhension des élèves de la classe, nous avions pensé qu'une équipe pouvait présenter les multiplications et les divisions égyptiennes avec des chiffres indo-arabes (comme dans le feuillet explicatif remis aux élèves) et que l'autre équipe pouvait présenter les mêmes opérations, mais avec des hiéroglyphes tels que les faisaient les scribes égyptiens. Cette équipe a ainsi présenté les multiplications et les divisions égyptiennes avec les chiffres indo-arabes.

Les deux filles du groupe ont présenté la multiplication à l'aide du tableau, mais ce n'était pas clair du tout. Nous savions qu'elles avaient pourtant réussi la multiplication demandée et avaient préparé leur affiche avec soin, mais elles n'arrivaient pas à expliquer le procédé aux élèves de la classe. Nous avons dû poser des questions très précises pour qu'elles expliquent aux élèves pourquoi c'était un 12 dans la deuxième colonne et pas un autre nombre (elles ont alors précisé que c'était parce que c'était le multiplicateur). Nous avons dû leur demander également ce qui se passait entre chaque rangée du tableau et elles ont précisé qu'on faisait « fois 2 » à chaque fois, comme dans la première colonne. Les garçons ont mieux présenté leur division en expliquant que c'était le même principe que la multiplication, mais « à l'envers ». Ils ont détaillé à nouveau le fonctionnement du tableau, mais un élève a demandé pourquoi c'était un 5 maintenant dans la deuxième colonne. Les garçons ont précisé à ce moment que le 5 était le diviseur et que comme pour les multiplications, on doublait toujours la première colonne, puis la deuxième. Ils ont ajouté que lorsqu'on vient pour dépasser le nombre à diviser dans la deuxième colonne, on peut s’arrêter de doubler. Finalement, ils ont démontré qu’on cherchait dans la deuxième colonne les nombres qui additionnés formaient le dividende et qu’on faisait des tirets et que pour trouver la réponse à la division, il suffisait d’additionner les vis-à-vis de la première colonne. Comme une autre équipe devait présenter les opérations égyptiennes, nous n’avons pas discuté des ressemblances et différences tout de suite. La figure 39 présente l’affiche que cette équipe avait préparée. Elle est très claire et complète.

**Figure 39** Affiche des multiplications et des divisions égyptiennes


## Analyse des résultats du test sur les multiplications et les divisions égyptiennes

À la question « En quoi la façon d’effectuer les multiplications et les divisions dans votre système de numération ressemble à notre façon de faire ces opérations aujourd’hui? », nous présumons que les élèves, ne voyant pas vraiment de ressemblances, ont écrit un peu n’importe quoi ou ont mal lu la question. En effet, deux élèves ont comparé le procédé égyptien au procédé babylonien alors que l’on demandait de le comparer au procédé actuel : « Il y avait un tableau comme les Babyloniens » et « Ont un tableau comme les Babyloniens ». Un élève a mentionné : « Il y a des colonnes », mais on ne sait pas s’il parle du tableau égyptien ou de la planche à calculer si souvent citée. Un élève n’a pas terminé sa réponse : a-t-il manqué de temps ou il ne savait pas quoi écrire? Enfin, une élève parle de l’utilisation des multiples dans les deux procédés, mais nous ne voyons pas ce qu’elle veut dire : « Des fois, on utilise des multiples, les Égyptiens aussi (sauf que les Égyptiens les utilisent toujours).

Pour ce qui est des différences entre le procédé égyptien et nos algorithmes conventionnels de multiplication et de division, nous nous attendions à des réponses plus étoffées puisque les deux procédés sont très différents. Une seule élève a une réponse satisfaisante, comparant véritablement les deux procédés : « Les Égyptiens utilisent un tableau avec des multiples, pas nous ». Trois élèves ont relevé des différences, mais ne les ont pas détaillées : « Presque tout »; « La grille, les chiffres et aussi la façon de le diviser ou multiplier » et enfin, « Égyptiens ont un tableau, pas indo-arabe, manière de placer ». Finalement, un élève a répondu : « On multiplie par 20 », mais on ne sait pas s'il avait un exemple de multiplication en tête ayant 20 comme multiplicateur ou s'il se trompait avec le système sur lequel il avait travaillé à l'activité 1 qui était le système maya en base 20.

## Analyse du travail sur les multiplications et les divisions égyptiennes

En regardant le tableau qui leur était remis, une élève a rapidement remarqué que « là, c'est fois 2 ». Un élève a renchéri en disant : « Ben oui, regardez, c'est fois 2, fois 2, fois 2, fois 2! ». Toutefois, après seulement trois minutes, ils nous ont appelés pour nous dire qu'ils ne comprenaient pas. Au même moment, un élève de l'équipe s'est exclamé : « Ah! J'ai compris! Peut-être qu'il faut additionner ces nombres-là? » Nous leur avons donné le feuillet explicatif et les avons invités à vérifier leur hypothèse. À la fin de leur lecture, ils semblaient perplexes. Un élève a dit : « Ce que je ne comprends pas, c'est qu'avec ça, on ne peut pas le faire avec tous les nombres ». L'élève qui lisait lui a répondu : « oui, tu y vas jusqu'à ce que tu viennes pour dépasser le nombre », mais sans trop savoir de quoi elle parlait. Les élèves ont ensuite tenté de faire le défi du feuillet explicatif, mais avant, ils ont fait le calcul sur une calculatrice. Plus tard, une élève expliquait à un autre le procédé égyptien (l'enregistrement sonore n'est toutefois pas clair) et on entend l'élève dire : « Oh! OK! Là, j'ai catché! ». Nous étions près d'eux et leur avons confirmé qu'ils avaient bel et bien compris.

Une élève a proposé de faire l'affiche, mais elle s'est ensuite rappelé que l'équipe avait aussi la division à faire. Les élèves ont observé le tableau du feuillet et remarqué que c'était le même principe que la multiplication. Une élève a lu les consignes. Une autre a remarqué que : « 512 + 64 + 32 + 16 est égal à 624. C'est ça qu'ils disent de faire. Après ça, tu fais ça, ça pis ça…pis ça donne, la réponse! » Un élève ne comprenait pas et sa coéquipière a ajouté : « Je ne comprends pas pourquoi on met ces lignes-là » (en pointant les barres obliques ou les tirets). Une autre lui a répondu : « c'est pour savoir c'est quoi notre réponse! » Elle a recommencé à expliquer magnifiquement bien : « comme pour les multiplications, tu mets un ici et tu fais quelques fois 2, fois 2, fois, fois 2. Après, tu mets ce nombre-là (le diviseur) ici et tu fais aussi fois 2, fois, 2, fois 2, fois 2 jusqu'à ce que tu t'approches du nombre à diviser. Après, tu regardes quels chiffres il faut mettre ensemble pour arriver à ça (le dividende) et tu regardes ceux qui sont vis-à-vis ». L'élève a répondu : « ah! J'ai compris! J'ai compris! J'ai compris! » d'un ton très enthousiaste. Ensuite, les élèves essayaient tous les trois (deux élèves de cette équipe étaient absents ce jour-là) de faire la division demandée chacun de leur côté. Nous les avons observés un bon moment et lorsqu'ils pensaient avoir terminé, nous leur avons proposé de vérifier avec la calculatrice. Ça ne fonctionnait pas. Nous nous sommes penchés sur la feuille et avons demandé : « OK, vous additionnez ici, mais jusqu'à ce que ça fasse quoi? » On m'a répondu 462 (le dividende). Ils ont ensuite vérifié leurs calculs et ont trouvé leur erreur.

Nous leur avons demandé ce dont ils pensaient de cette façon de faire les multiplications et les divisions et quels seraient les avantages et les inconvénients de ce procédé. Nous n'entendons malheureusement pas la réponse, mais nous renchérissons en demandant si on avait besoin de connaître nos tables de multiplication avec cette méthode. Ils ont répondu que les Égyptiens avaient juste besoin de connaître la table du 2. Nous leur avons précisé que la table de 2, c'était comme si on additionnait deux fois le même nombre, comme si : « on faisait 6 + 6, 12, 12 + 12, 24, 24 + 24, 48… Donc on n'a pas besoin de connaître ses tables, c'est un avantage ». Aussi, les doublets sont souvent les premières additions que les enfants apprennent en bas âge. En effet, Poirier explique que « les élèves apprennent facilement les doubles (1 + 1, 2 + 2, 3 + 3, etc.). L'hypothèse retenue pour expliquer cette aisance réside dans le fait que les élèves n'ont qu'un terme à mémoriser, puisqu'il est répété, en plus de la somme des termes » (2001, p. 58). Nous avons enchaîné avec cette question : « quels seraient les inconvénients? » Un élève a bien trouvé en répondant « C'est plutôt long de faire le tableau ». Nous leur avons d'ailleurs rappelé qu'« eux, ils utilisaient des hiéroglyphes, sachant que tous les nombres du tableau, ils les gravaient en hiéroglyphes… ».

### Analyse de la présentation des multiplications et des divisions égyptiennes

Tout de suite après la présentation des multiplications et des divisions égyptiennes avec des chiffres indo-arabes, nous avons enchaîné avec la deuxième équipe travaillant sur les opérations égyptiennes. Les élèves ont d'abord rappelé brièvement le fonctionnement du tableau et ont fait leur multiplication : « nous, on a fait 84 x 9 donc dans la deuxième colonne, on commence avec 9 et on fait toujours fois 2, fois 2, fois 2… ». Ils ont expliqué qu'ils se sont arrêtés à 64 dans la première colonne parce que s'ils doublaient ce nombre, ils allaient dépasser le nombre à multiplier, soit 84. Ils ont précisé que dans la première colonne, en additionnant 64 + 16 + 4, ça donnait 84 et qu'il suffisait d'additionner les nombres de la deuxième colonne qui sont vis-à-vis ces nombres pour trouver la réponse à la multiplication, soit 756. Les élèves ont ensuite présenté la division 565 ÷ 5 et expliqué très clairement la façon de faire des Égyptiens. Vous pouvez consulter la belle affiche de cette équipe à la figure 40. Contrairement aux affiches des présentations précédentes, les élèves ont bien utilisé tout l'espace. Notons que pour la multiplication, les nombres ont parfois été représentés avec les plus gros ordres à droite (comme le faisaient les Égyptiens), mais parfois non. Comme il ne s'agit pas d'un système positionnel, cette erreur n'est pas très grave.

**Figure 40** Affiche de la multiplication et de la division égyptiennes


Nous avons ensuite demandé à toute la classe les ressemblances et les différences entre cette façon de faire et d'autres qu'ils connaissaient. Un élève de l'équipe des Babyloniens a remarqué une certaine ressemblance avec les tables de multiplication babyloniennes (procédé pas encore présenté). Avec raison, ils ont surtout noté des différences : les Égyptiens utilisaient un tableau à deux colonnes et cela n'a rien à voir avec notre façon de faire les multiplications et les divisions, qu'ils doublaient les nombres, ainsi ils n'étaient pas obligés d'apprendre les tables de multiplication et qu'ils utilisaient les multiples du multiplicateur ou du diviseur.

## Analyse des résultats du test sur les multiplications et les divisions égyptiennes

Pour ce qui est des ressemblances entre notre façon de faire les multiplications et les divisions et la façon des Égyptiens, la plupart des élèves n'en ont pas relevées et avec raison (deux réponses vides, une élève qui précise : « Il n'y a pas vraiment de ressemblance » et une réponse qui commence par « aucunement », mais qui enchaîne avec « à part que nous échangeons comme eux quand nous sommes arrivés à dix ». Est-ce que cet élève se mélange avec le système égyptien et sa base 10 ou avec les additions? Une seule élève a noté une ressemblance, mais avec le procédé babylonien plutôt que le nôtre : « Il y a un tableau comme les Babyloniens ». Nous présumons qu'elle n'a pas bien compris la question ou qu'elle ne pouvait se résoudre à laisser une case vide.

Pour les différences, les réponses auraient dû être plus nombreuses (puisqu'il y avait peu de ressemblances). Une seule élève a véritablement comparé les deux procédés, mais elle reste vague : « Eux, ils ont un tableau et pas nous ». Un élève n'a pas répondu à cette question et les trois autres ne parlent que de caractéristiques propres au procédé égyptien, mais sans le mettre en opposition avec le procédé conventionnel : « Ils n'ont pas à savoir leurs tables de multiplication et de divisions pour faire des divisions » et « ce n'est pas la même planche à calculer ». Enfin, une réponse est partiellement fausse; l'élève parle des multiples de 2, plutôt que de parler des puissances de 2, mais il a raison de parler des multiples du multiplicateur : « Le tableau des multiples de 2 et du multiplicateur. La barre oblique et le trait d'union », mais il ne met pas ces caractéristiques en opposition avec l'algorithme conventionnel.

## Analyse du travail sur les multiplications et les divisions sumériennes

Avant d'analyser la compréhension des élèves, nous nous devons de parler de nos interventions. En effet, nous ne savons pas pour quelles raisons, mais nous avons été plutôt directifs avec cette équipe. D'emblée, nous leur avons dit que la multiplication sumérienne était une addition répétée plutôt que de leur laisser le découvrir. Puis, pour les divisions, nous sommes très rapidement intervenue (immédiatement après la lecture du feuillet explicatif) parce qu'ils ne semblaient pas savoir comment faire. Nous aurions dû les laisser chercher et proposer des hypothèses avant de leur dicter la marche à suivre. Ce procédé n'était pourtant pas plus difficile que les autres.

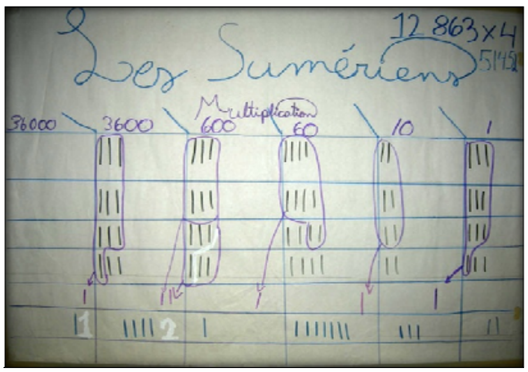
Comme nous leur avions dit que les Sumériens effectuaient leurs multiplications comme des additions répétées, après une minute, ils nous ont appelés pour vérifier leur hypothèse en nous demandant si c'était, par exemple, 182 + 182 + 182? Avant que nous ne répondions, un autre élève a proposé : « on met un nombre par rangée et après, on additionne tout ». Nous avons vérifié s'ils se rappelaient en leur demandant comment ils écriraient 182 et un élève a répondu : « 3 soixantaines, ça fait 180 et deux ». Une élève est allée chercher ses feuilles sur les additions qu'ils avaient faites la semaine d'avant. On entendait mal, mais ils discutaient de 6 et de 10 (les colonnes). Seulement quatre minutes après le début de l'activité, nous avons constaté qu'ils avaient compris et leur avons donné le feuillet explicatif. Ils ne l'ont pas vraiment lu, mais ont vérifié leur hypothèse dans le tableau avec les nombres de l'exemple donné. Cinq minutes plus tard, ils avaient terminé la multiplication (l'addition répétée) du feuillet et ils en étaient très fiers. Lorsque nous leur avons demandé si cela fonctionnait bien, ils ont répondu tous en chœur et avec enthousiasme : « oui! ».

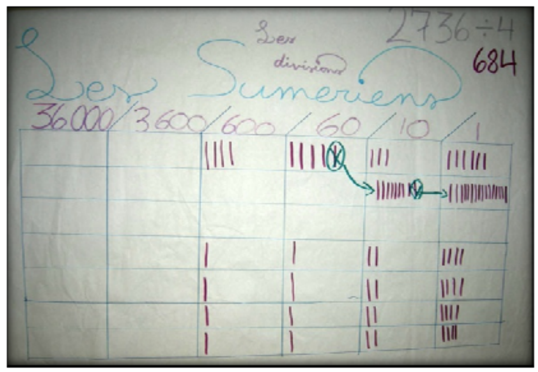
Ensuite, ils ont commencé à lire la partie sur la division, mais ils semblaient avoir de la difficulté à se l'imaginer. Comme nous les observions à ce moment, nous leur avons proposé de s'imaginer que c'était un gros panier de pommes qu'ils avaient à se partager pour six personnes. Comme ils préféraient des bonbons, nous avons précisé : « Au lieu de distribuer un bonbon, un, un, un, ce serait un peu long, vous êtes d'accord ? Alors, on donne des paquets de bonbons, on va commencer par les plus gros paquets, on va donner les « soixantaines : un, un, un, un, un, un. » Un élève s'est exclamé : « Aaaaaaaah! ». Un élève a poursuivi en disant qu'il restait une soixantaine, mais un autre élève a rapidement proposé : « ben, on fait un échange, on la met dans les dizaines ». L'échange était animé, mais on n'entendait pas bien. Pour les aider à comprendre, nous leur avons précisé : « Les 7 dizaines du début, plus les 6 dizaines qui viennent de la soixantaine, là en tout ça fait 13, donc chacun en a 2 et il en reste une, que tu envoies dans les unités. Avec les 8 qu'il y avait déjà, ça fait 18, que tu peux séparer en 6. La réponse, c'est n'importe quelle rangée, chacun va recevoir une soixantaine, deux dizaines et 3 unités de bonbons ». Nous n'aurions pas dû leur dicter la marche à suivre, surtout qu'ils avançaient rapidement.

## Analyse de la présentation des multiplications et des divisions sumériennes

Les élèves ont commencé par expliquer que pour multiplier 12 863 x 4, « on écrit le nombre 12 863 dans le tableau » en signalant combien il y avait de paquets de 3 600, de paquets de 600, de soixantaines et d'unités et ont précisé qu'on répétait ce nombre quatre fois puisque « la multiplication est fois 4 ». La base 60 ou la décomposition en base 60 ne semblait pas du tout poser problème aux élèves de l'équipe ainsi qu'au reste de la classe. Ils ont ensuite vraiment bien expliqué la division 2 736 ÷ 4. Ils ont décomposé le nombre 2 736 en base 60 et l'ont ensuite divisé sur quatre rangées. Ils ont bien expliqué les transferts, soit lorsqu'il restait un paquet de 600 et qu'il fallait l'envoyer dans la colonne des soixantaines en précisant que dans ce cas-ci, ça devenait 10 soixantaines, mais que lorsqu'on transférait une soixantaine, ça devenait seulement six dizaines. Vous pouvez consulter les affiches qu'ils avaient réalisées pour leur présentation (figure 41). Précisons qu'ils avaient écrit les barres sur chaque rangée, mais qu'ils ont fait les échanges devant les élèves, ce qui s'est avéré judicieux.

**Figure 41** Affiche des multiplications et divisions sumériennes




Pour les ressemblances et les différences, les élèves ont relevé la similitude avec la planche à calculer et la ressemblance avec les additions sumériennes et babyloniennes. Nous leur avons fait remarquer que les Sumériens n'avaient pas vraiment de technique de multiplication et qu'ils utilisaient justement une addition répétée. Pour faire émerger les limites de ce procédé, nous leur avons demandé comment ils feraient pour multiplier par un plus gros nombre. Un élève qui avait remarqué la commutativité de la multiplication a dit « on a juste à inverser les nombres et à multiplier par le plus petit ». Nous l'avons félicité pour cette réflexion, mais nous avons ajouté : « oui, mais si les deux nombres sont gros? » Un élève, qui se réfère à notre système décimal a proposé : « c'est facile, on a juste à ajouter des zéros ». Il n'avait pas compris que seul un système positionnel pouvait fonctionner de cette façon. Les élèves ont réalisé la limite de cette addition répétée et comprenaient à quel point ce procédé pouvait être long avec un multiplicateur plus grand. Comme différence, ils ont noté que les Sumériens procédaient par addition répétée.

## Analyse des résultats du test sur les multiplications et les divisions sumériennes

Pour les ressemblances entre les multiplications et les divisions sumériennes et notre façon d'effectuer ces opérations aujourd'hui, il n'y en avait pas vraiment puisque les procédés sont très différents. Par contre, le procédé ressemble plus au procédé sur la planche à calculer que les élèves ont fréquemment cité jusqu'ici. Un seul élève le cite d'ailleurs : « Il y a des échanges et ça ressemble à la planche à calculer ». Trois autres réponses parlent d'additions répétées comme ressemblance, ce qui n'en est pas une (à moins qu'ils fassent référence à la planche à calculer sans la mentionner) : « Pour les multiplications, c'est des additions répétées comme nous »; « Eux font une addition répétée pour les multiplications » et « Nous répétons le chiffre autant de fois pour après additionner ».

Pour les différences entre les procédés sumériens et nos façons de faire les multiplications et les divisions actuellement, les réponses sont très incomplètes. En effet, nous jugeons une seule réponse satisfaisante, qui oppose les deux procédés : « Eux, ils peuvent juste faire leurs divisions et multiplications sur leur tableau, pas nous ». Un élève n'a rien écrit et les deux autres réponses parlent seulement d'un des deux procédés. Le premier décrit une caractéristique du procédé sumérien : « Eux, ils mettent les nombres de fois qu'il faut multiplier », le deuxième décrit seulement une caractéristique de l'algorithme conventionnel, mais de façon maladroite : « Nous (humains) le faisons immédiatement (le calcul) ».

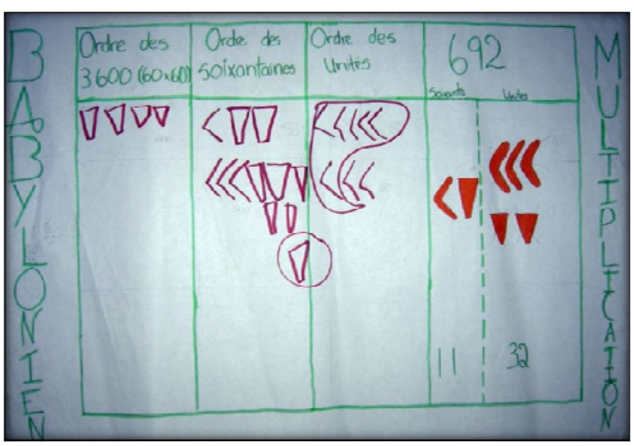
## Analyse du travail sur les multiplications babyloniennes

L'analyse de cette équipe est basée sur les notes de notre journal de bord ainsi que sur l'enregistrement visuel, l'enregistrement sonore faisant défaut (seule notre voix qui porte plus est audible). Pendant cinq minutes, on voit les élèves discuter, se passer la feuille. Ils semblaient perplexes, mais ils restaient concentrés sur la tâche. Après sept minutes, nous sommes venue leur expliquer que les tables de multiplication étaient gravées et transmises de génération en génération. Nous leur avons précisé pourquoi les scribes babyloniens utilisaient de telles tables en faisant le parallèle avec nos tables qui vont jusqu'à 9 et les leurs, qui devaient aller jusqu'à 59. Nous leur avons demandé d'imaginer retenir des résultats de 59 x 42 par exemple. Après 12 minutes, nous sommes venue nous asseoir avec eux et les avons accompagnés dans la lecture du feuillet explicatif pour revoir les étapes avec eux. Nous semblions apporter des précisions et des explications qu'on n'entend mal : « 11 soixantaines… » Nous faisions des liens avec notre façon de faire des multiplications : « Comme nous, quand on fait une multiplication à deux chiffres, on vient mettre les résultats partiels… » Nous sommes restés six bonnes minutes avec eux. Plus tard, nous sommes revenue les voir, mais tout semblait aller puisque nous avons continué à circuler. À 28 minutes, nous sommes revenue les voir et les avons observés, mais nous ne sommes pas intervenue. À 34 minutes, nous leur avons demandé s'ils avaient vérifié leur réponse puisqu'ils semblaient avoir terminé. Trois minutes plus tard, ils sont venus nous chercher parce qu'ils avaient terminé et que ça fonctionnait, ils avaient vérifié leur réponse. Ils semblaient épuisés, mais fiers d'eux.

## Analyse de la présentation des multiplications babyloniennes

Comme dernière présentation, l'équipe a été un peu bousculée. Les élèves ont bien expliqué comment on procédait pour faire 692 x 25. À ma suggestion, les élèves avaient préparé leur tableau en base 60, avaient écrit le multiplicande et le multiplicateur en base 60 au crayon-feutre. Cependant, ils avaient écrit tous les résultats partiels au crayon à mine pour ne pas se tromper lors de la démonstration. Cela s'est avéré une bonne idée puisqu'ils ont présenté sans trop d'hésitations. L'affiche de cette équipe au terme de leur présentation est reprise à la figure 42.

**Figure 42** Affiche de la multiplication babylonienne



## Analyse des résultats du test sur les multiplications et les divisions babyloniennes

En ce qui concerne les ressemblances entre la façon d'effectuer les multiplications chez les Babyloniens et notre façon actuelle, deux élèves ont encore fait référence à la planche à calculer : « C'est comme la planche à calculer » et « Ils ont une planche à calculer ». Bien que le tableau babylonien ressemble à la planche à calculer, il n'est pas utilisé de la même façon. En effet, les multiplications sur la planche à calculer vues au deuxième cycle par les élèves sont plutôt vues comme des additions répétées (comme les Sumériens), tandis que les Babyloniens multipliaient véritablement. Trois élèves mentionnent les échanges présents dans les deux procédés, mais ne les expliquent pas réellement : « Nous aussi, on fait des échanges » et « Ils font des échanges » (deux fois). Un élève mentionne qu' « il y a des tables de multiplication», mais sans préciser vraiment en quoi c'est une caractéristique commune aux deux procédés et un élève a répondu qu'Ils prenaient un nombre à la fois », mais n'a pas expliqué sa réponse. Peut-être s'agissait-il du fait que dans les deux procédés, nous multiplions l'unité du multiplicande par le multiplicateur, ensuite les dizaines du multiplicande par le multiplicateur, puis les soixantaines (ou centaines) du multiplicande par le multiplicateur, etc. Il aurait fallu rajouter à cela une autre ressemblance entre les deux procédés : on additionne ensuite les résultats partiels dans les deux cas et dans les deux cas, il y a des échanges (des retenues).

Pour ce qui est des différences entre les deux procédés, aucun élève n'a une réponse satisfaisante. En effet, les élèves ne sont pas très clairs et précis. Un élève répond : « ils décomposent leur multiplicande », mais parle-t-il du fait que l'on multiplie d'abord les unités, puis les dizaines, puis les soixantaines? Dans ce cas, ce serait une caractéristique commune aux deux procédés ou encore : « Tu mets tes chiffres babyloniens et, exemple, tu mets 39 unités et bien tu les multiplies les 39 au lieu de mettre 9 fois le chiffre et 3 fois le multiplicateur ». Parfois, on ne comprend tout simplement pas leur réponse : « On ne prend pas d'abaque » (les Babyloniens non plus, à moins qu'il appelle « abaque » le tableau ?) ou encore : « Ils ont à multiplier par 60 » (il parle alors ici d'une caractéristique du système, pas du procédé de multiplication).

## Conclusion de section

Bien qu'elles aient été un peu plus laborieuses, les activités sur les multiplications et les divisions se sont également déroulées sensiblement tel que nous l'avions anticipé dans la *conduite attendue des élèves* (au chapitre 3). Pour ces opérations aussi, nous avons quelque peu raté notre objectif qui était de faire des liens entre les différentes méthodes et les algorithmes conventionnels de multiplication et de division, puisque peu d'élèves ont ressorti des ressemblances entre les différents procédés présentés et les algorithmes conventionnels. Comme pour les deux autres blocs, les élèves ont eu du mal à comparer les procédés : la plupart d'entre eux décrivaient une caractéristique de leur système ou de notre procédé actuel, mais sans les mettre en parallèle (ressemblances) ou en opposition (différences). Très peu d'élèves, parmi les équipes des Chinois, des Romains ou des Babyloniens, n'ont relevé le fait que comme dans l'algorithme conventionnel, on multiplie les unités du multiplicateur par les unités du multiplicande, puis les unités du multiplicateur par les dizaines du multiplicande et ainsi de suite et qu'on additionne tous les résultats partiels. Qu'ont répondu les élèves aux autres questions du questionnaire de fin de séquence?

## Analyse des autres réponses des élèves au test : Retour sur les opérations dans votre système de numération

Lors de l'analyse du premier bloc d'activités d'apprentissage (les différents systèmes de numération), nous avons analysé toutes les réponses aux questions du test : *Retour sur votre système de numération* (annexe 11a). Lorsque cela était pertinent, pendant l'analyse des deuxièmes et troisièmes blocs d'activités d'apprentissage, nous avons analysé les réponses des élèves à certaines questions du test : *Retour sur les opérations dans votre système de numération* (annexe 11d), notamment les questions sur les ressemblances et les différences entre les façons d'effectuer les opérations à la manière de nos prédécesseurs et les façons de faire actuelles. D'autres questions complétaient ce test. Nous analysons les réponses des élèves aux trois autres questions qui portaient sur la supériorité de notre système actuel, la contribution de leur peuple et deux avancées majeures survenues dans l'évolution des mathématiques.

À la question : « Si une machine à voyager dans le temps permettait à un *comptable romain* (1) ou à un *scribe babylonien* (2) ou à un *savant sumérien* (3) ou à un *scribe égyptien* (4) et (5) ou à un *savant chinois* (6) de venir à notre époque et de découvrir notre système de numération, que dirait-il à son retour à ses semblables pour les convaincre d'adopter notre système? », le lecteur retrouvera les réponses complètes des élèves dans le journal de bord à l'annexe 13. Premièrement, très peu d'élèves se mettent réellement dans la peau d'un savant ancien s'adressant à ses semblables, comme cela leur était demandé. En effet, seulement dix élèves –le tiers- (en italique dans le tableau en annexe) sur 29 se mettaient dans la peau d'un ancien qui s'adressait à ses semblables. Par contre, toutes ces réponses ne sont pas convaincantes; par exemple, un élève a seulement répondu : « Écoutez-moi, j'ai trouvé une meilleure façon de calculer. Je vais vous montrer » ou encore : « Allez! Vous allez apprendre de nouvelles choses. En plus, vous allez faire des dessins! ». D'autres élèves vantent le système indo-arabe, mais restent en surface : « C'est plus facile. C'est moins long. Ils n'ont pas besoin de décomposer leur multiplicande » ou « Je trouve qu'il est plus simple : nous n'avons pas besoin de matériel pour calculer, c'est plus facile pour faire des échanges ». Aussi, neuf élèves ont répondu en tant qu'utilisateurs du système indo-arabe (en gras dans le tableau de l'annexe) vantant ses avantages aux anciens. Certains arguments sont efficaces, mais les élèves n'ont pas exactement répondu dans la bonne perspective. Voyons quelques exemples : « Parce que notre système n'est pas compliqué, facile à faire, facile à retenir, original, et c'est intéressant » et « Notre système est moins compliqué parce qu'on n'a pas besoin de planche ». Enfin, les dix autres élèves ont répondu des réponses plus générales, vantant les avantages du système indo-arabe, mais sans que l'on sache s'ils adoptaient le point de vue des anciens ou des contemporains. Par exemple, on retrouve : « Parce que c'est beaucoup plus facile et nous, on n'a pas besoin de se compliquer la vie » ou « C'est plus simple, plus rapide, plus efficace, on fait beaucoup moins de fautes ».

Si l'on compare les réponses courtes des élèves à nos réponses plus élaborées (toujours dans le tableau à l'annexe 13), nous pouvons constater qu'ils n'ont pas été en profondeur, mais la plupart des élèves ont relevé certaines caractéristiques ou certains avantages de notre système actuel. En effet, peu importe le point de vue adopté, certains qualificatifs reviennent dans plusieurs réponses. Ainsi, 13 élèves sur 29 ont relevé la rapidité de notre système, 10 élèves ont mentionné sa facilité d'exécution, 10 élèves ont parlé de sa simplicité. Enfin, 10 élèves ont précisé qu'avec le système indo-arabe, nous n'avions pas besoin d'outils de calcul (parfois encombrants). Trois élèves ont remarqué l'efficacité des procédés, trois ont fait valoir la base commune (avec le système ancien comparé), trois ont parlé qu'il y avait moins de choses à mémoriser et finalement, un élève a dit qu'il était original, intéressant, et le meilleur des systèmes.

Maintenant, à la question : En quoi le peuple que vous avez présenté à la classe a contribué à l'évolution des mathématiques? Les réponses complètes des élèves se trouvent à l'annexe 13 par système. Pour cette question difficile, très peu d'élèves y ont réellement répondu. Plusieurs élèves n'ont rien répondu (9 sur 29) ou ont répondu que leur peuple n'avait pas contribué (3 élèves sur 29). Quelques-uns semblent avoir mal compris la question puisqu'ils ont plutôt parlé de la contribution des activités à leur développement personnel (3 sur 29). Il est vrai que certains peuples ont eu des contributions moins importantes que d'autres.

Deux des élèves qui avaient travaillé sur le système sumérien ont judicieusement répondu que les Sumériens avaient inventé les premiers chiffres : « C'est eux qui ont inventé les chiffres » ou étaient les premiers à les avoir écrits : « En écrivant les premiers chiffres et en gravant dans l'argile ». Un élève a supposé qu' « Ils ont peut-être aidé à inventer les additions » et un autre, qu' : « ils ont aidé les Babyloniens ». Un élève n'a rien répondu.

Dans l'équipe ayant travaillé sur le système babylonien, aucun élève n'a relevé le fait que c'était le premier système positionnel de l'humanité et le premier à avoir inventé le zéro pour marquer le vide. Quatre élèves ont parlé de nos mesures de temps actuelles qui sont encore en base 60 : « Vu qu'ils comptaient par 60, maintenant on compte l'heure par 60 (secondes, minutes) »; « La base 60 est restée dans les minutes, heures et secondes. Le genre de planche à calculer »; « Leur système en base 60 a servi pour les heures (1 min. = 60 sec., 1 heure = 60 minutes) », mais le dernier élève s'est trompé en parlant des jours de la semaine : « L'heure, les jours de semaine. ». Un élève n'a pas trouvé de contribution.

Les deux équipes qui ont travaillé sur le système égyptien n'ont pas écrit grand-chose et avec raison. Ce système additif est plutôt primitif et long à annoter. Deux élèves n'ont rien écrit et trois élèves ont répondu qu'ils n'avaient rien fait pour contribuer à l'évolution des mathématiques. Un élève a mentionné sa base 10 : « Je ne suis pas sûre, mais je crois que c'est le système à base 10 », mais on ne peut le considérer comme une contribution. Enfin, on ne voit pas de contribution dans deux autres réponses : « Je crois que le million était un gros chiffre, alors ils ont inventé le « 𓁨 » (le million) » et « Les barres a donné des chiffres indo-arabes ». Finalement, deux élèves ont plutôt répondu sur la contribution des activités de la séquence didactique à leur cheminement.

L'équipe des Chinois n'a pas relevé le fait que le système hybride chinois est plus rapide qu'un système additif. Par exemple, au lieu d'écrire 9 fois le même symbole, on écrit le symbole du 9 devant une puissance de 10. En fait, aucun élève n'a trouvé que le peuple chinois avait apporté une contribution. Cela nous étonne (les réponses vont du « X » à « ?????????????? » à « je n'en sais rien »).

Enfin, pour l'équipe des Romains, il est vrai qu'il s'agit d'un système très limité qui nous est resté pour noter les siècles, les chapitres et parfois les heures sur une horloge. La base intermédiaire (5, V) permet de raccourcir les notations (le recours à la soustraction aussi, mais cela complique le système). Un seul élève parle du fait qu'on le connaît encore aujourd'hui : « Les chiffres romains, on entend encore parler de ça et puis on utilise des fois encore ce système-là ». Un autre a judicieusement remarqué que la base intermédiaire permet de noter et lire les nombres plus facilement qu'un système additif sans base intermédiaire (comme le système égyptien) : « Avec ses bases 10 et 5 et au lieu d'écrire IIIII, ils écrivent V ». Deux élèves mentionnent la planche à calculer, sûrement pour parler de l'abaque romain qui a la même fonction : « Avec les planches à calculer » et « Ils ont fait des planches à calculer ». Enfin, un élève ne répond pas à la question puisqu'il parle, lui aussi, de la contribution des activités à son développement.

À la dernière question du questionnaire : Nomme deux avancées survenues dans l'évolution des mathématiques, les réponses sont variées et pas toutes pertinentes. Dans le journal de bord (annexe 13), vous trouvez les réponses complètes des élèves. Nous les avons ici regroupées selon quatre catégories de réponses : celles parlant des outils de calcul, celles abordant un système de numération en particulier, celles évoquant le symbolisme ou les chiffres et toutes celles concernant les opérations. Notons que les élèves devaient nommer deux avancées, mais quatre élèves n'ont pas répondu et certains n'en ont nommées qu'une. Nous avions ainsi 48 réponses à traiter.

Les élèves ayant parlé d'outils de calcul ont surtout mentionné l'invention de la calculatrice (6 élèves), certains ont parlé des abaques « quand ils ont inventé les abaques »; d'autres comme d'une étape vers la planche à calculer : « Les abaques à la planche à calculer ». Un élève parle du « changement de la planche à calculer », mais on ne sait pas à quoi il fait référence. Un élève nomme « les grilles »; réfère-t-il à l'abaque mésopotamien, romain ou à la fameuse planche à calculer si souvent nommée? Enfin, trois élèves mentionnent les entailles des bergers, ce procédé étant à mi-chemin entre un outil de calcul, un système ou un certain symbolisme. Un élève mentionne les boules d'argile sumériennes et un se trompe en parlant des « boules de verre (vitre) ». Nous croyons qu'il parle des boules d'argile que l'on cassait pour voir le contenu à l'intérieur.

Ensuite, certains élèves ont parlé de l'invention d'un système de numération en particulier comme d'une avancée survenue dans l'évolution des mathématiques. Ainsi, deux élèves mentionnent le système romain, même si dans la réalité, ce système limité n'a pas représenté d'avancée « Romain parce que c'est grâce à eux qu'on a les bonds de 10 » et « le système romain qui a contribué à la création de notre système ». Nous croyons que les élèves pensent que vu leur base décimale commune, le système romain serait l'ancêtre du système indo-arabe. Un élève répond simplement « Sumérien ». Nous présumons qu'il fait référence au fait qu'il s'agit du premier système de numération écrit de l'humanité, mais il ne le précise pas. En outre, nous classons les réponses qui traitent du terme « nombre » ici parce que nous jugeons qu'un nombre est formé de chiffres ou de symboles dans un système particulier. Nous traiterons les réponses faisant référence aux « chiffres » dans la prochaine catégorie du symbolisme et des chiffres. Toutefois, nous ne sommes pas sûrs que les élèves voient cette nuance, surtout que nous verrons que plusieurs élèves ont mentionné les chiffres indo-arabes comme d'une avancée, alors que c'est plutôt le système positionnel ayant un symbole pour chaque unité qui le rend si efficace et qui représente une immense avancée dans l'évolution des mathématiques. Enfin, un seul élève a parlé de « la création du système indo-arabe », tandis que d'autres ont eu des réponses plus vagues « l'arrivée des nombres »; « les nombres » ou « la naissance des nombres ».

Pour ce qui est des chiffres et du symbolisme, l'avancée la plus souvent citée est la création du zéro (nommée huit fois). Aussi, comme nous l'avions vu plus haut, plusieurs élèves (cinq) mentionnent la création des chiffres indo-arabes comme d'une avancée, alors que c'est plutôt le système qui en est une. Enfin, trois élèves ont simplement mentionné « les chiffres ». On ne sait toutefois pas s'ils font référence aux premiers chiffres écrits ou à nos chiffres actuels.

Puis, des élèves mentionnent les opérations comme étant une avancée, mais ils restent tous très vagues : « Les additions et les soustractions »; « les façons de multiplier, diviser, additionner et soustraire » et « les calculs ». Ou encore, un élève fait référence à la division, peut-être veut-il insinuer que notre méthode actuelle est plus simple que celle qu'il a expérimentée, mais sa réponse n'est pas claire : « Les divisions parce que nous on n'a pas pu les présenter parce que c'est trop difficile ». Finalement, un élève a mentionné « le commerce », qui est effectivement lié au développement des premiers systèmes de numération dans le croissant fertile de la Mésopotamie où sont nés l'agriculture et l'élevage et les premiers surplus de nourriture à gérer. Un élève a mentionné « le papier », voulait-il parler des algorithmes conventionnels sur papier, plutôt qu'avec un abaque?

# Conclusion

L'objectif spécifique de cette thèse étant de concevoir, élaborer, mettre à l'essai et analyser une séquence d'enseignement/apprentissage de l'arithmétique basée sur son développement historique dans une classe de 5$^{e}$ année du primaire, nous avons analysé en profondeur l'ensemble des activités de notre séquence d'enseignement/apprentissage par blocs d'activités. Nous sommes revenue sur les systèmes de numération, les additions et les soustractions, puis les multiplications et les divisions. Enfin, nous avons analysé les réponses des élèves aux différents tests. Maintenant, quelles conclusions pouvons-nous tirer de cette séquence? Quelles sont les grandes lignes qui se dégagent de cette expérimentation? En général, la conduite attendue des élèves a été bien anticipée. La principale différence a été la durée de la séquence. En effet, nous avions prévu vivre notre séquence sur six semaines, mais elle s'est prolongée sur neuf semaines. Au prochain chapitre, nous verrons comment cette séquence a suscité l'intérêt chez les élèves; nous reviendrons sur la difficulté des élèves à comparer des systèmes ou des façons d'effectuer des opérations et verrons un apport imprévu de cette séquence : la communication à l'aide du langage mathématique.

# 6. Discussion/conclusion

# Introduction

Rappelons au lecteur que l'objectif spécifique de cette thèse était de concevoir, élaborer, mettre à l'essai et analyser une séquence d'enseignement/apprentissage de l'arithmétique basée sur son développement historique dans une classe de cinquième année du primaire suivant le Programme primaire international (PP). Le chapitre précédent a permis de dégager les connaissances que les élèves ont développées du système de numération sur lequel ils ont travaillé, les liens qu'ils ont pus faire avec les autres systèmes présentés ainsi que leur compréhension des opérations arithmétiques à la manière de nos prédécesseurs. Ce chapitre se centre sur la pertinence de la séquence d'enseignement/apprentissage en lien avec notre contexte d'enseignement (des élèves de cinquième année en facilité d'apprentissage suivant le Programme primaire international et le programme de formation de l'école québécoise), ainsi que sur la pertinence d'enseigner les mathématiques par son histoire (l'intérêt et la motivation, la perception des mathématiques, les apprentissages et la compréhension et le choix des activités). Aussi, nous revenons sur le constructivisme, cette approche pédagogique préconisée par nos deux programmes d'étude. Nous discutons également des aspects méthodologiques retenus. Finalement, comme toute recherche, nous établissons les limites de cette étude et ouvrons sur les suites à y donner.

## 6.1. Pertinence de la séquence pour notre contexte d'enseignement

Cette étude découlant directement de notre contexte d'enseignement auprès d'une clientèle en facilité d'apprentissage suivant le Programme primaire international (2007) et le programme de formation de l'école québécoise (2001), nous examinons ici la pertinence de notre séquence d'enseignement/apprentissage à la lumière de nos deux programmes d'étude.

### Programme primaire international et sa clientèle

Comme nous l'avion vu dans la problématique, de manière générale, les élèves doués disposent d'une bonne capacité à résoudre des problèmes et apprécient le faire, ont l'habitude de mener leurs travaux à terme et ont une bonne capacité de concentration. Ils ont également besoin d'être stimulés pour éviter une sous-performance. Tout au long de l'élaboration de notre séquence d'enseignement/apprentissage, nous avions ainsi la préoccupation de stimuler nos élèves en leur proposant des activités et des problèmes à la hauteur de leurs capacités.

De plus, dans le cadre du Programme primaire international, les enseignants doivent développer des modules de recherche. L'histoire des mathématiques nous est apparue une avenue intéressante pour stimuler nos élèves. En effet, un des thèmes transdisciplinaires pour l'élaboration d'un module de recherche s'intitule : O*ù nous nous situons dans l'espace et le temps* et se décrit ainsi :

> « Une recherche sur notre position dans **l'espace et le temps**, sur notre vécu personnel; sur nos domiciles et nos voyages; sur **les découvertes**, les explorations et les migrations **des êtres humains**; sur **les relations entre les individus et les civilisations, et sur leur corrélation**. Cette recherche doit être menée en adoptant un **point de vue local et mondial** » (Organisation du Baccalauréat International, 2007, p. 14).

Nous avons donc élaboré notre séquence à partir de cette idée maîtresse : *Plusieurs peuples ont contribué à l'évolution de la pensée mathématique à travers le temps*. En suivant le canevas de planification du PP, nous avons précisé les pistes de recherche (termes de l'OBI) suivantes : 1) la représentation des nombres et le fonctionnement des systèmes de numération dans différentes civilisations; 2) les quatre opérations dans ces systèmes; 3) les facteurs et les besoins ayant conduit à la création et à l'évolution de la numération et 4) l'évolution des systèmes jusqu'à notre système actuel. D'ailleurs, Daniel (2000) préconise l'histoire des mathématiques pour les élèves doués puisqu'elle leur permet de relever des défis à leur mesure et de résoudre des problèmes en explorant différentes méthodes et solutions. Or, la résolution de problèmes est au cœur de l'apprentissage des mathématiques, puisqu'il s'agit de la première compétence mathématique à développer chez nos élèves dans le programme de formation de l'école québécoise.

## Programme de formation de l'école québécoise

La compétence -*Résoudre une situation-problème mathématique*- est la première compétence et permet de développer également les deux autres compétences (MÉLS Ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport, 2001). D'ailleurs, Poirier accorde une grande importance à la résolution de problèmes : « La mathématique est un dialogue entre individus aux prises avec des problèmes mathématiques. S'il n'y a pas de problème à résoudre, de défi à relever, il n'y aura aucune motivation à construire de nouvelles connaissances » (2001, p. 5). Nous avions le souci de placer nos élèves face à des façons de faire différentes qui leur offraient des défis stimulants. L'histoire des mathématiques permet aussi de *raisonner à l'aide de concepts et de processus mathématiques*, la deuxième compétence de notre programme disciplinaire. Les concepts de *base de numération* et de *numération positionnelle* ont largement été explorés par les élèves et de nombreux processus mathématiques ont été abordés : les façons de représenter les nombres, de les grouper, de faire des additions, des soustractions, des multiplications et des divisions, notamment.

**Un apport non prévu : la compétence *Communiquer à l'aide du langage mathématique***

Notre séquence a également permis de développer la compétence *communiquer à l'aide du langage mathématique* pendant le travail d'équipe, mais surtout, lors des différentes présentations des élèves. Ces derniers avaient un réel souci que leur auditoire les comprenne et se sont efforcés de faire de belles affiches. Ils partaient souvent de ce que les élèves de la classe connaissaient (une présentation antérieure, la base décimale, la planche à calculer, le matériel multi bases) pour amener leurs interlocuteurs à comprendre.

Pour les présentations des systèmes, toutes les équipes ont eu le souci de partir de ce que leur auditoire connaissait. Par exemple, l'équipe présentant le système sumérien a fait remarquer une certaine régularité entre les différents symboles « fois 10, fois 6, fois 10, fois 6 », tout comme dans le système romain déjà présenté (où la régularité entre les symboles était fois 5, fois deux). Aussi, pour « excuser » le fait qu'ils s'étaient trompés dans l'ordre des symboles (ils avaient mis les plus gros ordres à gauche) pour leur défi, un élève de cette équipe a même fait le lien avec le matériel multi bases : « comme les bases unités (sic)… que tu mettes ta plaque en haut, en bas ou à côté de la barre, ça va toujours être le même nombre ». Aussi, lors des discussions, les élèves de la classe faisaient souvent référence à des concepts vus dans d'autres présentations (base, base intermédiaire, etc.). Enfin, l'équipe présentant le système babylonien est vraiment partie des représentations des élèves en comparant judicieusement ce système au système maya, puis à notre système actuel.

Pour les présentations des additions et des soustractions également, toutes les équipes ont eu le souci de partir de ce que leur auditoire connaissait. L'équipe travaillant sur les additions et les soustractions égyptiennes a d'abord fait un rappel des hiéroglyphes égyptiens et leurs valeurs respectives avec l'affiche de leur première présentation. « C'est comme nous, quand il y a 10, on entoure et on transforme. » L'équipe travaillant sur le système chinois, au moment de présenter leur soustraction qui comportait deux emprunts (212 – 123), l'a associée au processus conventionnel de la soustraction. Après leur présentation, les élèves de la classe ont ressorti les ressemblances entre cette technique de calcul et d'autres que les élèves connaissaient. Ils ont fait référence à la planche à calculer, au fait que le boulier était positionnel. Les élèves formant l'équipe travaillant sur le système romain aussi ont trouvé que leur abaque s'apparentait à la planche à calculer, surtout que l'on peut enlever des billes (comme les jetons). Puis, lors de la présentation, ils ont fait référence aux emprunts et retenues de l'algorithme conventionnel, mais seulement après que nous leur ayons demandé de comparer cette méthode à notre façon actuelle de faire les additions et les soustractions. Les membres de l'équipe travaillant sur les opérations babyloniennes ont expliqué le fonctionnement de leur abaque en le comparant à la planche à calculer. Enfin, l'équipe des Mayas, qui travaillait maintenant sur les opérations égyptiennes, a commencé la présentation en comparant la façon de faire des Égyptiens avec la nôtre : « Les additions, c'est comme un peu le système indo-arabe pis la planche à calculer… Tu mets tous les chiffres, pis tu les additionnes ».

Lors des présentations des multiplications et des divisions, les élèves ont encore une fois pris soin de partir des connaissances des élèves. L'équipe travaillant sur les opérations sumériennes a fait remarquer que les Sumériens utilisaient le même abaque que pour les additions et les soustractions. Les élèves qui travaillaient sur les opérations chinoises ont aussi fait remarquer que les Chinois travaillaient sur le boulier pour les multiplications aussi. Ils ont d'ailleurs très bien expliqué la disposition des deux nombres à multiplier sur le boulier et devant certains yeux interrogateurs des élèves de la classe, ont rappelé la valeur des colonnes et le fait que les boules du haut valaient 5.

Notre séquence a aussi permis de travailler d'autres aspects du programme de formation. Ainsi, la numération et l'arithmétique, des *savoirs essentiels* occupant une place centrale dans le programme et dans les classes du primaire, ne sont pas toujours acquises au troisième cycle du primaire. Enfin, les *repères culturels,* une nouveauté de ce programme, ont été couverts en profondeur. On y propose, notamment, d'aborder les origines et la création des nombres, l'évolution dans l'écriture des nombres et l'étude de différents systèmes de numération. Au niveau des opérations, on préconise d'aborder l'évolution des outils de calcul (bâtonnets, traits, boulier, abaque, calculatrice, logiciels) avec leurs limites, leurs avantages et leurs inconvénients. La séquence d'enseignement développée dans le cadre de cette étude surpasse largement les attentes du programme de formation à cet égard.

Enfin, rappelons que nos deux programmes d'étude préconisent une approche constructiviste et que nous nous sommes basée sur ses balises pour bâtir notre séquence et intervenir avec nos élèves. Nous y reviendrons plus loin (partie 6.3).

## 6.2. Pertinence de l'histoire des mathématiques pour les élèves

Lors de notre recension des écrits (1.3), nous avions relevé trois grands avantages pour les élèves à intégrer l'histoire des mathématiques à notre enseignement. Nous évoquions un intérêt et une motivation accrus des élèves, une amélioration de l'apprentissage et de la compréhension et une meilleure perception des mathématiques, cette matière parfois mal aimée. Comment ces postulats de départ se sont-ils manifestés lors de notre séquence?

### L'intérêt et la motivation

Avant d'aborder l'intérêt et la motivation suscités par nos activités, voyons certains indicateurs pour en juger. En effet, Viau (2007) a identifié quatre indicateurs de la motivation en contexte scolaire. Il s'agit du choix, de la persévérance, de l'engagement cognitif et de la performance. Nous analysons donc l'intérêt et la motivation de nos élèves à travers ces quatre indicateurs et d'autres indices.

#### Le choix

Viau (2007) précise qu'on peut observer la motivation d'un élève s'il choisit de faire l'activité plutôt que de trouver mille et une raisons pour éviter de la faire. On peut considérer que la découverte des différents systèmes de numération par les élèves et leur présentation à la classe (activités 1 et 2) a suscité l'intérêt et la motivation escomptés. En effet, dès le début des activités, tous les élèves ont choisi de les faire, et ce, avec enthousiasme (nous avons observé des sourires, de l'entrain, une rapidité à s'installer). Aucun élève n'a trouvé un subterfuge pour éviter de faire la tâche (aller à la toilette ou autre). À la suite de cette première activité, les élèves ont fait le choix de commencer rapidement leur affiche. Au moment des présentations, aucun élève n'a évité de la faire et dans toutes les équipes, tous les membres de l'équipe ont parlé. Certains élèves ont parlé plus longuement que d'autres, mais ils ont tous participé. Les élèves ont manifesté le même intérêt et la même motivation pour les autres activités d'apprentissage (activités 6 à 9) à quelques exceptions près, comme un élève de l'équipe des Chinois qui ne participait pas du tout et s'amusait avec une boîte de papiers mouchoirs. Notons que ce comportement n'était pas nouveau pour lui. Lorsque cela a été son tour de manier le boulier, il s'est impliqué et a essayé quelque chose.

**La persévérance et l'engagement cognitif**

Viau (2007) traite séparément la persévérance et l'engagement cognitif. Ainsi, l'auteur mesure « la persévérance (ou la ténacité) en calculant le temps que l'élève consacre à des activités » (2007, p. 76). Ainsi, plus un élève persévère sur une tâche, plus on peut le considérer motivé. Pour ce qui est de l'engagement cognitif, Viau (2007) parle des stratégies d'apprentissage de l'élève (sa planification du temps et de ses objectifs, l'efficacité de ses méthodes, son attention et sa concentration). Ainsi, plus un élève est engagé et utilise des stratégies d'apprentissage, plus il est motivé. Nous trouvons que l'attention et la concentration rejoignent quelque peu la persévérance puisque nous avons observé combien de temps les élèves restaient impliqués et concentrés. Aussi, nous avons déjà longuement parlé de la compréhension des élèves (au chapitre 5), qui dénote l'efficacité de leurs stratégies. Nous avons donc décidé de jumeler ces deux critères de motivation puisque nous jugeons que les deux font, entre autres, référence à la durée de l'implication et à l'efficacité des méthodes.

Tout au long des activités d'apprentissage, malgré la difficulté de certains procédés, les élèves sont restés engagés dans la tâche demandée, ils ont persévéré. Pour toutes les activités d'apprentissage, le visionnement des enregistrements a permis de minuter la durée pendant laquelle les élèves étaient engagés dans la tâche (ils étaient penchés sur la feuille, discutaient calmement, se passaient le crayon ou s'obstinaient même à savoir qui écrirait). La durée variait d'une équipe à l'autre; certains systèmes étant plus faciles que d'autres, la tâche était alors terminée plus rapidement.

On peut dire que la très grande majorité des élèves (28 élèves sur 29) sont restés engagés jusqu'à la fin de la feuille de travail (activité 1). Notons que les élèves travaillant sur le système romain étaient très intéressés par la tâche, ils étaient tous penchés sur la feuille et participaient. Après dix minutes, ils étaient toujours concentrés et impliqués. Vers la fin de la correction (qui a quand même duré huit minutes), ils étaient moins attentifs. Pour leur affiche, ils se sont mis au travail rapidement et avec entrain. Les élèves étudiant le système sumérien semblaient enthousiastes et intéressés par l'activité. Ils étaient tous penchés sur la feuille et tous impliqués. Les élèves de l'équipe des Mayas étaient également engagés dans la tâche et sont restés impliqués. Aussi, malgré la difficulté de la tâche pour l'équipe travaillant sur le difficile système babylonien, les élèves sont restés impliqués et intéressés tout au long et se sont approchés de la feuille de travail dès le début de l'activité. Pour toutes les équipes, les stratégies employées ont semblé porter fruit puisqu'elles ont réussi la feuille de travail, plus ou moins facilement selon le degré de difficulté des différents systèmes.

Toutes les équipes ont mené leur affiche et leur première présentation à terme. Par contre, à cinq pour confectionner une affiche, il était difficile que tous les élèves soient actifs, attentifs et concentrés simultanément. Cela a été le cas pour les trois activités où il était demandé de confectionner une affiche. Pendant les présentations, les élèves ont généralement persévéré à écouter les présentations, malgré le beau temps, les cris dans la cour d'école ou le fait qu'il s'agissait parfois d'une troisième présentation de suite. Tous les élèves ont tenté de résoudre les défis qui leur étaient proposés. Pour ce qui est de la présentation du système maya, ce fut un peu différent. Cette présentation était moins claire et plutôt longue. Nous avons senti des signes d'ennui dans la classe (bâillement, inattention, regards vers la cour) surtout lorsque plusieurs élèves ne comprenaient pas. À la fin, lorsque tout le monde avait compris, il a fallu conclure rapidement parce que l'attention et l'intérêt des élèves n'y étaient plus. Nous sommes retournés voir le journal de bord pour constater que cette présentation était la troisième de suite. En effet, voici ce que nous avions écrit ce jour-là : « *Aujourd'hui, nous avons dû enfiler trois présentations de suite puisque j'ai dû m'absenter ce matin. Bien que ce ne soit pas une situation idéale (surtout un vendredi après-midi), les élèves ont bien suivi et ont démontré de l'intérêt. Après deux présentations, nous sommes allés aux toilettes et j'ai permis aux élèves de discuter cinq minutes avant de reprendre (nous n'avons pas de récréations l'après-midi)* ». Cette situation particulière peut expliquer, en partie, le moins grand intérêt des élèves pour cette présentation.

Pour ce qui est des additions et des soustractions, l'équipe des Sumériens est restée engagée au moins 25 minutes, c'est-à-dire jusqu'à la réalisation de l'affiche (l'enregistrement a coupé). Pour sa part, l'équipe des Égyptiens est restée, elle aussi, engagée pendant les 40 minutes que durait l'enregistrement. L'équipe travaillant sur le boulier chinois est aussi restée impliquée jusqu'à la fin. Les élèves ont même refusé, dans un premier temps, que nous leur donnions le feuillet explicatif, les élèves préférant trouver par eux-mêmes le procédé pour effectuer les additions et les soustractions. Il s'agit d'un indicateur intéressant de persévérance. Pour les élèves travaillant sur l'abaque romain, ils avaient décidé de manipuler à tour de rôle l'abaque et semblaient bien comprendre. Ils ont terminé la tâche dans les temps prévus. Pour l'équipe des Babyloniens, nous avons noté que les élèves étaient encore engagés après plus de 30 minutes. La deuxième équipe des Égyptiens, pour sa part, a un peu décroché après 12 minutes et parlait d'autres choses, mais les élèves ont réalisé la tâche dans les temps prévus. Bref, on peut dire que la très grande majorité des élèves est restée engagée jusqu'à la fin des opérations. Pour l'activité 7 (les présentations des additions et soustractions), toutes les équipes ont mené leur affiche et leur présentation à terme. Malgré le beau temps et les cris dans la cour d'école, les élèves ont généralement persévéré à écouter les présentations de leurs camarades de classe.

Dans le dernier bloc d'activités d'apprentissage (les multiplications et les divisions), malgré la difficulté de certains procédés, les élèves sont généralement restés engagés dans la tâche; ils ont persévéré, mais un peu moins si on compare avec les deux blocs d'activités précédents. Ainsi, même si la plupart des élèves étaient impliqués et engagés, certains élèves ont décroché ou étaient fatigués. Par exemple, les garçons de l'équipe des Chinois se sont mis à chanter; dans l'équipe travaillant sur la multiplication romaine, un élève dessinait au tableau alors qu'il ne comprenait pas et un élève travaillant sur la multiplication égyptienne faisait même semblant de dormir. Par contre, deux minutes plus tard, tous les membres de cette équipe étaient à nouveau tous impliqués et ceux qui comprenaient expliquaient à ceux qui ne comprenaient pas. Dans la deuxième équipe des Égyptiens, les élèves étaient tous penchés et engagés sur la tâche. Une élève a lu à voix haute le feuillet explicatif et les autres élèves sont restés attentifs tout au long de la lecture. Dans l'équipe des Sumériens également, les élèves étaient tous impliqués dans la tâche. Pour ce qui est de l'équipe des Babyloniens, les élèves discutaient, se passaient la feuille et restaient engagés sur la tâche. Après 24 minutes, ils étaient encore tous impliqués, toutefois, ils semblaient fatigués ou découragés. Pour l'activité 9 (les présentations des multiplications et des divisions), toutes les équipes ont mené leur affiche et leur présentation à terme.

**La performance**

Finalement, Viau (2007) aborde la performance de l'élève. Mieux il réussit, plus l'élève est satisfait et plus il est satisfait, plus il est motivé à poursuivre ses apprentissages. L'élève performant aime faire la démonstration de son savoir, aime avoir des résultats observables de ses apprentissages (ou de sa performance). Ainsi, lorsque nous avons apporté le corrigé à l'équipe des Babyloniens, ils nous l'ont presque arraché des mains tellement ils avaient hâte de voir s'ils avaient des erreurs, bref, s'ils avaient bien performé. Rappelons que nos élèves, qui ont passé des tests pour être admis au programme international, sont majoritairement performants (et habituellement motivés). L'analyse de la compréhension des élèves dans chaque équipe nous a révélé qu'ils ont bien réussi les tâches et que les défis étaient à la hauteur de leurs capacités.

Dans l'ensemble, les élèves ont bien réussi leur première présentation et étaient très pédagogues pour leurs camarades de classe. Les élèves de la classe tentaient de relever les défis et la plupart les réussissaient. Ainsi, pendant la présentation du système chinois, ceux qui ont réussi le défi ont crié de joie et les élèves de la classe avaient de nombreuses questions d'éclaircissement pour l'équipe qui présentait; ces élèves démontraient ainsi un souci de comprendre, même s'ils savaient qu'ils ne seraient pas évalués sur ces notions. Les élèves ont aussi posé quelques questions de clarification lors de la présentation du système romain, démontrant ainsi leur intérêt. À la présentation du système sumérien également, les élèves posaient des questions pertinentes et faisaient des observations judicieuses. En effet, un des élèves qui écoutait la présentation a remarqué la régularité entre la valeur des symboles : « fois 10, fois 6, fois 10, fois 6 » et fait le parallèle avec la régularité du système romain : « fois 5, fois 2, fois 5, fois 2 ».

Pour ce qui est des additions et des soustractions, l'équipe des Romains, à titre d'exemple, voulait présenter une deuxième addition, mais nous avons dû leur dire que nous n'avions pas le temps. Ils étaient très déçus, ils auraient voulu continuer à démontrer leur savoir-faire. En général, les élèves ont bien réussi leur présentation et ils avaient le souci que leur auditoire comprenne. D'ailleurs, ils ont souvent fait référence à la planche à calculer que leurs camarades connaissaient. Ils avaient ainsi le souci de se faire comprendre par leurs camarades de classe. Ils ont ainsi développé la compétence 3 en mathématiques :

*Communiquer à l'aide du langage mathématique*. Serait-ce l'influence du constructivisme de nos deux programmes d'étude? En effet, les enseignantes de l'école internationale Wilfrid-Pelletier tentent d'appliquer les principes du constructivisme et de partir des connaissances antérieures de leurs élèves. Les élèves ont peut-être reproduit cette façon de faire. Les élèves de la classe avaient parfois des questions d'éclaircissement pour l'équipe qui présentait. Ils démontraient ainsi un souci de compréhension.

Pour les multiplications et les divisions, toutes les équipes ont fini par comprendre le procédé qu'elles devaient présenter à la classe et l'ont relativement bien expliqué à leurs camarades de classe. Nous notons ici des comportements déployés par les élèves et que nous attribuons à de l'intérêt et de la motivation. Dans l'équipe des Chinois, les garçons sont retournés à l'affiche de la première présentation et s'amusaient à nommer les nombres chinois tels qu'ils les avaient appris avec leur coéquipière d'origine chinoise. Un élève travaillant sur les opérations romaines, pendant nos explications générales, nous a demandé si son équipe allait recevoir « quelque chose qu'on peut manipuler ». Dans la première équipe des Égyptiens, à un moment, ils nous ont appelés et se sont tous mis à nous parler en même temps pour s'assurer qu'ils comprenaient. Plus tard, lorsque nous leur avons demandé si leur hypothèse était juste, ils nous ont fièrement répondue que oui. Les filles se sont alors emparées de la feuille pour essayer de faire la multiplication demandée et un garçon a dit : « nous aussi, on veut l'essayer! » Dans la deuxième équipe travaillant sur les opérations égyptiennes, une élève s'est exclamée : « ah! J'ai compris! J'ai compris! J'ai compris! » sur un ton très enthousiaste. Dans la même équipe, un élève, qui plus tôt se plaignait qu'il ne comprenait toujours pas, a demandé qu'on lui explique encore. Il tenait à comprendre et c'est ce qui est arrivé. Ensuite, ils essayaient tous les trois de faire la division demandée chacun de leur côté. Quant aux élèves travaillant sur les opérations sumériennes, lorsqu'ils ont reçu le feuillet explicatif, ils ne l'ont pas vraiment lu, mais ils étaient avides de vérifier leur hypothèse dans le tableau avec les nombres de l'exemple donné. Après neuf minutes, ils avaient déjà terminé l'addition. Nous leur avons alors demandé si cela fonctionnait et ils nous ont répondue tous en chœur et avec enthousiasme : oui!

**Autres indices d'intérêt et de motivation**

Notre journal de bord bonifié a révélé d'autres indices d'intérêt et de motivation chez nos élèves, mais qui n'entraient pas nécessairement dans les indices de Viau. Nous les présentons en vrac. Dans l'équipe travaillant sur le système égyptien, un élève habituellement plus turbulent était particulièrement intéressé par cette activité et son intérêt et son implication semblaient même augmenter son statut auprès de ses coéquipiers. En outre, nous croyons que le fait que les élèves travaillant sur le système romain cherchaient des jeux de mots peut démontrer un certain intérêt. Ils voulaient capter l'attention de leur auditoire. Dans l'équipe des Sumériens, pour l'affiche, les élèves voulaient tous écrire le titre et les symboles. Après un tirage au sort, l'élève « gagnant » sautait même de joie. Finalement, avant l'activité, une élève ayant voyagé au Mexique avait démontré son intérêt pour les Mayas. Elle était très contente de travailler sur ce système.

