Acculturation institutionnelle du chercheur, de l'enseignant et des élèves de 1re secondaire présentant des difficultés d'apprentissage dans la conception et la gestion de situations-problèmes impliquant des nombres rationnels

Par
Geneviève Lessard

Département de didactique
Faculté des sciences de l'éducation

Thèse présentée à la Facultés supérieures et postdoctorales
En vue de l'obtention du grade de Philosophiae Doctor (Ph.D.)
En sciences de l'éducation
Option didactique

Août, 2010

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Cette thèse intitulée :

Acculturation institutionnelle du chercheur, de l'enseignant et des élèves de 1re secondaire présentant des difficultés d'apprentissage dans la conception et la gestion de situations-problèmes impliquant des nombres rationnels

présentée par :
Geneviève Lessard

A été évaluée par un jury composé des personnes suivantes :

France Caron, présidente rapporteure

Gisèle Lemoyne, directrice de recherche

Louise Poirier, memebre du jury

Laurent Theis, examinateur externe

Représentant du doyen de la FES

RÉSUMÉ

Mots-Clés (max 10): didactique des mathématiques, enseignement des nombres rationnels, enseignement secondaire, difficultés d'apprentissage, démarche écologique

Notre recherche s'intéresse à la transformation des rapports aux nombres rationnels d'élèves de 1re secondaire présentant des difficultés d'apprentissage. Comme le montrent plusieurs recherches, le défi majeur auquel sont confrontés les enseignants, ainsi que les chercheurs, est de ne pas s'enliser dans le cercle vicieux d'une réduction des enjeux de l'apprentissage des nombres rationnels et des possibilités d'apprentissage de l'élève en difficultés d'apprentissage, cet élève n'ayant pas ainsi la chance de mettre à l'épreuve ses connaissances, d'oser s'engager dans une démarche de construction de connaissances et d'apprécier les effets de son engagement cognitif.

Afin de relever ce défi, nous avons misé sur l'intégration harmonieuse de situations problèmes. Il nous a semblé que, dans une démarche d'acculturation, l'approche écologique soit tout indiquée pour penser une «dé-transposition/re-transposition didactique» (Antibi et Brousseau, 2000) et reconstruire une mémoire porteuse d'espoirs (Brousseau et Centeno, 1998).

Notre recherche vise à: 1) caractériser la progression des démarches d'acculturation institutionnelle de l'enseignant, du chercheur et des élèves et leurs effets sur les processus d'élaboration et de gestion des situations d'enseignement; 2) préciser l'évolution des connaissances, des habitus et des rapports des élèves aux rationnels.

Notre intégration en classe, d'une durée de 6 mois, nous a permis d'apprécier les effets du processus d'acculturation. Nous avons noté des changements importants dans la topogénèse et la chronogénèse des savoirs (Mercier, 1995); alors qu'à notre entrée, l'enseignante adoptait la démarche suivante, soit effectuer un exposé des savoirs et des démarches que les élèves devaient consigner dans leurs notes de cours, afin de pouvoir par la suite s'y référer pour effectuer des exercices et résoudre des problèmes, elle modifiait progressivement cette démarche en proposant des problèmes qui pouvaient permettre aux élèves de coordonner diverses connaissances et de construire ainsi des savoirs auxquels ils pouvaient faire référence dans la construction de leurs notes de cours

qu'ils pouvaient par la suite consulter pour effectuer divers exercices. Nous avons également pu apprécier les effets de l'intégration de diverses représentations des nombres rationnels sur l'avancée du temps didactique (Mercier, 1995) et la transformation des rapports et habitus des élèves aux nombres rationnels (Bourdieu, 1980). Ces changements se sont manifestés, entre autres, par : a) un investissement important lors de situations complexes; b) l'adoption de pratiques mathématiques plus attentives aux données numériques et aux relations entre ces données; c) l'apparition de conduites « inusitées » [ex. coordination de divers registres sémiotiques, exploitation de compositions additives/multiplicatives et d'écritures non conventionnelles]. De telles conduites sont similaires à celles observées dans plusieurs recherches effectuées auprès d'une population d'élèves qui ne présentent pas de difficultés d'apprentissage (Moss et Case, 1999). Les résultats de notre recherche soutiennent donc l'importance indéniable de considérer les élèves en difficultés comme étant mathématiquement compétents, comme le soulignent Empson (2003) et Houssart (2002). Il nous semble enfin important de souligner que le travail sur la représentation des nombres rationnels a constitué une niche particulièrement fertile, pour un travail fondamental sur les nombres rationnels, travail qui puisse permettre aux élèves de poursuivre plus harmonieusement leurs apprentissages, les nombres rationnels étant des objets de savoir incontournables.

ABSTRACT

Keywords (max 10): Mathematics education, teaching rational numbers, grade seven students, learning disabilities, ecological approach

Our research looks at how grade seven students with learning disabilities deal with rational numbers. Several studies have shown the biggest hurdle facing teachers and researchers is to avoid getting into the vicious cycle of minimizing the issues related to learning rational numbers and learning opportunities of students with a learning disability, which results in students not having the chance to test their knowledge, not taking the risk of becoming involved in their knowledge construction process and not appreciating the impact of their cognitive engagements.

In order to address this challenge, we integrated complex situations. Taking an acculturation approach, we found the ecological model to be a fitting tool to consider a "*dé-transposition/ré-transportation didactique*" (Antibi and Brousseau, 2000) and to rebuild a hope-filled memory (Brousseau et Centeno, 1998).

The aim of our research was to: 1) characterize changes in the institutional acculturation processes of the teacher, the researcher and the students as well as their effects on developing and managing teaching situations and 2) identify changes in students' knowledge of, habits related to and relationship with rational numbers.

Our own six-month classroom integration allowed us to appreciate the effects of the acculturation process. We noted significant changes in the topogenesis and chronogenesis of knowledge (Mercier, 1995). Initially, the teacher used the following approach: she presented the material and the steps the students would need to do; the students took notes they would then refer to when doing exercises and solving problems. The teacher would subsequently modify this approach by presenting problems that would allow students to bring together the different knowledge they had acquired, thus reconstructing the knowledge they could refer to when making course notes. The students could refer to these notes when completing subsequent exercises. We were also able to observe the effects of integrating various representations of rational numbers on the

advancement of didactical timelines (Mercier, 1995) as well as the changes in students' relationship with and habits related to rational numbers (Bourdieu, 1980). These changes manifested themselves in several ways: a) a noticeable effort during complex situations; b) the use of mathematical methods that took into account the numerical data sets and the relationship between these sets of data; c) the appearance of "unusual" behaviours [e.g. coordination of different semiotic registers, using additive/multiplicative operations and non-conventional writing]. Similar behaviours have been observed in several studies conducted on students who did not show signs of learning disabilities (Moss et Case, 1999). Our findings support the obvious importance of considering students with learning disabilities as being mathematically competent, as highlighted by Empson (2003) and Houssart (2002). We feel it is important to note that work done on the representation of rational numbers provided a particularly fertile niche for work on rational numbers, an essential element of knowledge, that would allow students to experience a more harmonious learning process.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES TABLEAUX

LISTE DES FIGURES

REMERCIEMENTS

À tous ceux qui m'ont soutenue pendant ces nombreuses années de labeur sans ne plus en demander l'échéance, mes sincères remerciements.

À débuter par cette grande dame, Gisèle Lemoyne, qui a su dépasser toute attente qu'une étudiante puisse avoir à l'égard d'une directrice de thèse. Son bagage intellectuel, son humilité, sa générosité, son support et sa disponibilité déconcertante m'ont permis de bénéficier de ses qualités humaines et intellectuelles. Par conséquent, elle demeurera pour moi une source d'inspiration intarissable.

J'ose espérer que le respect voué au milieu scolaire soit aussi tangible dans cette thèse que ma reconnaissance envers les élèves, l'enseignante et l'École Vanguard secondaire francophone, tous grands complices et vecteurs indispensables de cette thèse.

L'aboutissement de cette thèse n'aurait pu être imaginable sans les encouragements et le soutien inconditionnels de ma famille : ma mère, Andrée, mon père, Gérald, ma sœur, Marie-Claude, mes neveux, Hubert et Sacha et mon copain Alexandre.

Je souhaite aussi exprimer ma gratitude à Nicole Gaboury, celle pour qui la science pratique de la résolution de problèmes et de l'écoute active n'a pas de secret.

L'achèvement de ce travail est également empreint des conseils, mais surtout de l'amitié de deux formidables femmes Mélanie et Carole.

Enfin, je tiens à souligner l'aide indispensable du Conseil de recherche en sciences humaines du Canada (CRSH), du Fonds québécois de la recherche sur la société et la culture (FQRSC) et l'Université de Montréal qui m'ont octroyé des bourses pour la durée de mes études.

INTRODUCTION

Les difficultés d'apprentissage retiennent l'attention de la noosphère[1] éducative. Et pour cause! Les élèves, qui, au même titre que leurs camarades de classe, devraient réussir, méritent que l'on s'intéresse à la dynamique d'enseignement/apprentissage afin de leur permettre d'accéder à une instruction « de qualité », cet intérêt profitant par le fait même à tous les élèves.

Ce n'est donc pas par hasard qu'un nombre important de chercheurs se sont préoccupés et se préoccupent toujours de l'enseignement et l'apprentissage d'un objet mathématique incontournable et fort problématique, c'est-à-dire les nombres rationnels. Notre projet s'inscrit dans la continuité des recherches en didactique visant à soutenir le travail d'élèves en difficultés d'apprentissage en mathématiques, plus précisément, d'élèves de 1re secondaire.

C'est dans ce contexte que nous présenterons, au premier chapitre, la problématique de notre recherche; nous traiterons plus spécifiquement du contexte de notre étude, de même que des défis que soulève l'enseignement aux élèves présentant des difficultés, soit la dynamique du fonctionnement didactique et les adaptations nécessaires. Puis, nous traiterons, plus particulièrement, des nombres rationnels, objet incontournable et problématique dans l'enseignement au 1er cycle du secondaire. Ensuite, nous aborderons la nécessité de repenser l'enseignement des mathématiques, notamment celui des rationnels, auprès des élèves en difficultés d'apprentissage. Enfin, nous présenterons notre objectif général de recherche.

Le deuxième chapitre, le cadre conceptuel, consacrera une place prépondérante à la transformation des rapports problématiques des élèves aux nombres rationnels, laquelle sera amorcée par une rétrospective des recherches qui ont permis de préciser l'objet « nombre rationnel ». Les recherches qui ont permis d'identifier les rapports

---

[1] « Ensemble des personnes et des groupes intéressés à la création et à la communication des savoirs d'un certain domaine » (Brousseau, 1998, p.341).

problématiques de plusieurs élèves à cet objet de savoir seront ensuite présentées. Cette présentation sera suivie d'un exposé de recherches dans lesquelles des dispositifs d'enseignement/apprentissage des nombres rationnels ont été conçus et expérimentés auprès de diverses clientèles d'élèves. Les orientations et les objectifs de notre recherche seront ensuite précisés.

Le troisième chapitre portera entièrement sur la méthodologie de notre recherche. Les caractéristiques du milieu institutionnel et la description des principales phases d'acculturation institutionnelle visant l'élaboration et la gestion des situations didactiques, seront précisées. Nous donnerons ensuite un aperçu des dispositifs didactiques sur l'enseignement des nombres rationnels et préciserons les instruments de cueillette et de traitement des données.

Le processus de gestion et d'élaboration des dispositifs didactiques est, dans le cadre de la démarche écologique de notre recherche, un processus itératif et dynamique requérant l'insertion du chercheur et la prise en compte de la noosphère. Ce processus sera donc exposé de façon plus précise au quatrième chapitre. En effet, celui-ci tiendra compte du fonctionnement du système didactique dans lequel s'inscrit notre recherche via la construction de niches écologiques et la prise en compte des contraintes institutionnelles. Dans ce chapitre, un examen des conduites des élèves et des interactions didactiques permettra d'identifier des événements qui ont marqué l'évolution des rôles de l'enseignante, de l'étudiante-chercheure et de la chercheure, dans la conception et la gestion de dispositifs didactiques. Il permettra également d'apprécier l'évolution des connaissances, des pratiques et des rapports des élèves aux nombres rationnels. Nous compléterons ce chapitre, par une synthèse des résultats de notre recherche, au regard des objectifs poursuivis. Enfin, lors de la conclusion effectuée au dernier chapitre, nous exposerons les apports et limites de notre recherche et proposerons certaines pistes pour une poursuite de cette recherche.

Chapitre I

Problématique

Dans ce chapitre, nous donnons d'abord un bref aperçu des contextes socio-éducatif et didactique dans lesquels s'inscrit notre recherche sur l'enseignement auprès d'élèves de première secondaire présentant des difficultés d'apprentissage. Nous nous intéressons ensuite aux recherches qui ont permis de mieux appréhender, par la prise en compte des adaptations du système didactique et des habitus des élèves en difficultés, les défis que soulève l'enseignement auprès de ces élèves, notamment en mathématiques. L'importance de relever ces défis, particulièrement à l'entrée au secondaire, nous conduit à privilégier l'enseignement des nombres rationnels, objet riche et problématique, dont les effets se répercutent dans l'apprentissage de divers champs mathématiques. Ainsi, nous avons misé sur le travail de situations de résolution de problèmes qui puissent transformer les rapports problématiques des élèves aux nombres rationnels. Prioriser un tel enseignement suppose une prise en compte des programmes d'enseignement, des contraintes institutionnelles, d'une dé-transposition/re-transposition de cet objet, ce que rend possible l'inscription écologique de situations d'enseignement/apprentissage, une telle inscription impliquant une démarche d'acculturation du chercheur. Nous complétons ce chapitre par une présentation de l'objectif général qui oriente notre démarche de recherche.

1.1. Contextes socio-éducatif et didactique de notre recherche sur l'enseignement auprès d'élèves du 1er cycle du secondaire présentant des difficultés d'apprentissage.

Les élèves présentant des difficultés d'apprentissage constituent l'effectif le plus important de la population en adaptation scolaire au Québec (Tardif et Presseau, 2000). Depuis les dernières années, on notait une augmentation sensible de cet effectif dans le secteur de l'adaptation scolaire de l'enseignement secondaire. À la suite de la mise à jour de la Loi sur l'instruction publique (1997) et de la révision de la politique sur l'adaptation scolaire (MELS, 1999), les élèves en difficultés d'apprentissage sont maintenant désignés «élèves à risque[2]» et leur signalisation est abolie. Seuls les élèves présentant des troubles graves sont alors identifiés. Il est ainsi plus difficile de connaître le nombre d'élèves

[2] Puisque le nouveau terme générique «élèves à risque» englobe une hétérogénéité d'appellations et d'apprenants, nous préférons employer la terminologie d'élève en difficultés d'apprentissage.

éprouvant des difficultés d'apprentissage et de leur assurer un soutien adapté. Pour rendre compte de la situation de ces élèves, le ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport (MELS, 2006a, p.64) recourt au terme *retard scolaire* : « *Le retard scolaire peut être observé lorsqu'un élève inscrit dans une classe est plus vieux que l'âge attendu pour cette même classe. Ainsi en est-il pour les élèves âgés de plus de […] 12 ans (au 30 sept.) en 1re secondaire».* Parallèlement, la mise sur pied de la réforme de l'éducation, ayant aboli le redoublement au primaire, occasionne l'arrivée massive, en 1re secondaire, d'élèves en difficultés d'apprentissage qui ne sont pas reconnus comme ayant un retard scolaire. Ainsi, la diminution du pourcentage d'élèves en première secondaire considérés en «retard scolaire» (MELS, 2006a), cache une tout autre réalité! D'ailleurs, un rapport sur l'effet des changements mis en place par la réforme de l'éducation sur les apprentissages des élèves au primaire stipule que « l*es redoublements sont particulièrement importants en 1re secondaire. Cette situation n'est pas étonnante si l'on pense au fait que tous les élèves du primaire, y compris ceux et celles qui éprouvent des difficultés, seront tôt ou tard admis au secondaire, ne serait-ce que parce qu'ils ont atteint l'âge de 13 ans* » (MELS, 2006b, p.66).

Selon les données provenant du ministère de l'Éducation du Québec (MEQ, 2006a), le pourcentage d'élèves en retard scolaire, en 2004-2005, s'élève à 26% au secondaire, et ce, sans tenir compte des élèves décrocheurs ou de ceux qui effectuent un passage vers la formation professionnelle ou vers la formation aux adultes. Ce phénomène n'est pas exclusif au Québec. Dans plusieurs pays, un grand nombre d'élèves du secondaire abandonnent leurs études ou font face à des difficultés, et ou, à des échecs (OCDE, 1998; Montague, Warner et Morgan, 2000; Tardif et Presseau, 2000).

Si socialiser, instruire et qualifier constituent la mission de l'école québécoise, le programme de formation du premier cycle de l'enseignement secondaire précise que «*la maîtrise de la mathématique constitue un atout significatif pour l'insertion dans une société où ses retombées pratiques sont aussi nombreuses que diversifiées*.» (MELS, 2006, p.124). Or, selon plusieurs études, les échecs sont plus fréquents en mathématiques qu'en français (MEQ, 2004a, MELS, 2006a; Janosz et Duval, 2001). Ainsi, faire en sorte qu'un plus grand nombre d'élèves puissent compléter leurs études secondaires et accéder à des emplois honorables est une priorité sociale. Notre système d'éducation, nos écoles, et nos enseignants, sont-ils en mesure de relever ce défi?

C'est dans un tel contexte que nous nous intéressons à l'enseignement auprès d'élèves de 1re secondaire présentant des difficultés d'apprentissage en mathématiques. Pour mieux apprécier la complexité d'un tel enseignement, il nous semble opportun de situer d'abord brièvement notre représentation des élèves en difficultés. Nous choisissons délibérément d'utiliser le terme *élèves en difficultés d'apprentissage* plutôt que celui d'*élèves à risque*[3], terme utilisé par le MEQ (2000), afin de restreindre les différentes interprétations possibles[4]. De façon générale, nous faisons nôtre la vision adoptée par Conne (2004[5]) qui suggère de définir les élèves en difficultés d'apprentissage *« par opposition à la facilité d'apprendre, et de rechercher ce qui entrave cette facilité»*. Nous empruntons à Briand et Chevalier (1995, p. 26) quelques définitions qui vont nous permettre de mettre en exergue la complexité de la dynamique de «l'élève», voire « de l'enseignant » en difficultés :

> *« Une situation d'apprentissage est une situation qui permet à un sujet de passer d'un état de connaissances à un autre état de connaissances*
>
> *Une situation est didactique lorsqu'un individu (en général le professeur) a l'intention d'enseigner à un autre individu (en général l'élève) un savoir donné. »*

À la lumière de ces propos, nous pouvons parler des difficultés d'apprentissage en termes d'écart entre les attentes didactiques d'une situation d'apprentissage et les apprentissages réalisés. Cette représentation est celle qui avait cours avant la réforme actuelle et qui s'énonçait ainsi: « *difficultés d'un élève à progresser dans ses apprentissages en relation avec les attentes du Programme de formation*» (MEQ, 2003,

---

[3] Nous adhérons toutefois à ce qu'est l' «élève à risque» dans sa perspective anthropologique et sociale. Le statut de risque est considéré comme un construit social, historique et culturel. Ainsi, certains concepts émergents, dont celui de la résilience, permettent d'entrevoir un processus dynamique conduisant l'individu à bien s'adapter en dépit de l'adversité (Trudel, Puentes-Neuman et Ntebutse, 2002; Schonert-Reichl, 2001).
[4] Voir la recension des écrits sur ce concept effectuée par Schmidt, Tessier, Drapeau, Lachance, Kalubi et Fortin (2003) et le rapport du colloque pancanadien sur l'enfance et la jeunesse à risque publié par le Conseil des statistiques canadiennes de l'éducation (Schonert-Reichl, 2001).
[5] Communication présentée au Département d'éducation et formation spécialisées de l'UQAM.

p.2). L'élève serait identifié en difficultés graves ou légères d'apprentissage à la suite d'une évaluation pédagogique de type sommatif montrant un écart entre le potentiel et le rendement scolaire de l'élève (plus d'un an : difficultés légères; plus de deux ans : difficultés graves), et ce, dans les matières de base (français et mathématiques). Comme le montre Kirk (1962, dans Brunet, 1999), une telle définition rejoint celle que l'on retrouvait dans plusieurs pays. Il importe de mentionner qu'elle est aussi reconnue et toujours utilisée dans certaines institutions scolaires, notamment, dans les écoles spécialisées Vanguard.

La définition précédente conduit fort naturellement à se questionner sur ce qui peut entraver «cette facilité d'apprendre», pour reprendre les propos de Conne (2004). L'étude pionnière et fondamentale s'intéressant aux difficultés d'apprentissage en didactique des mathématiques est, selon nous, celle appelée *« Le cas de Gaël »* (Brousseau et Pérès, 1981); cette dernière s'attarde aux conditions qui provoquent les comportements d'échec d'un élève en difficultés en considérant la dynamique du processus enseigner/apprendre, laquelle met en relation un savoir particulier, un apprenant et un enseignant. Cette œuvre centrale a permis de mieux saisir les comportements émergents chez ce type d'élèves, se manifestant par des difficultés à donner du sens à la question posée, à mettre en œuvre des stratégies de contrôle de la réponse obtenue et à recourir fréquemment à des recettes. De façon très générale, les comportements manifestés par Gaël semblent converger vers l'évitement[6] du conflit de savoir, tel que l'illustrent les propos suivants : « Je vais faire comme j'ai appris avec la maîtresse... » et « Je pose, je retiens… les dizaines... » (Brousseau et Pérès, 1981, p.9). Cet élève se réfugie rapidement dans certaines habitudes scolaires - invariants auxquels il a octroyé un statut particulier (ex. gage de réussite, de sécurité)- évitant ainsi de «se» remettre en cause. Par ailleurs, les situations de diagnostic/rééducation proposées à Gaël ont permis de révéler que les difficultés de cet élève ne provenaient pas de causes psychogénétiques: cet élève n'avait pas de déficit au niveau des schèmes opératoires, ni

[6] «Il était possible de proposer des explications psychologiques à ce comportement, mais elles ne donnaient pas de moyen de corriger les évitements, et elles centraient l'intérêt des chercheurs sur une caractéristique de l'enfant ou sur ses compétences, au lieu de rester au niveau des comportements et des conditions qui le provoquaient ou qui pouvaient le modifier. Ces comportements manifestent le refus, conscient ou non, de la part de l'enfant, d'accepter sa part de responsabilité dans l'acte de décider en situation didactique et donc d'apprendre, face à un adulte. » (Brousseau et Pérès, 1981, p. 4)

de carence au niveau des structures logico-mathématiques nécessaires à la réalisation des tâches dans lesquelles il échouait. Comment alors expliquer les comportements (échecs) de cet élève ?

Ce type de manifestations peut s'expliquer, entre autres, par le statut de l'enseignant: le détenteur du savoir; celui qui juge de son adéquation; celui qui attend un comportement particulier en fonction de la tâche soumise; celui à qui l'on doit «*obéir et satisfaire*». Le cas de Gaël n'est pas isolé en soi; il est plutôt le reflet de l'autorité légitimante[7] de l'institution scolaire. Ainsi,

> *«([...] dans une situation d'enseignement, préparée et réalisée par un maître, l'élève a en général pour tâche de résoudre le problème (mathématique) qui lui est présenté, mais l'accès à cette tâche se fait à travers une interprétation des questions posées, des informations fournies, des contraintes imposées qui sont des constantes des façons d'enseigner du maître. Ces habitudes (spécifiques) du maître attendues par l'élève et les comportements de l'élève attendus par le maître, c'est le contrat didactique.»* (Brousseau, 1980, dans Sensevy, 1998, p.29)

La notion de contrat didactique nous laisse entrevoir la complexité du travail « enseignant » auprès des élèves présentant des difficultés d'apprentissage et, plus encore, lorsqu'il s'agit d'élèves du secondaire qui ont pu développer des rapports problématiques à l'enseignement et à l'apprentissage, aux responsabilités qui sont partagées (Mercier, 1998). Considérer la complexité de la relation didactique permet, notamment, de re-considérer la représentation des élèves en difficultés d'apprentissage sous l'angle de l'hétérogénéité didactique, qui réfère à l'appropriation du savoir et caractérise la situation d'échec en termes de position de l'élève dans une tâche particulière, en délestant ainsi les élèves du statut statique «*au-dessous de la norme*», ce que Sarrazy (2002) nomme l'hétérogénéité péri-didactique. Bien qu'il appert que l'élève en difficultés d'apprentissage se situe fréquemment dans la position d'échec**,** ce concept de « position » peut expliquer l'étonnement de divers enseignants, qui, présentant des situations défis (Houssart, 2002) et inhabituelles (Godot, 2009), ont été subjugués devant l'investissement et le «rendement» des élèves en difficultés d'apprentissage. Dans cet ordre d'idées, le travail de rééducation effectué auprès de Gaël fait notamment émerger

[7] Terme emprunté à Douglas (1989, dans Sensevy, 1998).

la nécessité de la dévolution comme moyen d'entrer dans le contrat didactique et de permettre d'investir les situations, «*situations qui vont exiger de lui des anticipations, des prévisions, des prises de responsabilité, c'est-à-dire un investissement de l'objet de la connaissance »* (Brousseau et Warfield, 2002, p.12). Après un travail de longue haleine, les situations ont permis de déclencher une nouvelle attitude chez Gaël qui a eu, par la suite, une bonne intégration en classe et a rapidement compensé ses lacunes.

Dans le but de comprendre la dynamique de l'élève en difficultés et de le soutenir efficacement, la perspective anthropodidactique (Brousseau, 1980; Sarrazy, 2002), à laquelle nous adhérons, rend compte de la fluctuation des difficultés d'apprentissage: l'hétérogénéité didactique n'est pas une propriété intrinsèque et naturelle à l'élève. Comme en font état DeBlois et Giroux (1998, p.2), «*en cherchant à identifier les caractéristiques de l'élève en difficultés d'apprentissage, on fait l'économie de l'étude du système dans lequel se manifestent ces difficultés*». Brousseau (1980, p.181) illustre bien cet état de fait : «*Mettre en cause l'élève, uniquement l'élève, me paraît une attitude analogue (aussi vaine) que celle qui chercherait à expliquer pourquoi l'eau fuit d'un sceau percé en analysant les différences de qualité entre l'eau qui est sortie et celle qui est restée, comme si les raisons de la fuite résidaient dans des qualités propres à l'eau* ». Ces citations mises en exergue montrent de façon indéniable que les difficultés d'apprentissage dépendent d'un ensemble de corrélats au sein du système scolaire. D'ailleurs, il nous semblerait plutôt singulier de ne considérer que l'élève dans le processus menant à l'échec scolaire.

1.2. Les défis que soulève l'enseignement aux élèves présentant des difficultés d'apprentissage, particulièrement lorsqu'ils sont en 1re secondaire.

Afin de rendre compte de l'ampleur et de la complexité de l'enseignement aux élèves en difficultés d'apprentissage, nous présentons brièvement quelques études qui ont permis de mieux comprendre le fonctionnement du système didactique et ses aménagements au regard de la population d'élèves.

1.2.1. Le fonctionnement du système didactique et les adaptations nécessaires

Pour caractériser le fonctionnement du système didactique, nous traiterons de la chronogénèse, de l'avancée du temps didactique et de la topogénèse des savoirs. Nous nous intéresserons, par la suite, à la construction de la mémoire didactique qui constitue un défi particulier en première secondaire.

1.2.1.1. La chronogénèse et l'avancée du temps didactique

Dans les classes régulières, la gestion du temps didactique est, en principe, facilitée par les progressions des savoirs appris par un nombre appréciable d'élèves. La chronogénèse réfère à la façon dont s'ordonne l'étude des notions du programme, c'est-à-dire le défilé des objets de savoir. Elle oriente la gestion du temps didactique, soit le temps dévolu à l'enseignement et à l'apprentissage de chacun des savoirs prévus au programme d'études (Sensevy, 1998; Mercier, 1995a, 1995b, 1998).

Dans le milieu pratique de l'enseignement spécialisé, l'enseignant est souvent confronté à un étirement du temps didactique, en raison des problèmes d'apprentissage rencontrés par plusieurs élèves. En d'autres mots, on assiste régulièrement à des régressions, à des piétinements (Lemoyne et Lessard, 2003), à des surinvestissements (Conne, 2003) ou encore, à des reprises d'activités, ce qui affecte la chronogénèse et par conséquent, l'avancée du temps didactique. Cette réalité indubitablement liée à cette population scolaire contribue fortement à amoindrir le rapport nouveau/ancien des connaissances. Ainsi, il n'est pas surprenant de remarquer, chez ces apprenants, une baisse de désir d'apprendre et d'appétence (Sensevy ,1998). Le schéma reproduit à la page suivante, tiré de l'étude effectuée par Giroux et René de Cotret (2003, p.163), illustre bien comment la prise en compte des élèves en difficultés régule l'organisation temporelle. Ces chercheures ont analysé les pratiques d'un même enseignant auprès de deux populations différentes.

	Leçon 1	Leçon 2	Leçon 3
CD	|___*T₁*_______/__D₁__|	|__*C₁*___/___*T₂*__/__D₂___|	|__*C₂*__/___*T₃*__/_D₃_____|
CR	|___*T₁*_____/_D₁₋₂___|	|___*C₁*_/_*T₂*_/_*C₂*__/_D₂₋₃_|	|_*C₂*_/_*T₃*_/_*C₃*__/_D₃₋₄__|
	T_i : exposé de la théorie en lien avec les éléments de savoir *i* D_i : tâches que les élèves ont à effectuer individuellement (devoirs) C : correction en classe de ces tâches *En groupe* Individuel		

Figure 1: Comparaison de l'organisation d'une même leçon dans une classe d'élèves doubleurs (CD) et dans une classe d'élèves réguliers (CR)

À la lecture de ce tableau, nous remarquons que, dans la classe d'élèves doubleurs, chaque tâche faisant appel à un nouveau savoir i a été précédée d'un exposé théorique en lien avec les éléments de savoir i (T_i). Ceci traduit donc, de la part de l'enseignant, la nécessité de rendre explicite une partie du contrat aux élèves en difficultés pour lesquels le rapport aux savoirs anciens est souvent problématique. Cependant «e*n morcelant* [ainsi] *la tâche, l'obtention de la réussite peut se faire au détriment de l'appropriation du savoir, de la reconnaissance de l'utilité et du fonctionnement de la connaissance»* (Giroux, 2006, p.6). Cette hiérarchisation n'est pas sans affecter la part d'engagement cognitif exigée de l'élève dans son processus d'apprentissage, comme en témoigne la topogénèse des savoirs.

1.2.1.2. La topogénèse des savoirs.

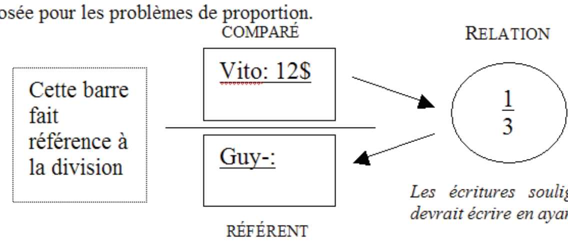
La topogénèse constitue l'ensemble des tâches dont respectivement le professeur et les élèves ont la charge (Chevallard, 1991). Comme l'ont montré Mercier (1995a, 1995b) et Sarrazy (1996), la tendance fort compréhensible de plusieurs enseignants est souvent de piloter pas à pas la situation d'apprentissage, de l'accompagner de ressources en suggérant une procédure ou un outil à mettre en œuvre, minimisant par le fait même l'engagement des élèves dans la construction de leurs connaissances. Ces adaptations de l'enseignement, tenant compte de la spécificité des élèves en difficultés, peuvent, sans nier l'effet de contraintes auxquelles fait face l'enseignant, refléter diverses représentations.

Les adaptations peuvent être connotées à approche affective, selon laquelle, l'élève en difficultés d'apprentissage est perçu comme ayant une faible estime de soi et, par conséquent, recourir rapidement à des algorithmes, à des techniques générales de calcul, permettrait d'assurer sa «réussite», favorisant ainsi une meilleure perception de ses compétences et par conséquent, sa motivation et son engagement dans des tâches (Viau, 1994). Or, comme le rappelle Giroux (2006, p.6), *«résister à l'obtention facile et rapide d'une bonne réponse constitue un grand défi dans l'enseignement des mathématiques et tout particulièrement auprès des élèves en difficulté»*. L'aspect motivationnel, souvent invoqué par des chercheurs et des enseignants pour justifier certaines adaptations, rend-il compte de la constitution fondamentale des situations d'enseignement/apprentissage? Que penser de ces situations qui témoignent d'un souci de préserver l'estime de soi des élèves et de les motiver, mais qui font passer au second plan l'émergence, la construction et la consolidation des connaissances? Comme le suggèrent Joshua et Dupin (1989), ne pouvons-nous pas trouver un compromis, c'est-à-dire des situations qui pourraient accroître l'estime de soi des élèves et les motiver à apprendre, des situations intrigantes par les défis cognitifs et l'envie de savoir qu'elles représenteront pour les élèves?

Il est aussi possible que les adaptations de l'enseignement soient motivées par un souci d'économie cognitive pour l'élève. Différentes stratégies sont enseignées à l'élève, mais la stratégie appropriée est généralement retenue par l'enseignant qui sélectionne une tâche dans laquelle celle-ci sera féconde. Un tel choix limite l'investissement de l'élève dans la reconnaissance et dans la sélection de la stratégie estimée « la plus pertinente ». De plus, cela peut inhiber l'élève dans l'exploitation de stratégies différentes et annihiler tout un travail fondamental de confrontation des stratégies et d'élaboration des conditions qui confèrent à cette stratégie son caractère économique. Nous pouvons ainsi facilement entrevoir que si les difficultés d'apprentissage ne sont perçues que du côté de l'élève, l'enseignant prend davantage en charge la responsabilité de l'apprentissage. Toutefois, ces pratiques ne sont pas étrangères à celles qui sont véhiculées dans plusieurs recherches. Le dispositif suivant visant à accroître la compétence des élèves à résoudre des problèmes impliquant des nombres rationnels nous semble bien caractériser un tel enseignement (Xin, Jitendra, Deatline-Buchman, Hickman et Bertram**,** 2002, p.12, traduction libre).

"Vito earned $12 from shoveling snow over the weekend. He earned 1/3 as much as his friend Guy did. How much did Guy earn from shoveling the snow?"

1) Trouver et souligner la phrase indiquant la relation (ex. *He earned 1/3 as much as his friend Guy did*).
2) Trouver et inscrire dans le diagramme le référent (Guy) et le comparé (Vito). Il est indiqué aux élèves que le référent se trouve après les mots clés tels que *as much as, as may as,* et que le comparé est celui précédant le référent.
3) Relire le problème et trouver l'information concernant le référent et le comparé, ainsi que leur relation. Puis inscrire ces informations dans le diagramme (the $ Vito earned : 12$; the $ Guy earned : 36$; 1/3 à inscrire dans l'ovale).
4) Transformer le diagramme en équation mathématique et la résoudre (12/? = 1/3)
5) Écrire une réponse complète et la vérifier en utilisant le produit croisé. Une démarche similaire est proposée pour les problèmes de proportion.



Les écritures soulignées représentent ce que l'élève devrait écrire en ayant sous la main un exemple complet.

L'exemple précédent illustre bien le constat effectué par Houdement (1999) quant à la prégnance du courant de l'apprentissage méthodologique dans les manuels scolaires et les propos suivants de Julo (2002, p.43) :

> « *Ce serait par l'enseignement de règles d'actions générales (méthodes) que l'on aiderait le mieux ceux qui ont des difficultés en mathématiques. En dehors du fait que rien ne nous permet d'étayer, ni théoriquement, ni empiriquement, les fondements de cette approche, le risque de faire de la résolution de problèmes pour de la résolution de problèmes, indépendamment de toute finalité conceptuelle est grand* ».

En effet, que reste-t-il de l'activité d'apprentissage? Étant guidé pas à pas dans les gestes à poser, l'élève n'est pas invité à donner un sens à ces gestes; seuls le repérage et le calcul demeurent à la charge de l'élève. À l'aide de mots inducteurs, l'élève n'a qu'à repérer et placer les données (types de mesures et mesures) aux endroits appropriés, définis à l'avance, puis effectuer l'opération. Viser la réussite pour tous est un but qui peut ainsi être atteint par une réduction des savoirs visés ou encore, par un enseignement de gestes et de stratégies qui vont à l'encontre d'une construction de savoirs mobilisables dans les tâches nouvelles.

Une prise en charge « presque complète » de la situation d'apprentissage par l'enseignant met en place un contrat didactique (Brousseau, 1980) qui devient un obstacle, souvent très résistant et durable, à l'engagement des élèves et à la construction des connaissances. À titre d'exemple, lors d'une collecte de données ayant pour objectif de comprendre comment des étudiantes de 4e année en formation initiale des maîtres percevaient les élèves en difficultés d'apprentissage, nous avons pu apercevoir sur une copie les propos suivants: « *L'élève en difficultés a besoin d'une aide constante pour le guider en mathématique [...] Il demande de l'aide sans avoir essayé*». Les propos relatés par cette étudiante reflètent ceux de beaucoup d'enseignants. En effet, dans une telle perspective, les enseignants sont portés spontanément à intervenir précocement auprès de cette population qui comprend très vite comment en tirer profit.

Comment ne pas s'enliser dans le cercle vicieux d'une réduction des enjeux de l'apprentissage et des possibilités d'apprentissage de l'élève en difficultés, celui-ci n'ayant pas la chance de mettre à l'épreuve ses connaissances, d'oser s'engager dans une démarche de construction de connaissances et d'apprécier les effets de son engagement cognitif ?

1.2.1.3. La construction de la mémoire didactique

Les questions et les exemples d'adaptation du fonctionnement du système didactique précédemment évoqués semblent aussi témoigner d'une influence considérable des représentations de l'élève en difficultés d'apprentissage sur la mémoire didactique du système (Brousseau et Centeno, 1991; Centeno, 1995). «*La mémoire de l'enseignant sera ce qui conduit à modifier ses décisions en fonction de son passé scolaire commun avec ses élèves… Le caractère «didactique» de cette «mémoire» vient de ce que les décisions modifiées concernent les rapports de l'élève avec le savoir*» (Brousseau et Centeno, 1991, p. 172). Les mémoires de l'enseignant et de l'élève se nourrissant mutuellement, l'enseignant se trouve parfois dans une situation inextricable: ses représentations modulent ses décisions qui alimentent ses représentations de l'élève en difficultés d'apprentissage. D'autre part, il appert que l'élève en difficultés est souvent considéré «sans mémoire» (Centeno, 1995), comme en témoignent les propos «Je vous l'ai dit avant» et les répétitions d'activités, que l'on pourrait qualifier en quelque sorte de psittacisme.

Si la force de cette mémoire peut conduire l'enseignant à « restreindre ses exigences », en revanche, son accès limité complexifie considérablement le travail de l'enseignant oeuvrant auprès d'élèves du premier cycle du secondaire, d'élèves nouvellement entrés dans l'institution « *École secondaire* ». Disposant de peu d'informations sur les pratiques d'enseignement et d'apprentissage ayant cours au primaire, sur les situations ou les contextes associés aux objets de savoir, les enseignants doivent, dans l'immédiat, s'appuyer sur une mémoire didactique (Brousseau et Centeno, 1991; Centeno, 1995) qui n'est marquée que par les souvenirs des situations, des événements et des interactions récents avec leurs élèves. En revanche, les mémoires de leurs élèves sont façonnées de pratiques, de situations, d'événements didactiques qu'ils ont intégrés depuis leur entrée à l'école primaire. Au fil des ans, la mémoire des enseignants de 1re secondaire s'enrichit des rencontres avec le passé des élèves, passé que les enseignants peuvent appréhender s'ils leur donnent la parole et s'ils analysent leurs productions. L'histoire didactique des élèves construite par les enseignants peut toutefois s'avérer fort différente de la leur, ce qui n'est pas sans poser problème.

Les histoires didactiques respectives des élèves et des enseignants nous permettent non seulement d'apprécier les défis de l'enseignement, mais aussi de mieux comprendre certaines pratiques des enseignants auprès d'élèves peu performants de 1re secondaire. Lors de périodes de récupération (Mercier, 1995b; Lemoyne et Lessard, 2003), on assiste très souvent à des reprises ou à des recyclages de dispositifs d'enseignement. Si la gestion du rapport ancien/nouveau détermine l'avancement du temps didactique (Mercier, 1995b, 1998), en revanche, le recyclage de dispositifs ne peut faire illusion. En effet, les élèves perçoivent très vite qu'ils n'avancent pas et réagissent souvent en se désengageant des tâches ou en prolongeant de diverses façons des «pauses notionnelles» : indiscipline, réponses impulsives, etc. (Desbiens et Bowen, 2002; Bowen, Desbiens, Rondeau et Ouimet, 2000; Hinshaw, 1992). Ces attitudes et comportements « non productifs » chez les élèves en difficultés s'ancrent davantage au cours des années et conduisent fréquemment à un désinvestissement des mathématiques (Mercier, 1995b; Conne, 1999; Favre, 1999; Julo, 1995), voire même, de l'acte d'apprendre, ce dernier désinvestissement étant qualifié d'«impuissance apprise» par Viau[8]. Ces comportements sont tributaires des habitus des élèves.

1.2.2. La prise en compte des habitus de l'élève en difficultés d'apprentissage en 1re secondaire

Dans la mesure où l'histoire didactique de l'élève en difficultés d'apprentissage s'édifie, celui-ci est plus enclin à entretenir des habitus non propices à l'apprentissage. Transformer ces habitus constitue un enjeu déterminant de l'enseignement auprès de ces élèves. Pour saisir la portée d'un tel projet, il importe de préciser le concept d'habitus et son empreinte dans les pratiques des élèves.

Le concept d'habitus est au cœur de la théorie et de la pensée de Pierre Bourdieu, sociologue dont les recherches ont inspiré plusieurs études en sciences humaines. Dans le champ des sciences de l'éducation, le livre qu'il a publié avec Jean-Claude Passeron (Bourdieu et Passeron, 1970), sur la reproduction sociale, constitue un événement déterminant. Ces chercheurs montrent comment les élèves provenant de milieux «socio-culturels» favorisés, et qui disposent d'habitus leur permettant de mieux s'adapter aux exigences de l'institution scolaire, que ne peuvent le faire les élèves provenant de milieux « socio-culturels » défavorisés, réussissent mieux leurs études. Bourdieu (1980, p. 92) définit ainsi le concept d'habitus:

> *« Les conditionnements associés à une classe particulière de conditions d'existence produisent des habitus, systèmes de dispositions durables et transposables, structures structurées prédisposées à fonctionner comme structures structurantes, c'est-à-dire en tant que principes générateurs et organisateurs de pratiques et de représentations qui peuvent être objectivement adaptées à leur but*

---

[8] « *L'impuissance apprise (ou résignation acquise) est une réaction d'abandon de la part de l'élève qui est provoquée par la croyance que quoiqu'il fasse, il n'arrivera à rien* (Viau, 1999, p.3) »

> *sans supposer la visée consciente de fins et la maîtrise expresse des opérations nécessaires pour les atteindre, objectivement réglées et régulières sans être en rien le produit de l'obéissance à des règles, et, étant tout cela, collectivement orchestrées sans être le produit de l'action organisatrice d'un chef d'orchestre.* »

L'habitus fait ainsi référence aux schèmes producteurs de pratiques; les actes qu'un élève pose et leurs résultats exercent une influence non négligeable sur sa perception des choses et sur ses dispositions à agir et à interpréter les événements qu'il rencontre. Il importe toutefois de souligner que si l'habitus détermine la pratique, il est aussi déterminé par la pratique. En effet, les premières expériences façonnent l'individu et l'enregistrement de ces repères marque de façon significative ses actions futures. Enfin, comme le porte à notre attention Mounier (2001), l'habitus est un levier déterminant de l'engagement de l'individu dans son milieu. Ainsi, ce qu'il peut percevoir comme naturel et familier relativement aux intérêts qu'il porte au champ ne l'est pas forcément pour quelqu'un d'autre. Rappelons également que, selon Bourdieu (1971), le champ est une sorte de microcosme dans un milieu social global qui est régi par des lois ou propriétés qui lui sont propres, donc celles-ci peuvent être analysées indépendamment des logiques externes.

Les concepts d'habitus et de champ qui ont permis, entre autres, de mieux comprendre les mécanismes de reproduction des hiérarchies sociales, notamment, d'identifier et d'examiner certains déterminants de la réussite scolaire d'élèves issus de milieux socioculturels différents, nous apparaissent particulièrement pertinents pour apprécier la complexité de l'enseignement auprès d'élèves présentant des difficultés d'apprentissage en mathématiques. Comme nous en avons fait état dans les sections précédentes, les élèves présentant des difficultés d'apprentissage témoignent de pratiques mathématiciennes et de représentations des savoirs et des situations d'enseignement et d'apprentissage qui leur sont proposées, souvent fort problématiques. En nous référant à la définition des habitus présentée précédemment, nous pourrions dire que les conditions d'existence de ces élèves inscrits dans des classes spéciales, classes regroupant des élèves présentant des difficultés d'apprentissage, ont produit des habitus qui entravent leurs démarches d'apprentissage et influent également sur les démarches des enseignants. Comme le souligne Bourdieu (1980, p. 91), « *Les expériences qui sédimentent l'habitus* *en font « la matérialisation de la mémoire », mémoire qui oriente les pratiques et se nourrit de ses pratiques ».* Une transformation des habitus des élèves en difficultés s'avère ainsi un tremplin non négligeable pour une transformation des pratiques enseignantes, voire de certains des habitus des enseignants en classes spéciales.

Viser une transformation des habitus des élèves porte à notre attention toute la complexité des relations, des situations et des évènements qui peuvent façonner les rapports d'un individu à une institution, d'un élève à une institution, à un savoir. « *Ainsi dans une situation donnée, la malléabilité d'un habitus, son potentiel de transformation, son adaptation sont proportionnels à son degré de sédimentation, en d'autres termes à la couche impliquée dans l'action. La transformation potentielle de l'habitus se fera selon la couche impliquée et selon l'intensité, l'inédit et la répétition de cette expérience.* » (Hilgers, 2006, para.24). Comme le souligne Sensevy (1998), il importe donc de prendre en considération les habitus inculqués par l'institution « classe » pour penser l'apprentissage et l'enseignement, c'est-à-dire de tenir compte entre autres « *des normes culturelles construites dans l'action quotidienne, des plus générales aux plus typiques à chaque classe*» (Veyrunes, Durny, Flavier et Durand, 2005, p.472).

1.3. Les enjeux mathématiques et curriculaires associés à l'enseignement/ apprentissage des nombres rationnels : objets riches, problématiques et incontournables

S'il est un domaine dans lequel les élèves de 1re secondaire présentant des difficultés d'apprentissage, mais également plusieurs élèves faisant partie de classes régulières, entretiennent des rapports problématiques aux savoirs et aux pratiques qui lui sont associés, rapports fréquemment associés à des habitus qui entravent leurs démarches d'apprentissage et influent également sur les démarches des enseignants, c'est bien celui des nombres rationnels. Un tel constat nous a incitée à privilégier l'enseignement des nombres rationnels. Nous rappelons, à la page suivante, les propos de Rouche (1998, p. 1) qui porte à notre attention l'importance de s'attarder à cet objet d'étude.

> *« Les fractions sont un des premiers et principaux terrains où se développe le dégoût des mathématiques et la conviction, à peu près toujours fausse, que l'on est incapable de cette activité « réservée aux plus intelligents ». « Oh moi les mathématiques » dit-on dans l'âge adulte, en repensant entre autres aux fractions. Celles-ci sont comme des insectes nuisibles qui s'attaquent aux écoliers et dont les piqûres entraînent d'interminables séquelles intellectuelles et morales.»*

Ces rapports sont une source de préoccupations pour les enseignants du primaire, du secondaire, voire du collégial. Ils ont été maintes fois examinés par les chercheurs en didactique, ce qui a permis de clarifier le concept de fraction -concept clé dans l'enseignement des rationnels-, de mieux comprendre les difficultés des élèves, voire des enseignants, dans l'interprétation et l'utilisation des nombres rationnels et, enfin, de concevoir et de mettre à l'épreuve divers dispositifs didactiques sur l'enseignement des nombres rationnels. Nous aurons l'occasion de nous attarder plus longuement sur ces études dans le prochain chapitre. Pour l'instant, nous nous limiterons à rappeler l'importance indéniable et curriculaire que revêt l'enseignement des nombres rationnels.

