

Université de Montréal

Rapport de recherche

Le pouvoir de prévisibilité de la volatilité retardée survit-il à des corrections du biais ?

Rédigé par :  
Adrienne Gagnon

Dirigé par :  
Sílvia Gonçalves

Département de sciences économiques  
Faculté des arts et des sciences

© Adrienne Gagnon, avril 2011

## Résumé

Dans un contexte de régressions de prédiction sur de longs horizons, nous appliquons une méthode de correction du biais : le *jackknife*. Cette méthode est facile à appliquer et ne repose pas sur des hypothèses rigides concernant le processus générateur de données. Les conclusions de prévisibilité du rendement excédentaire par la volatilité réalisée retardée, par moindres carrés ordinaires (MCO) sur de longs horizons (supérieurs à 72 mois), restent valides suite à la correction du biais par le *jackknife*.

Mots clefs : Régression de prédiction, correction du biais, *jackknife*.

## **Abstract**

With stock return predictability regressions on lagged realized volatility the jackknife confirms the ordinary least squares (OLS) predictability results on long horizons. OLS results show that excess return is correlated with past market variance for horizon over 72 months. The jackknife produces bias reduced estimators and can be applied to overlapping observations implied by aggregation and long horizon regressions. This method does not rely on any strong specific assumptions regarding the data generating process.

**Keywords :** Predictive regression, bias correction, jackknife.

## Table des matières

RESUME	2
ABSTRACT	3
LISTE DES TABLEAUX	5
LISTE DES FIGURES	6
<b>1- INTRODUCTION</b>	<b>7</b>
<b>2- BIAIS ET INFÉRENCE</b>	<b>10</b>
2.1 BIAIS EN ÉCHANTILLON FINI	11
2.2 IMPACT SUR L'INFÉRENCE	12
2.3 <i>JACKKNIFE</i>	13
MÉTHODE GÉNÉRALE : <i>JACKKNIFE</i> PAR GROUPE	14
RÉDUCTION DU BIAIS PAR L'ESTIMATEUR <i>JACKKNIFE</i>	14
RÉDUCTION DU BIAIS ET AUGMENTATION DE LA VARIANCE	15
<b>3- MÉTHODOLOGIE</b>	<b>16</b>
3.1 - MOINDRES CARRÉS ORDINAIRES	16
CHOIX DE L'ÉCART TYPE	16
3.2- <i>JACKKNIFE</i>	17
NOTATION	17
CHOIX DU NOMBRE DE SOUS-ÉCHANTILLONS	18
VARIANCE DE L'ESTIMATEUR <i>JACKKNIFE</i>	18
<b>4- DONNÉES</b>	<b>19</b>
<b>5- ANALYSE EMPIRIQUE</b>	<b>21</b>
5.1 RÉSULTATS EN ÉCHANTILLON	21
LES INTERCEPTES	22
PÉRIODE 1952 - 2006	23
PÉRIODE 1952 - 2009	23
RÉSULTATS <i>JACKKNIFE</i>	23
VARIANCE DE L'ESTIMATEUR <i>JACKKNIFE</i>	24
5.2 RÉSULTATS HORS ÉCHANTILLON	25
5.3 ROBUSTESSE	26
CHOIX DE LA PÉRIODE	26
CHOIX DE L'INDICE	27
CHOIX DU RETARD	27
IMPACT 2007-2009	27
<b>6- CONCLUSION</b>	<b>28</b>
<b>ANNEXES</b>	<b>44</b>
EXPRESSION DU BIAIS D'ORDRE 1/T DE STAMBAUGH (1999)	45
CALCUL DE LA VARIANCE DE L'ESTIMATEUR OBTENU PAR <i>JACKKNIFE</i>	47
BIBLIOGRAPHIE	48

**Liste des tableaux**

- Tableau I: Statistiques descriptives du rendement excédentaire et de la volatilité réalisée pour différentes périodes.
- Tableau II: Estimés MCO pour différents niveaux d'agrégation.
- Tableau III: Coefficients MCO et *jackknife* estimés pour différents niveaux d'agrégation.
- Tableau IV: Interceptes MCO et *jackknife* estimés pour différents niveaux d'agrégation.
- Tableau V: Résultats hors échantillon.  
Estimation janvier 1952 à décembre 2006. Prédiction janvier 2007 à décembre 2009.
- Tableau VI: Résultats hors échantillon.  
Estimation janvier 1952 à décembre 1999. Prédiction janvier 2000 à décembre 2009.

## Liste des figures

- Figure 1 : Évolution du rendement excédentaire dans le temps.
- Figure 2 : Évolution de la volatilité réalisée dans le temps.
- Figure 3 : Rendement excédentaire en fonction de la volatilité réalisée pour différents niveaux d'agrégation, données de 1952 à 2009.
- Figure 4 : Estimé des coefficients pour différents niveaux d'agrégation, données de 1952 à 2006.
- Figure 5 : Estimé des coefficients pour différents niveaux d'agrégation, données de 1952 à 2009.
- Figure 6 : Comparatif des estimés des coefficients, obtenus par MCO et *jackknife*, pour différents niveaux d'agrégation, données de 1952 à 2009.
- Figure 7 : Comparatif des estimés des coefficients, obtenus par MCO et *jackknife*, pour différents niveaux d'agrégation, données de 1952 à 2009.
- Figure 8 : Estimé des interceptes pour différents niveaux d'agrégation, données de 1952 à 2006.
- Figure 9 : Estimé des interceptes pour différents niveaux d'agrégation, données de 1952 à 2009.
- Figure 10 : Comparatif des estimés des interceptes, obtenus par MCO et *jackknife*, pour différents niveaux d'agrégation, données de 1952 à 2009.
- Figure 11: Comparatif des estimés des interceptes, obtenus par MCO et *jackknife*, pour différents niveaux d'agrégation, données de 1952 à 2009.

## 1- Introduction

Pour un indice boursier donné, une volatilité plus élevée implique-t-elle un rendement supérieur? Cette question a fait l'objet d'une étude récente par Bandi et Perron (2008). Selon ces auteurs, le rendement excédentaire d'actifs financiers est corrélé avec la variance réalisée retardée. Cette dépendance est faible à court terme et augmente à long terme.

Pour étudier la prévisibilité des rendements excédentaires, Bandi et Perron (2008) considèrent des régressions du type :

$$R_{t,t+h} = \alpha_h + \beta_h \sigma_{t-h,t}^2 + \varepsilon_{t,t+h} \quad (1)$$

où  $R_{t,t+h}$  correspond au rendement excédentaire entre le mois  $t$  et  $t+h$ ,  $\sigma_{t-h,t}^2$  la variance réalisée sommée sur  $h$  mois passés, et  $\varepsilon$  l'erreur de prédiction. Les horizons de prédiction  $h$  vont de 1 à 120 mois.

Une méthode de rééchantillonnage, le *jackknife*, a été appliquée par Chiquoine et Hjalmarsson (2009) dans un contexte de prédiction avec chevauchement des observations. Le *jackknife* est utilisé comme technique de correction du biais des estimateurs. L'estimateur *jackknife*<sup>1</sup> est basé sur une combinaison linéaire d'estimateurs obtenus par la méthode des moindres carrés ordinaires (MCO) pour un petit nombre de sous-échantillons.

Wolf (2000) fait remarquer que les régressions de prédiction font face à plusieurs problèmes statistiques, il y a de fortes structures de dépendance entre les données et les

---

<sup>1</sup> Nous entendons par estimateur *jackknife* l'estimateur obtenu suite à l'application de la technique *jackknife*. Il s'agit donc d'une combinaison d'estimateurs MCO.

coefficients sont biaisés. Ces problèmes tendent à rendre les conclusions contre la non-prévisibilité plus significatives qu'elles ne le sont en réalité.

Or, comme les horizons de prédiction supérieurs à un mois impliquent les sommations des variables, les erreurs sont autocorrélées et, typiquement, en échantillon fini, les MCO produiront des estimateurs biaisés, qui sont surestimés. Nelson et Kim (1993) ont montré que les régressions de prédiction sont sensibles à deux types de biais en échantillon fini. Le coefficient estimé est biaisé si le prédicteur est endogène et les écarts types sont sous estimés dans le cas des séries temporelles. Les tests d'hypothèse de prévisibilité du rendement excédentaire reposent sur une statistique  $t$ , un ratio composé du coefficient au numérateur et de l'écart type au dénominateur. Le coefficient étant surestimé par les MCO, nous pourrions conclure à tort la prévisibilité du rendement excédentaire.

Le but de ce rapport est de réévaluer la prédictibilité des rendements excédentaires par la volatilité réalisée passée lorsque le biais des estimateurs MCO est corrigé par une méthode de *jackknife*.

Chiquoine et Hjalmarsson (2009) ont montré que le *jackknife*, comme méthode de correction du biais, peut être appliqué dans le contexte des régressions de prédiction, avec chevauchement des observations. Par des simulations de Monte Carlo, ils ont démontré que le *jackknife* fonctionnait en échantillon fini et qu'il éliminait virtuellement tout le biais des estimateurs MCO.

Simplement, la méthode du *jackknife* utilisée ici consiste à combiner un estimateur obtenu par MCO sur l'échantillon entier avec une moyenne d'estimateurs obtenus à partir de sous-échantillons (Chambers, 2010). L'écart type de l'estimateur obtenu par *jackknife* est



estimé par *bootstrap* par bloc afin de conserver la structure de dépendance entre les observations.

Les régressions du rendement excédentaire sur la volatilité réalisée retardée effectuées par Bandi et Perron (2008) ont été reproduites en utilisant un indice boursier différent et pour ensuite appliquer une méthode de correction du biais, le *jackknife*.

Les résultats obtenus pour la période 1952-2006 confirment les conclusions de Bandi et Perron (2008) impliquant, à long terme, un dilemme entre rendement et risque. Les relations obtenues sont positives et significatives. La significativité et la valeur du coefficient augmentent avec l'horizon de prédiction, pour les valeurs de  $h$  supérieures à 72 mois. En deçà de ces horizons, les coefficients estimés ne sont pas significatifs.

Par ailleurs, sur une période plus longue incluant la crise financière de 2008 et s'étendant jusqu'en décembre 2009, les coefficients sont inférieurs et ne sont significatifs qu'à partir de 96 mois. Les résultats obtenus suite à l'application du *jackknife*, qui produisent des coefficients corrigés pour le biais, valident les conclusions obtenues par MCO pour les deux périodes. À une exception près, les coefficients *jackknife* et les coefficients MCO sont significatifs pour les mêmes niveaux d'agrégation.

Dans un premier temps il sera question de la problématique du biais des estimateurs, de ses impacts sur l'inférence et le *jackknife* comme technique de correction du biais. Ensuite la méthodologie utilisée, principalement, la technique du *jackknife* sera traitée. Suivront les données utilisées et finalement les résultats empiriques obtenus.

## 2- Biais et inférence

Étant donné une série d'observations,  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , se pose le problème de l'estimation. Une fonction des observations,  $t_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , servira d'estimateur à paramètre  $\theta$  inconnu. Quenouille (1956) pose les propriétés désirées d'un estimateur  $t_n$ . Il doit être efficace, l'inverse de la variance de l'estimateur fera office de mesure d'efficacité. Toute l'information contenue dans les données doit être utilisée et, si c'est le cas, l'estimateur sera suffisant. L'estimateur doit être convergent  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n \rightarrow \theta$ . Finalement, l'estimateur devrait être non biaisé :  $E(t_n) = \theta$ .

Étant donné une relation du type  $y_t = \alpha + \beta x_{t-1} + u_t$ , l'absence de biais pour un estimateur repose sur l'hypothèse d'exogénéité stricte :  $E(u_t | X) = 0 \quad \forall t$ . Cette hypothèse, qui rend impossible l'utilisation de variable retardée, est beaucoup trop contraignante dans le contexte présent des séries temporelles, l'hypothèse d'exogénéité faible  $E(u_t | x_t) = 0$ , qui permet d'obtenir un estimateur biaisé en échantillon fini mais convergent asymptotiquement, est mieux adaptée aux séries temporelles.

L'estimation des paramètres de l'équation 1 peut facilement s'effectuer par MCO. Par ailleurs, tester les hypothèses nulles est non trivial pour plusieurs raisons. Dans les cas où les erreurs sont autocorrélées dans les régressions sur de longs horizons, les écarts types usuels ne sont pas valides et typiquement, l'estimateur obtenu est biaisé.

## 2.1 Biais en échantillon fini

Stambaugh (1999) a étudié extensivement le biais en échantillon fini. Nous reprenons ses propositions principales quant à l'expression du biais MCO.