À la fin du projet, nous avons distribué un questionnaire où les élèves donnaient une note d'appréciation personnelle pour chaque activité. Pour l'activité 1 (le fonctionnement des différents systèmes de numération), 11 élèves ont trouvé l'activité *très intéressante* et 14 l'ont trouvée *intéressante*. Seulement trois élèves l'ont trouvée *plus ou moins intéressante* et personne ne l'a jugée *peu intéressante* ou *pas du tout intéressante*. Avec un taux de satisfaction de près de 90 %, on peut conclure que cette activité a effectivement été appréciée des élèves et qu'elle a suscité l'intérêt et la motivation escomptés. Pour ce qui est de l'activité 2 (la présentation des systèmes de numération), dix élèves l'ont trouvée *très intéressante* et 11 l'ont trouvée *intéressante*. Six élèves l'ont trouvée *plus ou moins intéressante*, une personne l'a jugée *peu intéressante* et aucune ne l'a trouvée *pas du tout intéressante*. On peut conclure que cette activité a effectivement été appréciée des élèves (75 % des élèves l'ont jugée favorablement), mais un peu moins que l'activité précédente. Rappelons que les activités 3 (récapitulation), 4 (les six systèmes en devoir) et 5 (retour sur votre système de numération) étaient des activités d'intégration et n'étaient pas au cœur de notre séquence; c'est pourquoi nous ne les nommons pas ici.

L'activité 6 (additions et soustractions) est une des préférées des élèves de la classe. En effet, 25 élèves sur 28 en font une appréciation positive (dix élèves l'ont trouvée *très intéressante* et 15 l'ont trouvée *intéressante)*. Seulement deux élèves l'ont trouvée *plus ou moins intéressante* et un seul l'a jugée *peu intéressante*. Personne ne l'a jugée *pas du tout intéressante*. Tout comme l'activité sur les systèmes de numération (activité 1), avec un taux de satisfaction de près de 90 %, on peut conclure que l'activité 6 a effectivement été appréciée des élèves et qu'elle a suscité l'intérêt et la motivation escomptés. Pour ce qui est de la présentation de ces opérations, l'appréciation fléchit légèrement (75 % de réponses positives) avec sept élèves qui l'ont trouvée *très intéressante* et 14 qui l'ont trouvée *intéressante*. Six élèves l'ont trouvée *plus ou moins intéressante* et un seul l'a jugée *peu intéressante*. Personne ne l'a jugée *pas du tout intéressante.*

Les deux dernières activités d'apprentissage ont été généralement appréciées des élèves, mais un peu moins que les activités précédentes. Voyons les résultats : pour l'activité 8 (multiplication et division), 22 élèves sur 28 en font quand même une appréciation positive (sept élèves l'ont trouvée *très intéressante* et 15 l'ont trouvée *intéressante)*. Trois élèves l'ont trouvée *plus ou moins intéressante* et trois l'ont jugée *peu intéressante*. Personne ne l'a jugée *pas du tout intéressante*. Avec un taux de satisfaction de près de 80 %, on peut conclure que l'activité 8 a tout de même été appréciée des élèves. Pour ce qui est de la présentation de ces opérations (activité 9), l'appréciation fléchit encore (64 % de réponses positives) avec seulement quatre élèves qui l'ont trouvée *très intéressante* et 14 qui l'ont trouvée *intéressante*. Six élèves l'ont trouvée *plus ou moins intéressante* et quatre l'ont jugée *peu intéressante*. Personne ne l'a jugée *pas du tout intéressante.* Est-ce dû à la redondance des activités (les activités 8 et 9 ressemblent beaucoup aux activités 6 et 7), à la fatigue accumulée et la chaleur (nous étions en mai et il faisait particulièrement chaud), ou le niveau de difficulté qui était trop élevé (ce qui pourrait avoir découragé certains élèves)?

Lors de notre questionnaire de retour sur la séquence, nous demandions également aux élèves : *Qu'est-ce que tu as le plus apprécié dans ce projet et pourquoi?* Nous avons donc des indications sur ce qu'ils ont préféré et surtout, les raisons de cette appréciation. Ici encore, le lecteur trouvera les réponses complètes des élèves dans le journal de bord. Parmi les activités de préparation, trois élèves ont beaucoup aimé l'anecdote du corbeau, une activité pourtant courte et pas très mathématique (c'est peut-être ce qu'ils ont apprécié…). Pour quatre autres élèves, c'est l'activité sur les Papous qui les a particulièrement amusés. Pour ce qui est des activités d'apprentissage, quatre élèves ont raffolé de la découverte des systèmes de numération et pour diverses raisons, pas toujours très détaillées (deux ne justifient pas leur réponse tel que demandé). Aussi, pour plusieurs élèves (sept), c'est de réinvestir leurs apprentissages dans un devoir (TP pour travail personnel) qu'ils ont particulièrement apprécié. Les justifications sont variées, mais certains parlent de la facilité qu'ils ont eu à faire ce devoir après les six présentations en classe de chacune des équipes: « Les six systèmes en TP parce que ça me rappelait les nombres des systèmes et c'était facile »; « Faire les six systèmes en TP, car ça m'a aidé à mieux comprendre ». Seulement trois élèves mentionnent qu'ils ont préféré faire des opérations, mais plusieurs ont aimé préparer, animer ou écouter les différentes présentations (trois blocs de six). Les sept autres élèves ont préféré la ligne du temps et la carte du monde, une activité plus historique et géographique que mathématique.

La question suivante du questionnaire était « Qu'est-ce que tu as le moins aimé dans ce projet et pourquoi? ». Les réponses des élèves sont tout aussi variées et pas toujours dépendantes de notre contrôle. Voyons quelques réponses des élèves (les réponses complètes se trouvent à l'annexe 13). Plusieurs élèves n'ont pas apprécié faire la carte d'exploration, car avant chaque module de recherche du programme international (six par année), on se doit de faire émerger les connaissances antérieures des élèves. C'est ce qu'on appelle le « ce que je sais ». Évidemment, on ne le fait pas toujours avec une carte d'exploration, mais on dirait que quatre élèves en sont lassés et trouvent cela long. C'est noté! Autant, certains élèves avaient préféré l'anecdote du corbeau (trois), un élève ne l'a pas aimée. Aussi, deux élèves ont moins apprécié le survol historique, une activité pourtant courte. Enfin, un élève n'a pas aimé compter sur son corps à la manière des Papous. Pour certains élèves, c'est une activité d'apprentissage qu'ils ont moins aimée, mais pour différentes raisons : « Les six systèmes en équipe, car certaines personnes niaisaient »; « Multiplication, car c'était long et difficile » ou « Quand on faisait les divisions ». Alors que six élèves avaient préféré faire les feuilles de travail en TP, trois élèves l'ont moins apprécié : « Les six systèmes à faire en TP, car la plupart savaient déjà ça »; « Le devoir parce que je n'avais pas eu beaucoup de temps pour le faire » et « Les six systèmes en TP, car en plus on avait de devoirs ».

Ce sont les différentes activités d'intégration que les élèves ont le moins aimées. En effet, quatre élèves n'ont pas aimé la récapitulation, que certains élèves ont trouvée longue alors que dans la réalité, elle a duré moins de dix minutes. Les deux autres élèves l'ont moins aimée, car ils ne comprenaient pas bien : « Pour moi, c'est la récapitulation parce que je ne comprenais pas vraiment et parce que je n'ai pas vraiment aimé » et « (…) car je n'avais pas très bien compris et je ne trouvais pas ça très intéressant ». Enfin, on peut dire que ce sont les présentations qui ont été le moins appréciées, peut-être parce qu'elles étaient trop nombreuses (trois présentations fois six équipes). Pour certains, c'est la préparation des présentations qu'ils n'ont pas aimée, notamment à cause d'un manque de sérieux de certains coéquipiers. Pour d'autres élèves, c'est de présenter ou d'écouter les présentations qu'ils ont trouvé ennuyant ou difficile. Finalement, un élève n'a pas apprécié les discussions après chaque présentation : « Faire les ressemblances et les différences après les présentations des systèmes parce que ça ne m'intéresse vraiment pas ».

À la dernière question de ce même questionnaire, nous avons demandé aux élèves : « As-tu d'autres commentaires ou suggestions à me faire? » Les réponses sont très positives. Onze élèves n'ont rien répondu, six ont écrit « non » et un élève a répondu : « Pas vraiment ». Toutes les autres réponses étaient flatteuses : « Ce projet était très **amusant** »; « C'était **intéressant**, même si on avait un autre projet en même temps »; « J'ai **beaucoup aimé** le projet »; « C'était **fabuleux**! J'**ai appris** plein de choses. **Chapeau**! »; « Le projet était « **cool** »! »; « Oui! Tu as été **originale** dans tes activités et un gros merci! »; « C'est un projet **très intéressant**! »; « Bravo pour ce **beau projet**, continue Julie »; « J'**ai aimé** ce projet et j'espère que vous, vous avez aimé! » et enfin, « J'ai **beaucoup aimé** faire ce projet, car nous en avons **beaucoup appris** sur l'histoire des mathématiques ».

## La perception des mathématiques

Outre l'intérêt et la motivation, il existe un autre avantage pour les élèves à intégrer l'histoire des mathématiques à notre enseignement. Il s'agit de l'amélioration de la perception qu'ont les élèves des mathématiques. Certains auteurs cités à la section 1.3 en témoignent (Barbin et al., 2000; Laubenbacher & Pengelley, 1994; Siu, 1997; C. Tzanakis et al., 2000).

Les élèves ont peu discuté de leur perception des mathématiques durant les diverses activités, de telles données sont rares dans le journal de bord. Toutefois, cette anecdote mérite d'être racontée. En voyant une façon de compter plus compliquée (par sa base soixante), les élèves travaillant sur le système babylonien ont apprécié la simplicité de notre système actuel. Lorsqu'ils ont réalisé que les Babyloniens comptaient « par 60 », un élève n'y croyant pas a dit : « Ben non, ce s'rait bien trop long à compter, il faut que ce soit plus efficace que ça, là ». Un élève lui a rétorqué qu'à une époque « ils prenaient une grosse boule et ils mettaient des choses à l'intérieur, penses-tu que c'était plus efficace ça? » On peut considérer cette anecdote comme une appréciation de notre système actuel, donc d'une meilleure perception de notre façon de faire actuelle.

Aussi, une question relative à la perception des mathématiques a été prévue dans le questionnaire d'appréciation auquel les élèves ont répondu à la fin de la séquence. Les réponses à la question : « Est-ce que ce projet a changé ta façon de percevoir les mathématiques? Comment? » nous éclairent à ce sujet. D'abord, trois élèves sur 29 ont répondu non, que ce projet n'avait pas changé leur perception des mathématiques. Nous avons essayé de regrouper les 25 autres réponses des élèves, mais celles-ci vont dans plusieurs directions, la plupart très positives. Commençons avec des réponses qui contiennent des qualificatifs positifs et qui dénotent une appréciation accrue des mathématiques : « De savoir comment les maths ont évolué me fait montrer comment les maths sont **intelligentes** »; « J'aime plus ça, car les math sont **ingénieuses** et même dans la vieille époque »; « Oui, je me rends compte que c'est très **important** »; « Maintenant, je remarque à quel point les mathématiques étaient **importantes** avant »; « (…) que c'était **amusant** » et « Ça m'**intéresse** plus, mais j'aurais aimé que ça m'aide dans mes bilans de maths ». Il est dommage que ce dernier élève n'ait pas vu de transfert possible dans le cours de mathématiques. Précisons que le questionnaire leur a été passé à la fin de la séquence qui s'est étendue sur une période de deux mois. Ainsi, la numération et les opérations ayant été abordées plus tôt dans l'année, cet élève a jugé que la séquence ne l'avait pas aidé.

Aussi, avec ce projet, certains élèves ont réalisé que les mathématiques n'étaient pas une matière figée et immuable, mais qu'elles avaient évolué dans le temps : « Un peu oui. En sachant que cela **a évolué** m'a donné le goût de faire plus de maths »; « Oui, car ça m'a fait découvrir toute l'**évolution** des mathématiques »; « Oui, en voyant que ça a **évolué** » ; « Je vois que les mathématiques sont **très anciennes** »; « Oui, car je me disais souvent que les gens comptaient toujours de la même manière, mais c'est plutôt le contraire »; « Avant, je pensais que tout le monde utilisait les **mêmes chiffres** »; « Oui, que ce n'est pas seulement nous qui avons un système »; « Oui, avant, je me disais, les mathématiques, c'est 15 + 1 ex., mais non, j'ai vu que en différents peuples, **ça change** et leur base aussi » et « Oui, parce que je ne savais pas qu'il y avait **beaucoup de systèmes**, ça m'a fait un peu bizarre et j'ai aussi appris des nouveaux mots ».

Puis, des élèves ont eu l'impression de découvrir une nouvelle dimension aux mathématiques : « Oui, ça m'a prouvé que les maths ce n'est pas **que des bilans** »; « Avant, je percevais les mathématiques comme des résolutions de problèmes, mais après avoir fait ce projet, je les vois comme **quelque chose d'intéressant** »; « Oui, parce que pour moi, avant, les mathématiques étaient des additions, soustractions, divisions, multiplications »; « Maintenant, à chaque fois que je fais des mathématiques, je pense à ce projet »; « Oui, car sans eux, **le monde ne serait pas précis** »; « Oui, avant c'était pour moi une matière obligatoire à l'école, maintenant (surtout avec le système égyptien) **maintenant, c'est un outil** qui a avoir un monde meilleur (sic) » et « Oui, car maintenant **j'essaye de trouver par moi-même des liens entre les peuples et les chiffres indo-arabes** ».

D'autres élèves ont apprécié faire des liens avec l'histoire ou améliorer leur culture générale : « Oui, à cause de l'histoire, car je ne connaissais pas **son histoire** »; « Oui, j'ai aimé apprendre de **nouvelles communautés** (sic) » et « Oui, car je connais vraiment **plus de choses** ». Les réponses ne sont pas très élaborées et ne vont pas en profondeur, mais elles dénotent toutefois d'une perception positive des mathématiques.

## Apprentissage et compréhension : la difficulté à comparer

Le chapitre cinq a longuement décrit les apprentissages des élèves et l'amélioration de leur compréhension de notre numération positionnelle et des quatre opérations. Les élèves décrivaient le système qu'ils présentaient avec des termes significatifs, démontrant ainsi les liens avec notre système actuel, particulièrement pour les deux systèmes positionnels (maya et babylonien) : « nous on a des dizaines et des centaines, eux, ils ont des vingtaines et des « quatre centaines »; « dans notre système, c'est unités-dizaines-centaines, mais eux, c'est unités-soixantaines-*trois-milles-six-centaines* ». Ils ont même relevé un des avantages des systèmes positionnels, c'est-à-dire la possibilité d'écrire tous les nombres jusqu'à l'infini : « Mettons qu'ils voulaient écrire 300 milliards, ils pouvaient sûrement se rendre jusqu'à 10 colonnes ». Ils ont aussi noté l'importance du zéro dans les systèmes positionnels : « (…) tous les systèmes positionnels ont besoin d'un zéro »; « pour ne pas se mélanger avec une unité, on est obligé de mettre un zéro ». Ils ont aussi démontré une compréhension des systèmes en les décrivant de façon très précise : « (…) il est hybride parce qu'on doit additionner et multiplier » (chinois) ou « (…) il est additif et soustractif » (romain).

Par contre, dans le test de compréhension *Retour sur votre système de numération*, lorsqu'on leur demandait de nommer les ressemblances entre leur système et le système actuel ou avec d'autres systèmes présentés, les élèves n'allaient pas en profondeur et évoquaient souvent des différences superficielles : « Un signifie une barre dans presque tous les systèmes »; « Le 7 chinois est un 7 à l'envers en indo-arabe ». Parfois, les réponses étaient incomplètes, l'élève comparait le système à l'étude avec un autre système, alors qu'un autre système présentait les mêmes caractéristiques: « Il est additif comme le système égyptien » (il manque sumérien). Enfin, pour évoquer une ressemblance, les élèves parlent souvent d'un seul système : « Il a une planche à calculer » ou « Il est positionnel. Il a un zéro ».

Lorsqu'il s'agit de ressemblances, il est sous-entendu que les caractéristiques nommées sont communes aux systèmes comparés. Par contre, lorsqu'on demande des différences entre le système présenté et le système indo-arabe ou d'autres systèmes présentés, plusieurs élèves ne nomment qu'une caractéristique d'un des deux systèmes et parfois, sans préciser lequel et sans la mettre en opposition avec un autre système : « Ils comptaient par 60 et 3 600. Ils faisaient des dessins »; « Ils ont une base 60 »; « Il y a des vingtaines et des quatre-centaines »; « Le système indo-arabe est positionnel » et « Les chiffres romains, c'est juste des lettres ». Pour les ressemblances et les différences entre les différentes façons de faire les opérations, nous avons remarqué les mêmes difficultés.

De telles réponses partielles où l'élève se centre sur un aspect ou un système plutôt que de faire intervenir les deux systèmes comparés nous interpellent. Pourquoi est-ce si difficile pour les élèves de comparer des systèmes de numération ou des façons de faire les opérations ? Une avenue pourrait expliquer la difficulté des élèves à réellement comparer deux systèmes de numération ou deux façons d'effectuer une opération : la taxonomie de Bloom. Élaborée en 1956, mais traduite en français par Marcel Lavallée en 1975 (Bloom, Englehart, Furst, Hill, & Krathwohl, 1975), le principe de cette taxonomie est d'organiser l'information de façon hiérarchique, de la plus simple à la plus complexe. Elle se résume en six niveaux, chacun englobant les niveaux précédents. Pour chaque niveau, on trouve des opérations typiques décrites par des verbes types.

Pour le niveau le plus simple**, l'acquisition des connaissances**, on trouve les verbes : connaître, se remémorer, associer, se représenter, retrouver, reconnaître, délimiter, se familiariser, définir, formuler, mémoriser, identifier, se rappeler (Bloom et al., 1975, pp. 67-99). Pour ce qui est de la **compréhension**, il y a les verbes comprendre, transposer, interpréter, généraliser, résumer, extrapoler, représenter, déchiffrer, distinguer, prévoir, traduire (1975, pp. 100-138). En ce qui a trait à l'**application**, on considère ces verbes : appliquer, réorganiser, classifier, généraliser, transférer, prévoir, relier (1975, pp. 139-162). Pour l'**analyse**, on trouve les verbes suivants : analyser, décomposer, distinguer, décomposer, classer, organiser, reconnaître, organiser, déterminer des relations, vérifier (1975, pp. 163-181). Puis, au niveau de la **synthèse**, les verbes types sont : combiner, organiser, réorganiser, intégrer, exprimer, produire, rédiger, communiquer, composer, proposer, généraliser, créer, réunir (1975, pp. 182-205). Enfin, l'ultime étape est l'**évaluation**, où on demande à l'élève de : classifier, évaluer, comparer, justifier, estimer, juger, apprécier, choisir (1975, pp. 206-219). On remarque que l'opération cognitive « comparer » se trouve au niveau ultime de l'évaluation. Ce niveau est beaucoup plus complexe que la simple acquisition de connaissances, la compréhension, l'application, l'analyse ou la synthèse. C'est peut-être ce qui explique la grande difficulté qu'ont eue les élèves à comparer leur système de numération (ou les façons d'effectuer les opérations) à nos façons de le faire aujourd'hui.

Pour faciliter cette activité cognitive de haut niveau, nous proposons qu'à l'avenir, les élèves présentent les ressemblances et les différences dans un diagramme de Venne. Ainsi, les élèves démontreraient visuellement les caractéristiques communes à deux systèmes et ce qui les distingue.

Cette section précise maintenant si les élèves ont eu l'impression de mieux comprendre la numération et les opérations. Dans le questionnaire d'appréciation, nous avons posé cette question aux élèves : « Crois-tu que ce projet t'a aidé à mieux comprendre le fonctionnement de notre système de numération actuel? Comment? » Rappelons que nos élèves sont presque tous en facilité d'apprentissage et n'ont pas de grandes lacunes en mathématiques. Les réponses complètes des élèves se trouvent dans le journal de bord à l'annexe 13. Plusieurs élèves – cinq – n'ont pas eu l'impression que le projet les a aidés à mieux comprendre notre système de numération tout simplement parce qu'ils considéraient qu'ils le comprenaient déjà bien.

Cinq autres élèves ont répondu que le projet ne les avait pas aidés à mieux comprendre le fonctionnement de notre système de numération parce qu'ils avaient surtout travaillé sur d'autres systèmes que le système indo-arabe. Pour ces élèves, nous avons raté notre objectif de faire des liens entre les différentes sortes de systèmes (additifs, hybride et positionnels) et les différentes bases de groupements pour améliorer la compréhension de notre système actuel : « Non, car j'ai plus travaillé sur les Sumériens que notre propre système »; « Non, car ça m'a juste montré d'autres systèmes »; « Non, car les systèmes de numération anciens sont très différents du nôtre »; « Non, car les autres systèmes sont différents » et « Non parce qu'on travaillait sur plusieurs systèmes qui ne ressemblent pas à notre système ». En outre, six élèves n'ont répondu que « non ».

Enfin, plus du tiers des élèves (10 sur 28) considèrent que le projet a amélioré leur compréhension de notre système de numération, mais les justifications rejoignent parfois la question précédente (l'amélioration de la perception des mathématiques) : « Oui, en voyant les différences entre tous ces systèmes, je vois notre système plus intéressant et fascinant » et « Oui parce qu'en voyant toutes les présentations, je vois d'une différente façon les maths ». D'autres élèves donnent des exemples de ce qu'ils ont appris, mais ils n'expliquent pas clairement en quoi cela les aide à mieux comprendre : « Oui, (comme au # 5) « Un peu, ex. j'ai plus compris la logique des calculs, etc. »; « Oui, pour la planche à calculer parce qu'eux aussi ont une planche »; « Oui, car il y avait des choses que je ne connaissais pas comme les bases »; « Oui, car j'ai remarqué c'est quoi une base et une base inférieure (sic) » et « Oui, car maintenant, je comprends les systèmes en base 10, 20 et 60 et les types hybride, positionnel et additif ».

En outre, certains élèves soulignent l'évolution des mathématiques, mais encore une fois, sans expliquer en quoi cela les aide à comprendre notre système : « Oui parce que j'ai appris comment le système indo-arabe a évolué » et « Oui, maintenant je comprends pourquoi les chiffres sont comme ça aujourd'hui, surtout comment c'est venu ». Finalement, une réponse est positive, mais hors contexte : « Oui parce que pour les Babyloniens et les Sumériens sont (supposément) eux qui ont inventé le 60 secondes, 60 minutes » (les parenthèses sont de l'élève).

Cette autre question : « Crois-tu que ce projet t'a aidé à mieux comprendre ou à mieux effectuer les quatre opérations? Comment? » est complémentaire à la précédente et ici aussi, il y a de nombreuses réponses négatives. Tout comme à la question précédente, cinq élèves considéraient qu'ils n'avaient plus grand-chose à apprendre concernant les opérations : « Non, car je n'avais pas de difficultés »; « Non, pas vraiment, car je les comprenais déjà »; «Non, c’était déjà facile, pour moi, de comprendre les 4 opérations »; « Non, car je les comprenais déjà bien » et « Non, car je les maîtrisais déjà assez bien ».

De plus, d’autres élèves, comme à la question précédente, n’ont pas fait de liens entre les différents procédés de calcul avec différents groupements (10 et 60) et les algorithmes conventionnels. Ils considéraient que puisqu’ils avaient peu travaillé sur le système indo-arabe, ce projet ne les a pas aidés à mieux comprendre les quatre opérations : « Non, car je n’ai pas vraiment travaillé le système indo-arabe »; « Non parce que c’est presque tout différent »; « Pas vraiment, mais au moins, j’ai pu découvrir d’autres systèmes il y a longtemps »; « Non parce qu’on travaillait sur un système différent que le nôtre » et « Non, comme j’ai dit à la question 6, je n’ai pas plus compris notre système parce qu’on travaillait plus sur des systèmes qui ne ressemblent pas au nôtre ». Un élève a répondu par la négative parce que « (…) il y en a qui sont trop compliqués à comprendre ». Enfin, huit autres élèves ont répondu par la négative, mais sans préciser pourquoi. Ici aussi, nous avons raté notre cible de faire des liens entre les opérations à la manière de nos prédécesseurs et nos algorithmes conventionnels.

Ici aussi, une dizaine d’élèves considèrent que le projet les a aidés à mieux comprendre les opérations, mais encore une fois, les justifications ne sont pas étoffées. Certains élèves nomment un apprentissage qu’ils ont fait, mais sans expliquer en quoi cet apprentissage les a aidé à mieux comprendre les quatre opérations actuelles : « Oui, car pour faire les opérations et même les chiffres, il faut savoir bien ses tables »; « Oui, (comme aux # 5 et 6) un peu, ex : j’ai plus compris la logique des calculs »; « Oui, car on a appris d’autres méthodes pour les effectuer » et « Oui, avant je ne comprenais pas comment on arrivait à la réponse ». D’autres réponses sont très vagues : « Oui, je les comprends mieux parce qu’avant, il y avait des choses que je ne comprenais pas, mais maintenant, je les comprends »; « Oui, car je l’ai mieux compris »; « Plus ou moins, car je les savais bien, mais je les ai compris un peu mieux »; « Oui, un peu parce qu’il y a des systèmes qui ressemblent à celui de nos jours »; « Oui parce qu’avant, je le connaissais pas ».

Enfin, dans le questionnaire d’appréciation distribué à la fin de la séquence, nous avons demandé aux élèves : « Que retiens-tu du projet ?» Les réponses ne sont très variées, mais pas toujours très élaborées. Un élève a retenu quelque chose qui l’a surpris : « Le fait que même en – 3 300, il y avait des gens qui comptaient ». Pour les autres réponses, la plupart peuvent se regrouper selon les pistes de recherche (sous-sujets) de notre module de recherche du Programme primaire international (voir annexe 12). Pour ce qui est des réponses relevant de *la représentation des nombres et le fonctionnement des systèmes de numération dans différentes civilisations*, voici les réponses des élèves : « Le système babylonien et tous les autres »; « J'ai appris comment fonctionnent les différents systèmes de numération et je pourrais les utiliser comme un code secret pour compter »; « (…) j'ai appris ce qu'est une base »; « Les systèmes »; « Que les Sumériens étaient en base 60 » et « Les différentes sortes de compter. Aussi, quand on s'enflait la tête moi et mon équipe pour trouver comment le système fonctionnait ».

D'autres élèves ont retenu différentes façons de faire *les quatre opérations dans ces systèmes* : « Ce que j'ai appris sur la manière de calculer des Chinois »; « J'ai retenu les méthodes des pays qu'on a appris »; « Additions et soustractions du système chinois et des Égyptiens »; « J'ai appris d'autres manières d'additionner, de multiplier et de soustraire »; « Les additions et soustractions »; « Comment on multiplie en chinois. Je vais m'en souvenir parce que j'aime cela »; « Je retiens plus les additions et soustractions, car elles sont plus simples » et « Comment me servir de l'abaque romain et un petit peu l'abaque chinois ».

Certains élèves ont retenu *le fonctionnement de certains systèmes de numération* et *les opérations dans ces systèmes* : « Les Égyptiens, car j'ai travaillé sur eux »; « Les chiffres mayas, chinois et babyloniens ainsi que les opérations en babylonien » et « Comment écrire les numéros et additionner, multiplier, diviser ». D'autres élèves, eux, parlent des « façons ou des manières de compter », mais on ne sait pas s'ils réfèrent à la représentation des nombres ou aux opérations, c'est pourquoi nous les regroupons ici : « Je retiens qu'il y a plusieurs façons que je ne savais pas de compter, d'additionner, etc. et c'est la découverte de ça qui m'a fasciné le plus »; « Je retiens comment les anciens peuples faisaient pour compter » et « Que les différents systèmes avaient leurs manières de compter » et enfin « Les manières de compter des autres systèmes ».

Quelques élèves ont retenu une certaine *évolution des systèmes jusqu'à notre système actuel* : « Qu'il y a eu beaucoup de manières de compter avant la nôtre »; « Avant l'indo-arabe, il y a eu plein d'autres systèmes » et « Il y a des systèmes qui se ressemblent. Il y a eu beaucoup d'autres systèmes de numération avant le nôtre (en 2007), etc. » Enfin, des élèves ont préféré une ou des manières de travailler : « Toutes les présentations, car même si je n'ai pas aimé les préparer, j'ai aimé les présenter et les regarder » et « Les présentations, les défis, les lectures, etc. ». Un élève a retenu « Que c'était moyennement intéressant » et enfin, un élève a retenu « Que les mathématiques ont aidé à bâtir un monde meilleur ».

Notre séquence, nous venons de le voir, a suscité intérêt et motivation chez les élèves. Elle a également modifié leur perception des mathématiques et amélioré leur apprentissage et leur compréhension. Parmi les différentes façons d'intégrer l'histoire à notre enseignement des mathématiques, nos choix étaient-ils appropriés?

## Le choix des activités

Dans notre cadre conceptuel (2.1), une quinzaine de façons d'intégrer l'histoire des mathématiques à notre enseignement ont été répertoriées et celles que nous jugions les plus adéquates pour des élèves de la fin du primaire ont été pointées. Lors de l'élaboration de la séquence (chapitre 4), nous avons fait des choix d'activités en fonction du niveau académique des élèves, mais surtout des notions mathématiques que nous avions choisies de travailler (la numération et les opérations étant au cœur du programme de mathématique au primaire). Ces choix étaient-ils appropriés?

Considérant les avantages des activités 1 et 2 (la découverte des différents systèmes de numération et leur présentation à la classe) – notamment la motivation et l'intérêt suscités –, nous pouvons affirmer qu'il s'agit d'un bon choix d'activité pour des élèves du troisième cycle du primaire. Cette activité combinait deux façons d'intégrer l'histoire des mathématiques à notre enseignement qui étaient présentées dans la section 2.1. Il s'agissait de *la feuille de travail* et les notations anciennes présentées dans la partie : *les activités expérimentales.*

Aussi, nous croyons que de faire découvrir comment des peuples qui nous ont précédés effectuaient leurs additions et leurs soustractions, puis leurs multiplications et leurs divisions sont également des activités pertinentes. Ces activités s'inspiraient des *activités expérimentales* ainsi que d*es opérations à la manière de…* présentées dans la partie 2.1. Elles permettaient d'approfondir chacun des systèmes et les élèves y découvraient différentes façons d'additionner et de soustraire. Ils pouvaient également comparer ces différentes méthodes de calcul aux méthodes actuelles.

Placer sur une carte du monde et une ligne du temps les différentes civilisations que nous avions étudiées amenait un aspect interdisciplinaire préconisé par le programme de formation (dans les *repères culturels*) : « Contexte interdisciplinaire ou social (ex. : histoire, géographie, science et technologie) » (MÉLS Ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport, 2001). Cette activité permettait également d'adopter le point de vue mondial recommandé par le PP (à travers le thème transdisciplinaire *Où nous nous situons dans l'espace et le temps*: « (…) Cette recherche doit être menée en adoptant un point de vue local et mondial » (Organisation du Baccalauréat International, 2007, p. 14).

Nous venons de voir que nos activités ont généralement été appréciées. Elles ont suscité l'intérêt et la motivation escomptés, ont permis d'améliorer la perception qu'avaient certains élèves des mathématiques et ont permis de faire des apprentissages quant à notre système de numération positionnel et les quatre opérations. Est-ce que tous ces avantages supplantent les difficultés d'introduire l'histoire des mathématiques évoquées dans notre problématique?

## Retour sur les difficultés d'introduire l'histoire des mathématiques

Dans notre recension des écrits sur l'histoire des mathématiques, nous avions présenté les raisons souvent évoquées par les enseignants pour ne pas l'introduire à notre enseignement. Rappelons qu'il s'agissait du manque de temps, de ressources et d'expertise des enseignants, une perception de détournement des mathématiques vers l'histoire, le rapport des élèves au temps et le risque d'introduire des anachronismes.

La raison la plus souvent évoquée reste celle du temps et des ressources. Pour remédier à cette situation, bien que le matériel soit limité, nous proposons d'utiliser du matériel existant. Les enseignants peuvent consulter des livres d'histoire des mathématiques qui regorgent d'anecdotes, de problèmes, d'idées. Même si les activités sont limitées et ne vont pas en profondeur, certaines collections de manuels incluent des activités sur l'histoire des mathématiques (la plus complète étant la collection Défi mathématique). Aussi, dans la section 2.3, nous avons recensé une quinzaine de façons différentes d'introduire l'histoire des mathématiques. Nous envisageons publier un article sur ces différentes façons dans une revue professionnelle. Celui-ci pourrait inspirer des enseignants. Aussi, nous croyons que la lecture sur l'histoire des mathématiques est fascinante et peut bonifier notre culture personnelle.

Une autre raison évoquée est le manque d'expertise des enseignants dans ce domaine. En effet, comme l'histoire des mathématiques est relativement nouvelle au programme, les enseignants ne l'ont pas abordée lors de leur formation des maîtres, ni avant dans leur scolarité. Est-ce que les nouveaux programmes du secondaire incluent aussi des éléments d'histoire des mathématiques? Les repères culturels des deux programmes du secondaire les mentionnent, donnent des suggestions de sujets à traiter, mais aucune indication de temps consacré à cet aspect n'est précisée. Pour les repères culturels en lien avec l'arithmétique et l'algèbre, dans le programme du premier cycle, les indications tiennent sur un paragraphe, dont cet extrait :

> « (…) Il devrait aussi lui fournir l'occasion d'observer les caractéristiques, les avantages et les inconvénients de différents systèmes de numération afin de bien situer celui qu'il utilise dans sa vie quotidienne et d'en saisir la portée. (…) donner de l'information sur l'évolution, au cours des âges, de l'utilisation des notations, des symboles, des processus de calcul et des méthodes de résolution d'équations; ou encore susciter des discussions sur la puissance et les limites des outils de calcul (machine à calculer de Pascal, calculatrice) » ((MÉLS) Ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport, 2006, p. 255).

Dans le programme secondaire de deuxième cycle, l'énoncé concernant l'arithmétique et l'algèbre prend presque une page complète et va plus loin. Voici un extrait se rattachant aux contenus de cette étude :

> « Le développement de la mathématique est caractérisé par l'influence et l'apport de différentes civilisations et cultures. Mentionnons, à titre d'exemple, la contribution des Indiens et des Arabes au développement de la mathématique en Occident tant en ce qui a trait à la numération ou à l'algèbre qu'à la trigonométrie. L'étude de ces différents apports permet de voir et de comprendre un peu mieux la construction progressive de l'ensemble des nombres réels : l'introduction révolutionnaire du zéro, l'acceptation difficile des nombres négatifs, la crise suscitée par l'incommensurabilité de $\sqrt{2}$ » (MÉLS Ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport, 2007). P.63

On peut supposer que l'introduction des *repères culturels* au primaire et au secondaire, combinés à des cours spécifiques dans la formation des maîtres, viendrait pallier à ce problème. Aussi, des enseignants affirment que les étudiants qui n'apprécient pas l'histoire n'aimeront pas plus l'histoire des mathématiques. Il n'est pas nécessaire d'annoncer en début de cours que l'on va faire de l'histoire des mathématiques. Nous avons d'ailleurs vu que l'histoire des mathématiques peut favoriser une meilleure compréhension de l’organisation des concepts, des structures, des idées et pourquoi ils ont été inventés (pertinence).

On évoquait de plus que l’histoire peut être tortueuse, confuse et pas toujours révélatrice. Nous proposons ainsi d’éviter de faire traverser tous les dédales qu’a connus l’histoire des mathématiques aux élèves. Nous croyons cependant qu’elle permet d’humaniser cette matière, de voir son développement plutôt que d’accepter les mathématiques telle une vérité absolue, figée et immuable. Pour ce qui est du rapport des élèves au temps (qui est limité au primaire), commençons par évoquer le passé et étudier les changements survenus dans la numération notamment. Aussi, placer les découvertes sur une ligne du temps peut aider à les positionner chronologiquement. Enfin, des enseignants affirment qu’il faut une bonne base d’histoire pour réussir à situer l’histoire des mathématiques dans son contexte pour ne pas introduire d’anachronismes. Nous croyons que cette raison ne devrait pas nous empêcher d’aborder l’histoire des mathématiques, particulièrement au primaire où la mise en contexte est limitée puisque les connaissances préalables des élèves le sont.

## 6.3. Le respect du constructivisme dans la séquence

Nous avons vu que le constructivisme est l’approche pédagogique préconisée par nos deux programmes d’étude (MÉLS et PP). Nous revenons d’abord sur cette approche et nous analysons ensuite nos interventions auprès des élèves pendant la séquence pour juger si elles ont respecté ses grandes lignes. Nous nous concentrons sur les activités d’apprentissage, les activités de mise en contexte et d’intégration étant moins au cœur de cette séquence.

Tous les élèves de toutes les équipes ont été actifs du début à la fin de la feuille de travail et de la découverte des opérations. Pour les opérations, les élèves ont discuté de leurs hypothèses, puis la plupart du temps, un élève lisait le feuillet explicatif pendant que les autres écoutaient. Au moment d’essayer d’effectuer l’opération, ils ne la faisaient pas tous en même temps, mais ils étaient en général impliqués et actifs. Dans l’équipe travaillant sur les multiplications romaines, deux élèves se sont même presque disputés pour s’approprier le feuillet explicatif. La préparation des affiches pour les présentations a moins permis d’impliquer aussi activement tous les élèves puisqu’ils étaient cinq à confectionner leurs affiches. Comme l’équipe étudiant le système sumérien était composée de quatre élèves, il était plus facile pour eux de tous travailler activement. Pour l'ensemble des présentations, les élèves qui présentaient étaient actifs, mais ceux qui écoutaient l'étaient différemment. Notons tout de même qu'ils ont posé de nombreuses questions, ce qui témoigne d'une activité intellectuelle importante. Ils ont également relevé les défis de « traduction » (qu'ils ont tous tentés de faire) et ont discuté des ressemblances et des différences entre le système présenté, les autres déjà présentés et le système actuel.

Pour ce qui est des représentations des élèves, rappelons que les apprenants construisent leurs apprentissages à partir de ce qu'ils connaissent déjà et tentent de relier les nouvelles connaissances à leurs représentations. Ainsi, lorsque nos élèves découvraient une nouvelle façon de faire (systèmes et opérations), ils partaient généralement de ce qu'ils connaissaient de notre système de numération et du matériel de manipulation qu'ils ont déjà utilisé. D'ailleurs, l'équipe travaillant sur le système égyptien est partie de ce qu'elle connaissait, c'est-à-dire la base 10. L'équipe étudiant le système chinois également et elle a constaté que le système avait recours à la décomposition qu'ils avaient déjà expérimentée (par exemple : 3 x 100 + 2 x 10 + 6 ou encore : 3 c., 2 d., 6 u.). L'équipe étudiant le système maya est partie de leur connaissance de notre système positionnel en base 10 et ont remarqué qu'il fallait faire « fois 2 » quand on arrivait au deuxième étage (en pensant à notre colonne des dizaines). Les élèves de l'équipe des Sumériens sont également partis de ce qu'ils savaient (les premiers symboles et leur valeur), mais n'ont pas fait référence à la planche à calculer ou au matériel multi bases qu'ils connaissaient déjà. Enfin, pour ce qui est de l'équipe des Babyloniens, les élèves sont partis de leurs représentations d'un système de numération (base 10, colonnes, système positionnel, planche à calculer). En effet, lorsqu'ils sont arrivés à la deuxième colonne, un élève de l'équipe a écrit u. (pour unités) au dessus de la colonne de droite et d. (pour dizaines) au dessus de la deuxième colonne (en partant de la droite). Lorsqu'ils ont constaté que cela ne fonctionnait pas avec les nombres qui leur étaient donnés, ils se sont trouvés en état de déséquilibre. Leurs représentations d'un système décimal ne pouvaient pas s'appliquer à un système sexagésimal. Ils devaient donc réorganiser leurs connaissances pour retrouver l'équilibre et réaliser que d'autres peuples avaient pu compter avec une base différente que la base décimale.

Pour ce qui est des additions et des soustractions, les élèves sont partis de ce qu'ils connaissaient de nos algorithmes conventionnels, mais encore plus de la planche à calculer qu'ils ont manipulée au deuxième cycle. En effet, l'équipe des Sumériens, dès qu'ils ont reçu leur outil de calcul, a remarqué que l'abaque mésopotamien était comme une planche à calculer, mais en base 60. À la fin de leur présentation, au moment de relever les ressemblances avec des façons connues d'effectuer ces opérations, les élèves de la classe ont aussi comparé le procédé à celui sur la planche à calculer, mais en précisant que la nôtre était en base 10 et que la planche sumérienne était plutôt en base 60. Ils ont également trouvé que dans les deux procédés, on faisait des échanges entre les colonnes, mais parfois de 10 et parfois de 6 (pour les Sumériens). Au moment de présenter, un élève de l'équipe des Babyloniens a précisé que comme avec la planche à calculer, on ne met pas des chiffres, mais bien des barres ou des jetons.

Pour les multiplications et les divisions aussi, les élèves sont partis de ce qu'ils connaissaient déjà. En effet, les Sumériens sont allés consulter leur affiche sur les additions sumériennes lorsque nous leur avons dit que la multiplication sumérienne était en fait une addition répétée. L'équipe des Chinois est retournée à l'affiche de la première présentation pour le plaisir de nommer les nombres en chinois. Pour les autres équipes, les procédés étaient plutôt différents, mais l'expérience acquise lors des activités précédentes les a probablement aidés.

De manière générale, les interactions sociales étaient riches. Les élèves ayant beaucoup d'expériences en travail d'équipe et en coopération, ils avaient déjà de bonnes habiletés sociales. Parfois, vu le degré de difficulté, plusieurs cerveaux étaient nécessaires pour comprendre et les élèves renchérissaient sur ce que leur coéquipier venait de dire, comme dans cet extrait de l'équipe découvrant le système hybride chinois : « ah oui! Ils font 2 fois 10 plus 2 » en pointant les symboles. L'élève chinoise de l'équipe a précisé que 22 se disait justement « deux-dix-deux » en chinois. Un autre élève a continué en supposant que pour écrire 30, il fallait mettre « le trois avec le dix ». Plus tard, un autre élève a avancé : « OK, 200, tu mets un 2 pis un 100 ». Un autre extrait, provenant de l'équipe des Babyloniens, démontre également le fait que les élèves se complétaient et s'entraidaient : « OK, si j'en mets 2 là, ça fait 7 200, parce que 3 600 + 3 600, ça fait 7 200 ». Un autre élève a ajouté qu' « il faut ajouter 2 800 », un autre a précisé : « Non, c'est 1 800 qu'il faut ajouter pour arriver à 9 000 ». « OK, 1 800, c'est 60 fois 3, non ça ne marche pas, c'est 60 fois 30… Hooooonnn! », mais il s'est ensuite exclamé : « ha!, mais 600 fois 3 ça fait 1 800! ».

D'autres fois, un ou deux élèves de l'équipe ne comprenaient pas, mais un coéquipier leur expliquait et ceux-ci finissaient par comprendre, comme dans l'équipe des Chinois au moment de s'approprier la multiplication sur le boulier. Deux élèves ne comprenaient pas malgré la lecture du feuillet explicatif. Un coéquipier leur a gentiment expliqué : « Au début, il faut représenter le nombre qu'on veut multiplier : 7 x 24, on met 7 ici, ensuite on saute deux colonnes et on met le 24 (en le faisant). Vous comprenez jusque-là? Là on fait 7 x 2, mais vu que ça représente les dizaines, ça fait 14, on vient représenter 14 ici ». Une élève lui dit : « mais il me semble que ça va pas là » et l'élève de répondre : « c'est parce que le 2, c'est des dizaines… le 7 x 4, on vient le mettre là. Là on a 4, pis il faut en mettre 2, fait que 4 + 2, ça fait 6… ».

Enfin, chacun proposait ses hypothèses, qu'il essayait pour les confirmer ou les infirmer. Dans l'équipe des Romains, notamment, certaines hypothèses étaient vraies : « regarde, quand il y a un plus petit à gauche, on dirait qu'il faut le soustraire », mais d'autres étaient fausses : « on a découvert que le L vaut 30, parce que ça, c'est 19 et 49 – 19, ça fait 30 ». Dans l'équipe des Babyloniens, un élève était très fier de confirmer son hypothèse : « mon hypothèse était bonne, je le savais que dans cette colonne-là, ça valait 60! ». Pendant les présentations également, les interactions sociales étaient riches. Ce sont d'ailleurs les élèves qui donnaient les explications plutôt que l'enseignante. Les questions des élèves ont permis d'aller beaucoup plus loin dans la compréhension de ces systèmes de numération parfois difficiles. Par exemple, un élève écoutant la présentation du système babylonien a demandé si on voulait écrire admettons 100 000, s'il pouvait y avoir 4 ou 5 colonnes ou un autre, si on était obligé de mettre les zéros aux unités et aux soixantaines quand on veut écrire 3 600. Aussi, lors de la présentation du système romain, un élève a demandé s'il n'y avait qu'une seule bonne réponse possible. À chaque fois, ces questions permettaient aux élèves qui présentaient de préciser leur pensée, de démontrer leur compréhension.

Comme nous l'avons déjà vu, les élèves qui présentaient avaient vraiment le souci de faire comprendre leur procédé aux élèves de la classe. Ainsi, dans l'équipe des Chinois, un élève de l'équipe a même demandé à sa coéquipière : « réexplique c'que tu viens de faire parce que j'ai entendu un gémissement dans la classe… ». Plus tard pendant ses explications, un élève a demandé : « Tout le monde comprend? » plusieurs élèves de la classe contribuaient à trouver des ressemblances et des différences entre les différents systèmes ou les différentes opérations.

## Le respect du constructivisme dans nos interventions

Comme nos deux programmes d'étude reposent sur le constructivisme, voyons ici nos bons coups et les points à améliorer pour respecter cette approche.

#### Les bons coups

Dans le but de respecter les principes du constructivisme, nous avons tenté de jouer un rôle de guide qui pose des questions, plutôt que de l'enseignante qui montre comment faire. Nos interventions étaient habituellement minimales et nous tentions de ne pas donner de réponses aux élèves, de toujours les questionner pour leur faire remarquer des régularités ou des erreurs qu'ils auraient commises, mais sans leur dire : *ceci est bon* ou *cela est faux*. Nous croyons qu'en général, nos questions étaient bien choisies et qu'elles ont permis aux élèves de comprendre par eux-mêmes. Précisons que pour les présentations, nous nous en sommes tenus à donner le signal de départ des présentations, à faire les rappels à l'ordre ou à demander des précisions lorsque cela s'avérait nécessaire. Après chaque présentation, nous avons demandé quelles étaient les ressemblances et les différences entre le système présenté, les autres et le système actuel.

Nous avons regroupé certaines de nos interventions selon que nous questionnions les élèves pour qu'ils précisent leur pensée, qu'ils découvrent une erreur, que nous faisions des liens avec des concepts connus des élèves, que nous leur demandions de résumer, que nous apportions des précisions, que nous introduisions le vocabulaire, que nous racontions des anecdotes, que nous relevions des erreurs ou que nous encouragions les élèves.

Ainsi, lors de la présentation sur le boulier chinois, nous avons demandé à un élève de préciser ce qu'il entendait par le fait que : « le boulier est positionnel ». Il a répondu : « si tu veux représenter 1, tu peux pas monter n'importe où, ça c'est comme un million, ça c'est mille… ». À l'équipe qui présentait le système babylonien, nous avons demandé comment nous pourrions former une quatrième et une cinquième colonne. Un élève a pu expliquer le principe de numération positionnelle et la possibilité d'écrire tous les nombres jusqu'à l'infini.

Dans la mesure du possible, nous faisions des liens avec des concepts connus des élèves, nous partions de leurs représentations pour les aider à comprendre. Lors de la présentation du système sumérien, nous l'avons mis en opposition avec notre système actuel qui est positionnel : « nous, si j'écris 123, est-ce que c'est la même chose que 321? » Les élèves ont alors répondu que non. Nous avons ajouté que « nous l'ordre des chiffres a beaucoup d'importance, dans le cas des Sumériens, c'est plus une question d'habitude et de disposition, mais effectivement, ça ne change pas la valeur du nombre ». Lors du travail d'équipe sur l'abaque sumérien, nous avons fait le parallèle avec notre planche à calculer où c'est toujours lorsqu'on atteint 10 qu'on doit changer de colonne. Une autre fois (lors de la division sumérienne), nous avons tenté de partir du vécu des élèves pour les amener plus loin. Nous leur avons proposé de s'imaginer que c'est un gros panier de pommes qu'ils avaient à se partager à 4 personnes. Ils préféraient des bonbons. Nous avons donc continué avec des bonbons : « Au lieu de les distribuer un bonbon, un, un, un, ce serait un peu long, vous êtes d'accord? Alors, on donne des paquets de bonbons, on va commencer par les plus gros paquets, on va donner les « soixantaines : un, un, un, un, un, un (…) ».

Parfois, nous demandions aux élèves de résumer leur pensée pour vérifier leur compréhension ou s'assurer de la compréhension de tous lors des présentations. C'est le cas lors de la présentation du système chinois où nous avons dû inviter l'équipe à résumer comment fonctionnait le système chinois à partir des défis écrits au tableau pour m'assurer que tout le monde de la classe comprenait bien.

Aussi, nous apportions quelquefois des précisions ou relevions gentiment des erreurs, comme avec l'équipe des Babyloniens qui découvrait ce système en base 60 : « le symbole de la colonne à gauche ne vaut pas 10 ». Ils ont alors réalisé que la colonne représentait des soixantaines. « Haaaaaaaa! C'est la colonne des 60! » Nous leur avons suggéré de vérifier leur hypothèse en regardant les trois premiers exemples de nombres supérieurs à 60. Une autre fois, il fallait expliquer aux élèves pourquoi personne dans la classe ne comprenait leurs explications, comme dans la présentation du système romain : « C'est que vous n'avez pas vraiment expliqué comment fonctionne ce système. Vous avez donné l'exemple du 4, mais vous n'avez pas expliqué comment on forme tous les autres nombres.

D'autres fois, nous en profitions pour introduire le vocabulaire. Nous avons présenté le terme « additif » lorsqu'une élève présentant le système sumérien a précisé qu'il suffisait d'additionner les symboles pour former un nombre (et nous l'avons comparé au système égyptien déjà présenté). Aussi, lorsque les élèves ont remarqué des régularités entre les différents ordres (fois 6, fois 10), nous avons introduit les termes « base » et « base intermédiaire ». Nous profitions aussi des observations des élèves pour aller plus loin. Lors de la présentation du système sumérien, lorsqu'un élève de la classe a remarqué que « comme les chiffres romains, il y a comme des chiffres entre, comme le 5, mais eux c'est le 6, nous en avons profité pour préciser que « Les chiffres *entre*, comme tu les appelles (rires dans la classe), comme le système romain, on dit qu'il est en base 10, parce qu'il y a un symbole pour 10, 100, 1 000 et les chiffres ou les symboles pour *entre* (5, 50, 500), on appelle ça la base intermédiaire. Donc, le système sumérien est un système en base 60, sauf qu'il a une base intermédiaire, le 10. Donc le 10 chez les Sumériens, c'est un peu comme le 5 chez les Romains. Est-ce qu'il y a une base intermédiaire chez les Égyptiens? » On a répondu que non. Nous avons précisé que tous les systèmes ont une base, mais pas tous ne possèdent une base intermédiaire. Plus tard, nous sommes revenue sur le concept de base lorsque les élèves présentaient le système maya et disaient que les Mayas faisaient « fois 20 » et sur le concept de base intermédiaire. Ils se rappelaient ce que c'était puisqu'un élève a répondu que la base intermédiaire du système maya était 5.

Parfois, nous leur donnions des petits conseils (surtout pour la confection de leur affiche), comme avec l'équipe des Romains : « Vous n'êtes pas obligés de tout écrire. Il faut juste que les élèves comprennent. Alors qu'est-ce qui est essentiel que vous ayez pour que les élèves comprennent? Il faut que vous déterminiez ensemble ce qui est essentiel à mettre sur votre affiche pour que les élèves comprennent le système romain. Vous pourrez expliquer avec des mots. Il y a quand même un minimum d'affaires à mettre sur votre affiche ». Avec l'équipe des Babyloniens, nous voyions qu'ils écrivaient des informations en mots et petits et nous leur avons demandé : «Est-ce que vous êtes sûrs que vous êtes obligés de tout écrire? Dites-vous que votre affiche va être devant, que les élèves vont être dans toute la classe… J'aimerais mieux que vous en écriviez moins, mais qu'on puisse le voir de partout. Si vous avez réussi à comprendre juste avec les tableaux que je vous ai donnés, vous devriez être capables de l'expliquer avec quelque chose de semblable ».

Enfin, nous tentions de les encourager lorsqu'ils se décourageaient : « Jusqu'à maintenant, vous avez tout bon, donc ça veut dire que vous comprenez. Utilisez ce que vous comprenez pour faire le dernier ». Aussi : « Vous avez remarqué qu'ils comptaient par

60 et vous avez remarqué qu'il y avait des colonnes, vous avez tout ce qu'il faut pour expliquer (à la classe) ».

Finalement, nous racontions parfois aux élèves des anecdotes pour enrichir leur culture générale. Nous avons fait le lien entre les systèmes oral et écrit chinois qui sont exactement les mêmes alors que pour nous, quatre cents ne s'écrit pas 4-100, mais bien 400. Nous avons raconté à l'équipe travaillant sur le boulier chinois le concours entre un Américain et un Japonais dans les années 40 pour voir la rapidité et la fiabilité de la calculatrice et du boulier chinois (vient d'Ifrah). Le Japonais avait gagné. Les élèves étaient étonnés, mais nous leur avons rappelé que les Asiatiques apprenaient à utiliser le boulier quand ils étaient petits et qu'à force de le manipuler, ils devenaient très habiles. Nous leur avons expliqué que dans le Quartier chinois de Montréal, ce n'était pas rare de voir des commerçants calculer le montant des achats avec un boulier. Lors de leur présentation, cette équipe a raconté cette anecdote à la classe. À l'équipe qui travaillait sur l'abaque romain et qui pensait qu'on ne devait que représenter la réponse de l'addition, nous avons précisé qu'il s'agissait plutôt d'un instrument de calcul et qu'ils devaient faire les calculs sur celui-ci. « L'abaque romain est un outil de calcul, ils s'en servaient pour calculer, ce n'était pas juste pour représenter la réponse ».

En outre, il a été difficile pour la praticienne que nous sommes de ne pas aller au tableau pour expliquer plus clairement lors de la présentation des Mayas, mais la patience nous a récompensée puisque les élèves qui présentaient ont fini par bien expliquer eux-mêmes et les élèves de la classe ont finalement compris ce système. Lorsqu'ils étaient vraiment embrouillés, nous avons quand même proposé à l'équipe de prendre des nombres plus petits et ce conseil a permis à plusieurs élèves de comprendre. Par contre, nous avons succombé pendant la présentation moins claire des Chinois. Nous y revenons dans la prochaine section : les points à améliorer.

**Les points à améliorer**

Nous avons vu qu'en général, nous avons conservé un rôle de guide qui questionne les élèves, mais une fois, nous avons fait une démonstration au tableau, quelques fois, nous avons donné des explications trop rapidement et d'autres fois, nous avons dicté aux élèves la marche à suivre plutôt que de les questionner.

Ainsi, lors de la présentation du système chinois, nous nous sommes permis d'aller au tableau et de faire une démonstration d'une décomposition (9 x 10 000) + (5 x 1 000) + (4 x 100) + (7 x 10) + 6 puisque les élèves n'arrivaient pas à expliquer clairement ce système hybride. Nous avons expliqué que les Chinois : « mettent toujours l'unité, fois la puissance de 10, l'unité fois la puissance de dix ». Nous en avons profité pour introduire le terme « système hybride » puisque dans ce système, on multiplie et on additionne et avons ajouté que s'il n'y a pas d'unités de milles par exemple, on n'écrit rien. Il aurait été préférable que ce soit les élèves qui arrivent à présenter à l'aide de questions précises de notre part.

Aussi, nous sommes parfois allée trop vite et aurions dû patienter un peu plus lors du travail sur les opérations. En effet, pour l'équipe des Chinois, nous leur avons trop rapidement proposé le feuillet explicatif. Les élèves, très déterminés, ont préféré trouver par eux-mêmes. Plus tard, nous avons voulu vérifier leur compréhension du fonctionnement du boulier, mais en leur dictant les étapes à suivre. Nous les avons donc trop dirigés. En effet, nous leur avons demandé de représenter un nombre, puis d'ajouter un deuxième nombre. Nous aurions plutôt dû les questionner à savoir comment ils pensaient que les Chinois faisaient pour additionner deux nombres plutôt que de leur dicter quoi faire. Pour les Babyloniens aussi, nos interventions ont peut-être été trop rapides. Nous aurions dû leur laisser plus de temps pour qu'ils essayent de comprendre par eux-mêmes avant de leur dicter la marche à suivre. Plus tard, au lieu de leur faire remarquer la ressemblance avec la planche à calculer, nous aurions dû les questionner à savoir à quoi l'abaque mésopotamien leur faisait penser. Peut-être auraient-ils remarqué eux-mêmes la similitude entre les deux outils de calcul?

Pour l'équipe des Sumériens, ils avaient présenté tous les symboles sur leur affiche, mais n'avaient pas mis d'exemples de nombres sumériens formés de plusieurs symboles. Nous leur avons proposé d'en mettre pour être sûr que les élèves de la classe comprennent le principe et qu'ils puissent réussir les défis. Plutôt que de leur dire quoi faire, nous aurions dû leur demander s'ils étaient sûrs que les informations sur leur affiche étaient suffisantes pour réaliser les défis qu'ils avaient préparés. Ainsi, ils auraient probablement proposé cette solution.

Enfin, lors des additions et soustractions sur l'abaque romain, cette équipe trouvait complexes les nombreux échanges entre les colonnes, mais surtout, entre la partie du haut et celle du bas. Nous leur avons donc fait une petite démonstration et c'était un peu plus clair. Il aurait été préférable de les questionner ou de leur faire des parallèles avec notre algorithme conventionnel plutôt que de leur faire une démonstration. Avec les Sumériens, nous avons également été trop directive puisque rapidement dans notre intervention, nous leur avons expliqué qu'on commence par représenter le premier nombre, c'est 328, donc il y a 5 soixantaines, 2 dizaines et 8 unités. Sur une autre ligne, on vient représenter le deuxième nombre ». « Là c'est à vous d'essayer de faire cette addition-là ». Toujours avec cette équipe, lors des multiplications, en leur remettant l'outil de calcul pour qu'ils proposent des hypothèses, nous leur avons tout de suite dit qu'il s'agissait d'une addition répétée plutôt que de leur laisser découvrir. Lors des divisions aussi, nous avons été trop directive : « Les 7 dizaines du début, plus les 6 dizaines qui viennent de la soixantaine, là en tout ça fait 13, donc chacun en a 2 et il en reste une, que tu envoies dans les unités. Avec les 8 qu'il y avait déjà, ça fait 18, que tu peux séparer en 6. La réponse, c'est n'importe quelle rangée, chacun va recevoir une soixantaine, deux dizaines et 3 unités de bonbons ».

Finalement, pour les présentations des quatre opérations, nous aurions dû insister pour faire ressortir les ressemblances et les différences avec les algorithmes conventionnels plutôt que de comparer les procédés anciens à la planche à calculer. Les analyses en auraient été que plus intéressantes et les apprentissages, plus en lien avec les savoirs essentiels du programme de formation.

Nous avons fait un retour sur les aspects de notre problématique (notre contexte d'enseignement) et sur notre cadre conceptuel (la pertinence de l'histoire des mathématiques et l'approche pédagogique préconisée : le constructivisme). Voyons maintenant si nos choix méthodologiques se sont avérés judicieux.

## 6.4. Retour sur les aspects méthodologiques

Nous revenons maintenant sur les aspects méthodologiques de notre étude qui étaient décrits dans notre troisième chapitre. Nous faisons le point sur le fait que nous avons mené notre recherche en portant le double rôle de praticienne et de chercheure. Nous examinons les conditions que nous avions à respecter pour que notre recherche soit rigoureuse à travers une analyse de nos outils de collecte de données.

## La recherche menée par un praticien : ses apports

Nous avions vu quatre principaux avantages aux recherches menées par des praticiens : le rapprochement entre la recherche et la pratique, une amélioration de la qualité de l'enseignement et/ou de l'apprentissage, la réflexion sur la pratique de l'enseignant-chercheur et finalement, la bonne connaissance du milieu. Ainsi, nous avons mené une recherche universitaire parfaitement adaptée à notre contexte puisque nous avions nous-mêmes identifié notre problématique et trouvé des solutions après une recension des écrits. Aussi, nous croyons que notre étude pourra intéresser d'autres enseignants, particulièrement s'ils savent que c'est une enseignante, comme eux, qui l'a menée. Nous comptons d'ailleurs en publier un résumé dans une revue professionnelle.

Aussi, il est évident que toute notre démarche doctorale a amélioré concrètement la qualité de notre enseignement dans notre classe, et ce, jusqu'à la fin de notre carrière. En effet, l'analyse approfondie de nos deux programmes d'étude et des manuels de mathématiques, la recension des écrits sur l'histoire des mathématiques, les contenus abordés (arithmétique) et l'appropriation de l'histoire des chiffres fait de nous une meilleure enseignante. Aussi, en comprenant mieux le constructivisme, nous avons intégré cette approche pédagogique à notre façon d'enseigner, et ce, dans toutes les matières. De plus, toutes ces lectures et ces analyses ont favorisé une meilleure réflexion sur notre pratique et avons depuis pris le réflexe de toujours nous questionner, nous remettre en question, tenter de nous améliorer.

Enfin, le fait d'être l'enseignante de la classe de l'expérimentation a permis une expérimentation naturelle où on ne « chambardait » pas le quotidien des élèves. Tout se passait comme d'habitude, avec la personne habituelle. Nous avons noté une autre retombée positive de notre expérience : l'intérêt qu'ont les élèves pour la recherche universitaire. Autant les élèves avec qui nous avons expérimenté cette séquence que les suivants à qui nous expliquons notre démarche doctorale sont intéressés et impressionnés que quelqu'un de leur entourage fasse des études aussi poussées. Aussi, ils voient le caractère concret de la recherche et ses retombées.

## Les outils de collecte de données

Les outils utilisés ont été ceux que nous avions présentés, c'est-à-dire le journal de bord, l'enregistrement vidéo, deux tests de compréhension et un questionnaire d'appréciation de la séquence. Nous avons couplé ces données pour faire une forme de triangulation. Chacun de ces outils s'est avéré essentiel, chacun apportant un aspect complémentaire aux autres. L'enregistrement vidéo a permis de plus que doubler les données de notre journal de bord. En effet, nous avions d'abord rédigé notre journal de bord quotidiennement en noir. Nous avions une quinzaine de pages. Puis, nous avons ajouté, en rouge, les informations que nous apportaient les enregistrements vidéo (les durées précises, des paroles des élèves, nos interventions). Nous avions alors une quarantaine de pages. Enfin, nous avons ajouté les réponses des élèves aux tests de compréhension et au questionnaire d'appréciation pour atteindre une soixantaine de pages (à l'annexe 13).

La combinaison de nos trois sources a rendu nos données plus robustes. Parfois, l'enregistrement venait préciser ou carrément modifier la durée de l'activité que nous avions notée dans notre journal de bord (notamment lors du travail de trois équipes simultanément). Aussi, l'enregistrement vidéo, bien que nous n'entendions pas toujours clairement ce que les élèves disaient, a permis d'avoir des extraits de leurs paroles, surtout lors des présentations. Enfin, les tests nous renseignaient sur la compréhension qu'avait chaque élève de son système ou des opérations, que nous ne pouvions pas toujours avoir avec le journal de bord et l'enregistrement vidéo. D'ailleurs, le journal de bord est parfois venu à la rescousse lorsque nous avons eu des problèmes d'enregistrement vidéo et à l'inverse, l'enregistrement vidéo est une fois venu remplacer le journal de bord lorsque nous avons perdu la trace d'une partie de celui-ci.

## 6.5. Les limites de cette recherche

Comme toute recherche, celle-ci a des limites. La principale est le fait que l'échantillon était restreint à une seule classe, qui plus est, était composée d'élèves sélectionnés. Ainsi, il est difficile de reproduire cette étude (ou cette séquence) telle qu'elle a été élaborée, puisqu'elle répondait aux exigences spécifiques du contexte d'enseignement de la chercheure (des élèves sélectionnés – donc en facilité d'apprentissage – suivant le programme de formation de l'école québécoise (MÉLS Ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport, 2001) et le Programme primaire international (Organisation du Baccalauréat International, 2007). Aussi, comme notre objectif était d'élaborer une séquence pour répondre aux exigences de notre clientèle spécifique, nous avions moins un souci de la répliquer dans une autre classe.

En outre, notre but premier n'étant pas de surmonter des difficultés en numération ou dans les opérations mathématiques (additions, soustractions, multiplications et divisions), nous n'avons pas fait une étude avec pré tests et post-tests pour comparer la compréhension ou les habiletés des élèves, ni fait une étude avec un groupe expérimental et un groupe témoin (un deuxième groupe n'existant pas dans notre milieu).

Dans le but d'améliorer notre séquence, dans notre questionnaire d'appréciation, nous avons demandé aux élèves ce qu'ils changeraient au projet pour l'améliorer. Cinq élèves ne changeraient rien au projet tellement ils l'ont apprécié tel qu'il était : « De le laisser comme ça parce que j'ai trouvé la plupart des choses intéressantes »; « Il est déjà fort intéressant et je ne voudrais pas qu'il change »; « Rien, je le trouve parfait comme ça! » et « Rien ». Un élève n'a rien répondu.

Les autres élèves ont fait certaines propositions pour améliorer le projet. Certains élèves ont proposé d'enlever les activités qu'ils avaient le moins aimées : « Enlever les ressemblances et différences après chaque présentation »; « Moi, pour que ce soit plus intéressant, je supprimerais le survol historique »; « De ne pas mettre les TP de chiffres »; « L'anecdote du corbeau ne nous apprenait pas grand-chose, mais la ligne du temps c'est une bonne idée ». Un élève n'a pas aimé une activité, mais a considéré sa pertinence : « Moi, je n'ai pas aimé la récapitulation, mais ça c'est nécessaire, alors ».