Dans l'enseignement primaire et plus encore, dans l'enseignement secondaire, selon les programmes actuels, les nombres rationnels occupent un espace important. Et pour cause ! Comme le rappelle Kieren (1988, 1992, 1994, 1995), ces nombres constituent un noyau fort important des mathématiques, modifiant en profondeur notre conception du nombre et servant de tremplin, mais aussi d'obstacle, pour « penser » les nombres réels. Les difficultés des élèves relatives à cet objet d'enseignement/apprentissage entachent non seulement la poursuite de l'apprentissage de l'arithmétique, mais également des autres champs des mathématiques (algèbre, géométrie, probabilité : calculs algébriques, calculs des probabilités, des exposants). Par exemple, l'arrimage de l'arithmétique à l'algèbre, ou la transition entre l'arithmétique et l'algèbre, constitue un problème toujours actuel, comme le montrent plusieurs recherches récentes[9]. De plus, Nadine et Guy Brousseau (1987) soulignent dans leur ouvrage sur les décimaux que les nombres rationnels interviennent dans la résolution de problèmes relevant de domaines importants des mathématiques, tels les problèmes d'applications linéaires, d'échelles, de changement d'unités, de pourcentage, de vitesse, de volume, de surface, etc. Dans son ouvrage didactique consacré aux fractions, Rouche (1998) montre

[9] Voir, entre autres, la synthèse de plusieurs de ces études effectuées par Barallobres (2006).

l'importance indéniable des fractions dans le cursus de l'enseignement des mathématiques du secondaire. Il montre ainsi comment les fractions interviennent dans le calcul des probabilités, dans le calcul des exposants et, enfin, dans le calcul algébrique. Nous résumons ces propos.

Calcul des probabilités

L'importance des fractions dans l'enseignement des probabilités est indubitable. Comme le souligne Rouche (1998), l'expression d'une probabilité par une fraction est plus évocatrice que ne l'est l'expression de cette même probabilité par un nombre à virgule : dire qu'on a 2 chances sur 6 d'obtenir le 1 ou le 2 lorsqu'on lance un dé est plus évocateur de l'interprétation de l'expérience en pensée que de dire que la probabilité est de 0,333… d'obtenir le 1 ou le 2. L'expression d'une probabilité par une fraction nous permet plus aisément d'associer un rapport entre les cas favorables (numérateur) et les cas possibles (dénominateur).

Il semble important de rappeler que les lois fondamentales des probabilités conduisent à la réalisation d'opérations sur les fractions. Dans la situation précédente, la probabilité 2/6 provient de la somme des probabilités liées à l'un et l'autre des événements, soit 1/6 + 1/6. Dans le traitement d'événements non indépendants, dans le calcul de probabilités composées, il est aussi possible d'interpréter la multiplication de fractions. Par exemple, si on a une urne qui contient 6 billes rouges et 4 billes vertes et que l'on puise une première bille, puis une deuxième, la probabilité d'obtenir 2 billes rouges est liée au produit associé à la multiplication des probabilités de chacun des événements, soit 6/10 x 5/9 = 30/90 ou 1/3. Un arbre des calculs possibles peut être dressé et on peut alors relever les parcours favorables.

Nous pourrions poursuivre ce travail d'analyse pour montrer l'importance didactique des fractions dans l'enseignement des probabilités. Si l'intérêt des fractions dans cet enseignement est fréquemment utilisé pour convaincre de la nécessité d'effectuer des transformations du curriculum, les références aux fractions dans le calcul algébrique ou dans le calcul des exposants sont, à notre connaissance, rarement évoquées.

Calcul des exposants

Le calcul d'expressions algébriques comportant des radicaux et des exposants fait aussi appel aux connaissances sur les fractions. Rouche (1998) déclare ainsi qu'il est plus facile de réaliser le calcul $y^{3/2} \times y^{2/3}$ $(y^{3/2+2/3}\ ou\ y^{13/6})$ que d'exécuter le calcul $(\sqrt{y})^3 \times (\sqrt[3]{y})^2$. En nous référant aux travaux de Chevallard (1991) sur les écritures, nous pouvons dire que ce que montrent ces écritures est différent (informations ostensives), bien que le même nombre y soit désigné (informations désignatives).

Calcul algébrique

Selon Rouche (1998), une fraction est une division non réalisée qui permet de donner sens à l'écriture des fractions algébriques. Considérant les fractions algébriques suivantes :

$$\frac{1}{1-x},\quad \frac{a-b}{a+b},\quad \frac{ax+b}{cx+d}$$

il rappelle que la barre de division est d'usage universel en algèbre et que dans plusieurs fractions algébriques, entre autres, dans les fractions précédentes, on ne peut souvent recourir à la division pour produire une expression qui se traite plus aisément. Mais, il porte à notre attention le fait, à notre connaissance souvent ignoré des élèves, que le travail sur les fractions arithmétiques peut servir de modèle pour traiter les fractions algébriques : factoriser le numérateur et le dénominateur pour simplifier une fraction; multiplier les numérateurs et les dénominateurs entre eux; additionner des fractions algébriques, en les exprimant avec un même dénominateur.

Les opérations précédentes sur les fractions algébriques, opérations qui vont de soi pour les professeurs de mathématiques, sont loin d'être évidentes pour les élèves du secondaire. En effet, comme l'exposent plusieurs études (Lemoyne, Conne et Brun, 1993; Kieran, Boileau et Garançon, 1996; Slavit, 1999; Vance, 1998), peu d'élèves sont en mesure d'établir des relations entre les représentations arithmétiques et algébriques. L'établissement de telles relations suppose que les élèves aient eu la possibilité d'opérer sur les fractions arithmétiques dans des situations suffisamment riches qui exigent une coordination des connaissances sur le sens des fractions et sur les opérations sur les fractions.

Cela nous amène à pointer plus spécifiquement le contexte curriculaire québécois où, avec l'implantation du nouveau programme d'enseignement des mathématiques, il y a eu une modification des habitats : l'enseignement de la multiplication et de la division de nombres rationnels, l'addition et la soustraction de fractions dont les dénominateurs ne sont pas multiples l'un de l'autre, ont été relégués au premier cycle du secondaire. Ce découpage entraîne un saut conceptuel fort important lors de la transition entre le primaire et le secondaire (Stegen et Daro, 2007; Bednarz, 2009). Les programmes scolaires sont des références essentielles pour l'enseignement; ils marquent ainsi profondément les pratiques d'apprentissage des disciplines scolaires. Comme en témoigne Sarrazy (2003), les maîtres peuvent difficilement faire abstraction des recommandations de la noosphère (Chevallard, 1991). En effet, les conséquences d'une telle action ne sont pas à négliger. Il nous semble ainsi, plus que primordial d'accorder, dans notre recherche, une attention particulière aux manuels en usage. Dans cet ordre d'idées, comme en font état Barralobres et Lemoyne (2006), le sens partie-tout de la fraction est nettement privilégié dans les manuels d'enseignement des mathématiques au primaire. Comme le soulignent Kieren (1988) et Blouin (1993), cette approche est très restreinte; elle tend à masquer plusieurs particularités des fractions et traduit une conception limitée des enjeux cognitifs liés à leur apprentissage.

L'examen du traitement des opérations dans les manuels scolaires, entre autres, dans les manuels du primaire et du secondaire en vigueur au Québec, examen qui a été effectué par Barralobres et Lemoyne (2006, p.185), révèle que « *la conceptualisation des opérations est réduite à l'apprentissage de l'algorithme de calcul* », un tel apprentissage se réduisant généralement à l'application de règles ou au plus, à l'«illustration» du fonctionnement des règles.

Restreindre ainsi l'enseignement des nombres rationnels et, plus particulièrement, des fractions, fait en sorte que les élèves construisent des représentations « limitées, voire inadéquates » des nombres rationnels et des opérations sur ces nombres.

Synthèse : Le cercle vicieux qui emprisonne les élèves en difficultés dans un rapport problématique aux nombres rationnels

Intervenir efficacement auprès d'élèves présentant des difficultés d'apprentissage est, comme nous l'avons vu précédemment, loin d'être évident. Bien que la résolution de problèmes soit reconnue comme une activité indispensable et fondamentale à la construction de savoirs (Mercier, 1995b, Conne, 1999 et Favre, 1999), nous avons été témoin jusqu'à maintenant de différentes modalités adaptatives au regard des difficultés d'apprentissage des élèves [topogénèse : prise en charge plus importante de l'enseignant; chronogénèse : ordonnancement visant à favoriser la réussite des élèves, mais réduisant considérablement la problématique de la situation; mémoire didactique « limitée » des enseignants de première secondaire se manifestant, pour les élèves en difficultés, par des reprises d'activités, des piétinements] et des modifications dans le programme d'enseignement des nombres rationnels qui réduisent et limitent la confrontation des élèves à de « vraies » situations-problèmes et à la richesse des nombres rationnels. En effet, nous assistons, la plupart du temps, à des activités sur les nombres rationnels, qui tendent à engager les élèves dans des gestes associés à des calculs qu'ils essaient de reproduire, à inculquer des habitus contre-productifs. Par conséquent, cela les amène à fonctionner comme des «automaths», terme emprunté à Stella Baruk (1973) pour dénoncer ce type de pratiques.

Cette situation est d'autant plus paradoxale que nous devrions assister à des adaptations « inverses », afin de permettre aux élèves en difficultés d'apprentissage de revoir un objet problématique et incontournable, les nombres rationnels, et ce, en les soumettant à des activités qui, trop souvent, ne desservent exclusivement que les élèves «réguliers et forts». Dans l'enseignement des nombres rationnels, il importe donc d'être ouvert à la complexité et à la richesse de ces nombres pour ne pas banaliser leur enseignement et induire des obstacles didactiques qui peuvent minimiser les chances que l'élève construise des rapports adéquats à cet objet du savoir mathématique. Comment reconstruire avec des élèves de première secondaire en difficultés d'apprentissage une mémoire didactique porteuse d'espoirs dans l'enseignement et l'apprentissage des nombres rationnels? Comment un chercheur, dont la mémoire didactique est beaucoup plus limitée que celles des enseignants, peut-il favoriser l'engagement des élèves dans des situations-problèmes visant à construire des connaissances, des rapports adéquats aux nombres rationnels?

1.4. Repenser l'enseignement des nombres rationnels auprès des élèves en difficultés d'apprentissage

Mettre au premier plan la résolution de problèmes, c'est-à-dire la considérer comme une modalité indispensable dans l'intervention auprès d'élèves en difficultés d'apprentissage, de même que combiner les concepts de « dé-transposition/retransposition didactique » (Antibi et Brousseau, 2000) et d'approche écologique (de Rosnay, 1994), nous paraissent particulièrement prometteurs pour repenser un enseignement qui évite les dérives précédentes et pour espérer la reconstruction d'une mémoire didactique fertile.

1.4.1. La résolution de problèmes : modalité indispensable et incontournable dans l'intervention auprès d'élèves en difficultés d'apprentissage

Faire des mathématiques, comme le soulignent plusieurs chercheurs, notamment Conne (1999) et Brousseau (1998), est une pratique qui est caractérisée par une activité essentielle, à savoir la résolution de problèmes. Ce n'est donc pas sans raison que, depuis des siècles, les élèves sont invités à résoudre des problèmes pour entrer dans une pratique mathématicienne, pour construire des connaissances mathématiques : « *Il est devenu banal d'affirmer que les connaissances mathématiques prennent du sens dans les problèmes, qu'elles permettent de résoudre efficacement et qu'un élève possède ces connaissances lorsqu'il est capable de les mobiliser de lui-même pour résoudre des problèmes inédits pour lui* » (Charnay, 1998, p.39). Comme l'écrivait déjà Descartes en 1628 (dans Boirel, 1964, p.9) : *« Nous ne deviendrons jamais mathématiciens… bien que* *notre mémoire possède toutes les démonstrations faites par d'autres, si notre esprit n'est pas capable de résoudre toutes sortes de problèmes… Ainsi, en effet, nous semblerions avoir appris, non des sciences, mais des histoires. »* L'importance de la résolution de problèmes est également attestée par les orientations des programmes d'enseignement des mathématiques depuis plusieurs décennies. Les directions des nouveaux programmes d'études définies par le MELS (2006) sont particulièrement explicites :

> *« Omniprésente dans toutes les sphères de l'activité humaine, la démarche de résolution de problèmes est appelée à jouer un rôle particulièrement important dans le contexte scolaire, notamment au secondaire. (p.38)*
>
> *[…]*
>
> *La résolution de situations-problèmes est au cœur des activités mathématiques comme de celles de la vie quotidienne. […] la résolution de situations-problèmes doit être privilégiée en raison de la richesse et de la diversité des apprentissages qu'elle favorise. (p. 237) »*

Ainsi, dans les nouveaux programmes, la résolution de problèmes joue toujours un rôle fondamental (Bednarz, 2002). Le programme de formation de l'école québécoise du premier cycle du secondaire (MEQ, 2006, p. 240) décrit ainsi une situation-problème :

> « Résoudre une situation-problème, c'est adopter une démarche heuristique ou «de découverte». En mathématique, cette compétence permet d'apporter une solution cohérente à une situation-problème qui répond à l'une des conditions suivantes :
>
> – la situation n'a pas été présentée antérieurement en cours d'apprentissage;
> – l'obtention d'une solution satisfaisante exige le recours à une combinaison non apprise de règles ou de principes dont l'élève a ou non fait l'apprentissage;
> – le produit, ou sa forme attendue, n'a pas été présenté antérieurement.
>
> La résolution d'une situation-problème implique du discernement, une recherche et la mise en place de stratégies mobilisant des savoirs. Aussi l'exercice de cette compétence amène-t-il l'élève à effectuer une suite d'actions telles que décoder les éléments qui se prêtent à un traitement mathématique, représenter la situation-problème par un modèle mathématique, élaborer une solution mathématique, valider cette solution et partager l'information relative à la situation-problème et à la solution proposée. Il s'agit d'un processus dynamique qui comprend l'anticipation, le retour en arrière et le jugement critique. »

Notons que dans le nouveau programme, les auteurs réfèrent à l'appellation «*situation-problème»* pour bien marquer la distinction entre exercice et problème, afin de lever toutes ambiguïtés. Ainsi, en plus du changement de terminologie, nous remarquons que la compétence *Résoudre une situation-problème* fait explicitement appel à la modélisation. Pour mieux apprécier les enjeux didactiques de cette relation, nous nous référons aux études effectuées par Chevallard (1989, 1990). Ces études proposent une définition de ce qui signifie «faire des mathématiques» en montrant comment la modélisation est au centre de cette activité.

Si la modélisation caractérise une activité mathématique authentique, il importe, selon Chevallard (1989), de reconnaître qu'une telle activité est possible et salutaire dès l'école primaire. Il nous semble important de rappeler ses propos concernant la place de la modélisation en mathématiques : *« La notion de modélisation permet ainsi de prendre une vue d'ensemble sur l'activité mathématique, de l'école primaire à l'université.»* (*Ibid.,* p. 61). Nous avons ainsi choisi de présenter d'abord un problème traditionnel et élémentaire : « *On dispose d'un paquet de bonbons que l'on veut répartir équitablement entre un certain nombre d'enfants; comment le faire?* (*Ibid.*, p. 59) » Ce problème permet, comme nous le verrons, de montrer sous quelles conditions l'activité mathématique et la modélisation mathématique prennent forme. Nous procéderons par la suite à une analyse similaire à l'aide d'un problème puisé du manuel d'enseignement secondaire, problème lié à l'enseignement des nombres rationnels.

Problème de répartition pouvant être présenté à de jeunes élèves de l'enseignement primaire

Trois démarches de résolution sont examinées : a) *démarche « empirique »* : 1. demander aux enfants de former une ligne; 2. donner un bonbon à chacun; 3. recommencer en donnant toujours un bonbon à chacun; 4. répéter la démarche jusqu'à épuisement des bonbons; 5. si on ne peut, dans la dernière distribution, donner un bonbon à chacun, on retire alors les derniers bonbons distribués aux enfants dans cette dernière étape; b) *démarche « symbolique »* caractérisée par le passage d'une réalité à une représentation symbolique de cette réalité (un certain modèle de la réalité): 1. on dessine un cercle pour chacun des enfants; 2. on aligne ces cercles pour former une rangée; 3. on procède comme on l'a fait précédemment (première démarche de résolution); c) *démarche « mathématique »* caractérisée par une entrée dans le monde des mathématiques : 1. on compte le nombre de bonbons [x] et le nombre d'enfants [y]; 2.

On divise x par y, en notant le quotient entier [q] et le reste [r]; 3. on forme des paquets de q bonbons.

De la première à la troisième démarche, on peut apprécier le chemin parcouru entre une activité non mathématique (première démarche) et une activité mathématique (troisième démarche). Dans la troisième procédure, les étapes 1) et 3) sont en lien avec la réalité, tandis qu'à l'étape 2) le modèle mathématique construit émane d'une analyse des éléments pertinents de la réalité et d'une construction qui est un « ajout au réel »; à l'étape 2, le modèle n'entretient qu'un rapport symbolique à la réalité modélisée. Le statut de la deuxième résolution est, comme le souligne Chevallard (1989, p. 60), plus problématique; il dit à ce sujet : « *Il n'est pas facile de décider si, avec l'invention et l'exécution de la procédure 2, on passe d'une activité non mathématique (procédure 1) à une activité mathématique.* »

Problème puisé dans le manuel *Perspective* destiné aux élèves du premier cycle de l'enseignement secondaire

Le manuel *Perspective* (Guay, Hamel et Lemay, 2005), manuel utilisé à l'école Vanguard, comporte une variété de situations-problèmes. Nous avons sélectionné un problème qui vise l'intégration et un ré-investissement des apprentissages sur les fractions. Nous reproduisons l'énoncé du problème (Guay, Hamel et Lemay, 2005, p.237) :

> « *Une bouteille d'une capacité de un litre contient une certaine quantité d'eau. Max y ajoute un quart de litre d'eau, puis il boit la moitié du contenu. Il ajoute un autre quart de litre d'eau dans la bouteille. Comme il a encore soif, il boit un huitième de litre d'eau. Il constate alors que la bouteille est à moitié pleine. Quelle quantité d'eau la bouteille contenait-elle au départ?* ».

Selon la typologie des problèmes additifs définie par Vergnaud (1981), le problème précédent est un problème de transformations de mesures. La mesure de l'état final résultant des transformations successives qui ont affecté la mesure de l'état initial étant connue, il s'agit alors d'effectuer une composition de ces transformations, de manière à identifier la mesure de l'état initial. Diverses interprétations et modélisations de cette situation sont possibles. Nous examinons quelques démarches.

Une première démarche que l'on peut qualifier « d'empirique », selon le sens d'une telle démarche définie par Chevallard (1989), peut prendre appui sur une simulation des actions effectuées : a) une bouteille contenant une certaine quantité d'eau peut être dessinée, une telle bouteille pouvant prendre la forme d'un cylindre; une marque marquant le volume initial de l'eau peut alors être indiquée sur la bouteille; b) on y ajoute ensuite une quantité correspond à un quart de litre d'eau; si la bouteille a la forme d'un cylindre, il est plus facile d'indiquer par une marque le volume alors obtenu; c) on y enlève par la suite la moitié du contenu de cette bouteille; d) puis, on y ajoute ensuite un autre quart de litre; e) on enlève ensuite un huitième de litre; f) si le volume d'eau est égal à la moitié du volume de la bouteille, on conclut que le volume d'eau déposé dans la bouteille au début est adéquat; sinon, on peut recommencer en modifiant le volume d'eau initial, mais la répétition d'un tel procédé peut ne pas produire de résultats satisfaisants; par ailleurs, il est possible que ces résultats conduisent à la mise en place d'une démarche empirique, mais cette fois-ci en recourant à une approche inverse, soit en partant d'une bouteille à moitié pleine et en effectuant, les transformations en ordre inverse. Il va sans dire qu'une telle démarche, démarche que nous avons pu retrouver chez quelques étudiants en sciences de l'éducation, dans des situations similaires, nous apparaît peu probable chez les élèves du premier cycle de l'enseignement secondaire. Nous pourrions qualifier cette démarche d' «empirico-symbolique» puisqu'elle prend appui sur une représentation, voire une modélisation symbolique des compositions additives.

Prenant appui sur une modélisation « mathématique » des relations entre les états successifs (quantités d'eau) et les transformations additives (ajouts ou retraits de diverses quantités d'eau), la démarche dont nous faisons état maintenant, se caractérise par le recours à des opérations additives pour trouver la quantité d'eau initiale, soit : $\frac{1}{2}(x + \frac{1}{4}) + \frac{1}{4} - 1/8 = \frac{1}{2}$ … $x/2 + 1/8 + 2/8 - 1/8 = 4/8$ … $x/2 = 2/8$ … $x = 4/8$ ou $1/2$; la quantité d'eau initiale est alors 1/2. Il serait, il va sans dire, étonnant de trouver une telle modélisation chez des élèves de 1re secondaire en difficultés d'apprentissage, sans le recours à des situations-problèmes pertinentes lors de l'enseignement des nombres rationnels.

À ce propos, l'exploitation de la résolution de problèmes comme modalité d'intervention auprès d'élèves en difficultés d'apprentissage lors d'une étude préliminaire (année scolaire 2004-2005), nous a permis d'apprécier les possibilités d'apprentissage des élèves, mais également de reconnaître la pertinence ainsi que les exigences d'une nécessaire «dé-transposition» /«re-transposition» didactique et d'une inscription écologique des situations didactiques auprès de cette population. Nous reproduisons quelques commentaires formulés par l'enseignant au terme de notre passage qui illustrent bien cette pertinence :

> « *Tout d'abord, je n'ai pas eu le sentiment de devoir subir un cadre de recherche contraignant lors de ton expérimentation. Cette latitude d'expérimentation rendait très intéressante l'expérience. C'était comme un Star trek : "Espace, frontière de l'infini vers lequel voyage notre vaisseau spatial. Sa mission: Explorer de nouveaux mondes étranges, découvrir de nouvelles vies, d'autres civilisations, et au mépris du danger, reculer l'impossible". Nous avons donc pu clairement voir que les élèves s'investissent facilement lorsque la tâche ou le défi est nouveau. À chaque fois que tu as apporté du matériel différent, ils se sont mobilisés remarquablement. Comme corollaire, on a pu observer qu'ils ont boudé les activités répétitives, pense à la fois où tu leur as demandé de reprendre le travail qu'ils avaient déjà fait pour valider le cheminement qu'ils avaient fait pendant l'expérimentation […]. Lorsqu'il leur a fallu créer des aides à la représentation, ils se sont bien sûr d'abord investis dans le problème mais par la suite, ils ont dû faire un retour critique au ralenti sur le « déclencheur de lien » pour ensuite l'illustrer, le reformuler, le présenter. J'ai trouvé cette activité vraiment novatrice et véritablement profitable pour développer la capacité à résoudre des problèmes chez nos élèves.*»

1.4.2. La reconnaissance d'une nécessaire «dé-transposition» et «re-transposition» didactique

Ce concept de « dé-transposition/re-transposition didactique » proposé par Antibi et Brousseau (2000) semble être une avenue tout à fait désignée pour repenser l'enseignement auprès de ces élèves. Antibi et Brousseau (p. 23) utilisent ce concept : «*pour désigner une action didactique intentionnelle, orientée vers le traitement des conséquences d'une transposition didactique reconnue explicitement comme antécédent légitime, et entreprise dans le cadre d'une transposition didactique nouvelle présentée elle-même comme légitime*.» Dans cette définition, l'idée d'une transposition didactique nouvelle nous semble particulièrement importante, voire cruciale, lorsque l'action didactique est réalisée auprès d'élèves présentant des difficultés. Elle invite à user d'ingéniosité pour concevoir des situations « originales », des situations « défis », des situations qui puissent engager cognitivement les élèves, les inciter à prendre des risques, leur donner les moyens d'apprécier leurs tentatives de résolution des problèmes, leur permettre d'apprécier leurs possibilités de compréhension et d'apprentissage.

Ces situations devraient favoriser, chez les élèves, la mobilisation de leurs connaissances, leur transformation, voire leur rejet au profit de connaissances qui leur permettent de contrôler les situations. Il s'agit de prendre appui sur une mémoire existante tout en revisitant des objets anciens, mais dans des paysages nouveaux, de façon à accroître le rapport ancien/nouveau, à reconnaître la pertinence de soumettre aux élèves en difficultés des situations-problèmes trop souvent réservées aux « bons » élèves, de telles situations pouvant transformer leurs rapports à certains objets et à certaines pratiques mathématiques, voire leurs habitus.

1.4.3. La reconnaissance d'une nécessaire inscription écologique des situations didactiques

La création de situations-problèmes «originales», de situations «défis», dans le cadre d'une «transposition didactique nouvelle», fait indubitablement appel à une bonne connaissance du fonctionnement de l'institution, donc à une nécessaire construction de la mémoire didactique du chercheur en ce qui concerne *l'institution classe*. Ce postulat fait donc appel, chez ce chercheur, à la compréhension, à l'implication et à l'imbrication de l'institution «classe», afin de repenser l'enseignement/apprentissage en termes de transformation des rapports aux savoirs, mais aussi des habitus des élèves en difficultés (Bourdieu et Passeron, 1970). Pour apprécier la pertinence d'un tel processus du côté du chercheur, il nous apparaît utile de définir les notions d'habitat et de niche écologique pour nous permettre, par la suite, de préciser ce qu'on entend par « inscription écologique » de situations didactiques, inscription déterminante dans notre recherche.

1.4.3.1. L'importance de la prise en compte de l'habitat «nombres rationnels» dans les programmes d'enseignement au 3e cycle du primaire et au 1er cycle du secondaire

En didactique des mathématiques, l'écologie didactique des savoirs est un domaine important de recherche qui a été initié par Chevallard. Ce chercheur définit ainsi les notions d'habitat et de niche (Chevallard, 1994, p.142): « *Les écologues distinguent, s'agissant d'un organisme, son habitat et sa niche. Pour le dire en un langage volontairement anthropomorphe, l'habitat, c'est en quelque sorte l'adresse, le lieu de résidence de l'organisme. La niche, ce sont les fonctions que l'organisme y remplit : c'est en quelque façon la progression qu'il y exerce*».

Comme nous en avons fait état précédemment, l'enseignement des nombres rationnels constitue un enjeu didactique important au cours de la première année de l'enseignement secondaire. Cet enseignement, il importe de le souligner, occupe aussi un espace non négligeable dans l'enseignement primaire, notamment, au troisième cycle de l'enseignement primaire. Une inscription écologique de notre recherche se doit d'en tenir compte, pour mieux apprécier le maillage, mais également les différences entre les habitats qui composent l'habitat « nombres rationnels » dans l'enseignement au troisième cycle du primaire et dans l'enseignement en première année du secondaire.

Les habitats qui déterminent l'habitat « nombres rationnels » dans les programmes d'enseignement, produits d'une transposition didactique (Chevallard, 1994), établissent une chronogénèse des savoirs sur les nombres rationnels. Préciser ces habitats permet de mieux cibler les niches qui permettront d'aménager des situations didactiques fécondes. En alimentant notre mémoire didactique (Brousseau et Centeno, 1991), ce travail nous permettra également de mieux appréhender la transition primaire-secondaire, transition qui revêt un intérêt particulier dans notre recherche puisque nous nous intéressons à des élèves de 1re secondaire qui, de surcroît, sont en difficultés d'apprentissage. Nous examinerons ainsi les programmes d'enseignement des nombres rationnels du 3e cycle du primaire (MELS, 2006) et du 1er cycle du secondaire (MELS, 2006) qui ont cours actuellement au Québec.

Les figures 2 et 3 de la page suivante ont été construites en respectant l'organisation des programmes de formation, soit les savoirs essentiels, définissant divers habitats (arithmétique : 1. sens et écriture des nombres, 2. sens des opérations sur des nombres, 3. opérations sur des nombres) pour l'enseignement primaire, ainsi que les concepts et processus pour l'enseignement secondaire. Dans le schéma de l'enseignement primaire, les encadrés bleus regroupent tout ce qui concerne les fractions alors que les encadrés verts, ce qui a trait aux nombres décimaux.

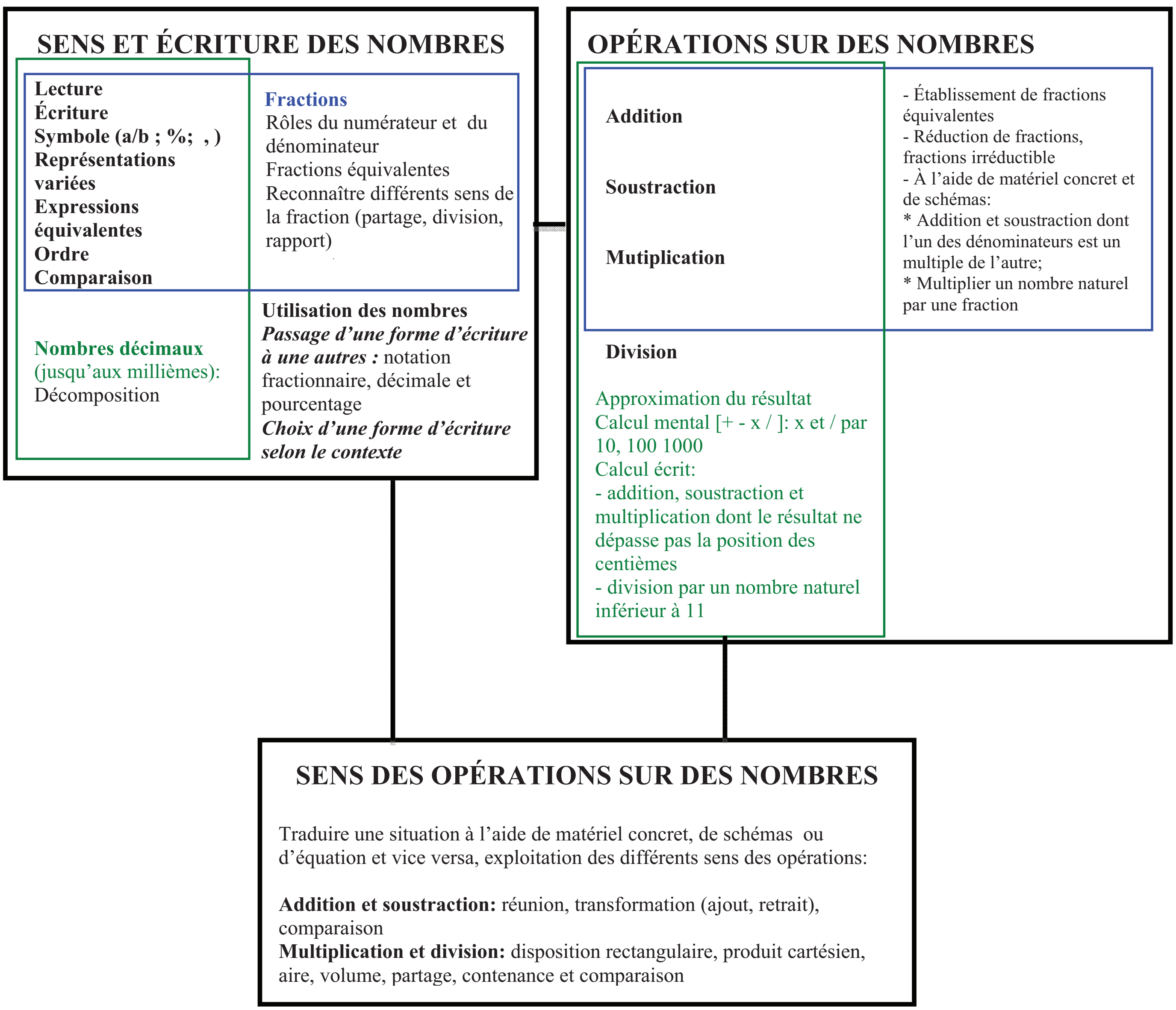


Figure 2: Synthèse du programme d'enseignement des nombres rationnels au 3e cycle du primaire

CONCEPTS	PROCESSUS
SENS DU NOMBRE EN NOTATION DÉCIMALE ET SENS DES OPÉRATIONS Lecture Écriture Représentations variées Régularités Propriétés Notation fractionnaire, décimale et pourcentage Caractère de divisibilité Règle de signes Relation d'égalité Propriétés des opérations Opérations inverses Priorité des opérations **SENS DE LA PROPORTIONNALITÉ** - Rapport et taux • Rapports et taux d'équivalence • Taux unitaires - Proportion • Égalité et rapport de taux • Rapport et coefficient de proportionnalité - Variation directe ou inverse	**DIFFÉRENTES FORMES D'ÉCRITURES ET DE REPRÉSENTATIONS** - Appréciation de l'ordre de grandeur - Comparaison - Utilisation de représentations variées (numériques, graphiques, etc.) - Reconnaissance et production d'écritures équivalentes : • Décomposition (additive, multiplicative, etc.) • Fractions équivalentes • Simplification et réduction - Passage d'une forme d'écriture à une autre, d'une représentation à une autre - Transformation d'égalités arithmétiques - Repérage de nombres sur la droite numérique, abscisse d'un point **OPÉRATION SUR DES NOMBRES EN NOTATION DÉCIMALE ET FRACTIONNAIRE** - Estimation et arrondissement dans différents contextes - Recherche d'expressions équivalentes - Approximation du résultat d'une opération - Simplification des termes d'une opération - Calcul mental: les quatre opérations, particulièrement avec les nombres facilement manipulables (y compris des grands nombres) et des chaînes d'opérations simples en respectant leur priorité (nombres écrits en notation décimale) et en mettant à profit des écritures équivalentes et les priorités d'opérations **TRAITEMENT D'UNE SITUATION DE PROPORTIONNALITÉ** - comparaison de rapports et de taux - reconnaissance d'une situation de proportionnalité, notamment à l'aide d'un contexte, d'une table de valeur ou d'un graphique - Résolution d'une situation de proportionnalité - Repérage de couples de nombres dans le plan cartésien

Figure 3: Synthèse du programme d'enseignement des nombres rationnels au 1er cycle du secondaire

Les schémas précédents nous permettent d'apprécier l'importance de l'habitat « nombres rationnels », ainsi que la multiplicité de ses habitats, de ses niches (Chevallard, 1994), et ce, autant dans les programmes d'enseignement primaire et que secondaire. En ce qui concerne l'enseignement primaire, sans procéder à une énumération exhaustive, il nous semble important de mentionner l'étroite relation entre les opérations sur les nombres décimaux (calcul écrit), les sens des opérations sur ces nombres, entre autres, la multiplication, et les sens et représentations du nombre décimal. Nous pouvons également faire référence aux liens qui unissent les sens et les écritures du nombre rationnel (choix d'une forme d'écriture, selon le contexte), les sens des opérations sur ces nombres et la résolution de problèmes. On remarque ainsi des liens tangibles entre les sens du nombre décimal (approximation, décomposition) et des opérations sur ces nombres (processus de calcul mental, addition, soustraction, multiplication et division), ainsi qu'entre les sens et écritures des fractions et des opérations sur ces nombres (comparaison des fractions à 0, ½ et 1 ; approximation des résultats d'opérations sur les fractions).

Dans le programme du 1[er] cycle du secondaire, comme le montre le schéma, les fonctions et niches qui modulent les habitats sur les « nombres rationnels » sont en continuité avec celles mises en évidence dans le programme d'enseignement primaire. Dans le programme du 1[er] cycle du secondaire, l'unification «des sens du nombre rationnel et des opérations sur les nombres rationnels» est plus prégnante qu'elle ne l'est dans le programme d'enseignement primaire. À titre d'exemple, tel que mentionné dans le programme (MELS, 2006, p.251), « *La connaissance des propriétés des opérations permet d'envisager des écritures équivalentes qui simplifient les calculs et peut libérer d'une dépendance à l'égard de la calculatrice* ». Cette connaissance est déterminante, non seulement en arithmétique, mais également en algèbre, en géométrie, en probabilité et statistique. Par exemple, dans certaines situations, la présence de coefficients et de termes constants écrits en notation décimale ou fractionnaire, dans diverses expressions algébriques ou encore, le recours à des fractions algébriques pour représenter diverses «formules d'aire», mettent en cause des connaissances liées aux nombres rationnels et aux opérations sur ces nombres.

Malgré l'importance de l'habitat « nombres rationnels » et la multiplicité de ses habitats et de ses fonctions (niches) qui favorisent les opportunités d'entrée sur les nombres rationnels, dans les programmes d'enseignement précédents, nous remarquons néanmoins qu'il existe des aménagements possibles et souhaitables. Tout d'abord, nous aurions plutôt tendance à privilégier, dans le programme d'enseignement primaire, l'emploi « Écriture des nombres » dans un registre pluriel, car la graphie actuelle rend quelque peu réducteur les différentes formes d'écritures possibles des nombres rationnels. On peut également penser que l'apprentissage très sectorisé des fractions et des nombres décimaux « masque, du moins temporairement » les relations entre ces représentations de nombres rationnels.

On note, en revanche, ce souci de pluralité d'écritures dans le programme de l'enseignement secondaire, comme le montrent les entrées suivantes dans la figure 3 : «Différentes formes d'écriture » et « Sens du nombre en notations décimale et fractionnaire ». Dans l'enseignement primaire, nous retrouvons dans les savoirs essentiels pour les fractions -la comparaison- alors qu'elle y est absente lorsqu'il s'agit des nombres décimaux. Par ailleurs, si la décomposition, l'approximation et le calcul mental sont des procédés requis dans plusieurs tâches impliquant des nombres décimaux, de tels procédés sont rarement sollicités dans les tâches impliquant des fractions. Bien que dans l'enseignement secondaire, le calcul mental s'applique aux nombres en notations décimale ou fractionnaire, il n'en demeure pas moins que le programme précise (MELS, 2006, p.251) que ce processus s'applique « *particulièrement avec les nombres écrits en notation décimale* ». Ce clivage nous apparaît injustifié dans la mesure où par exemple, l'approximation de fractions permettrait d'estimer leur somme. Cette nouvelle fonction offrirait à l'élève une opportunité supplémentaire pour appréhender et construire le sens du nombre et des opérations. D'ailleurs, bien que le « sens et écriture des nombres » et le « sens des opérations sur des nombres » soient traités distinctement, le document sur la progression des apprentissages précise que ces deux aspects se développent simultanément et qu' «*ils doivent être travaillés de concert*». Dans cet ordre d'idées, au 3e cycle du primaire, la construction des nombres décimaux s'étend jusqu'aux nombres comportant des chiffres en position des millièmes, alors que les opérations sur les nombres décimaux ne comportent jamais de chiffres en position des millièmes.

Nous sommes également interpellée par le fait que, dans le programme du secondaire, il n'y a aucune mention spécifique des « sens de la fraction », même si leur importance dans la compréhension des opérations et des calculs ne fait aucun doute. Par ailleurs, comme en témoigne l'extrait suivant (*Ibid.*, p.252), l'arrimage des situations-problèmes à divers champs de la mathématique implique une coordination de diverses représentations des nombres rationnels et des opérations sur ces nombres:

> «*Les situations-problèmes auxquelles il [l'élève] doit faire face se complexifient tout en faisant généralement appel à plusieurs champs de la mathématique, selon leur spécificité. En arithmétique, l'élève exploite le sens du nombre et des opérations ainsi que les relations entre ces dernières. Il manipule des expressions numériques en utilisant différents ensembles de nombres à l'aide de processus associés au calcul mental ou écrit, ou encore à l'aide de la technologie. Il valide et interprète les résultats numériques obtenus en fonction du contexte* ».

Le saut conceptuel occasionné par la transition primaire/secondaire est fortement marqué par le sens conféré aux opérations impliquant des fractions, entre autres, par l'apparition de la multiplication et de la division de fractions. De plus, le traitement de situations de proportionnalité dans le programme du secondaire, occupant un espace considérable et distinctif, n'est pas sans poser problèmes aux élèves, comme en témoignent plusieurs recherches (Oliveira, 2009). Il s'agit donc d'informations précieuses permettant d'enrichir notre mémoire didactique et, par conséquent, de souligner l'importance d'y consacrer une attention particulière dans l'interprétation des difficultés et dans l'élaboration de nos situations.

Les programmes d'enseignement primaire et secondaire comportent des distinctions fondamentales. Cependant, afin d'élaborer un référentiel commun, nous nous sommes inspiré de la démarche d'analyse écologique mise en œuvre par Roditi (2005, p.75) pour rendre compte des fonctions de la multiplication des décimaux dans le programme de 6^{e} année de l'école française.

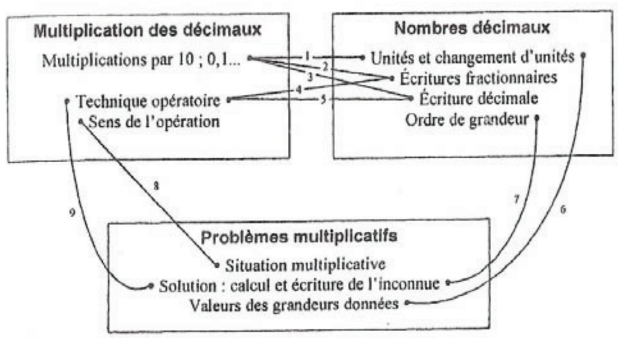


Figure 4 : Analyse écologique de la multiplication des décimaux dans le programme de 6e année de l'école française

Cette catégorisation nous permet d'être tout à fait cohérent avec les documents complémentaires du MELS. Dans ces programmes, le sens des nombres rationnels et des opérations sur ces nombres occupent un premier espace fort important, comme en font état les écrits ministériels concernant l'enseignement secondaire (MELS, 2006, p.251): «*Le programme vise essentiellement l'étude des nombres rationnels positifs et négatifs, écrits en notation décimale ou fractionnaire. Le sens des nombres, des opérations et de l'égalité doit être au cœur des apprentissages*». La résolution de problèmes impliquant des nombres rationnels occupe un second espace qui prend appui sur les connaissances, savoirs et procédés liés au premier espace de travail. Ce référentiel, présenté dans la figure 5, prend appui sur trois principaux habitats: opérations, nombres, et résolution de problèmes.

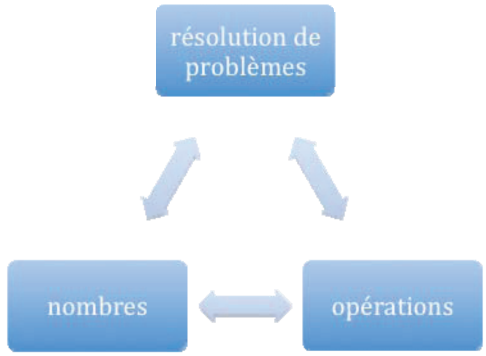


Figure 5 : Référentiel sur l'enseignement des nombres rationnels

La figure 5 nous servira de cadre de référence dans l'élaboration de nos situations et dans l'analyse des difficultés rencontrées par les élèves, analyse que nous abordons dans le cadre théorique.

1.4.3.2. L'importance de l'acculturation des acteurs : enseignant, élèves et chercheurs.

Les habitats qui composent l'habitat « nombres rationnels » dans l'enseignement au 3e cycle du primaire et dans l'enseignement en première année du secondaire, ainsi que les fonctions qui leur sont associées, permettent d'établir diverses niches, certaines de ces niches étant déterminées par la construction des différents sens de la fraction et les représentations des fractions, par les opérations sur les fractions, par les représentations des nombres rationnels, par la résolution de problèmes impliquant de tels nombres. Cette multiplicité de niches offre, de prime abord, de nombreuses occasions pour une inscription écologique de situations ou de pratiques enseignantes qui pourraient servir à enrichir les situations d'enseignement/apprentissage, à construire, voire à re-construire, les rapports des élèves aux nombres rationnels et leurs habitus. Mais, puisqu'il s'agit d'un enjeu didactique important de l'enseignement en première secondaire, enjeu qui se répercute sur le temps didactique, il n'est pas évident d'agir, tout en ne perturbant pas l'avancée du temps didactique. L'inscription écologique de situations revêt alors une grande importance. Viser de telles transformations des rapports et des habitus dans une perspective d'intégration écologique nécessite le recours à un processus d'acculturation du chercheur, de l'enseignant et des élèves, c'est-à-dire à un contact direct et prolongé permettant une modification dans les modèles culturels initiaux de l'un ou des groupes se traduisant, notamment par des appropriations, ou des réinterprétations d'éléments culturels.

L'inscription écologique de situations didactiques positionne le chercheur en tant qu' « *écocitoyen [qui] doit mieux comprendre comment situer et insérer son action locale dans un système global* » (de Rosnay, 1994, Ecologie et approche systémique, para.9). Le respect des habitats liés à l'habitat « nombres rationnels » et des niches inscrites dans le système, dans l'optique de l'ajout ou de la transformation de niches pour créer des situations-problèmes sur les rationnels, mérite que l'immersion du chercheur en tant que corps étranger ne perturbe pas cette communauté, que le fait de s'y greffer permette au système de « *demeurer le même tout en changeant et de se conserver tout en se transformant* » (de Rosnay, 1994, Ecologie et approche systémique, para.3). Autrement, la rupture de son équilibre entraînerait tôt ou tard son rejet du système. À la lumière de ces propos, le processus d'intégration écologique de situations didactiques engage forcément la responsabilité des divers acteurs, acteurs occupant des positions symétriques et complémentaires (Van der Maren et Poirier, 1997; Bednarz, 2009). Le concept d'approche collaborative nous appert, à ce propos, être une condition nécessaire, quoique non suffisante, à une intégration écologique féconde.

La recherche collaborative « prend forme autour de l'idée de faire de la recherche « avec » plutôt que « sur » les praticiens» (Lieberman, 1986, dans Desgagné, Bednarz, Couture, Poirier et Lebuis, 2001, p.34). Dans notre recherche, nous voulons reconnaître et valoriser le savoir en action; notre étude ne repose toutefois pas sur l'idée de l'enseignant comme objet d'analyse ou de formation. Nous souhaitons plutôt mettre en exergue la cohabitation qui représente à nos yeux l'essence même de «faire de l'enseignement avec un chercheur» et «faire de la recherche avec les praticiens», ce qui rejoint par ailleurs l'origine du concept de recherche collaborative visant à faire le lien entre les pôles recherche/enseignement. Il s'agit de favoriser davantage une attitude participative (Davis, 2005, p.399) dans laquelle la complicité est de mise et d'y intégrer la participation de l'élève à la recherche.

Il est donc possible de constater comment peuvent s'alimenter les concepts d'intégration écologique de situations, d'acculturation institutionnelle et d'approche collaborative, notamment en permettant de bénéficier de l'expertise de l'enseignant et des élèves afin de créer des situations défis qui s'intègrent harmonieusement avec le fonctionnement de la classe, qui soient de « vraies » situations-problèmes et qui provoque chez les élèves l'envie de savoir. Il s'agit de plonger les élèves dans des conditions qui favorisent la dévolution du problème et qui permettent une modification du contrat didactique. La résolution de problèmes étant au centre de l'activité mathématique, nous avons misé, dans notre recherche, sur le travail didactique de situations-problèmes.

1.5. Objectif général de la recherche

Concevoir et inscrire des situations «novatrices» de résolution de problèmes auprès d'élèves en difficultés d'apprentissage, afin de ne pas dénaturer l'activité d'apprentissage, ni de réduire les savoirs visés, n'est évidemment pas chose facile. Notre recherche concerne l'inscription écologique de situations d'enseignement/apprentissage des nombres rationnels auprès d'élèves du 1er cycle du secondaire présentant des difficultés d'apprentissage en mathématiques. Notre intention est d'étudier les apports et les limites de situations visant une transformation des rapports problématiques de ces élèves aux nombres rationnels et de leurs habitus.

