Université de Montréal

La conjecture de partitionnement des chemins

par

Audrey Champagne-Paradis

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en Mathématiques

Orientation Mathématiques fondamentales

juin 2011

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

La conjecture de partitionnement des chemins

présenté par

Audrey Champagne-Paradis

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Khalid Benabdallah

(président-rapporteur)

Ivo G. Rosenberg

(directeur de recherche)

Gena Hahn

(membre du jury)

Mémoire accepté le:

30 mai 2011

SOMMAIRE

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple fini. Soit (a, b) un couple d'entiers positifs. On note par $\tau(G)$ le nombre de sommets d'un chemin d'ordre maximum dans G. Une partition (A, B) de $V(G)$ est une $(a, b)-$partition si $\tau(\langle A\rangle) \leq a$ et $\tau(\langle B\rangle) \leq b$. Si G possède une $(a, b)-$partition pour tout couple d'entiers positifs satisfaisant $\tau(G) = a+b$, on dit que G est $\tau-$partitionnable. La conjecture de partitionnement des chemins, connue sous le nom anglais de Path Partition Conjecture, cherche à établir que tout graphe est $\tau-$partitionnable. Elle a été énoncée par Lovász et Mihók en 1981 et depuis, de nombreux chercheurs ont tenté de démontrer cette conjecture et plusieurs y sont parvenus pour certaines classes de graphes. Le présent mémoire rend compte du statut de la conjecture, en ce qui concerne les graphes non-orientés et ceux orientés.

Mots clés

Théorie des graphes, détour, chemin, chaîne, partition.

SUMMARY

Let $G = (V, E)$ be a finite simple graph. We denote the number of vertices in a longest path in G by $\tau(G)$. A partition (A, B) of V is called an $(a, b)-$partition if $\tau(\langle A\rangle) \leq a$ and $\tau(\langle B\rangle) \leq b$. If G can be $(a, b)-$partitioned for every pair of positive integers (a, b) satisfying $a + b = \tau(G)$, we say that G is $\tau-$partitionable. The following conjecture, called The Path Partition Conjecture, has been stated by Lovász and Mihók in 1981 : every graph is $\tau-$partitionable. Since that, many researchers prove that this conjecture is true for several classes of graphs and digraphs. This study summarizes the different results about the Path Partition conjecture.

Key words

Graph theory, detour, longest path, partition.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

La théorie des graphes captive tant par ses nombreuses applications que par les multiples défis théoriques qui en émanent. Les problèmes reliés à la coloration de graphes illustrent bien ce propos. Le champ d'applications de la coloration de graphes couvre notamment le problème de l'allocation de fréquences dans les télécommunications et la conception de puces électroniques. Plusieurs chercheurs se sont penchés sur le concept plus général du coloriage n-détour, qui consiste à attribuer une couleur à chaque sommet sans qu'aucun chemin d'ordre supérieur à n ne soit monochrome. C'est en 1968 que Chartrand, Geller et Hedetniem [**1**] définissent le nombre n-chromatique, $\chi_n(G)$, comme étant le plus petit nombre de couleurs requises pour effectuer un coloriage $n-$détour. Ils établissent alors la borne $\chi_n(G) \leq \left\lfloor \frac{\tau(G)-1-n}{2} \right\rfloor + 2$, si $2 \leq n \leq \tau(G) - 1$.

La conjecture de partitionnement des chemins, connue sous le nom anglais de Path Partition Conjecture, permettrait d'abaisser cette borne à $\left\lceil \frac{\tau(G)}{n} \right\rceil$ pour tout $n \geq 1$, si bien sûr on parvenait à démontrer sa véracité pour toute classe de graphe.

La conjecture de partionnement des chemins a d'abord été posée par Lovász et Mihók en 1981 et traitée dans les thèses [**2**] et [**3**]. Elle apparaît pour la première fois dans la littérature en 1983, dans un article publié par Laborde, Payan et Xuong [**4**] et ce seulement pour les graphes non-orienté. En 1995, Bondy énonce une version de la conjecture pour les graphes orientés [**5**]. Deux hypothèses plus fortes, connues sous le nom de "Path kernel conjecture" et "The maximum P_n-free set conjecture" ont été récemment montrées comme fausses par Aldred et Thomassen [**6**].

Jusqu'à tout récemment, la validité de la conjecture de partitionnement des chemins a été démontrée pour de nombreuses classes de graphes. Le présent mémoire rend compte des résultats supportant la conjecture, exposant par le fait même les concepts, stratégies et prémisses qui ont permis ces avancées.

Le lecteur trouvera au premier chapitre une introduction sommaire à la théorie des graphes ainsi que les principales définitions et notations utilisées au cours du mémoire. Le lien entre conjecture de partitionnement des chemins et $k-$coloriage y sera également expliqué.

Au second chapitre, on présente des résultats qui supportent en partie la conjecture dont plusieurs peuvent s'appliquer à toute classe de graphe. La plupart seront utilisés au chapitre suivant.

Les deux derniers chapitres rendent compte du statut de la conjecture, d'abord en ce qui concerne les graphes non-orientés au chapitre 3, puis ceux orientés au chapitre 4. En ce qui concerne les graphes non-orientés, la conjecture se vérifie pour plusieurs types de graphes. Pour ce qui est des graphes orientés, peu de résultats de ce type n'ont encore été démontrés, mais certaines pistes ont tout de même été explorées, certaines semblent prometteuses.

Chapitre 1

NOTIONS DE BASE

Le but de ce chapitre est de fournir quelques définitions de base sur certains concepts qui seront utilisés à plusieurs reprises tout au long du mémoire. Il vise également à introduire les notions importantes inhérentes au partitionnement ainsi qu'à expliciter le lien entre la conjecture du partionnement des chemins et le nombre minimum de couleurs requises pour munir un graphe d'un $n-$coloriage.

1.1. Graphes et sous-graphes

Il est à noter que tout au long du mémoire, les graphes seront *finis* et *simples*, c'est-à-dire sans arête multiple ni boucle.

Un *graphe fini* $G = (V, E)$ est défini par l'ensemble fini V dont les éléments sont appelés *sommets* de G et l'ensemble E dont les éléments sont appelés *arêtes* de G. On écrit souvent $V = V(G)$, $E = E(G)$. Une arête e est définie comme une paire de sommets distincts de G ; on appelle ces sommets les *extrémités* de e. On note par uv l'arête ayant comme extrémités les sommets u et v. On dira que deux sommets sont *adjacents (ou voisins)* s'ils sont les extrémités d'une même arête. L'ordre d'un graphe est défini comme le nombre d'éléments dans $V(G)$.

On note $N_G(x)$ l'ensemble des *voisins* d'un sommet $x \in V(G)$, c'est-à-dire :

$$N_G(x) = \{y \in V(G) \mid xy \in E(G)\}$$

Et dans le cas d'un ensemble $S \subseteq V(G)$:

$$N_G(S) = \bigcup_{s \in S} N_G(s)$$

Le *degré* d'un sommet x dans G est la cardinalité de $N_G(x)$, soit le nombre de voisins de x dans G.
On note

$$d_G(x) = |N_G(x)|$$

$$\Delta(G) = max\ \{d_G(x) \mid x \in V(G)\} \qquad \delta(G) = min\ \{d_G(x) \mid x \in V(G)\}$$

Un graphe H est un *sous-graphe* de G si $V(H) \subseteq V(G)$ et $E(H) \subseteq E(G)$. On écrira alors $H \leq G$. Un graphe $H \leq G$ est un *sous-graphe induit* dans G si $V(H) \subseteq V(G)$ et si $E(H)$ est constitué de toutes les arêtes de G dont les deux extrémités sont des sommets de H, c'est-à-dire :

$$E(H) = \{xy \in E(G) \mid x, y \in V(H) \subseteq V(G)\}$$

Dans le cas d'un sous-graphe induit, le choix d'un ensemble de sommets dans G permet à lui seul de définir correctement un sous-graphe. Pour un sous-ensemble $K \subseteq V(G)$, on notera donc simplement par $\langle K \rangle$ ou par $G\langle K \rangle$ le sous-graphe induit de G ayant K comme ensemble de sommets. L'ordre de $\langle K \rangle$ est le nombre d'éléments dans K.

Soit $H \leq G$ et $K \subseteq V(H)$. On notera par $H\langle K \rangle$ le sous-graphe induit dans H. On notera par $G - H$ le sous-graphe induit $\langle V(G) - V(H) \rangle$ et par $G - K$ le sous-graphe induit $\langle V(G) - K \rangle$

$A \subseteq V(G)$ est un *ensemble de sommets indépendants* si A ne contient aucune paire de sommets adjacents. Un tel ensemble est dit *maximal* si $E(\langle A \cup B \rangle) \neq \phi$ pour tout $B \subseteq V(G)$ non-vide. La cardinalité maximum d'un ensemble de sommets indépendants d'un graphe G est notée par $\alpha(G)$.

Une propriété P est dite *héréditaire* si tout sous-graphe d'un graphe possédant P possède aussi P. Pour un graphe G possédant une propriété héréditaire P, on dira que G appartient à la classe héréditaire de graphe $\mathscr{P}$.

Un graphe est dit *biparti* si il existe deux ensembles disjoints $A, B \subseteq V(G)$ tels que $A \cup B = V(G)$ et tels que toute arête de G possède une extrémité dans A et l'autre dans B.

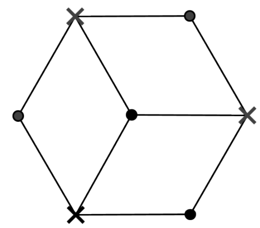

FIGURE 1.1. Graphe biparti

Un graphe G est dit *complet* si $E(G) = \{xy \mid x, y \in V(G)\}$ et $x \neq y$. Le *complément* de G, noté $\overline{G}$, est le graphe composé des mêmes sommets que G et ayant pour ensemble d'arête $E(\overline{G}) = \{xy \mid xy \notin E(G)\}$.

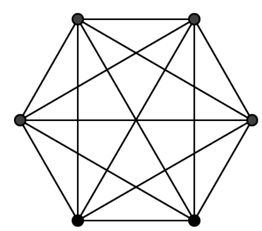

FIGURE 1.2. Graphe complet

1.2. Chemin, distance, cycle et connexité

Un $uv-$*chemin* dans G est une suite $P = x_0x_1...x_k$ de sommets distincts de G tels que $x_0 = u$, $x_k = v$ et $x_ix_{i+1} \in E(G)$ pour tout $i = 0, ..., k-1$. Les sommets u et v d'un $uv-$*chemin* P sont appelés les *extrémités* ou encore les sommets extrémaux de P. Un *cycle* C dans G est un chemin tel que $x_0x_k \in E(G)$. Un chemin (cycle) contenant tous les sommets d'un graphe est dit *hamiltonien.*

La longueur d'un chemin $x_0x_1...x_k$ est k. La longueur d'un cycle $x_0x_1...x_k$ est $k+1$. L'ordre d'un chemin (cycle) $x_0x_1...x_k$ est $k+1$.

Un graphe (sous-graphe) contenant un cycle hamiltonien est dit *hamiltonien.* Un graphe (sous-graphe) contenant un chemin hamiltonien est dit *traçable.*

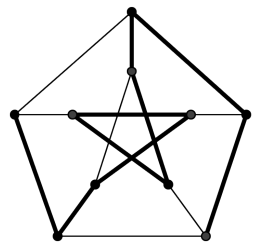

FIGURE 1.3. Graphe traçable

Un cycle d'ordre n est appelé un *n-cycle*.

On dit qu'un graphe G est *connexe* si pour toute paire de sommets $x, y \in V(G)$ il existe un $xy - chemin$. Lorsque G est non-connexe, chacun de ses sous-graphes induits connexes maximaux se nomme *composante connexe* de G.

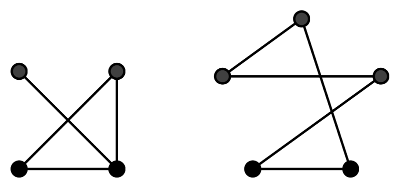

FIGURE 1.4. Graphe ayant deux composantes connexes

Un graphe connexe ne comportant aucun cycle est un *arbre*.

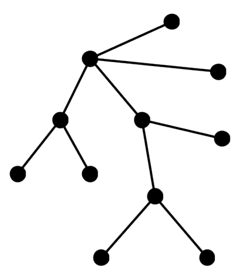

FIGURE 1.5. Arbre

Pour $u, v \in V(G)$, tels que u et v font parties d'une même composante connexe de G, la *distance* entre u et v, notée $d(u, v)$ est égale à la longueur du plus court $uv - chemin$ de G. Pour $v \in V(G)$ et H un sous-graphe de G, la distance entre v et H est : $d(v, H) = min\{d(v, u) | u \in V(H)\}$.

Soit v un sommet de G. Il est possible de partitionner $V(G)$ selon la distance des sommets à v. Notons

$$N_G^i(v) = \{x \in V(G) \mid d(x, v) = i\}$$

La *maille (resp. circonférence)* d'un graphe G qui n'est pas un arbre, noté $g(G)$ (resp. $c(G)$) est l'ordre des cycles minimaux (resp. maximaux) de G. On dira que C est un cycle minimal (resp. maximal) lorsque $|V(C)| = g(G)$ (resp.$|V(C)| = c(G)$).

Un chemin d'ordre maximum dans G est appelé un *détour* de G. Son ordre est noté $\tau(G)$. On dira que P est un chemin maximal lorsque $|V(P)| = \tau(G)$. Pour $A \subseteq V(G)$, on note par $\tau(A)$ l'ordre du détour du sous-graphe induit par A, c'est-à-dire $\tau(A) = \tau(\langle A \rangle)$.

1.3. Partitionnement et coloriage

On appelle (A, B) une partition ordonnée de $V(G)$ si $A, B \subseteq V(G), A \cup B = V(G)$ et $A \cap B = \phi$. On dira alors que G possède la partition (A, B).

Soit (a, b) une couple d'entiers positifs. Une partition (A, B) de $V(G)$ est une $(a, b) - partition$ si $\tau(A) \leq a$ et $\tau(B) \leq b$. Si G possède une $(a, b) - partition$ pour tout couple d'entiers positifs satisfaisant $\tau(G) = a + b$, on dit que G est $\tau - partitionnable$.

Le présent mémoire porte sur la conjecture suivante :

Conjecture 1. *Tout graphe est $\tau - partitionnable$.*

La proposition suivante permet de considérer uniquement les graphes connexes.

Proposition 1.3.1. *Si toutes les composantes connexes d'un graphe G sont $\tau - partitionnables$, alors G l'est aussi.*

Démonstration. Soit $H_1, ..., H_k$ les composantes connexes du graphe G. Soit a, b deux entiers positifs tels que $a + b = \tau(G)$. Montrons que G possède une $(a, b) - partition$. Puisque chaque composante connexe est $\tau - partitionnable$, il existe une partition (A_i, B_i) de $V(H_i)$ telle que $\tau(A_i) \leq a$ et $\tau(B_i) \leq b$, pour tout $i = 1, ..., k$. Posons donc

$$A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i \qquad B = \bigcup_{i=1}^{k} B_i$$

Puisque tous les A_i appartiennent à des composantes connexes distinctes, on a $\tau(A) = max\,\{\tau(A_i) : i = 1, ..., k\} \leq a$. Par le même argument, $\tau(B) \leq b$. De plus, $A \cup B$ est une union disjointe et $A \cup B = \bigcup_{i=1}^{k}(A_i \cup B_i) = \bigcup_{i=1}^{k} H_i = G$. Donc (A, B) est une $(a, b) - partition$ de $V(G)$. □

À partir d'ici, laseuls les graphes connexes seront considérés, à moins d'avis contraire.

On parle d'un *coloriage* des sommets de G lorsqu'on assigne une couleur à chaque sommet de G de telle sorte qu'aucune paire de sommets adjacents ne soit de la même couleur. Plus formellement, un *coloriage* de G est une partition $(V_1, ..., V_k)$ de $V(G)$ telle que chaque V_i est un ensemble de sommets indépendants. On parle d'un *coloriage n-détour* de G lorsqu'on assigne une couleur à chaque sommet de G de telle sorte qu'aucun chemin de plus de n sommets ne soit monochrome. C'est dire qu'un *coloriage* n – *détour* est une partition $(V_1, ..., V_n)$ de $V(G)$ telle que $\tau(V_i) \leq n$, pour $i = 1, ..., n$. Les ensembles V_i sont appelés des *couleurs*. Le nombre minimum de couleurs requises pour obtenir un *coloriage n-détour* de G est appelé le *nombre n-chromatique* de G. Il se note $\chi_n(G)$.

Conjecture 2. $\chi_n(G) \leq \left\lceil \frac{\tau(G)}{n} \right\rceil$ *pour tout graphe G et tout $n \geq 1$.*

Il a été établi que si la conjecture de partionnement des chemins est vrai, alors la conjecture 2 est aussi vraie [**7**].

Proposition 1.3.2. *Si la conjecture de partionnement des chemins est vraie, alors $\chi_n(G) \leq \left\lceil \frac{\tau(G)}{n} \right\rceil$ pour tout graphe G et tout $n \geq 1$.*

Démonstration. La preuve se fera par induction sur $\tau(G)$.

Soit n un entier positif. Si $\tau(G) \leq n$, $\chi_n(G) = 1 \leq 1$. Soit G un graphe tel que $\tau(G) = \tau > n$. Si G est $\tau - \textit{partitionnable}$, alors il existe $H \subseteq V(G)$ tel que $\tau(H) \leq n$ et $\tau(G-H) \leq \tau - n$. Par hypothèse d'induction, $\chi_n(G-H) \leq \left\lceil \frac{\tau(G-H)}{n} \right\rceil$. Ensuite, soit $V_1, ..., V_k$ un coloriage n-détour de $G - H$. Alors $V_1, ..., V_k, H$ est une partition de $V(G)$ et $\tau(V_i) \leq n$, $\tau(H) \leq n$. Donc $V_1, ..., V_k, H$ est un coloriage n-détour de G.

Alors :

$$\chi_n(G) = \chi_n(G-H) + 1 \ \leq \left\lceil \frac{\tau(G-H)}{n} \right\rceil + 1 \leq \left\lceil \frac{\tau - n}{n} \right\rceil + 1 = \left\lceil \frac{\tau(G)}{n} \right\rceil$$

$\square$

Chapitre 2

GRAPHES QUI SONT (A,B)-PARTITIONNABLES POUR A ET B SPÉCIFIQUES

Avant de nous pencher sur la $\tau-$partitionnabilité de certains graphes, nous devons étudier les charactéristiques d'un graphe qui permettent d'établir une $(a, b)-$partition particulière. Tout d'abord, rappelons la proposition 1.3.1 : si toutes les composantes connexes d'un graphe G sont $\tau - partitionnables$, alors G l'est aussi. Seuls les graphes connexes sont donc considérés. Tous les résultats apparaissant dans cette section proviennent d'un des premiers articles dans lequel on étudie en détail la $\tau-$partitionnabilité de certains graphes [**8**].

