

Université de Montréal

Le Problème centre-foyer et application

par

Sophie Laurin

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en Mathématiques

18 avril 2011

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

Le Problème centre-foyer et application

présenté par

Sophie Laurin

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Madame Marlène Frigon

(président-rapporteur)

Madame Christiane Rousseau

(directeur de recherche)

Monsieur Jacques Bélair

(membre du jury)

Mémoire accepté le:

18 avril 2011

SOMMAIRE

Dans ce mémoire, nous étudions le problème centre-foyer sur le système

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases} \quad (0.0.1)$$

où P, Q sont des fonctions polynomiales. Nous développons ainsi deux mécanismes permettant de conclure qu'un point singulier monodromique dans ce système non-linéaire polynomial est un centre. Le premier mécanisme est la méthode de Darboux. Cette méthode utilise des courbes algébriques invariantes dans la construction d'une intégrale première. La deuxième méthode analyse la réversibilité algébrique ou analytique du système. Un système possédant une singularité monodromique et étant algébriquement ou analytiquement réversible à ce point sera nécessairement un centre.

Comme application, dans le dernier chapitre, nous considérons le modèle de Gauss généralisé avec récolte de proies suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = rx(1 - \frac{x}{k}) - yp(x) - h_1, \\ \dot{y} = y[-d + cp(x)], \end{cases} \quad (0.0.2)$$

où p est la fonction de Holling de type III généralisée,

$$p(x) = \frac{mx^2}{ax^2 + bx + 1}. \quad (0.0.3)$$

Nous y démontrons deux conjectures provenant de [11] reliées au problème centre-foyer concernant le cas $b = 0$. La première porte sur l'existence d'un centre et la deuxième sur la réversibilité analytique d'un col nilpotent.

Mots clés : Modèle de Gauss généralisé avec récoltes de proies, problème centre-foyer, méthode de Darboux, réversibilité algébrique et analytique, bifurcation de Hopf, bifurcation du col nilpotent.

SUMMARY

In this thesis, we study the center-focus problem in a system

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases} \quad (0.0.4)$$

where P, Q are polynomials. We describe two mechanisms to conclude that a monodromic singular point in this polynomial system is a center. The first one is the method of Darboux. In this method, one uses invariant algebraic curves to build a first integral. The second method is the algebraic (and analytic) reversibility. A monodromic singularity, which is algebraically or analytically reversible at the singular point, is necessarily a center.

As an application, in the last chapter, we consider the generalized Gause model with prey harvesting and a generalized Holling response function of type III,

$$\begin{cases} \dot{x} = rx(1 - \frac{x}{k}) - yp(x) - h_1, \\ \dot{y} = y[-d + cp(x)]. \end{cases} \quad (0.0.5)$$

We prove two conjectures from [11] related to the center-focus problem in the case $b = 0$. The first one is about the existence of a center, and the second one is about the analytic reversibility of a nilpotent saddle.

Keywords : Generalized Gause model with prey harvesting, center-focus problem, Darboux's method, algebraic and analytic reversibility, Hopf bifurcation, nilpotent saddle bifurcation.

TABLE DES MATIÈRES

Sommaire	3
Summary	4
Liste des figures	7
Liste des tableaux	8
Introduction	9
Chapitre 1. Problème centre-foyer	14
1.1. Les systèmes linéaires	14
1.2. Introduction au problème centre-foyer	17
1.2.1. Le théorème de Hartman-Grobman	18
1.3. Étude du cas particulier d'un point singulier avec valeurs propres $\pm i\omega$	19
1.3.1. Formes normales pour un système possédant deux valeurs propres imaginaires pures	26
1.3.1.1. Formes normales pour un système non-linéaire avec matrice A diagonale. [18]	27
1.3.2. Constantes de Lyapunov	30
Chapitre 2. Mécanismes de résolution du problème centre-foyer.	33
2.1. Méthode de Darboux	34
2.2. Réversibilité algébrique	40

2.2.1. Centre algébriquement et analytiquement réversible	43
Chapitre 3. Application à la preuve de deux conjectures	50
3.1. Explication du système	50
3.2. Étude des points singuliers du système	53
3.3. Analyse des bifurcations du système.....	57
3.3.1. Bifurcation de Hopf.....	58
3.3.1.1. Démonstration de la conjecture 3.3.1.....	58
3.3.2. Bifurcation de col nilpotent	64
3.3.2.1. Démonstration de la conjecture 3.3.2.....	64
Conclusion.....	71
Bibliographie	73

LISTE DES FIGURES

1.1	Point de selle	15
1.2	Noeuds Stables	15
1.3	Foyers Stables	16
1.4	Centres	17
1.5	Application de premier retour de Poincaré	20
1.6	Section d'une solution périodique	21
1.7	Application de premier retour de Poincaré pour une solution périodique	23
1.8	Exemple de centre-foyer	25
2.1	Réversibilité temporelle par rapport à l'axe y et symétrie par rapport à l'axe y	42
2.2	U et $\phi(U)$	44
2.3	Pli sur l'axe des y	44
2.4	V' tangent à $\phi(\Gamma)$	45
3.1	Fonction de Holling de type III généralisée pour $b=0.02>0$	51
3.2	Fonction de Holling de type III généralisée pour $b=-0.02<0$	51
3.3	Fonction de Holling de type III généralisée pour $b=0$	52
3.4	Comparaison entre centre et col nilpotent	57
3.5	Portrait de phase d'un col nilpotent	65
3.6	Portrait de phase d'un col nilpotent avec une droite $y = 0$ invariante .	66

LISTE DES TABLEAUX

0.1	État actuel des recherches sur les systèmes prédateur-proie avec fonction de Holling et récolte de proies (tableau venant de [11])	12
3.1	Points singuliers du système dépendant des valeurs des paramètres [11]	55
3.2	Types des points singuliers pour $\rho > 4\lambda$ [11]	57

INTRODUCTION

L'étude d'un système d'équations différentielles non-linéaires commence généralement par la recherche des points singuliers et, au voisinage de chaque point singulier, nous étudions normalement le linéarisé du système d'équations différentielles. Nous nous limitons ici à des systèmes sur $U \subset \mathbb{R}^2$, où $X = (x, y) \in U$. Ainsi, en regardant les valeurs propres de la matrice jacobienne du système

$$\dot{X} = v(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)), \quad (0.0.6)$$

en un point singulier (x_0, y_0) , où P et Q sont des fonctions polynomiales ou simplement analytiques sur U , nous pouvons conclure sur la nature d'un point singulier pour le système linéaire associé. Cette information nous donne généralement beaucoup d'indices sur la nature d'un point singulier. Cependant, la présence d'un centre pour le linéarisé d'un système à un point singulier n'implique pas nécessairement la présence d'un centre pour le système non-linéaire à ce même point.

Dans ce mémoire, nous traiterons du problème centre-foyer. En fait, ce problème étudie le type d'un point singulier *monodromique* non dégénéré dans un système d'équations différentielles non-linéaires

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases} \quad (0.0.7)$$

où P, Q sont des fonctions polynomiales (ou encore analytiques). Un point singulier est non-dégénéré et monodromique si le système linéaire associé a soit un centre ou un foyer à ce point singulier. La question principale du problème centre-foyer est :

« Sous quelles conditions pouvons-nous conclure qu'un point singulier monodromique non dégénéré est un centre ou un foyer pour ce système non-linéaire ? »

En fait, le problème centre-foyer est général. Il existe aussi pour des points singuliers dont la partie linéaire est *dégénérée*, c'est-à-dire dont les valeurs propres sont nulles, par exemple de matrice nilpotente ou encore nulle. Cependant, dans ce mémoire, nous nous limiterons au cas où la partie linéaire a deux valeurs propres imaginaires pures non nulles, soit le cas *non-dégénéré*.

Nous aurons besoin pour l'étude de ce problème de plusieurs outils et théorèmes fondamentaux en systèmes dynamiques. Nous discuterons plus précisément du théorème de Hartman-Grobman, des formes normales de Poincaré et de l'application de premier retour de Poincaré. Nous donnerons également une définition des constantes de Lyapunov qui interviennent dans la bifurcation de Hopf et nous verrons leur utilité dans le problème centre-foyer. Plus précisément, nous introduirons le théorème de Poincaré qui nous donne un critère pour déterminer la présence d'un centre dans un problème centre-foyer, soit :

Théorème 0.0.1. *Soit un système analytique sur $U \subset \mathbb{R}^2$ ayant un point singulier avec deux valeurs propres imaginaires pures non nulles. Ce système possède un centre à l'origine si et seulement si toutes les constantes de Lyapunov sont nulles.*

Ce théorème sera malheureusement légèrement décevant, car, en pratique, il n'est pas utile dans la résolution du problème centre-foyer. En effet, il est impossible de calculer toutes les constantes de Lyapunov. Nous aurons alors besoin d'autres méthodes pour résoudre le problème centre-foyer.

Le deuxième chapitre traitera alors de deux mécanismes permettant de déterminer l'existence d'un centre dans le problème centre-foyer. Nous verrons d'abord la méthode de Darboux. Celle-ci demande l'existence de courbes algébriques invariantes avec lesquelles on peut construire un facteur intégrant ou une intégrale première. Puis, la deuxième méthode étudiera la réversibilité algébrique que nous généraliserons à la réversibilité analytique.

Ce chapitre décrit en fait des méthodes classiques. La méthode de Darboux et la méthode de la réversibilité algébrique ont déjà été étudiées dans le passé.[6] Cependant, nous introduisons dans ce mémoire une nouvelle réversibilité, cette

fois dite analytique. Nous réussissons à la faire fonctionner en pratique.

Ceci nous mènera directement au dernier chapitre où nous considérerons une application intéressante à un système prédateur-proie avec récolte de proies. Nous y démontrerons deux conjectures laissées par Etoua dans [11]. Nous commencerons par rappeler brièvement les résultats d'Etoua sur le système prédateur-proie avec récolte de proies utilisant la fonction de Holling de type III généralisée. Les démonstrations des conjectures d'Etoua sont en fait des applications directes du problème centre-foyer.

En fait, dans les dernières années, plusieurs études ont porté sur l'analyse de systèmes prédateur-proie. De tels systèmes modélisent l'interaction d'un groupe de prédateurs avec celui d'un groupe de proies. Lotka[17] et Volterra[22] furent les premiers à suggérer un tel modèle. Suite à leurs études, beaucoup ont proposé des variantes pour la modélisation de systèmes prédateur-proie. Nous pouvons modéliser l'évolution d'une population, notée x , dont des individus sont prélevés régulièrement par :

$$\dot{x} = g(x) - S(x, h). \quad (0.0.8)$$

$g(x)$ décrit la dynamique de la population en l'absence de récolte et $S(x, h)$ représente le taux auquel les individus sont prélevés. h est appelé *l'intensité de la récolte*. Au moins deux stratégies de récolte sont utilisées. La première, celle qui nous intéressera par la suite, est celle traduite par un taux constant, $S(x, h) = h$. La deuxième, que nous n'étudierons pas ici, est traduite par un nombre d'individus prélevés par unité de temps proportionnel à la population, soit $S(h, x) = hx$.

Nous regardons un modèle prédateur-proie où la récolte de proies est permise. Un tel modèle s'applique en pêche, en foresterie, et même en gestion de la faune. Nous sommes donc en présence d'un modèle présentant une dynamique plus complexe que celle du modèle prédateur-proie sans récolte de proies. L'interaction prédateur-proie est linéaire dans le nombre de prédateurs. Nous étudions le système appelé dans la littérature *modèle de Gauss généralisé avec récolte de proies*.

Nous écrivons un tel système sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = g(x) - yp(x) - h, \\ \dot{y} = y[-d + cp(x)]. \end{cases} \quad (0.0.9)$$

Nous décrirons au chapitre 3 la signification de chacun des paramètres se trouvant dans ce système. Notons seulement que la fonction $p(x)$ que nous étudierons sera

$$p(x) = \frac{mx^2}{ax^2 + bx + 1} \quad (0.0.10)$$

et on appelle cette fonction la *fonction de Holling de type III généralisée*. Cette fonction est une des fonctions de réponse possible des prédateurs relativement au nombre de proies.

Voyons maintenant un tableau (0.1) représentant l'état actuel des recherches sur les systèmes prédateur-proie avec fonction de Holling comme fonction de réponse. Dans ce mémoire, nous rappellerons l'étude de ce modèle avec fonction

Holling de type	Fonction	Condition	Référence
I	$p(x) = ax$	$h_1 = 0$ $h_1 \neq 0$	[1] [8],[9]
II	$p(x) = \frac{bx}{ax+1}$	$h_1 = 0$ $h_1 \neq 0$	[1] [4],[3]
III	$p(x) = \frac{mx^2}{ax^2+1}$	$h_1 = 0$ $h_1 \neq 0$	[14] [11]
III généralisée	$p(x) = \frac{mx^2}{ax^2+bx+1}$	$h_1 = 0, b \in \mathbb{R}$ $h_1 \neq 0, b \geq 0$	[16] [11]
IV	$p(x) = \frac{mx}{ax^2+1}$	$h_1 = 0$ $h_1 \neq 0$	[24] ???
IV généralisée	$p(x) = \frac{mx}{ax^2+bx+1}$	$h_1 = 0$ $h_1 \neq 0$	[5], [25], [13], [23] ???

TAB. 0.1. État actuel des recherches sur les systèmes prédateur-proie avec fonction de Holling et récolte de proies (tableau venant de [11])

de Holling de type III généralisée faite dans [11]. En étudiant cette thèse, nous remarquons qu'Etoua a posé 5 conjectures. Le travail du présent mémoire consistera à démontrer les deux premières conjectures posées par Etoua qui concernent le cas particulier de la fonction de Holling de type III non généralisée.

Afin de prouver les deux conjectures, nous utiliserons le problème centre-foyer. En fait, la méthode de preuve que nous utiliserons sera très originale. Nous trouverons une transformation analytique permettant de rendre le système réversible par rapport au temps. Pour démontrer que le système transformé est réversible, nous calculerons son développement en série de puissances. Nous utiliserons une encyclopédie de suites numériques pour deviner le terme général de la série et Mathematica nous donnera la somme de la série. Nous conjecturerons alors la forme exacte du système et nous prouverons rigoureusement cette forme en réappliquant les étapes à l'inverse.

Chapitre 1

PROBLÈME CENTRE-FOYER

Dans ce chapitre, nous abordons le problème centre-foyer. Pour ce faire, nous introduisons quelques généralités importantes pour la compréhension du présent chapitre, mais également pour ceux qui suivront. Nous discutons plus précisément du théorème de Hartman-Grobman et des formes normales de Poincaré. Commençons d'abord, avant d'introduire le problème centre-foyer, par définir certaines notions de base sur les systèmes linéaires.

1.1. LES SYSTÈMES LINÉAIRES

Dans cette section, nous étudions différents types de singularités dans un système linéaire dont la matrice est inversible. Cela nous donnera un outil de base afin de comprendre la notion de centre et de foyer que nous introduirons plus tard dans le chapitre. Pour ce faire, nous considérons un système linéaire dans \mathbb{R}^2 .

Soit :

$$\dot{X} = AX, \tag{1.1.1}$$

où $X \in \mathbb{R}^2$ et A est une matrice 2×2 . Nous nous intéressons alors au portrait de phase de $\dot{X} = BX$, où $B = P^{-1}AP$ et B est sous forme de Jordan réelle.

Regardons les quatre cas suivants qui résument tous les cas où les valeurs propres sont différentes de 0.

(1) Soit $B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, où $\lambda < 0 < \mu$.

Nous sommes alors en présence d'un point de selle et nous pouvons représenter le portrait de phase de cette singularité par la figure 1.1.

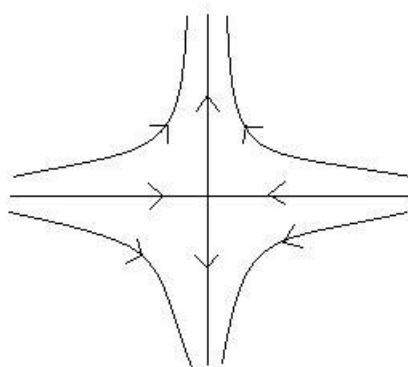


FIG. 1.1. Point de selle

(2) Soit $B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, où $\lambda\mu > 0$.

Si $\lambda \leq \mu < 0$, nous sommes alors en présence d'un noeud stable. Il y a deux cas différents selon les diverses valeurs que μ et λ peuvent prendre. On retrouve un autre cas de noeud faible lorsque nous avons une matrice de la forme : $B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, avec $\lambda < 0$. Voyons les illustrations des portraits de phase respectifs à la figure 1.2. À l'inverse, nous retrouvons un noeud, cette fois instable, lorsque $\lambda \geq \mu > 0$.

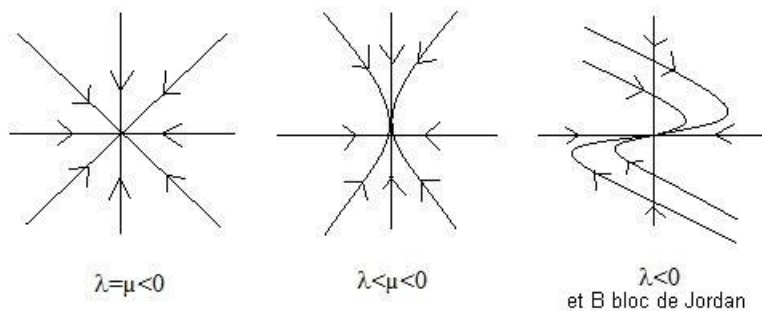


FIG. 1.2. Noeuds Stables

(3) Soit $B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, où $a, b \neq 0$.