Chapitre II

Cadre conceptuel

Au chapitre précédent, nous avons traité de l'influence des représentations des « élèves en difficultés d'apprentissage » sur les pratiques pédagogiques, ainsi que des défis que soulève l'enseignement des mathématiques à cette population d'élèves. Nous avons également montré comment ces défis sont accrus lorsque cet enseignement est effectué auprès d'élèves nouvellement « entrés » dans l'enseignement secondaire et de surcroît, lorsqu'il concerne les nombres rationnels. Comme nous l'avons indiqué, un tel enseignement est au centre de notre recherche qui envisage la conception et la gestion de dispositifs didactiques comportant des situations-problèmes. Un tel projet prend appui sur plusieurs recherches, dont nous rendons compte dans le présent chapitre, recherches qui nous ont permis de préciser les questions et les objectifs de notre recherche. Nous présentons d'abord les études qui ont permis de mieux appréhender l'objet «nombres rationnels» et de mieux comprendre les problèmes associés à l'enseignement/apprentissage des nombres rationnels. Nous procéderons ensuite à l'examen de dispositifs didactiques mis à l'épreuve dans plusieurs recherches, dispositifs visant, chez les élèves, la construction de rapports plus adéquats aux nombres rationnels, ainsi qu'une transformation de leurs habitus. Ces présentations complétées, nous préciserons ensuite les orientations de la démarche écologique que nous privilégions dans notre recherche et qui prendra en compte le fonctionnement de l'institution scolaire dans laquelle la recherche envisagée prendra place. Les questions et les objectifs de notre recherche seront alors précisés.

2.1. La construction des nombres rationnels

L'enseignement des nombres rationnels, comme nous l'avons évoqué au chapitre précédent, occupe un espace substantiel dans les programmes d'enseignement, particulièrement dans celui du premier cycle du secondaire. La construction, voire la reconstruction, du sens et des propriétés de ces nombres, ainsi que des opérations sur ces nombres, s'avère indispensable. Ainsi, il nous semble pertinent de présenter brièvement, dans un premier temps, quelques moments importants de la construction des nombres rationnels, au cours de l'histoire. Ce rappel nous permettra de mieux apprécier les définitions et les représentations actuelles des nombres rationnels. Nous pourrons ainsi davantage saisir les rapports problématiques des élèves aux nombres rationnels et porter un regard critique sur la gestion et la conception de dispositifs didactiques visant la construction de rapports plus adéquats à ces nombres.

2.1.1. Bref rappel historique

Les nombres rationnels qui sont actuellement objets d'enseignement sont le fruit d'une construction qui s'est étalée sur plusieurs siècles, comme le montrent les ouvrages sur l'histoire des mathématiques (voir, entre autres : Dahan-Dalmedico et Peiffer, 1985; Ifrah, 1994). Pour en apprécier le parcours, nous ferons référence à l'analyse épistémologique effectuée par Nadine et Guy Brousseau (1987), dans leur ouvrage sur l'enseignement et l'apprentissage des nombres décimaux, analyse qui montre toute l'importance du concept de fractions.

Nadine et Guy Brousseau portent à notre attention le fait que certaines propriétés des nombres entiers ne sont plus présentes dans l'ensemble Q des nombres rationnels. Le passage des nombres entiers aux nombres rationnels est source d'obstacles, de difficultés et de résistances importantes. Pour en montrer l'impact sur la construction des nombres rationnels, ils procèdent à une analyse des propriétés des nombres entiers et des nombres rationnels. Ils soulignent le fait que certains problèmes (ex. $a \times 3 = 2$) ne trouvent pas de solutions dans l'ensemble des nombres entiers.

S'il est possible en donnant sens à l'écriture précédente de concevoir certaines applications, par exemple, le partage d'une longueur de 2 mètres en 3 parties égales, applications découlant d'une interprétation du résultat comme étant égal à 3 fois un certain nombre, ce nombre pouvant être associé à une longueur qu'il s'agit de trouver, connaissant la longueur résultant de la transformation de la longueur initiale, cela ne résout pas le problème posé. Il faut représenter par un nombre la mesure initiale, ce qui oblige à une extension (ici des nombres naturels) dans laquelle cette équation (et les équations de ce type) a une solution; il faut ainsi entrer dans l'univers des nombres rationnels. Pour mieux comprendre cet univers, nous rappelons fort schématiquement quelques moments importants de sa construction, construction qui englobe plus de 4 000 ans d'histoire (Dahan-Dalmedico et Peiffer, 1985).

Au 13^{e} siècle avant Jésus-Christ, le décimal est utilisé pour mesurer des grandeurs et des quantités. Pour ce faire, comme le soulignent N. et G. Brousseau (*Ibid.,* p. 451), on recourt à *«l'emploi direct du système de numération en usage pour les dénombrements comme moyen de décrire les fractionnements»*. Il est alors possible de désigner certaines fractions, en faisant appel à la notion de rapport. On peut alors mettre en évidence les passages suivants :

- Passage à la forme 1/m, m étant un nombre naturel quelconque.
- Puis, à n/m, n étant un nombre naturel strictement inférieur à m.
- Puis, à n/m, n et m étant des nombres naturels quelconques, etc.

Faisant référence aux travaux du mathématicien Al Huwarizmi (750-850), Nadine et Guy Brousseau (*Ibid*., p.451) rendent compte du fait suivant : «*le calcul des naturels avec celui des rapports « géométriques » et qui introduit l'emploi de la numération de position décimale, permet l'émergence du décimal – outil mathématique d'approche, non plus des grandeurs, mais des entités mathématiques; rationnels d'abord, puis radicaux, etc.*» Le décimal devient alors un outil consciemment utilisé, reconnu, désigné; son inventeur Al Uqlidisi (952) ne le traite toutefois pas comme un objet d'étude. Ce n'est que plusieurs siècles plus tard, que Al Kashi (1427) ré-invente le décimal. La définition de ce nombre n'est cependant pas arrêtée; elle le devient plus tard grâce au travail de Steven (1585). Le statut de notion mathématique est alors reconnu. Les décimaux deviennent alors un objet de connaissance susceptible d'être enseigné et utilisé dans les applications pratiques, les calculs, la constitution de tables. Selon Steven, les *«quantités irrationnelles, irrégulières, inexplicables, sourdes et absurdes»* (N. et G. Brousseau, *Ibid*., p.452) sont des nombres réels parce que toutes sont approchables par les nombres décimaux.

Objet mathématique, le décimal peut faire sont entrée comme « objet d'enseignement ». Cette entrée nécessite la prise en compte des diverses représentations des nombres rationnels. Selon N. et G. Brousseau (1987), l'enseignement traditionnel des décimaux (et des fractions) vise à rendre les élèves capables de résoudre des problèmes « classiques et pratiques », en faisant appel aux relations d'ordre et aux opérations sur ces nombres. La résolution de problèmes d'applications linéaires, de problèmes d'échelles, de changement d'unités, de pourcentage, de vitesse, de volume, de surface, etc., est associée à une maîtrise souhaitable de ces nombres. Notons enfin que l'enseignement des décimaux implique la possibilité de faire les calculs usuels en combinant décimaux et fractions, ce qui est loin d'être évident pour les élèves, comme nous aurons l'occasion de le montrer par la suite.

2.1.2. Les définitions et les représentations actuelles des nombres rationnels

Nous avons évoqué à quelques reprises les rapports inadéquats des élèves aux nombres rationnels et avant de nous y attarder de façon plus systématique et précise, il nous semble pertinent d'examiner plus attentivement le concept de nombre rationnel. Les fractions, les nombres décimaux et les pourcentages sont diverses représentations et écritures des nombres rationnels. Le nombre rationnel est cependant défini en faisant appel au concept de fractions, concept qui permet de conférer un sens aux nombres décimaux et aux pourcentages.

Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'un rapport entre deux nombres entiers (le deuxième nombre étant différent de zéro). Ainsi, les nombres suivants sont des nombres rationnels: 3/10; 0,666 666 666 … ; - 8/3; 12; 5/1. Les nombres irrationnels sont les nombres qui ne peuvent s'écrire sous la forme d'un rapport de deux nombres entiers : $\pi, \sqrt{2}, \sqrt{3/2}, e$. De Champlain, Mathieu, Patenaude et Tessier (1996, p.22) proposent la définition suivante[10] des nombres rationnels : «*Nombre obtenu à partir du quotient de a et b où a et b sont des nombres entiers et b est différent de 0. Une fraction est un nombre rationnel exprimé sous la forme a/b où a et b sont des nombres entiers et b est différent de 0. »*

[10] Il s'agit également de la définition reprise dans le glossaire du curriculum (MELS, 2004, p.97)

L'objet a/b, comme le rappelle bien Comin (2002, p. 145), évoque différentes représentations :

> *«Si l'on évoque l'objet lui-même, et que l'on vise son statut purement mathématique, on parlera de nombre rationnel, de quotient euclidien, etc., ou, plus généralement, de grandeur, de mesure, de nombre, de scalaire, etc. Si l'on vise son rôle mathématique, on parlera d'opération, de quotient, de rapport, de fraction, de fonction numérique, de raison, etc. Si, enfin, on évoque son usage dans des environnements particuliers, on sera amené à parler de taux, d'échelle, etc.»*

Ces propos montrent que les nombres rationnels sont non seulement obtenus à partir d'un quotient de deux nombres entiers, mais aussi qu'il y a diverses façons de les désigner et que ces nombres sont associés à différentes applications. Pour mieux rendre compte de toute cette complexité dans l'enseignement, il nous semble également pertinent de rappeler la définition proposée par le National Council of Teachers of Mathematics (AMQ[11], 1964, p.28), lors de la réforme de l'enseignement connue sous le vocable de mathématiques modernes : «*le nombre rationnel est une classe d'équivalence de couples d'entiers naturels, c'est-à-dire que chaque élément (couple, fraction, nombre décimal) d'une classe d'équivalence (nombre rationnel) peut désigner la classe d'équivalence*.»

Les définitions et les représentations précédentes (De Champlain *et al.*, 1996; Comin, 2002; NCTM, 1964) montrent le «pas de géant» qui attend l'élève essayant de conférer un sens aux nombres rationnels; elles nous permettent déjà d'anticiper des ruptures non négligeables de leur apprentissage, notamment dans la construction des propriétés inhérentes à ces nombres. Plusieurs fractions peuvent traduire un même nombre rationnel (ex: ¾, 6/8, 9/12,...); un nombre décimal, un pourcentage, et un couple, peuvent aussi désigner un même nombre rationnel (ex: 0,75, 75%, (3,4), ...). Cette puissance, il va sans dire, n'apparaît pas aisément à l'élève du primaire, habitué à désigner un nombre entier par un seul code digital. Cette habitude rend par ailleurs ardue la construction de la notion de fractions équivalentes et l'achèvement d'une telle construction va bien au-delà de l'habileté à procéder à des calculs pour produire diverses fractions équivalentes. De plus, concevoir qu'entre deux nombres, qui apparaissent,

[11] Traduction du document *Rational numbers* (NTCM,1964) effectuée par l'AMQ.

somme toute, très voisins (ex. 12 034/24068 et 12 035/24068 ; 1,629356 et 1,629355), il soit possible d'intercaler une infinité de nombres, ne va pas de soi pour les élèves. Or, la densité des nombres rationnels (NCTM, 1964) permet de bien différencier l'ensemble des nombres rationnels et l'ensemble des entiers (N. et G. Brousseau, 1987; Kieren, 1992, 1994, 1995; Desjardins et Hétu, 1974). Cette propriété suppose également que l'idée de successeur n'a plus de sens. Les opérations sur ces nombres comportent aussi des réajustements conceptuels non négligeables : le produit de deux nombres rationnels peut être plus petit que le multiplicande ou le multiplicateur; le quotient peut s'avérer plus grand que le dividende et le diviseur; le dividende peut être plus petit que le diviseur, etc. Aussi, les élèves doivent savoir que tout nombre rationnel différent de 0 a un inverse multiplicatif, car cette propriété confère, entre autres, un sens au calcul lié à la division de fractions. Il appert cependant que ce sens échappe généralement à la majorité des élèves du secondaire.

Dans l'enseignement actuel, plusieurs de ces propriétés sont souvent ignorées ou traitées en surface bien qu'elles soient essentielles à la construction adéquate des nombres rationnels. Si l'on vise une telle construction, il nous semble également primordial de «ne pas banaliser» le concept de fraction, concept central qui évoque diverses réalités. En nous référant à plusieurs études, dont celles effectuées par Kieren (1988, 1992, 1994, 1995), Moseley (2005), Rouche (1998), Comin (2002) et Blouin et Lemoyne (2002), nous pouvons identifier divers sens de la notion de fraction, sens qui montrent bien la complexité et l'intérêt mathématique de cette notion : partie-tout; rapport; quotient; opérateur; mesure.

Le sens partie-tout est le premier sens de la fraction qui est invoqué dans la majorité des situations d'enseignement présentées aux élèves de l'école primaire; ce sens teinte aussi très fortement les situations d'enseignement que rencontrent les élèves du premier cycle de l'école secondaire. La fraction a/b rend ainsi compte d'une relation entre un tout qui a été partagé en un nombre b de parties égales et un certain nombre a de ces parties qui est considéré. Le tout peut être une grandeur continue (ex. : aire, volume, masse, longueur) ou discrète (ex. : une collection). La fraction 5/7 peut ainsi correspondre à 5 parties d’une bandelette rectangulaire qui a été partagée en 7 parties égales ou encore, à 5 des 7 élèves qui apprennent le violon.

Le sens rapport de la fraction permet de représenter le rapport entre deux grandeurs continues ou discrètes. La fraction 5/7 peut ainsi rendre compte du rapport entre 5 parties d’une tablette de chocolat qui a été partagée en 7 parties égales ou encore, du rapport entre 5 des 7 élèves qui apprennent le violon. L’écriture 5/7 peut aussi rendre compte du rapport entre 5 parties d’une tablette de chocolat qui a été partagée en 12 parties égales et les 7 autres parties que comporte cette tablette, etc. Elle pourrait aussi rendre compte du rapport entre deux grandeurs continues ou discrètes différentes. Ainsi, 5/7 pourrait aussi rendre compte du rapport entre les quantités de concentré de jus d’orange et d’eau qui composent un breuvage, par exemple, entre 5 litres de jus concentré d’orange et 7 litres d’eau.

Le sens quotient de la fraction indique que la fraction peut être considérée comme le résultat d’une division. Ainsi, 5/7 peut rendre compte de la part que chacun des 7 enfants a obtenue, lorsqu’on a partagé également les 5 gâteaux dont on disposait. Selon l'interprétation quotient de la fraction, l’écriture fractionnaire a/b est utilisée pour représenter le résultat de la division de a par b; a/b est ainsi la solution d'une équation linéaire du type $bx = a$, dans l’exemple précédent, $7x = 5$.

Le sens opérateur de la fraction permet d’envisager la fraction d’une manière algébrique. La fraction a/b est ainsi considérée comme une fonction qui peut être représentée par $f(x) = a/bx$. Dans l’enseignement secondaire, ce sens intervient, entre autres, dans la construction de l’image d'une figure géométrique par des homothéties. Le nombre a/b ne représente plus une quantité ou une comparaison, mais plutôt une transformation. Cette interprétation permet alors de concevoir la multiplication de fractions comme une composition de fonctions.

Le sens mesure de la fraction suppose l’existence d’unités de mesure, comme le montre bien la situation originale et fondamentale portant sur l’épaisseur d’une feuille de papier conçue par N. et G. Brousseau (1987). Ainsi, 5/7 cm, et non uniquement 5/7, peut être une mesure de l'épaisseur d'une feuille de papier. On peut dire également que 5/7 cm est la mesure de la longueur d'une corde ou encore, que les 5/7 d'un gâteau (le gâteau étant l'unité de mesure) ont été mangés. On peut ainsi dire que 5/7 exprime une relation multiplicative. Selon cette interprétation, 1/7 représente la fraction unité et 5/7 serait le résultat de l'itération de la fraction unité 1/7; la fraction 5/7 serait alors 1/7 + 1/7 + 1/7 + 1/7 + 1/7. On peut aussi concevoir l'addition des fractions 3/7 et 5/7, comme une addition répétée de la fraction 1/7.

2.2. Les rapports problématiques des élèves aux nombres rationnels

L'enseignement des nombres rationnels, comme le montrent les programmes actuels que nous avons présentés au chapitre précédent, prend appui sur des définitions et représentations qui ont marqué la construction de ces nombres et des opérations sur ces nombres et qui ont permis de représenter et de résoudre des problèmes qu'il n'était pas possible de résoudre en recourant aux nombres entiers et aux opérations sur ces nombres. Accéder aux nombres rationnels constitue un défi important pour tout élève qui n'a rencontré que des nombres entiers et des opérations effectuées avec ces nombres. De nombreuses études effectuées auprès d'élèves de l'enseignement primaire et secondaire font ainsi état de rapports fort problématiques aux nombres rationnels chez les élèves. Compte tenu de la quantité importante de ces recherches, nous avons sélectionné diverses recherches (anciennes/récentes; locales/nationales/internationales; auprès de diverses populations d'élèves) et les avons regroupées selon qu'elles portent plus spécifiquement sur les rapports problématiques liées au concept de nombre rationnel, aux opérations et à la résolution de problèmes impliquant des nombres rationnels. En effet, en nous appuyant sur le référentiel élaboré précédemment, référentiel formé des trois principaux habitats, cette classification en facilitera l'utilisation/exploitation.

Nous porterons une attention particulière aux principaux résultats de ces études. Ces données nous semblent des vecteurs tout à fait pertinents, non seulement pour apprécier les dispositifs didactiques conçus par les chercheurs, mais également, pour enrichir notre mémoire didactique, pour orienter notre démarche d'acculturation et trouver des niches dans lesquelles notre collaboration avec l'enseignant pourrait conduire à la mise en place de situations pouvant permettre aux élèves d'établir des rapports plus adéquats aux nombres rationnels et de transformer leur habitus. Ainsi, il nous apparaît nécessaire d'effectuer un maillage entre les conduites et les caractéristiques des tâches. D'autant plus que nous nous intéressons aux *rapport*s des élèves aux nombres rationnels. À ce propos, Vergnaud (2001, p.51) rappelle que *"si l'on veut progresser dans l'aide apportée aux élèves, notamment lorsque l'apprentissage se heurte à des difficultés durables, il faut analyser un peu plus en profondeur les caractéristiques de l'activité demandée aux élèves, et les caractéristiques des situations qui leur sont proposées."*

Différentes typologies des erreurs ont été proposées par des chercheurs (Grisvard et Léonard, 1981; Hiebert et Wearne, 1985; Astolfi, 1997; Bloch, 2006; Brousseau, 2000-2001). De telles typologies rendent compte, entre autres, de la pluralité des origines de ces erreurs et de leurs manifestations. Par exemple, Bloch (2006, p.5-6) effectue la catégorisation suivante : *« erreurs liées à l'élève; liées au savoir; liées au rapport entre l'élève et le savoir; liées aux choix didactiques du professeur ; liées à la relation didactique ».* Nous pouvons donc anticiper, dans le cadre de notre recherche, la difficulté (une conduite erronée peut être liée à différentes origines ou à la combinaison de plusieurs), l'impossibilité (l'objet *nombres rationnels* est trop dense) et surtout, le danger de recourir à une telle typologie (laisser croire à un enseignement potentiellement techniciste : difficultés/ origines/ interventions). D'ailleurs, les origines de chacune des erreurs sont d'abord et, avant tout, des interprétations, des constructions du chercheur à partir de ce qui en est dit, de ce qui est fait par l'individu, mais le chercheur doit nécessairement tenir compte du milieu.

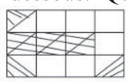
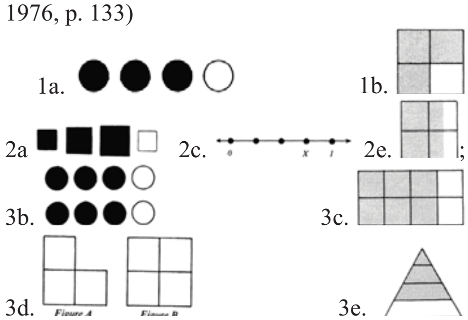
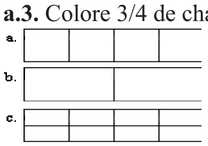
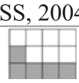
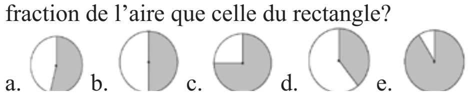
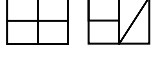
Pour ces raisons et parce que dans notre thèse nous avons fait le choix de miser sur la conception de situations pouvant transformer les rapports des élèves aux nombres rationnels, il nous est apparu indispensable de mettre en relation : 1) les tâches, leurs taux d'échec respectifs et la population impliquée (caractérisation des difficultés, des rapports problématiques en termes de population touchée, d'ampleur ; identification et priorisation de niches potentiellement fécondes); 2) les conduites et les caractéristiques des tâches, de manière à faire ressortir certaines variables didactiques rendant les tâches difficiles. Cette recension servira d'outil à la conception de situations. C'est pourquoi nous avons tenu à regrouper les rapports problématiques selon les principaux habitats du programme.

2.2.1. Les rapports problématiques liés plus spécifiquement au concept de nombre rationnel

Les recherches spécifiques sur les rapports problématiques au concept de nombre rationnel, de plusieurs élèves du primaire et du secondaire, ont été principalement initiées dans les années 1980 (Bezuk et Bieck, 1989; N. et G. Brousseau, 1987; Chevallard et Julien, 1989; Evamath 1994; Grisvard et Léonard, 1981; Hasemann, 1981; Hart, 1980; Hiebert et Behr, 1988; Kieren, 1980, 1988; Lemoyne, 1992; Novillis, 1976; Prediger, 2008 ; Perrin-Glorian, 1985; Post et Cramer, 1987). Les difficultés des élèves ont été mises en évidence dans des activités de représentation, de comparaison, de sériation et d'intercalation de nombres rationnels. Diverses études récentes montrent que ces difficultés sont toujours présentes chez un nombre important d'élèves de l'enseignement primaire et secondaire (Biddlecomb, 2002; Bolon 1996; Boulet, 1993; Charnay, Guillaume, Douaire et Valentin, 1999; Cramer, Wyberg et Leavitt, 2009; Hackenberg et Tillema, 2009 ; Irwin, 2001; Krikorian, 1996; Lancup, 2005; Bisaillon, 2005; Morissette, 2006; Moskal et Magone, 2001; Pressiat, 2003 ; Roditi, 2005 ; Gonzales, Guzman, Partelow, Pahlke, Jocelyn, Kastberg et Williams, 2004 ; Gonzales, Williams, Jocelyn, Roey, Kastberg et Brenwald[12], 2008), mais les orientations de ces études concernent davantage les dispositifs visant à les palier. Pour bien montrer les rapports problématiques de plusieurs élèves à la représentation de fractions, nous avons reproduit, au tableau suivant, quelques activités représentatives de celles que l'on retrouve dans plusieurs études et fait état des conduites des élèves. Nous avons inscrit l'année scolaire des élèves ayant participé à chacune de ces recherches, en nous référant au système scolaire québécois.

[12] Ces derniers sont les auteurs des documents faisant état des résultats du Trends in International Mathematics and Science Study, documents auxquels nous référerons par l'acronyme TIMSS 2003 et TIMSS 2007.

Tableau I : Les rapports problématiques liés plus spécifiquement à la représentation des fractions

TÂCHES REPRÉSENTATIVES	CONDUITES RENCONTRÉES CHEZ PLUSIEURS ÉLÈVES
a.1. On pose des carreaux sur le sol. Ils sont hachurés sur le dessin ci-dessous. Quelle fraction  du sol est-elle carrelée? (Chevallard et Julien, 1989, p. 54)	**a.1.** 51 des 76 élèves ne peuvent répondre adéquatement : 4 ne produisent aucune réponse; 12 donnent la réponse 3/8; 20 se satisfont de la réponse 4,5/12; 15 donnent une réponse erronée (ex. : 4/11 ± ½). Élèves de 2^{e} secondaire
a.2. Plusieurs tâches étaient proposées: (a) choisir une représentation correspondant à la fraction donnée et *vice-versa*; (b) sélectionner deux représentations exprimant la même fraction; (c) choisir la représentation qui ne correspond pas à la fraction représentée par les autres. Nous reproduisons les représentations pour la fraction ¾. Les représentations pour les autres fractions (1/5;1/3;2/5 et 3/8) sont de même type. (Novillis, 1976, p. 133) 	**a.2.** Peu d'élèves associent, par exemple, 3/4 aux représentations adéquates dans lesquelles le nombre de parties ne correspond pas au dénominateur, même lorsque les objets sont disposés dans une rangée qui indique clairement que 3 parties sur 4 sont ombragées (3b). Si deux modèles ont été partagés en 4 parties, dans un cas congrues et, dans l'autre, non congrues, ni d'aires égales (2a,3e), dont 3 d'entre elles sont ombragées, plusieurs étudiants associent ces représentations à la fraction 3/4. Seul le nombre de parties hachurées est considéré. Les résultats indiquent que les situations associées aux modèles types «1a et 1b» sont beaucoup mieux réussies que celles associées aux modèles types «2c, 3b, 3c». Novilis (1996, p.143, traduction libre) conclut : qu' « *associer une fraction à un modèle discret (1a) ou continu (1b) est un pré-requis pour : a) associer une fraction à un point sur une droite numérique (2c); (b) employer une fraction dans une situation de comparaison de modèles (c) associer une fraction à un modèle dans lequel le nombre de parties est un multiple du dénominateur et que ces parties sont disposées dans une rangée qui indique clairement le dénominateur (3b; 3c) ; (d) associer une fraction à un modèle discret (1a) ou continu (1b) dont les parties sont congrues est un pré-requis pour associer une fraction à un modèle dont les parties ne sont pas congrues (2a), qui et dans le cas des modèles continus, les parties ont une aire égale (2c)*» . Élèves de 4^{e}, 5^{e} et 6^{e} primaire
a.3. Colore 3/4 de chaque rectangle  (Bezuk et Bieck,1989, p.3)	**a.3.** Les élèves rencontrent plus de difficultés lorsque le nombre de parties est un multiple du dénominateur (ex. item c.). Ils rencontrent des difficultés moindres lorsque le nombre de parties est un facteur du dénominateur (ex. item b.). Enfin, lorsque le nombre de parties correspond au dénominateur, les élèves réussissent bien. Cet ordre de difficulté a été remarqué pour quatre modèles : rectangles, cercles, collection, droite numérique. Élèves de 4^{e} et 5^{e} primaire
a.4. Représenter en recourant à un seul rectangle chacune des fractions 62/124; 3/5; 10/20; 3/7 (Lemoyne, 1992, communication)	**a.4.** Une très grande majorité des élèves n'a pu illustrer à l'aide d'un seul rectangle les fractions précédentes Élèves de 6^{e} primaire
a.5. Complétez par des entiers: 2/3 = ?/ 12 = 10/? (Chevallard et Julien, 1989, p. 55)	**a.5.** 32 élèves sur 77 échouent cette tâche Élèves de 2^{e} secondaire
a.6. Si 12/n = 36/21, alors n est égal : a) 3; b) 7; c)36; d) 63 (TIMSS, 2004, item M012040, p.13)	**a.6.** Résultats internationaux: Les choix de réponses se répartissent ainsi : a) 10,3%; b) 64,8 %; c) 11,8 %; d) 8%. Les choix de réponses au Québec se répartissent ainsi : a) 4,3%; b) 88 %; c) 3,2 %; d) 3,4 %.Élèves de 2^{e} secondaire
a.7.  Quel cercle représente la même fraction de l'aire que celle du rectangle? (TIMSS, 2008, itemM022043, p.3)	**a.7.** Résultats internationaux : Les choix de réponses se répartissent ainsi : a) 15,1%; b) 6,9 %; c) 8,7 %; d) 62,5%; e) 4,5% Résultats au Québec : Les choix de réponses se répartissent ainsi : a) 13,2 %; b) 1,5 %; c) 2,5 %; d) 78,8 %; e) 2,7% Élèves de 2^{e} secondaire
a.8. Voici deux pizzas carrées de même grandeur. Elles sont coupées en 4 morceaux et prêtes à servir.  Julie dit que les morceaux de la pizza de droite ne sont pas de la même grosseur et que certains de ses invités seront plus chanceux que d'autres. Dis-moi si elle a raison ou non? Pourquoi? (Krikorian, 1996, p.268)	**a.8**. 15 élèves sur 50 échouent à ce problème en justifiant leur résultat en s'appuyant sur la différence de « forme» et de « grandeur ». Élèves de la fin 6^{e} primaire.

Les conduites des élèves du 3e cycle du primaire et du 1er cycle du secondaire, lors des tâches qui portent sur la représentation des fractions, montrent, de toute évidence, les problèmes importants que soulèvent l'enseignement et l'apprentissage des nombres rationnels. En ce qui concerne les tâches a.1. à a.8. inclusivement, trois principaux types d'activités sont proposés aux élèves; il leur est ainsi demandé : **a)** d'identifier des fractions représentées par des figures géométriques, des collections d'objets ou encore, des segments de droite (voir les tâches a.1., a.2.); de choisir parmi plusieurs représentations, celle qui peut être associée à une autre représentation (voir les tâches a.2., a.7.) et de se prononcer sur l'équivalence entre deux partitions d'un même objet (voir la tâche a.8.); **b)** de représenter, avec ou sans contraintes sur la représentation attendue, diverses fractions (voir les tâches a.3. et a.4.); **c)** de compléter les représentations numériques de certaines fractions pour qu'elles soient équivalentes à une fraction déterminée (voir les tâches a.5. et a.6.).

Dans les tâches que nous avons associées au premier type d'activités, les difficultés[13] sont plus importantes lorsque : 1. l'objet n'est pas partagé en parties égales (a.1; a.2); 2. les parties sont non congrues, mais de même surface (a.2; a.8); 3. le nombre total d'objets dans une collection (a.2), ou de parties qui composent une forme géométrique (a.2; a.3), ne correspond pas au dénominateur de la fraction recherchée; 4. la partition de chacune des représentations proposées n'est pas précisée (a.7.).

Il faut dire que ces quatre cas de figure exigent des traitements différents d'une représentation « standard, stéréotypée ». Par exemple, le premier cas (1.) oblige les élèves à trouver une mesure permettant de couvrir l'ensemble de la surface ou à considérer que des parties peuvent être réunies pour former à leur tour une partie (2 triangles en 1 carré) et à transformer leur résultat (4,5/12) sous une forme fractionnaire; le second cas (2.), apparenté au premier, quoique plus complexe, contraint les élèves à comparer deux surfaces, en recourant à une unité de mesure qui permet de partager chacune de ces surfaces et ainsi de se prononcer sur l'identité des aires; le troisième cas (3.) exige une

[13] Difficultés également relevées dans plusieurs autres recherches (ex. Bezuk et Bieck, 1989; Hart, 1981; Payne, 1976; TIMSS 2003 et 2007 [itemM041006]; Wong et Evans, 2008)

réinterprétation du sens du dénominateur et du numérateur, réinterprétation qui sous-tend une coordination des sens partie-tout et rapport de la fraction; dans la représentation comportant deux rangées de 5 pastilles, dont 1 pastille est colorée, l'élève doit pouvoir ainsi conclure que puisque 1 partie sur 5 est colorée, dans chacune des rangées, le rapport 1 pour 5 est conservé lorsque 2 parties sur 10 sont colorées. (4.) l'association d'une des représentations d'un objet à une représentation d'un autre objet différent est plus complexe lorsque la partition de chacune des représentations proposées n'est pas précisée, ce qui est assez étonnant, car le recours à la fraction repère ½ pour estimer l'ordre de grandeur de la fraction représentée par le rectangle aurait rapidement amené les élèves à effectuer le bon choix, puisqu'un seul cercle représente une fraction « un peu plus petite que ½ ».

En ce qui concerne le deuxième type de tâches, la représentation de fractions -sans contrainte- ne pose généralement aucun problème puisque les élèves peuvent s'appuyer sur une compréhension fort élémentaire de la fraction pour y parvenir (ex ¾ : objet partagé en 4 parties égales dont trois sont hachurées). En revanche, s'ils sont soumis à des contraintes, telles que l'utilisation de figures déjà partagées en un nombre de parties différent du dénominateur (a.2), il est plus difficile pour les élèves de représenter une fraction si le nombre de parties est un multiple plutôt qu'un facteur du dénominateur de la fraction à représenter**.** Ces difficultés, illustrées par Bezuk et Bieck (1989), ont également été mises en évidence par plusieurs chercheurs (voir, entre autres, TIMSS, 2004 et 2008; Wong et Evans, 2008). Ainsi, nous ne serons pas surprise de constater la difficulté des élèves à comprendre le sens de la multiplication de fractions, lequel fait fréquemment intervenir la nécessité de considérer des parties comme un «tout» qu'il faut repartitionner (ex. a/b x nb/c et a/nb x b/c). Parallèlement, le choix des mesures d'une collection ou d'une figure est source de problèmes importants chez les élèves (a.5) lorsqu'il s'agit de représenter, entre autres, plusieurs fractions, surtout si ces fractions exigent un traitement préalable et que le dénominateur commun ne correspond pas à aucun des dénominateurs des fractions. La manifestation de ces difficultés ne sera pas sans se répercuter dans les tâches d'addition et de multiplication de fractions. En effet, les élèves doivent mobiliser le sens du dénominateur commun qui consiste justement à trouver les mesures avec lesquelles il est facile de représenter à la fois chacune des fractions.

Parallèlement, le faible taux de réussite d'élèves de 2e secondaire dans l'exécution du troisième type de tâches, la production de fractions équivalentes à la fraction proposée, (a.5.) pour lesquelles il est facile d'identifier la relation entre le numérateur ou le dénominateur de ces fractions et la fraction proposée laisse présager d'importantes difficultés dans l'addition, d'autant plus que la réussite des élèves ne traduit pas forcément une compréhension des gestes impliqués. Le taux assez élevé de réussite à l'item a.6, notamment au Québec, contrairement à ce qui est observé à l'item a.5, pourrait être attribuable à la présence, pour l'item a.6., de choix de réponses. Ces choix peuvent être interprétés comme des résultats de l'application de techniques pour trouver des fractions équivalentes. Il est aussi possible que les différences appréciables entre les nombres proposés amorcent un travail sur les fractions équivalentes, travail impliquant différents sens de la fraction. Il serait ainsi étonnant qu'un élève qui fait appel au sens partie-tout ou au sens rapport de la fraction puisse choisir 63 ou 36 comme dénominateur; puisque le numérateur de la première fraction est nettement inférieur à celui de la seconde fraction, et qu'en plus, le dénominateur de cette première fraction est supérieur au dénominateur de la seconde fraction, on devrait conclure que la première fraction est nettement inférieure à la seconde.

La représentation de fractions, comme en font état les résultats précédents, soulèvent des difficultés importantes chez une majorité d'élèves du primaire, voire du secondaire. La représentation de nombres décimaux a aussi donné lieu à plusieurs études (Perrin-Glorian, 1985 ; Charnay, Guillaume, Douaire et Valentin, 1999; Moskal et Magone, 2001; Stegen et Daro, 2007). Dans la majorité d'entre elles, il s'agissait de représentations sur une droite numérique. Puisque les représentations de nombres décimaux sont incluses dans celles des nombres rationnels, nous avons jugé bon de ne retenir que quelques études sur la représentation des nombres décimaux. Au tableau suivant, nous faisons état de trois études particulièrement instructives.

Tableau II: Les rapports problématiques liés plus spécifiquement à la représentation de nombres décimaux

TÂCHES REPRÉSENTATIVES	CONDUITES RENCONTRÉES CHEZ PLUSIEURS ÉLÈVES
b.1. Si tu devais expliquer à un camarade ce qu'est 2,3, que lui dirais-tu, quels dessins ferais-tu? (Perrin-Glorian, 1985, p. 47)	**b.1.** L'erreur la plus fréquente est de confondre 2,3 et 2/3. Certains élèves dessinent une galette circulaire séparée en deux parties par un diamètre horizontal où la partie supérieure est partagée en deux et où la partie inférieure est partagée en trois parts non équivalentes. Plusieurs élèves ne produisent aucune représentation et écrivent, soit *2 entiers et 3 dixièmes* ou *nombre décimal* ou *une partie entière et une partie décimale*. Élèves de 6^e primaire et de 1re secondaire
b.2. Sur la graduation ci-dessous à quels nombres correspondent les flèches?  (Charnay *et al*.,1999,p. 375)	**b.2.** Le nombre 0,8 a été identifié correctement par 90% des élèves; et le nombre 1,6 par 75% des élèves. Pour le nombre 1,6, les autres élèves proposent les nombres 0,16 et 0,6. Élèves de 5^e et 6^e primaire
b.3. Encerclez le nombre qui a la plus grande valeur : 0,08 ; 0,8 ; 0,080 ; 0,008000. Expliquez votre résultat. (Moskal et Magone, 2001, p.323)	**b.3.** *a. classe 1* : 9 des 20 élèves effectuent un choix erroné, généralement, 0,008000. Parmi les 11 élèves qui ont obtenu le bon résultat, seulement un d'entre eux exploite la relation entre les nombres décimaux et les fractions. Aucun de ces élèves utilise une représentation pour appuyer sa réponse ; *b. classe 2 :* 21 des 28 élèves encerclent le bon résultat. Parmi ces élèves, 2 exploitent des tableaux ou des diagrammes et plusieurs élèves comparent les nombres décimaux en les représentant par des fractions. 2 classes de 5^e primaire

Dans la première étude (b.1.), nous pouvons constater les dérives métadidactiques de la surexploitation de certains représentants lors de l'apprentissage des fractions : lors de la représentation du nombre 2,3, plusieurs élèves recourent à une galette circulaire, qu'ils partagent en deux parties, la première partie, divisée en deux parties égales, représente le nombre entier 2 et la seconde partie, divisée en 3 parties plus ou moins équivalentes, représente la partie décimale.

Dans l'activité b.2. présentée par Charnay, Guillaume, Douaire et Valentin (1999), on observe un repérage correct pour le nombre 0,8, chez la très grande majorité des élèves, soit chez plus de 90% des élèves. Le nombre 1,6 est repéré correctement par environ 75% des élèves, ce qui est assez étonnant compte tenu de la graduation proposée. Les autres élèves proposent 0,16 et 0,6. Dans le premier cas, il est plausible que les élèves comptent ainsi : 0,9; 0,10; 0,11; 0,12; 0,13; 0,14; 0,15; 0,16 sans tenir compte de la valeur de position; dans le second cas, on peut penser que les élèves retrouvent 6 dixièmes sans se préoccuper du fait que la flèche se trouve entre les nombres 1 et 2. Plusieurs interprétations des difficultés, dans ce type de tâches, sont possibles, mais l'une qui est fréquemment évoquée est la complexité de ce représentant qui est souvent sous-estimée.

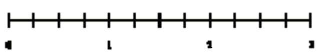
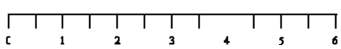
Bolon (1996) ainsi que Wong et Evans (2008) soulignent la nécessité de tenir compte conjointement de la position et de la distance. Pour leur part, Stegen et Daro (2007, p.54), qui ont obtenu des résultats similaires à ceux dont nous avons fait état à l'activité b.2., proposent l'interprétation suivante :

> « *La droite numérique qui est souvent utilisée comme outil pour construire l'intercalation ou aborder la densité des décimaux pose problème ; les élèves ne perçoivent pas suffisamment de liens entre un système de codage de points sur une droite et le principe d'intercalation infinie (densité des décimaux). Une nouvelle fois, on constate qu'un outil introduit (trop) précocement pour permettre le repérage de grandeurs discrètes est transposé tel quel dans l'univers des grandeurs continues*».

Dans la tâche b.3, tous les nombres sont inférieurs à 1 et sont formés des chiffres 8 et 0; le chiffre 8 n'apparaît qu'une seule fois, ce chiffre étant alors précédé ou suivi d'un nombre variable de chiffres 0. Pour trouver le plus grand des nombres ainsi présentés, il importe donc de ne tenir compte que des chiffres 0 qui précèdent le chiffre 8. La confrontation des résultats de deux classes différentes dans cette étude montre, qu'au-delà des obstacles épistémologiques, les pratiques pédagogiques influencent considérablement le type d'erreurs et le mode de justifications des élèves (choix du registre). En effet, ces deux groupes sous la responsabilité d'enseignants différents ont tous deux préalablement reçu une unité d'enseignement sur les fractions et une autre, sur les nombres décimaux. D'ailleurs, en plus des résultats contenus dans le tableau, cette activité a fait l'objet d'une étude antérieure (Magone, Wang, Cai et Lane, 1993, p.322 à 324) qui montrait des justifications très contrastées et intéressantes, à la suite d'enseignements différents qui avaient été dispensés aux élèves : 1) justification du résultat adéquat en coordonnant plusieurs registres : a. « 0,8 est 8 dixièmes, 0,08 est 8 centièmes »; b. représentation graphique : « 8 barres pour 0,8; 8 carrés pour 0,08; 8 lignes pour 0,008 »; c. 0,08 est la même chose que 0,080; 2) justification d'un résultat erroné, 0,008000, en s'appuyant sur la valeur des zéros : « ceux devant le nombre ne servent à rien mais ceux derrière montre que le nombre est plus grand»; 3) justification erronée d'un résultat adéquat : « 0,8 est 1/8 d'un tout ». Ces résultats peuvent également être mis en relation avec ceux cités par Bolon (1992) et qui montrent que si les élèves arrivent à identifier les chiffres à la position des centaines et des dizaines, il en est autrement pour ceux qui occupent les positions des dixièmes et centièmes.

L'analyse des difficultés liées à la représentation spécifique des fractions et des nombres décimaux nous amène maintenant à nous intéresser aux conduites des élèves lorsque ces représentations sont sollicitées simultanément.

Tableau III: Les rapports problématiques liés plus spécifiquement à la représentation de nombres rationnels

TÂCHES REPRÉSENTATIVES	CONDUITES RENCONTRÉES CHEZ PLUSIEURS ÉLÈVES
c.1. «Dans la liste ci-dessous, entoure les écritures qui représentent 14/10 :140; 1,4; 1+4/10; 1,04; 1,4; 0,14» (EvaMath, 1994, p. 20)	**c.1**. 1+ 4/10 n'est pas entouré par 66% des élèves; 1,40 n'est pas entouré par 33% des élèves et 1,4 n'est pas entouré par 29% des élèves; 0,14 est entouré par 22% des élèves; 140 est entouré par 16% des élèves et 1,04 est entouré par 4% des élèves. Élèves de 1re secondaire
c.2. Situe les nombres suivants sur la droite : ½; 1,75; 9/4; 0,25  (EvaMath, 1994, p. 21)	**c.4.** Seulement 35% des élèves situent correctement 9/4 et 51% des élèves positionnent adéquatement 1/2 alors que ce pourcentage s'élève à 67% pour 1,75 et 72% pour 0,25. Élèves de 1re secondaire
c.3. « Voici une droite graduée. Peux-tu placer les nombres suivants sur cette droite? 4,2; 2,54; 2,5; 6/7; 2,2; 5/2; 2,325; 40/12; 7/8  » (Lancup, 2005, p. 71)	**c.3.** Dans le positionnement des fractions, plusieurs élèves traitent le numérateur comme l'entier de référence sur la droite numérique (ex. 5/2 à la position 5). Aucun élève n'est parvenu à placer correctement tous les nombres sur la droite. Les trois nombres décimaux (2,325; 2,5; 2,54) n'ont été placés adéquatement que par 1 élève, de même que les fractions 6/7, 7/8 et 5/2. Élèves de 1re secondaire en difficultés d'apprentissage

Le tableau précédent fait état de 3 tâches consacrées à la représentation de nombres rationnels (c.1, c.2 et c.3). La tâche c.1 (Evamath, 1994) porte sur différentes écritures de fractions; la première de ces tâches nous semble, par ailleurs, particulièrement pertinente, puisque le choix des différentes écritures de la fraction 14/10 rend bien compte de la complexité du changement de registres (Duval, 1995), mais également de la «nouvelle» acceptation qu'un nombre peut être représenté par plusieurs codes digitaux. Il nous semble aussi important de considérer l'influence du nombre choisi (fraction impropre). De plus, les résultats d'Irwin (2001), de Moss et Case (1999), de Moskal et Magone (2001), ainsi que ceux d'Adjiage (2007), nous portent à croire que les élèves auraient tout autant accepté la proposition du nombre décimal 14,10, pour représenter la fraction 14/10, confondant alors la «barre de division» et la virgule. Comme en font état les résultats aux tâches c.2. et c.3., les élèves rencontrent plus de difficultés dans le positionnement de fractions que dans celui de nombres décimaux sur la droite numérique. Fait plutôt interpellant, dans la tâche c.2., 49% des élèves ne peuvent positionner correctement la fraction ½ et cette situation s'aggrave lorsqu'il leur est demandé de positionner uniquement cette fraction (Wongs et Evans, 2008) : seulement 18% des participants répondent adéquatement et 57% des élèves placent une croix au milieu de la droite numérique. Les données d'entrevue ont confirmé que les élèves cherchaient à trouver la moitié de la droite, associant alors la fraction ½ à la moitié de la longueur du segment de droite, ce segment étant considéré comme «un tout». À ce propos, Kamii (1990) nous met en garde contre les dérives possibles des «concrétisations des concepts», telles que la confusion entre *le concept de nombre et ses applications, voire ses illustrations*. Adjiage (2007, p.7) précise également que «*7/5 est rarement perçu comme un nombre en début d'apprentissage à l'opposé de 1,4.*» D'autre part, les résultats obtenus par Lancup (2005; tâche c.3.) font enfin ressortir la difficulté pour les élèves de positionner des nombres décimaux sur la droite numérique lorsque les graduations inscrites ne correspondent pas à la précision des nombres à positionner. Il importe de souligner que dans la tâche c.2, la partie décimale de plusieurs des nombres décimaux pouvait être représentée autrement; il était relativement facile d'associer le nombre 1,75 au nombre 1¾ et d'effectuer un partage, ce qui n'était pas le cas dans la tâche c.3 pour des nombres tels que 2,54 et 2,325. L'examen des difficultés liées à la représentation des nombres rationnels nous permet maintenant d'aborder les conduites des élèves dans des tâches de comparaison et de sériation de ces nombres.

Tableau IV: Les rapports problématiques liés plus spécifiquement à la comparaison et la sériation de nombres rationnels

TÂCHES REPRÉSENTATIVES	CONDUITES RENCONTRÉES CHEZ PLUSIEURS ÉLÈVES
d.1. «Ordonnez par ordre croissant (du plus petit au plus grand) les cinq nombres : 15,5; 15,078; 15,349; 15,41; 15,069» (Grisvard et Léonard, 1981, p.459)	**d.1.** 47 des 76 élèves de 1re secondaire et 38 des 58 élèves de 2e secondaire ordonnent correctement les cinq nombres. Élèves 1re et 2e secondaire
d.2. Les élèves sont invités à ordonner les fractions suivantes : 3/7, 5/9, ½, 255/510, 7/35, 171/340, 3/8, 6/11, 7/8, 251/504, 8/9. (Lemoyne, 1992, communication)	**d.2**. Environ 1/3 des élèves essaient de trouver un dénominateur commun et plusieurs utilisent, sans succès, la calculatrice. Plus de la moitié des élèves ne considèrent que les numérateurs ou les dénominateurs pour ordonner les fractions. Élèves de 6e année et de 1re secondaire
d.3. Place ces nombres du plus petit au plus grand : 0,002; 10/10; 0,6; 7/100; 60/100; 0,50; 0,05;20/100; 0,2. (Mazzocco et Devlin, 2008, p. 683)	**d.3**. Plusieurs ont comparé les nombres décimaux et les fractions sans les traiter conjointement : tous les nombres décimaux figurent avant les fractions ou inversement. Plusieurs élèves ordonnent ainsi les nombres :. 0,2; 0,6; 7/10; 10/10; 0,05; 20/100; 0,50; 60/100; 0,002. On note plusieurs erreurs similaires à celles observées aux études précédentes : les élèves ne tiennent pas compte de la virgule, ordonnent en fonction du nombre de chiffres après la virgule ou du numérateur uniquement, etc. Peu d'équivalences sont prises en compte (ex. 0,5 et 0,50). Élèves de la 6e primaire à la 2e secondaire en difficultés d'apprentissage

Les difficultés liées à la comparaison et à la sériation (tâches d.1. à d.3.) de nombres rationnels ne surprennent guère étant donné que les élèves prennent appui sur leurs connaissances des nombres entiers, ce qui est tout à fait légitime, si l'on considère le processus d'apprentissage du nouvel objet «nombres rationnels» et la durée de leur fréquentation avec les nombres entiers. L'extrapolation de leurs connaissances sur les nombres entiers «contaminent» cependant leurs résultats, lors de la comparaison et de la sériation, car les règles de comparaison des nombres rationnels diffèrent de celles qu'ils ont précédemment construites sur les nombres entiers. Encore faut-il que les situations proposées favorisent la mise à l'épreuve de ces règles. En effet, si dans plusieurs activités, elles peuvent être sollicitées et produire le résultat attendu (ex. 3,7 + 4,2), ce n'est pas le cas dans les tâches de ***sériation/comparaison de nombres décimaux*** proposées par les chercheurs (Charnay *et al*., 1999; Comiti et Nevret; 1979; Grisvard et Léonard, 1981; Perrin-Glorian, 1986 ; Roditi, 2008). En effet, l'exposition à des nombres qui ne comportent pas le même nombre de chiffres dans la partie décimale (tâches d.1. et d.3.) a d'abord permis à Grisvard et Léonard (1981) de mettre en exergue différentes règles implicites de comparaison auxquelles les élèves font référence selon la quantité de nombres à sérier et la nature de ces nombres (présence d'un 0 à la position des dixièmes, nombre de décimales). Plusieurs chercheurs décrivent, chez les élèves, un traitement des nombres décimaux comme des couples de deux nombres entiers séparés par une virgule. Ainsi, les élèves croient que 7,8 sera plus petit que 7,18, puisque 8 est plus petit que 18. Ils peuvent aussi considérer que plus la partie décimale comporte de chiffres, plus le nombre est grand (ex. 7,06 est plus grand que 7,9) ou, au contraire, comme le soulignent Grisvard et Leonard (1981), plus le nombre est petit. Cette dernière interprétation semble relever d'une tentative de conciliation et d'adaptation tenant compte de la valeur de position de la partie décimale.