Théorème 2.0.1. *Soit G un graphe contenant un cycle et $c(G) \leq t$. Alors G est $(t-1,\, t-1)-$partitionnable.*

DÉMONSTRATION. Soit $v \in V(G)$. Posons, pour $i \geq 1$:

$$W_0 = \{v\} \qquad et \qquad W_i = \{x \in V(G) \mid d(x, v) = i\}$$

On peut affirmer que $\tau(W_j) \leq t-1\ \forall j \geq 1$. En effet, supposons qu'il existe un chemin $P \subseteq W_j$ tel que $|V(P)| \geq t$. Soit y_1 et y_2 les extrémités de P. Puisque $d(y_1, v) = d(y_2, v)$, il existe deux chemins intérieurement disjoints, nommons-les P_1 et P_2, dont l'un part de y_1 et l'autre de y_2 vers un sommet commun de $V(G) \setminus W_j$. Donc $P_1 \cup P_2 \cup P$ forme un cycle d'ordre supérieur à t, ce qui contredit l'hypothèse $c(G) \leq t$. Alors, sachant que $\tau(W_j) \leq t-1\ \forall j \geq 1$ et qu'aucun sommet de W_i n'est adjacent à un sommet de W_j pour $i \neq j \pm 1$, posons maintenant :

$$V_1 = \bigcup_{i\,pairs} W_i \qquad V_2 = \bigcup_{i\,impairs} W_i$$

(V_1, V_2) est la partition cherchée. $\square$

Proposition 2.0.2. *Tout graphe G possède une $(\tau(G)-1, 1)-$ partition.*

Démonstration. Soit V_2 un ensemble maximal de sommets indépendants de G et soit $V_1 = V(G) \setminus V_2$. Soit $P \subseteq \langle V_1 \rangle$ et soit y une extrémité de P. Alors y possède un voisin dans V_2 par la maximalité de V_2. Alors $\tau(V_1) \leq \tau(G) - 1$ et $\tau(V_2) \leq 1$. $\square$

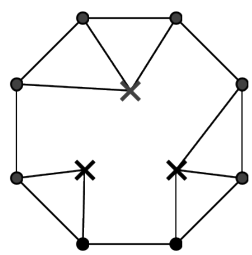

Figure 2.1. Graphe G avec $\tau(G) = 9$ et sa $(8,1)-$partition

Le lemme qui suit concerne la relation entre $\tau(G)$ et $\alpha(G)$. Il sera utile pour établir la preuve du théorème qui suivra.

Lemme 2.0.3. *Soit G un graphe. Alors $\tau(G) \leq 2\left[|V(G)| - \alpha(G)\right] + 1$.*

Démonstration. Soit S un ensemble de sommets indépendants de G tel que $|S| = \alpha(G)$. Alors

$$|V(G-S)| = |V(G)| - \alpha(G)$$

Si P est un chemin quelconque de G, alors

$$|V(P) \cap S| \leq |V(P) - S| + 1$$

En effet, puisque S est un ensemble de sommets indépendants, il ne peut y avoir deux sommets adjacents de P qui soient dans S, c'est-à-dire qu'au plus un sommet sur deux de P est dans S. C'est dire $|V(P) \cap S| \leq \left\lceil \frac{|V(P)|}{2} \right\rceil$. Aussi,

$|V(P) - S| = |V(P)| - |V(P) \cap S| \geq |V(P)| - \left\lceil \frac{|V(P)|}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{|V(P)|}{2} \right\rfloor$.
On a donc bien $1 + |V(P) - S| \geq \left\lfloor \frac{|V(P)|}{2} \right\rfloor + 1 \geq \left\lceil \frac{|V(P)|}{2} \right\rceil \geq |V(P) \cap S|$.

Soit maintenant P tel que $|V(P)| = \tau(G)$. Alors

$$\begin{aligned}
\tau(G) = |V(P)| &= |V(P) \cap S| + |V(P) - S| \\
&\leq |V(P) - S| + 1 + |V(P) - S| \\
&= 2\,|V(P) - S| + 1 \\
&\leq 2\,|V(G - S)| + 1 \\
&= 2[|V(G)| - \alpha(G)] + 1.
\end{aligned}$$

□

Théorème 2.0.4. *Soit G un graphe et soit (a, b) un couple d'entiers positifs telle que $\tau(G) = a + b$. Si*

$$\tau(G) \geq 2[|V(G)| - \alpha(G)] + 1 - a$$

alors G est $(a, b) -$ partitionnable.

Démonstration. Soit S un ensemble de sommets indépendants de G tel que $|S| = \alpha(G)$. Si $|V(G)| - \alpha(G) \leq a$, on pose

$$V_1 = V(G) - S \qquad V_2 = S.$$

Si $|V(G)| - \alpha(G) > a$, soit V_1 un sous-ensemble quelconque de $V(G) - S$ tel que $|V_1| = a$ et soit $V_2 = V(G) - V_1$. Alors $\tau(V_1) \leq a$ et, par le lemme 2.0.3 :

$$\tau(V_2) \leq 2(|V_2| - \alpha(\langle V_2 \rangle)) + 1 = 2\,[|V(G)| - a - \alpha(\langle V_2 \rangle)] + 1.$$

Puisque $\alpha(\langle V_2 \rangle) = \alpha(G)$, on a :

$$2[|V(G)| - a - \alpha(\langle V_2 \rangle)] + 1 = 2[|V(G)| - \alpha(G)] + 1 - a - a \leq \tau(G) - a = b.$$

Nous avons trouvé des partitions (V_1, V_2) satisfaisant
$\tau(V_1) \leq a$ et $\tau(V_2) \leq b$ dans les deux cas. □

On peut énoncer un concept de partition similaire à la conjecture de partitionnement des chemins, cette fois en considérant les degrés des sommets de G. On dit que G est $\Delta-$*partitionnable* si pour toute paire d'entiers positifs (k_1, k_2) telles que $k_1 + k_2 \geq \Delta(G) - 1$, on peut trouver une partition (V_1, V_2) de $V(G)$ qui respecte $\Delta(\langle V_1 \rangle) \leq k_1$ et $\Delta(\langle V_2 \rangle) \leq k_2$. Lovász a montré que tous les graphes sont $\Delta-$partitionnables. [**9**]

Théorème 2.0.5. *Si G est un graphe tel que $\Delta(G) \leq 3$, alors G est $(2,2)-$partitionnable.*

DÉMONSTRATION. Soit $(k_1, k_2) = (1,1)$. Puisque $\Delta(G) \leq 3$, alors $k_1 + k_2 = 1 + 1 = 2 \geq \Delta(G) - 1$. Par le théorème de Lovász [**9**], G est $\Delta-$partitionnable. Donc il existe une partition (V_1, V_2) de $V(G)$ telle que $\Delta(\langle V_1 \rangle) \leq 1$ et $\Delta(\langle V_2 \rangle) \leq 1$. Supposons qu'il existe un chemin P dans $\langle V_1 \rangle$ tel que $|V(P)| \geq 3$. Alors il existe un sommet v dans P tel que $d_G(v) \geq 2$, ce qui contredit $\Delta(\langle V_1 \rangle) \leq 1$. Donc $\tau(V_1) \leq 2$. Similairement, $\tau(V_2) \leq 2$ et (V_1, V_2) est donc une $(2,2)$-partition. $\square$

Théorème 2.0.6. *Soit G un graphe tel que $\tau(G) = a + b$, $1 \leq a \leq b$. Si G contient un cycle C d'ordre b, alors G est (a,b)-partitionnable.*

DÉMONSTRATION. Pour $i \geq 0$, posons :

$$W_i = \{v \in V(G - C) \mid d(v, C) = i\}$$

Soit $v_i \in V(G - C)$. Il existe un chemin $Q = v_i v_{i-1} ... v_1 v_0$ dans G tel que $v_j \in W_j$, $\forall j = 0, ..., i$.

Alors s'il existe un chemin P dans W_i d'ordre supérieur à a, alors $P \cup C \cup Q$ est un chemin d'ordre supérieur à $a + b + 1 > a + b = \tau(G)$. Donc $\tau(W_i) \leq a$, pour tout $i \geq 1$. Posons maintenant

$$V_1 = \bigcup_{i\,pairs} W_i \qquad V_2 = \bigcup_{i\,impairs} W_i$$

Puisqu'aucun sommet de W_i n'est adjacent à un sommet de W_j pour $i \neq j \pm 1$, on peut affirmer que (V_1, V_2) est la partition souhaitée. $\square$

Théorème 2.0.7. *Soit G un graphe tel que $\tau(G) = a + b$, $1 \leq a \leq b$.*
Si G a un sommet v tel que $\tau(G - \langle N_G(v) \rangle) \leq a$, alors G a une $(a,b)-$partition.

DÉMONSTRATION. Soit $N(v) = N_G(v)$. Si $\tau(N(v)) \leq b$, alors $\{G - N(v), N(v)\}$ est une $(a,b)-$partition de G. Si $\tau(N(v)) > b$, alors $\{v\} \cup P$, où P est un chemin quelconque d'ordre $b-1$ dans $N(v)$, forme un cycle d'odre b dans G. Du théorème précédent, on conclut que G possède aussi une $(a,b)-$partition dans ce cas. $\square$

Corollaire 2.0.8. *Soit G un graphe tel que $\tau(G) = a + b$, $1 \leq a \leq b$.*
Si $\Delta(G) \geq |V(G)| - a - 1$, alors G a une $(a,b)-$partition.

Démonstration. Soit v un sommet de G tel que son degré est d'au moins $|V(G)| - a - 1$. On a $E(\{v\} \cup G - \langle N_G(v) \rangle) = \phi$, donc
$\tau(G - \langle N_G(v) \rangle) \leq |G - \langle N_G(v) \rangle| - 1 \leq |V(G)| - (|V(G)| - a - 1) - 1) = a$ et nous concluons la preuve à l'aide du théorème 2.0.7. $\square$

Définition. On définit une relation binaire sur $E(G)$ par $e \sim e'$ si les arêtes e et e' sont sur un même cycle de G ou bien si $e = e'$.

Lemme 2.0.9. *La relation $\sim$ est une relation d'équivalence, c'est-à-dire qu'elle est réflexive, symétrique et transitive.*

Démonstration. Soit e_1,e_2 et e_3, des arêtes distinctes d'un graphe G. On a $e_1 \sim e_1$, car $e_1 = e_1$. Si $e_1 \sim e_2$, alors e_1 et e_2 sont sur un cycle commun, et donc $e_2 \sim e_1$. Soit e_1 l'arête xy, e_2 l'arête uv et e_3 l'arête rs. Si $e_1 \sim e_2$ et $e_2 \sim e_3$, alors il existe $P_1, P_2 \subseteq C$ tel que P_1 est un $yu-$chemin et P_2 est un $vr-$chemin. Donc $P_1 \cup P_2 \cup e_2$ contient un chemin sur C reliant y à r, donc reliant e_1 à e_3. Donc $e_1 \sim e_3$. $\square$

Définition. Il est bien connu qu'une relation d'équivalence sur $E(G)$ définit une partition de $E(G)$ en sous-ensembles de $E(G)$ non-vides, disjoints et dont l'union est $E(G)$. Un bloc B déterminé par $e \in E(G)$ est un sous-graphe de G avec $E(B) = \{x \in E(G) \mid x \sim e\}$ et $V(B) = \{u, v \in V(G) \mid uv \sim e\}$.

Pour deux blocs distincts B et B', tout élément de $V(B) \cap V(B')$ est une *articulation* de G.

Lemme 2.0.10. *Tout bloc est connexe.*

Démonstration. Soit $x, y \in V(B)$ et $xy \notin E(B)$. Soit $e_1 \in E(B)$ une arête ayant x comme extrémité et $e_1 \in E(B)$ une arête ayant y comme extrémité.

Puisque $e_1, e_2 \in E(B)$, on a $e_1 \sim e_2$. Ainsi, e_1 et e_2 font partie d'un cycle commun inclus dans B et donc x et y aussi. Il y a donc un $xy-$chemin dans B. $\square$

Lemme 2.0.11. *Deux blocs distincts de G ont au plus une articulation commune.*

DÉMONSTRATION. Soit B_1 et B_2 deux blocs distincts de G. Supposons qu'il existe deux sommets x, y dans $V(B_1) \cap V(B_2)$. Puisque B_1 et B_2 sont distincts, il existe P_1 un $xy-$chemin de B_1 et P_2 un $xy-$chemin de B_2 tels que P_1 et P_2 sont intérieurement disjoints. $P_1 \cup P_2$ forme un cycle reliant au moins une arête de B_1 à une arête de B_2, ce qui contredit le fait que B_1 et B_2 sont distincts.

$\square$

Définition. On note par B_G l'ensemble des blocs de G et on définit un graphe Γ_G par :
$V(\Gamma_G) = B_G$ et
$E(\Gamma_G) = \{BB' \mid B, B' \in B_G$ où B et B' ont une articulation commune.$\}$

Lemme 2.0.12. *Pour G connexe, le graphe Γ_G est un arbre.*

DÉMONSTRATION. Supposons d'abord que Γ_G contient un cycle C. Soit $B_1, B_2 \in V(C)$. Il existe P_1 et P_2 deux B_1B_2-chemins intérieurement disjoints dans Γ_G. Soit $x \in V(B_1)$ et $y \in V(B_2)$. Il existe $P_1' \subseteq P_1$ et $P_2' \subseteq P_2$ deux $xy-$chemins intérieurement disjoints de G. Donc il existe un cycle dans G contenant x et y, ce qui contredit que B_1 et B_2 soient deux blocs distincts de G. Donc Γ_G est acyclique. De plus, si il existe B_1, $B_2 \in V(\Gamma_G)$ tels qu'il n'existe aucun B_1B_2-chemin dans Γ_G, alors il existe $x \in V(B_1)$ et $y \in V(B_2)$ tels qu'il n'existe aucun $xy-$chemin dans G. Puisque G est connexe, ceci est une contradiction.
Ayant montré que Γ_G est connexe et acyclique, on conclut que Γ_G est un arbre. $\square$

Définition. Chaque feuille de Γ_G représente donc un bloc de G. Nous dirons qu'un tel bloc est un *bloc extrémal.*

Enfin, nous dirons que deux blocs sont *incidents* s'ils partagent une articulation.

Peut-être pourrait-on prouver la conjecture du partitionnement des chemins en montrant que si tous les blocs de G sont $\tau-$partitionnables, alors G l'est aussi. Pour l'instant, seul un résultat partiel supporte une telle approche. On peut en effet montrer comment certains graphes peuvent être $(a,b)-$partitionnés en utilisant le partitionnement de ses blocs.

Théorème 2.0.13. *Soit G un graphe tel que $\tau(G) = a+b$ et $1 \leq a \leq b$. Supposons que tout bloc B de G a une (a,b)-partition et que pour toute articulation $x \in B$ nous avons $\tau(N_B(x)) \leq a$ et $\tau(B - N_B(x)) \leq a$.*
Alors G possède une $(a,b) -$ partition.

Démonstration. On procède par induction sur le nombre de blocs de G. Si G n'est composé que d'un seul bloc, l'énoncé est clairement vrai. Maintenant, supposons l'énoncé vrai pour tout graphe ayant au plus $r-1$ blocs et soit G un graphe ayant $r \geq 2$ blocs. Soit B un bloc extrémal de G et soit $x \in B$ une articulation de G. Par l'hypothèse d'induction, le graphe $\langle V(G-B) \cup \{x\} \rangle$ a une (a,b)-partition (V_1', V_2').
1) Si $x \in V_1'$, on définit

$$V_1 = V_1' \cup V(B - N_B(x)) \qquad V_2 = V_2' \cup N_B(x)$$

Alors $\tau(V_1) \leq b$ et $\tau(V_2) \leq a$, car $\tau(V_1) = max\,\{\tau(V_1'), \tau(B - N_B(x))\}$, du fait qu'il n'y a pas d'arête entre V_1' et $V(B - N_B(x))$. Il en va de même pour $\tau(V_2)$.
2) Si $x \in V_2'$, on procède similairement en posant

$$V_1 = V_1' \cup N_B(x) \qquad V_2 = V_2' \cup V(B - N_B(x))$$

$\square$

Chapitre 3

STATUT DE LA CONJECTURE POUR LES GRAPHES NON-ORIENTÉS

3.1. Graphes qui sont $\tau-$partitionnables

Plusieurs classes de graphes peuvent être facilement identifiées comme étant $\tau-$partitionnables. C'est le cas des graphes complets et de tous les graphes admettant un chemin hamiltonien.

Aussi, les graphes bipartis sont tous $\tau-$partitionnables, puisque ces derniers admettent une $(1,1)-$partition. En effet, pour (a,b) deux entiers satisfaisant $a+b=\tau(G)$ et $1 \leq a \leq b$, on prend (A,B) une $(1,1)$-partition de G et on obtient $\tau(A) \leq 1 \leq a$ et $\tau(B) \leq 1 \leq b$.

Définition. Pour un graphe non biparti G, on définit son *index de bipartition* r comme étant le nombre minimal de sommets qu'on doit enlever à G pour le rendre biparti :

$$r = min\,\{|R| \mid R \subseteq V(G) : G - R\, est\, biparti\}.$$

Est-ce que certaines valeurs de r nous garantissent la $\tau-$partitionnabilité ? La réponse est oui, comme l'indique le théorème suivant [**7**] :

Théorème 3.1.1. *Si l'index de bipartition r d'un graphe est au plus $\frac{\tau(G)-3}{2}$, alors G est $\tau-$partitionnable.*

Démonstration. Soit $\tau(G) = a + b$, où $1 \leq a \leq b$. Soit R un ensemble de r sommets de G tel que $G - R$ est biparti et tel que R est un ensemble minimal. Puisque $G - R$ est biparti, il existe (S_1, S_2) une partition de $V(G-R)$ telle que S_1 et S_2 sont deux ensembles de sommets indépendants. Soit $R_1 \subseteq R$ tel que $|R_1| = \lfloor \frac{a-1}{2} \rfloor$ et $R_2 = R - R_1$. Posons

$$V_1 = R_1 \cup S_1 \qquad V_2 = R_2 \cup S_2.$$

Soit $P = x_0x_1...x_n$ un chemin de V_i , pour $i \in \{1,2\}$. Puisque S_i est un ensemble de sommets indépendants, il n'y a pas de sommets adjacents sur P qui sont tous deux dans S_i. Donc P sera "saturé" des sommets de S_i si $P = x_0x_1...x_n$, avec $x_{2j} \in S_i$ et $x_{2j+1} \in R_i$, pour $j = 0, 1, ..., n-1$. Alors $|P| = |R_i \cap P| + |S_i \cap P| \leq |R_i| + (|R_i| + 1)$. Ainsi, si $|P|$ est un chemin de $\langle V_i \rangle$, alors $|P| \leq 2|R_i| + 1$, pour $i = 1, 2$. Donc,

$$\begin{aligned}
\tau(V_1) \leq 2|R_1| + 1 &= 2(\lfloor \tfrac{a-1}{2} \rfloor) + 1 \leq (a-1) + 1 = a \\
\tau(V_2) \leq 2|R_2| + 1 &\leq 2(r - \lfloor \tfrac{a-1}{2} \rfloor) + 1 \\
&\leq 2(\tfrac{\tau(G)-3}{2}) - 2\lfloor \tfrac{a-1}{2} \rfloor) + 1 \\
&\leq (a+b) - 3 - (a-2) + 1 = b.
\end{aligned}$$

Puisque $V_1 \cup V_2 = V(G)$ et que $V_1 \cap V_2 = \phi$, (V_1, V_2) est une (a,b)-partition de G.