Si $a < 0$, nous avons alors un foyer stable avec des trajectoires tournant dans le sens donné par b . Regardons la figure 1.3 pour avoir une idée des trajectoires. À l'inverse, notons que si $a > 0$, nous avons alors un foyer instable.

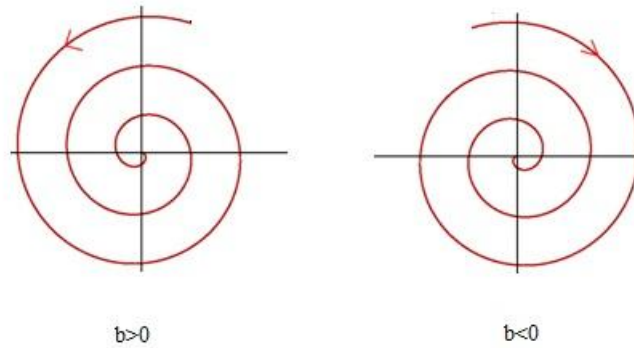


FIG. 1.3. Foyers Stables

(4) Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$, où $b \neq 0$.

Le système $\dot{X} = BX$ possède alors un centre à l'origine et cela peut être représenté par la figure 1.4. Encore une fois, le sens des trajectoires est donné par b . En effet, nous pouvons écrire ce système en coordonnées polaires, soit

$$\begin{cases} \dot{r} = ar \\ \dot{\theta} = b. \end{cases} \quad (1.1.2)$$

Par la proposition 1.1.1 provenant de [18], nous pouvons conclure sur la nature d'un point singulier à l'origine pour un système linéaire ayant deux valeurs propres non-nulles.

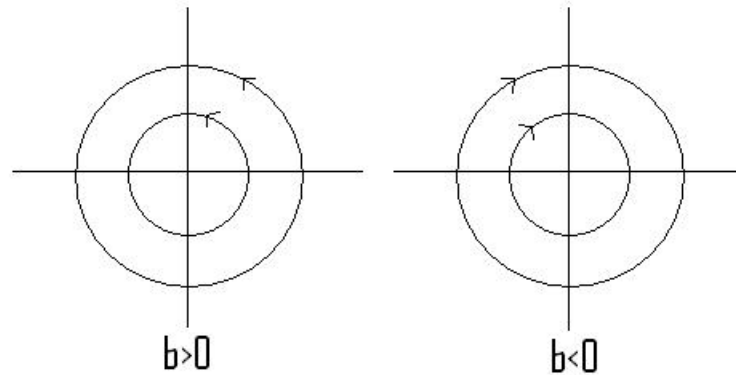


FIG. 1.4. Centres

Proposition 1.1.1. *Le système linéaire $\dot{X} = AX$ est dit avoir un point de selle, un noeud, un foyer ou un centre à l'origine si la matrice A est similaire à une des matrices B dans les cas 1 à 4 énumérés ci-haut.*

Cette proposition peut s'expliquer par les définitions formelles de centre et de foyer faibles données aux définitions 1.3.1 et 1.3.2. En particulier, si la matrice A possède une paire de valeurs propres imaginaires pures $\pm i\omega$, alors le portrait de phase du système linéaire est linéairement équivalent à un des deux portraits de phases illustrés à la figure 1.4.

1.2. INTRODUCTION AU PROBLÈME CENTRE-FOYER

Dans cette section, nous introduisons le problème de centre-foyer. Nous discutons également du théorème de Hartman-Grobman.

Soit l'équation différentielle non-linéaire définie sur un ouvert U du plan tel que $U \subset \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases} \quad (1.2.1)$$

où P, Q sont des fonctions polynomiales. Soit X_0 un point singulier *monodromique* non dégénéré ; c'est-à-dire que le système linéaire associé a soit un centre ou un foyer faible à ce point singulier dans le cas non-dégénéré (les valeurs propres sont différentes de 0). En général, *monodromique* signifie qu'il existe une application de premier retour de Poincaré sur une section. Nous verrons à la section 1.3 cette définition. Le problème centre-foyer pose la question suivante : Sous quelles conditions pouvons-nous conclure que ce point singulier monodromique est un centre pour ce système non-linéaire ?

Tout d'abord, choisissons le point singulier, sans perte de généralité, à l'origine. Soit $v(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$. Le système linéarisé associé à l'origine a pour matrice la matrice A , donnée par $Dv(0)$, où

$$Dv(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix}. \quad (1.2.2)$$

Le théorème de Hartman-Grobman nous dira que, dans un voisinage assez petit de l'origine, le système aura la même structure qualitative des trajectoires que le système linéarisé tant que les valeurs propres de A ne seront pas imaginaires pures.

1.2.1. Le théorème de Hartman-Grobman

Attardons-nous maintenant au théorème de Hartman-Grobman, qui nous permettra d'en dire un peu plus sur les points singuliers du système. Ce théorème permet de comprendre l'organisation des trajectoires au voisinage d'un point singulier. En fait, nous regarderons la partie linéaire du système. De façon intuitive, ce théorème montre, qu'au voisinage d'un point singulier hyperbolique X_0 , le système non-linéaire

$$\dot{X} = v(X), \quad (1.2.3)$$

a la « même structure qualitative » des trajectoires que le système linéaire

$$\dot{X} = AX, \quad (1.2.4)$$

avec $A = Dv(X_0)$. En termes mathématiques, cela signifie que le système non-linéaire (1.2.3) est topologiquement orbitalement équivalent au système linéaire

(1.2.4) au voisinage de l'origine. La notion d'équivalence topologique orbitale sera donnée plus bas à la définition 1.2.2.

Tout au long de cette section, nous assumons que le point singulier X_0 a été translaté à l'origine. Afin de comprendre ce théorème, nous introduisons les définitions suivantes.

Définition 1.2.1. *Un point singulier X_0 d'un champ $v(X)$ est dit hyperbolique si toutes les parties réelles des valeurs propres de $Dv(X_0)$ sont non-nulles.*

Définition 1.2.2. [18] *Deux équations différentielles ordinaires autonomes $\dot{X} = v_1(X)$ où $X \in U \subset \mathbb{R}^n$, et $\dot{Y} = v_2(Y)$ où $Y \in V \subset \mathbb{R}^n$ sont dites topologiquement orbitalement équivalentes (c'est-à-dire qu'ils ont la même organisation topologique des trajectoires) s'il existe un homéomorphisme H envoyant U sur V tel que les trajectoires de $\dot{X} = v_1(X)$ dans U sont envoyées sur les trajectoires de $\dot{Y} = v_2(Y)$ dans V en préservant l'orientation des trajectoires (mais pas nécessairement la paramétrisation). Si l'homéomorphisme préserve la paramétrisation on parle alors d'équivalence topologique.*

Théorème 1.2.1. *(Théorème de Hartman-Grobman)*

Soit $\dot{X} = v(X)$, une équation différentielle ordinaire (EDO) de classe C^1 sur un ouvert U de \mathbb{R}^n et X_0 un point singulier hyperbolique. Soit $A = Dv(X_0)$. Alors, $\dot{X} = v(X)$ est topologiquement équivalent au champ linéaire $\dot{Y} = AY$ sur un voisinage V de X_0 .

Une démonstration de ce théorème se trouve dans [18].

1.3. ÉTUDE DU CAS PARTICULIER D'UN POINT SINGULIER AVEC VALEURS PROPRES $\pm i\omega$

Regardons maintenant dans cette section le cas particulier où notre point singulier a des valeurs propres imaginaires pures non nulles. Nous remarquons alors que la matrice A associée au système linéaire peut s'écrire, suite à une

transformation linéaire, sous la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.3.1)$$

où $\omega \neq 0$. Nous sommes alors dans le cas 4 énuméré précédemment et nous avons alors un centre à l'origine pour le système linéaire associé.

Nous observons ensuite que nous pouvons définir sur une section donnée par une demi-droite issue du point singulier une application de premier retour p . En général, on prend la demi-droite horizontale vers la droite. Regardons alors la figure 1.5. En fait, l'existence de l'application de premier retour s'explique en

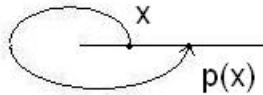


FIG. 1.5. Application de premier retour de Poincaré

regardant le système en coordonnées polaires. Pour l'instant, le système que nous traitons, dont la partie linéaire à l'origine est donnée en (1.3.1), avec alors un centre à l'origine pour le système linéaire, peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{r} = O(r^2), \\ \dot{\theta} = \omega + O(r). \end{cases} \quad (1.3.2)$$

Sous cette forme, le système nous donne de l'information sur l'application de premier retour. On voit donc que pour r assez petit, soit par exemple $r < \delta$, on a $\dot{\theta} \in [\frac{\omega}{2}, \frac{3\omega}{2}]$ et $B(0, r) \subset U$. Prenons une condition initiale assez petite $r_0 \in [0, C\delta[$, avec $C < 1$. Donc, pour un temps T compris entre $\frac{4\pi}{3\omega}$ et $\frac{4\pi}{\omega}$, on revient sur la section, donnée par $\theta = 0$. C doit être choisi suffisamment petit pour que $r(t) < \delta$ pour $0 \leq t \leq T$.

Ceci définit en fait l'application de premier retour de Poincaré au voisinage de l'origine. C'est un des principaux outils de base dans l'étude de la stabilité du

point singulier et des bifurcations des orbites périodiques.

Ainsi, partons du fait que nous travaillons dans un système analytique.

Théorème 1.3.1. *Soit $\dot{X} = v(X)$, un système d'équations différentielles non-linéaires analytique. Soit X_0 un point singulier ayant des valeurs propres de partie imaginaire non nulle. Alors, l'application de premier retour définie ci-haut est analytique.*

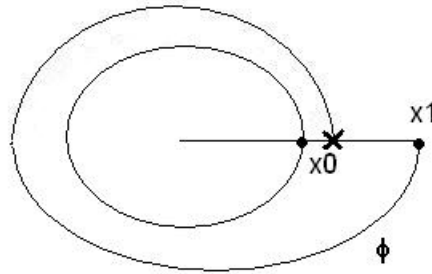


FIG. 1.6. Section d'une solution périodique

DÉMONSTRATION. Faisons une translation pour ramener X_0 à l'origine et regardons le système en coordonnées polaires, soit

$$\begin{cases} \dot{r} = f(r), \\ \dot{\theta} = \omega + g(r). \end{cases} \quad (1.3.3)$$

Ce système est analytique en r et θ . Soit $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ le flot du système, où ϕ_1 représente la coordonnée radiale et ϕ_2 la coordonnée angulaire.

On a que

$$\phi(t, X_1) = (\phi_1(t, X_1), \phi_2(t, X_1)), \quad (1.3.4)$$

où $X_1 = (x_1, 0)$ est la condition initiale sur la section (voir figure 1.6) et soit $T(x_1) = T(r_0)$, le temps de retour sur cette section. Alors $r_0 = x_1$. La condition initiale devient $(r_0, 0)$.

$T(r_0)$ est défini implicitement par

$$\phi_2(T(r_0), (r_0, 0)) = 2\pi. \quad (1.3.5)$$

Nous voulons solutionner cette équation, ou encore

$$\phi_2(t, (r_0, 0)) - 2\pi = \psi(t, r_0) = 0, \quad (1.3.6)$$

au voisinage de $(t_0 = \frac{2\pi}{\omega}, 0)$. Nous avons alors

$$\psi(t_0, 0) = \phi_2\left(\frac{2\pi}{\omega}, (0, 0)\right) - 2\pi = 0. \quad (1.3.7)$$

Pour pouvoir utiliser le théorème des fonctions implicites, nous devons avoir

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|_{(t_0, 0)} = \left. \frac{\partial \phi_2}{\partial t} \right|_{\left(\frac{2\pi}{\omega}, (0, 0)\right)} \neq 0. \quad (1.3.8)$$

Vu que, par définition du flot,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, X) = v(\phi(t, X)) \quad (1.3.9)$$

où $v = (f(r), \omega + g(r))$, nous avons que

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial t} = \omega + g(\phi_1(t, X)), \quad (1.3.10)$$

ce qui implique que

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|_{(t_0, 0)} = \left. \frac{\partial \phi_2}{\partial t} \right|_{\left(\frac{2\pi}{\omega}, (0, 0)\right)} = \omega \neq 0. \quad (1.3.11)$$

Nous vérifions donc la condition (1.3.8). Alors, nous pouvons appliquer le théorème des fonctions implicites pour les fonctions analytiques et dire qu'il existe un voisinage U de $(\frac{2\pi}{\omega}, 0)$, un voisinage V de 0 et une fonction analytique $T : V \rightarrow \mathbb{R}$ tels que

$$\psi(t, r_0) = 0 \text{ sur } U \Leftrightarrow t = T(r_0). \quad (1.3.12)$$

On a alors que $T(r_0)$ est analytique.

Comme $T(r_0)$ est analytique, nous avons que l'application de premier retour de Poincaré,

$$\phi_1(T(r_0), (r_0, 0)) = p(r_0) \quad (1.3.13)$$

est analytique, car la composition de fonctions analytiques est analytique. Comme $r_0 = x_1$ sur la section $\theta = 0$, la démonstration est terminée.

□

Ceci laisse deux choix pour le type de notre singularité, soit un foyer faible ou un centre. Par définition, un tel point est appelé *monodromique*.

En effet, soit $p(x)$ l'application de premier retour définie plus haut. Si $p(x)$ est analytique en 0, alors nous pouvons remarquer que les solutions périodiques sont les points fixes de p ou encore les zéros de l'application déplacement définie par :

$$V(x) = p(x) - x, \quad (1.3.14)$$

où $V(0) = 0$ correspond au point singulier. Regardons la figure 1.7. En sachant

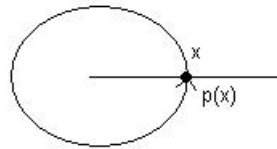


FIG. 1.7. Application de premier retour de Poincaré pour une solution périodique

que p est analytique, nous savons également que V est analytique et une application analytique ne peut avoir une accumulation de zéros. Nous avons alors deux cas possibles.

- Soit V a des zéros isolés. Donc il n'y a aucun autre zéro que $x = 0$ dans un voisinage de l'origine. Ceci représente alors le cas d'un foyer.
- Soit $V \equiv 0$, ce qui correspond à un centre.

C'est donc ici qu'apparaît notre problème de centre-foyer. Afin de faciliter la compréhension, nous regardons le théorème 1.3.2 ci-dessous et son corollaire associé provenant de [18]. Mais avant, donnons quelques définitions rigoureuses d'un foyer, d'un centre et d'un centre-foyer. Nous supposons que $X_0 \in \mathbb{R}^2$ est un point singulier isolé du système non-linéaire ayant été translaté à l'origine et nous

notons $(r(t, r_0, \theta_0), \theta(t, r_0, \theta_0))$ la solution du système non-linéaire en coordonnées polaires de condition initiale $r(0) = r_0$ et $\theta(0) = \theta_0$.

Définition 1.3.1. [18] *L'origine est appelée un centre pour un système non-linéaire s'il existe un voisinage de l'origine U' tel que toute solution du système dans le voisinage $U' \setminus \{0\}$ est une courbe fermée avec 0 dans l'intérieur.*

Définition 1.3.2. [18] *L'origine est appelée un foyer stable pour le système non-linéaire s'il existe un $\delta > 0$ tel que pour $0 < r_0 < \delta$ et $\theta_0 \in \mathbb{R}$, $r(t, r_0, \theta_0) \rightarrow 0$ et $|\theta(t, r_0, \theta_0)| \rightarrow \infty$ quand $t \rightarrow \infty$. À l'inverse, l'origine est appelée un foyer instable si $r(t, r_0, \theta_0) \rightarrow 0$ et $|\theta(t, r_0, \theta_0)| \rightarrow \infty$ quand $t \rightarrow -\infty$. Le foyer est dit faible si les valeurs propres du système linéarisé sont imaginaires pures.*

Perko [18] donne également une autre définition, soit celle de *centre-foyer*, pour le cas où nous n'avons ni un foyer ni un centre. Cette définition n'est pas standard et un tel cas (centre-foyer) n'est pas possible si le système est analytique. Cette définition nous permet cependant de comprendre le théorème 1.3.2. Ce théorème nous est quelque peu inutile, mais il apporte un corollaire fort intéressant qui résume bien le problème centre-foyer. Regardons alors cette définition et le théorème 1.3.2 provenant de [18].

Définition 1.3.3. [18] *L'origine est appelée un centre-foyer pour le système non-linéaire s'il existe une suite de solutions périodiques Γ_n avec Γ_{n+1} à l'intérieur de l'oval délimité par Γ_n telle que $\Gamma_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$ et telle que toute trajectoire entre Γ_n et Γ_{n+1} spirale vers Γ_n ou Γ_{n+1} quand $t \rightarrow +\infty$ et vers Γ_{n+1} ou Γ_n quand $t \rightarrow -\infty$. (voir figure 1.8)*

Théorème 1.3.2. [18] *Soit U un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^2 contenant l'origine et soit $v \in C^1(E)$ avec $v(0) = 0$. Supposons que l'origine est un centre pour le système linéaire associé avec $A = Dv(0)$. Alors l'origine est soit un centre, un centre-foyer ou un foyer pour le système non-linéaire.*

Une démonstration de ce théorème se trouve dans [18]. Le cas particulier du centre-foyer nous intéresse peu, car nous demanderons que notre système soit analytique. Voyons cependant un exemple de centre-foyer.