Quant aux résultats obtenus par Bolon (1996, p.419), la plupart des élèves échouent à la tâche de sériation de nombres décimaux et *«attachent sans doute plus d'importance à l'écriture (le costume) du nombre qu'à sa signification (globalité du nombre, fractionnement de l'unité, valeur portée par chaque chiffre) et perçoivent le nombre décimal comme une juxtaposition de nombres entiers. La tentation est alors forte* *de transposer sur les décimaux ce qui "marche" avec les entiers. La faible augmentation des pourcentages de réussite du CM1 à la 5e montre bien que les nombreux retours sur les décimaux effectués en CM2, 6e et 5e modifient peu la représentation première des élèves*».

D'ailleurs, Boulet (1993) a obtenu des résultats fort similaires à ceux présentés antérieurement, et ce, auprès d'étudiants universitaires. En effet, lors de tâches d'ordonnancement et de conversion de nombres décimaux et de fractions, 32% des étudiants affirment que 2,19 est plus grand que 2,199; 11,5% estiment que 0,001 est plus grand que 0,100; 54,5% des étudiants ne peuvent exprimer 0,517 comme une fraction irréductible et ce taux s'élève à 78% pour 21,108. Enfin, 50% des étudiants ne savent représenter 7/8 sous la forme d'un nombre décimal. D'autre part, Roditi (2008) souligne que les erreurs de comparaison de nombres décimaux sont plus fréquentes, chez les élèves « faibles », lorsqu'il y a absence de contextes dans lesquels les nombres expriment des mesures alors, que c'est le contraire chez les autres élèves. *« L'interprétation de ces résultats contrastés est difficile, nous proposons deux hypothèses. Pour les élèves qui ne sont pas en difficulté, l'écriture suffit à accéder au sens du nombre et le contexte est un ensemble d'informations supplémentaires à gérer, qui peut induire en erreur. »* (Roditi, 2008, p.16). De prime abord, cette interprétation est assez étonnante! Nous sommes en effet quelque peu perplexe quant aux deux hypothèses émises; peut-être que les élèves qui ne sont pas «faibles» ont été soumis à des activités qui leur permettent désormais de donner sens aux écritures, de les comparer, alors qu'avec les élèves en difficultés d'apprentissage, l'ajout d'un contexte leur permet d'interpréter les écritures, ces élèves ayant possiblement reçu un enseignement plus «techniciste». Nous aurons l'occasion de revenir sur cet aspect dans la partie sur les difficultés liées à la résolution de problèmes par l'entremise de recherches comparant diverses tâches contextualisées et non contextualisées portant sur les concepts et les opérations (Irwin, 2001 et Heller, Post, Behr et Lesh, 1990 ; Krikorian, 1996).

En ce qui concerne la ***comparaison et la sériation de fractions*** (d.2), la surexploitation de la fraction «partie-tout» et de la «concrétisation» de ce concept sous forme de représentations stéréotypées nous semblent limiter considérablement les «accès» de comparaison. Nous pensons que cette situation peut expliquer les commentaires déstabilisants des élèves dans la comparaison de ½ et 1/3 : « *Voulez-vous dire « la taille des pièces » ou « le nombre de pièces ?»* (Post and Cramer, 1987, p. 34, traduction libre*).* De plus, Moss et Case (1999) ont montré l'influence d'une conception limitée du sens partie-tout: les élèves considèrent que 2/3 et ¾ sont des fractions égales compte tenu qu'il leur manque une partie pour compléter l'entier. Cramer, Post et Delmas (2002) ont pour leur part exposé les répercussions de la disponibilité d'une seule stratégie de comparaison : les élèves recherchent le dénominateur commun même lors de la comparaison de 4/5 et 4/10! Par ces résultats, nous pouvons facilement entrevoir la complexité, mais également la richesse, de la réalisation de tâches, telle la tâche d.2., dans laquelle la recherche du dénominateur commun n'est pas aisée. En effet, le choix des nombres oblige les élèves à exploiter et construire diverses connaissances : fraction repère (1/2 et 1); exploitation de composition additive; exploitation du sens rapport (ex. 251/504). Ce travail est loin d'être négligeable si nous considérons que des élèves du secondaire, dans le cadre d'un cours d'algèbre, affirment que 1/1+x est plus grand que 1/x, car 1+x est plus grand que x (Biddlecomb, 2002).

De surcroît, la présence de différents représentants de ***nombres rationnels*** (d.3) complexifie leur comparaison. En effet, dans la tâche d.3., les nombres obligent à une mobilisation de connaissances variées sur les nombres rationnels et confrontent les élèves aux obstacles inhérents au passage des nombres entiers aux nombres rationnels, ce qui n'est pas transparent dans les tâches usuelles d'enseignement (ex 2,32 et 2,45; 1/3, 7/12 et 3/4) dans lesquelles les élèves peuvent obtenir le bon résultat, tout en ayant sollicité des règles de comparaison erronées. En effet, dans une étude réalisée par Lemoyne et Bisaillon (2006), la majorité des élèves de 6^{e} année peuvent dire que les nombres 50/100 et 5/10 sont «*les mêmes mais écrits autrement comme on fait dans les fractions*», mais aucun ne reconnaît les nombres 0,50 et 0,5 comme étant identiques ou équivalents aux nombres représentés par 50/100 et 5/10. Les élèves se montrent même incapables de reconnaître l'équivalence d'écriture entre des nombres décimaux fort simples (0,5 et 0,50 dans Lemoyne, 1993; 1,4 et 1,40 dans Charnay *et al.*, 1999) et entre un nombre décimal et son équivalence fractionnaire (0,5 et 5/10 dans Lemoyne, 1993; 7/10 et 0,7 dans TIMSS, 2004; 0,5 et ½, 0,50 et 5/10 dans Mazzocco et Devlin, 2008).

Dans le même ordre d'idées, les élèves associent incorrectement diverses représentations (0,05 = 0,50 ; 0,2 = 2/100 ; 0,50 = 5/100 dans Mazzocco et Devlin, 2008). D'ailleurs, nous pouvons voir leur difficulté à traiter simultanément les notations décimales et fractionnaires lorsqu'ils les ordonnent en inscrivant d'abord les nombres décimaux puis les fractions (Mazzocco et Devlin, 2008 ; Stegen et Daro, 2007). Nous pouvons associer ces résultats à ceux mis en évidence dans l'étude effectuée par Charnay, Guillaume, Douaire et Valentin (1999); ces chercheurs rapportent que si 64% des élèves identifient correctement le chiffre à la position des dizaines, moins de 50% d'entre eux identifient correctement les chiffres des dixièmes et des centièmes. Ces résultats rendent compte de l'importance de traiter conjointement les aspects sémantiques et syntaxiques des représentations des nombres rationnels. D'ailleurs, comme en témoigne Roditi (2007a, p.6), dans son étude visant à mieux comprendre les traitements des nombres décimaux impliqués dans les tâches de comparaison et à repérer des facteurs liés aux difficultés d'apprentissage, ses conclusions sont éloquentes**:** **«** Les *élèves qui ont répondu correctement à toutes les questions de changement de registre*[14] *obtiennent un pourcentage de réussite très élevé aux questions de comparaisons, la capacité à utiliser plusieurs registres de représentation apparaît comme particulièrement discriminante. »*

Comme on peut le constater, la possibilité d'utiliser plusieurs registres numériques n'est pas sans rendre la tâche difficile aux élèves. Il en est de même lorsque les questions font appel à la «densité» des nombres rationnels, comme en témoigne le tableau V.

---

[14] «*Quatre registres de représentation des nombres décimaux figurent dans le questionnaire, deux symboliques (écriture à virgule et écriture fractionnaire) et deux graphiques (sur une droite graduée et sur un quadrillage) » (Roditi, 2007, p.19).*

Tableau V: Les rapports problématiques liés plus spécifiquement à la densité des nombres rationnels

TÂCHES REPRÉSENTATIVES	CONDUITES RENCONTRÉES CHEZ PLUSIEURS ÉLÈVES
e.1. Peux-tu citer deux nombres : a) compris entre : 1,8 et 2,1? ; b) compris entre ½ et ¾? (Lancup, 2005, p.71)	**e.1.** a) 6 élèves sur 7 savent trouver au moins un nombre compris entre 1,8 et 2,1; b) 4 des 7 élèves donnent 2/3 comme seule réponse. Élèves de 1re secondaire en difficultés d'apprentissage
e.2.. « Pouvez-vous donner, s'il en existe, un nombre qui soit compris entre 2,746 et 2,747 ?» (Pressiat, 2003, p.7)	**e.2.** 42% des élèves proposent le nombre 2,7465 ; 34% disent 2,7461 ou 2,7462 etc. ; 11% disent qu'il n'existe pas de nombres et 9% ne répondent pas. Élèves de 3^{e} et 4^{e} secondaire
e.3. ***item35*** : Par rapport à 60, quel est le nombre le plus proche : 60,3 ou 59,3?; ***item36***: Par rapport à 7, quel est le nombre le plus proche : 6,9 ou 7,08 *?* (Bolon, 1996, p.419)	**e.3.** Taux de réussite (***item 35):*** CM1 (66%), CM2 (80%), 6^{e} (74%), 5^{e} (81%); Taux de réussite ***(item 36):*** (22%), CM2 (30%), 6^{e} (27%), 5 (29%) Élèves de 4^{e} primaire à la 1re année du secondaire.

Tel qu'exposé dans le tableau, une rupture conceptuelle non négligeable survient lors de l'entrée dans les nombres rationnels, en l'occurrence, lorsqu'il est question de la densité (tâches e.1. à e.3). Par exemple, dans la tâche e.1., nous pouvons constater que lorsque des nombres sont perçus par les élèves comme « successifs » (ex. 2/3 et ¾; 0,3 et 0,4), ces élèves sont dépourvus lorsqu'il s'agit d'intercaler des nombres entre ces nombres. Il importe donc de confronter les élèves à la densité des nombres rationnels. Des résultats semblables à ceux obtenus par Pressiat (2003, tâche e.2.) avaient aussi été obtenus par Izorche (1977) qui avait proposé antérieurement cette tâche à d'autres élèves de l'enseignement secondaire: 46,8% des élèves trouvent des nombres adéquats alors que 48% croient qu'il n'en existe pas ou avouent ne pas être capables de produire de tels nombres. Les résultats à la tâche e.3., pour l'item 35, étaient à prévoir car lorsqu'il est demandé aux élèves d'évaluer la distance entre différents nombres (Lequel de ces nombres est plus près de …), la majorité d'entre eux s'appuient sur la correspondance entre les nombres entiers qui composent ces nombres. Des résultats similaires ont aussi été obtenus chez des élèves du primaire et du secondaire ayant participé à l'étude du TIMSS (2004, items M032670 : 2^{e} secondaire et 4^{e} primaire, item M031332). Cependant, il semble qu'à l'item 36, le traitement de la partie décimale en tant qu'entier prédomine pour juger de la distance, « il suffit d'ajouter « 1 » à 6,9 pour obtenir 7 alors qu'il faut enlever « 8 » à 7,08 pour obtenir 7. Ainsi, 6,9 sera jugé plus près de 7 que 7,08.

Les rapports problématiques des élèves au concept de nombres rationnels, les difficultés de représentation et d'interprétation des fractions, les difficultés à établir des liens entre diverses écritures des nombres rationnels et à ordonner ces nombres, nous permettent d'appréhender des difficultés tout aussi importantes dans l'apprentissage des opérations sur les nombres rationnels. Dans les tableaux ci-dessous, nous avons regroupé les erreurs liées à l'addition et à la soustraction de nombres rationnels, puis celles liées à la multiplication et la division de nombres rationnels.

2.2.2. Les rapports problématiques associés aux opérations sur les nombres rationnels

Plusieurs études (Lancup, 2005; Perrin-Glorian, 1985 et 1992; Boulet, 1993; TIMSS 2004 et 2008; Ma, 1999; Morissette, 2006; Post, 1981; Lemoyne et Bisaillon, 2006; Charnay, Guillaume, Douaire et Valentin, 1999; Hierbert et Wearne, 1985; Hasemann, 1981; Charnay, 2005; Bolon 1992/1993; Krikorian, 1996; Tirosh, 2000) se sont attardées à mieux circonscrire et comprendre les difficultés des élèves dans la réalisation d'opérations sur les nombres rationnels. Dans les tableaux ci-dessous, nous effectuons une typologie des difficultés mises en évidence.

Tableau VI: Les rapports problématiques liés à l'addition et la soustraction de fractions

TÂCHES PRÉSENTATIVES	CONDUITES RENCONTRÉES CHEZ PLUSIEURS ÉLÈVES
AS-F-1. « Que vaut ½ + 1/3? » (Lancup, 2005, p. 71)	**AS-F-1**. Six élèves sur 7 procèdent à l'ajout des numérateurs et à la multiplication des dénominateurs. Élèves de secondaire 1 en difficultés d'apprentissage
AS-F-2 «Que vaut : a) ½ + ½ ; b) 1/3 +1/3; c) 1/10 +3/10; d) 1/2+1/3» (Perrin-Glorian, 1985, p. 47)	**AS-F-2**. Un seul élève sur 63 effectue correctement chacun des calculs. 35% des élèves procèdent à l'addition des numérateurs et des dénominateurs des fractions (ex. 1/3+1/3 = 2/6); 10 % des élèves effectuent la somme de tous les nombres (ex. ½ +1/3 = 7); 8% des élèves n'additionnent que les dénominateurs (ex. 1/3 +1/3 =1/6) Élèves de 1re secondaire
AS-F-3. «Parmi les résultats suivants : 1, 2, 19, 21 lequel correspond à l'estimation de 12/13 + 7/8 ?» (Post, 1981, p. 28)	**AS-F-3**. Seulement 24% des élèves choisissent 2; 7 % choisissent 1; 28% choisissent 19, 27% choisissent 21 et 14% disent ne pas connaître le résultat. Élèves de 1re secondaire
AS-F-4 a. Parmi les nombres suivants (1, 2, 17, 20 et 23), lequel correspond à l'estimation de l'addition 7/8 +13/15 ? b. Effectue les opérations suivantes : 2) 1/3 + 2/3 ; 3) 1/5 + 6/5 ; 4) ½ + 1/5 ; 5) ¾ +5/6 ; 6) 3 ½ + 17 3/8 c. Illustre les opérations suivantes 1) 1/3 +2/3 ; 2) 1/5 + 6/5 ; 3) ½ + 1/5 (Boulet, 1993, p.20)	**AS-F-4** Taux d'échec a. 55% b. 2) 2%; 3) 7%; 4) 15%; 5) 18%; 6) 47% c. 1) 4%; 2) 35%; 3) 22% 57 étudiants de 1re année universitaire

AS-F-5 *Item M022066:* 2/5 + 5/4 + 9/8 a) 16/17; b) 41/40; c) 81/40; d) 111/40 (TIMSS, 2008, p.13) *Item M022199:* 3/5+ (3/10 x 4/15) a) 3/51; b) 1/6; c) 6/25; d) 11/25; e) 17/25 (TIMSS 2004, p.33)	**AS-F-5** *Item M022066*. Résultats internationaux : Les choix de réponses se répartissent ainsi : a) 38,3%; b) 6,6%; c) 7,3%; d) 43,6%.; Résultats au Québec : Les choix de réponses se répartissent ainsi : a) 25,8%; b) 4,4%; c) 7,8%; d) 56,3%. *Item M022199*. Résultats internationaux : Les choix de réponses se répartissent ainsi : a) 7,4%; b) 7,5%; c) 17,9%; d) 14%; e) 40,9%. Résultats au Québec : Les choix de réponses se répartissent ainsi : a) 6,5%; b) 13,9%; c) 15,7%; d) 13,8%; e) 41,9%. Élèves de 2e secondaire
AS-F-6 *Item M032416*: Lequel montre une procédure adéquate pour trouver le résultat de 1/5 - 1/3 ? a. 1/5-1/3 = 1-1/5-3 b. 1/5 - 1/3 = 1/5 - 3 c. 1/5-1/3 = 5 -3/5 x3 d. 1/5-1/3 = 3-5/5x3 (TIMSS 2008, p.113) *Item M022185*: 3x/7 – x/7 a. 2/7 b.3 c. 2x d. x/7 e. 2x/7 (TIMSS 2004, p.26)	**AS-F-6** *Item M032416*. Résultats internationaux : Les choix de réponses se répartissent ainsi : a) 24,3%; b) 29,2%; c) 13,2%; d) 29,8%. Résultats au Québec : Les choix de réponses se répartissent ainsi : a)22,1%; b) 27,4%; c) 17,3%; d) 29,3%. *Item M022185*. Résultats internationaux : Les choix de réponses se répartissent ainsi : a) 7,6 %; b) 13,4 %; c) 11,6 %; d) 8,4 %; e) 54,4%. Résultats au Québec : Les choix de réponses se répartissent ainsi : a) 4%; b) 9,2%; c) 16,1% ; d) 7,9%; e) 61,5%. Élève de 2e secondaire
AS-F-7 « Effectue les additions suivantes : a) 6/12 + ¾+ 16/24 b) 26/52 + 33/99 A- Représente chaque fraction à additionner dans un rectangle. B- Représente l'addition de fractions dans un seul rectangle. C- Inscris le calcul. » (Morissette, 2006, pp. 89-90)	**AS-F-7**a. A) 5 des 8 élèves se soucient de partager les rectangles en parties égales et procèdent à une réduction d'au moins une des fractions, pour déterminer les mesures des rectangles; B) 4 élèves ne produisent aucune représentation; un élève se contente de produire un rectangle pouvant être partagé en 24 parties, deux élèves produisent des représentations à la suite du calcul de la somme et un élève dessine un rectangle comportant 40 parties; C) un élève n'effectue aucune addition; deux élèves additionnent les numérateurs et les dénominateurs; quatre élèves additionnent correctement les fractions. b. A) 6 des 8 élèves effectuent une représentation d'au moins une des fractions; 1 élève seulement produit une représentation des fractions réduites (1/2 et 1/3); B) aucun ne propose une représentation de l'addition de fractions; C) seul un élève effectue correctement l'addition des fractions, trouvant 5/6; les autres élèves qui effectuent un calcul produisent des erreurs comparables à celles définies par Perrin-Glorian, 1985). Élèves en difficultés d'apprentissage de 1re secondaire

Un premier parcours de la typologie des rapports problématiques des élèves liés à la réalisation d'additions et de soustractions impliquant des fractions et des nombres décimaux, nous permet de prendre acte de l'importance des difficultés, non seulement chez les élèves en fin de primaire, mais également chez les élèves faisant partie de classes de l'enseignement secondaire. Nous pouvons également parler d'une convergence entre les résultats de ces études. Par ailleurs, les difficultés liées à l'addition et à la soustraction de fractions sont plus importantes et problématiques que celles mises en évidence lors de l'addition et de la soustraction de nombres décimaux.

Dans l'addition de fractions, comme en font état plusieurs chercheurs (Bezuk et Cramer, 1989; Bezuk et Bieck, 1992; Tirosh, 2000), les difficultés se traduisent très souvent par l'addition indépendante des numérateurs et des dénominateurs (voir les tâches AS-F-2, AS-F-5 et AS-F-7), par l'addition des dénominateurs uniquement (voir les tâches AS-F-3 et AS-F-4), par l'application de procédés hybrides (voir les tâches AS-F-1 et AS-F-5) et enfin, par l'incapacité à représenter l'opération (tâche AS-F-4 et AS-F-7) ou à estimer les sommes (AS-F-3 et AS-F-4). L'étude réalisée par Perrin-Glorian (1992) fait toutefois état de résultats beaucoup plus encourageants (2/3+2/3, taux d'échec : 4% ; ½+1/3, taux d'échec : 10%; 3/5-2/7, taux d'échec : 14%) chez les élèves de 2^{e} secondaire que chez les élèves de 1re secondaire, lors d'une étude effectuée auprès de ces derniers élèves en 1985.

De son côté, Boulet (1993) montre que les erreurs d'estimation, de calcul et de représentation des opérations sont toujours présentes chez des étudiants universitaires. L'incapacité des élèves à estimer une somme dénote une lacune considérable dans la compréhension du concept de fraction. Les procédés exploités dans l'addition se manifestent également dans la soustraction (Perrin-Glorian, 1992) et sont utilisés indépendamment de la relation qu'entretiennent les dénominateurs, qu'ils soient identiques, premiers ou encore, que certains soient des multiples des autres dénominateurs. De plus, ces erreurs se répercutent dans le traitement de fractions algébriques (AS-F-5, itemM022185). De prime abord, ces conduites sont étonnantes. Il importe toutefois de rappeler que, sauf exception, dans l'enseignement primaire, les élèves ne rencontrent que des additions et des soustractions de fractions, dont le dénominateur de l'une des fractions est un multiple de l'autre. Et, bien que dès l'entrée au secondaire, ils soient initiés aux «techniques usuelles» d'addition et de soustraction de fractions, techniques exigeant la recherche d'un dénominateur commun, il est possible qu'ils ne développent qu'un rapport «techniciste» aux opérations, rapport qui ne s'appuie pas nécessairement sur le sens des opérations et des représentations des nombres. Boulet (1993) et Morissette (2006) montrent bien l'accroissement des difficultés lorsque les étudiants sont confrontés à la représentation de telles opérations. Il faut dire que les élèves sont peu souvent exposés à des fractions usuelles qui sont représentées par de «grands nombres» apparaissant aux numérateurs et aux dénominateurs (ex. 250/500) et ce, d'autant plus qu'un enseignement algorithmique est privilégié. Comme le montre l'étude réalisée par Morissette (2006), même les élèves présentant des difficultés d'apprentissage peuvent tirer profit de telles représentations.

Tableau VII: Les rapports problématiques liés à l'addition et la soustraction de nombres décimaux

TÂCHES PRÉSENTATIVES	CONDUITES RENCONTRÉES CHEZ PLUSIEURS ÉLÈVES
AS-D-1 1) 128,23 + 45,08 ; 2) 112,5 + 21,38 (Lemoyne et Bisaillon, 2005)	**AS-D-1.** Les élèves se montrent capables de faire le premier calcul, mais 5 des 8 élèves répondent 133,93 au deuxième calcul. Élèves de 6e primaire
AS-D-2 1) 6,25 + 12,85; 2) 7,24 – 4,3 (Charnay, Guillaume, Douaire et Valentin, 1999, p.376)	**AS-D-2** 81,5% des élèves effectuent correctement le premier calcul et 49,7%, le second calcul (exemple de réponse erronée pour ce calcul : 3,21). Élèves du secondaire (1e et 2e)
AS-D-3 4 - 2,47 (Owens,1993, p.149)	**AS-D-3.** 9 des 17 élèves commettent des erreurs (ex. réponses erronées: 2,43; 2,47; 0,1530) Élèves de 6e primaire
AS-D-4 ***1)*** 4,6 + 2,3; ***2)*** 5,3 + 2,42; ***3)*** 5,1+ 0,46 ***4)*** 6 + 0,32; ***5)*** 4 + 0,3 » (Hiebert et Wearne, 1985, p.191)	**AS-D-4.** Même à la fin du secondaire 1, les additions 2, 3, 4 et 5 sont sources de difficultés. Environ 30% des élèves ne peuvent effectuer correctement les additions 2 et 3. Plus de 60% des élèves commettent aussi des erreurs dans les additions 4 et 5; la réponse fréquemment donnée pour l'addition 4 est 0,38 et pour l'addition 5, 0,7. Élèves du primaire (5e et 6e); Élèves du secondaire (1e et 3e)
AS-D-5 a) Quelle est la somme de 2,5 et 3,8? a. 5,3 b. 6,3 c. 6,4 d. 9,5 (TIMSS2004,itemM011008,p.33) b) 4,03-1,15 (déjà aligné) a. 5,18 b. 4,45 c. 3,12 d. 2,98 e. 2,88 (TIMSS2004,itemM011015, p.19)	**AS-D-5** a) Résultats internationaux : Les choix de réponses se répartissent ainsi : a)11,5%; b) 67,4% ; c)6%; d)7,5. Résultats au Québec : Les choix de réponses se répartissent ainsi : a) 15,4%; b) 60,7%, c) 6,5%; d) 10%. b) Résultats internationaux : Les choix de réponses se répartissent ainsi: a)3,6%; b) 1,5%; c) 16,4%; d) 12,3%; e) 61,3%. Résultats au Québec : Les choix de réponses se répartissent ainsi : a)1,9%; b) 1,5%; c) 8%; d) 9,5%; e)75,9% Élèves de 4e primaire
AS-D-6 a) : 5,3-3,8 (TIMSS2008,itemM041250, p.28) b) 12,36 – 9,7 (TIMSS2008, itemM031030,p.130)	**AS-D-6** a) Résultats internationaux : 43,8% des élèves donnent la bonne réponse (1,5) ; Parmi les résultats erronés les plus fréquents :8,1% donnent 2,5 et 9,4% écrivent 15. Résultats au Québec : 56,4% des élèves donnent la bonne réponse; Parmi les résultats erronés les plus fréquents : 6,6% donnent 2,5 et 12 % écrivent 15 b) Résultats internationaux : seulement 14,1% des élèves donnent le bon résultat; 28,8% donnent 3,29 comme réponse et 57% donnent différentes réponses incorrectes ou ne répondent pas. Résultats au Québec : seulement 11% des élèves donnent le bon résultat; 36% des élèves donnent 3,29 comme réponse et 53% donnent différentes réponses incorrectes ou ne répondent pas. Élèves de 4e primaire.

Lorsqu'il s'agit de l'addition et de la soustraction de nombres décimaux, les erreurs sont davantage circonscrites aux cas où les nombres de chiffres que comportent les parties décimales des nombres décimaux à additionner ou à soustraire ne sont pas identiques (AS-D-1; AS-D-2; AS-D-3; AS-D-4 et AS-D-6b). Bien que ces erreurs puissent provenir d'obstacles épistémologiques [nombres entiers : conception des nombres décimaux comme « juxtaposition de nombres entiers » (7,24 – 4,3 = 3,21) et alignement à droite (5,3+2,42 = 2,95)], obstacles que nous avons précisés précédemment, lors de la comparaison des nombres décimaux, il faut admettre que les élèves sont rarement plongés dans de telles conditions d'apprentissage, certains enseignants refusant même de leur soumettre des nombres de ce type. Ce comportement est compréhensible puisque la mémoire des enseignants a longtemps été nourrie par cette contrainte curriculaire (Lemoyne et Bisaillon, 2006). Par ailleurs, ce travail permettrait aux élèves d'accorder du sens à la valeur de position et, à l'enseignant, de mieux accéder à leurs représentations des nombres décimaux. En effet, bien que les élèves puissent réussir à trouver les sommes de nombres décimaux, dont les parties décimales comportent le même nombre de chiffres, par exemple, 2,6 + 7,3, nous pouvons difficilement statuer sur leur compréhension, à moins qu'il leur soit impossible de traiter les nombres qui composent les parties décimales comme une juxtaposition de nombres entiers. C'est d'ailleurs ce qu'a constaté Perrin-Glorian (1985) en soumettant à des élèves de 1^re^ secondaire l'addition « 0,7+0,8 ». En effet, seulement 35,7% des élèves ne commettent pas d'erreurs; 46,4% des élèves inscrivent le nombre 0,15, effectuant un traitement indépendant des parties décimales et entières de ces nombres. Un tel traitement, lorsque le nombre à soustraire comporte une partie décimale supérieure à la partie décimale du premier nombre, comme le montrent les procédés de plusieurs élèves lors des soustractions présentées aux items « AS-D-2, AS-D-5 et AS-D-6 », fait émerger une conception erronée supplémentaire, soit soustraire le plus petit nombre du plus grand (ex. 5,3-3,8 = 5-3=2…8-3= 5…2,5), procédé arrimé aux représentations construites lors de la soustraction de nombres entiers. Il semble cependant, qu'à la tâche AS-D-5b, l'alignement des chiffres puisse « contrer » cette conception erronée et expliquer le taux de réussite plus élevé.

Tableau VIII: Les rapports problématiques liés à la multiplication de fractions

TÂCHES PRÉSENTATIVES	CONDUITES RENCONTRÉES CHEZ PLUSIEURS ÉLÈVES
M-F-1 : « Effectue l'opération 1/6 x ¾. Montre sur le disque suivant ce que représente 1/6 du ¾ » (Hasemann, 1981, p.78)	52% des élèves trouvent le produit attendu, mais seulement 30% d'entre eux effectuent une représentation adéquate. Élèves de secondaire I
M-F-2 : « Représentez dans un seul rectangle la multiplication des fractions a.15/16 x 11/12 ;b. 3/15 x 9/10. Effectuez cette multiplication. » (Morissette, 2006, p.101)	Seul un élève sur 8 effectue correctement les multiplications, mais ne produit aucune représentation; trois élèves n'effectuent aucun calcul; un élève procède à l'addition des numérateurs et dénominateurs, puis ajoute au dénominateur trouvé la somme des numérateurs; par exemple, pour 15/16 et 11/12, la réponse ainsi obtenue est 26/54; Trois autres élèves effectuent un produit croisé. Élèves en difficultés d'apprentissage de secondaire 1
M-F-3 ¾ x 12/5 (Perrin-Glorian, 1992, p.151)	71,9% des élèves réussissent cette opération. 1. la principale erreur consiste à réduire au même dénominateur $\frac{3}{4}\times\frac{12}{5}=\frac{15\times 48}{20}$ 2. d'autres élèves confondent avec le produit en croix ou la division $\frac{3}{4}\times\frac{12}{5}=\frac{3\times 5}{4\times 12}$ 3. Certains confondent avec l'addition et la simplification: $\frac{3}{4}\times\frac{3\times 4}{5}=\frac{1}{5}$ (les 3 et 4 sont rayés) ; $\frac{3\times 5}{4\times 5}+\frac{12\times 4}{5\times 4}=\frac{3+12}{20}$; $\frac{3}{4}+\frac{12}{5}=\frac{3}{4}\times\frac{6}{2}$; $\frac{83}{20}$ (pour 63/20 qui est la somme?) (p.151) 4. Il y a également des erreurs d'opération sur les entiers et des non réponses. Élèves de 3^e^ secondaire

M-F-4 a. Effectue les opérations suivantes : 7) 2 x 2/3; 8) 4 x 6/5; 9) ¼ x 1/3; 10) 3/5 x 7/5; 11) 11/3 x ¾; 12) 3 1/3 x 7 2/3. b. Illustre les opérations suivantes : 4) 2 x 2/3 ; 5) ¼ x 1/3 (Boulet, 1993, p.20)	a. Taux d'échec : 7) 29% ; 8) 34%; 9) 24%; 10) 31%; 11) 43%; 12) 54% b. Taux d'échec : 4) 57%; 5) 94% Étudiants universitaires

Comme le souligne fort justement Perrin-Glorian (1992), la multiplication de fractions occasionne moins d'erreurs de calcul que l'addition et la soustraction de fractions (taux de réussite : 71,9% versus 65,4%). Il est en effet relativement facile de procéder à une multiplication de fractions, un tel procédé pouvant prendre appui sur le procédé utilisé lors de la multiplication de nombres entiers : le numérateur du produit correspond au produit des numérateurs des fractions et le dénominateur à celui des dénominateurs des fractions. Il n'est donc pas étonnant de constater que les difficultés des élèves en multiplication de fractions n'ont pas beaucoup retenu l'attention des chercheurs, comme en témoigne le tableau précédent. Par ailleurs, comme il est montré dans ce tableau (Tâches MF-1, MF-2), le nombre d'élèves qui ne savent effectuer et, surtout interpréter, correctement des multiplications de fractions n'est toutefois pas négligeable. Le fait que les élèves étaient invités à représenter l'opération en recourant à une figure géométrique a exercé une influence sur l'exécution du calcul. Les résultats de l'étude effectuée par Hasemann (1981) montrent bien qu'il ne suffit pas de savoir effectuer correctement la multiplication pour être en mesure de produire une représentation de cette opération. D'ailleurs, Boulet (1993, tâche M-F-4) a montré la chute considérable du taux de réussite d'étudiants universitaires lorsqu'ils devaient représenter les opérations, même lorsqu'il s'agissait de multiplications fort simples [2 x 2/3 → calcul : 29% d'échec; représentation : 57% ou dans ¼ x 1/3 → calcul : 24%; représentation : 94%].

Les résultats précédents attestent bien du rapport techniciste à la multiplication de fractions, un tel rapport étant observé, non seulement chez les élèves mais aussi chez les étudiants universitaires. Plus encore, on n'observe pas de meilleurs résultats lorsqu'il s'agit de multiplier une fraction par un nombre entier, bien que le sens de cette opération soit plus facilement accessible, les élèves pouvant alors se référer à leurs connaissances et savoirs sur la multiplication de nombres naturels. À ce propos, comme la «technique» de la multiplication des fractions atteste rapidement de la «réussite» des élèves dans de tels calculs, il est ainsi rare de retrouver l'enseignement du sens des gestes impliqués dans cette opération, particulièrement lorsque cet enseignement concerne les élèves présentant des difficultés d'apprentissage. Lorsque ce travail est sollicité, Cramer, Wyberg et Leavitt (2009) ont montré qu'un des aspects les plus difficiles de la multiplication des fractions est le changement de l'unité de référence. Par exemple, pour déterminer la fraction correspondant au produit associé à « 5/6 x 12/33 », au lieu d'appliquer la technique usuelle, on pourrait procéder de la façon suivante : a) interpréter la fraction 12/33, en se référant au sens partie-tout de cette fraction, soit 12 parties sur 33 parties ; b) trouver rapidement le nombre de parties correspondant à 5/6 de ces parties, soit 10 parties; c) prendre ensuite en compte le nombre de parties qui correspond au tout, soit 33 parties et exprimer par une fraction le nombre de parties du tout associé à 5/6, obtenant alors 10/33. Il va, sans dire, qu'une telle démarche, qui procède d'une coordination des connaissances sur les fractions et sur les opérations, n'est pas souvent exploitée dans l'enseignement usuel. Hackenberg et Tillema (2009) ont également précisé qu'il est, par exemple, plus difficile pour les élèves de prendre 1/3 de 2/5 que de prendre 2/5 de 1/3. Ces résultats, tout comme ceux liés aux tâches d'estimation, sont tout à fait cohérents avec les difficultés des élèves en ce qui concerne la représentation du concept de fraction. Il convient également de mentionner que plusieurs élèves s'étonnent ou réfutent l'obtention d'un produit qui est plus petit que le multiplicande et/ou le multiplicateur, un tel refus étant le reflet du poids d'un obstacle épistémologique important (Prediger, 2008; Tirosh, 2000). Il faut dire aussi, que dans l'enseignement primaire, les élèves ne sont soumis qu'à des multiplications de nombres naturels par des fractions, les résultats alors obtenus sont toujours supérieurs aux fractions (MELS, 2006, p.136). De plus, si les nombres naturels utilisés sont petits, ce qui est généralement le cas, les élèves peuvent recourir aisément à des additions répétées. Le saut conceptuel à franchir lors de l'apprentissage de la multiplication de deux fractions, en 1er secondaire, est important.

Tableau IX: Les rapports problématiques liés à la multiplication de nombres décimaux

TÂCHES PRÉSENTATIVES	CONDUITES RENCONTRÉES CHEZ PLUSIEURS ÉLÈVES
M-D-1 a) 2,3 x 10 b) 35,2x100 (Charnay, 2005, p. 4)	**M-D-1** a) 64% des élèves répondent correctement ; 20 % inscrivent 20,3 ou 2,30 ou 20,30 ; 5% écrivent 230 ;b) 47% des élèves répondent correctement ; 15 % inscrivent 3500,2 ou 35,200 ou 3500,200; 15% notent 352. Élèves de 6e primaire
M-D-2 a) 281,28 x 100 b) 3,72 x1000 c) 4,28 x 3,5. (Bolon, 1992, 1.2., para. 4)	**M-D-2** Environ 35% des élèves commettent des erreurs dans les multiplications a) et b). La multiplication c) est échouée par 46% des élèves; 16% des élèves produisent l'une ou l'autre des réponses erronées suivantes : 1498 ou 14980. Élèves de secondaire 1
M-D-3 a) 6 x 0,4 b) 2 x 3,12 c) 8 x 0,06 d) 0,34 x2,1 e) 0,4 x0,2 f) 0,05 x 0,4 (Hiebert et Wearne, 1985, p.192)	**M-D-3** À la fin de l'année scolaire, près de 40% commettent des erreurs dans la réalisation des multiplications e) et f). Le produit le plus fréquemment associé à la multiplication e) est 0,8. Pour la multiplication f), deux produits sont fréquemment trouvés, soit 0,2 et 2. Élèves de 1re et 3e secondaire
M-D-4 itemM022110 : 0,402 x 0,53 (TIMSS2008, p.53)	**M-D-4** Résultats internationaux : 58,6% des élèves trouvent le bon produit; 7,2% des élèves commettent des «erreurs de positionnement de la décimale» et 7% des élèves n'ont pas effectué le calcul. Résultats au Québec : 83 % des élèves trouvent le bon produit ; 1,4% des élèves commettent des «erreurs de positionnement de la décimale» et 1,6 % des élèves n'ont pas effectué le calcul. Élèves de 2e secondaire

Lorsque la multiplication implique des nombres décimaux, nous pouvons, une fois de plus, ressentir les effets de certains obstacles épistémologiques et didactiques : « *Les algorithmes de calcul sur les décimaux s'automatisent facilement. Mais en l'absence d'ancrage sur les propriétés des décimaux ou d'exercices répétitifs, ils [les élèves] "dérapent". »* (Bolon, 1992, conclusion, para.1). Ainsi, nous pouvons percevoir les limites d'une simple application de la technique : la somme du nombre de chiffres contenus dans la partie décimale du multiplicande et du multiplicateur représente alors le nombre de positions correspondant à l'emplacement de la virgule dans le produit. Ce processus est, par ailleurs, fréquemment confondu avec celui de l'addition, comme en font état les conduites des élèves à la tâche M.D.3 présentée au tableau précédent. Si les multiplications simples, telles «2,3 x 10» et «35,2 x 100» (Charnay, 2005, tâche M-D-1), signifient respectivement pour certains élèves l'ajout de 1 zéro et de 2 zéros, nous pouvons facilement anticiper la difficulté qu'engendrera la compréhension de la multiplication de deux nombres décimaux. D'ailleurs, dans son texte qui traite des limites de l'enseignement à «*coups de règles»,* Charnay (2005, p.6) précise que *« lorsqu' « on multiplie par 10, chaque chiffre prend une valeur «10 fois plus grande», ce n'est pas la virgule qui se déplace, mais les chiffres qui «changent» de valeur, donc de place.*

C'est la même chose pour les entiers et les décimaux!». Bolon (1992, tâche M-D-2), TIMSS (2008, tâche M-D-4), Brousseau (1980) et Owens (1993) rapportent un taux important d'échecs dans la multiplication de deux nombres décimaux[15]. Plusieurs élèves effectuent une généralisation de leurs procédés de multiplication de nombres naturels; par exemple, ils associent le produit 3,20 à la multiplication « 3,2 x 10 », se contentant, comme ils le font lorsqu'ils effectuent une multiplication par 10 de nombres naturels, d'ajouter un 0 au nombre qui est multiplié par 10. Plusieurs élèves effectuent également un traitement indépendant des parties entières et des parties décimales des nombres ; par exemple, le produit des nombres 2,3 et 2,4 est alors 4,12. Plusieurs élèves effectuent un positionnement erroné de la virgule; le produit correspondant à la multiplication des nombres 4,28 et 3,5 est alors, soit : a) « 1,498 », l'élève faisant abstraction du chiffre 0 du nombre 14980; b) « 149,80 », l'élève comptant le nombre de positions à partir de la gauche.

Tableau X: Les rapports problématiques liés à la division de fractions

TÂCHES PRÉSENTATIVES	CONDUITES RENCONTRÉES CHEZ PLUSIEURS ÉLÈVES
D-F-1 $\frac{3}{4} \div \frac{12}{5}$ (Perrin-Glorian, 1992, p. 151)	**D-F-1 :** 15 élèves n'effectuent pas l'opération; 3 élèves ne complètent pas leurs calculs; 8 élèves procèdent correctement mais produisent des erreurs d'opérations sur les entiers; les erreurs produites par 16 élèves relèvent de la technique de multiplication de fractions; les erreurs commises par 7 autres élèves montrent une application erronée de la technique usuelle de division. Nous reproduisons les propos de Perrin-Glorian (1992, p. 151) sur les applications erronées de la technique de division : « a. Pour diviser on ajoute l'inverse (1 élève); b. Pour diviser, on multiplie par l'opposé (1 élève); c. 3 élèves font une multiplication à la place d'une division; 1 élève fait une addition; 1 élève utilise la règle dans l'autre sens et trouve $\frac{4}{3} \times \frac{12}{5} = \frac{48}{15}$ » Élèves de 3e secondaire
D-F-2 ***8b)*** ¼ ÷ 5 < = > 4/5 ***8f)*** 1/3 ÷ 1/9 < = > 1/27 ***8j)*** 1 ÷ 1/15 < = > 15 ***27b)*** 20 ÷ 1/5 ***27d)*** 3/5 ÷ 1/15 (Krikorian, 1996, p. 193)	**D-F-2** ***8b)*** 11 élèves sur 45 choisissent plus grand; 31 élèves choisissent plus petit et enfin, 3 élèves stipulent que c'est égal. Seulement 7 élèves ont fait des calculs dont 3 effectuent 4/1 x 5/1 = 20 ***8f)*** 17 élèves sur 48 choisissent plus grand; 22 choisissent plus petit et enfin, 3 élèves stipulent que c'est égal. 11 des 13 élèves qui ont fait un calcul ont mis les fractions sur le même dénominateur ***8j)*** 1 élève choisit plus grand; 25 choisissent plus petit (la majorité d'entre eux effectuent 1÷ 1/15 = 1/15) et enfin, 22 élèves stipulent que c'est égal. ***27b)*** 7 des 41 élèves ont réussi : 4 d'entre eux ont effectué le calcul suivant : 20 x 5/1 et 1 élève a transformé les nombres et calculé 200 ÷ 2. Parmi les élèves ayant échoué, l'erreur la plus fréquemment rencontrée est 20/1 ÷ 5/1 = 4 ***27d)*** 12 élèves sur 41 répondent correctement, soit 9; 7 élèves trouvent 3 comme quotient; 7 inscrivent 3/3 ou 1 (3÷1/15÷5) ; 6 notent 9/15 (9/15 ÷ 1/15); 2 écrivent 5 et enfin, 2 élèves produisent 25 comme résultat (5/3 x 15/1). Élèves de la fin 6e primaire

[15] « *Nombre décimal: nombre rationnel dont l'écriture, en notation décimale, comporte une suite finie de chiffres à la droite de la virgule* » (De Champlain *et al*.,p.13)

D-F-3 ¼ ÷ 4;1/4÷3/5; 4÷1/4; 320 ÷ 1/3 (Tirosh, 2000, p.9)	**D-F-3 :** Cinq des 30 futurs enseignants ont donné des réponses incorrectes à certaines de ces quatre opérations: Deux ont inexactement donné un quotient de 1 au lieu de 1/16 sur le premier exemple (tous les deux ont écrit 1/4 ÷ 4 = 1/4 x 4 = 1) ; un autre participant inscrit que 1/4 ÷ 3/5 = 6 2/3 (elle a inversé le dividende et le diviseur et a écrit 1/4 ÷ 3/5 = 4/1 x 5/3 = 20/3 = 6 2/3) ; et deux autres étudiants notent que 320 ÷ 1/3 = 106.666 Étudiants 2^{e} année universitaire
D-F-4 a. Effectue les opérations suivantes : 13) 2 ÷ 3 ; 14) 2 ÷ 15 15) ½ ÷ 3; 16) 1/3 ÷ ¼ b. Illustre les opérations suivantes : 6) 1÷ 3 7) 2÷ 3 8) 2÷ 15 9) ½ ÷ 3 10) 1/3 ÷ ½ (Boulet, 1993, p. 20)	**D-F-4** ***a.*** Taux d'échec : 13) 16% ; 14) 35 % ; 15) 40% et 16) 32% ***b.*** Taux d'échec : 6) 57% ; 7) 88% ; 8) 100% ; 9) 92% ; 10) 100% Étudiants universitaires

La division de fractions est de loin l'opération la plus complexe pour les élèves (Perrin-Glorian, 1992; Ma, 1999). La coordination de diverses connaissances (propriété : inverse multiplicatif; sens de la fraction, notamment, le sens rapport) nécessaires à la compréhension du sens de cette opération semble décourager l'exploitation d'une pratique axée sur le sens. S'appuyant sur les résultats de plusieurs recherches (Ashlock, 1990; Barash et Klein, 1996, Fischbein, Deri, Nello, & Marino, 1985; Graeber, Tirosh et Glover, 1989), Tirosh (2000) présente trois grandes catégories d'erreurs: 1) D-F-1 : erreurs algorithmiques qui se traduisent généralement par l'inversion du dividende au lieu du diviseur ou l'inversion du diviseur et du dividende; 2) D-F-2; D-F-3 et D-F-4 : erreurs intuitives résultant d'une surgénéralisation des propriétés de la division des nombres naturels : a) le diviseur doit être un nombre entier; b) le diviseur doit être moins grand que le dividende; c) le quotient doit être moins élevé que le dividende; 3) erreurs basées sur des connaissances formelles : exécution incorrecte due aux conceptions erronées du concept de fraction et aux propriétés des opérations. Hart (1981) mentionne, à cet effet, que certains élèves pensent que la division est commutative (ex. 1 ÷ 1/2 = 1/2 parce que 1 ÷ 1/2 = 1/2 ÷ 1 = ½). Enfin, comme le souligne Perrin-Glorian (1992), il appert que les applications erronées de la technique de division (a/b ÷ c/d = a/b x d/c) montrent une «contamination techniciste» des opérations sur les fractions. En effet, nous remarquons que les élèves commettent davantage d'erreurs dans le cas de figure «n ÷ a/b», puis dans celui de «a/b ÷ n», que dans le cas où il s'agit de procéder à la division de deux fractions «a/b ÷ c/d», même lorsque c/d > a/b. Le peu de signification accordée à ces opérations se traduit par l'application d'une seule technique dont la signification suppose une compréhension de l'inverse multiplicatif et par l'absence d'une prise en compte des relations entre les nombres. Au regard de certains nombres proposés, le sens de la division aurait été beaucoup plus accessible en recourant à des fractions équivalentes, ce qu'aucun élève n'a fait. Sharp (2002) souligne d'ailleurs que ce procédé permet de s'appuyer sur le sens quotition de la division impliquant des nombres entiers. Ce qui est tout à fait cohérent avec les difficultés relevées : l'accès au sens partition est très difficile dans le cas de « n ÷ a/b et a/b ÷ n », puisqu'il est complexe, dans le premier cas, de partager « quelque chose» en un nombre fractionnaire «de personnes» et, dans le second cas, de partager « quelque chose » de fractionnaire. Cependant, il est toujours possible d'exploiter le concept de quotition pour donner sens à un algorithme exigeant l'emploi de fractions équivalentes, ce qui revient à se demander : combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende. Enfin, nous remarquons, une fois de plus, dans la tâche D-F-4, le décalage entre les capacités des élèves à effectuer le calcul et à l'interpréter.

