

Université de Montréal

**L'éclatement en géométrie algébrique, différentielle
et symplectique**

par

Esteban Herrera-Cordero

Département de mathématiques et statistique

Faculté des études supérieures

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures

en vue de l'obtention du grade de

Maître ès sciences (M.Sc.)

en mathématiques

Avril 2011

©, Esteban Herrera-Cordero, 2011

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé :

**L'éclatement en géométrie algébrique, différentielle
et symplectique**

présenté par :

Esteban Herrera-Cordero

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Octavian Cornea

(président-rapporteur)

François Lalonde

(directeur de recherche)

Abraham Broer

(membre du jury)

Résumé

L'éclatement est une transformation jouant un rôle important en géométrie, car il permet de résoudre des singularités, de relier des variétés birationnellement équivalentes, et de construire des variétés possédant des propriétés inédites. Ce mémoire présente d'abord l'éclatement tel que développé en géométrie algébrique classique. Nous l'étudierons pour le cas des variétés affines et (quasi-)projectives, en un point, et le long d'un idéal et d'une sous-variété. Nous poursuivrons en étudiant l'extension de cette construction à la catégorie différentiable, sur les corps réels et complexes, en un point et le long d'une sous-variété. Nous concluons cette section en explorant un exemple de résolution de singularité. Ensuite nous passerons à la catégorie symplectique, où nous ferons la même chose que pour le cas différentiable complexe, en portant une attention particulière à la forme symplectique définie sur la variété. Nous terminerons en étudiant un théorème dû à François Lalonde, où l'éclatement joue un rôle clé dans la démonstration. Ce théorème affirme que toute 4-variété fibrée par des 2-sphères sur une surface de Riemann, et différente de $S^2 \times S^2$, peut être équipée d'une 2-forme qui lui confère une structure symplectique réglée par des courbes holomorphes par rapport à sa structure presque complexe, et telle que l'aire symplectique de la base est inférieure à la capacité de la variété. La preuve repose sur l'utilisation de l'éclatement symplectique. En effet, en éclatant symplectiquement une boule contenue dans la 4-variété, il est possible d'obtenir une fibration contenant deux sphères d'auto-intersection -1 distinctes : la pré-image du point où est fait l'éclatement complexe usuel, et la transformation propre de la fibre. Ces dernières sont dites exceptionnelles, et donc il est possible de procéder à l'inverse de l'éclatement - la contraction - sur chacune d'elles. En l'accomplissant sur la deuxième, nous obtenons une variété minimale, et en combinant les informations sur les aires symplectiques de ses classes d'homologies et de celles de la variété originale nous obtenons le résultat.

Mots Clés : Géométrie algébrique classique, éclatement réel, éclatement complexe, éclatement symplectique, éclatement le long d'une sous-variété.

Abstract

The blow-up is a transformation which plays an important role in geometry, because it can be used to resolve singularities, relate birationally equivalent varieties, and construct varieties with new properties. This thesis first presents blowing-up as developed in classical algebraic geometry. We will study it in the case of affine and (quasi-)projective varieties, on a point and along an ideal and a subvariety. Then a discussion about its extension to the differential category will be carried out, over the real and complex fields, on a point and along a submanifold. An example of a resolution of singularity will then follow. Subsequently we will discuss blowing-up in the symplectic category, where we will do the same as for complex manifolds, paying careful attention to the symplectic form. To conclude, we will study a theorem by François Lalonde, where the symplectic blow-up plays a major part in proof. This theorem states that any 4-variety fibered by 2-spheres over a Riemann surface, and different than $S^2 \times S^2$, can be equipped with a 2-form giving it a symplectic structure ruled by curves that are holomorphic with respect to its almost-complex structure, and such that the symplectic area of the base is smaller than the capacity of the variety. In the proof, we blow up a ball in the 4-variety, and obtain a fibration containing two distinct spheres with a self-intersection equal to -1 : the pre-image of the point where the usual complex blow-up is done, and the proper transform of the fiber. These two are exceptional, so it is possible to do the inverse operation - the blow down - on each of them. By blowing down the latter, we get a minimal variety, and by combining information about the symplectic area of its homology classes and of those of the original variety, we obtain the result.

Keywords : Classical algebraic geometry, real blow up, complex blow up, symplectic blow up, blow up along a submanifold.

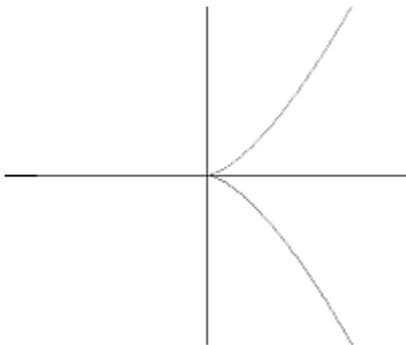
Table des matières

Résumé	iii
Mots Clés	iii
Abstract	iv
Keywords	iv
Introduction	7
1 L'éclatement en géométrie algébrique classique et en géométrie différentielle	9
1.1 Rappels	9
1.2 Éclatement	10
1.2.1 Éclatement d'un point dans \mathbb{A}^n	10
1.2.2 Éclatement le long d'un idéal dans \mathbb{A}^n	12
1.2.3 Éclatement dans l'espace projectif.	13
1.2.4 Caractérisation des morphismes birationnels	16
1.3 Éclatement réel et complexe	17
1.3.1 Éclatement orienté réel	17
1.3.2 Éclatement orienté réel le long d'une sous-variété	19
1.3.3 Éclatement réel projectif	20
1.3.4 Éclatement d'une variété complexe	21
1.3.5 Éclatement complexe et somme connexe	22
1.3.6 La fibration linéaire tautologique	23
1.4 Désingularisation d'une courbe dans une surface	23
2 L'éclatement en géométrie symplectique	26
2.1 Éclatement symplectique en un point	26
2.2 Éclatement le long d'une sous-variété symplectique de codimension ≥ 4	32
2.3 Formulation en terme d'action hamiltonienne	35

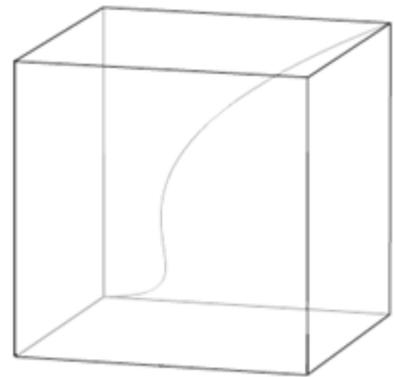
	vi
2.3.1 Éclatement symplectique d'une variété en un point	36
2.3.2 Éclatement symplectique le long d'une sous-variété symplectique	37
2.3.3 Éclatement symplectique le long d'une sous-variété lagrangienne	38
2.4 Application	39
Conclusion	41
Bibliographie	42

Introduction

L'éclatement est l'outil principal permettant de résoudre les singularités d'une variété algébrique. C'est à dire qu'il est possible dans certains cas, en éclatant une variété un nombre fini de fois, d'en obtenir une qui soit birationnellement équivalente et libre de singularités.



(a)



(b)

FIGURE 1 – (a) Courbe dans le plan \mathbb{A}^2 avec singularité à l'origine. (b) Éclatement de la courbe précédente à l'origine, dans un ouvert dense de $\mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$.

La preuve que toute singularité est résoluble dans le cas d'une courbe est connue depuis plusieurs siècles. Les mathématiciens Oscar Zariski et Shreeram Shankar Abhyankar avaient réussi vers le milieu du 20e siècle à donner la preuve pour le cas des surfaces et 3-variétés définies sur des corps de caractéristique arbitraire. C'est dans les années 1960 que Heisuke Hironaka, en se basant sur l'éclatement, élaborait une preuve pour les variétés algébriques de dimensions plus élevées, sur des corps de caractéristique nulle, ce qui lui valut la médaille Fields en 1970. Le cas des caractéristiques positives pour les variétés de haute dimension est un problème ouvert.

Une variété lisse est dite symplectique si elle peut être équipée d'une 2-forme fermée et non-dégénérée. Dans une fibration cotangente, cela est équivalent à imposer que la trajectoire d'une particule respecte les lois de la mécanique classique. Comme une forme symplectique existe dans

bien d'autres variétés, cette branche des mathématiques est une généralisation de la dynamique classique, et dépasse le cadre de la physique, pour permettre de faire avancer les connaissances en géométrie moderne.

Dans cette catégorie, il est nécessaire d'adapter la notion d'éclatement afin que la variété qui en résulte possède une forme symplectique qui soit bien définie et la plus naturelle possible. En effet, considérons l'espace complexe \mathbb{C}^n et l'espace projectif $\mathbb{C}P^{n-1}$ avec leurs formes symplectiques standards respectives ω_0 et τ_0 . L'éclatement $\tilde{\mathbb{C}}^n$ de \mathbb{C}^n à l'origine est un sous-ensemble de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}P^{n-1}$, donc nous avons les projections naturelles :

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{\mathbb{C}}^n & \\ \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 \\ \mathbb{C}^n & & \mathbb{C}P^{n-1} \end{array}$$

Nous avons que la 2-forme $\pi_1^*\omega_0$ est symplectique sur le complément de la pré-image de l'origine, et π_1 est une bijection dans ce domaine. En revanche, elles ne possèdent pas ces propriétés sur $\pi_1^{-1}(0)$. Ce dernier est isomorphe à $\mathbb{C}P^{n-1}$ par la projection π_2 , donc peut être équipé de la même forme τ_0 . L'éclatement ne peut pas être simplement $(\tilde{\mathbb{C}}^n \setminus \pi_1^{-1}(0), \pi_1^*\omega_0) \sqcup (\mathbb{C}P^{n-1}, \tau_0)$ car cette structure symplectique n'est pas continue.

Il est intéressant de noter que l'éclatement symplectique, lorsque bien défini, résulte en une diminution du volume de la variété, et correspond à l'extraction de l'intérieur d'une boule et à la réduction de sa frontière par l'application de Hopf. Ceci implique que ce n'est pas un point qui est remplacé par l'espace projectif, mais un voisinage du point. Cela constitue à première vue une divergence par rapport à l'idée de résolution de singularité, et jusqu'à récemment il n'y avait pas de définition ou de méthode standard relatives à une "singularité symplectique" (cf. Conclusion), par conséquent cette construction a été appliquée principalement pour découvrir de nouvelles variétés.

Chapitre 1

L'éclatement en géométrie algébrique classique et en géométrie différentielle

1.1 Rappels

Soit K un corps algébriquement fermé, \mathbb{A}^n l'ensemble de tous les n -tuples (a_1, \dots, a_n) d'éléments de K , $\mathbb{V}(\{F_i\}_{i \in I}) = \{x \in \mathbb{A}^n \mid F_i(x) = 0, \forall i \in I\}$. La fermeture d'un ensemble U sera notée \bar{U} .

Définition 1.1. Un *espace projectif* sur K , noté \mathbb{P}^n , est l'ensemble des classes d'équivalence des $(n+1)$ -tuples d'éléments pas tous nuls de K , où $(a_0, \dots, a_n) \sim (b_0, \dots, b_n)$ ssi il existe $\lambda \in K$, tel que $(b_0, \dots, b_n) = (\lambda a_0, \dots, \lambda a_n)$.

La classe d'équivalence de (a_0, \dots, a_n) est représentée par $[a_0 : \dots : a_n]$ dans le système de *coordonnées homogènes*, et les classes sont les points de \mathbb{P}^n .

Les ouverts $U_i = \{[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n \mid x_i \neq 0\}$ recouvrent \mathbb{P}^n . Ils sont associés à une *carte affine* car ils sont isomorphes à \mathbb{A}^n .

Définition 1.2. Une *variété projective* dans \mathbb{P}^n est l'ensemble des zéros communs d'un ensemble arbitraire de polynômes homogènes à $n + 1$ variables.

Les ensembles fermés de la topologie de Zariski sur \mathbb{P}^n sont par définition les variétés projectives.

Définition 1.3. Une *variété quasi-projective* est un sous-ensemble localement fermé de \mathbb{P}^n , considéré avec la topologie de Zariski induite par \mathbb{P}^n .

L'ensemble de ces dernières inclut les variétés affines et projectives.

Soient $L = \{(ta_1, \dots, ta_n) \mid t \in K\}$ une droite dans \mathbb{A}^n passant par $p = (0, \dots, 0)$, $X \subset \mathbb{A}^n$ une variété affine donnée par le système $F_1 = \dots = F_r = 0$. L'ensemble $X \cap L$ est donné par les équations $F_i(ta_1, \dots, ta_n) = 0$, pour $i = 1, 2, \dots, r$. Les points d'intersection sont donc les racines communes, et comme nous avons affaire à des polynômes en une seule variable, ces racines sont celles de leur pgcd, qui sera de la forme $c\Pi(t - a_i)^{k_i}$.

Définition 1.4. La *multiplicité* de $X \cap L$ à l'origine est l'exposant de la plus grande puissance de t qui divise tous les polynômes $F_i(ta_1, \dots, ta_n) = 0$.

La multiplicité est indépendante du choix des générateurs correspondants à la variété.

Définition 1.5. Soit $X \subset \mathbb{P}^n$ une variété quasi-projective. Une fonction $\phi : X \rightarrow K$ est dite *régulière au point* $x \in X$ s'il existe un voisinage $U \subset X$ de x , et des éléments homogènes f et $g \in K[x_0, \dots, x_n]$ tels que $\deg(f) = \deg(g)$, $g(y) \neq 0$, $\forall y \in U$, et $\phi|_U = f/g$. Si ϕ est *régulière* pour tout point de X , alors elle est dite *régulière sur* X .

Définition 1.6. Soit X une variété quasi-projective, et $x \in X$. L'*anneau local* de x sur X , noté \mathcal{O}_x , est l'ensemble des paires (U, ϕ) , où U est un ouvert de X contenant x , et ϕ est régulière sur U , avec la relation d'équivalence $(U, \phi) \sim (U', \phi')$ si $\phi = \phi'$ sur $U \cap U'$.

L'ensemble des éléments de \mathcal{O}_x qui s'annulent en x est un idéal maximal noté \mathfrak{m}_x .

Définition 1.7. Une variété quasi-projective X est *non-singulière* en $x \in X$ si \mathcal{O}_x est noethérien avec corps résiduel $c = \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x$, et $\dim_c \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 = \dim \mathcal{O}_x$, où le premier terme est la dimension de $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ comme espace vectoriel sur c , et le second est la dimension de Krull de l'anneau local en x . Sinon X est *singulier* en x . La variété est *non-singulière* si tous ses points sont non-singuliers.

Proposition 1.8. Si \mathcal{O}_x remplit les conditions de la définition précédente, alors $\dim_c \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \geq \dim \mathcal{O}_x$, $\forall x \in X$ [Hart].

1.2 Éclatement

1.2.1 Éclatement d'un point dans \mathbb{A}^n

Soit $\tilde{\mathbb{A}}^n := \{(x, l) \in \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1} \mid x \in l\} \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$. L'éclatement de \mathbb{A}^n en 0 est par définition $\tilde{\mathbb{A}}^n$ avec la projection naturelle sur \mathbb{A}^n ,

$$\begin{aligned} \pi : \tilde{\mathbb{A}}^n &\longrightarrow \mathbb{A}^n, \\ (x, l) &\longmapsto x. \end{aligned}$$

Propriété 1.9. $\tilde{\mathbb{A}}^n$ est une variété quasi-projective.

Démonstration. Premièrement montrons que $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ est une variété projective. L'image de $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ par le plongement de Segre $\Sigma \longrightarrow \mathbb{P}^{(m+1)(n+1)-1}$ est donnée par $\Sigma([x_0 : \dots : x_m], [y_0 : \dots : y_n]) = [z_{00} : z_{01} : \dots : z_{mn}]$, où $z_{ij} = x_i y_j$. On constate que chaque colonne de la matrice (z_{ij}) est une multiple de chaque autre, ce qui entraîne que cette matrice est de rang 1. Donc l'image de Σ est contenue dans l'ensemble défini par l'annulation du déterminant des sous-matrices 2×2 . Soit une variété projective dans $\mathbb{P}^{(m+1)(n+1)-1}$ définie par $\mathbb{V}(\{z_{ij}z_{kl} - z_{il}z_{kj} \mid 0 \leq i, k \leq m \text{ et } 0 \leq j, l \leq n\})$. Ceci revient à dire que la matrice (z_{ij}) est de rang 1 - car elle n'est pas nulle - et donc qu'elle est le produit d'une matrice $(m+1) \times 1$ avec une matrice $1 \times (n+1)$, toutes deux non nulles. Ainsi, $(z_{ij}) \subset \text{Im } \Sigma$. Par conséquent $\Sigma(\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n)$ est une variété projective que nous notons $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$.

En identifiant \mathbb{A}^n à $\{[1 : x_1 : \dots : x_n] \mid x_1, \dots, x_n \in K\} \subset \mathbb{P}^n$ nous obtenons que l'image de $\mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ par Σ est définie par $(\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n) \setminus \mathbb{V}(z_{00}, z_{01}, \dots, z_{0(n-1)})$. Donc $\mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ est une variété quasi-projective.

Un point $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{A}^n$ est contenu dans la droite $l = [y_1 : \dots : y_n] \in \mathbb{P}^{n-1}$ ssi $x_i y_j - x_j y_i = 0, \forall i$ et j . Donc les points $(x_1, \dots, x_n; y_1 : \dots : y_n)$ de $\mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ satisfont ces équations et $\tilde{\mathbb{A}}^n = \mathbb{V}(x_i y_j - x_j y_i \mid 1 \leq i, j \leq n)$. L'énoncé suit [SKKT]. \square

Propriété 1.10. π est un morphisme projectif birationnel et $\tilde{\mathbb{A}}^n \setminus \pi^{-1}(0)$ est isomorphe à $\mathbb{A}^n \setminus \{0\}$.