Exemple 1.3.1. Soit le système C^∞ (non analytique) suivant :

$$\begin{cases} \dot{r} = \begin{cases} e^{-\frac{1}{r}} \sin \frac{1}{r} & , r > 0, \\ 0 & , r = 0, \end{cases} \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases} \quad (1.3.15)$$

Ce système a un équilibre stable à l'origine qui n'est ni un centre, ni un foyer. En effet, nous pouvons voir l'allure de nos trajectoires en prenant des valeurs précises de r . Soit $r \in \{\frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \frac{1}{3\pi}, \dots, \frac{1}{n\pi}, \dots\}$, on a alors que $e^{-\frac{1}{r}} \sin(\frac{1}{r}) = 0$ et nous avons la présence de cycles limites. Prenons, en particulier, $r = \frac{1}{n\pi}$ et regardons la trajectoire pour ce r . Nous avons :

$$\begin{cases} \dot{r} = 0 \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases} \quad (1.3.16)$$

Donc, cette trajectoire est un cycle limite de rayon $\frac{1}{n\pi}$. Nous avons alors une infinité de cycles limites. Un cycle sur deux est attractif et les autres sont répulsifs. Les trajectoires spiralent alors entre ces cycles limites vers celui qui est attractif et en reculant dans le temps vers celui qui est répulsif. Ceci correspond bien à la définition de centre-foyer. Nous pouvons regarder la figure 1.8 pour avoir une idée du portrait de phase.

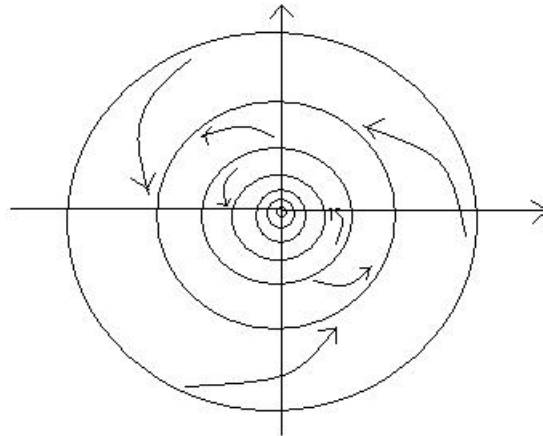


FIG. 1.8. Exemple de centre-foyer

Nous pouvons maintenant écrire un corollaire décrivant la situation pour un système analytique.

Corollaire 1.3.1. [18] *Soit U un ouvert de \mathbb{R}^2 contenant l'origine et soit v analytique dans U avec $v(0) = 0$. Supposons que l'origine est un centre pour le système linéaire avec $A = Dv(0)$. Alors, l'origine est soit un centre ou un foyer pour le système non-linéaire.*

Nous avons déjà prouvé ce corollaire dans les lignes précédentes. Nous avons maintenant une bonne idée du problème centre-foyer. En effet, nous nous intéresserons à un système analytique possédant un centre à l'origine pour le système linéaire associé et nous tenterons de trouver si l'origine est un centre ou un foyer pour le système non-linéaire.

1.3.1. Formes normales pour un système possédant deux valeurs propres imaginaires pures

Dans cette sous-section, nous regardons la forme normale pour un système analytique au voisinage d'un point singulier possédant deux valeurs propres imaginaires pures. Nous ne discutons pas ici de toute la théorie sur les formes normales, nous passons directement à l'exemple précis avec valeurs propres $\pm i\omega$. Cet exemple nous sera utile dans les prochains chapitres de ce mémoire.

Soient $\lambda_1 = i\omega$ et $\lambda_2 = -i\omega$, les deux valeurs propres imaginaires pures du système

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y). \end{cases} \quad (1.3.17)$$

Nous avons alors que le système, en posant $z = x + iy$, s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \dot{z} &= i\omega z + f_2(z, \bar{z}) + f_3(z, \bar{z}) + \dots \\ \dot{\bar{z}} &= -i\omega \bar{z} + \overline{f_2(z, \bar{z})} + \overline{f_3(z, \bar{z})} + \dots \end{aligned} \quad (1.3.18)$$

où $f_r(z, \bar{z})$ est homogène de degré r .

Nous sommes ici dans le cas particulier où la matrice A est diagonale. Survolons la théorie sur les formes normales avec la matrice A diagonale.

1.3.1.1. *Formes normales pour un système non-linéaire avec matrice A diagonale.* [18]

Dans un tel cas, il est possible de développer la théorie des formes normales de la façon suivante pour un système

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(x, y) \\ g_2(x, y) \end{pmatrix}, \quad (1.3.19)$$

où $g_i(x, y) = o(|x, y|)$.

Soient λ_1, λ_2 , les valeurs propres de ce système. L'idée de la mise sous forme normale est de faire des changements de coordonnées pour simplifier au maximum le système. Nous essayons, lorsqu'il est possible, d'enlever tous les termes non-linéaires. En pratique, nous ne pourrons pas toujours le faire. Nous réussirons à nous débarrasser seulement des monômes non-résonants. Les monômes qu'il nous restera alors dans la s -ième ligne, les monômes résonants, s'écrivant dans notre cas $z^{m_1} \bar{z}^{m_2}$, seront ceux de la forme :

$$\langle \lambda, m \rangle = \lambda_s, \quad (1.3.20)$$

où $m = (m_1, m_2)$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ et $s = 1, 2$. Ceci nous permet alors d'analyser le cas particulier où nous sommes en présence de deux valeurs propres imaginaires pures, ce dont nous sommes présentement en train de traiter. Nous avons $\lambda_1 = i\omega$ et $\lambda_2 = -i\omega$.

Trouvons donc les monômes résonants dans la première équation, soit $s = 1$.

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= m_1 \lambda_1 + m_2 \lambda_2, \text{ avec } m_j \geq 0 \text{ et } m_1 + m_2 \geq 2 \\ \Leftrightarrow i\omega &= m_1 i\omega - m_2 i\omega \\ \Leftrightarrow 1 &= m_1 - m_2 \\ \Leftrightarrow m_1 &= m_2 + 1, m_2 \geq 1. \end{aligned} \quad (1.3.21)$$

Les monômes résonants de la première équation sont alors :

$$z^2 \bar{z}, z^3 \bar{z}^2, \dots, z^{r+1} \bar{z}^r, \dots \quad (1.3.22)$$

Regardons pour la deuxième équation, soit $s = 2$.

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2, \text{ avec } m_j \geq 0 \text{ et } m_1 + m_2 \geq 2 \\ \Leftrightarrow -1 &= m_1 - m_2 \\ \Leftrightarrow m_2 &= m_1 + 1. \end{aligned} \tag{1.3.23}$$

Les monômes résonants de la deuxième équation sont donc :

$$z\bar{z}^2, z^2\bar{z}^3, \dots, z^r\bar{z}^{r+1}, \dots \tag{1.3.24}$$

Remarquons que, comme il se doit, ce sont les conjugués des monômes résonants de la première équation. On peut alors ramener, par un changement polynomial

$$\begin{aligned} z &= Z + Q(Z, \bar{Z}), \\ \bar{z} &= \bar{Z} + \overline{Q(Z, \bar{Z})}, \end{aligned} \tag{1.3.25}$$

avec Q de degré $2s + 1$, le système à :

$$\begin{cases} \dot{Z} = i\omega Z + c_1 Z^2 \bar{Z} + c_2 Z^3 \bar{Z}^2 + \dots + c_s Z^{s+1} \bar{Z}^s + O(|Z|^{2r+2}), \\ \dot{\bar{Z}} = -i\omega \bar{Z} + \bar{c}_1 \bar{Z}^2 Z + \bar{c}_2 \bar{Z}^3 Z^2 + \dots + \bar{c}_s \bar{Z}^{s+1} Z^s + O(|\bar{Z}|^{2r+2}). \end{cases} \tag{1.3.26}$$

En général, si on va jusqu'à l'infini, le changement sera divergent. Donc, généralement, on s'arrête à un certain ordre. Par contre, nous obtenons la convergence dans le cas où tous les $Re(c_j) = 0$, ce qui correspond au cas d'un centre. Si nous savons que les tous les $Re(c_j)$ sont nuls jusqu'à $j = s - 1$ et que $Re(c_s) \neq 0$, soit :

$$\begin{aligned} Re(c_1) = Re(c_2) = \dots = Re(c_{s-1}) &= 0, \\ Re(c_s) &\neq 0, \end{aligned} \tag{1.3.27}$$

alors le système, en coordonnées polaires, devient :

$$\begin{cases} \dot{r} = Re(c_s)r^{2s+1} + o(r^{2s+1}), \\ \dot{\theta} = \omega + O(r), \end{cases} \tag{1.3.28}$$

et nous voyons alors que nous avons un foyer faible attractif si $Re(c_s) < 0$ et répulsif si $Re(c_s) > 0$. On dit que ce foyer faible est d'ordre k . Et si tous les $Re(c_j)$ sont nuls, nous aurons un centre. Ceci est exprimé par le théorème de Poincaré (Théorème 1.3.3) que nous verrons plus loin.

En transformant le système en coordonnées polaires, le système (1.3.26) devient complètement transparent. En posant $c_j = a_j + ib_j$, nous obtenons :

$$\begin{cases} \dot{r} = a_1 r^3 + a_2 r^5 + \dots + a_k r^{2k+1} + O(r^{2s+2}), \\ \dot{\theta} = \omega + b_1 r^2 + \dots + b_k r^{2k} + O(r^{2s+2}). \end{cases} \quad (1.3.29)$$

Nous constatons alors que les parties imaginaires des c_j contrôlent la période et les parties réelles contrôlent l'attractivité. Nous nous intéresserons donc aux parties réelles des c_j dans le but de décider si nous avons un centre ou un foyer.

On s'interroge alors sur la valeur des c_j . Le calcul des c_j peut se faire par un logiciel de manipulations symboliques. La formule du premier coefficient est bien connu. En sachant que $c_j = a_j + ib_j$, on peut trouver le premier coefficient de la forme normale, pour un système à deux valeurs propres imaginaires pures.

Proposition 1.3.1. [15] *Si*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\omega y + \sum_{j+k \geq 2} a_{jk} x^j y^k, \\ \dot{y} &= \omega x + \sum_{j+k \geq 2} b_{jk} x^j y^k, \end{aligned} \quad (1.3.30)$$

alors

$$Re(c_1) = \frac{1}{8}(3a_{30} + a_{12} + b_{21} + 3b_{03}) + \quad (1.3.31)$$

$$\frac{1}{8\omega} [a_{11}(a_{20} + a_{02}) - b_{11}(b_{20} + b_{02}) - 2a_{20}b_{20} + 2a_{02}b_{02}]. \quad (1.3.32)$$

Il est maintenant temps d'introduire le théorème de Poincaré qui nous donnera un critère précis pour déterminer si nous sommes en présence d'un centre.

Théorème 1.3.3. (*Théorème de Poincaré*)

Soit un système analytique ayant un point singulier avec deux valeurs propres imaginaires pures. Si tous les $Re(c_j)$ sont nuls, où les c_j sont les coefficients de la forme normale (1.3.26), alors le point singulier est un centre.

Une démonstration de ce théorème est proposée dans [19] pour une version quelque peu différente. Le théorème de Poincaré énoncé dans [19] utilise les constantes de Lyapunov que nous introduirons plus bas. Nous énoncerons plus

tard le théorème de Poincaré utilisant ces constantes.

Le théorème 1.3.3 donne une condition suffisante pour arriver à déterminer l'existence d'un centre dans notre problème centre-foyer. Cependant, nous nous retrouvons alors avec un défi de taille. Il est rarement possible de calculer tous les $Re(c_j)$ dans un système. En général, on peut calculer les premiers coefficients à l'aide d'un programme informatique. Par contre, très rapidement, le calcul des constantes devient lourd et complexe et les expressions énormes. Nous nous trouvons alors dans une impasse, car il devient impossible de démontrer que tous les $Re(c_j)$ sont nuls. Même si le calcul était simple, tant que nous les calculons un à la fois, nous ne pouvons pas tous les calculer. Nous pouvons cependant, si les tests révèlent que les premiers $Re(c_j)$ sont nuls, conjecturer l'existence d'un centre. C'est d'ailleurs ce qui a été fait dans le système de [11] et nous discuterons de cette conjecture dans le chapitre 3. Pour effectivement montrer l'existence d'un centre, il existe un certain nombre de méthodes ad hoc décrites au chapitre 2.

Dans sa thèse, Etoua utilise, au lieu des $Re(c_j)$, les constantes de Lyapunov, soient les $L(j)$. Alors, prenons d'abord le temps d'expliquer ce que sont ces $L(j)$.

1.3.2. Constantes de Lyapunov

Proposition 1.3.2. [20] *Pour un système de la forme (1.3.30), il existe une série formelle de la forme*

$$F := \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \sum_{p=3}^{\infty} F_p(x, y), \quad (1.3.33)$$

où

$$F_p(x, y) = \sum_{i=0}^p a_{i,p-i} x^i y^{p-i}, \quad (1.3.34)$$

telle que

$$\dot{F} = \sum_{k=1}^{\infty} L(k)(x^2 + y^2)^{k+1}. \quad (1.3.35)$$

On appelle alors les $L(k)$ les constantes de Lyapunov.

Il est possible d'obtenir, en opérant degré par degré, pour un degré donné, un système d'inconnues $a_{i,p-i}$. Le principe est simple, mais le calcul devient vite fastidieux. On a

$$\dot{F} = \sum_{p=3}^{\infty} G_p(x, y). \quad (1.3.36)$$

Lorsque le degré p de G_p est impair, on peut solutionner le système $G_p = 0$ et trouver ainsi les $a_{i,p-i}$. Lorsque le degré p est pair, il faut choisir $L(k-1)$ pour que le système $G_p = L(k-1)(x^2 + y^2)^k$ soit compatible. Cependant, en utilisant un logiciel de calcul, il est possible de déterminer les premières constantes de Lyapunov.

Remarquons ensuite qu'il est possible d'énoncer le théorème de Poincaré avec les constantes de Lyapunov, soit :

Théorème 1.3.4. (*Théorème de Poincaré*)

Soit un système d'équations différentielles de la forme (1.2.1) ayant un point singulier avec deux valeurs propres imaginaires pures. Alors, ce système possède un centre à l'origine si et seulement si toutes les constantes de Lyapunov sont nulles.

La démonstration de ce théorème se trouve dans [19]. On voit déjà intuitivement que si toutes les constantes de Lyapunov sont nulles, alors la série F est une intégrale première formelle du système, c'est-à-dire qu'elle est constante sur toutes les trajectoires du système. La preuve du théorème revient à montrer la convergence de cette série. Aussi, nous pouvons dire que le système a un foyer faible d'ordre k si $L(1) = L(2) = \dots = L(k-1) = 0$ et $L(k) \neq 0$. Ce foyer est attractif si $L(k) < 0$ et répulsif si $L(k) > 0$. En effet, la fonction trouvée en s'arrêtant à l'ordre $2(k+1)$ est une fonction de Lyapunov.

En fait, les constantes de Lyapunov et les parties réelles des coefficients c_j de la forme normale ne sont pas étrangères l'une à l'autre. En effet, dans le cas où le système est déjà sous la forme normale de Poincaré (1.3.26), nous avons que $F(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}z\bar{z}$, donc $L(i) = \text{Re}(c_i)$. Nous pouvons alors énoncer la proposition suivante :

Proposition 1.3.3. [2] *Soit un système analytique d'équations différentielles non-linéaires $\dot{X} = v(X)$ ayant un point singulier à l'origine de partie linéaire*

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.3.37)$$

Soit $L(k)$ ses constantes de Lyapunov et soit (1.3.26) sa forme normale. Alors, on aura

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(c_1) = \operatorname{Re}(c_2) = \dots = \operatorname{Re}(c_{k-1}) = 0, \operatorname{Re}(c_k) \neq 0 \\ \iff \end{aligned} \quad (1.3.38)$$

$$L(1) = L(2) = \dots = L(k-1) = 0, L(k) \neq 0.$$

De plus, $\operatorname{Re}(c_k)$ et $L(k)$ ont le même signe.

En effet, nous pourrions simplement regarder comment se comportent les $L(k)$ lors des changements de variables qui amènent le système sous la forme normale de Poincaré. Une analyse plus complète de cette équivalence entre les deux formes se trouve dans [2].

Le théorème 1.3.4 nous apporte cependant la même déception, car le calcul de *toutes* les constantes de Lyapunov est encore impossible. Encore une fois, il est possible de calculer quelques $L(j)$ de façon computationnelle et le calcul est plus simple que celui des $\operatorname{Re}(c_j)$. Cependant nous ne sommes pas en mesure d'assurer des valeurs nulles pour tous ces $L(j)$. Ceci nous mène alors souvent vers des conjectures.