D'autres élèves proposaient de modifier les activités qu'ils avaient moins appréciées, mais les réponses ne sont pas claires et précises. Voyons les changements qu'ils proposent aux activités de préparation. Cinq élèves modifieraient le *Ce que je sais* que l'on fait au début de chaque module de recherche : « De changer la façon de faire le « ce que je sais »; « Faire le « ce que je sais » d'une autre manière »; « Je changerais le « ce que je sais » pour plus original »; « Le « ce que je sais » et le « ce que j'ai appris », plutôt le faire en équipe puis en groupe »; « Le « ce que je sais », car ce n'était pas très original et c'était un peu long »; « Modifier les Papous »; « Que la légende du corbeau devienne mimique (quelqu'un vient en avant et le fait) ». Pour les activités d'apprentissage, peu de modifications sont proposées et toutes concernent les présentations : « Les présentations, les modifier parce que ce n'est pas si original que ça une affiche » et « Laisser plus de temps pour préparer les présentations comme ça, ça pourrait ne pas toujours être juste des affiches ». Enfin, une modification est proposée pour une activité d'intégration : « Modifier la récapitulation en une activité ». Une proposition est plus d'ordre organisationnel : « Travailler plus en avant-midi, car l'après-midi, c'est plus dur »; et finalement, nous comprenons mal ces deux propositions puisqu'il y avait peu de travail écrit et encore moins de rédaction : « Faire moins de travail écrit, ex : modifier présentations » et « De moins faire de rédaction, surtout vers la fin de l'année ».

D'autres élèves n'enlèveraient rien et ne modifieraient rien, ils ajouteraient des activités complémentaires : « J'écouterais des films ou des documentaires parlant de ce sujet »; « Faire des jeux ou des concours »; « Je mettrais plus d'activités à l'ordinateur ». Par contre, la prochaine réponse est ambigüe : « Il y ait plus de TP pour les chiffres, les additions et soustractions et divisions et multiplications » parce qu'on ne sait pas si le « plus » veut dire « davantage » ou « plus du tout ». Enfin, une réponse est très vague : « Il est assez intéressant, sauf un peu long ».

Enfin, à la question : « Qu'est-ce que tu changerais à ce projet pour qu'il permette de faire encore plus d'apprentissages? » huit élèves n'ont rien écrit, quatre élèves ont écrit « rien » et un élève a répondu : « Là, je ne sais pas ». Trois réponses encourageaient à ne rien changer : « De continuer les mêmes activités »; « Il n'y a rien à ajouter parce que déjà le projet était complet » et « Tout est parfait ».

Certains élèves ont fait des suggestions pertinentes et/ou en voulaient encore plus: « Faire plus de petites équipes, comme ça il y aurait plus de systèmes travaillés et présentés et appris »; « De rajouter d'autres sortes de chiffres »; « Aller sur des sites internet »; « Faire une sortie au musée des maths » (s'il pouvait y en avoir un à Montréal…) et encore « Aller au musée ». D'autres suggestions sont vagues : « Pas grand-chose, modifier les présentations » et « Tu fasses des expériences sur l'anecdote », pour les autres réponses, on ne voit pas en quoi ces propositions viendraient améliorer le projet pour permettre aux élèves de faire plus d'apprentissages : « Travailler à l'extérieur quand il fait beau »; « De moins faire toujours des SVA à chaque étape du projet, mais quand même en faire, mais moins long » et « Parler des trucs « Les maths c'est magique » (mathémagie) ».

Aussi, faire faire trois présentations (dont deux semblables sur les opérations) multipliées par six équipes était sans doute trop. Certains élèves se sont lassés et cela a demandé beaucoup de temps. Dans la prochaine section, nous proposons des alternatives.

Une autre limite de notre recherche est d'ordre méthodologique et concerne l'enregistrement vidéo. En effet, lors du travail d'équipe, bien que nous ayons pris le soin de ne garder dans la classe que la moitié de nos élèves (trois équipes sur six) et de les filmer avec chacune une caméra, la qualité du son n'était pas toujours bonne. Nous n'avions donc pas toutes les paroles des élèves. Il aurait été judicieux de faire travailler une équipe à la fois dans un petit local et de les filmer. Par contre, cette façon de faire aurait été beaucoup moins naturelle et très différente des activités habituelles d'un module de recherche. Pour ce qui est des présentations des élèves, le problème se posait moins, normalement un élève à la fois parlait et on entendait bien.

Maintenant que nous avons vu les limites de cette recherche, comment pourrions-nous l'améliorer? Comment pouvons-nous l'adapter à une clientèle plus large que nos élèves de cinquième année en facilité d'apprentissage et qui suivent le Programme primaire international?

## 6.6. Les suites à donner à cette recherche

Dès cette année, nous serons amenée à adapter notre séquence à une clientèle régulière. En effet, l'école Wilfrid-Pelletier -où enseigne la chercheure- est devenue entièrement internationale. Avant, seule une classe par niveau, composée d'élèves sélectionnés provenant de toute la commission scolaire, suivait ce programme, mais maintenant, il est offert à toutes les classes de l'école. On aura donc affaire à une clientèle du quartier avec ses élèves forts, moyens et faibles et ses élèves ayant des troubles d'apprentissage et/ou de comportement. Nous avons déjà commencé à réorganiser notre séquence pour aller à l'essentiel (les élèves ayant besoin de plus de temps en français et en mathématiques en ont habituellement moins pour les modules de recherche du Programme international).

Nous continuerons à faire les activités de mise en contexte puisqu'elles sont faciles et rapides. Pour ce qui est des activités d'apprentissage, l'activité sur les différents systèmes de numération se fera telle qu'elle est dans la séquence, ainsi que la présentation aux élèves de la classe. Pour les additions et les soustractions, nous avons déjà commencé, depuis l'an dernier, à faire trois ateliers tournants où tous les élèves (en équipes) expérimentent ces opérations. Tous les élèves se frottent donc aux additions et soustractions égyptiennes, aux sumériennes ou babyloniennes (puisque les techniques sont identiques) et aux romaines ou aux chinoises (puisque ces procédés sont aussi très semblables). Ainsi, les élèves sont plus actifs et il est moins redondant de faire une autre présentation après celles sur les différents systèmes. Pour ce qui est des multiplications et des divisions, nous proposons de voir en équipes, mais toute la classe en même temps, les opérations égyptiennes puisqu'elles sont si différentes de notre façon de faire actuelle. D'ailleurs, les autres feuillets explicatifs des multiplications et des divisions et les outils de calcul seraient placés dans le coin enrichissement pour les élèves plus rapides ou plus forts.

De plus, il serait possible de diviser le contenu selon les années scolaires. Nous avons expérimenté dans la classe –elle aussi internationale sélectionnée- de notre garçon en première année et en deuxième année, mais voici plutôt comment on pourrait voir les différents systèmes à travers les niveaux. Le système égyptien –en base dix et additif- est très semblable au matériel multi bases (blocs base 10) utilisé dans les classes. Il pourrait être présenté en 2$^{e}$ année et les additions et les soustractions pourraient être présentées en troisième année, en parallèle ou au lieu de faire travailler les élèves avec le matériel multi bases. Le système chinois pourrait être présenté en 3$^{e}$ année, en même temps que la décomposition (par exemple : 324 : 3 c. + 2 d. + 4 u.). Le boulier pourrait être présenté en 4$^{e}$ ou en 5$^{e}$ année, étant un type de matériel abstrait, tel que vu dans la section 2.2. Pour ce qui est des systèmes en base autres que décimale, nous proposons d'attendre la 5$^{e}$ ou la 6$^{e}$ année puisqu'ils demandent une excellente compréhension du principe de groupement. Aussi, comme les systèmes positionnels sont également plus difficiles à comprendre, nous proposons de les garder pour le 3$^{e}$ cycle (5$^{e}$ ou 6$^{e}$ année).

# Conclusion

Ce dernier chapitre était consacré à la discussion où nous sommes revenue sur toutes les parties de notre recherche. Dans notre retour sur la problématique, nous avons vu la pertinence de cette séquence pour notre milieu (des élèves en facilité d'apprentissage dans une classe de cinquième année qui suivent le Programme primaire international et le programme du MÉLS). Nous avons discuté également de la pertinence de l'enseignement de l’histoire des mathématiques du point de vue des élèves (l’intérêt et la motivation, la perception des mathématiques et l’apprentissage et la compréhension). La discussion a également porté sur les différentes façons d’introduire l’histoire des mathématiques retenues par rapport à toutes celles présentées et le constructivisme. Puis, nous sommes revenue sur les aspects méthodologiques et avons discuté des conditions à respecter. Finalement, comme toute recherche, nous avons établi les limites de cette étude et proposé des pistes pour y donner suite.

# Conclusion générale

Notre contexte pratique – nous enseignons à des élèves doués de cinquième année suivant le programme international – a grandement influencé la présente recherche. Nous souhaitions stimuler nos élèves doués pour éviter leur sous-performance et pensions que les repères culturels en mathématiques représentaient une voie intéressante. Ainsi, nous avons montré la pertinence d'introduire l'histoire des mathématiques à notre enseignement pour les élèves et pour les enseignants et présenté les difficultés inhérentes à son intégration. Le Programme primaire international propose justement un module de recherche ayant pour titre *Où nous nous situons dans l'espace et le temps.* Nous avons vu que le programme du MÉLS accorde une grande importance à la compétence *résoudre une situation-problème mathématique*. Toutefois, du côté des manuels, tous les exemples abordant l'histoire des mathématiques restaient en surface et ne proposaient pas de réelles résolutions de problèmes. Aussi, tout comme Tzanakis et al. (2000), Michalowicz et al. (2000) et Heiede (1996), nous avons constaté qu'il existait peu de ressources pédagogiques pour les enseignants du primaire.

Dans notre cadre conceptuel, nous avons recensé diverses façons d'intégrer l'histoire des mathématiques en classe en pointant celles qui étaient les plus appropriées pour une clientèle du primaire. Les feuilles de travail, les activités mathématiques expérimentales et les opérations à la manière de nos prédécesseurs nous semblaient particulièrement pertinentes. Pour que le lecteur comprenne bien la séquence d'enseignement, nous avons cru bon de décrire les six systèmes de numération retenus (sumérien, égyptien, babylonien, chinois, romain et maya) et notre système actuel –le système indo-arabe– avec leurs principales caractéristiques. Ensuite, nous avons relevé les difficultés que certaines pratiques des enseignants ou des manuels scolaires peuvent poser aux élèves. Tout comme Bednarz et Janvier (1984), nous pensions que l'étude de l'histoire de la numération pouvait permettre aux élèves de remarquer la pertinence du recours au groupement, de constater la supériorité de notre système de numération actuel et d'en évaluer l'efficacité lors d'opérations arithmétiques. Aussi, nous croyions qu'effectuer des opérations à la manière de nos prédécesseurs pouvait également permettre de faire des liens entre la numération et les opérations, ce que préconisaient Bednarz et Janvier (1984). Par contre, parmi toutes les études consultées, nous avons réalisé que très peu s'adressaient aux élèves du primaire ou décrivaient une méthodologie rigoureuse. Nous avons ensuite exposé notre conception de l'enseignement et de l'apprentissage qui repose sur les mêmes bases que nos deux programmes d'étude : le constructivisme. Rappelons que l'objectif spécifique de la thèse consistait à concevoir, élaborer, mettre à l'essai et analyser une séquence d'enseignement/apprentissage de l'arithmétique basée sur son développement historique dans une classe de 5$^{e}$ année du primaire suivant le Programme primaire international (PP).

Le chapitre sur la méthodologie a permis une mise en contexte de notre recherche à l'intérieur de la recherche en sciences de l'éducation. La recherche appliquée ou dite pédagogique a particulièrement retenu notre attention. Nous avons pu, ainsi, mieux apprécier les apports spécifiques des recherches menées par des enseignants, qui rappelons-le, permettent un rapprochement entre la recherche et la pratique; améliorent la qualité de l'enseignement et/ou de l'apprentissage; favorisent la réflexion sur la pratique de l'enseignant-chercheur et favorisent une meilleure compréhension des enjeux et une expérimentation plus naturelle .tant donné la bonne connaissance du milieu par celui-ci. Ensuite, nous avons vu les conditions particulières à mettre en place pour éviter les biais et satisfaire aux exigences de la recherche scientifique, c'est-à-dire l'utilisation d'une variété d'outils de collecte de données. Ainsi, nous avons constitué une trace primaire grâce à des enregistrements vidéo, nous avons tenu un journal de bord quotidien et avons passé deux tests et un questionnaire qui nous ont permis une forme de triangulation. Dans le but d'éviter des biais pouvant provenir des élèves ou de la chercheure, nous avons recensé ceux que nous pouvions rencontrer et suivi les recommandations proposées par Van der Maren (1995). Enfin, pour nous assurer de mener une recherche rigoureuse, nous avons détaillé les exigences de la rigueur scientifique, soit la fidélité, la validité ou la pertinence, la validité interne ou la consistance, la validité externe ou la transférabilité et l'objectivité.

Le quatrième chapitre décrivait la planification de chacune des activités. On retrouvait tout d'abord quelques activités de mise en contexte pour entrer dans le sujet et faire surgir les connaissances antérieures des élèves. Ensuite, nous avons décrit les activités d'apprentissage que nous allions proposer aux élèves. Ainsi, il s'agissait, pour les élèves, de découvrir le fonctionnement de différents systèmes de numération qu'a connu l'humanité (sumérien, égyptien, babylonien, romain, chinois et maya) et d'effectuer les différentes opérations (additions, soustractions, multiplications et divisions) à la manière de ces mêmes peuples. Puis, nous avons terminé en décrivant les activités d'intégration qui permettent de faire des liens entre les différents systèmes et notre système actuel, d'intégrer les apprentissages et d'ouvrir vers d'autres horizons et disciplines. Afin de mieux comparer ce que nous avions anticipé (la conduite attendue des élèves) avec ce qu'il s'est effectivement passé en classe, nous avons également décrit, en italique, le déroulement sommaire des activités.

Les analyses étaient présentées en trois blocs : la découverte des différents systèmes de numération et leur présentation, les additions et les soustractions dans les mêmes systèmes et enfin, les multiplications et les divisions. Le premier bloc d'activités s'est déroulé sensiblement tel qu'anticipé dans notre séquence. Les équipes ayant souvent terminé rapidement, on peut dire que la tâche était relativement facile. Les réponses au test de compréhension, bien qu'habituellement correctes, restaient souvent en surface. Plus du tiers des élèves ont considéré que le projet avait amélioré leur compréhension de notre système de numération, mais les justifications qu'ils donnaient n'étaient pas convaincantes. En effet, certains élèves ont nommé ce qu'ils ont appris, mais ils n'ont pas expliqué clairement en quoi ces apprentissages les aidaient à mieux comprendre notre système de numération. D'autres élèves ont souligné l'évolution des mathématiques, mais sans expliquer en quoi cela les aidait à comprendre notre système. Comme la plupart de nos élèves était en facilité d'apprentissage, plusieurs d'entre eux n'ont pas eu l'impression que le projet les a aidés à mieux comprendre notre système de numération tout simplement parce qu'ils considéraient qu'ils le comprenaient déjà bien. L'objectif de faire des liens entre les différentes sortes de systèmes (additifs, hybride et positionnels) et entre les différentes bases de groupements pour améliorer chez nos élèves leur compréhension de notre système actuel n'a été que partiellement atteint. En effet, quelques élèves ont répondu que le projet ne les avait pas aidés à mieux comprendre le fonctionnement de notre système de numération parce qu'ils avaient surtout travaillé sur d'autres systèmes que le système indo-arabe. Leur réponse témoigne ainsi du peu de liens qu'ils ont établis entre les différents systèmes à l'étude et notre système de numération.

Le deuxième bloc d'activités s'est aussi déroulé tel que prévu. Les élèves ont généralement réussi à faire les additions et les soustractions à la manière de leur peuple. Toutes les équipes ont parlé des échanges nécessaires entre les colonnes, certains en les nommant *emprunts* et *retenues*, comme dans notre algorithme conventionnel. Par contre, nous aurions dû insister pour que les élèves comparent les différentes méthodes avec les algorithmes conventionnels et non avec la planche à calculer lors des discussions et du test de compréhension. Les discussions et les liens entre les différentes techniques auraient été beaucoup plus riches. Une dizaine d'élèves ont considéré que la séquence les avait aidés à mieux comprendre les opérations, mais encore une fois, les justifications n'étaient pas étoffées. D'autres réponses étaient très vagues. Plusieurs élèves considéraient qu'ils n'avaient plus grand-chose à apprendre concernant les opérations. Bien qu'elles aient été un peu plus laborieuses, les activités sur les multiplications et les divisions se sont également déroulées tel que nous l'avions anticipé. Pour ces opérations aussi, nous avons quelque peu raté notre objectif qui était de faire des liens entre les différentes méthodes et les algorithmes conventionnels de multiplication et de division, puisque peu d'élèves ont ressorti des ressemblances entre les différents procédés présentés et les algorithmes conventionnels. Comme pour les deux autres blocs, les élèves ont eu du mal à comparer les procédés : la plupart d'entre eux décrivaient une caractéristique de leur système ou de notre procédé actuel, mais sans les mettre en parallèle (ressemblances) ou en opposition (différences). La principale différence entre ce qui avait été planifié et la réalité aura été la durée de la séquence. En effet, nous avions prévu la faire sur six semaines, mais elle s'est prolongée sur neuf semaines.

Finalement, le dernier chapitre était consacré à la discussion de toutes les parties de notre recherche. À propos de la problématique, nous avons souligné la pertinence de cette séquence pour notre milieu et avons discuté de la pertinence de l'enseignement de l'histoire des mathématiques du point de vue des élèves (l'intérêt et la motivation, la perception des mathématiques et l'apprentissage et la compréhension). La discussion a également porté sur les éléments de notre cadre conceptuel, à savoir les différentes façons d'introduire l'histoire des mathématiques retenues par rapport à toutes celles présentées, les apprentissages réalisés, les difficultés rencontrées en arithmétique par les élèves et les balises du constructivisme. Puis, nous avons discuté des aspects méthodologiques que nous avions prévus, des conditions à respecter. Finalement, comme dans toute recherche, nous avons établi les limites de cette étude et proposé des pistes pour y donner suite.

# Bibliographie


Artigue, M. (1996). Ingénierie didactique. In J. Brun (Ed.), *Didactique des mathématiques* (pp. 243-274). Lausanne: Delachaux et Niestlé.

Astolfi, J.-P. (1997). *L'erreur, un outil pour enseigner*. Paris: ESF Éditeur.

Astolfi, J.-P. (2008). *La saveur des savoirs, Disciplines et plaisir d'apprendre*. Thiron: ESF éditeur.

Avital, S. (1995). History of mathematics can help improve instruction and learning. In F. Swetz, J. Fauvel, O. Bekken, B. Johansson & V. Katz (Eds.), *Learn from the masters!* (pp. 3-12). Washington D.C.: The Mathematical Association of America.

Balacheff, N., & Neyret, R. (1982). Bouliers et opérations au CM. *Grand N*(28), 67-87.

Barbin, E. (1996). The role of problems in the history and teaching of mathematics. In R. Calinger (Ed.), *Vita mathematica, Historical research and integration with teaching* (pp. 17-26). Washington, D.C.: The Mathematical Association of America.

Barbin, E. (1997). Histoire et enseignement des mathématiques: Pourquoi? Comment? *Bulletin AMQ, 37*(1), 20-25.

Barbin, E. (2000). Que faut-il enseigner, pour qui, pourquoi: des réponses dans l'histoire des mathématiques. *Repères-IREM*(38), 43-51.

Barbin, E., Bagni, G. T., Grugnetti, L., Kronfellner, M., Lakoma, E., & Menghini, M. (2000). Integrating history: research perspective. In J. Fauvel & J. Van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: The ICMI study* (pp. 63-90). Dordrecht: Kluwer Academic publishers.

Bartolini Bussi, M. (2000). Ancient instruments in the modern classroom. In J. Fauvel & J. Van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: The ICMI study* (pp. 343-350). Dordrecht: Kluwer Academic

Bednarz, N., & Janvier, B. (1984). La numération, les difficultés suscitées par son apprentissage. *Grand N*(33), 7-31.

Bloom, B. S., Englehart, M. D., Furst, E. J., Hill, W. H., & Krathwohl, D. R. (1975). *Taxonomie des objectifs pédagogiques*. Montréal: Les Presses de l'Université du Québec.

Brousseau, G. (1996). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. In J. Brun (Ed.), *Didactique des mathématiques* (pp. 98 ). Paris: Delachaux et Niestlé.

Bruckheimer, M., & Arcavi, A. (2000). Mathematics and its history: an educational partnership. In V. Katz (Ed.), *Using history to teach mathematics: an international perspective* (pp. 135-146). Washington, D.C.: The Mathematical Association of America.

Caron, R. (1984). La pensée mathématique à travers l'histoire et chez l'enfant. *Instantanés Mathématiques, 20*(5), 12-22.

Cerquetti-Aberkane, F. (2000). *Enseigner les mathématiques à l'école*. Paris: Hachette.

Cerquetti-Aberkane, F. (2007). *Enseigner les mathématiques à l'école élémentaire*. Paris: Hachette.

Cerquetti-Aberkane, F., & Rodriguez, A. (2002). *Faire des mathématiques avec des images et des manuscrits historiques*. Champigny-sur-Marne: CRDP de l'académie de Créteil.

Cerquetti-Aberkane, F., & Rodriguez, A. (2006). *L'utilisation de manuscrits historiques authentiques comme déclencheur de l'activité de résolution de problèmes mathématiques en primaire.* Paper presented at the EMF, Sherbrooke.

Cerquetti-Aberkane, F., Rodriguez, A., & Johan, P. (1997). *Les maths ont une histoire. Activité au cycle 3*. Paris: Hachette Éducation.

Charbonneau, L. (2006). Les enseignants, l'histoire des mathématiques et les nouveaux programmes, novembre 2006

Corbeil, J. (2004). *Le rôle de l'histoire des mathématiques dans la compréhension de l'algorithme usuel de la multiplication au 3e cycle du primaire.* Université de Montréal, Montréal.

Dadds, M., & Hart, S. (Eds.). (2001). *Doing practitioner research differently*. Londres: RoutledgeFalmer.

Daniel, C. (2000). Mathematically gifted and talented students. In J. Fauvel & J. Van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: The ICMI study* (pp. 188-195). Dordrecht: Kluwer Academic.

De Blois, L. (1996). La numération de position au primaire. *Recherches en didactique des mathématiques, 16*(1), 71-128.

Dennis, D. (2000). The role of historical studies in mathematics and science educational research. In D. Lesh & A. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 14 p.). Mahwah: Lawrence Erlbaum.

EdutechWiki (2009a). http://edutechwiki.unige.ch/fr/Constructivisme

EdutechWiki (2009b). http://edutechwiki.unige.ch/fr/Socio-constructivisme

Fauvel, J. (1995). Revisiting the history of logarithms. In F. J. Swetz, J. Fauvel, O. Bekken, B. Johansson & V. Katz (Eds.), *Learn from the masters!* (pp. 39-48). Washington: The Mathematical Association of America.

Fauvel, J. (1996). Empowerment through modelling: the abolition of the slave trade. In R. Calinger (Ed.), *Vita mathematica, historical research and integration with teaching* (pp. 125-130). Washington D.C.: The Mathematical Association of America.

Fénichel, M., & Pauvert, M. (1997). *L'épreuve de mathématiques au concours des professeurs des écoles*. Paris: Armand Colin.

Francoeur-Bellavance, S. (2008). Le travail en projet Retrieved février 2008, 2008, from http://www.centre-integra.com/projet/projet.htm

Gattuso, L. (1993). *Les conceptions personnelles au sujet de l'enseignement des mathématiques et leur reflet dans la pratique, un essai d'autoanalyse.* Université de Montréal, Montréal.

Grugnetti, L. (2000). The history of mathematics and its influence on pedagogical problems. In V. Katz (Ed.), *Using history to teach mathematics: an international perspective* (pp. 29-36). Washington, D.C.: The Mathematical Association of America.

Grugnetti, L., & Rogers, L. (2000). Philosophical, multicultural and interdisciplinary issues. In J. Fauvel & J. Van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: The ICMI study* (pp. 39-62). Dordrecht: Kluwer Academic.

Guay, S. e. a. (2003). *Clicmath, 3e cycle*. Montréal: Grand Duc, HRW

Guedj, D. (2000). Rendons les mathématiques aimables. *L'Express,* pp. 10-12.

Guedj, D. (2004). Un, deux, trois, plusieurs... *Hors-série Sciences et avenir avril/mai 2004*, 4-7.

Heiede, T. (1996). History of mathematics and the teacher. In R. Calinger (Ed.), *Vita mathematica, Historical research and integration with teaching* (pp. 231-244). Washington, D.C.: The Mathematical Association of America.

Hitchcock, G. (1996). Dramatizing the birth and adventures of mathematical concepts: two dialogues. In R. Calinger (Ed.), *Vita mathematica, Historical research and integration with teaching* (pp. 27-41). Washington, D.C.: The Mathematical Association of America.

Hopkins, T. M., & Cady, J. A. (2007). What is the value of @*? Deepening teachers' understanding of place value. *Teaching children mathematics*(avril), 434-437.

Ifrah, G. (1994a). *Histoire universelle des chiffres, tome 1: L'intelligence des hommes racontée par les nombres et le calcul* (Vol. 1). Paris: Robert Laffont.

Ifrah, G. (1994b). *Histoire universelle des chiffres, tome 2: L'épopée du calcul : des cailloux à l'ordinateur* (Vol. 2). Paris: Laffont.

Inter-IREM-épistémologie, C. (1993). *Histoire de problèmes, histoire des mathématiques*. Paris: Ellipse.

Inter-IREM, C. (1984). *Actes de l'université d'été sur l'histoire des mathématiques.* Paper presented at the Université d'été sur l'histoire des mathématiques, Université du Maine, Le Mans, France

Jahnke, H. N., Arcavi, A., Barbin, E., Bekken, O., Furinghetti, F., El Idrissi, A., et al. (2000). The use of original sources in mathematics classroom. In J. Fauvel & J. A. Van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: the ICMI study* (pp. 291-328). Dordreich: Kluwer academic publisher.

Katz, V. (2000). *Using history to teach mathematics, an international perspective*. Washington, D.C.: The Mathematical Association of America.

Lacasse, C. (2005). *Presto mathématique, 3e cycle*. Montréal: CEC.

Lakoma, E. (2000). Stochastics teaching and cognitive development. In J. Fauvel & J. Van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: The ICMI study* (pp. 74-77). Dordrecht: Kluwer Academic.

Lankshear, C., & Knobel, M. (Eds.). (2004). *A handbook for teacher research : from design to implementation*. Maidenhead, New York: Open University Press.

Laubenbacher, R., & Pengelley, D. J. (1994). Recovering motivation in mathematics: teaching with original sources. *UME Trends*(6), 3 p.

Laubenbacher, R., & Pengelley, D. J. (1996). Mathematical masterpieces: teaching with original sources. In R. Calinger (Ed.), *Vita Mathematica, Historical research and integration with teaching* (pp. 257-260). Washington: The Mathematical Association of America.

Legendre, R. (2005). *Dictionnaire actuel de l'éducation* (pp. 1554). Montréal: Guérin.

Lyons, R., & Lyons, M. (2005). *Défi mathématique, 3e cycle*. Montréal: La Chenelière.

Madell, R., & Traduit par Dionne, J. (1979). *Additions et soustractions: les modes naturels d'opération chez les enfants*. Paper presented at the Rencontre annuelle de la N.C.T.M.,

Mertler, G. (2006). *Action research: teachers as researchers in the classroom*: Sage Publications.

Mialaret, G. (2004). *Les méthodes de recherche en science de l'éducation*. Paris: Presses Universitaires de France.

Michalowicz, K. D., Daniel, C., FitzSimons, G., Ponza, M. V., & Troy, W. (2000). History in support of diverse educational requirements -opportunities for change. In J. Fauvel & J. Van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: The ICMI study* (pp. 171-200). Dordrecht: Kluwer Academic.

Michel-Pajus, A. (2000). On the benefits in introducing undergraduates to the history of mathematics: a french perspective. In V. Katz (Ed.), *Using history to teach mathematics: an international perspective* (pp. 17-25). Washington D.C.: The Mathematical Association of America.

Mills, G. (2000). *Action research: a guide for the teacher researcher*: Prendice-Hall.

Ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport, M. (2001). *Programme de formation de l'école québécoise*.

Ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport, M. (2006). *Le programme de formation de l'école québécoise, enseignement secondaire (premier cycle)*.

Ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport, M. (2007). *Programme de formation de l'école québécoise, enseignement secondaire (deuxième cycle)*.

Morissette, R. (2002). *Accompagner la construction des savoirs*. Montréal: Les Éditions de la Chenelière.

Moyer, P. (2001). Making mathematics culturally relevant. *Mathematics Teachers*(176), 3-5.

Nantais, N. (1991). L'analyse d'erreurs appliquée aux algorithmes arithmétiques. *Instantanés Mathématiques*(mai-juin), 5-11.

Organisation du Baccalauréat International, O.-I. (2007). *Programme primaire, pour faire une réalité du Programme primaire, cadre pédagogique pour l'éducation internationale dans l'enseignement primaire*. Cardiff: Organisation du Baccalauréat International (OBI).

Piaget, J. (1969). *Psychologie et pédagogie*. Paris: Éditions Denoël.

Poirier, L. (2001). *Enseigner les maths au primaire, notes didactiques*. Saint-Laurent: ERPI.

Poisard, C. (2005a). *Ateliers de fabrication et d'étude d'objets mathématiques, le cas des instruments à calculer* Université de Provence, Aix-Marseille 1, Marseille.

Poisard, C. (2005b). Les objets mathématiques matériels, l'exemple du boulier chinois. *Petit x*(68), 39-67.

Ponza, M. V. (2000a). Learning through history and non-standard media, mathematical dramatisation. In J. Fauvel & J. Van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: The ICMI study* (pp. 335-342). Dordrecht: Kluwer Academic.

Ponza, M. V. (2000b). Under-served (limited resources) students. In J. Fauvel & J. Van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: the ICMI study* (pp. 174-179). Dordrecht: Kluwer Academic publishers.

Radford, L., Bartolini Bussi, M. V., Bekken, O., Boero, P., Dorier, J.-L., Katz, V., et al. (2000). Historical formation and student understanding of mathematics. In J. Fauvel & J. Van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: The ICMI study* (pp. 143-170). Dordrecht: Kluwer Academic.

Rickey, F. V. (1996). The necessity of history in teaching mathematics. In R. Calinger (Ed.), *Vita mathematica, Historical research and integration with teaching* (pp. 251-256). Washington, D.C.: The Mathematical Association of America.

Ross, A., & Charbonneau, L. (2002). Systèmes de numération: du concret à l'abstrait. *Bulletin AMQ, 42*(4), 48-55.

Rubenstein, R. N., & Schwartz, R. K. (2000). Word histories: melding mathematics and meanings. *Mathematics Teachers, 93*(1), 664-669.

Sabourin, M. (2006). Sociogramme. On *CD-Rom des notes de cours du micro-programme en apprentissage coopératif*. Sherbrooke: Université de Sherbrooke.

Siu, M.-K. (1997). The ABCD of using history of mathematics in the (undergraduate) classroom. *Bulletin of Hong Kong Mathematical Society, 1*(1), 143-154.

Swetz, F. J. (1994). Seeking of relevance? Try the history of mathematics. In F. J. Swetz (Ed.), *From five fingers to infinity, a journey through the history of mathematics* (pp. 31-41). Chicago: Open court.

Swetz, F. J. (1995). Using problems from the history of mathematics in classroom instruction. In F. J. Swetz, J. Fauvel, O. Bekken, B. Johansson & V. Katz (Eds.), *Learn from the masters!* (pp. 25-38). Washington, D.C.: The Mathematical Association of America.

Swetz, F. J. (2000). Problem solving from the history of mathematics. In V. Katz (Ed.), *Using history to teach mathematics: an international perspective* (pp. 59-65). Washington, D.C.: The Mathematical Association of America.

Swetz, F. J. (2001). History of mathematics, overview. In L. S. Grinstein & S. Lipsey, I. (Eds.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 316-323). New York: Routledge Falmer.

Tzanakis, C., Arcavi, A., Correia de Sa, C., Isoda, M., Lit, C.-K., Niss, M., et al. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey. In J. Fauvel & J. Van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: The ICMI study* (pp. 201-240). Dordrecht: Kluwer Academic.

Tzanakis, C., & Thomaidis, Y. (2000). Integrating the close historical development of mathematics and physics in mathematics education: some methodological and epistemological remarks. *For the learning of mathematics, 20*(1), 44-55.

Van Der Maren, J.-M. (1995). *Méthodes de recherche pour l'éducation*. Montréal: Les Presses de l'université de Montréal (PUM).

Van Der Maren, J.-M. (1999). *La recherche appliquée en pédagogie: des modèles pour l'enseignement*. Paris: De Boeck Université.

Van Der Maren, J.-M., & Poirier, L. (2007). Produire des savoirs en pédagogie avec les enseignants. In V. Dupriez & G. Chapelle (Eds.), *Enseigner* (pp. 189-201). Paris: Presse universitaires de France.

Viau, R. (2007). *La motivation en contexte scolaire*. Bruxelles: De Boeck Université.

Warfield, J., & Kloosterman, P. (2006). Fouth-grade results from national assessment: encouragin news *Teaching children mathematics*(Mai), 445-453.

Wilson, P. S., & Chauvot, J. B. (2000). Who? How? What? A strategy for using history to teach mathematics. *Mathematics Teachers, 93*(8), 642-644.

# Annexe 1 : Plan de travail avec info-bulles

## Planification de la recherche

1. Quel est notre objectif ?

**Effectuer une recherche sur :**

- **Thème transdisciplinaire**
- **Idée maîtresse**

Au début du processus de planification en commun, la définition du **thème transdisciplinaire** doit être de nouveau consultée afin de s'assurer que des liens adéquats sont bien établis entre ce thème et l'idée maîtresse.

L'**idée maîtresse** doit être formulée en une phrase concise qui permet une compréhension durable. Elle doit être d'une ampleur suffisante pour générer une recherche approfondie, être basée sur des concepts et encourager la capacité de réflexion critique. Elle doit remettre en question et étendre les connaissances antérieures des élèves, tout en leur permettant d'approfondir leur compréhension du **thème transdisciplinaire**.

**Tâche(s) d'évaluation sommative :**

**De quelles façons pouvons-nous évaluer la compréhension de l'idée maîtresse par les élèves ? Quelles preuves (y compris des actions initiées par les élèves) rechercherons-nous ?**

Ces questions doivent être abordées immédiatement après avoir formulé l'idée maîtresse. Si les élèves ne peuvent pas démontrer efficacement leur compréhension de cette dernière, elle devra être revue et modifiée. Le problème de l'articulation entre l'idée maîtresse et la ou les tâches d'évaluation sommative doit être résolu avant de poursuivre la planification.

Les enseignants doivent garder à l'esprit que les preuves de la compréhension de l'idée maîtresse par les élèves peuvent prendre diverses formes. Une action initiée par les élèves peut, par exemple, prouver leur compréhension. Les enseignants peuvent trouver utile d'anticiper les actions éventuellement initiées par les élèves.

**Classe/niveau :** | **Groupe d'âge :**

**Établissement :** | **Code de l'établissement :**

**Titre :**

**Enseignant(s) :**

**Date:**

**Durée proposée :** heures réparties sur semaines

IBO

Plan de travail du PP

2. Que voulons-nous apprendre ?

**Quels sont les concepts clés (forme, fonction, causalité, changement, relation, perspective, responsabilité, réflexion) sur lesquels nous mettrons l'accent durant la recherche ?**

Après avoir discuté de la pertinence des concepts clés par rapport à l'idée maîtresse, les enseignants retiendront un maximum de trois concepts clés sur lesquels ils se concentreront durant cette recherche. Des concepts connexes dérivés des concepts clés peuvent également être énumérés ici.

**Quelles pistes de recherche définiront le champ de cette recherche centrée sur l'idée maîtresse ?**

-
-
-

Trois ou quatre pistes de recherche doivent clarifier l'idée maîtresse et définir le champ de la recherche. Ces aspects de l'idée maîtresse viendront prolonger la recherche, cibleront les investigations des élèves et approfondiront leur compréhension. S'il y a lieu, des liens doivent être établis entre les pistes de recherche, et entre les pistes de recherche et l'idée maîtresse.

**Quelles questions/provocations de l'enseignant seront le moteur de ces recherches ?**

Il incombe aux enseignants de donner un cadre aux recherches au début du module en posant pour cela des questions et/ou en provoquant les élèves (par exemple, en réaménageant l'environnement d'apprentissage). Cela leur permet également de donner explicitement en exemple des questions d'orientation ouvertes et encourageant le développement conceptuel.

La planification en commun est un processus continu. Le plan de travail sera donc revu durant la recherche.

## Planification de la recherche

3. Comment vérifierons-nous ce que nous avons appris ?

*Cette colonne doit être utilisée conjointement avec « Comment apprendrons-nous le mieux ? ».*

De quelles façons pouvons-nous évaluer les connaissances et savoir-faire antérieurs des élèves ? Quelles preuves rechercherons-nous ?

Les élèves doivent connaître les critères qui seront utilisés pour évaluer leur travail, et des rétroactions régulières doivent décrire leurs progrès en matière d'apprentissage et identifier les domaines à développer. L'autoévaluation et l'évaluation par les pairs seront utilisées pour les encourager à devenir des apprenants capables de réflexion.

Des preuves de l'apprentissage de chaque élève doivent être rassemblées et présentées de façon à permettre à l'élève de réfléchir à son apprentissage et de décrire ses progrès aux autres. Des archives, dossiers ou rapports permettront aux enseignants et aux élèves de se rendre compte des progrès réalisés dans le développement des connaissances, des savoir-faire et de la compréhension.

Les enseignants doivent garder à l'esprit qu'une tâche d'évaluation bien conçue devient, en elle-même et par elle-même, une expérience d'apprentissage car elle fournit des occasions de renforcer ou de prolonger l'apprentissage.

De quelles façons pouvons-nous évaluer l'apprentissage des élèves dans le contexte des pistes de recherche ? Quelles preuves rechercherons-nous ?

4. Comment apprendrons-nous le mieux ?

Quelles activités d'apprentissage ont été suggérées par l'enseignant et/ou les élèves afin d'encourager ces derniers à se lancer dans la recherche et à répondre aux questions d'orientation ?

Les activités suggérées par les élèves peuvent l'être en réponse à leurs propres questions tout comme à celles de l'enseignant. Il faudra également concevoir des activités d'apprentissage qui permettront aux élèves de développer leur compréhension des concepts clés et d'établir des liens entre ces concepts.

Les enseignants doivent garder à l'esprit qu'une activité d'apprentissage bien conçue leur fournira des informations sur les connaissances, les savoir-faire et la compréhension des élèves, et qu'elle constitue donc un vecteur pour l'évaluation formative ou sommative.

Quelles seront les occasions de développer les savoir-faire transdisciplinaires et les qualités décrites dans le profil de l'apprenant ?

Lorsqu'ils fournissent aux élèves des occasions de développer des savoir-faire transdisciplinaires, les qualités du profil de l'apprenant et/ou des savoir-être, les enseignants doivent garder à l'esprit la différence qui existe entre des occasions survenant naturellement au cours de l'apprentissage et celles provenant d'un enseignement explicitement ciblé.

5. Quelles ressources devons-nous rassembler ?

Quels personnes, lieux, matériel audiovisuel, littérature pertinente, musique, art, logiciels et autres seront disponibles ?

Comment l'environnement de la classe, l'environnement local et/ou la communauté seront-ils utilisés pour faciliter cette recherche ?

Les enseignants doivent dresser la liste des ressources disponibles qu'ils utiliseront pour soutenir la recherche. Il faudra instaurer un dialogue entre le personnel de la médiathèque (bibliothécaire et technicien informatique compris) et les titulaires de classe afin de déterminer le rôle de chacun durant la planification de la recherche et le déroulement de cette dernière. Les enseignants peuvent indiquer dans la section consacrée à leurs remarques si les ressources sélectionnées étaient appropriées.

## Réflexion sur la recherche

6. Dans quelle mesure avons-nous atteint notre objectif ?

**Évaluez le résultat de la recherche en fournissant des preuves de la compréhension de l'idée maîtresse par les élèves. Les réflexions de tous les enseignants ayant participé à la planification et à l'enseignement du module de recherche doivent être consignées ici.**

Il est entendu que les preuves de l'apprentissage des élèves seront issues de leurs travaux, des fiches anecdotiques de l'enseignant et des dossiers de classe tels que les dossiers des élèves. Un ou deux exemples doivent être décrits ici ou joints au plan de travail.

**De quelles façons pourriez-vous améliorer la ou les tâches d'évaluation afin d'avoir une vision plus précise de la compréhension qu'a chaque élève de l'idée maîtresse ?**

Cette réflexion permet aux enseignants non seulement d'améliorer les activités d'évaluation, mais aussi de modifier et de renforcer l'idée maîtresse.

**Quelles sont les preuves que des liens ont été établis entre l'idée maîtresse et le thème transdisciplinaire ?**

Les enseignants doivent donner ici des exemples clairs et détaillés de discussions ayant eu lieu en classe, de commentaires ou de travaux d'élèves qui démontrent que des liens ont été établis entre l'idée maîtresse et le thème transdisciplinaire.

7. Dans quelle mesure avons-nous inclus les éléments du PP ?

**Quelles activités d'apprentissage ont permis aux élèves de :**

- **développer leur compréhension des concepts énumérés dans la section « Que voulons-nous apprendre ? » ;**
- **démontrer leur apprentissage et leur application de certains savoir-faire transdisciplinaires ;**
- **développer certaines qualités du profil de l'apprenant et/ou certains savoir-être ?**

**Dans chaque cas, veuillez justifier votre choix.**

Il faudra consigner les activités d'apprentissage qui se sont avérées particulièrement intéressantes, pertinentes, stimulantes et significatives.

Nous sommes conscients du fait que les enseignants ne peuvent pas consigner sur ce plan de travail tous les apprentissages qui ont lieu dans les classes du PP. Ils doivent utiliser leurs fiches anecdotiques pour noter de façon plus complète le développement des qualités décrites dans le profil de l'apprenant. Le développement des savoir-être du PP vient compléter et soutenir celui des qualités décrites dans le profil de l'apprenant, et les enseignants peuvent également en discuter ici.

## Réflexion sur la recherche

8. Quelles recherches ont été initiées par les élèves à la suite de leur apprentissage ?

Notez plusieurs recherches initiées par les élèves et plusieurs questions qu'ils ont posées. Soulignez celles qui ont été utilisées pour l'enseignement et l'apprentissage.

Les enseignants doivent consigner plusieurs occasions d'émerveillement et questions posées par les élèves pour montrer l'éventail de niveaux de compréhension des concepts dans le groupe.

Certaines recherches initiées par les élèves joueront un rôle important dans la détermination de la nature de la recherche et doivent être soulignées. Ces exemples peuvent influencer et guider la planification lors de la prochaine révision de la recherche.

*À ce stade, les enseignants doivent retourner à la section intitulée « Que voulons-nous apprendre ? » (section 2) et souligner les questions/provocations de l'enseignant qui ont été les moteurs de la recherche les plus efficaces.*

Quelles actions ont été initiées par les élèves à la suite de leur apprentissage ?

Notez les actions initiées par les élèves, en groupe ou individuellement, qui montrent leur capacité à réfléchir, à choisir et à agir.

Étant donné que la composante « action » peut se développer spontanément durant la recherche ou même après, cette section peut être revue et mise à jour durant la recherche et après.

Chaque recherche ne comportera pas nécessairement une action initiée par les élèves.

9. Remarques du ou des enseignants

D'autres réflexions et des liens avec d'autres idées maîtresses, thèmes transdisciplinaires ou disciplines doivent être inclus, le cas échéant.

# Annexe 2 : Tableau synthèse des recherches-actions consultées

| **Auteur** | **Pays** | **Niveau** | **Notions math.** | **Types d'activités** | **a) Avantages : étudiants**<br>**b) Avantages : enseignants** | **Limites/ inconvénients** | **Type d'article/ méthodologie utilisée** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (Laubenbacher & Pengelley, 1994) | États-Unis | Sec. (ateliers d'été); université | Théorie des groupes (Cayley, Gauss); analyse; calcul et géométrie (Archimède, Leibniz, etc.). | Étude de textes anciens, résolution de problèmes anciens, projet de recherche. | a) Change la perception des étudiants pour les math. et la relation avec celles-ci; ils découvrent les racines des problèmes, idées et concepts modernes; proches de la création; initiés à la pratique (recherche, publication, discussion). | Non mentionné. | Les auteurs relatent leur expérience. Les étudiants abordent un concept en comparant diverses sources originales, analysent et discutent. |
| (Swetz, 1994, pp. 31-41) | ? | ? | Estimation de *pi*, bases de numération, etc. | Anecdotes, films, projets, problèmes, discussion, questions. | a) Fait tomber les barrières psychologiques et l'anxiété des étudiants; humanise, permet de voir la nature globale des math. | Non mentionné. | L'auteur expose différentes façons d'introduire l'histoire des math. qui semblent venir de son expérience, mais aucune métho. n'est décrite. |
| (Avital, 1995, pp. 3-12) | ? | Sec.; formation des maîtres | Nombres négatifs, notation symbolique | Problèmes anciens (impossibles, exploratoires, ouverts). | a) Anime un sujet, humanise<br>b) Permet de comprendre les difficultés des étudiants, améliore l'enseignement, utilisation de problèmes du passé, attire l'attention sur les facteurs affectifs des étudiants. | Non mentionné. | L'auteur expose différentes façons d'introduire l'histoire des math. qui semblent venir de son expérience, mais aucune méthodologie n'est décrite. |
| (Fauvel, 1995, pp. 39-48) | États-Unis (?) | Sec. (?) | Logarithmes, grands nombres, mouvement en géométrie, Napier. | Problèmes anciens. | a) Améliore la compréhension. | Non mentionné. | L'auteur expose différentes façons d'introduire l'histoire des math. qui semblent venir de son expérience, mais aucune métho. n'est décrite. |
| (Swetz, 1995, pp. 25-38) | États-Unis (?) | Sec. | Géométrie, théorème de Pythagore; racine carrée et autres | Problèmes anciens, comparaison de solutions | a) permet de voir l'évolution des math, la culture, les étudiants apprécient; motivant<br>b) Histoire : réservoir de problèmes | Non mentionné. | L'auteur expose différentes façons d'introduire l'histoire des math. qui semblent venir de son expérience, mais aucune méthodologie n'est décrite. |
| (Barbin, 1996, pp. 17-26) | France | Sec. (?) | Angles; courbes. | Problèmes anciens. | a) Améliore la compréhension des étudiants.<br>b) Change la perception; permet de comprendre erreurs, obstacles et stades des élèves. | Non mentionné. | L'auteur expose différentes façons d'introduire l'histoire des math. qui semblent venir de son expérience, mais aucune méthodologie n'est décrite. |
| (Hitchcock, 1996, pp. 27-41) | Israël (?) | Sec. (?) | Irrationnels et racines multiples et négatives d'équations. | Pièce de théâtre (mathématiciens). | a) Plus accessible que sources primaires, essais-erreurs, vie des mathématiciens, contexte de découverte, travail. | Demande temps de préparation et une recherche méticuleuse. | L'auteur expose une façon d'introduire l'histoire des math. qui vient de son expérience, mais aucune méthodologie n'est décrite. |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (Laubenbacher & Pengelley, 1996, pp. 257-260) | États-Unis | Université (niveaux supérieurs) | Archimède, Khayyam, Cardano, Torricelli, Pascal, Euler, Germain, Cayley, Cantor. | Étude de textes anciens, projet de recherche sur le sujet de leur choix (parmi ceux proposés) avec une part de math. et une part d'histoire. | a) Fascine les étudiants; enthousiasme; sens de la découverte; compréhension profonde des sources et des preuves. | Non mentionné. | L'étudiant découvre par lui-même les math. par une source originale et l'enseignant complète avec contexte math. et historique; discussions en grand groupe. |
| (Rickey, 1996, pp. 251-256) | États-Unis (?) | Sec. (?) | Cantor | Nomme plusieurs;<br>Détaille une erreur historique (Cantor). | a) Math. développées par beaucoup de personnes et sur des années; améliore la compréhension; mathématiciens font erreurs. | Non mentionné. | L'auteur essaie de nous convaincre des bienfaits de l'histoire des math. et propose de convaincre nos collègues, de préparer et publier du matériel pédagogique. |
| (Siu, 1997, pp. 143-154) | Chine (Hong Kong) | Sec., université | Algèbre, géométrie non euclidienne, fonction. | A-Anecdotes,<br>B-Vue d'ensemble<br>C-Contenu<br>D-Dév. idées math. | a) Apporte authenticité, signification et perspective; améliore et facilite la compréhension des math; motive, humanise.<br>b) : + patient et humain; - dogmatique et pédant; devient + réflexif, + désireux d'apprendre et d'enseigner; rend + heureux. | Non mentionné. | L'auteur décrit comment il utilise les anecdotes, les vues d'ensemble d'un sujet, les contenus et les idées dans ses cours (textes anciens). Présentation orale et rapport écrit des étudiants. Aucune méthodologie n'est décrite. |
| (Bartolini Bussi, 2000, pp. 343-350) | Italie | Varié (3 à 12e année) | Arithmétique, algèbre, géométrie. | Observation et/ou manipulation d'instruments anciens (soroban, tablettes babyloniennes, etc.). | a) permet la manipulation, motive. | Non mentionné. | L'auteure propose différents instruments provenant de l'histoire des math. Ces activités semblent venir de son expérience, mais aucune méthodologie n'est décrite. |
| (Dennis, 2000) | États-Unis | Sec. et formation des maîtres | Géométrie analytique (Viète, Descartes, de Fermat algèbre symbolique). | Contexte historique pour améliorer les programmes traditionnels (discussion; nouveau programme inspiré par les sources originales (Piaget); histoire sociale des programmes et les valeurs implicites (Vygotski). | a) Humanise, culture (contexte culturel); meilleure compréhension des problèmes et situations (contenu).<br>b) Donne des outils pour critiquer les programmes. | Sources primaires difficiles à lire; manque de temps; grands changements dans les programmes; demande une sélection soignée. | L'auteur crée un environnement historique pour favoriser les découvertes; donne un défi aux étudiants nécessitant la lecture de textes anciens; écriture d'un essai pour comparer les différentes découvertes. |
| (Grugnetti, 2000, pp. 29-36) | Italie | Sec. (13-14 ans) | Fibonacci, théorème de Phytagore; géométrie euclidienne, Cavalieri; fonction. | Problèmes anciens et comparaison des stratégies des élèves avec l'original. | a) Permet de comprendre l'efficacité des processus, construire habiletés et concepts math.<br>b) Permet de faire de l'interdisciplinarité et de comprendre les difficultés des élèves. | Risque introduire anachronismes, demande analyse contexte social, politique, économique, etc. | L'auteure expose différentes façons d'introduire l'histoire des math. qui semblent venir de son expérience, mais aucune méthodologie n'est décrite. |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (Michel-Pajus, 2000, pp. 17-25) | France | Université | Estimation de Pi; Newton, Euler. | Textes originaux et secondaires, projet de recherche. | a) Le même sujet permet de couvrir des siècles et des civilisations; permet de comparer l'efficacité des procédures; plaisant.<br>b) Plaisant. | Difficile de trouver des documents pour les étudiants. | L'auteure décrit les changements apportés par une réforme de l'enseignement des math. à l'université en France en 1995. Elle donne des exemples de projets, mais aucune méthodologie n'est décrite. |
| (Ponza, 2000a, pp. 335-342) | Argentine | Sec 2 (14 ans) | Galois | Pièce de théâtre (vie de Galois). | a) Humanise, suscite attention, encourage la lecture. | Demande beaucoup de temps de classe. | L'auteure expose une façon d'introduire l'histoire des math. qui vient de son expérience, mais aucune méthodologie n'est décrite. |
| (C. Tzanakis et al., 2000, pp. 201-240) | Danemark | Université (M.A.) | Variées (nombres complexes, géométrie non euclidienne, algèbre, etc.). | Projet de recherche basé sur des textes historiques. | a) Aide à comprendre la nature et la structure des math. avec ses méthodes, théories et organisation. | Non mentionné. | Les auteurs citent une façon d'introduire l'histoire des math. mais aucune méthodologie n'est décrite. |
| (Jahnke et al., 2000, pp. 291-328) | Allemagne | Sec. (14-15 ans) | Le tunnel de Samos (géométrie grecque). | Lecture de textes originaux. | a) Amène du plaisir, des questions pertinentes, des discussions. | Non mentionné. | L'auteur expose une façon d'introduire l'histoire des math. qui vient de son expérience. Il décrit chaque séance brièvement et le travail final demandé : une production écrite. |
| (Jahnke et al., 2000, pp. 291-328) | Italie | Sec. (16-17 ans) | Les sections coniques (algèbre, géométrie). | Lecture de textes originaux. | a) Plaisant, facile de voir l'évolution des math, participation active, meilleure image des math. | Langage inconnu des élèves, nécessite un enseignant qui connaît bien l'histoire des math. | Questionnaire après chaque séance (16) pour évaluer la compréhension des contenus math. et voir les difficultés éventuelles.<br>Questionnaire ouvert à la fin pour mesurer la perception qu'ont eue les étudiants de l'utilisation de l'histoire des math. |
| (Rubenstein & Schwartz, 2000, pp. 664-669) | États-Unis | Sec. | Algèbre, géométrie, fonction. | Étymologie (origine des mots en math.). | a) Riche ressource pour approfondir la compréhension et l'appréciation des math.; permet de découvrir le dév. et l'évolution des math.<br>b) Permet de faire des liens avec d'autres domaines. | Non mentionné. | L'auteure expose une façon d'introduire l'histoire des math. qui vient de son expérience, mais aucune méthodologie n'est décrite. |
| (Moyer, 2001, pp. 3-5) | États-Unis | Primaire | Nombres, écriture des nombres, calcul. | Découverte des systèmes égyptien, babylonien, maya, chinois; du quipu, de l'abaque; jeux. | a) Permet de comprendre notre système positionnel décimal; développer des habiletés de résolution de problèmes.<br>b) Permet d'explorer le rôle culturel des math. | Non mentionné. | L'auteure expose différentes façons d'introduire l'histoire des math. qui semblent venir de son expérience, mais aucune métho. n'est décrite. |

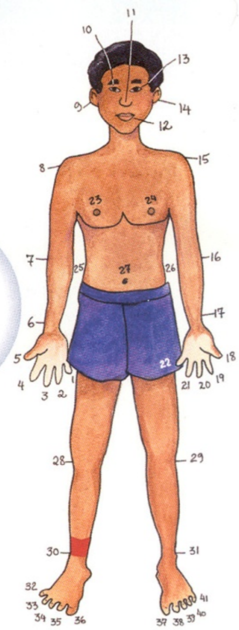
| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (Cerquetti-Aberkane & Rodriguez, 2002) | France | Fin primaire, début sec. | Additions, soustractions, multiplications, résolution de problèmes, géométrie (triangles, angles, dallage, frises). | Opérations « à la manière de… » (textes anciens du XVIIe siècle adaptés) mis sur fiches de travail; problèmes anciens. | a) Suscite étonnement, curiosité, intérêt, plaisir; revalorise des procédés actuels; favorise la compréhension et la justification; permet la résolution de problèmes.<br>b) Permet d'attirer l'attention des élèves sur le positionnement des chiffres, les erreurs de sommes et les retenues non maîtrisées; mise en mots de la procédure et trace écrite, évidence des liens entre + et -. | Non mentionné. | Les auteures proposent une méthodologie avec pré-test et post-test; étapes d'exploration, d'approfondissement, de réinvestissement; gradation du degré de difficulté. Proposent une variété de techniques pour effectuer les opérations; des problèmes et énigmes du passé ainsi que des dallages et frises romaines. |
| (Poisard, 2005b, pp. 39-67) | France | CM2 (5e année) | Numération, additions, soustractions, multiplications et divisions. | Étude du boulier chinois. | a) Permet de réfléchir sur l'intérêt du système décimal positionnel; sur les techniques opératoires (+, -, x, ÷); sur les bases de numération; intéresse les élèves; la création du boulier créé du plaisir; permet des liens entre numération et opérations.<br>b) Intéresse les enseignants; permet de surmonter les obstacles des élèves (écriture des nombres, notion de position, retenues); met en parallèle les techniques du boulier et du papier-crayon. | Non mentionné. | L'article découle de la thèse de l'auteure. Les observations portent sur 4 classes de CM2 filmées. Entretiens avec les professeurs, les enfants, questionnaires. |

# Annexe 3 : Pages du nouveau Défi 5$^{e}$

A1

## Comptes primitifs...

**Depuis la nuit des temps, les humains ont utilisé leur corps ou des cailloux pour dénombrer.**



**1** Le compte corporel transforme le sorcier de Nouvelle-Guinée illustré ci-contre en un véritable agenda humain.
La marque de peinture rouge à la cheville indique le nombre de jours qu'il reste avant une cérémonie importante.
Explique son procédé.


POUR LES AS

**2** Dans les cités sumériennes, il y a plus de 5 000 ans, des cailloux d'argile permettaient de représenter de très grands nombres. Pour garder trace de leurs transactions, les comptables sumériens enfermaient des cailloux bien spéciaux dans des bulles d'argile (voir ci-contre).
Observe les représentations de nombres ci-dessous. Joue à l'archéologue et découvre la clé des cailloux sumériens.

*Une bulle sumérienne pour enfermer un nombre*

*105 chèvres* — *23 sacs d'orge* — *822 étoffes de laine*

Combien vaut chaque sorte de caillou ci-dessous ?

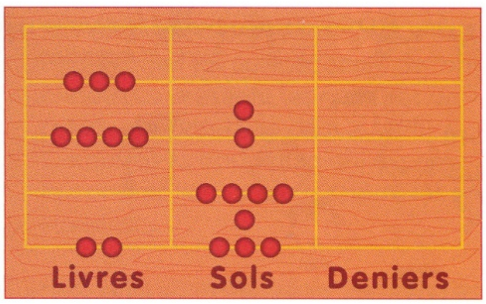

x

# ... et antiques procédés de calcul

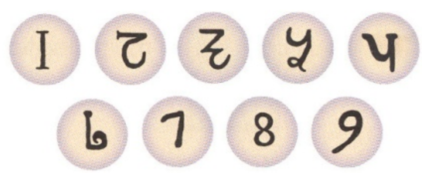
**Les tables à calcul font partie des plus anciens procédés inventés pour accélérer le calcul.**

*Comptables du XVIe siècle utilisant la table à calcul*

**3** Sur la table à calcul ci-dessous, une comptable du XVIe siècle a affiché la somme de 3 402 livres et 648 sols (des unités monétaires). À sa manière, affiche 5 094 deniers sur une table semblable.

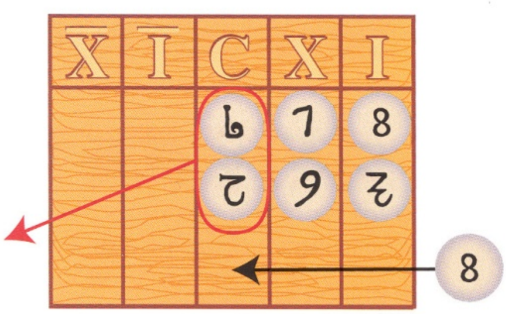



**4** Autour de l'an 1000, le moine français Gerbert d'Aurillac, devenu par la suite le pape Sylvestre II, révolutionne le calcul chez les savants en introduisant son superabaque. Pour accélérer le travail, il propose d'utiliser les *apices*, des jetons marqués d'un chiffre.



*Les apices au temps de Gerbert : dans l'ordre, de 1 à 9*

**a)** Quelle addition est amorcée ci-dessous sur le superabaque de Gerbert ?




*Le superabaque de Gerbert*

**b)** Utilise ton propre abaque et imagine la suite des manipulations proposées par Gerbert d'Aurillac pour achever l'addition.

**c)** Pour soustraire, Gerbert posait aussi d'abord les deux nombres. Sur ton abaque, effectue 645 – 187 en tentant de procéder comme le faisait le futur pape Sylvestre II.

# A 3

Les premières numérations utilisant l'addition et la multiplication sont apparues en Asie il y a environ 3 000 ans.

Pratiquement toutes les numérations précédentes ne recouraient qu'à l'addition.

*Le nombre 3 234 dans le système additif égyptien*

**1** Le vieux système chinois utilise les 13 chiffres ci-dessous. Par comparaison, notre système actuel n'utilise que 10 chiffres.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 |

| 8 | 9 | d | c | m | d·m |
|---|---|---|---|---|---|
| 八 | 九 | 十 | 百 | 千 | 万 |

Observe la traduction des nombres ci-contre.

**a)** Explique le procédé de la numération chinoise. ______________________

______________________

**b)** À quoi sert la multiplication dans ce système ? ______________________

______________________

三 十 九

*Voici le nombre 39.*

二 百 五 十 六

*Voici le nombre 256.*

**2** Traduis chaque nombre chinois en notant les additions et les multiplications qui sont sous-entendues.

**a)** 二 十 三

**b)** 九 千 三 十 四

**c)** 六 千 五 百 八

**d)** 二 万 七 百 五 十 三

**3** À ton tour, maintenant. Dessine les nombres chinois suivants.

**a)** 817

**b)** 3 204

# Annexe 4 : Pages du nouveau Défi 6$^{e}$

A 1

## Petite histoire de chiffres...

Il y a environ 5 500 ans, dans les cités sumériennes, les comptables utilisaient des jetons d'argile appelés *calculi* pour effectuer leurs comptes.

Pour se souvenir des nombres, on enfermait ces jetons dans des bulles d'argile.

Pour réviser leurs comptes, les comptables devaient ensuite briser les bulles et recompter le tout.

**Figure 1 :** *Bulle d'argile e jetons qui rappellent que 153 sacs de grains sont entreposés*

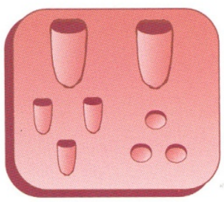


**Figure 2 :** *Chiffres sumériens représentant 153 sacs de grains*

Pour simplifier le travail, des scribes ont eu l'idée géniale de faire des marques sur des pâtés d'arg fraîche. Ces signes représentaient les cailloux numériques insérés dans des bulles. Ce sont les p anciens chiffres de l'histoire découverts à ce jour.

**1** Associe les jetons de la figure 1 aux chiffres de la figure 2.

Pour faciliter la mémorisation, les scribes sumériens ajoutèrent ensuite des dessins simples rappelant la marchandise comptée. La route de l'écriture s'ouvrait alors toute grande devant l'humanité...

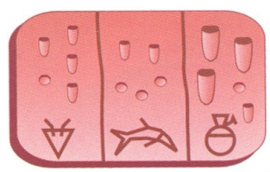


**Figure 3 :** *Bordereau comptabl indiquant 14 boeufs, 32 poisso et un grand nombre de cruche*

**2** Combien de cruches sont inscrites sur la tablette d'argile de la figure 3 ?

POUR LES AS **3** Voici tous les types de jetons de calcul qu'utilisaient les savants sumériens.

**a)** Fais une recherche qui te permettra de connaître la valeur de chaque jeton.

**b)** Trouve comment les comptables sumériens effectuaient 704 – 257 et 192 × 6 avec leurs jetons.

**c)** Renseigne-toi sur l'histoire des débuts de l'écriture.

# … et grande invention pour rien

**Comme toutes les numérations primitives, la numération sumérienne utilisait uniquement l'addition, par la répétition de symboles. Dans une grotte bouddhique de l'Inde du IIIe siècle, des moines savants ont inventé une numération basée sur un nouveau principe.**

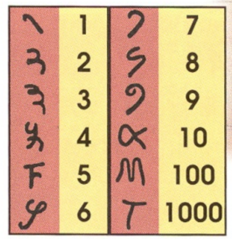
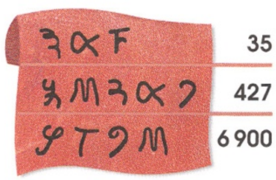




**Figure 4 :** ***Les douze chiffres de la numération de la grotte sacrée***

**4** Observe ci-dessous les trois nombres inscrits sur un manuscrit de cuir ainsi que leur traduction en chiffres modernes.

**a)** Explique le procédé des moines.




**b)** Quel nouveau principe est utilisé ici ?

**5** Traduis les nombres suivants en numération moderne.

a) 

b) 

c) 

**6** Traduis les nombres suivants dans la numération des moines.

**a)** 549

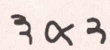
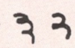
**b)** 7 036

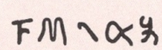
**c)** 8 102

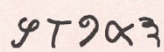
**d)** 9 000

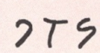
**7** Pour économiser l'écriture, les moines de l'Inde ont eu l'idée de ne plus écrire les symboles 10, 100 et 1000. La numération de position venait de naître ! Une invention ultime manquait cependant encore à l'appel…

Découvre laquelle en traduisant chaque nombre en notation de position, à la manière indienne.

Si  devient  alors

a)  devient…

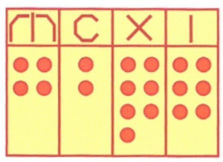
b)  devient…

c)  devient…

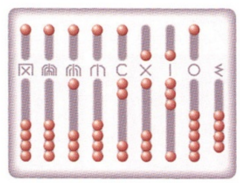
**Longtemps après l'invention des chiffres, les comptables de l'Histoire ont eu recours à l'abaque pour effectuer leurs comptes.**


**1** Observe les nombres représentés ci-dessous.

**a)** Explique le fonctionnement de chaque abaque.

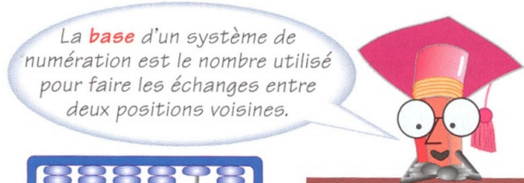


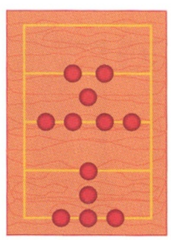
*4 276 sur un abaque romain du Ier siècle av. J.-C.*



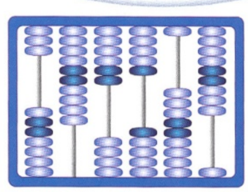
*10 268 sur une calculette romaine du Ier siècle ap. J.-C.*

*3 241 sur un quipu inca du XVIe siècle*

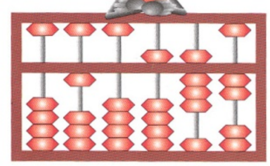


*2 918 sur une table à calcul du XVIe siècle*



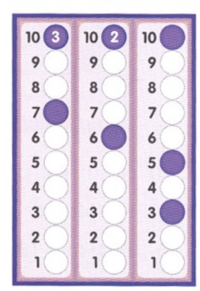
*Stchoty ou boulier russe du XIXe siècle*



*Soroban ou boulier japonais utilisé depuis environ 1940*

**b)** Quels nombres sont affichés sur

1. le stchoty ?
2. le soroban ?