Démonstration. Nous avons que $\mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1} = \{[x_0 y_0 : x_0 y_1 : \dots : x_0 y_r : \dots : x_n y_{(n-1)}] \mid z_{ij}z_{kl} - z_{il}z_{kj} = 0, \forall i, j\}$, où $z_{ij} = x_i y_j$ et $x_0 = 1$, tel que vu ci-dessus. Soit $\pi' : \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{A}^n$ tel que dans l'ouvert $U_i = \{[y_0 : y_1 : \dots : x_n y_{(n-1)}] \mid y_i \neq 0\}$, $\pi'([y_0 : y_1 : \dots : x_n y_{(n-1)}]) = [y_i : x_1 y_i : \dots : x_n y_i] = [1 : x_1 : \dots : x_n]$. L'application π' est clairement un morphisme de variétés quasi-projectives, et étant sa restriction à $\tilde{\mathbb{A}}^n$, π est un morphisme projectif.

Soit $P = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{A}^n$ tel que $x_i \neq 0$ pour une certaine valeur de i . Si $P \times [y_1 : \dots : y_n] \in \pi^{-1}(P)$, alors $y_j = (x_j/x_i)y_i, \forall j$, et par conséquent $[y_1 : \dots : y_n]$ est uniquement déterminé comme point de $\mathbb{P}^{(n-1)}$. Ainsi $\pi^{-1}(P)$ consiste en un seul point. De plus, l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^n \setminus \{0\} &\longrightarrow \tilde{\mathbb{A}}^n, \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto (x_1, \dots, x_n; x_1 : \dots : x_n), \end{aligned}$$

définit un morphisme inverse à π , donc cette dernière est également birationnelle [Hart]. \square

Propriété 1.11. $\pi^{-1}(0)$ est isomorphe à \mathbb{P}^{n-1} .

Démonstration. $\pi^{-1}(0) = \{\{0\} \times [y_1 : \dots : y_n] \mid [y_1 : \dots : y_n] \in \mathbb{P}^{n-1}\}$. \square

$\pi^{-1}(0)$ est appelé *diviseur exceptionnel*, noté E .

Propriété 1.12. $\tilde{\mathbb{A}}^n$ est irréductible.

Preuve. Soit l une droite dans \mathbb{A}^n passant par l'origine, représentée paramétriquement par $\{(a_1t, \dots, a_nt) \mid t \in K, \exists i \text{ t.q. } a_i \neq 0\}$ et soit $l' = \pi^{-1}(l \setminus \{0\})$, représentée par $\{((a_1t, \dots, a_nt); [a_1 : \dots : a_n]) \mid t \in K \setminus \{0\}\}$. La fermeture de cette dernière, \bar{l}' , croise $\pi^{-1}(0)$ au seul point $((0, \dots, 0); [a_1 : \dots : a_n])$. Comme chaque point de $\pi^{-1}(0)$ est contenu dans un $\bar{l}' \subset \tilde{\mathbb{A}}^n$, $\tilde{\mathbb{A}}^n \setminus \{\pi^{-1}(0)\}$ est dense et irréductible [Hart]. \square

Définition 1.13. Soit $X \subset \mathbb{A}^n$ une variété algébrique affine et $p \in X$. L'éclatement de X en p est l'ensemble $\tilde{X} = \overline{\pi^{-1}(X \setminus \{p\})} \subset \tilde{\mathbb{A}}^n$ obtenu en éclatant p dans \mathbb{A}^n , avec la projection naturelle π restreinte à \tilde{X} .

La projection π restreinte à $\tilde{X} \setminus \pi^{-1}(p)$ est un isomorphisme, car sa restriction à $\tilde{\mathbb{A}}^n \setminus \pi^{-1}(p)$ en est un.

Exemple 1.14. Considérons l'éclatement de la courbe cubique $V = \mathbb{V}(x_1^2 - x_0^2(x_0 + 1)) \subset \mathbb{A}^2$ en 0. La projection π est définie par

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{A}}^2 &= \{(x, l) \in \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1 \mid x \in l\} \longrightarrow \mathbb{A}^2, \\ &(x, l) \longmapsto x. \end{aligned}$$

Soit $\mathbb{P}^1 = \{[y_0 : y_1] \mid y_0, y_1 \in K, y_0 \text{ ou } y_1 \neq 0\}$. L'éclatement de \mathbb{A}^2 en 0 est l'ensemble $\mathbb{V}(xu - ty) \subset \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$. L'espace \mathbb{P}^1 est recouvert par deux ouverts affines, $\mathbb{P}^1 = U_0 \cup U_1$. L'éclatement est aussi recouvert par deux ouverts tels que $\tilde{\mathbb{A}}^2 \subset \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1 \cong (\mathbb{A}^2 \times U_0) \cup (\mathbb{A}^2 \times U_1)$. Examinons l'ensemble $\mathbb{A}^2 \times U_0$ en posant $y_0 = 1$. Nous avons que $\pi^{-1}(V) \cap (\mathbb{A}^2 \times U_0) = \mathbb{V}(x_1^2 - x_0^2(x_0 + 1), x_1 - x_0y_1) = \mathbb{V}(x_0^2(y_1^2 - x - 1), x_1 - x_0y_1)$. Nous obtenons donc deux composantes irréductibles : la courbe $\{(0, 0) \times [1 : y_1] \mid y_1 \in K\} \subset E$, et $\mathbb{V}(y_1 - x_0 - 1, x_1 - x_0y_1) = \tilde{V}$. Ce dernier croise E aux points $y_1 = \pm 1$ [Hart].

1.2.2 Éclatement le long d'un idéal dans \mathbb{A}^n

Définition 1.15. Soient $F_1, \dots, F_r \in \mathbb{K}[X]$, où X est une variété algébrique affine, et soit I l'idéal qu'ils génèrent, que nous présumons propre et non-nul. L'éclatement de X le long de I est le graphe $B = \overline{\{(x, F(x)) \mid x \in U\}} \subset X \times \mathbb{P}^{r-1}$ de l'application rationnelle

$$\begin{aligned} F : X &\dashrightarrow \mathbb{P}^{r-1}, \\ x &\longmapsto [F_1(x) : \dots : F_r(x)], \end{aligned}$$

où U est un sous-ensemble ouvert et dense de X , avec la projection naturelle $\pi : X \times \mathbb{P}^{r-1} \longrightarrow X$ restreinte à B . On dénote cet éclatement par $B_I(X)$.

Soit $Y = \mathbb{V}(F_1, \dots, F_r)$. La projection π restreinte à $B_I(X) \setminus \pi^{-1}(Y)$ est un morphisme de variétés quasi-projectives dont l'inverse est

$$\begin{aligned} X \setminus Y &\longrightarrow B_I(X), \\ x &\longmapsto (x, [F_1(x) : \dots : F_r(x)]), \end{aligned}$$

qui est bien défini car les fonctions F_i ne s'annulent pas simultanément sur un quelconque point de $X \setminus Y$. Comme ce dernier et $B_I(X) \setminus \pi^{-1}(Y)$ sont des ouverts denses nous obtenons que $B_I(X)$ et X sont birationnellement équivalents.

Cette construction ne dépend que de I et non des générateurs de celui-ci.

Définition 1.16. Soit Y une sous-variété de la variété algébrique affine X . L'éclatement de X le long de la sous-variété Y est l'éclatement le long de l'idéal radical $\mathbb{I}(Y) = \{f \in K[x_0, \dots, x_{n-1}] \mid f(x) = 0, \forall x \in Y\}$, que nous dénotons $B_Y(X)$.

Si une sous-variété Z intersecte Y , nous appelons l'ensemble $\overline{\pi^{-1}(Z \setminus Y)}$ la *transformation propre* de Z , et l'ensemble $\pi^{-1}(Z)$ la *transformation totale* de Z .

1.2.3 Éclatement dans l'espace projectif.

Soient x_0, \dots, x_n et y_1, \dots, y_n les coordonnées homogènes de \mathbb{P}^n et \mathbb{P}^{n-1} respectivement, et écrivons $([x_0 : \dots : x_n]; [y_1 : \dots : y_n])$ pour désigner un point (x, y) de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$. Soit $\tilde{\mathbb{P}}^n = \mathbb{V}(\{x_i y_j - x_j y_i\}_{i,j=1,\dots,n}) \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ et $\chi = [1 : 0 : \dots : 0] \in \mathbb{P}^n$.

Définition 1.17. L'éclatement de \mathbb{P}^n centrée en χ est l'ensemble $\tilde{\mathbb{P}}^n$ avec la projection ρ définie comme la restriction de la projection naturelle $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{P}^n$ à $\tilde{\mathbb{P}}^n$.

Propriété 1.18. $\tilde{\mathbb{P}}^n$ est une variété quasi-projective.

Démonstration. Si nous considérons $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ comme étant l'image de l'application de Segre dans $\mathbb{P}^{(n+1)n-1}$, $\tilde{\mathbb{P}}^n = \mathbb{V}(\{x_i y_j - x_j y_i \mid i, j = 1, \dots, n\})$, qui est fermé, la conclusion suit. \square

Propriété 1.19. ρ est un morphisme projectif birationnel.

Démonstration. Soit l'ouvert $U_{ij} = \{(x, y) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n-1} \mid z_{ij} \neq 0\}$, $z_{ij} = x_i y_j$. Nous avons que $\rho((x, y)) = [z_{0j} : z_{1j} : \dots : z_{nj}] = x$. Donc ρ est un morphisme de variétés quasi-projectives. Si $x \neq \chi$, l'application ρ^{-1} définie par

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^n \setminus \chi &\longrightarrow \tilde{\mathbb{P}}^n, \\ [x_0 : \dots : x_n] &\longmapsto ([x_0 : \dots : x_n]; [x_1 : \dots : x_n]), \end{aligned}$$

est le morphisme inverse de ρ . Si $x = \chi$, alors $x_i y_j = x_j y_i$ est satisfait par tous les points de $\chi \times \mathbb{P}^{n-1}$. Par conséquent $\rho^{-1}(\chi) = \chi \times \mathbb{P}^{n-1} \subset \tilde{\mathbb{P}}^n$, qui est fermé, tout comme $\chi \subset \mathbb{P}^n$. Les ensembles $\tilde{\mathbb{P}}^n \setminus (\chi \times \mathbb{P}^{n-1})$ et $\mathbb{P}^n \setminus \chi$ sont donc denses et l'énoncé suit [Sha]. \square

Propriété 1.20. $\rho^{-1}(\chi)$ est isomorphe à \mathbb{P}^{n-1} .

Propriété 1.21. $\tilde{\mathbb{P}}^n$ est irréductible.

Démonstration. Nous avons que $\tilde{\mathbb{P}}^n = (\chi \times \mathbb{P}^{n-1}) \cup (\tilde{\mathbb{P}}^n \setminus (\chi \times \mathbb{P}^{n-1}))$, et $\tilde{\mathbb{P}}^n \setminus (\chi \times \mathbb{P}^{n-1}) \cong \mathbb{P}^n \setminus \chi$. Ce dernier est irréductible, ainsi $\overline{\tilde{\mathbb{P}}^n \setminus (\chi \times \mathbb{P}^{n-1})}$ l'est également.

Soit $L = \{[1 : t\alpha_1 : \dots : t\alpha_n] \mid t \in K, \alpha_i \neq 0\} \subset \mathbb{P}^n$ une droite passant par χ . Si $x \in L \setminus \chi$, alors $\rho^{-1}(x) = ([1 : t\alpha_1 : \dots : t\alpha_n]; [\alpha_1 : \dots : \alpha_i : \dots : \alpha_n])$, où $\alpha_i \neq 0$. Nous définissons $\rho^{-1}(L) \cap (\chi \times \mathbb{P}^{n-1})$ comme la limite obtenue en faisant tendre x vers χ le long de L . En choisissant différentes droites L nous obtenons tous les points de $\chi \times \mathbb{P}^{n-1}$. Nous avons que $\rho^{-1}(L) \cap (\chi \times \mathbb{P}^{n-1}) \subset \rho^{-1}(L) \subset \overline{\tilde{\mathbb{P}}^n \setminus (\chi \times \mathbb{P}^{n-1})}$. Comme tous les points de $\chi \times \mathbb{P}^{n-1}$ s'obtiennent par un choix de L , alors $\chi \times \mathbb{P}^{n-1} \subset \overline{\tilde{\mathbb{P}}^n \setminus (\chi \times \mathbb{P}^{n-1})}$ [Sha]. \square

Soient X une variété quasi-projective, $\chi \in X$ un point non-singulier et $u_i : X \rightarrow K, i = 1, \dots, n$, des fonctions régulières telles que (1) $u_i(x) = 0 \Leftrightarrow x = \chi, \forall i$, et (2) $\{u_i\}$ soit un système de paramètres local de X en χ .

Définition 1.22. Soit $Y \subset X \times \mathbb{P}^{n-1}$ une sous-variété dont les points $(x; [t_1 : \dots : t_n])$, où $x \in X$ et $[t_1 : \dots : t_n] \in \mathbb{P}^{n-1}$, satisfont $u_i(x)t_j = u_j(x)t_i, i, j = 1, \dots, n$. L'éclatement local centré en χ est la fonction régulière $\phi : Y \rightarrow X$ définie comme la restriction de la projection naturelle $X \times \mathbb{P}^{n-1} \rightarrow X$.

Propriété 1.23. ϕ est régulière et définit un isomorphisme $Y \setminus (\chi \times \mathbb{P}^{n-1}) \cong X \setminus \chi$.

Propriété 1.24. $\forall y \in \phi^{-1}(X \setminus \chi)$, Y est non-singulière.

Démonstration. Pour un point $y \in \phi^{-1}(X \setminus \chi)$ les équations définissant Y sont de la forme $u_j = u_i s_j$, où $s_j = t_j/t_i, t_i \neq 0, j = 1, \dots, n$ et $i \neq j$. L'idéal maximal de y est alors $\mathfrak{m}_y = (u_1 - u_1(y), \dots, u_n - u_n(y), s_1 - s_1(y), \dots, s_n - s_n(y)) = (s_1 - s_1(y), \dots, u_i - u_i(y), \dots, s_n - s_n(y))$.

Donc $\dim \mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2 \leq n$. L'énoncé suit du fait que $\dim \phi^{-1}(X \setminus \chi) = n$ et de la proposition 1.8 [Sha]. \square

Proposition 1.25. Lorsque X est une variété projective et Y est une variété quasi-projective, la projection $X \times Y \rightarrow Y$ est une application fermée.

Propriété 1.26. Y est irréductible.

Démonstration. Supposons que Y est réductible en $\chi \times \mathbb{P}^{n-1} \cup \phi^{-1}(X \setminus \chi)$. Les deux composants s'intersectent car dans le cas contraire $\phi^{-1}(X \setminus \chi)$ serait fermé dans $X \times \mathbb{P}^{n-1}$, ce qui entrainerait par la proposition précédente que son image $X \setminus \chi$ le serait dans X . Or un point non-singulier d'une variété doit être contenu dans un seul composant. Par conséquent Y est irréductible [Sha]. \square

Le théorème suivant affirme ce que [Sha] appelle "l'indépendance de l'éclatement local par rapport au choix de système de paramètres locaux".

Théorème 1.27. *Soient $\phi' : Y' \rightarrow X$ l'éclatement local défini avec les coordonnées locales v_1, \dots, v_n , et $\phi : Y \rightarrow X$ celui défini avec u_1, \dots, u_n , tels que ϕ et ϕ' respectent les conditions (1) et (2). Alors il existe un isomorphisme $\varphi : Y \rightarrow Y'$ tel que $\phi = \phi' \circ \varphi$.*

Démonstration. Soient y'_1, \dots, y'_n les coordonnées homogènes dans \mathbb{P}^{n-1} de $Y' \subset X \times \mathbb{P}^{n-1}$. Soient les applications $\varphi : Y \setminus \phi^{-1}(\chi) \rightarrow Y'$, $(x; [y_1 : \dots : y_n]) \mapsto (x; [v_1(x) : \dots : v_n(x)])$, et $\psi : Y' \setminus \phi'^{-1}(\chi) \rightarrow Y$, $(x; [y'_1 : \dots : y'_n]) \mapsto (x; [u_1(x) : \dots : u_n(x)])$. De (1) nous avons que ces applications sont régulières sur ces domaines. En outre, ψ et φ , sont mutuellement inverses là où elles sont toutes deux définies. En effet, $\psi(\varphi(x; [y_1 : \dots : y_n])) = \psi(x; v(x)) = (x; u(x)) = (x; [u_i(x)s_1(x) : \dots : u_i(x)s_n(x)]) = (x; [s_1(x) : \dots : 1 : \dots : s_n(x)]) = (x; [y_1 : \dots : y_n])$.

Soient $y_i \neq 0$ définissant un ensemble ouvert $U_i \subset Y$, et $s_j = y_j/y_i$. Nous avons que l'idéal maximal $\mathfrak{m}_\chi = (u_1 - u_1(\chi), \dots, u_n - u_n(\chi)) = (u_1, \dots, u_n)$ et $v_k(\chi) = 0$, ce qui entraîne que $v_k = \sum_{j=1}^n \beta_{kj} u_j$, où $\beta_{kj} \in \mathcal{O}_\chi$. Nous voulons exprimer v_k en terme d'éléments de l'anneau local \mathcal{O}_z , où $z \in \phi^{-1}(\chi)$. Dans U_i nous avons que $u_j = u_i s_j$, et par conséquent $v_k = u_i \sum_{j=1}^n \phi^*(\beta_{kj}) s_j = u_i h_k$, avec $h_k = \sum_{j=1}^n \phi^*(\beta_{kj}) s_j$ et $\phi^*(\beta_{kj}) \in \mathcal{O}_z$. De la même manière nous avons que $u_k = v_i h'_k$, où $h'_k \in \mathcal{O}_z$, et nous définissons U'_i par $y'_i \neq 0$. Soient les applications $\varphi^{(i)} : Y \cap U_i \rightarrow Y'$, $(x; [y_1 : \dots : y_n]) \mapsto (x; [h_1 : \dots : h_n])$, et $\psi^{(i)} : Y' \cap U'_i \rightarrow Y$, $(x; [y'_1 : \dots : y'_n]) \mapsto (x; [h'_1 : \dots : h'_n])$. Ces applications coïncident respectivement avec φ et ψ là où leurs domaines s'intersectent.