Lors de l'examen des difficultés rencontrées par les élèves dans la multiplication de nombres décimaux, nous avons fait état d'études montrant un pourcentage non négligeable d'erreurs, chez les élèves du secondaire. Comme il était prévisible, les difficultés des élèves lors de la division des décimaux sont encore plus importantes, tel qu'en témoigne le tableau ci-dessous.

Tableau XI: Les rapports problématiques liés à la division de nombres décimaux

TÂCHES PRÉSENTATIVES	CONDUITES RENCONTRÉES CHEZ PLUSIEURS ÉLÈVES
D-D-1 ***1)*** 2,1 ÷ 3; ***2)*** 0,24 ÷0,03; ***3)*** 0,56 ÷ 7 ***4)*** 0,028 ÷ 0,4; ***5)*** 42 ÷ 0,6; ***6)*** 3 ÷ 0,6 (Hiebert et Wearne, 1985, p. 192)	**D-D-1** À la fin de l'année scolaire, près de 50% des élèves commettent des erreurs aux numéros 5 et 6. Le quotient le plus fréquemment trouvé pour le calcul 5 est 0,7 et pour le calcul 6, 0,2. Élèves de 1re et 3e secondaire
D-D-2 «Placer la virgule : […] 3,20 ÷ 0,8 = 00400000 30 ÷ 0,6 = 005000000» (Hiebert et Wearne, 1986, p. 218)	**D-D-2** 27% des élèves de 6e année, 59% des élèves de secondaire 1 et 60% des élèves de secondaire 3 peuvent placer correctement la virgule. Élèves de 6e primaire et de 1re et 3e secondaires
D-D-3 « Une division a été posée : 415 | 192 310 | 2,16 1180 28 Entoure parmi les égalités suivantes, celles qui sont exactes : a) 415/192 = 2,16 ; b) 415 = 2,16 x 192 + 28 c) 415 = 2,16 x 192 + 28/100 d) 415 = 2,16 x 192 + 28/1000 e) 415 = 2,16 x 192 + 0,28 » (Charnay *et a*l., 1999, p. 380)	**D-D-3** Plus de la moitié des élèves associent la fraction 415/192 au décimal 2,16 ; 45% des élèves pensent que le reste est un nombre entier ; 35% choisissent c, d et e, mais n'entourent pas a et b. Élèves de 3e et 4e secondaire

Les résultats de la première étude (Tâche : D-D-1) effectuée par Hiebert et Wearne (1985) montrent bien que près de la moitié des élèves du secondaire ne savent effectuer correctement les divisions 42 ÷ 0,6 (no. 5) et 3 ÷ 0,6 (no.6); ces divisions nous semblent fort bien choisies. En effet, si nous nous référons aux usages courants, la technique de division de nombres décimaux est enseignée en recourant à deux nombres décimaux ou, au moins, à un nombre décimal au dividende, ce qui n'est pas le cas dans les calculs précédemment échoués, mais bien celui des calculs les mieux réussis. Dans les deux divisions précédentes, les élèves utilisent une notation décimale pour représenter le quotient (0,7 et 0,2). Peut-être ont-ils voulu conserver, dans le quotient, le même nombre de chiffres après la virgule que celui qui est présent dans le diviseur? Puisque dans le second cas (3 ÷ 0,6), le dividende est un nombre inférieur au nombre 6, faisant alors abstraction de la position de ce nombre dans l'écriture 0,6, ils effectuent la division inverse. Les rapports des élèves à la division de nombres entiers semblent ainsi avoir une influence déterminante sur leurs rapports à la division de nombres décimaux. La quasi absence d'amélioration entre les résultats des élèves des 1re et 3^{e} secondaires à la tâche D-D-2 montre le fort ancrage des rapports problématiques aux sens des décimaux et de la division. La recherche effectuée (Tâche : D-D-3) par Charnay, Guillaume, Douaire et Valentin (1999) est également fort éclairante; le choix d'interrompre la division « 415 ÷ 192 », lorsque le nombre à diviser est inférieur à 192 (soit 28), permet bien de montrer diverses interprétations de ce reste, diverses façons de relier quotient, dividende et diviseur. 45% des élèves pensent que le reste est un entier, choisissant la représentation b); 35% choisissent c, d et e, l'écriture d constituant toutefois un mauvais choix.

2.2.3. Les rapports problématiques liés à la résolution de problèmes impliquant des nombres rationnels

Les difficultés des élèves précédemment relevées sur le concept de nombre rationnel et sur les opérations impliquant ces nombres ont une incidence notable sur la résolution de problèmes additifs et multiplicatifs. Robert (dans Roditi, 2005) mentionne que les difficultés des élèves en résolution de problèmes impliquant des nombres rationnels concernent : 1) la reconnaissance du modèle de la situation; 2) la mise en œuvre de la technique opératoire. À ce propos, les recherches effectuées par Heller, Post, Behr et Lesh (1990), ainsi que celles effectuées par Irwin (2001), Krikorian (1996) et Roditi (2007), nous permettront de contraster les résultats des élèves soumis à des tâches en contexte ou hors contexte, faisant appel aux mêmes connaissances et aux mêmes nombres. Avant de discuter des données recueillies dans ces études, nous aborderons les recherches sur les difficultés des élèves en résolution de problèmes. Afin d'explorer cet objet fort important de l'apprentissage en mathématiques, nous nous appuierons sur la typologie de Vergnaud (1981) pour circonscrire les difficultés des élèves au regard du sens des opérations. Ainsi, nous traiterons d'abord des problèmes additifs et, ensuite, des problèmes multiplicatifs. Ce travail nous permettra aussi de regarder l'influence du choix des nombres sur la reconnaissance du modèle de la situation et sur la mise en œuvre de la technique.

2.2.3.1. Les rapports problématiques liés à la résolution de problèmes additifs

Les difficultés liées à la résolution de problèmes additifs impliquant des nombres rationnels ont retenu l'attention de plusieurs chercheurs, particulièrement auprès d'élèves du primaire. Certains chercheurs (Vergnaud, 1981, 1982; Conne 1984; Fayol et Abdi, 1986; Poirier, 1994) ont mis en évidence la complexité du traitement des problèmes de composition de transformations chez les élèves du primaire et du secondaire, ce traitement impliquant une appréhension des entiers relatifs. Riley, Greeno et Heller (1983), ainsi que Carpenter et Moser (1983, dans Lamour, 1999), rapportent aussi que les performances des élèves chutent considérablement lorsqu'il s'agit de problèmes de comparaison de mesures. D'autres facteurs peuvent amplifier les difficultés des élèves, entre autres, la nature de l'inconnue et les nombres utilisés. Nous avons regroupé, dans le tableau ci-dessous, des énoncés impliquant des nombres rationnels.

Tableau XII: Les rapports problématiques liés à la résolution de problèmes additifs

Tâches Représentatives	Conduites rencontrées chez plusieurs élèves
A.C.1. Composition de mesures ***A.C.1.1***. « Les 4/7 des élèves de deux classes de 1re secondaire portent des lunettes. Si le nombre total d'élèves dans ces deux classes est supérieur à 35 mais inférieur à 56, combien y a-t-il d'élèves dans les deux classes réunies? » (Morissette, 2006, p. 58)	***A.C.1.*** Aucun des 8 élèves ne réussit à résoudre le problème; 2 élèves s'abstiennent; 2 élèves réussissent à déterminer le nombre d'élèves dans les 2 classes, mais font une interprétation erronée de la question (ex. : un élève inscrit le nombre d'élèves portant des lunettes et l'autre élève n'inscrit aucune réponse); 2 élèves trouvent des fractions équivalentes à 4/7, dont le dénominateur est compris entre 35 et 56; tenant compte du fait qu'il y a deux classes, ils multiplient ensuite le numérateur et le dénominateur par 2; un de ces élèves associe la fraction obtenue à la réponse et l'autre élève inscrit uniquement le dénominateur. 1 élève produit diverses fractions équivalentes, aboutissant à 32/56 comme réponse et 1 élève dessine un rectangle séparé en 7 sections dont 4 sont ombragées. Élèves de 1re secondaire en difficultés d'apprentissage
A.C.1.2. « Les tickets pour un concert coûtent chacun 10 zeds, 15 zeds ou 30 zeds. Plus de 900 tickets ont été vendus, 1/5 coûte 30 zeds chacun et 2/3 coûte 15 zeds chacun. Quelle fraction représente les tickets de 10 zeds qui ont été vendus ? (TIMSS 2008, Item M032307, p.56)	***A.C.1.2.*** *Résultats internationaux* : 18,4 % répondent correctement, soit 2/15 ou une fraction équivalente; 56,7% produisent une réponse incorrecte et enfin, 24,9% ne produisent aucune réponse. *Résultats au Québec* : 42,6% répondent correctement, soit 2/15 ou une fraction équivalente; 45,7% produisent une réponse incorrecte et enfin, 11,7 % ne produisent aucune réponse. Élèves de 2e secondaire
A.C.1.3. «Un jardinier mélange 4,45 kilogrammes de seigle et 2,735 kilogrammes de trèfle pour faire un mélange pour semer de la pelouse. Combien de kilogrammes de mélange va-t-il obtenir » (TIMSS 2008, item M022050, p.4)	***A.C.1.3.*** *Résultats internationaux :* 56,6 % des élèves produisent une bonne réponse (7,185kg); 8,1 % des élèves produisent des réponses incorrectes liées à des erreurs dans l'addition de 2 chiffres (ex. 7,085 ou 7,195), dans l'alignement des décimales (ex. 8,185) ou dans la transformation des nombres pour obtenir le même nombre de chiffres après la virgule (ex. : 4,045 + 2,735); 12,9% des élèves ne répondent pas . *Résultats au Québec* : 79.9 % des élèves produisent une bonne réponse (7,185kg); 3,7% des élèves produisent des réponses incorrectes liées à des erreurs dans l'addition de 2 chiffres (ex. 7,085 ou 7,195), erreurs dans l'alignement des décimales (ex. 8,185) ou dans la transformation des nombres pour obtenir le même nombre de chiffres après la virgule (ex. : 4,045 + 2,735) ; 7,2 % des élèves ne répondent pas. Élèves de 2e secondaire
A.T.Transformation de mesures ***A.T.1.*** « Sylvain achète une lasagne pour son souper de lundi. Il sépare ce repas en 12 parties égales. Il mange les 2/6 le premier soir et le 1/4 le lendemain. Quelle fraction de sa lasagne lui reste-t-il après son deuxième repas? » (Morissette, 2006, p. 58)	A.T.1. 5 des 8 élèves produisent une bonne réponse ; 3 élèves ne parviennent pas à résoudre correctement ce problème et effectuent des représentations inadéquates des données et des relations entre les données : a) un élève dessine un carré divisé en quatre parties, une de ces parties étant ombragée (1/4); il dessine également un rectangle qu'il partage en 12 parties, deux de ces parties étant ombragées (2/12). Les mesures de ces deux figures sont très différentes et les partitions effectuées fort approximatives; il donne comme réponse 14/16, aucun calcul ne montrant la provenance de cette réponse; b) un autre élève ne dessine qu'un seul rectangle divisé en douze parties, à l'intérieur duquel il indique les parties mangées. Il ne fait que rayer 6 sections sur 12 dans le rectangle et donne 1/2 comme résultat; c) un autre élève se contente d'additionner les deux numérateurs des fractions (2 de 2/6 et 1 de 1/4) pour obtenir 3. Dans un grand rectangle séparé en douze, il noircit 3 sections et donne 9/12 comme réponse finale. Élèves de 1resecondaire en difficultés d'apprentissage
A.T.2. « Si tu as mangé 3/8 d'une tablette de chocolat et ton frère a mangé ¼ de la même tablette, quelle fraction de la tablette reste-t-il? Montre-moi comment tu fais (dessin d'un rectangle)» (Krikorian, 1996, p.305)	A.T.2. 34 élèves sur 44 obtiennent le bon résultat. Sur 44 élèves, 14 élèves ont uniquement exploité la représentation dont 6 résultats sont erronés, 2 élèves ont simplement calculé adéquatement le résultat et 28 élèves ont combiné calculs et représentations, mais la majorité d'entre eux ont effectué le dessin qu'après avoir fait les calculs (24 d'entre eux obtiennent un bon résultat). Nous retrouvons des erreurs similaires à toutes celles répertoriées dans les problèmes d'addition : 1) 3/8 + ¼ = 4/8; 2) 3/8 + ¼ = 4/12; 3) 3/8 + ¼ = 3/8 + 4/8. Un élève représente adéquatement 3/8 et ¼ mais dans des touts distincts. D'autres représentations sont effectuées adéquatement en 8 parties. Un élève choisit d'opter plutôt pour le cercle. Élèves de fin 6e année primaire

A.C.2. Comparaison de mesures A.C.2.1. «Dans une salle de classe, il y a 35 chaises et 30 élèves. Dans une autre, il y a 40 chaises et 36 élèves. Quelle est la classe dans laquelle la plus grande fraction de chaises est utilisée?» (Chevallard et Julien, 1989, p.57)	A.C.2..1. Nombre d'élèves ayant réussi : 3. Nombre d'élèves ayant échoué : 74 Élèves de 2e secondaire
A.C.2.2. Un professeur et un docteur ont 45 livres chacun. Si 4/5 des livres du professeur et 2/3 de ceux du docteur sont nouveaux, combien de nouveaux livres le professeur a-t-il de plus que le docteur? a) 2 b) 3 c) 6 d) 30 (TIMSS 2004, p. 59, item M022004)	A.C.2.3. a) Résultats internationaux : Les choix de réponses se répartissent ainsi : a) 20,3%; b) 8,6%; c) 48,4%; d) 11%. b) Résultats au Québec Les choix de réponses se répartissent ainsi : a) 27,5%; b) 5,4%, c) 56,4%; d) 5,7%. Élèves de 8e année (2e secondaire)
A.C.2.3. Alice effectue une course en 49,86 secondes. Betty fait la même course en 52,30 secondes. Combien de temps Betty a-t-elle prise de plus qu'Alice? a) 2,44 secondes; b) 2,54 secondes c) 3,56 secondes; d) 3,76secondes (TIMSS 2004, p.59, item : M022010)	A.C.2.2. Résultats internationaux : Les choix de réponses se répartissent ainsi : a) 61,3%; b) 11,2%; c) 20%; d) 4,2 %. Au Québec, les choix de réponses se répartissent ainsi : a) 76,3% b) 8,8% ; c) 12,5% ; d) 0,9%. Il est étonnant qu'aucune des réponses proposées ne montre une interprétation inadéquate des relations entre les mesures (ex. : 49,86 + 52,30) Élèves de 2^{e} secondaire

Une première recension des études sur les difficultés liées à la résolution de problèmes additifs nous amène à un premier constat : les difficultés des élèves du secondaire sont loin d'être négligeables, même lorsqu'il s'agit des problèmes relationnels simples de compositions de mesures. Le premier problème de composition de mesures présenté au tableau précédent (A.C.1.1.) met davantage l'accent sur la compréhension du concept de fraction (fraction équivalente, sens du dénominateur, partitionnement) que sur les calculs. Un bon nombre d'élèves en difficultés d'apprentissage s'engagent dans la production de fractions équivalentes, sans pour autant savoir lier le résultat obtenu à la question formulée dans le problème. Comme en témoignent les conduites des élèves qui multiplient le numérateur et le dénominateur par 2, afin d'obtenir une fraction deux fois plus grande, il appert que ces élèves n'ont pas conscience qu'ils produisent une fraction équivalente. De plus, dans une tâche beaucoup plus usuelle, Krikorian (1996) montre que le taux de réussite chute considérablement lorsque des nombres fractionnaires (ex. 12 ½ et 16 7/12) sont en jeu. Les deux autres problèmes de composition de mesures (A.C.1.2 et A.C.1.3), problèmes qui sont beaucoup plus classiques sur le plan relationnel, ne sont pas pour autant garants d'une réussite chez les élèves de 2^{ième} secondaire. Certes, les élèves ont été en mesure de modéliser la situation, mais comme en font état les résultats internationaux et ceux du Québec, ils commettent beaucoup d'erreurs de calcul. Il faut dire que, dans la tâche A.C.1.3, l'addition de nombres décimaux, dont les parties décimales ne comportent pas le même nombre de chiffres, met en cause des représentations des nombres décimaux, représentations qui, comme nous en avons déjà fait état lors de l'examen des difficultés associées aux additions et soustractions de nombres décimaux, sont souvent sources d'erreurs chez plusieurs élèves.

Les problèmes de transformation de mesures (A.T.1. et A.T.2.) sont assez bien réussis. Nous pouvons attribuer ce haut taux de réussite au fait qu'il s'agit de déterminer l'état final (Vergnaud, 1991) et aux relations entre les nombres proposés : a) dans un premier cas (A.T.2.), l'un des dénominateurs est un multiple de l'autre et une représentation bien choisie est suggérée; b) dans le second cas (A.T.1), bien que le dénominateur d'une des fractions ne soit pas un multiple de l'autre, un dénominateur commun est « suggéré » en proposant de séparer le repas en 12 parties égales. Ceci dit, les démarches des élèves nous montrent qu'ils se sont davantage appuyés sur la représentation « demandée» pour valider leurs calculs, que pour opérer sur les nombres.

Si on examine les résultats impliquant des problèmes additifs de comparaison de mesures, on ne peut qu'être fort étonné par l'échec massif des élèves, particulièrement au problème A.C.2.1. Comme le soulignent Chevallard et Julien (1989, p.45) « *alors que la comparaison des fractions 30/35 et 36/40 entre dans une rubrique de problèmes légitimes des plus banals, sa mobilisation comme outil approprié de résolution du problème ne laisse pas d'inquiéter les professeurs.*» Parmi les élèves qui échouent, on observe un élève qui identifie correctement les deux fractions, les simplifie (6/7 et 9/10) et les met correctement sur un même dénominateur, mais conclut toutefois que c'est dans la première classe que la plus grande fraction de chaises est utilisées. Cette conclusion est vraisemblablement, selon les chercheurs, celle des autres élèves qui répondent incorrectement. Ils peuvent traiter adéquatement les nombres, avoir recours à leurs connaissances sur les fractions, mais se référer à des connaissances élémentaires sur les nombres pour conclure; il est ainsi possible que certains élèves jugent la fraction 9/10 plus petite que la fraction 6/7, en s'appuyant sur une représentation élémentaire de la fraction, à savoir que si un objet est partagé en un plus grand nombre de parties, les parties sont plus petites et ainsi la fraction 9/10 sera jugée plus petite que la fraction 6/7.

Dans le problème A.C.2.2, si les résultats sont plus satisfaisants que dans le problème précédent, il n'en demeure pas moins qu'ils sont en deçà des résultats auxquels on pourrait s'attendre chez des élèves de ce niveau scolaire. En ce qui concerne les choix de réponses, l'un d'entre eux (d) nous semble relever d'un dysfonctionnement dans la compréhension de la question, dont le résultat correspondrait plutôt au nombre de livres nouveaux que possède le docteur, alors que les choix des réponses erronées (a) ou (b) nous semblent témoigner davantage de problèmes de représentations et de traitement des données du problème, notamment, des fractions; il importe de mentionner que le texte produit par les chercheurs ne comportait pas d'analyses « qualitatives » des conduites des élèves. L'augmentation du taux de réussite, au problème A.C.2.3. impliquant des nombres décimaux, n'est pas étonnante; il s'agit d'un problème additif relativement simple, impliquant une relation entre deux mesures et il suffit alors de trouver la différence entre ces mesures. Il faut noter également qu'aucun choix de réponses ne montre une interprétation erronée des relations entre les mesures. Il aurait été intéressant de proposer, par exemple, une addition des deux mesures, interprétation résultant de la confusion entre l'opérateur sémantique (de plus) et l'opérateur arithmétique, confusion souvent mise en évidence dans plusieurs études, études réalisées notamment auprès d'élèves du primaire (Riley, Greeno et Heller, 1983 ; Carpenter et Moser, 1983; Bell, Fischbein et Greer, 1984). Les choix de réponses erronées effectuées par les élèves reflètent davantage les difficultés liées au calcul; le choix majoritairement sélectionné implique notamment le traitement du nombre décimal comme une « juxtaposition de deux nombres », dont on soustrait le plus petit nombre du plus grand (52,30 – 49,86 = 52 – 49..3…86-30..56…3,56).

Comme en font état les résultats de plusieurs études consignés au Tableau 13 (A.C.1.2; A.T.1.; A.C.2.2 ; A.C.2.3), les principales erreurs relevées dans la résolution de problèmes additifs relativement simples relèvent de difficultés associées au concept de nombre rationnel et aux opérations sur ces nombres, difficultés dont nous avons fait mention dans les deux parties précédentes. Ces difficultés, comme nous le verrons, sont également responsables de plusieurs échecs dans la résolution de problèmes multiplicatifs. À celles-ci, s'ajoutent également des conceptions primitives de la multiplication et de la division de nombres rationnels.

2.2.3.2. Les rapports problématiques liés à la résolution de problèmes multiplicatifs

Les problèmes multiplicatifs impliquant des nombres rationnels ont retenu l'attention de plusieurs chercheurs, ces problèmes ayant, de toute évidence, montré les effets persistants des conceptions primitives des opérations multiplicatives. Et, puisqu'il s'agissait d'élèves de l'enseignement secondaire, il est impensable d'envisager la poursuite de l'enseignement au secondaire sans une maîtrise des problèmes multiplicatifs, notamment, des problèmes de proportionnalité. D'ailleurs, le programme de formation consacre une rubrique distincte à ce type de problèmes.

Tableau XIII: Les rapports problématiques liés à la résolution de problèmes multiplicatifs impliquant un opérateur scalaire

Tâches Représentatives	Conduites rencontrées chez plusieurs élèves
M.O.1. « Les 2/18 des 270 élèves de l'école étaient malades. Combien d'élèves étaient malades? » (Morissette, 2006, p.58)	***M.O.1.*** 5 élèves produisent une bonne réponse, 3 de ces élèves effectuant une réduction de la fraction 2/18. Les autres élèves procèdent à une division du nombre d'élèves par 18, mais effectuent des erreurs de calcul ou ne complètent pas leur démarche. Élèves de 1re secondaire en difficultés d'apprentissage
M.O.2. Le grand chef d'un restaurant a reçu une commande pour faire un gâteau de mariage. La recette qu'il suit lui indique qu'il aura besoin des 21/27 du sac de 9Kg de farine qu'il a acheté. Quelle quantité de farine le chef devra-t-il utiliser pour sa recette ? » (Morissette, 2006, p. 58)	***M.O.2***. Le problème est résolu correctement par un seul élève sur 8, cet élève étant aussi le seul qui produit une représentation satisfaisante des données et des relations entre les données. Quatre autres élèves produisent aussi des représentations, mais elles s'avèrent incorrectes. Bien qu'ayant trouvé une réponse incorrecte, un élève effectue une interprétation pertinente de l'énoncé; ne procédant pas à une réduction de la fraction, il commet toutefois une erreur, soit « 189/27 = 30 ». Les deux autres élèves divisent 27 par 9 et inscrivent 3 comme réponse. Élèves de 1re secondaire en difficultés d'apprentissage
M.O.3. Pour insérer la photo d'une robe dans un magazine, la photo doit être réduite à 0,14 de sa grandeur originale. Dans la photo originale, la longueur de la robe était 2m. Quelle sera sa longueur dans le magazine? (Bell, Fischbein et Greer, 1984, p.134)	***M.O.3.*** Sur les 30 élèves qui ont fait le problème, 3 élèves seulement produisent une réponse correcte. 16 élèves procèdent à la division de 2 par 0,14; 8 produisent des réponses erronées sans laisser de trace de leur calcul et enfin, 3 élèves ne donnent aucune. Élèves de 1re secondaire
M.O.4. « Dana a fait une grande quantité de pain aux canneberges qui représente 1 fois et demie la recette originale. Si la recette originale utilise ¾ de tasse de sucre. Combien de tasses de sucre Dana a-t-elle utilisées pour faire son pain? a) 3/8 b) 1 1/8 c) 1 ¼ d) 1 3/8 » (TIMSS 2008, Item M032523, p.58)	***M.O.4.*** *Résultats internationaux* : les choix de réponses se répartissent ainsi : a) 27.4% ; b) 21.3% ; c) 27.4 % ; d) 25.7% *Résultats au Québec :* les choix de réponses se répartissent ainsi : a) 30.4 % ; b) 11.6% ; c) 30.4% ; d) 34.8% ; Élèves de 2^{e} secondaire

Dans la première catégorie de problèmes multiplicatifs impliquant un seul espace de mesures, les deux premiers problèmes (M.O.1. et M.O.2.) ont comme opérateur une fraction qui est appliquée à un nombre entier. Dans les deux cas, et principalement dans le second problème, le procédé le plus efficace passe par une réduction de l'opérateur fractionnaire. Si, dans le premier cas (M.O.1.), 3 des 5 élèves qui produisent une bonne réponse effectuent une réduction de la fraction, dans le second cas (M.O.2.), seul l'élève qui procède à une simplification de la fraction opérateur résout correctement le problème. Un autre élève fait une interprétation adéquate du problème, mais au moment de réduire la fraction résultant de la multiplication, il commet une erreur et le nombre trouvé n'a pas de sens (189/27 = 30). Dans le problème M.O.3., le procédé mis en œuvre par plus de la moitié des élèves, soit la division de 2 par 0,14, semble être l'effet d'une conjugaison de diverses conceptions primitives de la division mises en exergue par Fischbein, Deri, Nelleo et Marino (1985): a) le dividende doit être plus grand que le diviseur; b) la division fait référence à une réduction; c) la division produit un nombre plus petit. Les résultats du dernier problème multiplicatif appartenant à cette catégorie (M.O.4.), problème impliquant des nombres fractionnaires, sont, pour le moins, catastrophiques. Tout aussi impressionnant est le choix massif de la première option qui montre une représentation inadéquate des relations entre les données : la quantité est inférieure à celle de la recette originale, alors qu'elle devrait être une fois et demie plus grande. Il est également possible que les élèves aient confondu 1 fois ½ et ½.

Tableau XIV: Les rapports problématiques liés à la résolution de problèmes multiplicatifs impliquant un produit de mesures

Tâches Représentatives	**Conduites rencontrées chez plusieurs élèves**
M. PM.1. *a)* En se congelant, l'eau augmente son volume des 75/100 de son volume initial. Combien de litres d'eau obtient-on en fondant un cube de glace de 30 cm d'arête? *b)* On sait que l'aire d'un rectangle est 1/3 cm^2. Trouvez sa longueur sachant que sa largeur est 3/5 cm. (Chevallard et Julien, 1989, p. 56)	***M. PM.1.*** a) Ce problème est échoué par tous les élèves, soit 85 élèves. b) Ce problème est échoué par 55 des 77 élèves Élèves de 2e secondaire
M. PM.2. Quel est le périmètre d'un carré dont l'aire est de 100 mètres carrés? (TIMSS2008, items M022055, p.8)	***M. PM.2.*** *Résultats internationaux* : 28,5% des élèves produisent une bonne réponse, soit 40 ; 6,4% des élèves effectuent le calcul «100 ÷ 4 côtés », obtenant alors 25 ; 4,8% des élèves inscrivent 10, sans laisser de traces de leurs calculs; 4,4 % des élèves effectuent le calcul « (10 x 10) » , obtenant alors 100 ; 9% des élèves inscrivent 400, résultat du calcul (100 x 4 côtés). *Résultats au Québec* :44,8% des élèves produisent une bonne réponse, soit 40 ; 10,4% des élèves effectuent le calcul «100 ÷ 4 côtés »,

	obtenant alors 25 ; 8,5% des élèves inscrivent 10, sans laisser de traces de leurs calculs; 2,2% des élèves effectuent le calcul « (10 x 10) » , obtenant alors 100 ; 3,5% des élèves inscrivent 400, résultat du calcul (100 x 4 côtés). Élèves de 2e secondaire

Les performances des élèves de 2^{e} secondaire dans la résolution des problèmes multiplicatifs impliquant un produit de mesures sont tout aussi décevantes (M.PM.1 et M.PM.2). Le problème M.PM.1a est échoué par tous les élèves. Nous n'avons toutefois pas accès à l'analyse des conduites des élèves. Il est possible que certains élèves ne puissent établir, ou ne pensent à établir, une correspondance entre le volume du cube de glace et le nombre de litres correspondant à ce volume. Il nous apparaît tout aussi plausible que les élèves ne puissent établir un rapport entre le volume du cube de glace et le volume d'eau. En ce qui concerne les problèmes M.PM.1b et M.PM.2, il est possible que les difficultés des élèves soient attribuables à une non maîtrise des relations entre l'aire et le périmètre. Les commentaires de certains enseignants (Chevallard et Julien, 1989, p.68), à propos du problème M.PM.1b, sont particulièrement éclairants. Ainsi, un enseignant déclare qu'il peut y avoir « *un risque d'erreur même par un élève qui a compris les fractions* »; un autre enseignant déclare qu'il s'agit d'un « *exercice intéressant, qui, en plus des techniques opératoires sur les fractions, présente une « mise en équation », ce qui n'est pas toujours évident pour les élèves de quatrième.* » Dans l'explication des faibles résultats obtenus par les élèves dans le problème M.PM1b, la mention de la mise en équation fait référence, selon les chercheurs, à l'introduction des fractions. Si les mesures d'aire et de largeur avaient été des nombres naturels, une telle mention n'aurait possiblement pas été effectuée. Le recours à une fraction dans un problème multiplicatif, qui est cependant familier aux élèves, transforme ainsi le rapport à ce type de problèmes. Dix-neuf des vingt-deux élèves qui résolvent correctement ce problème ont recours à une mise en équation; ce procédé rejoint celui prôné par les enseignants précédents. De plus, les propos des enseignants pourraient être nuancés dans la mesure où l'aire est plus petite que la mesure de longueur, ce qui requiert une interprétation différente de la multiplication, interprétation qui pose fréquemment problème aux élèves et qui est nécessaire à la représentation adéquate de la situation. Les résultats obtenus au problème MPM.2 montrent enfin qu'un pourcentage fort élevé d'élèves effectue des calculs qui traduisent des interprétations inadéquates des relations entre l'aire et le périmètre du carré.

Les études qui ont marqué notre compréhension des difficultés des élèves dans la résolution de problèmes multiplicatifs d'isomorphisme de mesures ont occupé un espace fort important, ce type de problèmes étant grandement sollicité en 1re secondaire.

Tableau XV: Les rapports problématiques liés à la résolution de problèmes multiplicatifs d'isomorphisme de mesures (proportionnalité)

Tâches Représentatives	Conduites rencontrées chez plusieurs élèves
M.PS.1 *a)* Lors d'un goûter d'anniversaire, il y a du cake à manger. À la fin, il reste 2/7 des morceaux de cake, soit 4 morceaux. Combien y avait-il de morceaux au départ? *b)* Une course est composée de relais de 1/8 de km chacun. Chaque coureur court un relais. Combien de coureurs faut-il pour une course de ¾ de km? (Chevallard et Julien, 1989, p.56)	***M.PS.1*** *a)* 50 des 85 élèves échouent *b)* 35 des 55 élèves échouent. Élèves de 2e secondaire
M.PS.2 Q.19 *a)* J'ai participé à une course à vélo. En tout, j'ai parcouru 20 km. Sachant que chaque tour était de 1/5 km, peux-tu me dire combien de tours j'ai fait? Dis-moi comment tu fais. *b)* J'ai participé à une autre course de 20 km. Sachant que chaque tour était de 2/5, peux-tu me dire combien de tours j'ai fait? Dis-moi comment tu fais. (Krikorian, 1996, p.200)	***M.PS.2*** *a)* 7 des 46 élèves ont réussi le problème : 1 élève a procédé à la division de 20 ÷ 1/5 ; 2 élèves ont transformé les km en mètres, 1 élève effectue différents essais pour satisfaire la multiplication posée (? X 1/5 = 20); 1 élève transforme les fractions en nombres décimaux; 2 exploitent la proportion. Parmi les 39 élèves qui ont échoué, 13 élèves ont effectué la multiplication suivante : 20 x 1/5 ; 10 élèves ont trouvé une fraction équivalente à 1/5 dont le dénominateur est 20, donnant alors 4 comme réponse; 3 élèves posent la bonne division, mais donnent 4 comme réponse. *b)* 5 des 46 élèves ont réussi le problème. 23 élèves ont fourni une réponse 2 fois plus élevée qu'en a). Élèves de la fin 6e primaire
M.PS.3. Q.6. *a)* J'ai ¼ de litre de soupe et je veux faire 5 portions. Combien de litres doit contenir chaque portion? *b)* J'ai une bande de tissu qui mesure 0,25 m et je veux la couper en 5 morceaux égaux. Combien chaque petit morceau doit-il mesurer? (Krikorian, 1996, p.203)	***M.PS.3.*** *a)* 36 élèves sur 43 échouent à ce problème et les 7 élèves qui l'ont réussi ont « détourné le problème des fractions » en transformant les litres en millilitres ou en nombre décimal ou en recourant au dessin. Ceux qui ont échoué ont majoritairement exploité la multiplication. Tout ceux qui ont posé ¼ ÷ 5 et près de la moitié de ceux ayant posé 0,25 ÷5 ont échoué. L'exploitation du dessin par 5 élèves a permis à 2 d'entre eux de réussir. *b)* 17 des 43 élèves échouent. Les procédés sont beaucoup plus circonscrits dans ce problème. D'ailleurs, tous exploitent la division : 30 élèves recourent à la modélisation 0,25 ÷ 5 dont 11 élèves échouent (0,5m) et 19 élèves réussissent (0,05m). Les 13 autres élèves posent l'opération 25 ÷ 5; 7 avec succès (5cm) et 6 avec échec (5m). Élèves de la fin 6e primaire
M.PS.4. 1) Dans les problèmes, différents types de mesures sont utilisés, ainsi que des nombres décimaux comportant divers développements, par exemple : a) 11.9 miles par heure; b) côtelettes de porc pesant 1.07 lb; c) temps calculé pour une compétition exprimé par 0,453852. 2) Certains problèmes multiplicatifs ne varient que par que par le recours à des mesures différentes : a) si le pétrole se vend « 1.17 litres par gallon, quel	***M.PS.4.*** A) Plusieurs élèves associent ainsi les mesures : a) 11.9 miles à 11 miles 9 minutes; b) 1.07 lb à 1 lb 7 onces; c) 0.453852 à 0.45 heure ou 45 minutes; B) Mise en évidence de conceptions très répandues chez les élèves, soit « la multiplication produit une augmentation et la division une diminution » : a) problème correctement interprété et associé au calcul suivant : 1.17 x 8.6; b) problème jugé différent du précédent car on obtient un montrant moins élevé et le calcul suivant est proposé : 1.20/0.22, disant que la division produit une diminution;

sera le coût si on l'on remplit un réservoir contenant 8.6 gallons »; b) si le pétrole se vend 1.20 litres par gallon, quel sera le coût si on l'on remplit un réservoir contenant 0.22 gallon. (Bell, Swan et Taylor, 1981, p.405)	C) Certains élèves déclarent ne pas aimer multiplier deux nombres associés à des unités différentes; D) Un nombre appréciable d'élèves déclarent que, dans une division, le dividende doit être un nombre plus grand que celui associé au diviseur Élèves de secondaire 1 à 4.
M.PS.5. **a)** Taux de réussite supérieur à 60% *Multiplication* Problème 8 : Pour faire un gâteau, on a besoin de 1,25 kg de sucre. Quelle quantité de sucre avons-nous besoin pour faire 15 gâteaux ? Problème 11 : Une voiture parcourt 15 km avec 1 litre d'essence. Combien de kilomètres parcourra-t-elle avec 3,25L d'essence? *Division* Problème 20 (partition) : Pour envelopper 5 paquets égaux, nous avons besoin de 3,25 m de corde. Combien de corde est nécessaire pour chaque paquet? Problème 22 (partition) : 5 bouteilles contiennent 1,25 L de bière. Quelle quantité de bière est contenue dans chaque bouteille ? **b)** Taux de réussite inférieur à 60% *Multiplication :* Problème 4 : Le volume de 1 quintal de gypse est 15 cm3. Quel est le volume de 0,75 quintal ? Problème 5: 1 kilo de détergent est utilisé pour faire 15 kilos de savon. Combien de savon peut être fait avec 0,75kilos de détergent? *Division :* Problème 16 (partition): 15 amis achètent ensemble 5 kg de biscuits. Combien chacun obtient-il? Problème 24 (quotition) : Les murs de la salle de bain ont 3 mètres de hauteur. Combien de rangées de tuiles sont nécessaires pour couvrir si la largeur de chaque rangée est 0,15m? Problème 26 (quotition) : Un tailleur a 15 mètres de tissu. Si la confection d'un costume requiert 3,25 mètres de tissu, combien de costumes peut-il alors fabriquer? (Fischbein, Deri, Nelleo et Marino, 1985, p. 10-12)	***M.PS.5.*** Les élèves devaient uniquement indiquer l'opération à effectuer. **a)** Problème dont les taux de réussite est supérieur à 60% *Multiplication* Problème 8 Taux de réussite Erreurs fréquentes Pas répondu 5e année 84% 7% : 1,25 ÷ 15 4% 7e année 91% 4% : 1,25 ÷ 15 2% 9e année 94% 3% : 1,25÷15 et 2% :15÷ 1,25 1% Problème 11 Taux de réussite Erreurs fréquentes Pas répondu 5e année 80% 9% : 3,25 ÷ 15 4% 7e année 85% 4% : 3,25 ÷ 15 1% 9e année 86% 6% : 15 ÷ 3,25 et 5% : 3,25÷ 15 3% *Division* Problème 20 Taux de réussite Erreurs fréquentes Pas répondu 5e année 73% 14% : 3,25 x 5 4% 7e année 71% 13% : 3,25 x 5 et 13% : 5 ÷ 3,25 2% 9e année 84% 11% : 5 ÷ 3,25 0% Problème 22 Taux de réussite Erreurs fréquentes Pas répondu 5e année 66% 16%: 1,25 x 5 et 15%: 5 ÷ 1,25 2% 7e année 74% 17%: 5 ÷ 1,25 et 8% : 1,25 x 5 1% 9e année 70% 23%: 5 ÷ 1,25 1% **b)** Problème dont les taux de réussite est inférieur à 60% *Multiplication* Problème 4 Taux de réussite Erreurs fréquentes Pas répondu 5e année 57% 16%: 15÷0,75 et 8% : 0,75÷15 9% 7e année 57% 18%: 15÷0,75 et 9% : 0,75÷15 14% 9e année 46% 28%: 15 ÷ 0,75 14% Problème 5 Taux de réussite Erreurs fréquentes Pas répondu 5e année 27% 25%: 0,75 ÷ 15 et 20%: 15÷ 0,75 13% 7e année 18% 24%: 15 ÷ 0,75 et 18% : 0,75÷15 28% 9e année 35% 20%: 15 ÷ 0,75 28% *Division* Problème 16 Taux de réussite Erreurs fréquentes Pas répondu 5e année 20% 25%: 15 ÷ 5 3% 7e année 24% 24%: 15 ÷ 5 1% 9e année 41% 20%: 15 ÷ 5 1% Problème 24 Taux de réussite Erreurs fréquentes Pas répondu 5e année 22% 53%: 0,15 x 3 11% 7e année 38% 46%: 0,15 x 3 9% 9e année 55% 37%: 0,15 x 3 6% Problème 26 Taux de réussite Erreurs fréquentes Pas répondu 5e année 41% 32%: 3,25 x 15 4% 7e année 62% 14%: 3,25 ÷ 15; 14% : 3,25 x 15 7% 9e année 90% 5%: 3,25 x 15; 3% :3,25 ÷ 15; 1% 622 élèves de 5^{e} année primaire, de 1re et 3^{e} années secondaire

M.PS.6. **a)** Une cuillère contient 1/5 kg de farine. Combien de cuillères de farine sont nécessaires pour remplir un sac de 6 kg de farine? (TIMSS, 2004,p. 52, item M022156)	***M.PS.6.*** **a)** *Résultats internationaux* : 38,4% des élèves obtiennent le bon résultat. 1,5% des élèves rendent compte du bon nombre, mais d'une unité de mesure incorrecte; 3,8% notent 6/5 à la suite de la multiplication de 6 x 1/5; 1,9% des élèves inscrivent 4, car 4/5 est nécessaire pour compléter 1kg; 2,3% écrivent 5 cuillères, car 5 cuillères donnent 1 kg de farine. Enfin, 21,4% des élèves ne répondent pas à la question. *Résultat au Québec*: 61,5% des élèves obtiennent le bon résultat. 0,6 % des élèves rendent compte du bon nombre, mais d'une unité de mesure incorrecte; 2,9% notent 6/5 à la suite de la multiplication de 6 x 1/5; 0,4 % des élèves inscrivent 4, car 4/5 est nécessaire pour compléter 1kg; 4% écrivent 5 cuillères, car 5 cuillères donnent 1 kg de farine. Enfin, 11,3% des élèves ne répondent pas à la question
b) Il y a 30 étudiants dans une classe. Le ratio de garçons par rapport aux filles est de 2 : 3. Combien y a-t-il de garçons dans la classe? a) 6 b) 12 c) 18 d) 20 (TIMSS, 2004, item:M042055, p.26)	**b)** *Résultats internationaux :* les choix de réponses se répartissent ainsi : a) 45.5% ; b) 11.7% ; c) 45.5% ; d) 17.7% . *Résultats au Québec* : les choix de réponses se répartissent ainsi : a) 31.9% ; b) 5.4% ; c) 31.9% ; d) 10.8% .

Comme en fait état le tableau précédent, les problèmes M.PS.1 a et b, présentés à des élèves de 2ème secondaire, problèmes qui en apparence semblent relativement simples pour des élèves de ce niveau, sont échoués par plus de 60% des élèves. Pourtant, le choix des nombres (2/7 et 4 ; 1/8 et ¾) aurait dû faciliter leurs résolutions. Chez les élèves qui résolvent correctement le problème M.P.S.1 b, il est fort à parier qu'ils se servent de la relation entre 1/8 et ¾ et à ce moment, le problème devient très simple. Aucun élève ne recourt à la division pour résoudre ce problème, ce qui montre bien l'influence des nombres sur la modélisation de la situation. Le problème M.PS.2 est isomorphe au problème M.PS.1b qui, de surcroît, exploite le même contexte. Le problème M.PS.2 est présenté à des élèves qui n'ont pas abordé la division de fractions; pourtant, six d'entre eux arrivent à résoudre le problème sans recourir explicitement à la division pour modéliser la situation. Les conduites des élèves relèvent toutefois de la compréhension du sens de la division. Il faut cependant considérer que le choix des nombres impliqués dans la division (20 ÷ 1/5 vs 3/4 ÷ 1/8) est plus propice à la compréhension de la situation. Il est donc intéressant de constater que l'accès à la représentation de l'énoncé prédomine sur les difficultés que les élèves rencontrent dans l'application des techniques opératoires. En effet, dans cette recherche, les élèves ont aussi été invités à effectuer le calcul suivant : 20 ÷ 1/5, (Krikorian, 1996, p. 202); or, très peu d'élèves ont effectué correctement ce calcul, entre autres, parce que l'accès au sens de l'opération n'était plus accessible. Tout aussi étonnante, dans l'étude effectuée par Krikorian (1996, tâche M.P.S2), est la mise en évidence du fait que les élèves ne tirent pas partie des relations entre les nombres et de la structure des énoncés, suite à la présentation de deux problèmes isomorphes, partageant des contextes similaires. Ces problèmes présentés successivement ne diffèrent que par la mesure du tour de piste, qui est deux fois plus grande dans le second problème (Q.19. a) 1/5 km et Q.19. b) 2/5 km), ce qui aurait dû permettre aux élèves de déduire que le résultat au deuxième problème devrait être deux fois moins grand que celui obtenu au premier problème. De plus, nous avons pu constater, à l'item M.PS.3, que les élèves ont mieux réussi, lorsqu'il s'agit de diviser un nombre décimal par un nombre entier, que lorsqu'il s'agit de diviser une fraction par un entier, peu d'entre eux ne recourant alors à la représentation par un nombre décimal de la fraction ¼, fraction pourtant très familière. Au regard de toutes les situations proposées, Krikorian (1996, p.203) conclut que « *les situations du type n ÷ a/b sont plus difficiles que celles des types a/b ÷ n et a/b ÷ c/d où a, b, c et d E N et où a/b et c/d sont inférieurs à 1* ».

Les recherches effectuées par Bell, Swan et Taylor (1981), ainsi que celles effectuées par Fischbein, Deri, Nelleo et Marino (1985), sont particulièrement enrichissantes, car elles mettent en évidence, dans les tâches M.PS.4 et M.PS.5, les modèles implicites des élèves, ainsi que les conditions dans lesquelles ils sont sollicités. Il s'agit là de manifestations des conceptions relatives à l'interprétation des mesures et aux opérations de division et de multiplication. Les exemples de conduites associées à la tâche M.PS.4 montrent comment le changement d'unités de mesure affecte le traitement des nombres décimaux (ex.1,07 lb = 1 lb et 7 oz.). Elles mettent également en exergue l'influence des mesures (type, fonction) sur le choix des opérations dans la modélisation de problèmes isomorphes partageant un contexte similaire: le recours, d'une part, à la multiplication pour obtenir «une augmentation» et, d'autre part, à la division pour obtenir «une réduction» où le dividende doit être plus grand que le diviseur. Un autre exemple est celui dans lequel les chercheurs ont demandé aux élèves d'indiquer comment trouver le coût de 0,22 gallon d'essence, si un gallon coûte 1,20$. Le calcul le plus courant est le suivant : 1,20 + 0,22. Quand la même question a été posée avec les nombres entiers 5 et 2, les élèves ont inscrit correctement : 2 x 5. Dans un autre ordre d'idées, les déclarations de certains élèves qui avouent ne pas aimer multiplier deux nombres dont les unités diffèrent nous semblent traduire une conception de la multiplication comme addition répétée. Ce travail montre bien comment le premier rapport des élèves aux nombres naturels colore pendant longtemps leurs représentations des opérations avec d'autres nombres, notamment, avec des nombres rationnels. Cette recherche a fortement inspiré l'étude de Fischbein, Deri, Nelleo et Marino (1985) qui a permis d'affiner les résultats précédents en proposant, à plusieurs élèves de différents niveaux scolaires, un nombre important (42) de problèmes, et en leur demandant uniquement de poser l'opération à effectuer. L'analyse des variables didactiques est particulièrement bien menée pour comprendre les difficultés propres à la résolution de problèmes impliquant les nombres rationnels. Elle nous éclaire quant à l'influence du choix : 1) des nombres : entiers, décimaux, etc.; 2) de leur fonction (multiplicande, multiplicateur, dividende, diviseur); 3) des contextes ; 4) des types de problèmes (ex. division: partition, quotition).