□

Le résultat suivant concerne la relation entre le degré maximum $\Delta(G)$ d'un graphe G et sa $\tau-$partitionnabilité [**8**].

Théorème 3.1.2. *(i) Si G est un graphe tel que $\Delta(G) \geq |V(G)| - 9$, alors G est $\tau-$partitionnable.*

(ii) Si G est un graphe tel que $\Delta(G) \leq 3$,alors G est $\tau-$partitionnable.

Démonstration. Soit (a, b) un couple d'entiers positifs satisfaisant $a + b = \tau(G)$, où $a \leq b$. Nous verrons dans la section suivante (théorème 3.2.11) que si $a \leq 7$, alors G possède une $(a, b)-$partition. Soit donc $a \geq 8$.

(i) On a $\Delta(G) \geq |V(G)| - 9 \geq |V(G)| - a - 1$. Par le corollaire 2.0.8, G possède une $(a, b)-$partition.

(ii) Le théorème 2.0.5 stipule que si $\triangle(G) \leq 3$, alors G est $(2, 2)-$partitionnable. Donc G possède une (a, b)-partition dès que $a \geq 2$. □

Définition. Soit G est un graphe. On dit que G est *2-dégénéré* si pour tout sous-graphe induit $G' \leq G$ on a que $\delta(G') \leq 2$.

Il s'agit d'une classe de graphes dont la $\tau-$partitionnabilité se prouve assez aisément [**7**] :

Théorème 3.1.3. *Soit G un graphe 2-dégénéré et soit (a, b) un couple d'entiers positifs telle que $\tau(G) = a + b$. Alors G a une $(a, b)-$partition.*

Démonstration. La preuve est par induction sur l'ordre n de G. Soit d'abord G d'ordre $n = 2$. Comme G ne possède que 2 sommets, $\tau(G) \leq 2$. Par la proposition 2.0.2, G possède une $(1, 1)$-partition. Donc G est τ-partitionnable. Supposons maintenant l'énoncé vrai pour tout graphe d'ordre $n - 1$, avec $n \geq 3$.
Soit G un graphe 2-dégénéré tel que $V(G) = n$. Soit v un sommet de G tel que $d_G(v) = \delta(G)$. Alors, comme G est 2-dégénéré, $d_G(v) \leq 2$ et $G - v$ est aussi 2-dégénéré. Soit maintenant a et b, deux entiers positifs, tels que $a + b = \tau(G)$. Par hypothèse d'induction, le graphe $G - v$ possède une partition (A, B), telle que $\tau(A) \leq a$ et $\tau(B) \leq b$. Supposons que $N_G(v) \cap A = \phi$. Alors $(A \cup \{v\}, B)$ est une $(a, b)-$partition de G. Par symétrie, il existe une $(a, b)-$partition de G si $N_G(v) \cap B = \phi$. Donc supposons que v a un voisin dans A, nommons-le x, et un autre voisin dans B, nommons-le y. Notons que puisque $d_G(v) \leq 2$, les sommets x et y sont les seuls voisins de v dans G. Si x n'est le sommet extrémal d'aucun chemin d'ordre a dans A, alors $(A \cup \{v\}, B)$ est une $(a, b)-$partition de G. Par symétrie, on a une $(a, b)-$partition de G si y n'est le sommet extrémal d'aucun chemin d'ordre b dans B. Supposons par l'absurde que x est un sommet extrémal d'un chemin P d'ordre a dans A et y un sommet extrémal d'un chemin Q d'ordre b dans B. Alors $P \cup v \cup Q$ est un chemin d'ordre $a + b + 1$ dans G et on a la contradiction $\tau(G) > a + b$. □

Le dernier résultat de cette section concerne les graphes décomposables [**8**].

Définition. Soit G_1 et G_2 deux graphes tels que $V(G_1) \cap V(G_2) = \phi$. On note $G_1 + G_2$ le graphe obtenu en *joignant* G_1 et G_2 ensemble, c'est-à-dire le graphe ayant pour ensemble de sommets $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ et pour ensemble d'arêtes $E(G_1 + G_2) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv \mid u \in V(G_1)\ et\ v \in V(G_2)\}$.

Un graphe G est dit *décomposable* s'il est possible d'écrire $G = G_1 + G_2$, où G_1, G_2 sont deux sous-graphes de G.

Un graphe G est dit *k-τ-saturé* si $\tau(G) \leq k$ et $\tau(G+e) > k$ pour tout $e \in E(\overline{G})$.

Dans la preuve du prochain théorème, on use du lemme suivant concernant les graphes k-τ-saturés décomposables dont la preuve est donné dans [**25**].

Lemme 3.1.4. *Un graphe k-τ-saturé est décomposable si et seulement si* $\Delta(G) = |V(G)| - 1$.

Théorème 3.1.5. *Soit G un graphe décomposable. Alors G est τ-partitionnable.*

Démonstration. Soit $k = \tau(G)$. Il est à noter que pour un graphe G tel que $\tau(G) = k$, on peut toujours ajouter à G les arêtes nécessaires afin de le rendre k-τ-saturé. En d'autres mots, il existe H un graphe k-τ-saturé tel que $G \leq H$ et $V(H) = V(G)$. Soit donc H un graphe k-τ-saturé tel que $G \leq H$ et $V(H) = V(G)$. Puisque H contient G un graphe décomposable ayant le même ensemble de sommets que H, il existe H_1, H_2 deux sous-graphes de H tels que $H = H_1 + H_2$. H est donc un graphe k-τ-saturé décomposable contenant G. Par le lemme 3.1.4, $\Delta(H) = |V(H)| - 1$. Par le théorème 3.1.2, H est τ-partitionnable et donc G, son sous-graphe, l'est aussi. □

3.2. Conjecture de partitionnement des chemins et P_n-noyau

Dans le but de résoudre la conjecture de partitionnement des chemins, Dunbar et Frick ont étudié [**10**] les conditions permettant de conclure à l'existence d'un P_n-noyau. Ils ont ainsi révélé plusieurs classes de graphes $\tau-$partitionnables.

Définition. Soit $n \geq 2$ un entier. Soit K un sous-ensemble de $V(G)$.
$v \in V(G)$ est un sommet P_n-*terminal* de $\langle K \rangle$ si v est une extrémité d'un chemin d'ordre n, mais pas d'un chemin d'ordre $n+1$ dans $\langle K \rangle$.

On dit que K est un $P_n -$ *seminoyau* de G si

(1) $\tau(K) \leq n - 1$

(2) Tout sommet de $N_G(K) - K$ est adjacent à un sommet $P_{n-1}-$terminal de $\langle K \rangle$.

On dit que K est un $P_n - noyau$ de G si

(1) $\tau(K) \leq n-1$

(2) Tout sommet de $V(G) - K$ est adjacent à un sommet $P_{n-1}-$terminal de $\langle K \rangle$.

Notons que si $\tau(G) < n$, alors $V(G)$ est lui-même un P_n-seminoyau ainsi qu'un P_n-noyau. De plus, si $\tau(G) \geq n$, alors nécessairement $\tau(K) = n-1$, autant pour K un P_n-noyau que pour K un P_n-seminoyau.

Définition 3.2.1. Un ensemble $S \subseteq V(G)$ est appelé un ensemble $P_{n+1}-libre$ de G si $\tau(S) \leq n$. Un ensemble M $P_{n+1} - libre$ est *maximal* si pout tout $x \in V(G)$, on a $\tau(M \cup \{x\}) > n$.

Évidemment, tout P_n-noyau d'un graphe est aussi un P_n-seminoyau du même graphe. L'inverse n'est pas vrai. Cependant, le théorème qui suit assure que si tous les graphes d'une certaine classe héréditaire $\mathscr{P}$ de graphes possèdent un P_n-seminoyau pour un certain n, alors tous graphes de la classe $\mathscr{P}$ possèdent aussi un P_n-noyau.

Proposition 3.2.2. *Soit n un entier tel que $n \geq 2$. Soit $\mathscr{P}$ une classe héréditaire de graphes. Si tout graphe dans $\mathscr{P}$ possède un P_n-seminoyau, alors tout graphe dans $\mathscr{P}$ a aussi un P_n-noyau.*

Démonstration. La preuve est par induction sur le nombre de sommets du graphe. Supposons d'abord $\mathscr{P}$ une classe héréditaire de graphe telle tout graphe dans $\mathscr{P}$ possède un P_n-seminoyau. Supposons ensuite G appartenant à la classe $\mathscr{P}$ tel que $|V(G)| = 2$ et soit K un P_2-seminoyau de G. Puisque G n'a que 2 sommets, $V(G-K) = \phi$ et donc, par défaut, K est aussi un P_2-noyau G. Soit maintenant $m \geq 3$ un entier. Posons l'hypothèse d'induction suivante : tout graphe dans $\mathscr{P}$ d'ordre inférieur à m possède un P_n-noyau. Soit ensuite G un graphe dans $\mathscr{P}$ tel que $|V(G)| = m$. Si $|V(G)| < n$, alors $V(G)$ est un P_n-noyau de G. Supposons donc $|V(G)| \geq n$. Soit S un P_n-seminoyau de G.

Si $G - N_G(S)$ est vide, alors tout sommet de G est voisin d'un sommet dans S et donc $N_G(S) - S = V(G) - S$. Par la définition d'un P_n-seminoyau, tout sommet de $V(G) - S$ est adjacent à un sommet $P_{n-1}-$terminal de $\langle S\rangle$. C'est donc dire que S est un P_n-noyau de G. Dans le cas où $G - N_G(S) \neq \phi$, puisque $G - N_G(S)$ est aussi dans $\mathscr{P}$, par hypothèse d'induction, $G - N_G(S)$ possède un P_n-noyau, que nous nommerons K. Puisque $K \subseteq G - N_G(S)$, il n'y a aucune arête ayant une extrémité dans K et l'autre dans S. Donc $\tau(K \cup S) = n - 1$. De plus, K étant un P_n-noyau de $G - N_G(S)$, tout sommet de $V(G) - N_G(S) - K$ est adjacent à un sommet $P_{n-1}-$terminal de K. Or, si v est un sommet de $V(G) - (K \cup S)$, alors soit $v \in N_G(S) - S$, soit $v \in V(G) - N_G(S) - K$. Dans les deux cas, on a que $v \in V(G) - (K \cup S)$ est adjacent à un sommet $P_{n-1}-$terminal de $K \cup S$. Donc $K \cup S$ est un P_n-noyau de G. □

La relation entre P_n-noyau et partitionnabilité est exposée dans la proposition suivante.

Proposition 3.2.3. *Soit G un graphe tel que $\tau(G) = a + b$, où a et b sont deux entiers positifs. Si G a un $P_{a+1}-$noyau, alors G est (a, b)-partitionnable.*

Démonstration. Soit K un $P_{a+1}-$noyau de G. Puisque $b > 0$, on sait que $\tau(G) \geq a + 1$. Si $\tau(K) \leq a - 1$, alors $k \neq V(G)$ et il n'y a aucun sommet P_a-terminal dans K, ce qui contredit la définition d'un $P_{a+1}-$noyau. Donc $\tau(K) = a$. Maintenant, supposons P un chemin de $G - K$ tel que $|V(P)| > b$. Soit x un sommet extrémal de P. On a que x est adjacent à un sommet P_a-terminal de $\langle K\rangle$, alors il existe un chemin d'ordre supérieur à $b + a$, ce qui contredit $\tau(G) = a + b$. Donc $\tau(G - K) \leq b$, et ainsi on peut affirmer que $(K, V(G - K))$ est une $(a, b)-$partition de G. □

Cette relation entre P_n-noyau et $(a, b)-$partitionnabilité pourrait inciter à formuler une deuxième hypothèse : tout graphe possède un P_n-noyau pour chaque entier $n \geq 2$. Une fois prouvée, ceci suffirait à garantir que tout graphe est $\tau-$partitionnable.

Malheureusement, Aldred and Thomassen [**6**] ont récemment construit un graphe ne possédant pas de $P_{364}-$noyau. Cette voie n'est donc pas concluante pour prouver la conjecture de partitionnement des chemins. Cependant, elle permet de prouver plusieurs résultats quant aux classes de graphes admettant une τ-partition. Pour ce faire, on présente dans les lignes qui suivent quelques résultats relatifs aux P_n-noyaux.

Lemme 3.2.4. *Si C est un cycle d'ordre $n-1$ de G, alors C est un P_n-seminoyau de G.*

Démonstration. Le cycle C est d'ordre $n-1$, alors $\tau(C) = n-1$ et, puisque C est un cycle, chaque sommet de C est $P_{n-1}-$terminal.
Donc si $v \in N_G(C) - V(C)$ et alors v est adjacent à un sommet $P_{n-1}-$terminal de C. Alors C est un P_n-seminoyau. □

Lemme 3.2.5. *Tout graphe G possède un P_n-noyau, pour $2 \leq n \leq 5$.*

Démonstration. La classe de graphe qui regroupe tous les graphes est héréditaire, car tout sous-graphe est un graphe. En considérant la classe de graphe qui regroupe tous les graphes, il suffit de montrer que tout graphe G a un P_n-seminoyau pour $2 \leq n \leq 5$, ce qui implique l'existence d'un P_n-noyau, selon la proposition 3.2.2. Notons que si $\tau(G) < n$, alors $V(G)$ est un P_n-noyau de G. Prenons donc pour chaque cas G tel que $\tau(G) \geq n$.

Supposons $n = 2$.
Soit $x \in V(G)$. Posons $S = \{x\}$. On a $\tau(S) = 1 = n-1$ et $N_G(S) - S = N_G(x)$. S est donc un P_2-seminoyau.
Supposons $n = 3$.
Rappelons qu'on suppose $\tau(G) \geq n = 3$. Donc il existe $uv \in E(G)$. Soit $S = \{u, v\}$. On a bien que tout sommet de $N_G(S) - S$ est adjacent à u ou v, deux sommets P_2-terminal de S.
Supposons $n = 4$.
Rappelons qu'on suppose $\tau(G) \geq n = 4$. Donc il existe un chemin Q d'ordre 4 dans G. Soit $u, v \in V(Q)$ tel que $uv \in E(G)$ et $N_G(u) \neq \phi$.
Soit $S = \{u, v\} \cup N_G(u)$. Soit $\{x_1, x_2, ..., x_n\} = N_G(u)$. Si $E(N_G(u)) = \phi$, alors

$E(S) = \{uv, ux_1, ux_2, ..., ux_n\}$. Donc tout chemin maximal P dans S est de la forme $P = x_i uv$. Donc $\tau(S) = 3$ et les sommets P_3-terminal de S sont v et $N_G(u)$. De plus, $N_G(S) - S = N_G(v) \cup N_G^2(u)$. Donc tous sommets de $N_G(S) - S$ est adjacent à v ou à un sommet de $N_G(u)$. Nous avons donc bien que S est un P_4-seminoyau. Ensuite, si $E(N_G(u)) \neq \phi$, alors il existe un cycle d'ordre 3. Selon le lemme 3.2.4, G possède donc un P_4-seminoyau.

Supposons $n = 5$.

Si G possède un $4-$cycle, alors par le lemme 3.2.4, le graphe G possède un P_5-seminoyau. Alors soit G un graphe sans $4-$cycle. Rappelons qu'on suppose $\tau(G) \geq n = 5$. Donc G possède un chemin d'ordre 4. Soit $P = cuvd$ un tel chemin. Comme G n'a pas de $4-$cycle, $xy \notin E(G)$ pour tout $x \in N_G(u) \setminus \{v\}$ et $y \in N_G(v) \setminus \{u\}$. Posons $J = N_G(u) \cap N_G(v)$. Alors $|J| \leq 1$, car s'il existait deux sommets distincts $a, b \in J$, alors $uavbu$ serait un $4-$cycle dans G. Soit I_1 (I_2) un ensemble maximale de sommets indépendants dans $N_G(u) \setminus (\{v\} \cup J)$ (dans $N_G(v) \setminus (\{u\} \cup J)$.

a) Supposons $|J| = \phi$. Rappelons qu'on a le chemin $P = cuvd$ dans G. Puisque $|J| = \phi$ et que $c \in N_G(u) \setminus \{v\}$, on a $I_1 \neq \phi$. Il en va de même pour I_2. Posons $S = I_1 \cup I_2 \cup \{u, v\}$. Puisque I_1 et I_2 sont 2 ensembles de sommets indépendants et puisque pour $x \in I_1$ et $y \in I_2$, on a le chemin $xuvy$, alors $\tau(S) = 4$. Il est facile de voir que $I_1 \cup I_2$ consiste en l'ensemble des sommets P_4-terminaux de S. Supposons maintenant par l'absurde qu'il existe $z \in N_G(S) - S$ tel que z n'est pas adjacent à un sommet P_4-terminal de S, c'est-à-dire tel que $z \notin N_G(I_1 \cup I_2)$. Alors $z \in N_G(u) \setminus (I_1 \cup \{v\})$ ou $z \in N_G(v) \setminus (I_2 \cup \{u\})$. Dans le premier cas, z a un voisin dans I_1, par la maximalité de I_1. Le deuxième cas est symétrique.

b) Supposons $|J| = 1$. On considère cette fois le chemin $P = cuvd$, en choisissant $c \in J$, c'est-à-dire que $c \in N_G(u) \cap N_G(v)$. Dans ce cas, $d \in N_G(v) \setminus (J \cup \{u\})$ et alors $I_2 \neq \phi$. Posons $S = \{u, c, v\} \cup I_2$. Puisque I_2 est un ensemble de sommets indépendants maximal, on a que $ucvx$ et $cuvx$ sont les chemins d'ordre maximum de S, avec $x \in I_2$. Donc $\tau(S) = 4$ et $I_2 \cup \{c\} \cup \{u\}$ sont les sommets $4-$terminaux de S. Supposons par l'absurde qu'il existe $z \in N_G(S) - S$ tel que

z n'est pas adjacent à un sommet P_4-terminal de S. Alors $z \notin N_G(I_2 \cup \{c, u\})$. Donc $z \in N_G(v) \setminus (\{u\} \cup J)$. Par la maximalité de I_2, z a un voisin dans I_2.