Chapitre 2

MÉCANISMES DE RÉOLUTION DU PROBLÈME CENTRE-FOYER

Nous avons décrit, au chapitre 1, le problème centre-foyer. Pour résumer ce qui a été dit, ce problème concerne en fait un système non-linéaire et analytique. Si le système linéaire associé possède une singularité monodromique, disons à l'origine sans perte de généralité, deux cas sont possibles pour l'origine dans le système non-linéaire, soit un centre ou un foyer faible. Nous cherchons alors un critère qui nous permettra de déterminer le type de cette singularité. Dans ce chapitre, nous explorons certaines méthodes pour la résolution du problème centre-foyer. En fait, ces méthodes nous permettront de conclure à propos de l'existence d'un centre.

Il a été conjecturé par Żołądek qu'il y a seulement deux mécanismes pour démontrer l'existence d'un centre. Le premier est l'existence des courbes algébriques invariantes avec lesquelles on peut construire un facteur intégrant ou une intégrale première. Ceci résume en fait la méthode de Darboux. Par définition, un centre de ce type est appelé *centre de Darboux*.

Ensuite, le second mécanisme est l'existence d'une réversibilité algébrique. Nous en parlerons plus précisément à la section 2.2, mais un exemple simple de ceci est donné par la réversibilité temporelle par rapport à une droite. Nous verrons à la définition 2.2.2, qu'un système est temporellement réversible par rapport à l'axe x si et seulement si :

$$\begin{cases} P(x, -y) = -P(x, y), \\ Q(x, -y) = Q(x, y). \end{cases} \quad (2.0.39)$$

Dans le cas d'un problème centre-foyer, une telle réversibilité forcera l'existence d'un centre et non d'un foyer faible. Nous discuterons donc de ces deux mécanismes dans les prochaines sections de ce chapitre.

2.1. MÉTHODE DE DARBOUX

Dans cette section, nous discutons du premier des deux mécanismes permettant de déterminer l'existence d'un centre dans un champ de vecteurs polynomial, soit la méthode de Darboux. Nous devons d'abord définir les notions de courbes algébriques, de courbes algébriques invariantes et d'intégrales premières.

Soit le système non-linéaire polynomial (1.2.1) étudié précédemment :

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y). \end{cases} \quad (2.1.1)$$

Nous avons alors la définition d'une courbe algébrique.

Définition 2.1.1. *Une courbe algébrique est l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ tels que $F(x, y) = 0$, où F est un polynôme de $\mathbb{C}[x, y]$.*

En travaillant avec le système (2.1.1), nous pouvons donner également la définition d'une courbe algébrique invariante sous le flot d'un champ de vecteurs. Remarquons que (2.1.1) est aussi défini pour $x, y \in \mathbb{C}$.

Définition 2.1.2. *La courbe algébrique $F(x, y) = 0$, où F est un polynôme de $\mathbb{C}[x, y]$, est invariante sous le flot du champ de vecteurs (2.1.1) si*

$$\dot{F} \Big|_{F(x,y)=0} = 0. \quad (2.1.2)$$

Nous pouvons alors introduire la proposition suivante.

Proposition 2.1.1. *Soit $F(x, y) = 0$ un polynôme irréductible de $\mathbb{C}[x, y]$. La courbe algébrique $F(x, y) = 0$ est invariante sous le flot du champ de vecteurs (2.1.1) si et seulement s'il existe un polynôme $K(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ tel que*

$$\dot{F} = \frac{dF}{dt} = K(x, y)F(x, y). \quad (2.1.3)$$

DÉMONSTRATION. Comme

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial x}P(x, y) + \frac{\partial F}{\partial y}Q(x, y) \quad (2.1.4)$$

est un polynôme à coefficients complexes qui s'annule quand $F(x, y) = 0$, ce polynôme doit alors être divisible par $F(x, y)$ puisque F est irréductible. Donc il est possible d'écrire \dot{F} comme :

$$\dot{F} = K(x, y)F(x, y). \quad (2.1.5)$$

L'implication dans l'autre sens se démontre directement. S'il existe un polynôme $K(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ tel que

$$\dot{F} = \frac{dF}{dt} = K(x, y)F(x, y), \quad (2.1.6)$$

alors

$$\dot{F} \Big|_{F(x,y)=0} = 0. \quad (2.1.7)$$

Nous avons alors que la courbe algébrique $F(x, y) = 0$ est invariante sous le flot. \square

On appelle alors le polynôme $K(x, y)$ le *cofacteur* de $F(x, y)$.

Introduisons maintenant la méthode de Darboux. Nous nous intéressons en fait au rôle des courbes algébriques invariantes dans la construction d'intégrales premières et de facteurs intégrant de type de Darboux, qui sont, par définition, des fonctions qui s'expriment comme un produit de puissances de polynômes F_i tel que $F_i(x, y)$ est une courbe algébrique invariante.

Définition 2.1.3. *Une intégrale première d'un système est une fonction non constante qui est constante sur toutes trajectoires de ce système.*

La méthode de Darboux permet de trouver une intégrale première d'un champ de vecteurs polynomial de la forme (2.1.1). Supposons que le champ a m courbes algébriques invariantes, notées :

$$F_1(x, y) = 0, \dots, F_m(x, y) = 0, \quad (2.1.8)$$

avec $F_i(x, y) = 0$ irréductible, pour $i = 1, 2, \dots, m$. Chacune de ces courbes a son cofacteur respectif $K_1(x, y), \dots, K_m(x, y)$. Nous pouvons alors écrire :

$$\dot{F}_i = K_i(x, y)F_i(x, y). \quad (2.1.9)$$

Supposons maintenant qu'il existe des constantes $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{C}$ telles que

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i K_i(x, y) = 0. \quad (2.1.10)$$

Nous avons alors la proposition suivante qui nous donne une intégrale première pour le système.

Proposition 2.1.2. *On considère un système de la forme (2.1.1) ayant des courbes algébriques invariantes, $F_i(x, y) = 0$, avec $F_i(x, y) = 0$ un polynôme irréductible, où $i = 1, \dots, m$, telles que (2.1.10) est satisfait pour des constantes α_i non toutes nulles. Alors, la fonction*

$$H(x, y) = \prod_{i=1}^m F_i^{\alpha_i} \quad (2.1.11)$$

est une intégrale première du système.

DÉMONSTRATION. Soit $H = F_1^{\alpha_1} \dots F_m^{\alpha_m}$. Nous pouvons alors écrire :

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \alpha_1 F_1^{\alpha_1-1} (F_2^{\alpha_2} \dots F_m^{\alpha_m}) \dot{F}_1 + \dots + \alpha_m F_m^{\alpha_m-1} (F_1^{\alpha_1} F_2^{\alpha_2} \dots F_{m-1}^{\alpha_{m-1}}) \dot{F}_m \\ &= K_1 \alpha_1 F_1^{\alpha_1} (F_2^{\alpha_2} \dots F_m^{\alpha_m}) + \dots + K_m \alpha_m F_m^{\alpha_m} (F_1^{\alpha_1} F_2^{\alpha_2} \dots F_{m-1}^{\alpha_{m-1}}) \\ &= (\alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2 + \dots + \alpha_m K_m) H \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

Donc H est une intégrale première du système. \square

Par définition, un *facteur intégrant* est une fonction $M(x, y) \neq 0$ telle que le système

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y)M(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y)M(x, y), \end{cases} \quad (2.1.13)$$

est hamiltonien, soit de la forme

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial y}, \\ \dot{y} &= -\frac{\partial H}{\partial x}, \end{aligned} \tag{2.1.14}$$

pour une fonction $H(x, y)$, ce qui est équivalent à

$$\operatorname{div}(PM, QM) = 0, \tag{2.1.15}$$

au voisinage du point singulier puisque le domaine est simplement connexe.

Proposition 2.1.3. *On considère un système de la forme (2.1.1) ayant des courbes algébriques invariantes, $F_i(x, y) = 0$, avec $F_i(x, y) = 0$ un polynôme irréductible, où $i = 1, \dots, m$, telles que (2.1.10) est satisfait pour des constantes α_i non toutes nulles. Alors, si*

$$M = \prod_{i=1}^m F_i^{\alpha_i} \tag{2.1.16}$$

et

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i K_i + \operatorname{div}(P, Q) = 0, \tag{2.1.17}$$

alors M est un facteur intégrant.

DÉMONSTRATION. Nous voulons que $\operatorname{div}(PM, QM) = 0$. Soit

$$\operatorname{div}(PM, QM) = P \frac{\partial M}{\partial x} + Q \frac{\partial M}{\partial y} + M \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right). \tag{2.1.18}$$

À la proposition 2.1.2, nous avons montré que

$$\frac{dH}{dt} = (\alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2 + \dots + \alpha_m K_m) H, \tag{2.1.19}$$

où

$$H(x, y) = \prod_{i=1}^m F_i^{\alpha_i}. \tag{2.1.20}$$

Ici $H = M$. Donc,

$$\frac{dM}{dt} = M \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i K_i \right). \tag{2.1.21}$$

Aussi,

$$\begin{aligned}\frac{dM}{dt} &= \frac{\partial M}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial M}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= P \frac{\partial M}{\partial x} + Q \frac{\partial M}{\partial y}.\end{aligned}\tag{2.1.22}$$

Donc, on a que

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(PM, QM) &= P \frac{\partial M}{\partial x} + Q \frac{\partial M}{\partial y} + M \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \\ &= \frac{dM}{dt} + M(\operatorname{div}(P, Q)) \\ &= M \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i K_i \right) + M(\operatorname{div}(P, Q)) \\ &= M \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i K_i + \operatorname{div}(P, Q) \right) \\ &= 0,\end{aligned}\tag{2.1.23}$$

en utilisant l'hypothèse. On a alors que

$$\operatorname{div}(PM, QM) = 0.\tag{2.1.24}$$

M est alors un facteur intégrant. \square

On peut alors obtenir une intégrale première par intégration. Ceci résume donc la méthode de Darboux qui nous donne un critère pour déterminer si une singularité dans un système non-linéaire analytique est un centre.

Donnons alors un exemple où nous pouvons utiliser la méthode de Darboux pour déterminer l'existence d'un centre.

Exemple 2.1.1. *Soit le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - x^2 + 3y^2 \\ \dot{y} = x + xy. \end{cases}\tag{2.1.25}$$

Il est possible de trouver une droite invariante et une conique invariante pour le système. On devine facilement que la droite $y = -1$ est une droite invariante de ce système. Nous pouvons l'écrire $F_1(x, y) = y + 1 = 0$. Nous pouvons vérifier que

cette droite est effectivement invariante. En écrivant

$$\dot{F}_1 = \dot{y} = x + xy = x(1 + y) = F_1 K_1, \quad (2.1.26)$$

nous obtenons du même coup le cofacteur $K_1 = x$.

Ensuite, nous trouvons l'équation de la conique invariante en sachant que cette conique doit s'écrire sous la forme générale

$$F_2(x, y) = Ax^2 + By^2 + Cy + 1 = 0. \quad (2.1.27)$$

En effet, comme le système est réversible par rapport à l'axe y , on peut se limiter à des coniques symétriques par rapport à l'axe y . L'équation d'une telle conique, ne passant pas par l'origine, prend la forme (2.1.27).

Nous trouverons à la fois l'équation F_2 de cette conique et son cofacteur K_2 , en calculant \dot{F}_2 et en écrivant que $\dot{F}_2 = F_2(x, y)K_2(x, y)$.

$$\begin{aligned} \dot{F}_2 &= 2Ax\dot{x} + 2By\dot{y} + C\dot{y} \\ &= 2Ax(y - x^2 + 3y^2) + 2By(x + xy) + C(x + xy) \\ &= -2Ax^3 + (6A + 2B)xy^2 + (-2A + 2B + C)xy + Cx \\ &= -2x(Ax^2 + (-3A - B)y^2 + (A - B - \frac{C}{2})y - \frac{C}{2}) \end{aligned} \quad (2.1.28)$$

En comparant les termes en x^3 , nous voyons tout de suite que nous devons prendre $K_2 = -2x$. Nous savons alors que la dernière ligne doit être égale à

$$-2x(Ax^2 + By^2 + Cy + 1), \quad (2.1.29)$$

où $-2x$ serait ici le cofacteur K_2 . Il est possible de trouver A, B et C en comparant terme à terme et on obtient :

$$\begin{aligned} A &= \frac{-6}{5}, \\ B &= \frac{9}{5}, \\ C &= -2. \end{aligned} \quad (2.1.30)$$

L'équation de notre conique invariante est alors (en multipliant par 5 pour enlever les fractions)

$$F_3(x, y) = -6x^2 + 9y^2 - 10y + 5 = 0, \quad (2.1.31)$$

et son cofacteur est $K_3(x, y) = -2x$.

Nous sommes maintenant rendus à l'étape de trouver une intégrale première à l'aide de la méthode de Darboux. Nous cherchons α_1 et α_3 en sachant que

$$\alpha_1 K_1(x, y) + \alpha_3 K_3(x, y) = 0. \quad (2.1.32)$$

Trouvons alors α_1 et α_3 .

$$\begin{aligned} -2x\alpha_1 + x\alpha_3 &= 0, \quad \forall x, y \\ \Leftrightarrow (-2\alpha_1 + \alpha_3)x &= 0, \quad \forall x, y \\ \Leftrightarrow \alpha_3 &= 2\alpha_1. \end{aligned} \quad (2.1.33)$$

Prenons, par exemple, $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_3 = 2$. Nous trouvons alors l'équation d'une intégrale première trouvée par la méthode de Darboux, soit :

$$H = F_1^1 F_3^2 = (-6x^2 + 9y^2 - 10y + 5)(y + 1)^2. \quad (2.1.34)$$

En analysant cette fonction, il est possible de remarquer que H a un maximum strict en $(0, 0)$, et donc que ses courbes de niveau sont fermées au voisinage de l'origine. Par suite, nous pouvons conclure que l'origine est un centre par la méthode de Darboux.

Cet exemple nous a permis de mettre en application la méthode de Darboux. Nous pouvons cependant retirer autre chose de cet exemple. En effet, il est également possible de montrer que ce système est réversible par rapport à l'axe y . Ceci nous donnera un autre critère pour démontrer l'existence d'un centre. C'est en fait ce que nous traiterons dans la prochaine section.

2.2. RÉVERSIBILITÉ ALGÈBRIQUE

Dans cette section, nous discutons du deuxième mécanisme permettant de déterminer l'existence d'un centre dans un problème centre-foyer. Cette méthode analyse l'existence d'une *réversibilité algébrique*. La symétrie par rapport à un axe ou à une droite sera un cas particulier d'une réversibilité algébrique. Donnons alors pour commencer quelques définitions de réversibilité.

Il existe deux sortes de symétrie selon [19]. La première est la *symétrie miroir*.

C'est une symétrie par rapport à une droite ou un axe. C'est cette définition de symétrie que nous sommes habitués à voir. Si nous considérons la droite L , alors le portrait de phase réfléchi par rapport à la droite L est inchangé. Le deuxième type de « symétrie » est la *réversibilité par rapport au temps*. Pour ne pas introduire de confusion, nous abandonnerons le terme symétrie pour ce deuxième cas.

Définition 2.2.1. [19] *Un système $\dot{x} = P(x, y)$, $\dot{y} = Q(x, y)$ est réversible par rapport au temps si son portrait de phase est invariant sous la réflexion par rapport à une droite et un changement dans la direction du temps.*

Lorsque le portrait de phase est réfléchi par rapport à la ligne L et que le sens de toutes les orbites est inversé par rapport au temps, alors on retombe sur le portrait de phase original. Donnons les définitions mathématiques de ces deux symétries par rapport à l'axe y et regardons la figure 2.1 qui illustre bien ces deux cas. Donnons également la définition de symétries par rapport à l'axe x .

Définition 2.2.2. *Le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases} \quad (2.2.1)$$

est :

(1) *temporellement réversible par rapport à l'axe y si et seulement si*

$$\begin{cases} P(-x, y) = P(x, y), \\ Q(-x, y) = -Q(x, y). \end{cases} \quad (2.2.2)$$

(2) *temporellement réversible par rapport à l'axe x si et seulement si*

$$\begin{cases} P(x, -y) = -P(x, y), \\ Q(x, -y) = Q(x, y). \end{cases} \quad (2.2.3)$$

(3) *symétrique par rapport à l'axe des y (symétrie miroir) si et seulement si*

$$\begin{cases} P(-x, y) = -P(x, y), \\ Q(-x, y) = Q(x, y). \end{cases} \quad (2.2.4)$$

(4) *symétrique par rapport à l'axe des x (symétrie miroir) si et seulement si*

$$\begin{cases} P(x, -y) = P(x, y), \\ Q(x, -y) = -Q(x, y). \end{cases} \quad (2.2.5)$$

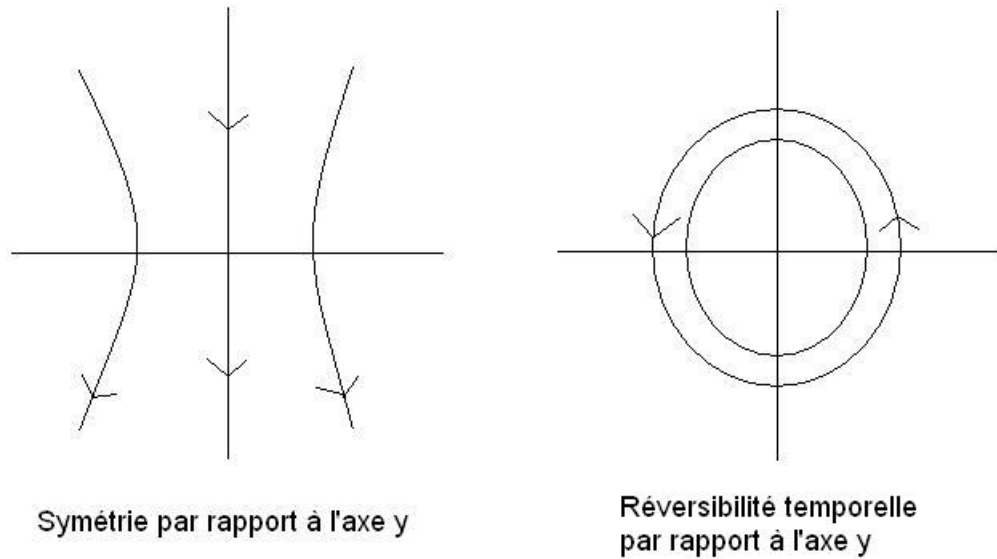


FIG. 2.1. Réversibilité temporelle par rapport à l'axe y et symétrie par rapport à l'axe y .