L'estimation en échantillon fini dans le contexte de régressions temporelles complique l'inférence Stambaugh (1999). Il montre que dans un contexte très simple, où des tirages de deux observations  $(x_0, y_1)$  et  $(x_1, y_2)$  sont répétés, le coefficient, simplement la pente de la ligne rejoignant ces deux points, sera biaisé. Il définit d'abord  $y_t = \alpha + \beta x_{t-1} + u_t$  et  $x_t = \theta + \rho x_{t-1} + v_t$  et impose  $\beta = 0$ ,  $\rho \approx 1$  et  $\sigma_{uv} < 0$ . Stambaugh (1999) considère d'abord les échantillons où  $x_1 > x_0$ . En moyenne, dans ces échantillons, ceci implique que  $v_1 > 0$  ainsi,  $u_1$  est, en moyenne, négatif étant donné que  $\sigma_{uv} < 0$ . La pente,  $\hat{\beta}$  sera positive puisque  $y_2 = E(y_t)$  ( $\beta = 0$ ),  $y_1 < E(y_t)$  et  $x_1 > x_0$  et  $y_2 > y_1$ . Alors si  $\hat{\beta} > 0$ , le biais est positif. Maintenant, dans les échantillons où  $x_1 < x_0$ , si  $y_2 = E(y_t)$ ,  $y_1 > E(y_t)$  et puisque  $\sigma_{uv} < 0$  implique que  $u_1$  est en moyenne positif si  $v_1$  est négatif.  $\hat{\beta}$  est encore positif dans ces échantillons :  $x_1 < x_0$  et  $y_2 < y_1$ . Le biais est donc une fonction du coefficient de la première autocorrélation,  $\rho$  et de la covariance des erreurs.

Suivant Stambaugh (1999), étant donné  $y_t = \alpha + \beta x_{t-1} + u_t$  où  $x_t = \theta + \rho x_{t-1} + v_t$ , une correction typique du biais du coefficient  $\beta$  obtenu par MCO est d'ordre  $O(T^{-1})$  et peut s'écrire :

$$E(\hat{\beta}_{MCO} - \beta) = -\frac{\sigma_{uv}}{\sigma_v^2} E(\hat{\rho} - \rho) + O(T^{-2}) \quad (2)$$

Kendall (1954) a développé une approximation du biais d'ordre  $O(T^{-1})$ , l'expression

$$E(\hat{\rho} - \rho) \text{ peut être remplacée par } -\frac{1+3\rho}{T} \quad (3).$$

Ainsi, le biais (MCO) d'ordre  $O(T^{-1})$ , tel que démontré par Stambaugh (1999), s'exprime comme une fonction de la covariance entre  $u$  et  $v$ , de la variance de  $v$  et de la première autocorrélation. La preuve complète, développée par Stambaugh (1999), est présentée en annexe.

## 2.2 Impact sur l'inférence

En échantillon fini, dans les séries temporelles, non seulement l'estimateur du coefficient est biaisé, mais les écarts types traditionnels le sont également. Le biais des coefficients et des écarts types peut fausser les conclusions des tests d'hypothèses. Ces deux biais font en sorte que la statistique  $t$  est plus grande donc, l'inférence usuelle pourrait, à tort, indiquer la prévisibilité. Les rendements excédentaires sembleraient prévisibles alors qu'ils ne le sont pas nécessairement en réalité. La statistique  $t$  sur laquelle se base le résultat de l'inférence est gonflée par un écart type sous-estimé (au dénominateur) et est biaisée par un coefficient surestimé (numérateur).

Si les MCO ont tendance à surestimer les coefficients, la correction du biais par la méthode de *jackknife* devrait produire des estimateurs plus faibles. Ceci pourrait avoir un impact sur les résultats d'inférence.

### 2.3 Jackknife

Le *jackknife*, introduit par Quenouille (1956) est utilisé entre autres pour corriger le biais des estimateurs : il permet d'éliminer le biais d'ordre  $O(T^{-1})$ . Initialement, Quenouille a proposé un estimateur du biais qui, une fois ajouté à un estimateur obtenu par une méthode quelconque, permet de produire un estimateur avec une correction du biais.

Pour obtenir un estimateur du biais, Quenouille supprimait à chaque fois une observation de l'échantillon et recalculait l'estimateur sur les observations restantes. Shao et Tu (1996) posent  $T_n = T_n(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , un estimateur d'un paramètre  $\theta$  inconnu. Le biais de  $T_n$  est défini  $\text{biais}(T_n) = E(T_n) - \theta$ . De plus,  $T_{n-1,i} = T_{n-1}(X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n)$  un estimateur du paramètre  $\theta$  basé sur  $n-1$  observations. L'estimateur du biais de Quenouille est  $b_{jack} = (n-1)(\bar{T}_n - T_n)$  où  $\bar{T}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n T_{n-1,i}$ . L'estimateur  $T_{Jack}$  est l'estimateur réduit du biais et s'écrit :  $T_{Jack} = T_n - b_{jack} = nT_n - (n-1)\bar{T}_n$ .

Ainsi, la technique *jackknife* crée une série de statistiques en générant, à partir des données, la même statistique en laissant une observation de côté. Avec la série de statistiques un estimateur « moyen » est obtenu et connu sous le nom d'estimateur *jackknife*.

Chiquoine et Hjalmarsson (2009) ont proposé le *jackknife* comme méthode de correction du biais dans le contexte de régressions de prévisibilité. Cette méthode peut être appliquée aux régressions sur des horizons longs avec chevauchement. Cette procédure ne nécessite aucune hypothèse sur le processus générateur de données et repose donc sur des hypothèses souples, moins susceptibles d'être violées (Shao et Tu, 1996).

### Méthode générale : *Jackknife* par groupe

Le *jackknife* par groupe, utilisé par Chiquoine et Hjalmarsson (2009), consiste à diviser un échantillon de  $T$  observations en  $m$  sous-échantillons de taille  $l$  pour ensuite calculer les estimateurs par moindres carrés de chaque sous-échantillon. L'estimateur *jackknife* ainsi obtenu consiste en une moyenne pondérée de l'estimateur obtenu à partir de l'échantillon entier et des sous-échantillons créés. Il est basé sur  $m$  estimateurs de  $\beta$ , chacun d'eux étant calculé à partir d'un sous-échantillon de taille  $T/m$ . Le choix de  $m$  détermine l'expression spécifique de l'estimateur *jackknife*.

$$\hat{\theta}_{jack} = \frac{m}{m-1} \hat{\theta}_T - \frac{1}{m(m-1)} \sum_{i=1}^m \hat{\theta}_{li} \quad (4)$$

$\hat{\theta}_T$  Estimateur MCO obtenu avec les  $T$  observations de l'échantillon.

$\hat{\theta}_{li}$  Estimateur MCO obtenu pour chacun des sous-échantillons ( $i=1, \dots, m$ ) basé sur  $l$  observations.

### Réduction du biais par l'estimateur *jackknife*

Sous des conditions générales qui assurent que le biais des estimateurs  $\hat{\theta}_T$  et  $\hat{\theta}_{li}$  puisse être présenté comme une série asymptotique de puissance d'ordre  $O(T^{-1})$ , le biais de l'estimateur *jackknife* est d'ordre  $O(T^{-2})$  plutôt que  $O(T^{-1})$  (Phillips et Yu, 2005).

$$E(\hat{\beta}_{MCO} - \beta) = -\frac{\sigma_{uv}}{\sigma_v^2} \frac{1+3\rho}{T} + O(T^{-2})$$

$$E(\hat{\beta}_{jack} - \beta) = O(T^{-2}) \quad (5)$$

Le terme  $O(T^{-1})$  disparaît lorsque le biais est corrigé avec une méthode de *jackknife* et bien que le biais soit fonction de tous les termes de l'expansion, le biais est néanmoins réduit

par la méthode de *jackknife*. Phillips et Yu (2005) fournissent la démonstration de la réduction du biais que permet l'utilisation d'une technique de *jackknife*.

### **Réduction du biais et augmentation de la variance**

Dans une étude sur les prix d'obligations, Phillip et Yu (2005) ont montré que l'utilisation de plusieurs sous-échantillons permet de réduire le biais et l'erreur moyenne carrée. L'avantage de l'estimateur *jackknife*, quant à la réduction du biais, ne serait pas atténué par une diminution de l'efficacité de l'estimateur.

Par des expériences de Monte Carlo, Chiquoine et Hjalmarsson (2009) ont aussi montré qu'il est possible de réduire la variance de l'estimateur *jackknife* en utilisant un plus grand nombre de sous-échantillons. Leurs conclusions confirment l'existence d'un dilemme entre la réduction du biais (souvent substantielle) et une augmentation (marginale) de la dispersion des estimateurs. Dans ce sens, Chiquoine et Hjalmarsson (2009) partagent les conclusions de Philip et Yu (2005) : il est possible de réduire la variabilité de l'estimateur obtenu par *jackknife* (avec un léger compromis au niveau de la réduction du biais) en utilisant un plus grand nombre de sous-échantillons pour construire l'estimateur.

### 3- Méthodologie

Dans un premier temps, les régressions simples de Bandi et Perron (2008) sont reproduites en utilisant un indice boursier différent (NYSE-Amex-Nasdaq). Ensuite, une technique de *jackknife* est appliquée dans le but d'obtenir un estimateur corrigé pour le biais.

#### 3.1 – Moindres carrés ordinaires

La régression linéaire simple  $R_{t,t+h} = \alpha_h + \beta_h \sigma_{t-h,t}^2 + \varepsilon_{t,t+h}$  a été répétée pour des horizons (h) de 1 à 120 mois. Les coefficients sont estimés par moindres carrés ordinaires. La volatilité réalisée retardée ( $\sigma_{t-h,t}^2$ ) est utilisée comme variable explicative du rendement excédentaire ( $R_{t,t+h}$ ).

#### Choix de l'écart type

Ang et Bekaert (2006) ont remarqué que l'inférence statistique dans le cadre de régressions de long terme dépend largement du choix des écarts types. Pour les régressions avec de longs horizons ( $h > 1$ ), le chevauchement des observations complique l'inférence : les écarts types usuels ne sont plus valides.

Pour pallier ce problème, une approche HAC, robuste à l'hétéroscédasticité et à l'autocorrélation des erreurs, est utilisée. Les erreurs de Newey-West incluent, dans le calcul de la variance estimée, un certain nombre d'autocovariances. Typiquement, un nombre d'autocovariance correspondant à la longueur de l'horizon a été imposé dans le calcul de la



variance. Toutes les statistiques t et écarts types obtenus seront considérés robustes à la présence d'hétéroscédasticité et d'autocorrélation des erreurs.

### 3.2- Jackknife

En détail, les formules suivantes sont utilisées pour le calcul des estimateurs *jackknife*. Celles-ci seront reproduites pour les horizons 1 à 120 mois pour les deux périodes considérées.

Expression des estimateurs *jackknife* en fonction du nombre de sous-échantillons ( $m$ ) considérés :

$$m = 2 \quad \hat{\beta}_{\text{jack}2} = 2\hat{\beta}_T - \frac{1}{2}(\hat{\beta}_{T/2,1} + \hat{\beta}_{T/2,2}) \quad (6)$$

$$m = 3 \quad \hat{\beta}_{\text{jack}3} = \frac{3}{2}\hat{\beta}_T - \frac{1}{6}(\hat{\beta}_{T/3,1} + \hat{\beta}_{T/3,2} + \hat{\beta}_{T/3,3}) \quad (7)$$

$$m = 4 \quad \hat{\beta}_{\text{jack}4} = \frac{4}{3}\hat{\beta}_T - \frac{1}{12}(\hat{\beta}_{T/4,1} + \hat{\beta}_{T/4,2} + \hat{\beta}_{T/4,3} + \hat{\beta}_{T/4,4}) \quad (8)$$

#### Notation

Les coefficients estimés notés  $\hat{\beta}_T$  (ou  $\hat{\beta}_{MCO}$ ) sont estimés par MCO sur les T observations de l'échantillon. Les coefficients estimés notés  $\hat{\beta}_{T/m,i}$  pour  $m = 2, 3, 4$  (le nombre de sous-échantillons) et  $i = 1, 2, 3, 4$  (la demie, tiers ou quart d'observations utilisées) correspondent aux estimateurs obtenus dans le but de déterminer l'estimateur *jackknife*.

### **Choix du nombre de sous-échantillons**

Chiquoine et Hjalmarrsson (2009) ont obtenu de bons résultats avec  $m=2$  qui permet d'éliminer une bonne partie du biais. Des simulations de Monte Carlo ont montré que le choix de  $m=3$  ou  $m=4$  permet de réduire la variance de l'estimateur sans augmenter substantiellement le biais. Le choix de  $m$  pose le dilemme classique d'une réduction du biais au coût d'une augmentation de la variance.

### **Variance de l'estimateur *jackknife***

La variance des estimateurs obtenus par *jackknife* est estimée par *moving block bootstrap* (MBB). Une procédure introduite par Künsch (1989). Le MBB est une extension de la procédure *bootstrap* proposée par Efron (1979). Le *bootstrap* standard est un cas spécial où le bloc est de taille unitaire. L'idée de cette méthode est de construire des rééchantillons de taille  $l$  en sélectionnant aléatoirement des blocs de longueur  $b$  à partir de l'échantillon original. Pour conserver la structure de dépendance entre les données, les blocs sont de longueur  $b=h$  (horizon).