*3 978 sur une superplanche*

**2** Forme une équipe avec deux camarades. Sur vos superplanches, représentez chaque nombre des sept abaques du numéro 1 de trois façons différentes, sans jamais utiliser la plus économique.

# … du calcul efficace

L'histoire des instruments de calcul et celle des outils se ressemblent. Les premiers outils remontent à plus de deux millions d'années. Les outils actuels permettent un travail beaucoup plus efficace.

L'histoire des instruments de calcul remonte à environ 6 000 ans. La technologie moderne permet des performances extraordinaires.


Couteaux *préhistoriques*

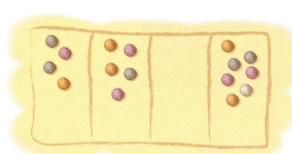
*Scie sauteuse moderne*

Calculi *préhistoriques*

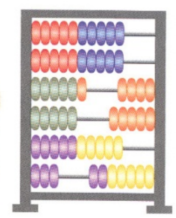

*Calculette moderne*

Probablement originaire d'Asie, le calcul sur l'abaque primitif exigeait beaucoup de manipulations. L'invention du boulier européen a permis de soulager les comptables et favorisé la pratique du calcul efficace.

**3** Explique la façon d'effectuer 4 507 + 698 sur l'abaque primitif et sur le boulier européen.



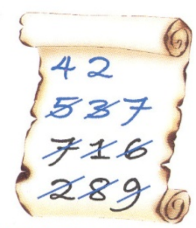
*Addition sur un abaque primitif*



*Addition sur un boulier européen*

À l'origine, le calcul à la plume suivait des règles différentes de celles du calcul écrit actuel. Le procédé de soustraction illustré ci-contre était enseigné dans les premières universités européennes du XIII$^{e}$ siècle.

**4** Explique la méthode suivie pour effectuer 716 – 289 sur le parchemin ci-contre.




*Soustraction à la plume*

# Annexe 5 : Pages de l'ancien Défi 6$^{e}$ année

## NUMÉRATION ET OPÉRATIONS A-1

### Les belles histoires des chiffres et du calcul

**Compter sans savoir compter...**

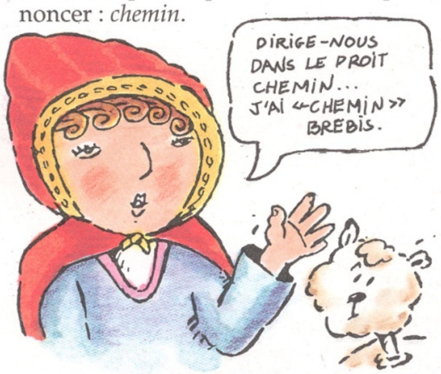
① Dans un lointain pays, il y a de cela très longtemps, cette bergère illettrée désirait ramener ses brebis sans en oublier une seule.

Avant de se diriger vers les pâturages, elle les obligeait à passer entre deux rochers, une à la fois.

② La bergère n'avait jamais appris à compter, car ses parents, très superstitieux, lui avaient enseigné qu'«enfants ou brebis comptés, le loup les mange»...


Au lieu de dire **un**, **deux**, **trois...** quand passaient ses moutons, elle récitait les mots successifs de sa prière, un pour chaque bête.

③ Et quand la dernière brebis défilait devant elle, elle retenait le dernier mot de la prière qu'elle venait de prononcer : *chemin*.




Puisqu'elle connaissait sa prière par coeur, elle n'avait qu'à la reprendre du début, de la même manière, avant son retour à la maison.

④ Si sa «litanie» s'arrêtait sur un mot différent, c'est que quelque chose n'allait pas...

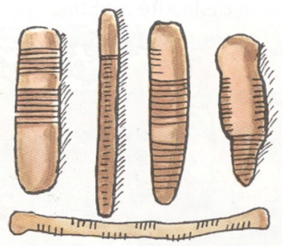

1. **Q**u'est-ce qui ne va pas ici?
2. **S**aurais-tu «compter» tes doigts et tes orteils en utilisant la chanson *Au clair de la lune*?

# NUMÉRATION ET OPÉRATIONS A-2

## Les belles histoires des chiffres et du calcul

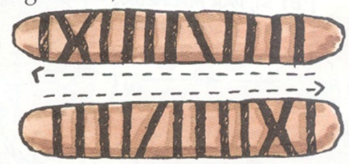
### Compter sans chiffres

① Compter est une manifestation de l'intelligence, et les humains le font depuis l'âge des cavernes.



Voici quelques témoignages de cette aptitude qui nous en montrent les premières manifestations. Ces os entaillés ont entre vingt et quarante mille ans!

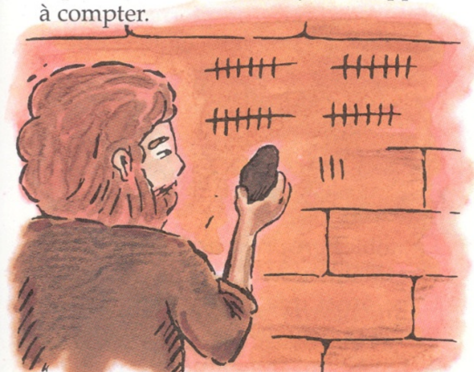
② Plus près de nous mais aussi plusieurs fois millénaires, voici des *tailles* de berger trouvées en Dalmatie (Yougoslavie).



Ces marques faites au couteau permettaient aux bergers de conserver le compte exact des bêtes qu'ils devaient mener aux pâturages.

1. **P**eux-tu les déchiffrer?

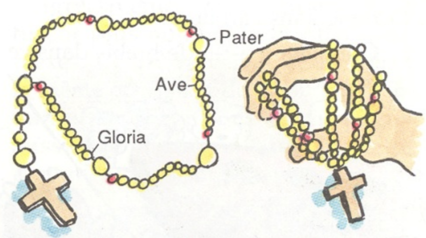
③ Ce prisonnier a une méthode bien à lui pour compter ses jours de captivité, même s'il n'a jamais appris à compter.



À sa façon, il refait l'histoire...

2. **E**xplique son système.

④ Dans la plupart des religions, les fidèles récitent des litanies de prières qu'ils doivent répéter un nombre précis de fois dans chaque cas.




Le chapelet des chrétiens constitue un vestige d'un très ancien procédé qui permettait, même aux fidèles les plus ignorants, de compter correctement les prières à réciter.

3. **C**ombien y en a-t-il de chaque sorte?

# NUMÉRATION ET OPÉRATIONS A-3

## Les belles histoires des chiffres et du calcul

### Cailloux, calculi... calcul!

① 3500 ans av. J.-C., à Suse, capitale de l'Élam, en Mésopotamie...


Un noble du royaume désire confier son troupeau pour quelques mois à ce pâtre. Le moins qu'on puisse dire, c'est que la confiance ne règne pas.

② Pour faire contrôler leur entente, tous deux se présentent chez Tamara, la comptable de la cité de Suse.

Pour chaque brebis comptée, la fonctionnaire dépose un petit bâtonnet d'argile. Dès que dix bâtonnets sont utilisés, elle les remplace par une bille d'argile.

③ Lorsque dix billes sont utilisées, elle les remplace par un disque, lui aussi façonné dans l'argile.

1. **C**ombien y a-t-il de brebis dans ce troupeau?


Quand le décompte est terminé, la comptable enferme les *calculi* (d'un vieux mot signifiant cailloux) dans une bulle d'argile.

④ Tamara appose ensuite son sceau sur l'argile fraîche de la bulle en y déroulant un cylindre de pierre gravé, ce qui constitue une sorte de signature.

Le noble, propriétaire du troupeau, en fait autant avec son propre sceau. C'est ainsi que furent élaborés les premiers contrats.

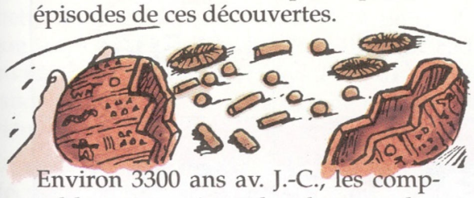
2. **C**omment la comptable pourra-t-elle faire sa vérification dans trois mois, au retour du troupeau?

# NUMÉRATION ET OPÉRATIONS A-4

## Les belles histoires des chiffres et du calcul

### Les premiers chiffres de l'Histoire

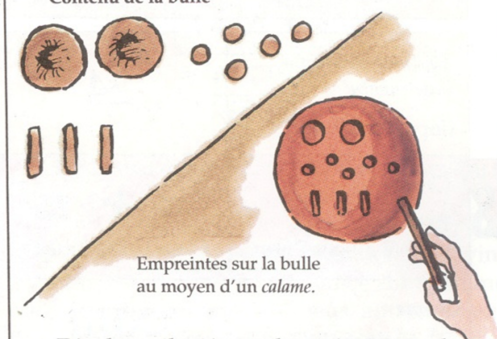
① L'utilisation des bulles d'argile en guise de contrat va conduire à l'invention des premiers chiffres et, environ deux siècles plus tard, à celle de l'écriture. Suivons pas à pas les épisodes de ces découvertes.



Environ 3300 ans av. J.-C., les comptables trouvaient de plus en plus malcommode l'obligation de briser les bulles d'argile lors des vérifications.

② Ils ont alors eu l'idée de laisser sur la bulle des empreintes rappelant les *calculi* contenus dans cette bulle :

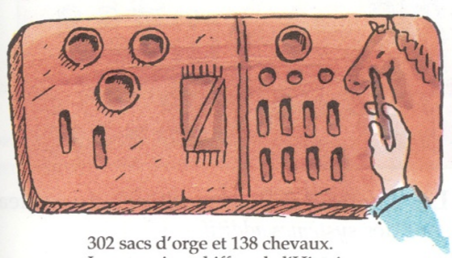
Contenu de la bulle



Empreintes sur la bulle au moyen d'un *calame*.

Dès lors, il n'était plus nécessaire de briser la bulle pour connaître son contenu.

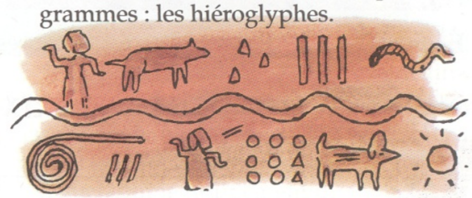
③ Il ne leur fallut pas longtemps pour réaliser que même les *calculi* n'étaient plus nécessaires.



302 sacs d'orge et 138 chevaux.
Les premiers chiffres de l'Histoire.

Les comptables se mirent donc à consigner les transactions *sur des tablettes d'argile*. De plus, ils ajoutèrent des pictogrammes pour rappeler la nature des objets et des transactions.

④ Progressivement, les pictogrammes furent plus nombreux et plus complexes. L'écriture venait de naître. À la même époque et de façon indépendante, les Égyptiens créaient eux aussi une écriture à base de pictogrammes : les hiéroglyphes.

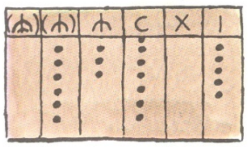


Les chiffres et l'écriture furent donc créés par des comptables. La Préhistoire cédait la place à l'Histoire.

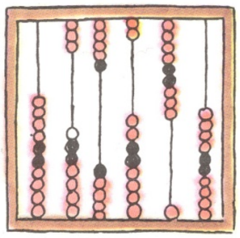
# NUMÉRATION ET OPÉRATIONS A-7

1. **B**ien avant de compter avec des chiffres comme nous le faisons aujourd'hui, nos ancêtres utilisaient des *abaques* ou des *tables à calculer*. Peux-tu comprendre et expliquer le fonctionnement de ces instruments?

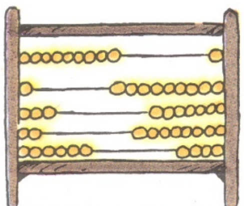
| ABAQUES PRIMITIFS | ABAQUES SIMPLIFIÉS |
|---|---|



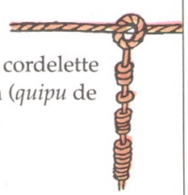
63 705 sur un abaque romain primitif



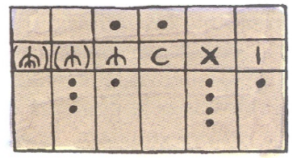
35 290 sur un boulier russe



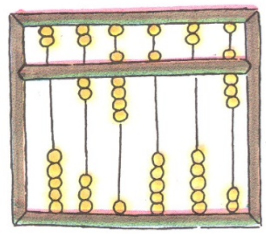
19 784 sur un boulier compteur français (XIX^e^ siècle)



3 158 sur une cordelette à noeuds inca (*quipu* de recensement)

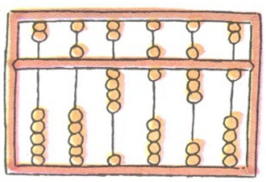


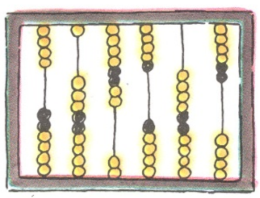
36 541 sur un abaque romain simplifié

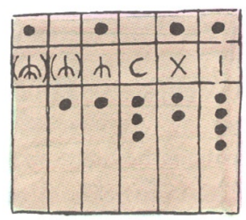


29 508 sur un boulier chinois

2. **Q**uel nombre est représenté sur chaque abaque?

a) 

b) 

c) 

3. **R**eprésente ces nombres sur un boulier chinois. Si tu n'en possèdes pas, utilise des jetons et une copie de la fiche complémentaire Numération et opérations I.

a) 102 653 b) 90 028 c) 516 697

# Annexe 6 :
# Les additions et les soustractions expliquées aux élèves

## LE SYSTÈME DE NUMÉRATION DES SUMÉRIENS

### Les additions

Entre les années 2 700 et 2 300 av. J.-C., les Sumériens ont laissé tomber l'usage des cailloux (calculi) pour compter avec un tableau. C'est un peu comme une planche à calculer, mais les colonnes sont différentes puisque le système sumérien est en base 60 avec une base intermédiaire de 10.

Aucune fouille archéologique n'a permis de prouver son existence, mais on peut supposer qu'après l'abandon des calculi, les Sumériens ont utilisé un instrument s'apparentant à l'abaque. On suppose qu'il ressemblait à ceci :

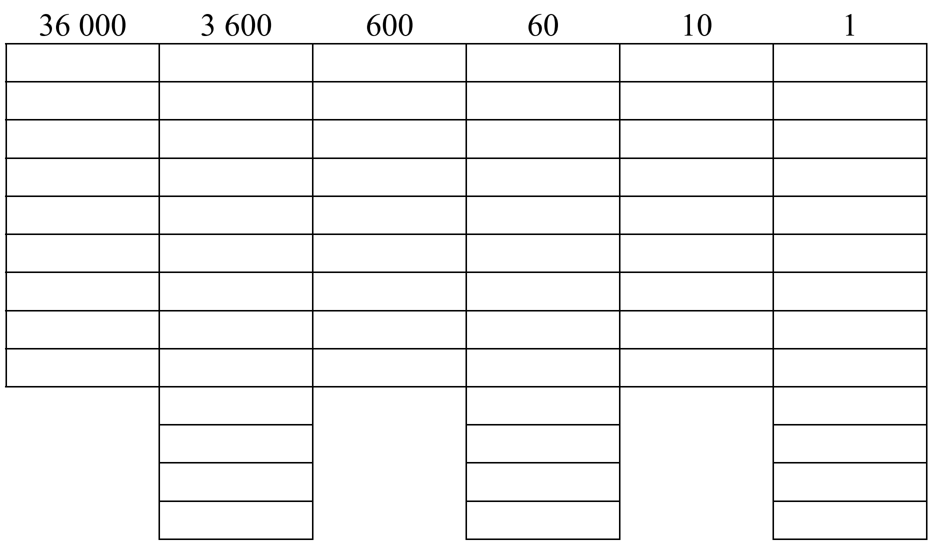



Figure tirée de Ifrah (L'histoire universelle des chiffres, 1994, p. 302)

Pour représenter un nombre, il suffisait de mettre dans chaque colonne le nombre de pièces (ou petites barres) voulues. Pour les additions, on n'avait qu'à représenter les deux nombres, effectuer les réductions nécessaires (remplacer 10 pièces de la colonne de droite par une pièce de la colonne immédiatement à gauche, remplacer 6 pièces de cette colonne par une pièce de sa voisine de gauche et ainsi de suite). La difficulté, pour nous qui sommes habitués à la base 10, est d'abord de représenter un nombre en base soixante. Par exemple, pour effectuer 328 + 4 327, on doit d'abord décomposer ces nombres en base 60. Ainsi, 328 devient (5 x 60) + (2 x 10) + (8 x 1) et 4 327 devient (1 x 3 600) + (1 x 600) + (2 x 60) + 7.

On commence donc par représenter le premier nombre (5 soixantaines, 2 dizaines et 8 unités).

| 36 000 | 3 600 | 600 | 60 | 10 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | IIIII | II | IIIIIIII |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |

Puis, on vient représenter sur une autre ligne, le deuxième nombre (1 « soixantaine de soixantaines » (3 600), 1 « six-centaines », 2 soixantaines et 7 unités).

| 36 000 | 3 600 | 600 | 60 | 10 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | IIIII | II | IIIIIIII |
| | I | I | II | | IIIIIII |
| | | | | | |
| | | | | | |

Ensuite, on vient faire les transferts nécessaires en groupant 10 unités en une dizaine que l'on vient ajouter dans la colonne des dizaines. Comme il n'y a pas d'autres transferts, on additionne ensemble les unités, les dizaines, les soixantaines et ainsi de suite pour obtenir notre réponse.

| | **36 000** | **3 600** | **600** | **60** | **10** | **1** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1$^{er}$ nombre | | | | IIIII | II | IIIIIIII |
| 2$^{ème}$ nombre | | I | I | II | | IIIIIII |
| Retenues | | | | | I | |
| réponse | | I | I | IIIIIII | III | IIIII |

---

La réponse à cette addition est donc 1 « soixantaine de soixantaines », 1 « six-centaines », 7 soixantaines, 3 dizaines et 5 unités ou (1 x 3 600) + (1 x 600) + (7 x 60) + (3 x 10) + 5 ou 4 655 pour nous qui utilisons le système actuel.

À vous maintenant d'effectuer 4 314 + 902.

| 36 000 | 3 600 | 600 | 60 | 10 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |

## Les soustractions sumériennes

Pour les soustractions, il suffisait de faire l'inverse; on représentait le premier nombre (toujours en base 60), puis on venait enlever le nombre de pièces représentant le deuxième nombre en faisant des « emprunts » à la colonne de gauche, lorsque nécessaire. Par exemple, pour effectuer 2 453 – 748, on doit d'abord décomposer les deux nombres en base 60. 2 453 devient donc (4 x 600) + (5 x 10) + (3 x 1) et 748 devient (1 x 600) + (2 x 60) + (2 x 10) + (8 x 1). On commence donc par représenter le premier nombre.

<table>
<tr><th>36 000</th><th>3 600</th><th>600</th><th>60</th><th>10</th><th>1</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td>||||</td><td></td><td>|||||</td><td>|||</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Puis, on vient enlever le deuxième nombre, mais comme avec la planche à calculer, lorsqu'il n'y a pas assez d'éléments dans une colonne, on doit faire un « emprunt » à la colonne immédiatement à gauche. Comme on ne peut retrancher 8 unités de 3, on doit donc aller « emprunter » une dizaine (on la barre) et on met dix bâtonnets de plus dans la colonne des unités. Avec les soixantaines, c'est la même chose, on doit aller emprunter une « six-centaines » qui va devenir 10 soixantaines ou 10 bâtonnets dans la colonne des soixantaines. Pour se faciliter la vie, mieux vaut écrire tous ces changements sur la deuxième ligne. Aussi, on représente le deuxième nombre sur une troisième ligne et on peut ensuite faire les soustractions dans chaque colonne pour arriver à la réponse.

<table>
<tr><th></th><th>36 000</th><th>3 600</th><th>600</th><th>60</th><th>10</th><th>1</th></tr>
<tr><td>Premier nombre</td><td></td><td></td><td>|||~~|~~</td><td></td><td>||||~~|~~</td><td>|||</td></tr>
<tr><td>Premier nombre avec « emprunts »</td><td></td><td></td><td>|||</td><td>||||||||||</td><td>||||</td><td>||||||||||<br>|||</td></tr>
<tr><td>Deuxième nombre</td><td></td><td></td><td>|</td><td>||</td><td>||</td><td>||||||||</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Réponse</td><td></td><td></td><td>||</td><td>||||||||</td><td>||</td><td>|||||</td></tr>
</table>

La réponse de la soustraction est donc : (2 x 600) + (8 x 60) + (2 x 10) + 5 ou encore 1 705.

À vous d'effectuer la soustraction suivante : 2 511 – 426.

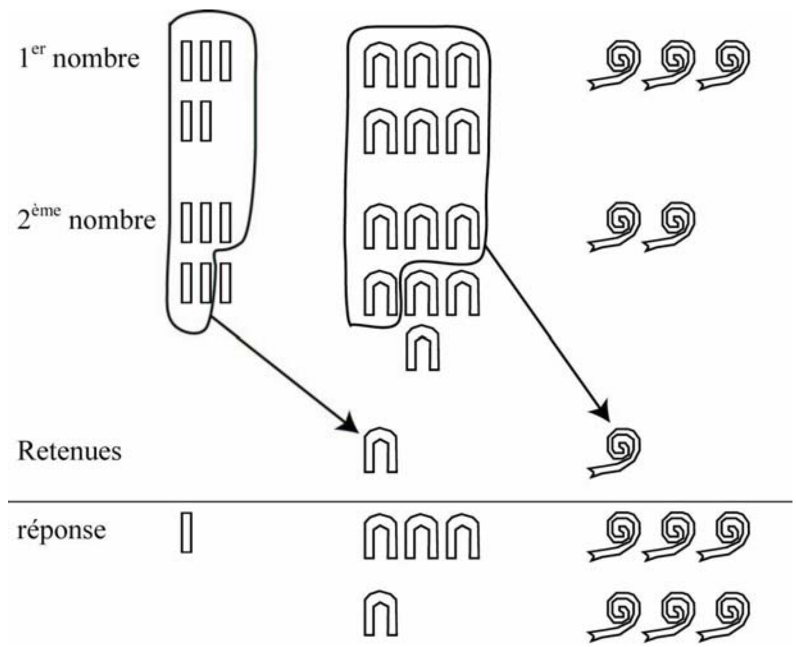
| | 36 000 | 3 600 | 600 | 60 | 10 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Premier nombre | | | | | | |
| Premier nombre avec « emprunts » | | | | | | |
| Deuxième nombre | | | | | | |
| Réponse | | | | | | |

## LE SYSTÈME DE NUMÉRATION DES ÉGYPTIENS

### Les additions

Pour effectuer des additions chez les Égyptiens, le procédé était plutôt simple. Comme sur une planche à calculer, on représentait chacun des nombres à additionner en plaçant en ligne les symboles des unités, des dizaines, des centaines, etc. On additionnait ensuite les barres verticales des unités en faisant des retenues lorsque nécessaire, on continuait avec les anses des dizaines, puis les spirales des centaines et ainsi de suite.

Exemple d'addition : 365 + 276 =

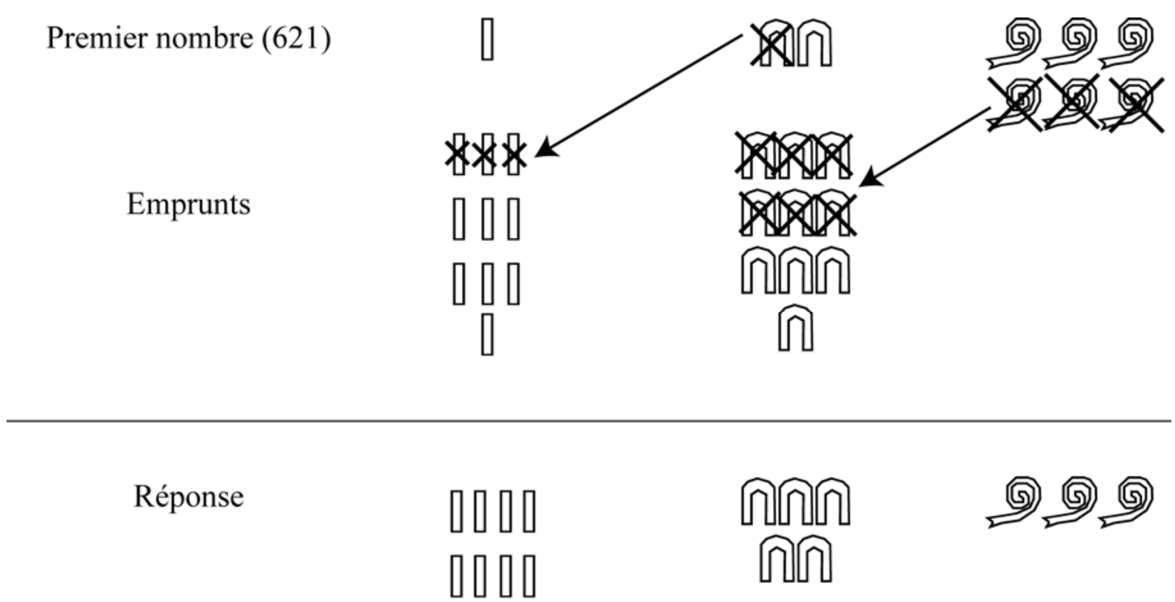



À votre tour d'additionner 1 347 +864.

## Les soustractions égyptiennes

Pour les soustractions, le principe est le même, mais à l'inverse. Comme sur une planche à calculer, on représente d'abord le premier nombre, puis on vient enlever (en faisant des petites barres) le deuxième nombre. S'il n'y a pas assez d'éléments dans une colonne (dans l'exemple, c'est le cas des unités et des dizaines), on doit faire un « emprunt » à la colonne immédiatement à droite. Comme on ne peut enlever 3 à 1 unité, on emprunte une dizaine (on la barre), puis on rajoute dix unités à la colonne des unités. On peut maintenant faire 11 unités – 3 = 8. On fait la même chose pour les dizaines. Puisqu'il en manque, on va « emprunter » une centaine qui va devenir 10 dizaines.

Exemple de soustraction : 621 – 263 =




La réponse est donc 358.

À vous de soustraire 3 015 – 843.

## LE SYSTÈME DE NUMÉRATION DES BABYLONIENS

### Les additions

Aucunes archives archéologiques ne fournissent une description précise des méthodes de calcul des Babyloniens. Par contre, on peut présumer qu'ils utilisaient l'abaque hérité des Sumériens, mais qu'ils ont su l'adapter à leurs besoins. Pour les additions et les soustractions, les Babyloniens ont sûrement procédé de la même façon que les Sumériens (nous ne trouvons aucune trace ou exemple d'additions ou de soustractions effectuées par les Babyloniens dans la littérature consultée).

On suppose que les Sumériens et les Babyloniens ont utilisé un instrument s'apparentant à l'abaque et qu'il ressemblait à ceci :

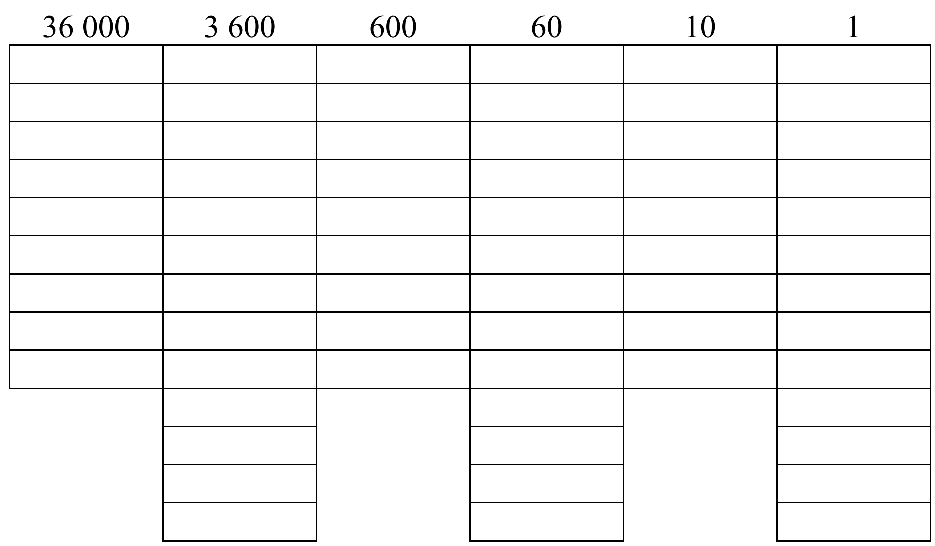



Figure tirée de Ifrah (L'histoire universelle des chiffres, 1994, p. 302)

Pour représenter un nombre, il suffisait de mettre dans chaque colonne le nombre de pièces (ou petites barres) voulues. Pour les additions, on n'avait qu'à représenter les deux nombres, effectuer les réductions nécessaires (remplacer 10 pièces de la colonne de droite par une pièce de la colonne immédiatement à gauche, remplacer 6 pièces de cette colonne par une pièce de sa voisine de gauche et ainsi de suite). La difficulté, pour nous qui sommes habitués à la base 10, est d'abord de représenter un nombre en base soixante. Par exemple, pour effectuer 328 + 4 327, on doit d'abord décomposer ces nombres avec la base 60. Ainsi, 328 devient (5 x 60) + (2 x 10) + (8 x 1) et 4 327 devient (1 x 3600) + (1 x 600) + (2 x 60) + 7.

On commence donc par représenter le premier nombre (5 soixantaines, 2 dizaines et 8 unités).

| 36 000 | 3 600 | 600 | 60 | 10 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | IIIII | II | IIIIIIII |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |

Puis, on vient représenter sur une autre ligne, le deuxième nombre (1 « soixantaine de soixantaines » (3 600), 1 « six-centaines », 2 soixantaines et 7 unités).

| 36 000 | 3 600 | 600 | 60 | 10 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | IIIII | II | IIIIIIII |
| | I | I | II | | IIIIIII |
| | | | | | |
| | | | | | |

Ensuite, on vient faire les transferts nécessaires en groupant 10 unités en une dizaine que l'on vient ajouter dans la colonne des dizaines. Comme il n'y a pas d'autres transferts, on additionne ensemble les dizaines, les soixantaines et ainsi de suite pour obtenir notre réponse.

| | **36 000** | **3 600** | **600** | **60** | **10** | **1** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1<sup>er</sup> nombre | | | | IIIII | II | IIIIIIII |
| 2<sup>ème</sup> nombre | | I | I | II | | IIIIIII |
| Retenues | | | | | I | |
| réponse | | I | I | IIIIIII | III | IIIII |

La réponse à cette addition est donc 1 « soixantaine de soixantaines », 1 « six-centaines », 7 soixantaines, 3 dizaines et 5 unités ou (1 x 3 600) + (1 x 600) + (7 x 60) + (3 x 10) + 5 ou 4 655 pour nous qui utilisons le système actuel.

À vous d'additionner 376 + 917.

| 36 000 | 3 600 | 00 | 60 | 10 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |

**Les soustractions babyloniennes**

Pour les soustractions, il suffisait de faire l'inverse; on représentait le premier nombre (toujours en base 60), puis on venait enlever le nombre de pièces représentant le deuxième nombre en faisant des « emprunts » à la colonne de gauche, lorsque nécessaire. Par exemple, pour effectuer 2 453 – 748, on doit d'abord décomposer les deux nombres en base 60. 2 453 devient donc (4 x 600) + (5 x 10) + (3 x 1) et 748 devient (1 x 600) + (2 x 60) + (2 x 10) + (8 x 1). On commence donc par représenter le premier nombre.

| 36 000 | 3 600 | 600 | 60 | 10 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| | | IIII | | IIII | III |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |

Puis, on vient enlever le deuxième nombre, mais comme avec la planche à calculer, lorsqu'il n'y a pas assez d'éléments dans une colonne, on doit faire un « emprunt » à la colonne immédiatement à gauche. Comme on ne peut retrancher 8 unités de 3, on doit donc aller « emprunter » une dizaine (on la barre) et on met dix bâtonnets de plus dans la colonne des unités. Avec les soixantaines, c'est la même chose, on doit aller emprunter une « six-centaines » qui vont devenir 10 soixantaines ou 10 bâtonnets dans la colonne des soixantaines. Pour se faciliter la vie, mieux vaut écrire tous ces changements sur la deuxième ligne. Aussi, on représente le deuxième nombre sur une troisième ligne et on peut ensuite faire les soustractions dans chaque colonne pour arriver à la réponse.

| | 36 000 | 3 600 | 600 | 60 | 10 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Premier nombre | | | II~~I~~ | | III~~I~~ | III |
| Premier nombre avec « emprunts » | | | III | IIIIIIIIII | IIII | IIIIIIIIII<br>III |
| Deuxième nombre | | | I | II | II | IIIIIIII |
| | | | | | | |
| Réponse | | | II | IIIIIIII | II | IIIII |

La réponse à la soustraction est donc : (2 x 600) + ( 8 x 60) + (2 x 10) + 5 ou encore 1 705.
À vous d'effectuer la soustraction suivante : 4 223 – 1314.

| | 36 000 | 3 600 | 600 | 60 | 10 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Premier nombre | | | | | | |
| Premier nombre avec « emprunts » | | | | | | |
| Deuxième nombre | | | | | | |
| Réponse | | | | | | |

## LE SYSTÈME DE NUMÉRATION DES CHINOIS

**Les additions**

Le fameux boulier-compteur est encore très utilisé en Extrême-Orient. Sa création est assez récente puisqu'elle remonte au XIVe siècle apr. J.-C. Le boulier chinois possède un cadre rectangulaire en bois et est composé d'un certain nombre de broches verticales sur lesquelles on retrouve sept billes de bois mobiles que l'on peut approcher d'une bande transversale qui divise le cadre en deux. On retrouve toujours cinq billes sous la barre et deux au-dessus. Chaque tige représente une puissance de dix (1, 10, 100, 1 000, etc.) et les deux premières (situées à droite) sont généralement réservées aux fractions (centièmes et dixièmes).

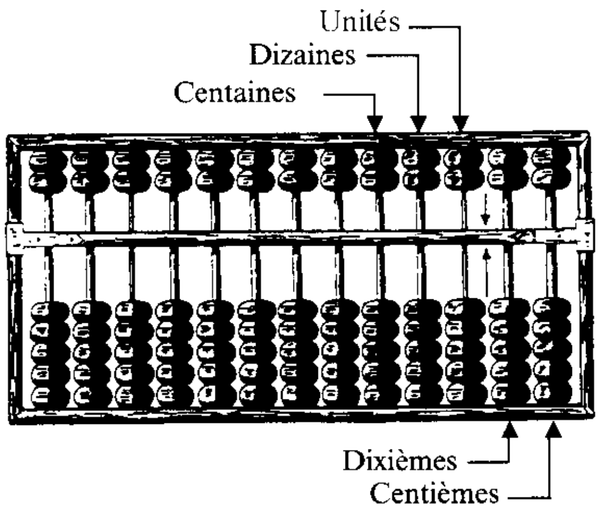
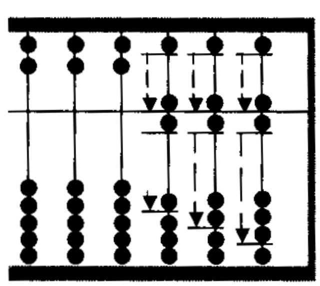


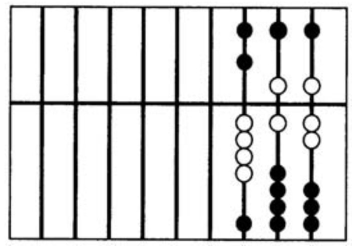

Figure tirée de Ifrah (L'histoire universelle des chiffres, 1994, p. 680)

Par contre, pour faciliter les explications qui vont suivre, nous placerons les unités sur la tige à l'extrême droite et oublierons les fractions. Ainsi, sur une tige, chaque bille de la partie inférieure (en bas) a une valeur de un, tandis que chaque bille de la partie supérieure (en haut) vaut cinq. Il suffit d'approcher de la barre transversale le nombre de billes nécessaires pour représenter un nombre. Pour figurer 4, on élèvera quatre billes de l'ordre des unités (la tige à droite). Pour 8, on abaissera une des deux billes du haut (qui vaut 5) et on élèvera 3 billes du bas et ainsi de suite. Voici, par exemple, comment représenter le nombre 666.

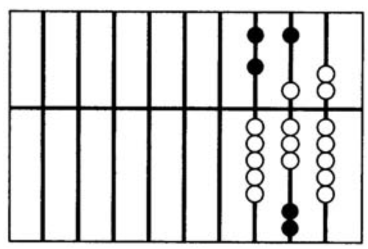


**6 6 6**

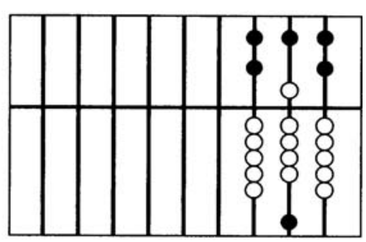
Pour effectuer les additions, le procédé est fort simple. Pour additionner 467 + 128 par exemple, il suffit d'abord de représenter le premier nombre. Sur la tige à droite (les unités), on abaisse une boule du haut (qui vaut cinq) et on lève deux boules du bas. Puis, sur la deuxième tige à partir de la droite, un abaisse aussi une boule qui vaut cinq et on lève une boule. Puis, sur la troisième tige, on déplace vers le haut quatre boules. Voici donc le nombre 467.



Puis on vient ajouter le deuxième nombre au premier. Sur la tige des centaines, on retrouve déjà quatre billes, on lève une boule supplémentaire et on arrive à cinq centaines. Sur la tige des dizaines, on procède de la même manière, à la boule de la partie inférieure (bas), on ajoute les deux dizaines du nombre 128 et on obtient donc huit dizaines (6 + 2). Pour les unités, on vient abaisser une boule du haut (qui vaut cinq) et on lève 2 boules du bas (puisque 7 + 8 = 15).



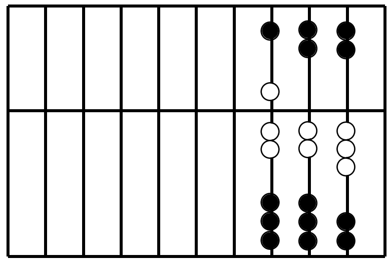
Ensuite, on doit faire les réductions nécessaires chaque fois qu'une tige excède 10. Sur la tige des unités, on relève les deux billes du haut (qui valent 10) pour les remplacer par une bille du bas sur la tige des dizaines. On obtient donc neuf dizaines. La réponse de l'addition est donc 595.



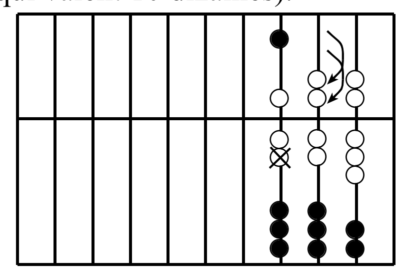
À vous d'additionner 386 + 867.

**Les soustractions chinoises**

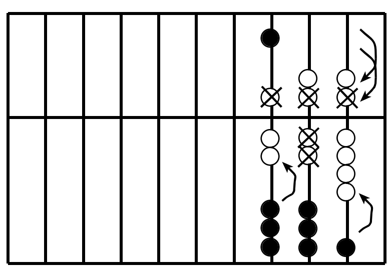
Pour les soustractions, 723 – 464 par exemple, le principe est le même, mais à l'inverse. On représente d'abord le premier nombre.



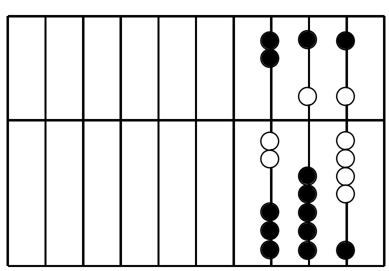
Puis, on vient enlever le nombre de billes du deuxième nombre. Bien sûr, il faut parfois recourir aux « emprunts » à la tige de gauche lorsqu'on doit enlever plus de billes qu'il n'y en a sur une tige. Dans ce cas-ci, lorsqu'on veut enlever 6 dizaines aux 2 qui sont représentées, on doit d'abord emprunter une centaine (rabaisser une bille) pour ensuite rabaisser les 2 billes du haut (qui valent 10 dizaines).



On peut ainsi enlever les 6 dizaines du nombre 464. On doit procéder de la même façon pour les unités.



La réponse à la soustraction est donc 259.



Vous devez maintenant effectuer la soustraction suivante : 1 320 – 418 et ce, à l'aide du boulier chinois.

## LE SYSTÈME DE NUMÉRATION DES ROMAINS

### Les additions

Les chiffres romains ne sont que des symboles destinés à représenter et à retenir les nombres, mais ne permettent pas d'effectuer des opérations arithmétiques. Vous pouvez toujours tenter l'expérience! C'est pourquoi les comptables romains ont toujours dû utiliser des abaques pour effectuer leurs opérations. Plusieurs types d'abaques ont existé, mais le principe était toujours le même; chaque colonne représentait une puissance de dix et de droite à gauche, on retrouvait donc : les unités (I), les dizaines (X), les centaines (C), les milliers (M), etc. Exactement comme une planche à calculer.

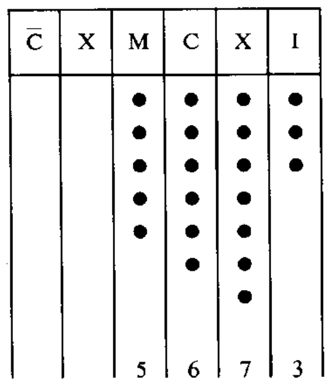



Figure tirée de Ifrah (L'histoire universelle des chiffres, 1994, p. 492)

Ensuite, pour simplifier l'utilisation de l'abaque, on subdivisa chaque colonne en deux et comme pour le boulier chinois, chaque jeton du bas valait une unité de l'ordre correspondant (unité, dizaine, centaine, etc.), tandis que les jetons du haut en valaient 5. Voici donc un abaque romain « de poche » au début de l'ère chrétienne.

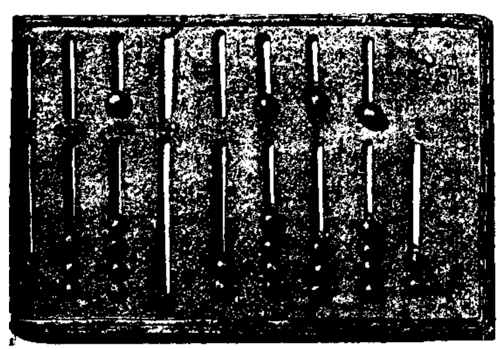
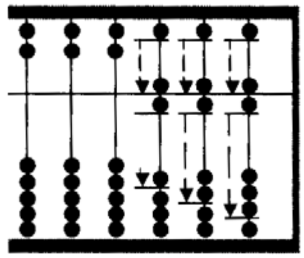


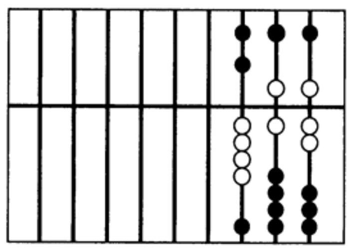
Figure tirée de Ifrah (L'histoire universelle des chiffres, 1994, p. 1994 507)

Comme l'abaque romain fonctionnait de la même façon que le boulier chinois, voici les mêmes explications. La seule différence est qu'avec l'abaque romain, on doit parler de rainures (ou colonnes), tandis qu'avec le boulier chinois, on parle de tiges. Pour figurer 4, on élèvera quatre billes de l'ordre des unités (la tige à droite). Pour 8, on abaissera une des deux billes du haut (qui vaut 5) et on élèvera 3 billes du bas et ainsi de suite. Voici par exemple comment représenter le nombre 666.

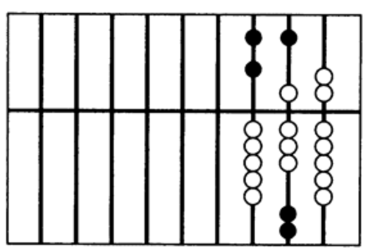


6 6 6

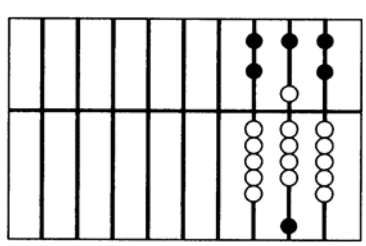
Pour effectuer les additions, le procédé est fort simple. Pour additionner 467 + 128 par exemple, il suffit d'abord de représenter le premier nombre. Sur la tige à droite (les unités), on abaisse une boule du haut (qui vaut cinq) et on lève deux boules du bas. Puis, sur la deuxième tige à partir de la droite, un abaisse aussi une boule qui vaut cinq et on lève une boule. Puis, sur la troisième tige, on déplace vers le haut quatre boules. Voici donc le nombre 467.



Puis on vient ajouter le deuxième nombre au premier. Sur la tige des centaines, on retrouve déjà quatre billes, on lève une boule supplémentaire et on arrive à cinq centaines. Sur la tige des dizaines, on procède de la même manière, à la boule de la partie inférieure (bas), on ajoute les deux dizaines du nombre 128 et on obtient donc huit dizaines (6 + 2). Pour les unités, on vient abaisser une boule du haut (qui vaut cinq) et on lève 2 boules du bas (puisque 7 + 8 = 15).



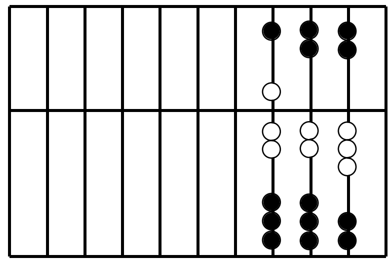
Ensuite, on doit faire les réductions nécessaires chaque fois qu'une tige excède 10. Sur la tige des unités, on relève les deux billes du haut (qui valent 10) pour les remplacer par une bille du bas sur la tige des dizaines. On obtient donc neuf dizaines. La réponse de l'addition est donc 595.



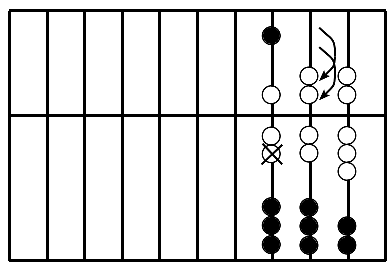
À vous d'additionner 2 416 + 725 sur l'abaque romain.

## Les soustractions romaines

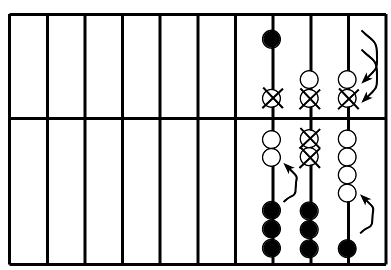
Pour les soustractions, 723 – 464 par exemple, le principe est le même, mais à l'inverse. On représente d'abord le premier nombre.



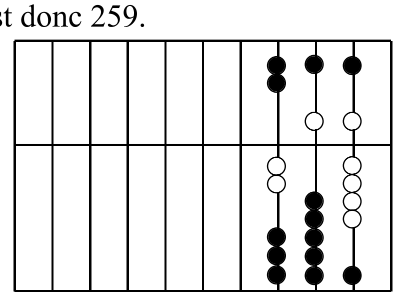
Puis, on vient enlever le nombre de billes du deuxième nombre. Bien sûr, il faut parfois recourir aux « emprunts » à la tige de gauche lorsqu'on doit enlever plus de billes qu'il n'y en a sur une tige. Dans ce cas-ci, lorsqu'on veut enlever 6 dizaines aux 2 qui sont représentées, on doit d'abord emprunter une centaine (rabaisser une bille) pour ensuite rabaisser les 2 billes du haut (qui valent 10 dizaines).



On peut ainsi enlever les 6 dizaines du nombre 464. On doit procéder de la même façon pour les unités.



La réponse à la soustraction est donc 259.



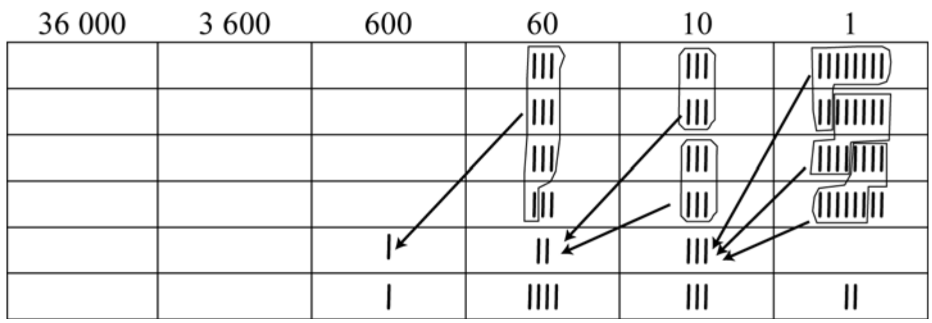
Effectuez maintenant la soustraction suivante : 626 – 447 avec l'abaque romain.

# Annexe 7 :
# Les multiplications et les divisions expliquées aux élèves

### LE SYSTÈME DE NUMÉRATION DES SUMÉRIENS

## La multiplication

Du fait de leurs bases auxiliaires alternées (10 et 6), le procédé pour les multiplications et les divisions était plus long que pour l'addition et la soustraction; on devait effectuer des additions ou des soustractions répétées lorsque l'opération comprenait des petits nombres. Voici donc un exemple de multiplication : 218 x 4. Comme pour l'addition et la soustraction, on doit d'abord décomposer le premier nombre en base 60, puis nous allons procéder à une addition répétée de 218 (3 x 60) + (3 x 10) + (8 x 1).




Lorsqu'on atteint 10 unités, on doit l'échanger contre une dizaine, mais attention, lorsqu'on a seulement 6 dizaines, on doit l'changer contre une soixantaine. La réponse est donc (1 x 600) + (4 x 60) + (3 x 10) + 2 ou 872.

À vous maintenant de multiplier 326 x 3.

| 36 000 | 3 600 | 600 | 60 | 10 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |

## La division sumérienne

Voici un exemple de division avec un diviseur à un chiffre : 498 ÷ 6. On doit d'abord décomposer le premier nombre en base 60, donc 498 égale (7 X 60) + (7 x 10) + (8 x 1)

On représente d'abord le premier nombre sur la première ligne. On doit commencer par la gauche. Puisqu'on a 7 « soixantaines », on les divise en 6, celle qui reste est transformée en 6 dizaines dans la colonne suivante. Nous nous retrouvons donc avec 13 dizaines. Nous les divisons en six, mais il reste une dizaine. Nous la transformons donc en 10 unités dans la colonne suivante; cela fait 18 unités, que l'on peut diviser en six. Donc, la réponse est 83 ou (1 x 60) + (2 x 10) + (3 x 1).

| 36 000 | 3 600 | 600 | 60 | 10 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | IIIIII~~I~~ | IIIIIII | IIIIIIII |
| | | | | IIIIII<br>IIIIII~~I~~ | IIIIIIII<br>IIIIIIIIII |
| | | | I | II | III |
| | | | I | II | III |
| | | | I | II | III |
| | | | I | II | III |
| | | | I | II | III |
| | | | I | II | III |

À vous maintenant de diviser 2736 par 4.

| 36 000 | 3 600 | 600 | 60 | 10 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |

## LE SYSTÈME DE NUMÉRATION DES ÉGYPTIENS

### La multiplication

La multiplication égyptienne peut sembler complexe à première vue, mais elle reste relativement simple et peut être réalisée sans recourir aux tables de multiplication. Il suffit de savoir multiplier par 2 (ou additionner deux fois le même nombre). Pour l'exemple, nous utiliserons des chiffres indo-arabes, mais vous devrez utiliser les hiéroglyphes égyptiens pour faire une des deux opérations pour la classe. Donc, pour effectuer 84 x 15 (précisons que dans cette multiplication, le 15 s'appelle le *multiplicateur* et le 84, s'appelle le *multiplicande*), les Égyptiens faisaient deux colonnes.

| | |
|---|---|
| 1 | 15 |
| 2 | 30 |
| 4 | 60 |
| 8 | 120 |
| 16 | 240 |
| 32 | 480 |
| 64 | 960 |

Dans la colonne de gauche, ils écrivaient toujours 1 et le multiplicateur dans la colonne de droite (15 dans ce cas). Ensuite, ils doublaient successivement ces deux nombres. Ils s'arrêtaient normalement lorsque le nombre de gauche atteignait le multiplicande (soit 84), mais on remarque qu'en doublant le nombre 64, on obtiendrait 128, un nombre trop élevé. Ils s'arrêtaient donc à 64 et cherchaient dans cette première colonne, les nombres dont la somme était égale à 84. Ils marquaient d'un petit trait ces nombres (64 + 16 + 4 = 84) et marquaient d'une barre oblique les nombres correspondants de la colonne de droite. Ils n'avaient ensuite qu'à additionner les nombres cochés de la colonne de droite (960 + 240 + 60 = 1260) pour arriver à la réponse.

| | |
|---|---|
| 1 | 15 |
| 2 | 30 |
| - 4 | 60 / |
| 8 | 120 |
| - 16 | 240 / |
| 32 | 480 |
| - 64 | 960 / |

À vous maintenant d'effectuer 74 x 12.

| | |
|---|---|
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |

**La division égyptienne**

Pour la division, il s'agit du même principe de duplications (multiplication par 2) successives, mais en sens inverse. Voici comment les Égyptiens effectuaient 624 ÷ 8 (8 étant le *diviseur* et 624 étant le *dividende*).

| | |
|---|---|
| 1 | 8 |
| / 2 | 16 - |
| / 4 | 32 - |
| / 8 | 64 - |
| 16 | 128 |
| 32 | 256 |
| / 64 | 512 - |

Comme pour la multiplication, ils inscrivaient 1 dans la colonne de gauche et le diviseur dans la colonne de droite (8). Ils multipliaient ensuite ces nombres par deux, en s'arrêtant à 512 dans la colonne de droite puisque si on double ce nombre, il dépasserait le dividende (624). Les scribes cherchaient ensuite à savoir quels nombres dans la colonne de droite totalisaient 624. Ils marquaient d'un trait ces nombres (512 + 64 + 32 + 16 = 624) et n'avaient ensuite qu'à additionner les nombres correspondants de la colonne de gauche, soit 64 + 8 + 4 + 2 pour arriver à la réponse : 78.

À vous maintenant de diviser 462 par 6.

| | |
|---|---|
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |

## Le système de numération des Babyloniens

### La multiplication

Pour effectuer les multiplications, de nombreux textes mathématiques de l'époque révèlent l'utilisation de tables de multiplication gravées, que les scribes se transmettaient de génération en génération. Voici donc comment les Babyloniens devaient procéder sur un pain d'argile molle pour effectuer 692 x 25. Précisons que 692 s'appelle le *multiplicande* et le 25 s'appelle le *multiplicateur*. Notons aussi que 692 doit d'abord être décomposé en base 60, soit (11 x 60) + (32 x 1) et noté à la droite du tableau. Remarquons que le tableau utilisé pour les multiplications ne comporte que des colonnes pour les unités (1 à 59), les soixantaines et l'ordre des 3 600 (60 x 60). Contrairement aux additions et aux soustractions, on ne retrouve pas de colonnes pour les dizaines et les « six centaines ».

| Ordre des 3 600 (60 x 60) | Ordre des Soixantaines | Ordre des Unités (1 à 59) | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | 11 | 32 |

Représentation du multiplicande ⇐

Représentation du résultat

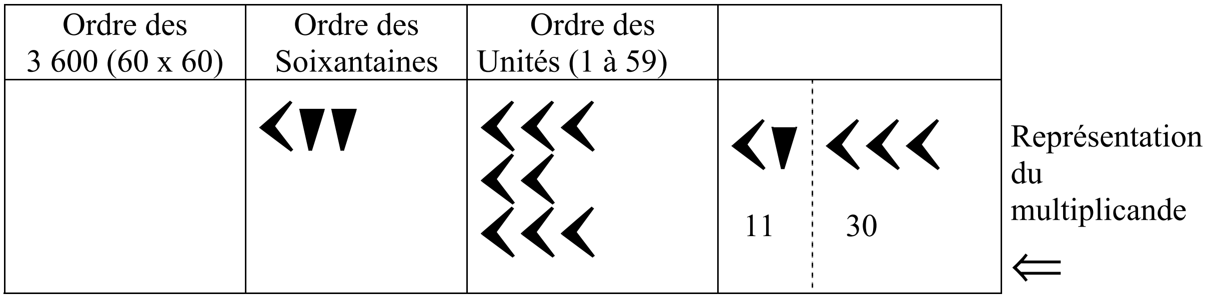
Le scribe cherchait dans sa table de multiplication par 25 le correspondant de 2 (pour les 2 unités de 32), soit 50, qu'il venait inscrire dans la colonne des unités (parce que ce nombre ne dépasse pas 60). Quand ce sera votre tour, vous pourrez faire ces multiplications simples à la façon indo-arabe.

| Ordre des 3 600 (60 x 60) | Ordre des Soixantaines | Ordre des Unités (1 à 59) | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | 11 | 30 |

Représentation du multiplicande ⇐

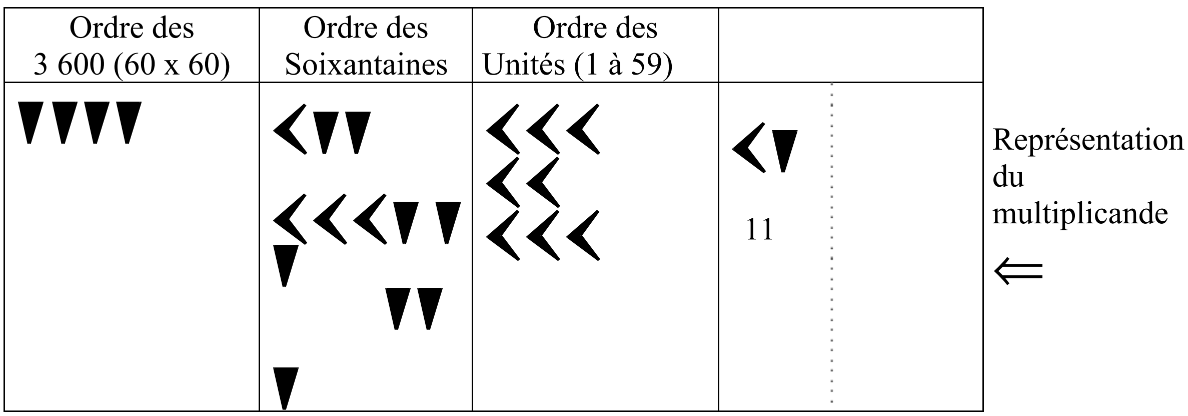
Représentation du résultat

Il pouvait ensuite effacer les deux unités de 32 et chercher le correspondant de 30 dans sa table de multiplication soit 750 pour nous, mais 12:30 en base 60 (12 x 60) + 30. Il venait inscrire 30 dans la colonne des unités et 12 dans la colonne des soixantaines.



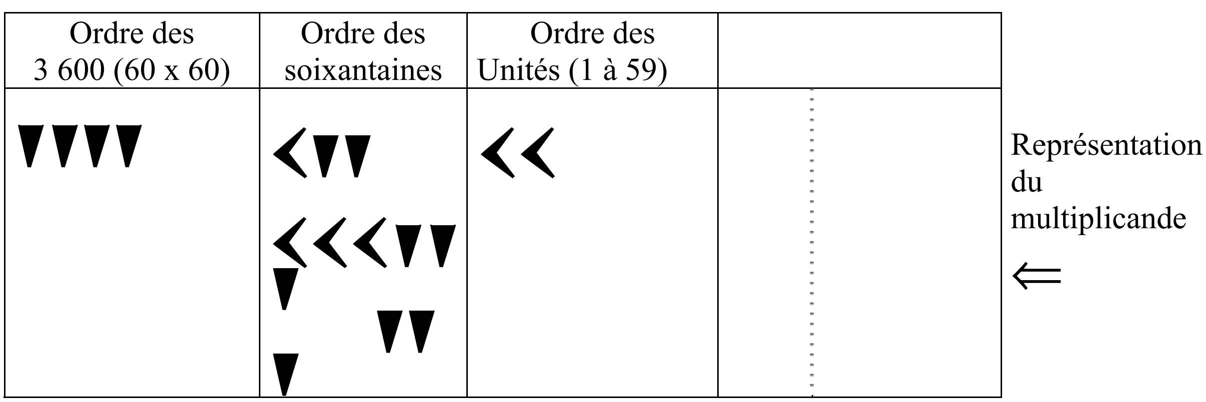

Représentation du résultat

Il pouvait ensuite effacer le 30 et chercher dans sa table de multiplication de 25, le correspondant de 11, soit 275 pour nous ou plutôt, 4 :35 (4 x 60) + 35 qu'il reproduisait en mettant 35 dans la colonne des soixantaines et 4 dans la colonne des 3 600 (puisque le 11 que nous multiplions vaut 11 x 60).




Représentation du résultat

Il effaçait ensuite le 11 dans la colonne du multiplicande et effectuait les transferts nécessaires pour ne pas dépasser 60 dans chaque colonne.




Représentation du résultat

La réponse est donc 17 180 ou (4 x 3 600) + (48 x 60) + 20.

À vous maintenant de multiplier 418 par 13.

| Ordre des 3 600 (60 x 60) | Ordre des soixantaines | Ordre des Unités (1 à 59) | |
|---|---|---|---|
| | | | |

Représentation du multiplicande ⇐

Représentation du résultat

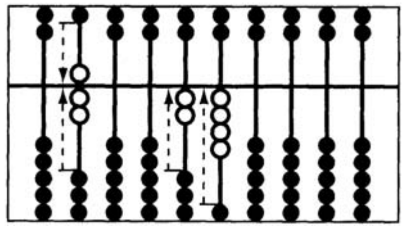
**La division babylonienne**

Pour les divisions, les Babyloniens procédaient de la même façon, mais à l'inverse. Comme il s'agit d'une méthode complexe, nous ne l'aborderons pas ici. Vous avez travaillé assez fort jusqu'à maintenant, vous avez congé de division!

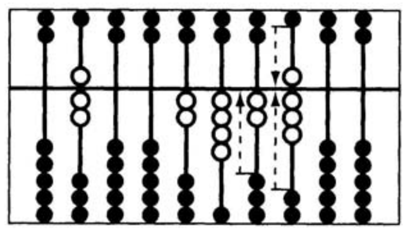
## LE SYSTÈME DE NUMÉRATION DES CHINOIS

### La multiplication

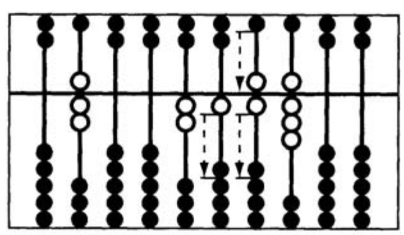
Voici un exemple de multiplication sur le boulier chinois (tiré de l'*Histoire universelle des chiffres* de Georges Ifrah), soit 24 x 7. On représente d'abord le multiplicateur (7) sur la tige de gauche du boulier et le multiplicande (24), trois tiges plus à droite.



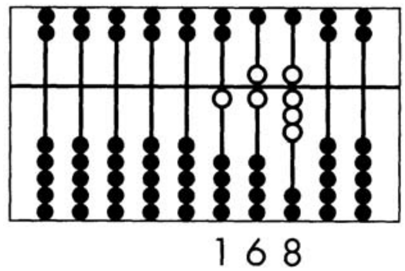
On commence par multiplier mentalement les unités, soit 4 x 7 et on vient placer le résultat (28) sur les tiges des dizaines et des unités.




On enlève ensuite le 4 du multiplicande, cette partie de l'opération étant terminée et on trouve ensuite mentalement le résultat de 7 x 2. On place la réponse (14) sur les tiges des dizaines et des centaines puisque le 2 avait une valeur de 20.




On peut maintenant enlever le 2 du multiplicande et le multiplicateur puisque l'opération est terminée. On peut maintenant lire la réponse, soit 168, qu'on aurait pu aussi représenter à l'extrême droite puisque nous ne nous préoccupons pas des fractions.



Pour votre information, Yabuuti précise dans «*Une histoire des mathématiques chinoises* » (p.107) que lorsqu'on doit multiplier un nombre à deux chiffres (par exemple, 63), on doit d'abord trouver ses 2 facteurs qui sont inférieurs à 10, soit 7 et 9. On multiplie un après l'autre ces nombres par le multiplicateur et on additionne ces deux résultats.

À vous maintenant de multiplier 43 par 8.

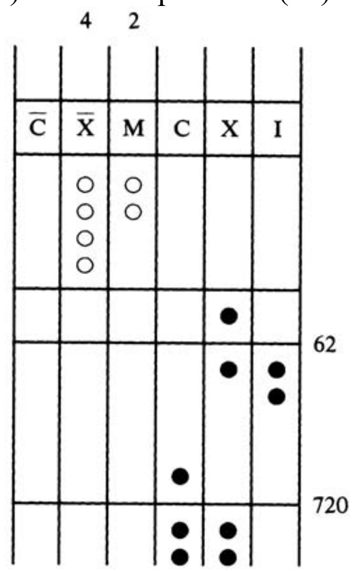
**La division chinoise**

Il est possible de faire des divisions sur le boulier chinois, mais le procédé est plutôt complexe. Vous avez donc congé de division!