Regardons maintenant pourquoi ces symétries impliquent la présence d'un centre dans un système d'équation différentielles non-linéaires dans le contexte du problème centre-foyer. Intuitivement, nous pouvons répondre à cette question pour le cas où notre système possède une réversibilité temporelle par rapport à un des deux axes. Nous avons un point singulier, sans perte de généralité à l'origine, monodromique. Nous voulons alors savoir si l'origine est un centre ou un foyer faible. La condition de réversibilité temporelle du système oblige alors la présence d'un centre. En effet, il est évident qu'un foyer faible n'est pas temporellement réversible par rapport à aucun des axes x ou y . Seul le centre peut éventuellement répondre à cette condition.

2.2.1. Centre algébriquement et analytiquement réversible

Dans les prochaines lignes, nous tenterons d'expliquer ce qu'est un centre algébriquement réversible.

Soit $V(x, y)$, le champ de vecteurs polynomial sur \mathbb{R}^2 tel que

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y). \end{cases} \quad (2.2.6)$$

On suppose qu'il existe une transformation rationnelle

$$\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (2.2.7)$$

avec un pli de dimension 1, noté Γ , où

$$\Gamma = \{\det(d\phi) = 0\}, \quad (2.2.8)$$

voir la figure 2.2.

Exemple 2.2.1. *Un exemple d'une telle transformation rationnelle serait donnée par*

$$\phi(x, y) = (x^2, y). \quad (2.2.9)$$

On a

$$D\phi = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.2.10)$$

et donc $\det(d\phi) = 2x$. Γ serait alors donnée par

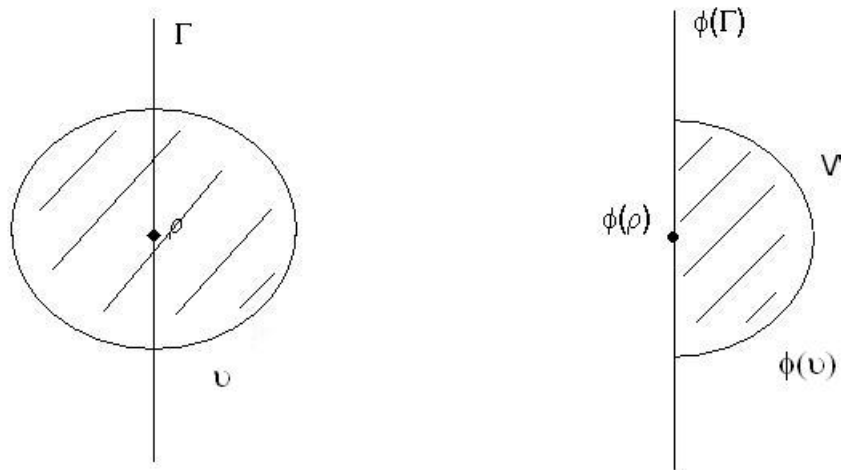
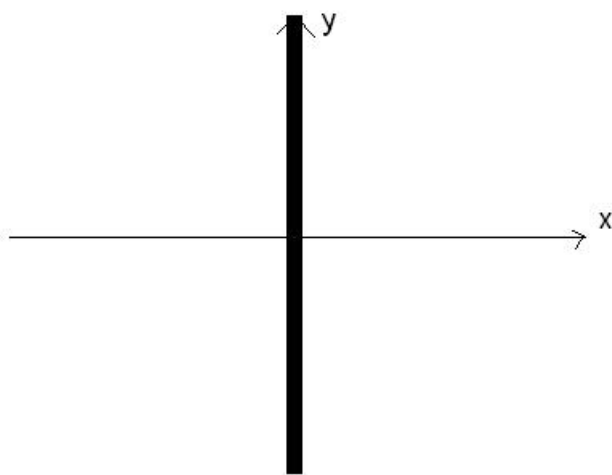
$$\Gamma = \{x = 0\}. \quad (2.2.11)$$

Le pli serait sur l'axe des y comme le montre la figure 2.3. Ce pli est appelé pli simple.

Soit $X = (x, y)$ et $Y = (x_1, y_1)$. Nous définissons maintenant $\phi_*(V)$ comme étant la transformée du champ V dans les coordonnées $Y = \phi(X)$, soit

$$\phi_*(V)(Y) = D\phi(\phi^{-1}(Y))V(\phi^{-1}(Y)). \quad (2.2.12)$$

On suppose également qu'il existe un champ $V'(x_1, y_1)$ sur \mathbb{R}^2 tel que

FIG. 2.2. U et $\phi(U)$ FIG. 2.3. Pli sur l'axe des y

(1) $V' \circ \phi$ et $\phi_*(V)$ sont colinéaires.

- (2) Il existe un point $p \in \Gamma$ et un voisinage ouvert de p tel que $\phi(p)$ est sur la frontière $\phi(\Gamma)$ de $\phi(V)$ et V' est tangent à $\phi(\Gamma)$ au point $\phi(p)$ de l'extérieur de V' . (Voir figure (2.4))

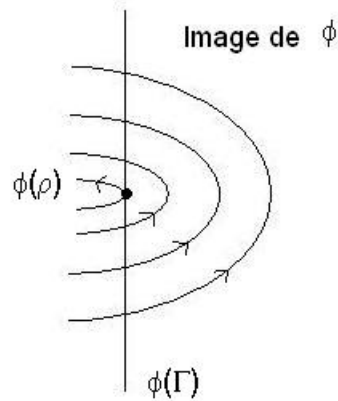


FIG. 2.4. V' tangent à $\phi(\Gamma)$

Alors p est un centre pour V appelé *centre algébriquement réversible*.

Remarque 2.2.1. La définition précédente fonctionnerait encore si P et Q étaient seulement analytiques et si ϕ était aussi analytique dans un voisinage de p .

Définition 2.2.3. Si ϕ est analytique, alors le point p est appelé *centre analytiquement réversible*.

Proposition 2.2.1. Soit $\phi = (\phi_1, \phi_2) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ une transformation analytique de type pli au voisinage de l'origine. Il existe un changement analytique de coordonnées défini dans un voisinage de l'origine et ramenant un pli à un pli simple.

DÉMONSTRATION. Soit $\phi(x, y)$, une transformation analytique de type pli,

$$\phi(x, y) = (\phi_1(x, y), \phi_2(x, y)), \quad (2.2.13)$$

telle que

$$D\phi(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.2.14)$$

modulo une rotation et un changement d'échelle sur y avec

$$P = (x_0, y_0) \quad (2.2.15)$$

et

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2}(x_0, y_0) \neq 0. \quad (2.2.16)$$

On cherche alors Γ d'équation $D\phi(x, y) = 0$. On a que

$$\det(D\phi(x_0, y_0)) = 0 \quad (2.2.17)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\det(D\phi(x_0, y_0))) &= \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} \frac{\partial \phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x \partial y} \\ &\quad - \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} \frac{\partial \phi_1}{\partial y} - \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x \partial y} \neq 0. \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

Nous pouvons alors utiliser le théorème des fonctions implicites. Donc, on conclut qu'il existe un voisinage U' de (x_0, y_0) et un voisinage U de y_0 tel que

$$\det(D\phi) = 0 \quad (2.2.19)$$

sur U' si et seulement si

$$x = g(y) \text{ pour } y \in U \text{ et } g(y_0) = x_0. \quad (2.2.20)$$

On effectue alors le changement

$$(x, y) \longmapsto (x_1, y_1) = G(x, y) = (x - g(y), y). \quad (2.2.21)$$

Donc dans les coordonnées (x_1, y_1) , on a

$$\phi \circ G^{-1}(x_1, y_1) = (x_1^2(1 + k(x_1, y_1)), y_1 + f(x_1, y_1)), \quad (2.2.22)$$

où

$$\begin{aligned} k(x_1, y_1) &= O(|(x_1, y_1)|), \\ f(x_1, y_1) &= O(x_1) + o(y_1). \end{aligned} \quad (2.2.23)$$

On effectue alors un deuxième changement de variables localement inversible, par le théorème des fonctions inverses, soit

$$\begin{aligned} (x_2, y_2) &= K(x_1, y_1) \\ &= (x_1 \sqrt{1 + k(x_1, y_1)}, y_1 + f(x_1, y_1)). \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

On remarque alors que

$$\phi \circ G^{-1} \circ K^{-1}(x_2, y_2) = (x_2^2, y_2), \quad (2.2.25)$$

et on s'est donc ramené à un pli simple le long de l'axe $x_2 = 0$. \square

On énonce maintenant la proposition suivante :

Proposition 2.2.2. *Tout centre est analytiquement réversible.*

DÉMONSTRATION. Si le système a un centre en p , il est connu [7] qu'il existe un changement de variables

$$(x, y) \longmapsto F(x, y) = (x_1, y_1) \quad (2.2.26)$$

le ramenant au système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -y_1 h(x_1, y_1), \\ \dot{y}_1 = x_1 h(x_1, y_1), \end{cases} \quad (2.2.27)$$

où h est une fonction non-nulle. Regardons une courte démonstration de ceci avant de compléter la preuve.

DÉMONSTRATION. D'abord, un centre a une intégrale première de la forme

$$F(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \sum_{i+j \neq 3} a_{ij} x^i y^j. \quad (2.2.28)$$

En regroupant les termes, nous pouvons écrire $F(x, y)$ sous la forme

$$F(x, y) = \frac{1}{2}x^2(1 + g(x, y)) + \frac{1}{2}y^2(1 + h(x, y)), \quad (2.2.29)$$

où $g = O(|x, y|)$ et $h = O(|x, y|)$ sont analytiques. Nous posons

$$(X, Y) = \left(\frac{x}{\sqrt{1 + g(x, y)}}, \frac{y}{\sqrt{1 + h(x, y)}} \right). \quad (2.2.30)$$

(2.2.30) est alors un changement de variables analytiques. Nous avons, dans les nouvelles coordonnées (X, Y) , l'intégrale première

$$F(X, Y) = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2). \quad (2.2.31)$$

Nous avons donc que

$$X\dot{X} + Y\dot{Y} = 0. \quad (2.2.32)$$

Le système a alors la forme voulue. \square

Après ce changement de variables, (2.2.27) est analytiquement réversible par rapport à toute droite passant par l'origine. \square

Exemple 2.2.2. *Si on regarde, par exemple, la transformation*

$$\phi_1(x_1, y_1) = (x_1^2, y_1), \quad (2.2.33)$$

alors $\phi_1 \circ F (= \phi)$ est une application qui génère une réversibilité analytique.

Donc, tout centre est analytiquement réversible. Malheureusement, en pratique, quand la réversibilité n'est pas algébrique, mais seulement analytique, on n'a pas d'algorithme pour trouver ϕ et il faut s'en remettre à des méthodes ad hoc. Voici cependant un exemple où on a pu trouver un tel ϕ assez facilement.

Exemple 2.2.3. *Soit le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - x^2 + 3y^2 \\ \dot{y} = x + xy. \end{cases} \quad (2.2.34)$$

Soit A , la linéarisé du système :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2.35)$$

Nous avons alors deux valeurs propres imaginaires pures, soient i et $-i$. Nous sommes alors en présence d'un centre à l'origine pour le système (2.2.34). Nous pouvons alors nous poser la question fondamentale du problème centre-foyer : sommes-nous en présence d'un centre ou d'un foyer faible à l'origine pour ce système non-linéaire ?

Regardons alors la possibilité d'une réversibilité analytique. Si nous arrivons à montrer que le système (2.2.34) est temporellement réversible par rapport à un des axes, alors nous aurons un centre à l'origine.

Montrons alors que (2.2.34) est temporellement réversible par rapport à l'axe y . Pour ce faire, nous n'avons qu'à remplacer x par $-x$ dans \dot{x} et \dot{y} et espérer arriver

à la définition même de symétrie donnée en (2.2.2).

$$\begin{aligned}\dot{x}|_{x=-x} &= -y - x^2 + 3y^2 = \dot{x} \\ \dot{y}|_{x=-x} &= -x - xy = -\dot{y}.\end{aligned}\tag{2.2.36}$$

Nous voyons alors que le système est temporellement réversible par rapport à l'axe y et donc que l'origine est un centre.

Nous remarquons alors que cet exemple se résout aussi bien par la méthode de Darboux que par la méthode de réversibilité analytique. Notons tout de même que la deuxième méthode est légèrement moins fastidieuse, mais elle ne donne pas l'intégrale première du système.

Pour conclure cette section, donnons deux remarques.

Remarque 2.2.2. *Si nous arrivons à montrer la présence d'une réversibilité analytique pour un système transformé par un changement de variables analytique (et possédant alors toujours une singularité monodromique), nous pouvons conclure à la présence d'un centre pour le système dans les nouvelles coordonnées et donc pour le système dans les anciennes coordonnées.*

Remarque 2.2.3. *Concrètement, pour démontrer la présence d'un centre dans un problème centre-foyer en utilisant la méthode de réversibilité analytique, nous pouvons effectuer un changement de variables analytique et montrer par la suite l'existence d'une réversibilité analytique.*

Chapitre 3

APPLICATION À LA PREUVE DE DEUX CONJECTURES

Dans ce chapitre, nous appliquons les méthodes du chapitre 2 à des aspects spécifiques de l'étude d'un modèle de Gauss généralisé avec récolte de proies et fonction de Holling de type III généralisée qui a été l'objet de la thèse de Rémy Etoua.[11] Dans sa thèse, Etoua a énoncé deux conjectures. Dans la sous-section 3.3.1, nous faisons la preuve de la première des deux conjectures. Puis à la sous-section 3.3.2, nous faisons la démonstration de la deuxième conjecture. D'abord, regardons le problème et travaillons sur les points singuliers et les bifurcations du système.

3.1. EXPLICATION DU SYSTÈME

Le modèle étudié ici est le modèle de Gauss généralisé avec récolte de proies suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = g(x) - yp(x) - h_1, \\ \dot{y} = y(-d + cp(x)). \end{cases} \quad (3.1.1)$$

Une explication de chacun des paramètres et des fonctions utilisées suivra dans les prochaines lignes. Par définition, une récolte de proies ou de prédateurs est une intervention extérieure sur le modèle.

Ici, p représente la fonction de Holling de type III généralisée, soit

$$p(x) = \frac{mx^2}{ax^2 + bx + 1}. \quad (3.1.2)$$

Regardons les graphiques 3.1, 3.2 et 3.3 représentant la fonction de Holling de type III généralisée pour diverses valeurs du paramètre b . Le premier graphique représente un $b > 0$, le deuxième décrit la fonction pour $b < 0$ et le troisième

présente la situation pour $b = 0$. Notons que nous avons donné des valeurs aux paramètres a et m pour faciliter la représentation. Pour les trois graphiques, $a = 0.05$ et $m = 0.1$.