$\square$

Lemme 3.2.6. *Soit G un graphe. Soit $n \geq 2$. Si $g(G) = n - 2$, alors G a un P_n-seminoyau.*

Démonstration. Par le lemme 3.2.5, G possède un P_n-seminoyau pour $n \leq 5$. Aussi, il a été montré dans **[3]** que tout graphe a un P_6-seminoyau. Dans cette preuve, on peut donc supposer $n \geq 7$.

Si $\tau(G) \leq n$, alors $V(G)$ est un P_n-seminoyau. On peut donc supposer $\tau(G) \geq n$.

Soit C un cycle minimal de G. Par hypothèse, C est d'ordre $n - 2$.
Soit $A = \{x \in V(C) \mid N_{G-C}(x) \neq \phi\}$. Puisque G est connexe et que $\tau(G) \geq n$, on a $A \neq \phi$. Soit I un ensemble de sommets indépendants maximal inclus dans A. Posons

$$S = V(C) \cup N_{G-C}(I)$$

Soit $x, y \in V(C)$ tel que $N_{G-C}(x) \neq \phi \neq N_{G-C}(y)$. Supposons qu'il existe $u_1, u_2 \in N_{G-C}(x)$ tels que $u_1u_2 \in E(G)$. Alors il existe un cycle $C' = u_1xu_2u_1$ d'ordre 3. Or, puisque $n \geq 7$, on a $g(G) \geq 5$. Donc aucuns sommets de $N_{G-C}(x)$ ne sont voisins entre eux pour tout $x \in V(C)$.
Soit maintenant $a \in N_{G-C}(x)$ et $b \in N_{G-C}(y)$. Supposons $ab \in E(G)$ ou encore $a = b$. Soit Q le plus court xy-chemin tel que $Q \subseteq C$. Alors

$$|V(Q)| \leq \frac{|V(C)| + 2}{2} = \frac{n - 2 + 2}{2} = \frac{n}{2}.$$

$Q \cup \{a, b\}$ contient donc un cycle C' d'ordre inférieur ou égal à $\frac{n}{2} + 2 = \frac{n+4}{2}$. Rappelons qu'on considère $n \geq 7$. Or,

$$n > 8 \Leftrightarrow 2n > 8 + n \Leftrightarrow 2n - 4 > n + 4 \Leftrightarrow n - 2 > \frac{n + 4}{2}.$$

Alors $|V(C')| < n - 2$ et il y a contradiction avec $g(G) = n - 2$.

Nous venons de montrer que $N_{G-C}(I)$ forme un ensemble de sommets indépendants. Donc tout chemin maximal dans S est de la forme $vy_1...y_{n-2}$ ou de la forme $vy_1...y_{n-3}u$ avec $v, u \in N_{G-C}(I)$, $y_1...y_{n-3} \in V(C)$ et $y_{n-2} \in N_C(I)$. Donc $\tau(S) = n-1$ et les sommets $P_{n-1}-$terminaux de S sont $N_G(I)$.

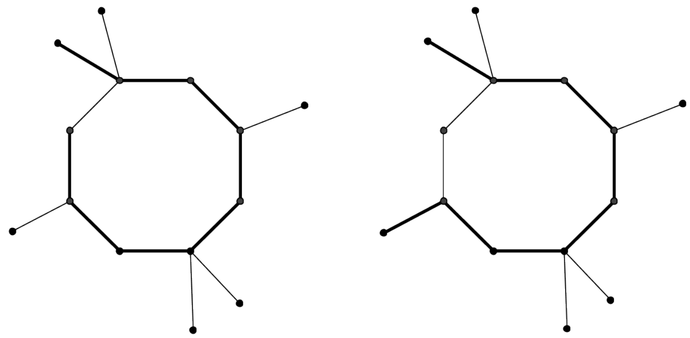

FIGURE 3.1. Exemples de chemin maximaux dans S

Soit $z \in N_G(S) - S$. Si $z \in N_{G-C}(C)$, alors il existe w un voisin de z tel que $w \in V(C)$ et $w \notin I$. Par la maximalité de I, $w \in N_G(I)$, donc w est un sommet $P_{n-1}-$terminal de S. Si $z \notin N_{G-C}(C)$, alors $z \in N^2_{G-C}(I)$. Dans ce cas, z est également adjacent à un sommet $P_{n-1}-$terminal de S. Alors tout sommet de $N_G(S) - S$ est adjacent à un sommet $P_{n-1}-$terminal de S, qui est donc un P_n-seminoyau.

□

Lemme 3.2.7. *Soit G un graphe et $n \geq 2$. Si $g(G) \geq n$, alors G a un P_n-seminoyau.*

DÉMONSTRATION. Si $\tau(G) < n$, alors $V(G)$ est un P_n-seminoyau. Donc considérons G tel que $\tau(G) \geq n$. Soit $P = x_1x_2...x_{n-1}$ un chemin d'ordre $n-1$ de G. Pour $i = 1, ..., \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$, posons

$$A_i = \{v \in V(G) \mid d(v, x_i) \leq i\}$$

et pour $i = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \ldots, n-1$, posons

$$A_i = \{v \in V(G) \mid d(v, x_i) \leq n-i\}.$$

Posons ensuite

$$S = \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$$

(1) Puisque G n'a aucun cycle d'ordre plus petit que n, chaque graphe $\langle A_i \rangle$ est acyclique. De plus, $\langle A_i \rangle$ est connexe, car pour tout $y, z \in A_i$, il existe un chemin dans $\langle A_i \rangle$ allant de y à x_i et de x_i à z. Alors $\langle A_i \rangle$ est un arbre pour tout i. Soit $v \in A_i$. Puisque A_i est un arbre, il n'existe qu'un seul chemin reliant v à x_i. Soit P un tel chemin. On a $|V(P)| = d(v, x_i) \leq i$, pour $i = 1, ..., \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ et $|V(P)| = d(v, x_i) \leq n - i$, pour $i = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, ..., n-1$.

(2) Montrons maintenant que $\tau(S) = n-1$. Penchons-nous d'abord sur les chemins de S qui sont de la forme $v_1 v_2 ... v_r x_i x_{i+1} ... x_{i+k} w_i ... w_l$ avec $v_j \in A_i$ et $w_j \in A_{i+k}$ et $x_j \in V(P)$. Soit $R = v_1 v_2 ... v_r$, $Q = w_1 w_2 ... w_l$ et $P' = x_i x_{i+1} ... x_{i+k}$. On doit considérer 3 cas.

a) $i, i+k \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$. Alors $|V(R) \cup V(Q) \cup V(P')| \leq i + (i+k) + (k-1) = (i+k) + (i+k) - 1 \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor - 1 \leq n-1$.

b) $i \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ et $i+k \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. Alors $|V(R) \cup V(Q) \cup V(P')| \leq i + (n-i-k) + (k-1) = n-1$.

c) $i, i+k \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. Alors $|V(R) \cup V(Q) \cup V(P')| \leq n - i + (n-i-k) + (k-1) = 2(n-i) - 1 \leq 2(n - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil) - 1 \leq n-1$.

Dans les 3 cas, on constate que les chemins de la forme $v_1 v_2 ... v_r x_i x_{i+1} ... x_{i+k} w_i ... w_l$ avec $v_j \in A_i$ et $w_j \in A_{i+k}$ et $x_j \in V(P)$ sont d'ordre inférieur ou égal à $n-1$. Ensuite, soit $x \in A_i$, $y \in A_j$ et $i \neq j$. Puisque G ne contient aucun cycle d'ordre inférieur à n, $xy \notin G$. Pour la même raison, $(A_i \cap A_j) \setminus P = \phi$. Donc un chemin reliant x à y est obligatoirement de la forme $v_1 v_2 ... v_r x_i x_{i+1} ... x_{i+k} w_i ... w_l$ avec $v_j \in A_i$ et $w_j \in A_{i+k}$ et $x_j \in V(P)$. Or, on vient de montrer que ces chemins sont d'ordre inférieur ou égale à $n-1$. Donc $\tau(S) \leq n-1$. Puisque P qui est d'ordre $n-1$ est inclus dans S, on a $\tau(S) = n-1$.

(3) Montrons finalement que tous sommets dans $N_G(S) - S$ est voisin d'un sommet $P_{n-1}-$terminal de S. Remarquons qu'un sommet $v \in A_i$ tel que $d(v, x_i) = i$ pour $i \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ est $P_{n-1}-$terminal, car il existe un chemin dans A_i d'ordre i allant de v à x_i et un chemin sur P d'ordre $n-i$ partant de x_i. Pour la même raison, un sommet $v \in A_i$ tel quel $d(v, x_i) = n-i$ pour $i \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ est aussi $P_{n-1}-$terminal. Maintenant, soit $z \in N_G(S) - S$. Supposons par l'absurde que z n'est adjacent à aucun sommet $P_{n-1}-$terminal de S. Alors il existe $w \in S$ tel quel $zw \in E(G)$ et

$d(w, x_i) < i$ pour un certain $i \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ ou encore $d(w, x_i) < n - i$ pour un certain $i \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Donc $z \in A_i$ pour un certain i, ce qui contredit $z \notin S$. □

On énonce ici un théorème concernant les ensembles P_n−libres (voir la définition 3.2.1) [**11**].

Théorème 3.2.8. *Soit n un entier tel que $2 \leq n \leq \tau(G) - 1$ et M un ensemble P_{n+1}−libre maximal de $V(G)$.*
Si $c(G) \leq \tau(G) - n + 2$, alors $\tau(G - M) \leq \tau(G) - n$.

Démonstration. Soit $\tau(G - M) = l$. Soit L un chemin dans $G - M$ d'ordre l. Soit x et y les extrémités de L.

Si x (ou y) est adjacent à un sommet extrémal d'un chemin P d'ordre n dans M, alors $V(L) \cup V(P)$ contient un chemin d'ordre $n + l$.
Donc $\tau(G) \geq n + l = n + \tau(G - M)$.

On peut donc maintenant supposer que ni x, ni y n'est adjacent à une des extrémités d'un chemin P d'ordre n dans M.
Par la maximilité de M, il existe alors $P = x_1x_2...x_p$ et $Q = y_1y_2...y_q$ deux chemins disjoints de M tels que x est adjacent à une des extrémités de P ainsi qu'à une des extrémités de Q et tels que $|V(Q) \cup V(P)| = n$. Il existe également $R = u_1u_2...u_r$ et $S = v_1v_2...v_s$ deux chemins disjoints de M tels que y est adjacent à une des extrémités de R ainsi qu'à une des extrémités de S et tels que $|V(R) \cup V(S)| = n$.
Sans perte de généralité, supposons $p = \max\{r, s, p, q\}$.
Alors, puisque $p + q = r + s = n$, on a $r \geq q$ et $s \geq q$.
Si R et S sont disjoints de P, alors G possède un chemin d'ordre $p+r+l \geq p+q+l$ ou d'ordre $p + s + l \geq p + q + l$. Alors $\tau(G) - n \geq l = \tau(G - M)$.
Donc on suppose maintenant que $|V(P) \cap V(S)| \neq \phi$ et $|V(P) \cap V(R)| \neq \phi$. Rappelons que $P = x_1x_2...x_p$. Soit i tel que $x_i \in V(P) \cap V(R)$ et tel que $x_1, x_2, ..., x_{i-1} \notin V(R)$. Soit j tel que $x_j \in V(P) \cap V(S)$ et tel que $x_1, x_2, ..., x_{j-1} \notin V(S)$. On a que $x_i \neq x_j$, car R et S sont disjoints. Supposons sans perte de généralité que $j > i \geq 1$. Donc G contient un cycle C contenant tous les sommets de L ainsi

que les sommets $\{x_1, x_2, ..., x_j\}$. Donc $|V(C)| \geq l+2$ et donc

$$l + 2 \leq c(G) \leq \tau(G) - n + 2 \Leftrightarrow \tau(G - M) = l \leq \tau(G) - n$$

□

Corollaire 3.2.9. *Soit (a, b) un couple d'entiers positifs tels que $\tau(G) = a + b$, où $a \leq b$. Si G est un graphe tel que $c(G) \leq b + 2$, alors G possède une $(a, b)-$partition.*

Démonstration. Par la proposition 2.0.2, G possède un $(1, \tau(G)-1)-$partition. On peut donc supposer $a \geq 2$. Soit S un ensemble de a sommets. On a $\tau(S) \leq a$, donc S est un ensemble $P_{a+1}-$libre de G. Puisqu'il existe un ensemble $P_{a+1}-$libre dans G, alors il y en a un qui est maximale. Soit donc M un ensemble $P_{a+1}-$libre maximal de G. Alors, sachant $a \leq \tau(G) - 1$ et $c(G) \leq b + 2 = \tau(G) - a + 2$, on peut conclure par le théorème 3.2.8 que $\tau(G - M) \leq \tau(G) - a = b$. Alors $(M, V(G - M))$ forme une $(a, b)-$partition de G. □

Le résultat qui suit met à profit notre étude de l'existence d'un P_n-noyau en usant de la relation entre partitions et P_n-noyaux [**10**].

Corollaire 3.2.10. *Soit G un graphe et $\tau(G) = a+b$, $1 \leq a \leq b$. Si $g(G) \geq a-1$, alors G est $(a, b)-$partitionnable.*

Démonstration. Soit $n \geq 2$ un entier. Premièrement, on montre que si $g(G) \geq n - 2$, alors G a un P_n-noyau.

1) Si G possède un $(n-2)-$cycle, par le lemme 3.2.6, G possède un P_n-seminoyau.
2) Si G possède un $(n-1)-$cycle, par le lemme 3.2.4, G possède un P_n-seminoyau.
3) Si G ne possède ni un $(n-1)-$cycle, ni un $(n-2)-$cycle, alors $g(G) \geq n$ et par le lemme 3.2.7, G a un P_n-seminoyau.

La classe des graphes tels que $g(G) \geq n-2$ étant héréditaire, on peut appliquer la proposition 3.2.2, et on conclut que G possède un P_n-noyau si $g(G) \geq n-2$. Soit maintenant G tel que $g(G) \geq a - 1$ pour a tel que $\tau(G) = a + b$, $1 \leq a \leq b$. On vient de montrer qu'alors G possède un $P_{a+1}-$noyau, ce qui permet de conclure en la $(a, b)-$partitionnabilité de G par la proposition 3.2.3. □

Théorème 3.2.11. *Soit (a,b) deux entiers positifs tels que $\tau(G)=a+b$, $a\leq b$. Si $a\leq 7$, G est $(a,b)-$partitionnable*

Démonstration. On a déjà montré au lemme 3.2.5 que tout graphe a un P_n-noyau pour $n\leq 5$. De plus, il a été montré (dans [**3**], [**10**], [**12**]) que tout graphe possède P_n-noyau également pour $n=6,7$ et 8. Par ce fait et par la proposition 3.2.3, on conclut que si $a\leq 7$, G est $(a,b)-$partitionnable, □

Les prochaines classes de graphes $\tau-$partitionnables présentées dans cette section sont celles des graphes dits faiblement pancycliques et semi-pancycliques.

Définition. Un graphe G est dit *faiblement pancyclique* si il possède un $n-$cycle pour tout $g(G)\leq n\leq c(G)$.

Un graphe G est dit *semi-pancyclique* si il possède un cycle de chaque ordre compris dans l'intervalle $\left[max\left\{3,\left\lceil\frac{\tau(G)}{2}\right\rceil\right\},c(G)\right]$ ou si $c(G)<\left\lceil\frac{\tau(G)}{2}\right\rceil$.

Théorème 3.2.12. *Si G est un graphe faiblement pancylcique, alors G est $\tau-$partitionnable.*

Démonstration. Soit (a,b) un couple d'entiers positifs tels que $\tau(G)=a+b$ et $a\leq b$. Lorsque $g(G)\leq b\leq c(G)$, G possède un $b-$cycle et par le théorème 2.0.6, G possède une $(a,b)-$partition. D'autre part, lorsque $b>c(G)$ ou $b<g(G)$, les corrolaires 3.2.9 et 3.2.10 nous disent que G est $(a,b)-$partitionnable. □

Théorème 3.2.13. *Si G est un graphe semi-pancyclique, alors G est $\tau-$partitionnable.*

Démonstration. Soit (a,b) un couple d'entiers positifs tels que $a\leq b$ et $\tau(G)=a+b$. Alors $b\geq\left\lceil\frac{\tau(G)}{2}\right\rceil$ et en appliquant le théorème 2.0.6 et les corrolaires 3.2.9 et 3.2.10, on conclut. □

On peut également établir la τ-partitionnabilité d'un graphe en se penchant sur le nombre de sommets d'attachements que comporte un de ses cycles maximaux.

Définition. Un sommet v de $H\leq G$ est un *sommet d'attachement* de H si $N_G(v)\setminus H\neq\phi$.

La preuve du théorème 2.0.6 consistait à trouver une $(a,b)-$partition de G en considérant les ensembles $W_i=\{v\in V(G-C)\mid d(v,C)=i\}$ pour C un cycle d'ordre b dans G. Usant de la même technique, une généralisation de ce théorème est ici présentée, en considérant cette fois un cycle pouvant être d'ordre supérieur à b, mais ayant au plus b sommets d'attachements.

Théorème 3.2.14. *Soit G un graphe contenant un cycle C d'ordre r, et tel que C possède au plus b sommets d'attachements, où $b \leq \left\lceil \frac{\tau(G)}{2} \right\rceil$. Soit a un entier positif tel que $a + b = \tau(G)$. Alors G est $(a, b)-$partitionnable.*

Démonstration. Soit C un cycle d'ordre r dans G. Soit X l'ensemble des sommets d'attachements de C. Par hypothèse, $|X| \leq b$. Soit $X \subseteq S_0 \subseteq C$ avec $|S_0| = b$. Pour $i \geq 1$, soit $S_i = W_i = \{v \in V(G - C) \mid d(v, C) = i\}$. Alors chaque sommet de S_i est adjacent à un sommet de S_{i-1}, mais à aucun sommet de S_j, pour $j < i - 1$. Maintenant soit P un chemin dans S_i. Il y a un chemin dans G qui contient tous les sommets de C ainsi que tous les sommets de P. Donc $|V(P)| \leq \tau(G) - r \leq \tau(G) - b = a$. Ceci montre que $\tau(S_i) \leq a$, pour tous $i \geq 1$. Aussi, $\tau(S_0) \leq |S_0| = b$. Posons donc

$$V_1 = \bigcup_{i \geq 0} S_{2i} \qquad V_2 = V(G) - V_1.$$

Alors (V_1, V_2) est une $(a, b)-$partition. $\square$

Corollaire 3.2.15. *Si G possède un cycle maximal ayant au plus $\left\lceil \frac{\tau(G)}{2} \right\rceil$ sommets d'attachements, alors G est $\tau-$partitionnable.*

Démonstration. Soit (a, b) un couple d'entiers positifs tels que $a + b = \tau(G)$ et $a \leq b$. Si $b \geq c(G) - 2$, alors G a une $(a, b)-$partition, par le corrolaire 3.2.9. Dans le cas où $b < c(G) - 2$, G possède un cycle maximal C d'ordre $r \geq b$. Puisque $a + b = \tau(G)$ nous savons que $b \geq \left\lceil \frac{\tau(G)}{2} \right\rceil$. Donc C ne contient assurément pas plus de b sommets d'attachements. Par le théorème 3.2.14 on conclut que G est $\tau-$partitionnable. $\square$

3.3. Graphes sans fourche

Un graphe est dit *sans fourche* si il ne contient pas le graphe biparti complet $K_{1,3}$ comme sous-graphe induit. Dans [**13**], Dunbar et Frick démontrent que tout graphe sans fourche est $\tau-$partitionnable. Cette section en présente la preuve.