Le MBB permettra de générer plusieurs estimateurs *jackknife*, à partir desquels la variance de l'estimateur obtenu par la méthode *jackknife* sera calculée. Fitzenberger (1997) a utilisé la procédure de Künsch (1989), les étapes de cette procédure de *bootstrap* par bloc sont présentées en annexe.

## 4- Données

À l'instar de Bandi et Perron (2008), la régression du rendement excédentaire sur la variance réalisée retardée sur des horizons (h) allant de 1 à 120 mois est considérée (équation 1). Ils ont montré que le rendement excédentaire (d'un indice boursier NYSE-Amex) peut être expliqué par la variance réalisée retardée pour de longs horizons (à partir de 72 mois) sur la période de janvier 1952 à décembre 2006. Le tableau I présente les statistiques descriptives des données utilisées sur différentes périodes. Les figures 1 et 2 montrent l'évolution des deux variables utilisées dans le temps.

Telles que définies par Bandi et Perron (2008), les variables utilisées sont les suivantes et ont été téléchargées du CRSP, à partir de juillet 1926 jusqu'à décembre 2009 :

$$R_{t,t+1} = \sum_{j=1}^{n_t} \left( r_{t+\frac{j}{n_t}} - r_{t+\frac{j}{n_t}}^f \right)$$

$$R_{t,t+h} = \sum_{j=1}^h R_{t,t+i-1,t+i}$$

$$\sigma_{t,t+1}^2 = \sum_{j=1}^{n_t} r_{t+\frac{j}{n_t}}^2$$

$$\sigma_{t,t+h}^2 = \sum_{i=1}^h \sigma_{t+i-1,t+i}^2$$

- r est le rendement sur l'actif risqué, NYSE/Amex/Nasdaq, index à valeur pondérée avec dividendes;
- $r^f$  est le rendement sur un actif sans risque, ici le taux d'intérêt sur des bons du Trésor américain;
- $n_t$  est le nombre de jours ouvrables;
- $\sigma_{t,t+h}^2$  est un estimateur de  $\langle \log p \rangle_{t,t+h}$ . Cet estimateur, proposé par Bandi et Perron (2008), et justifié par l'utilisation de données quotidiennes dans la construction de cet

estimateur de la variance réalisée de long terme. Il doit capturer les variations des rendements sur le marché.

Dans les régressions deux variables sont utilisées : le rendement excédentaire et la volatilité réalisée. La première est obtenue par la différence entre le rendement d'un actif avec risque et le rendement d'un actif jugé sans risque.

L'utilisation d'horizons longs implique la sommation des variables. Pour un horizon de  $h$  périodes, le rendement excédentaire est sommé sur  $h$  périodes et la volatilité réalisée retardée est sommée sur  $h$  périodes passées.

Les sommations sur des horizons supérieurs à un mois et le fait que le retard de la variance réalisée soit utilisé comme variable explicative impliquent la perte d'observations. Autrement dit, le choix de cette méthode, c'est-à-dire les régressions sur de longs horizons et l'utilisation d'une variable retardée, implique que jusqu'à dix années d'information au début et à la fin de l'échantillon sont volontairement mises de côté.

## 5- Analyse empirique

Les estimateurs MCO et *jackknife* sont calculés à partir de données financières utilisant le rendement excédentaire comme variable dépendante et la volatilité réalisée retardée comme régresseur sur des horizons longs, tel que proposé par Bandi et Perron (2008).

Deux périodes ont été retenues : 1952-2006 et 1952-2009. La première période à des fins comparatives : elle permet une comparaison directe des résultats des régressions avec ceux obtenus par Bandi et Perron (2008). La seconde permet un aperçu de l'impact de la crise financière de 2008 et montre également l'importance du choix de la période et son impact sur les résultats d'inférence.

### 5.1 Résultats en échantillon

La figure 3 représente la corrélation entre le rendement excédentaire et la volatilité réalisée passée pour différentes périodes (1, 12, 60 et 120 mois). Pour un horizon de 1 mois, aucune relation évidente n'est révélée, il n'y a aucune corrélation claire entre les données. Pour des horizons plus longs, la corrélation entre ces données apparaît sur les figures subséquentes. Puisque le *jackknife* est utilisé comme méthode de correction du biais, il semblait pertinent de présenter les données sur les graphiques par groupe, chacun correspondant aux sous-échantillons utilisés pour calculer l'estimateur *jackknife*.

Les figures 4 (pour la période 1952-2006) et 5 (1952-2009) présentent, dans la première partie, les valeurs des coefficients obtenus par MCO (équation 1) et ensuite les estimateurs obtenus par *jackknife* (équations 6, 7 et 8) avec les bornes supérieures et

inférieures d'un intervalle de confiance de 95%. Les analyses sommaires visualisées sur les graphiques seront confirmées par les résultats des régressions linéaires. Pour des horizons inférieurs à 60 mois, aucune dépendance claire n'apparaît, contrairement aux horizons de long terme où la dépendance est évidente et significative statistiquement.

Ces résultats vont dans le même sens que ceux obtenus par Bandi et Perron (2008). Les figures représentant des horizons longs révèlent une dépendance de long terme entre le rendement excédentaire et la volatilité réalisée retardée.

### **Les interceptes**

Bien que l'analyse se concentre autour des valeurs estimées des coefficients, les valeurs estimées des interceptes sont également présentées au tableau IV et représentées aux figures 8 à 11. Bandi et Perron (2008) obtenaient des estimateurs d'interceptes non significatifs, ils les ont ensuite contraints à zéro.

Pour la période 1952-2006, les valeurs des estimateurs obtenus par *jackknife* et par MCO avec l'indice boursier NYSE-Amex-Nasdaq sont significatifs pour la grande majorité des horizons bien qu'ils soient presque exclusivement compris entre -0,5 et 0,5.

Pour la seconde période, les valeurs des estimateurs (figures 10 et 11) sont similaires à celles de la première période quoique moins significatifs pour les horizons de long terme. Les figures 8 et 9 présentent les estimateurs pour chaque période et chaque méthode. Peu importe la méthode utilisée, les estimateurs des interceptes ( $\alpha$ ) obtenus sont beaucoup moins variables que ceux obtenus pour le coefficient de la pente ( $\beta$ ).

### **Période 1952 - 2006**

Les résultats<sup>2</sup>, obtenus par moindres carrés ordinaires, appuient les conclusions de Bandi et Perron (2008). Les coefficients sont dans le même ordre de grandeur pour la première période se terminant en 2006 : les résultats sont significatifs à partir de 72 mois, et ce, malgré la différence des indices boursiers. À court et moyen terme, les relations ne sont pas significatives. À long terme, l'ampleur de la relation et sa significativité augmentent avec l'horizon. Les résultats MCO sont présentés dans la première partie du tableau II.

### **Période 1952 - 2009**

Par ailleurs, pour la période plus large, se terminant en 2009, les résultats obtenus ne sont significatifs qu'à partir de 96 mois (figures 5 et 7). Les résultats sont présentés dans la deuxième partie du tableau II. Sauf exceptions (6 à 36 mois) les relations sont toutes plus faibles que celles de la première période se terminant en 2006.

### **Résultats *jackknife***

Les estimés des coefficients obtenus par chaque méthode et pour les deux périodes sont présentés dans le tableau III et sont représentés graphiquement aux figures 6 et 7.

Chiquoine et Hjalmarson (2009) soutenaient que, typiquement, les MCO surestiment les coefficients dans ce contexte des régressions de prédiction. Les estimateurs des coefficients

---

<sup>2</sup> Rappelons que nous avons utilisé un indice boursier différent de celui utilisé par Bandi et Perron (2008). Ils ont utilisé l'indice NYSE-Amex alors que nous utilisons NYSE-Amex-Nasdaq, plus volatile.

obtenus par *jackknife* devraient donc être inférieurs à ceux obtenus par MCO. Les différents estimateurs sont présentés au tableau III. Pour les horizons de court et moyen terme (de  $h=1, \dots, 60$ ) l'estimateur qui a la valeur maximale est soit l'estimateur MCO, soit l'estimateur *jackknife* avec  $m=2$ . Notons que si l'estimateur MCO n'est pas celui avec la plus grande valeur, il est très près de la valeur maximale. Pour les horizons de long terme, c'est l'estimateur *jackknife* avec  $m=2$  qui a la plus grande valeur mais, pour ces horizons, l'écart entre les valeurs des estimateurs est faible.

### **Variance de l'estimateur *jackknife***

Chiquoine et Hjalmarsson (2009) ont proposé l'utilisation d'un plus grand nombre de sous-échantillons ( $m=3$  et  $m=4$ ) pour atténuer la perte de l'efficacité de l'estimateur sans que la réduction du biais ne soit trop affectée. Les coefficients obtenus pour des valeurs de  $m=3$  et  $m=4$  sont effectivement plus efficaces, leur variance est moindre que pour ceux obtenus à partir de deux sous-échantillons ( $m=2$ ). À un niveau de confiance de 95%, la différence entre les statistiques  $t$  obtenues ne remet pas en cause les résultats d'inférence à l'exception des estimateurs obtenus par *jackknife* pour  $m=3$  et  $m=4$  pour un niveau d'agrégation de 72 mois. Autrement, pour les 2 périodes, lorsque l'estimateur MCO est significatif les estimateurs *jackknife* le sont aussi. La prévisibilité du rendement excédentaire par la volatilité réalisée retardée est confirmée par l'application du *jackknife* comme méthode de réduction du biais des estimateurs.



## 5.2 Résultats hors échantillon

Afin d'évaluer la performance des estimateurs, les  $R_{os}^2$  sont calculées, pour tous les estimateurs (MCO et *jackknife*) obtenus. Tel qu'utilisé par Chiquoine et Hjalmarsson (2009) :

$$R_{os}^2 = 1 - \frac{\sum_{t=s}^T (R_t - \hat{R}_t)^2}{\sum_{t=s}^T (R_t - \bar{R}_t)^2}$$

- $\hat{R}_t$  est la valeur ajustée obtenue par la régression de prédiction estimée en utilisant les données jusqu'à t-1.
- $\bar{R}_t$  est la moyenne historique estimée utilisant les données de juillet 1926 jusqu'à décembre 2006.

Si la statistique  $R_{os}^2$  obtenue est positive, l'erreur moyenne carrée de la prédiction basée sur les régressions est plus faible que celle basée sur la moyenne historique.

Dans le tableau V, la date de départ de la prédiction est janvier 2007. Les valeurs sont prédites à partir des estimateurs obtenus pour l'équation 1 par les différentes méthodes, MCO et *jackknife* pour les données de janvier 1952 à décembre 2006. Ensuite, les estimateurs sont utilisés pour effectuer les prédictions. Étant donné que les données doivent être agrégées pour effectuer les régressions, il n'a été possible de calculer la statistique que pour les horizons inférieurs à 36 mois.

Les coefficients MCO ne produisent pas systématiquement la statistique  $R_{os}^2$  maximale parmi les quatre estimateurs proposés. Les statistiques  $R_{os}^2$ , à l'exception de l'horizon de 6 mois, sont en général positives, indication de la supériorité de la prédiction par rapport à la moyenne historique.

L'exercice a été répété sur une période différente. Les coefficients ont été estimés à partir de données de 1952 jusqu'à 1999 et la prédiction a été faite pour les données de 2000 à 2009. Ces résultats sont présentés au tableau VI. Les différents estimateurs se partagent la statistique  $R_{os}^2$  maximale, aucun n'est dominant et chacun d'eux est dominé par la moyenne historique.

### 5.3 Robustesse

Le choix de la période, celui de l'indice boursier et celui du retard sur les deux variables ont un impact sur la robustesse des résultats obtenus. Les choix posés produisent des résultats significatifs sur de longs horizons, mais un choix différent peut produire des résultats d'inférence différents.

#### Choix de la période

Le choix de la période pose le dilemme classique entre la robustesse et l'efficacité des estimateurs obtenus. Le choix de la période est fondamental, les résultats de l'inférence sont variables selon les périodes considérées. Il semble y avoir consensus dans la littérature quant à la différence entre les données de l'avant et de l'après-guerre. La prévisibilité des rendements financiers serait un phénomène de l'après-guerre. Notons aussi le *Federal Reserve Treasury Accord*, de 1951, qui changea dramatiquement le cours des taux d'intérêt (Chambers 2010). L'entrée en vigueur de cet accord est utilisée comme point de départ de l'échantillon et uniquement les données de l'après-accord sont considérées, à partir de 1952.

### **Choix de l'indice**

L'utilisation d'un indice boursier différent pourrait remettre en cause les conclusions de prévisibilité du rendement excédentaire. L'indice utilisé, incluant le Nasdaq, est plus volatile que celui utilisé par Bandi et Perron (2008). Néanmoins, les résultats de prévisibilité obtenus à partir de l'indice NYSE-Amex demeurent valides.