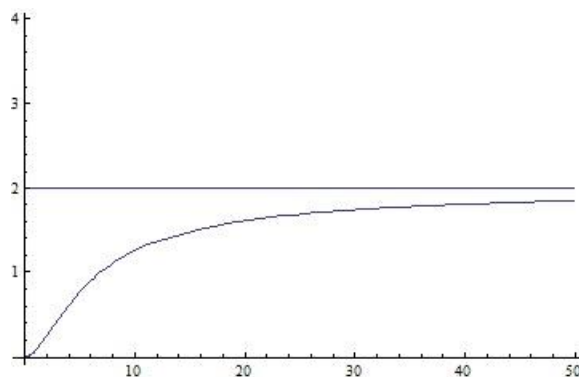


FIG. 3.1. Fonction de Holling de type III généralisée pour $b=0.02>0$

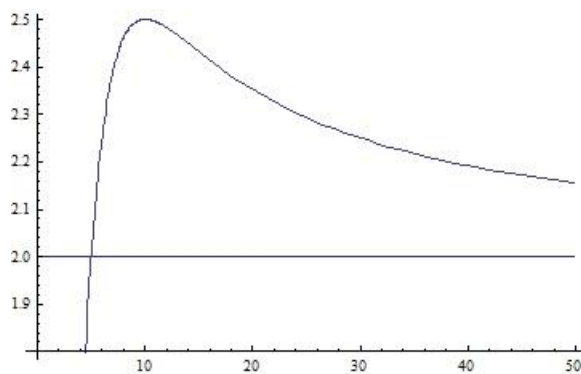


FIG. 3.2. Fonction de Holling de type III généralisée pour $b=-0.02<0$

Puis, la fonction

$$g(x) = rx\left(1 - \frac{x}{k}\right) \quad (3.1.3)$$

modélise le comportement de la population de proies en l'absence des prédateurs. Plus précisément, r est le taux de croissance de la population de proies x en l'absence de prédateurs et k représente la capacité de l'environnement à supporter

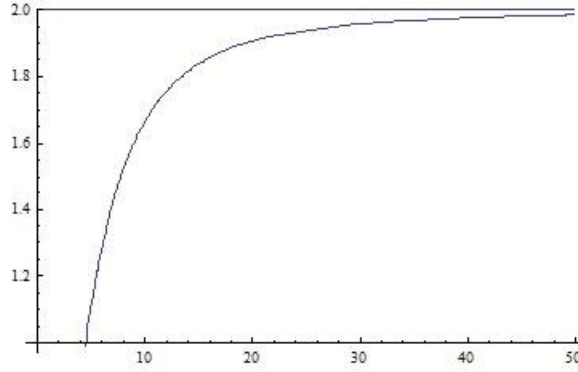


FIG. 3.3. Fonction de Holling de type III généralisée pour $b=0$

les proies.

Nous avons donc 8 paramètres dans ce système : r, k, m, a, c, d, h_1 étant strictement positifs et b étant quelconque. Regardons rapidement l'explication biologique des différentes variables et paramètres du système 3.1.1. D'abord, x représente la population de proies et y celle des prédateurs. Évidemment, x et y sont positifs ou nuls. Le paramètre d dénote le taux de mortalité naturelle des prédateurs.

La fonction $p(x)$, communément appelée la fonction de réponse de Holling de type III généralisée, présente une des fonctions de réponses possibles des prédateurs en fonction du nombre de proies. Cette fonction nous informe sur la consommation de proies faite par les prédateurs. Dans celle-ci, m et a sont des constantes positives et b est une constante quelconque. Les conjectures de Etoua concernent le cas $b = 0$. Nous nous concentrerons alors sur ce cas. Lorsque $b = 0$, on appelle la fonction $p(x)$ la fonction de Holling de type III. En analysant les graphes de la fonction de Holling généralisée de type III, on remarque que la prédation est très faible lorsque le nombre de proies est petit ($p'(0) = 0$) et que lorsque le nombre de proies est élevé ($p(x) \rightarrow \frac{m}{a}$ quand $x \rightarrow \infty$), on remarque un avantage du groupe de proies. On pourrait appelé ce phénomène la *défense de groupe*.

Puis, h_1 est le terme de récolte de proies, soit un nombre fixe d'individus prélevés par unité de temps de la population de proies. Finalement, c est défini par la

proportion du nombre de proies consommées par les prédateurs sur le nombre de prédateurs nés. Pour avoir plus de précision sur les paramètres biologiques du système, consultez [11] ou [16].

Ensuite, afin de rendre le travail sur le système plus facile, nous effectuons une simplification du système. On passera ainsi de 8 paramètres à 5. Considérons la transformation linéaire suivante

$$X = \frac{1}{k}x, Y = \frac{1}{ck}y \quad (3.1.4)$$

et le changement d'échelle sur le temps

$$T = cmk^2t. \quad (3.1.5)$$

Épargnons-nous la tâche de simplification présentée dans [11]. Prenons simplement le temps de présenter les nouveaux paramètres, soient

$$\begin{aligned} \alpha &= ak^2, \rho = \frac{r}{cmk^2}, \beta = bk, \\ \delta &= \frac{d}{cmk^2}, \lambda = \frac{h_1}{cmk^3}. \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

Nous obtenons alors le système simplifié suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = \rho x(1-x) - yp(x) - \lambda, \\ \dot{y} = y(-\delta + p(x)), \\ x \geq 0, y \geq 0, \end{cases} \quad (3.1.7)$$

à cinq paramètres réels, $\rho, \alpha, \delta, \lambda$, strictement positifs et β quelconque, et avec

$$p(x) = \frac{x^2}{\alpha x^2 + \beta x + 1}. \quad (3.1.8)$$

Nous sommes maintenant prêts à rappeler les principaux points de l'étude de ce système, de manière à présenter les conjectures d'Etoua. Nous considérons maintenant $\beta = 0$.

3.2. ÉTUDE DES POINTS SINGULIERS DU SYSTÈME

Dans cette section, nous faisons l'inventaire des points singuliers du système (3.1.7) et nous donnons également leur type. Nous ne donnons pas tous les détails des calculs et des explications, car ce travail est fait dans [11].

Il peut être intéressant, pour commencer, de remarquer que la droite d'équation $y = 0$ est invariante sous le flot du système 3.1.7. Également, nous remarquons que l'axe des ordonnées n'est plus invariant lorsque $\lambda \neq 0$. Ceci signifie que le modèle n'est plus adéquat quand x est trop petit.

Rappelons maintenant le calcul des points singuliers du système (3.1.7), où maintenant

$$p(x) = \frac{x^2}{\alpha x^2 + 1}. \quad (3.2.1)$$

Ceux-ci sont les solutions du système d'équations suivant, avec x, y les inconnus :

$$\begin{cases} \rho x(1-x) - yp(x) - \lambda = 0, \\ y(-\delta + p(x)) = 0, \\ x \geq 0, y \geq 0, \end{cases} \quad (3.2.2)$$

En prenant la deuxième équation, on a que soit $y = 0$ ou $p(x) = \delta$. Travaillons d'abord avec $y = 0$. La première équation devient alors

$$\rho x^2 - \rho x + \lambda = 0. \quad (3.2.3)$$

En calculant le discriminant, on obtient :

$$\Delta = \rho(\rho - 4\lambda). \quad (3.2.4)$$

Ainsi, nous pouvons séparer en trois cas.

- Lorsque $\rho < 4\lambda$, nous n'avons pas de point singulier sur $y = 0$.
- Lorsque $\rho = 4\lambda$, alors $(\frac{1}{2}, 0)$ est un point singulier double.
- Lorsque $\rho > 4\lambda$, alors 3.2.3 a deux solutions que nous nommons x_{01} et x_{02} , telles que

$$x_{01} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\rho(\rho - 4\lambda)}}{2\rho}, x_{02} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\rho(\rho - 4\lambda)}}{2\rho}. \quad (3.2.5)$$

Ainsi $C = (x_{01}, 0)$ et $D = (x_{02}, 0)$ sont des points singuliers. (Voir tableau récapitulatif 3.1)

Regardons maintenant le cas où $p(x) = \delta$. On cherche alors le point $x_0 \geq 0$ tel que $p(x_0) = \delta$. On obtient alors, en utilisant la première équation de 3.2.2 que

$$y_0 = \frac{1}{\delta}[\rho x_0(1 - x_0) - \lambda]. \quad (3.2.6)$$

Nous trouvons finalement que

$$p(x) = \delta \Leftrightarrow (\alpha\delta - 1)x^2 + \delta = 0. \quad (3.2.7)$$

Nous pourrions maintenant analyser la situation pour $\alpha\delta - 1$ positif, négatif ou nul. Même si (3.2.7) peut avoir deux solutions positives, pour l'une des deux solutions, la valeur de y correspondante est négative. Donc, on a 0 ou 1 point singulier dans le premier quadrant. Lorsque le point existe, appelons le E , il sort du premier quadrant en se confondant avec C ou D . (voir tableau 3.1) Donnons alors le tableau récapitulatif 3.1 résumant les points singuliers.

Région	Point(s) Singulier(s)
$\rho < 4\lambda$	aucun
$\rho = 4\lambda$	$(\frac{1}{2}, 0)$ est un point double si $\delta \neq \frac{1}{\alpha+4}$, ($C = D$) et est un point triple si $\delta = \frac{1}{\alpha+4}$, ($C = D = E$)
$\rho > 4\lambda$ et $x_0 \in]x_{01}, x_{02}[$	C, D et $E = (x_0, y_0)$ où $p(x_0) = \delta$ et $y_0 = \frac{\rho x_0(1-x_0) - \lambda}{\delta}$
$\rho > 4\lambda$ et $x_0 = x_{01}$	$(C = E)$ est un point double et D .
$\rho > 4\lambda$ et $x_0 = x_{02}$	C et $(D = E)$ est un point double.
$\rho > 4\lambda$ et $x_0 \in]0, x_{01}[\cup]x_{02}, +\infty[$	C et D

TAB. 3.1. Points singuliers du système dépendant des valeurs des paramètres [11]

Nous sommes maintenant prêts à analyser le type de chacun des points singuliers. Nous ne répèterons pas tout le travail fait dans [11]. Donnons seulement certains éléments clés et les conclusions sous forme de tableau.

La matrice jacobienne du système (3.1.7), en considérant toujours $\beta = 0$, est donnée par

$$Jac(x, y) = \begin{pmatrix} \rho - 2\rho x - \frac{2xy}{(\alpha x^2 + 1)^2} & -p(x) \\ \frac{2xy}{(\alpha x^2 + 1)^2} & -\delta + p(x) \end{pmatrix}. \quad (3.2.8)$$

Nous devons alors, par le tableau 3.1, étudier deux cas distincts, soit $\rho = 4\lambda$ et $\rho > 4\lambda$.

Le cas $\rho = 4\lambda$ se fait assez rapidement. On a le point singulier double $B = (\frac{1}{2}, 0)$ avec une matrice jacobienne en ce point valant :

$$Jac(B) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\alpha+4} \\ 0 & -\delta + \frac{1}{\alpha+4} \end{pmatrix}. \quad (3.2.9)$$

On montre dans [11] que $B = (\frac{1}{2}, 0)$ est alors un col-noeud de multiplicité 2 si $\delta \neq \frac{1}{\alpha+4}$ et un col nilpotent de multiplicité 3 si $\delta = \frac{1}{\alpha+4}$. Nous donnerons à la sous-section 3.3.2 une définition de col nilpotent.

Le cas $\rho > 4\lambda$ demande plus de travail.

Les calculs pour déterminer le type topologique de chacun de ces points est fait dans [11]. Introduisons d'abord la définition d'un *anti-selle*.

Définition 3.2.1. *Un anti-selle est un point singulier dont le produit des valeurs propres est positif.*

Remarque 3.2.1. *Un anti-selle est alors soit un noeud, un foyer, un foyer faible (définition 1.3.2) ou un centre.*

Regardons le résumé au tableau 3.2. Avant, donnons la valeur de x_{01} et x_{02} .

$$x_{01} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\rho(\rho - 4\lambda)}}{2\rho}, \quad x_{02} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\rho(\rho - 4\lambda)}}{2\rho}. \quad (3.2.10)$$

Nous noterons $x_{01} = \frac{1}{2} - \eta$ et $x_{02} = \frac{1}{2} + \eta$, où

$$\eta = \frac{\sqrt{\rho(\rho - 4\lambda)}}{2\rho}. \quad (3.2.11)$$

Les possibilités de centre ou les bifurcations de Hopf (section 3.3) se produisent quand E est un anti-selle. Une étude plus approfondie pour départager les cas est alors nécessaire. Nous serons également intéressés par le cas limite où $\rho = 4\lambda$ et par la condition pour avoir un col nilpotent, soit : $\delta = \frac{1}{\alpha+4}$. À cet endroit, les points C , D et E se confondent. Regardons la figure 3.4 représentant les portraits de phase de E comme centre et de C , D et E confondus.

Région	Points Singuliers	Type
$\delta < p(\frac{1}{2} - \eta)$	C,D,E	C est un noeud répulsif D,E sont des cols hyperboliques
$\delta = p(\frac{1}{2} - \eta)$	C,D	C est un col-noeud répulsif D est un col hyperbolique
$p(\frac{1}{2} - \eta) < \delta < p(\frac{1}{2})$	C,D,E	C et D sont des cols hyperboliques E est un anti-selle
$p(\frac{1}{2}) \leq \delta < p(\frac{1}{2} + \eta)$	C,D,E	C et D sont des cols hyperboliques E est un (foyer/noeud) attractif
$\delta = p(\frac{1}{2} + \eta)$	C,D	C est un col hyperbolique D est un col-noeud attractif
$\delta > p(\frac{1}{2} + \eta)$	C,D,E	D est un noeud attractif C et E sont des cols hyperboliques

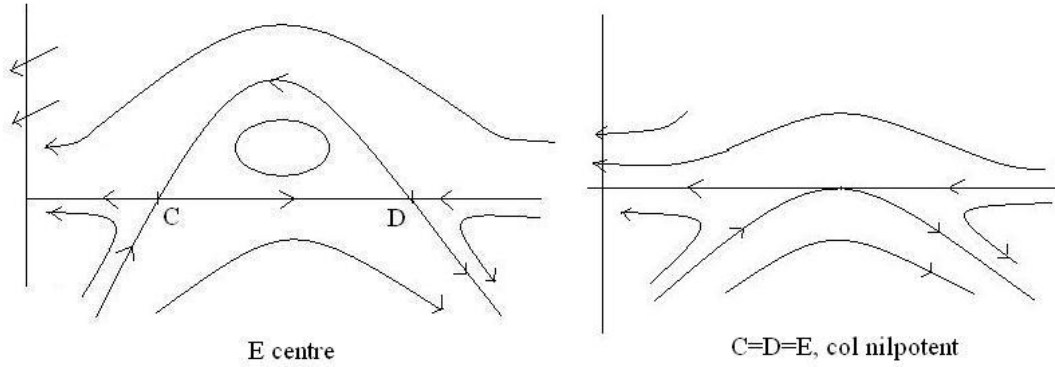
TAB. 3.2. Types des points singuliers pour $\rho > 4\lambda$ [11]

FIG. 3.4. Comparaison entre centre et col nilpotent

3.3. ANALYSE DES BIFURCATIONS DU SYSTÈME

Il y a quatre types de bifurcations dans ce système. Nous nous attarderons plus précisément à la bifurcation de Hopf au voisinage du point singulier $E = (x_0, y_0)$ avec $x_0 \in]x_{01}, \frac{1}{2}[$ à la section 3.3.1 et à la bifurcation de col nilpotent au voisinage du point singulier $(\frac{1}{2}, 0)$ lorsque $\rho = 4\lambda$ et $\delta = \frac{1}{\alpha+4}$ à la section 3.3.2.

3.3.1. Bifurcation de Hopf

La bifurcation de Hopf d'ordre k décrit la naissance de cycles limites dans une perturbation d'un système ayant un foyer faible tel que les constantes de Lyapunov satisfont $L(1) = \dots = L(k-1) = 0$ et $L(k) \neq 0$. On a alors la possibilité de k cycles limites.

Théorème 3.3.1. [11] *Lorsque $\beta > 0$, on a une bifurcation de Hopf d'ordre deux au voisinage de $E = (x_0, y_0)$, et la constante de Lyapunov $L(2)$ est strictement positive.*

Lorsque nous voulons maintenant regarder le cas où $\beta = 0$, nous remarquons que le comportement des constantes de Lyapunov du système change. Ceci a donc mené Etoua à conjecturer que E puisse être un centre.

Conjecture 3.3.1. *Si $\beta = 0$ et $L(1) = 0$, alors le point singulier $E = (x_0, y_0)$ est un centre.*

La conjecture a été motivée par le fait que, sous l'hypothèse $\beta = 0$ et $L(1) = 0$, on a $L(2) = \dots = L(5) = 0$. Dans la prochaine sous-section, nous démontrons la conjecture 3.3.1.

3.3.1.1. Démonstration de la conjecture 3.3.1

Tous les calculs effectués dans cette section sont faits à l'aide du logiciel Mathematica. Le but ici est de démontrer que si $L(1) = 0$, alors $L(i) = 0$, pour tout i . Et donc que le point est intégrable. On utilisera alors la méthode vue dans le deuxième chapitre : on va montrer que, dans de bonnes coordonnées, le système est temporellement analytiquement réversible et, au voisinage du point singulier, les trajectoires sont des courbes fermées du fait de la réversibilité.