Supposons que $h_k(z) = 0, \forall k$. Comme $s_i = 1$, ceci impliquerait que $\det(\beta_{kj}) = 0$. Or les v_k sont linéairement indépendants dans $\mathfrak{m}_\chi/\mathfrak{m}_\chi^2$ car ils forment un système local de coordonnées. Donc nous obtenons une fonction φ' régulière pour tout point de Y . De la même manière, une fonction ψ' existe qui est régulière pour tout point de Y' et est l'inverse de φ' [Sha]. \square

Avant de définir l'éclatement pour une variété quasi-projective $X \subset \mathbb{P}^n$, il est nécessaire d'examiner quelques propriétés de $\rho^{-1}(X)$, où ρ est la projection vue au 1.17.

Théorème 1.28. *Soit $X \subset \mathbb{P}^n$ une variété quasi-projective irréductible dont la fermeture n'est pas \mathbb{P}^n , et qui n'est pas singulière en χ , et soit ρ l'éclatement de \mathbb{P}^n centré en χ . Alors $\rho^{-1}(X)$ est réductible en deux composants, $\chi \times \mathbb{P}^{n-1}$ et $Q = \overline{\rho^{-1}(X \setminus \chi)}$. De plus, pour un certain voisinage V*

de $x \in X$, $\rho|_{Q \cap \rho^{-1}(V)}$ est un isomorphisme si $x \neq \chi$, et est un éclatement local si $x = \chi$. Enfin, $\rho|_Y$ est régulière.

Démonstration. De la propriété 1.19 nous avons que $\rho^{-1}(X \setminus \chi) \simeq X \setminus \chi$. Ce dernier étant irréductible, Q l'est aussi. De plus, $x \in X \setminus \chi \Rightarrow \rho^{-1}(x) \in Q$, et $\rho^{-1}(\chi) = \chi \times \mathbb{P}^{n-1}$, donc $\rho^{-1}(X) = \chi \times \mathbb{P}^{n-1} \cup Q$. Dans un voisinage de χ compris dans \mathbb{P}^n nous pouvons choisir un système de paramètres locaux $\{w_i\}_{i=1}^n$ où X est définie localement par $w_{m+1} = \dots = w_n = 0$ et tel que $\{w_i\}_{i=1}^m$ soit un système de paramètres locaux de X en χ . Nous pouvons alors choisir un voisinage de χ où $\{w_i\}_{i=1}^n$ satisfait les conditions (1) et (2) mentionnées après le 1.21, de sorte que nous n'avons plus qu'à s'occuper du cas où $w_i = 0, i = m + 1, \dots, n$ définit X .

Soient t_1, \dots, t_n les coordonnées homogènes de \mathbb{P}^{n-1} . L'ensemble Q étant l'éclatement local de X , nous avons que $w_i t_j = w_j t_i$. Par conséquent, $t_i = 0, i = m + 1, \dots, n$. Donc $Q \subset Q' := \mathbb{V}(\{w_i t_j - u_j t_i \mid i, j = 1, \dots, m\}, t_{m+1}, \dots, t_n) \subset X \times \mathbb{P}^{n-1}$. Soit $\mathbb{P}^{m-1} := \mathbb{V}(t_{m+1}, \dots, t_n) \subset \mathbb{P}^{n-1}$. Nous avons alors que $Q' := \mathbb{V}(\{w_i t_j - u_j t_i \mid i, j = 1, \dots, m\}) \subset X \times \mathbb{P}^{m-1}$, ce qui en fait un éclatement local en χ , et donc $Q = Q'$ [Sha]. \square

Définition 1.29. Soit X une variété quasi-projective dans \mathbb{P}^n , χ un point non-singulier de X et $Q = \overline{\rho^{-1}(X \setminus \chi)}$. Alors l'éclatement de X en χ est l'ensemble Q avec la projection $\rho : Q \rightarrow X$.

Comme pour les variétés affines, il est possible d'éclater une variété quasi-projective le long d'un idéal, la différence étant que celui-ci est généré par des polynômes homogènes.

Lorsque nous avons un éclatement $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$, qui transforme une courbe exceptionnelle E en un point, X est appelée une *contraction* de \tilde{X} en E . Ce terme s'applique aussi à la transformation de \tilde{X} en X par π .

1.2.4 Caractérisation des morphismes birationnels

Nous verrons dans cette section que tout morphisme birationnel $f : X \rightarrow Y$, où X et Y sont des surfaces projectives non-singulières, est la composition d'un nombre fini d'éclatement et de son inverse. De plus, nous répondrons à la question quant à savoir si une courbe dans une telle surface est exceptionnelle.

Théorème 1.30. Soient X et Y des surfaces projectives non-singulières et soit $\psi : X \rightarrow Y$ un morphisme birationnel. Alors ψ est la composition d'éclatements et de contractions [Hart].

Théorème 1.31. Soit E la courbe exceptionnelle issue de l'éclatement d'une surface. Alors E est isomorphe à \mathbb{P}^1 , et l'auto-intersection de E sur est égale à -1 .

Démonstration. Nous nous contenterons de montrer que $E.E = -1$ dans le cas où \tilde{X} est une variété complexe de dimension 2. Pour la preuve complète voir [Hart].

Nous avons les trivialisations biholomorphiques $\alpha_i : \rho^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{C}$. Soit $s_i : U_i \rightarrow U_i \times \mathbb{C}$, avec $s_0([z_0 : z_1]) = ([z_0 : z_1], 1)$ et $s_1([z_0 : z_1]) = ([z_0 : z_1], z_1/z_0)$, une section méromorphe de la fibration $\rho : \tilde{C}^2 \rightarrow \mathbb{P}^1$. Elle possède un pôle en $[0 : 1]$ et n'a pas de zéro.

Soit $Z \subset N$ la section nulle, où N est le fibré normal. Par le théorème des voisinages tubulaires, il existe un voisinage de Z dans N et un voisinage de E dans \tilde{C}^2 biholomorphiquement isomorphes. Donc nous avons $E.E = Z.Z$. Ce nombre peut être calculé en intersectant Z avec une section continue Z' qui est homotope à Z .

En choisissant un système de coordonnées approprié proche de $[0 : 1]$ nous obtenons que $N = \{(w_1, w_2) \mid |w_1| < 1\}$ et $s([w_1 : 1]) = ([w_1 : 1], 1/w_1)$, où s est la section décrite ci-haut. Nous avons que pour $|w_1| = \epsilon$, $s([w_1 : 1]) = ([w_1 : 1], \bar{w}_1/\epsilon^2)$, où $0 < \epsilon < 1$. Soit la section s' , avec $s'([w_1 : 1]) := s([w_1 : 1])$ si $|w_1| > \epsilon$, et $s'([w_1 : 1]) := ([w_1 : 1], \bar{w}_1/\epsilon^2)$ si $|w_1| \leq \epsilon$. Nous avons que s' est homologue à la section nulle et intersecte Z uniquement en $s'([0 : 1]) = ([0 : 1], 0)$, transversalement. En prenant l'orientation de Z en $(0,0)$ comme étant $\{e_1 = (1, 0), e_2 = (i, 0)\}$, celle de Z' est alors $\{e_1 = (1, 1), e_2 = (i, -i)\}$. Comme $\{(e_1 = (1, 0), e_2 = (i, 0), e_3 = (1, 1), e_4 = (i, -i))\}$ a une orientation négative, alors $Z.Z' = -1$, et par conséquent $E.E = -1$ [FG]. \square

Le théorème suivant affirme que la réciproque est aussi vrai.

Théorème 1.32 (Castelnuovo). *Soit $E \cong \mathbb{P}^1$ une courbe sur une surface \tilde{X} telle que $E.E = -1$. Alors il existe une surface X , un morphisme $\phi : \tilde{X} \rightarrow X$, et un point $p \in X$, tel que \tilde{X} soit isomorphe par ϕ à l'éclatement de X centré en p , et E soit la courbe exceptionnelle.*

Démonstration. Voir [Hart, p.414]. \square

1.3 Éclatement réel et complexe

1.3.1 Éclatement orienté réel

Il existe différentes constructions correspondants à l'éclatement d'une variété différentiable réelle, dont l'*éclatement orienté*, et l'*éclatement projectif*. Ces dernières sont analogues, et chacune possède certains avantages sur l'autre. Nous examinerons en détail la première et parlerons brièvement de la seconde. L'article [EMM] décrit l'*éclatement parabolique*, mais nous ne nous y attarderons pas.

Définition 1.33. L'éclatement orienté de l'origine dans \mathbb{R}^n est l'ensemble $\tilde{\mathbb{R}}^n = [0, \infty) \times S^{n-1}$, avec la contraction $\pi : \tilde{\mathbb{R}}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(r; (x_1, \dots, x_n)) \mapsto (rx_1, \dots, rx_n)$, où x_1, \dots, x_n sont des coordonnées dans \mathbb{R}^n telles que $\sum x_i^2 = 1$.

La projection π est un difféomorphisme de $\tilde{\mathbb{R}}^n \setminus (\{0\} \times S^{n-1})$ vers $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, et $\pi^{-1}(0) \cong S^{n-1}$. Le lemme suivant montre que l'éclatement d'un espace vectoriel possède une structure C^∞ bien définie.

Lemme 1.34. L'action de $GL(n)$ sur \mathbb{R}^n se soulève en une action C^∞ sur $\tilde{\mathbb{R}}^n$.

Démonstration. Soit $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g \in GL(n)$. Le soulèvement \tilde{g} correspond à l'application qui se soumet à l'égalité $\pi \circ \tilde{g} = g \circ \pi$. Cette application est $\tilde{g}(r; x) = (\|g.x\|r; (g.x)/\|g.x\|)$, où $r \in [0, \infty)$ et $x \in S^{n-1}$. Comme $x \neq 0$ et $g \in GL(n)$, alors $\|g.x\|$ dépend de manière lisse de x , et $\|g.x\|r$ est lisse $\forall r \geq 0$. Par conséquent, \tilde{g} est lisse sur $[0, \infty) \times S^{n-1}$. Enfin, \tilde{g} dépend de manière lisse des coefficients de g [RM1]. \square

Pour que l'éclatement d'une variété différentiable en un point soit bien définie, il est nécessaire que cette transformation soit invariante sous un changement de coordonnées. Nous devons d'abord examiner le lien entre les champs vectoriels d'un espace et ceux de son éclatement.

Définition 1.35. Soient M et N des variétés différentiables contenant respectivement un champ vectoriel V et W , et $f : M \rightarrow N$ une application lisse. Si $f_*(V_x) = W_{f(x)}$, $\forall x \in M$, alors V et W sont dits *f-reliés*.

Lemme 1.36. Pour tout champ vectoriel lisse dans \mathbb{R}^n qui s'annule en 0, il existe un unique champ vectoriel lisse dans $\tilde{\mathbb{R}}^n$ qui lui est f-relié.

Démonstration. Voir [RM2] \square

Nous pouvons désormais étudier l'invariance de l'éclatement sous un changement de coordonnées.

Lemme 1.37. Soient $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ des voisinages ouverts de 0, et $f : U_1 \rightarrow U_2$ un difféomorphisme tel que $f(0) = 0$. Alors il existe un difféomorphisme $\tilde{f} : \tilde{U}_1 \rightarrow \tilde{U}_2$, tel que $f \circ \pi = \tilde{f} \circ \pi$, où $\tilde{U}_j = \{(r, x) \in [0, \infty) \times S^{n-1} \mid rx \in U_j\}$.

Démonstration. Dans le cas où $f \in O(n)$, alors, $\tilde{f}(r, x) = (r, f(x))$. Si nécessaire nous pouvons remplacer f par Of , où $O \in O(n)$ afin que $f_*(0) \in GL(n, \mathbb{R})$ préserve l'orientation, où $f_* : T_x U_1 \rightarrow T_{f(x)} U_2$. $f_*(0)$ est par conséquent connecté à l'identité par une courbe lisse F_t , $t \in [0, 1]$, où $F_0 = Id$ et $F_1 = f_*(0)$. Le champ vectoriel V_t défini par $\frac{d}{dt} F_t^* h = F_t^*(V_t h)$, où $h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $F_t^* h(x) = h(F_t(x))$ et $V_t h = \sum z_i(t) \partial_{z_i} h$, est une courbe lisse de champs vectoriels linéaires. Nous pouvons par conséquent

soulever F_t vers \tilde{F}_t , ces derniers étant définis par $\frac{d}{dt}\tilde{F}_t^*h = \tilde{F}_t^*(W_t h)$. Il ne reste donc que le cas où $f_*(0) = Id$, avec $f(0) = 0$. Maintenant, au besoin dans un voisinage plus petit, c'est f qui est connecté à l'identité par une famille de difféomorphismes qui fixe 0, et dont la différentielle est l'identité. Nous avons donc le champ vectoriel W_t défini par $\frac{d}{dt}f_t^*h = f_t^*(W_t h)$, où $W_t|_0 = 0$. Ce champ vectoriel se soulève vers V_t qui nous donne par une équation similaire une famille \tilde{f}_t , avec $\tilde{f}_1 = \tilde{f}$. En dehors de $(0, x)$, \tilde{F} est unique et est défini par $\tilde{F}(r, x) = (\|f(rx)\|, f(rx)/\|f(rx)\|)$ [RM1]. \square

Définition 1.38. Soit M une variété différentiable réelle. L'éclatement \tilde{M} de M en p est $(M \setminus \{p\}) \cup (T_p M \setminus \{0\})/\mathbb{R}_+$, où le second terme représente l'espace des demi-droites dans $T_p M$, avec la projection $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$.

En terme de coordonnées locales dans un voisinage de p , nous obtenons un voisinage de 0 dans $\tilde{\mathbb{R}}^n$. [RM2]

1.3.2 Éclatement orienté réel le long d'une sous-variété

Soit M une variété différentiable réelle et $N \subset M$ une sous-variété. Cette dernière peut être vue comme la section nulle de la fibration normale $\nu \rightarrow N$, où $\nu := T_N M / TN$. Nous pouvons donc éclater N en chacun de ses points, dans leur fibre respective. Le lemme suivant généralise ceci pour n'importe quelle fibration vectorielle, en plus d'affirmer que les fibres résultantes s'épouseront de manière lisse.

Lemme 1.39. Soient $E \rightarrow B$ une fibration vectorielle et Z sa section nulle. Alors l'éclatement $B_Z(E) = (E \setminus Z) \cup \mathbb{S}E$, de E en Z , où le deuxième terme est la fibration de sphères $(E \setminus Z)/\mathbb{R}_+$, est une variété à bord, et la contraction $\pi : B_Z(E) \rightarrow E$ est lisse et est la contraction usuelle lorsque restreinte à la fibre correspondant à chaque point de B . En outre, un changement de trivialisations sur E correspond à un changement de trivialisations sur l'éclatement.

Démonstration. Soit une trivialisations de E sur un ouvert $U \subset B$ difféomorphe à $U \times \mathbb{R}^n$. L'éclatement sera donc localement difféomorphe à $(U \times \mathbb{R}^n) \setminus Z \cup ((U \times \mathbb{R}^n) \setminus Z)/\mathbb{R}_+ = (U \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})) \cup (U \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})/\mathbb{R}_+) \cong U \times ((\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cup S^{n-1}) \cong U \times \tilde{\mathbb{R}}^n$. En outre, par le lemme 1.37, si nous avons deux trivialisations (U_α, ϕ_α) et (V_β, ψ_β) , l'isomorphisme $\phi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se soulève en un isomorphisme $(\phi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1})'(x) : \tilde{\mathbb{R}}^n \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}^n$, où $x \in B$. La continuité de $\phi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}$ entraîne celle de $(\phi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1})'$ [RM1]. \square

Par un argument similaire, un isomorphisme entre espaces fibrés se soulève en un difféomorphisme entre leurs éclatements. De plus, comme le montre le lemme suivant, l'éclatement de la fibration possède une structure C^∞ .

Lemme 1.40. *Soient $E \rightarrow B$ une fibration vectorielle, U_1 et U_2 des voisinages ouverts de la section nulle Z , et $f : U_1 \rightarrow U_2$ un difféomorphisme dont la restriction à Z est l'identité. Alors f se soulève en un difféomorphisme entre des voisinages de $\pi^{-1}(Z)$.*

Démonstration. Un difféomorphisme $M \rightarrow M$ se soulève vers un difféomorphisme $E \rightarrow E$ qui est l'identité sur les fibres, et ces applications se soulèvent vers l'éclatement, donc nous pouvons considérer que F est l'identité sur Z . Par conséquent, $F_*|_Z$ est l'identité sur les vecteurs tangents à Z . Par une projection nous avons donc un automorphisme de fibration de E . Ce morphisme se soulève aussi et donc nous pouvons considérer qu'il est l'identité. Nous pouvons alors considérer un recouvrement de M par des ouverts U_i où existent des champs vectoriels locaux $\alpha_j \partial / \partial x_j$, que l'on dénotera V_{ij} , et qui s'annulent en Z . En passant par une partition de l'unité nous obtenons un champ vectoriel global. Par un argument similaire au lemme 1.37, nous obtenons une famille lisse de difféomorphismes f_t qui connectent f à l'identité, qui préservent Z , et dont la différentielle sur Z est l'identité sur les vecteurs tangents à Z . Le champ vectoriel V_{ij} se soulève vers W_{ij} qui est lisse sur l'éclatement. En l'intégrant nous obtenons le soulèvement de F [RM1]. \square

Par le théorème des voisinages tubulaires, il existe un difféomorphisme $\phi : V \rightarrow U$, où V est un voisinage fermé de la section nulle Z de ν_N , et U en est un de N . Soient $\eta : B_Z(\nu_N) \rightarrow \nu_N$ la contraction de l'éclatement de la fibration normale, et $\tilde{V} := \eta^{-1}(V)$.