Définition. Un graphe *bipartie complet* $K_{m,n}$ est un graphe admettant une bipartition (V_1, V_2) telle que $|V_1| = n$, $|V_2| = m$ et $E(K_{m,n}) = \{uv \mid u \in V_1, v \in V_2\}$.

Un graphe est dit *sans fourche* s'il ne contient pas $K_{1,3}$ comme sous-graphe induit.

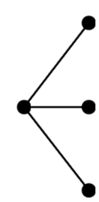

Figure 3.2. Le graphe $K_{1,3}$

Un sommet x d'un graphe G est appelé un *sommet élligible* de G si $\langle N_G(x)\rangle$ est connexe et non-complet. L'opération consistant à joindre toute paire de sommets non-adjacents de $\langle N_G(x)\rangle$ par une arête est appelé la *complétion locale de G en x*. Elle convertit$\langle N_G(x)\rangle$ en un graphe complet.

On définit la *clôture*, notée $cl(G)$, d'un graphe G comme étant le graphe obtenu à la suite de l'opération consistant à effectuer une complétion locale à tous les sommets élligibles de G, un à la suite de l'autre.
Un graphe est dit *clos* si $cl(G) = G$.

La preuve du théorème suivant concernant la clôture d'un graphe sans fourche est présentée dans [**14, 15**] :

Théorème 3.3.1. *Soit G un graphe sans fourche. Alors :*
(i) $cl(G)$ est bien défini (c.-à-d. $cl(G)$ est indépendant de l'ordre dans lequel on choisit les sommets élligibles).
(ii) $cl(G)$ est lui aussi sans fourche.
(iii) Pour tout sommet v de $cl(G)$, le graphe $\left\langle N_{cl(G)}(v)\right\rangle$ est soit complet, soit formé de deux composantes connexes H_1 et H_2 tels que H_1 et H_2 sont des graphes

complets.

(iv) $\tau(G) = \tau(cl(G))$

Par le théorème 3.3.1, on peut affirmer que pour tout graphe sans fourche G, il existe $G' = cl(G)$, un graphe sans fourche clos, tel que G est un sous-graphe de G', avec $V(G') = V(G)$ et $\tau(G) = \tau(G')$. Pour montrer que la conjecture de partionnement des chemins est vraie pour la classe des graphes sans fourche, il suffira donc de prouver que tout graphe sans fourche clos est $\tau-$partitionnable, comme le stipule la proposition suivante.

Proposition 3.3.2. *Si tout graphe sans fourche clos est $\tau-$partitionnable, alors tout graphe sans fourche est $\tau-$partitionnable.*

DÉMONSTRATION. Soit G un graphe sans fourche et $G' = cl(G)$. Soit (a, b) un couple d'entiers positifs tels que $a + b = \tau(G')$. Par le lemme 3.3.1(iv), on a également $a+b = \tau(G)$. Soit (V_1, V_2) une $(a, b)-$partition de G'. Puisque $V(G) = V(G')$, (V_1, V_2) est également une partition de $V(G)$. Aussi, étant donné que G est un sous-graphe de G', $\tau(V_1) \leq a$ et $\tau(V_2) \leq b$ autant dans G' que dans G. Donc (V_1, V_2) est une $(a, b)-$partition de G. □

Définition. Soit C un cycle et $v \in V(C)$. On note v^+ et v^- les voisins de v sur C. Une arête de la forme v^-v^+ où $v \in V(C)$ est appelée une *corde courte* de C.

Lemme 3.3.3. *Soit G un graphe sans fourche clos et soit $C = v_1v_2...v_r$ un cycle de G. Soit $1 \leq l \leq r-2$. Si C a une corde courte v_iv_{i+2} pour tout $i = 1, ..., l$, alors $\langle\{v_1, v_2, ..., v_{l+2}\}\rangle$ est un graphe complet.*

DÉMONSTRATION. La preuve est par induction sur l. Si $l = 1$, le cas est trivial. Posons l'hypothèse d'induction suivante : si C a une corde courte v_iv_{i+2} pour tout $i = 1, ..., l-1$ pour un certain $l \leq r-2$, alors $\langle\{v_1, v_2, ..., v_{l+1}\}\rangle$ est complet. Soit maintenant C un cycle ayant une corde courte v_iv_{i+2} pour tout $i = 1, ..., l$. Par l'hypothèse d'induction, $\langle\{v_1, v_2, ..., v_{l+1}\}\rangle$ est complet. Donc, $\{v_1, v_2, ..., v_{l+1}\} \subseteq N_G(v_{l+1})$. Or, G étant un graphe sans fourche clos, par le théorème 3.3.1(iii), $\langle N_G(v_{l+1})\rangle$ est soit complet, soit formé de deux composantes connexes H_1 et H_2 telles que H_1 et H_2 sont complets. Alors $\langle\{v_1, v_2, ..., v_{l+2}\}\rangle$ est un sous-graphe induit connexe d'un graphe complet. Donc $\langle\{v_1, v_2, ..., v_{l+2}\}\rangle$ est complet. □

Lemme 3.3.4. *Soit G un graphe sans fourche clos et soit C un cycle d'ordre r dans G ayant au moins s cordes courtes. Alors $\langle V(C)\rangle$ contient un cycle de chaque ordre compris dans l'intervalle $[max\{3, r-s\}, r]$.*

Démonstration. Soit C le cycle $v_1v_2...v_rv_1$. La preuve est par induction sur r. Pour $r=3$ ou $r=4$, le cas est trivial. Maintenant, soit $r \geq 5$ et supposons l'énoncé vrai pour tout cycle d'ordre inférieur à r. Si $s=0$, le résultat est évidemment vrai. Si $s=r$, alors $V(C)$ est un graphe complet par le lemme précédent et alors il possède tous les cycles voulus. Maintenant, supposons $1 \leq s \leq r-1$. Alors, on peut affirmer sans perte de généralité que $v_1v_3 \in E(G)$ et $v_2v_r \notin E(G)$. Soit l le plus grand entier tel que $v_iv_{i+2} \in E(G)$ pour tout $i = 1, ..., l$. Alors il suit du lemme précédent que $\langle\{v_1, ..., v_{l+2}\}\rangle$ est complet. Ainsi, si $l \geq r-2$, le graphe $\langle V(C)\rangle$ est complet. Supposons donc $l \leq r-3$. Soit D le cycle $v_1v_{l+2}v_{l+3}...v_rv_1$. Le graphe $\langle\{v_1, ..., v_{l+2}\}\rangle$ contient l cordes courtes et donc D possède $s-l$ cordes courtes. Donc D est un cycle de G d'ordre $r-l$ possèdant au moins $s-l$ cordes courtes. En vue de $r-l-(s-l) = r-s$ et par hypothèse d'induction, $\langle V(D)\rangle$ a un cycle de chaque ordre compris entre $max\{3, r-s\}$ et $r-l$, inclusivement. De plus, pour tout $i = 1, ..., l$, le graphe $\langle V(D) \cup \{v_2, ..., v_{i+1}\}\rangle$ contient un cycle d'ordre $r-l+i$, car $\langle\{v_1, ..., v_{l+2}\}\rangle$ est complet et D est le cycle $v_1v_{l+2}v_{l+3}...v_rv_1$ contenant $r-l$ sommets. Donc $V(C)$ possède un cycle de chaque ordre requis. $\square$

Théorème 3.3.5. *Tout graphe sans fourche est $\tau-$partitionnable.*

Démonstration. Par la proposition 3.3.2, il suffit de démontrer que tout graphe sans fourche clos est $\tau-$partitionnable. Soit G un graphe sans fourche clos et soit C un cycle maximal de G, donc d'ordre $c(G)$. Soit X l'ensemble des sommets d'attachements de C. Rappelons qu'un sommet v de C est un *sommet d'attachement* de C si $N_G(v) \setminus C \neq \phi$. Si $|X| \leq \left\lceil \frac{\tau(G)}{2} \right\rceil$, alors G est $\tau-$partitionnable par le corollaire 3.2.15. Supposons donc $|X| > \left\lceil \frac{\tau(G)}{2} \right\rceil$. Soit $x \in X$ et $y \in N_{G-C}(x)$. Notons que y n'est ni adjacent à x^-, ni à x^+, sinon G possède un cycle d'ordre supérieur à C. Alors, puisque G est sans fourche, $x^-x^+ \in E(G)$. Ceci montre que C a un moins $|X|$ cordes courtes. Par le lemme précédent, G possède un cycle de chaque ordre partant de $max\{3, c(G)-|X|\}$ à $c(G)$, inclusivement. Puisque

$c(G) \leq \tau(G)$, $c(G) - |X| \leq \left\lceil \frac{\tau(G)}{2} \right\rceil$, on a que G est semi-pancyclique et nous avons vu à la section précédente (théorème 3.2.13) que tout graphe semi-pancyclique est $\tau-$partitionnable. $\square$

3.4. La $\tau-$partitionnabilité selon la $p-$déficience d'un graphe

Pour G un graphe, posons $p = |V(G)| - \tau(G)$. On dit alors que G est un graphe *$p-$déficient*. Dans cette section, la $\tau-$partitionnabilité d'un graphe sera étudiée selon sa $p-$déficience. Dans un premier temps, il sera montré que G est $\tau-$partitionnable si $p \leq 3$. Ensuite, nous verrons que pour $p \geq 4$, G est $\tau - partitionnable$, en autant que $V(G) \geq p(10p-3)$. Ces deux résultats ont été présentés par Frick et Schiermeyer [**16**].

D'abord, montrons que G est $\tau-$partitionnable pour $p = 0, 1$.[**8**]

Proposition 3.4.1. *Si G est un graphe tel que $V(G) - 1 \leq \tau(G)$, alors G est $\tau-$partitionnable.*

Démonstration. Soit $\tau(G) = \tau = a + b$, $1 \leq a \leq b$. Si $|V(G)| = \tau$, alors G est évidemment $(a, b)-$partitionnable. On peut donc supposer que $|V(G)| = \tau + 1$. Dans ce cas, G n'a pas de cycle hamiltonien. Soit $\delta(G) = min\{deg_G(v)|v \in V(G)\}$. La condition suffisante de Dirac stipule que si $\delta(G) \geq \frac{\tau}{2}$, alors G possède un cycle hamiltonien (voir [**17**]). Donc dans le cas présent, où G ne possède pas de cycle hamiltonien, on a $b \geq \frac{\tau+1}{2} \geq \delta(G)$. Soit v un sommet de G tel que $deg_G(v) = k \leq b$. Posons $V_1 = N_G(v) \cup A$, où A est un sous-ensemble quelconque de $V(G) \backslash N_G(v)$ tel que $|A| = b - k$ et $V_2 = V(G) \backslash V_1$. Alors $V_2 = \{v\} \cup B$, où $|B| = a$ et $B \subseteq V(G) \setminus N_G(v)$. C'est dire que $\tau(V_2) \leq a$. Aussi, $\tau(V_1) \leq |V_1| = b$. $\square$

Dans les preuves qui suivront, on use d'une stratégie commune pour trouver les ensembles A et B tels que (A, B) est une $(a, b)-$partition pour a, b des entiers tels que $\tau(G) = a + b$, $1 \leq a \leq b$.

<u>La stratégie de partitionnement</u>

Soit G un graphe d'ordre n tel que $\tau = \tau(G) = n - p$. La stratégie principale consistera à trouver un sous-ensemble $A_1 \subset V(G)$ tel que $|A_1| = p$ et $|N_G(A_1) \setminus A_1| \leq \frac{\tau+1}{2}$.
Soit $\tau = \tau(G) = a + b$, avec a et b deux entiers positifs tels que $a \leq b$. Soit un ensemble A_1 avec $|A_1| = p$ et $|N_{G-A_1}(A_1)| \leq \frac{\tau+1}{2}$. Alors on choisit B, un sous-ensemble de $V(G)-A_1$ tel que $|B| = b$ et $N_{G-A_1}(A_1) \subseteq B$ (puisque $b \geq \lfloor \frac{\tau+1}{2} \rfloor$, cela est possible). On pose maintenant $A = A_1 \cup A_2$, où $A_2 = V(G) - A_1 - B$. Puisque $|A_2| = n-p-b = a$, il suit que $\tau(A_2) \leq a$. Aussi, aucune arête ne relie un sommet de A_1 à un sommet de A_2, donc $\tau(A) = max\{\tau(A_1), \tau(A_2)\} \leq max\{a, p\}$. Alors (A, B) sera une $(a, b)-$partition si $a \geq p$. Pour $a \leq 7$, il a été démontré que G possède une $(a, b)-$partition (théorème 3.2.11). On peut donc considérer $a \geq 7$. Ainsi, la stratégie fonctionnera assurément lorsque $p \leq 7$.

Afin d'alléger le texte, une nouvelle notation sera employée pour désigner certains sommets d'un chemin P. Soit donc $P = v_1v_2...v_n$ un chemin de G. Pour $1 < i < n$ et $v = v_i \in V(P)$, on note le sommet précédent v sur P (i.e v_{i-1}) par v^- et celui suivant (i.e v_{i+1}) par v^+. On note le segment de P reliant v_j à v_k (v_j et v_k inclus) par v_jPv_k, pour $1 \leq j \leq k \leq n$ ou $1 \leq k \leq j \leq n$. Les sommets qui composent un segment v_jPv_k seront notés par l'intervalle $[v_j, v_k]$.

Avant de pouvoir appliquer la stratégie de partionnement, on présente le lemme suivant.

Lemme 3.4.2. *Soit G un graphe d'ordre n tel que $\tau(G) = \tau < n$. Soit un chemin maximal $P = v_1...v_\tau$ de G. Soit $H = G - P$ et soit $H_1, ..., H_k$ les composantes connexes de H. Alors :*

(a) Si $u \in N_G(H_i) \cap P$, alors $u^+ \notin N_G(H_i) \cap P$.

(b) Si $\{u, v\} \subseteq N_G(H_i) \cap P$, alors $\{u^+, v^+\} \nsubseteq N_G(H_j) \cap P$, pour aucun j.

(c) Si $u \in N_G(v_1) \cap P$, alors $u^- \notin N_G(v_\tau) \cap P$.

(d) Si $u \in N_G(H) \cap P$, alors $u^+ \notin N_G(v_1) \cap P$ et $u^- \notin N_G(v_\tau) \cap P$.

(e) $N_G(H_i \cup H_j)$ contient au plus deux paires de sommets consécutifs sur P, pour tous $1 \leq i < j \leq k$.

Démonstration. (a) Supposons par l'absurde qu'il existe $x, y \in H_i$ tels que $yu^+, ux \in E(G)$ pour un certain $u \in P$. Soit Q un $xy-$chemin tel que $V(Q) \subseteq V(H_i)$. Alors le chemin $P' = v_1PuxQyu^+Pv_\tau$ est d'ordre supérieur à τ.
(b) Supposons par l'absurde que $\{u, v\} \subseteq N_G(H_i) \cap P$ et $\{u^+, v^+\} \subseteq N_G(H_j) \cap P$. On peut affirmer, par (a), que $i \neq j$. Soit $x, y \in H_i$ et $w, z \in H_j$ tels que $\{ux, vy, u^+w, v^+z\} \subseteq E(G)$. Soit Q un $xy-$chemin inclus dans H_i et R un $wz-$chemin inclus dans H_j. Alors le chemin $v_1PuxQyvPu^+wRzv^+Pv_\tau$ contient tous les sommets de P en plus des sommets de Q et de R, donc P' est un chemin d'ordre d'ordre supérieur à τ.
(c) Supposons par l'absurde que $u \in N_G(v_1) \cap P$ et $u^- \in N_G(v_\tau) \cap P$. Alors $v_1Pu^-v_\tau Puv_1$ est un cycle C d'ordre τ dans G. Il existe donc un chemin d'ordre $\tau + 1$ dans G, constitué des sommets de $C \cup \{x\}$ où x est un sommet quelconque de $N_G(P) \setminus P$.
(d) Soit $x \in N_G(u) \setminus P$. Si $u^+ \in N_G(v_1) \cap P$, alors le chemin $xuPv_1u^+Pv_\tau$ serait d'ordre supérieur à τ. Alors $u^+ \notin N_G(v_1) \cap P$. Similairement, $u^- \notin N_G(v_\tau) \cap P$.
(e) Supposons par la contraposée que $N_G(H_i \cup H_j) \cap P$ contient 3 paires de sommets consécutifs : $\{u, u^+\}, \{v, v^+\}, \{w, w^+\}$, où $u \in N_G(H_i) \cap P$.
Alors, par (a) et (b), $\{u, v^+\} \subseteq N_G(H_i) \cap P$ et $\{u^+, v\} \subseteq N_G(H_j) \cap P$. Ceci dit, par (a), on a que soit (1) $w \in N_G(H_i) \cap P$ et $w^+ \in N_G(H_j) \cap P$ ou soit (2) $w \in N_G(H_j) \cap P$ et $w^+ \in N_G(H_i) \cap P$. Par (b), le premier cas est impossible, car on ne peut avoir $\{u, w\} \subseteq N_G(H_i) \cap P$ et $\{u^+, w^+\} \subseteq N_G(H_j) \cap P$. Le second cas est aussi impossible, pour les mêmes raisons. □

Le lemme qui suit nous sera utile pour montrer que tout graphe $2-$déficient est $\tau-$partitionnable. Nous en userons aussi par la suite, dans le cas où $p \geq 4$ et $V(G) \geq p(10p - 3)$.

Lemme 3.4.3. *(a) Soit G un graphe sans chemin hamiltonien et P un chemin maximal de G tel que $|V(P)| \geq 3$. Soit $H = G - P$. Si H consiste en $k \geq 2$ composantes connexes, alors $|N_G(H) \cap P| \leq \left\lceil \frac{\tau(G)-1}{2} \right\rceil + \binom{k}{2}$.*
(b) Soit C un cycle maximal de G, un graphe sans chemin hamiltonien.
Soit $H = G - C$. Si H consiste en $k \geq 2$ composantes connexes,
alors $|N_G(H) \cap C| \leq \left\lceil \frac{c(G)}{2} \right\rceil + \binom{k}{2}$.