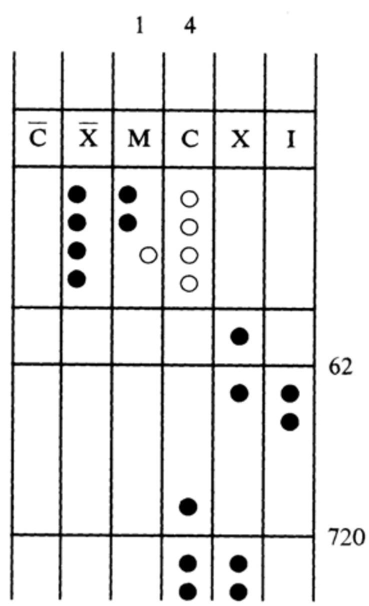
## LE SYSTÈME DE NUMÉRATION DES ROMAINS

### La multiplication

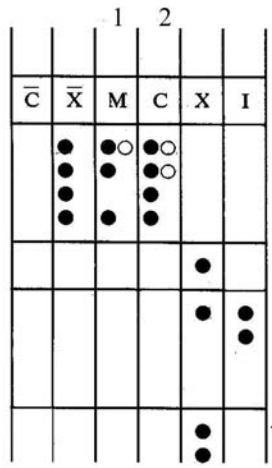
Avant l'utilisation de l'abaque de poche que vous avez manipulé pour les additions et les soustractions, les Romains utilisaient un abaque à jetons qui était en fait une table sur laquelle il y avait des lignes parallèles pour former des colonnes représentant les différents ordres (unités, dizaines, centaines, etc.). Voici un exemple de multiplication (720 x 62) sur l'abaque à jetons tiré de l'*Histoire universelle des chiffres* (d'Ifrah). On commence par représenter le multiplicande (720) et le multiplicateur (62) en noir sur la figure.



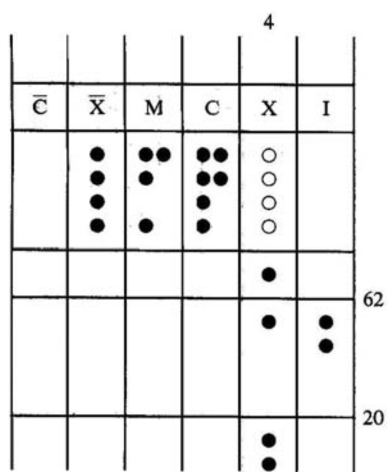

Ensuite, on multiplie le 7 du multiplicande (qui vaut 700) par le 6 du multiplicateur (qui vaut 60). Le résultat est 42, mais il vaut 42 000 (un truc : comme il y a deux zéros à 700 et un zéro à 60, on ajoute ces trois zéros à 42). On place donc deux jetons dans la colonne des unités de mille et quatre jetons dans la colonne des dizaines de mille (en blanc dans la première figure). Puis, on multiplie le 7 du multiplicande (qui vaut toujours 700) par le 2 du multiplicateur (qui vaut 2 unités) et on place le résultat, 14 ou plutôt 1 400 dans les colonnes appropriées.



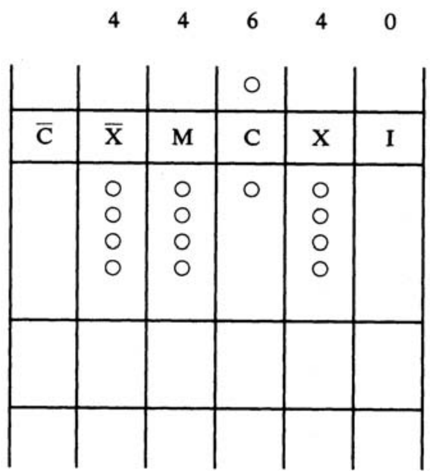
On peut maintenant effacer le 7 du multiplicande et multiplier le 2 de 720 (qui vaut 20) par le 6 du multiplicateur (qui vaut toujours 60). On obtient 12 (ou 1 200) que l'on vient placer en posant deux jetons dans la colonne des centaines et un dans la colonne des unités de mille.




Finalement, on multiplie encore le 2 du multiplicande (qui vaut toujours 20) par le 2 du multiplicateur (qui vaut deux unités), on obtient donc 4 ou 40.




Reste à faire les transferts pour ne pas avoir plus de neuf jetons dans chaque colonne et on obtient le résultat : 44 640.




Comme vous pouvez le constater, le calcul sur l’abaque à jetons est long et difficile, mais tentez tout de même d’effectuer 205 x 13.

## La division romaine

Il est possible de faire des divisions sur l’abaque romain, mais le procédé est plutôt complexe. Vous avez donc congé de division!

# Annexe 8 : Façon de compter des Papous, peuple du nord-est de la Nouvelle-Guinée

Leurs nombres n’ont pas de nom comme nous (un, deux, dix, vingt, cent, etc.). La coutume veut plutôt que l’on compte sur les parties du corps en commençant par le petit doigt de la main droite, les autres doigts, le poignet, le coude, l’épaule, l’oreille droite, l’œil, etc. Le nom des nombres devient donc la partie du corps. Par exemple, le nombre 29 se nommait : genou gauche.

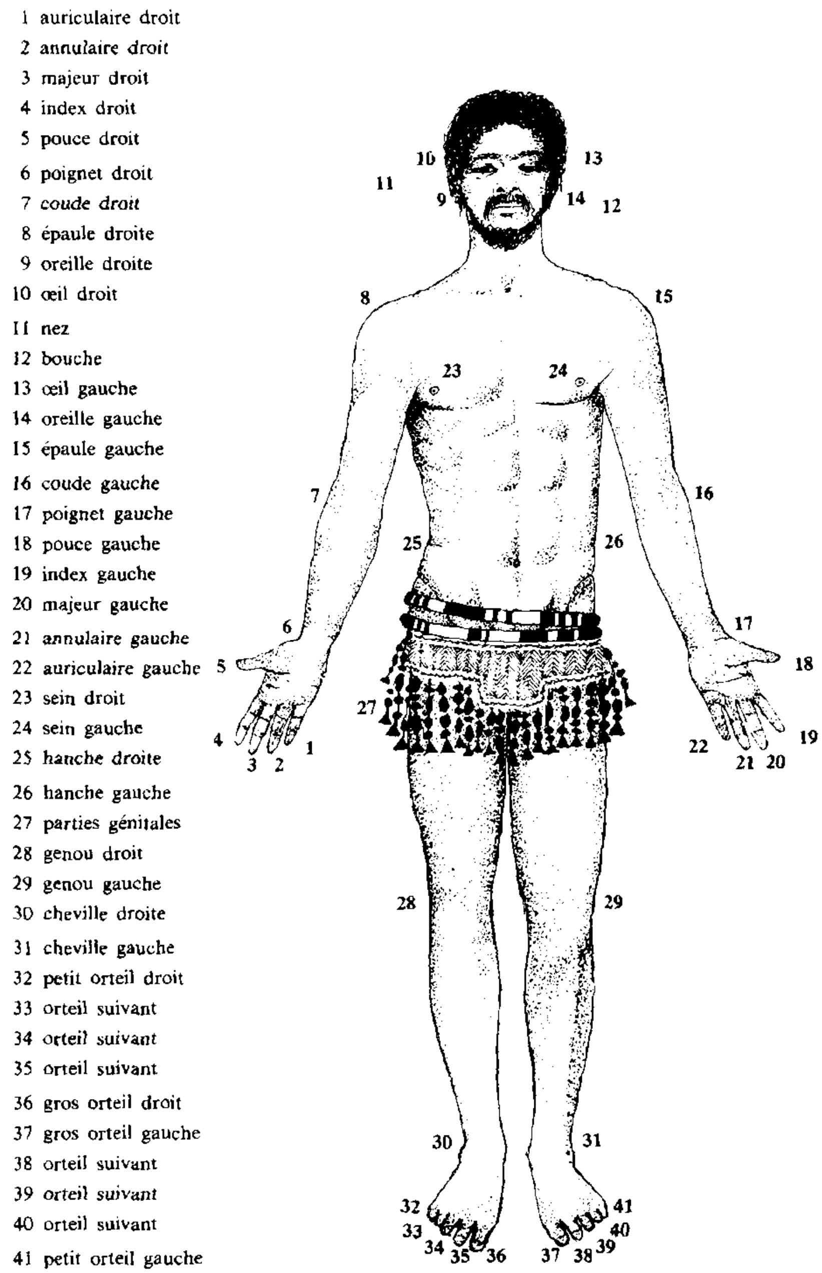



Figure tirée de Ifrah (1994: 47)

**Questions et défis à poser aux élèves :**

- Que pensez-vous de cette façon de compter?
- Essayez de compter jusqu'à 20 de cette façon.
- Pensez-vous que ces gens pouvaient compter des gros nombres? Faire des additions? Des multiplications?
- Essayez d'additionner 12 + 5.
- Essayez de soustraire 3 de 7.
- Essayez de multiplier 3 par 4.
- Essayez de diviser 9 par 3.

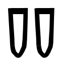
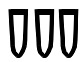
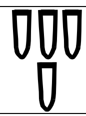
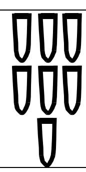
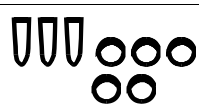
# Annexe 9 : Les différents systèmes de numération

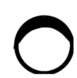
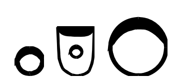
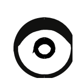
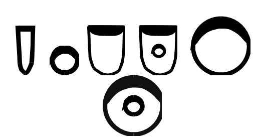
Feuilles de travail pouvant être utilisées par des élèves du primaire travaillant en équipes. Elles sont inspirées d'un document remis et préparé par Louise Poirier lors du cours de didactique des mathématiques donné au micro-programme à la session d'hiver 2001. Les systèmes maya et babylonien avaient été pris dans *Mathematics Resource Project* (NCTM, 1977) et distribués par *Creative Publications.* Les symboles peuvent varier d'une source à l'autre (ou d'une époque à l'autre, comme l'écriture des symboles sumériens). Pour ces exercices, ils ont été pris dans *L'histoire universelle des chiffres* de Georges Ifrah (1994, Éditions Robert Laffont, Paris).

**A) Système sumérien**
**B) Système égyptien**
**C) Système babylonien**
**D) Système romain**
**E) Système chinois**
**F) Système maya**

## SYSTÈME DE NUMÉRATION SUMÉRIEN

1. Complétez les tableaux suivants :

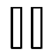
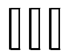
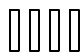
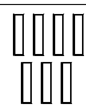
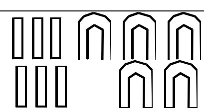
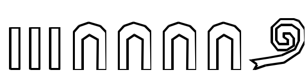
| INDO-ARABE | SUMÉRIEN |
|---|---|
| 1 |  |
| 2 |  |
| 3 |  |
| |  |
| 5 | |
| 6 | |
| |  |
| 10 |  |
| 32 | |
| |  |
| 60 |  |

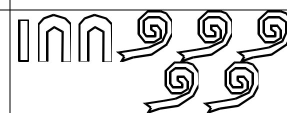
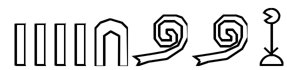
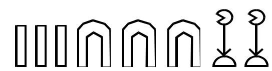
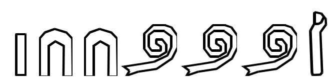
| INDO-ARABE | SUMÉRIEN |
|---|---|
| 83 |  |
| 94 | |
| |  |
| 600 |  |
| |  |
| 1 411 | |
| 2 541 | |
| 3 600 |  |
| |  |
| 36 000 |  |
| |  |

2. Sur des affiches, préparez une présentation pour expliquer votre système au reste de la classe. À la fin de votre présentation, vous devrez aussi mettre les élèves au défi de trouver l'équivalent d'un nombre indo-arabe avec les symboles de votre système et vice versa (écrire en chiffres un nombre écrit en symboles).

# SYSTÈME DE NUMÉRATION ÉGYPTIEN

1. Complétez les tableaux suivants :

| INDO-ARABE | ÉGYPTIEN |
|---|---|
| 1 |  |
| 2 |  |
| 3 |  |
| |  |
| 5 | |
| 6 | |
| |  |
| 10 |  |
| 32 | |
| |  |
| 143 |  |

| INDO-ARABE | ÉGYPTIEN |
|---|---|
| 462 | |
| |  |
| 1 214 |  |
| |  |
| 3 123 | |
| 10 321 |  |
| 13 221 | |
| 100 000 |  |
| 1 000 000 |  |
| 1 213 100 | |
| 2 000 123 | |

2. Sur des affiches, préparez une présentation pour expliquer votre système au reste de la classe. À la fin de votre présentation, vous devrez aussi mettre les élèves au défi de trouver l’équivalent d’un nombre indo-arabe avec les symboles de votre système et vice versa (écrire en chiffres un nombre écrit en symboles).

## SYSTÈME DE NUMÉRATION BABYLONIEN

1. Complétez les tableaux suivants :

| INDO-ARABE | BABYLONIEN |
|---|---|
| 0 |  |
| 1 | ▼ |
| 2 | ▼▼ |
| | ▼▼▼ |
| 5 | ▼▼▼<br>▼▼ |
| | ▼▼▼<br>▼▼▼ |
| 7 | |
| 10 | < |
| 32 | |
| | <<<<▼▼▼ |
| 56 | |

| INDO-ARABE | BABYLONIEN | | |
|---|---|---|---|
| 60 | ▼ |  | |
| 72 | ▼ | <▼▼ | |
| 96 | | | |
| | ▼▼ | ▼▼ | |
| 200 | | | |
| | < | <▼▼ | |
| 683 | | | |
| | <<▼▼ | <<<<▼ | |
| 3 600 | ▼ |  |  |
| | ▼ | ▼ | ▼ |
| 9 001 | | | |

2. Sur des affiches, préparez une présentation pour expliquer votre système au reste de la classe. À la fin de votre présentation, vous devrez aussi mettre les élèves au défi de trouver l'équivalent d'un nombre indo-arabe avec les symboles de votre système et vice versa (écrire en chiffres un nombre écrit en symboles).

# SYSTÈME DE NUMÉRATION ROMAIN

1. Complétez les tableaux suivants :

| INDO-ARABE | ROMAIN |
|---|---|
| 1 | I |
| 2 | II |
| 3 | III |
| 4 | IV |
| 5 | V |
| 6 | VI |
| | VII |
| 8 | |
| 9 | IX |
| 10 | X |
| 11 | XI |

| INDO-ARABE | ROMAIN |
|---|---|
| | XIII |
| | XIX |
| 37 | |
| 49 | XLIX |
| 59 | |
| | CCXXXII |
| 500 | D |
| | DCXLIV |
| | CMLXXVI |
| 2002 | MMII |
| | MMDCLXXVI |

2. Sur des affiches, préparez une présentation pour expliquer votre système au reste de la classe. À la fin de votre présentation, vous devrez aussi mettre les élèves au défi de trouver l'équivalent d'un nombre indo-arabe avec les symboles de votre système et vice versa (écrire en chiffres un nombre écrit en symboles).

## SYSTÈME DE NUMÉRATION CHINOIS

1. Complétez les tableaux suivants :

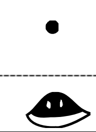
| INDO-ARABE | CHINOIS |
|---|---|
| 1 | 一 |
| 2 | 二 |
| 3 | 三 |
| 4 | 四 |
| 5 | 五 |
| 6 | 六 |
| 7 | 七 |
| 8 | 八 |
| 9 | 九 |
| 10 | 十 |
| | 十二 |

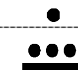
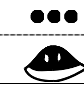
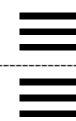
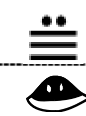
| INDO-ARABE | CHINOIS |
|---|---|
| 23 | 二十三 |
| 35 | |
| | 五十六 |
| 77 | |
| 104 | 百四 |
| 222 | |
| | 六百七十九 |
| 1 000 | 千 |
| 20 202 | 二萬二百二 |
| 35 200 | |
| | 四萬八千百 |

2. Sur des affiches, préparez une présentation pour expliquer votre système au reste de la classe. À la fin de votre présentation, vous devrez aussi mettre les élèves au défi de trouver l'équivalent d'un nombre indo-arabe avec les symboles de votre système et vice versa (écrire en chiffres un nombre écrit en symboles).

# SYSTÈME DE NUMÉRATION MAYA

1. Complétez les tableaux suivants :

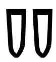
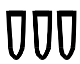
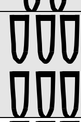
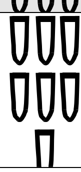
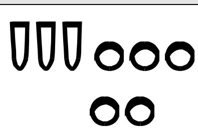
| INDO-ARABE | MAYA |
|---|---|
| 0 |  |
| 1 |  |
| 2 |  |
| |  |
| 5 |  |
| 6 |  |
| 7 | |
| 10 |  |
| 14 | |
| |  |
| 20 |  |

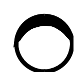
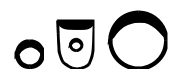
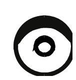
| INDO-ARABE | MAYA |
|---|---|
| 28 |  |
| 42 |  |
| |  |
| 100 |  |
| 173 | |
| |  |
| 343 | |
| |  |
| 360 |  |
| |  |

2. Sur des affiches, préparez une présentation pour expliquer votre système au reste de la classe. À la fin de votre présentation, vous devrez aussi mettre les élèves au défi de trouver l'équivalent d'un nombre indo-arabe avec les symboles de votre système et vice versa (écrire en chiffres un nombre écrit en symboles).

# SYSTÈME DE NUMÉRATION SUMÉRIEN

(CORRIGÉ)

| INDO-ARABE | SUMÉRIEN |
|---|---|
| 1 |  |
| 2 |  |
| 3 |  |
| 4 |  |
| 5 |  |
| 6 |  |
| 7 |  |
| 10 |  |
| 32 |  |
| 53 |  |
| 60 |  |

| INDO-ARABE | SUMÉRIEN |
|---|---|
| 83 |  |
| 94 |  |
| 202 |  |
| 600 |  |
| 741 |  |
| 1 411 |  |
| 2 541 |  |
| 3 600 |  |
| 4 210 |  |
| 36 000 |  |
| 40 271 |  |

# SYSTÈME DE NUMÉRATION ÉGYPTIEN

(CORRIGÉ)

| INDO-ARABE | ÉGYPTIEN |
|---|---|
| 1 | 𓏺 |
| 2 | 𓏺𓏺 |
| 3 | 𓏺𓏺𓏺 |
| 4 | 𓏺𓏺𓏺𓏺 |
| 5 | 𓏺𓏺𓏺<br>𓏺𓏺 |
| 6 | 𓏺𓏺𓏺<br>𓏺𓏺𓏺 |
| 7 | 𓏺𓏺𓏺𓏺<br>𓏺𓏺𓏺 |
| 10 | 𓎆 |
| 32 | 𓏺𓏺𓎆𓎆𓎆 |
| 56 | 𓏺𓏺𓏺𓎆𓎆𓎆<br>𓏺𓏺𓏺𓎆𓎆 |
| 143 | 𓏺𓏺𓏺𓎆𓎆𓎆𓎆𓍢 |

| INDO-ARABE | ÉGYPTIEN |
|---|---|
| 462 | 𓏺𓏺𓎆𓎆𓎆𓍢𓍢𓍢<br>𓎆𓎆𓎆𓍢 |
| 521 | 𓏺𓎆𓎆𓍢𓍢𓍢<br>𓍢𓍢 |
| 1 214 | 𓏺𓏺𓏺𓏺𓎆𓍢𓍢𓆼 |
| 2033 | 𓏺𓏺𓏺𓎆𓎆𓎆𓆼𓆼 |
| 3 123 | 𓏺𓏺𓏺𓎆𓎆𓍢𓆼𓆼𓆼 |
| 10 321 | 𓏺𓎆𓎆𓍢𓍢𓍢𓂭 |
| 13 221 | 𓏺𓎆𓎆𓍢𓍢𓆼𓆼𓆼𓂭 |
| 100 000 | 𓆐 |
| 1 000 000 | 𓁨 |
| 1 213 100 | 𓍢𓆼𓆼𓆼𓂭𓆐𓆐 |
| 2 000 123 | 𓏺𓏺𓏺𓎆𓎆𓍢𓁨𓁨 |

# SYSTÈME DE NUMÉRATION BABYLONIEN

(CORRIGÉ)

| INDO-ARABE | BABYLONIEN |
|---|---|
| 0 | 𒑲 |
| 1 | 𒁹 |
| 2 | 𒁹𒁹 |
| 3 | 𒁹𒁹𒁹 |
| 5 | 𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹 |
| 6 | 𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹 |
| 7 | 𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹 |
| 10 | 𒌋 |
| 32 | 𒌋𒌋𒌋𒁹𒁹 |
| 43 | 𒌋𒌋𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹 |
| 56 | 𒌋𒌋𒌋𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹 |

| INDO-ARABE | BABYLONIEN | | |
|---|---|---|---|
| 60 | 𒁹 | 𒑲 | |
| 72 | 𒁹 | 𒌋𒁹𒁹 | |
| 96 | 𒁹 | 𒌋𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹 | |
| 122 | 𒁹𒁹 | 𒁹𒁹 | |
| 200 | 𒁹𒁹𒁹 | 𒌋𒌋 | |
| 612 | 𒌋 | 𒌋𒁹𒁹 | |
| 683 | 𒌋𒁹 | 𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹 | |
| 1 361 | 𒌋𒌋𒁹𒁹 | 𒌋𒌋𒌋𒌋𒁹 | |
| 3 600 | 𒁹 | 𒑲 | 𒑲 |
| 3 661 | 𒁹 | 𒁹 | 𒁹 |
| 9 001 | 𒁹𒁹 | 𒌋𒌋𒌋 | 𒁹 |

# Système de numération romain

(CORRIGÉ)

| INDO-ARABE | ROMAIN |
|---|---|
| 1 | I |
| 2 | II |
| 3 | III |
| 4 | IV |
| 5 | V |
| 6 | VI |
| 7 | VII |
| 8 | VIII |
| 9 | IX |
| 10 | X |
| 11 | XI |

| INDO-ARABE | ROMAIN |
|---|---|
| 13 | XIII |
| 19 | XIX |
| 37 | XXXVII |
| 49 | XLIX |
| 59 | LIX |
| 232 | CCXXXII |
| 500 | D |
| 644 | DCXLIV |
| 976 | CMLXXVI |
| 2002 | MMII |
| 2676 | MMDCLXXVI |

# SYSTÈME DE NUMÉRATION CHINOIS

(CORRIGÉ)

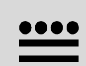
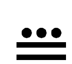
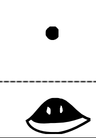
| INDO-ARABE | CHINOIS |
|---|---|
| 1 | 一 |
| 2 | 二 |
| 3 | 三 |
| 4 | 四 |
| 5 | 五 |
| 6 | 六 |
| 7 | 七 |
| 8 | 八 |
| 9 | 九 |
| 10 | 十 |
| 12 | 十二 |

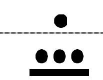
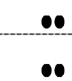
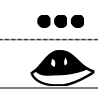
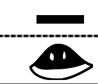
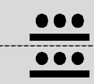
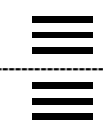
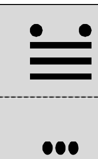
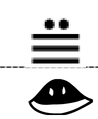
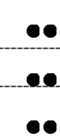
| INDO-ARABE | CHINOIS |
|---|---|
| 23 | 二十三 |
| 35 | 三十五 |
| 56 | 五十六 |
| 77 | 七十七 |
| 104 | 百四 |
| 222 | 二百二十二 |
| 679 | 六百七十九 |
| 1 000 | 千 |
| 20 202 | 二萬二百二 |
| 35 200 | 三萬五千二百 |
| 48 100 | 四萬八千百 |

# SYSTÈME DE NUMÉRATION MAYA

(CORRIGÉ)

1. Complétez les tableaux suivants :

| INDO-ARABE | MAYA |
|---|---|
| 0 |  |
| 1 |  |
| 2 |  |
| 3 |  |
| 5 |  |
| 6 |  |
| 7 |  |
| 10 |  |
| 14 |  |
| 18 |  |
| 20 |  |

| INDO-ARABE | MAYA |
|---|---|
| 28 |  |
| 42 |  |
| 60 |  |
| 100 |  |
| 173 |  |
| 315 |  |
| 343 |  |
| 340 |  |
| 360 |  |
| 762 |  |

# Annexe 10 : Sociogramme[7]

## Devinez qui?

1. C'est quelqu'un qui semble toujours s'amuser et prendre du bon temps au lieu de travailler.

   ___________________________

2. C'est quelqu'un qui est toujours calme, qui ne parle pas beaucoup et que personne ne semble connaître très bien.

   ___________________________

3. C'est quelqu'un qui trouve de bons projets.

   ___________________________

4. C'est quelqu'un qui travaille toujours dans l'intérêt de la classe, de son équipe ou de ses amis.

   ___________________________

5. C'est quelqu'un qui trouve toujours des choses intéressantes et amusantes à faire.

   ___________________________

6. C'est quelqu'un qui est populaire.

   ___________________________

7. C'est quelqu'un qui ne respecte pas les règlements de l'école ni les règles de jeu.

   ___________________________

8. C'est quelqu'un qui se dispute et se fâche avec tout le monde.

   ___________________________

9. C'est quelqu'un qui reste en dehors des jeux.

   ___________________________

10. C'est quelqu'un qui comprend tout, vite et facilement.

   ___________________________

[7] Sociogramme créé par Martine Sabourin dans le cadre d'un cours en apprentissage coopératif suivi par des collègues de l'école.

# Interprétation du test

*Devinez qui ?*

*Test à caractère individuel et confidentiel à l'usage de l'enseignant seulement.

**But du test :** former des groupes coopératifs hétérogènes

**Fréquence :** septembre/ janvier/ mai

**Crédibilité des données à considérer :** lorsque c'est l'avis du 1/3 du groupe

**Instruction à donner :** nommer une ou deux personnes répondant à ce critère ou pas du tout.

N.B. Si l'enseignant le souhaite, il peut intégrer son nom pour connaître comment le groupe-classe perçoit sa place dans le groupe (trop de fois désigné peut exprimer la trop grande place qu'il occupe).

**Interprétation par catégorie :**

- Élèves perçus négativement (possiblement le reflet de l'enseignant) : 1-7-8
- Élèves considérés comme effacés et neutres : 2-9
- Élèves ayant une fonction de participants: 3-4-5
- Élèves gratifiants avec appréciation affective élevée : 6
- Élèves compétents, experts et participants : 10

**Interprétation par numéro :**

1. Distrait, s'éparpille, non centré sur la tâche (peut être notre reflet d'enseignant…)
2. Calme, effacé
3. Meneur
4. Facilitateur
5. Créatif
6. Affectif, quelqu'un avec qui on se sent bien
7. Indiscipliné (peut être notre reflet…)
8. Peu rationnel (peut être notre reflet, lourd pour le groupe)
9. Non intégré
10. Compétent, expert, participant

# Formation des groupes : tableau synthèse (grands)

| Noms | | ← Bas statut → | | | ← Hauts statuts → | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Les agressifs | Les passifs | | Les participants | Les populaires | Les compétents |
| | | 1-7-8 | 2-9 | | 3-4-5 | 6 | 10 |
| 1. | | | | | | | |
| 2. | | | | | | | |
| 3. | | | | | | | |
| 4. | | | | | | | |
| 5. | | | | | | | |
| 6. | | | | | | | |
| 7. | | | | | | | |
| 8. | | | | | | | |
| 9. | | | | | | | |
| 10. | | | | | | | |
| 11. | | | | | | | |
| 12. | | | | | | | |
| 13. | | | | | | | |
| 14. | | | | | | | |
| 15. | | | | | | | |
| 16. | | | | | | | |
| 17. | | | | | | | |
| 18. | | | | | | | |
| 19. | | | | | | | |
| 20. | | | | | | | |
| 21. | | | | | | | |
| 22. | | | | | | | |
| 23. | | | | | | | |
| 24. | | | | | | | |
| 25. | | | | | | | |
| 26. | | | | | | | |
| 27. | | | | | | | |
| 28. | | | | | | | |

# Annexe 11 : Matériel reproductible pour les élèves

a) Retour sur votre système de numération

b) Outils de calcul pour les additions et les soustractions

c) Outils de calcul pour les multiplications et les divisions

d) Retour sur les opérations dans votre système de numération

e) Ligne du temps et carte du monde

f) Retour sur l'ensemble des activités du projet

g) Grille critériée pour l'observation de la discussion

Nom :________________________ Système travaillé :__________________________

## RETOUR SUR VOTRE SYSTÈME DE NUMÉRATION

1. En quoi ce système ressemble à notre système actuel de numération?

2. En quoi ressemble-t-il à d'autres systèmes présentés en classe?

3. En quoi est-il différent de notre système de numération?

4. En quoi est-il différent des autres systèmes présentés en classe?

5. Le système de numération que nous utilisons est en base 10, quelle est la base du système sur lequel vous avez travaillé? Pourquoi?

6. Ce système a-t-il besoin d'un zéro? Pourquoi?

7. Est-ce un système positionnel comme notre système? Pourquoi?

## OUTILS DE CALCULS POUR LES ADDITIONS ET SOUSTRACTIONS

### Abaque mésopotamien (sumérien)

| 36 000 | 3 600 | 600 | 60 | 10 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |

### Abaque mésopotamien (babylonien)

| 36 000 | 3 600 | 600 | 60 | 10 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |

## OUTILS DE CALCULS POUR LES MULTIPLICATIONS ET LES DIVISIONS

### Tableau de multiplication égyptienne

| | |
|---|---|
| 1 | 15 |
| 2 | 30 |
| 4 | 60 |
| 8 | 120 |
| 16 | 240 |
| 32 | 480 |
| 64 | 960 |

### Tableau de multiplication babylonienne

| Ordre des 3 600 (60x60) | Ordre des Soixantaines | Ordre des Unités (1 à 59) | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

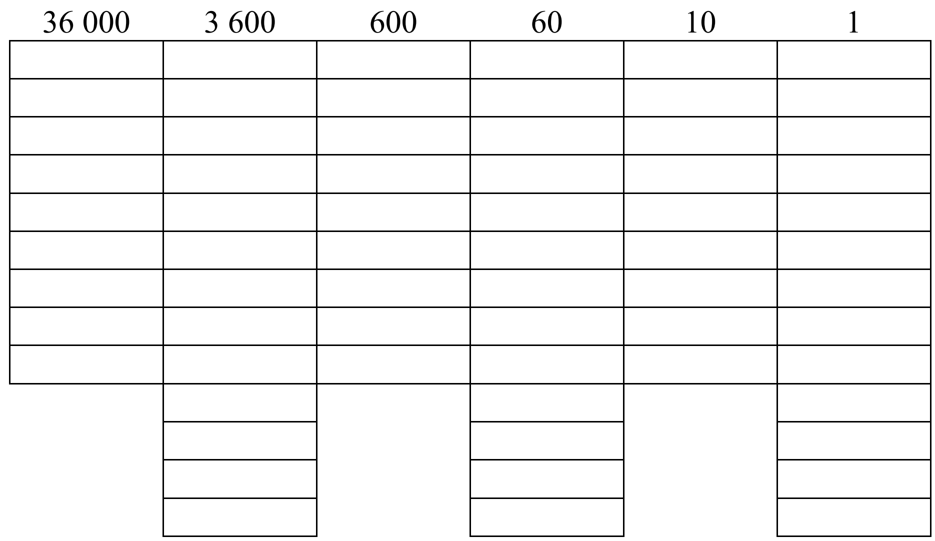
Représentation du multiplicande ⇐

Représentation du résultat

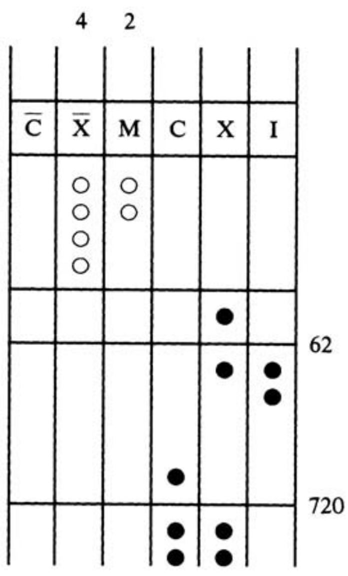
**Table de multiplication babylonienne (25)**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 25 | 11 | 275 (4; 35) |
| 2 | 50 | 12 | 300 (5; 0) |
| 3 | 75 (1; 15) | 13 | 325 (5; 25) |
| 4 | 100 (1; 40) | 14 | 350 (5; 50) |
| 5 | 125 (2; 5) | 15 | 375 (6; 15) |
| 6 | 150 (2; 30) | 16 | 400 (6; 40) |
| 7 | 175 (2; 55) | 17 | 425 (7; 5) |
| 8 | 200 (3; 20) | 18 | 450 (7; 30) |
| 9 | 225 (3; 45) | 19 | 475 (7; 55) |
| 10 | 250 (4; 10) | 20 | 500 (8, 20) |

## Abaque mésopotamien (sumérien)




## Abaque à jetons romain



Nom :____________________________ Système travaillé : _____________________

## RETOUR SUR LES OPÉRATIONS DANS VOTRE SYSTÈME DE NUMÉRATION

1. En quoi la façon d'effectuer les additions et les soustractions dans votre système de numération ressemble à notre façon de faire ces opérations aujourd'hui?

2. En quoi la façon d'effectuer les additions et les soustractions dans votre système est différente de notre façon de faire ces opérations aujourd'hui?

3. En quoi la façon d'effectuer les multiplications (et les divisions pour certains) dans votre système de numération ressemble à notre façon de faire ces opérations aujourd'hui?

4. En quoi la façon d'effectuer les multiplications et les divisions dans votre système est différente de notre façon de faire ces opérations aujourd'hui?

5. Si une machine à voyager dans le temps permettait à un savant (sumérien, égyptien, babylonien, chinois ou romain) de venir à notre époque et de découvrir notre système de numération, que dirait-il à son retour à ses semblables pour les convaincre d'adopter notre système?

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

6. En quoi le peuple que vous avez présenté à la classe a contribué à l'évolution des mathématiques?

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

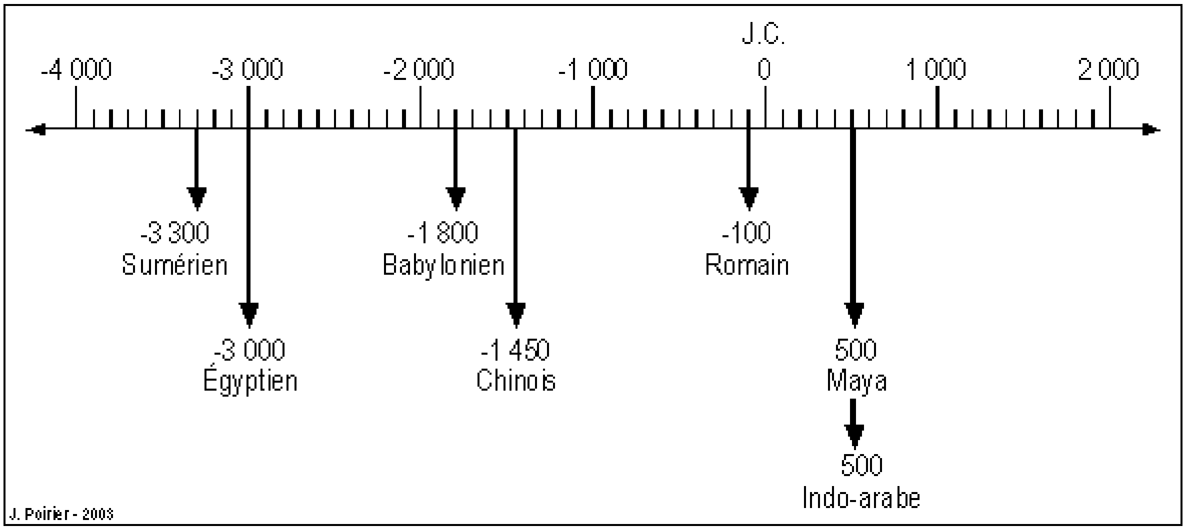
7. Nomme deux avancées majeures survenues dans l'évolution de la numération.

______________________________________________

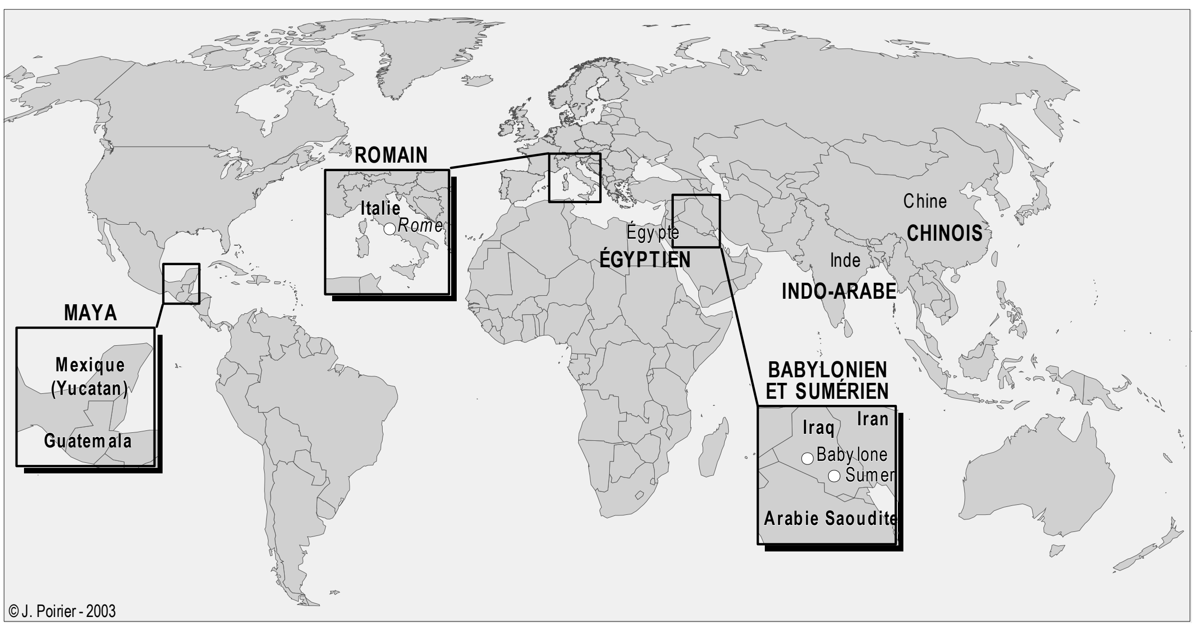
______________________________________________

______________________________________________

## LIGNE DU TEMPS ET CARTE DU MONDE




**DATES D'APPARITION DES SYSTÈMES DE NUMÉRATION ÉTUDIÉS**




**LOCALISATION APPROXIMATIVE DES SYSTÈMES DE NUMÉRATION ÉTUDIÉS**

Nom : ______________________ Système travaillé : ____________________________

## RETOUR SUR L'ENSEMBLE DES ACTIVITÉS DU PROJET

1. Donne une note d'appréciation personnelle pour chaque activité que nous avons réalisée dans le cadre de ce projet en histoire des mathématiques. Sois sincère, ne mets pas une note ou un commentaire pour me faire plaisir.

| **Activités** | **Note** |
|---|---|
| A. Ce que je sais… carte d'exploration | |
| B. Compter sur son corps (les Papous) | |
| C. Survol historique | |
| 1. Fonctionnement des différents systèmes de numération (remplir la feuille en équipe) | |
| 2. Préparation des présentations et présentation des systèmes de numération | |
| 3. Les six systèmes en travail personnel (TP) | |
| 4. Récapitulation | |
| 5. Les additions et les soustractions dans votre système de numération | |
| 6. Préparation des présentations et présentation des additions et des soustractions | |
| 7. Les multiplications et les divisions dans votre système de numération | |
| 8. Préparation des présentations et présentation des multiplications et des divisions | |
| 9. Ligne du temps et carte du monde | |

**Légende :** 1 : Très intéressante; 2 : Intéressante; 3 : Plus ou moins intéressante;
4 : Peu intéressante; 5 : pas du tout intéressante.

2. Qu'est-ce que tu as le plus apprécié dans ce projet et pourquoi?

________________________________________________________________________

________________________________________________________________________

3. Qu'est-ce que tu as le moins aimé dans ce projet et pourquoi?

________________________________________________________________________

________________________________________________________________________

________________________________________________________________________

4. Que retiens-tu de ce projet?

5. Est-ce que ce projet a changé ta façon de percevoir les mathématiques? Comment?

6. Crois-tu que ce projet t’a aidé à mieux comprendre le fonctionnement de notre système de numération actuel? Comment?

7. Crois-tu que ce projet t’a aidé à mieux comprendre ou à mieux effectuer les quatre opérations? Comment?

8. Qu’est-ce que tu changerais à ce projet pour qu’il soit encore plus intéressant pour les élèves des prochaines années?

9. Qu’est-ce que tu changerais à ce projet pour qu’il permette de faire encore plus d’apprentissages?

10. As-tu d’autres commentaires ou suggestions à me faire?

Merci, tes commentaires sont précieux!

# Annexe 12 : Plan de travail sur l'histoire de la numération

**1. Quel est notre objectif?**

**Effectuer une recherche sur :**

- **Thème transdisciplinaire**

Où nous nous situons dans l'espace et le temps

- **Idée maîtresse**

Plusieurs peuples ont contribué à l'évolution de la pensée mathématique à travers le temps.

**Tâche (s) d'évaluation sommative :**

De quelles façons pouvons-nous évaluer la compréhension de l'idée maîtresse par les élèves? Quelles preuves (y compris les actions initiées par les élèves) rechercherons-nous?

Discussion sur l'évolution des mathématiques
À la toute fin du module de recherche et afin de structurer leur pensée, les élèves doivent d'abord réfléchir individuellement sur certaines questions synthèses : En quoi le peuple que vous avez présenté à la classe a contribué à l'évolution des mathématiques? Comment la numération a-t-elle évolué jusqu'à notre système actuel? Pourquoi a-t-elle évolué? Si une machine à voyager dans le temps permettait à un scribe égyptien de venir à notre époque et de découvrir notre système de numération, que dirait-il à ses semblables pour les convaincre d'adopter ce nouveau système?
Ils devront ensuite discuter en équipe de ces mêmes questions afin d'être en mesure de nommer des manifestations de l'évolution de la pensée mathématique à travers le temps.

Coévaluation
Durant cette discussion, des élèves de 6e année joueront le rôle d'observateurs et noteront à l'aide d'une grille d'observation critériée les manifestations soulevées durant la discussion. À la fin de la discussion, chaque élève s'autoévaluera sur ces mêmes énoncés.

Classe/niveau : 5e année

Groupe d'âge : 10-11 ans

Établissement : Wilfrid-Pelletier

Code de l'établissement : 904551

Titre : D'où viennent les chiffres?

Enseignant (s) : Julie Poirier

Date : Février-mars

Durée proposée : 50 heures réparties sur 6 semaines

IBO

**Plan de travail du PP**

**2. Que voulons-nous apprendre?**

Quels sont les concepts clés (forme, fonction, causalité, changement, relation, perspective, responsabilité, réflexion) sur lesquels nous mettrons l'accent durant la recherche?
Fonction, changement, relation.
Quelles pistes de recherche définiront le champ de cette recherche centrée sur l'idée maîtresse?
1) La représentation des nombres et le fonctionnement des systèmes de numération dans différentes civilisations
2) Les quatre opérations dans ces systèmes
3) Les facteurs et les besoins ayant conduit à la création et à l'évolution de la numération
4) L'évolution des systèmes jusqu'à notre système actuel

Quelles questions/provocations de l'enseignant seront le moteur de ces recherches?
**Questions de l'enseignante**
1) Quelles sont les ressemblances et les différences entre les différents systèmes à l'étude et le système actuel?
2) Comment les premiers systèmes de numération et leurs opérations mathématiques fonctionnaient-ils?
3) Quels sont les facteurs et les besoins humains qui ont conduit à la création et l'évolution de la numération?
4) Comment la numération a évolué jusqu'à notre système actuel?
**Activité déclencheur** : Découverte de la façon de compter primitive des Papous (sur les parties de leur corps), expérimentation et discussion sur cette façon de faire.

### 3. Comment vérifierons-nous ce que nous avons appris?

Cette colonne doit être utilisée conjointement avec « Comment apprendrons-nous le mieux? ».

De quelles façons pouvons-nous évaluer les connaissances et savoir-faire antérieurs des élèves? Quelles preuves rechercherons-nous?

- Lors de l'activité 1 (carte d'exploration), je m'attends à ce que les élèves nomment quelques façons de représenter les nombres (dessins, traits, chiffres arabes, chinois, etc.) et quelques instruments de calcul (cailloux, boulier, calculatrice, etc.). Cette activité me permettra aussi de vérifier la capacité des élèves à savoir penser (acquisition de connaissances, compréhension, application, analyse, synthèse) en appréciant leurs capacités à former des catégories, mettre ensemble ce qui va ensemble, faire des liens entre les concepts et les catégories, etc.
- L'activité 2 (survol historique) me permet, avant de poursuivre les apprentissages, de m'assurer que les élèves ont une certaine base commune (comme c'est un domaine relativement nouveau pour eux).

De quelles façons pouvons-nous évaluer l'apprentissage des élèves dans le contexte des pistes de recherche? Quelles preuves rechercherons-nous?

Pendant les activités d'équipe 3 et 4, observer que les savoir-faire sociaux (accepter ses responsabilités, respecter les autres, coopérer) se développent. Je m'attends à ce que les équipes fonctionnent bien puisqu'elles ont été formées à la suite d'un sociogramme.

Après les activités 3 et 4, une fiche synthèse permet de vérifier la compréhension (savoir penser) qu'ont les élèves des systèmes de numération et des opérations.

Pendant les présentations des activités 3 et 4, les élèves devront démontrer leur capacité à savoir communiquer (parler, présenter) et à savoir penser (compréhension, analyse et synthèse).

### 4. Comment apprendrons-nous le mieux?

Quelles activités d'apprentissage ont été suggérées par l'enseignant et/ou les élèves afin d'encourager ces derniers à se lancer dans la recherche et à répondre aux questions d'orientation?

**1) Carte d'exploration** : Remplir collectivement une carte d'exploration sur les connaissances des élèves sur l'histoire de la numération. Avec d'autres couleurs, reprendre cette activité à la mi-projet et à la fin du projet pour voir l'évolution des connaissances.

**2) Survol historique :** Explorer les pages 80 à 83 de la collection Défi 6e année qui permettent un survol historique de plusieurs millénaires en quelques minutes et discussion**.**

**3) Fonctionnement des systèmes de numération** : Chaque équipe reçoit une fiche différente avec un système de numération présenté, mais non expliqué (systèmes sumérien, égyptien, babylonien, romain, chinois, maya). En équipe, les élèves doivent comprendre le fonctionnement du système et doivent compléter la fiche en représentant les nombres ou dessins manquants. Ils présentent ensuite leur système et mettent les élèves de la classe au défi de compléter leur tableau. À chaque présentation, on fait ressortir les ressemblances et les différences entre les systèmes et notre système actuel.

**4) Les opérations à la manière de nos prédécesseurs :** À l'aide des instruments de calcul utilisés à l'époque, les élèves émettent des hypothèses quant à la façon d'effectuer les 4 opérations à la manière de nos prédécesseurs. Ils vérifient ensuite leurs hypothèses en consultant un feuillet explicatif et doivent tenter de faire les quatre opérations à la manière de « leur » peuple. Ensuite, les élèves expliquent à la classe comment on faisait ces opérations. En groupe, on remarque les ressemblances et différences entre les différentes façons de procéder et la nôtre.

**5) Ligne du temps et carte** : Placer les différents systèmes travaillés sur une ligne du temps et les situer sur la carte du monde. Faire ressortir l'évolution dans les systèmes de numération (manipulation à systèmes additifs à systèmes positionnels, etc.)

Quelles seront les occasions de développer les savoir-faire transdisciplinaires et les qualités décrites dans le profil de l'apprenant?

| Savoir-faire | Savoir-être | Profil |
|---|---|---|
| savoir penser (act. 3-4) | émerveillement (act. 2-3-4) | informés et instruits (act. 2 à 5) |
| savoir communiquer (act. 3-4) | engagement (act. 3-4) | penseurs (act. 3-4) |
| Savoir-faire sociaux (act. 3-4) | coopération (act. 3-4) | communicateurs (act. 3-4) |
| | curiosité (act. 1 à 5) | |

### 5. Quelles ressources devons-nous rassembler?

Quels personnes, lieux, matériel audiovisuel, littérature pertinente, musique, art, logiciels et autres seront disponibles?

L'histoire universelle des chiffres (Ifrah, Georges)
Enseigner les mathématiques au primaire (Poirier, Louise)
Les maths c'est magique ! ERPI
Défi mathématique 6e année (Lyons, Robert et Michel)
Les quatre opérations expliquées aux élèves : documents vulgarisés inspirés d'Ifrah, (Poirier, Julie)

Sites Internet :
www.clevislauzon.qc.ca/professeurs/mathematiques/rossa
www.defimath.ca/mathadore/vol2num44.html
(aussi, numéros 59, 62, 65 et 68)

Comment l'environnement de la classe, l'environnement local et/ou la communauté seront-ils utilisés pour faciliter cette recherche?

Les équipes de base de la classe auront été formées suite à un sociogramme et en s'assurant qu'un moins un élève en grande facilité d'apprentissage en math. se trouve dans chaque équipe. Les livres de la bibliothèque seront dans la classe et pourront être consultés à tout moment.

## 6. Dans quelle mesure avons-nous atteint notre objectif?

Évaluez le résultat de la recherche en fournissant des preuves de la compréhension de l'idée maîtresse par les élèves. Les réflexions de tous les enseignants ayant participé à la planification et à l'enseignement du module de recherche doivent être consignées ici.

Ce module de recherche a été l'objet d'une expérimentation dans le cadre de ma thèse de doctorat. Il est donc très documenté et la collecte de données a été rigoureuse. L'histoire des mathématiques est un sujet qui fascine les élèves et jusqu'à maintenant, ils ne l'avaient qu'effleurée. Vécu depuis plusieurs années, ce module est toujours très apprécié.

Lors de la révision du module, nous avons reformulé l'idée maîtresse afin qu'elle soit plus globale. Les pistes ont également été revues afin qu'elles soient davantage en lien avec les questions de l'enseignante.

Lors d'un retour écrit sur l'ensemble du module de recherche, la conclusion la plus extraordinaire à laquelle en sont venus plusieurs élèves est qu'ils considèrent notre système actuel comme parfait, supérieur et enrichi par toutes les découvertes des peuples avant nous. Ils en apprécient la simplicité et surtout la polyvalence pour effectuer les quatre opérations.

De quelles façons pourriez-vous améliorer la ou les tâches d'évaluation afin d'avoir une vision plus précise de la compréhension qu'a chaque élève de l'idée maîtresse?

La tâche d'évaluation sommative a été reformulée en deux parties, soit une réflexion personnelle qui permet de mieux voir la compréhension qu'a chaque élève de l'idée maîtresse, suivi d'une discussion en équipe où mes anciens élèves (maintenant en sixième année) viennent observer et évaluer la compréhension et la participation de chaque élève. Malheureusement, cette tâche a été bâtie après la réalisation de ce module de recherche l'an passé; celle proposée dans ce plan sera expérimentée en mars 2008.

Quelles sont les preuves que des liens ont été établis entre l'idée maîtresse et le thème transdisciplinaire?

Ce module de recherche permet d'établir des liens clairs avec le thème transdisciplinaire *où nous nous situons dans l'espace et le temps*. En effet, l'activité 5 (ligne du temps et carte du monde) a permis aux élèves de situer certaines découvertes d'envergure planétaire dans l'espace et le temps. Cependant, c'est l'ensemble du module de recherche qui permet de découvrir la contribution de plusieurs peuples à la pensée mathématique.

## 7. Dans quelle mesure avons-nous inclus les éléments du PP?

Quelles activités d'apprentissage ont permis aux élèves de :

- développer leur compréhension des concepts énumérés dans la section « Que voulons-nous apprendre? »

Fonction : activités 3 et 4
Changement : activités 2, 3 et 4
Relation : activités 1 à 5

- démontrer leur apprentissage et leur application de certains savoir-faire transdisciplinaires ;

Savoir penser : activités 1, 3, 4
Savoir faire sociaux : activités 3 et 4
Savoir communiquer : activités 3 et 4

- développer certaines qualités du profil de l'apprenant et/ou certains savoir-être ?

| | |
|---|---|
| Informés et instruits : activités 3 et 4 | Émerveillement : activités 2-3-4 |
| Penseurs : activités 3 et 4 | Engagement : activités 3-4 |
| Communicateurs : activités 3 et 4 | Curiosité : activités 3-4 |
| | Enthousiasme : activités 1 à 5 |

Dans chaque cas, veuillez justifier votre choix.

Le concept de **fonction** a été travaillé surtout dans les activités 3 et 4 où les élèves découvraient le fonctionnement des systèmes de numération et des 4 opérations. Le **changement** a été abordé tout au long du module, mais particulièrement lors du survol historique (act. 2) et lors des act. 3 et 4. Ils ont réalisé que les premiers systèmes étaient plus primitifs (parties du corps, entailles, etc.) ensuite ils ont vu des systèmes de plus en plus efficaces (additif, hybride, positionnel). La **relation** a été présente dans toutes les activités puisque les élèves ont fait de nombreux liens entre les différents systèmes et notre système actuel et entre la numération et les opérations.

Les activités 3 et 4, qui étaient de véritables situations-problèmes, ont grandement contribué à travailler certains **savoir penser**, notamment l'acquisition de connaissances, la compréhension, l'application et l'analyse. Comme ils devaient présenter leurs trouvailles au reste de la classe, ils se devaient de faire une bonne synthèse des informations apprises.

Comme les activités 3 et 4 se réalisaient en équipe, les élèves ont dû accepter des responsabilités, respecter les autres, coopérer, résoudre des conflits et prendre des décisions (**savoir faire sociaux**). Toujours lors des activités 3 et 4, les élèves ont aussi développé certains **savoir communiquer**, particulièrement écouter, parler et présenter.

Ce module de recherche a permis de travailler plusieurs éléments du profil. Les élèves ont démontré qu'ils étaient **informés et instruits** lorsqu'ils ont exploré les nouveaux concepts et les problèmes. Ils ont développé une bonne compréhension dans plusieurs disciplines : mathématique, histoire, géographie. En résolvant des situations-problèmes (act. 3-4), ils ont démontré qu'ils étaient des **penseurs** en réfléchissant de façon critique et en prenant des décisions réfléchies et logiques. Lors des présentations (act. 3-4), ils se sont avérés être de bons **communicateurs** en exprimant bien leurs idées et connaissances et en utilisant un langage mathématique rigoureux.

Au niveau des savoir-être, plusieurs ont fait preuve d'**émerveillement** en découvrant ou en comprenant une nouvelle façon de représenter des nombres ou de calculer.

Ils ont démontré de l'**engagement** en s'investissant à fond dans la résolution des situations-problèmes et ont démontré beaucoup de **curiosité** et d'**enthousiasme** dans l'ensemble des activités.

## 8. Quelles recherches ont été initiées par les élèves à la suite de leur apprentissage?

Notez plusieurs recherches initiées par les élèves et plusieurs questions qu'ils ont posées. Soulignez celles qui ont été utilisées pour l'enseignement et l'apprentissage.

**Questions des élèves**

- <u>Qui a vraiment inventé les chiffres?</u>
- <u>D'où viennent les chiffres, ont-ils changé et pourraient-ils changer pour diverses raisons?</u>
- <u>Quelles sont les différentes façons de compter?</u>
- <u>D'où est né le besoin de faire des additions, soustractions, multiplications et divisions?</u>
- <u>Comment avons-nous senti le besoin de compter?</u>
- <u>Quels étaient les instruments (pour compter) du début des mathématiques jusqu'à aujourd'hui?</u>
- <u>Quelle a été la première façon de compter?</u>
- <u>Si les chiffres n'avaient pas existé, que serait-il arrivé?</u>

L'ensemble des questions des élèves était relié aux pistes de recherche. Dans le livre *Les maths c'est magique !,* j'ai trouvé un court texte qui simule un monde sans chiffre. Les élèves ont beaucoup ri en le lisant et en émettant leurs commentaires.

À ce stade, les enseignants doivent retourner à la section intitulée « Que voulons-nous apprendre? » (section 2) et souligner les questions/provocations de l'enseignant qui ont été les moteurs de la recherche les plus efficaces.

1) <u>Quelles sont les ressemblances et les différences entre les différents systèmes à l'étude et le système actuel?</u>
2) <u>Comment les premiers systèmes de numération et leurs opérations mathématiques fonctionnaient-ils?</u>
3) <u>Quels sont les facteurs et les besoins humains qui ont conduit à la création et l'évolution de la numération?</u>
4) <u>Comment la numération a évolué jusqu'à notre système actuel?</u>

### Quelles actions ont été initiées par les élèves à la suite de leur apprentissage?

Les élèves ont réclamé de faire les fiches de l'activité 4 des autres équipes en devoir pour le plaisir.

Notez les actions initiées par les élèves, en groupe ou individuellement, qui montrent leur capacité à réfléchir, à choisir et à agir.

Avec ce devoir, certains élèves voulaient expliquer le fonctionnement des différents systèmes de numération à leurs parents, frères et soeurs. Ils ont grandement impressionné leurs parents en démontrant autant de compréhension et d'enthousiasme (j'ai eu quelques commentaires de parents en ce sens).

## 9. Remarques du ou des enseignants

Bien qu'il n'apparaisse pas dans le plan de travail (faute de place), un moment a été accordé aux élèves pour qu'ils s'interrogent sur l'histoire des chiffres à la suite des activités de mise en situation (activités 1 et 2). Nous avons d'abord fait un rappel des différents concepts en insistant sur le fait qu'une recherche est riche lorsqu'elle sort des concepts de forme et fonction. Les élèves avaient donc en tête de formuler des questions riches, variées et touchant le plus de concepts différents possible. Ils devaient ensuite les classer selon le concept. Les questions se sont avérées très riches et très diversifiées. Un retour à la fin du module a aussi permis de constater que les activités et les discussions avaient permis de répondre à l'ensemble des questions des élèves.

Aussi, dans leur appréciation des activités, les élèves ont particulièrement apprécié l'activité sur les différents systèmes (activité 3) et celle où nous situions l'apparition des systèmes de numération sur une ligne du temps et où nous les situions sur la carte du monde. Les enfants étaient surpris de voir que la plupart des systèmes étaient apparus dans la région de l'Irak (très médiatisée par la guerre) et le Moyen-Orient.

# Annexe 13 : Journal de bord bonifié et codé

Activité A : Ce que je sais… la carte d'exploration

Les élèves ont bien participé à l'activité, ils se sont principalement attardés aux différentes sortes de chiffres dont ils avaient entendu parler (grecs, romains, arabes, égyptiens, mayas, sumériens et chinois). Un élève a dit que c'était les Arabes qui avaient inventé le zéro. Un autre a précisé que les chiffres avaient changé dans le temps, mais qu'ils avaient toujours eu la même signification (la référence aux mêmes quantités). Le même élève a parlé que les chiffres (nombres) se disaient différemment selon la langue, mais qu'ils signifiaient tous les mêmes quantités. Une élève a parlé des « traits » pour compter et une autre qu'il existait plusieurs manières de compter. Je lui ai demandé si elle parlait des techniques de calcul ou d'énumérer les objets. Elle faisait référence aux techniques de calcul. Dans cette catégorie, un élève a précisé que maintenant, on utilisait les calculatrices. Durée réelle : 15 minutes

**Histoire des chiffres**

Manières de compter (techniques de calcul ont changé)

- Calculatrice (inventeur français)
- Traits (Noé)
- Entailles bâton

Sortes de chiffres

- Chiffres grecs (1er?)
- Chiffres romains
- Chiffres ont changé
- Chiffres arabes (2e?) (invention du zéro)
- Chiffres égyptiens (dessins)
- Chiffres mayas
- Chiffres sumériens (1er?)
- Chiffres chinois (idéogrammes)

Légende :

- 19 avril

Activité B : Compter sur son corps

Les élèves ont trouvé hilarante la façon de compter des Papous. À la question comment trouvez-vous cette façon de compter, ils ont utilisé les termes : originale, spéciale, drôle, intéressante, limitée. Ils ont demandé comment les Papous différenciaient les nombres 33 de 40 puisque les deux s'appelaient « orteil suivant », je leur ai dit qu'ils devaient dire : l'orteil suivant le petit orteil droit ou l'orteil juste avant le petit orteil gauche. Lorsque j'ai demandé s'ils pensaient que les Papous pouvaient compter de gros nombres, faire des additions et des multiplications, un élève a supposé qu'ils utilisaient plusieurs personnes. Par contre, ils ne pouvaient expliquer comment faire les opérations, ils n'ont pas pensé à utiliser des cailloux ou des bouts de bois. Ils avaient aussi du mal à expliquer la représentation de gros nombres. En effet, ils restaient collés à notre représentation positionnelle à l'aide de 10 chiffres. Ils expliquaient par exemple que « œil droit » fois « nez » (10 x 11) donnait 110, donc on n'avait qu'à dessiner un nez à côté d'un auriculaire droit. Je leur disais que le 11 n'existait pas et que « nez » à côté de « auriculaire droit » pouvait très bien être 21, c'est-à-dire les deux additionnés. Les élèves ont vraiment longuement discuté de leurs hypothèses sur comment les Papous devaient effectuer leurs opérations. Comme ils ne faisaient pas référence à des objets pour calculer, rien de valable mathématiquement parlant n'en est sorti. Je leur ai donc raconté l'anecdote de la rançon de guerre (tirée d'Ifrah) que je me souvenais de mémoire pour leur expliquer comment ils pouvaient effectuer des opérations qui donnaient des réponses beaucoup plus élevées que 41. J'ai eu le « malheur » de leur parler de cette tribu amazonienne qui n'avait pas besoin de compter de façon très précise et qui avait un terme pour « un », un terme pour « deux » et le terme « cheveux » représentant « beaucoup » pour toutes les quantités au-delà de deux. Ils ont bien rigolé et fait plein de blagues pour le reste de la journée (et le reste du mois même...). Durée réelle : 20 minutes

Activité C : Un survol historique

Nous avons lu ensemble les pages 80 à 83 de l'ancien manuel de Défi mathématique de sixième année. J'ai rajouté la page 86 qui présentait certains outils de calculs (abaques, bouliers, etc.). Les élèves ont trouvé ce survol intéressant puisque malgré le beau temps à l'extérieur, la plupart demeuraient intéressés et participaient à la lecture de la bande dessinée et à la discussion. Ils trouvaient ces façons de compter amusantes, mais limitées puisqu'un élève a précisé que lorsqu'il avait « compté » avec ses doigts en chantant « Au clair de la lune », il s'était mélangé après dix. Une élève a remarqué que ça pouvait être mélangeant si le troupeau était plus nombreux que le nombre de mots de la prière. Elle a dit qu'on pouvait se tromper sur le nombre de fois qu'il fallait réciter la prière.

Les élèves ont bien compris les entailles de la case 1. À la case 2, un élève a émis comme hypothèse que les barres verticales valaient 1, que les barres obliques valaient 5 et que les X valaient 10, mais sans pouvoir expliquer son hypothèse. Il se contentait de dire que c'était « logique ». Un autre élève a remarqué comment on devait lire les lignes et il a confirmé l'hypothèse de son ami. Il a d'ailleurs ajouté que le X était deux barres obliques qui valaient chacune 5. Je leur ai demandé si ces symboles leur disaient quelque chose et un élève a mentionné la similitude avec les chiffres romains. J'ai confirmé qu'il s'agissait de leurs ancêtres. Ils ont vite saisi la méthode du prisonnier et un élève polonais pieux a bien expliqué comment on récitait les prières à l'aide d'un chapelet. Une élève musulmane a ajouté qu'un bijou semblable existait dans sa religion et avait la même utilité.

Les élèves ont bien compris le principe des comptables à Suse. Une élève a même remarqué que les disques, les billes et les bâtonnets lui faisaient penser aux cubes, barres et plaques (blocs base dix ou matériel multi bases) que nous avons déjà utilisés. Dans l'ensemble, ils ont semblé comprendre l'évolution du dénombrement à l'aide d'objets à l'écriture plus symbolique des nombres, mais un élève ne comprenait tout de même pas pourquoi ils utilisaient les objets avant de juste les dessiner. J'ai envoyé la question à la classe et un élève a répondu : « c'est parce que cette façon n'était pas encore inventée! » J'ai fait le lien avec leurs premiers apprentissages où ils avaient besoin de leurs doigts ou de jetons pour compter, mais qu'avec le temps, ils étaient capables de s'en passer.

Nous avons fait un rapide survol de la page 86. Un élève a très bien expliqué le fonctionnement des abaques primitifs. Par contre, à première vue, il ne pouvait expliquer le fonctionnement des abaques « dits simplifiés ». Un autre élève est venu à sa rescousse. Par contre, seulement trois élèves ont pu identifier le nombre 54 681 représenté sur un boulier chinois. La journée était déjà terminée et les élèves ne tenaient plus en place, j'ai donc conclu rapidement cette activité. Durée réelle : 25 minutes

Activité D : La carte d'exploration (ajouts)

Nous avons repris la carte d'exploration de l'activité A et à la lumière des connaissances que venaient d'acquérir les élèves dans les activités de mise en contexte, ils ont enrichi la carte. Nous avons cette fois-ci utilisé un marqueur rouge. Voici ce qui en est ressorti. Durée réelle : 10 minutes.

Sortes de chiffres

- Chiffres grecs (1er?)
- Chiffres romains
- Chiffres ont changé
- Chiffres arabes (2e?) (invention du zéro)
- Chiffres égyptiens (dessins)
- Chiffres mayas
- Chiffres sumériens (1er?)
- Chiffres chinois (idéogrammes)

Manières de compter (techniques de calcul ont changé)

- Calculatrice (inventeur français)
- Traits (Noé)
- Entailles bâton
- Bergère : prière
- Papous : parties du corps
- Chapelet
- Abaque
- Boules d'argile (calculi) comptable Mésopotamie

**Histoire des chiffres**

Instruments pour calculer

- Calculatrice
- Abaque
- Bouliers russe, chinois, français
- Parties du corps
- Quipu (cordes)
- Chapelet
- Jetons, plaques, barres
- Super planche
- Compteur

Légende :

- 19 avril
- 20 avril

Activité E : Les questions de l'enseignante et des élèves

Cette activité ne s'est pas déroulée complètement comme prévu. En effet, certains élèves ont écrit des questions qu'ils avaient sur l'histoire des chiffres, mais au lieu d'écrire sur le papier-conférence les pistes de recherche, j'ai plutôt écrit les questions de l'enseignante. Les élèves devaient donc tenter de relier leur question à une question de l'enseignante. Ce n'est pas un gros changement, mais je crois qu'il aurait été plus facile pour les élèves de relier leur question à une piste de recherche (plus concrète) qu'à une question de l'enseignante. Si une question d'élève ne pouvait être reliée à une question de l'enseignante, on la mettait dans une catégorie à part. Voici lesdites questions (questions de l'enseignante en gras et questions des élèves s'y rattachant en italique).