Définition 1.41. *L'éclatement orienté $B_N(M)$ de la variété M le long de la sous-variété N est l'ensemble $\overline{(M \setminus U)} \cup_{\partial \tilde{V}} \tilde{V}$, avec la contraction $\pi : B_N(M) \rightarrow M$, et $\partial \tilde{V} \sim \phi \circ \eta(\partial \tilde{V}) = \partial U$.*

Propriété 1.42. *π est une application propre.*

Propriété 1.43. *π est un difféomorphisme sur $M \setminus N$.*

Propriété 1.44. *$\pi^{-1}(N)$ est isomorphe à la S^{n-1} -fibration $\mathbb{S}(\nu_N) = (\nu_N \setminus Z) / \mathbb{R}_+$.*

1.3.3 Éclatement réel projectif

Il est possible également de formuler l'éclatement de \mathbb{R}^n au moyen de l'espace projectif $\mathbb{R}P^{n-1} \cong S^{n-1} / (x \sim -x)$.

Définition 1.45. *L'éclatement projectif de l'origine dans \mathbb{R}^n est la fermeture $\tilde{\mathbb{R}}_P^n$ du plongement $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \hookrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}P^{n-1}$, $x \mapsto (x; [x])$, avec la projection naturelle $\pi_P : \tilde{\mathbb{R}}_P^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.*

Comme pour l'éclatement réel orienté, un difféomorphisme lisse entre des voisinages de \mathbb{R}^n se relève en un difféomorphisme lisse entre l'éclatement de ces voisinages, et donc l'éclatement projectif

d'une variété différentiable réelle est bien défini. L'éclatement d'une fibration $E \rightarrow B$ le long de la section nulle Z correspond à $(E \setminus Z) \cup \mathbb{P}(E)$, où $\mathbb{P}(E)$ est la *projectivisation* de E , i.e. la section nulle est remplacée par la fibration $\mathbb{R}P^{n-1} \hookrightarrow E \rightarrow B$. L'éclatement le long d'une sous-variété est défini de manière similaire, et possède des propriétés analogues. Pour plus de détails voir [AK].

Il n'y a plus de bord à gauche de $r = 0$. Par contre, $\mathbb{R}P^{n-1}$ n'est orientable que si n est pair, et certaines applications définies sur cet éclatement ne seront pas lisses au travers du diviseur exceptionnel [RM1].

1.3.4 Éclatement d'une variété complexe

Définition 1.46. L'éclatement de \mathbb{C}^n en 0 est l'ensemble $\tilde{\mathbb{C}}^n = \{(z_1, \dots, z_n; [w_1 : \dots : w_n]) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}P^{n-1} \mid z_i w_j = w_i z_j, i, j = 1, \dots, n\}$, avec la projection naturelle $\pi : \tilde{\mathbb{C}}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$.

Soit $z_1 \neq 0$ et $U_1 = \tilde{\mathbb{C}}^n \setminus \{z_1 = 0\}$. Nous pouvons alors exprimer U_1 comme $\{(z_0, \dots, z_n; [1 : (z_1/z_0) : \dots : (z_n/z_0)])\} = \{x_1, y_2, \dots, y_n\}$. Comme nous pouvons recouvrir $\tilde{\mathbb{C}}^n$ par n ouverts semblables, cela en fait une variété de dimension n .

Le lemme suivant montre que l'éclatement de \mathbb{C}^n est invariant sous un changement de coordonnées, ce qui implique que l'éclatement d'une variété différentiable complexe est bien définie.

Lemme 1.47. *Tout biholomorphisme $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ qui préserve l'origine se soulève en un biholomorphisme $\tilde{f} : \tilde{\mathbb{C}}^n \rightarrow \tilde{\mathbb{C}}^n$.*

Démonstration. Le soulèvement est donné par l'application

$$\tilde{f}(z; [w]) = \begin{cases} (f(z); [f(z)]) & \text{sur } \tilde{\mathbb{C}}^n \setminus (0 \times \mathbb{C}P^{n-1}), \\ (0; [w]) & \text{sur } 0 \times \mathbb{C}P^{n-1}. \end{cases}$$

[S] □

Soit M une variété complexe, et soit x_1, \dots, x_n un système de coordonnées holomorphes dans un voisinage U du point $p \in M$, tel que $x(p) = 0$, et $x(U) = V$. Notons $\tilde{V} \subset V \times \mathbb{C}P^{n-1}$ l'éclatement de V en 0, tel que vu précédemment, avec coordonnées $((x_1, \dots, x_n); [y_1 : \dots : y_n])$. Considérons l'ouvert U_j dans $\mathbb{C}P^{n-1}$ défini par $y_j \neq 0$. Par conséquent, $w = (x; [y]) \in \tilde{V} \cap (V \times U_j)$ si et seulement si les $n-1$ équations indépendantes $x_i = (y_i/y_j)x_j, i \neq j$ sont satisfaites. Il suit que \tilde{V} est une sous-variété de codimension $n-1$ dans la variété $V \times \mathbb{C}P^{n-1}$ de dimension $2n-1$. Comme vu précédemment, $E = \tilde{V} \cap (0 \times \mathbb{C}P^{n-1}) \cong \mathbb{C}P^{n-1}$ et $\tilde{V} \setminus E \cong V \setminus \{0\}$, et donc $\tilde{V} \setminus E \cong U \setminus \{p\}$. Ce biholomorphisme nous permet de greffer \tilde{V} à $M \setminus \{p\}$, et d'obtenir la variété complexe \tilde{M} de dimension n , avec la

projection holomorphe $\tilde{M} \rightarrow M$ [B].

L'éclatement d'une variété différentiable complexe le long d'une sous-variété est définie au 2.12, en tenant du fait compte que la structure hermitienne est induite par un choix de métrique riemannienne sur M , et que la fibration normale est holomorphe, et donc possède une structure complexe.

1.3.5 Éclatement complexe et somme connexe

La somme connexe de variétés M_1 et M_2 de même dimension, notée $M_1 \# M_2$, est obtenue en découpant une boule dans chaque variété et en attachant leurs bords par une application lisse possédant une extension qui est un difféomorphisme entre des voisinages du bord de chaque boule, et qui préserve l'orientation.

Plus précisément, soient M_1 et M_2 des variétés différentiables de dimension n , B une boule de rayon unité dans \mathbb{R}^n , plongées respectivement dans M et N , et le difféomorphisme suivant :

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

$$x \mapsto (\epsilon^2/\|x\|^2)Ax^T,$$

où $A \in O(n)$ est de déterminant -1 , et $\epsilon > 0$. Nous avons que f renverse l'orientation.

Soient $\phi_i : B \rightarrow M_i$ des plongements préservant l'orientation, avec $\phi_2(x) = \phi_1(f(x))$, si $\|x\| \in (\frac{\epsilon}{R}, R\epsilon)$, $R > 1$. La somme connexe de M_1 et M_2 est par définition $(M_1 \setminus B_1) \cup_f (M_2 \setminus B_2)$. Cette construction est unique à difféomorphisme près [MS].

Proposition 1.48. $M \# \overline{\mathbb{C}P}^n$, où $\overline{\mathbb{C}P}^n$ est $\mathbb{C}P^n$ avec l'orientation opposée à celle standard, est difféomorphe à l'éclatement de M en p .

Démonstration. Soient $z = (x_1, \dots, x_n)$ des coordonnées holomorphes dans un voisinage U de $p \in M$, avec $x(p) = 0 \in U' \subset \mathbb{C}^n$, l'éclatement $\tilde{U}' \subset U' \times \mathbb{C}P^{n-1}$ de U' en p , avec coordonnées $((x_1, \dots, x_n); [y_1 : \dots : y_n])$, et $\tilde{U}'_\epsilon := \{p \in \tilde{U}' \mid \sum x_i \bar{x}_i < \epsilon^2\}$. Nous considérerons \tilde{U}' comme un ouvert dans \tilde{M} . Considérons les coordonnées $[1 : y_1/y_0 : \dots : y_n/y_0] \subset U_0 \subset \mathbb{C}P^n$, où $U_0 := \{[y_0 : \dots : y_n] \in \mathbb{C}P^n \mid y_0 \neq 0\}$. Soit $W_\epsilon = \{[y_0 : \dots : y_n] \in \overline{\mathbb{C}P}^n \mid |y_0| < \epsilon(\sum y_i \bar{y}_i)^{1/2}, i = 1, \dots, n\}$. Les coordonnées x_1, \dots, x_n sur M et $y_1/y_0, \dots, y_n/y_0$ sur $\mathbb{C}P^n$ nous permettent de définir $M \# \overline{\mathbb{C}P}^n$. Par conséquent, l'application $\varphi : M \# \overline{\mathbb{C}P}^n \rightarrow \tilde{M}$, avec

$$\varphi(q) = \begin{cases} q & \text{sur } M \setminus \{p\}, \\ ((y_0 y_1, \dots, y_0 y_n)/(y_1 \bar{y}_1 + \dots + y_n \bar{y}_n); [y_1 : \dots : y_n]) & \text{sur } W_\epsilon, \end{cases}$$

est un difféomorphisme et la proposition suit [B]. □

L'éclatement de M en plusieurs points s'écrit alors $M \# \overline{\mathbb{C}P}^n \# \dots \# \overline{\mathbb{C}P}^n$.

1.3.6 La fibration linéaire tautologique

Une droite complexe est par définition un ensemble $\{\lambda(a_1, \dots, a_n) \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$, avec $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ un point fixé non nul. Nous pouvons alors considérer $\mathbb{C}P^{n-1}$ comme l'ensemble des droites complexes l dans \mathbb{C}^n .

Définition 1.49. La fibration $\mathbb{C} \hookrightarrow L \rightarrow \mathbb{C}P^{n-1}$, où $L := \{(l, z) \in \mathbb{C}P^{n-1} \times \mathbb{C}^n \mid z \in l\}$, est appelée *fibration linéaire tautologique*.

Nous avons que $L \cong \tilde{\mathbb{C}}^n$. L'ensemble des fibrations complexes linéaires sur une variété M est paramétré, à isomorphisme près, par $H^2(M, \mathbb{Z})$. La fibration linéaire universelle est caractérisée par sa classe de Chern $c(L) = -1 \in H^2(\mathbb{C}P^{n-1}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ [GB].

1.4 Désingularisation d'une courbe dans une surface

Il existe plusieurs définitions d'une résolution de singularité. Dans cette section nous utiliserons celle-ci, qui est la plus générale :

Définition 1.50. Soit X une variété algébrique. La *résolution des singularités* de X consiste à trouver une variété projective Y qui soit lisse et birationnelle à X .

Dans ce qui suit nous répondrons à la question quant à savoir si une courbe dans une surface complexe peut être désingularisée, et nous étudierons un exemple.

Soit X une surface non-singulière et $C \subset X$ une courbe irréductible.

Lemme 1.51. *Si C est de multiplicité k en p , alors $C'.E = k$, où E est la courbe exceptionnelle, et C' est la transformation propre de C , après l'éclatement de X en p [Sha, p.253].*

Lemme 1.52. *Une variété affine irréductible possède une normalisation qui est également affine [Sha, p.129].*

Théorème 1.53. *Il existe une surface Y et une application régulière $f : Y \rightarrow X$ qui est une composition d'éclatements, et telle que la transformation propre $C' \subset Y$ de C est non-singulière.*

Démonstration. Soit $p \in C$ un point singulier, $m_p(C)$ la multiplicité de p , $\pi : X_1 \rightarrow X$ l'éclatement en p , C_1 la transformation propre de C , et $E_1 = \pi^{-1}(p)$. Par le lemme 1.51, $m_p(C) = C_1.E_1$. En outre, $C_1.E_1 = \sum_{p'} (C_1.E_1)_{p'}$, où $p' \in C_1$ et $\pi(p') = p$. S'il existe plus d'un point p' , chacun doit avoir multiplicité $m_{p'}(C_1) < m_p(C)$, et donc le nombre d'étapes est fini. En effet, $(C_1.E_1)'_p \geq m_{p'}(C_1) \Rightarrow$

$m_p(c) \geq \Sigma_{p'} m_{p'}(C_1)$. Il ne reste donc à étudier que le cas où p' est l'unique point singulier de C_1 .

Soient l'anneau local $O_p := \{f/g \mid f, g \in K[C], g(p) \neq 0\}$, et $\overline{O}_p := \{t \in K(C) \mid \exists \text{ polynôme unitaire } f \text{ avec coefficients dans } O_p \text{ tel que } f(t) = 0\}$, où $K(C)$ est le corps des fonctions rationnelles définies sur C . Par le lemme 1.52, il existe un voisinage affine U de p , tel que la normalisation $K[U]^\nu := \{t \in K(U) \mid \exists \text{ polynôme unitaire } f \text{ avec coefficients dans } K[U] \text{ tel que } f(t) = 0\}$ de $K[U]$ soit un module fini sur $K[U]$. Si $K[U]^\nu = \alpha_1 K[U] + \dots + \alpha_m K[U]$, alors $\overline{O}_p = \alpha_1 O_p + \dots + \alpha_m O_p$.

Comme α_i est un élément du corps des fractions de O_p , alors il existe $b \in O_p, b \neq 0$, tel que $b\alpha_i \in O_p, \forall i$. Par conséquent $b\overline{O}_p \subset O_p$. En outre, comme C est une courbe, O_p/bO_p est de dimension finie. Ainsi, $\overline{O}_p/b\overline{O}_p$ qui est généré par les m espaces $\alpha_i(O_p/bO_p)$, est aussi de dimension finie. Comme $\dim(\overline{O}_p/O_p) \leq \dim(\overline{O}_p/b\overline{O}_p)$, alors \overline{O}_p/O_p est de dimension finie.

Nous avons que $O_p \subset O_{p'}$. Soit C^ν la normalisation de C , i.e $K[C^\nu] := \{t \in K(C) \mid \exists \text{ polynôme unitaire } f \text{ avec coefficients dans } K[C] \text{ tel que } f(t) = 0\}$, avec $\nu_1 : C^\nu \rightarrow C_1$ une application régulière, finie et birationnelle, et $\{q_i\} := \nu_1^{-1}(p)$. Nous avons donc que $\pi \circ \nu'$ correspond à la normalisation de C , et $\{q_i\} = (\pi \circ \nu')^{-1}(p)$. De plus, nous avons que $O_{p'} \subset \cap O_{q_i}$ et $\overline{O}_p \subset \cap O_{q_i}$. Comme ν_1 est finie, nous pouvons considérer que C et C^ν sont affines. Soit $f \in \cap O_{q_i}$. Les éléments de $\{q_i\}$ ne sont pas des pôles de cette fonction, par conséquent il existe $g \in K[C]$ tel que $g \neq 0$ et $fg \in K[C^\nu]$. Donc fg est intègre dans $K[C]$, i.e. \exists polynôme unitaire u avec coefficients dans $K[C]$ tel que $u(t) = 0$, et par conséquent f l'est aussi dans O_p , et $f \in \overline{O}_p$. Ainsi $l(\overline{O}_p/O_{p'}) \leq l(\overline{O}_p/O_p)$, où $l(M) = n$ si M est un module et $M \supset M_1 \supset \dots \supset M_n = 0$, pour des sous-modules M_i tels que M_i/M_{i+1} ne contienne pas de sous-modules propres, $\forall i$.

Supposons que $l(\overline{O}_p/O_{p'}) = l(\overline{O}_p/O_p)$. Dans ce cas nous obtenons $O_{p'} = O_p$. Soient u_1, u_2 des paramètres locaux en $p \in X$, i.e. leurs images sont dans $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$. Les paramètres locaux de $p' \in C_1$ sont donc u_1 et $v = u_2/u_1$. Comme $t|_C \in O_{p'}$, et $O_{p'} = O_p$, alors $v \in O_p$, et $\mathfrak{m}_p = (u_1, u_2) = (u_1, u_1 v) = (u) \Rightarrow \mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2 = (u)/(u^2) \cong O_p/(u) \cong K$, ce qui implique que $p \in C$ est non-singulier. Si $l(\overline{O}_p/O_{p'}) = 0$, alors $\overline{O}_p = O_{p'}$, et donc les éléments intègres de $O_{p'}$ sont les éléments de ce dernier, ce qui implique que p' est non-singulier. Par conséquent le nombre d'étapes est d'au plus $l(\overline{O}_p/O_p)$ [Sha, p.261]. \square

Exemple 1.54. Soit la courbe $C = \{[x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{CP}^2 \mid x_3 x_2^2 = x_1^3 + x_3 x_1^2\} \subset \mathbb{CP}^2$.

i) C est lisse partout sauf au point $p = [0 : 0 : 1] \in \mathbb{CP}^2$:

Soient $L(t, t') = \{[x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{CP}^2 \mid tx_1 = t'x_2\}$, les droites projectives paramétrées par t et t' et passant par p , où $[t : t'] \in \mathbb{CP}^1$. Si $t/t' \neq \pm 1$ alors $L(t, t')$ intersecte C en p et un point additionnel $x(t, t')$, et si $t/t' = \pm 1$ alors $L(t, t')$ croise C en p seulement. Par l'application $f : \mathbb{CP}^1 \rightarrow C$, où $f(t, t') = x(t, t')$ si $t/t' \neq \pm 1$, et $f(t, t') = p$ sinon, nous voyons que C est homéomorphe à \mathbb{CP}^1 avec

$[1 : -1]$ et $[1 : 1]$ identifiés.

ii) Désingularisation de C :

Par le théorème précédent, il est possible de désingulariser C en usant de l'éclatement. Dans $U_{x_3} = \{[x_1 : x_2 : 1] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^2 \mid x_1, x_2 \in \mathbb{C}\}$, qui contient p , nous avons que $C = \mathbb{V}(x_2^2 - x_1^3 - x_1^2)$. En éclatant $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ au point p , nous remplaçons $U_{x_3} \cong \mathbb{C}^2$ par $\tilde{C}^2 = \{(x_1, x_2), [u_1 : u_2]\} \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \mid x_1 u_2 = x_2 u_1\}$. La courbe exceptionnelle correspond à $x_1 = x_2 = 0$. Par conséquent la transformation totale de C dans \tilde{C}^2 est $\mathbb{V}((x_2^2 - x_1^3 - x_1^2, x_1 u_2 - x_2 u_1)$. $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ est recouvert par les ensembles V_{u_1} et V_{u_2} , caractérisés respectivement par $u_1 = 1$ et $u_2 = 1$. Nous avons que $V_{u_1} \cap \tilde{C}^2 = \mathbb{V}(x_1 u_2 - x_2)$, tandis que $V_{u_2} \cap \tilde{C}^2 = \mathbb{V}(x_1 - x_2 u_1)$. Dans V_{u_1} , la transformation totale de C est $\mathbb{V}(x_2^2 - x_1^3 - x_1^2, x_1 u_2 - x_2) = \mathbb{V}(x_1^2(u_2^2 - x_1 - 1), x_1 u_2 - x_2) = \mathbb{V}(x_1^2, x_1 u_2 - x_2) \cup \mathbb{V}(u_2^2 - x_1 - 1, x_1 u_2 - x_2) := C_1 \cup C_2$. Nous avons que $C_1 = \{(0, 0), [u_1 = 1 : u_2]\} \mid u_2 \in \mathbb{C}\}$, ce qui correspond l'intersection de la courbe exceptionnelle avec V_{u_1} . C_2 correspond à l'intersection de \tilde{C} avec V_{u_1} , et elle croise la courbe exceptionnelle en $\{(0, 0), [1 : \pm 1]\}$. Par le théorème des fonctions inverses, \tilde{C} est lisse et intersecte la courbe exceptionnelle transversalement aux deux points sus-mentionnés.