Démonstration. (a) Le lemme 3.4.2(e) garantit que pour chacune des $\binom{k}{2}$ paires de composantes connexes de H, l'union de leurs voisinages sur P contient au plus 2 paires de sommets consécutifs sur P. C'est dire que pour tout $x \in N_G(H) \cap P$, $x^+ \notin N_G(H) \cap P$, excepté pour au plus $2\binom{k}{2}$ cas. Puisque $v_1, v_\tau \notin N_G(H) \cap P$ et que $|V(P)| = \tau(G)$, on conclut :

$$1 + 2\,|N_G(H) \cap P| - 2\binom{k}{2} \leq \tau(G)$$

(b) Remarquons que la preuve du lemme 3.4.2(e) ne tient que sur la maximalité du chemin P. On peut donc l'invoquer pour C un cycle maximal. Le lemme 3.4.2(e) garantit que pour tout $x \in N_G(H) \cap P$, $x^+ \notin N_G(H) \cap P$, excepté pour au plus $2\binom{k}{2}$ cas. On conclut :

$$2\,|N_G(H) \cap C| - 2\binom{k}{2} \leq c(G)$$

□

Théorème 3.4.4. *Soit G un graphe d'ordre n dont le chemin maximal est d'ordre $\tau = n - p$, où $0 \leq p \leq 3$. Alors G est $\tau-$partitionnable.*

Démonstration. Il a été vu à la proposition 3.4.1 que si $p = 0, 1$, alors G est $\tau-$partitionnable. Donc soit $2 \leq p \leq 3$

Soit $H = G - P$, où P est un chemin maximal de G. Pour appliquer la stratégie de partitionnement, il suffit de trouver $A_1 \subset V(G)$ tel que $|A_1| = p$ et $|N_{G-A_1}(A_1)| \leq \frac{\tau(G)+1}{2}$.

Pour H ne possèdant pas plus de 2 composantes connexes (ce qui est le cas lorsque $p = 2$), on pose $A_1 = H$. Puisque $|V(P)| = n - p$, alors $|A_1| = p$. On peut considérer $n \geq 5$ par le théorème 3.2.11. Donc on peut appliquer le lemme 3.4.3(a) qui nous assure que $|N_{G-A_1}(A_1)| = |N_G(H) \cap P| \leq \frac{\tau(G)+1}{2}$.

On suppose maintenant que H comporte 3 composantes connexes, H_1, H_2, H_3. Soit $P = v_1v_2...v_\tau$ un chemin maximal de G, tel que $d_P(v_1) \leq d_P(v_\tau)$. On pose $A_1 = H_1 \cup H_2 \cup \{v_1\}$. Pour appliquer la stratégie de partitionnement, on doit s'assurer que $|N_{G-A_1}(A_1)| \leq \frac{\tau+1}{2}$. On montre donc que :

$|N_P(v_1) \cup N_P(H_1) \cup N_P(H_2)| \leq \frac{\tau+1}{2}$.

On se penche d'abord sur la valeur de $d_P(v_1)+d_P(v_\tau)$. Supposons par l'absurde que $d_P(v_1)+d_P(v_\tau) \geq \tau$. Posons $A = \{i : v_i v_\tau \in E(G)\}$ et $B = \{i : v_1 v_{i+1} \in E(G)\}$. Notons que $\tau \notin A \cup B$. On obtient :

$$\tau - 1 \geq |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = d_P(v_1) + d_P(v_\tau) - |A \cap B| \geq \tau - |A \cap B|.$$

On a donc que $A \cap B \neq \phi$. Il existe donc un entier $k > 1$ tel que $v_k v_\tau \in E(G)$ et $v_1 v_{k+1} \in E(G)$. Alors il existe un cycle $C = v_1 v_2 ... v_k v_\tau v_{\tau-1} ... v_{k+1} v_1$ et donc un chemin de longueur $\tau + 1$ dans G.

On peut donc poursuivre en sachant que $d_P(v_1) + d_P(v_\tau) \leq \tau - 1$.

Pour signifier le cas particulier où $d_P(v_1) + d_P(v_\tau) = \tau - 1$, nous nous réfèrerons tout au long de la preuve à ce que nous nommerons le *cas saturé*.

Soit $I = [v_r, v_s]$ sur P tel que v_{r-1}, $v_{s+1} \in N_P(v_1) \cup N_P(v_\tau)$. Nous nommerons un tel ensemble I une *t-cavité*, avec $t = s - r + 1$. On étudie maintenant la valeur maximale que peut atteindre $|N_I(H_1 \cup H_2)|$ lorsqu'aucun sommet de I n'est dans $N_P(v_1) \cup N_P(v_\tau)$ comparativement à la valeur qu'atteint $d_I(v_1) + d_I(v_\tau)$ dans le cas saturé (dans quel cas on considère que les sommets de I peuvent se trouver dans $N_P(v_1) \cup N_P(v_\tau)$). Pour ce faire, on considère trois cas :

Cas 1 : $\underline{v_{r-1} \in N_P(v_\tau), v_{s+1} \in N_P(v_1)}$

Puisque $v_{r-1} \in N_P(v_\tau)$ et $v_{s+1} \in N_P(v_1)$, par la contraposée du lemme 3.4.2(d), v_r, $v_s \notin N_P(H)$. Par le lemme 3.4.2(e), $H_1 \cup H_2$ possède au plus 2 paires de sommets consécutifs sur P, donc aussi sur I. Alors :

$$|N_I(H_1 \cup H_2)| \leq \left\lceil \frac{t-2}{2} \right\rceil + 1 \leq \frac{t+1}{2}.$$

On se penche maintenant sur la valeur de $d_I(v_1) + d_I(v_\tau)$ dans le cas saturé, donc dans le cas où on peut avoir des sommets de I dans $N_P(v_1) \cup N_P(v_\tau)$. Penchons-nous d'abord sur la valeur de $d_{P-I}(v_\tau)$. Par le lemme 3.4.2(c), on sait que tout sommet précédent un voisin de v_1 sur $P - I$ ne peut pas être dans $N_{P-I}(v_\tau)$. Aussi, $v_\tau \notin N_{P-I}(v_\tau)$ et bien que $v_{s+1} \in N_P(v_1)$, on ne considère pas v_s comme ne pouvant pas être dans $N_{P-I}(v_\tau)$, car $v_s \in I$. Ceci entraîne que $d_{P-I}(v_\tau) \leq \tau - 1 - t - (d_{P-I}(v_1) - 1) = \tau - t - d_{P-I}(v_1)$ et puisque nous sommes dans le cas saturé, on a :

$$\begin{array}{rcl} \tau - 1 & = & d_{P-I}(v_1) + d_{P-I}(v_\tau) + d_I(v_1) + d_I(v_\tau) \\ & \leq & d_{P-I}(v_1) + \tau - t - d_{P-I}(v_1) + d_I(v_1) + d_I(v_\tau) \\ & \leq & \tau - t + d_I(v_1) + d_I(v_\tau) \\ \text{Alors} \quad t - 1 & \leq & d_I(v_1) + d_I(v_\tau) \end{array}$$

Et on conclut :

$$d_I(v_1) + d_I(v_\tau) \geq t - 1 = 2\left(\frac{t+1}{2}\right) - 2 \geq 2\,|N_I(H_1 \cup H_2)| - 2$$

Cas 2 : $\underline{v_{r-1} \in N_P(v_1) - N_P(v_\tau), v_{s+1} \in N_P(v_\tau) - N_P(v_1)}$

Par le lemme 3.4.2(e), $H_1 \cup H_2$ possède au plus 2 paires de sommets consécutifs sur P, donc aussi sur I. Alors :

$$|N_I(H_1 \cup H_2)| \leq \left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil + 1 \leq \frac{t+3}{2}.$$

On se penche maintenant sur la valeur de $d_I(v_1) + d_I(v_\tau)$ dans le cas saturé, donc dans le cas où on peut avoir des sommets de I dans $N_P(v_1) \cup N_P(v_\tau)$. Rappelons qu'on étudie toujours le cas où $v_{r-1} \notin N_P(v_\tau)$. Aussi, $v_\tau \notin N_{P-I}(v_\tau)$. Donc on exclut d'emblée v_τ et v_{r-1} du calcul de $d_{P-I}(v_\tau)$. Par le lemme 3.4.2(c), on sait que tout sommet précédent un voisin de v_1 sur P ne peut être dans $N_P(v_\tau)$. Ceci entraîne que $d_{P-I}(v_\tau) \leq \tau - 2 - t - d_{P-I}(v_1)$ et puisque nous sommes dans le cas saturé, on a :

$$\begin{array}{rcl} \tau - 1 & = & d_{P-I}(v_1) + d_{P-I}(v_\tau) + d_I(v_1) + d_I(v_\tau) \\ & \leq & \tau - 2 - t + d_I(v_1) + d_I(v_\tau) \\ \text{Alors} \quad t + 1 & \leq & d_I(v_1) + d_I(v_\tau) \end{array}$$

Et on conclut :

$$d_I(v_1) + d_I(v_\tau) \geq t + 1 = 2\left(\frac{t+3}{2}\right) - 2 \geq 2\,|N_I(H_1 \cup H_2)| - 2$$

Cas 3 : $\underline{v_{r-1}, v_{s+1} \in N_P(v_1), v_{r-1} \notin N_P(v_\tau)\ (v_{r-1}, v_{s+1} \in N_P(v_\tau), v_{s+1} \notin N_P(v_1))}$

Par la contraposée du lemme 3.4.2(d) et puisque $v_{s+1} \in N_P(v_1)(v_{r-1} \in N_P(v_\tau))$, on a que $v_s(v_r) \notin N_P(H)$. Par le lemme 3.4.2(e), $H_1 \cup H_2$ possède au plus 2 paires de sommets consécutifs sur P, donc aussi sur I. Alors :

$$|N_I(H_1 \cup H_2)| \leq \left\lceil \frac{t-1}{2} \right\rceil + 1 \leq \frac{t+2}{2}$$

On se penche maintenant sur la valeur de $d_I(v_1) + d_I(v_\tau)$ dans le cas saturé, donc dans le cas où on peut avoir des sommets de I dans $N_P(v_1) \cup N_P(v_\tau)$. Rappelons qu'on étudie cependant toujours le cas où $v_{r-1} \notin N_P(v_\tau)(v_{s+1} \notin N_P(v_1))$. Donc v_{r-1} et v_τ (v_{s+1} et v_1) sont d'emblée exclus du calcul de $d_{P-I}(v_\tau)$ ($d_{P-I}(v_1)$). De plus, par le lemme 3.4.2(c), on sait que tout sommet précédent un voisin de v_1 sur P ne peut être dans $N_P(v_\tau)$. Cependant, bien que $v_{s+1} \in N_P(v_1)$ ($v_{r-1} \in N_P(v_\tau)$), on ne considère pas v_s (v_r) comme ne pouvant pas être dans $N_{P-I}(v_\tau)$ ($N_{P-I}(v_1)$), car v_s (v_r) $\in I$. Ceci entraîne que $d_{P-I}(v_\tau) \leq \tau - 2 - t - (d_{P-I}(v_1) - 1)$ ($d_{P-I}(v_1) \leq \tau - 2 - t - (d_{P-I}(v_\tau) - 1)$) et puisque nous sommes dans le cas saturé, on a :

$$\begin{array}{rrcl} & \tau - 1 & = & d_{P-I}(v_1) + d_{P-I}(v_\tau) + d_I(v_1) + d_I(v_\tau) \\ & & \leq & \tau - 1 - t + d_I(v_1) + d_I(v_\tau) \\ \text{Alors} & t & \leq & d_I(v_1) + d_I(v_\tau) \end{array}$$

Et on conclut :

$$d_I(v_1) + d_I(v_\tau) \geq t = 2\left(\frac{t+2}{2}\right) - 2 \geq 2\left|N_I(H_1 \cup H_2)\right| - 2$$

Notons par q le nombre de sommets qui sont dans $N_P(H_1 \cup H_2)$, mais qui ne sont pas dans $N_P(v_1) \cup N_P(v_\tau)$. On a montré que pour chaque type de $t-$cavité, la valeur qu'aurait $d_I(v_1) + d_I(v_\tau)$ dans le cas saturé est supérieure ou égale à $2\left|N_I(H_1 \cup H_2)\right| - 2$. De plus, $H_1 \cup H_2$ possède q voisins réparties dans les $t-$cavités de P. Donc, en général :

$$\tau - 1 \geq d_P(v_1) + d_P(v_\tau) + (2q - 2)$$

$$\Leftrightarrow d_P(v_1) + d_P(v_\tau) \leq \tau - 1 - (2q - 2) = \tau + 1 - 2q$$

Par l'hypothèse $d_P(v_1) \leq d_P(v_\tau)$, on en déduit $d_P(v_1) \leq \frac{\tau+1-2q}{2}$ et on conclut :

$$|N_P(v_1) \cup N_P(H_1) \cup N_P(H_2)| \leq d_P(v_1) + |N_P(H_1 \cup H_2) \backslash N_P(v_1)| \leq \frac{\tau + 1 - 2q}{2} + q = \frac{\tau + 1}{2}$$

On peut donc poser $A_1 = H_1 \cup H_2 \cup \{v_1\}$ et appliquer la stratégie de partitionnement, puisque $|N_{G-A_1}(A_1)| = |N_P(v_1) \cup N_P(H_1) \cup N_P(H_2)| \leq \frac{t+1}{2}$. $\square$

Lorsque $p \geq 4$, sous l'hypothèse $|V(G)| \geq p(10p-3)$, le lemme suivant, dont la preuve est présentée en détail dans **[16]**, permet d'appliquer la stratégie de partitionnement qui fournit une $(a,b)-$partition dans le cas où $a \geq p$.

Lemme 3.4.5. *Soit G un graphe d'ordre n tel que $\tau = \tau(G) = n-p$, où $p \geq 4$ et $n \geq p(10p-3)$. Soit P un chemin d'ordre τ et soit $H = G-P$. Si $|N_P(H)| > \frac{\tau+1}{2}$, alors il existe $Y \subset V(P)$, un ensemble de sommets indépendants d'ordre p tel que $|N_{G-Y}(Y)| \leq \frac{\tau-1}{2}$.*

Il est maintenant possible d'appliquer la stratégie de partionnement afin de montrer que dans le cas où $p \geq 4$, un graphe $p-$déficient est $\tau-$partitionnable, en autant que $n \geq p(10p-3)$.

Théorème 3.4.6. *Soit G un graphe d'ordre n et tel que $\tau = \tau(G) = n-p$, où $p \geq 4$. Supposons $\tau = a+b$, $1 \leq a \leq b$. Alors :*
(a) Si $a \geq p$, alors G a une $(a,b)-$partition, en autant que $n \geq p(10p-3)$.
(b) Si $a < p$, alors G a une $(a,b)-$partition, en autant que $n \geq 4p^2-6p-3$.

DÉMONSTRATION. Soit P un chemin maximal de G et $H = G-P$.
(a) Si $|N_P(H)| \leq \frac{\tau+1}{2}$, puisque $p \leq a$, on peut appliquer la stratégie de partitionnement en posant $A_1 = V(H)$. Si $|N_P(H)| > \frac{\tau+1}{2}$, alors par le lemme 3.4.5, il existe un ensemble de sommets indépendants $Y \subset V(P)$ tel que $|Y| = p$ et $|N_{G-Y}(Y)| \leq \frac{\tau+1}{2}$. Nous pouvons donc aussi appliquer la stratégie de partitionnement, en posant $A_1 = Y$.
(b) On distingue deux cas :
<u>Cas 1</u> : $c(G) \leq n-2p+3$.
Dans ce cas, $b = \tau - a = n-p-a \geq n-p-(p-1) = n-2p+1$. Donc $b \geq n-2p+1 \geq c(G)-2$. Par le corollaire 3.2.9, le graphe G a une $(a,b)-$partition.
<u>Cas 2</u> : $c(G) > n-2p+3$.
(I) Soit $\alpha(G) \geq 2p-1$. Alors on choisit un ensemble de sommets indépendants $A \subset V(G)$ tel que $|A| = \alpha(G)$. Posons aussi $B = V(G)-A$. Ainsi, $\tau(A) = 1 \leq a$ où $a \leq p-1$ par l'hypothèse de (b) et $\tau(B) \leq n-\alpha(G) \leq n-2p+1 = n-p-(p-1) \leq n-p-a = \tau-a = b$.
(II) On suppose maintenant $\alpha(G) \leq 2p-2$. Soit C un cycle de G tel que

$|C| = c(G)$. Soit $H = G - C$ constitué de k composantes connexes $H_1, H_2, ..., H_k$.

(i) Dans le cas où $c(G) = \tau$, C ne possède aucun sommet d'attachement et donc par le corollaire 3.2.15, G est $\tau-$partitionnable.

(ii) Supposons maintenant $c(G) = \tau - 1$. Remarquons qu'aucun sommet d'attachement de C ne sont consécutifs sur C, car sinon on obtient un chemin d'ordre $c(G) + 2 = \tau + 1$. Donc $|N_C(G - C)| \leq \frac{c(G)}{2} = \frac{\tau(G)-1}{2}$. Par le corollaire 3.2.15, G est $\tau-$partitionnable.

(iii) Supposons enfin que $c(G) \leq \tau - 2$. Tout sous-ensemble de H qui contient exactement un élément dans chacune des k composantes connexes est un ensemble de sommets indépendants et donc $k \leq \alpha(G) \leq 2p - 2$. Soit t le nombre de sommets d'attachement de C. Le théorème 3.2.14 permet de considérer seulement le cas $b \leq t - 1$. Par le lemme 3.4.3(b), $t \leq \left\lceil \frac{c(G)}{2} \right\rceil + \binom{k}{2}$. Donc on a que

$$b \leq \frac{c(G) + 1}{2} + \binom{2p - 2}{2} - 1.$$

De plus, par l'hypothèse du cas (iii) et puisque, par l'hypothèse de (b), $a \leq p - 1$:

$$b = \tau - a \geq c(G) + 2 - (p - 1),$$

ce qui entraîne

$$c(G) - p + 3 \leq \frac{c(G) + 1}{2} + \binom{2p - 2}{2} - 1$$
$$\Leftrightarrow c(G) \leq 4p^2 - 8p - 1$$

Par hypothèse du cas (2), $c(G) > n - 2p + 3$ et donc

$$n - 2p + 3 \leq 4p^2 - 8p - 1 \Longleftrightarrow n \leq 4p^2 - 6p - 4$$

Donc on a montré : $c(G) \leq \tau - 2 \Rightarrow n \leq 4p^2 - 6p - 4$. Par la contraposée, $n \geq 4p^2 - 6p - 3$ implique que $c(G) = \tau$ ou $c(G) = \tau - 1$. On a montré que dans ces deux cas, G est $\tau-$partitionnable. □

Puisque $p(10p - 3) \geq 4p^2 - 6p - 3$ pour tout $p \geq 4$, on peut présenter le corollaire suivant :

Corollaire 3.4.7. *Soit G un graphe d'ordre n tel que $\tau(G) = n - p$, avec $p \geq 4$ et $n \geq p(10p - 3)$, Alors G est $\tau-$partitionnable.*

3.5. Les classes de graphes $\tau-$partitionnables

Au terme de ce chapitre, on peut énoncer 13 classes de graphes qui sont $\tau-$partitionnables.