### **Choix du retard**

Bandi et Perron (2008) ont testé toutes les combinaisons de retard pour le rendement excédentaire et la volatilité réalisée retardée. Un choix naturel du même retard pour les deux variables s'est imposé, choix ici adopté sans plus d'investigation.

### **Impact 2007-2009**

L'ajout des trois années supplémentaires de la seconde période a un impact important sur les résultats obtenus. Les coefficients ne sont significatifs que pour des horizons à partir de 96 mois et la relation est plus faible. Si l'ajout de trois années d'observations atténue la significativité des résultats sur l'échantillon original jusqu'à les rendre non significatifs, il est légitime de se questionner sur la robustesse des résultats.

Par ailleurs, il est encore tôt pour constater l'ampleur de l'effet de la crise. Comme les sommations impliquent qu'un nombre d'observations correspondant à l'horizon soit mises de côté au début, mais surtout à la fin de l'échantillon, les 36 données mensuelles des trois dernières années ne sont pas prises en compte dans les régressions de long terme.

## 6- Conclusion

Le *jackknife*, une technique de réduction du biais simple à appliquer qui ne repose pas sur des hypothèses rigides, a été appliquée aux régressions de prédiction du rendement excédentaire à partir de la volatilité réalisée utilisées par Bandi et Perron (2008).

Les résultats obtenus, tant pour les coefficients MCO que pour ceux corrigés pour le biais, confirment une dépendance de long terme entre le rendement excédentaire et la volatilité réalisée retardée sur une période s'étendant de janvier 1952 à décembre 2006. Pour les horizons de court terme, aucune relation significative entre les données n'est révélée et pour les horizons de 72 à 120 mois, les relations sont positives, indication de l'existence d'un dilemme entre le rendement et le risque, et significatives. Par ailleurs, l'ajout de données de 2007 à 2009 a un impact sur l'ampleur et la significativité des résultats. Ces conclusions survivent à une correction pour le biais.

Des simulations de Monte Carlo pourraient être utilisées pour évaluer la performance des estimateurs corrigés du biais par cette méthode de *jackknife* en échantillon fini.

Tableau I: Statistiques descriptives du rendement excédentaire et de la volatilité réalisée pour différentes périodes

	1926-2006		1926-2009		1952-2006		1952-2009	
	$R_{t,t+1}$	$\sigma^2_{t,t+1}$	$R_{t,t+1}$	$\sigma^2_{t,t+1}$	$R_{t,t+1}$	$\sigma^2_{t,t+1}$	$R_{t,t+1}$	$\sigma^2_{t,t+1}$
Moyenne	0,0065	0,0023	0,0061	0,0025	0,0058	0,0015	0,0053	0,0018
Variance	0,00295	$2,14 \times 10^{-5}$	0,00299	$2,60 \times 10^{-5}$	0,00179	$7,78 \times 10^{-6}$	0,00189	$1,56 \times 10^{-5}$
Skewness	0,22	6,39	0,17	6,11	-0,51	14,29	-0,58	9,91
Kurtosis	10,91	59,69	10,55	52,52	5,04	286,51	5,08	127,21
Autocorrélation	0,107	0,566	0,125	0,608	0,061	0,252	0,096	0,531

$R_{t,t+1}$  correspond au rendement excédentaire, obtenu comme la différence entre le rendement de l'indice NYSE-Amex-Nasdaq et du rendement sur les bons du Trésor américain de 30 jours.

$\sigma^2_{t,t+1}$  correspond à la volatilité réalisée.

Toutes les valeurs sont mensuelles.

Tableau II: Estimés MCO pour différents niveaux d'agrégation

	h=1	3	6	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120
$\alpha_{MCO}$	0,007	0,012	0,030	0,072	0,168	0,211	0,230	0,159	-0,042	-0,262	-0,352	-0,496	-0,530
t-stat	(4,08)	(2,41)	(2,93)	(2,76)	(3,12)	(2,78)	(2,12)	(1,05)	(-0,24)	(-1,63)	(-2,09)	(-3,63)	(-3,50)
$\beta_{MCO}$	-0,759	1,233	0,428	-0,153	-1,096	-0,576	0,019	1,493	3,960*	5,944*	6,329*	6,943*	6,880*
t-stat	(-1,26)	(2,19)	(0,5)	(-0,13)	(-0,87)	(-0,50)	(0,02)	(1,07)	(2,72)	(5,17)	(5,98)	(8,37)	(7,94)
$R^2(\%)$	0,25	0,91	0,14	0,02	2,07	0,8	0	3,73	21,30	50,71	62,45	72,19	70,22
$\alpha_{MCO}$	0,007	0,015	0,022	0,062	0,147	0,189	0,228	0,223	0,167	-0,014	-0,212	-0,476	-0,550
t-stat	(4,25)	(2,85)	(2,25)	(2,60)	(2,67)	(2,46)	(2,23)	(1,71)	(0,94)	(-0,06)	(-0,96)	(-4,07)	(-5,02)
$\beta_{MCO}$	-1,069	0,053	0,858	-0,057	-0,861	-0,356	-0,028	0,619	1,577	3,336	4,897*	6,564*	6,819*
t-stat	(-1,87)	(0,07)	(1,63)	(-0,06)	(-0,68)	(-0,32)	(-0,03)	(0,63)	(1,02)	(1,62)	(2,75)	(7,35)	(10,15)
$R^2(\%)$	0,94	0	1,42	0	1,11	0,29	0	1,13	6,63	22,03	36,67	55,43	61,47

Les valeurs ont été obtenues par régressions simples du rendement excédentaire, sommé sur h périodes, sur une constante et sur la variance réalisée, sommée sur h périodes passées. Des valeurs de h de 1 à 120 mois sont considérées.

Les statistiques t, entre parenthèses, sont calculées avec la méthode de Newey-West.

Tableau III: Coefficients MCO et *jackknife* estimés pour différents niveaux d'agrégation

	h=1	3	6	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120
$\beta_{MCO}$	-0,759 (-1,26)	1,233 (2,19)	<b>0,428</b> (0,5)	<b>-0,153</b> (-0,13)	<b>-1,096</b> (-0,87)	-0,576 (-0,50)	0,019 (0,02)	1,493 (1,07)	3,960* (2,72)	5,944* (5,17)	6,329* (5,98)	6,943* (8,37)	6,880* (7,94)
$\beta_{jack2}$	<b>-0,607</b> (-0,45)	0,444 (0,61)	-1,431 (-1,46)	-1,641 (-1,23)	-1,627 (-1,09)	<b>-0,325</b> (-0,19)	<b>0,121</b> (0,07)	<b>1,529</b> (0,85)	<b>4,604*</b> (2,52)	<b>6,971*</b> (4,41)	<b>7,146*</b> (4,61)	<b>7,414*</b> (4,91)	7,385* (4,01)
$\beta_{jack3}$	-0,815 (-0,64)	<b>1,250</b> (1,71)	-0,712 (-0,74)	-1,546 (-1,18)	-2,529 (-1,73)	-2,131 (-1,34)	-1,613 (-0,90)	-1,309 (-0,74)	1,089 (0,64)	5,274* (3,50)	4,999* (3,95)	5,871* (3,89)	<b>7,743*</b> (4,44)
$\beta_{jack4}$	-0,916 (-0,74)	0,947 (1,34)	-0,452 (-0,48)	-0,992 (-0,77)	-1,697 (-1,16)	-1,271 (-0,82)	-1,080 (-0,63)	0,096 (0,06)	2,429 (1,50)	5,376* (3,88)	5,951* (4,93)	6,344* (4,20)	6,689* (3,99)
$\beta_{MCO}$	-1,069 (-1,87)	<b>0,053</b> (0,07)	<b>0,858</b> (1,63)	<b>-0,057</b> (-0,06)	<b>-0,861</b> (-0,68)	-0,356 (-0,32)	<b>-0,028</b> (-0,03)	<b>0,619</b> (0,63)	<b>1,577</b> (1,02)	3,336 (1,62)	4,897* (2,75)	<b>6,564*</b> (7,35)	<b>6,819*</b> (10,15)
$\beta_{jack2}$	-1,343 (-1,76)	-1,643 (-1,60)	-1,305 (-1,28)	-1,545 (-1,19)	-1,241 (-0,88)	<b>-0,127</b> (-0,09)	-0,029 (-0,02)	-0,034 (-0,02)	0,954 (0,47)	<b>3,369</b> (1,82)	<b>5,046*</b> (3,12)	5,974* (4,25)	5,929* (3,09)
$\beta_{jack3}$	<b>-0,898</b> (-1,30)	-0,704 (-0,72)	-0,660 (-0,71)	-1,301 (-1,03)	-1,556 (-1,12)	-0,515 (-0,37)	-0,637 (-0,51)	-1,460 (-0,84)	-0,689 (-0,35)	3,209 (1,83)	3,791* (2,63)	5,889* (4,36)	6,746* (3,95)
$\beta_{jack4}$	-1,205 (-1,74)	-0,664 (-0,70)	-0,218 (-0,25)	-1,047 (-0,83)	-1,494 (-1,10)	-1,144 (-0,84)	-1,261 (-1,02)	-1,302 (-0,77)	-1,048 (-0,57)	2,254 (1,29)	4,120* (3,02)	5,666* (4,50)	6,749* (3,77)

Les \* indiquent un coefficient significatif à 95%, les statistiques t sont entre parenthèses. Pour les estimateurs MCO, les statistiques t sont obtenues avec une variance de type Newey-West. Pour les estimateurs *jackknife*, les variances sont calculées par *moving block bootstrap*. En gras, les estimateurs avec la valeur maximale.

Tableau IV: Interceptes MCO et *jackknife* estimés pour différents niveaux d'agrégation

	h=1	3	6	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120
$\alpha_{MCO}$	0,007*	0,012*	0,030*	0,072*	0,168*	0,211*	0,230*	0,159	-0,042	-0,262	-0,352*	-0,496*	-0,530*
	(4,08)	(2,41)	(2,93)	(2,76)	(3,12)	(2,78)	(2,12)	(1,05)	(-0,24)	(-1,63)	(-2,09)	(-3,63)	(-3,50)
$\alpha_{jack2}$	0,007*	0,014*	0,039*	0,085*	0,167*	0,183*	0,201	0,123	-0,122	-0,372	-0,481*	-0,635*	-0,732*
	(2,84)	(2,91)	(3,62)	(3,16)	(2,92)	(1,98)	(1,45)	(0,70)	(-0,60)	(-1,84)	(-2,33)	(-2,68)	(-2,22)
$\alpha_{jack3}$	0,007*	0,012*	0,034*	0,085*	0,197*	0,259*	0,307*	0,317	0,135	-0,234	-0,262	-0,432	-0,708*
	(2,98)	(2,49)	(3,19)	(3,17)	(3,52)	(2,87)	(2,19)	(1,80)	(0,70)	(-1,22)	(-1,44)	(-1,82)	(-2,29)
$\alpha_{jack4}$	0,007*	0,013*	0,034*	0,080*	0,179*	0,233*	0,470*	0,235	0,043	-0,247	-0,347	-0,470*	-0,497
	(3,36)	(2,74)	(3,22)	(2,30)	(3,22)	(2,60)	(3,41)	(1,36)	(0,23)	(-1,38)	(-1,92)	(-1,98)	(-1,65)
$\alpha_{MCO}$	0,007*	0,015*	0,022*	0,062*	0,147*	0,189*	-0,228*	0,223	0,167	-0,014	-0,212	-0,476*	-0,550*
	(4,25)	(2,85)	(2,25)	(2,60)	(2,67)	(2,46)	(-2,23)	(1,71)	(0,94)	(-0,06)	(-0,96)	(-4,07)	(-5,02)
$\alpha_{jack2}$	0,007*	0,020*	0,035*	0,079*	0,147*	0,164	0,198	0,224	0,169	-0,068	-0,284	-0,443	-0,459
	(3,76)	(3,21)	(2,98)	(2,90)	(2,63)	(1,88)	(1,66)	(1,29)	(0,84)	(-0,32)	(-1,32)	(-1,94)	(-1,31)
$\alpha_{jack3}$	0,007*	0,017*	0,030*	0,076*	0,164*	0,193*	0,254*	0,330*	0,282	-0,063	-0,162	-0,469	-0,562
	(3,86)	(2,80)	(2,66)	(2,84)	(2,97)	(2,22)	(2,20)	(1,98)	(1,45)	(-0,32)	(-0,82)	(-2,13)	(-1,78)
$\alpha_{jack4}$	0,007*	0,017*	0,029*	0,074*	0,161*	0,212*	0,280*	0,330*	0,334	0,054	-0,168	-0,411	-0,508
	(3,88)	(2,85)	(2,64)	(2,76)	(2,91)	(2,45)	(2,42)	(2,01)	(1,78)	(0,27)	(-0,88)	(-1,94)	(-1,54)

1952-2006

1952-2009

Les \* indiquent un coefficient significatif à 95%, les statistiques t sont entre parenthèses. Pour les estimateurs MCO, les statistiques t sont obtenues avec une variance de type Newey-West. Pour les estimateurs *jackknife*, les variances sont calculées par *moving block bootstrap*.