Tous les énoncés que nous avons sélectionnés (problème 4 : 15 x 0,75 ; problème 5 : 15 x 0,75, problème 8 : 15 x 1,25 et problème 11 : 3,25 x 15), parmi ceux identifiés comme étant des problèmes de multiplication,[16] ont la même structure**:** ils présentent tous une unité de mesure du type a (1) qui est associée à une certaine unité de mesure du type b (valeur unitaire); connaissant une seconde unité du type a, il s'agit de trouver la mesure du type b qui lui est associée. Dans les problèmes jugés faciles, problèmes qui varient en fonction des contextes et des mesures (problèmes 8 et 11), la seconde mesure du type a est un nombre supérieur à 1 (1 étant la 1re mesure du type a), ce nombre peut être un nombre décimal ou non, tandis que dans les problèmes jugés plus difficiles (problèmes 4 et 5), la seconde mesure du type a est un nombre inférieur à 1 (1 étant la 1re mesure de type a). Il est important de noter que les problèmes multiplicatifs associés à des taux de réussite peu satisfaisants (problèmes 4 et 5) sont des problèmes qui partagent une même structure et qui comportent des nombres identiques. Par ailleurs, dans le problème 5, les mesures a et b sont des mesures du même type, soit des mesures de masse, ce qui pose problèmes à un nombre fort important d'élèves, comme en témoignent les écarts entre les performances des élèves à ce problème et au problème 4.

---

[16] Nous avons choisi de respecter la présentation des problèmes qui avait été faite dans l'étude en fonction de l'opération à faire, soit la multiplication et la division, et pour chacune de ces catégories, de mettre en contraste des problèmes très bien ou, au contraire, peu réussis.

Comme le montre le tableau précédent, les taux de réussite aux problèmes de multiplication fluctuent d'un problème à l'autre. Toutefois, les écarts entre les taux de réussite observés chez les élèves de 5^{e}, 7^{e} et 9^{e} années ne nous semblent pas très importants, à tout le moins, moins importants que ce que nous aurions pu prévoir. En effet, il est assez étonnant de constater que plusieurs élèves de 9^{e} année ne peuvent résoudre adéquatement les problèmes 4 et 5. Cette dernière constatation est également effectuée par d'autres chercheurs (Lachance et Confrey, 2002; Hart, 1988) qui ont présenté à des élèves de 4^{e} et 5^{e} années du primaire, ainsi qu'à des élèves de 1re, 2^{e} et 3^{e} années du secondaire, un problème de proportionnalité simple, sans valeur unitaire fournie. Hart (1988) rapporte que 28% des élèves de 13 ans, 30% des élèves de 14 ans et 42% des élèves de 15 ans ont résolu correctement ce problème.

Fischbein, Deri, Nello et Marino (1985) ont également présenté plusieurs problèmes de division aux élèves de 5^{e}, 7^{e} et 9^{e} années qui ont participé à leur étude. Le tableau précédent présente les 4 problèmes que nous avons retenus : trois problèmes de partition (problème 16 : 5÷15; problème : 20 : 3,25÷5; problème : 22 :1,25÷5); un problème de quotition (problème 24 : 3÷0,15). Tous ces problèmes varient en fonction des contextes et des mesures. Dans les problèmes de partition, une certaine mesure du type a est associée à une certaine mesure du type b; il faut trouver la mesure du type b (la valeur unitaire) qui est associée à une unité de mesure du type a (1). Dans le problème de quotition, une certaine mesure du type b, ainsi que la valeur d'une unité de mesure du type a, étant connues, il s'agit alors de trouver combien d'unités de mesure du type a seront utilisées pour obtenir la mesure du type b.

Comme le montre le tableau précédent, le taux de réussite aux problèmes de division s'améliore généralement (10 cas sur 13) de la 5^{e} année primaire à la 3^{e} secondaire. Les problèmes de partition 20 et 22 sont ceux qui sont les mieux réussis par les élèves de chacun des niveaux scolaires. On aurait pu s'attendre à une réussite encore plus importante, notamment, chez les élèves de 7^{e} et 9^{e} année. Les procédés utilisés par les élèves qui produisent des réponses erronées sont particulièrement révélateurs des rapports des élèves aux situations de partage. En effet, un pourcentage non négligeable d'élèves effectuent une multiplication (3,25 x 5) ou une division (5 ÷ 3,25). Ces élèves évitent ainsi le recours à un dividende plus petit que le diviseur. Un tel évitement peut être associé à des conceptions primitives de la division et du partage, selon lesquelles le dividende doit être un nombre supérieur au dividende.

La différence entre les taux de réussite aux problèmes 20 et 22 et au problème de partition 16 est, de prime abord, étonnante. En effet, dans les autres problèmes, une des mesures est représentée par un nombre décimal et l'autre par un nombre entier (problème 20 : 3,25 et 5; problème 22 : 1,25 et 5), tandis que dans le problème 16, les deux mesures sont représentées par des nombres entiers (15 et 5). La piètre performance des élèves des différents niveaux scolaires au problème 16 peut être attribuée à une violation d'une règle usuelle, à savoir que le dividende doit être plus grand que le diviseur; le respect de cette règle est d'autant plus important que, dans ce problème, il s'agit d'effectuer un partage d'aliments entre un certain nombre de personnes. Ce contexte renvoie à un contexte très familier aux élèves et il est possible qu'ils aient « trop rapidement enclenché » un calcul. Il faut dire également que la question associée à ce problème n'est pas très explicite « Combien chacun obtient-il? ». Nous pourrions soumettre à ces élèves un problème isomorphe en utilisant un autre contexte, ou encore, en précisant la question, et obtenir des résultats différents. Ces analyses nous invitent à la prudence lorsqu'il s'agit d'interpréter les difficultés des élèves dans la résolution de problèmes multiplicatifs. Ainsi, dans ce type de situations, les élèves reconnaissent majoritairement la pertinence de recourir à la division pour modéliser la situation, mais inversent le dividende et le diviseur, ce qui reflète leur modèle implicite.

Fischbein, Deri, Nello et Marino (1985) avaient supposé que dans les problèmes de quotition, si le diviseur était un nombre décimal, cela ne poserait pas de difficultés aux élèves, à la condition que le dividende soit plus grand que le diviseur. Cette conjecture a été clairement confirmée pour les élèves de 9^{e} année seulement, comme l'indiquent les données pour les problèmes 24 et 26. Les élèves de 7^{e} année semblent être dans une période transitoire et ceux de 5^{e} année tendent plutôt vers le modèle de partition, c'est-à-dire que si le diviseur était un nombre décimal, il n'a pas importé à ces élèves que la division soit partitive ou quotitive. L'effet « d'absorption » de la partie décimale au diviseur est moins présente que dans le cas de la multiplication.

En somme, deux problèmes peuvent avoir une structure et un contexte identiques, mais l'un peut s'avérer plus difficile que l'autre, en fonction des types de nombres utilisés et de leurs rôles dans la structure du problème. Si la multiplication est associée à « une addition répétée », l'opérateur doit être un nombre entier et le produit doit être plus grand que l'opérateur. Dans les problèmes de partition, le diviseur doit être un nombre entier et le diviseur, ainsi que le quotient, doivent être plus petits que le dividende. Dans les problèmes de quotition, il y a seulement la contrainte que le diviseur doit être plus petit que le dividende. Dans la multiplication et la division, si la partie entière du nombre décimal est relativement plus grande que la partie décimale, elle peut intuitivement absorber la partie décimale et ainsi entraîner moins de difficultés.

Au regard des recherches effectuées sur la résolution de problèmes, les principales difficultés des élèves dans les problèmes additifs et multiplicatifs relèvent autant de la difficulté de compréhension des concepts que des opérations. Nous croyons par ailleurs que la majorité des choix de réponses proposées traduisent plutôt une valorisation du travail sur la résolution de problèmes qui est orienté vers la maîtrise des calculs, négligeant parfois les difficultés de représentation des nombres, alors que le fait d'obliger les élèves à s'attarder aux relations entre les nombres favorise cette pratique et par la même occasion, la construction de connaissances sur les concepts. D'ailleurs, parmi les étudiants en 2e année de formation en enseignement au primaire interrogés dans l'étude de Tirosh (2000, p.10), environ 90% affirment que la source des erreurs commises par les élèves dans la résolution de problèmes additifs et multiplicatifs[17] serait due à une application incorrecte des algorithmes, telle la division de fractions : « *Les étudiants ne se rappellent pas les diverses étapes qu'ils doivent aller faire ; Ils confondent un certain nombre d'étapes ; Ils oublient d'abord d'inverser alors que cela est nécessaire avant de*

[17] Voici quelques exemples de problèmes proposés (*Ibid*., p.9) : « Un bâton de 5m de long a été divisé en 15 bâtons égaux. Quelle est la longueur de chaque bâton ? ; Quatre amis ont acheté 1 kilogramme de chocolat et l'ont partagé également. Combien de chocolat chaque personne a-t-elle obtenu ? ; Quatre kilogrammes de fromage ont été emballés en paquets de 1 kilogramme. Combien de paquets ont été faits avec cette quantité de fromage ? ».

multiplier». Nous pouvons entrevoir les répercussions de telles représentations dans une perspective d'aide auprès des élèves en difficultés d'apprentissage.

2.2.3.3. Comparaison des rapports problématiques liés au concept de nombre rationnel lorsqu'inscrit dans un calcul ou dans une résolution de problèmes

À la section précédente, nous avons pu apprécier les difficultés d'un nombre important d'élèves de 6e année primaire et du premier cycle de l'enseignement secondaire dans les situations de résolution de problèmes, difficultés traduisant fréquemment des rapports problématiques au concept de nombre rationnel et aux opérations sur ces nombres. Pour mieux interpréter ces rapports, il nous est apparu important de rendre compte de quelques recherches qui ont été consacrées à la comparaison des difficultés liées au concept de nombre rationnel, lorsque celui-ci est inscrit, soit dans une activité de calcul, soit dans une activité de résolution de problèmes.

Roditi (2007b) a soumis 51 tâches de comparaison de nombres décimaux en contexte et hors contexte, à 402 élèves âgés de 10 à 21 ans, élèves provenant de différents ordres d'enseignement : primaire, secondaire et lycée professionnel. Il était d'abord demandé aux élèves de comparer les nombres 14,17 et 14,036, puis les nombres 1,21 et 1,4. Les élèves ont également été invités à résoudre des problèmes dans lesquels une comparaison des nombres précédents était requise : a) « Léa et Manu comparent leurs moyennes. Celle de Manu est 14,17 et celle de Léa est 14,036. Qui a la meilleure moyenne ? » ; b) « Manu mesure 1,21 m. Léa mesure 1,4 m. Qui est le plus grand ? ». Lorsque les nombres à comparer sont présentés dans un contexte, les élèves en difficultés réussissent mieux à effectuer les comparaisons, le contexte leur permettant de donner sens aux nombres à comparer. Selon Roditi, les élèves de l'enseignement régulier peuvent, par ailleurs, accéder au sens des nombres à comparer, sans que ces nombres soient inscrits dans un contexte.

L'inscription de nombres rationnels dans un contexte, comme le montre l'étude précédente, semble affecter les représentations de ces nombres, du moins chez les élèves en difficultés. Dans une étude effectuée auprès d'élèves de 11 et 12 ans, Irwin (2001) a montré que les élèves auxquels on a présenté divers problèmes contextualisés ont davantage amélioré leur compétence dans l'exploitation des nombres décimaux, que ne l'ont fait les élèves provenant d'un groupe comparable, mais qui ont travaillé sur des problèmes mathématiquement similaires, mais hors contexte. Krikorian (1996) a également obtenu des résultats plus élevés dans des tâches contextualisées impliquant la multiplication d'une fraction par un nombre entier ou la division de fractions, et ce, auprès d'élèves de l'enseignement régulier de 6^{e} année primaire. Elle précise que cet effet est d'autant plus marquant lorsqu'il s'agit d'un nouvel objet d'apprentissage, soit la division de fractions; l'amélioration se répercute également dans les processus de résolution de problèmes. Elle montre aussi que les difficultés sont plus importantes dans les problèmes comportant des mesures discrètes que dans ceux comportant des mesures continues et que le passage d'un type de mesures à l'autre n'est pas évident pour les élèves, ce qui est attesté dans plusieurs autres recherches. Clarke (2006) a également montré la pertinence d'utiliser le contexte pour travailler le sens partition de la division, notamment pour construire le sens quotient de la fraction. L'étude effectuée par Heller, Post, Behr et Lesh (1990), étude réalisée auprès de 467 élèves de 7^{e} année (16 classes) et de 522 élèves de 8^{e} année (19 classes), a également exploré les relations entre les habiletés de ces élèves dans le traitement de calculs non contextualisés et dans la résolution de problèmes impliquant de tels calculs. À partir de problèmes mathématiquement similaires impliquant des fractions, les chercheurs font état de faibles corrélations entre des tâches de calcul et d'autres tâches faisant appel à la résolution de problèmes. Ainsi, les élèves n'exploitent pas la similitude des structures inhérentes aux problèmes, même lorsque les quantités numériques sont identiques.

Enfin, une dernière étude fort instructive est celle effectuée par Aksu (1997). Dans cette étude, il a ainsi comparé les performances de 155 élèves de 6^{e} année primaire dans divers types de tâche : a) compréhension du sens de la fraction (ex. Combien y a-t-il de tiers dans un entier? Quelle fraction est la plus grande : ½ ou 3/8?); b) calcul avec des fractions (5+3/8; 7 ½ ÷ 1¼); c) résolution de problèmes impliquant des fractions (ex. Ahmet a 5 kg de livres dans son sac. Il ajoute un autre livre de 1/8 kg. Quel est le poids de son sac?). De façon générale, les élèves ont obtenu de meilleurs résultats dans les tâches de calcul, que dans les autres tâches. Par ailleurs, la réussite aux tâches portant sur la « compréhension du sens de la fraction » est supérieure à celle obtenue aux tâches de résolution de problèmes. Il appert, cependant, que les problèmes additifs s'avèrent plus accessibles que les problèmes multiplicatifs. Nous comprenons aisément cette situation dans la mesure où, comme nous l'avons vu dans les études précédentes, les modèles implicites d'addition des nombres entiers sont aisément transférables aux nombres rationnels, ce qui rend la résolution de problèmes additifs impliquant des nombres rationnels plus accessible que ne l'est la résolution de problèmes multiplicatifs. De plus, c'est, sans étonnement, que nous constatons que la plus grande divergence entre les résultats aux calculs effectués en contexte et hors contexte, se rapporte à la multiplication. En effet, comme le montrent plusieurs études dont nous avons fait état à la section précédente, même si plusieurs élèves peuvent prendre appui sur les procédés de multiplication de nombres entiers pour construire les procédés de multiplication de nombres rationnels, leurs modèles implicites de la multiplication s'avèrent des obstacles non négligeables dans leur modélisation des situations multiplicatives impliquant des nombres rationnels. Enfin, il nous semble important de souligner la corrélation importante entre les tâches portant sur la compréhension du concept de fraction et la résolution de problèmes impliquant des fractions.

Comme le montrent les études précédentes, la résolution de problèmes constitue un milieu fécond pour donner sens aux nombres rationnels et aux opérations sur ces nombres, ainsi que pour comprendre les difficultés, les conceptions erronées et les rapports technicistes qui ne sont pas toujours visibles dans les tâches de calculs.

2.2.4. Synthèse des rapports problématiques des élèves aux nombres rationnels

L'examen des difficultés des élèves en ce qui concerne le concept de nombre rationnel, les opérations et la résolution de problèmes impliquant de tels nombres, difficultés qui ont retenu l'attention de nombreux chercheurs, a permis de mettre en exergue le fait que la complexité de ces nombres occasionne des sauts conceptuels que plusieurs élèves peinent à surmonter. Nous avons eu l'occasion de constater que ces difficultés ne sont pas uniquement rencontrées par les élèves dits en difficultés d'apprentissage et que plusieurs d'entre elles témoignent également de la prégnance des représentations des nombres entiers.

Nous avons pu également constater la diversité de leurs origines (didactique, épistémologique, culturel et ontogénique) et parallèlement la vigilance « épistémologique et didactique » que requiert l'interprétation des difficultés des élèves. À ce propos, bien que nous ayons pu dresser certaines hiérarchisations des difficultés, il n'en demeure pas moins que plusieurs éléments contextuels doivent être pris en considération. En effet, outre les difficultés d'ordre épistémologique, nous avons pris connaissance de l'influence des choix didactiques sur les difficultés rencontrées par les élèves, notamment, le traitement séquentiel et indépendant des fractions, des décimaux et des pourcentages qui inhibe le recours à des changements de registres. Dans cet ordre d'idées, l'exposition des élèves à des opérations sur des nombres comportant toujours les mêmes nombres de décimales ne leur permet pas de confronter leurs différents modèles implicites et inadéquats. Ainsi, cette recension nous a permis d'*identifier des niches potentielles et de cibler des conditions, facteurs affectant la relation entre l'élève et la tâche.* Par exemple, le rapport des élèves aux tâches de comparaison dépend, entre autres, de la présence de : a) la quantité de nombres à comparer; b) la présence de différentes représentations (fractions, pourcentages, décimaux); c) la présence de nombres à virgule dont la partie décimale ne comporte pas le même nombre de chiffres.

De façon générale, ne pouvant donner sens aux nombres rationnels et aux opérations, plusieurs élèves se réfugient dans un apprentissage des gestes qui font partie des techniques de calcul enseignées. L'enseignement des opérations et de la résolution de problèmes sur les nombres rationnels aux élèves présentant des difficultés d'apprentissage en est ainsi fortement affecté. Nous avons d'ailleurs pris acte de l'effet «boule de neige» qu'entraînent les conceptions erronées et limitées du concept de nombre rationnel sur les opérations et la résolution de problèmes. Nous avons aussi constaté que ce phénomène n'appelle pas forcément un processus d'enseignement linéaire et séquentiel, car il peut s'avérer avantageux de proposer des situations sur les opérations et la résolution de problèmes pour construire le sens du concept. Dans le cadre de notre recherche, il s'agit de niches précieuses dans lesquelles notre collaboration avec l'enseignant pourrait conduire à la mise en place de situations favorables à l'établissement de rapports plus adéquats aux nombres rationnels chez les élèves et à la transformation de leur habitus. Il importe donc de prendre ces résultats en considération.

2.3 Les dispositifs didactiques pour la construction, ou la re-construction, de rapports plus adéquats aux nombres rationnels

Les rapports problématiques aux nombres rationnels d'un nombre important d'élèves, comme le montrent les études dont nous avons fait état à la section précédente, sont généralement interprétés comme des événements qui invitent à une re-construction du concept de nombres rationnels et du sens des opérations sur ces nombres. Les dispositifs réalisés depuis les deux dernières décennies ont majoritairement pris appui sur les recherches fondamentales effectuées par Tom Kieren (1976, 1980, 1992, 1993), ainsi que par Nadine et Guy Brousseau (N. et G. Brousseau, 1987). Ces dispositifs concernent des connaissances et savoirs sur les nombres rationnels qui, comme nous en avons fait état à la section précédente, sont sources de difficultés non négligeables chez un nombre important d'élèves, soit : 1) le concept de nombre rationnel (Biddlecomb, 2002; Clarke, 2006; Mack, 1990; Malara, 2002; Moseley, 2005; Moss et Case, 1999; Roditi, 2007; etc.,); 2) les opérations sur les nombres rationnels (Behr, Post & Lesh, 1993; Blouin, 2002; Blouin et Lemoyne, 2002; Cramer, Post et DelMas, 2002; Emspon, 2003; Hackenberga et Tillemab, 2009; Lancup, 2005; Mack, 2001; Lemoyne et Bisaillon, 2006; Morissette, 2006; etc.); 3) la résolution de problèmes impliquant des nombres rationnels (Sensevy, 1998; Moseley, 2008; Bulgar, 2003). Il va de soi que cette catégorisation n'est pas étanche. Dans la majorité des situations, le concept de nombres rationnels est toujours sollicité et amené à se restructurer, à se développer, notamment, lors d'activités consacrées aux opérations sur les nombres rationnels, ainsi qu'à la résolution de problèmes impliquant des nombres rationnels.

Bien que plusieurs de ces recherches s'intéressent à la construction de sens, relative à des concepts et processus sur les nombres rationnels qui posent problème aux élèves, elles diffèrent néanmoins considérablement quant aux orientations privilégiées, particulièrement lorsqu'il s'agit d'intervenir auprès d'élèves en difficultés d'apprentissage. À titre d'exemple, dans leur étude effectuée auprès d'élèves en difficultés, Fuchs et ses collaborateurs (L. S. et D. Fuchs, Powell, Seethaler, Cirino et Fletcher, 2008, p. 79, traduction libre) proposent divers principes régissant une pratique féconde, notamment : « *Premièrement, l'enseignement devrait être explicite, car les élèves éprouvant des difficultés d'apprentissage bénéficient davantage d'explications directes que d'une méthode d'enseignement constructiviste ou basée sur la découverte. Deuxièmement, le défi d'apprentissage devrait être réduit afin de leur permettre de rattraper leur retard le plus vite possible.* » Ces principes ne sont pas partagés par toute la communauté des chercheurs en didactique des mathématiques et sont loin d'être ceux auxquels nous adhérons dans notre étude doctorale. Ainsi, bien que nous ayons pris connaissance d'un grand nombre de recherches comportant des dispositifs didactiques, nous ne rendrons pas compte des recherches dans lesquelles l'enseignant prend en charge la quasi-totalité de la responsabilité de l'apprentissage et « contourne/évite » la complexité des nombres rationnels et ce, pour des raisons qui nous semblent évidentes : ces choix confinent généralement les élèves dans leurs difficultés. Nous avons plutôt privilégié l'analyse d'études dont les orientations s'apparentent aux nôtres dans le but d'obtenir des assises pertinentes pour le choix, la conception et la gestion de nos situations d'enseignement/apprentissage.

Dans un premier temps, nous avons sélectionné quelques études qui relèvent d'une démarche plus globale d'enseignement des nombres rationnels, d'une séquence, voire de programmes. Nous tenterons, au cours de notre analyse, de dégager certaines convergences sur lesquelles nous prendrons appui dans l'élaboration et dans la gestion de situations d'apprentissage. Dans un deuxième temps, par l'entremise de recherches plus ciblées (concepts, opérations, résolution de problèmes), nous nous pencherons sur l'effet de dispositifs mis à l'épreuve auprès d'élèves en difficultés d'apprentissage. Nous terminerons ce chapitre en précisant les objectifs de notre recherche.

2.3.1. Dispositifs didactiques comportant des séquences, voire des programmes d'enseignement, sur les nombres rationnels

La présente partie rend compte de dispositifs didactiques visant la construction du concept de nombre rationnel, des opérations et de la résolution de problèmes impliquant des nombres rationnels. La majorité de ces dispositifs ont été conçus dans le cadre d'études longitudinales comportant des situations qui résultent d'un travail fondamental de transposition didactique (Chevallard, 1991). Il en est ainsi de la séquence d'enseignement des décimaux et des rationnels élaborée par Nadine et Guy Brousseau (1987), du programme conçu dans le cadre du projet américain « *The Rational Number Project* » auquel ont collaboré Behr, Cramer, Harel, Lesh et Post (1978 à 2009) et du modèle curriculaire conçu par Moss et Case (1999). Nous présenterons brièvement la structure de ces programmes, afin de saisir l'articulation privilégiée dans l'enseignement des nombres rationnels et de s'emparer, le cas échéant, des points de convergences, qui pourront nous servir d'assises dans l'élaboration et la gestion de nos situations d'enseignement/apprentissage. De plus, nous regarderons en détail certaines situations d'enseignement/apprentissage qui nous semblent riches et qui pourraient potentiellement constituer des niches précieuses dans notre recherche.

2.3.1.1. Dispositifs didactiques élaborés par Nadine et Guy Brousseau (1987)

Les dispositifs didactiques sur les nombres rationnels et les décimaux élaborés par Nadine et Guy Brousseau (1987) ont été des événements marquants, comme en témoignent les recherches qu'ils ont inspirées. Les situations que comportent ces dispositifs ont été internationalement jugées « exemplaires » par la communauté des chercheurs.

Six séquences d'enseignement prenant en compte les objectifs des programmes d'enseignement primaire et secondaire définis dans le curriculum français ont été construites et mises à l'épreuve pendant plusieurs années. Les situations qu'elles comportent résultent d'études originales et fondamentales, études orientées par la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998). Nous caractérisons fort brièvement les contenus des divers modules que comportent les séquences d'enseignement et présentons par la suite quelques situations originales et déterminantes qui ont retenu notre attention et celle de plusieurs chercheurs. Pour ce faire, nous utilisons conjointement le livre original sur l'enseignement des nombres rationnels et des décimaux (N. et G. Brousseau, 1987) et divers articles publiés à la suite de ce premier ouvrage (Brousseau, G., Brousseau, N. et Warfield, V., 2004, 2007 et 2008).

Dans les premiers modules d'enseignement (modules 1 à 3),

> « *les nombres rationnels sont introduits et étudiés en tant que mesures (modules 1 et 2 : contexte de l'épaisseur d'une feuille de papier; module 3 : mesure de poids, de capacité et de longueur) et rapports scalaires (opérations d'addition, de soustraction, de multiplication et de division par un nombre naturel). Après avoir été introduits dans le but de produire la mesure de certains objets, les nombres rationnels sont ensuite définis de façon plus classique, c'est-à-dire en tant que partition de l'unité ou d'unités intermédiaires. Dans les quatre modules suivants (Modules 4 à 7 inclusivement), la sériation de nombres rationnels, puis de nombres décimaux, est envisagée en tant que moyen rapide d'évaluer et de comparer des nombres rationnels, de comprendre et de mettre en œuvre les propriétés particulières des opérations sur les nombres décimaux et de la notation décimale.*
>
> *Les modules suivants (Modules 8 et 9) introduisent les nombres rationnels comme applications linéaires pour effectuer, initialement, des reproductions de dessins et de figures géométriques semblables. Ce travail permet, dans les modules 10 à 13, de fournir une définition complète et générale de la multiplication et de la division par un nombre rationnel et d'accéder ensuite (modules 14 et 15) à la composition d'applications (fractions de fractions).* » (Brousseau, G., Brousseau, N. et Warfield, V., 2004, p.3-4, traduction libre).

Comme nous en avons fait part antérieurement, nous ne saurions rendre compte de toutes les situations et activités qui composent l'ensemble de ces modules. En tenant compte du programme d'enseignement des mathématiques en 1re année de l'enseignement secondaire et du fait que les élèves concernés par la présente recherche présentent des difficultés d'apprentissage, difficultés témoignant de rapports fort problématiques aux nombres rationnels, nous nous sommes intéressée plus spécifiquement aux situations et activités que comportent les modules 1, 2, 8 et 9. Ces situations ont été utilisées par des professeurs en didactique des mathématiques de plusieurs universités dans le cadre de programmes de formation des maîtres (enseignement régulier et adaptation scolaire) et d'activités de formation continue. Comme en font foi les témoignages de plusieurs de ces professeurs, ces situations se sont avérées des tremplins importants pour une construction ou une reconstruction des rapports aux nombres rationnels non seulement des élèves, mais également des enseignants. Il importe également de mentionner qu'un de ces modules, soit le module 9, a été utilisé, dans une recherche effectuée auprès d'élèves de l'enseignement secondaire présentant des difficultés d'apprentissage (Blouin, 1993, 2002) et a été source de rencontres « didactiquement déterminantes ».

Module 1- « Épaisseur d'une feuille de papier»

La situation « Épaisseur d'une feuille de papier » permet d'introduire les nombres rationnels (modules 1 et 2), tout en traitant de plusieurs composantes problématiques pour les élèves. Elle comporte trois phases. Dans une première phase, soit la « Recherche d'un code », les élèves forment différentes équipes de 4 ou 5 élèves. Chacune d'entre elles reçoit 5 piles de papier contenant 200 feuilles de même épaisseur, mais les épaisseurs des feuilles de papier peuvent être différentes d'une pile à l'autre. Quelques feuilles circulent dans la classe; les élèves peuvent constater qu'il n'est pas toujours évident de percevoir les différences entre les épaisseurs de certaines feuilles. Chacune des équipes est ensuite invitée à trouver un code pour indiquer l'épaisseur d'une des feuilles de papier que comporte chacune des piles qui leur ont été attribuées. La consigne est la suivante *: « [...] Vous allez essayer d'inventer un autre moyen pour désigner et reconnaître ces différents types de papier, et pour les distinguer seulement d'après leur épaisseur. ... Dès que vous en aurez trouvé un, vous l'essaierez dans un jeu de communication.* » (N. et G. Brousseau, 1987, p. 2). Les élèves disposent de pieds à coulisse ou de doubles décimètres pour effectuer les mesures. Lors de cette première phase, la majorité des élèves essaient, en vain, de mesurer l'épaisseur d'une feuille de papier. Certains demandent alors à l'enseignant l'autorisation de prendre plusieurs feuilles pour trouver une mesure, ce qui leur est accordé. Ils partagent ensuite divers systèmes de désignation, par exemple: « 10 feuilles 1mm ; 60 feuilles 7 mm; 31 = 2 mm » (*Ibid.*, p.6).

Dans une seconde phase comportant un « Jeu de communication », les élèves de chacune des équipes sont invités à se séparer en deux groupes « d'émetteurs et de récepteurs ». Les émetteurs choisissent un des types de papier placés sur la table, papier que les récepteurs ne peuvent voir et adressent aux récepteurs un message qui devra permettre à ces derniers d'identifier le papier choisi. Les récepteurs disposent aussi des différents types de papier placés sur une autre table. Lorsque les récepteurs ont pu identifier le papier, ils deviennent alors émetteurs. Les équipes dont les récepteurs auront trouvé le papier choisi se voient attribuer des points. Pendant ce jeu, trois différentes stratégies sont généralement observées : 1) choix d'un nombre particulier et constant de feuilles dont on mesure l'épaisseur; 2) choix d'une mesure particulière et constante d'épaisseur à laquelle on associe un certain nombre de feuilles; 3) choix aléatoire d'une épaisseur et d'un certain nombre de feuilles.

Enfin, dans une troisième phase, les résultats des jeux sont communiqués et il y a confrontation des codes. Ainsi, chaque équipe choisit un représentant qui lit les messages, explique le code choisi et indique le résultat du jeu. Les messages sont comparés et discutés par les élèves. L'enseignant leur demande alors d'adopter un code commun. Afin de refléter le potentiel de cette situation, nous reproduisons certaines des mesures qui sont examinées par les élèves, lors de la cette phase : a) pour le papier A : Équipe 1 : *19 f; 3 mm*; Équipe 2 : *10 f; 2 mm*; Équipe 3 : *20 f; 4 mm*; b) pour le papier D : Équipe 1 : *19 f; 2 mm* et *12 f; 1 mm*; Équipe 3 : *100 f ; 9 mm* (N. et G. Brousseau, 1987, p. 11). À la suite de ce travail, l'enseignant effectue un rappel des tâches qu'ils ont effectuées, en formulant certaines questions : *« Quelle feuille désigne le couple (10;2)?; (10;1)?; (100; 8)?; (48;9)? » … « Pourriez-vous trouver d'autres écritures pour désigner ces différents types de papier? »* (*Ibid*., p.12). Les élèves peuvent consulter leur cahier de brouillon pour exprimer d'autres couples. Les élèves doivent effectuer un choix d'écritures et ces écritures sont retenues par l'enseignant qui leur demande de ranger les feuilles de « la plus mince à la plus épaisse »; les écritures suivantes sont retenues dans l'une des réalisations de cette épreuve: « *A - (48 ; 9); B- (10 ; 2); C- (100 ; 8); D- (100 ; 11); E- (10 ; 4)* » (*Ibid*., p. 14). Ce rangement donne lieu à divers procédés de comparaison : 1) des élèves choisissent un couple et transforment les autres couples pour qu'ils prennent en compte le même nombre de feuilles ; 2) des élèves transforment les couples pour qu'ils soient tous rapportés à la même épaisseur. Par la même occasion, la notion d'équivalence est traitée. Dans cette troisième phase, les élèves sont aussi invités à écrire l'épaisseur d'une feuille papier, ce qui permettra d'introduire le terme et la notation de *fraction*; il leur est dit qu' *« il faut inventer une écriture particulière. Cette écriture existe, on l'appelle fraction*. » (*Ibid*., p. 17). Les questions suivantes leur sont adressées : *« Désignez un tas de 20 feuilles qui a une épaisseur de 3 mm. ...Désignez l'épaisseur d'une feuille telle qu'il en faut 30 pour « faire » 5 millimètres »… Est-ce qu'il y a plusieurs écritures (plusieurs fractions pour désigner la même épaisseur? Trouvez-en.* » (*Ibid*., pp. 17-18). Les élèves trouvent alors des couples équivalents (ex. : 2/9 et 4/18).

Module 2 : - « Épaisseur d'un carton »

Au module 2, les élèves sont invités à composer divers cartons en ayant recours à des feuilles faisant partie des piles examinées au module précédent; pour apprécier l'épaisseur de ces cartons, ils doivent alors traiter les mesures des feuilles entrant dans la composition. Dans une première phase, l'enseignant formule les questions suivantes: *« 8/100, 9/45 ... sont-ils des nombres ? Ce que nous avons fabriqué pour mesurer les épaisseurs est-ce que c'est des nombres ?* (*Ibid*., p. 20) ». Certains élèves disent oui, faisant valoir 8, 100, 9 et 45 sont des nombres; d'autres disent non car, selon eux, 8/100 est écrit avec deux nombres et n'est pas un nombre. L'enseignant poursuit en disant : « *On pourrait appeler ces choses des nombres si on pouvait faire avec elles ce qu'on fait avec les nombres. Que peut-on faire avec des nombres*? » (*Ibid*., p. 20). Voici quelques exemples de réponses : « *On peut les ranger du plus petit au plus grand (propriété commune cela a été vu); On peut compter des objets. On ne le peut qu'avec des nombres naturels ... On peut faire avec eux des opérations, des additions, des multiplications... On peut mesurer »* (*Ibid*., p. 20). L'examen de ces réponses permet à l'enseignant de conclure en invitant les élèves à effectuer des opérations, ce qui permet le passage à la seconde phase.

Pour amorcer cette seconde phase, il est proposé aux élèves de coller deux feuilles, dont les épaisseurs respectives sont : 10/50 (10 mm -» 50 feuilles) et 40/100 (40 mm -» 100 feuilles) et de trouver l'épaisseur du carton ainsi formé. Plusieurs élèves proposent 50/150, mais d'autres suggèrent plutôt 50/100. L'enseignant demande ensuite à 5 élèves de puiser 10 feuilles de type B et à 10 autres élèves de prendre également 10 feuilles de type E. Il note 50 feuilles de type B et 100 feuilles de type E et fait préciser l'épaisseur de ces tas (10 mm et 40 mm); il peut demander aussi l'épaisseur totale du tas et le nombre total de feuilles, soit 50 mm pour 150 feuilles. Et, il poursuit en disant : « *Je prends une feuille de type B et une feuille de type E et je fais une nouvelle feuille… L'enseignant continue en décrivant cette correspondance à haute voix, jusqu'à ce que les élèves l'arrêtent et disent* : «*Ça ne va pas, il y aura trop de feuilles E, il faut le même nombre de feuilles dans les deux tas; pour faire 100 nouvelles feuilles, il faut 100 feuilles B et 100 feuilles E (ou 50 et 50, ou 150 et 150).* » (*Ibid*., p. 21). Cette conclusion permet alors à l'enseignant de proposer aux élèves, dans une troisième phase, de trouver la somme des fractions 8/100, 11/100 et 20/100. Enfin, l'enseignant leur demande s'ils pourraient trouver des sommes de n'importe quelle épaisseur, par exemple : 9/45 + 25/90. Tous les élèves se montrent capables de trouver la somme de deux ou plusieurs fractions si elles sont associées à des épaisseurs de papier et si leur réduction au même nombre de feuilles est « évidente ». Enfin, au cours des activités suivantes, les élèves sont invités à déterminer la différence de deux épaisseurs. Dans une dernière activité, il leur est demandé de trouver la différence entre les types de feuilles auxquelles sont associées les mesures suivantes 4/50 et 3/40. Bien qu'ils ne connaissent pas une façon systématique de trouver un dénominateur commun, les élèves ont recours à divers procédés efficaces et économiques, tels : *« calcul mental, produit des dénominateurs, recherche intuitive du plus petit multiple commun* » *(Ibid*., p. 32).

Les activités suivantes qui sont proposées aux élèves, situations exploitant le contexte de la situation initiale « l'épaisseur d'une feuille de papier », leur permettent de donner sens à la multiplication (activité 4) et à la division (activité 5) d'un nombre rationnel par un entier. À l'activité 4, les élèves sont invités à former des cartons en collant des feuilles de même type; les mesures des différents types de feuilles sont les suivantes : a) des feuilles marrons d'épaisseur 19/35 mm; b) des feuilles blanches d'épaisseur 4/47 mm; c) des feuilles roses d'épaisseur 3/19 mm; d) des feuilles de dessin d'épaisseur 18/95 mm. Les élèves sont réparties dans 5 équipes; chacune des équipes devra former des cartons avec des feuilles de même type et trouver ensuite l'épaisseur des cartons formés respectivement avec 3 feuilles, 5 feuilles, 20 feuilles, 100 feuilles et 120 feuilles. Dès qu'une équipe a terminé le travail, elle est invitée à examiner les résultats des autres équipes et si elle n'est pas d'accord avec certains résultats, elle doit inscrire ses propositions. Par exemple, une équipe a indiqué 3/19 x 3 = 9/57 (feuille marron) et une autre a répliqué en écrivant au-dessus de ce calcul, le calcul suivant, soit 3/19 x 3 = 9/19. Ces propositions sont discutées lors de l'examen des résultats. Par la suite, les élèves sont invités à comparer les épaisseurs des différents cartons à 1 mm.

La division d'un nombre rationnel par un entier est abordée à l'activité 6. La consigne suivante leur est donnée : « *J'ai collé 9 feuilles de même épaisseur. J'ai obtenu un carton qui a une épaisseur de 18/7 mm : que pourrions-nous chercher? (l'épaisseur d'une des feuilles); savez-vous trouver cette épaisseur? (quand vous l'aurez trouvée, vous l'inscrirez dans votre cahier de brouillon et vous chercherez le moyen de prouver qu'elle est correcte.* » (*Ibid*., p. 39). Individuellement, les élèves trouvent rapidement l'épaisseur d'une feuille, soit 2/7 et savent montrer que leur réponse est bonne. Un élève propose d'écrire : */7 x 9 =18/7 et d'autres élèves proposent plutôt «18/7 ÷ 9 =2/7»* (*Ibid*., p. 39).

Dans la tâche suivante qui leur est ensuite proposée, il leur est dit que le carton qu'on leur présente résulte du collage de 9 feuilles de même épaisseur, mais différentes des feuilles utilisées précédemment. Le carton obtenu a alors une épaisseur de 12/7 mm; les élèves doivent alors trouver l'épaisseur de chacune des 9 feuilles. Pour effectuer cette tâche, les élèves peuvent travailler en petits groupes. Les stratégies utilisées diffèrent suivant les groupes d'élèves. Quelques élèves écrivent :

$$\frac{12}{7} \xrightarrow{\div 9} \frac{1}{7} \textit{ et il reste quelque chose}$$

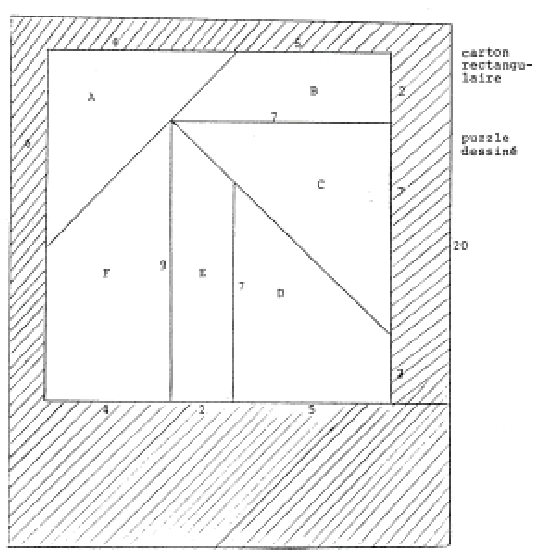
Deux groupes d'élèves trouvent une fraction équivalente à 12/7 en multipliant le numérateur et le dénominateur par 9, obtenant alors 108/63. Ils effectuent ensuite la division par 9 pour trouver alors 12/63. Un autre groupe procède d'une façon similaire, mais effectue la multiplication de chacun des termes de la fraction par 3, obtenant alors 36/21 et divisant ensuite par 9 le numérateur pour obtenir 4/21. Examinant ces deux résultats, les élèves concluent rapidement que les fractions sont égales.

À la suite des activités précédentes, les élèves effectuent diverses tâches : ordonner les fractions correspondant à diverses épaisseurs; trouver la somme de diverses épaisseurs; trouver l'épaisseur d'un carton formé de feuilles identiques dont l'épaisseur est donnée; trouver l'épaisseur d'une feuille, connaissant l'épaisseur d'un nombre de feuilles identiques formant un carton; trouver des fractions équivalentes à une fraction.

Module 8: Similitude - Agrandissement de puzzles

Dans ce module, les élèves sont invités à procéder à divers agrandissements d'un puzzle; 6 à 8 puzzles sont utilisés, selon le nombre d'enfants dans la classe. Connaissant les dimensions des 6 pièces qui composent chacun des puzzles, les élèves sont invités à dessiner des puzzles semblables, mais plus grands que les modèles présentés, en respectant la règle suivante : le segment mesurant 4 cm sur le modèle devra mesurer 7 cm sur le puzzle que vous allez fabriquer. Les 6 pièces qui composent le puzzle sont insérées dans une enveloppe. Chaque équipe reçoit une enveloppe contenant ces diverses pièces. Un élève est invité à faire une ou deux pièces qui composent le puzzle. Lorsque les élèves ont produit leurs pièces respectives, ils sont invités à réunir les pièces qu'ils ont construites et à comparer le puzzle obtenu avec une représentation du puzzle original.

Voici le puzzle original présentant les 6 pièces qui le composent (N. et G. Brousseau, 1987, p. 137).



Presque tous les élèves pensent qu'il s'agit d'additionner 3 cm à chaque dimension pour obtenir un module agrandi. Même si quelques élèves pensent que ce n'est pas le procédé à utiliser, ils ne parviennent pas à convaincre les autres élèves. Le puzzle ainsi formé diffère du produit agrandi reproduit au tableau; les pièces ne sont pas comparables. L'enseignant intervient alors pour les encourager à réviser leurs plans. Certains élèves essaient alors une stratégie différente; ils commencent d'abord par la reproduction du grand carré, additionnant alors 3 cm à chacun des segments qui composent chacun des côtés, obtenant alors deux côtés mesurant 17cm, mais n'obtenant pas les mêmes mesures pour les autres côtés (soit 20 cm et 25 cm), ce qui ne les satisfait pas. Voyant les effets de leurs procédés, ils se montrent fort sceptiques et concluent souvent que l'addition de 3 n'est pas une bonne idée. Une autre stratégie souvent essayée spontanément ou à la suite de quelques échecs, par quelques élèves, est de multiplier chacune des mesures par 2 et de soustraire ensuite 1 au produit obtenu [(4 x 2) – 1 = 7]. Ceci donne un puzzle fort ressemblant à l'original. Quelques pièces seulement ne s'adaptent pas bien. Il arrive toutefois qu'un groupe réussisse à reproduire le puzzle. À la suite de ces tentatives, lors d'une séance ultérieure, l'enseignant inscrit les diverses mesures au tableau. Un des élèves demande d'ajouter l'image de 8, cet élève prenant probablement acte du fait que ce nombre est absent de la liste des nombres de 2 à 9. Cette proposition amène souvent des élèves à suggérer que l'on ajoute 1, en disant que cela permettrait de trouver les autres longueurs. L'enseignant inscrit cette mesure dans le tableau et demande ensuite aux élèves formant des équipes de 2 ou 3 élèves de trouver les autres mesures. L'enseignant répond alors aux questions formulées par les élèves des différents groupes. Voici quelques procédés utilisés par les élèves (N. et G. Brousseau, 1987, p. 142) :

1)
$$\begin{array}{lll} 4 & \longrightarrow 7 & = \frac{70}{10} \\ \downarrow {:4} & & \downarrow {:4} \\ 1 & \longrightarrow & \frac{70}{40} = \frac{35}{20} \underset{\times 5}{\overset{\times 5}{=}} \frac{175}{100} = 1,75 \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{lll} 4 & \longrightarrow & 7 \\ \downarrow {:2} & & \downarrow {:2} \\ 2 & \longrightarrow & 3,5 \end{array}$$

ici, ils ne font pas la division. Ils utilisent un savoir culturel qu'ils ont acquis et expliquent ainsi leur réponse :

"la moitié de 6 c'est 3
la moitié de 1 c'est 1/2 ou 0,5
3 + 0,5 = 3,5"

Ils continuent :

$$\begin{array}{ccl} 2 & \longrightarrow & 3{,}5 = \frac{35}{10} \\ \downarrow{:2} & & \downarrow{:2} \\ 1 & \longrightarrow & \frac{35}{20} = \frac{175}{100} = 1{,}75 \end{array}$$

3) 2 —>3,5 qu'ils écrivent 3,50.

Pour trouver l'image de 1, ils écrivent la moitié de 3 → 1,50 et ajoutent la moitié de 50 centièmes soit 25 centièmes :

1,50 + 0,25 = 1,75;

Pour trouver les autres mesures, ils utilisent indiféremment l'un ou l'autre des deux procédés suivants :

- soit en multipliant successivement l'image de 1 par 5, 6, 7, 9.

1 —>1,75
5 —>1,75 x 5 = 8,75
6 —>1,75 x 6 = 10,50
7 —>1,75 x 7 = 12,25
9 —>1,75 x 9 = 15,75

Lorsque tous les groupes ont trouvé les mesures, leurs méthodes sont examinées et discutées. Puis, l'enseignant leur demande de faire les pièces et de reconstituer le puzzle, ce que les élèves réclament spontanément, cette reconstitution *« étant pour les enfants la seule preuve valable qui emporte leur conviction »* (N. et G. Brousseau, 1987, p. 143).

À l'activité suivante, les élèves sont invités à poursuivre en répondant à diverses questions, par exemple : *« Si 9 a pour image 11, quelle est l'image de 1? »* (*Ibid*., p. 145). L'image d'une fraction est également proposée :

4 → 11
5/7 → ?

Les élèves proposent spontanément d'ajouter 1 au tableau et un élève vient écrire cette image de 1, soit 11/4. Plusieurs élèves représentent alors la fraction 11/4 en nombre à virgule, en procédant ainsi : 11/4 = 275/100 = 2,75, mais ne savent alors multiplier 5/7 par ce nombre décimal. Ils essaient de multiplier 5/7 par 11/4; certains élèves trouvent alors 55 / 28 mais ne peuvent « *en prouver la véracité* » (*Ibid*., p. 147).

À l'activité suivante, un second puzzle composé de pièces dont les mesures sont exprimées par des nombres décimaux est présenté aux élèves qui doivent alors, comme à l'activité précédente produire un agrandissement de ce puzzle, sachant qu'à 1 cm du modèle, il faut faire correspondre 3,5 cm. Cette activité se révèle fort pertinente; plusieurs élèves parviennent à effectuer des calculs qu'ils n'avaient pas pu mener à terme auparavant. Ce module est complété par l'inscription d'une activité qui prend appui sur la précédente, mais dans laquelle il s'agit de trouver les mesures correspondant à 1/10, 1/100, 1/1000 de cm. Des exercices d'application complètent ce module : a) divisions de nombres décimaux par des multiples de 10; b) trouver par quel multiple de 10 on doit multiplier un premier nombre décimal pour produire divers nombres, plusieurs de ces nombres étant des nombres entiers (ex. : 1,675 x ? = 16,75; 0,129 x ? = 129).

Module 9 : Les applications linéaires

Le module 9 poursuit le travail amorcé au cours des activités que comporte le module 8. Il comporte une situation qui a fortement inspiré les chercheurs en didactique (Blouin, 1993, 2002; Blouin et Lemoyne, 2002; Douady et Perrin-Glorian, 1986), soit la situation Optimist (N. et G. Brousseau, 1987, pp. 159 à 197). Comme nous l'avons écrit antérieurement, une situation similaire a été présentée à des élèves du premier cycle de l'enseignement secondaire présentant des difficultés d'apprentissage en mathématiques. Nous présentons d'abord la situation conçue par Nadine et Guy Brousseau (1987).