**Quelles sont les ressemblances et les différences entre les différents systèmes à l'étude et le système actuel?**

*Est-ce qu'il y a des chiffres différents dans chaque pays?*

**Quels sont les facteurs et les besoins humains qui ont influencé la création et l'évolution des divers systèmes de numération?**

*D'où est né le besoin de faire des additions, soustractions, multiplications et divisions?*

*Comment avons-nous senti le besoin de compter?*

*Pourquoi les chiffres ont-ils évolué?*

*Qui et pourquoi la première personne a décidé de compter et d'inventer les chiffres?*

**Comment les premiers systèmes de numération et leurs opérations mathématiques fonctionnaient-ils?**

*Quelles sont les différentes façons de compter?*

*Quelle a été la première façon de compter?*

*Qui a inventé les différentes méthodes de calcul?*

*Comment les premiers inventeurs des chiffres s'en servaient?*

*Comment fonctionnaient les différentes sortes de chiffres?*

**Comment la numération a évolué jusqu'à notre système actuel?**

*D'où viennent les chiffres, ont-ils changé et pourraient-ils changer pour diverses raisons?*

*Quels étaient les instruments (pour compter) du début des mathématiques jusqu'à aujourd'hui?*

**Quel impact l'évolution de la pensée mathématique a-t-elle eu sur le monde?**

*Si les chiffres n'avaient pas existé, que serait-il arrivé?*

Autres questions des élèves qui ne sont pas des sous-questions de l'enseignante :

*Qui a vraiment inventé les chiffres?* (5 fois)

*Quels étaient les premiers chiffres?*

*Comment ont-ils fait pour savoir que le mot « trois » voulait dire trois choses?*

En présentant les questions de l'enseignante, j'ai mentionné sur quels systèmes nous allions travailler. Certains élèves avaient certaines connaissances de certains de ces peuples. Dans la mesure du possible, je tenterai de faire travailler les élèves sur un peuple qui les intéresse. Je leur ai d'ailleurs ouvert la porte à me faire des demandes spéciales que j'allais tenter de respecter lorsque j'attribuerai les systèmes aux équipes.

Durée réelle : 30 minutes.

Activité 1 : Le fonctionnement des différents systèmes de numération

Le système égyptien

L'équipe travaillant sur le système égyptien est composée de trois garçons et deux filles. Je leur ai attribué ce système parce qu'un membre de cette équipe, brillant, mais turbulent, m'avait informée qu'il s'intéressait au peuple égyptien. On entend même un « youpi! » quand je leur annonce qu'ils vont travailler sur ce système. Après 30 secondes, un élève dit : « moi je sais comment ça marche! », mais ils y réfléchissent tous finalement. Tous sont penchés sur la feuille et proposent des solutions. Le son n'est pas très bon puisqu'il y a trois équipes en même temps dans la classe. Au bout de 3 minutes, un élève dit « mais oui! C'est assez simple, ça c'est des unités, ça c'est des dizaines et ça c'est des centaines! » en pointant les barres, les arcs et les cordes. Sur l'enregistrement, on entend beaucoup un élève de l'équipe des Babyloniens qui prend beaucoup de place (voir cette équipe). Au bout de 6 minutes, tous les élèves de l'équipe sont penchés et concentrés sur la tâche et font valoir leur point de vue. Lorsque je m'approche d'eux, un élève me dit « On a même compris l'ordre. Ils mettent les plus petits en premier. » Je ne leur accorde pas trop de temps puisqu'ils semblent bien se débrouiller. Mon élève plus turbulent s'est accaparé la feuille et ce n'est que lui qui écrit. Cette activité semble l'intéresser au plus haut point et semble même rehausser son statut au sein de son équipe. Au bout de 9 minutes, les élèves m'appellent parce qu'ils ont déjà terminé. Je leur apporte le corrigé et les filles de l'équipe vérifient les réponses : ils n'ont fait aucune erreur. 4 minutes plus tard, ils sont prêts à commencer leur affiche. Je leur explique qu'ils doivent expliquer le système égyptien au reste de la classe pour que les élèves puissent relever les deux défis : « traduire un nombre indo-arabe en hiéroglyphes égyptiens et déchiffrer des hiéroglyphes égyptiens en chiffres indo-arabes ». Je leur dis de penser à ce qui est essentiel à mettre sur l'affiche, que ce n'est pas nécessaire de mettre beaucoup de mots. Une élève propose de mettre « 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 100 » et un autre élève lui répond : « mais non, on n'a pas besoin de faire ça ». Elle se réajuste et dit : « OK, on va mettre 1, 10, 100, 1 000, 100 000 et 1 000 000. » C'est un peu cacophonique (avec les autres équipes), mais cette équipe discute, argumente et semble s'entendre relativement bien. Pendant la réalisation de leur affiche, je viens les informer du nom donné à chaque hiéroglyphe : arc, corde, fleur de lotus (qu'ils appelaient « Pac Man », etc.). Pour m'assurer que leur affiche soit claire, je leur demande s'ils avaient prévu montrer quelques exemples de nombres. Ils ne voulaient que présenter les symboles, mais ils ont réalisé que montrer des exemples serait plus complet. Sur l'enregistrement, on n'entend pas ce qu'ils se disent, mais tout le monde participe à tour de rôle à l'affiche. Au bout de quelques minutes, on constate que c'est surtout les deux filles qui s'occupent de l'affiche. Les garçons restent plus ou moins attentifs (ils sont moins sollicités). Un peu plus tard, ils s'installent par terre pour faire leur affiche et les garçons s'impliquent à nouveau. Il y régnait une bonne entente et ils étaient très contents de savoir qu'ils étaient tombés sur le système le plus facile, mais je leur ai dit que ça allait se compliquer avec les prochaines étapes. Les élèves n'ont pas semblé être intimidés par la caméra. Ils la regardaient de temps en temps, mais ils étaient naturels. Ils ont vraiment fait un bon travail d'équipe où chacun a contribué à la compréhension du système et à la fabrication de l'affiche.

Durée : 60 minutes

Activité 2 : présentation du système égyptien

Comme l'enregistrement vidéo de cette présentation est introuvable et que la présentation a été très courte et efficace, nous n'avons pas grand-chose à coder dans notre journal de bord. L'équipe a fait une présentation courte et efficace. Tous les symboles étaient présents et ont été bien expliqués. Les élèves de la classe ont compris rapidement puisque les explications étaient bonnes. Lorsque j'ai demandé les ressemblances et les différences entre ce système et le nôtre, ils ont remarqué « qu'ils comptent par 10 comme nous », mais qu'« eux, ils font des dessins au lieu des chiffres ».

**Tableau des résultats du test : Retour sur votre système de numération : le système égyptien**

| Élèves | Ressemblances notre système[8] | Ressemblances autres systèmes | Différences notre système | Différences autres systèmes | Base | Besoin zéro | Positionnel |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| E. | « Ce système est par bonds de 10. » | « Il a des signes pour identifier les chiffres et les nombres. » | « Pour 17, il faut mettre un fer à cheval et 7 barres tandis que nous c'est juste un 1 et un 7. » | « Il y a une barre pour dire 1, un arc pour dire 10, une corde pour dire 100, une fleur de lotus qui égale à 1 000, etc. » | « Il est en base 10, car c'est 1, 10, 100, 1 000, etc. » | « Ils n'en ont pas besoin, car c'est un système additif. » | « Non, ce n'est pas un système positionnel, car c'est un système additif. » |
| S. | «Le 1 est une ligne droite, c'est une base 10. » | « D'un à 9, c'est comme 1+1+1+1+1+1=6 comme les Babyloniens. C'est en rangée de trois comme les Sumériens. » | « C'est des dessins (hiéroglyphes), le un million n'est pas composé de 7 chiffres, mais 1. Les chiffres 1 à 9 sont avec 1 à 9 barres, nous c'est un seul chiffre. | « Maya et babylonien : il n'y a pas de zéro. » | « 10, car il y a un symbole pour 1 à 9 puis 10, puis 100, puis 1 000, etc.» | « Non, car zéro, c'est donc ils ne mettent rien. » | « Non, car c'est un système additif, on additionne les chiffres, ex. 10 +10 +2=22 et non 22.» |
| H. | | « Dans chaque système de numération, il y a des signes pour les différencier. » | « Il n'y a pas autant de chiffres, notre système qu'on utilise est un système positionnel et le système égyptien est additif.» | « Il est plus facile, car il y a moins de choses à retenir et il faut additionner. » | « Le système égyptien est en base 10, car les chiffres égyptiens sont : 1, 10, 100, 1 000, 10 000, 100 000, 1 000 000. « À chaque chiffre, il faut les multiplier par 10. » | « Non, sûrement car ils n'avaient pas pensé de l'inventer. » | « Non, c'est un système additif, car il faut additionner les chiffres pour donner le résultat.» |
| M. | « Il n'est pas additif. Il a une base 10.» | « Un signifie une barre dans presque tous les systèmes. ' | « Ce sont des dessins.» | « Il n'est pas additif comme d'autres systèmes de numération. » | « 10, oui, parce qu'il y a un symbole pour 1, 10, 100, 1 000, 10 000, 100 000, 1 000 000. | « Non, car ce sont des dessins parce que les zéros sont déjà mis dans le dessin.» | « Non, car même si les dessins sont mis en croissant ou décroissant, c'est le même résultat.» |
| R. | « Si je me rappelle bien, la base de leur système : 10, comme en indo-arabe. | « Il a des symboles comme plusieurs autres (sumérien, chinois, maya). » | « Nous avons + de chiffres qu'eux. Nous ne faisons pas de dessins. Nous comptons différemment. | « Chinois est hybride. Tous les systèmes comptent différemment. » | « Il est en base 10 aussi. 1 → 1 000 000. » | « Non, ils ne sont pas comme les Babyloniens, dans leurs calculs, ils n'ont pas besoin de zéro pour atteindre la réponse. » | « Non. Le système égyptien est additif. Ils ont besoin d'additionner les chiffres pour arriver à la réponse. » |
| Julie | Sa base 10. | Base 10 (romain, chinois); additif (sumérien et romain); dessins ou symboles (sumérien, babylonien, chinois, maya). | Additif et nous positionnel, pas de zéro et nous oui; hiéroglyphes (nous : chiffres); un symbole pour puissances 10 (nous : chaque unité). | Additif (maya et babylonien positionnels); base 10 (sumérien et babylonien : base 60, maya : base 20). | Base 10, car un symbole pour 1, 10, 100, 1 000, 10 000, etc. | Non, car additif. Ex. si pas de dizaines, pas d'arcs. | Non, car additif : l'ordre des symboles n'a pas d'importance. |

[8] Pour les questions complètes du test, le lecteur peut se référer à l'annexe 11a.

Activité 1 : Le système chinois

Le système chinois a été donné à une équipe composée aussi de trois garçons et deux filles, dont une des filles, d'origine chinoise, m'avait suppliée de lui donner ce système. J'hésitais puisqu'elle connaissait déjà les symboles, mais elle m'affirmait qu'elle ne savait pas comment les Chinois comptaient. Les autres élèves de l'équipe se sont avérés déçus, mais ils n'avaient pas « entendu» (écouté) lorsque j'avais invité les élèves à me faire des demandes spéciales. L'élève chinoise s'est sentie très mal, allant même jusqu'à pleurer. J'ai remis les pendules à l'heure et les choses se sont améliorées. Ils ont compris relativement vite, un élève disant « ah oui! Ils font 2 fois 10 plus 2 » en pointant les symboles. L'élève chinoise a précisé que 22 se disait justement « deux-dix-deux» en chinois, exactement comme ça s'écrit en symboles. Un autre élève a supposé que pour écrire 30, il fallait mettre le symbole de 3 avec celui de 10. Au bout d'un moment, une élève fait référence à la caméra, mais cela ne semble pas modifier leur comportement. Le son n'est pas très bon et on entend beaucoup les autres équipes. Au bout de 5 minutes, ils déplacent un pupitre pour mieux travailler ensemble sur la feuille de travail. Ils sont concentrés sur la tâche, mais un élève se promène un peu. Au bout de 11 minutes, ils sont toujours les 5 élèves penchés sur la feuille à émettre leurs hypothèses, à discuter, à vérifier. « OK, 200, tu mets un 2 pis un 100». Un élève s'informe à l'équipe des Babyloniens s'ils ont compris. Au bout de 15 minutes, on voit un élève se mettre à danser, ils réalisent qu'ils ont compris. Ils font bonjour à la caméra. Ils me demandent ce qu'ils font quand ils ont fini la feuille de travail. Cette équipe a terminé en 16 minutes et avait tout bon.

Je leur explique qu'ils doivent présenter le système à la classe à l'aide d'une affiche qu'ils feront à l'instant. Ils sont enthousiastes. Ils me demandent s'ils doivent faire un brouillon de leur affiche. Je leur demande au moins de s'entendre sur ce qu'ils mettront sur leur affiche et de la tracer d'abord au crayon à mine. Un élève vient souvent voir la caméra et y fait des simagrées. Ils ont beaucoup de plaisir à faire l'affiche, ils rient, s'obstinent un peu, mais finissent par s'entendre. 22 minutes après le début, les garçons décrochent un peu, mais les filles continuent la tâche. Les garçons reviennent sur la tâche et font des propositions aux filles qui ont le contrôle des crayons et de l'affiche. Ils décident ensemble d'écrire la date du jour sur leur affiche et l'élève chinoise leur explique comment on l'écrit et comment on la dit. Au bout de 28 minutes, je viens les voir et constate que leurs symboles sont très petits sur leur affiche. Je leur rappelle que les élèves de la classe devront les voir de leur place. Un élève dessine au tableau, il est complètement décroché (c'est un élève généralement peu enthousiaste). Tout le monde y va de ses conseils aux filles qui font l'affiche. « Fais la ligne plus ce côté-là. » « Je le ferais plus gros celui-là. » À tour de rôle, ils tracent le titre au feutre. On entend un élève dire « Implique-toi, O! » à l'élève décroché. Il répond : « Je ne comprends pas le chinois. » L'élève lui répond : « Mais on n'écrit pas en chinois, on écrit en français! » Ce même élève s'informe à l'équipe des Babyloniens s'ils sont rendus à faire l'affiche. Ils répondent que non. Il leur demande s'ils comprennent et ils leur répondent que oui. O. précise « c'est compliqué hein? » O. propose enfin de faire certains dessins sur l'affiche. L'élève chinoise parle à son équipe de son école chinoise du samedi. Les élèves sont très étonnés de savoir qu'elle va à l'école le samedi. Elle leur promet de leur montrer son cahier de chinois. On entend un élève dire : « Avouez que c'est fort» mais on ne sait pas de quoi il parle. Les élèves continuent de s'étonner qu'une élève passe cinq heures le samedi dans une école. O. s'approche et pose enfin des questions (après 41 minutes!). Ils avaient déjà dessiné les symboles de 1 à 10 quand un élève dit : « Fais 100, 1 000 et 10 000». Au bout de 53 minutes, O. participe à l'affiche et un élève dit : « O. travaille, c'est un miracle! C'est la première fois qu'il travaille, il faut zoomer ça! » L'enregistrement prend fin au bout de 58 minutes. L'affiche est presque terminée.

Activité 2 : La présentation du système chinois

La deuxième équipe à présenter a été celle des Chinois. Ils avaient écrit tous les symboles nécessaires (1 à 9, 10, 100, 1 000 et 10 000), qu'ils ont d'ailleurs nommés en chinois (une élève de l'équipe est Chinoise et prend des cours de chinois), mais ils n'ont pas donné beaucoup d'exemples de nombres. Un élève, non Chinois, a commencé par dire la date en chinois et a expliqué comment on écrit 24 (la date où l'affiche a été faite). « 2 et 10 ça veut dire 20 et 4, ça fait 24». L'élève chinoise nomme les chiffres en chinois. « Nous en français on dit vingt, mais en chinois on dit deux dix». Un autre élève précise qu'on fait « comme une multiplication ». Avec si peu d'explications, les élèves de la classe n'avaient pas compris comment fonctionnait le système. En effet, lorsqu'ils sont venus pour présenter leurs défis (ils en avaient préparé plusieurs), les élèves de la classe ont poussé des « hein?». L'équipe a donc dû faire d'autres exemples au tableau. J'ai dû rappeler à l'équipe que nous n'avions le temps que pour un défi de chaque type (un nombre écrit en chiffres indo-arabes à « traduire» en chinois et un nombre écrit en chinois à « traduire» en chiffres indo-arabes). Le défi qu'ils avaient écrit sur leur affiche était un « défi ultime». J'ai demandé s'ils étaient sûrs qu'avec leurs explications, les élèves de la classe seraient capables de relever le défi. Une élève a donc donné d'autres exemples en disant que 200 se dit « deux cents» en pointant les symboles, mais ne fait pas le lien avec notre 200, qui oralement, se dit de la même façon. Ils demandent ensuite qui ne comprend pas et environ la moitié des élèves lève la main. Un élève donne un exemple pour 20 000, il affirme qu'on prend les deux symboles qui forment 20 (2 et 10) et qu'on les place devant le 1 000. Je précise que ce n'est pas tout à fait cela. Une élève ajoute que comme il y a un symbole pour 10 000, il faut juste mettre le symbole du 2 devant. Ils ont compris le principe multiplicatif, mais pas tous les élèves de l'équipe n'a compris qu'on multipliait par chaque puissance de 10. Les élèves patinent. Je leur dis que c'est super qu'ils aient présenté la date, qu'ils aient nommé les symboles en chinois, mais qu'ils aient oublié l'essentiel, c'est-à-dire de présenter comment fonctionne le système chinois. Des élèves de la classe ont quand même tenté le défi qui était 95 476.

À la période de questions, un élève, qui a travaillé sur le système babylonien, a demandé s'il y avait un zéro. Un élève qui présentait a précisé qu'on ne dit rien quand il y a rien ». Un autre élève a demandé si les multiplications fonctionnaient juste avec 10, mais un élève a injustement précisé que ce n'était pas vraiment une multiplication. Une élève de l'équipe donne d'autres exemples : « vingt se dit 2-10, trente se dit 3-10, quarante se dit 4-10. Et si on veut deux milles, on dit 2-1000». Une élève demande comment on écrit onze. Un élève dessine le symbole de 10 et le symbole de 1. Un autre membre de l'équipe ajoute que onze ne s'écrit pas un-un (11) comme nous, que ça ne se peut pas. Le deuxième défi est 5 038 écrit en chiffres indo-arabes à écrire avec les symboles chinois. Après quelques minutes, l'élève chinoise écrit la réponse et les élèves qui ont réussi crient de joie parce qu'ils ont réussi. J'invite l'équipe à résumer comment fonctionne le système chinois à partir des défis écrits au tableau pour m'assurer que tout le monde comprend. L'élève insiste encore beaucoup sur comment on le dit en chinois « vingt se dit 2-10 en chinois». Je lui dis d'oublier la prononciation, que je veux qu'elle explique comment ce système fonctionne. Un autre élève explique qu'il « ne faut jamais oublier quand tu parles de dizaines, de centaines ou d'unités de mille ou peu importe, de mettre les unités plus 10, 100 ou 1 000, sinon, tu vas avoir l'impression de passer tout de suite aux unités. Ça ne marche pas, il faut toujours écrire les dizaines, les centaines…» Et il efface le symbole du 10 dans son exemple de 5 038 (qui s'écrit 5, 1000, 3, 10, 8) et il explique qu'un trois à côté d'un huit, ça ne se peut pas. Un élève de la classe demande si pour écrire 18, il faut écrire 2-9. Apparemment, il n'a pas du tout compris le système et sa base 10. Je me permets donc d'aller au tableau et de faire une démonstration d'une décomposition (9 x 10 000) + (5 x 1 000) + (4 x 100) + (7 x 10) + 6. Ils mettent toujours l'unité, fois la puissance de 10, l'unité fois la puissance de dix. J'introduis le terme « système hybride» puisque dans ce système, on multiplie les puissances de 10 et on additionne ensuite. J'ajoute que s'il n'y a pas d'unités de milles par exemple, on n'écrit rien.

Lorsque j'ai demandé s'il y avait des ressemblances entre ce système et notre système actuel ou le système égyptien déjà présenté, ils ont relevé les ressemblances avec le système égyptien. Ils ont remarqué que les symboles chinois étaient plus des dessins, un peu comme les hiéroglyphes égyptiens. Ils ont noté aussi qu'il y avait un symbole particulier pour 1 000 (l'élève n'a pas relevé qu'il y avait un symbole particulier pour toutes les puissances de 10, comme dans le système égyptien) et finalement, le fait que le chiffre 3 s'écrive avec trois barres. L'élève précise que c'est comme lorsqu'on apprend à compter quand on est petit, « un plus un ça fait deux». Je fais remarquer que ça s'arrête à trois. Un élève parle spontanément du « un-deux-beaucoup » de certains peuples évoqués dans le survol historique. Un élève a aussi remarqué que certains symboles ressemblaient à des lettres ou des chiffres actuels (t, m, etc.). Ils n'ont pas trouvé de ressemblances ou de différences avec le système actuel. Ils ont trouvé une différence avec le système égyptien : le fait que les Chinois écrivent de haut en bas et de gauche à droite (les scribes égyptiens écrivaient les plus petits ordres à gauche). Je fais le lien entre les systèmes oral et écrit chinois qui sont exactement les mêmes alors que pour nous, quatre cents ne s'écrit pas 4-100, mais bien 400. La présentation, le défi et les questions durent 25 minutes.

**Tableau des résultats du test : Retour sur votre système de numération : le système chinois**

| Élèves | Ressemblances notre système | Ressemblances autres systèmes | Différences notre système | Différences autres systèmes | Base | Besoin zéro | Positionnel |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| E. | « Le 7 chinois est un 7 à l'envers en indo-arabe. » | « Il y en a qui n'ont pas de zéro. » | « Le (système) chinois n'a pas de zéro et la prononciation est très différente. » | « En chinois, le mille est un genre de maison ou d'édifice, tandis que d'autres c'est des lettres ou d'autres images. » | « Il est aussi en base 10 (…) car il n'a pas des colonnes, mais par exemple ceux qui ont des colonnes sont ceux-ci : babylonien, maya. » | « Non, parce qu'il y a des milles, dix et des cents! » | « J'ai oublié » |
| M. | « De 1 à 9, les chiffres ou les signes sont différents. » | « Il est en base 10. En quelque sorte, on multiplie les chiffres comme mayas. » | « Il est hybride, donc on additionne et multiplie (pas comme les autres). » | « Il est hybride, donc on additionne et multiplie. » | « Il est aussi en base 10. » | « Non, parce qu'il y a un nom à chaque signe, il n'en a pas besoin. » | « Non, il est hybride parce qu'on doit additionner et multiplier. » |
| A. | « Ils ont un dessin par chiffre comme nous (ex : 10 000 = 萬.» | « Il y en a qui n'ont pas de zéro, tous, ou presque que tous les systèmes ont un 1 comme une barre.» | « Il n'y a pas de zéro, ils écrivent de haut en bas, de droite à gauche, il est hybride.» | « Ils écrivent de haut en bas, pour la date, ils écrivent, ex. 5e mois, 3e jour.» | Encercle *est en base 10* de la question « parce que nous n'avons pas de 11, ils écrivent 10 +1 = 11» | « Non, parce que si nous voulons dire 80, nous disons 8 x 10. » | « Non, le (système) chinois est un système hybride. Si nous voulons dire 99, nous écrivons (9 x 10) + 9 = 99.» |
| L. | « Il est en base 10. » | « Sumérien, car il est additif (en fait, le système chinois est hybride) comme le système égyptien. » | « Le 20 ne se prononce pas 20, mais bien 2-10, comme pour 2 000 = 2-1 000. » | « Il est le seul à être hybride. » | « Il est en base 10 (je ne sais pas pourquoi les Chinois l'ont mis en base 10). Il est en base 10, car c'est 10, 100, 1 000, pas comme le babylonien : 60, 3 600.» | « Non, car il n'est pas positionnel. Quand ils veulent (les Chinois) dire zéro, ils ne disent rien. » | « Non, il est hybride, car il est à moitié positionnel, à moitié additif. » |
| O. | « Le système chinois. » | « Il est pareil que les Sumériens, les Romains et les Égyptiens, car ils n'ont pas de zéro.» | « Eux, pour dire 20, ils disent 2…10, c'est comme des X et les symboles sont différents.» | « Il est différent du système babylonien et le maya, car ils ont des zéros.» | « C'est un système en base 10. » | « Non. » | « Oui, car il a un symbole pour chaque chiffre. » |
| Julie | Sa base 10; des symboles différents pour chaque unité (1 à 9). | Base 10 (égyptien, romain); pas de zéro (égyptien, romain, sumérien). | Hybride (x et +) et nous positionnel; pas de zéro et nous oui. | Base 10 (sum. bab. : 60, maya : 20); hybride (ég., sum. rom. : additif, bab., maya : positionnel); symboles pour chaque unité (le seul). | Base 10, car un symbole pour 10, 100, 1 000, etc. | Non, car hybride. Ex. si pas de dizaines, pas de symbole de 10. | Non, car hybride (on multiplie les puissances de 10). |

Activité 1 : Le  système romain

L'équipe des Romains voulait travailler sur ce système.  Ils se sont rapidement mis à la tâche et les cinq membres de l'équipe (deux garçons et trois filles) étaient penchés sur la feuille et participaient au travail. Ils discutent, émettent des hypothèses, vérifient sur la feuille si ça fonctionne. L'équipe qui a travaillé sur le système romain a eu beaucoup de difficulté avec le L qui vaut 50. Comme ils devaient le déduire avec les exemples, ils ne l'ont pas trouvé seuls (ils croyaient qu'il valait 30). Dans l'exemple donné de 49, je leur demande de m'expliquer pourquoi ça fait 49. Ils ne savent pas trop. Je les laisse chercher. Je reviens une minute plus tard et une élève me dit : « on a découvert que le L vaut 30, parce que ça, c'est 19 et 49 – 19, ça fait 30 ». Je leur dis d'observer leurs premières réponses et les informe que « les Romains fonctionnaient toujours de la même façon, il y a une certaine régularité. Il y a des choses qui reviennent et reviennent et reviennent». Je voulais qu'ils réalisent que parfois on additionne les symboles, et parfois, on les soustrait. Ils s'obstinent un peu, mais restent concentrés et impliqués dans la tâche (au bout de 10 minutes). Plus tard, on entend une élève dire : « regarde, quand il y a un plus petit à gauche, on dirait qu'il faut le soustraire». Au bout de 16 minutes, ils semblaient avoir terminé, mais ils avaient des erreurs (deux qui concernaient le L). « Haaaa! Le L c'est 50, ben oui, regarde, c'est L – 10.» Ils se sont donc rendu compte de leurs erreurs lorsqu'ils ont corrigé leur feuille de travail. Ça leur a quand même pris 8 minutes à comprendre et à corriger leurs erreurs. Ils n'étaient plus tous attentifs. Ils ont lu les consignes pour la présentation et se sont attelés à la tâche. Une fois qu'ils ont eu les réponses, ils ont su m'expliquer le système qui est à la fois additif et soustractif. Ils ont terminé en 25 minutes.

Pour la préparation de l'affiche, ils s'installent par terre et se relaient à la conception, mais ce sont surtout les filles qui s'impliquent (une en particulier accapare l'affiche). Dans une bonne entente, ils discutent pour savoir quoi mettre sur l'affiche. Ils cherchent et trouvent des jeux de mots amusants : C complication (cent/sans complication) et M choses à apprendre (mille choses à apprendre). Ici encore, les élèves veulent expliquer en mots sur leur affiche. Je leur dis « Vous n'êtes pas obligés de tout écrire. Il faut juste que les élèves comprennent. Alors, qu'est-ce qui est essentiel que vous ayez pour que les élèves comprennent? Il faut que vous déterminiez ensemble ce qui est essentiel à mettre sur votre affiche pour que les élèves comprennent le système romain. Vous pourrez expliquer avec des mots. Il y a quand même un minimum d'affaires à mettre sur votre affiche.» Une élève propose « d'écrire les chiffres romains et ce que ça veut dire en français. » Je la reprends en demandant s'ils vont écrire les nombres « en français» ou en chiffres. Je leur demande ici s'ils ont compris quand les Romains additionnaient et quand ils soustrayaient. Un élève me l'explique très bien.

Activité 2 : La présentation du système romain

La première équipe pigée (cette journée-là) a été celle des Romains, un autre système en base 10. Ils avaient écrit des jeux de mots qu'ils ont lus au début de leur présentation, mais qu'ils ont expliqués à la fin. Ils ont écrit « M choses à apprendre» pour « mille choses à apprendre» et « C complication» pour « cent/sans complication». Un élève commence ainsi : « Les anciens Romains, ils ne se compliquaient pas la vie, au lieu d'écrire 4 fois le chiffre I, ils écrivaient IV, IV ça signifiait 5 – 1. » La deuxième personne explique de « les Romains avaient des signes particuliers pour…, il y avait comme des bonds de fois 5, fois 2, fois 5 fois 2, etc.» Une autre élève enchaîne : « par exemple, ici le I est égal à 1 et le V c'est 5 et le 10, ben c'est 2 fois 5. Fait que ça continue toujours comme ça». Ils ont ainsi présenté tous les symboles (1, 5, 10, 50, 100, 500, 1 000) en faisant remarquer une certaine régularité entre la valeur des symboles (fois 5, fois 2, fois 5, fois 2). Une autre élève continue en disant « pour retenir les chiffres, ben il y a des méthodes : le 1, c'est une barre, le 10, c'est un X et ça termine par x, 100, ça commence par C, pis mille ça commence par M. » Ils réalisent qu'il n'y a pas vraiment de « truc » pour retenir le L. Ils me demandent quand on donne le défi. Je leur demande s'ils ont terminé leur présentation et ils me répondent que oui. Je poursuis en disant : « C'est que vous n'avez pas vraiment expliqué comment fonctionne ce système. Vous avez donné l'exemple du 4, mais vous n'avez pas expliqué comment on forme tous les autres nombres. Ils précisent alors qu'on fait une soustraction à partir de la droite et une addition à partir de la gauche. Ils expliquent que pour écrire 6, c'est 5 + 1, soit V + I, mais que pour 4, 40 et 400 et 9, 90 et 900, il faut soustraire. Comme l'explication manque de clarté, les élèves de la classe ne comprennent pas bien et ont beaucoup de questions. Un élève de la classe demande comment on écrit 48. Ils expliquent à deux : « tu fais comme L et X, le X avant, fait que ça fait 40 et tu mets un V et trois barres. » Une élève de l'équipe précise : «  on ne peut pas mettre deux barres avant un V, ça ne se peut pas. » Les membres de l'équipe précisent qu'on ne peut avoir 4 chiffres pareils collés comme IIII et que c'est dans ces cas-là qu'on a recours à la soustraction de 5 – 1 : IV. Ils donnent ensuite deux exemples au tableau : CD qui vaut 400 parce qu'on fait 500 – 100 puisqu'un nombre plus petit est devant un nombre plus grand et DC qui vaut 600 parce qu'on fait 500 + 100 puisque le nombre plus petit est situé après. Un élève de l'équipe résume ainsi : « ben genre mettons que tu mets, si tu mets un chiffre plus petit avant un chiffre plus gros, il faut le soustraire. » Une élève demande si pour écrire 200 c'est CC et on lui répond que oui. Pour le défi, ils demandent le nombre 5 678 et réalisent qu'ils ne connaissent pas le symbole de 5 000. Ils le changent donc pour 3 678. Les élèves comprennent à peu près et font le défi. Deux élèves sont tirés au sort pour aller écrire les réponses des défis au tableau. Un élève de la classe demande s'il n'y a qu'une seule bonne réponse possible. On lui répond que oui.

Pour les ressemblances avec des systèmes déjà présentés ou notre système actuel, ils ont fait référence aux entailles des Étrusques vus lors du survol historique (I et X). Un élève ajoute : « je pense que le système égyptien avait pas mal les mêmes chiffres. Il y avait le 1, le 5…» Je l'informe qu'il n'y avait pas de symbole pour 5. Il poursuit en disant qu'il est un peu mélangé. Une autre élève dit : « c'est comme un peu égyptien, sauf que ce n'est pas les mêmes symboles, c'est comme il faut énumérer les choses. Comme par exemple pour faire 3, il fallait faire 3 barres ». Aussi, ils ont remarqué qu'on additionne les symboles comme le système égyptien (par exemple, 3000 s'écrit avec trois symboles de mille dans les deux systèmes) et qu'il s'écrit de gauche à droite comme notre système actuel : « Ben, il y a aussi, c'est comme un petit peu, on commence comme, le plus haut chiffre est à gauche, comme maintenant. Par exemple dans 3 678, le 8 est moins, donc il est à la fin, comme indo-arabe ». Pour les différences, ils remarquent qu'il n'y a pas de symbole pour toutes les unités comme dans notre système « il n'y a pas de signe particulier pour admettons 6, donc, ils marquaient 5 et 1. » Ils remarquent que c'est plus long d'écrire les nombres qu'avec le système chinois (l'élève compare le nombre 3000). Une élève dit « il faut énumérer chaque chose. » Je rappelle qu'énumérer, c'est nommer un à la suite de l'autre. Je demande donc ce que l'on peut dire dans ce cas-ci. Un élève relève que les Romains avaient recours aux additions et aux soustractions et qu'ils utilisaient des lettres plutôt que des dessins. J'ai précisé qu'au début, on ne faisait qu'additionner les symboles et que pour sauver du temps, les Romains avaient eu recours à la soustraction. La présentation, le défi et les questions durent 25 minutes.

**Tableau des résultats du test : Retour sur votre système de numération : le système romain**

| Élèves | Ressemblances notre système | Ressemblances autres systèmes | Différences notre système | Différences autres systèmes | Base | Besoin zéro | Positionnel |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z. | « Il est à base dix et à base intermédiaire 5. » | « Pour représenter 3, il faut faire 3 fois le chiffre 1 (Mayas, Sumériens, Chinois, Babylonien, Égyptien). » | « Ils n'ont pas de signe particulier pour quatre, c'est IV (5 – 1 = 4). » | « Ils ont un signe pour 500. » | « Il est en base 10 parce que c'est plus simple qu'en base ex. 60. » | « Non, car ex. 500 s'écrit D, on n'a pas besoin d'écrire CCCCC000. » | « Non, car il est additif et soustractif. » |
| A. | | « Ils ressemblent aux chiffres mayas parce qu'ils ont un symbole pour cinq et ils rajoutent 1, 2 ou 3, etc. » | « Les chiffres romains ont des lettres et notre système, ce sont des chiffres. » | « Il a des systèmes comme chinois qui ont un chiffre spécifique de 1 à 10, tandis que les Romains ont cinq plus 1, 2 ou 3, etc. » | « Les chiffres romains ont une base de 5, parce que ça commence 1, après 5, après 10, 50, 100, 500, 1 000. » | « Non, parce qu'exemple, les Romains faisaient deux fois le symbole 10. » | « Non, il est additif parce que pour faire 7, ils font 5 et 2 fois 1. » |
| M. | « Il est en base 10 et 5. » | « Il est additif comme le système égyptien. » | « Qu'il est additif, » | « Il n'est pas positionnel et ni hybride comparé aux Chinois, Mayas et Babyloniens. » | « Base 10 et base intermédiaire, parce que c'est 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1 000. » | « Non, parce que les Romains commençaient à un. » | « Non, parce qu'il était additif. » |
| L. | « Le un en Romain s'écrit I comme 1 ou l. » | « Il ressemble au système maya, car en maya, il y a un zéro et babylonien aussi comme indo-arabe. » | «La différence entre le système romain et maintenant est que les Romains n'avaient pas de zéro. » | « Les chiffres romains sont représentés en lettres et les autres systèmes en dessins, etc. » | « Le système romain est en base de x 5, x 2, x 5, x 2, etc. ex. I x 5 = 5 V, V x 2 = 10 X, etc. » | « Non, car si nous voulons écrire 10, ils écrivent tout simplement X au lieu de 1 et 0 = 10. » | « Ne sais pas » |
| C.* | «?? » | | « Dans un chiffre, il y a des additions et des soustractions. » | « Les chiffres romains c'est juste des lettres. » | « Absente quand on a appris. » | « Non, parce que c'est des lettres. » | « Additif, parce qu'on a besoin de faire des additions. » |
| Julie | Sa base 10. | Base 10 (égyptien, chinois); base intermédiaire 5 (maya); semi-additif (égyptien, sumérien). | Additif et soustractif et nous, positionnel, donc pas de zéro et nous oui; lettres plutôt que chiffres; pas de symboles particulier pour toutes les unités. | Additif (babylonien et maya positionnel et chinois hybride); base 10 (babylonien et sumérien base 60, maya base 20); lettres plutôt que symboles. | Base 10, car symboles particuliers pour 10, 100 et 1 000; base intermédiaire 5, car symboles particuliers pour 5, 50 et 500. | Non, car additif. Ex. : si pas de dizaines, pas de X. | Non, additif, la position des lettres ne change pas la valeur (sauf quand placée devant : on soustrait plutôt qu'on additionne. |

*Cette élève a un problème de motivation scolaire et d'absentéisme. Elle a donc raté plusieurs activités en classe.

Activité 1 : Le système sumérien

J'ai attribué le système sumérien à une équipe dont un membre avait fait une recherche sur l'écriture sumérienne l'année dernière; je trouvais que cela faisait une belle continuité. L'équipe est composée de deux filles et deux garçons. Ils sont les quatre penchés sur la feuille et discutent. Sur l'enregistrement vidéo, on entend beaucoup les autres équipes. On capte parfois des bribes comme : « Ça c'est des dix ». « Ça c'est 600 ». « À chaque fois qu'il y a un rond à l'intérieur, on fait fois 10 ». « Ok, ça, ça fait 36 000». Je viens les voir régulièrement, mais tout est sous contrôle. Ils semblent avoir rapidement compris le principe et ont terminé au bout 9 minutes, et ce, sans erreur. Ils prennent 6 minutes pour se corriger (ça me semble long). Ils commencent ensuite leur affiche. Ils discutent pour savoir ce qu'ils mettront sur leur affiche. Un élève me demande s'ils peuvent faire deux colonnes sur leur affiche avec des nombres indo-arabes et les symboles sumériens comme sur la feuille. Je leur dis que c'est une très bonne idée. Tout le monde veut écrire le titre de l'affiche. Ils font donc « roche-papier-ciseau » pour déterminer qui le fera. Celui qui gagne saute de joie. Quel enthousiasme! Tout le monde y va de ses conseils : « Écris gros! » « Ton « S » n'est pas beau. » Les autres regardent sans rien faire. Une des filles refait le « S » à son goût (et le reste du titre finalement). Ils discutent sur les couleurs à utiliser pour l'affiche. Ils discutent vraiment beaucoup sur le contenu à mettre et le contenant (couleurs, organisation). Ils sont les quatre très impliqués. Eux aussi ne semblent pas intimidés par la caméra. Ils la regardent très rarement et agissent de façon très naturelle. Au bout de 30 minutes où ils travaillent sur l'affiche, ils sont toujours aussi enthousiastes. Il règne une très bonne entente dans l'équipe. Quelques minutes plus tard, les filles sont moins sérieuses, elles rigolent. Il y en a une qui vient faire des grimaces à la caméra. Les autres rient. Je viens les voir et ils ont représenté tous les symboles sumériens avec leur valeur, mais ils n'ont pas mis d'exemples de nombres sur leur affiche. Je leur propose d'en mettre pour être sûr que les élèves de la classe comprennent le principe et qu'ils puissent réussir les défis. Ils sont d'accord et le font.

Activité 2 : La présentation du système sumérien

La deuxième équipe de la journée à présenter a été celle des Sumériens. Ils ont présenté tous les symboles avec leur valeur (1, 10, 60, 600, 3 600 et 36 000) en faisant remarquer qu'on ajoutait un zéro au nombre précédent lorsqu'il y avait un petit cercle valant 10 dans le symbole précédent (60 devient 600 et 3 600 devient 36 000). Ils donnent quelques exemples de nombres dont le nombre 741 : « en tout, ça donne 741 parce que c'est comme un petit peu eux, c'est pas comme nous, eux ils comptent de droite à gauche, ici on a 600; ça, ça fait 60 et 60. Donc 600 + 60 + 60, ça fait 720 + 20 +1, ça fait 741. Je leur demande comment ils écriraient 1 000 et un élève me répond : « ben eux c'est ça leur base, fait qu'y mettraient 3 600, heu non, 600 et beaucoup de 60 et de 10. » Une élève de l'équipe précise que les Sumériens font toujours des additions (j'en profite pour introduire le concept de système additif). Un élève fait un parallèle avec le système romain en comparant les bases. « La base des Romains est 1, 5, 10… mais celle des Sumériens est 1, 10, 60, 600, 3 600…» (J'en profite également pour introduire les concepts de base et de base intermédiaire). Un des élèves qui écoute la présentation remarque la régularité entre la valeur des symboles : « fois 10, fois 6, fois 10, fois 6 » et fait le parallèle avec la régularité du système romain : fois 5, fois 2, fois 5, fois 2. Un élève de la classe demande si pour écrire 100, on peut faire un petit cercle dans le cercle, mais un membre de l'équipe des Sumériens répond : « on ne peut pas faire un petit cercle dans un petit cercle.» Tout comme les Sumériens, les membres de l'équipe ont écrit les nombres de droite à gauche, mais dans leur défi, ils se sont trompés et ont écrit les plus gros ordres à gauche. C'est d'ailleurs un élève de la classe qui remarque l'erreur. Un élève de l'équipe précise à juste titre que de toute façon, ça ne change pas la valeur. Je leur donne l'exemple du système indo-arabe : « nous, si j'écris 123, est-ce que c'est la même chose que 321? » Les élèves répondent que non. J'ajoute que « nous l'ordre des chiffres a beaucoup d'importance, dans le cas des Sumériens, c'est plus une question d'habitude et de disposition, mais effectivement, ça ne change pas la valeur du nombre. Un élève de l'équipe compare avec le matériel multi bases : « comme les bases unités (sic)… que tu mettes ta plaque en haut, en bas ou à côté de la barre, ça va toujours être le même nombre». Le premier défi était en symboles sumériens et représentait le nombre 75 731 (36 000 + 36 000 + 3 600

+60 + 60 + 10 + 1). Les élèves de la classe font les défis, mais trois personnes viennent au tableau avec des mauvaises réponses. On ne voit pas la réponse de la première, la deuxième personne a écrit 73 931, il y a donc 1 800 de différence, mais j'ai raté une bonne occasion de questionner l'erreur. La troisième personne écrit 79 811, une différence de 4 070, difficilement explicable à part des erreurs de calcul. On entend un élève de la classe (en sourdine) qui a trouvé la bonne réponse. La quatrième personne réussit et explique brillamment comment elle a procédé.

Lorsque l'on fait ressortir les ressemblances avec notre système actuel ou d'autres systèmes présentés, les membres de l'équipe parlent de dessins comme les systèmes chinois et égyptiens; que le chiffre 1 s'écrit avec une barre, comme les systèmes égyptien, chinois et romain; qu'on ne peut placer plus de 4 symboles pareils de suite et que les symboles s'écrivent de droite à gauche comme les Égyptiens. Je demande s'ils trouvent des similitudes entre les systèmes sumérien et égyptien. Personne ne trouve. Je précise : « C'est peut-être que les gens du système égyptien ne l'avaient pas vraiment souligné, mais dans le fond, c'est un système où on doit additionner la valeur de chaque symbole, c'est-à-dire que les Égyptiens, pour écrire 318, il fallait écrire 100, 100, 100, 10 et 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1. Alors eux, c'est le même principe. On doit additionner chaque symbole pour savoir le total. Pour votre culture générale, on appelle ces systèmes des systèmes additifs. » Un élève demande si un système peut être soustractif (en faisant référence au système romain).

Comme différences, ils ont noté que les symboles ressemblaient plus à des « formes» qu'à des dessins (comme les Chinois et les Égyptiens) et qu'il y a une régularité différente (fois 10, fois 6). Un élève de la classe remarque que « comme les chiffres romains, il y a comme des chiffres entre, comme le 5, mais eux (les Sumériens), c'est le 6. Je remarque le côté intéressant de l'intervention. Je précise que « Les chiffres « entre», comme tu les appelles (rires dans la classe), comme le système romain, on dit qu'il est en base 10, parce qu'il y a un symbole pour 10, 100, 1 000 et les chiffres ou les symboles pour « entre» (5, 50, 500), on appelle ça la base intermédiaire. Donc, le système sumérien est un système en base 60, sauf qu'il a une base intermédiaire, le 10. Donc le 10 chez les Sumériens, c'est un peu comme le 5 chez les Romains. Est-ce qu'il y a une base intermédiaire chez les Égyptiens? » On répond que non. Je précise que tous les systèmes ont une base, mais pas tous ne possèdent une base intermédiaire. La présentation, le défi et les questions durent 27 minutes.

**Tableau des résultats du test : Retour sur votre système de numération : le système sumérien**

| Élèves | Ressemblances notre système | Ressemblances autres systèmes | Différences notre système | Différences autres systèmes | Base | Besoin zéro | Positionnel |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A. | « Il n'y en a pas beaucoup, mais j'en ai trouvé une : ils additionnent comme nous. » | « Il ressemble aux Babyloniens parce que d'un à neuf, c'est le même signe, mais plusieurs fois. Ex. lllllllll = 9.» | « Nous on a un « signe » pour chaque chiffre, pas eux.» | « Il est additif, mais il y en a que non.» | « C'est en base 60 parce que c'est comme ça. » | « Non, parce que quand on met un zéro ou pas, ça va donner pareil.» | « Non, parce qu'on ne peut pas les placer n'importe où, ils vont valoir pareil.» |
| F1 | « ??? » | « Il ressemble au système égyptien, car il est additif et au système babylonien, car ils comptent par 60.» | « Le système indo-arabe est positionnel.» | « Romain : s'écrit avec des lettres. Chinois : il est multiplicatif.» | « Le système sumérien est en base 10 et 60, car ça fonctionne par x 10, x 60, x 10, etc.» | « Non, car il est additif alors si l'on met 36 000 plus 600, nous savons que le 0 reste automatiquement à la fin du chiffre.» | « Non, car il est additif et qu'un système additif ne peut être positionnel.» |
| M. | « Le 1 est un genre de barre ( ). Il ressemble aux plaques, bandes et jetons ( □, l, o).» | « Souvent, les autres systèmes aussi ont qu'une barre (ex. égyptien : , chinois : , etc.)» | « C'est comme du matériel.» | « Il n'a pas de zéro. Il est en base 60.» | « 60, parce qu'il multiplie comme ça x 6 x 10, x 6 x 10, etc.» | « Non, car nous sommes additifs.» | « Non». Le reste de la réponse est effacé. |
| F2 | | « Il est additif et a des signes. Comme égyptien.» | « Il est à base 60 et indo-arabe à base 10. Il utilise des signes et nous en chiffres. Le système est additif et nous positionnel.» | « Chaque fois qu'on rajoute un petit rond dans un autre signe, on fait fois 10.» | « Il est à base 60 parce qu'il a une régularité : x 10, x 60.» | « Non, parce qu'il est additif.» | « Non, parce qu'au lieu de mettre de droite à gauche, ça fera le même résultat.» |
| Julie | | Base 60 (babylonien); additif (égyptien, romain); dessins (égyptien, babylonien, maya, chinois). | Base 60 et nous 10; additif et nous positionnel, donc pas de zéro et nous oui, pas de symbole pour chaque unité. | Base 60 (égyptien, romain, chinois :10, maya 20); additif (babylonien, maya : positionnel, chinois : hybride), donc pas de zéro (babylonien, maya : oui). | Base 60 et base intermédiaire 10, car symbole pour 1, 10, 60, 600, 3 600 et 36 000. | Non, car additif. Ex. si pas de dizaines, pas de petits ronds. | Non, car additif, la position des symboles ne change pas la valeur du nombre. |

Activité 1 : Le système maya

Il y a un problème technique, la cassette coupe dès de début. Nous devrons nous contenter du journal de bord. L'équipe qui a travaillé sur le système maya se l'est vu attribué, car une des élèves de cette équipe a voyagé au Mexique et connaissait l'existence des chiffres et du calendrier mayas; elle a d'ailleurs démontré son intérêt pour ce peuple. Malgré certaines difficultés dues de l'irrégularité du troisième ordre qui est à 360 plutôt qu'à 400 (20 vingtaines), les élèves sont restés engagés sur la tâche. En fait, la première colonne s'est complétée très rapidement tout comme le début de la deuxième colonne puisque les membres de l'équipe s'entendaient pour dire qu'au deuxième étage, 'on fait fois deux» en faisant référence à nos dizaines. Ils n'avaient pas tout à fait tort, mais ne voyaient pas ce système en termes de « vingtaines». Même une fois que je leur ai dit que le troisième ordre devrait être 400, ils ne voyaient vraiment pas. C'est en les faisant comparer avec notre système qui possède des unités, des dizaines et des centaines et en faisant le lien avec le fait qu'une centaine, c'est dix dizaines qu'ils ont compris. Je crois donc qu'à l'avenir, on devrait s'en tenir à des nombres inférieurs à 360.

Activité 2 : La présentation du système maya

La dernière équipe à présenter aujourd'hui a été l'équipe ayant travaillé sur le système maya, le premier système positionnel présenté. Les élèves ont commencé par présenter les symboles et ont donné beaucoup d'exemples de nombres en bas de 20 (0, 1, 2, 3, 5, 6, 7…). Ils trouvent que le zéro, qui est sensé être un coquillage, ressemble à une tarte brûlée! Ils expliquent entre autres que 18 s'écrit en faisant 5 + 5 + 5 + 1 + 1 + 1. Ils montrent rapidement le nombre 20 « le 20 c'est un avec une tarte». Une élève complète en ajoutant que « ben parce qu'il est supposé avoir comme deux étages. Le point, il est comme au deuxième étage. En fait, ici, il est sensé avoir un pointillé. » Ils précisent que les Mayas utilisaient surtout les chiffres pour compter les jours et les années et pour l'astronomie (je leur avais expliqué lorsqu'ils butaient sur l'irrégularité du troisième ordre à 360 au lieu de 400). Ils sont rapidement passés à 340 en exemple en expliquant qu'en bas, ce sont les unités et qu'en haut, ce sont des vingtaines. Les élèves de la classe ne comprennent pas. Ils font le parallèle avec notre système en dessinant une planche à calculer que les élèves de la classe connaissent bien, avec ses unités, dizaines, centaines, mais que pour les Mayas, il s'agit plutôt d'unités, de vingtaines et de *quatre centaines* et que la planche est verticale plutôt qu'horizontale. « Fait que tu fais 17 x 20 vu que c'est au deuxième étage.» Ils tentent d'expliquer différemment : « mettons ça, c'est 17, 17 x 2, ça donne 34. Là on met le 34 ici plus le zéro qui est là, pis ça c'est une unité de zéro, ça fait qu'on met zéro ici». Dans cet exemple, un élève demande si une barre représente 5. L'élève répond et revient aux unités du début pour montrer qu'une barre vaut 5, donc que 3 barres valent 15, plus les deux points, ça fait 17. Il explique que « là, vu qu'eux, ils n'ont pas des dizaines, ils ont des vingtaines, à la place des dizaines. Nous on a des unités-dizaines-centaines, eux ils ont des unités, des vingtaines et des *quatre centaines*. Ils donnent aussi le nombre 173 en exemple avec ses 8 vingtaines et ses 13 unités. Un élève de la classe précise qu'il ne comprend pas leur exemple de 173. Une élève de l'équipe explique « le 173, ça, c'est 10, avec 3 petits points. C'est comme on met 10 et on va dans les vingtaines, c'est genre un petit peu… c'est pour que ça donne 10». Ça s'embrouille sérieusement. Je sais que l'équipe comprend, mais les élèves ont du mal à expliquer. Un élève qui écoute et qui est dans la mire de la caméra s'ennuie royalement. Il lève la main lorsque l'équipe devant demande qui ne comprend pas. Pour mieux expliquer, un élève dessine une planche à calculer. « Quand vous avez vos unités là, OK, mettons ici (en pointant la deuxième colonne vers la droite) ça valait 10, eux, c'est des vingtaines. Un ici, ça vaut 20. C'est comme si on avait changé… euh… la valeur. » On entend des élèves dire « ah! Je comprends! » Comme il y a plusieurs élèves qui ne comprenaient toujours pas, j'ai invité l'équipe à présenter des nombres plus petits comme 42, 56, etc. C'est à ce moment que les élèves ont compris. « Aaaaah! Là je comprends! » Je les invite à terminer avec 105. 'La barre ici, elle vaut 5, comme elle est dans les vingtaines, on fait 5 x 20, ça fait 100, plus le 5 des unités, ça fait 105. » Un élève de l'équipe demande qui ne comprend pas et comme personne ne répond, il dit un gros « yesssssss! » avec le mouvement du bras. Un élève de la classe réfléchit tout haut et résume bien 'ce qui veut dire qu'en haut de la barre, c'est 20, c'est des vingtaines». Un élève des Mayas précise que « nous on a des dizaines et des centaines, eux, ils ont des vingtaines et des *quatre centaines*. Un élève demande pourquoi on met un melon (zéro) pour écrire 20 et un élève de l'équipe explique brillamment que pour ne pas se mélanger avec une unité, on est obligé de mettre un zéro. Avant les défis, je précise que nous nous en tiendrons à deux étages et je mentionne l'irrégularité des Mayas. Je leur rappelle que nous, nous avons des unités, des dizaines et des centaines et je demande c'est quoi une centaine? « C'est 10 dizaines. Donc eux, ils ont des unités (jusqu'à 19), des vingtaines et l'autre étage aurait dû être des paquets de 400, parce que 20 x 20, ça fait 400. Comme des centaines, c'est 10 x 10 ». Un élève de l'équipe précise que les nombres servaient surtout à calculer les jours d'une année et qu'ils s'arrêtaient à 360. Le défi en maya est 67 et en indo-arabe vers le maya est plus difficile : 315. Ils sont quand même réussis par la majorité.

Les ressemblances que les élèves de l'équipe ont fait ressortir entre le système maya et les autres systèmes déjà présentés ou le nôtre sont les liens entre nos « unités-dizaines-centaines » et leurs « unités-vingtaines-*quatre centaines* »; notre planche à calculer; le fait qu'il soit additif jusqu'à 19 (comme les systèmes égyptien, romain et sumérien); le fait que 7 s'écrive 5 + 1 + 1 comme le système romain et une régularité qui est le 'fois 20 ». J'en ai profité pour rappeler qu'il s'agissait de la base. J'ai demandé s'il y avait une base intermédiaire, un entre-deux? Une élève a répondu le 5. Pour les différences, ils ont relevé le fait que nous comptions en dizaines et les Mayas en vingtaines; que nous écrivions nos nombres en colonnes et eux en étages. Il était temps que ça se termine parce que ça bâillait dans l'assistance, ça gigotait et ça faisait du bruit. Une élève termine en disant : « nous, nos chiffres, on n'a pas besoin de planche à calculer, mais eux, ils en ont besoin pour mettre leurs chiffres. La présentation, le défi et les questions durent 33 minutes.

**Tableau des résultats du test : Retour sur votre système de numération : le système maya**

| Élèves | Ressemblances notre système | Ressemblances autres systèmes | Différences notre système | Différences autres systèmes | Base | Besoin zéro | Positionnel |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| F. | « Il y a une planche à calculer et notre système est positionnel, le leur aussi.» | « Babylonien, il est positionnel.» | « Il y a des vingtaines et des quatre-centaines.» | « Son chiffre base est 20.» | « 20, parce qu'il a toujours la même régularité à chaque fois qu'on change de colonne, ex. 1 x 20 =20 et 20 x 20 = 400.» | « Oui quand, dans la planche il n'y a rien à une section, on met un zéro.» | « Oui, il est séparé en unités, vingtaines, quatre-centaines.» |
| J. | « Les deux sont positionnels. » | « Il est positionnel comme babylonien. » | « De 1 à 4 c'est que des points. » | « Les chiffres mayas n'ont qu'un zéro, des points et des barres, mais l'égyptien c'est une ligne, un V, un X, un L, un C et un M.» | « 20, parce que c'est des unités, $20^{aines}$ et serait des $400^{aines}$, mais le système maya est irrégulier donc c'est 360.» | « Oui, parce que tous les systèmes positionnels ont besoin d'un zéro.» | « Oui, parce qu'il y a des positions.» |
| S. | « Il a une planche à calculer.» | « Il a une planche à calculer comme le babylonien, il a un zéro comme le babylonien.» | « Le système maya utilise toujours la planche à calculer (pour représenter les nombres), tandis que nous l'utilisons seulement pour les calculs.» | « Il a une planche à calculer et non le chinois, sumérien, romain, égyptien.» | « La base du système maya est 20 parce qu'à partir de 0, c'est x 20 ensuite x 20 encore.» | « Oui, car quand il y a une case de la planche à calculer qui est vide, on met un 0.» | « Oui, parce qu'il a des positions (unités, 20, 400).» |
| M. | « Il a des chiffres.» | « Les Babyloniens ont une planche à calculer.» | « Il n'y a pas de planche à calculer. Les Mayas comptaient unités, vingtaines, quatre-centaines au lieu d'unités, dizaines, centaines.» | « Ils n'ont pas de planche, pas les mêmes symboles et les Romains, au lieu d'écrire quatre, ils font 5 – 1 = 4 (IV).» | « Nous comptons unités, vingtaines, quatre-centaines pour faciliter les planches.» | « Oui, pour quand on fait ex. 20, si on ne met pas de 0, ce sera 2.» | « Oui, il reste le même pas comme d'autres systèmes.» |
| | A | B | S | E | N | T | |
| Julie | Les deux sont positionnels. | Positionnel et un zéro comme babylonien. | Base 20 et nous base 10, pas de symbole particulier pour chaque unité (nous oui). | Base 20 (égyptien, romain, chinois : 10, sumérien, babylonien : 60); positionnel (sumérien, égyptien, romain : additif, chinois : hybride). | Base 20 avec une base intermédiaire 5, car on change d' « étage » à 20 et en principe, à 400 (20 x 20). Symbole particulier pour 5. | Oui, car positionnel. On doit marquer l'absence d'un ordre (ex. si multiple de 20 = pas d'unité : zéro nécessaire). | Oui, un point seul n'a pas la même valeur qu'un point au deuxième « étage». |

c

Activité 1 : Le système babylonien

Le système babylonien, tel que prévu, a été réservé à une équipe plus forte, elle aussi formée de trois garçons et deux filles. Un élève de cette équipe m'a rappelé qu'il souhaitait justement travailler sur ce système. Le hasard (j'avais oublié) fait bien les choses. Comme prévu, la première partie jusqu'à 59 s'est faite très rapidement. Évidemment, cela s'est compliqué lorsque les élèves sont arrivés aux colonnes. Ils comprenaient bien le 60 et le 72, mais étaient incapables de savoir comment former 96. « Ça, ça doit être 80 et ça 16 ». « Tu mets 1, ça représente 60. Quand tu passes les 59, tu commences à séparer. Là, tu mets une affaire de même avec un zéro, ça fait 60 et pour faire 72, tu mets 1 là et 12, ça fait 72 ». On ne capte pas tout du travail d'équipe, car parfois plusieurs élèves d'une même équipe parlent en même temps. De plus, on entend aussi le bruit des autres équipes. Ils avaient d'abord écrit U (pour unités) au-dessus de la colonne de droite, puis ils avaient écrit D (pour dizaines) au-dessus de la deuxième colonne en partant de la droite. Mais ça ne marchait pas… Je leur fais remarquer que le symbole de la colonne à gauche ne vaut pas 10. Ils réalisent alors que la colonne représente des soixantaines. « Haaaaaaaa! C'est la colonne des 60! » Je leur suggère de vérifier leur hypothèse en regardant les trois premiers exemples de nombres supérieurs à 60. « Ben non, ce s'rait bien trop long à compter, il faut que ce soit plus efficace que ça, là. » Un élève lui rétorque qu'à une époque « ils prenaient une grosse boule et ils mettaient des choses à l'intérieur, penses-tu que c'était plus efficace ça?» Lorsqu'il y a deux dans la colonne des soixantaines, une élève dit : « quand il y en a deux, ça fait deux 60, ça fait 120». Je viens les voir et je leur demande de m'expliquer. Un élève, très fier de lui, dit : « mon hypothèse était bonne, je le savais que dans cette colonne-là, ça valait 60! » Une élève ne comprend toujours pas le principe. Je demande à un autre élève de lui expliquer. Il prend la feuille et lui explique : « Ici, c'est les unités et ici, c'est les 60. Quand il y en a deux ici, on fait fois 60, ça fait 120. Si on en met trois, ça fait 180. Si on met 11, ça fait 11 fois 60. » Je leur demande ensuite si aujourd'hui encore, il y a des choses que l'on compte par 60. Un élève a répondu : « les minutes et les secondes. » Je leur ai expliqué que cette façon de faire nous venait des Babyloniens et des Sumériens. Lorsqu'ils arrivent à la troisième colonne, ça se corse. Tous les élèves de l'équipe s'approchent davantage de la feuille. Ils me demandent en voyant une unité dans la troisième colonne (par la droite), si c'est « une colonne de 3 600». Un élève (qui écrit les réponses depuis le début et qui est très impliqué) me dit : « la troisième colonne, c'est 360 parce qu'on fait 60 x 6? » Lorsque je fais non de la tête, il semble découragé. « C'est 60 fois 60 alors?» Je l'invite à le calculer. « haaaaaaaaaaaaaaa! C'est ça, 60 fois 60 ça fait 3 600! » « OK, dans cette colonne-là, on fait fois 1, dans cette colonne-là, on fait fois 60 et dans cette colonne-là, on fait fois 3 600». Ça y était, ils avaient compris (au bout de 16 minutes). Ils ont maintenant de la difficulté avec le dernier à trouver (9001). Pour les encourager, je leur dis que jusqu'à maintenant, ils ont tout bon, donc ça veut dire qu'ils ont compris. Je les invite à utiliser ce qu'ils comprennent pour faire le dernier. « OK, si j'en mets 2 là, ça fait 7 200, parce que 3 600 + 3 600, ça fait 7 200. » Un autre élève dit qu' « il faut ajouter 2 800 ». « Non, c'est 1 800 qu'il faut ajouter pour arriver à 9 000. » « Ok, 1 800, c'est 60 fois 3, non ça ne marche pas, c'est 60 fois 30… Hooooonnn!» Il semble vraiment découragé. Il s'est ensuite exclamé : « ha!, mais 600 fois 3 ça fait 1 800! » et il a dessiné trois symboles de 10 dans la deuxième colonne, ce qui faisait effectivement 1 800. Je vais ensuite chercher le corrigé (après 23 minutes) et ils se l'arrachent pour voir s'ils ont tout bon. Ils ont une erreur, mais ils la comprennent rapidement.

Partie provenant du journal de bord : Après moult discussions, ils ont fini par s'entendre. Un élève de l'équipe, qui a beaucoup de difficulté au niveau de ses habiletés sociales, prenait toute la place et ne laissait pas placer un mot aux autres élèves de l'équipe. J'ai même dû intervenir et rappeler que dans un travail d'équipe, tout le monde devait émettre ses hypothèses. Cette intervention l'a calmé et il a plus écouté ses coéquipiers. Une fois qu'ils ont compris les soixantaines, ça n'a pas été long pour comprendre les *trois milles six centaines*. Je les informe qu'ils ont une affiche à préparer pour expliquer ce système au reste de la classe. Je leur dis qu'ils ont mis près de 30 minutes à comprendre, mais qu'ils disposeront d'environ 5 minutes pour le faire comprendre aux élèves de la classe. Mon élève impliqué me demande si 60 x 60 est bien $60^2$. Je leur dis : « Vous m'avez dit qu'il y avait une colonne de 60 et une colonne de 3 600. Comment pourriez-vous expliquer à la classe pourquoi c'est comme ça? » Ils pataugent un peu et je leur demande s'il n'y aurait pas une explication qui viendrait faciliter l'explication. « Avec quoi vous pourriez comparer cette façon de faire? » Ils cherchent et cherchent, se questionnent. Ils commencent à être moins concentrés. Ils tentent d'expliquer pourquoi les Babyloniens « comptent en 60 ». Je leur dis que je ne leur ai pas demandé pourquoi ils comptent en soixantaines, mais je vais leur expliquer. Je commence par leur demander : « Nous, on compte par quoi? » et ils répondent par 1, par 10, par 100. Je change ma question : « OK, nous quand est-ce qu'on change de colonne? » Un élève répond : « à 10, à 100 à 1 000, à 10 000 ». Je leur rappelle donc que chaque fois qu'on a 10, on change de colonne. « Pourquoi vous pensez qu'on compte par bonds de 10? » « Parce que c'est plus simple. » « Parce qu'on est plus intelligent qu'eux. » Je leur dis que « c'est la façon qu'ils ont inventée, ils n'ont quand même pas fait exprès de se compliquer la vie ». Je leur rappelle qu'ils doivent faire une affiche pour expliquer à la classe. Ils ne semblent pas sûrs de savoir quoi y mettre. Je leur dis : « vous avez remarqué qu'ils comptaient par 60 et vous avez remarqué qu'il y avait des colonnes, vous avez tout ce qu'il faut pour expliquer. »

Ils commencent à préparer l'affiche au bout de 31 minutes. Ils s'installent par terre. Sur l'enregistrement, on ne les voit pas, mais on entend une fille dire : « on pourrait mettre le 0, le 1, le 10 et on met les colonnes ». Pour le titre, ils s'obstinent à savoir si on met « Babyloniens » ou « Chiffres babyloniens ». Tout le monde tente de s'impliquer pour l'affiche, mais à cinq, c'est difficile. C'est surtout l'élève qui a écrit la feuille qui fait l'affiche. Les autres y vont de conseils « Écris plus gros. » « Prends une règle. » Je vois qu'ils écrivent des informations en mots et petits et je viens leur demander « Est-ce que vous êtes sûrs que vous êtes obligés de tout écrire? Dites-vous que votre affiche va être devant, que les élèves vont être dans toute la classe… J'aimerais mieux que vous en écriviez moins, mais qu'on puisse le voir de partout. Si vous avez réussi à comprendre juste avec les tableaux que je vous ai donnés, vous devriez être capables de l'expliquer avec quelque chose de semblable ».