Nous avons que $V_{u_2} \cap \pi^{-1}(C) = \mathbb{V}(x_2^2 - x_1^3 - x_1^2, x_1 u_1 - x_2) = \mathbb{V}(x_2^2(u_1^3 x_2 + u_1^2 - 1), x_1 - x_2 u_1) = \mathbb{V}(x_2^2, x_1 - x_2 u_1) \cup \mathbb{V}(u_1^3 x_2 + u_1^2 - 1, x_1 - x_2 u_1) := D_1 \cup D_2$. Nous avons que $D_1 = \{(0, 0), [u_1, 1] \mid u_1 \in \mathbb{C}\} = E \cap V_{u_2}$ et $D_2 = \tilde{C} \cap V_{u_2}$. Par le théorème des fonctions implicites la courbe D_2 est lisse et intersecte E transversalement en $\{(0, 0), [1 : \pm 1]\}$. \tilde{C} est par conséquent lisse et nous avons désingularisé la courbe [GSt].

Chapitre 2

L'éclatement en géométrie symplectique

2.1 Éclatement symplectique en un point

L'éclatement symplectique est issue des travaux de Gromov (cf. [Gr]). Nous nous inspirerons dans cette section de [MS], où l'éclatement est vu comme le retrait de l'intérieur d'une boule plongée, et la réduction de la sphère qui l'enveloppe par l'application de Hopf.

Soient $\pi : \tilde{\mathbb{C}}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ la projection naturelle, $B(r) = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z| \leq r\}$, $\tilde{B}(r) = \pi^{-1}(B(r))$ et $\tilde{B}_0 = \pi^{-1}(B(0)) \cong \mathbb{P}^{n-1}$.

Sur \mathbb{R}^{2n} nous appelons ω_0 la forme symplectique standard, avec

$$\omega_0 = \sum_{j=1}^n dx_j \wedge dy_j,$$

et $J_0 : T_p\mathbb{R}^{2n} \rightarrow T_p\mathbb{R}^{2n}$ la structure complexe standard, qui est la matrice $2n \times 2n$

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -Id \\ Id & 0 \end{pmatrix}.$$

Une forme est dite *kählerienne* si elle est symplectique et appartient à une variété qui possède une structure complexe intégrable. Un exemple d'une telle variété est l'espace euclidien $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, munie de la structure complexe standard J_0 . Cet espace est ainsi identifié à \mathbb{C}^n , de manière à ce que la multiplication par J_0 corresponde à celle par $i = \sqrt{-1}$. Ainsi, $(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ correspond à $z = (x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n) \in \mathbb{C}^n$. L'espace projectif $\mathbb{C}P^{n-1}$ possède quant à lui une structure presque complexe $J : T_{[p]}\mathbb{C}P^{n-1} \rightarrow T_{[p]}\mathbb{C}P^{n-1}$, $z \mapsto iz$, et dans l'ouvert $z_j \neq 0$ nous l'équipons de la forme kählerienne

$$\tau_0 := \frac{i}{2} \partial \bar{\partial} \log \frac{\sum_{k=1}^n \bar{z}_k z_k}{\bar{z}_j z_j},$$

où

$$\partial = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial z_j} dz_j, \quad \bar{\partial} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j, \quad d = \partial + \bar{\partial},$$

et

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}(1 - iJ_0) \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2}(1 + iJ_0) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

L'éclatement complexe $\tilde{\mathbb{C}}^n$ possède alors une forme kählerienne $\rho(\lambda) = \pi^* \omega_0 \oplus \lambda^2 \pi'^* \tau_0$, où $\pi' : \tilde{\mathbb{C}}^n \rightarrow \mathbb{C}P^{n-1}$ est la projection naturelle, et une structure presque complexe induite par i .

Définition 2.1. Un plongement $G : \mathbb{C}^n - 0 \rightarrow \mathbb{C}^n$ est dit *monotone* si $G(z) = g(z) \frac{z}{|z|}$, avec $g : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ strictement croissante.

Lemme 2.2. Si $G : \mathbb{C}^n - 0 \rightarrow \mathbb{C}^n$ est un plongement monotone, alors $G^* \omega_0$ est kählerienne par rapport à la structure complexe standard.

Démonstration. Avec les coordonnées sphériques $(x, r) \in S^{2n-1} \times (0, \infty)$, G est défini par $G(x, r) = (x, g(r))$. Pour tout point (x, r) de $\mathbb{C}^n - 0$, nous choisissons pour son espace tangent la base $v_1, iv_1, \dots, v_n, iv_n$, où v_1 est dans la direction radiale, et v_2, v_3, \dots, v_n est une base pour $T_{(x,r)} S^{2n-1} \cap iT_{(x,r)} S^{2n-1}$ (i.e. la partie réelle de $T_{(x,r)} S^{2n-1}$). Nous avons donc que $G^* \omega_0(v_j, iv_j) \neq 0, \forall j$. \square

Soient (M, ω) une variété symplectique munie d'une structure presque complexe J contrôlée par ω , et intégrable dans un voisinage de l'image du plongement holomorphe $\phi : B(1 + 2\epsilon) \rightarrow M$, \tilde{M} l'éclatement complexe de M en x , et $\tilde{\phi} : \tilde{B}(1 + 2\epsilon) \rightarrow \tilde{M}$ l'unique relevé de ϕ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{B}(1 + 2\epsilon) & \xrightarrow{\tilde{\phi}} & \tilde{M} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi_M \\ B(1 + 2\epsilon) & \xrightarrow{\phi} & M \end{array}$$

L'idée de l'éclatement symplectique est de définir sur l'éclatement complexe $\pi_M : \tilde{M} \rightarrow M$ une forme symplectique qui soit symplectomorphe à τ_0 proche de $\pi_M^{-1}(x)$, et qui soit symplectomorphe à ω dans le complément d'un voisinage de $\pi_M^{-1}(x)$.

Lemme 2.3. Soit $\phi : (B(1 + 4\epsilon, J_0)) \rightarrow (M, J)$ un plongement holomorphe tel que $\phi^* \omega = \lambda^2 \omega_0$, où $0 < \epsilon < 1$ et $\lambda > 0$. Alors il existe une forme symplectique $\tilde{\omega}$ sur \tilde{M} telle que

- (i) $\tilde{\phi}^* \tilde{\omega} = \rho(\lambda)$ dans un voisinage de \tilde{B}_0 ,
- (ii) $\tilde{\phi}^* \tilde{\omega}$ soit une forme kählerienne dans $\tilde{B}(1 + 2\epsilon)$,
- (iii) $\tilde{\omega} = \pi_M^* \omega$ dans le complément d'un voisinage de $E = \pi^{-1}(x)$, et
- (iv) $\tilde{\omega}$ contrôle J .

La condition (i) définit ce que [MS] considère la forme symplectique *standard* sur l'éclatement correspondant au plongement ϕ .

Démonstration. Nous avons que $(\tilde{B}(\delta) - \tilde{B}_0, \rho(\lambda)) \cong (B(\sqrt{\lambda^2 + \delta^2}) - B(\lambda), \omega_0)$. En effet, soit la forme symplectique $\omega(\lambda) = \frac{i}{2}(\partial\bar{\partial}(|z|^2 + \lambda^2 \log(|z|^2)))$, dans $\mathbb{C}^n - \{0\}$. Sur $\tilde{\mathbb{C}}^n - \tilde{B}(0)$, π est un isomorphisme et $\pi^*\omega(\lambda) = \rho(\lambda)$.

De plus, le plongement monotone

$$F_1 : \mathbb{C}^n - \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}^n - B(\lambda) \\ z \longmapsto \sqrt{|z|^2 + \lambda^2} \frac{z}{|z|}$$

tire en arrière la forme symplectique standard vers $\omega(\lambda)$. Le symplectomorphisme voulu est donc $F_1 \circ \pi$.

Par hypothèse nous avons que $(\tilde{B}(1 + 4\epsilon) - \tilde{B}(\sqrt{1 + \epsilon^2}), \pi^*(\lambda^2\omega_0)) \cong (B(1 + 4\epsilon) - B(\sqrt{1 + \epsilon^2}), \lambda^2\omega_0)$, π étant un isomorphisme dans ce domaine. Or $(B(1 + 4\epsilon) - B(\sqrt{1 + \epsilon^2}), \lambda^2\omega_0) \cong (B(\lambda(1 + 4\epsilon)) - B(\lambda\sqrt{1 + \epsilon^2}), \omega_0)$ par l'application $F_2(z) = \lambda z$. Si $\delta < \epsilon\lambda$, alors $(B(\lambda\sqrt{1 + \alpha\epsilon^2}) - B(\lambda\sqrt{1 + \epsilon^2})) \cap (B(\sqrt{\lambda^2 + \delta^2}) - B(\lambda)) = \emptyset$. En outre, en prenant δ suffisamment petit, nous avons que $(\tilde{B}(\sqrt{1 + \alpha\epsilon^2}) - \tilde{B}(\sqrt{1 + \epsilon^2})) \cap (\tilde{B}(\delta) - \tilde{B}(0)) = \emptyset$. Nous pouvons alors interpoler $F_1 \circ \pi$ et $F_2 \circ \pi$ pour obtenir un symplectomorphisme $F \circ \pi : (\tilde{\mathbb{C}}^n - \tilde{B}(\delta), (F \circ \pi)^*\omega_0) \longrightarrow (\mathbb{C}^n - B(\lambda), \omega_0)$, égale à $F_2 \circ \pi$ sur $\tilde{\mathbb{C}}^n - \tilde{B}(\sqrt{1 + \epsilon^2})$, et à $F_1 \circ \pi$ sur le bord, et tel que $B(\sqrt{1 + \epsilon^2}) - B(\delta) \longrightarrow B(\lambda\sqrt{1 + \epsilon^2}) - B(\sqrt{\lambda^2 + \delta^2})$ soit monotone. La forme $(F \circ \pi)^*\omega_0$ nous procure donc une forme symplectique sur $\tilde{B}(1 + \epsilon) - \tilde{B}(\delta)$. Il existe donc une forme symplectique sur $\tilde{B}(1 + 2\epsilon)$ égale à $\rho(\lambda)$ sur $\tilde{B}(\delta)$ et $\pi^*\omega_0$ sur $\tilde{B}(1 + 2\epsilon) - \tilde{B}(1 + \epsilon)$. Son poussé en avant par $\tilde{\phi}$ peut être étendu par $\pi_M^*\omega$ pour donner la forme voulue sur \tilde{M} . \square

Définition 2.4. Soient (M, ω_1) et (M, ω_2) des variétés symplectiques. La première est dite *isotope* à la seconde si ω_1 et ω_2 sont jointes par une homotopie ω_t telle que $[\omega_t]$ est indépendante de t . Elles sont dites *fortement isotopes* s'il existe une isotopie $\rho_t : M \rightarrow M$ telle que $\rho_1^*\omega_1 = \omega_2$.

Lorsqu'une variété est compacte, comme l'est l'éclatement complexe d'une variété, ces deux notions sont équivalentes. Notons que l'isotopie forte implique l'existence d'un symplectomorphisme, mais l'inverse n'est pas toujours vrai.

Sur M nous choisissons une structure presque complexe J contrôlée par ω et intégrable proche de $x = \phi(0)$, telle que (ω, J) soit diffeomorphe à (ω_0, J_0) dans un voisinage de x .

Lemme 2.5. Soit $\phi : (B(\lambda), \omega_0) \rightarrow (M, \omega)$ un plongement symplectique, J une structure presque complexe sur M contrôlée par ω et intégrable proche de $x = \phi(0)$, telle que ω soit J -standard, i.e.

(ω, J) est difféomorphe à (ω_0, J_0) dans un voisinage de x . Soit $K \subset M \setminus \{x\}$ un sous-ensemble compact tel qu'il existe un petit voisinage ouvert U de x dont le bord est contenu dans K . Alors $\forall K$, il existe $\delta \in (0, \lambda)$, une forme symplectique ω' sur M isotope à ω et J -standard proche de x , et un plongement symplectique $\phi' : (B(\lambda), \omega_0) \rightarrow (M, \omega')$ tel que $\phi'|_{B(\delta)}$ soit holomorphe, $\phi' = \phi$ proche de $\partial B(\lambda)$, et ω' contrôle J et soit égale à ω sur K .

Démonstration. La forme ω est J -standard proche de x donc il existe un symplectomorphisme $f : U \subset (B(\lambda), \omega_0, J_0) \rightarrow V \subset (\phi(B(\lambda), \omega, J))$ avec $f(p) = x$. Par conséquent $\phi^{-1} \circ f$ est un symplectomorphisme. Soit $g : B(\lambda) \rightarrow B(\lambda)$ un difféomorphisme dont le support compact est dans U et tel que $g|_{U'} = \phi^{-1} \circ f$, où $x \in U' \subset U$. Nous obtenons alors que $d\varphi \circ J_0 = J \circ d\varphi$ en 0, où $\varphi := \phi \circ g$. Comme J est intégrable dans un voisinage de x , il existe un difféomorphisme $G : M \rightarrow M$, C^1 -petit, avec support compacte dans $M \setminus K$, et tel que $G(x) = x$ et $d(G \circ \varphi) \circ J_0 = J \circ d(G \circ \varphi)$ proche de x . Nous pouvons alors poser $\omega' = (G^*)^{-1}\omega$ et $\phi' = G \circ \varphi$. \square

Théorème 2.6. Soient $\phi : (B(\lambda), \omega_0) \rightarrow (M, \omega)$ un plongement symplectique, avec $x := \phi(0)$. Nous choisissons une structure presque-complexe J contrôlée par ω et telle que ce dernier soit J -standard dans un voisinage de x . Soit $\pi_M : (\tilde{M}, \tilde{J}) \rightarrow (M, J)$ l'éclatement complexe correspondant. Alors il existe une famille $\tilde{\omega}_t$ de formes symplectiques sur \tilde{M} telle que

- (i) $\tilde{\omega}_0$ contrôle \tilde{J} ,
- (ii) $(\tilde{\phi}')^*\tilde{\omega}_1 = \rho(\lambda)$ dans un voisinage de \tilde{B}_0 , où $\tilde{\phi}' : B(1 + \varepsilon) \rightarrow M$ est un plongement symplectique, et $\varepsilon > 0$,
- (iii) $[\tilde{\omega}_1] = [\pi_M^*\omega] - \pi\lambda^2e$, où e est le dual de Poincaré de la sphère exceptionnelle E .

Ce théorème nous montre qu'il est possible de trouver une forme symplectique sur l'éclatement pour n'importe quel λ , et par une isotopie d'en obtenir une qui soit *standard*, c'est à dire qui respecte la condition (ii), telle que prescrit par [MS].

L'éclatement symplectique de (M, ω) en une boule $B(\lambda)$ plongée dans M est défini par [MS] comme étant $\pi_M : (\tilde{M}, \tilde{\omega}_\phi) \rightarrow (M, \omega)$, où $\tilde{\omega}_\phi := \tilde{\omega}_1$, et λ est appelé le *poids* de l'éclatement.

Pour la preuve nous aurons besoin des lemmes suivant, qui impliquent que si nous avons des formes ω_1 et ω_2 sur une variété M dont la restriction à ∂M est identique, alors elles s'équivalent aussi dans un voisinage de ∂M :

Lemme 2.7. (Théorème des plongements coïsootropiques) [Darboux - Weinstein] Soient M une variété de dimension $2m$, N une sous-variété de dimension $n \geq m$, $\iota : N \rightarrow M$ l'inclusion, et ω_1 et ω_2 des formes symplectiques sur M , telles que $\iota^*\omega_1 = \iota^*\omega_2$, et N est coïso trope dans M relativement à ces deux formes. Alors il existe deux voisinages U_1 et U_2 de N dans M et un difféomorphisme $f : U_1 \rightarrow U_2$, tel que $\iota = f \circ \iota$ et $f^*\omega_2 = \omega_1$.