Situation originale « Optimist » conçue par Nadine et Guy Brousseau

Dans cette situation, le dessin d'un « Optimist » est reproduit sur une feuille de papier; ce dessin montre un bateau, servant de modèle, et qui comporte les dimensions suivantes *: « hauteur du mât : 17,7 cm; hauteur du pavillon : 1,7 cm; côté du pavillon : 4 cm; longueur de la bôme : 14 cm; hauteur de la coque : 3,4 cm; longueur de l'étrave : 5,2 cm »* (N. et G. Brousseau, 1987, p. 160). Onze reproductions de ce bateau (modèle), 6 reproductions plus petites et 5 plus grandes, sont présentées aux élèves, dans la séquence d'enseignement.

Dans la première phase, une reproduction plus grande est affichée, à côté du modèle; cette reproduction montre un bateau dont les dimensions sont 1 fois ½ plus grandes que celles du bateau « modèle ». Pour introduire cette situation, l'enseignant formule les questions suivantes : *« Que pouvez-vous dire de cet Optimist? Que pouvez-vous dire sur ses dimensions? »* (*Ibid.*, p. 162). Les élèves forment ensuite des groupes de travail (2 ou 3 élèves par groupe) et doivent indiquer quelle mesure ils souhaitent obtenir pour être capables de trouver les mesures des autres éléments du bateau. À l'aide de la mesure qui leur a été dévoilée, on leur demande de proposer un calcul qui permettrait de trouver toutes les mesures de la reproduction. Ils peuvent vérifier avec leur double-décimètre si les mesures qu'ils ont obtenues sont les mêmes que celles de la reproduction et, si nécessaire, essayer de trouver un calcul plus approprié. Il importe de rappeler que la reproduction demeure affichée au tableau. Une recension des méthodes de calcul est ensuite effectuée. Il est demandé aux élèves qui ne sont pas parvenus à trouver les mesures du bateau d'exprimer les raisons qui, selon eux, les ont empêchés de les trouver. Puis, il y a un exposé des méthodes correctes et une correction « collective » des méthodes.

Dans les phases suivantes, d'autres reproductions du modèle sont proposées. Lors de la synthèse collective, une vérification des mesures trouvées par les différents groupes et des dessins correspondants aux calculs proposés permettent d'effectuer des constatations. Certains élèves déclarent alors, à propos du dessin d'un des groupes, que la reproduction « *paraît proportionnelle au modèle* » (*Ibid*., p. 184). Un travail important d'analyse des relations entre les mesures initiales du bateau et des relations entre les mesures du bateau reproduit est alors initié; ce dernier permet de dégager certaines propriétés « fondamentales » des applications linéaires.

Situation « adaptée » de la situation « Optimist »

La séquence construite par Nadine Brousseau et Guy Brousseau (1987) est une œuvre incontournable, dont l'élaboration et l'expérimentation se sont échelonnées sur une longue période (15 ans), auprès d'élèves de classes régulières, dès leur entrée dans l'apprentissage des nombres rationnels et comporte 65 leçons. Peut-on faire bénéficier les élèves de la 1re secondaire qui présentent des difficultés d'apprentissage, qui ont déjà visité certains objets de savoirs sur les nombres rationnels et qui ont déjà construit des habitus contre-productifs qui sont fortement ancrés? Doivent-ils reprendre cette séquence du début? Est-il possible de profiter de certaines situations? Peuvent-elles être exploitées de façon indépendante ou perdent-elles de l'intérêt? Ces questionnements nous ont conduit à la recherche effectuée par Blouin (2002), dans laquelle une adaptation de la situation «Optimist» est conçue.

La recherche effectuée par Blouin (Blouin, 1993, 2002; Blouin et Lemoyne, 2002) sur l'enseignement des nombres rationnels a été réalisée auprès de cinq élèves provenant d'une classe spéciale de l'enseignement secondaire, élèves présentant des difficultés en mathématiques. Sept situations d'application linéaire ont été conçues, en prenant appui sur celles proposées par Nadine et Guy Brousseau (1987), plus spécifiquement, sur la situation « Optimist » que nous venons de présenter. Dans les tâches conçues par Blouin, il s'agissait d'établir des relations entre les mesures des longueurs des côtés d'un dessin initial (modèle) et les mesures des longueurs des côtés du dessin final (image) résultant de l'application d'un opérateur aux mesures du premier dessin (modèle). Dans une situation-type, deux voiliers apparaissaient à l'écran de l'ordinateur; connaissant les mesures des six parties du premier voilier (modèle) et au moins une mesure du second voilier, les élèves étaient invités à trouver les mesures du second voilier. Pour réaliser ce deuxième voilier, il était dit aux élèves que l'ordinateur avait effectué un même calcul sur chacune des mesures du premier voilier. Il leur était demandé ensuite de trouver la transformation réalisée et d'entrer, au clavier de l'ordinateur, l'opération qui, selon eux, a été appliquée. Elle devait être composée d'un signe d'opération (+, -, x, ÷) et d'un nombre.

La première situation comporte deux reproductions (voilier-2, voilier-3) d'un premier voilier (voilier-1); les mesures du voilier-1 sont connues. Lors de la première étape qui concerne la reproduction du voilier-2, il est d'abord demandé aux élèves de se prononcer sur les conditions nécessaires pour déterminer les mesures de ce voilier, connaissant uniquement les mesures du voilier-1. Puis, une des mesures du second voilier est dévoilée, soit B = 21,9 cm et les élèves sont invités à trouver les autres mesures du voilier 2. Ils sont informés qu'ils pourront par la suite soumettre à l'ordinateur leurs procédés. Pour les reproductions des voiliers 2 et 3, les élèves connaissent, dès l'entrée dans ces tâches, une des mesures de ces voiliers.

Voilier 1	**Voilier 2 (x 1,5)**	**Voilier 3 (x1,2)**
A- 7 cm	—	—
B- 14,6 cm	21,9 cm	—
C- 5 cm	—	6 cm
D- 3,5 cm	—	—
E- 8,8 cm	—	—
F- 11,6 cm	—	—

Comme il était prévu initialement, quatre des cinq élèves trouvent la différence entre les mesures des longueurs B des voiliers 1 et 2 et proposent d'ajouter cette différence aux autres mesures du voilier 1. L'autre élève indique que le voilier 2 est 1 fois et ½ plus grand que le voilier 1; cet élève propose d'additionner la moitié de chacune des mesures du voilier 1 pour obtenir celles du voilier 2. Par ailleurs, permettant de constituer un milieu, au sens de Brousseau (1998), le recours à l'ordinateur pour évaluer les procédés que chacun des élèves propose leur permet de prendre acte des déformations que comportait le second voilier, s'ils proposaient d'ajouter un certain nombre de cm à chacune des mesures. Seul un élève ne semble pas bénéficier des rétroactions du milieu. Après quelques essais, un élève trouve l'opérateur « *1,5 »; les connaissances numériques de cet élève sur les nombres décimaux lui sont fort bénéfiques. Un autre élève remarque aussi qu'il faut ajouter, à chacune des mesures du voilier 1, la moitié de cette mesure pour produire les mesures du voilier 2 et propose diverses transformations, soit : 1 + ½, + 1 ½ et ÷ 1½, sans parvenir à trouver la transformation appropriée. Il en est également ainsi d'un élève qui propose toujours de « *faire une fois et ajouter la moitié* » (Blouin, 2002, p. 232).

L'identification de l'opérateur « * 1,2 » à appliquer à chacune des mesures du voilier 1 pour produire les mesures du voilier 3, n'est pas évidente et comme en témoigne Blouin (2002, p. 232), elle « constitue un moment propice pour réaliser une première tentative de coordination des sens de la fraction ». Trouver la relation multiplicative entre les mesures 5 cm et 6 cm, bien qu'il s'agisse de mesures représentées par des nombres entiers, ne va pas de soi; il faut savoir exprimer la différence entre ces mesures par une fraction et exprimer la relation entre les mesures par un nombre décimal. À l'exception d'un élève (celui n'ayant pas profité des rétroactions du milieu), tous les élèves trouvent l'opérateur «*1,2 » qui doit être appliqué à chacune des mesures du voilier 1 pour produire le voilier 3. Il importe par ailleurs de préciser que ce résultat est grandement facilité par les interactions didactiques entre les élèves et la chercheure.

Dans les deuxième et troisième situations, il s'agit toujours de reproductions d'un voilier initial. Diverses contraintes modulent toutefois l'expression des transformations à opérer sur les mesures. Dans la deuxième situation, les transformations sont exprimées par des nombres entiers; les élèves sont par ailleurs invités à proposer diverses représentations d'un même opérateur, par exemple : « ÷ 2 et * ½ » ou « *5 et *35/7 » (Blouin, 2002, p. 241). Dans la troisième situation, les relations entre les mesures du voilier 1 et les mesures des autres voiliers peuvent être exprimées par des fractions. Les objectifs visés par les tâches que comporte cette situation sont les suivants :

> « *exprimer à l'aide de fractions les relations entre les mesures des voiliers; interpréter un opérateur fractionnaire comme une composition d'opérateurs multiplicatifs entiers (ex. : «* 2/5»→ «*2 ÷ 5»); interpréter des fractions comme une composition additive d'une même fraction ou une multiplication d'une fraction simple par un nombre entier (ex. : 2/5 → 2 * 1/5) »* (Blouin, 2002, p. 247).

Dans ces différentes situations, le traitement privé des erreurs dans l'exécution des tâches et la prise en charge des calculs par l'ordinateur nous paraissent fort précieux pour favoriser la dévolution de la situation auprès d'élèves en difficultés d'apprentissage; la prise en compte nécessaire des relations entre les nombres les oblige indiscutablement, à s'attarder sur le sens des opérations. Les résultats de cette recherche montrent l'importance qu'il y a à aborder l'enseignement d'un savoir spécifique en mathématiques par des situations suffisamment complexes, même pour des élèves en difficultés d'apprentissage. En effet, lors de l'analyse de leurs conduites, à des tâches usuelles sur les fractions (avant et après l'enseignement), Blouin a mis en évidence des progrès importants, voire essentiels sur les différents sens et sur la structure multiplicative de la fraction. Elle a également détecté et exposé comment les contraintes notionnelles des situations, ainsi que les interventions dans le déroulement des activités, constituaient des leviers importants dans la construction de connaissances chez ces élèves.

Cette étude fait bien ressortir l'influence de l'histoire scolaire des élèves et de leurs connaissances initiales dans la réalisation des activités qui leur ont été proposées. Elle révèle également le potentiel de recourir à des situations « riches de sens »; les élèves ont pu, non seulement appréhender progressivement les enjeux multiplicatifs des situations, mais également effectuer des progrès substantiels dans la construction des structures multiplicatives et des sens de la fraction, entre autres, des sens partie-tout et opérateur. L'analyse des conduites des élèves permet aussi d'apprécier des ruptures du contrat didactique, ruptures importantes (Blouin et Lemoyne, 2002). Comme les chercheurs le mentionnent, « *le caractère inhabituel de nos situations et les difficultés rencontrées par les élèves pour agir efficacement dans les premières situations des activités de rééducation provoquèrent au terme de la seconde situation une discussion entre les élèves et l'enseignant-chercheur autour du choix des* situations *d'enseignement* » (*Ibid*., p.12). À cet effet, il nous semble pertinent de reproduire certaines interactions entre l'enseignante (ES), la chercheure (Exp) et les élèves, interactions qui montrent comment ces ruptures de contrat provoquent chez certains élèves, qui avaient des rapports plus problématiques aux nombres rationnels (élèves E1 et E3), au début de la séquence d'enseignement, des appréciations critiques des situations proposées, appréciations qui ne sont pas partagées par les autres élèves (élèves E2, E4 et E5).

« 1- El: Puis-je te poser une question?
2- Exp: Oui.
3- El: Quand va-t-on arrêter les voiliers, quand nous allons-nous faire des fractions?
4- Exp: Nous avons là une question très intéressante. L'Exp répète la question et spécifie que ES a aussi formulé une question semblable lors d'une rencontre individuelle avec l'Exp: ES spécifiait alors que les tâches consistaient davantage à faire des multiplications. Fait-on vraiment des fractions?
5- ES: Oui, parce que c'est des nombres à virgule, des nombres à virgule c'est peut-être des fractions. Une demie ça peut être 0,5.
6- El: Moi, j'ai demandé quand nous allons en faire des vraies! ... Ce que je veux dire c'est quand allons-nous faire des vraies fractions comme un tiers moins ....
7- ES à El: Ce qu'on fait, cela en est pareil!
8- El à ES: Non.
9- Exp: Comment convaincre El qu'en ce moment, même si nous ne faisons pas des soustractions ou des additions de fractions, nous faisons tout de même des vraies fractions.
10- E4 à El: Une demie, peux-tu mettre cela en virgule?
11- ES: 0,5.
12- El: Moi, je sais que c'est pareil, mais vous ne comprenez pas. Quand on va faire des vraies fractions comme dans la classe.
13- ES à EI:C'est pareil!!
14- El à ES:NON!!

15- ES: Ici, on met des virgules à la place d'une barre!
16- El: Eux (dans la classe), ils font comme des tartes ...
17- ES: Bien ici, un tiers de gâteau c'est la même affaire qu'en virgule.
18- E2: C'est plate les tartes!
19- Exp: Qui pense qu'ici, nous faisons des fractions?
20- El, E2, E4 et ES: Oui.
21- E3: Moi, je suis pour El.
22- El: Oui, je sais qu'on en fait mais on n'avance pas.
23- Exp: Tu n'as pas l'impression d'avancer?
24- ES à E1: Nous n'avons jamais d'examen, est-ce cela que tu veux dire?
25- E3 à ES: Toi là, tu parles trop!
26- ES: C'est vrai que je parle trop.
27- Exp: Vous voulez des examens?
28- E3: NON!
29- El: Non, mais juste pour nous demander où nous sommes rendus, des examens qui comptent.
30- E3 à E1: Bien, là, je ne suis plus d'accord avec toi avec les examens.
31- E4 et ES: Oui, des examens.
32- El explique à l'Exp qu'il aimerait faire des fractions de la même manière que ce que l'Exp demandait lors de l'examen écrit (N.B.: certaines des épreuves pré-test sont conformes aux tâches scolaires). Exp explique la position de El aux autres élèves.
33- E4: NON, je ne veux pas, je veux comme ce que nous faisons, avec des tableaux de nombres! » (Blouin et Lemoyne, pp. 19-20)

Les échanges précédents montrent, de toute évidence, que l'approche didactique privilégiée dans cette recherche a provoqué des ruptures importantes du contrat didactique usuel. De telles ruptures ont par ailleurs été assumées par plusieurs élèves. Et, fait important, même l'élève E1 admet que les situations effectuées lui permettent de « faire des fractions ». Les objections de cet élève nous semblent ainsi traduire ses préoccupations concernant la réalisation d'activités généralement associées à l'enseignement des nombres rationnels. Comme les autres élèves, cet élève a pu apprécier les apprentissages qu'il a réalisés, ses résultats à l'épreuve post-test, qui comportait plusieurs tâches faisant généralement partie d'examens usuels, témoignant de ses apprentissages.

Intérêts des situations que comporte le programme d'enseignement élaboré par Nadine et Guy Brousseau (1987)

L'ingéniosité et la nouveauté des situations défis que Nadine et Guy Brousseau ont conçues sont remarquables. Nous retenons de cette étude, le développement de situations dans un cadre global (fractions, décimaux, pourcentages), riche et rigoureux, menant à une séquence favorisant un apprentissage signifiant des différentes représentations des nombres, des sens de la fraction et des opérations sur les nombres rationnels. Les tâches présentées ont permis d'exposer plus particulièrement le potentiel de la structure de la théorie des situations didactiques : situations d'action, de formulation, de validation et d'institutionnalisation. En effet, nous avons pu apprécier la qualité et la diversité des productions des élèves qui s'investissent dans une situation qui leur est à la fois accessible, mais dont l'atteinte demande des réajustements non négligeables, réajustements qui leur permettent de faire émerger l'objet d'apprentissage ciblé et de « s'en emparer ». Comme le montre l'étude réalisée par Blouin et Lemoyne (2002), les élèves en difficultés d'apprentissage montrent, de toute évidence, qu'ils peuvent aussi tirer profit de situations définies par ces chercheurs, en prenant appui sur les rétroactions du milieu pour réviser leurs démarches, de telles révisions engageant un travail important sur les connaissances et les procédés associés aux nombres rationnels. Il nous semble également important de souligner que ces situations ont également contribué à une transformation du contrat didactique, transformation se répercutant sur les habitus de plusieurs de ces élèves.

À l'image de cette étude, nous tenterons dans notre recherche, lors du choix et de la co-construction de situations, d'accroître la responsabilisation des élèves dans leur apprentissage, sachant très bien que la dévolution et la validation par le milieu ne sont pas toujours « tâches faciles ». Ces facteurs nous semblent avoir un impact considérable sur les pratiques des élèves qui s'apparentent davantage à celles d'apprentis mathématiciens. Ce travail est par ailleurs possible grâce à l'exploitation des nombres rationnels en tant qu'objets/outils, exploitation très rarement sollicitée dans les études. Contrairement à cette recherche, trop peu de situations proposent un milieu permettant de faire ressortir la pertinence et la nécessité de recourir à de nouveaux nombres, notamment, les rationnels. De plus, même si nous ne l'avons pas abordé spécifiquement, nous croyons fortement au potentiel que peut revêtir le travail sur les définitions, particulièrement auprès d'élèves en difficultés au secondaire, particulièrement pour sa capacité à amalgamer diverses connaissances, qui leur semblent disparates, sur les nombres rationnels.

2.3.1.3. Dispositifs didactiques élaborés par Moss et Case (1999)

L'étude effectuée par Moss[18] et Case (Moss et Case, 1999; Moss, 1997), auprès d'élèves ontariens de la quatrième année primaire, vise à expérimenter un cheminement curriculaire qu'ils ont conçu pour développer une meilleure compréhension du système des nombres rationnels en tant qu'entité, tout en promouvant les interactions entre les diverses composantes. Afin de réaliser ce programme, Moss et Case se sont appuyés sur plusieurs études faisant état de pratiques didactiques pouvant générer des difficultés chez les élèves : a) enseignement centré sur les aspects syntaxiques et non sémantiques des nombres rationnels (Hiebert et Wearne, 1986; Resnick, 1982); b) Enseignement magistrocentré[19] : enseignement qui ne prend pas en considération les tentatives spontanées des élèves visant à conférer un sens aux nombres rationnels, ce qui inhibe leurs initiatives et les encourage plutôt à se soumettre à l'application des règles qui leur sont exposées (Confrey, 1994; Kieren, 1992; Mack, 1993); c) utilisation de représentations qui accroît la confusion entre les nombres rationnels et les nombres entiers (Kerslake, 1986; Kieren, 1995; Mack, 1990; Nunes et Bryant, 1996; Ohlsson, 1988); d) exposition à des symboles qui sont traités comme «écriture transparente» (Hiebert, 1992).

Moss et Case (1999) ont élaboré une séquence de 25 périodes qui est amorcée, de façon peu conventionnelle, par l'enseignement des pourcentages (périodes 1 à 7). Ce travail sert d'assises pour intégrer, par la suite, les nombres décimaux (période 8 à 19). Les fractions sont introduites, dès l'entrée dans la séquence, comme moyen alternatif de représenter des pourcentages et des nombres décimaux, mais trois périodes seulement leur sont spécifiquement réservées (périodes 19 à 21). Enfin, la conjugaison des différentes représentations des nombres rationnels fera l'objet d'activités structurantes aux périodes 22 à 25.

[18] Il s'agit de l'étude effectuée dans le cadre de la recherche doctorale effectuée par Joan Moss (1997), sous la direction du chercheur Robbie Case de l'Université de Toronto.
[19] Terme faisant référence à la typologie des formules pédagogiques, le degré de contrôle de l'apprentissage (Chamberland, Lavois et Marquis, 1999)

Tel que mentionné précédemment, le programme débute par l'enseignement des pourcentages et ce, dans un contexte familier aux élèves, c'est-à-dire un contexte qui leur permet d'avoir recours à diverses évocations. Dans les quatre premières périodes, diverses tâches d'estimations sont proposées aux élèves. Ils sont d'abord invités à échanger leurs expériences concernant les situations dans lesquelles ils ont déjà rencontré des pourcentages. Une attention particulière est portée aux «pourcentages repères» 25, 50, 75 et 100, ainsi qu'à leurs équivalences fractionnaires. Ces points de référence permettent, par la suite, aux élèves de développer des stratégies d'estimation. Les élèves doivent ainsi se prononcer sur les hauteurs relatives du niveau d'eau figurant dans différents contenants identiques (ex. fioles et béchers), en leur assignant une valeur approximative entre 1 et 100. Ce travail, incitant les élèves à envisager les hauteurs en termes de plénitudes et de pourcentages, leur est présenté de la façon suivante : «*Selon vous, environ quel pourcentage du bécher est rempli? Où pensez-vous que le liquide se situera si ce contenant est rempli à 25%?* » (Moss et Case, p. 130, traduction libre). Ces activités permettent, entre autres, aux élèves de conjuguer leurs connaissances des nombres entiers et d'effectuer des modélisations qualitatives (par exemple : à moitié plein, presque vide) et quantitatives (exploitation de pourcentages) des niveaux d'eau, d'associer leurs stratégies intuitives à la terminologie des pourcentages. Les opérations visuo-motrices sollicitées par ces activités amènent les élèves à recourir spontanément à deux stratégies : 1) réduction du volume correspondant à la moitié du volume du bécher : par exemple, pour estimer un niveau d'eau correspondant à 25% du niveau du bécher rempli, l'élève repère le niveau correspondant à 50%, pour ensuite estimer que la quantité représentée correspond à la moitié de 50 %, soit 25%; 2) composition de mesures : par exemple, afin de positionner le contenu correspondant à 75%, l'élève repère 50% et y ajoute la moitié de ce contenu, 25%.

Dans les périodes 5 à 7, les élèves sont amenés à effectuer diverses tâches d'estimation, de calcul mental impliquant des pourcentages, des mesures d'objets et des comparaisons de diverses mesures de longueur. Les stratégies développées au cours des premières périodes sont transposées dans ces activités. Par exemple, l'une d'entre elles consistait à trouver la quantité de liquide requise pour remplir à 75% une bouteille de 900 ml. Certains élèves ont d'abord trouvé la quantité correspondant à 50% de 900 ml (450ml), à laquelle ils ont ajouté 50% de 450 ml (225ml). Prenant appui sur cette démarche, des problèmes pouvant être résolus efficacement en calculant 10% ou des multiples de ce pourcentage et exploitant divers contextes (ex. : menus, pourboires, taxes) leur ont été ensuite présentés. Fait intéressant, les élèves ont poursuivi leurs démarches initiales, par exemple, déterminé 12,5% en calculant la moitié de 25%; ils ont alors estimé que 10% était un nombre légèrement inférieur à 12,5%. Et, poursuivant cette trajectoire, plusieurs élèves ont eu recours à leurs connaissances sur la monnaie. «*Par exemple, un élève a dit que parce qu'un dollar a 100 cents, alors 10% d'un dollar est 10¢ et 10% de 200 est 20. Lorsque de tels problèmes ont été examinés, la stratégie conventionnelle du 10% (i.e., diviser par 10) s'est établie graduellement, comme une alternative à la stratégie qui consistait à déterminer la moitié, pour certains types de questions.* » (Moss et Case, 1999, p. 31, traduction libre). Différentes activités de comparaison de grandeur (bandes de papiers, tailles de l'enseignant et des élèves) sont proposées aux élèves, par exemple, « *La taille de Pierre est quel pourcentage de celle de Joan? »* (Moss, 1997, p.31, traduction libre). Le travail sur le pourcentage se conclut par une tâche dans laquelle les élèves doivent planifier et construire une leçon sur le pourcentage pour des élèves d'un niveau scolaire inférieur.

Suite à la résolution de ces problèmes impliquant des pourcentages, l'enseignant-chercheur introduit les nombres décimaux à la 8^e période. En s'appuyant sur les pourcentages, dans un contexte de mesures de distances, les élèves sont invités à se déplacer sur une bande numérique; la distance entre chacun des nombres inscrits sur ce trajet est de 1 m. Il leur est alors demandé de parcourir des distances correspondant à divers pourcentages des distances entre des nombres adjacents inscrits sur la bande numérique. Pour amorcer la situation, un premier déplacement est alors commenté: « *Quand vous avez passé la marque du 2 mètres et marché 75% de la distance qui la sépare de celle du 3 mètres, le point que vous avez atteint peut être écrit 2,75 m.* » (Moss et Case, 1999, p. 131, traduction libre). Les élèves se montrent immédiatement capables d'interpréter cette situation et peuvent appliquer leurs connaissances sur les pourcentages aux nombres décimaux. Les différents contextes amènent ensuite les élèves à transposer une telle idée aux nombres décimaux comportant plusieurs décimales. Ils ont, par exemple, spontanément inventé le nombre 5.25.25 comme nombre situé à 25% entre 5,25 et 5,26; bien que le nombre ainsi proposé ne respecte pas l'écriture d'un nombre décimal, il importe de reconnaître que cette réponse montre une généralisation des procédés utilisés précédemment, généralisation reconnue par l'enseignant-chercheur.

Afin de poursuivre le travail sur les nombres décimaux, travail portant sur l'ordre de grandeur et la comparaison de ces nombres, l'enseignant-chercheur distribue à chacun des élèves des différentes équipes un chronomètre qui affiche des secondes et des centièmes de secondes. Les élèves sont invités à partir le chronomètre et à l'arrêter le plus rapidement possible; cette opération doit être répétée 3 fois et les élèves doivent inscrire le temps écoulé pour chacune de ces opérations. Il leur est demandé d'indiquer le temps le plus court et de comparer leurs résultats à ceux obtenus par les élèves de leur groupe respectif. Ces exercices sont prolongés pour exprimer les intervalles de temps en pourcentages, en décimaux et en fractions d'une seconde.

Prenant appui sur les représentations des nombres rationnels rencontrées dans les activités précédentes, les élèves sont invités à participer à un jeu dans lequel ils doivent se déplacer le long d'une route composée de 20 segments de droite, ces segments sont disposés de manière à représenter un trajet qui rappelle celui que l'on peut retrouver lorsqu'on marche dans une ville, en empruntant différents trottoirs. Chacun des segments mesure 10 cm et est gradué aux millimètres. Une couleur spécifique de graduation permet également d'identifier aisément les centimètres, les demi-centimètres et les millimètres. Pour exécuter les déplacements, chacun des élèves pige deux cartes; sur une des cartes sont inscrits deux nombres et sur l'autre, l'opération requise, soit une addition ou une soustraction. Par exemple, si un élève pige les nombres 1 et 2, il peut composer, en ajoutant le chiffre 0 et la virgule, les nombres suivants : 12,0; 120; 1,20; 120. L'idée est de produire divers nombres décimaux pouvant être soustraits ou additionnés afin de parcourir des distances plus ou moins longues selon le trajet envisagé. Puisque les élèves n'avaient pas eu l'occasion d'effectuer des opérations impliquant des nombres décimaux, ce jeu favorise le développement de diverses stratégies additives. Les procédés utilisés par plusieurs élèves montrent qu'ils ont su profiter de cette activité. Une approche exploitée par une partie des élèves consistait à opérer sur les parties décimales, puis sur les parties entières des nombres correspondant à la position de départ et au nombre formé à partir des nombres apparaissant sur la carte puisée. Ainsi, une élève qui avait parcouru 6,5 cm du segment et qui voulait avancer de 7,3 cm, a procédé de la façon suivante : elle a additionné les nombres 5 et 3 et s'est placée à la position 6,8 sur le segment; elle a avancé ensuite de 7 cm, pour atteindre alors la position 13,8. D'autres élèves ont procédé en ajoutant d'abord la partie entière du nombre formé au nombre de départ, puis en ajoutant ensuite la partie décimale du nombre formé au nombre obtenu.

Les auteurs portent à notre attention le fait que la terminologie des fractions a été utilisée tout au long du programme d'enseignement, mais toujours en relation avec les pourcentages (ex. : une demie : 50%...prochain partage en deux : 25% … un quart). Les expérimentateurs ont aussi présenté quelques représentations : 12½ % s'exprime par « un huitième » et s'écrit 1/8.

Enfin, au cours des périodes 22 à 25, les élèves doivent résoudre différents problèmes impliquant des fractions, des nombres décimaux et des pourcentages, par exemple : a) Est-ce vrai ou faux que 0,375 est égal à 3/8; b) Utilisez le chronomètre, arrêtez-le « aussi près que possible » du nombre correspondant à la somme des fractions ½ et ¾ et trouvez ensuite le nombre décimal correspondant à cette somme; c) Trouvez toutes les façons possibles de représenter une fraction (ex. ¼) en utilisant divers registres numériques (fractions, décimaux et pourcentages), graphiques, etc.; d) Proposez des calculs à faire, calculs qui constituent des défis pour leurs camarades et leur enseignant; voici une proposition émanant d'un élève du groupe expérimental, proposition qui montre bien les relations que cet élève a pu développer entre diverses représentations des nombres rationnels : Quel groupement des nombres est le plus grand, [1/8+1/16+1/2+.0625] ou [1/4+25%+.125+1/8] ?

La comparaison des résultats aux pré-test et post-test des élèves ayant reçu un tel enseignement (groupe expérimental) et de ceux ayant bénéficié d'un enseignement régulier (groupe contrôle) montre que le programme permet aux élèves du groupe expérimental d'accéder à une meilleure compréhension des nombres rationnels que ne le font les élèves du groupe contrôle. Les élèves du groupe contrôle ont de plus tendance à recourir à des stratégies additives, plutôt qu'à des stratégies basées sur les rapports entre les nombres rationnels; ils font aussi davantage référence au concept de proportionnalité dans la justification de leurs réponses. Plus spécifiquement, dans les tâches de comparaison et de sériation de nombres rationnels, les élèves du groupe expérimental peuvent, par exemple, nommer une fraction se situant entre 0,3 et 0,4, alors que ceux du groupe contrôle en sont incapables. La comparaison de fractions, telles que 2/3 et ¾, ne pose pas de problème aux élèves du groupe expérimental qui arrivent à représenter et à expliciter un résultat approprié, ce qui n'est pas le cas chez les élèves du groupe contrôle qui, dans la comparaison des fractions précédentes, évoquent fréquemment qu'elles sont de la même grandeur, car il leur manque à chacune une partie. Dans les activités impliquant des représentations visuelles qualifiées de «*distracteurs perceptuels* » par les chercheurs (Moss, 1997, p.39, traduction libre), par exemple, dans une activité d'identification de ¾ d'une tarte partagée en 8 parties égales, les élèves du groupe expérimental déploient divers raisonnements montrant leur flexibilité cognitive: a) ils se préoccupent uniquement des séparations qui permettent de représenter les quarts; b) ils considèrent que ¼ correspond à 2 parties; c) ils effectuent une composition additive, coloriant la moitié du cercle (½) et 2 autres des 8 parties, soit ¼. Les quelques extraits suivants montrent la richesse et la pertinence des connaissances mises en œuvre par les élèves du groupe expérimental et inversement, les représentations primitives, voire inappropriées, des nombres rationnels et des opérations sur ces nombres, dont témoignent les conduites des élèves du groupe contrôle.

Calculs peu usuels (Moss et Case, 1999, p. 135, traduction libre)

Item : Un étudiant m'a dit que le ¾ de 10 est 7. Est-ce vrai?
Élève du groupe expérimental: Non, parce qu'une demie de 10, c'est 5. Une demie de 5, c'est 2 ½. Alors si tu additionnes 2 ½ à 5, ça sera 7 ½. Alors 7 ½ est ¾ de 10, pas 7.
Élève du groupe contrôle : Oui, 7 c'est 3/4 de 10 parce que 3 plus 4 égale 7.

Item : Quel est 65% de 160?
Élève du groupe expérimental: cinquante pourcent [de 160] c'est 80. Je crois que 10% serait 16. Ensuite, je divise 16 par 2, qui donne 8 [5%] puis 16 plus 8 hum ... 24. Puis je fais 80 plus 24, qui serait 104.
Élève du groupe contrôle : cent soixante divisé par 65 égale 2 reste 30.... Est-ce que la réponse est 2?

Activité de représentations (Moss et Case, p. 139, traduction libre)

Quel est 1/8 en notation décimale ?

Élève du groupe expérimental : Zéro virgule un deux cinq
Expérimentateur : Comment avez-vous obtenu cela ?
Élève du groupe expérimental : Bien, 1/4 est 25%,… et 1/8 est moitié de cela, donc c'est 12 ½ %. Alors 12 ½ % est la décimale un, deux et une demie ou décimal un deux décimal cinq. Non, je pense que c'est juste un deux cinq décimaux. Donc 12 ½% correspond à 0,12 et une demie ou bien 0,12,5. Non, je crois que c'est seulement 0,125.

Élève du groupe contrôle : Je pense que c'est 0,8
Expérimentateur : Comment avez-vous obtenu cela ?
Élève du groupe contrôle: Parce que 1/8 est probablement identique à la 0,8.

Calculs standards (Moss et Case, p. 140, traduction libre)

Que donne 3 1/4 moins 2 1/2?
Élève du groupe expérimental: Je dois faire la retenue mais je ne sais pas comment… mais puisque c'est un entier, ne devrions-nous pas utiliser un quart et un entier pour ensuite soustraire une demie? Ainsi, la réponse serait ¾

Élève du groupe contrôle: D'abord, je dois trouver le dénominateur commun, qui est 4 ; ainsi ça deviendrait 3 1/4 moins 2 2/4, qui égale 1 0/4. Alors 1 3/4 moins 1 0/4 ; 3/4.

Ces extraits illustrent bien l'influence du programme développé par Moss et Case (1999). Comme en font état les chercheurs, les élèves du groupe expérimental ont montré une moins grande dépendance et confiance à l'égard des stratégies développées avec les nombres entiers, que ne l'ont fait les élèves du groupe contrôle. Ils ont su générer, à partir des connaissances qu'ils avaient pu construire sur les nombres rationnels, des procédures originales n'ayant pas fait l'objet d'un enseignement. Dans les exemples précédents, le traitement de la soustraction « 3 ¼ - 2 ½ » est particulièrement éloquent; ainsi, comme le montre l'extrait précédent de la conduite d'un élève du groupe expérimental, cet élève perçoit qu'il ne peut enlever ½ à ¼; il recourt alors à une représentation du nombre 3 ¼ qui puisse permettre d'effectuer la soustraction, 3 ¼ étant alors représenté par 2 + 1 ¼, ce qui permet aisément d'enlever 2 ½ à ce nombre. En revanche, si l'élève du groupe contrôle sait représenter les nombres 3 ¼ et 2 ½, en mettant en œuvre un procédé « enseigné », soit exprimer les fractions en recourant à un dénominateur commun, la soustraction à effectuer est alors « 3 ¼ - 2 2/4 »; puisque 2/4 est supérieur à ¼, il inscrit d'abord 1 0/4, 3 – 2 → 1. Il est difficile d'interpréter ce que cet élève fait par la suite et qui lui permet de trouver la réponse attendue, les chercheurs ne commentant pas cette démarche.

Intérêts de la séquence didactique conçue et expérimentée par Moss et Case (1999)

La séquence didactique conçue et expérimentée par Moss et Case (1999) se démarque des séquences usuelles d'enseignement par des situations comportant des pourcentages, des nombres décimaux et des fractions, par la priorité accordée au développement d'un raisonnement qualitatif ancré sur les connaissances des élèves sur les nombres entiers et enfin, par l'audace des tâches soumises aux élèves. Dans les extraits précédents, nous avons pu constater la pertinence d'exploiter un riche réseau formé d'icônes (ex. bande numérique de téléchargement), de symboles (ex. %, a/b) et d'opérations visuo-motrices auxquels les élèves pouvaient accéder, afin de construire diverses procédures arithmétiques, favorisant ainsi une intégration harmonieuse de procédures qualitatives et de procédures arithmétiques plus conventionnelles. Nous pouvons également percevoir, à travers ce dispositif, comment la modification du contrat a permis aux élèves de s'octroyer une liberté durant la réalisation des tâches présentées au cours de l'enseignement, une telle liberté leur permettant d'établir des relations « importantes » entre diverses représentations de nombres rationnels, comme le montrent plusieurs conduites dont nous avons fait état précédemment.

Nous ne pouvons cependant passer sous silence le choix des enseignants de ne pas soumettre les élèves en difficultés à ce programme d'enseignement, sous prétexte qu'il s'avérerait plus bénéfique pour eux de revoir des concepts plus élémentaires alors qu'il nous semble que la modification du contrat leur aurait été très profitable. Ce choix témoigne bien de pratiques privilégiées auprès de ces élèves, pratiques relevant, bien sûr, de conceptions répandues concernant l'enseignement aux élèves en difficultés. Il aurait été fort intéressant de voir comment ce programme aurait pu agir sur les habitus des élèves en difficultés d'apprentissage. Il nous apparaît alors important dans la recherche que nous envisageons, d'offrir aux élèves en difficultés des situations qui leur permettent d'accéder à la richesse des représentations des nombres rationnels et ainsi, de construire divers procédés de calcul sur les nombres rationnels qui tiennent compte de ces représentations et des relations entre ces nombres et qui, fait important, concourent à une avancée du temps didactique et à une diminution du rapport ancien/nouveau (Mercier, 1995a, 1998).

2.3.1.3. Dispositifs didactiques conçus dans le cadre d'un projet sur l'enseignement des nombres rationnels (RNP : Rational number project)

Les programmes élaborés par Cramer, Post et Delmas (2002), ainsi que par Cramer, Wyberg et Leavitt (2009), s'inscrivent dans le projet de recherche collaborative «Rational Number Project (RNP)» qui est en vigueur depuis trois décennies (1978 à 2010). Ce projet a donné lieu à de nombreuses expérimentations dont le point culminant a été l'élaboration de deux programmes pour l'enseignement primaire : le premier est destiné à des élèves de 4^{e} et 5^{e} années et le second, à des élèves de 6^{e} année. Ceux-ci ont d'abord été mis à l'épreuve par les chercheurs auprès de plus de 1600 élèves, puis réajustés avant de les soumettre à une expérimentation par des enseignants dont les rétroactions ont été prises en compte dans la rédaction de la version finale de ces programmes.

Les expérimentations menées dans le cadre du projet RNP ont permis d'identifier plusieurs difficultés liées: 1. à la représentation d'une entité par un symbole fractionnaire (a/b); 2. à la sériation de fractions; 3. à la compréhension de fractions équivalentes; 4. aux opérations sur les fractions. Les programmes d'études du RNP privilégient diverses modalités de représentation de nombres rationnels et accordent une attention particulière, non seulement aux relations et aux transformations à l'intérieur d'un même registre sémiotique, mais également entre divers registres sémiotiques.

Les programmes conçus pour les élèves de 4^{e} et 5^{e} année et pour les élèves de 6^{e} année comportent respectivement 23 et 28 leçons. Les recherches, sur lesquelles s'appuient ces programmes, ont orienté plusieurs études effectuées depuis les quatre dernières décennies, notamment, au Canada et aux États-Unis. Les programmes ministériels, ainsi que la majorité des manuels scolaires ont aussi pris appui sur ces études. Considérant ces différents aspects, il nous est apparu peu économique et pertinent de présenter chacune des leçons que comportent les programmes du RNP (Cramer *et al*., 2002, 2009). Nous avons plutôt examiné les résultats de ces programmes, portant une attention particulière à ceux qui montraient une transformation importante des rapports problématiques des élèves aux nombres rationnels. Nous avons alors effectué une analyse des situations qui nous semblaient déterminantes. Et, nous nous sommes aussi intéressée à certaines situations prometteuses, mais qui mériteraient certaines adaptations.

Intérêts de la première partie de la séquence didactique conçue et expérimentée par RNP (2002)

Les élèves ayant bénéficié du premier programme du RNP ont obtenu, au post-test et au test de rétention, des résultats supérieurs à ceux des élèves ayant été soumis à l'enseignement régulier et ce, dans des tâches portant sur les concepts, l'ordre, le transfert et l'estimation. Outre cette distinction quantitative, la nature des processus construits par les élèves diffèrent considérablement : alors que les élèves du groupe RNP arrivent à justifier leurs résultats en s'appuyant sur des connaissances conceptuelles, les élèves du groupe contrôle ne peuvent expliquer les connaissances procédurales mises en œuvre. À titre d'exemple, les élèves du groupe RNP exploitent diverses stratégies pour ordonner et comparer les fractions [numérateur commun, dénominateur commun, fraction repère (ex. ½), prise en compte de la partie manquante pour compléter l'entier (ex. 4/5 et 11/12)]. À l'opposé, si l'on demande aux élèves du groupe contrôle de comparer 4/15 et 4/10, ils ressentent le besoin de les mettre sur un dénominateur commun, d'utiliser le produit croisé sans pouvoir exprimer le sens de ces gestes. L'estimation de la somme de deux fractions (2/3 + 3/12) requise dans un énoncé de problème et l'estimation de la différence de deux fractions (11/12 - 4/6), estimation représentée sur une droite numérique, montrent que les élèves du groupe expérimental s'appuient et expriment majoritairement leurs résultats en ayant recours aux sens des nombres, à leur représentation graphique, à leur grandeur relative (ex. grandeur comparée à ½), à la transposition des manipulations sous une forme écrite. Le fait qu'il n'y ait pas eu de différences significatives entre les deux groupes dans les opérations nécessitant un résultat exact est très révélateur, car les élèves du groupe contrôle y ont consacré un temps considérable lors de l'enseignement/apprentissage. Les élèves du groupe expérimental n'ont pas bénéficié d'un tel enseignement des procédés de calcul. En revanche, il appert que le temps dédié à la construction des nombres rationnels leur a été bénéfique, ces élèves ayant pu élaborer divers procédés de calcul. Il nous semble ainsi important d'examiner maintenant certaines des activités proposées à ces élèves.

Au cours de la leçon 13, les élèves sont amenés à déterminer différentes quantités de jetons pouvant être utilisées pour représenter des fractions. Ce travail sur le sens du dénominateur et sur les fractions équivalentes est introduit par la représentation «  » : « *Je veux représenter cette fraction en utilisant des jetons en tant qu'unité au lieu de bandes de papier. Quelle fraction est représentée ? Si j'utilise 12 jetons en tant qu'unité, dites-moi les étapes pour représenter 3/4.* » (Cramer *et al.*, 2002, p. 109; traduction libre). Cette activité est réitérée avec l'emploi de 4, puis de 20 jetons. Les élèves doivent comparer les différentes représentations afin d'expliquer en quoi elles diffèrent et/ou elles se ressemblent et ensuite, déterminer d'autres quantités de jetons possibles. Il leur est demandé de représenter 2/3 en choisissant un nombre de jetons approprié. Au terme de ces activités, les élèves devraient arriver à la conclusion que peu importe le nombre adéquat de jetons qui est choisi, les mêmes actions sont effectuées pour représenter la fraction. Par exemple, dans le cas de 2/3, il s'agit de partager l'unité en 3 parties égales et de regrouper deux d'entre elles. Puis, les élèves sont amenés à compléter un tableau dans lequel ils inscrivent différentes quantités de jetons qui pourraient être utilisées pour représenter 4/5, 2/7, ¾ et 1/2. Ils devraient conclure que tout multiple du dénominateur est approprié. La leçon se poursuit par la représentation de la fraction 3/4 avec 14 jetons. L'impossibilité d'effectuer cette représentation est discutée et d'autres exemples sont fournis par les élèves, au regard des fractions proposées dans le tableau précédent.

Nous avons retenu la situation précédente pour diverses raisons. Elle représente bien les situations que l'on rencontre dans plusieurs manuels actuellement en usage; le recours au sens partie-tout de la fraction y est ainsi utilisé. Par ailleurs, en proposant aux élèves d'inscrire le nombre de jetons qui pourraient être utilisés pour représenter les fractions 4/5, 2/7, ¾ et ½, proposition qui fait suite au rappel des actions pour représenter la fraction 2/3, les chercheurs s'attendent à ce que les élèves concluent que, pour chacune des fractions, les nombres de jetons doivent être des multiples du nombre apparaissant au dénominateur. Cette conclusion posée, les chercheurs s'attendent ainsi à ce que les élèves disent ne pouvoir représenter ¾ avec 14 jetons, puisque 14 n'est pas un multiple de 4. Cette dernière question qui, de prime abord, nous semblait intéressante est « contaminée » très rapidement par la règle précédente qui relie « multiple et partage ». Il aurait été intéressant de varier les objets de représentation, puisque l'activité est entamée à l'aide d'une bande de papier, puis poursuivie avec les jetons. Plus encore, il aurait intéressant de demander aux élèves s'il est toujours impossible de représenter ¾ de 14 objets, quels que soient les objets choisis?

Dans la leçon 18, les élèves sont amenés à examiner la relation entre le numérateur et le dénominateur pour produire des fractions équivalentes à ½. Ce travail sur le sens rapport de la fraction vise à fournir des bases solides pour la comparaison de fractions et l'estimation de leur somme. Tout d'abord, les élèves recherchent des fractions équivalentes à ½ en se référant aux disques mis à leur disposition. L'enseignant écrit les représentations trouvées au tableau et en ajoute d'autres (ex. 50/100; 100/200; 150/300), en précisant qu'il est possible de trouver rapidement que ces fractions représentent 1/2, sans utiliser les disques fractionnaires. Il demande aux élèves de regarder le numérateur et le dénominateur de chacune des fractions et d'expliquer s'il existe une relation récurrente. L'enseignant amène les élèves à verbaliser que, dans chaque cas, le dénominateur est le double du numérateur. Ensuite, les élèves complètent diverses écritures (□/24; 11/□; □/30; □/28; 100/□), afin d'obtenir des fractions équivalentes à ½. Puis, ils représentent, à l'aide de disques, cinq fractions, soit 1/4; 2/6; 3/8; 4/10 et 5/12, afin de déterminer si elles sont plus petites ou plus grandes que ½ et, si elles sont jugées plus petites ou plus grandes que ½, d'indiquer par une fraction les différences entre ces fractions et 1/2. Sans utiliser de matériel, ils transforment les numérateurs pour obtenir des fractions plus grandes que ½. Ensuite, ils doivent exprimer pourquoi parmi les fractions suivantes, soit « 3/10; 5/12; 4/6; 6/10; 9/20; 15/18; ¼ », certaines sont plus petites, plus grandes ou égales à ½. Enfin, à titre d'activité structurante, les élèves doivent résoudre les problèmes ci-dessous : (*Ibid*., p. 145, traduction libre)

1. Margo et Jose se sont partagé deux grandes pizzas. Margo a mangé 5/8 d'une pizza. Jose a mangé 6/16 d'une pizza. Qui en a mangé le plus ? Expliquez votre raisonnement. 2. Imaginez que vous avez partagé votre sac de mini beignes avec votre sœur. Vous avez mangé 3/5 des beignes du sac tandis que votre sœur a mangé 4/10 des beignes du sac. Qui en a mangé le plus ? Expliquez votre raisonnement. 3. Chou-Mei a couru 2 milles et 7/8. Sa sœur a couru 2 milles et 3/10. Qui a couru la plus courte distance? Expliquez votre raisonnement 4. Entourez la plus grande fraction de chacune des paires : a) 2/3 1/5 ; b) 9/12 6/15; c) 5/9 3/7; d) ½ ¾ ; e) 3/5 4/9; f) 11/17 3/9; g) 10/22 4/5; h) 3/6 2/9; i) 8/13 6/16.