Tableau V : Résultats hors échantillon

Estimation janvier 1952 à décembre 2006. Prédiction janvier 2007 à décembre 2009

	h=1	3	6	12	24
$R^2_{MCO}$	1,65	6,84	<b>7,57</b>	<b>22,66</b>	3,57
$R^2_{jack2}$	<b>1,70</b>	5,90	-36,38	7,15	<b>8,24</b>
$R^2_{jack3}$	1,58	6,73	-13,14	6,69	5,22
$R^2_{jack4}$	1,40	<b>7,36</b>	-6,91	-5,61	4,67

$$R^2_{os} = 1 - \frac{\sum_{t=1}^T (r_t - \hat{r}_t)^2}{\sum_{t=1}^T (r_t - \bar{r}_t)^2}$$

s : date à laquelle débute la prédiction, janvier 2007.

$\hat{r}_t$ : Prédiction du rendement excédentaire basée sur les estimations MCO et *jackknife*

$\bar{r}_t$ : Moyenne historique du rendement excédentaire (données de juillet 1926 à décembre 2006)

Les statistiques  $R^2_{os}$  sont exprimées en pourcentage, la statistique maximale est mise en évidence en caractères gras.

La statistique  $R^2_{os}$  est positive lorsque la prédiction basée sur la régression est plus près de la vraie valeur que ne l'est la moyenne historique.

Les données de 1952 à 2006 sont utilisées pour estimer les coefficients MCO et *jackknife*. Ensuite les coefficients estimés sont utilisés pour calculer les valeurs prédites pour 2007 - 2009.

Tableaux VI : Résultats hors échantillon.

Estimation janvier 1952 à décembre 1999, Prédiction janvier 2000 à décembre 2009

	h=1	3	6	12	24	36	48
$R^2_{MCO}$	3,39	<b>2,62</b>	2,35	-4,11	-0,25	11,80	<b>5,89</b>
$R^2_{jack2}$	3,02	-9,66	2,84	2,63	-5,64	<b>20,65</b>	-33,22
$R^2_{jack3}$	4,07	-6,17	-3,70	<b>3,04</b>	-12,69	-10,96	-0,81
$R^2_{jack4}$	<b>4,26</b>	-10,11	<b>4,25</b>	-7,82	<b>0,12</b>	9,55	-20,01

$$R^2_{os} = 1 - \frac{\sum_{t=s}^T (r_t - \hat{r}_t)^2}{\sum_{t=s}^T (r_t - \bar{r}_t)^2}$$

s : date à laquelle débute la prédiction, janvier 2000.

$\hat{r}_t$ : Prédiction du rendement excédentaire basée sur les estimations MCO et *jackknife*

$\bar{r}_t$ : Moyenne historique du rendement excédentaire (données de juillet 1926 à décembre 1999)

Les statistiques  $R^2_{os}$  sont exprimées en pourcentage, la statistique maximale est mise en évidence en caractère gras.

La statistique  $R^2_{os}$  est positive lorsque la prédiction basée sur la régression est plus près de la vraie valeur que ne l'est la moyenne historique.

Les données de 1952 à 1999 sont utilisées pour estimer les coefficients MCO et *jackknife*. Ensuite les coefficients estimés sont utilisés pour calculer les valeurs prédites pour 2000 - 2009.

Figure 1 : Évolution du rendement excédentaire dans le temps

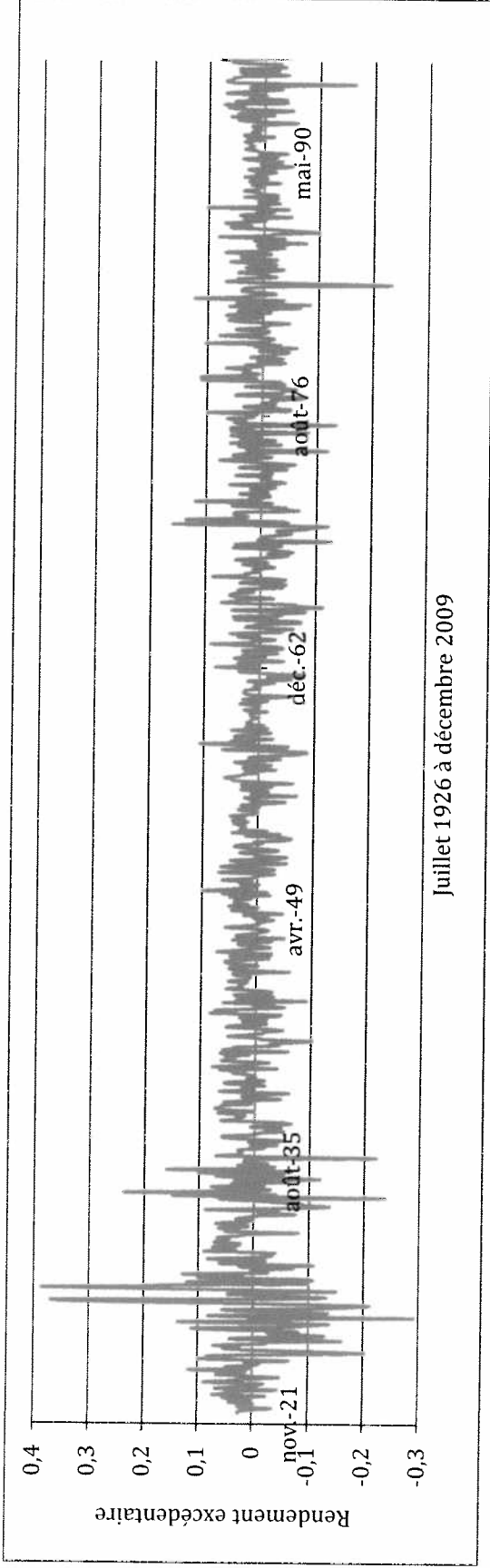


Figure 2 : Évolution de la volatilité réalisée dans le temps

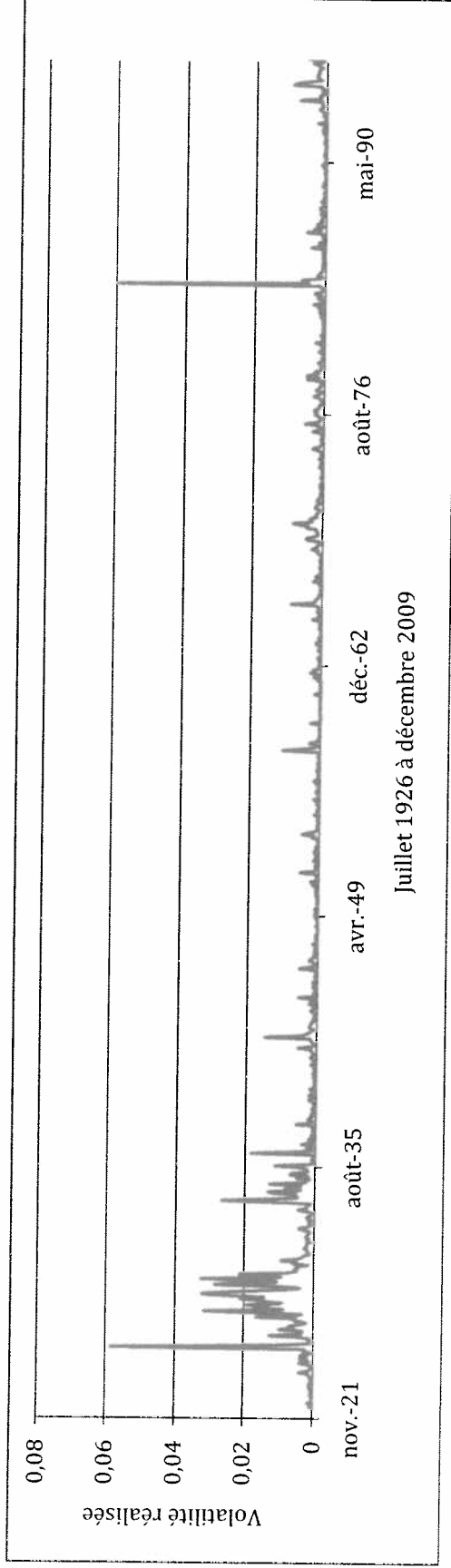
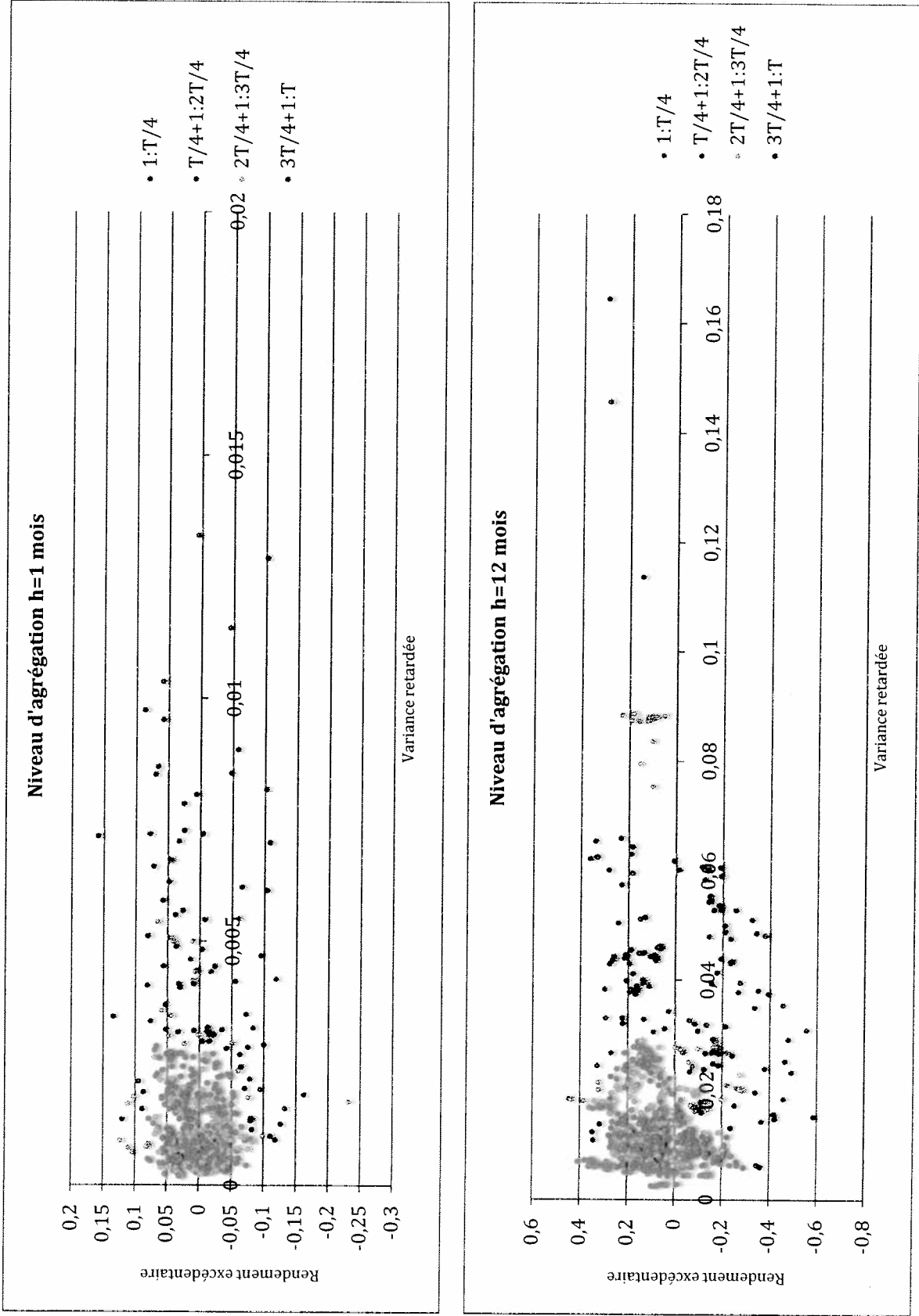


Figure 3 : Rendement excédentaire en fonction de la variance réalisée retardée pour différents niveaux d'agrégation. 1952-2009.