Démonstration. Voir [HL]. □

Lemme 2.8. *Une hypersurface compacte et orientée N dans une variété symplectique M est une sous-variété coïsothrope. En outre, dans le contexte du lemme 2.7, ω_1 sera isotope à une forme qui est égale à ω_0 dans un voisinage de N , par une isotopie égale à l'identité sur N [MS, p.104,430].*

Preuve du théorème 2.6. Par les deux lemmes précédents, il existe un plongement symplectique $(B(\lambda + \varepsilon'), \omega_0) \rightarrow (M, \omega)$ qui est une extension de ϕ , où $0 < \varepsilon' \ll 1$. De la même manière que pour le lemme 2.5, nous pouvons composer ϕ avec un difféomorphisme afin d'obtenir un plongement holomorphe, donc nous pouvons prendre pour aqit que ϕ possède cette propriété sur $B(\delta)$, pour un certain $\delta > 0$.

Soit $g(t)$ un difféomorphisme de $B(\lambda + \varepsilon')$ sur lui-même, tel que $g(0) = \text{id}$, $g(t) = \text{id}$ proche de $\partial B(\lambda + \varepsilon')$, et $g(t)^* \omega_0 = \eta(t) \omega_0$ sur $B(\delta)$, où $\eta(1) = \lambda^2(1 + \varepsilon)^2 \delta^{-2}$ pour un certain $\varepsilon > 0$. Soit $G(t) : M \rightarrow M$ l'extension de $\phi \circ g(t) \circ \phi^{-1}$ par l'identité, posons $\omega_t = G(t)^* \omega$ et soit le plongement,

$$\begin{aligned} \phi' : B(1 + \varepsilon) &\longrightarrow M, \\ z &\longmapsto \phi \left(\frac{\delta}{1 + \varepsilon} z \right). \end{aligned}$$

Comme ϕ est holomorphe dans $B(\delta)$, alors ϕ' l'est dans son domaine. En outre, $\phi'^* \omega_t = \frac{\delta^2}{(1 + \varepsilon)^2} \eta(t) \omega_0$. En effet, $\phi'^* \omega_t = \phi'^* \circ G(t)^* \omega = \phi'^* \circ (\phi^{-1})^* \circ g(t)^* \circ \phi^* \omega = \phi'^* \circ (\phi^{-1})^* \circ g(t)^* \omega_0 = \phi'^* \circ (\phi^{-1})^* \eta(t) \omega_0 = \phi'^* \eta(t) \omega = \frac{\delta^2}{(1 + \varepsilon)^2} \eta(t) \omega_0$.

Nous nous retrouvons alors avec les conditions du lemme 2.3, et pouvons l'appliquer en remplaçant ω par ω_t pour obtenir la famille de formes $\tilde{\omega}_t$ voulues [MS].

Concernant la classe d'homologie de $\tilde{\omega}_1$, nous nous limiterons à donner la preuve dans le cas où $\dim(M) = 4$. Afin d'utiliser la séquence de Mayer-Vietoris, séparons \tilde{M} comme $(M \setminus \phi(B(\lambda))) \cup \tilde{\phi}(\tilde{B}(\delta))$. Nous obtenons la séquence suivante : $0 \rightarrow H^2(\tilde{M}) \rightarrow H^2(M \setminus \phi(B(\lambda))) \oplus H^2(\tilde{\phi}(\tilde{B}(\delta))) \rightarrow 0$. Or $H^2(M \setminus \phi(B(\lambda))) = H^2(M)$ et $H^2(\tilde{\phi}(\tilde{B}(\delta))) = \mathbb{Z}[E]$. Nous avons par construction que $\tilde{\omega}_1|_{M \setminus \phi(B(\lambda))} = \omega|_{M \setminus \phi(B(\lambda))}$, par conséquent la classe sera différente de $\pi_M^* \omega$ par un terme dépendant de ce que représente $\tilde{\omega}$ dans $\tilde{\phi}(\tilde{B}(\delta)) \cap V$, où V est un voisinage de E . Or nous avons aussi par construction que $\tilde{\omega}_1|_E = \lambda^2 \tau_0$. Comme $[E]^2 = -1$, nous obtenons $\int_E \tilde{\omega}_1 = \pi \lambda^2 (-E) \cdot E$, et le lemme suit [cf. Ev]. □

L'éclatement symplectique est unique à symplectomorphisme près. Le théorème suivant affirme que si une isotopie entre deux plongements symplectiques préserve le point éclaté, alors les formes symplectiques sont isotopes dans l'éclatement.

Théorème 2.9. (i) *La classe d'isotopie de $\tilde{\omega}_\phi$ ne dépend que de ϕ et du germe de J en $x = \phi(0)$.*
(ii) *Si nous avons une homotopie $H(t) : (B(\lambda), \omega_0) \rightarrow (M, \omega)$, telle que $H(t)$ soit un plongement*

symplectique et $H(t)(0) = x, \forall t \in [0, 1]$, alors $\tilde{\omega}_{H(0)}$ et $\tilde{\omega}_{H(1)}$ sont isotopes. (iii) Si nous avons une homotopie $H(t) : (B(\lambda), \omega_0) \rightarrow (M, \omega)$, telle que $H(t)$ soit un plongement symplectique, $\forall t \in [0, 1]$, alors $(\tilde{M}_0, \tilde{\omega}_{H(0)})$ et $(\tilde{M}_1, \tilde{\omega}_{H(1)})$ sont symplectomorphes.

Preuve. (i) À chaque étape de la construction nous avons une famille connexe de choix. De plus, dans le théorème 2.6, si nous avons deux extensions de ϕ à $B(\lambda + \epsilon)$, alors $\exists \epsilon_0 \in (0, \epsilon)$ tel que leurs restrictions à $B(\lambda + \epsilon_0)$ soient isotopes par une isotopie qui fixe $B(\lambda)$. Si l'on remplace l'extension par sa restriction, nous avons que la classe d'isotopie est inchangée car l'espace des applications monotones est contractile. Finalement, en gardant J constant proche de x nous obtenons que \tilde{M} reste exactement le même [MS].

(ii) La construction de l'éclatement dépend de manière lisse du paramètre t , donc $\omega_{H(0)}$ est homotope à $\omega_{H(1)}$. Comme x est fixe, la structure presque-complexe est préservée car on exige seulement que J soit standard et intégrable dans un voisinage de $x, \forall t$. Par conséquent l'éclatement complexe sera exactement le même $\forall t$, et les $\tilde{\omega}_t$ seront fortement isotopes, et donc isotopes [MS].

(iii) Dans ce cas la structure presque-complexe de M dépend de t , et donc $\tilde{M}_{H(0)}$ et $\tilde{M}_{H(1)}$ ne seront pas nécessairement isotopes, bien que symplectomorphes, ce qui entraîne que $\tilde{\omega}_{H(0)}$ n'est pas forcément isotope à $\tilde{\omega}_{H(1)}$, même s'ils sont cohomologues. \square

Il est démontré dans [La] que, sous certaines conditions, l'éclatement d'une variété symplectique réglée est unique à isotopie près.

La contraction est également bien définie dans la catégorie symplectique, comme le montre le lemme suivant.

Proposition 2.10. *Soit $(\tilde{M}, \tilde{\omega}, J)$ une variété symplectique contenant une sphère exceptionnelle E , et dont la structure presque-complexe J est contrôlée par $\tilde{\omega}$ et est intégrable dans un voisinage de E . Alors il existe une forme symplectique ω sur M telle que $\omega = \pi_{M*}\tilde{\omega}$ dans le complément d'un voisinage de $\pi_M(E)$, qui contrôle J .*

Démonstration. Soit $\tilde{\phi} : (\tilde{B}(\delta), \rho(\lambda)) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{\omega})$ un plongement symplectique tel que $\tilde{\phi}(\tilde{B}(\delta)) = N$, où $E \subset N$. Nous avons que $(B(\sqrt{\lambda^2 + \delta^2}) - B(\lambda), \omega_0) \cong (\tilde{B}(\delta) - \tilde{B}_0, \rho(\lambda)) \cong (\pi_M \circ \tilde{\phi}(\tilde{B}(\delta) - \tilde{B}_0), (\pi_M \circ \tilde{\phi})_* \rho(\lambda)) = (\pi_M \circ \tilde{\phi}(\tilde{B}(\delta) - \tilde{B}_0), \pi_{M*}\tilde{\omega})$, où la première égalité provient de la preuve précédente. Notons $f : (B(\sqrt{\lambda^2 + \delta^2}) - B(\lambda), \omega_0) \rightarrow (\pi_M \circ \tilde{\phi}(\tilde{B}(\delta) - \tilde{B}_0), \pi_{M*}\tilde{\omega})$ ce symplectomorphisme. Soit $g : B(\sqrt{\lambda^2 + \delta^2}) \rightarrow \pi_M(N)$ un difféomorphisme qui ne dépend que d'une application monotone, et tel que g restreint à $B(\sqrt{\lambda^2 + \delta^2}) - B(\sqrt{\lambda^2 + \delta^2}/4)$ soit égale à f . Nous avons par conséquent une forme symplectique dans M égale à $g_*\omega_0$ proche de $\pi_M(N)$, et à $\pi_{M*}\tilde{\omega}$ dans le complément d'un voisinage de $\pi_M(N)$ [La]. \square

2.2 Éclatement le long d'une sous-variété symplectique de codimension ≥ 4

Dans cette section nous nous inspirerons de la présentation donnée dans l'article [McD]. Soient (M, J, ω) une variété symplectique et $\phi : N \rightarrow M$ un plongement symplectique, i.e. $T_p N$ est un sous-espace symplectique, $\forall p \in N$, avec forme symplectique $\omega|_N$. Nous supposons que le groupe structural de la fibration normale est réductible à $U(k)$. Soit g une métrique riemannienne sur M donné par $g(u, v) = \omega(-Ju, v)$. La fibration normal $\nu_N = \{(p \in N, \{v \in T_p M \mid g(u, v) = 0, \forall u \in T_p N\})\} \equiv TM|_N/TN$ peut être identifiée à la fibration symplectique orthogonale de N , $TN^\omega = \{(p \in N, \{v \in T_p N \mid \omega(u, v) = 0, \forall u \in T_p N\})\}$. En effet, il est facile de vérifier que $JTN^\omega = \nu_N$. Par conséquent ν_N est une fibration symplectique, et donc elle possède une forme symplectique et une structure complexe compatible. Par hypothèse, $\nu_N \rightarrow N$ peut être identifiée à une fibration $A \times_{U(k)} \mathbb{C}^k \rightarrow N$, associée à une $U(k)$ -fibration principale $A \rightarrow N$, telle que $A/U(k) = N$. Soit L la fibration linéaire tautologique sur $\mathbb{C}P^{k-1}$. L'action de $U(k)$ sur $L \subset \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}P^{k-1}$ est définie par $g.(z; [z]) = (gz; [gz])$, où $g \in U(k)$. Cette dernière action nous en donne une sur $\mathbb{C}P^{k-1}$. Nous pouvons donc considérer les fibrations associée $\pi_{\tilde{\nu}} : \tilde{\nu}_N \rightarrow N$ et $\pi_{\tilde{N}} : \tilde{N} \rightarrow N$, dont les fibres sont respectivement L et $\mathbb{C}P^{k-1}$, et où $\tilde{\nu}_N = A \times_{U(k)} L$ et $\tilde{N} = A \times_{U(k)} \mathbb{C}P^{k-1}$. Notons que $\tilde{\nu}_N$ se projette sur \tilde{N} par la projection $L \rightarrow \mathbb{C}P^{k-1}$, ce qui donne la fibration $\pi'_{\tilde{\nu}} : \tilde{\nu}_N \rightarrow \tilde{N}$, avec fibre \mathbb{C} . Nous obtenons donc le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\nu}_N & \xrightarrow{\pi'_{\tilde{\nu}}} & \tilde{N} \\ \eta \downarrow & & \downarrow \pi_{\tilde{N}} \\ \nu_N & \xrightarrow{\pi_\nu} & N \end{array}$$

L'application η est définie par la projection $(z; [z]) \in L \mapsto z \in \mathbb{C}^k$. Par le théorème des voisinages tubulaires, il existe un voisinage de la section nulle de ν_N qui est difféomorphe à un voisinage de N dans M . Soit V une fibration en sous-disque de ν_N , i.e. $V = \{(x, y) \in N \times \mathbb{C}^k \mid \|y\| \leq \epsilon\} \subset \nu_N$, avec ϵ suffisamment petit pour pouvoir appliquer le théorème, U le voisinage fermé de N auquel elle est difféomorphe, et $\tilde{V} := \eta^{-1}(V)$. Notons $\varphi : V \rightarrow U$ ce difféomorphisme.

Définition 2.11. L'éclatement de M le long de N , noté \tilde{M} , est la variété lisse $\overline{M - U} \cup_{\partial \tilde{V}} \tilde{V}$, où $\partial \tilde{V} \sim \varphi \circ \eta(\partial \tilde{V}) = \partial U$.

Naturellement, une forme symplectique existe dans chacune des fibres de l'éclatement de la fibration normale, mais il reste à montrer qu'il existe une forme symplectique qui soit bien définie dans le sens transversal.

Lemme 2.12. Il existe sur ν_N une 2-forme fermée ρ dont la restriction à chaque fibre ν_{N_p} est la

forme donnée par la structure symplectique de ν_N sus-mentionnée, et telle que $\rho|_Z = \kappa$, où Z est la section nulle et κ est la forme symplectique de la sous-variété N . En outre nous pouvons supposer que $\rho(u, v) = 0, \forall u \in TZ, v \in E_p$.

Démonstration. Soient $\{V_i\}$ un recouvrement ouvert de N tel que $\nu_N|_{V_i}$ est un produit cartésien, et ζ_i une 1-forme sur $\pi_\nu^{-1}(V_i)$ qui est nulle sur l'intersection avec Z , et telle que $d\zeta_i|_{\nu_{Np}} = \omega|_{\nu_{Np}}, \forall p \in N$. La forme $\pi_\nu^* \kappa + \sum d(\lambda_i \zeta_i)$ nous donne la 2-forme voulue, où $\{\lambda_i\}$ est une partition de l'unité subordonnée à $\{V_i\}$. \square

Soient ν_0 et $\tilde{\nu}_0$ les compléments respectifs des sections nulles de $\nu_N \rightarrow N$ et $\tilde{\nu}_N \rightarrow \tilde{N}$, et soient ι et $\tilde{\iota}$ leurs inclusions. Notons F et \tilde{F} les fibres de $\tilde{N} \rightarrow N$ et $\tilde{\nu}_N \rightarrow N$ respectives.

Lemme 2.13. *Il existe une 2-forme fermée γ sur \tilde{N} , telle que $\gamma|_{F_p} = \tau_0 = \frac{i}{2} \partial \bar{\partial} \ln(1 + \sum z_j \bar{z}_j)$ est la forme kählerienne standard sur $\mathbb{C}P^{k-1}$, et $(\tilde{\iota} \circ \pi'_\nu)^* \gamma$ est exacte, où F_p est la fibre $\tilde{N} \rightarrow N$ en p .*

Démonstration. Voir [GLS]. \square

Lemme 2.14 (Thurston). *Il existe $\delta_0 > 0$ tel que la forme $\pi_{\tilde{N}}^* \kappa + \delta \gamma$ soit non-dégénérée, $\forall \delta \in (0, \delta_0]$.*

Démonstration. Soit $(T_p F)^\gamma$ le complément orthogonal de $T_p F \subset T_p \tilde{N}$, par rapport à $\gamma, \forall p \in \tilde{N}$. Nous avons que γ est non-dégénérée sur $F_p, \forall p \in N$, par conséquent $T_p \tilde{N} = T_p F \oplus (T_p F)^\gamma$ (2). Ceci implique que $d\pi_{\tilde{N}p} : T_p \tilde{N} \rightarrow T_{\pi_{\tilde{N}}(p)} N$ est injectif sur quand restreint à $(T_p F)^\gamma$, et $\pi_{\tilde{N}}^* \kappa|_{(T_p F)^\gamma}$ est non-dégénérée (1). M est compact, ainsi $(\pi_{\tilde{N}}^* \kappa + \delta \gamma)|_{(T_p F)^\gamma}$ est non-dégénérée, $\forall p \in \tilde{N}, \delta \in (0, \delta_0]$. En outre, (1) et (2) $\Rightarrow ((T_p F)^\gamma)^{\pi_{\tilde{N}}^* \kappa} \subset T_p F \Rightarrow (T_p F)^{\pi_{\tilde{N}}^* \kappa} \subset (T_p F)^\gamma \Rightarrow \pi_{\tilde{N}}^* \kappa|_{T_p F} = 0$. Donc $T_p F$ et $(T_p F)^\gamma$ sont orthogonaux par rapport à $\pi_{\tilde{N}}^* \kappa + \delta \gamma$. Nous avons alors que cette 2-forme est non-dégénérée sur $\tilde{N}, \forall \delta \in (0, \delta_0]$. \square

Lemme 2.15. *La 2-forme $\tilde{\omega}_\delta = \eta^* \rho + \delta \pi'_\nu^* \gamma$ est non-dégénérée sur $T_{\tilde{Z}} \tilde{\nu}_N, \forall \delta \in (0, \delta_0]$.*