Activité 2 : La présentation du système babylonien

L'équipe ayant travaillé sur le système babylonien, qui n'avait pas pu présenter la semaine dernière, a présenté aujourd'hui. Ici, c'est l'équipe où un élève qui ne comprenait pas nécessairement bien prenait beaucoup de place. Il a commencé ses explications en disant : « ils comptaient par 60 à partir des dizaines et ils comptaient par 136 à partir des centaines, pis à partir de l'autre colonne, par 3 600 ». Ça commençait très mal les explications, il n'y avait rien de vrai là-dedans. Un autre élève reprend et dit poliment qu'il y a eu un mélange. « Les centaines, ce n'est pas par 136, on va l'expliquer plus tard ». Il présente plutôt les symboles : « le zéro c'est comme deux « V » de côté. Le 1, c'est un V normal, 2, c'est deux V, jusqu'à 9 comme ça. À 10, c'est juste un des deux V du zéro ». Un autre élève enchaîne en présentant « le 60, ils commençaient à mettre deux rangées, pis que… ils mettaient un V qu'ils séparaient et ils mettaient un zéro. Un élève reprend l'exemple des Mayas en rappelant qu'ils avaient « comme une planche à calculer » mais avec des unités-vingtaines-*quatre centaines* et que les Babyloniens, c'était plutôt des « unités-soixantaines-*trois milles six centaines*. « Pour 60, on met un dans la deuxième colonne et on met zéro quand il y a zéro unité. Mettons 62, ils mettraient un ici et 2 unités. » Ils donnent un autre exemple avec 3 661. « Ça prend une unité parce qu'il y a un, une unité, mais dans les soixantaines, et un ici (*trois-milles-six-centaines*). C'est comme 3 600 plus 60 plus 1. » Ils enchaînent avec le nombre 200 : « dans 200, il y a 3 fois 60, ça fait 180 et ils viennent rajouter deux dizaines, pour aller jusqu'à 200». Ils terminent avec l'exemple de 9 001. « Quand on arrive à 3 600, ça commence à être trois rangées, donc ça c'est la rangée des 3 600, ça c'est 60 et ça c'est la rangée des unités. Donc pour 9 001, on fait 3 600 plus 3 600, ça fait 7 200, plus 180 plus 1. » Comme il y a une petite erreur, je précise que ce n'est pas 180 qu'il y a dans la deuxième colonne. Un autre élève dit qu'en fait, c'est 60 fois 30 et on entend des « hein? » dans la classe. L'élève qui présentait l'exemple précise que 10 dans la colonne des soixantaines, ça fait 600 et que 3 fois 600, ça fait 1 800. Donc que 7 200 plus 1 800 plus 1, ça fait 9 001. Je les fais revenir sur les explications erronées du début et un autre élève explique que « la troisième colonne, c'est les 3 600. Comme nous, on pourrait dire que c'est la colonne des centaines, mais pour eux, c'est la colonne des 3 600. Ici, ce serait la colonne des 60, on pourrait dire… et ici ça serait la colonne des unités». Il y a des questions d'éclaircissement et un élève résume bien le système babylonien en le comparant au nôtre : « dans notre système, c'est unités-dizaines-centaines, mais eux, c'est unités-soixantaines-*trois milles six centaines*».

Un élève demande si on voulait écrire admettons 100 000, s'il pourrait y avoir 4 ou 5 colonnes. Un élève lui répond : « ben on le sait pas parce que nous, on avait juste des exemples jusqu'à 9 001, mais sûrement que ça pourrait aller à 4-5 colonnes. Mettons qu'ils voulaient écrire 300 milliards, ils pouvaient sûrement se rendre jusqu'à 10 colonnes. » Je demande donc ce que devrait être la quatrième colonne et le même élève dit que ça devrait être 3 600 fois 60. On le calcule à la calculatrice et on trouve que la quatrième colonne serait de 216 000. Je demande alors comment nous pourrions former une cinquième colonne et toujours le même élève dit : « 216 000 fois 60 et ainsi de suite». On peut dire qu'il a bien compris le principe du système positionnel qui permet de représenter tous les nombres jusqu'à l'infini.

Un élève très intéressé (le même que la question précédente des 100 000) demande si on est obligé de mettre les zéros aux unités et aux soixantaines quand on veut écrire 3 600. Un élève lui répond que « oui, il faut absolument que tu fasses trois colonnes et que tu marques des zéros pour montrer qu'il n'y en a pas ». Un autre élève complète remarquablement en rappelant notre système aussi positionnel : « dans notre système, si tu veux écrire 3 600, dans la colonne des unités de mille, tu vas mettre 3, dans la colonne des centaines, tu vas mettre 6 mais dans le reste, si tu ne mets rien, ça va faire 36 ». La cassette s'est terminée au bout de 10 minutes alors qu'ils arrivaient au défi. J'ai heureusement retrouvé la cassette de la suite de la présentation. Ils demandent aux élèves de la classe s'il y a des gens qui ne comprennent pas et personne ne lève la main. Le nombre indo-arabe à « traduire» est 7 358 et il n'a pas été réussi du premier coup. La deuxième personne a réussi et a bien expliqué : « 3 600 plus 3 600, ça fait 7 200, il manquait encore 158. J'ai donc mis 60 plus 60, ça fait 120. Il reste 38 à placer, donc 3 fois 10, ça fait 30 plus 8, ça fait 38. Le deuxième défi en chiffres babyloniens était 1 920. L'élève a bien expliqué sa démarche.

Pour les ressemblances, l'équipe a relevé que le système babylonien fonctionnait un peu comme la planche à calculer et que les unités jusqu'à 9, on met le nombre de barres nécessaire. L'équipe précise qu'on a hérité des Mésopotamiens le fait qu'il y a 60 secondes dans une minute et 60 minutes dans une heure (je les avais informés pendant le travail d'équipe). Un élève rappelle que les Sumériens aussi comptaient par 60. Je fais un rappel du concept de base. On relève aussi la ressemblance avec le système maya, mais la cassette a encore terminé, donc on a raté la fin de la comparaison avec le système maya et les différences. La présentation, le défi et les questions durent environ 25 minutes.

## Tableau des résultats du test : Retour sur votre système de numération : le système babylonien

| Élèves | Ressemblances notre système | Ressemblances autres systèmes | Différences notre système | Différences autres systèmes | Base | Besoin zéro | Positionnel |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A1. | « Il y a une planche à calculer (1, 60, 3 600, etc.), c'est un système positionnel, nous utilisons les 60 pour l'heure.» | Comme le système indo-arabe et le système sumérien, il est positionnel; comme le système sumérien, il est en base 60.» | « Notre planche à calculer est : unité, dizaine, centaine, le leur c'est : unité, 60, 3 600. Nous = base 10, eux : base 60.» | « Contrairement aux systèmes maya, égyptien, chinois et égyptien, il est positionnel et il est en base 10.» | « Il est en base 60, car à la deuxième colonne de leur planche à calculer, c'est des soixantaines, la troisième : 3 600 (60 x 60) ainsi de suite.» | « Oui, car s'il n'en avait pas, si nous voulions représenter 2 600 sur leur planche à calculer sans zéro, nous écririons 26.» | « Oui, car à partir de 60, il est multiplicatif.» |
| A2. | « Il est positionnel. Il a un zéro. » | « Il ressemble au système maya, car ils sont tous les deux positionnel et» | « Ils comptaient par 60 et 3 600. Ils faisaient des dessins.» | « Il est différent du système chinois, car il est additif.» | « Ils avaient une base 60, car leurs chiffres étaient 1 à 9. 10 a un autre symbole, puis 60 aussi et 3 600 aussi.» | « Il a un zéro. Il a besoin de son zéro, car il se ressemble à notre système actuel. Si tu ne mets pas de zéro à 3 600, ça va faire 36.» | « Oui, car il marche par colonnes.» |
| S. | « Ils utilisaient une planche à calculer (pas complètement pareille comme nous). On compte les minutes et les secondes par 60.» | « Ils comptaient par 60 (à partir des dizaines) comme les Sumériens.» | « Nous, on compte plus par 10. Eux comptent par 60 et par 3 600 à partir des centaines.» | « Les Babyloniens comptent 60 à partir des dizaines et par 3 600 à partir des centaines et d'autres par 10 ou par 20.» | « 60, car je crois qu'ils avaient besoin de compter des choses par 60.» | « Oui, car si je veux marquer 60, dans une colonne (dizaines), je vais mettre le signe qui fait 60 et dans l'autre, je n'ai rien à mettre, donc je mets le signe qui fait zéro.» | « Oui, car nous on fait 10 x 10 pour aller dans les centaines et eux font 60 x 60 pour aller dans les nombres de 1 000 et plus. » |
| L. | « Nous avons des colonnes, par contre il y a des unités, soixantaines et des bonds de 360.» | « Comme les Sumériens, Égyptiens et Mayas, il y a des dessins.» | « Ce sont des dessins. Comme j'ai dit au numéro 1, ce sont 1, 60 et 360.» | « Il est le seul à avoir des bonds de 60. Contrairement aux Romains et aux Chinois, il a des dessins.» | « C'est 60, car à partir des « soixantaines», pour aller au 360, on fait fois 60. » | « Oui, car il est en colonnes alors si on veut faire 300 en babylonien, si on ne met pas de zéro, ça donne trois.» | « Oui, c'est la position des un, 60 et 360.» |
| D. | « Il n'est pas additif, ils comptaient l'heure comme nous.» | « Il n'est pas additif comme indo-arabe, romain, maya et égyptien.» | « Ils ont une base 60.» | « Il a une base 60. Exception : Sumériens.» | « 60, je ne sais pas pourquoi.» | « Oui, pour marquer ex. 9 001, 3 600, 216 000 et d'autres. Sinon ils ne pourraient pas marquer beaucoup de chiffres ou nombres.» | « Oui.» |
| Julie | Positionnel, zéro. | Base 60 (sumérien); positionnel (maya). | Base 60 plutôt que 10; pas de symbole pour chaque unité. | Base 60 (égyptien, chinois, romain : 10, maya : 20); positionnel (sumérien, égyptien, romain : additif, chinois : hybride). | Base 60, car on change de colonne à 60 et à 3 600 (60 x 60). | Oui, pour marquer l'absence d'un ordre. | Oui, car la valeur change selon la colonne. |

Activité 3 : Récapitulation

Ensuite, nous avons fait l'activité de classement des différents systèmes (incluant notre système) afin de voir des éléments communs aux différents systèmes. Tel que prévu, les élèves ont d'abord classé selon la base, mettant ensemble les systèmes indo-arabe, égyptien, romain et chinois (base 10), regroupant les systèmes babylonien et sumérien pour leur base sexagésimale et enfin, le système maya, le seul en base 20. Ensuite, ils ont classé selon le type de système, regroupant les systèmes égyptien et sumérien et en mettant le système romain un peu à l'écart « parce qu'il faut aussi soustraire». Ils ont ensuite proposé de regrouper les systèmes indo-arabe, babylonien et maya, parce « qu'ils ont des colonnes ou des étages» et enfin, le système chinois, qui est le seul système dit hybride, a été mis dans une catégorie à part. À juste titre, un élève a fait remarqué que les systèmes maya et babylonien, même s'ils étaient positionnels étaient aussi un peu additifs puisqu'ils n'avaient pas un symbole pour chaque chiffre et qu'il fallait parfois répéter un même symbole pour représenter un nombre.

Activité 4 : Enrichissement : les systèmes de numération des autres équipes

Les feuilles des différents systèmes ont été distribuées aux élèves pour qu'ils les complètent en devoir sur une semaine. Deux périodes en classe leur ont aussi été accordées pour qu'ils puissent consulter les équipes expertes. Quelques élèves l'ont fait, mais la plupart pouvaient réussir sans problème grâce aux présentations des différentes équipes. Lors de l'autocorrection, la plupart des élèves avaient tout bon ou très peu de fautes. Par contre, je n'ai pas vérifié ou ramassé les feuilles.

Activité 6 : Les additions et les soustractions sumériennes

L'équipe qui a travaillé sur les additions et les soustractions sumériennes a aussi reçu un abaque mésopotamien pour émettre des hypothèses quant à la façon d'effectuer ces opérations. Les élèves ont tout de suite dit que c'était comme une planche à calculer, mais en base 60. Comme prévu, le plus compliqué était de « décomposer» les nombres à additionner ou à soustraire en base 60. Une fois cette étape réalisée, ils maniaient la planche à calculer avec aise. Ils ont lu avec attention le feuillet explicatif pour réaliser qu'ils avaient bien saisi. Un élève de l'équipe ne semblait pas très enthousiaste. Je lui ai demandé si c'était la tâche qui le répugnait ou s'il était endormi. Il m'a répondu qu'il était endormi.

Un problème technique nous prive aussi du son de l'enregistrement vidéo (même cassette que les Égyptiens). En effet, lorsque nous voulons regarder l'enregistrement, le son est défectueux et on ne comprend pas ce que les élèves disent. Je vais donc décrire ce que l'on voit, sans pouvoir dire ce que les élèves se disent. On voit les 4 élèves qui discutent pendant quelques minutes. Je viens les voir au bout de 7 minutes. Ils doivent m'expliquer leur hypothèse. Je leur remets donc le feuillet 2 minutes plus tard. Un élève semble lire le feuillet à voix haute. Je viens les observer, mais je n'interviens pas. J'apporte une précision. 12 minutes après le début, ils doivent essayer de faire l'addition puisqu'un élève écrit sur le feuillet. Au bout de 20 minutes, l'élève endormi qui ne semblait qu'observer le travail depuis le début se penche enfin sur la feuille. 2 minutes plus tard, une élève lève la main. Je viens les voir longuement. Je crois qu'ils ont terminé et que je leur donne des explications pour la présentation. L'enregistrement coupe.

Activité 7 : La présentation des additions et des soustractions sumériennes

Pour cette présentation, j'ai oublié d'installer la caméra vidéo, j'ai donc pris plus de notes que j'ai phrasées dans ce journal de bord. L'équipe a d'abord présenté l'abaque mésopotamien qu'ils ont appelé « la grille». Ils ont précisé que l'on ne pouvait faire que des barres, qu'on ne devait pas mettre les symboles sumériens. Ils ont expliqué qu'il faut d'abord décomposer en base 60 les nombres à additionner : « dans 4 314, il y a 1 fois 3 600, 1 fois 600, 1 fois 60, 5 fois 10 et 4 unités» que les élèves ont placées dans les bonnes colonnes. Ils ont ajouté le deuxième nombre sur la deuxième ligne. Malheureusement, leur exemple d'addition ne comprenait pas de retenue ou d'échange, mais il reste le système babylonien.

Pour la soustraction, ils ont bien représenté le premier nombre (2 511 qui devient 4 fois 600, 1 fois 60, 5 fois 10 et 1 unité). Ils ont représenté le deuxième nombre sur la troisième rangée (426 qui devient 7 fois 60 et 6 unités), laissant ainsi la deuxième rangée pour les emprunts (échanges). Ils ont bien expliqué le besoin d'emprunter une dizaine et de rajouter dix unités pour pouvoir soustraire les 6 unités du deuxième nombre. Pour le deuxième échange, ils ajoutent « on a une soixantaine et il faut en enlever deux, alors il faut emprunter aux 600». Les élèves ont précisé que si on emprunte une dizaine, ça fait dix unités, mais que si on emprunte une soixantaine, ça ne fait que 6 dizaines et ainsi de suite.

Un élève a demandé si les Sumériens avaient un signe particulier pour + et -. Les élèves ne pouvaient répondre. J'ai précisé que ces symboles avaient été inventés beaucoup plus tard. Pour ce qui est des ressemblances avec des façons connues d'effectuer des additions et des soustractions, les élèves l'ont comparée à la planche à calculer, mais en précisant que la nôtre est en base 10 et que la planche sumérienne est en base 60. Ils ont trouvé qu'ici aussi on faisait des échanges entre les colonnes, mais parfois de 10 et parfois de 6. L'équipe des Babyloniens a dit que la technique était identique pour eux. Pour les différences, ils ont trouvé que les Sumériens utilisaient des barres au lieu des chiffres (dans l'algorithme conventionnel), que la base est alternée (10 et 60) et que la dernière rangée de la grille est réservée pour la réponse. Durée : 20 minutes.

Tableau des résultats du test : Retour sur les opérations (sumérien)

| **Élèves** | **Ressemblances avec notre façon ( + et -)** | **Différences avec notre façon d'effectuer les + et les -** |
|---|---|---|
| M. | « Cela ressemble à la planche à calculer.» | « Leur système est en base 6 et 10 et nous, en base 10.» |
| A. | « Ils utilisent un tableau aussi.» | « Ils n'ont pas la même grille que nous.» |
| F. | « Il y a des échanges et ça ressemble à la planche à calculer.» | « Eux, c'est par 10 et 60 qu'ils comptent et eux, c'est un système additif.» |
| F. | « C'est une répétition, comme la planche à calculer.» | « Nous mettons les deux chiffres et nous additionnons.» |
| Julie | Comme nous, les Sumériens représentaient les nombres un au-dessus de l'autre et écrivaient la réponse en bas. Ils plaçaient vis-à-vis les mêmes ordres (les unités ensemble, les dizaines, les soixantaines) et nous aussi (les unités ensemble, les dizaines, les centaines, etc.). Ils faisaient des échanges (retenues et emprunts) lorsque nécessaire comme nous. | Ils utilisaient un outil de calcul (abaque, grille) et pas nous dans l'algorithme conventionnel. La règle de groupement (ou d'échange) entre les colonnes n'est pas toujours la même (eux, ils échangeaient parfois 10, parfois 6 et nous, toujours 10). Ils répétaient le nombre de barres dans chaque colonne et nous, nous avons un signe distinct pour chaque unité. |

Activité 6 : Les additions et les soustractions égyptiennes (équipe 1)

L'équipe qui a travaillé sur les additions et les soustractions égyptiennes n'avait pas d'outils de calcul. Les élèves ont rapidement émis une hypothèse qui s'est avérée être la bonne. Ils n'avaient pas expérimenté avec des emprunts et des retenues, mais ils ont vite saisi à la lecture du feuillet. Après avoir réalisé les deux opérations proposées, un élève ne comprenait toujours pas. Une élève de l'équipe, très pédagogue (elle veut devenir enseignante de cinquième année) a très bien expliqué et l'élève a compris. Ils ont commencé leur affiche environ 40 minutes après le début.

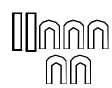
Un problème technique nous prive du son de l'enregistrement vidéo. En effet, lorsque nous voulons regarder l'enregistrement, le son est défectueux et on ne comprend pas ce que les élèves disent. Nous décrirons donc ce que l'on voit, sans pouvoir écrire ce qui se dit. On voit une élève qui écrit et qui parle, elle semble expliquer son hypothèse aux autres élèves de son équipe. Un autre élève prend le crayon et écrit quelque chose. Au bout de 2 minutes, je viens leur porter le feuillet explicatif. Les 5 élèves sont penchés sur la feuille. 4 minutes plus tard, ils sont toujours les 5 engagés. Au bout de 12 minutes, ils semblent encore concentrés sur le travail, ils discutent, semblent s'expliquer. Je déduis que les filles ont fait l'addition et que les garçons font la soustraction (mais tous sont impliqués) puisqu'un garçon a pris le feuillet après 17 minutes. Par contre, les filles semblent lui dire quoi faire. Les filles reprennent la feuille. Je viens les voir, mais on n'entend pas mon intervention. Comme nous sommes à 22 minutes, ils doivent avoir terminé et je leur donne les indications pour l'affiche. Effectivement, ils s'installent par terre pour faire l'affiche. Ils sont les 5 impliqués à faire l'affiche, ils discutent. 10 minutes après le début de l'affiche, ils se relaient auprès de l'affiche (puisque c'est difficile d'y travailler tous les 5). Je viens les voir régulièrement. 40 minutes après le début de l'activité, ils sont encore engagés. L'enregistrement coupe à ce moment.

Activité 7 : La présentation des additions et des soustractions égyptiennes, équipe 1

Malgré la chaleur et le bruit qui vient de la cour (plusieurs classes sont sorties en fin de journée), l'équipe travaillant sur le système égyptien a présenté les additions et les soustractions. Les élèves de la classe sont restés relativement concentrés malgré tout. Les membres de l'équipe ont d'abord fait un rappel des hiéroglyphes égyptiens et leur valeur avec l'affiche de leur première présentation. Ils présentent les deux nombres à additionner en hiéroglyphes et font les transferts nécessaires : « Comme il y a 11 cordes, on en entoure 10 et on le transforme en une fleur de lotus. C'est comme nous, quand il y a 10, on entoure et on transforme». Un élève ne comprend pas bien et des explications supplémentaires sont données. Pour la soustraction, ils présentent les nombres à soustraire (2 341 - 430) et expliquent qu'on ne peut enlever 4 centaines, car il y en a juste 3 : « on transforme une fleur de lotus en 10 cordes pour pouvoir enlever 4 ».

Pour les ressemblances avec d'autres façons d'effectuer les additions et les soustractions, un élève relève que « quand il y a 10, on l'enlève et on met une dizaine de plus». Un autre observe qu'ils disposent leurs nombres comme nous : un en dessous de l'autre et la réponse en bas. Pour les différences, il n'y a pas de signe + et -. Durée : 15 minutes.

Tableau des résultats du test : Retour sur les opérations (égyptien, équipe 1)

| Élèves | Ressemblances avec notre façon ( + et les -) | Différences avec notre façon d'effectuer les + et les - |
|---|---|---|
| R. | « Ils n'ont pas de grille. (Je ne me souviens plus vraiment). » | « Ils ne détiennent pas tous les nombres. » |
| M. | « C'est la même chose sauf qu'ils comptaient avec leurs chiffres et nous faisons des échanges quand nous sommes arrivés à dix. » | « Ce n'est pas avec les mêmes chiffres. » |
| H. | Dans les soustractions, quand il manque par exemple une dizaine, on descend une centaine dans les dizaines. » | « Ce n'est pas la même planche à calculer. » |
| S. | « Que l'on met les deux nombres à additionner un par-dessus l'autre. Que la réponse, on l'écrit sous une barre, exemple : 1<br>-1<br>0. » | « Les soustractions égyptiennes, c'est que l'on met le chiffre de départ et on soustrait le deuxième nombre, exemple : 52<br>-2<br>50. »  |
| E. | « Quand nous on met les chiffres et les nombres un par-dessus l'autre et qu'on marque la réponse, c'est un peu comme ça. » | « Les chiffres et les nombres s'écrivent en égyptien et on ne marque pas la barre pour séparer la réponse et les additions et/ou les soustractions. » |
| Julie | Comme nous, les Égyptiens représentaient les nombres un au-dessus de l'autre et écrivaient la réponse en bas. Ils plaçaient vis-à-vis les mêmes ordres (les unités ensemble, les dizaines, les centaines, etc.) et nous aussi. Ils faisaient des échanges (retenues et emprunts) lorsque nécessaires comme nous. Comme dans notre algorithme conventionnel, les Égyptiens n'utilisaient pas d'outil de calcul (abaque, boulier, etc.). La règle de groupement est 10 dans les deux cas. | Tout comme dans leur système, les Égyptiens devaient répéter plusieurs fois les mêmes chiffres (hiéroglyphes) pour représenter les nombres à additionner ou à soustraire, ce qui est plus long que nous qui avons un chiffre pour chaque unité. Pour les soustractions, les Égyptiens n'écrivaient que le premier nombre et « barraient » le nombre à soustraire, tandis que nous, nous plaçons le nombre de départ et le nombre à soustraire dessous. |

Activité 6 : Les additions et les soustractions chinoises

L'enregistrement vidéo est vraiment sombre, on ne voit pas grand-chose. Comme il y trois équipes en même temps dans la classe, le son n'est pas très bon, on entend surtout l'équipe à côté. L'équipe travaillant sur les opérations chinoises s'est vue remettre un boulier chinois. Les élèves sont allés chercher leur page de Défi mathématique remise lors du survol historique et qui expliquait brièvement le fonctionnement des bouliers et des abaques. On entend des bribes : « Si c'est écarté, ça veut dire qu'on ne les compte pas ». Ils ont donc rapidement compris comment représenter un nombre, mais ils ont plus longuement hésité à savoir comment additionner un autre nombre. Je leur ai proposé le feuillet explicatif, mais ils préféraient essayer par eux-mêmes avant d'avoir le feuillet. Ils sont donc très motivés! Je dois tout de même préciser à un élève qui dessinait de continuer son dessin après l'activité. « Ça là, ça veut dire zéro. Il faut les écarter du centre pour faire zéro. » Ils se passent le boulier et émettent des hypothèses. « C'est en haut, c'est en haut! » « Pour faire 10, c'est ça » « Pour faire 5, ce serait ça. » « OK, on va faire une addition quelconque. » Je viens les voir et leur demande s'ils savent d'abord représenter un nombre. Ils disent que oui. Je leur demande de représenter le nombre 1 642 (pris au hasard). Une élève le fait et je demande aux autres s'ils sont tous d'accord et ils le sont (le nombre était bien représenté). Je poursuis : « OK, laissez-le là et disons que c'est un premier nombre et que vous voulez additionner un autre nombre, mettons 376. » Un élève dit : « Quand il y en a trop dans une colonne, il faut les mettre dans l'autre à côté ». Après quelques hésitations, ils ont proposé une façon de faire, qui était sensiblement celle proposée par le feuillet explicatif qui leur a été remis. Avant que je leur remette le feuillet (au bout de 12 minutes), un élève me demande si c'est « comme ça » (comme ils l'ont proposé) que les additions chinoises se faisaient et lorsque j'ai répondu oui, il a dit : « Ben c'est simple d'abord, y'avaient pas besoin de tout, heee… » Pendant que les élèves lisent et essaient en même temps de faire la démonstration du feuillet, un élève (qui est souvent comme ça) ne participe pas du tout et s'amuse avec une boîte de papier mouchoir. Lorsque c'est son tour, les élèves de son équipe lui donnent le boulier et à ce moment, il s'implique et essaie quelque chose. Je viens les voir et ils me demandent quoi faire avec les deux tiges à la droite du boulier (normalement réservées aux dixièmes et aux centièmes). Je leur dis que « pour les besoins de la cause, vous pouvez mettre les unités complètement à droite ». Je les informe du concours entre un Américain et un Japonais dans les années 40 pour voir la rapidité et la fiabilité de la calculatrice et du boulier chinois (vient d'Ifrah). Le Japonais avait gagné. Les élèves étaient étonnés, mais je leur ai rappelé que les Asiatiques apprenaient à utiliser le boulier quand ils étaient petits et qu'à force de le manipuler, ils devenaient très habiles. Je leur ai expliqué que dans le Quartier chinois de Montréal, ce n'était pas rare de voir des commerçants calculer le montant des achats avec un boulier. Lorsque je leur rappelle qu'ils doivent faire l'addition et la soustraction demandées dans le feuillet, un élève saute et dit : « je veux faire la soustraction, je veux faire la soustraction ! » avec beaucoup d'enthousiasme. Ils se sont ensuite exercés à tour de rôle à manier le boulier. Ils sont restés impliqués longtemps. Pour la préparation de la présentation, je leur ai offert deux possibilités : soit faire les dessins d'un boulier pour montrer les différentes étapes des opérations, soit faire une démonstration en mettant le boulier sur le rétroprojecteur. Ils ont choisi la deuxième option, même si je leur ai dit qu'ils devaient manier sans trop d'erreurs et sans trop d'hésitations le boulier. Ils ont passé les dernières 35 minutes à faire des additions et des soustractions chacun leur tour.

Activité 7 : La présentation des additions et des soustractions chinoises

Encore une fois, les nombreux imprévus dans une école et une classe nous ont obligés à commencer les présentations plus tard que prévu et la première présentation a malheureusement été coupée en deux par la période du dîner. Ce ne fut quand même pas dramatique.

La première équipe à présenter les additions et les soustractions ce jour-là a été celle des Chinois. Le boulier sur le rétroprojecteur donne un très bon résultat. On le voit bien et en gros. Avant de commencer, un élève précise que « les *vrais Chinois* (!), eux, les deux premiers ici, c'est les dixièmes et les centièmes, mais nous on va mettre les unités ici pour ne pas trop vous mélanger ». Ensuite, pendant qu'un élève présente la valeur de chaque tige, un autre élève pointe avec une grande règle : « ici c'est les unités, à côté on a les dizaines, après les centaines, les unités de mille, les dizaines de mille, les centaines de mille, etc. ça va jusqu'au million ». Une deuxième élève explique ensuite : « chacune des boules ici en haut compte pour 5. Si je fais ça ici (elle baisse une boule vers la barre transversale), c'est 5, ici c'est 50. Ici (en pointant les boules du bas), chacune des boules compte pour une unité ». Les élèves ont bien expliqué le fonctionnement du boulier chinois en expliquant la valeur de chaque tige et de chaque côté de la barre transversale (1 et 5). Ils ont fait une démonstration réussie de 321 + 780 qui contenait une retenue. Ils ont d'abord représenté 321, puis au moment d'ajouter 780, un élève a expliqué : « comme ici, il faut pas en rajouter (unités), 80 ici on a deux. 2 + 8 (dizaines), ça fait 10, alors on va descendre ça ici (les 2 dizaines de 321) et on va en mettre un là (une centaine), pis… ». Un élève de l'équipe demande à sa coéquipière : « réexplique c'que tu viens de faire parce que j'ai entendu un gémissement dans la classe… ». Elle explique donc plus en détail. Pour les centaines, elle explique que 4 + 7, ça fait 11 (centaines), donc elle enlève les 4 centaines et met une boule dans la tige des unités de mille et une nouvelle boule dans la tige des centaines. Ils arrivent donc au résultat : 1 101. Une élève tient à bien clarifier les explications : « ici, c'est 780. Il y en a 2, ben 20, alors on en rajoute 80, donc 2 plus 8 ça donne 10, donc 100. Donc, enlève ceux-là et on met une centaine. Là, les 4 boules des centaines, on en ajoute 7, donc ça va donner 11, ça veut dire qu'on va toutes les enlever sauf une (et elle rajoute une unité de mille) ». Un élève ayant travaillé avec l'abaque romain trouve que c'est vraiment pareil comme eux. Il a bien raison.

Ils enchaînent avec la soustraction : « Là, on va vous montrer la soustraction. C'est sensiblement la même affaire, mais à l'envers. » Ils ont réalisé la démonstration de 212 – 123 qui comportait un « emprunt » qu'ils ont associé au processus conventionnel de la soustraction. Ils ont représenté le premier nombre, puis ont expliqué : « là on peut enlever le 100, facilement, c'est assez simple. Là faut enlever le 20, mais y a juste une dizaine… fait qu'il faut qu'on en prenne ici (centaine). Là, j'ai un truc que je ne suis pas sûr que tout le monde va comprendre. Vous enlevez, lui, là ça vous fait 11 dizaines. Tout le monde comprend? Donc là, il faut que j'enlève 2, fait que ça fait 11 – 2, ça fait 9, fait que tu mets 9 dans les dizaines. Pour les unités, on fait la même affaire, on fait 12 – 3, ça fait 9. » « Donc pour la réponse, ça fait 89 ». Un élève conclut en disant : « c'est pas trop compliqué, il suffit juste de savoir comment faire les échanges et ensuite, c'est facile. Les élèves de cette équipe ont raconté l'anecdote que je leur avais contée pendant la préparation de la présentation, à savoir le concours, dans les années 40, entre un Américain manipulant une calculatrice et un Japonais maniant un boulier. Après une série de gros calculs, le Japonais avait réussi en moins de temps et avec moins d'erreurs que l'Américain. Les élèves de la classe étaient fort impressionnés.

En grand groupe, les élèves ont ressorti les ressemblances entre cette technique de calcul et d'autres que les élèves connaissaient. Ils ont fait référence à la planche à calculer, au fait que le boulier est positionnel (le terme est d'eux) puisqu'on ne peut pas monter n'importe quelle boule et que les « transferts » (c'est-à-dire les échanges) se font par 10. Quand je demande à l'élève de préciser ce qu'il veut dire, il dit : « si tu veux représenter 1, tu peux pas monter n'importe où, ça, c'est comme un million, ça c'est mille… ». Pour ce qui est des différences, ils ont noté l'utilisation de boules au lieu des chiffres « ben eux, pour calculer, ils utilisent des boules, tandis que nous, on utilise des chiffres » et le fait que contrairement à la planche à calculer où on échange lorsqu'on atteint 10, ici on échange lorsqu'on atteint 5 (boule du haut). Aussi, contrairement à la planche à calculer, on monte et on descend des boules plutôt que de déplacer ou enlever des jetons. En outre, il y a de la manipulation au lieu du traditionnel papier crayon. Un élève précise que ce n'est pas un format « de poche » comme une calculatrice. Finalement, un élève a remarqué qu'il y avait un espace pour les dixièmes et les centièmes. Je présente la super planche à calculer de Défi mathématique (6 colonnes) en leur précisant qu'on peut travailler des milliers ou on peut décider de mettre une virgule et de travailler les dixièmes, les centièmes et les millièmes. Durée réelle : 20 minutes.

Tableau des résultats du test : Retour sur les opérations (chinois)

| Élèves | Ressemblances avec notre façon ( + et -) | Différences avec notre façon d'effectuer les + et les - |
|---|---|---|
| A. | « Si vous voulez, par exemple 5 + 7 ou (7 – 5 = 2), le boulier ne fait pas de calcul mental tout comme notre façon. Il ajoute. » | « Il n'y a pas de boulier « français ». En « français », les échanges à faire se font pendant les soustractions tandis que les Chinois, c'est après. » |
| L. | « La position des chiffres \| centaines \| dizaines \| unités \| . » | « Les Chinois utilisent un boulier, tandis qu'avec notre système à nous, tous les calculs sont sur papier. » |
| O. | « Pour moi, le boulier chinois est comme la planche à calculer, alors quand on doit additionner ou soustraire, il faut ajouter un ou plus ou en enlever un ou plus. » | « Il n'y en a pas vraiment. » |
| M. | « Ils font aussi des retenues comme nous. » | « Ils font leurs opérations sur un boulier chinois. Il est hybride. » |
| E. | « Tout ce travail sur un boulier. Si par ex : 8 + 9 = (dessin d'un boulier avec la réponse) (17). » | « Nous, on travaille sur un tableau et en chinois, c'est sur un boulier. » |
| Julie | Comme avec notre algorithme conventionnel, les Chinois faisaient des échanges (retenues et emprunts) lorsque nécessaires. Le boulier ressemble à la planche à calculer. | Contrairement à nous, les Chinois utilisaient un outil de calcul (boulier). Il y avait des échanges entre les boules du bas (1) et celles du haut (5) et entre les tiges, mais nous, c'est seulement entre les « colonnes ». Contrairement à notre algorithme conventionnel, les Chinois commençaient leurs opérations par la gauche (les plus gros ordres). |

Activité 6 : Les additions et les soustractions romaines

L'enregistrement vidéo est très sombre, on ne voit pas grand-chose. Aussi, on entend plus ou moins. L'équipe travaillant sur le système romain s'est vue remettre une reproduction maison d'un abaque romain dit simplifié. Les élèves ont eux aussi été consulter leurs pages de Défi mathématique vues lors du survol historique. Ils ont vite compris que chaque bille du haut valait 5 et celles du bas valaient 1. Par contre, ils croyaient qu'ils n'avaient qu'à représenter le résultat de leur addition qu'ils faisaient mentalement. Je leur ai précisé qu'il s'agissait d'un instrument de calcul et qu'ils devaient faire les calculs sur celui-ci. « L'abaque romain est un outil de calcul, ils s'en servaient pour calculer, ce n'était pas juste pour représenter la réponse. » Je leur ai demandé s'ils pouvaient représenter un nombre sur l'abaque. Je les ai laissés essayer. Je leur ai donc remis le feuillet explicatif et ils ont compris. Une élève a pris le feuillet et l'a lu aux membres de son équipe. On entend plusieurs équipes en même temps, c'est difficile à suivre. Je leur précise que l'abaque romain fonctionne comme le boulier chinois, comme dans le feuillet, mais comme les boules ne sont pas fixes, je leur explique qu'ils ne doivent mettre que les boules qu'ils ont besoin. Même après la lecture du feuillet, ce n'est pas très clair pour eux. Je leur précise que les Romains commençaient par représenter le premier nombre à additionner, puis ils ajoutaient le deuxième et faisaient ensuite les échanges nécessaires. On entend ensuite des bribes : « 72, donc 2 retient 1 (?), la réponse va finir par un 2 ». « ça, ça fait 8 400… » Par contre, ils trouvaient complexes les nombreux échanges entre les colonnes mais surtout, entre la partie du haut et celle du bas. Je leur ai donc fait une petite démonstration et c'était un peu plus clair. Ils ont dû s'exercer longuement et faire de nombreux essais pour confirmer qu'ils comprenaient tous bien. Comme ils travaillent à tour de rôle, les autres élèves de l'équipe ont bien du plaisir. Ils semblent eux aussi avoir oublié la caméra! Au bout de 30 minutes, je viens leur demander s'ils ont bien compris, ce n'est pas le cas de tous, ils ont besoin de pratique. « 626, ok, là on enlève 400… » Comme pour les Chinois, je leur ai proposé de faire une affiche pour présenter ces opérations ou de faire des démonstrations sur le rétroprojecteur. Ils ont choisi la deuxième option.

Activité 7 : présentation des additions et des soustractions romaines

Tout de suite après, nous avons eu droit à la présentation des additions et des soustractions romaines, qui ressemblent beaucoup aux mêmes opérations chinoises. Les élèves ont donc expliqué très rapidement pour ne pas être redondants. « Comme les Chinois, quand on met une bille en haut, ça vaut 5 et quand on met une bille en bas, ça vaut 1. » Tout le monde dans l'équipe et dans la classe parle en même temps. Je dois les ramener à l'ordre. Un élève explique : « quand on en met un ici, c'est une unité, ici, quand on en met un, ça représente 5 unités, quand on en met un ici, c'est la colonne des dizaines, ça va donner une dizaine, ici 5 dizaines, etc. » Une autre élève précise que « ça va jusqu'à 100 000. » Dans leur exemple d'addition, ils ont représenté le premier nombre, puis ils ont ajouté toutes les billes du deuxième nombre. « L'addition c'est 238 plus 349. On écrit le premier chiffre (nombre). Je mets 1 dans la colonne d'en haut parce que 8 c'est 5 plus 3. » Ils ajoutent les billes du deuxième nombre : 3 billes de plus dans la colonne des centaines, 4 de plus dans la colonne des dizaines et 9 de plus dans la colonne des unités (une bille en haut valant 5 et 4 billes en bas valant un). « Là, je fais les transferts. Puisqu'il y en a 2 ici, dans la colonne des 5 unités, je le transfère en 1 dans la colonne des dizaines. Comme il y en a 7 dans la colonne des unités, alors j'en mets un en haut qui vaut 5 et j'en enlève 5. Comme ici, il y en a 8 (dizaines), j'en mets un en haut. Ici (centaines), il y en a 5, fait que j'en mets un en haut et j'enlève les 5 du bas. Fait que ça fait 587. » Le même élève, soulagé que la démonstration soit terminée, explique que : « c'est un petit peu moins facile que le boulier, parce que les billes peuvent tomber. L'abaque romain, contrairement au boulier chinois qui contient qu'un nombre restreint de boules par tiges, avec ses billes non fixées, permet de dépasser 10 dans une colonne. Ils avaient préparé un deuxième exemple d'addition avec des unités de mille, mais je leur ai rappelé que j'avais demandé qu'une seule démonstration de chaque opération puisque dans ce projet, on faisait déjà 18 présentations (6 équipes fois 3 présentations) et qu'on ne pouvait pas se permettre d'en faire plus. Ils étaient déçus, mais en plus, juste avant, une équipe avait présenté le boulier chinois.

Pour la soustraction, ils ont fait une démonstration de 244 moins 116. Ils ont précisé que d'abord « on met le premier nombre, puis après ça, on met le deuxième nombre en dessous, comme sur le bord … ». Je leur demande « êtes-vous sûrs que les Romains représentaient le deuxième nombre? » Ils répondent que non, ils ne le représentaient pas. Ils décident donc de venir enlever les billes du deuxième nombre. « Pour enlever 116, on enlève une unité » (l'élève enlève une centaine et lorsque je lui fais remarquer, elle se reprend et dit qu'on enlève plutôt une centaine). « Ici (les dizaines), vu qu'il y en a 4 et qu'on en enlève un, il en reste 3. Là, ici vu qu'il y en a juste 4 et qu'il faut en enlever 6, alors on va aller en prendre un ici (dizaine) et on va en mettre 2 ici parce que ça représente 10 (colonne des unités, en haut où les billes valent chacun 5) pis après ça, on peut en enlever 6. On enlève un en haut et un en bas. » Avant même que je leur demande, l'équipe précisait que l'instrument ressemblait au boulier chinois, mais en moins pratique puisque les billes tombaient. Par contre, ils ont précisé qu'il était plus facile pour les échanges puisqu'on pouvait enlever les billes non nécessaires.

Pour les ressemblances, ils ont évidemment trouvé que la technique sur l'abaque de poche romain ressemblait à celle sur le boulier chinois. Ils ont trouvé que l'abaque s'apparentait également à la planche à calculer, surtout que l'on peut enlever des billes (comme les jetons). Puis, ils ont fait référence aux emprunts et retenues de l'algorithme conventionnel. Ils ne l'ont fait que lorsque je leur ai demandé s'il y avait des ressemblances avec notre façon actuelle de faire les additions et les soustractions.

Pour les différences, ils ont noté le fait que les billes n'étaient pas fixes (comme le boulier chinois) et que contrairement au système sumérien où on fait fois 10, fois 6, ici on fait toujours fois 10 quand on change de colonne. Durée réelle : 15 minutes.

Tableau des résultats du test : Retour sur les opérations (romain)

| **Élèves** | **Ressemblances avec notre façon ( + et -)** | **Différences avec notre façon ( + et -)** |
|---|---|---|
| M. | « C'est positionnel comme la planche à calculer. » | « Que l'on doit mettre des billes. » |
| L. | « La ressemblance est que les Romains faisaient les *un* comme ça *I* comme la lettre *I*. » | « La différence est que les Romains utilisaient un abaque et que nous non. » |
| A. | « Leur abaque romain ressemble à notre planche à calculer. » | « Dans leur abaque, il y a des colonnes que chaque pierre compte pour cinq. » |
| Z. | « Elle est presque pareille parce que c'est en base 10. » | « Il y a une colonne qui représente 5 dans la colonne (dessin d'un abaque avec une flèche sur la rainure du haut, à droite) un jeton dans la colonne des unités représente 5. » |
| C. | « Ça ressemble à la planche à calculer. » | « Eux, ils utilisaient l'abaque. » |
| Julie | Comme avec notre algorithme conventionnel, les Romains faisaient des échanges (retenues et emprunts) lorsque nécessaire. La règle de groupement (ou d'échange) est 10 dans les deux cas. L'abaque ressemble à la planche à calculer. | Contrairement à nous, les Romains utilisaient un outil de calcul (abaque). Il y avait des échanges entre les billes du bas (1) et celles du haut (5) et entre les rainures, mais nous, c'est seulement entre les « colonnes ». |

Activité 6 : Les additions et les soustractions babyloniennes

Finalement, l'équipe qui devait découvrir les additions et les soustractions babyloniennes s'est vue remettre le dessin d'un abaque mésopotamien. Les membres de l'équipe ne comprenaient pas pourquoi il y avait 13 rangées dans certaines colonnes et 10 dans d'autres. Je leur ai dit que ce n'était pas très important, qu'il aurait pu en avoir moins. Un élève fait remarquer la régularité entre les colonnes de l'abaque : « regarde, c'est fois 10, fois 6, fois 10, fois 6 ». Tout le monde est impliqué sur la tâche pour essayer de comprendre l'abaque. On n'entend pas tout ce qu'ils se disent à cause du bruit des autres équipes. Je viens les voir au bout de 4 minutes et ils m'expliquent leur hypothèse. L'hypothèse émise s'est avérée la bonne, mais un élève a proposé d'écrire les symboles babyloniens dans les colonnes de l'abaque. Je leur demande si c'est nécessaire d'écrire avec les symboles babyloniens. Un autre élève lui a répondu que ce n'était pas nécessaire puisque si on met le nombre de dizaines dans une colonne, on n'a pas besoin d'écrire le symbole babylonien de 10. Il a ajouté que lorsque nous utilisons la planche à calculer pour faire des calculs, on ne met pas des chiffres, mais bien des barres ou des jetons. Je leur remets le feuillet explicatif après 5 minutes. Un élève le lit à voix haute et les autres l'écoutent attentivement. Au bout de 13 minutes, ils n'ont pas encore commencé à faire l'addition demandée. Je viens les voir et leur demande de m'expliquer comment on fait. On n'entend pas la réponse, mais ça ne semble pas être l'explication, puisque j'enchaîne en expliquant que « on commence par représenter le premier nombre, c'est 328, donc il y a 5 soixantaines, 2 dizaines et 8 unités. Sur une autre ligne, on vient représenter le deuxième nombre. » « Là c'est à vous d'essayer de faire cette addition-là. » Deux élèves sont plus impliqués que les trois autres. Je viens les voir et je fais le parallèle avec notre planche à calculer où c'est toujours lorsqu'on atteint 10 qu'on doit changer de colonne. Je leur propose d'écrire au dessus de l'abaque la règle de groupements (le fameux fois 10, fois 6, fois 10, fois 6) pour éviter de se tromper dans les échanges. Après 20 minutes, je leur demande de m'expliquer ce qu'ils ont fait. On m'entend «ok, vous avez trouvé le nombre de 3600… ». À 25 minutes, je viens les observer et leur propose d'essayer de faire la soustraction demandée. On n'entend que des bribes « 0 – 6, il faut en enlever une (dizaine). » 30 minutes après le début de l'activité, les 5 élèves de l'équipe sont encore penchés à résoudre les opérations. Ils réussissent finalement et je leur demande de préparer leur présentation à la classe. Un élève demande pourquoi ils doivent présenter sachant que les Sumériens faisaient ces opérations de la même manière qu'eux et je leur dis que j'ai autre chose derrière la tête, que ce travail va peut-être les aider à comprendre les additions et les soustractions normales. Un élève dit : « en tout cas, c'est compliqué en tabarouette! » mais je n'entends pas la suite. Je réponds « non, je ne penserais pas que personne ne fasse ses additions à la façon des Babyloniens. Le fait de faire des additions et des soustractions dans une autre base, est-ce que ça vous aide à comprendre comment nous on fait les additions et les soustractions. » Je les questionne ensuite pour leur demander comment ils vont faire leur affiche : « Allez-vous faire comme moi et mettre plusieurs tableaux pour montrer chacune des étapes ou vous voulez en faire un et faire la démonstration devant la classe? » Un élève dit que ce serait mieux de faire la démonstration devant les élèves, que ce serait plus clair pour eux. Je leur demande « Si vous le faites devant eux, il faut vous assurer que vous le maîtrisez bien, que vous ne vous trompez pas. Imaginez si vous ne savez pas combien mettre de petites barres. »

Pour la préparation de la présentation, ils séparent une feuille-conférence en deux et une élève demande : « qui veut présenter les additions et qui veut présenter les soustractions ? » Ils négocient et règlent le tout rapidement. Un élève mentionne que ce serait mieux de mettre trois personnes pour l'addition, puisque la soustraction « c'est la même chose, mais à l'envers. »

Activité 7 : La présentation des additions et des soustractions babyloniennes

Afin d'éviter de dessiner trois abaques comme dans le feuillet explicatif, l'équipe des Babyloniens a décidé de faire toutes les étapes de leur addition au crayon à mine et de faire « en direct » la démonstration avec leur marqueur. Cette façon était très intéressante parce qu'ils étaient bien préparés, ne se sont pas trompés et ont pu montrer la technique d'addition une étape à la fois. Les élèves ont précisé que la technique babylonienne était la même que celle des Sumériens. Ils ont expliqué le fonctionnement de leur type d'abaque en le comparant à la planche à calculer. Ils ont fait une démonstration de l'addition avec 376 plus 917, qu'ils ont bien décomposé. Une élève explique que « 376, c'est 6 fois 60 plus 1 fois 10 plus 6 et 1 fois 600 plus 5 fois 60 plus 1 fois 10 plus 7 ». Dans leur exemple, ils avaient oublié d'encercler et d'expliquer les échanges de leur addition. Ils l'ont fait à ma demande : « moi, je vais expliquer les échanges. Quand on a 10 ici mettons, il t'en faut 10 pour mettre une barre dans cette colonne-là. Ici, il en faut 6 pour en mettre là. C'est comme fois 10, fois 6, fois 10, fois 6 jusqu'à l'infini. »

Pour la soustraction, ils ont très bien expliqué aussi. « Ici, c'est la même grille, c'est juste qu'on a mis moins de… ici c'est le premier nombre. Nous on a fait 2 453. On a mis 4 dans la colonne des 600, ça fait 2 400, 5 dans la colonne des dizaines, ça fait 50 pis 3 dans la colonne des unités. » On autre élève continue « Nous, on a fait 2 453 moins 748, fait qu'après ça on a retranscrit le premier nombre avec les emprunts. Ici, c'est la colonne (rangée) du deuxième nombre 748. Ici, on voulait faire 0 moins 2, ça ne se pouvait pas, fait qu'on a barré une « six-centaines » et on les a mis dans les soixantaines, 10. Ici, c'est la même chose, 3 moins 8, ça ne se faisait pas, fait qu'on a mis 10 ici avec le 3, fait qu'à la fin, ça donnait (hésitations)… 1 505. 3 moins 1, 2; ici 10 moins 2, 8; 4 moins 2, 2 et 13 moins 8, 5. La réponse est 1 505. » Un élève demande si on écrit la réponse dans la dernière rangée. Ils répondent que oui et rappellent que la première rangée est pour le premier nombre et que la deuxième rangée : « ici c'est le premier nombre avec les emprunts… ».

Pour les ressemblances et les différences, ils ont vite conclu que « c'est la même affaire que les Sumériens ». Un élève de la classe a remarqué que « le romain ressemble au chinois, le sumérien est pareil au babylonien pis les Mayas, y calculent pas fait que les deux autres font comme les Égyptiens. Un élève de l'équipe des Babyloniens a précisé à juste titre que « y a des systèmes qui n'ont pas retrouvé de traces, mettons les Sumériens pis les Babyloniens habitaient en Mésopotamie, fait que vu qu'ils n'ont pas retrouvé de traces, ils se sont dit que ça devait être pas mal ressemblant. » Je précise que « les Babyloniens, en fait on n'a pas retrouvé de traces. Vous allez voir que pour les multiplications, ça va se diversifier. Les Romains vont avoir un abaque différent et les Babyloniens, c'est différent des Sumériens. Vous allez voir qu'à la prochaine présentation, ça va être plus diversifié. Et les Égyptiens, comme leur façon est très différente, on n'aura pas trop de deux équipes pour nous l'expliquer ». Durée réelle : 11 minutes.

Tableau des résultats du test : Retour sur les opérations (babylonien)

| Élèves | Ressemblances avec notre façon ( + et -) | Différences avec notre façon d'effectuer les + et les - |
|---|---|---|
| A1. | « Ils ont une planche à calculer, ils font des échanges, dans les soustractions, ils placent le plus gros chiffre en haut. » | « Notre système est en base 10, donc, 1, 10, 100… Le système babylonien est en base 60, donc 1, 60, 600, 3600… » |
| A2. | « Ils utilisaient des planches à calculer. » | « Ils ont une base six. » |
| L. | « À l'aide des colonnes, tu peux faire des échanges. C'est une certaine planche à calculer. » | « La base n'est pas toujours la même. Au lieu d'ajouter deux et deux, tu ajoutes un, un et un. Les échanges sont après toute l'addition. » |
| S. | « Les Babyloniens ont un abaque qui ressemble un peu à notre planche à calculer d'aujourd'hui. Leur système de calcul additions et soustractions est pareil que les Babyloniens. » | « Notre système d'aujourd'hui (traditionnel) est plus rapide qu'eux et nous, on fait nos calculs avec des chiffres ou nombres (1, 2, 3, 21, 32, etc.) et eux ne les font pas avec leurs nombres et chiffres, mais avec des barres (lll, etc.) sur leur abaque. » |
| ? | « Ils utilisent une planche à calculer. » | « Ils ont une base 60. » |
| Julie | Comme nous, les Sumériens représentaient les nombres un au-dessus de l'autre et écrivaient la réponse en bas. Ils plaçaient vis-à-vis les mêmes ordres (les unités ensemble, les dizaines, les soixantaines) et nous aussi (les unités ensemble, les dizaines, les centaines, etc.). Ils faisaient des échanges (retenues et emprunts) lorsque nécessaires comme nous. | Ils utilisaient un outil de calcul (abaque, grille) et pas nous dans l'algorithme conventionnel. La règle de groupement (ou d'échange) entre les colonnes n'est pas toujours la même (eux, ils échangeaient parfois 10, parfois 6 et nous, toujours 10). Ils répétaient le nombre de barres dans chaque colonne et nous, nous avons un signe distinct pour chaque unité. |

Activité 6 : Les additions et les soustractions égyptiennes (équipe 2)

Comme on ne trouve pas de traces d'opérations à la manière des Mayas, l'équipe qui avait travaillé sur le système maya a plutôt travaillé sur les additions et les soustractions égyptiennes. L'équipe a d'abord été chercher l'affiche de l'équipe ayant travaillé sur le système égyptien pour se rappeler les symboles. Au début, ils ne savaient pas du tout quoi faire. Une élève propose une hypothèse sur papier. Un autre dit : « Ils n'avaient qu'à additionner les chiffres. » L'hypothèse qu'ils ont émise sur la façon d'effectuer ces opérations s'est avérée la bonne. La seule différence est qu'ils avaient plus de dix unités dans la réponse. J'ai précisé qu'ils avaient trouvé la bonne façon de procéder, mais qu'il y avait un problème avec la réponse. Une élève de l'équipe a vite dit : « on ne peut pas mettre douze unités dans la réponse, il y a une dizaine là-dedans! » Voilà, c'était compris. Ils ont vite lu le feuillet et effectué les opérations demandées. Donc, au bout de seulement 4 minutes, je leur ai remis le feuillet explicatif et ils l'ont lu avec attention. Sur l'enregistrement, on n'entend pas très bien. On entend par contre des bribes : « Je veux le faire, je veux le faire! » « Ah non! Je viens de faire une erreur! » Ils se penchent tous sur la feuille. Au bout de 12 minutes, ils décrochent un peu et parlent d'autres choses (qui aime qui dans la classe…), ils ont vraiment oublié la caméra! Je viens les voir régulièrement et tout semble bien aller. S'ils étaient restés concentrés, ils auraient vraiment terminé rapidement. Un élève à la fois travaille sur la feuille. Lorsque je leur demande si tout va bien, une élève de l'équipe me dit que les Égyptiens comptent « comme en français ». Je répète : « en français? » et elle se corrige : « en indo-arabe ». Je leur rappelle les consignes pour la prochaine présentation. Au bout de 25 minutes, ils commençaient le brouillon de leur affiche. L'enregistrement vidéo arrête à ce moment.

Activité 7 : La présentation des additions et des soustractions égyptiennes (équipe 2)

Comme les additions et les soustractions avaient déjà été présentées par une autre équipe et que toute la classe avait bien compris, cette deuxième équipe a été très expéditive. Un élève a commencé la présentation en comparant la façon de faire des Égyptiens avec la nôtre : « Les additions, c'est comme un peu le système indo-arabe pis la planche à calculer… Tu mets tous les chiffres, pis tu les additionnes ». Ils ont effectué l'addition 388 + 2 196. Ils ont très bien expliqué les échanges, qu'ils ont faits devant la classe à ma demande. Pour la soustraction, ils ont effectué 4 321 – 499, en écrivant également le deuxième nombre (ce qui n'est pas nécessaire). Les deux filles qui présentaient les soustractions ne parlaient vraiment pas fort et comme il y avait beaucoup d'élèves dans la cour d'école (encore une très belle journée chaude…), l'enregistrement vidéo ne permet pas de tout entendre. Ils ont aussi oublié de faire les échanges, qu'ils ont bien faits lorsque je leur ai fait remarquer. Nous ne nous sommes pas attardés sur les ressemblances et les différences avec d'autres systèmes puisque nous en avions déjà discuté la veille (avec l'autre équipe présentant les opérations égyptiennes). Durée réelle : 9 minutes.

Tableau des résultats du test : Retour sur les opérations (égyptien, équipe 2)

| **Élèves** | **Ressemblances avec notre façon d'effectuer les + et les -** | **Différences avec notre façon ( + et -)** |
|---|---|---|
| S. | « On met les nombres à additionner ou à soustraire un au-dessus de l'autre (en chiffres égyptiens), les Égyptiens aussi. On écrit la réponse plus bas, les Égyptiens aussi. » | « On écrit les nombres à calculer en chiffres indo-arabes, les Égyptiens les écrivent en chiffres égyptiens. » |
| J. | « Manière de procéder. » | « Leurs symboles de nos chiffres (indo-arabes). » |
| M. | « C'est comme notre façon d'addition ou de soustraction comme 393<br>$\underline{-24}$<br>sauf en chiffres égyptiens. | « La façon d'écrire les chiffres, c'est tout! » |
| F. | « Ils ont le même tableau que nous et ils utilisent la même technique que nous. » | « Ils écrivaient de droite à gauche. » |
| A. | « Ça ne ressemble pas vraiment à notre façon de faire aujourd'hui. » | « Les chiffres étaient différents. » |
| Julie | Comme nous, les Égyptiens représentaient les nombres un au-dessus de l'autre et écrivaient la réponse en bas. Ils plaçaient vis-à-vis les mêmes ordres (les unités ensemble, les dizaines, les centaines, etc.) et nous aussi. Ils faisaient des échanges (retenues et emprunts) lorsque nécessaires comme nous. Comme dans notre algorithme conventionnel, les Égyptiens n'utilisaient pas d'outil de calcul (abaque, boulier, etc.). La règle de groupement (d'échange) est 10 dans les deux cas. Ils commençaient par les unités, puis les dizaines, les centaines, etc. comme nous. | Tout comme dans leur système, les Égyptiens devaient répéter plusieurs fois les mêmes chiffres (hiéroglyphes) pour représenter les nombres à additionner ou à soustraire, ce qui est plus long que nous qui avons un chiffre pour chaque unité. Ils écrivaient les plus gros ordres à droite et commençaient leurs opérations à gauche (avec les unités). |

Activité 8 : Les multiplications chinoises

Cette équipe a reçu encore une fois le boulier chinois. Il y a beaucoup de bruit dans la classe. On entend des bribes : « OK, on fait 4 x 4 ça fait 16… » Les élèves sont tous penchés autour du boulier et discutent activement. Ils n'ont pas de nombres précis à multiplier, donc ils essaient plein de possibilités. Au bout de 5 minutes, plusieurs élèves s'éloignent plus ou moins subtilement du boulier. Après 6 minutes, je viens les voir pour qu'ils me fassent une démonstration puisqu'ils disent qu'ils pensent savoir comment faire les multiplications. Comme leur démonstration est boiteuse, je leur remets le feuillet explicatif. Ils se concentrent à nouveau sur la tâche.

Une élève lit le feuillet pendant qu'une autre manipule le boulier. Les garçons retournent à l'affiche de la première présentation et s'amusent à nommer les nombres chinois tels qu'ils les ont appris avec leur coéquipière d'origine chinoise. Je viens leur préciser qu'ils peuvent écrire la réponse de la multiplication à l'extrême droite du boulier, de ne pas garder les deux dernières tiges pour les dixièmes et les centièmes. On n'entend pas bien les réflexions des élèves, mais je capte « ah, je l'ai pas eu… » plus tard, « ah oui, je pense que je comprends… » et « fais 43 x 8 ». Lorsque je viens les voir 18 minutes après le début, une élève me dit : « Je ne comprends pas, lui il me l'a expliqué et là je comprends plus ou moins. » Je les invite à faire la multiplication de l'exemple du feuillet, soit 43 x 8. Des élèves n'arrêtent pas de chanter « un artichaut dans la vallée », ils ont vraiment oublié la caméra! Les garçons de l'équipe sont beaucoup moins impliqués dans la tâche que les filles qui font des essais. Un élève peu sérieux de l'équipe s'empare du boulier et une fille est en colère. L'élève fait une tentative. Il rend le boulier en disant qu'il ne comprend vraiment pas. Comme c'est long, ça danse et ça chante de plus belle. Je dois intervenir pour les calmer et régler le conflit du boulier arraché. Comme un élève comprend bien, je l'invite à l'expliquer au reste de son équipe. « Au début, il faut représenter le nombre qu'on veut multiplier : 7 x 24, on met 7 ici, ensuite on saute deux colonnes et on met le 24 (en le faisant). Vous comprenez jusque-là? Là on fait 7 x 2, mais vu que ça représente les dizaines, ça fait 14, on vient représenter 14 ici. » Une élève lui dit : « mais il me semble que ça va pas là » et l'élève de répondre : « c'est parce que le 2, c'est des dizaines… le 7 x 4, on vient le mettre là. Là on a 4, pis il faut en mettre 2, fait que 4 + 2, ça fait 6… Les élèves ne comprennent pas tous, ça discute fort. Je reviens les voir 27 minutes après le début (l'équipe des Babyloniens a besoin de beaucoup de support). Les filles se plaignent du manque de sérieux des garçons. Je leur dis : « On dirait qu'il y en a qui oublient qu'ils sont filmés… ». Un élève fait référence à une télé-réalité (Star Académie), mais je leur précise que je ne ferai malheureusement pas de « bloopers » avec les enregistrements. Un élève dit que ça aurait été drôle la chanson « un artichaut dans la vallée ». Je demande si c'est plus clair? Ils me disent que oui et je leur propose d'essayer sur le boulier à tour de rôle. Ils essaient sous la supervision de l'élève qui comprend bien. Je leur demande s'ils veulent encore présenter à l'aide du rétroprojecteur et ils répondent oui tous en chœur. 31 minutes après le début, il y a un élève moins impliqué qui dit encore ne pas comprendre. L'élève qui avait compris le premier reprend ses explications. Une élève demande à son équipe : « OK, quelle multiplication on va faire devant la classe? » Durée réelle : 35 minutes.

Activité 9 : La présentation de la multiplication chinoise

La première équipe à présenter une multiplication a été celle des Chinois et les élèves ont fait une démonstration de 43 x 8 sur l'abaque qu'ils avaient disposé sur le rétroprojecteur. Ils ont très bien expliqué la disposition des deux nombres à multiplier et devant certains yeux interrogateurs des élèves de la classe, ont rappelé la valeur des colonnes et le fait que les boules du haut valent 5. Dans l'exemple choisi, ils ont expliqué que 8 x 3 donnait 24, qu'ils sont venu placer dans les colonnes des unités et des dizaines et que 8 x 40 donnait 320, qu'ils ont placé dans les bonnes colonnes. Comme ils trouvaient cela très facile, ils ont décidé de faire une démonstration avec un multiplicateur à deux chiffres, soit 37 x 12. Comme les chiffres à multiplier étaient petits, ils ont sauté des étapes puisqu'ils ont fait 2 x 37 = 74 et 1 x 37 = 37 mais « comme c'est des dizaines qu'on multiplie, on met la réponse dans les dizaines et les centaines ». Malgré ce raccourci, on voyait qu'ils avaient bien compris et j'ai informé toute la classe que les Chinois auraient plutôt fait 2 x 7, puis 2 x 30. Ensuite, ils auraient fait 10 x 7 et 10 x 30.

À ma question « quelles sont les ressemblances et les différences entre cette façon de faire et d'autres que vous connaissez pour faire des multiplications ? », un élève a remarqué que ça ressemblait beaucoup à notre manière conventionnelle de faire les multiplications (prendre chaque chiffre du multiplicateur et le multiplier par chaque chiffre du multiplicande). Une autre élève a relevé que ça ressemblait beaucoup aux multiplications de la planche à calculer qu'ils ont beaucoup utilisée au deuxième cycle. Comme différence, la même élève a précisé que dans la planche à calculer, on n'écrivait pas les nombres à multiplier comme dans la multiplication sur le boulier. La présentation et la discussion n'ont duré que 10 minutes.