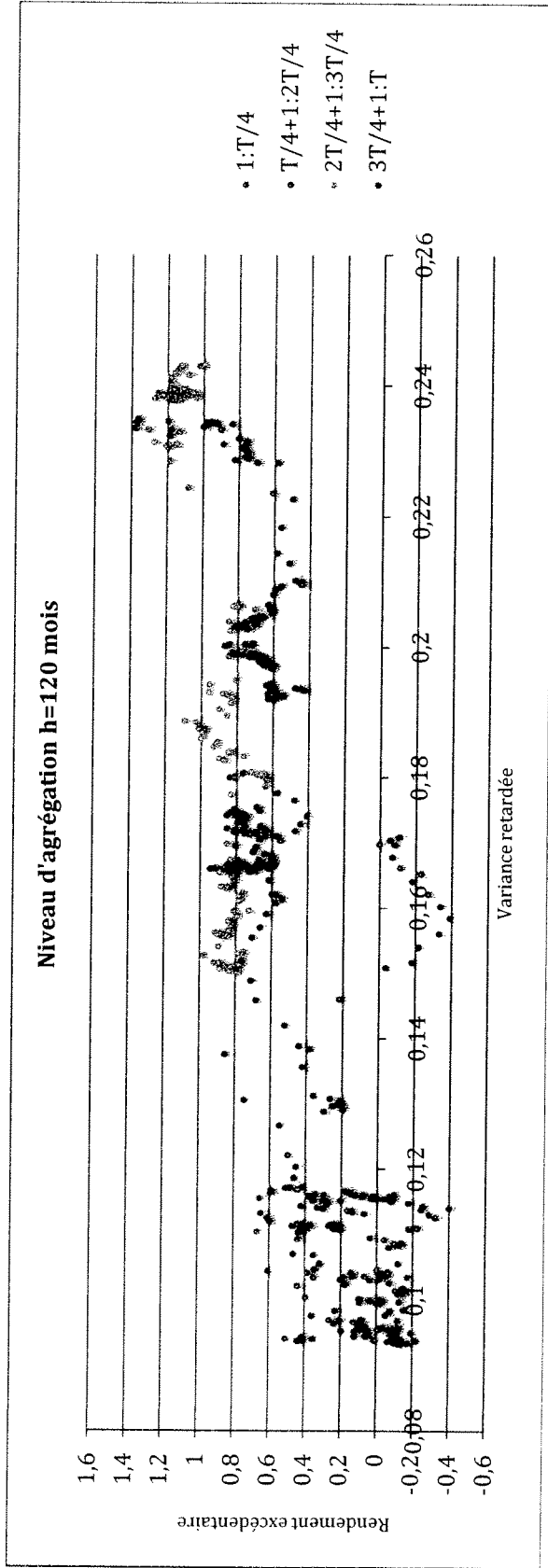
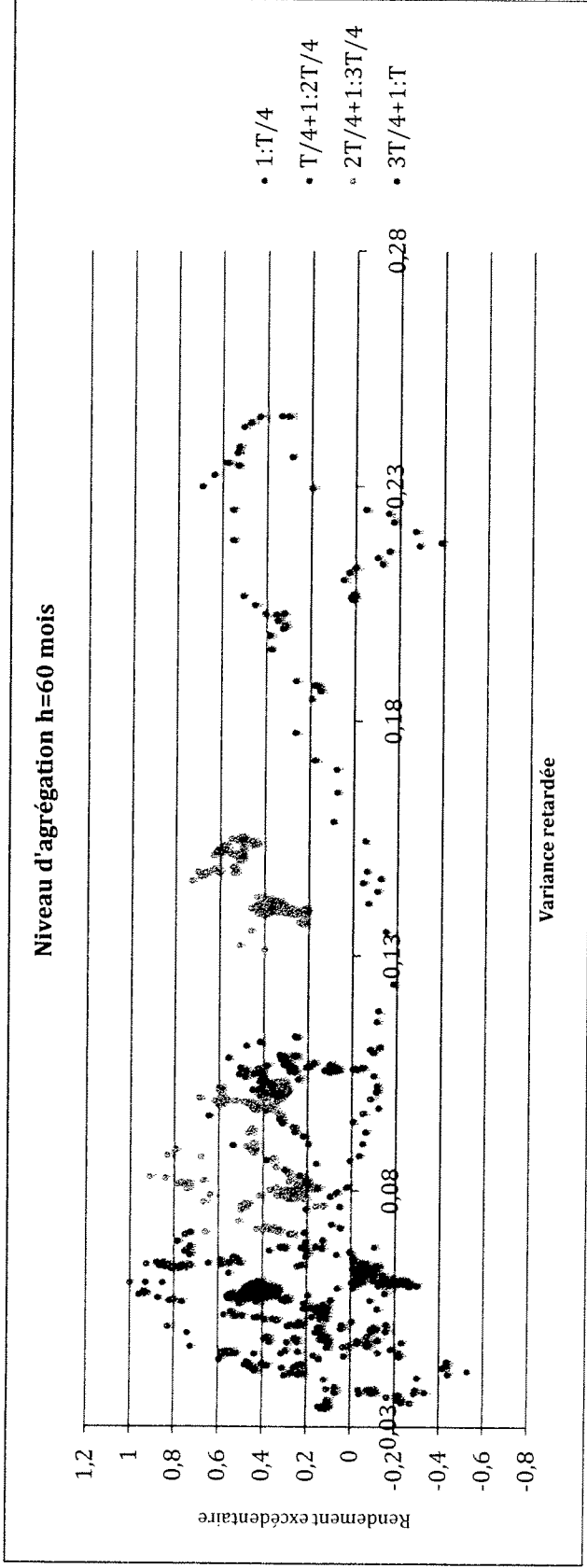
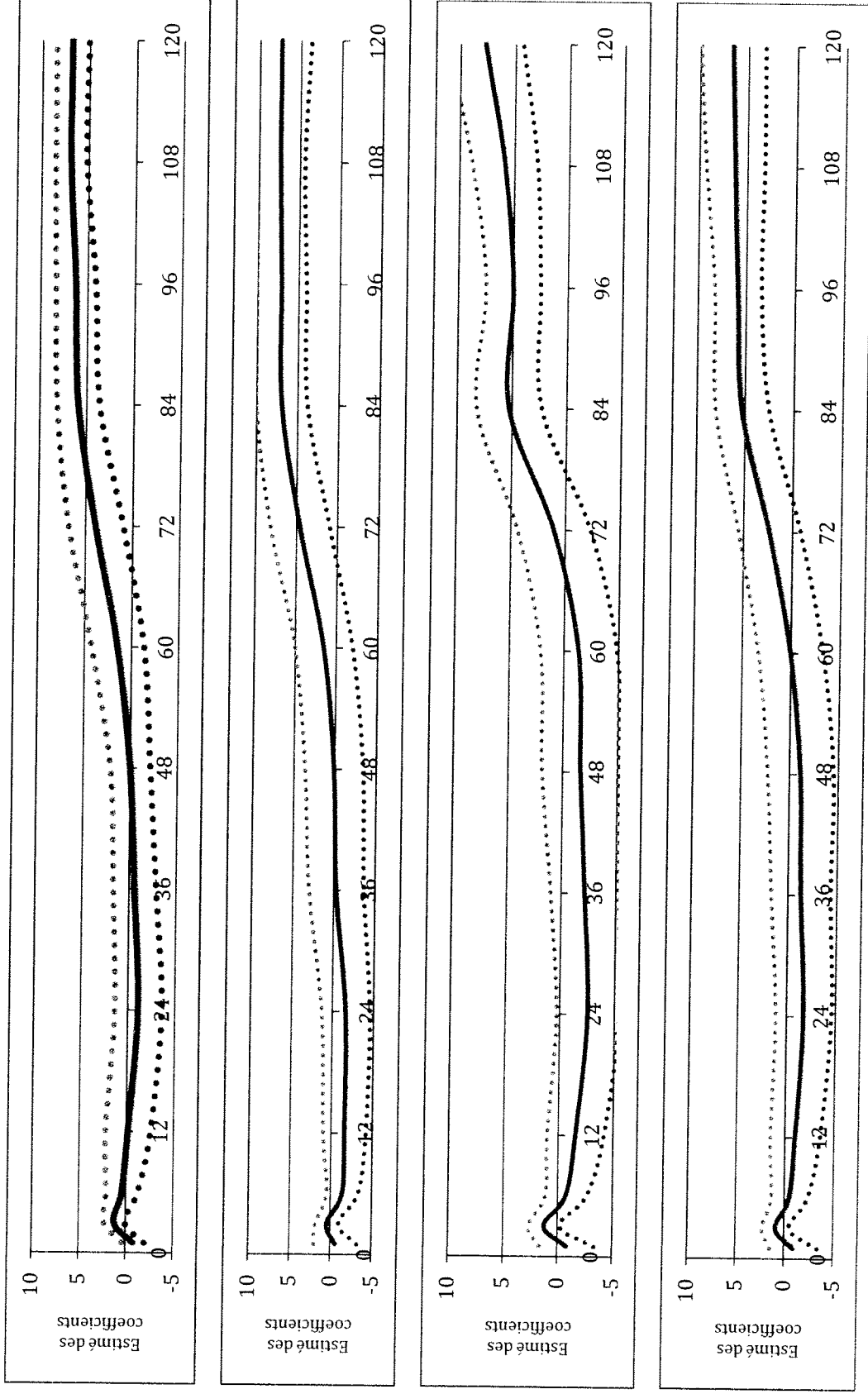


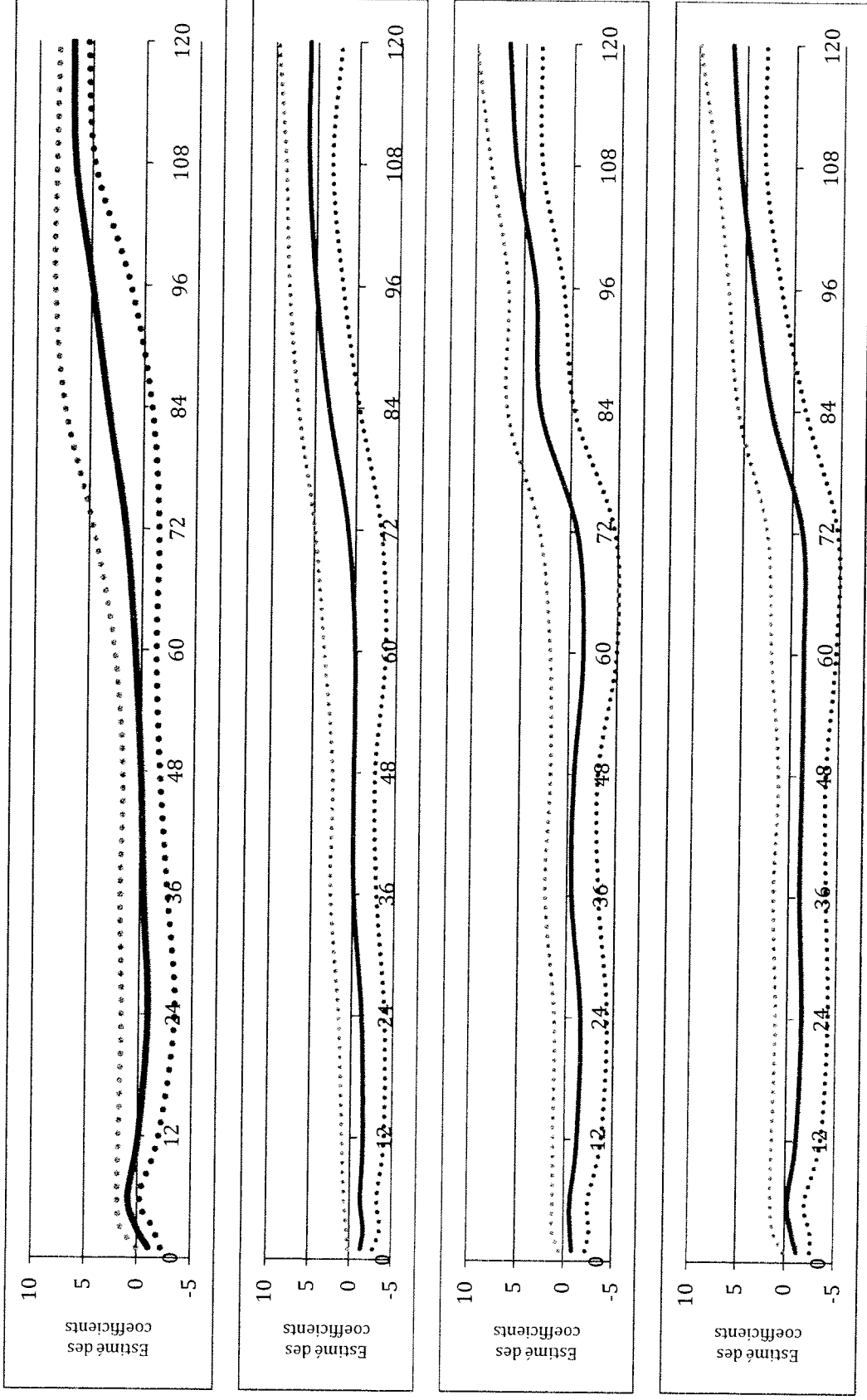
Figure 4 : Estimé des coefficients pour différents niveaux d'agrégation, données de 1952 à 2006.  
 Respectivement par MCO, *jackknife*  $m=2$ ,  $m=3$  et  $m=4$ . Intervalle de confiance de 95%.