Nous avons qu'une bifurcation de Hopf se produit au point singulier (x_0, y_0) où $p(x_0) = \delta$. Nous devons donc avoir, par définition de $p(x)$,

$$\frac{x_0^2}{1 + \alpha x_0^2} = \delta \Rightarrow x_0^2(1 - \alpha\delta) - 1 = 0. \quad (3.3.1)$$

Nous avons également trouvé une condition sur y_0 à l'équation (3.2.6), soit :

$$y_0 = \frac{\rho x_0(1 - x_0) - \lambda}{p(x_0)}. \quad (3.3.2)$$

Nous choisissons de garder x_0 comme paramètre et nous nous servons de la condition (3.3.1) sur δ et de la condition (3.3.2) sur y_0 pour éliminer δ et y_0 de notre système d'équations. Nous avons ainsi décidé de garder x_0 comme paramètre et d'éliminer plutôt δ . Nous aurions également pu éliminer α , mais ici notre choix nous mène à des calculs moins fastidieux. La prochaine étape consiste à diviser le système par $p(x)$. Remarquons que $p(x) > 0$ en dehors de l'axe $x = 0$. Donc, en dehors de cet axe, cette division change la longueur des vecteurs du champ, mais pas leur direction. Le caractère ouvert ou fermé des trajectoires est donc préservé par cette opération. Ensuite, nous effectuons la translation du système en (x_0, y_0) en posant :

$$\begin{aligned} x_1 &= x - x_0, \\ y_1 &= y - y_0. \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Le système est maintenant de la forme :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -y_1 - f(x_1), \\ \dot{y}_1 &= g(x_1) + l(x_1)y_1, \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

soit :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{1}{x_0^2(x_0 + x_1)^2} x_1 (-2\lambda x_0 + \rho x_0^2 - \alpha \rho x_0^4 + 2\alpha \rho x_0^5 - \lambda x_1 + \rho x_0 x_1 \\ &\quad - 2\alpha \rho x_0^3 x_1 + 5\alpha \rho x_0^4 x_1 - \alpha \rho x_0^2 x_1^2 + 4\alpha \rho x_0^3 x_1^2 + \alpha \rho x_0^2 x_1^3) - y_1, \\ \dot{y}_1 &= \frac{-(\lambda - \rho x_0 + \rho x_0^2)x_1(2x_0 + x_1)}{x_0^2(x_0 + x_1)^2} + \frac{x_1(2x_0 + x_1)y_1}{(1 + \alpha x_0^2)(x_0 + x_1)^2}. \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

Regardons le jacobien de ce système en $(0, 0)$. $J(0,0) =$

$$\begin{pmatrix} -f'(0) & -1 \\ g'(0) & l(0) \end{pmatrix}.$$

On peut voir que $l(0) = 0$. Donc, nous sommes en présence d'une bifurcation de Hopf si $f'(0) = 0$. En effet, nous devons avoir la trace du Jacobien nulle pour pouvoir retrouver une bifurcation de Hopf. En posant $f'(0) = 0$, nous nous

retrouvons donc avec une condition de plus sur nos paramètres, soit :

$$-2\lambda + \rho x_0 - \alpha \rho x_0^3 + 2\alpha \rho x_0^4 = 0. \quad (3.3.6)$$

On se sert alors de cette égalité pour éliminer λ . En effet,

$$\lambda = \frac{1}{2}(\rho x_0 - \alpha \rho x_0^3 + 2\alpha \rho x_0^4). \quad (3.3.7)$$

Ensuite, dans [11], on donne explicitement la formule pour $L(1)$ avec β quelconque. Soit,

$$\begin{aligned} L(1) = & \rho^2 x_0^2 (1 - 2x_0) (\alpha x_0^2 + \beta x_0 + 1)^2 [(\beta^3 + 2\alpha\beta - \alpha\beta^2)x_0^4 \\ & + (6\beta^2 - 6\alpha\beta)x_0^3 + (6\beta - 6\alpha)x_0^2 + 4\beta x_0 + 6]. \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

Ici, nous travaillons avec $\beta = 0$ et nous avons également comme condition dans l'énoncé de la conjecture que $L(1) = 0$. Donc,

$$L(1) = 0 \Leftrightarrow (1 - 2x_0)(\alpha x_0^2 + 1)(1 - \alpha x_0^2) = 0. \quad (3.3.9)$$

Vu que $\alpha > 0$, la solution $\alpha x_0^2 + 1 = 0$ est exclue. Et on peut également éliminer la solution $1 - 2x_0 = 0$, car on doit avoir $y_0 \neq 0$. Donc, nous trouvons la condition :

$$1 - \alpha x_0^2 = 0. \quad (3.3.10)$$

En isolant α , nous trouvons

$$\alpha = \frac{1}{x_0^2}, \quad (3.3.11)$$

ce qui permet d'éliminer α de nos calculs. Il nous reste alors deux paramètres, soient ρ et x_0 . Nous obtenons donc, sous les conditions que nous sommes en présence d'une bifurcation de Hopf d'ordre ≥ 2 , c'est-à-dire $L(1) = 0$, un système de la forme

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -y_1 - f(x_1) = -y_1 - x_1^2 h(x_1), \\ \dot{y}_1 &= g(x_1) + l(x_1)y_1, \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

avec h une fonction dépendante de x_1 . À l'aide de Mathematica, voici ce que l'on obtient après toutes ces manipulations.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -y_1 - x_1^2 \frac{(-\rho x_0 + 4\rho x_0^2 - \rho x_1 + 4\rho x_0 x_1 + \rho x_1^2)}{x_0^2 (x_0 + x_1)^2}, \\ \dot{y}_1 &= -\frac{(-\rho x_0 + 2\rho x_0^2)x_1(2x_0 + x_1)}{x_0^2 (x_0 + x_1)^2} + \frac{x_1(2x_0 + x_1)}{2(x_0 + x_1)^2} y_1. \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

Donc,

$$\begin{aligned} g(x_1) &= -\frac{(-\rho x_0 + 2\rho x_0^2)x_1(2x_0 + x_1)}{x_0^2(x_0 + x_1)^2}, \\ l(x_1) &= \frac{x_1(2x_0 + x_1)}{2(x_0 + x_1)^2}, \\ h &= \frac{\rho(-x_0 + 4x_0^2 - x_1 + 4x_0x_1 + x_1^2)}{x_0^2(x_0 + x_1)^2}. \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

Nous avons alors l'idée d'effectuer un changement de variables $(x_1, y_1) \mapsto (X, y_1)$ qui ramènerait la première équation à

$$\dot{X} = -y_1 - X^2. \quad (3.3.15)$$

Ceci suggère alors le changement de variables suivant :

$$X = x_1\sqrt{h(x_1)} = H(x_1), \quad (3.3.16)$$

avec h défini en (3.3.14). Comme $\dot{X} = H'(x_1)\dot{x}_1$, pour obtenir la forme (3.3.15) il faut aussi changer le temps. Posons :

$$T = \frac{t}{k(X)}, \quad \text{où } k(X) = (H^{-1})'(X) = \frac{1}{H'(H^{-1}(X))}. \quad (3.3.17)$$

Nous retrouvons alors, en effectuant notre changement de variables,

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dT} &= \frac{dX}{dx_1} \frac{dx_1}{dt} \frac{dt}{dT} = H'(x_1)\dot{x}_1(H^{-1})'(X) = \dot{x}_1 = -y_1 - X^2, \\ \frac{dy_1}{dT} &= \frac{dy_1}{dt} \frac{dt}{dT} = (g(x_1) + l(x_1)y_1)(H^{-1})'(X) = \frac{(g(H^{-1}(X)) + l(H^{-1}(X))y_1)}{H'(H^{-1}(X))}. \end{aligned} \quad (3.3.18)$$

Nous pouvons alors écrire ce système sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dT} &= -y_1 - X^2, \\ \frac{dy_1}{dT} &= m(X) + n(X)y_1. \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

Maintenant, il est important de comprendre que la suite de la démonstration se fera en plusieurs étapes. Premièrement, nous effectuerons une expérimentation sur Mathematica qui montrera que la conjecture, soit le fait que $m(X)$ et $n(X)$ sont impaires, est raisonnable. Ceci ne formera cependant pas une preuve. Nous devons poursuivre à la deuxième étape dans le but de rendre rigoureuse la

démonstration. Nous savons que $\frac{dy_1}{dT}$ s'écrit sous la forme :

$$\frac{dy_1}{dT} = m(X) + n(X)y_1. \quad (3.3.20)$$

Nous cherchons ici à montrer que dans (3.3.20), $m(X)$ et $n(X)$ sont des fonctions impaires. Pour cela, nous faisons calculer le développement en série de $m(X)$ et $n(X)$ par Mathematica. Nous obtenons alors le résultat suivant :

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dT} = & X \left(-\frac{2x_0(-1+2x_0)}{-1+4x_0} + \frac{x_0^2 y_1}{\rho(-1+4x_0)} \right) \\ & + X^3 \left(\frac{4x_0^3(-1+2x_0)}{\rho(-1+4x_0)^3} - \frac{2x_0^4 y_1}{\rho^2(-1+4x_0)^3} \right) \\ & + X^5 \left(-\frac{12x_0^5(-1+2x_0)}{\rho^2(-1+4x_0)^5} + \frac{6x_0^6 y_1}{\rho^3(-1+4x_0)^5} \right) \\ & + X^7 \left(\frac{40x_0^7(-1+2x_0)}{\rho^3(-1+4x_0)^7} - \frac{20x_0^8 y_1}{\rho^4(-1+4x_0)^7} \right) \\ & + X^9 \left(-\frac{140x_0^9(-1+2x_0)}{\rho^4(-1+4x_0)^9} + \frac{70x_0^{10} y_1}{\rho^5(-1+4x_0)^9} \right) \\ & + \dots \end{aligned} \quad (3.3.21)$$

Nous constatons alors qu'effectivement, $\frac{dy_1}{dT}$ semble impair en X . Ceci ne constitue cependant pas une preuve, car nous n'avons pas la certitude que tous les coefficients devant X^i , avec i pair, sont nuls. Donc, pour pouvoir le prouver, nous passons à l'étape suivante, soit celle de chercher une formule exacte pour $m(X)$ et $n(X)$. En fait, il est possible de simplifier cette étape en observant (3.3.13). On remarque alors qu'il est possible d'écrire $m(X)$ comme un multiple de $n(X)$:

$$m(X) = \frac{2(\rho x_0 - 2\rho x_0^2)}{x_0^2} n(X) = \frac{2\rho(1-2x_0)}{x_0} n(X), \quad (3.3.22)$$

et il suffit donc de travailler avec $n(X)$.

Théorème 3.3.2. *Les fonctions $m(X)$ et $n(X)$ sont impaires et la valeur de $n(X)$ est :*

$$n(X) = \frac{X x_0^2}{\rho(-1+4x_0) \sqrt{\frac{\rho-8\rho x_0+16\rho x_0^2+4X^2 x_0^2}{\rho(-1+4x_0)^2}}}. \quad (3.3.23)$$

DÉMONSTRATION. Pour pouvoir conjecturer une bonne formule pour $n(X)$, nous commençons par utiliser une encyclopédie de suites numériques pour deviner le

terme général de la série représentant $n(X)$. Celle utilisée dans cet exercice se trouve sur le web dans [21]. Nous sommes alors capable de conjecturer que :

$$n(X) = \left(\frac{x_0^2 X}{\rho(-1+4x_0)} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n \frac{(2n)!}{(n!)^2} \left(\frac{x_0^2 X^2}{\rho(-1+4x_0)^2} \right)^n \right). \quad (3.3.24)$$

Effectivement, la suite donnée par 1, 2, 6, 20, 70, ... peut s'exprimer par la suite $\left\{ \frac{(2n)!}{(n!)^2} \right\}_{n \geq 0}$ si nous la cherchons dans l'encyclopédie de suites numériques. Nous avons alors conjecturé une formule pour $n(X)$, qui représente bien une série impaire. Nous avons de la chance. La somme de cette série est facile à calculer. Mathematica nous l'a donnée :

$$n(X) = \frac{X x_0^2}{\rho(-1+4x_0) \sqrt{\frac{\rho-8\rho x_0+16\rho x_0^2+4X^2 x_0^2}{\rho(-1+4x_0)^2}}}. \quad (3.3.25)$$

Par contre, une fois de plus, ceci ne complète pas la preuve. Il nous reste à démontrer que cette formule est exacte. Pour cela, nous procéderons à l'envers. Nous remplacerons X par $x_1 \sqrt{h(x_1)}$ dans (3.3.25) et nous retrouverons la fonction $l(x_1)$ apparaissant en (3.3.14). Montrer inversement que le développement de (3.3.25) est bien (3.3.24) est un simple calcul. Dans (3.3.25), nous changeons à la variable x_1 en posant

$$X = x_1 \sqrt{h(x_1)} = H(x_1). \quad (3.3.26)$$

Ensuite, nous divisons $n(X)$ par la dérivée de H . On doit donc montrer que

$$\frac{n(H(x_1))}{H'(x_1)} = l(x_1). \quad (3.3.27)$$

Avec Mathematica, nous obtenons l'égalité. Il est à noter que cette vérification aurait même pu se faire à la main. Nous concluons alors que la formule (3.3.24) était bel et bien la formule exacte pour $n(X)$. Et, comme nous l'avons expliqué précédemment, la formule de $m(X)$ découle de la formule de $n(X)$. Soit :

$$m(X) = 2\rho(1-2x_0)x_0 \frac{X}{\rho(-1+4x_0) \sqrt{\frac{\rho-8\rho x_0+16\rho x_0^2+4X^2 x_0^2}{\rho(-1+4x_0)^2}}}. \quad (3.3.28)$$

Il est donc correct d'écrire que

$$\frac{dy_1}{dT} = \left(\frac{2\rho(1-2x_0)}{x_0} + y_1 \right) \left(\frac{X x_0^2}{\rho(-1+4x_0) \sqrt{\frac{\rho-8\rho x_0+16\rho x_0^2+4X^2 x_0^2}{\rho(-1+4x_0)^2}}} \right). \quad (3.3.29)$$

Ainsi, on peut accepter que cette fonction est impaire. Donc, pour conclure, nous voyons effectivement le caractère réversible du champ de vecteurs de notre système d'équations suite à un changement de variables. Donc, la méthode de réversibilité analytique décrite au chapitre 2 nous permet de conclure à la présence d'un centre à ce point singulier. Ceci termine alors la démonstration. \square

3.3.2. Bifurcation de col nilpotent

Dans cette sous-section, nous discutons de la bifurcation de col nilpotent au voisinage du point singulier $(\frac{1}{2}, 0)$ dans le système (3.1.7). Cette bifurcation a lieu si $\rho = 4\lambda$ et $\delta = \frac{1}{\alpha+4}$. Dans ces conditions, le point singulier $(\frac{1}{2}, 0)$ est un point triple. Lors de son étude du cas $\beta = 0$, Etoua a dû énoncer une autre conjecture, soit :

Conjecture 3.3.2. *Si $\beta = 0$, $\rho = 4\lambda$, $\delta = \frac{1}{\alpha+4}$ et $\alpha = 4$, alors une forme normale au col nilpotent E est invariante sous le changement*

$$X \longmapsto -X, t \longmapsto -t. \quad (3.3.30)$$

C'est-à-dire que le système est réversible et donc de codimension infinie.

Dans la prochaine sous-section, nous démontrerons cette conjecture.

3.3.2.1. Démonstration de la conjecture 3.3.2

Premièrement, rappelons-nous le système (3.1.7) étudié :

$$\begin{cases} \dot{x} = \rho x(1-x) - yp(x) - \lambda, \\ \dot{y} = y(-\delta + p(x)), \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases} \quad (3.3.31)$$

Ensuite, étudions la nature d'un col nilpotent. Tout d'abord, la partie linéaire d'un col nilpotent est semblable à une matrice de la forme : $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Nous voyons alors que $J^2 = 0$, d'où le terme « nilpotent ». La forme normale au voisinage d'un point nilpotent est :

$$\begin{cases} \dot{X} = Y, \\ \dot{Y} = AX^2 + BXY + \dots \end{cases} \quad (3.3.32)$$

Si $A \neq 0$, le point singulier est un *cusp*. Il a multiplicité 2 et il est de codimension ≥ 2 . Ici, puisque l'axe $y = 0$ est invariant, nous sommes nécessairement dans le cas $A = 0$ et il se trouve que nous avons alors la forme normale :

$$\begin{cases} \dot{X} = Y \\ \dot{Y} = X^3 + bXY + \epsilon_2 X^2 Y + \dots \end{cases} \quad (3.3.33)$$

Ensuite, on appelle ce point un col en raison de son portrait de phase.

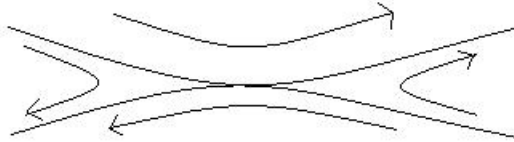


FIG. 3.5. Portrait de phase d'un col nilpotent

On retrouve quatre secteurs hyperboliques. Donc, topologiquement, nous avons un col.

Remarque 3.3.1. *Dans notre système, il y aura une droite invariante passant par le point singulier. On aura donc le portrait de phase de la figure 3.6.*

Une des manières d'avoir codimension ≥ 3 [10] est de satisfaire aux trois conditions suivantes :

- (1) Le déterminant du système est nul au point singulier.
- (2) La trace du système est nulle au point singulier.
- (3) $A = 0$, pour la forme normale (3.3.32).