Démonstration. Nous avons que $\tilde{\omega}_\delta|_{\tilde{F}} = \eta^* \tau_1 + \delta \pi'_\nu^* \tau_0$, où $\tau_1 = \frac{i}{2} \sum dz_i \wedge d\bar{z}_j$ est définie sur \mathbb{C}^k . Soit J la structure presque-complexe sur \tilde{F} . Les formes τ_0 et τ_1 lui sont compatibles, et comme le tiré en arrière d'une métrique riemannienne est définie positive ou semi-positive, alors $\eta^* \tau_1(v, Jv), \pi'_\nu^* \tau_0(v, Jv) \geq 0, \forall v \in T\tilde{F}$. En outre, η est un difféomorphisme lorsque la fibre de $\tilde{\nu}_N$ n'est pas L_0 . Lorsque la fibre est $L_0, \eta(p \in N, (0 \in \mathbb{C}^k; [z] \in \mathbb{C}P^{k-1})) = (p \in N; 0 \in \mathbb{C}^k)$. Le noyau de $d\eta$ consiste donc des vecteurs tangents à L_0 . La forme $\delta \pi'_\nu^* \tau_0$ est non-dégénérée sur l'espace qu'ils déploient, et $\tilde{\omega}_\delta|_{\tilde{F}} = \eta^* \tau_1$ est non-dégénérée sur son complément, donc $\tilde{\omega}_\delta|_{\tilde{F}}$ est également non-dégénérée, $\forall \delta > 0$. Si nous avons une métrique riemannienne g sur $\tilde{\nu}_N$ dont la restriction à \tilde{F} est définie par $g(\cdot, \cdot) = \tilde{\omega}_1(\cdot, J\cdot)$, alors $\exists K > 0$ tel que $\max\{\tilde{\omega}_\delta(u, v) \mid v \in T_p \tilde{F}, g(v, v) = 1\} \geq K \delta g(u, u), \forall u \in T_p \tilde{F}, p \in \tilde{V}$ et $\delta > 0$. Nous

avons, par la commutativité du diagramme ci-haut et le lemme 2.12, que $(\eta^*\rho)|_{\tilde{Z}} = \pi_{\tilde{N}}^*\kappa$, où \tilde{Z} est la section nulle de $\pi_{\tilde{V}}$. De plus $\eta^*\rho$ est non-dégénérée sur les fibres de $\tilde{\nu}_N \rightarrow \tilde{N}$, donc, par le lemme 2.14, $\tilde{\omega}_\delta$ est non-dégénérée sur $T_p\tilde{\nu}_N, \forall p \in \tilde{Z}, \delta \in (0, \delta_0]$. \square

Il reste à démontrer que $\tilde{\omega}_\delta$ est non-dégénérée sur $T_p\tilde{\nu}_N, \forall p \in \tilde{V} \setminus \tilde{Z}$. Il faut donc vérifier que $\forall p \in \tilde{V} \setminus \tilde{Z}, v \neq 0 \in T_p\tilde{\nu}_N$, il existe $u \in T_p\tilde{\nu}_N$ tel que $\tilde{\omega}_\delta(u, v) \neq 0$. Nous aurons besoin d'abord des lemmes suivant :

Lemme 2.16. *Soit $A = \bigcup_{p \in \nu_N} A_p$ une sous-fibration de $T\nu_N$, qui est C^1 -lisse et est égale à TZ le long de Z , et soit $\tilde{A}_{p'} = \eta^*A_{\eta(p')}$, où $p' \in \tilde{\nu}_N \setminus \tilde{Z}$. Alors $\overline{\bigcup_{p' \in \tilde{\nu}_N \setminus \tilde{Z}} \tilde{A}_{p'}} \subset T\tilde{\nu}_N$ ne contient pas de vecteur non-nul tangent aux fibres de $\pi_{\tilde{\nu}} : \tilde{Z} \rightarrow N$.*

Démonstration. Autour du point $(0; [1 : 0 : \dots : 0]) \in \tilde{\mathbb{C}}^k \subset \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}P^{k-1}$, considérons les coordonnées x_1, y_2, \dots, y_k , telles que vues au 1.3.4, et les coordonnées w_1, \dots, w_n sur un ouvert de N . En se rappelant que $\pi_{\tilde{\nu}} : \tilde{\nu}_N \rightarrow N$ à $L \equiv \tilde{\mathbb{C}}^k$ comme fibre, nous avons les coordonnées $(w_1, \dots, w_n; x_1, y_2, \dots, y_k)$ pour un point dans un ouvert de $\tilde{\nu}_N$, avec image $(w_1, \dots, w_n; x_1, x_1y_2, \dots, x_1y_k) \equiv (w_1, \dots, w_n; q_1, q_2, \dots, q_k)$ par η . Il est possible alors de définir A_p comme les vecteurs v de $T_p\nu_N$ tels que $dq_j(v) + \sum \beta_{ij}(w, q)dw_j(v) = 0$, où β_{ij} sont des applications complexes continues, et p est proche de Z . Alors $\tilde{A}_{p'} = \eta^*(A_{\eta(p')})$ est donné par les équations $dx_1 + \sum \beta_{i1}(\eta(p'))dw_i = 0$ (1) et $x_1dy_j + y_jdx_1 + \beta_{ij}(\eta(p'))dw_i$, avec $j = 2, \dots, k$ (2). Par hypothèse, $A_p \rightarrow T_pZ$ lorsque $\|p - Z\| \rightarrow 0$, donc $\beta_{ij}(w, q) \rightarrow 0$ lorsque $q \rightarrow 0$. Ceci implique que $\beta_{ij}(\eta(p')) = \beta_{ij}(\eta(w; x_1, y_2, \dots, y_k)) = \beta_{ij}(w; x_1, x_1y_2, \dots, x_1y_k) \rightarrow 0$ lorsque $x_1 \rightarrow 0$. En outre, lorsque $\|p' - \tilde{Z}\| \rightarrow 0$, nous avons que sa coordonnée $x_1 \rightarrow 0$. Comme β_{ij} est au plus d'ordre $|x_1|$, dans un voisinage W de \tilde{Z} alors de (1) et (2) nous avons que $|dy_j(v)| \leq a\Sigma |dw_i(v)|$ (3), où $a > 0$, et $|dx_1(v)| \leq |x_1|\Sigma |dw_i(v)| \leq K\Sigma |dw_i(v)|, K > 0$. Ceci implique qu'il n'y a pas de vecteur non-nul v tel que $dw_i(v) = 0, \forall i$, dans $(\cup \tilde{A}_{p'}) \cap T\tilde{\nu}_N|_W$. \square

Lemme 2.17. *Soit une métrique riemannienne quelconque sur ν_N qui induit une norme sur $\tilde{\nu}_N$. Alors il existe $a, b > 0$ tel que $a\|v\| \leq \|\eta_*(v)\| \leq b\|v\|, \forall v \in (T_x\tilde{F})^{\eta^*\rho}, x \in \tilde{V} \setminus \tilde{Z}$.*

Démonstration. L'espace $\bigcup_x (T_xF)^\rho$ est une sous-fibration lisse de $T\nu_N$, et est égale le long de Z à TZ . Pour $y \in \tilde{V} \setminus \tilde{Z}$, nous avons que $(T_y\tilde{F})^{\eta^*\rho} = \eta^*((T_{\eta(y)}F)^\rho)$. En outre, $\text{Ker } \eta_* = (T_{\tilde{Z}}\tilde{F})$, par conséquent le résultat suit du lemme précédent. \square

Lemme 2.18. *Il existe $\delta_2, c > 0$ tels que $\max\{\tilde{\omega}_\delta(t, w) \mid w \in (T_y\tilde{F})^{\eta^*\rho}, \|w\| = 1\} \geq c\|t\|, \forall t \in (T_y\tilde{F})^{\eta^*\rho}, y \in \tilde{V} \setminus \tilde{Z}, \text{ et } \delta \in (0, \delta_2]$.*

Démonstration. Comme ρ est non-dégénérée sur V qui est compacte, par le lemme précédent nous avons qu'il existe $d > 0$ tel que $\max\{\eta^*\rho(t, w) \mid w \in (T_y\tilde{F})^{\eta^*\rho}, \|w\| = 1\} \geq d\|t\|$, $\forall y \in \tilde{V} \setminus \tilde{Z}$, et $t \in (T_y\tilde{F})^{\eta^*\rho}$. Ainsi, pour $\delta_2 > 0$ suffisamment petit, la conclusion suit. \square

Lemme 2.19. *Il existe $\delta_1 > 0$ tel que $\tilde{\omega}_\delta$ est non-dégénérée sur $\tilde{V} \setminus \tilde{Z}$, $\forall \delta \in (0, \delta_1]$.*

Démonstration. Soient $d > 0$ tel que $|\gamma(u, v)| \leq d\|u\|\|v\|$, $\forall x \in \tilde{V}$ et $u, v \in T_x\tilde{V}$, où $\|\cdot\|$ est la norme induite par la métrique riemannienne sur $\tilde{\nu}_N$. Soit $\delta_1 = \min(\delta_0, \delta_2, Kc/(2d^2))$. Soient $t, w \in T_x\tilde{V}$, $z \in T_x\tilde{F}$ tels que $u = t + w$, $\|w\| < K\|t\|/d$, $\|z\| = 1$, et $\tilde{\omega}_\delta(t, z)$ soit un maximum. De plus nous avons que $|\tilde{\omega}_\delta(t + w, z)| = |\tilde{\omega}_\delta(t, z) + \delta\gamma(w, z)| \geq K\delta\|t\| - \delta d\|w\| \neq 0$, pour $\delta < \delta_1$. Dans le cas où $\|w\| \geq K\|t\|/d$, soit $z \in (T_x\tilde{F})^{\eta^*\rho}$ tel que $\|z\| = 1$ et $\tilde{\omega}_\delta(w, z)$ soit un maximum. Ainsi, $|\tilde{\omega}_\delta(t + w, z)| = |\tilde{\omega}_\delta(w, z) + \delta\gamma(t, z)| \geq c\delta\|w\| - \delta d\|t\| \neq 0$, pour $\delta < \delta_1$. Par conséquent $\tilde{\omega}_\delta$ est non-dégénérée sur \tilde{V} lorsque $\delta \in (0, \delta_1]$. \square

Sans perdre de généralité, nous pouvons identifier M à un voisinage de $Z \subset \nu_N$, et \tilde{M} à un voisinage de $\tilde{Z} \subset \tilde{\nu}_N$. Nous sommes prêt à définir une forme symplectique sur l'éclatement.

Théorème 2.20. *Soit N compact. L'éclatement de (M, ω) le long de (N, κ) possède une forme symplectique $\tilde{\omega}$, égale à $\eta^*\omega$ en dehors d'un voisinage de $\eta^{-1}N$.*

Démonstration. Par le lemme 2.13 nous avons que $\pi'_{\tilde{\nu}}^*\gamma$ est exacte sur $\tilde{\nu}_0$, donc il existe une 1-forme $\mu \in H^1(\tilde{\nu}_0)$ telle que $\pi'_{\tilde{\nu}}^*\gamma = d\mu$. Soit ξ une fonction lisse valant 1 proche de \tilde{Z} et 0 proche du bord de \tilde{V} , et soit la 2-forme $\tilde{\sigma}$, égale à $\tilde{\omega}_\delta (= \eta^*\rho + \delta\pi'_{\tilde{\nu}}^*\gamma)$ sur \tilde{Z} , et à $\eta^*\rho + \delta d(\xi\mu)$ sur $\tilde{V} \setminus \tilde{Z}$. Nous avons que cette 2-forme est lisse. ρ est non-dégénérée sur V et donc $\eta^*\rho$ est non-dégénérée sur $\tilde{V} \setminus \tilde{Z}$, où η est un isomorphisme. Par le lemme 2.15 nous avons que, pour δ suffisamment petit, $\tilde{\sigma}$ est non-dégénérée sur \tilde{V} . De plus, par construction il y a un isomorphisme de fibrations $T\nu_N|_Z \rightarrow TM|_N$, donc par [W, théorème 4.1], un voisinage U de N dans (M, ω) est symplectiquement isomorphe à un voisinage V de Z dans (ν_N, ρ) . Ainsi, comme $\tilde{\sigma} = \eta^*\rho$ en dehors d'un voisinage de \tilde{Z} dans l'intérieur de \tilde{V} , nous pouvons définir $\tilde{\omega} := \begin{cases} \omega & \text{sur } \overline{M} \setminus U \\ \tilde{\sigma} & \text{sur } \tilde{V} \end{cases}$, qui est la forme symplectique voulue. \square

2.3 Formulation en terme d'action hamiltonienne

Nous verrons ici une technique due à Guillemin, Sternberg et Lerman qui utilise la réduction de Marsden-Weinstein-Meyer pour obtenir l'éclatement symplectique en un point ou le long d'une sous-variété symplectique ou lagrangienne.

Soit $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Définition 2.21. Soit (M, ω) une variété symplectique. Une S^1 -action symplectique est une famille $\varphi_t \in \text{Symp}(M, \omega), t \in S^1$, telle que $\varphi_{t+u} = \varphi_t \circ \varphi_u, \forall t, u \in S^1$.

Définition 2.22. Soit X un champ vectoriel associé à une S^1 -action symplectique, tel que $\iota(X)\omega = dH$ soit une 1-forme exacte. Dans ce cas la S^1 -action est appelée S^1 -action hamiltonienne, et l'application $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée *application moment*.

2.3.1 Éclatement symplectique d'une variété en un point

Lemme 2.23. Soit ϵ une valeur régulière de H . Il existe une forme symplectique canonique ω_ϵ sur le quotient $H^{-1}(\epsilon)/S^1$, telle que $\pi^*\omega_\epsilon = \omega|_{H^{-1}(\epsilon)}$, où $\pi : H^{-1}(\epsilon) \rightarrow H^{-1}(\epsilon)/S^1$ est la projection.

Démonstration. Voir [C]. □

Soit (M, ω) une variété symplectique dotée d'une S^1 -action hamiltonienne, et soit H l'application moment correspondante, pour laquelle a est une valeur régulière. Étant donné que nous ne travaillerons pas avec des *orbifolds*, nous supposons que la S^1 -action est libre sur $h^{-1}(a)$. Soient $M_{h>a} := H^{-1}(a, \infty)$, $M_{h\geq a} := h^{-1}[a, \infty)$ et $\overline{M}_{h\geq a}$ est égale à $M_{h\geq a}$ avec la relation d'équivalence \sim suivante : $m \sim m'$ si $m, m' \in h^{-1}(a)$ et $m = \theta.m', \theta \in S^1$ [C].

Théorème 2.24. Il existe dans $\overline{M}_{h\geq a}$ une forme symplectique ω_a telle que $\omega_a|_{M_{h>a}} = \omega$ [C].

Démonstration. Soient $(M \times \mathbb{C}, \omega \oplus \omega_0)$ et la S^1 -action hamiltonienne définie par $\theta.(m, z) = (\theta.m, e^{i\theta}z)$, $m \in M, z \in \mathbb{C}$. L'application moment correspondante est $H(m, z) = h(m) - \frac{1}{2}|z|^2$.

Nous avons alors $H^{-1}(a) = \{(m, z) \mid h(m) > a, |z| = \sqrt{2(h(m) - a)}\} \sqcup \{(m, 0) \mid h(m) = a\} = M_{h>a} \times S^1 \sqcup h^{-1}(a)$. Ceci implique que $H^{-1}(a)/S^1 = M_{h>a} \sqcup h^{-1}(a)/S^1 = \overline{M}_{h\geq a}$, et la proposition suit du lemme précédent [C]. □

Vérifions que $\overline{M}_{H\geq a} = \tilde{M}$ dans le cas où $M = \mathbb{C}^n$:

Soient z_0, z_1, \dots, z_n les coordonnées de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$, et considérons la S^1 -action hamiltonienne définie par $e^{i\theta}.z = (e^{-i\theta}z_0, e^{i\theta}z_1, \dots, e^{i\theta}z_n)$. L'application moment correspondante est $H(z) = -|z_0|^2 + |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2$.

Soit $a > 0$. Nous avons $H^{-1}(a) = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 = a + |z_0|^2\}$. Considérons les coordonnées $v_0 = z_0$ et $v_i = (a + |z_0|^2)^{-1/2}z_i, i = 1, \dots, n$. Nous avons maintenant $H^{-1}(a) = \{v \in \mathbb{C}^{n+1} \mid |v_1|^2 + \dots + |v_n|^2 = 1, v_0 \in \mathbb{C}\} = S^{2n-1} \times \mathbb{C}$. La S^1 -action devient alors $e^{i\theta}.v = (e^{-i\theta}v_0, e^{i\theta}v_1, \dots, e^{i\theta}v_n)$. $S^{2n-1} \times_{S^1} \mathbb{C}$ est donc une fibration vectorielle associée $\pi : S^{2n-1} \times_{S^1} \mathbb{C} \rightarrow S^{2n-1}/S^1$, avec fibre \mathbb{C} . De plus, $S^{2n-1}/S^1 = \mathbb{C}P^n$, et $\overline{M}_{H\geq a} \equiv H^{-1}(a)/S^1 = (S^{2n-1} \times \mathbb{C})/S^1 \equiv S^{2n-1} \times_{S^1} \mathbb{C}$. Cette fibration est égale à la fibration linéaire tautologique L vue précédemment. Nous

avons donc bien que $\overline{M}_{H \geq a}$ est l'éclatement de \mathbb{C}^n en 0 [GS].

Par le théorème de Darboux, $\forall x \in (M, \omega)$, $\exists \lambda > 0$ tel qu'un voisinage de x soit symplectomorphe à $(B(\lambda), \omega_0) \subset \mathbb{C}^n$. Nous avons que $\omega_a = \omega_0$ dans la région $\{z \in \mathbb{C}^n \mid 2a < \|z\|^2 < \lambda\}$. Nous pouvons donc retirer une boule $B(\lambda)$ plongée dans M et greffer $\tilde{B}(\lambda)$ [C].

2.3.2 Éclatement symplectique le long d'une sous-variété symplectique

Définition 2.25. La *fibration de repère* F sur une variété M est celle dont l'espace total est l'ensemble des repères dans $T_x M$, pour chaque point x de M .

Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ un repère en $T_x M$, où α_i est un vecteur dans l'espace tangent. Une action du groupe $U(n)$ sur F est définie par $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \cdot g = (\sum_{j=1}^n \alpha_j g_{j1}, \dots, \sum_{j=1}^n \alpha_j g_{jn})$, où $g \in U(n)$.