Niveau d'agrégation

Figure 5 : Estimé des coefficients pour différents niveaux d'agrégation, données de 1952 à 2009.

Respectivement par MCO, *jackknife*  $m=2$ ,  $m=3$  et  $m=4$ . Intervalle de confiance de 95%.



Niveau d'agrégation

Figure 6: Comparatif des estimés des coefficients, obtenus par MCO et *jackknife*, pour différents niveaux d'agrégation, données de 1952 à 2006.

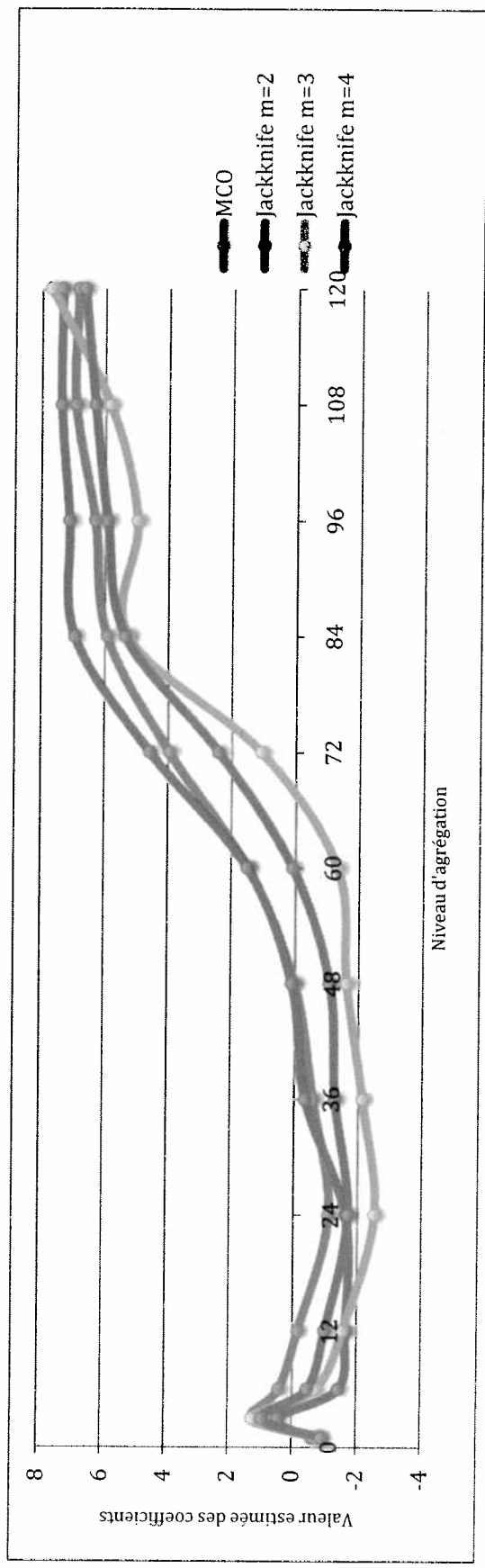


Figure 7 : Comparatif des estimés des coefficients, obtenus par MCO et *jackknife*, pour différents niveaux d'agrégation, données de 1952 à 2009.

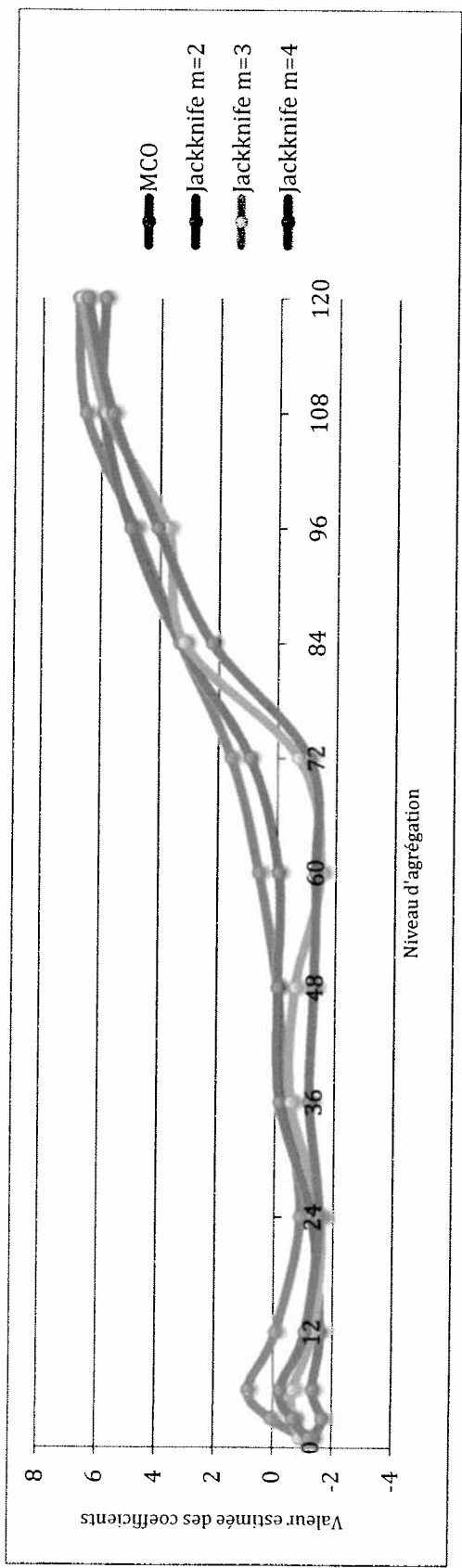
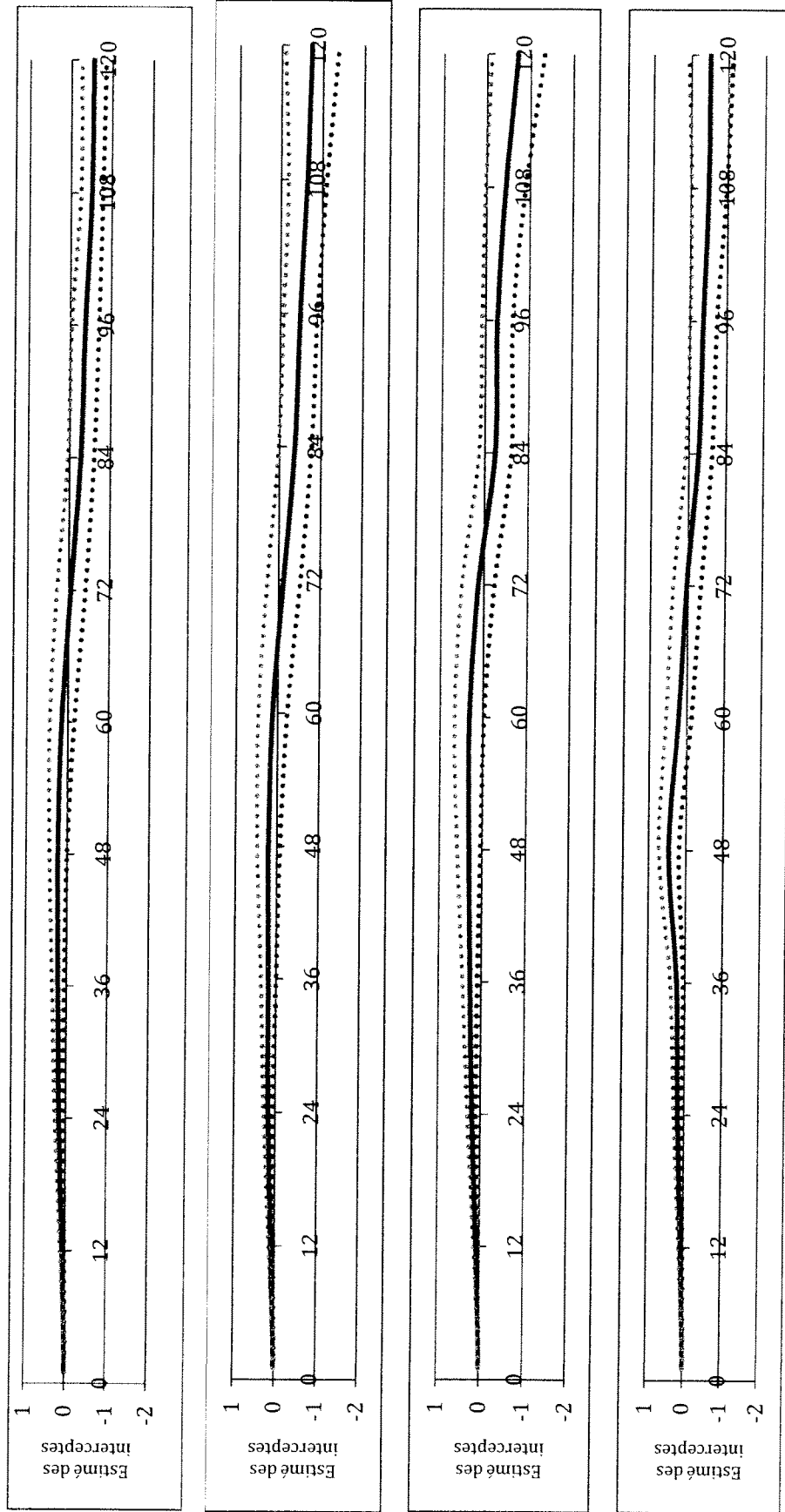


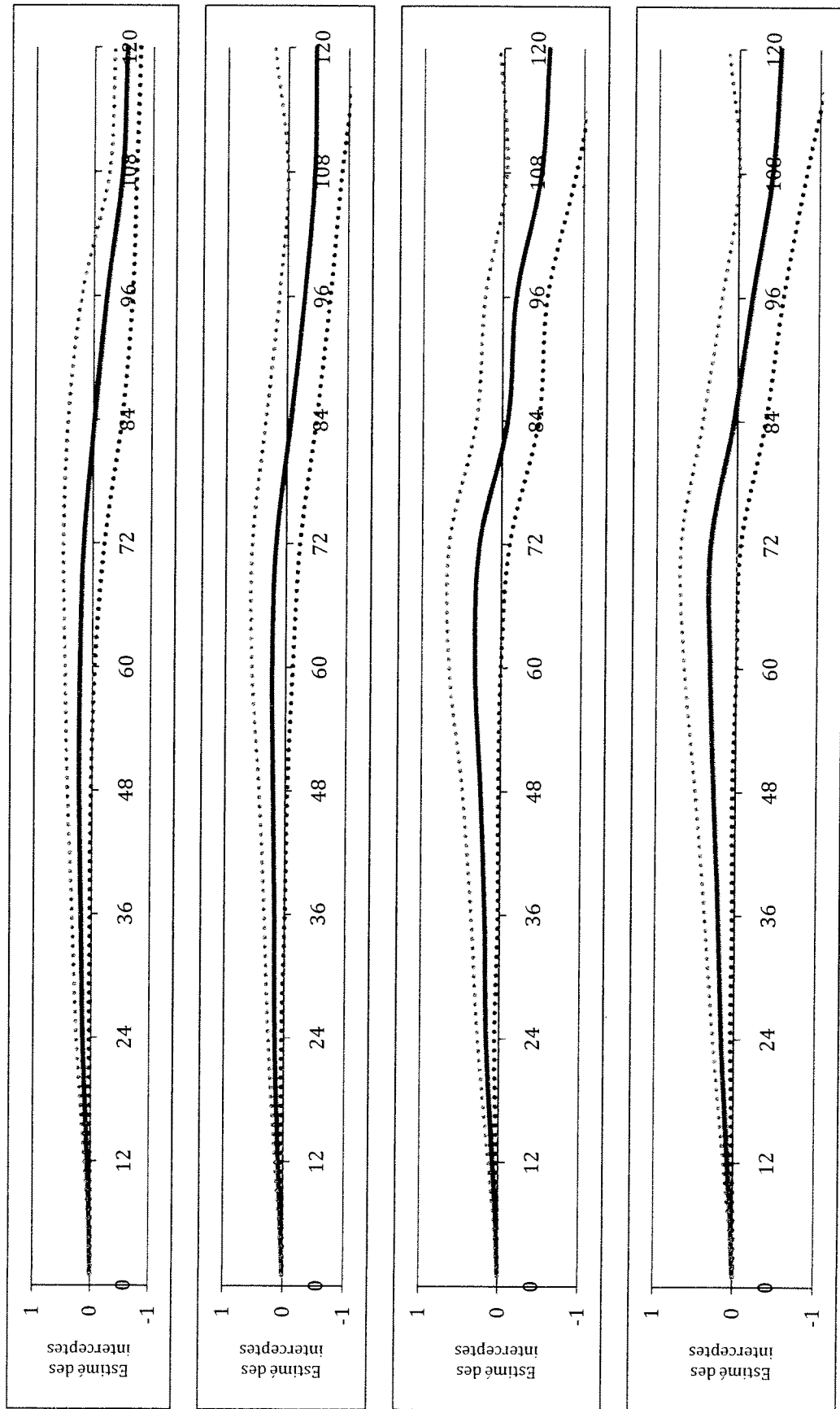


Figure 8 : Estimé des interceptes pour différents niveaux d'agrégation, données de 1952 à 2006.  
 Respectivement par MCO, *jackknife*  $m=2$ ,  $m=3$  et  $m=4$ . Intervalle de confiance de 95%.