(1) Si G est un graphe ayant un index de bipartition $r \leq \frac{\tau(G)-3}{2}$, alors G est $\tau-$partitionnable (théorème 3.1.1).

(2) Si G est un graphe tel que $\Delta(G) \geq V(G)-9$, alors G est $\tau-$partitionnable (théorème 3.1.2)

(3) Si G est un graphe tel que $\Delta(G) \leq 3$, alors G est $\tau-$partitionnable (théorème 3.1.2)

(4) Tout graphe 2-dégénéré est $\tau-$partitionnable (théorème 3.1.3).

(5) Tout graphe décomposable est $\tau-$partitionnable (théorème 3.1.5)

(6) Si G est un graphe tel que $c(G) \leq \left\lceil \frac{\tau(G)}{2} \right\rceil + 2$, alors G est $\tau-$partitionnable (corollaire 3.2.9).

(7) Si G est un graphe tel que $g(G) \geq \left\lfloor \frac{\tau(G)}{2} \right\rfloor - 1$, alors G est $\tau-$partitionnable (corollaire 3.2.10).

(8) Si G est un graphe tel que $\tau(G) \leq 15$, alors G est $\tau-$partitionnable. (Théorème 3.2.11)

(9) Tout graphe faiblement pancyclique est $\tau-$partitionnable (théorème 3.2.12).

(10) Tout graphe semi-pancyclique est $\tau-$partitionnable (théorème 3.2.13)

(11) Si G est un graphe possèdant un cycle maximal ayant au plus $\left\lceil \frac{\tau(G)}{2} \right\rceil$ sommets d'attachements, alors G est $\tau-$partitionnable. (corollaire 3.2.15).

(12) Tout graphe sans fourche est $\tau-$partitionnable (théorème 3.3.5).

(13) Tout graphe $p-$déficient est $\tau-$partitionnable si $p \leq 3$ ou $p \geq 4$ et $n \geq p(10p-3)$ (théorème 3.4.4, corollaire 3.4.7).

Chapitre 4

LA CONJECTURE DE PARTITIONNEMENT DES CHEMINS POUR LES GRAPHES ORIENTÉS

4.1. Notions de base sur les graphes orientés

Un *graphe orienté fini* D consiste en un ensemble fini $V(D)$ de sommets et en un ensemble fini $A(D)$ composé de couples de sommets distincts, lesquelles couples sont nommées les *arcs* de D. On écrira donc $D = (V(D), A(D))$ et on ećrira uv pour (u, v). Un graphe H est un *sous-graphe* de D si $V(H) \subseteq V(D)$ et $A(H) \subseteq A(D)$. On écrira alors $H \leq D$. Un graphe orienté $H \leq D$ est un *sous-graphe orienté induit* dans G si $V(H) \subseteq V(D)$ et si $A(H)$ est constitué de tous les arcs de D dont les deux extrémités sont des sommets de H, c'est-à-dire :

$$A(H) = \{xy \in A(D) \mid x, y \in V(H) \subseteq V(G)\}$$

Dans le cas d'un sous-graphe orienté induit, le choix d'un ensemble de sommets dans D permet à lui seul de définir correctement un sous-graphe. Pour un sous-ensemble $K \subseteq V(D)$, on notera donc simplement par $\langle K \rangle$ ou par $D\langle K \rangle$ le sous-graphe orienté induit de G ayant K comme ensemble de sommets. L'ordre de $\langle K \rangle$ est le nombre d'éléments dans K.

Soit $u, v \in V(D)$. Pour un arc $uv \in A(D)$ on appelle u sa *queue* et v sa *tête*. On dira aussi que l'arc uv *quitte* u et *entre* dans v. On nomme alors u et v les *extrémités* de l'arc uv. S'il existe un arc uv ou vu dans $A(D)$, on dira que u et v sont *adjacents*. Notons que la définition de graphe orienté présentée ci-haut permet à deux arcs d'avoir exactement les mêmes extrémités (par exemple uv et vu). Puisque $A(D)$ est un ensemble d'arcs et qu'un arc est un couple de sommets distincts, ni arcs multiples ni boucles ne sont permis. Les boucles ne sont pas permises non-plus.

Pour un sommet $v \in V(D)$, on utitlise la notation suivante :

$$N_D^+(v) = \{u \in V(D) \mid vu \in A(D)\} \qquad N_D^-(v) = \{w \in V(D) \mid wv \in A(D)\}$$

$$N_D(v) = N_D^+ \cup N_D^-(v)$$

Les ensembles $N_D^+(v)$, $N_D^-(v)$ et $N_D(v)$ sont nommés respectivement l'ensemble des *voisins-sortants*, *voisins-entrants* et *voisins* de v. Le *degré* d'un sommet $v \in V(D)$, noté $d_D(v)$, est le nombre de voisins de v dans D. On notera par $\delta(v)$ le minimum de tous les degrés des sommets de D.

Un graphe orienté D est dit *biparti* si il existe deux ensembles disjoints $A, B \subseteq V(D)$ tels que $A \cup B = V(D)$ et tels que tout arc de D possède une extrémité dans A et l'autre B.

Un graphe orienté D est dit *semi-complet* si il existe au moins un arc entre chaque paire de sommets de $V(D)$.

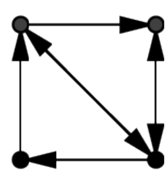

FIGURE 4.1. Graphe orienté semi-complet

Un graphe orienté D est *transitif* si l'implication suivante est vraie :

$$xy, yz \in A(D) \text{ et } x \neq z \Rightarrow xz \in A(D).$$

Un $uv-$*parcours* d'un graphe orienté D est une suite $W = x_0x_1...x_k$ de sommets de D tels que $x_0 = u$, $x_k = v$ et $x_ix_{i+1} \in A(D)$ pour tout $i = 0, ..., k-1$. Un

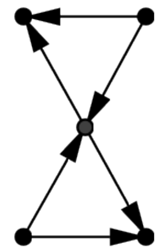

Figure 4.2. Graphe orienté transitif

$uv-$*chemin* P dans D est un $uv-$parcours dont tous les sommets sont distincts. Un *circuit* C de D est une suite $C = x_0x_1...x_k$ telle que $x_0, x_1, ..., x_k$ est un chemin de D et $x_kx_0 \in A(D)$ Les sommets u et v d'un $uv-$chemin P sont appelés les *extrémités* de P. Plus précisément, u est appelé le *sommet initial* et v le *sommet final* de W (de P). L'*ordre* d'un parcours, d'un chemin ou d'un circuit est le nombre de sommets appartenant àu parcours, au chemin ou au circuit. Un circuit, chemin ou parcours de D est *hamiltonien* s'il contient tous les sommets de D. Un graphe orienté est dit *hamiltonien, traçable ou parcourable* lorsqu'il contient un circuit, chemin ou parcours hamiltonien.

Un graphe orienté est *acyclique* si il ne contient aucun circuit. Il est *unicyclique* si il contient un seul circuit.

Une propriété P est dite *héréditaire* si tout sous-graphe orienté d'un graphe orienté possédant P possède aussi P.

D est *fort* (aussi *fortement connexe*) si pour toute paire de sommets distincts $x, y \in V(D)$, il existe un $xy-$chemin et un $yx-$chemin. Une *composante forte* de D est un sous-graphe orienté induit d'ordre maximum H de D tel que H est fort. Une composante forte sera dite *triviale* si elle est composée d'un seul sommet.

L'ordre du plus long chemin d'un graphe orienté D est noté $\tau(D)$. Un chemin d'ordre maximal est nommé un *détour*. La *source* de D, noté $S(D)$, est l'ensemble constitué de tous les sommets initiaux à un détour de D. Pour $v \in S(D)$, on nomme $v - detour$ un détour ayant v comme sommet initial.

Un sommet $x \in S(D)$ est un *destructeur local* si, pour tout $y \in N_D^-(x)$, chaque $y-$détour contient x. C'est à dire que supprimer x de $V(D)$ conduit à détruire tout détour ayant un sommet initial dans le voisinage de x.

Comme pour les graphes non-orientés, pour deux entiers positifs a et b, une partition (A, B) de $V(D)$ est une $(a, b) -$ *partition* si $\tau(A) \leq a$ et $\tau(B) \leq b$. Si un graphe orienté D possède une $(a, b)-$partition pour tout couple (a, b) d'entiers positifs tels que $a + b = \tau(D)$, alors D est $\tau -$ *partitionnable*.

On a posé une conjecture du partitionnement des chemins pour les graphes orientés [**18**] :

Conjecture 4.1.1. *Tout graphe orienté est $\tau-$partitionnable.*

4.2. Graphes orientés qui sont $(1, \tau(D)-1)$-partitionnables

Nous avons vu au chapitre précédent qu'un graphe est $(a, b)-$partitionnable dès que $a \leq 7$. Malheureusement, en ce qui concerne les graphes orientés, un tel résultat n'a pu être montré jusqu'à présent. Nous en sommes encore à étudier le cas $a = 1$, c'est-à-dire que l'énoncé « Si D est un graphe orienté tel que $\tau(D) = \tau$, alors D possède une $(1, \tau - 1)-$partition » est encore à l'état de conjecture. Dans la présente section, on rapporte quelques résultats supportant une telle conjecture [**18**].

Proposition 4.2.1. *Soit P une propriété héréditaire. Supposons que tout graphe orienté D possédant la propriété P contient un destructeur local. Alors D a une $(1, \tau(D) - 1)-$partition (A, B), telle que $A \subseteq S(D)$.*

Démonstration. La preuve est par induction sur l'ordre d'un graphe orienté. Lorsque $|V(D)| \leq 2$, c'est évidemment vrai. Soit $n \geq 3$ et supposons que tout graphe orienté D d'ordre $n - 1$ possédant la propriété P possède une $(1, \tau(D) - 1)-$partition (A, B) avec $A \subseteq S(D)$. Soit maintenant D un graphe orienté d'ordre n possédant la propriété P et soit $x \in S(D)$ un destructeur local. On considère deux cas.

<u>Cas 1</u> : $\tau(D - x) < \tau(D)$. Dans ce cas, clairement, $(\{x\}, V(D) - x)$ est une $(1, \tau(D) - 1)-$partition.

Cas 2 : $\tau(D-x)=\tau(D)$. Puisque P est une propriété héréditaire, $D-x$ possède aussi la propriété P. Donc, par hypothèse d'induction, $D-x$ possède (A', B), une $(1, \tau(D)-1)-$partition, avec $A' \subseteq S(D-x)$. Supposons par l'absurde qu'il existe $vx \in A(D)$ ou $xv \in A(D)$, avec $v \in A' \subseteq S(D-x)$.
Puisque $v \in S(D-x)$, il existe P un $v-$détour ne contenant pas x. Rappelons que par l'hypothèse du cas 2, $\tau(D-x)=\tau(D)$, donc P est d'ordre $\tau(D)$. Si $xv \in A(D)$, alors $P \cup \{x\}$ forme un chemin d'ordre $\tau(D)+1$, ce qui est une contradiction. Si $vx \in A(D)$, alors x est un destructeur local pour v, c'est-à-dire que chaque $v-$détour contient x, ce qui contredit $v \in S(D-x)$.
On vient de montrer que $N_D(x) \cap A' = \phi$. Donc $\tau(A' \cup \{x\}) = \tau(A') = 1$. Posons $A = A' \cup \{x\}$. Alors (A, B) est une $(1, \tau(D)-1)-$partition de D. □

Lemme 4.2.2. *Soit D un graphe orienté possédant la propriété P suivante : aucune paire de circuits de D ne partage la même arête. Alors D a une $(1, \tau - 1)-$partition.*

Démonstration. Soit S la source de D et soit $\tau(D)=\tau$. Puisque la propriété P est héréditaire, il suffit, par le proposition 4.2.1, de montrer que D possède un destructeur local. Supposons au contraire qu'aucun sommet de S n'est un destructeur local. Soit $x_1 \in S$. Puisque x_1 n'est pas un destructeur local, il existe $x_2 \in S \cap N_D^-(x_1)$ et un x_2-détour qui ne contient pas x_1. Pour la même raison, il existe $x_3 \in S \cap N_D^-(x_2)$ et un x_3-détour ne contenant pas x_2. En poursuivant ce raisonnement, on construit une suite d'éléments $x_1, x_2, ...$, telle que $x_{i+1}x_i \in A(D)$ et $x_i \in S$, pour tout $i = 1, 2, ...$. Puisque S est un ensemble fini, il existe k tel que $x_i = x_{i+k}$. Ainsi, $x_{i+k}x_{i+k-1}...x_i$ forme un circuit C, tel que $V(C) \subseteq S$. Soit x_j un sommet de C, avec $i+k \leq j \leq i$. Puisque x_{j-1} est un sommet de S et qu'on a supposé qu'aucun sommet de S n'est un destructeur local, il existe un x_j-détour ne contenant pas x_{j-1}. De plus, x_{j+1} est inclus dans tout x_j-détour, sinon on obtient un chemin d'ordre supérieur à $\tau(D)$. Donc il existe un $x_jx_{j+1}-$chemin P tel que $x_{j-1} \notin P$. Ainsi, le circuit $x_{j+1}x_jPx_{j+1}$ est distinct du circuit C. Ceci signifie que l'arc $x_{j+1}x_j$ est partagé par C et le circuit $x_{j+1}x_jPx_{j+1}$. Cette contradiction nous permet de conclure. □

Au chapitre précédent, plusieurs résultats se sont dégagés de l'étude de l'existence d'un P_n-noyau chez les graphes pour différentes valeurs de n. Il est donc justifié de s'inspirer du concept élaboré pour les graphes en espérant trouver un lien entre P_n-noyau et $\tau-$partitionnabilité pour les graphes orientés.

Définition. Soit K un ensemble de k sommets indépendants d'un graphe orienté D. On dit que K est un *noyau* de D si, pour tout sommet $y \in D - K$, il existe $x \in K$ tel que $xy \in A(D)$.

Si D possède un noyau K, alors $\tau(D - K) < \tau(D)$ et donc $(K, D - K)$ est une $(1, \tau - 1)-$partition de D. Cependant, comme pour les graphes, ce ne sont pas tous les graphe orientés qui possèdent un noyau. Dans certains cas, le sous-graphe $\langle S(D)\rangle$ peut posséder un noyau lorsque D n'en contient pas. Le résultat suivant est alors utile.

Théorème 4.2.3. *Soit D un graphe orienté dont le détour est d'ordre τ et soit S la source de D. Si $\langle S\rangle$ possède un noyau, alors D est $(1, \tau - 1)-$partitionnable.*

Démonstration. Soit K un noyau de $\langle S\rangle$. Posons $B = D - K$. Supposons par l'absurde qu'il existe un chemin P dans $\langle B\rangle$ tel que $V(P) = \tau$. Soit y le sommet initial de P. Alors $y \in S - K$ et donc il existe un sommet $x \in K$ tel que $xy \in A(D)$. Mais alors $\{x\} \cup P$ forme un chemin d'ordre $\tau + 1$. Cette contradiction montre que $\tau(B) \leq \tau - 1$, et donc (K, B) est une $(1, \tau - 1)-$partition de D. $\square$

Le théorème suivant reliant circuits et noyau d'un graphe orienté est dû à Richardson [**19**].

Théorème 4.2.4. *Tout graphe orienté sans circuit impair possède un noyau.*

Ce qui, combiné au théorème précédent, mène au corollaire qui suit :

Corollaire 4.2.5. *Soit D un graphe orienté dont le détour est d'ordre τ et soit S la source de D. Si le graphe orienté $\langle S\rangle$ ne contient pas de circuit impair, alors D possède une $(1, \tau - 1)-$partition.*

On sait, par Harary, Norman et Cartwrigh [**20**], qu'un graphe orienté est biparti si et seulement si il ne contient pas de circuit impair. Ceci montre que pour un graphe orienté fort, le fait de ne pas contenir de circuit impair garantit l'existence d'une $(1,1)-$partition, et donc qu'un tel graphe est $\tau-$partitionnable. Dans le but d'extrapoler un tel résultat aux graphes orientés contenant plus d'une composante forte, nous avons besoin des définitions suivantes.

Définition. Soit D un graphe orienté et soit $D_1, ..., D_k$ ses composantes fortes. Le *graphe orienté des composantes fortes* de D, noté $SC(D)$, est le graphe orienté ayant pour ensemble de sommets $\{v_1, ..., v_k\}$ et pour ensemble d'arcs
$A(SC(D)) = \{v_i v_j |$ il existe un sommet dans D_i qui est adjacent à un sommet de $D_j\}$.

La *hauteur* $h(D)$ du graphe orienté D est définie par $h(D) = \tau(SC(D))$.

Théorème 4.2.6. *Si D est un graphe orienté de hauteur h sans circuit impair, alors D possède une $(h,h)-$partition.*

Démonstration. Soit D un graphe orienté de hauteur h sans circuit impair. Soient $D_1, ..., D_k$ ses composantes fortes. Comme mentionné plus haut, un graphe orienté fort est biparti si et seulement si il ne contient pas de circuit impair. On sait donc que chaque composante forte D_i de D possède une $(1,1)-$partition (A_{D_i}, B_{D_i}). Soit

$$A = \bigcup_{i=1}^{k} A_{D_i} \qquad B = \bigcup_{i=1}^{k} B_{D_i}.$$

Supposons par l'absurde qu'il existe un chemin P d'ordre supérieur à h dans A. Puisque A_{D_i} est un ensemble de sommets indépendants pour tout $i = 1, ..., k$, aucune pair de sommets de P n'appartient à la même composante. C'est à dire qu'il existe dans $SC(D)$ un chemin d'ordre supérieur à h. Étant donné que D est de hauteur h, on a $h = h(D) = \tau(SC(D))$. On aboutit donc à une contradiction. Ainsi, $\tau(A) \leq h$. Par le même raisonnement, on a $\tau(B) \leq h$. $\square$

En combinant le corollaire 4.2.5 au théorème précédent, on obtient une première classe de graphe orientés $\tau-$partitionnable, présentée dans le corollaire ci-dessous.