Tableau des résultats du test : Retour sur les opérations (Chinois)

| Élèves | Ressemblances avec notre façon ( x) | Différences avec notre façon (x) |
|---|---|---|
| L. | « Il faut marquer le multiplicateur, ex. : (dessin de boulier avec *multip*. et des flèches vers les tiges de gauche et *rép*. avec les flèches vers la tige de droite). » | « Ils utilisent un boulier tandis que notre système se fait sur papier. » |
| A. | « C'est peut-être une différente façon, mais pour faire les multiplications (français) sur une planche à calculer, il faut écrire les deux nombres et APRÈS, faire les échanges. » | « Sois il n'y en a pas ou je l'ignore. » |
| M. | « Il ressemble aux multiplications sur l'abaque romain. » | « Ils placent leurs billes sur différentes allées sur le boulier. » |
| O. | « Les multiplications, on multiplie et par après, additionner les nombres que ça donne en faisant la multiplication et par la suite, ça donne la réponse. » | « La différence est que nous, nous comptons combien de fois le nombre rentre dans le diviseur. » |
| E. | « La multiplication pour les Chinois ressemble beaucoup aux Romains. Les Chinois utilisent un boulier et les Romains, un abaque, mais il fonctionne pareil. » | « La seule différence avec les Romains, c'est que les billes, on peut les enlever et pas les Chinois. » |
| Julie | Dans les deux cas, on pose d'abord les deux nombres à multiplier, puis on multiplie chaque chiffre du multiplicateur par chaque chiffre du multiplicande. | Les Chinois utilisaient un outil de calcul (boulier) et nous non (papier crayon). Les Chinois « effaçaient » les chiffres du multiplicateur et du multiplicande lorsqu'une étape était terminée, mais pas nous. Nous additionnons les résultats partiels à la fin alors que les Chinois font les transferts au fur et à mesure. |

Activité 8 : La multiplication romaine

L'enregistrement est sur la même cassette que la multiplication babylonienne, donc on distingue mal ce que disent les élèves. Pendant mes explications générales, un élève de l'équipe me demande si son équipe va recevoir « quelque chose qu'on peut manipuler ». Je leur précise que pour la multiplication, ça se fera sur papier. Je leur remets l'abaque romain du feuillet explicatif sur les multiplications. Ils se penchent tous les 5 et discutent. Après seulement 2 minutes, je leur remets le feuillet explicatif. Deux élèves se disputent pour avoir les feuilles. Après 5 minutes, ils sont toujours penchés et discutent, ils semblent tous très impliqués. Je viens les observer. On m'entend dire : « Eh, est-ce qu'il n'y a que Z. qui travaille sur la multiplication? » On dirait qu'ils ne sont pas tous engagés finalement. Les filles s'éclipsent quelques instants. Après 8 minutes, je viens les voir, puis je m'éloigne. Je reviens une minute plus tard et les informe que le feuillet fait 3 pages. Ils semblent surpris, mais comprennent maintenant pourquoi ils ne comprenaient pas. Un élève lit le feuillet à voix haute. Ils me demandent s'ils peuvent faire la méthode traditionnelle au tableau, je leur permets pour vérifier leur réponse après leur multiplication romaine. L. semble très heureuse. Les filles s'éloignent (je crois qu'elles font le calcul au tableau. C'est Z. qui fait la multiplication, aidé de A. pour les résultats partiels. Les filles disent que les gars les copient. Après 16 minutes, je viens voir les garçons, puis je m'éloigne. Les garçons changent de place. Je reviens les voir et on m'entend dire « c'est quelle étape que tu as sautée ? » Il semble expliquer qu'une fois, il n'a pas multiplié les dizaines, puis les unités, mais qu'il a calculé le nombre à deux chiffres ensemble. Je le rassure en lui disant que ce n'est pas très grave. Je viens voir la caméra et la pile semble faible. Je leur dis que ce n'est pas très grave puisqu'ils ont compris, mais L. dit « Moi je n'ai pas compris ». Je lui réponds : « bon ben, fais-toi expliquer, je peux savoir pourquoi tu fais des beaux dessins au tableau si tu n'as pas compris? Après avoir reproduit au tableau un abaque romain, Z. explique à L. « Le 200, tu le marques en bas, le 205 (le multiplicande de l'exemple). » Il dessine aussi le multiplicateur (13). « Le 2, dans le nombre au complet, il représente 200, fait que là, tu fais 200 x 10, parce que le 1, il représente 10, ça donne 2 000, là tu mets 2 000. Là tu fais 200 x 3, ça fait 600. » La cassette se termine à ce moment, mais Z. explique vraiment bien aux deux filles de l'équipe qui finiront par comprendre.

Le calendrier prévu n'a pas pu être respecté. En effet, nous avons consacré beaucoup de temps au projet depuis un mois et d'autres matières commençaient à en souffrir. Le fait que je ne sois avec mes élèves que trois jours par semaine aussi n'aide pas. Finalement, la chaleur exceptionnelle des dernières semaines a rendu le travail encore plus ardu, c'est pourquoi nous avons fait une petite pause d'une semaine.

Activité 9 : La présentation de la multiplication romaine

Malgré la chaleur et le fait qu'il ne restait que 15 minutes avant la cloche, l'équipe des Romains a présenté sa multiplication, soit 15 x 146. Ils ont choisi de dessiner un abaque à jetons vierge sur leur affiche et de nous faire la démonstration. Ils ont fait toutes les étapes, soit 6 x 5 = 30, 6 x 10 = 60, 40 x 5 = 200, 40 x 10 = 400, 100 x 5 = 500 et 100 x 10 = 1000. Ils ont dessiné tous les résultats partiels avant de faire et d'expliquer tous les échanges.

Les élèves ont relevé comme ressemblance le fait que l'abaque était positionnel (c'est le terme utilisé) et qu'il ressemble au boulier avec les échanges. Comme différence, un élève explique que dans nos multiplications traditionnelles, on multiplie les unités, puis les dizaines et qu'on additionne les réponses. Ici, on met les réponses partielles dans chaque colonne et on fait les transferts (échanges) à la fin. La présentation et la discussion ont duré 12 minutes et tous les élèves de la classe affirment avoir compris.

Tableau des résultats du test : Retour sur les opérations (Romain)

| Élèves | Ressemblances avec notre façon (x) | Différences avec notre façon d'effectuer les multiplications |
|---|---|---|
| Z. | « On doit représenter les nombres à multiplier avant de commencer. » | « On a un abaque. » |
| A. | « Ils multiplient les chiffres comme nous, ex. : 38 x 56, ils font 6 x 8, après 8 x 5, etc. » | « Ils ont des colonnes pour calculer. » |
| L. | « Les échanges dans la planche à calculer. » | « La différence est que nous, pour faire 100 x 15, on fait 100 x 15, mais eux, ils font 100 x 10, 100 x 5, qui donne la réponse. » |
| M. | « On place les symboles sur une planche comme nous. » | « Il y a de différentes colonnes. » |
| C.* | | |
| Julie | Dans les deux cas, on pose d'abord les deux nombres à multiplier, puis on multiplie chaque chiffre du multiplicateur par chaque chiffre du multiplicande. | Les Romains utilisaient un outil de calcul (abaque) et nous non (papier crayon). Les Romains « effaçaient » les chiffres du multiplicateur et du multiplicande lorsqu'une étape était terminée, mais pas nous. Nous additionnons les résultats partiels tandis que les Romains font des transferts (échanges) pour ne pas excéder neuf dans une colonne. |

* Élève souffrant d'absentéisme et qui n'est pas très motivée. Elle n'a rien écrit à ces questions.

Activité 8 : La multiplication et la division égyptiennes (équipe 1)

Les élèves observent le tableau de multiplication égyptien, mais le son n'est pas parfait. On entend tout de même : « OK, ça doit être 1 x 15 + 2 x 30…» Je viens les voir et les observe. Je leur demande s'ils comprennent quelque chose. Ils ne savent pas. Je leur demande alors s'ils trouvent certaines régularités dans le tableau. Ils me répondent que c'est toujours « fois 2 ». Je réponds : « c'est toujours fois 2 par rapport à quoi? » Un élève répond que c'est par rapport au nombre au-dessus. Ils pensent que les petits tirets sont des « moins ». Je leur apprends que non, que c'est une marque. Après 7 minutes, je leur précise que le tableau qu'ils ont servait à effectuer la multiplication 84 x 15. Ils sont tous penchés au-dessus du tableau et parlent en même temps. « ok, 720, mmm… » Je reviens les voir et leur demande où ils en sont. Une élève me dit : « c'est toujours fois 15 » (en parlant de la première colonne par rapport à l'autre). Une élève le démontre à ses coéquipiers : « regardez, 1 x 15, 15; 2 x 15, 30; 4 x 15, 60; 8 x 15, 120; 16 x 15, 240… » Je leur demande pourquoi il y a des nombres qui ont un tiret à côté. On n'entend pas leur réponse, mais on m'entend dire : « OK, lisez ça pour confirmer votre hypothèse. » Les deux filles lisent le feuillet ensemble, puis le passent aux garçons qui le lisent. On entend : « 64 + 16 + 4 = 84 ». Une fille dit : « ah! OK! ». Je viens leur demander s'ils avaient vu juste et ils répondent fièrement que oui. Les filles s'emparent de la feuille pour essayer de faire la multiplication demandée. Un garçon dit : « nous aussi on veut l'essayer! » Il semble y avoir des pertes de temps. Au bout de 18 minutes, un élève fait semblant de dormir. On n'entend que des bribes : « Ben relisez la feuille pis vous allez comprendre » et «comme là regarde, 84 là, on fait fois 2, fois 2 jusqu'à 64 parce que 64 + 64, ça dépasse le 84. » Après 20 minutes, ils sont tous impliqués et ceux qui comprennent expliquent à ceux qui ne comprennent pas. « 64 + 8, ça donne 72, donc il faut faire 64 + 16, ça fait 80 ». Après 22 minutes, ils m'appellent et me parlent tous en même temps. Je leur relis un bout du feuillet explicatif qui explique les deux colonnes du tableau et leur explique que si notre multiplication était x 12, il y aurait un 12 dans la deuxième colonne et c'est ce nombre qu'on doublerait. « 64 + 32, ça donne 96, c'est trop ». Les filles restent concentrées sur la tâche (après 26 minutes), mais les garçons décrochent un peu. Un garçon d'une autre équipe vient discuter avec les garçons de cette équipe. Après 28 minutes, je viens les voir et ça y est, ils comprennent les multiplications égyptiennes. Je leur propose de poursuivre avec les divisions. J'invite un élève à lire la partie sur les divisions lentement et à voix haute. L'enregistrement coupe après 32 minutes (la cassette était terminée).

Activité 9 : La présentation de la multiplication et de la division égyptiennes (équipe 1, avec chiffres indo-arabes)

La première équipe à présenter a été celle qui avait d'abord travaillé sur le système maya, mais faute de preuves archéologiques des opérations chez les Mayas, j'ai fait travailler cette équipe sur les opérations égyptiennes. Pour en faciliter la compréhension, j'avais pensé qu'une équipe pouvait présenter les multiplications et les divisions égyptiennes avec des chiffres indo-arabes (comme dans le feuillet explicatif remis aux élèves) et que l'autre équipe pouvait présenter les mêmes opérations, mais avec des hiéroglyphes telles que les faisaient les scribes égyptiens. J'ai donc offert à l'autre équipe (qui avait résolu ces opérations en premier) de choisir s'ils préféraient présenter les opérations égyptiennes en premier avec des chiffres indo-arabes ou en deuxième avec des hiéroglyphes. Comme l'autre équipe a préféré présenter avec des hiéroglyphes, nous avons commencé avec celle-ci.

Les deux filles du groupe ont présenté la multiplication à l'aide du tableau, mais ce n'était pas clair du tout. Je savais qu'elles comprenaient bien, mais elles n'arrivaient pas à l'expliquer aux élèves de la classe. J'ai dû poser des questions très précises pour qu'elles expliquent aux élèves pourquoi c'est 12 dans la deuxième colonne et pas un autre nombre (elles précisent que c'est parce que c'est le multiplicateur). Je demande ce qui ce passe entre chaque rangée du tableau et elles précisent qu'on fait « fois 2 » à chaque fois, comme dans la première colonne.

Les garçons ont mieux expliqué leur division en expliquant que c'était le même principe que la multiplication, mais « à l'envers ». Ils ont expliqué à nouveau le fonctionnement du tableau, mais un élève a demandé pourquoi c'était un 5 maintenant dans la deuxième colonne. Ils ont précisé à ce moment que le 5 était le 5 du diviseur et que comme les multiplications, on doublait toujours la première colonne, puis la deuxième. Ils ont ajouté que lorsqu'on vient pour dépasser le nombre à diviser dans la deuxième colonne, on peut s'arrêter de doubler. Finalement, ils expliquent qu'on cherche dans la deuxième colonne les nombres qui additionnés forment le nombre à diviser et qu'on fait des tirets et que pour trouver la réponse à la division, il suffit d'additionner les vis-à-vis de la première colonne. Comme une autre équipe devait présenter les opérations égyptiennes, nous n'avons pas discuté des ressemblances et différences tout de suite. Après toutes les questions de clarification de ma part et des élèves de la classe, la majorité des élèves a compris. La présentation a duré 10 minutes.

Tableau des résultats du test : Retour sur les opérations (Égyptien, équipe 1)

| Élèves | Ressemblances avec notre façon (x et ÷) | Différences avec notre façon (x et ÷) |
|---|---|---|
| F. | « Il y avait un tableau comme les Babyloniens. » | « Presque tout. » |
| M. | « Il y a des colonnes. » | « La grille, les chiffres et aussi la façon de le diviser ou multiplier. » |
| J. | « Ont un tableau comme les Babyloniens. » | « Égyptiens ont un tableau, pas indo-arabe, manière de placer. » |
| S. | « Des fois, on utilise des multiples, les Égyptiens aussi (sauf que les Égyptiens les utilisent toujours). » | « Les Égyptiens utilisent un tableau avec des multiples, pas nous. » |
| A. | « On multiplie, on fait » | « On multiplie par 20 ». |
| Julie | Dans une multiplication, si notre multiplicateur a plusieurs chiffres, nous devons additionner les résultats de la multiplication de chaque chiffre. On doit aussi additionner plusieurs nombres avec le procédé égyptien. | Les Égyptiens procédaient par duplications successives, donc n'avaient pas à connaître les tables de multiplication et nous oui. Le procédé pouvait être très long (surtout qu'on gravait de nombreux hiéroglyphes) et le nôtre est rapide. |

Activité 8 :La multiplication et la division égyptiennes (équipe 2, avec hiéroglyphes)

En regardant le tableau qui leur est remis, une élève remarque rapidement que « là c'est x 2 ». Un élève renchérit en disant : « Ben oui, regardez, c'est x 2, x 2, x 2, x 2! » Comme les autres enregistrements pendant le travail des équipes, le son n'est pas très bon, on entend beaucoup les autres équipes. Aujourd'hui, il y a des absents et ils ne sont que 3 dans l'équipe. Ils sont tous penchés et engagés dans la tâche. On entend « 420 + 240 ». Au bout de 3 minutes, ils m'appellent pour me dire qu'ils ne comprennent pas. En même temps, un élève de l'équipe s'exclame : « Ah! J'ai compris! Peut-être qu'il faut additionner ces nombres-là? » Je leur donne le feuillet explicatif et les invite à vérifier leur hypothèse. Une élève lit le feuillet à voix haute. Les autres restent attentifs tout le long de la lecture. À la fin de la lecture, ils semblent perplexes. Un élève dit : « Ce que je ne comprends pas, c'est qu'avec ça, on ne peut pas le faire avec tous les nombres. » L'élève qui lisait lui répond : « oui, tu y vas jusqu'à ce que tu viennes pour dépasser le nombre ». Ils tentent de faire le défi du feuillet explicatif, mais avant, ils font le calcul sur une calculatrice. 10 minutes après le début de l'activité, une élève explique à un autre le fonctionnement (mais on n'entend pas bien) et on entend l'élève dire : « Oh! OK! Là j'ai catché! » J'étais près d'eux et je leur ai confirmé qu'ils avaient bel et bien compris. Je les ai invités à vérifier sur la calculatrice.

Après 12 minutes, une élève dit : « On fait une affiche? » Ils se rappellent qu'ils ont la division à faire aussi. Ils observent le tableau du feuillet et remarquent que c'est le même principe que la multiplication. Une élève lit les consignes, mais tous sont penchés sur les feuilles. Une élève dit : « 512 + 64 + 32 + 16 est égal à 624. C'est ça qu'ils disent de faire. Après ça tu fais ça, ça pis ça…pis ça donne, la réponse! » Un élève se plaint de ne pas comprendre. Une autre ajoute : « Je ne comprends pas pourquoi on met ces lignes-là. » Une autre lui répond : « c'est pour savoir c'est quoi notre réponse! » Elle commence à expliquer et on entend : « ah! J'ai compris! J'ai compris! J'ai compris! » très enthousiaste. Le même élève, qui plus tôt se plaignait qu'il ne comprenait toujours pas, demande qu'on lui explique encore. On n'entend pas bien, mais on voit les filles expliquer au garçon qui ne comprend pas. « Là tu calcules le 2, 4, 8… jusqu'à la réponse.» Une minute plus tard, il a dû comprendre puisqu'il dit « ok, je veux le faire! » C'est donc le garçon qui commence à essayer la division. Je viens les voir et leur demande s'ils ont compris les divisions. Ils me disent que oui, qu'ils sont en train de la faire. Je leur dis que lorsqu'on comprend la multiplication, on comprend quand même facilement la division. Ils essayent tous les trois de faire la division demandée chacun de leur côté. Je les observe un bon moment et lorsqu'ils pensent avoir terminé, je leur propose de vérifier avec la calculatrice. Ça ne semble pas fonctionner. On se penche sur la feuille du garçon et je demande : « OK, vous additionnez ici, mais jusqu'à ce que ça fasse quoi? » On me répond 462. Ils vérifient leurs calculs et semblent avoir compris. Je leur demande ce dont ils pensent de cette façon de faire les multiplications et les divisions. Je leur demande également quels seraient les avantages et les inconvénients de cette façon de faire. On n'entend pas la réponse, mais je renchéris en demandant si on a besoin de connaître nos tables de multiplication avec cette méthode. Ils répondent qu'ils ont juste besoin de connaître x 2. Je leur précise que x 2, c'est comme si « on faisait 6 + 6, 12, 12 + 12, 24, 24 + 24, 48… Donc on n'a pas besoin de connaître ses tables, c'est un avantage. Quels seraient les inconvénients? » Un élève répond « C'est plutôt long de faire le tableau. » Je rappelle d'ailleurs qu'« Eux, ils utilisaient des hiéroglyphes, sachant que tous les nombres du tableau, ils les gravaient en hiéroglyphes… Là, il y a une autre équipe qui va travailler sur les Égyptiens. Ce que je vais proposer, c'est qu'il y ait une équipe qui présente comme ça, en indo-arabe, pour que les gens comprennent et l'autre équipe pourrait présenter avec des hiéroglyphes, mais en deuxième. Je ne sais pas ce que vous préférez? » Une élève me répond qu'elle préfère présenter avec des hiéroglyphes. Je lui rappelle que « Vous allez présenter en deuxième par exemple, parce j'ai peur que si vous présentez avec des hiéroglyphes, ce ne soit pas assez concret pour eux. » Ils préfèrent présenter en deuxième. Ils pensent déjà à leur affiche.

Je leur conseille de faire la première colonne de leur affiche moins large que l'autre puisque les hiéroglyphes devraient prendre moins de place. 23 minutes après le début, je les laisse et ils discutent de l'organisation de leur affiche. Quand ils réalisent tous les hiéroglyphes qu'ils devront dessiner, ils ne sont plus sûrs. Je leur dis qu'ils peuvent présenter avec des nombres indo-arabes. On essaie de voir ce que ce sera. Je leur suggère de faire un brouillon avant de faire leur affiche. Ils discutent, mais on n'entend pas. Plus tard, on entend « OK, on multiplie quels nombres? »

Activité 9 : La présentation de la multiplication et de la division égyptiennes (équipe 2, avec hiéroglyphes)

Tout de suite après la première présentation, nous avons enchaîné avec la deuxième équipe des Égyptiens. Ils rappellent brièvement le fonctionnement du tableau et font leur multiplication. « Nous, on a fait 84 x 9 donc dans la deuxième colonne, on commence avec 9 et on fait toujours fois 2, fois 2, fois 2… ». Ils expliquent qu'ils se sont arrêtés à 64 dans la première colonne parce que s'ils doublaient ce nombre, ils allaient dépasser le nombre à multiplier, soit 84. Ils précisent que dans la première colonne, en additionnant 64 + 16 + 4, ça donnait 84 et qu'il suffit d'additionner les nombres de la deuxième colonne qui sont vis-à-vis ces nombres pour trouver la réponse à la multiplication, soit 756. Les élèves présentent ensuite la division 565 ÷ 5 et expliquent très clairement la façon de faire des Égyptiens.

Je demande ensuite à toute la classe les ressemblances et les différences entre cette façon de faire et d'autres qu'ils connaissent. Un élève remarque une certaine ressemblance avec les tables de multiplication babyloniennes (système pas encore présenté). Ils notent surtout des différences : les Égyptiens utilisaient un tableau à deux colonnes, que ça n'a rien à voir avec notre façon de faire les multiplications et les divisions, qu'ils doublent les nombres, donc qu'ils ne sont pas obligés d'apprendre les tables de multiplication et qu'ils utilisent les multiples de multiplicateur ou du diviseur. Cette deuxième présentation suivie de la discussion a duré à peine plus de 10 minutes.

Tableau des résultats du test : Retour sur les opérations (Égyptien, équipe numéro 2)

| **Élèves** | **Ressemblances avec notre façon d'effectuer les x** | **Différences avec notre façon d'effectuer les x** |
|---|---|---|
| R. | « ? » | « Ils n'ont pas à savoir leurs tables de multiplication et de divisions pour faire des divisions. » |
| M. | « Aucunement à part que nous échangeons comme eux quand nous sommes arrivés à dix » avec une flèche vers la question suivante (différences). | |
| H. | | « Ce n'est pas la même planche à calculer. » |
| S. | « Il n'y a pas vraiment de ressemblance. » | « Le tableau des multiples de 2 et du multiplicateur. La barre oblique et le trait d'union. » |
| E. | « Il y a un tableau comme les Babyloniens, les Romains et autres systèmes. » | « Eux, ils ont un tableau et pas nous. » |
| Julie | Dans une multiplication, si notre multiplicateur a plusieurs chiffres, nous devons additionner les résultats de la multiplication de chaque chiffre. On doit aussi additionner plusieurs nombres avec le procédé égyptien. | Les Égyptiens procédaient par duplications successives, donc n'avaient pas à connaître les tables de multiplication et nous oui. Le procédé pouvait être très long (surtout qu'on gravait de nombreux hiéroglyphes) et le nôtre est rapide. |

Activité 8 : La multiplication et la division sumériennes

En leur donnant à nouveau l'abaque mésopotamien, je dis aux élèves que les Sumériens effectuaient leurs multiplications comme des additions répétées. Au bout d'une minute, ils m'appellent et un élève me demande si c'est par exemple 182 + 182 + 182 ? Alors, un autre élève propose : « on met un nombre par rangée et après, on additionne tout. » Je leur demande comment ils écriraient 182 et un élève me répond : « 3 soixantaines, ça fait 180 et deux. » Une élève cherche ses feuilles sur les additions qu'ils ont faites la semaine d'avant. On entend mal, mais ils discutent de 6 et de 10 (les colonnes). Après 4 minutes, je constate qu'ils ont compris et leur donne le feuillet explicatif. Ils ne lisent pas vraiment le feuillet, mais vérifient leur hypothèse dans le tableau avec les nombres de l'exemple donné. Je les invite à tenter de faire la multiplication demandée dans le feuillet. Le son n'est pas très bon, mais ils sont tous impliqués sans la tâche. Après 9 minutes, ils ont terminé l'addition. Je leur demande si ça fonctionne et ils me répondent tous en chœur et avec enthousiasme : oui! Ils commencent à lire la partie sur la division, mais ils ont de la difficulté à la figurer. Comme je les observe à ce moment, je leur propose de s'imaginer que c'est un gros panier de pommes qu'ils sont à se partager à 4 personnes. Ils préfèrent des bonbons. Je précise : « Au lieu de les distribuer un bonbon, un, un, un, ce serait un peu long, vous êtes d'accord? Alors, on donne des paquets de bonbons, on va commencer par les plus gros paquets, on va donner les « soixantaines : un, un, un, un, un, un. » On entend un « Aaaaaaah! » Un élève poursuit en disant qu'il reste une soixantaine. Je n'ai pas le temps de répondre qu'un autre élève dit : « ben, on fait un échange, on la met dans les dizaines. » L'échange est animé, mais on n'entend pas bien. Pour les aider à comprendre, je leur explique : « Les 7 dizaines du début, plus les 6 dizaines qui viennent de la soixantaine, là en tout ça fait 13, donc chacun en a 2 et il en reste une, que tu envoies dans les unités. Avec les 8 qu'il y avait déjà, ça fait 18, que tu peux séparer en 6. La réponse, c'est n'importe quelle rangée, chacun va recevoir une soixantaine, deux dizaines et 3 unités de bonbons. » « OK, la réponse est donc 684. » Ils se mettent sur l'affiche au bout de seulement 20 minutes. Ils discutent longuement sur les couleurs à utiliser pour l'affiche. Ils font même « roche papier ciseaux». Je leur précise qu'ils peuvent prendre 2 affiches.

Activité 9 : La présentation de la multiplication et de la division sumériennes

La troisième équipe à présenter a été celle des Sumériens. Ils expliquent que pour multiplier 12 863 x 4, « on écrit le nombre 12 863 dans le tableau » et expliquent combien il y a de paquets de 3 600, de 600, de soixantaines et d'unités et précisent qu'« on l'écrit quatre fois parce que la multiplication est fois 4 ». La base 60 ou la décomposition en base 60 ne semble pas du tout poser problème aux élèves de l'équipe et du reste de la classe. Il faut dire qu'ils commencent à être drôlement fatigués. Ils expliquent ensuite vraiment bien la division 2 736 ÷ 4. Ils ont décomposé le nombre 2 736 en base 60 et l'ont ensuite divisé sur quatre rangées. Ils ont bien expliqué les transferts, soit lorsqu'il restait un paquet de 600 et qu'il fallait l'envoyer dans la colonne des soixantaines en précisant que dans ce cas-ci, ça devenait 10 soixantaines, mais que lorsqu'on transférait une soixantaine, ça devenait seulement six dizaines.

Pour les ressemblances et les différences, les élèves relèvent la similitude avec la planche à calculer et la ressemblance avec les additions sumériennes et babyloniennes. Je leur fais remarquer que les Sumériens n'ont pas vraiment de technique de multiplication et qu'ils utilisent justement une addition répétée. Je leur demande comment ils feraient pour multiplier par un plus gros nombre. Un élève remarque la commutativité de la multiplication et dit « on a juste à inverser les nombres et à multiplier par le plus petit ». Je félicite cette réflexion, mais j'ajoute « oui, mais si les deux nombres sont gros? » Un élève, qui se réfère à notre système décimal, dit : « c'est facile, on a juste à ajouter des zéros ». Il n'avait pas compris que seul un système décimal pouvait fonctionner de cette façon. Ils ont réalisé la limite de cette addition répétée et comprenaient à quel point ce procédé pouvait être long avec un multiplicateur plus grand. Comme différence, ils ont noté que les Sumériens procédaient par addition répétée. La présentation et la discussion ont duré une quinzaine de minutes. Comme les élèves venaient de s'enfiler trois présentations de suite et qu'il en restait une, j'ai accordé une pause de 30 minutes pour aller à la toilette, bavarder, se dégourdir un peu, faire leur sac et discuter avec leur enseignante des lundis et mardis qui passait par là.

Tableau des résultats du test : Retour sur les opérations (Sumérien)

| Élèves | Ressemblances avec notre façon (x et ÷) | Différences avec notre façon (x et ÷) |
|---|---|---|
| F. | « Il y a des échanges et ça ressemble à la planche à calculer. » | « Eux, ils mettent les nombres de fois qu'il faut multiplier. » |
| A. | « Pour les multiplications, c'est des additions répétées comme nous. » | « Eux, ils peuvent juste faire leurs divisions et multiplications sur leur tableau, pas nous. » |
| M. | « Eux font une addition répétée pour les multiplications. » | |
| F. | « Nous répétons le chiffre autant de fois pour après additionner. » | « Nous (humain) le faisons immédiatement (le calcul). » |
| Julie | Nous ne notons aucune ressemblance pour les multiplications, sinon qu'il peut y avoir des retenues (échanges) dans les deux cas. Pour les divisions, les deux techniques procèdent par un « partage de paquets ». | Pour les multiplications, les Sumériens fonctionnent par additions répétées, ce qui est limité ou très long, tandis que nous pouvons effectuer de gros calculs rapidement. Pour les divisions, bien que les deux techniques procèdent par un « partage de paquets », l'algorithme conventionnel est plus rapide puisque nous n'avons pas à représenter le résultat autant de fois que le diviseur comme dans le procédé sumérien. |

Activité 8 : La multiplication babylonienne

J'ai l'enregistrement vidéo, mais sur une caméra, il n'y avait aucun son et sur une autre, le son était incompréhensible. Je tenterai de décrire ce que l'on voit et les bribes que je peux attraper. Je leur remets le tableau de multiplication babylonienne et les tables de multiplication en premier, comme c'est le procédé le plus difficile (avec le plus d'étapes). Pendant 5 minutes, on les voit discuter, se passer la feuille puis je viens les voir. Je les laisse discuter et vais voir une autre équipe. Après 7 minutes, je viens leur expliquer les tables de multiplication qui étaient gravées et transmises de génération en génération. Ma voix portant plus, on entend un peu ce que je dis. Je leur explique pourquoi les scribes babyloniens utilisaient de telles tables en faisant le parallèle avec nos tables qui vont jusqu'à 9 et les leurs, qui devaient aller jusqu'à 59. Je leur demande d'imaginer retenir des résultats de 59 x 42 par exemple. Ils semblent perplexes, mais ils restent sur la tâche. Après 10 minutes, un élève vient me poser une question qu'on n'entend pas, mais je semble acquiescer de la tête. Après 12 minutes, je viens m'asseoir avec eux et je lis avec eux le feuillet explicatif pour revoir les étapes avec eux. Je semble apporter des précisions et des explications qu'on ne comprend pas. « 11 soixantaines… » Je fais des liens avec notre façon de faire des multiplications : « Comme nous quand on fait une multiplication à deux chiffres, on vient mettre les résultats partiels … » Je suis restée 6 bonnes minutes avec eux. Au bout de 24 minutes, ils sont encore tous impliqués, mais ils semblent être fatigués ou découragés. Je viens les voir, mais ça semble aller puisque je continue à circuler. À 28 minutes, je reviens les voir et les observe, mais je n'interviens pas. Je leur précise un truc qu'on n'entend pas et je repars. Ils se passent la feuille, mais c'est surtout deux garçons qui écrivent. À 34 minutes, je leur demande s'ils ont vérifié leur réponse, ils semblent avoir terminé. À 37 minutes, ils viennent me chercher, ils ont terminé et ça fonctionne, ils ont vérifié leur réponse. Ils semblent épuisés, mais fiers d'eux. Je leur donne des précisions sur la présentation. Je leur suggère de faire une démonstration devant la classe (pour éviter de dessiner 4 ou 5 tableaux pour les différentes étapes). Je leur propose, par contre, de dessiner au crayon à mine les différentes étapes pour être sûr qu'ils ne se trompent pas pendant la présentation.

Activité 9 : La présentation de la multiplication babylonienne

Comme dernière présentation, l'équipe a été un peu bousculée. En effet, nous avons trop étiré la pause et l'équipe des Babyloniens n'a eu que 10 minutes pour faire une démonstration d'une multiplication babylonienne. Ils ont bien expliqué comment on procédait pour faire 692 x 25. À ma suggestion, les élèves avaient préparé leur planche à calculer en base 60, avaient écrit le multiplicande et le multiplicateur en base 60 au crayon-feutre. Cependant, ils avaient écrit tous les résultats partiels au crayon à mine pour ne pas se tromper lors de la démonstration. Les élèves de la classe ont semblé comprendre, mais le manque de temps ne nous a pas permis de vérifier cette apparente compréhension. Nous n'avons pas eu le temps non plus de relever les ressemblances et les différences entre ces procédés et les autres présentés ou les algorithmes conventionnels.

Tableau des résultats du test : Retour sur les opérations (Babylonien)

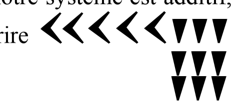
| Élèves | Ressemblances avec notre façon d'effectuer les x | Différences avec notre façon d'effectuer les x |
|---|---|---|
| S. | « Nous aussi, on fait des échanges. » | « On ne prend pas d'abaque. » |
| L. | « C'est comme la planche à calculer. Il y a des tables de multiplication. » | « Tu mets tes chiffres babyloniens et, exemple, tu mets 39 unités et bien tu les multiplies les 39 au lieu de mettre 9 fois le chiffre et 3 fois le multiplicateur. » |
| A. | « Ils prenaient un nombre à la fois. » | « Ils ont à multiplier par 60. » |
| A. | « Ils font des échanges. » | « Ils utilisent leur planche à calculer, ils décomposent leur multiplicande. » |
| P. | « Ils ont une planche à calculer. Ils font des échanges. » | |
| Julie | Dans les deux procédés, nous multiplions l'unité du multiplicande par le multiplicateur, ensuite les dizaines du multiplicande par le multiplicateur, puis les soixantaines (ou centaines) du multiplicande par le multiplicateur. On additionne ensuite les résultats partiels dans les deux cas. Dans les deux cas, il y a des échanges (des retenues). | Les Babyloniens avaient recours à des tables de multiplication écrites vu leur base sexagésimale élevée, tandis que nous, nous les mémorisons (jusqu'à 9). Les Babyloniens dessinaient leurs symboles dans une sorte de tableau et devaient faire des échanges en changeant de colonnes, tandis que nous faisons plutôt des retenues lorsqu'on excède 9 dans une « colonne ». |

Activité 10 : Fiche : Retour sur les opérations dans votre système de numération

Les élèves ont rempli la feuille sans trop de questions pour moi. Je leur ai rappelé qu'il s'agissait d'un instrument de collecte de données pour ma thèse que « ça ne comptait pas » pour le bulletin et de répondre au meilleur de leurs connaissances et de leur compréhension des opérations dans leur système. Durée : 30 minutes

Toutes les réponses des élèves se trouvent dans les tableaux aux pages suivantes.

À la question : « Si une machine à voyager dans le temps permettait à un *comptable romain* (1) ou à un *scribe babylonien* (2) ou à un *savant sumérien* (3) ou à un *scribe égyptien* (4) et (5) ou à un *savant chinois* (6) de venir à notre époque et de découvrir notre système de numération, que dirait-il à son retour à ses semblables pour les convaincre d'adopter notre système? » voici ce que les élèves ont répondu.

| | | | | | | Julie |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. ROMAIN | *« C'est 100 fois beaucoup plus rapide que notre système et plus efficace et ils n'utilisent pas d'abaque encombrant. »* | « Parce que **nous** avons presque le même système (des planches à calculer), il y juste qu'ils prennent des jetons pour additionner, il faudra mettre les chiffres et changer les symboles. » | « Parce que **notre** système n'est pas compliqué, facile à faire, facile à retenir, original et c'est intéressant. » | « **Notre** système est moins compliqué parce qu'on n'a pas besoin de planche. » | « Parce que c'est beaucoup plus facile et nous, on n'a pas besoin de se compliquer la vie. » | Notre système (romain) permet seulement de noter des nombres. Cela peut être mélangeant puisque parfois on additionne et parfois on doit soustraire les symboles. Aussi, c'est long d'écrire certains nombres comme MMMCCCXXXIII. Dans le nouveau système, en base 10 comme le nôtre, ce nombre s'écrirait avec seulement 4 chiffres : 3 333. Aussi, pour faire des opérations, nous devons utiliser un abaque encombrant, tandis qu'avec ce nouveau système, on peut faire les opérations à la plume et en garder des traces. |
| 2. BABYLONIE | « C'est plus simple, plus rapide, plus efficace, on fait beaucoup moins de fautes. » | *« C'est plus facile. C'est moins long. Ils n'ont pas besoin de décomposer leur multiplicande. »* | *« La façon de diviser est moins difficile à comprendre. Il prend moins de temps à terminer l'équation. »* | « Leur abaque est comme **notre** planche à calculer. Ce serait plus vite à apprendre. **Notre** système garde toujours la même chose. Une fois que tu connais, c'est facile. » | *« Adoptons le système de 2007, car il est plus rapide et on n'aura pas besoin d'abaque. Aussi, quand on l'apprend, il est très facile, car on aurait juste à prendre une feuille et un crayon, puis le tour est joué! »* | En bas de 60, notre système est additif, donc long à graver. Pour écrire  dans le nouveau système, ça ne prendrait que deux symboles : 59. Notre base 60 est élevée, elle nous oblige à utiliser des tables de multiplication. Avec un système en base 10, on peut les mémoriser. La notation et les opérations sont beaucoup plus rapides, faciles et efficaces, plus besoin de tableau pour calculer. |
| 3. SUMÉRIEN | *« Écoutez-moi, j'ai trouvé une meilleure façon de calculer. Je vais vous montrer. »* | « Il va vite, c'est simple. Ça ressemble beaucoup au **vôtre**, alors c'est simple à comprendre. » | « Parce que c'est plus simple et moins long. Parce qu'on a des tables et il faut juste de la mémoire. » | « « C'est plus rapide, plus facile, gaspille moins d'encre ou de temps de gravure. » | | Un système positionnel comme celui que je veux vous faire adopter est beaucoup plus rapide pour noter les nombres : pas besoin d'additionner plusieurs fois le même symbole. Aussi, on n'a pas besoin d'un tableau (abaque) pour faire les opérations. Donc, c'est plus rapide, plus efficace et plus simple. Par contre, il est en base 10 plutôt que 60, mais il y a beaucoup plus d'avantages que cet inconvénient. |

| | | | | | | Julie |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 4. ÉGYPTIEN 1 | « Au lieu de marquer 100 000 avec des signes complexes, **nous** avons juste un 1 et 5 zéros plutôt qu'un signe complexe et nous avons juste à retenir 10 chiffres. » | « Que **notre** système est aussi en base 10 comme le leur. Que c'est plus facile d'écrire 9 que lllllllll. Que les divisions et les multiplications sont plus semblables à leurs additions et soustractions. » | « C'est beaucoup, mais vraiment plus facile, car ce n'est pas des dessins ou des signes qui sont durs à se rappeler. » | « C'est plus simple et ça prend moins de temps. On n'est pas obligé de faire des grilles et les personnes qui ne sont pas bons en dessin auront la vie facile. » | « Plus facile et que c'est plus rapide. Nous sommes en base 10 et c'est plus simple pour calculer comparativement à la base 60 comme les Sumériens si je me rappelle bien. Nous n'avons pas à faire une longue grille pour calculer. » | Le nouveau système est en base 10 comme le nôtre, donc il ne sera pas trop difficile à adopter. Comme il est positionnel, on n'aura plus besoin de graver plusieurs fois le même hiéroglyphe pour représenter un nombre, ce sera donc beaucoup plus rapide. Pour les multiplications et les divisions, on aurait plus besoin de faire de longs tableaux avec des duplications successives, l'autre méthode est beaucoup plus rapide, simple et efficace. |
| 5. ÉGYPT 2. | « Que **notre** système est plus facile ou presque (système à base 10 et très facile). C'est tout, car c'est presque pareil et facile. » | « Plus vite écrire nos chiffres, plus vite à calculer, moins de chance de faire des fautes. » | *« Allez! Vous allez apprendre de nouvelles choses ». En plus, vous allez faire des dessins! »* | « Parce que pour moi, c'est difficile. » | « **Notre** système est beaucoup plus rapide que le leur. On n'a pas de tableau à faire et les chiffres sont moins longs. » | |
| 6. CHIOIS | *« Savant : Ce système de numération est plus simple, car il n'a pas besoin de bouger et de manipulation. Paysan : oui et nos nombres? Savant : nous allons les changer pour les leurs, plus simples à faire… »* | *« Je trouve qu'il est plus simple : nous n'avons pas besoin de matériel pour calculer, c'est plus facile pour faire des échanges. »* | *« Il est bien plus rapide et il n'y a que neuf chiffres à retenir. Nous n'aurions plus besoin de traîner notre boulier. En plus, on pourrait bouger une boule quand on fait une opération avec le boulier, tandis qu'eux, on écrit. »* | *« C'est mieux, car nous, nous avons un boulier avec des billes stables, tandis qu'eux, ils ont des chiffres indo-arabes et eux, ils n'ont pas besoin de placer plein de billes. »* | « Parce que ça serait pareil et parce que c'est plus simple (juste pour les convaincre). Pour **nous**, ça ne prend pas tellement de temps. » | Comme notre système (chinois), ce nouveau système est en base 10 et possède un chiffre pour chaque unité. Il est plus rapide pour noter les nombres puisqu'on n'a pas besoin de préciser par quelle puissance de 10 on veut multiplier une unité, sa position va le préciser. Aussi, pour faire les opérations, pas besoin de traîner et de manipuler un boulier, tout peut se faire plus simplement sur du papier (papyrus). |

À la question : *En quoi le peuple que vous avez présenté à la classe a contribué à l'évolution des mathématiques?,* voici ce que les élèves ont répondu.

| | | | | | | Julie |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Sumérien | « En écrivant les premiers chiffres et en gravant dans l'argile. » | « Ils ont peut-être aidé à inventer les additions. » | « C'est eux qui ont inventé les chiffres. » | « Ils ont aidé les Babyloniens. » | | Les Sumériens ont créé le premier système de numération écrite. Ils pouvaient aussi effectuer les quatre opérations grâce à leur abaque mésopotamien. |
| Baby-lonien | « Vu qu'ils comptaient par 60, maintenant on compte l'heure par 60 (secondes, minutes). » | « La base 60 est restée dans les minutes, heures et secondes. Le genre de planche à calculer. » | « Il a peut-être aidé, mais je ne sais pas. » | « Leur système en base 60 a servi pour les heures (1 min. = 60 sec., 1 heure = 60 minutes). » | « L'heure, les jours de semaine. » | Ils ont créé le premier système positionnel de l'humanité et le zéro pour marquer le vide. Ils pouvaient aussi effectuer les quatre opérations grâce à leur abaque mésopotamien. Nos mesures de temps (les 60 secondes et 60 minutes) nous viennent des Babyloniens. |
| Égyptien (1) | « À rien. » | « Je crois que le million était un gros chiffre, alors ils ont inventé le « 𓁨 » (le million). » | « Je ne suis pas sûre, mais je crois que c'est le système à base 10. » | « Les barres a donné des chiffres indo-arabes. » | « ? » | C'est le premier système en base 10 de l'histoire, mais le fait qu'il était additif le rendait très limité. |
| Égyptien (2) | « Le système égyptien a aidé à apprendre un nouveau système, il a également aidé à mieux dessiner (les symboles des chiffres égyptiens sont des dessins pour nous. » | | « Qu'en leur apprenant plus, ils ont une plus grande variété de sortes de chiffres. En plus, quand ils iront en voyage, ils sauront écrire les chiffres. » | « Ils n'ont rien fait. » | « Ils n'ont rien foutu. » | Bis |
| Chinois | « X » | « Je n'en sais rien » | « / » | « X » | « ??????? ?????? » | Leur système hybride est plus rapide qu'un système additif (au lieu d'écrire 9 fois le même symbole, on écrit le symbole du 9 devant la puissance de 10. |
| Romain | « Les chiffres romains, on entend encore parler de ça et puis on utilise des fois encore ce système-là. » | « Avec les planches à calculer. » | « De faire connaître le système romain aux autres a contribué à faire connaître différentes façons de compter. » | « Ils ont fait des planches à calculer. » | « Avec ses bases 10 et 5 et au lieu d'écrire IIIII, ils écrivent V. » | Système très limité qui nous est resté pour noter les siècles, chapitres et parfois les heures sur une horloge. La base intermédiaire (5, V) permet de raccourcir les notations (le recours à la soustraction aussi, mais cela complique le système). |

Et à la dernière question du questionnaire : *Nomme deux avancées survenues dans l'évolution des mathématiques*, voici les réponses des élèves.

L'arrivée des nombres et la création du système indo-arabe.

La création du zéro et les additions et les soustractions.

La découverte des chiffres indo-arabes et le commerce.

Les divisions parce que nous on n'a pas pu les présenter parce que c'est trop difficile. La naissance des nombres.

La calculatrice, Sumérien.

Romain parce que c'est grâce à eux qu'on a les bonds de 10, la calculatrice, parce que très utilisée pour calculer des gros chiffres.

Les inventions des différents systèmes et l'invention du zéro.

Entailles sur les bâtons des bergers et les boules de verre (vitre).

Ils faisaient des entailles et l'invention des calculatrices.

Les chiffres indo-arabes et l'invention du zéro.

Les Indiens ont inventé le zéro et les chiffres indo-arabes.

L'invention des chiffres, l'invention de la calculatrice.

Entailles sur le bois, les chiffres, le papier.

Les boules d'argile et les grilles.

Les chiffres et les nombres.

La calculatrice.

L'invention des chiffres que nous connaissons maintenant, le changement de la planche à calculer.

Le zéro de l'indo-arabe et le système romain qui a contribué à la création de notre système.

Des entailles aux chiffres indo-arabes, il y a plus de rapidité. Les abaques à la planche à calculer.

Quand ils ont inventé les abaques, l'invention du zéro.

L'abandon du « après 3 c'est cheveux ». La base dix et que 5, 10, 15, 20, etc. ont un symbole unique.

La calculatrice, l'invention du zéro.

Les chiffres et les façons de multiplier, diviser, additionner et soustraire.

Le zéro, les calculs.

Quatre élèves n'ont rien répondu.

<u>Activité 11 : Ligne du temps et carte</u>

Sur la ligne du temps dessinée au tableau et qui allait de 5 000 ans avant Jésus-Christ jusqu'à maintenant, les élèves ont émis des hypothèses quant à la date d'apparition des différents systèmes. Ils se doutaient que les Sumériens avaient été les premiers à écrire, donc sûrement à représenter les nombres (grâce à leur projet sur l'écriture en 4$^e$ année). Ils savaient aussi que le système romain avait dû être inventé un peu avant Jésus-Christ (qu'est-ce qu'ils sont cultivés!). Ils étaient étonnés d'apprendre que les systèmes maya et indo-arabe avaient été inventés en même temps.

Pour la carte, tous les peuples ont été placés facilement, même les peuples sumérien et babylonien, car les élèves avaient feuilleté des livres sur ces peuples et savaient qu'ils se trouvaient dans l'Irak actuel.

Activité 12 : Ce que j'ai appris… retour sur la carte d'exploration

La carte d'exploration élaborée en début de projet et enrichie après les activités de mise en contexte a été complétée avec l'ensemble des connaissances acquises dans le module de recherche. Voici les ajouts (en vert).

Durée : 15 minutes

Bases (groupements, régularités)

- 10 : romain, égyptien, indo-arabe, chinois
- 60 : babylonien sumérien
- 20 : maya (calendrier)

Types de systèmes

- additif : sumérien romain (-) égyptien
- positionnel : babylonien indo-arabe maya
- hybride : chinois

Sortes de chiffres

- Chiffres grecs (1er?)
- Chiffres romains (- 100)
- Chiffres ont changé : oui
- Chiffres indo-arabes (300) (2e?) (invention du zéro)
- Chiffres égyptiens (-3000) (dessins)
- Chiffres mayas (-300)
- Chiffres sumériens (-3300) (1er?) : oui
- Chiffres chinois (- 1450) (idéogrammes)
- Chiffres babyloniens (-1800)

**Histoire des chiffres**

Manières de compter (techniques de calcul ont changé)

- Calculatrice (inventeur français)
- Traits (Noé) (Robinson Crusoé)
- Entailles bâton
- Bergère : prière
- Papous : parties du corps
- Chapelet
- Abaque
- Boules d'argile (calculi) comptable Mésopotamie
- Pictogrammes
- +, -, x, ÷ différents systèmes

Instruments pour calculer

- Calculatrice
- Abaque (à billes, à jetons)
- Bouliers russe, chinois, français (peut être plus rapide qu'une calculatrice)
- Parties du corps (Papous)
- Quipu (cordes)
- Chapelet
- Jetons, plaques, barres
- Super planche
- Compteur

Légende :

- 19 avril
- 20 avril
- 13 juin

Activité 13 : Discussion sur l'évolution des mathématiques

Étant donné la fin de l'année et la multitude d'activités spéciales dans notre école dynamique, cette activité n'a malheureusement pas été réalisée.

Activité 14 : Retour sur les questions des élèves et de l'enseignant

Nous avons repris l'ensemble des questions des élèves du début du projet (activité E) et j'invitais les élèves à répondre comment les différentes activités avaient permis de répondre à ces questions. Les élèves ont démontré une réelle compréhension des systèmes de numération, des besoins qui ont poussé les peuples à inventer et perfectionner leur système et l'évolution de la numération. Durée : 15 minutes.

Activité 15 : Retour sur l'ensemble des activités du projet

J'ai lu et détaillé chacune des questions du questionnaire. Pour la question 1, j'ai brièvement rappelé chacune des activités que nous avions faites. J'ai aussi dit aux élèves que je ne voulais pas qu'ils écrivent leurs réponses pour me faire plaisir, qu'ils écrivent la vérité. J'ai d'ailleurs offert le choix aux élèves d'écrire leur nom ou non sur la feuille pour les inciter à critiquer ouvertement les différentes activités. Durée : 20 minutes

*Résultats de la question 1* : *Donne une note d'appréciation personnelle pour chaque activité que nous avons réalisée dans le cadre de ce projet en histoire des mathématiques. Sois sincère, ne mets pas une note ou un commentaire pour me faire plaisir.*

| **Activités** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **A** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A. Ce que je sais… carte d'exploration | 1 | 11 | 13 | 3 | | |
| B. Compter sur son corps (les Papous) | 13 | 9 | 4 | 2 | | |
| C. Survol historique | 5 | 15 | 7 | 2 | 1 | |
| 1. Fonctionnement des différents systèmes de numération | 11 | 14 | 3 | | | |
| 2. Préparation et présentation des systèmes de numération | 10 | 11 | 6 | 1 | | |
| 3. Les six systèmes en travail personnel (TP) | 12 | 10 | 3 | 1 | 2 | |
| 4. Récapitulation | 0 | 11 | 12 | 3 | 1 | A |
| 6. Les + et les - dans votre système de numération | 10 | 15 | 2 | 1 | | |
| 7. Préparation et présentation des + et des - | 7 | 14 | 6 | 1 | | |
| 8. Les x et les ÷ dans votre système de numération | 7 | 15 | 3 | 3 | | |
| 9. Préparation et présentation des x et des ÷ | 4 | 14 | 6 | 4 | | |
| 10. Ligne du temps et carte du monde | 14 | 7 | 4 | 1 | | 2 |

**Légende :** 1 : Très intéressante; 2 : Intéressante; 3 : Plus ou moins intéressante; 4 : Peu intéressante; 5 : pas du tout intéressante.
A : absent au moment de l'activité.
Total des élèves : 28, un élève étant absent lors de ce retour.

2. *Qu'est-ce que tu as le plus apprécié dans ce projet et pourquoi?*
-« L'anecdote du corbeau, car on apprend beaucoup en peu de temps. »
-« L'anecdote du corbeau, car je trouve que cette anecdote a une bonne morale. »
-« Anecdote du corbeau, car c'était intéressant et cela m'a appris des nouvelles connaissances. »
-« L'activité sur les Papous, car nous en avons appris sur une autre époque et nous avons beaucoup ri. »
-« Compter sur son corps (les Papous) parce que je trouvais que c'était rigolo. »
-« J'ai bien aimé compter sur le corps parce que c'était très drôle et j'ai découvert une nouvelle façon de compter. »
-« Quand on essayait de comprendre notre système en équipe, parce que c'était le fun et qu'on était en équipe. »
-« Découvrir le système de numération des Babyloniens, car ça m'intriguait (surtout le mot : Babylonien). »
- « Quand on a appris les numéros mayas et égyptiens. »
- « J'ai bien aimé faire des feuilles de différents systèmes. Les multiplications aussi j'ai bien aimé parce que c'était amusant d'apprendre comment ils faisaient les multiplications. »
- « Ce que j'ai le plus aimé est les 6 systèmes (TP) parce que nous apprenions des choses du passé. »
- « Les devoirs, car c'était intéressant et facile et les Papous, car c'était drôle. »
- « Les six systèmes en TP parce que ça me rappelait les nombres des systèmes et c'était facile. »
- « Faire les six systèmes en TP, car ça m'a aidé à mieux comprendre et les présentations. J'adore apprendre de nouvelles cultures. »
- « Faire les systèmes en TP, car cela fait changement. »
-« Le travail personnel des six systèmes, car j'ai aimé trouver les chiffres. »
- « Apprendre les multiplications et les divisions. C'était très intéressant. »
- « Ce que j'ai aimé le plus c'est d'avoir préparé les présentations. »
- « J'ai adoré les présentations des +,-, x, ÷ parce que ça nous faisait apprendre d'autres chiffres.
- « Les présentations seulement les faire, car j'aime animer. »
- « Les présentations des multiplications, divisions, additions et soustractions, car on a appris plusieurs manières de multiplier, diviser, additionner et diviser. »
-J'ai beaucoup apprécié la ligne du temps, car cela nous a permis de savoir qui étaient les premiers à commencer l'écriture des chiffres. »
- « Moi j'ai beaucoup aimé la ligne du temps et la carte du monde parce que la ligne du temps nous a permis d'essayer de voir où les peuples sont apparus. »
- « Moi j'ai aimé la ligne du temps et carte du monde parce que j'ai pu savoir quand ont été inventés. »
- « La ligne du temps et la carte du monde parce qu'on a appris en quelle année ils ont existé et où ils ont existé. »
- « Ligne du temps et carte parce qu'à ce moment que je savais à quelle époque est venu les systèmes et »
- « La ligne du temps et la carte du monde parce qu'on pouvait apprendre en quelle année ça a commencé et où ils vivent. »
- « La carte du monde, car c'était une activité collective où tout le monde participait. »

*3 : Qu'est-ce que tu as le moins aimé dans ce projet et pourquoi ?*
- « Je n'ai pas aimé le *Ce que je sais* parce que c'était trop long. »
- « Le *Ce que je sais*, car on en fait toujours et vient ennuyant. Tu pourrais peut-être faire ça amusant comme pour les métiers. »
- « Carte d'expl car ça aurait pu être plus original. »
- « *Ce que je sais…* carte d'exploration, car c'était long et j'aimais mieux apprendre que dire ce que je sais. »
- « Faire le *Ce que je sais* parce que c'était trop long. »
- « Anecdote du corbeau parce que je n'ai pas aimé l'histoire. »

- « Je n’ai pas aimé le survol historique, car cela était long et on ne faisait rien. »
- « Le survol historique parce que je trouvais ça ennuyant. »
- « Compter sur son corps (les Papous), je n’ai pas aimé, car c’était ennuyant. »
- « Les six systèmes en équipe, car certaines personnes niaisaient. »
- « Les six systèmes à faire en TP, car la plupart savaient déjà ça. »
- « Le devoir parce que je n’avais pas eu beaucoup de temps pour le faire. »
- « Les six systèmes en TP, car en plus on avait de devoirs. »
- « La récapitulation. C’était trop long. »
- « La récapitulation, car c’était long. »
- « Pour moi, c’est la récapitulation parce que je ne comprenais pas vraiment et parce que je n’ai pas vraiment aimé. »
- « J’ai moins aimé faire la récapitulation, car je n’avais pas très bien compris et je ne trouvais pas ça très intéressant. »
- « Multiplication, car c’était long et difficile. »
- « Quand on faisait les divisions. »
- « La préparation des présentations, car c’était long et plate. »
- « Préparer les présentations parce que tout le monde niaisait. »
- « La préparation des multiplications et divisions, car il manquait 2 membres de notre équipe. »
- « Pendant les préparations de présentations, certaines personnes ne se préparaient pas et parlaient plutôt avec leurs amis. »
- « Quand nous préparions les affiches, car avec les filles, nous étions souvent les seules à travailler. »
- « Faire les ressemblances et les différences après les présentations des systèmes parce que ça ne m’intéresse vraiment pas. »
- « Quand on préparait ou qu’on présentait notre présentation sur les multiplications et les divisions, car je ne comprenais rien. » *
- « Faire et voir les présentations, car c’était long. »
- « J’ai moins aimé faire la présentation sur les multiplications parce que j’ai raté cette présentation. »

*4. Que retiens-tu de ce projet?*
Le fait que même en – 3 300, il y avait des gens qui comptaient.
Je retiens qu’il y a plusieurs façons que je ne savais pas de compter, d’additionner, etc., et c’est la découverte de ça qui m’a fasciné le plus.
Les Égyptiens, car j’ai travaillé sur eux.
Je retiens comment les anciens peuples faisaient pour compter.
Que les différents systèmes avaient leurs manières de compter.
Qu’il y a eu beaucoup de manières de compter avant la nôtre et j’ai appris ce qu’est une base.
Les chiffres mayas, chinois et babyloniens ainsi que les opérations en babylonien.
Le système babylonien et tous les autres.
J’ai appris comment fonctionnent les différents systèmes de numération et je pourrais les utiliser comme un code secret pour compter.
Ce que j’ai appris sur la manière de calculer des Chinois.
J’ai retenu les méthodes des pays qu’on a appris.
Avant l’indo-arabe, il y a eu plein d’autres systèmes.
Il y a des systèmes qui se ressemblent. Il y a eu beaucoup d’autres systèmes de numération avant le nôtre (en 2007), etc.
Les systèmes.
Les différentes sortes de compter. Aussi, quand on s’enflait la tête moi et mon équipe pour trouver comment le système fonctionnait.
Les manières de compter des autres systèmes.
Que les Sumériens étaient en base 60.
Additions et soustractions du système chinois et des Égyptiens.

J'ai appris d'autres manières d'additionner, de multiplier et de soustraire.
Les additions et soustractions.
Comment on multiplie en chinois. Je vais m'en souvenir parce que j'aime cela.
Comment écrire les numéros et additionner, multiplier, diviser.
Je retiens plus les additions et soustractions, car elles sont plus simples.
Comment me servir de l'abaque romain et un petit peu l'abaque chinois.
Les présentations, les défis, les lectures, etc.
Toutes les présentations, car même si je n'ai pas aimé les préparer, j'ai aimé les présenter et les regarder.
Que c'était moyennement intéressant.
Que les mathématiques ont aidé à bâtir un monde meilleur.

*5. Est-ce que ce projet a changé ta façon de percevoir les mathématiques? Comment?*
Oui, ça m'a prouvé que les maths ce n'est pas que des bilans.
Avant, je percevais les mathématiques comme des résolutions de problèmes, mais après avoir fait ce projet, je les vois comme quelque chose d'intéressant.
Oui, que ce n'est pas seulement nous qui avons un système.
De savoir comment les maths ont évolué me fait montrer comment les maths sont intelligentes.
J'aime plus ça, car les math sont ingénieuses et même dans la vieille époque.
Oui, j'ai aimé apprendre de nouvelles communautés.
Non, pas vraiment.
Oui, à cause de l'histoire, car je ne connaissais pas son histoire.
Maintenant, je remarque à quel point les mathématiques étaient importantes avant.
Avant, je pensais que tout le monde utilisait les mêmes chiffres.
Maintenant, à chaque fois que je fais des mathématiques, je pense à ce projet.
Oui, parce que pour moi, avant, les mathématiques étaient des additions, soustractions, divisions, multiplications.
Un peu, ex : j'ai plus compris la logique des calculs.
Oui, car sans eux, le monde ne serait pas précis.
Oui, avant, je me disais, les mathématiques, c'est 15 + 1 ex., mais non, j'ai vu qu'en différents peuples, ça change et leur base aussi.
Je vois que les mathématiques sont très anciennes.
Oui, car je me disais souvent que les gens comptaient toujours de la même manière, mais c'est plutôt le contraire.
Un peu oui. En sachant que cela a évolué m'a donné le goût de faire plus de maths.
Non.
Oui, car je connais vraiment plus de choses.
Ça m'intéresse plus, mais j'aurais aimé que ça m'aide dans mes bilans de maths.
Non, pas vraiment.
Oui, car maintenant j'essaye de trouver par moi-même des liens entre les peuples et les chiffres indo-arabes.
Oui, parce que je ne savais pas qu'il y avait beaucoup de systèmes, ça m'a fait un peu bizarre et j'ai aussi appris des nouveaux mots.
Oui, en voyant que ça a évolué et que c'était amusant.
Oui, car ça m'a fait découvrir toute l'évolution des mathématiques.
Oui, je me rends compte que c'est très important.
Oui, avant c'était pour moi une matière obligatoire à l'école, maintenant (surtout avec le système égyptien)  maintenant, c'est un outil qui a avoir un monde meilleur.

*6. Crois-tu que ce projet t'a aidé à mieux comprendre le fonctionnement de notre système* de numération actuel? Comment?
Non, car j'ai plus travaillé sur les Sumériens que notre propre système.

Oui, en voyant les différences entre tous ces systèmes, je vois notre système plus intéressant et fascinant.
Non, car ça m'a juste montré d'autres systèmes.
Non, car les systèmes de numération anciens sont très différents du nôtre.
Oui parce que pour les Babyloniens et les Sumériens sont (supposément) eux qui ont inventé le 60 secondes, 60 minutes.
Non (x 5).
Non, je ne crois pas.
Non, car je comprenais déjà assez.
Oui parce que j'ai appris comment le système indo-arabe a évolué.
Non, car je comprenais bien avant le projet.
Non parce que je comprenais déjà bien.
Oui, (comme au # 5) « Un peu, ex. j'ai plus compris la logique des calculs, etc. »
Non, car les autres systèmes sont différents.
Oui, maintenant je comprends pourquoi les chiffres sont comme ça aujourd'hui, surtout comment c'est venu.
Non parce qu'on travaillait sur d'autres systèmes de numération.
Oui, car j'ai remarqué c'est quoi une base et une base inférieure (sic).
Non, je sais et je comprends déjà bien mes mathématiques.
Non, car je sais les chiffres indo-arabes très faciles.
Oui parce qu'en voyant toutes les présentations, je vois d'une différente façon les maths.
Non, pas vraiment.
Oui, car maintenant, je comprends les systèmes en base 10, 20 et 60 et les types hybride, positionnel et additif.
Non parce qu'on travaillait sur plusieurs systèmes qui ne ressemblent pas à notre système.
Oui, pour la planche à calculer parce qu'eux aussi ont une planche.
Oui, car il y avait des choses que je ne connaissais pas comme les bases.

*7. Crois-tu que ce projet t'a aidé à mieux comprendre ou à mieux effectuer les quatre opérations? Comment?*
Non, car je n'ai pas vraiment travaillé le système indo-arabe.
Pas vraiment, mais au moins, j'ai pu découvrir d'autres systèmes il y a longtemps.
Non (x 6)
Non parce que c'est presque tout différent.
Oui, car pour faire les opérations et même les chiffres, il faut savoir bien ses tables.
Non, car je n'avais pas de difficultés.
Non, pas vraiment, car je les comprenais déjà.
Je ne sais pas trop pour être honnête.
Oui, je les comprends mieux parce qu'avant, il y avait des choses que je ne comprenais pas, mais maintenant, je les comprends.
Oui, (comme aux # 5 et 6) « Un peu, ex : j'ai plus compris la logique des calculs. »
Oui, car je l'ai mieux compris.
Non, pas vraiment.
Non parce qu'on travaillait sur un système différent que le nôtre.
Oui, car on a appris d'autres méthodes pour les effectuer.
Non, c'était déjà facile, pour moi, de comprendre les 4 opérations.
Plus ou moins, car je les savais bien, mais je les ai compris un peu mieux.
Oui, un peu parce qu'il y a des systèmes qui ressemblent à celui de nos jours.
Oui parce qu'avant, je ne le connaissais pas.
Non, car je les comprenais déjà bien.
Non, comme j'ai dit à la question 6, je n'ai pas plus compris notre système parce qu'on travaillait plus sur des systèmes qui ne ressemblent pas au nôtre.
Non, car il y en a qui sont trop compliqués à comprendre.

Non, car je les maîtrisais déjà assez bien.
Oui, avant je ne comprenais pas comment on arrivait à la réponse.

*8. Qu'est-ce que tu changerais à ce projet pour qu'il soit encore plus intéressant pour les élèves des prochaines années?*
Travailler plus en avant-midi, car l'après-midi, c'est plus dur.
De le laisser comme ça parce que j'ai trouvé la plupart des choses intéressantes.
Il est assez intéressant, sauf un peu long.
J'écouterais des films ou des documentaires parlant de ce sujet.
Les présentations, les modifier parce que ce n'est pas si original que ça une affiche.
Modifier la récapitulation en une activité.
Enlever les ressemblances et différences après chaque présentation.
De changer la façon de faire le *Ce que je sais*.
Laisser plus de temps pour préparer les présentations comme ça, ça pourrait ne pas toujours être juste des affiches.
Il est déjà fort intéressant et je ne voudrais pas qu'il change.
Faire des jeux ou des concours.
…
Faire le *Ce que je sais* d'une autre manière.
Je changerais le *Ce que je sais* pour plus original.
De moins faire de rédaction, surtout vers la fin de l'année.
Modifier les Papous.
Rien, je le trouve parfait comme ça!
Que la légende du corbeau devienne mimique (quelqu'un vient en avant et le fait).
Moi, pour que ce soit plus intéressant, je supprimerais le survol historique.
De ne pas mettre les TP de chiffres.
Moi, je n'ai pas aimé la récapitulation, mais ça c'est nécessaire, alors.
Rien.
Le *Ce que je sais* et le *Ce que j'ai appris*, plutôt le faire en équipe puis en groupe.
L'anecdote du corbeau ne nous apprenait pas grand-chose, mais la ligne du temps, c'est une bonne idée.
Il y ait plus de TP pour les chiffres, les additions et soustractions et divisions et multiplications.
Le *Ce que je sais*, car ce n'était pas très original et c'était un peu long.
Faire moins de travail écrit, ex : modifier présentations.
Je mettrais plus d'activités à l'ordinateur.

*9. Qu'est-ce que tu changerais pour qu'il permette de faire encore plus d'apprentissages?*
Travailler à l'extérieur quand il fait beau.
De continuer les mêmes activités.
Aller sur des sites internet.
Faire une sortie au musée des maths.
Vide (x 8)
Rien du tout.
…
Pas grand-chose, modifier les présentations.
Faire plus de petites équipes, comme ça il y aurait plus de systèmes travaillés et présentés et appris.
Là, je ne sais pas.
Tout est parfait.
Rien (x 3)
Tu fasses des expériences sur l'anecdote.
De moins faire toujours des SVA à chaque étape du projet, mais quand même en faire, mais moins long.
Parler des trucs « Les maths c'est magique » (mathémagie).

De rajouter d'autres sortes de chiffres.
Aller au musée.
Il n'y a rien à ajouter parce que déjà le projet était complet.

*10. As-tu d'autres commentaires ou suggestions à me faire?*
Ce projet était très amusant.
Pas vraiment.
Non. (x 6)
Vide (x 11)
C'était intéressant, même si on avait un autre projet en même temps.
J'ai beaucoup aimé le projet.
C'était fabuleux! J'ai appris plein de choses. Chapeau!
Le projet était « cool »!
Oui! Tu as été originale dans tes activités et un gros merci!
C'est un projet très intéressant!
Bravo pour ce beau projet, continue Julie.
J'ai aimé ce projet et j'espère que vous, vous avez aimé!
J'ai beaucoup aimé faire ce projet, car nous en avons beaucoup appris sur l'histoire des mathématiques.