Niveau d'agrégation

Figure 9 : Estimé des interceptes pour différents niveaux d'agrégation, données de 1952 à 2009.  
 Respectivement par MCO, *jackknife*  $m=2$ ,  $m=3$  et  $m=4$ . Intervalle de confiance de 95%.



Niveau d'agrégation

Figure 10 : Comparatif des estimés des interceptes, obtenus par MCO et *jackknife*, pour différents niveaux d'agrégation, données de 1952 à 2006.

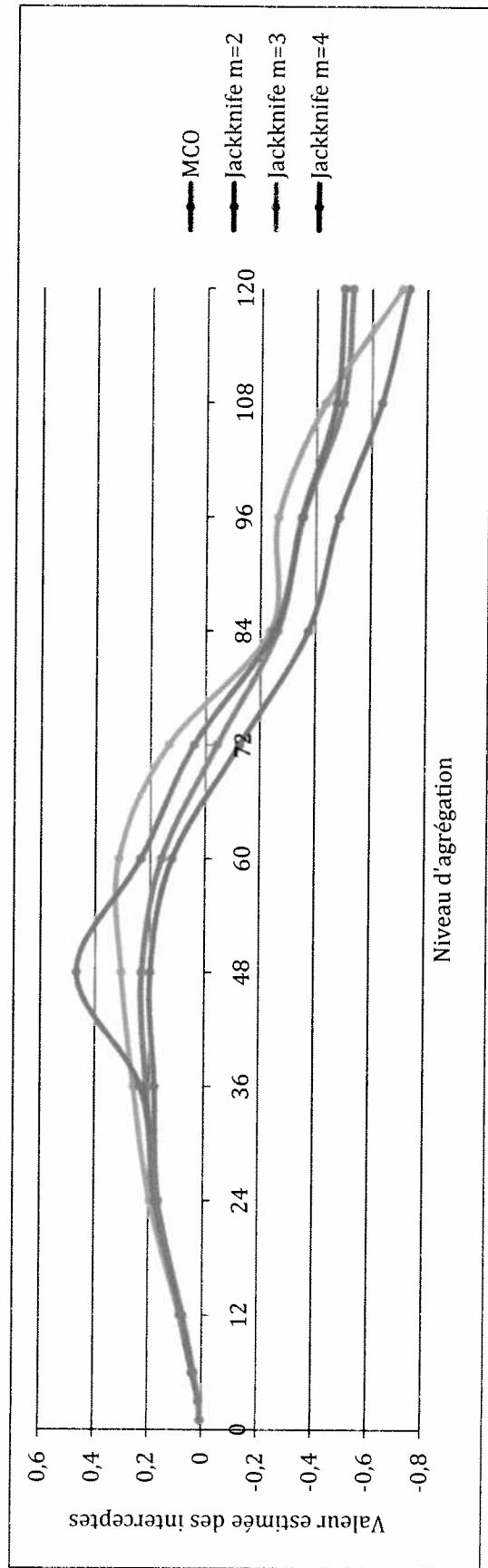
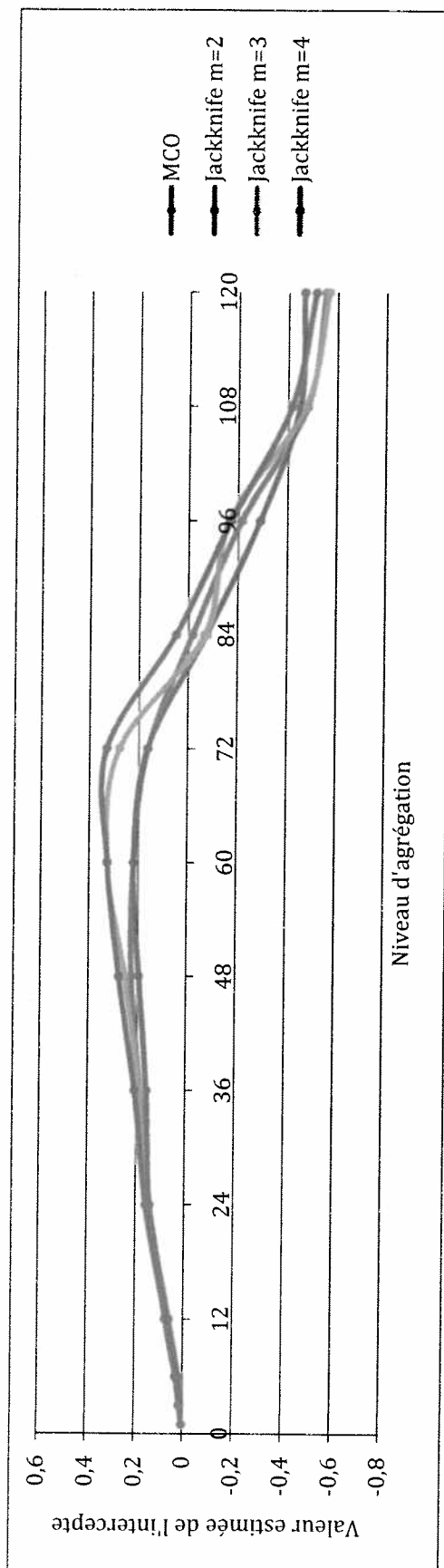


Figure 11 : Comparatif des estimés des interceptes, obtenus par MCO et *jackknife*, pour différents niveaux d'agrégation, données de 1952 à 2009.



## **Annexes**

### Expression du biais d'ordre 1/T de Stambaugh (1999)

Preuve de Stambaugh (1999) :

$$x_t = \theta + \rho x_{t-1} + v_t \rightarrow AR(1), |\rho| < 1$$

$$y_t = \alpha + \beta x_{t-1} + u_t$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{bmatrix} = (X'X)^{-1} X'y \quad \begin{bmatrix} \hat{\theta} \\ \hat{\rho} \end{bmatrix} = (X'X)^{-1} X'x$$

$$y \equiv (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_T)'$$

$$x \equiv (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_T)'$$

$$X \equiv [1_T \ x_i] \text{ avec } 1_T \text{ un vecteur de constantes}$$

$$x_i = (x_0 \ x_1 \ \dots \ x_{T-1})'$$

$$\text{cov} \left\{ \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} \right\} \equiv \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_u^2 & \sigma_{uv} \\ \sigma_{uv} & \sigma_v^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Le biais de } \beta \text{ peut s'écrire : } E(\hat{\beta} - \beta) = \frac{\sigma_{uv}}{\sigma_v^2} E(\hat{\rho} - \rho)$$

Posons :

$$b_1 = (\alpha \ \beta)' \quad b_2 = (\theta \ \rho)'$$

$$\hat{b}_1 = (\hat{\alpha} \ \hat{\beta})' \quad \hat{b}_2 = (\hat{\theta} \ \hat{\rho})'$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{bmatrix} = (X'X)^{-1} X'y \text{ implique } \hat{b}_1 - b_1 = (X'X)^{-1} X'u \text{ avec } u = (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_T)'$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\theta} \\ \hat{\rho} \end{bmatrix} = (X'X)^{-1} X'x \text{ implique } \hat{b}_2 - b_2 = (X'X)^{-1} X'v \text{ avec } v = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_T)'$$

u peut être décomposé :  $u = \frac{\sigma_{uv}}{\sigma_v^2} v + \varepsilon$  où  $E(\varepsilon|v) = E(\varepsilon|x_0 \ v_1 \ \dots \ v_{T-1}) = 0$  (étant donné l'hypothèse iid et normalité).

En substituant :

$$\hat{b}_1 - b_1 = \frac{\sigma_{uv}}{\sigma_v^2} (X'X)^{-1} X'v + (X'X)^{-1} X'\varepsilon = \frac{\sigma_{uv}}{\sigma_v^2} (\hat{b}_2 - b_2)$$

Sous l'hypothèse de normalité, une approximation du biais de  $\hat{\rho}$  d'ordre  $1/T$  est donnée par  $-\frac{(1+3\rho)}{T}$ , alors :  $E(\hat{\beta}-\beta) = -\frac{\sigma_{uv}}{\sigma_v^2} \left( \frac{1+3\rho}{T} \right) + O\left(\frac{1}{T^2}\right)$

Il s'agit d'une correction typique pour le biais qui demeure d'ordre  $O(T^{-1})$

### Calcul de la variance de l'estimateur obtenu par *jackknife*

Suivant Fitzenberger (1997), les étapes pour le MBB peuvent s'écrire:

1. Avec un échantillon  $\{(y_1, x'_1), \dots, (y_T, x'_T)\}$  l'estimateur MCO  $\hat{\beta}_T$  de  $\beta_0$  est obtenu à partir d'un modèle de régression  $y_t = x'_t \beta_0 + \varepsilon_t$ . Les blocs d'observations sont des vecteurs  $B_i = (B_i^y, B_i^x)$  avec  $B_i^y = (y_i, \dots, y_{i+b-1})'$  un vecteur  $b \times 1$  et  $B_i^x$  une matrice  $b \times k$  avec les lignes  $x'_{i1}, \dots, x'_{i+b-1}$ .
2. Le rééchantillon *bootstrap* est de taille  $l=bm$  ( $m$  blocs contenant  $b$  observations), dénoté par  $\{(y_1^*, x_1'^*), \dots, (y_l^*, x_l'^*)\}$  est généré en tirant  $m$  blocs  $Z_1, \dots, Z_m$  de taille  $b$  à partir de  $\{B_1, \dots, B_q\}$ ,  $q=T-b+1$ , avec  $Z_i = (z'_{i1}, \dots, z'_{ib})$ . Les  $m$  blocs aléatoires  $Z_1, \dots, Z_m$  sont indépendants et identiquement distribués suivant  $P^*$ , la distribution *bootstrap* conditionnelle à l'échantillon originel.
3. Un rééchantillon *bootstrap* de taille  $l$  dénoté par  $\{(y_1^*, x_1'^*), \dots, (y_l^*, x_l'^*)\}$  est construit et formé en juxtaposant  $Z_1, \dots, Z_m$  en un grand bloc :  $(y_i^*, x_i'^*) = z'_{i\nu}$  pour  $\tau = [(i-1)/b] + 1$  et  $\nu = i - b\tau$
4.  $\hat{\beta}_l^*$  est le coefficient de la régression par MCO, l'estimateur de  $\beta_0$ , obtenu avec  $\{(y_1^*, x_1'^*), \dots, (y_l^*, x_l'^*)\}$ .

## Bibliographie

- Ang, A. et G. Bekaert (2007), « *Stock Return Predictability : Is it There?* », *The Review of Financial Studies*, v.20, n.3, 651-707.
- Bandi, F. et B. Perron (2008), « *Long-Run Risk-Return Trade-Offs* », *Journal of Econometrics*, 349-374.
- Chambers, M.J. (2010), « *Jackknife Biases Reduction and the Forecasting of Autoregressive Time Series* ». Version préliminaire.
- Chiquoine, B. et E. Hjalmarsson (2009), « *Jackknifing Stock Return Predictions* », *Journal of Empirical Finance*, 16, 793-803
- Efron, B. (1979), « *Bootstrap Method : Another look at the jackknife* », *Annals of Statistics*, 7, 1-26.
- Fitzenberger, B. (1997), « *The moving blocks bootstrap and robust inference for linear least squares and quantile regressions* », *Journal of Econometrics*, 82, 235-287.
- Kendall, M.B. (1954):«*A note on bias in the estimation of autocorrelation*», *Biometrika*, 41, 403-404.
- Künsch, H.R. (1989), « *The jackknife and the bootstrap for general stationary observations* », *Annals of Statistics* 17, 1217-1241.
- Nelson, C.R. et M. J. Kim (1993), « *Predictable Stock Returns : The Role of Small Sample Biases* », *Journal of Finance*, 48, 641-661.
- Phillips P.C.B. et J. Yu (2005), « *Jackknifing Bond Option Prices* », *The Review of Financial Studies*, v 18, n.2, 707-738.
- Shao, J. et C.F.J Wu. (1989), « *A General Theory for Jackknife Variance Estimation* », *The Annals of Statistics*, vol 17, no.3, 1176-1197.
- Quenouille, M.H. (1956). «*Notes on bias in estimation*», *Biometrika* 43, 353-360.
- Stambaugh, R.F. (1999), « *Predictive Regressions* », *Journal of Financial Economics*, 54, 375-421.
- Wolf, M. (2000). «*Stock Returns and Dividend Yields Revisited : A New Way to Look to an Old Problem*», *Journal of Business and Economic Statistics*, 18-30.



- Shao J. et D. Tu (1996), « *The Jackknife and Bootstrap* ». Springer Series in Statistics, Springer, 516 pages.