Corollaire 4.2.7. *Soit D un graphe orienté sans circuit impair. Si D a une hauteur $h \leq 2$, alors D est $\tau-$partitionnable.*

Démonstration. Par le théorème 4.2.6, D possède une $(2,2)-$partition. Donc pour deux entiers a, b tels que $2 \leq a \leq b$ et $a + b = \tau(D)$, on peut trouver une $(a,b)-$partition. Pour le cas où $a = 1$, il suffit d'invoquer le corollaire 4.2.5. $\square$

4.3. La partition-GRV

La partition-GRV présentée ci-après possède certaines propriétés permettant de trouver facilement une $(a, b)-$partition pour $a + b = \tau(D)$, lorsque D est acyclique. En modifiant un peu la partition-GRV, on arrive au même résultat pour les graphes orientés unicycliques. À la fin de la section, on parvient à démontrer que tout graphe transitif est $\tau-$partitionnable.

Définition. Soit D un graphe orienté dont le détour est d'ordre τ.
Soit la fonction $p : V(D) \to \mathbb{N}$ définie par $v \mapsto p(v)$
où $p(v) = max\{\, |V(P)| : P$ est un $uv-$chemin pour un $u \in V(D)\}$.
La *partition-GRV* de D est la partition $(V_1, ..., V_\tau)$ de $V(D)$ telle que
$V_i = \{v \in V(D) : p(v) = i\}$, pour tout $i = 1, ..., \tau$.

Cette partition possède deux propriétés fort utiles lorsqu'il s'agit de trouver une $(a, b)-$partition. Ces propriétés sont présentées dans le lemme suivant.

Lemme 4.3.1. *Soit D un graphe orienté acyclique dont le détour est d'ordre τ. Soit $(V_1, ..., V_\tau)$ sa partition-GRV. Alors :*
(1) Si $v_i v_j \in A(D)$ pour $v_i \in V_i$ et $v_j \in V_j$, alors $i < j$.
(2) Si P est un chemin de D, alors $|V(P) \bigcap V_i| \leq 1$ pour tout $i = 1, ..., \tau$.

Démonstration. (1) Puisque $v_i \in V_i$, il existe P un chemin d'ordre i se terminant à v_i. Or, $v_i v_j \in A(D)$. Donc $v_j \notin V(P)$, sinon D possède un circuit. Ainsi, $P \cup \{v_j\}$ forme un chemin d'ordre $i + 1$ se terminant à v_j. Donc $p(v_j) \geq i + 1$. Puisque $j = p(v_j)$, on a bien $i < j$.
(2) Découle directement du point (1) ci-haut. $\square$

Le lemme précédent indique qu'en usant de la partition-GRV, on peut facilement trouver une $(a, b)-$partition pour $a + b = \tau(D)$, $1 \leq a \leq b$, lorsque D est un graphe orienté acyclique. Lorsque D n'est pas acyclique, on peut trouver un sous-graphe orienté induit acyclique d'ordre maximum M et considérer $(V_1, ..., V_{\tau(M)})$, la partition-GRV de M. Ceci permet d'énoncer le théorème suivant.

Théorème 4.3.2. *Si D est un graphe orienté contenant au plus un circuit, alors D est $\tau-$partitionnable.*

Démonstration. Supposons $\tau(D) = a + b$, $1 \leq a \leq b$. On considère d'abord D acyclique. En posant

$$A = \bigcup_{i=1}^{a} V_i \quad B = \bigcup_{i=a+1}^{\tau(D)} V_i,$$

où $(V_1, ..., V_{\tau(D)})$ est la partition-GRV de D, on obtient une $(a, b)-$partition, puisqu'on sait que si P est un chemin de D, alors, par le lemme 4.3.1, $|V(P) \cap V_i| \leq 1$, c'est-à-dire que P possède au plus un sommet appartenant à V_i, et ce pour tout $i = 1, ..., \tau(D)$. Donc on a bien $\tau(A) = a$ et $\tau(B) = b$. On considère maintenant D unicyclique. Soit M un sous-graphe orienté induit acyclique d'ordre maximum de D, c'est-à-dire $M = D - \{u, v\}$, où uv est un arc quelconque appartenent à l'unique circuit de D. Soit $(W_1, ..., W_{\tau(M)})$, la partition-GRV de M. On pose $A = \bigcup_{i=k}^{l} W_i$, où $l - k = a$ et $u \in A, v \notin A$. Posons ensuite $B = V(D) - A$. Alors, par le lemme 4.3.1, $\tau(M\langle A\rangle) = a$ et $\tau(M\langle B\rangle) = b$. Puisque l'arc uv relie un sommet de A à un sommet de B, on a $M\langle A\rangle = D\langle A\rangle$ et $M\langle B\rangle = D\langle B\rangle$. Donc (A, B) est une $(a, b)-$partition de D. $\square$

La preuve du théorème précédent découle du fait que la partition-GRV permet d'obtenir une partition de $V(D)$ en $\tau(D)$ ensembles telles qu'aucun chemin dans D ne contient plus d'un sommet dans chaque ensemble. La définiton suivante cherche à généraliser cette méthode aux graphes contenant plus d'un circuit.

Définition. Une $k-$*coloration prismatique* de D correspond à une partition de $V(D)$ en k ensembles $V_1, ..., V_k$, nommés des *couleurs*, tels que pour tout chemin $P \leq D$, on a $|V(P) \bigcap V_i| \leq 1$ pour tout $i = 1, ..., k$.

Le *nombre prismatique* $\varphi(D)$ de D est le plus petit nombre k tel que D possède une $k-$coloration prismatique.

Le *nombre chromatique* $\chi(D)$ d'un graphe orienté D est le nombre minimal de couleurs requises pour que deux extrémités d'un même arc n'appartiennent jamais à la même classe couleur.

L'interêt du nombre prismatique $\varphi(D)$ réside dans le fait que si $\varphi(D) = \tau(D)$, alors D est $\tau-$partitionnable. En effet, soit une coloration prismatique de D ayant comme classes couleurs $V_1, ..., V_{\varphi(D)}$ et supposons $\tau(D) = a + b$, où a, b sont des entiers positifs et $a \leq b$. En posant

$$A = \bigcup_{i=1}^{a} V_i \qquad B = V(D) - A,$$

on obtient une $(a, b)-$partition, puisque tout chemin de D possède au plus un sommet dans chaque classe.

Or, on sait [**21**] : $\chi(D) \leq \tau(D)$. De plus, toute coloration prismatique d'un détour de D requiert $\tau(D)$ couleurs différentes. On peut donc affirmer :

$$\chi(D) \leq \tau(D) \leq \varphi(D).$$

Théorème 4.3.3. *Tout graphe orienté transitif est $\tau-$partitionnable.*

Démonstration. Il a été démontré [**18**] que si D est un graphe orienté transitif, alors pour tout chemin P dans D, le sous-graphe orienté induit $\langle V(P)\rangle$ est semi-complet. C'est à dire que si D est transitif, une coloration chromatique de χ couleurs est aussi une $\chi-$coloration prismatique. Donc on a $\varphi(D) \leq \chi(D)$. On sait que $\chi(D) \leq \tau(D) \leq \varphi(D)$, ce qui implique $\varphi(D) = \tau(D)$. Alors il existe $V_1, ..., V_{\varphi(D)}$ une coloration prismatique de D. On pose $A = \bigcup_{i=1}^{a} V_i$ et $B = V(D) - A$. Soit a, b deux entiers positifs tels que $a + b = \tau(D)$. Alors (A, B) est une $(a, b)-$partition de D puisque tout chemin de D possède au plus un sommet de chaque couleurs V_i. $\square$

4.4. Traçabilité, k-traçabilité et $\tau-$partitionnement des graphes dirigés

Un graphe orienté d'ordre n est dit $1-$déficient lorsque $\tau(D) = n - 1$. Dans cette section, on rapporte quelques résultats sur la traçabilité des graphes dirigés, ce qui permettra de dégager quelques résultats en ce qui à trait à la $\tau-$partitionnabilité des graphes dirigés $1-$déficients.

Définition. Un graphe *dirigé* est un graphe orienté ne comportant aucun circuit de longueur 2. On peut donc obtenir un graphe dirigé D à partir d'un graphe non-orienté G en assignant une seule direction à chaque arête de G.

Un graphe orienté D est dit *k-traçable* pour un certain k, $1 \leq k \leq n$, si tout sous-graphe orienté induit dans D d'ordre k est traçable.

À la section 3.4, on a montré qu'un graphe $p-$déficient est $\tau-$partitionnable pour $p \leq 3$. En ce qui concerne les graphes dirigés, on doit d'abord se pencher sur le cas $1-$déficient, c'est-à-dire le cas où $\tau(D) = V(D) - 1$. Pour ce faire, on use de la $k-$traçabilité des graphe dirigés $1-$déficients. Le lemme suivant établit le lien entre la $k-$traçabilité et l'existence d'une $(a,b)-$partition pour un graphe orienté $1-$déficient.

Lemme 4.4.1. *Soit a, b deux entiers positifs tels que $a + b = \tau(D)$. Si D est un graphe orienté $1-$déficient qui n'est pas $(a+1)-$traçable, alors D possède une $(a,b)-$partition.*

Démonstration. Puisque D n'est pas $(a+1)-$traçable, il existe $A \subseteq V(D)$ tel que $|A| = a + 1$ et $\tau(A) \leq a$. Posons $B = V(D) - A$. Puisque D est $1-$déficient, on a $|B| = |V(D)| - a - 1 = a + b + 1 - a - 1 = b$. Donc $\tau(B) \leq b$ et ainsi on a que (A, B) est une $(a,b)-$partition de D. $\square$

Il est tentant à la suite du dernier lemme de chercher à démontrer que si D n'est pas traçable, alors D n'est pas $k-$traçable pour aucun $k \in \{2, ..., \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$. Ceci permettrait de démontrer que tout graphe orienté $1-$déficient est $\tau-$partitionnable. Une équipe de plusieurs chercheurs s'est penchée sur la question, en se restreignant aux graphes dirigés. Ils ont publié deux articles **[22, 23]** dans lesquels ils sont parvenus au résultat suivant.

Théorème 4.4.2. *Si $k \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$ et D est un graphe dirigé $k-$traçable d'ordre supérieur à $2k$, alors D est traçable.*

Cependant, un récent article (**[24]**) démontre que pour $k = 7, 10, 11, ...$, on peut trouver un graphe orienté $k-$traçable qui n'est pas traçable. On ne peut donc pas démontrer que tout graphe orienté $1-$déficient est $\tau-$partitionnable de la manière escomptée.

Tout de même, on a pu tirer certains résultats partiels de l'étude de la $k-$traçabilité des graphes dirigés **[22, 23]**.

Proposition 4.4.3. *Soit D un graphe dirigé $1-$déficient. Soit a, b deux entiers positifs tels que $a+b = \tau(D)$, $a \leq b$ et $a \leq 5$. Alors D possède une $(a, b)-$partition.*

Démonstration. Puique D est $1-$déficient, alors D n'est pas traçable. Donc D n'est pas $k-$traçable pour tout $k \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Puisque $a \leq 5$, on a que D n'est pas $(a+1)-$traçable. On peut donc appliquer le lemme 4.4.1 qui nous permet de conclure que D possède une $(a, b)-$partition. □

Voici maintenant deux propriétés des graphes dirigés $k-$traçables (voir **[22]**, théorème 5.5 et 5.6)

Théorème 4.4.4. *Soit $k \geq 2$ et D est un graphe dirigé $k-$traçable d'ordre $n \geq 2k - 3$.*
(1) Si toute composante forte de D est hamiltonienne, alors D est traçable.
(2) Si $\delta(D) \geq n - 2$, alors D est traçable.

Corollaire 4.4.5. *Soit D un graphe orienté $1-$déficient. Si toute composante forte non-triviale de D est hamiltonienne, alors D est $\tau-$partitionnable.*

Démonstration. Soit a,b deux entiers positifs tels que $a + b = \tau(D)$, avec $a \leq b$. On sait que D n'est pas traçable puisque D est $1-$déficient. De plus, on a $|V(D)| = a + b + 1 \geq a + a - 1 = 2a - 1 = 2(a + 1) - 3$. Donc on peut appliquer la contraposée du théorème 4.4.4(1) avec $k = a + 1$. Alors il existe un sous-graphe orienté induit non $(a + 1)-$traçable. Par le lemme 4.4.1, D possède une (a,b)-partition. □

Corollaire 4.4.6. *Soit D un graphe dirigé $1-$déficient d'ordre n.*
Si $\delta(D) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ ou si $\delta(D) \geq n - 2$, alors D est $\tau-$partitionnable.

Démonstration. Soit a,b deux entiers positifs tels que $a+b = \tau(D)$, avec $a \leq b$. On sait que D n'est pas traçable puisque D est $1-$déficient.

Supposons d'abord que $\delta(D) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$.
Soit x un sommet de D tel que $d_D(x) = \delta(D) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil \leq n - (a + 1)$. Alors $|V(D) - N_D(x)| = n - d_D(x) \geq n - (n - (a+1)) = a+1$. Soit A un sous-graphe dirigé induit de D tel que $V(A) = \{x\} \cup H$ avec $H \subseteq V(D) - N_D(x)$ et $|H| = a$. Aucun sommet de H n'est adjacent à x, car $H \subseteq V(D) - N_D(x)$. Alors $\tau(A) \leq a$.

Posons $B = V(D) - A$. Alors $|B| = n - |A| = n - (a+1) = a+b+1-a-1 = b$. Donc (A, B) est une $(a, b)-$partition de D.

Supposons maintenant que $\delta(D) \geq n-2$.
Puisque $n = a+b+1 \geq a+a-1 = 2a-1 = 2(a+1)-3$, on peut appliquer la contreposée du théorème 4.4.4(2) avec $k = a+1$. Alors il existe un sous-graphe dirigé induit non $(a+1)-$traçable. Par le lemme 4.4.1, D possède une (a,b)-partition. $\square$

4.5. Les classes de graphes orientés $\tau-$partitionnables

Au terme de ce chapitre, on a relevé les résultats suivants concernant la $\tau-$partitionnabilité des graphes orientés.

(1) Soit D un graphe orienté sans circuit impair. Si D a une hauteur $h \leq 2$, alors D est $\tau-$partitionnable (corollaire 4.2.7).

(2) Si D est un graphe orienté contenant au plus un circuit, alors D est $\tau-$partitionnable (théorème 4.3.2).

(3) Tout graphe orienté transitif est $\tau-$partitionnable (théorème 4.3.3).

(4) Soit D un graphe dirigé $1-$déficient. Si $\tau(D) \leq 11$, D est $\tau-$partitionnable (proposition 4.4.3).

(5) Soit D un graphe dirigé $1-$déficient. Si toute composante forte non-triviale de D est hamiltonienne, alors D est $\tau-$partitionnable (corollaire 4.4.5).

(6) Soit D un graphe dirigé $1-$déficient d'ordre n. Si $\delta(D) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ ou si $\delta(D) \geq n-2$, alors D est $\tau-$partitionnable (corollaire 4.4.6)

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. Chartrand, D.P. Geller et S. Hedetniemi, *A generalization of the chromatic number*, Proc. Cambridge Phil. Soc. **64** (1968), 265-271.

[2] P. Hajnal, *Graph Partition* (en hongrois), thèse, supervisée par L.Lovász, Université J.A., Szeged, 1984.

[3] J. Vronka, *Vertex sets of graphs with prescribed properties* (en slovaque), thèse, supervisée par P. Mihók, Université P.J. Safàrík, Kosice, 1986.

[4] J. M. Laborde, C. Payan et N.H. Xuong, *Independent sets and longest directed paths in digraphs*, Graphs and other combinatorial topics (Prague, 1982), 173-177 (Teubner-Texte Math. **59**, 1983).

[5] J. A. Bondy, *Handbook of combinatorics*, The MIT Press, Cambridge, 1995.

[6] R. E. L. Aldred, C. Thomassen, *Graphs with not all possible path-kernels*, Discrete Math **285** (2004), 297-300.

[7] M. Frick, F. Bullock, *Detour chromatic numbers of graphs*, Discuss. Math. Graph Theory **21** (2001), 283-291.

[8] I. Broere, M. Dorfling, J. E. Dunbar et M. Frick, *A path(ological) partition problem*, Discuss. Math. Graph Theory **18** (1998), 113-125.

[9] L. Lovász, *On decomposition of graphs*, Studia Sci. Math. Hungar **1** (1966), 237-238.

[10] J. E. Dunbar, M. Frick, *Path kernels and partitions*, JCMCC **31** (1999), 137-149.

[11] J. E. Dunbar, M. Frick et F. Bullock, *Path partitions and P_n-free sets*, Discrete Math. **289** (2004), 145-155.

[12] L. S. Melnikov, I. V. Petrenko, *On the path kernel partitions in undirected graphs*, Diskretn. Anal. Issled. Oper. Series 1, Vol. 9, No. 2 (2002), 21-35.

[13] J. E. Dunbar, M. Frick, *The path partition conjecture is true for claw-free graphs*, Discrete Math **307** (2007), 1285-1290.

[14] Z. Ryjácek, *On a closure concept in claw-free graphs*, J. Combin. Theory Ser. B **70** (1997), 217-224.

[15] S. Brandt, O. Favaron et Z. Ryjácek, *Closure and stable Hamiltonien properties in claw-free graphs*, J. Graph Theory **34** (2000), 31-41.

[16] M. Frick, I. Schiermeyer, *An asymptotic result on the path partition conjecture*, Electronic J. Combin. **12** (2005), R48.

[17] G. Dirac, *Some theorems on abstract graphs*, Proc. London Math. Soc. **2** (1952), 69-81.

[18] M. Frick, S. Van Aardt, G. Dlamini, J. Dunbar et O. Oellermann, *The directed path partition conjecture, Discuss. Math. Graph Theory* **25** (2005), 331-343.

[19] M. Richardson, *Solutions of irreflexive relations*, Annals of Math. **58** (1953), 573-590.

[20] F. Harary, R. Z. Norman et D. Cartwright, Structural Models (John Wiley and Sons, 1965).

[21] D. B. West, *Introduction to graph theory*, Prentice-Hall inc., London, seconde édition, 2001.

[22] M. Frick, S. A. Van Aart, J. E. Dunbar, M. H. Nielsen, O.R. Oellermann, *A traceability Conjecture for oriented Graphs*, Electronic J. Combin. **15** (2008), R150.

[23] M. Frick, P. Katrenic, *Progress on the Traceability Conjecture for Oriented Graphs*, DMTCS **10** (2008), 105-114.

[24] S. A. Van Aart, J. E. Dunbar, M. Frick, P. Katrenic, M. H. Nielsen, O.R. Oellermann, *Traceability of $k-$traceable oriented graphs*, Discrete Math. **310** (2010), 1325-1333.

[25] I. Broere, M. Frick, G. Semanisin, *Maximal graphs with respect to hereditary properties*, Discuss. Math. Graph Theory**17** (1997), 51-66.