Définition 2.26. Soit $\pi : F \rightarrow N$ une fibration lisse. La *fibration verticale* de F , notée VF , est la fibration $\pi' : VF \rightarrow N$ telle que $V_x F = T_x(F_{\pi(x)})$.

Théorème 2.27 (GS). Soient M une variété symplectique, $N \subset M$ une sous-variété symplectique, et ν_N la fibration normale correspondant au plongement. Alors il existe une application moment $\phi' : V^*F^- \times \tilde{\mathbb{C}}^n \rightarrow u(n)^*$ telle que $\phi'^{-1}(0)/U(n)$ possède une forme symplectique ω_ϵ , où F est la fibration de repère correspondant à ν_N , V^*F est le dual de la fibration verticale, $u(n)^*$ est dual à l'algèbre de Lie de $U(n)$, et le - signifie que nous utilisons l'orientation opposée.

Guillemin et Sternberg appellent $\phi'^{-1}(0)/U(n)$ l'éclatement de ν_N le long de N par un montant ϵ . En considérant M comme un voisinage de la section nulle de la fibration normale, nous obtenons la construction voulue.

Démonstration. Par le théorème de Darboux-Weinstein, deux structures symplectiques dont la restriction à l'espace tangent le long de la section nulle est la même, sont symplectomorphes. Nous pouvons donc supposer que cette structure symplectique est une somme directe d'une forme symplectique sur l'espace tangent à la section nulle, et d'une forme symplectique sur l'espace tangent à la fibre.

Comme nous avons vu au début du 2.1.1 nous pouvons donner à $\mathbb{C}^n \hookrightarrow \nu_N \rightarrow N$ une structure symplectique, et donc une structure hermitienne. Soit F la fibration de repère (*frame bundle*) unitaire correspondante. F est donc une $U(n)$ -fibration, dont ν_N est la fibration associée, $\nu_N = F \times_{U(n)} \mathbb{C}^n$. En choisissant une connexion sur F nous obtenons une application $TF \rightarrow VF$, où VF est la fibration de vecteurs tangents verticaux. Ceci nous donne un plongement $\iota : V^*F \rightarrow T^*F$, où V^*F est la fibration

duale à VF . Soient ω_F la forme symplectique standard sur T^*F , et κ la forme symplectique sur N . Alors $\rho = \iota^*\omega_F + p^*\kappa$ est une forme fermée sur V^*F , où p est la projection de V^*F sur N . L'espace tangent à V^*F en n'importe quel point de la section nulle de p est la somme directe des espaces où $\iota^*\omega_F$ et $p^*\kappa$ s'annulent respectivement, donc ρ est non-dégénérée le long de la section nulle, et donc nous avons une structure symplectique dans un voisinage de cette dernière. Considérons une trivialisation locale de F , de telle sorte que F ressemble localement à $W \times U(n)$, où W est un ouvert dans N . Nous pouvons alors identifier V^*F avec $W \times T^*U(n)$. Notons que la fibration cotangente de $U(n)$ est isomorphe à $U(n) \times u(n)^*$, par l'application $\mathfrak{F} : U(n) \times u(n)^* \rightarrow T^*U(n)$, $(x, y) \mapsto (x, (dL_{x^{-1}})^T y)$, où $u(n)$ est l'algèbre de Lie de $U(n)$, et L_g est la multiplication par $g \in U(n)$ par la gauche [SL]. L'application moment est donc la projection sur $u(n)^*$. Nous obtenons donc que $\nu_N = \phi^{-1}(0)/U(n)$, où $\phi : V^*F^- \times \mathbb{C}^n \rightarrow u(n)^*$ est l'application moment, et le - signifie que nous utilisons la forme symplectique opposée. Un voisinage V_δ de ν_N hérite donc d'une structure symplectique. Par le théorème de Darboux-Weinstein nous pouvons utiliser la forme symplectique de V_δ que nous avons au départ. Soient $\pi_1 : \tilde{\mathbb{C}}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ la projection naturelle, et $\omega_\epsilon = -i\sum dz_i \wedge d\bar{z}_i + \epsilon\pi_2^*\omega_{FS}$, où $\pi_2 : \tilde{\mathbb{C}}^n \rightarrow \mathbb{C}P^{n-1}$, et ω_{FS} est la forme de Fubini-Study sur $\mathbb{C}P^{n-1}$. Pour ϵ suffisamment petit nous pouvons prendre pour acquis que $\omega_\epsilon = -i\sum dz_i \wedge d\bar{z}_i$, en dehors de $V_{\delta/2}$. Nous avons que $\tilde{\nu}_N = F \times_{U(n)} \tilde{\mathbb{C}}^n$, où $\tilde{\nu}_N$ est telle que décrite dans la section précédente. Soit $\phi' : V^*F^- \times \tilde{\mathbb{C}}^n \rightarrow u(n)^*$ l'application moment donnée par la projection. L'espace $\phi'^{-1}(0)/U(n)$, où le quotient est fait par rapport à l'action de $U(n)$ sur $(\tilde{\mathbb{C}}^n, \omega_\epsilon)$, possède donc une structure symplectique. L'application π_1 induit une contraction $\pi_1 : \phi'^{-1}(0)/U(n) \rightarrow \nu_N$, c'est à dire qu'elle est une bijection sur $\nu_N \setminus Z$, et est un symplectomorphisme sur $\nu_N \setminus V_{\delta/2}$ [GS]. \square

2.3.3 Éclatement symplectique le long d'une sous-variété lagrangienne

Soit $\pi : T^*S^n \rightarrow S^n$ la fibration cotangente de la sphère, munie de la forme symplectique standard et de la métrique standard g en coordonnées sphériques. Alors la fonction de longueur $\mu : T^*S^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\mu(x, y) = \sqrt{g_y(x, x)}$, où $y \in S^n$, $x \in (T^*S^n)_y$ s'annule sur la section nulle, et est lisse en dehors de celle-ci. Étant donné que toute fonction lisse définit les équations d'Hamilton, le flot hamiltonien correspondant existe sur le complément de la section nulle. L'éclatement de T^*S^n le long de la section nulle est donc $\overline{T^*S^n}_{\mu \geq \epsilon} = \mu^{-1}(\epsilon)/S^1 = \{(x, z) \in T^*S^n \times \mathbb{C} \mid \mu(x) - |z|^2 = \epsilon\}$ [Le].

2.4 Application

Définition 2.28. Soit (M, ω) une variété symplectique de dimension $2n$. La *capacité symplectique* de (M, ω) , notée $c(M)$, est égale à l'aire du plus grand disque équatorial possible contenu dans un plongement symplectique d'une boule de même dimension que M , quelque soit le plongement, i.e. $c(M) := \sup\{\pi r^2 \mid B^{2n}(r) \text{ plongée symplectiquement dans } M\}$.

Définition 2.29. L'*aire symplectique* d'une variété (M, ω) , notée $\omega(M)$, est l'intégration $\int_M \omega$ de la forme symplectique sur M .

Définition 2.30. Une 4-variété (2-variété complexe) est dite *réglée* si elle est une S^2 -fibration dont la base est une surface de Riemann.

Pour la suite nous aurons besoin des égalités suivantes qui se trouvent dans [La], et qui s'appliquent à une fibration orientée $Z \rightarrow \Sigma_g$, avec fibre $F = S^2$, et sections B et M_k dont la classe d'homologie est $[B], [M_k] \in H_2(Z; \mathbb{R})$, telle que $[M_k]^2 = k$:

Si $Z \rightarrow \Sigma_g$ est triviale : k est pair, $[M_k] = [M_0] + \frac{k}{2}[F]$, et $B = M_0$, (1)

Si $Z \rightarrow \Sigma_g$ est non-triviale : k est impair, $[M_k] = [M_1] + \left(\frac{k-1}{2}\right)[F]$, et $B = \frac{M_{-1} + M_1}{2}$. (2)

Théorème 2.31 (Lalonde). *Soit $\eta : V \rightarrow \Sigma_g$ une S^2 -fibration orientée, triviale ou pas, où V est une 4-variété. Si $V \neq S^2 \times S^2$, alors il existe des formes ω sur V qui donnent à celle-ci la structure d'une variété symplectique réglée, et telles qu'il existe des plongements symplectiques de boules dans (V, ω) de capacité plus grande que l'aire symplectique $\omega(B)$ de la base de la .*

Démonstration (Lalonde). Soit $(V, \omega) \rightarrow \Sigma_g$ une S^2 -fibration telle que $\omega(M_1) < \omega(F)$, où $g \geq 1$. Soient $\phi : B(r) \rightarrow V$ un plongement symplectique, $B'(r)$ l'image de $B(r)$ et J l'extension de $\phi_* J_0$ à V . Alors par [McD1, p.693], (V, J) est réglée par des courbes rationnelles J -holomorphes dont la classe est $[F]$. Soit $\pi_V : (\tilde{V}, \tilde{J}) \rightarrow (V, J)$ l'éclatement de (V, J) en $p = \phi(0)$. Par le théorème 2.6, $\tilde{\omega}$ contrôle \tilde{J} . Soit E la courbe exceptionnelle \tilde{J} -rationnelle. Alors la transformation propre de la J -fibre passant par p est une courbe exceptionnelle \tilde{J} -rationnelle dans la classe $[\tilde{F}]$. L'ensemble \tilde{F} est égal par définition à $\overline{\pi_V^{-1}(F \setminus \{p\})}$, et la transformation totale de $F = S^2$ est $F' = \pi_V^{-1}(F)$. En outre, $[\tilde{F}] = [F'] - [E]$, [Sha, chap. IV, 3.1]. Une déformation C^∞ peut rendre l'intersection de \tilde{F} avec E transversale, donc nous avons $[\tilde{F}].[E] = 1$. Ceci implique que $[F'].[E] = 0$. Ainsi, $[F'] = [F]$. En prenant en compte de tout cela nous avons $([F'] - [E])^2 = [F]^2 - [F'].[E] - [E].[F'] + [E]^2 = [S^2]^2 - 0 - 0 - 1 = -1$. L'ensemble $\overline{F' - E}$ est donc une courbe exceptionnelle E' dans \tilde{V} .

Soit $(\bar{V}, \bar{\omega})$ la contraction symplectique de E' . Nous avons ainsi contracté en un point les fibres F intersectant la courbe exceptionnelle E . Les fibres de $\bar{V} \rightarrow \Sigma_g$ sont donc les ensembles F disjoints

de E , et ceux-ci restent inchangés après cette opération, et leur auto-intersection est nulle. Par conséquent $\bar{V} \rightarrow \Sigma_g$ est une S^2 -fibration. Si cette dernière contenait une sphère exceptionnelle, celle-ci ne pourrait pas se projeter surjectivement sur Σ_g , car g est positif, et à cause de la formule de Riemann-Hurwitz. La sphère exceptionnelle ne pourrait pas non plus être contenue dans une fibre, car dans ce cas elle serait elle-même une fibre, mais celles-ci ont une auto-intersection nulle [cf. RV]. La variété \bar{V} est donc minimale. De plus, si elle était non-triviale, elle contiendrait une 2-sphère d'auto-intersection -1, donc elle est triviale [McD1, p.709].

$\bar{V} \rightarrow \Sigma_g$ est minimale et triviale, donc de (1) on obtient $[M_2] = [M_0] + [F]$. L'espace fibré $V \rightarrow \Sigma_g$ est non-trivial, donc de (2) nous obtenons que $[M_{-1}] = [M_1] - [F] \Rightarrow ([M_1] - [F])^2 = -1 \Rightarrow [M_1] \cdot [F] = 1 \Rightarrow ([M_1] + [F] - [E])^2 = 2 \Rightarrow [M_1] + [F] - [E] = [M_2]$, où nous avons utilisé le fait que M_1 est loin de la boule éclatée pour l'avant-dernière égalité. De plus, loin de la boule éclatée nous avons $\omega = \bar{\omega}$. En tenant compte de tout cela nous obtenons $\bar{\omega}([M_0]) = \bar{\omega}([M_2] - [F]) = \bar{\omega}([M_2]) - \bar{\omega}([F]) = \omega([M_1] + [F] - [E]) - \omega([F]) = \omega([M_1]) + \omega([F]) - \omega([E]) - \omega([F]) = \omega([M_1]) - \omega([E]) = \omega([M_1]) - \pi r^2$. Pour la dernière égalité, nous avons utilisé le fait que $\omega([E]) = \omega([\mathbb{C}P^1]) = \int_{\mathbb{C}P^1} r^2 \tau_0 = r^2 \int_{\mathbb{C} \cup \{\infty\}} \tau_0 = r^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2} = \pi r^2$. La contraction de E' résulte en une boule de capacité $\pi R^2 = \omega([F] - [E]) = \omega([F]) - \omega([E]) = \omega([F]) - \pi r^2 > \omega([M_1]) - \pi r^2 = \bar{\omega}([M_0]) = \bar{\omega}(B)$. Ainsi, $(\bar{V}, \bar{\omega})$ contient une boule de capacité plus grande que l'aire symplectique de sa base.

De manière similaire, il est possible d'aller dans le sens inverse, c'est à dire de partir d'une fibration triviale $S^2 \hookrightarrow (V, \omega) \rightarrow \Sigma_g$, et, en passant par un éclatement et une contraction symplectique, d'arriver à une S^2 -fibration non-triviale contenant une boule de capacité plus grande que l'aire symplectique de la base. \square

Ainsi, il apparaît que la capacité symplectique de ces variétés n'est pas en général $\min(\omega(F), \omega(B))$. D'après [La], une meilleure estimation serait $\min(\omega(F), \omega^2(V))$. De plus, ce résultat implique que le *non-squeezing theorem* ne s'applique pas pour les S^2 -fibrations sur des surfaces de genre positif.

Conclusion

L'objectif premier de ce travail était de présenter l'éclatement symplectique et un théorème de François Lalonde dont la preuve repose sur cette notion, et d'exposer les bases issues de ses prédécesseurs, dans les catégories algébrique et différentiable. En général ce but à été atteint, et permettrait d'aborder plusieurs questions. Tout d'abord, il serait intéressant de développer le lien entre l'éclatement en géométrie algébrique et symplectique, et l'extension de la notion de singularité et de sa résolution à la seconde. Depuis quelques années cette question reçoit de plus en plus d'attention, sous l'impulsion notamment du travail de Beauville dans l'article [Be]. Enfin, une question qui subsiste relativement au théorème 2.31 est si une amélioration de l'estimation de la capacité des variétés symplectiques réglées est possible.

Bibliographie

- [AK] G. Arone, M. Kankaanrinta, On the functoriality of the blow up construction, *Bull. Belg. Math. Soc.* Volume 17, Number 5 (2010), 821-832.
- [B] W. Ballmann, *Lectures on Kähler manifolds*, European Mathematical Society, 2006.
- [Be] A. Beauville, Symplectic singularities, *Invent. Math.* 139, 541–549 (2000).
- [C] W. Chen, *Notes de cours*, University of Massachusetts, Amherst, 2007.
- [EMM] C.L. Epstein, R.B. Melrose, and G. Mendoza, Resolvent of the Laplacian on strictly pseudo-convex domains, *Acta Math.* 167 (1991), no. 1-2, 1 106.
- [Ev] J. D. Evans, *Notes de cours*, ETH Zürich, 2010.
- [FG] K. Fritzsche, H. Grauert, *From holomorphic functions to complex manifolds*, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [GB] M. J. Gotay, L. Bos, Singular angular momentum mappings, *J. Differential Geometry* 24 (1986) 181-203.
- [GLS] M. M. Gotay, R. Lashof, J. Sniatycki, A. Weinstein, Closed forms on symplectic fibre bundles, *Comment Math. Helv.* 58 (1983) 617-621.
- [Gr] M. Gromov, *Partial Differential Relations*, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [GS] V. Guillemin, S. Sternberg, Birational equivalence in the symplectic category, *Invent. math.* 97, 485-522 (1989).
- [GSt] R. Gompf, A. Stipsicz, *4-manifolds and Kirby calculus*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
- [Hart] R. Hartstone, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [HL] P. Heinzner, F. Loose, A global slice theorem for proper Hamiltonian actions, *manuscripta math.* 98, 295-305 (1999).
- [La] F. Lalonde, Isotopy of symplectic balls, Gromov's radius and the structure of ruled symplectic 4-manifolds, *Math. Ann.* 300, 273-296 (1994).

- [Le] E. Lerman, Symplectic Cuts, *Mathematical Research Letters* 2, 247-258 (1995).
- [McD] D. McDuff, Examples of Symplectic Non-Kählerian Manifolds, *J. Differential Geometry*, 20 (1984), 267-277.
- [McD1] D. McDuff, The structure of rational and ruled symplectic 4-manifolds, *Journal of the American Mathematical Society*, Volume 3, Numéro 3, juillet 1990.
- [MS] D. McDuff, D. Salamon, *Introduction to Symplectic Topology*, Oxford University Press, New York, 1998.
- [RM1] R. Melrose, *Notes de cours*, MIT, Cambridge, 2006.
- [RM2] R. Melrose, *Notes de cours*, MIT, Cambridge, 2009.
- [RV] R. Vakil, *Notes de cours*, *Topics in algebraic geometry : Complex algebraic surfaces*, Stanford University, Stanford, 2008.
- [S] A. C. da Silva, Symplectic geometry, overview written for the *Handbook of Differential Geometry* vol. 2 (eds. F.J.E.Dillen and L.C.A.Verstraelen), 2004.
- [Sha] I. R. Shafarevich, *Basic Algebraic Geometry I*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1998.
- [SKKT] K. E. Smith, L. Kahanpaa, P. Kekalainen, W. Traves, *An Invitation to Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, New York, 2000.
- [SL] R. Sjamaar, E. Lerman, Stratified Symplectic Spaces and Reduction, *Ann. of Math.* (2) 134 (1991), 375–422.
- [W] A. Weinstein, Symplectic manifolds and their Lagrangian submanifolds, *Advances in Math.* 6 (1971) 329-346.