Il découle, des deux premières conditions, que le système a deux valeurs propres nulles. Plus précisément, on sait que la codimension est égale à 3 si $\epsilon_2 \neq 0$ dans (3.3.33) et est supérieure à 3 si $\epsilon_2 = 0$. Ici, lors de notre analyse de ce col, nous verrons que :

$$\epsilon_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 4, \quad (3.3.34)$$

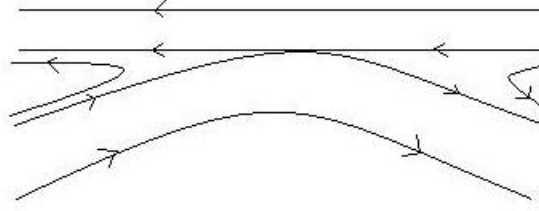


FIG. 3.6. Portrait de phase d'un col nilpotent avec une droite $y = 0$ invariante

et, dans la conjecture 3.3.2, l'hypothèse $\alpha = 4$ est donnée. Si nous nous attardons maintenant au système 3.1.7, nous voyons que nous sommes dans un cas particulier, car le point nilpotent est sur la droite invariante $y = 0$. Nous utilisons alors une autre forme pour la forme normale [26], soit :

$$\begin{cases} \dot{X} = Y + aX^2, \\ \dot{Y} = Y(X + \epsilon'_2 X^2 + \dots) \end{cases} \quad (3.3.35)$$

Nous utiliserons cette forme pour démontrer la conjecture 3.3.2. Nous voyons alors que $\epsilon'_2 = 0$ est une condition nécessaire pour que la forme normale soit réversible. Nous allons voir qu'il est possible de transformer le système (3.3.35) par un changement analytique de coordonnées sous la forme

$$\begin{cases} \dot{X} = Y + aX^2, \\ \dot{Y} = M(X)Y, \end{cases} \quad (3.3.36)$$

où $M(X)$ est impaire. Donc, demander $\alpha = 4$ dans l'énoncé de la conjecture revient à préciser que $\epsilon'_2 = 0$ dans (3.3.35). Ensuite, pour cette forme normale, la condition (3) est automatiquement vérifiée. Alors, nous n'avons que 2 conditions et donc le col nilpotent est, en pratique, de codimension 2 à cause de la contrainte que $y = 0$ est invariant. Mais, ici, on sait que :

$$\alpha = 4 \Rightarrow \epsilon'_2 = 0. \quad (3.3.37)$$

On obtient alors une codimension ≥ 3 , car nous avons rajouté une condition. Nous verrons, en fait, que nous avons une codimension infinie, car tous les coefficients devant les X^i , pour i pair, s'annulent. Ce qui correspond à une infinité de conditions.

Avant de passer à la preuve de la conjecture 3.3.2, prenons le temps de faire un lien entre la bifurcation de Hopf et celle du col nilpotent. En fait, le col nilpotent n'est rien d'autre qu'une situation limite de la bifurcation de Hopf, lorsque $x_0 = \frac{1}{2}$ et $y_0 = 0$. En effet, pour une bifurcation de Hopf en (x_0, y_0) , on retrouve des valeurs propres $\pm i\omega$. Soit D la linéarisé du système. Lorsqu'on passe à la limite $\omega \rightarrow 0$, on tend vers deux valeurs propres nulles, ce qu'on obtient dans le col nilpotent. On sait que pour la bifurcation de Hopf, on aurait une matrice jacobienne semblable à :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.3.38)$$

où $D = SJS^{-1}$. Lorsqu'on passe à la limite, S ne passe pas à la limite. Par contre, J est semblable à :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \omega^2 & 0 \end{pmatrix} = J', \quad (3.3.39)$$

où $D = TJ'T^{-1}$. Dans, ce cas, T passe à la limite. Dans la bifurcation de Hopf, nous avons comme jacobien du système en $(0, 0)$:

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} -f'(0) & -1 \\ g'(0) & l(0) \end{pmatrix}, \quad (3.3.40)$$

où nous avons que $l(0) = 0$ et $f'(0) = 0$, car la trace est nulle. Ce qui nous donnait alors :

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ g'(0) & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.3.41)$$

En calculant $g'(0)$, nous voyons que ce dernier s'annule en $x_0 = \frac{1}{2}$. À la limite, nous avons alors des valeurs propres nulles. Donc, pour faire la preuve de la conjecture 3.3.2, nous ne ferons qu'appliquer la preuve de la bifurcation de Hopf faite à la sous-section 3.3.1.1 dans la situation particulière où $x_0 = \frac{1}{2}$ et $y_0 = 0$.

DÉMONSTRATION. (Conjecture 3.3.2) Voyons premièrement que les deux conditions nécessaires à la bifurcation du col nilpotent énumérées au début de la sous-section découlent de la limite des conditions de la bifurcation de Hopf. Ces conditions étaient :

$$(1) \rho = 4\lambda,$$

$$(2) \delta = \frac{1}{\alpha+4}.$$

Regardons la condition (3.3.2) dans la sous-section 3.3.1.1 sur la bifurcation de Hopf, soit :

$$y_0 = \frac{\rho x_0(1-x_0) - \lambda}{p(x_0)}. \quad (3.3.42)$$

Si on précise que $x_0 = \frac{1}{2}$ et $y_0 = 0$, on retrouve la condition 1, soit :

$$\rho = 4\lambda. \quad (3.3.43)$$

Ensuite, regardons la condition (3.3.1) dans la sous-section 3.3.1.1 sur la bifurcation de Hopf, soit :

$$\frac{x_0^2}{1 + \alpha x_0^2} = \delta \Rightarrow x_0^2(1 - \alpha\delta) - 1 = 0. \quad (3.3.44)$$

Encore une fois, en précisant que $x_0 = \frac{1}{2}$ et $y_0 = 0$, on retrouve la condition (2). Nous avons alors nos deux conditions pour une bifurcation du col nilpotent. Nous remarquons également que la condition $\alpha = 4$, donnée dans l'énoncé de la conjecture, découle de la condition $L(1) = 0$, présente dans la démonstration de la bifurcation de Hopf. En effet,

$$L(1) = 0 \Leftrightarrow 1 - \alpha x_0^2 = 0, \quad (3.3.45)$$

et si $x_0 = \frac{1}{2}$ et $y_0 = 0$, on a que $\alpha = 4$.

Nous continuons alors la preuve en suivant le cheminement de la démonstration de la bifurcation de Hopf.

Nous effectuons la translation (3.3.3) à notre système. Cette fois, cette translation s'écrit comme :

$$\begin{aligned} x_1 &= x - \frac{1}{2}, \\ y_1 &= y, \end{aligned} \quad (3.3.46)$$

car nous sommes dans la situation où $x_0 = \frac{1}{2}$ et $y_0 = 0$. Cette translation nous permettra de trouver une forme normale respectant le fait que la droite $y=0$ est invariante. Après avoir ensuite divisé le système par $p(x) \neq 0$, nous avons le système de la forme :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -y_1 - f(x_1) = -y_1 - x^2 h(x_1), \\ \dot{y}_1 &= g(x_1) + l(x_1)y_1. \end{aligned} \quad (3.3.47)$$

En fait, on retrouve bien notre système pour le col nilpotent en précisant $x_0 = \frac{1}{2}$ et $y_0 = 0$ dans le système (3.3.5). On retrouve alors $l(x_1)$, $g(x_1)$ et $h(x_1)$ définies comme suit :

$$\begin{aligned} g(x_1) &\equiv 0, \\ l(x_1) &= \frac{2x_1(1+x_1)}{(1+2x_1)^2}, \\ h(x_1) &= \frac{32\lambda(1+2x_1+2x_1^2)}{(1+2x_1)^2}. \end{aligned} \quad (3.3.48)$$

On voit bien que ce sont les mêmes l, g et h que dans (3.3.14), mais avec les valeurs particulières de x_0 et y_0 . Nous proposons alors le même changement de variables (3.3.16) :

$$X = x_1 \sqrt{h(x_1)} = H(x_1), \quad (3.3.49)$$

$$T = \frac{t}{k(X)}, \text{ où } k(X) = (H^{-1})'(X) = \frac{1}{H'(H^{-1}(X))}. \quad (3.3.50)$$

Nous obtenons alors notre système sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dT} = -y_1 - X^2, \\ \frac{dy_1}{dT} = n(X)y_1. \end{cases} \quad (3.3.51)$$

Nous pouvons alors conclure en prenant la formule pour $n(X)$ donnée dans la proposition 3.3.2, soit :

$$n(X) = \frac{X x_0^2}{\rho(-1+4x_0) \sqrt{\frac{\rho-8\rho x_0+16\rho x_0^2+4X^2 x_0^2}{\rho(-1+4x_0)^2}}}, \quad (3.3.52)$$

et, en y précisant les valeurs particulières de x_0 et y_0 , on obtient alors :

$$n(X) = \frac{X}{4\rho\sqrt{1 + \frac{X^2}{\rho}}}. \quad (3.3.53)$$

Nous constatons donc que la fonction $n(X)$ est impaire, ce qui nous permet de conclure. Nous trouvons donc la forme normale suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -y_1 - X^2, \\ \dot{y}_1 &= \frac{X}{4\rho\sqrt{1 + \frac{X^2}{\rho}}}y_1. \end{aligned} \quad (3.3.54)$$

Il est alors possible de conclure que le système est réversible. \square

Nous avons donc utilisé la démonstration de la conjecture 3.3.1 sur la bifurcation de Hopf pour démontrer directement la conjecture 3.3.2. Cela complète la démonstration de cette conjecture.

On demandait également dans l'énoncé une codimension infinie. Regardons pourquoi cette partie de la conjecture est vraie. Effectivement, nous avons trouvé une forme normale pour notre col nilpotent de la forme :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - f(x), \\ \dot{y} &= yg(x). \end{aligned} \quad (3.3.55)$$

Nous l'avons ensuite ramenée à la forme :

$$\begin{aligned} \dot{X} &= -y - aX^2, \\ \dot{y} &= yg_1(X). \end{aligned} \quad (3.3.56)$$

Donc, nous avons que

$$\dot{y} = y(X + b_2X^2 + b_3X^3 + b_4X^4 + \dots) \quad (3.3.57)$$

Nous avons finalement prouvé que tous les b_{2j} , $j \geq 1$, sont nuls. Donc, nous avons une infinité de conditions pour notre bifurcation de col nilpotent, ce qui implique une codimension infinie.

CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous avons étudié le problème centre-foyer. Rappelons-nous que ce problème répond à la question :

Sous quelles conditions pouvons-nous conclure qu'un point singulier monodromique est un centre pour le système non-linéaire

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases} \quad (3.3.58)$$

où P, Q sont des fonctions polynomiales ?

Nous avons étudié deux méthodes permettant de répondre à cette question. La méthode de Darboux nous donne un moyen de trouver une intégrale première d'un champ de vecteurs polynomial en utilisant les courbes algébriques invariantes et leurs cofacteurs respectifs. Ensuite, la méthode de réversibilité algébrique permet de conclure sur la présence d'un centre au point singulier monodromique dans un système admettant une réversibilité algébrique. Nous avons montré que la réversibilité algébrique se généralise à la réversibilité analytique.

Ceci nous a alors mené vers la démonstration des deux conjectures laissées par Etoua dans [11], soit :

Conjecture 3.3.3. *Soit le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = \rho x(1-x) - yp(x) - \lambda, \\ \dot{y} = y(-\delta + p(x)), \\ x \geq 0, y \geq 0, \end{cases} \quad (3.3.59)$$

avec

$$p(x) = \frac{x^2}{\alpha x^2 + 1}. \quad (3.3.60)$$

Si la première constante de Lyapunov de ce système est nulle, $L(1) = 0$, alors le point singulier $E = (x_0, y_0)$ du système est un centre.

Conjecture 3.3.4. *Si $\alpha = 4$ et $\delta = \frac{1}{8}$, alors il existe une forme normale analytique du système (3.3.59) au col nilpotent $(\frac{1}{2}, 0)$ invariante sous le changement*

$$X \longmapsto -X, t \longmapsto -t. \quad (3.3.61)$$

C'est-à-dire que le système est analytiquement réversible et donc de codimension infinie.

Notre méthode de preuve de ces conjectures est originale et moderne. En effet, nous avons utilisé une encyclopédie de suites numériques et le logiciel Mathematica pour construire une vraie preuve rigoureuse. En résumé, nous avons trouvé une transformation analytique permettant de rendre le système réversible par rapport au temps. Ainsi, pour démontrer que le système transformé était réversible, nous avons calculé son développement en série de puissances. Nous avons ensuite utilisé une encyclopédie de suites numériques pour deviner le terme général de la série et Mathematica nous a donné la somme de la série. Nous avons conjecturé alors la forme exacte du système et nous avons finalement prouvé rigoureusement cette forme en réappliquant les étapes à l'inverse.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A.D. BAZYKIN, *Nonlinear Dynamics of Interacting Populations*, World Scientific Series on Nonlinear Science, Series A, Vol. 11, World Scientific Publishing Co.Pte.Ltd., 1998.
- [2] G. BONIN et J. LEGAULT, *Comparaison de la méthode des constantes de Lyapunov et de la bifurcation de Hopf*, Canadian Mathematical Bulletin, Vol. 31, n° 2, 200-209, juin 1988.
- [3] F. BRAUER et A.C. SOUDACK, *Coexistence Properties of some Predator-Prey Systems under Constant Rate Harvesting and Stocking*, J.Math.Biol., 12, 101-114, 1981.
- [4] F. BRAUER et A.C. SOUDACK, *Stability Regions in Predator-Prey Systems with Constant Rate Prey Harvesting*, J.Math.Biol., 8, 55-71, 1979.
- [5] H.W. BROER, V. NAUDOT, R. ROUSSARIE et K. SALEH, *Dynamics of a predator-prey model with non-monotonic response function*, Disc.Cont.Dyn.Sys., Vol.18, 221-251, 2007.
- [6] C. CHRISTOPHER et L. CHENGZHI, *Limit Cycles of Differential Equations*, Birkhäuser, 171 pages, 2000.
- [7] C.CHRISTOPHER, P.MARDESIC et C.ROUSSEAU, *Normalizable, integrable and linearizable saddle points in complex quadratic systems in \mathbb{C}^2* , Journal of Dynamical and Control Systems, 9, 311-363, 2003.
- [8] G.R. DAI et M. TANG, *Coexistence Region and Global Dynamics of a Harvested Predator-Prey System*, SIAM Journal of Applied Mathematics, Vol.58, No.1, 193-210, 1998 .
- [9] G.R. DAI et C.X. XU, *Constant Rate Predator Harvested Predator-Prey System with Holling-type I Functional Response*, Acta Math.Sci., Vol.14, 134-144, 1994.
- [10] F. DUMORTIER, R. ROUSSARIE et J. SOTOMAYOR, *Generic 3-parameter Families of Planar Vector Fields, Unfolding of Saddle, Focus and Elliptic Singularities with Nilpotent Linear Parts*. In Lecture Notes in Math., Vol.1480, 1-164, Spriger-Verlag, New York, 1991.

- [11] R. ETOUA and C. ROUSSEAU, *Bifurcation Analysis of a Generalized Gause Model with Prey Harvesting and a Generalized Holling Response Function of Type III*, J. Differential Equations, 2316-2356, 2010.
- [12] R. ETOUA, *Étude d'un modèle de Gauss généralisé avec récoltes de proies et fonction de Holling type III généralisée*, Thèse, Université de Montréal, 172 pages, 2008.
- [13] H.I. FREEDMAN et G.S.K. WOLKOWICZ, *Predator-Prey Systems with Group Defence : The Paradox of Enrichment Revisited*, Bulletin of Mathematical Biology, Vol.48, No.5/6, 493-508, 1986.
- [14] H.I. FREEDMAN et G.S.K. WOLKOWICZ, *Stability Analysis of a Predator-Prey System with Mutual Interference and Density-Dependent Death Rates*, Bulletin of Mathematical Biology, 41, 67-78, 1979.
- [15] J. GUCKENHEIMER et P. HOLMES, *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*, Springer, 459 pages, 2002.
- [16] Y. LAMONTAGNE, C. COUTU et C. ROUSSEAU, *Bifurcation Analysis of a Predator-Prey System with Generalised Holling Type III Function Response*, Journal of Dynamics and Differential Equations, Vol.20, No.3, 535-571, 2008.
- [17] A. LOTKA, *Elements of Physical Biology*, Williams and Wilkins Co, Baltimore, 1925.
- [18] L. PERKO, *Differential equations and dynamical systems*, Second Edition, Springer, 519 pages, 1996.
- [19] V.G. ROMANOVSKI, D.S. SHAFER, *The center and cyclicity problems*, Birkhauser, 330 pages, 2009.
- [20] SHI-SHONGLING, *A Method of Constructing Cycles without Contact around Weak Focus*, J.Differential Equations 41, 301-312, 1981.
- [21] The On-line Encyclopedia of Integer Sequences, [http ://www.research.att.com/njas/sequences/](http://www.research.att.com/njas/sequences/)
- [22] V. VOLTERRA, *Fluctuations in the Abundance of Species Considered Mathematically*, « Nature », Vol.CXVIII, 558-560, 1926.
- [23] G.S.K. WOLKOWICZ, *Bifurcation Analysis of a Predator-Prey System Involving Group Defence*, SIAM Journal of Applied Mathematics, Vol.48, No.3, 592-606, 1988.

- [24] D. XIAO et S. RUAN, *Global Analysis in Predator-Prey System with Nonmonotonic Functional Response*, SIAM Journal of Applied Mathematics, Vol.61, No.4, 1445-1472, 2001.
- [25] H. ZHU, S.A. CAMPBELL et G.S.K. WOLKOWICZ, *Bifurcations Analysis of a Predator-Prey System with Nonmonotonic Functional Response*, SIAM Journal of Applied Mathematics, Vol.63, No.2, 636-682, 2002.
- [26] H.ZHU et C.ROUSSEAU, *Finite Cyclicity of Graphics with Nilpotent Singularity of Saddle or Elliptic Type*, J.Differential Equations 178, 325-436, 2002.
- [27] H. ŻOŁĄDEK, *Quadratic systems with centers and their perturbations*, J.Differential Equations 109, 223-273, 1994.