Dans la leçon 19, l'addition de fractions est introduite par l'entremise de contextes familiers et de tâches d'estimation (comparaison à 1 et à ½). Le premier problème proposé est le suivant : « *William a mangé ¼ d'une pizza pour le dîner. Le lendemain matin, il a mangé un morceau équivalent à 1/8 de la pizza. Quelle quantité de pizza a-t-il mangé ?* » (Cramer *et al.*, 2002, p.147, traduction libre). Les élèves ne doivent pas trouver le résultat exact, mais d'abord s'imaginer ce que représente ¼ et 1/8 d'une pizza et déterminer si William a mangé plus ou moins ½ de la pizza. Leur estimation est vérifiée par l'illustration de l'addition 1/8 + ¼, à l'aide de disques. L'enseignant leur dit que « certaines personnes croient que 1/8 +1/4 = 2/12 et leur demande : « *Est-ce que cela a du sens ? Si vous mangiez ¼, puis 1/8 d'une pizza, est-ce que ce serait identique à 2/12 ? Montrez 1/4, 1/8 et 2/12 avec les disques* (*Ibid*., p.147, traduction libre).» Au regard des études pilotes réalisées, on peut s'attendre à ce que les élève produisent des réponses de ce type : « *Il a mangé moins d'une demie, car tu as besoin de 2/4 pour ½ et 1/8 est moins que ¼ ou ¼ de la pizza c'est comme la pièce bleue. La grise c'est comme 1/8 et c'est plus petit que la bleue. Ensemble, ils ne font pas ½.*» (*Ibid*., p.147, traduction libre). Par la suite, les élèves procèdent à l'estimation des réponses aux problèmes suivants: a) « *Maria a reçu un biscuit de pépites de chocolat aussi grand qu'un gâteau d'anniversaire. Elle l'a coupé en sixièmes et a partagé le biscuit avec son ami Leanna. Maria a mangé 3/6 du biscuit et Leanna en a mangé 1/3. Ensemble, quelle quantité de biscuits ont-ils mangée ? »* ; b) *« Martin fait de la pâte à modeler. Il ajoute 3/4 de tasse de farine dans le bol. Ensuite, il en ajoute encore 3/6 de tasse. Quelle quantité de farine* *a-t-il utilisée ? (Demandez également si la somme est plus grande ou plus petite que 1)* ». (*Ibid.*, p. 148, traduction libre). Pour chacun des problèmes, les élèves doivent partager leur raisonnement. Lorsqu'ils font référence aux notions d'ordre et/ou d'équivalence précédemment appris, l'enseignant en souligne la pertinence. La tâche subséquente consiste à estimer, par rapport à ½ et à 1, la somme des additions suivantes : a. 1/8 + ¼ ; b. 3/6 + ¼ ; c. 3/4 + 2/4 ; d. 4/6 + ½.

En guise d'activité structurante, les élèves doivent résoudre, en sous-groupes, chacun des problèmes suivants (Cramer *et al.,* 2002, p.149, traduction libre). Il leur est demandé d'écrire leurs explications concernant l'estimation de la somme et de partager leurs stratégies.

1. Marty a divisé une barre de sucrerie en 12 parts égales. Avant le déjeuner, il a mangé 1 sixième de la barre de sucrerie. Il a mangé 1 quart de la barre de sucrerie après le déjeuner. A-t-il mangé plus ou moins de la moitié de la barre de sucrerie ? A-t-il mangé toute la barre de sucrerie ? Expliquez votre raisonnement.
2. Terri a mangé 5/6 d'une petite pizza et 11/12 d'une autre petite pizza. A-t-elle mangé plus d'une pizza entière ? Expliquez votre raisonnement.
3. Alex a employé 1/3 de tasse de farine dans une recette et ¼ de tasse de farine dans une autre recette. Ensemble a-t-il employé plus que ½ tasse de farine ? Expliquez votre raisonnement.
4. Donnez une estimation pour chaque somme (1/3+2/6 ; 1/8+9/10 ; 7/8+1/6 ; 1/5+3/12 ; 1/3+3/4). Sur le dos de votre feuille, écrivez votre raisonnement pour chaque problème.

En somme, dans ce premier programme, nous avons eu la chance de reconnaître la pertinence de consacrer plus de temps au développement de la compréhension du concept de fractions (5 périodes seulement sur un total de 23 traitent de l'addition et de la soustraction de fractions) dans un contexte de résolution de problèmes qui se traduit, entre autres, par l'élaboration de processus personnels et par leur flexibilité dans l'emploi des nombres rationnels. D'autre part, la préoccupation de lier et intégrer divers modes de représentations ne se distingue pas de façon significative des autres programmes. La spécificité à laquelle nous accordons une grande importance se situe dans l'exigence, pour les élèves, d'exposer explicitement la façon dont les différents modèles représentent la fraction, les similitudes/différences, les forces/ limites de chaque modèle et d'en faire un choix judicieux en fonction de la série de situations problèmes et de justifier leurs choix. Les échanges et les discussions entre les élèves occupaient également un espace prépondérant dans ce programme, ce qui, selon nous, a fortement contribué à la participation des élèves à l'enseignement et, par conséquent, à l'évolution de leurs connaissances.

Intérêts de la seconde partie de la séquence didactique conçue et expérimentée par RNP (2009)

Il importe d'abord de mentionner qu'une évaluation comparative des conduites des élèves ayant bénéficié du second programme et de ceux qui n'en ont pas bénéficié n'a pas été effectuée. Pour montrer l'intérêt de ce second programme, nous présentons, plus en détail, trois leçons jugées particulièrement prometteuses et qui s'apparentent davantage aux objectifs visés dans l'enseignement en 1re secondaire. En effet, la leçon 1 traite de la sériation de fractions, la leçon 7 aborde la construction du sens de l'addition et de la soustraction de fractions et la leçon 21 porte sur la multiplication de fractions.

a) leçon 1

La leçon 1 débute avec une tâche de sériation des fractions suivantes: ¾, 1/10, 14/15, 3/5, 5/12. Un retour en grand groupe permet aux élèves d'expliquer leur raisonnement et à l'enseignant de les noter au tableau. Différentes questions peuvent être adressées aux élèves pour alimenter la discussion, telles que : « *Quelle fraction est la plus grande ¾ ou 3/5 ? Quelle fraction est juste un peu plus petite et un peu plus grande que ½ ? Quelle fraction est près de 1 ? Pourquoi 1/10 est la plus petite fraction ? »* (Cramer *et al.,* 2009, p. 29-30, traduction libre) Un moment est réservé à la comparaison des fractions ¾ et 14/15 au cours duquel les questions suivantes sont adressées aux élèves: « *Quelle fraction est plus près de 1 ? Comment faites-vous pour le savoir ? Un élève a dit que les deux fractions étaient égales parce qu'il leur manque chacune une partie pour compléter l'entier, qu'en pensez-vous ? Vérifiez votre interprétation en représentant chacune des fractions avec les disques*. » (Cramer *et al.*, 2009, p. 30, traduction libre)

Cette leçon vise le développement de stratégies informelles de sériation. Dans les études pilotes, quatre stratégies ont été utilisées par les élèves pour sérier les fractions : a) représentation des fractions qui comportent un numérateur commun (ex. : 3/5 et ¾) ; b) représentation des fractions en utilisant un dénominateur commun (ex. : 14/15 et 9/15

(3/5)); c) utilisation de la fraction repère ½ (3/5 et 5/12 ; 5/12 < ½ et 3/5 > ½) ; d) complétion de la fraction pour représenter un entier (3/4 et 14/15 ; 1/15 et ¼). Ces stratégies montrent bien la pertinence des nombres choisis : « *1/10 est le nombre plus loin de l'entier ; 5 n'est pas la moitié de 12, juste un peu moins, alors je le place après 1/10 ; 3/5 ; ¾ et 14/15, il manque à toutes les deux un morceau, mais 1/4 est beaucoup plus grand que 1/15, alors il en manque plus » (*Cramer *et al.,* 2009, traduction libre *p.29).*» Au regard des études pilotes, il est à prévoir que certains élèves rencontreront des difficultés (s'appuyant uniquement sur le dénominateur ou sur leurs connaissances des nombres entiers, etc.) à ordonner ¾ et 14/15 : « *c'est égal car il leur manque chacun un morceau ; les morceaux sont plus grands dans ¾ parce que le dénominateur est plus petit ; 14 est plus grand que 3 et 15 est plus grand que 4, donc 14/15 est plus grand que ¾ »* (*Ibid*., p. 30, traduction libre). Afin de s'assurer qu'ils ont bien compris, la tâche est reprise avec les fractions 4/5 et 8/9. Voici un exemple d'une production d'un élève de 6^{e} année: *«8/9 est plus grand parce que si tu as un disque fractionnaire 1/5 est plus grand que 1/9. Alors si tu mets 8/9 et 4/5, 8/9 sera plus grand parce qu'il aura de plus petits morceaux alors il y aura une plus petite quantité restante et il restera un plus grand morceau restant pour 4/5* (Cramer *et al.,* 2009, traduction libre, p.30).» L'enseignant résume ensuite les principales stratégies exploitées : *« a. Vous pouvez juger de la taille relative des fractions en vous imaginant leur représentation à l'aide de disques ; b. L'utilisation de ½ comme repère est utile ; c. Penser à la proximité de la fraction par rapport à un entier est aussi utile pour comparer des fractions, telles que ¾ et 5/6 ou 4/5 et 99/100 »* (*Ibid*., p. 30, traduction libre).

Répartis dans de petits groupes, les élèves sont également invités à effectuer diverses activités: l'activité suivante nous apparaît particulièrement bien pensée (Cramer *et al.,* 2009, pp.37 à 40, traduction libre) :

« Compléter ces fractions afin qu'elles soient toutes près de 2/3, mais juste un peu plus grande.

$$\frac{\;}{10} \quad \frac{\;}{12} \quad \frac{\;}{11} \quad \frac{\;}{20} \quad \frac{\;}{13} \quad \frac{4}{\;} \quad \frac{7}{\;}$$

Ordonner ces fractions de la plus petite à la plus grande. Échanger vos raisonnements.

$$\frac{9}{16}\ \frac{8}{9}\ \frac{1}{14}\ ;\ \frac{19}{20}\ \frac{2}{22}\ \frac{6}{14}\ ;\ \frac{99}{100}\ \frac{6}{11}\ \frac{3}{100}\ ;\ \frac{6}{7}\ \frac{2}{88}\ \frac{6}{10}\ ;\ \frac{10}{13}\ \frac{2}{47}\ \frac{4}{7}\ ;\ \frac{3}{50}\ \frac{13}{15}\ \frac{5}{11}$$

Quelle fraction est la plus petite ? 4/7 ou 12/33 ; 2/3 ou 1/10 ; 6/14 ou 10/18
Quelle fraction est la plus grande ? 9/10 ou 11/12 ; 2/3 ou ¾ ; 99/100 ou 4/5
Sur l'endos de cette page, décris les stratégies que tu as employées pour 99/100 et 4/5.

Estimer la quantité ombragée.

Ombrage environ 4/7 Ombrage environ 18/40 »

Pour terminer la leçon, l'enseignant présente le problème récapitulatif suivant : « *Que pensez-vous de ce raisonnement émis par un élève : 6/8 est plus grand que 4/11 parce qu'avec 6/8, tu as besoin de 2 morceaux pour obtenir l'entier et avec 4/11 tu en as besoin de 7. Est-ce que cette stratégie fonctionne pou 9/10 et 98/100 ?* » Pour évaluer leur compréhension dans l'exploitation de 1/2 comme fraction repère, l'enseignante questionne les élèves : « *Juanita dit que 7/12 est plus grand que ½ parce qu'elle sait que 6/12 égal ½ et 7/12 est plus grand que 6/12. Will sait que 7/12 est plus grand que ½ parce qu'il a doublé le numérateur et a vu qu'il était plus grand que le dénominateur. Ce qui fait que 7/12 est plus grand que ½. Je comprends le raisonnement de Juanita, mais pas celui de Will. Peux-tu m'aider ? Peux-tu utiliser les disques fractionnaires pour me convaincre que sa stratégie est bonne ?* » Voici deux explications possibles que les élèves peuvent fournir : « *Doubler le numérateur donne le dénominateur si la fraction était égale à ½* ». « *Si le numérateur est 7 alors 7/14 = ½. Parce que les douzièmes sont plus grands que les quatorzièmes, 7/12 est plus grand que 7/14, donc 7/12 est plus grand que ½* » (*Ibid.* p.31, traduction libre).

b) **leçon 7**

Au cours de la leçon 7 (Cramer *et al.,* 2009, pp.95-103, traduction libre), les situations proposées visent la construction du sens de l'addition et de la soustraction de fractions. En guise d'introduction, les élèves sont invités à estimer les résultats des opérations 2/5+1/4, 7/8-1/4, et 4/5-2/3, en indiquant pour chacun des résultats s'il est plus petit ou plus grand que 1, avant de recourir à des procédés pour préciser chacun des résultats. Puis, quatre problèmes additifs leur sont proposés ; ces problèmes, comme nous le verrons, prennent appui sur la typologie de problèmes additifs proposée par

Vergnaud (1991); ils doivent d'abord résoudre ceux qui impliquent des nombres entiers à l'aide de la calculatrice et expliquer pourquoi ils ont procédé à une addition ou une soustraction.

1. Christina mesure 162 cm. Leah mesure 156 cm. De combien Christina est plus grande ? (comparaison : recherche de la relation)
2. La distance entre Los Angeles et New York City est d'environ 2451 milles. Après avoir conduit 1135 milles, combien de miles de plus doivent-ils conduire ? (comparaison : recherche de la relation)
3. Au cours d'un long voyage, vous avez conduit 345 milles en un jour et 567 milles le second jour. Combien de milles avez-vous conduits en deux jours ? (composition : recherche du composé)
4. Tu as conduit 375 milles en un jour en direction de NYC. NYC est à une distance de 1028 milles. Quelle distance de plus dois-tu conduire ? (comparaison : recherche de la relation) (*Ibid*., p. 98-99, traduction libre)

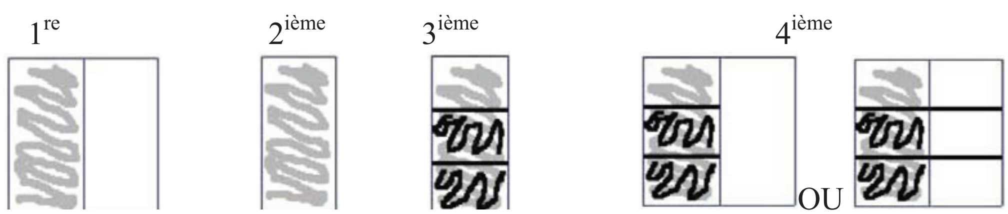
Des problèmes impliquant des nombres fractionnaires leur sont ensuite présentés et il leur est demandé de comparer chacun de ces problèmes aux problèmes correspondants présentés précédemment, d'identifier les ressemblances et les différences entre ces problèmes et enfin, d'indiquer si le fait de changer les nombres entiers en fractions modifie leurs jugements initiaux.

1. Christina mesure 63 5/8 pouces. Leah mesure 61½ pouces. De combien de pouces Christina est-elle plus grande ?
2. La course est d'une longueur de 5 ½ miles. Après avoir couru 2 3/8 miles, combien de miles de plus dois-tu courir pour finir la course ?
3. Tu as repris la course. Le premier jour tu as couru 2 2/5 milles. Le deuxième jour tu as couru 1 1/3 milles. Quelle distance as-tu courue en deux jours ?
4. India a couru 3 ¼ milles jusqu'ici dans la course. La course est de 5 5/8 milles. Combien de miles doit-elle courir de plus ? (*Ibid*., p. 98-99, traduction libre)

Enfin, ils résolvent les problèmes et partagent leurs démarches. Ce travail vise à construire le sens des opérations et non les «techniques» calculatoires, car les études pilotes ont montré que les élèves avaient plus de difficulté à reconnaître les problèmes impliquant des soustractions, c'est pourquoi la calculatrice est autorisée. Les élèves peuvent procéder de différentes façons pour trouver le dénominateur commun: 1) y recourir directement, car, au regard de leurs expériences, il leur est familier et directement accessible; 2) multiplier les deux dénominateurs; 3) dresser une liste de fractions équivalentes pour chacune des fractions. Pour trouver les fractions équivalentes, au regard du dénominateur commun précédemment trouvé, certains élèves se rapportent à la fraction unitaire (ex. ¾ = ?/12…1/4 = 3/12 alors ¾ donnera une fraction trois fois plus grande, 9/12).

c) leçon 21

La leçon 21 porte sur l'enseignement de la multiplication de fractions. Le problème suivant est présenté aux élèves: « *Après la réception qui a eu lieu pour son anniversaire, Jed constate qu'il reste ½ plateau de brownies. Jed a faim et mange 2/3 des brownies qu'il lui reste. Quelle fraction d'un plateau de "brownies" Jed a-t-il alors mangée* ? » (*Ibid.*, traduction libre, p. 253). Pour résoudre ce problème, les élèves sont invités à recourir à des représentations; pour ce faire, ils disposent de feuilles de papier carré, feuilles qu'ils auront à leur disposition pour effectuer toutes les activités que comporte cette leçon. Les chercheurs s'attendent à ce que les élèves produisent les représentations suivantes :



Les représentations produites par les élèves sont ensuite examinées et l'enseignant écrit la multiplication qui peut être utilisée pour représenter la solution à ce problème, soit : 2/3 x ½ = 2/6 ou 1/3. Un problème similaire est ensuite présenté aux élèves qui sont invités à recourir à des représentations et à inscrire la multiplication.

À la suite du travail précédent, des petits groupes d'élèves sont formés ; les activités suivantes leur sont alors présentées: 1) Représentations de fractions dans un carré ; 2) Résolution de problèmes similaires aux problèmes précédents, en utilisant des représentations et en y associant des écritures numériques ; 3) Calculs à effectuer (½ x ¼ ; 2/3 x ¼ ; 2/3 x ¾), pour lesquels ils doivent compléter la phrase « ___ groupe de ____ » et représenter l'opération. Quelques-unes de ces activités sont reprises lors d'un retour collectif et, par la suite, les élèves doivent associer des calculs à des représentations de multiplications de fractions produites par l'enseignant (ex. : 4/5 x 2/3 ; 2/3 x 1/6) et inscrire les résultats de leurs calculs.

Au cours des leçons suivantes, l'algorithme de la multiplication de fractions leur est présenté et les élèves sont amenés à donner sens aux calculs qui sont effectués; pour ce faire, les élèves mettent à profit le travail précédent sur les représentations. Il convient à ce propos de mentionner que les représentations privilégiées, dès les premières activités, montrent bien les visées algorithmiques du projet d'enseignement. Ainsi, lorsque les élèves produisaient des représentations différentes de celles attendues, au cours des activités présentées à la leçon 21, par exemple, représenter ½ et ¾ par les figures de type a) plutôt que par les figures de type b), les élèves étaient immédiatement invités à recourir aux figures de type b).

Figure de type a

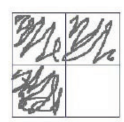


Figure de type b

À ce propos, les chercheurs écrivent : « *Nous avons constaté que les étudiants semblent pouvoir « voir plus aisément » les calculs associés à la multiplication de fractions, s'ils dessinent une fraction en utilisant des lignes verticales pour représenter la première fraction et en utilisant des lignes horizontales pour trouver la fraction de cette fraction*» (Cramer *et al.,* 2009, p.274, traduction libre).

Le choix de l'ordre des activités et du matériel proposé nous semble tout à fait approprié pour pouvoir donner sens à l'algorithme de la multiplication qui est requise en dernier lieu. Cependant, l'exploitation qui en est faite nous apparaît superficielle, dans la mesure où elle débouche uniquement sur une connaissance procédurale de l'algorithme. Par exemple, le contexte n'est pas repris pour évaluer les réponses, les formes géométriques sont déjà fournies et les élèves sont rapidement orientés vers un partage particulier, notamment, un partage uniquement horizontal ou vertical, dans le cas de a/nb x b/d, alors que certains autres partages seraient tout à fait appropriés. Les élèves ne sont pas ainsi amenés à apprécier la pertinence du modèle proposé, modèle qui permet par ailleurs d'envisager de multiples relations multiplicatives. Dès lors, il aurait été plutôt intéressant de discuter des limites et des forces des modèles choisis, en fonction des nombres et relations en jeu. Ainsi, les élèves auraient pu percevoir des façons différentes de représenter la multiplication de fractions, sans recourir à la multiplication des dénominateurs. Ils auraient aussi pu constater que certaines multiplications sont plus simples que d'autres, qu'il y a parfois avantage à trouver une fraction équivalente. Bref, nous estimons qu'une implication plus importante des élèves dans la démarche d'apprentissage leur aurait permis d'accéder à des représentations plus « pertinentes et économiques » de la multiplication. En somme, nous croyons que la conjugaison de certains aspects des études présentées sur la multiplication gagneraient à être exploitée; il serait, il nous semble, important de permettre aux élèves de mieux exploiter leurs connaissances informelles, de recourir à diverses représentations de la multiplication de fractions et, enfin, d'évaluer la pertinence de procédés d'estimation de produits, en confrontant leurs estimations aux produits qui résultent de l'application de l'algorithme de la multiplication.

Il nous semble enfin important de mentionner que l'aspect longitudinal et collaboratif du projet du RNP a permis de créer, au fil des années, deux programmes qui respectent la réalité de la classe par l'accueil et la prise en compte des commentaires de plusieurs enseignants et des conduites des élèves. Nous croyons qu'il s'agit d'un aspect central, car au-delà du potentiel d'une situation, sa gestion demeure tout aussi fondamentale. Ainsi, l'intégration d'informations sur les raisonnements des élèves, à chacune des leçons, permet de mieux outiller l'intervenant dans la compréhension des processus personnels des élèves et ainsi, le prédispose davantage à intervenir efficacement. En somme, cela lui permet de minimiser « l'imprévisible ».

Synthèse sur les apports respectifs des dispositifs didactiques comportant des séquences, voire des programmes d'enseignement, sur les nombres rationnels

Le survol de ces trois programmes fait état, dans une démarche prophylactique, de la possibilité d'intervenir efficacement sur la construction de rapports adéquats aux nombres rationnels chez les élèves. Nous avons pu constater, grâce à l'apport indéniable de différents programmes qui abordent les nombres rationnels en tant « qu'unité globale et cohérente» et non, comme la somme d'une variété de ses composantes, la modification des pratiques des élèves et l'évolution de leurs connaissances sur ces nombres. En effet, les élèves s'attardent davantage au sens et aux relations entre les nombres et génèrent des processus personnels, au lieu de ne s'appuyer que sur la recherche de «la procédure» à appliquer. Par ailleurs, nous avons pu également remarquer la diversité des avenues (séquences, type de situations, etc.) potentielles pour parvenir à de tels changements. Par exemple, Guy et Nadine Brousseau (1987) proposent des situations qui rendent nécessaire et pertinent l'emploi de ces nouveaux nombres; Moss et Case (1999) s'appuient sur les connaissances des élèves sur les nombres entiers, en débutant par l'enseignement des pourcentages dans des tâches d'estimation familières aux élèves; Cramer, Post et Del Mas (2002) priorisent le développement de connaissances conceptuelles par l'entremise de matériel de manipulation, de tâches de conversion de registres ainsi que par la confrontation des élèves aux difficultés potentielles. De plus, nous avons remarqué qu'à l'exception du programme construit par Moss et Case (1999), tous les programmes précédents priorisent une entrée dans les rationnels par l'intermédiaire de tâches de sériation, tâches qui, selon Mazzocco et Devlin (2008), s'avèrent discriminatoires et fort instructives. De plus, Guy et Nadine Brousseau (1987), ainsi que Moss et Case (1999), abordent les rationnels en favorisant le sens mesure, alors que le projet du RNP met l'accent sur le sens partie-tout. Par ailleurs, ces différents programmes partagent les orientations didactiques suivantes : a) exposer les élèves à une variété de représentations et leur permettre d'effectuer des transitions à l'intérieur (traitement) et entre différents registres (conversion); b) prendre appui sur les connaissances informelles des élèves et sur leurs stratégies spontanées de résolution de problèmes pour donner sens au concept et aux opérations sur les nombres rationnels; c) solliciter les divers sens de la fraction; d) favoriser les interactions entre les élèves et l'enseignant.

Il nous semble important de souligner que tous les programmes précédents interviennent dans un contexte d'apprentissage initial des nombres rationnels, ce qui n'est pas surprenant, compte tenu de l'importance d'une intervention précoce. Le NTCM (2000) formule à ce propos que la période débutant de la 3^{e} année jusqu'à la 5^{e} année s'avère critique dans le développement d'une structure conceptuelle solide pour le travail avec les nombres rationnels. Puisque notre projet de recherche s'effectue auprès d'élèves au secondaire ayant déjà abordé cet objet et qu'il doit tenir compte des contraintes temporelles et institutionnelles du milieu scolaire, il va de soi que nous devons effectuer des choix et retenir des situations nous paraissant prometteuses. Une approche écologique (De Rosnay, 1994), respectant les contraintes institutionnelles, sera ainsi privilégiée. Ce choix théorique nous permet de construire graduellement des situations empreintes de l'institution classe (Chevallard, 1985). Cette progression nous amènera à réagir avec plus de discernement et facilitera la gestion des situations.

2.3.2. Dispositifs didactiques visant la transformation de rapports problématiques à des objets spécifiques de l'enseignement des rationnels

Plusieurs recherches, dont l'ampleur n'est pas comparable à celles de la majorité des études qui ont retenu notre attention à la section précédente, résultent d'une prise en compte de rapports problématiques à des objets spécifiques de l'enseignement des rationnels, rapports identifiés non seulement chez les élèves en difficulté, mais chez un nombre important d'élèves de l'enseignement régulier. Nous rendrons compte des recherches visant une transformation des rapports des élèves aux nombres rationnels, aux opérations et à la résolution de problèmes impliquant des nombres rationnels.

2.3.2.1. Dispositifs visant une transformation des rapports des élèves aux nombres rationnels

Comme nous l'avons vu dans la recension des difficultés et dans l'analyse des programmes, la construction des différents sens de la fraction et la sollicitation de divers registres sémiotiques sont incontournables dans la compréhension des nombres rationnels. Ce n'est donc pas sans raison que leur enseignement a été et est toujours au centre des préoccupations de nombreux chercheurs en didactique des mathématiques (Hart, 1984 ; Kerslake, 1986 ; Kieren, 1976, 1980; Tzur, 2000; Confrey et Scarano, 1995 ; Clarke, 2006; Behr, Post & Lesh, 1993; Cramer, Post et delMas, 2002; Steff, 2002). Nous nous attarderons maintenant à leur actualisation. Dans un premier temps, nous considérerons l'accès aux différents sens de la fraction; puis, dans un second temps, nous nous intéresserons aux registres sémiotiques.

Actualisation des sens de la fraction

La construction des différents sens de la fraction est fondamentale dans l'apprentissage des nombres rationnels et des opérations sur ces nombres. Nous avons pu prendre acte, par exemple, de la nécessité de coordonner les divers sens dans des tâches de comparaison, de sériation, d'estimation et de calculs. Plusieurs chercheurs (Blouin et Lemoyne, 2002; Perrin et Douady, 1986 ; N. et G. Brousseau, 1987; Clarke, 2006; Mack, 1990; Kieren, 1988) ont mis en exergue l'importance de leur accès dans la réalisation de diverses tâches spécifiques : l'exploitation du sens opérateur pour donner sens à la multiplication, l'exploitation du sens quotient pour faciliter différentes tâches de partage et pour traiter de la fraction en tant qu'entité, l'exploitation du sens rapport dans l'estimation et dans l'introduction de pourcentages.

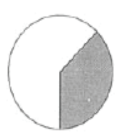
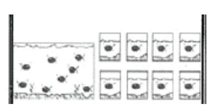
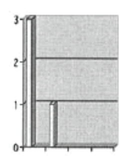
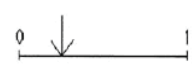
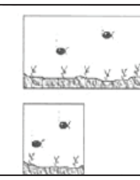
Un aspect récurrent de divergence réside dans l'actualisation des sens de la fraction : vaut-il mieux privilégier l'enseignement d'un seul sens jusqu'à ce que les élèves le maîtrisent ou est-il préférable de travailler conjointement les différents sens? Bien que ces questionnements touchent tous les apprenants, ils revêtent un intérêt majeur dans l'intervention auprès d'élèves en difficultés d'apprentissage, la tendance étant généralement de segmenter les apprentissages.

Certains chercheurs (ex. English et Halford, 1995; Mack, 1990, 1993; Dowling, Kloepper, Tierney, Hubbarde et Twitchin, 2007) pensent qu'il vaut mieux travailler un sens à la fois. Ces derniers estiment que le sens « partie-tout » doit être favorisé comme entrée. Les principaux arguments des tenants de cette vision croient qu'autrement les élèves seront confus en travaillant divers sens ou n'auront pas accès et échoueront dans la construction d'une compréhension approfondie des concepts de base sur les nombres rationnels. D'autres chercheurs (entre autres, Kieren, 1976, Vergnaud, 1983) croient plutôt que l'exploitation simultanée de divers sens permet aux élèves d'accéder à la vaste étendue des nombres rationnels, à la subtilité et à la complémentarité des informations véhiculées par leurs divers sens. L'accès à une conceptualisation plus représentative de la complexité des nombres rationnels habiliterait davantage les élèves à devenir plus flexibles dans l'interprétation et l'exploitation de ces nombres. Afin de nous forger une idée plus précise, nous consacrerons maintenant une attention particulière à l'étude comparative effectuée par Moseley (2005 et 2008).

Comme le souligne Moseley (2005), deux interprétations des difficultés rencontrées par les élèves dans la résolution de problèmes impliquant des représentations formelles des nombres rationnels sont souvent invoquées; les difficultés peuvent ainsi être associées : a) à un travail insuffisant sur un sens de la fraction pour permettre un ancrage fécond ; b) à un travail insuffisant de coordination des différents sens de la fraction. S'appuyant sur plusieurs recherches (Lamon, 1993; Hart, 1987; Kieren, 1993; Streefland, 1991), Moseley a réalisé une étude comparative auprès d'une population de 26 élèves de 4^{e} année visant à mettre à l'épreuve les interprétations précédentes des difficultés rencontrées par les élèves. Dans cette étude, différentes situations ont été conçues et mises à l'épreuve pendant 8 sessions d'enseignement afin de respecter le temps didactique généralement alloué pour cet enseignement. Les situations présentées à six dyades d'élèves faisaient appel au sens « partie-tout » (PT) de la fraction, tandis que celles présentées à sept autres dyades recouraient aux sens rapport et opérateur de la fraction (MS). Les mêmes fractions, ½, 1/4, 1/3 et 1/6, ont été traitées par chacun des groupes dans cet ordre; la familiarité des élèves avec les fractions ½, puis ¼, favorisait ainsi la dévolution des situations et l'exploitation de connaissances informelles qui pouvaient être mises à profit dans le traitement des autres fractions moins familières. Chacune des fractions a fait l'objet de deux périodes, une exploitant des représentations discrètes et l'autre, des représentations continues. « *Les séances de travail étaient structurées de la façon suivante : 1) situations-problèmes qui mettent l'accent sur l'habileté des élèves à associer un nombre rationnel à une situation réelle; 2) problèmes d'application dont l'accent est mis sur l'habileté des élèves à résoudre des problèmes qui comportent des nombres rationnels, mais qui ne sont pas inscrits dans des situations réelles; 3) items formels dont l'accent est mis sur l'habileté des élèves à travailler avec des notations formelles.* » (Moseley, 2005, p. 48, traduction libre). Par la suite, les élèves sont amenés à expliquer à un ami fictif le contenu mathématique qu'ils ont vu durant la leçon et à donner un exemple. Les résultats des activités sont fournis aux élèves avec un minimum d'explications pour être certain que les élèves construisent et exploitent leurs propres conceptions et stratégies. L'article publié par Moseley (2005) ne fait malheureusement état que de quelques activités qui ont été proposées aux élèves des deux groupes, lors de la première leçon, ce qui ne nous permet pas d'apprécier l'intérêt des dispositifs expérimentés avec les deux groupes d'élèves. L'analyse des conduites des élèves à l'entrée et à la sortie de la séquence d'enseignement montre toutefois l'importance de la conjugaison des divers sens de la fraction.

À l'entrée et à la sortie de la séquence d'enseignement, les élèves ont été soumis à un test (adaptations d'un test de Hart (1987) sur le sens rapport et d'un test de Kerslake (1986) sur le sens partie-tout), dans lequel ils devaient classer 15 cartes selon des catégories mathématiques qui avaient du sens pour eux et « penser à voix haute » pendant qu'ils exécutaient cette tâche. La prise en compte des divers sens de la fraction permet de former 5 catégories (partie-tout, quotient, rapport, mesure, opérateur) comportant chacune trois cartes, soit : un énoncé de problème, une représentation graphique et une notation numérique. La consigne était la suivante (Moseley, 2005, p. 52, traduction libre) : « *Je vais placer quelques cartes en face de vous; sur certaines, vous verrez des mots, sur* *d'autres, des nombres, sur d'autres enfin, des images. Ce que j'aimerais que vous fassiez est de former des catégories avec les cartes, catégories qui ont un sens pour vous. J'aimerais aussi que vous exprimiez au fur et à mesure ce que vous pensez pendant que vous formez les catégories et enfin que vous donniez un titre qui décrit chacune des catégories.* » Le tableau suivant reproduit les cartes qui ont été présentées aux élèves et le regroupement attendu (Moseley, 2005, p. 53, traduction libre).

Tableau XVI: Tâche d'évaluation conçue par Moseley (2005)

Sens/ Forme	**Partie-tout**	**Quotient**	**Rapport**	**Mesure**	**Opérateur**
Énoncé de problèmes	Ma famille a 10 poissons vivant dans un aquarium de 15 gallons, le plus gros se nomme Harvey. Harvey a 10 onces de nourriture pour lui seul et en a mangé 6 onces. Quel part de sa nourriture a-t-il mangé?	Mon frère a décidé de prendre notre aquarium de 6 gallons et de le répartir dans 8 plus petits aquariums de 1 gallon chacun. Quelle quantité d'eau a-t-il versée dans chacun des petits aquariums ?	Papa a nettoyé notre gros aquarium. Il contient neuf poissons vraiment chouettes. Il a mis 18 gallons d'eau et 6 livres de gravier. Quel est le rapport entre les quantités de gravier et d'eau déposées dans l'aquarium?	Notre famille possède 10 poissons tropicaux et ma mère va mettre 5 gallons d'eau dans notre aquarium vide de 20 gallons. Après avoir versé l'eau dans l'aquarium à quel point sera-t-il plus rempli?	Ma tante prépare l'aquarium pour son poisson rouge et les instructions lui indiquent qu'elle doit utiliser 18 livres de gravier alors qu'elle n'en possède seulement 9. De combien doit-elle réduire les quantités des autres produits qu'elle déposera dans l'aquarium afin de pouvoir utiliser 9 livres au lieu de 18 livres de gravier?
Représentations graphiques					
Représentation numérique (notation formelle)	3/5	0,75	1/3	1/4	1/2

Les élèves des deux groupes ont montré une réorganisation différente des connaissances sur les nombres rationnels. Les élèves exposés uniquement au sens partie-tout (PT) ont produit peu de groupements compatibles entre les différents sens. Plus encore, bien que tout l'enseignement ait été consacré au sens partie-tout, ils ne sont pas parvenus à relier les différentes représentations de ce sens. Les élèves qui ont bénéficié d'un enseignement des divers sens (MS) ont non seulement augmenté le nombre de regroupements cohérents, mais ces pairages étaient aussi davantage développés, en recourant, notamment, à une organisation plus complète des composantes du sens opérateur (énoncé de problème, représentations graphique et numérique) et du sens mesure (représentations graphique et numérique). L'analyse des titres descriptifs que les élèves ont donnés à leurs regroupements a permis de préciser les bases de leur choix. Suite à l'enseignement dispensé, 75% des élèves du groupe PT ont fait appel aux traits de surface, alors que les titres des groupements des élèves du groupe MS s'appuient majoritairement sur les opérations mathématiques qui accentuent le processus mathématique qui lie les cartes ou les met en relation.

Si l'on s'attarde plus spécifiquement aux concepts mathématiques de chacun des programmes qui auraient influencé les conduites des élèves et pourraient illustrer plus spécifiquement les types de changements qui ont eu lieu, il semble que les élèves du groupe PT tentaient d'extrapoler différentes caractéristiques, propriétés des objets et conceptions erronées liées au sens partie-tout, afin de faire leur comparaison. Ces élèves, qui ont bénéficié d'un enseignement mettant en cause uniquement le sens partie-tout de la fraction, produisent des catégorisations qui font plus fréquemment abstraction d'une analyse formelle des relations, que ne le font les élèves qui ont bénéficié d'un enseignement mettant en cause les sens « rapport » et « opérateur » de la fraction. Plus encore, chez les élèves du groupe PT, on observe une augmentation de leur attention à des indices de surface superficiels. La confrontation des élèves du groupe MS à différentes représentations et à divers sens de la fraction leur permet de surmonter certaines conceptions erronées, de construire et de donner sens à de nouvelles connaissances en s'appuyant sur des concepts mathématiques plus larges (ex. la division). Chez ces élèves, on note un accroissement de l'attention portée aux opérations qui reflètent les relations mathématiques portées par les représentations.

En somme, le sens « partie-tout » de la fraction est depuis longtemps le sens privilégié dans l'enseignement primaire, ce qui ne signifie pas, qu'à l'entrée au secondaire, les élèves ont une représentation adéquate de ce sens et peuvent y recourir pour donner sens à l'écriture « a/b », pour comparer des fractions, pour opérer sur les fractions, pour construire, distinguer et reconnaître les apports des autres sens de la fraction, comme en témoignent les résultats de cette étude et des recherches sur les difficultés que nous avons présentés antérieurement. D'ailleurs, la recherche effectuée par Biddlecomb (2002) montre que des élèves du secondaire estiment que 1/1+x est plus grand que 1/x car 1+x est plus grand que x. En effet, les élèves tendent à retenir, à généraliser et à entretenir des conceptions erronées.

Cette recherche expose, à notre avis, l'importance de travailler conjointement divers sens de la fraction; un tel travail permet aux élèves de construire et de coordonner diverses représentations et connaissances sur les nombres rationnels, de comprendre les distinctions et les similarités que les différents sens véhiculent. Ces constats sont d'autant plus pertinents que nous travaillons avec des élèves du secondaire en difficultés d'apprentissage. Il s'agit donc d'élèves qui ont, maintes fois, été en contact avec le sens partie-tout (sens surreprésenté et souvent surexploité avec les élèves en difficultés) et pour lequel l' «acharnement» ne semble pas présenter les effets escomptés puisqu'ils rencontrent toujours des difficultés importantes. Cependant, si plusieurs craignent que l'approche multiple rende les élèves confus, cette perception sera d'autant plus difficile à contrer dans la valorisation de situations d'apprentissage riches et complexes auprès d'élèves en difficultés d'apprentissage qui ont été, par ailleurs, exclus de cette recherche! À ce propos, Bednarz (2009) soulève que même si des enseignants reconnaissent le potentiel d'apprentissage de certaines situations-problèmes, ils ne les réexploiteront pas avec des élèves en difficultés sous prétexte qu'elles sont trop exigeantes. Il faut dire que la représentation qu'ils ont des élèves en difficultés influence grandement leur pratique. D'ailleurs, Emspon (2003) met en exergue l'inestimable portée de traiter les élèves en difficultés comme étant -mathématiquement compétents- dans la conception de situations d'apprentissages, ce que Blouin et Lemoyne (2002) ont également montré en proposant des situations défis, trop souvent réservées aux « bons » élèves, compte tenu de l'impact considérable de tels choix dans la construction et la réorganisation de connaissances auprès des élèves en difficultés. Il importe cependant d'évaluer avec beaucoup de discernement les pratiques des enseignants; les nombreuses contraintes qui pèsent sur eux peuvent avoir un impact considérable dans leur décision, décision qui peut même aller à l'encontre de leur conviction (Bednarz, 2009; Houssart, 2002)

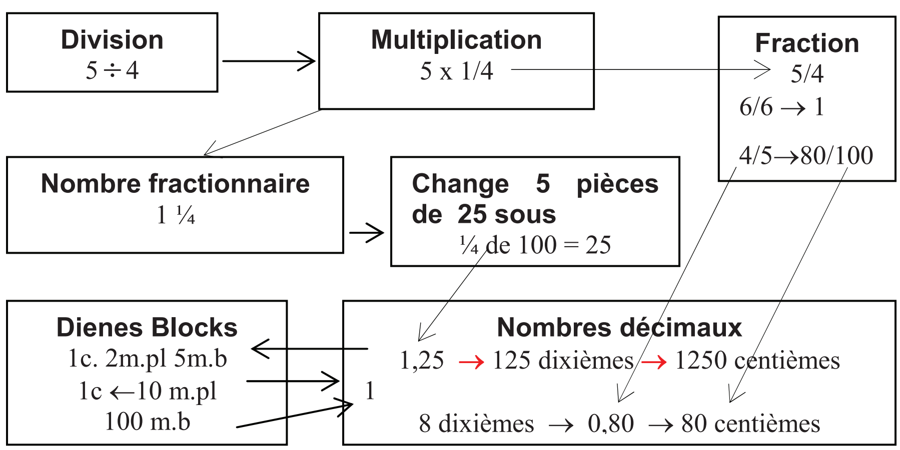
Les traitements de registres sémiotiques

Nombre de recherches en didactique des mathématiques ont permis de préciser l'intérêt et les limites de chacun des registres sémiotiques et de montrer l'importance et la complexité des traitements de transformation et de conversion de registres sémiotiques (Bednarz, 2009; Brousseau, 2004; Chevallard, 1991; Douady, 1986; Duval, 1995; Hitt, 2004; Janvier, 1987; Schubauer-Léoni, 2002; Salaberry, 2002; Watanabe, 2002). Comme, nous avons pu le constater dans la recherche de Moseley (2005), la sollicitation de différents registres n'est pas garante de succès, un tel bénéfice a été relevé uniquement chez les élèves ayant travaillé conjointement différents sens de la fraction.

La recherche collaborative effectuée par Bednarz (2009) retient particulièrement notre attention, car elle est une des rares recherches à s'intéresser aux élèves en difficultés d'apprentissage âgés de 12 à 15 ans. Dans l'élaboration de son dispositif d'intervention, Bednarz s'appuie sur diverses propositions émises par certains chercheurs qui se sont particulièrement préoccupés de l'enseignement des mathématiques à des élèves en difficultés (Bloch;2007; Bednarz et Saboya, 2007; Lemoyne et Bisaillon; 2006); elle vise ainsi la conception de situations qui 1) donnent accès à l'interprétation des symboles par les élèves et les font évoluer, afin de donner aux signes existants la dimension effective qu'ils n'ont pas (Bloch, 2007); 2) favorisent un passage progressif au symbolisme, un symbolisme significatif enraciné dans les contextes (Bednarz et Saboya, 2007) et qui 3) développent la flexibilité dans le passage d'un registre à l'autre (Bednarz et Saboya, 2007; Lemoyne et Bisaillon, 2006).

Parmi les situations construites par Bednarz (2009) figure un jeu de dominos dans lequel les élèves sont confrontés à diverses représentations des nombres rationnels: numériques [ex. 3/4 et 0,75; 3 x ¼ ; 3 ÷ 4]; iconiques [ex. : représentations qui exploitent le potentiel du matériel conçu par Dienes : 7 plaques et 5 tiges (notez qu'une plaque représente 0,1 (1/10) et qu'une tige représente 0,01 (1/100)]; numérales [ex. 75 centièmes]; monnaies [75 cents]; etc. À tour de rôle, l'élève et l'intervenant posent un domino. L'élève doit lui expliquer, d'une part, pourquoi le domino qu'il choisit représente le même nombre et, d'autre part, lui mentionner si le domino posé par l'intervenant est inadéquat. La seconde phase du jeu implique que l'élève construise une pièce de domino qui pourrait être introduite entre le 1^{er} et le 2^{e} domino, qui représente un nombre rationnel qui se situe entre les nombres représentés par le 1^{er} et le 2^{e} domino.

Les résultats obtenus au terme de la première partie du jeu sont fort évocateurs du progrès des élèves. En effet, ils témoignent de l'évolution, suite aux interventions menées, du rapport des élèves au symbolisme: « *le symbolisme n'est plus une barrière à l'étude, à une entrée dans une situation et à sa compréhension. Au contraire, il est au cœur d'une activité mathématique véritable dont la signification est commandée par eux.* (Bednarz, 2009, p. 19)». À titre d'exemple, un élève a effectué 15 changements de registres adéquats sur une possibilité de 17. Il a commis 2 erreurs liées à l'écriture décimale (1,25 comme étant 125 dixièmes et 1250 centièmes), tel qu'illustré ci-dessous (Bednarz, 2009, p. 18; les flèches inscrites en rouge permettent de retracer les erreurs ainsi commises) :



Cet élève a non seulement montré une grande flexibilité dans la transformation de représentations sémiotiques, mais également dans leur conversion. Cet exemple est représentatif des autres productions d'élèves, la variation réside davantage dans le type d'erreurs commises (ex.1 ¼ = 2 2/8).

Bednarz (2009) fournit également, au regard de la seconde tâche, de nombreux exemples montrant la flexibilité que les élèves ont développée, en ce qui concerne le symbolisme et les registres de représentation. Nous retrouvons, à ce titre, pour la division de 5 par 4, le passage à une autre division → 10 divisé par 8 (1 fois), 20 divisé par 10 (1fois) ; à une écriture décimale → 1,25 (8 fois) ; à une représentation iconique (dessin); à une représentation exploitant les multi-bases → 1 cube et 25 petites tiges (1 fois); à un nombre fractionnaire → 1 ¼ (5 fois); à une fraction impropre → 5/4 (3 fois) ; à une multiplication → 5 x ¼ (15 fois). Nous notons également, les diverses conversions suivantes : d'une fraction (5/4) à une division (5 divisé en 4 : 1 fois); d'une fraction à un nombre décimal [4/5 = 0,80 (5 fois) ; 80/100 = 80 centièmes = 0,80 (2 fois); 5/4 = 1,25 (2 fois); 8/10 = 8 dixièmes = 0,8 (2 fois); 3/2 = 1,5 (1 fois); 7/2 = 3,5 (1 fois); d'une fraction à une fraction ou un nombre fractionnaire ou une composition additive [5/4 = 3/4 + 2/4 (1 fois); 5/4 = 10/8 (3 fois); 5/4 = 4/4 + 1/4 (1 fois); 5/4 = 20/16 (1 fois); 4/5= 8/10 (3 fois); 8/10 = 80/100 (1 fois); 4/5 = 80/100 (2 fois); 3/2= 6/4 (1 fois); 5 = 5/1 (3 fois); 3/2 = 6/4 = 9/6 = 12/8 (1 fois); 6/6 = 1 (4 fois); 3/2 = 1 1/2 (3 fois); 7/2 = 3 1/2 (1 fois); 5/4 = 1 1/4 (6 fois); 2 ¼ = 5 ¼ (2 fois) et à une multiplication [5/4 = 5 x 1/4 (15 fois)].

Il va sans dire que de tels résultats révèlent le potentiel de situations axées sur l'exploitation de divers registres et ce, d'autant plus qu'il s'agissait d'interventions auprès d'élèves du secondaire en difficultés d'apprentissage. À ce propos, le MELS (2006, p.237) mentionne qu'*« un tel développement est particulièrement favorisé par des situations d'apprentissage qui, d'une part, misent sur la participation active de l'élève et le recours au processus de résolution de problèmes et qui, d'autre part, offrent une certaine flexibilité tant dans le choix des modes de représentation que dans le passage d'un mode de représentation à un autre »*. Ce travail montre qu'il a été possible d'intervenir dans une perspective de changement des habitus de ces élèves et que la coordination de registres sémiotiques est une condition nécessaire à la compréhension (Duval 1996; Janvier, 1996). Nous n'avons toutefois pas accès aux dispositifs exploités.

La capacité à représenter les nombres et à changer de registres de représentation a aussi retenu l'attention de Roditi (2007) qui s'est intéressé à l'élaboration d'un scénario d'aide aux élèves en difficultés permettant d'accroître leur capacité à comparer les nombres décimaux. Au terme de sa recherche, il en fait d'ailleurs un axe prioritaire d'intervention auprès de ces élèves : favoriser un traitement sémantique des écritures numériques en demandant aux élèves d'exprimer les nombres en recourant à différents registres de représentation, et en leur demandant de donner une approximation des nombres utilisés. Il combine par ailleurs deux autres axes : 1) proposer des situations écrites où les nombres décimaux peuvent être lus et pas seulement entendus ; 2) faire expliciter et critiquer des procédures de comparaison.

2.3.2.2. Dispositifs visant une transformation des rapports des élèves aux opérations sur les nombres rationnels

Alors que les chercheurs s'accordent sur l'importance de favoriser un enseignement du sens des opérations (sémantique), plutôt qu'un enseignement algorithmique basé uniquement sur l'aspect formel de l'écriture (syntaxique), il en est autrement lorsqu'il est question de proposer des modalités qui donnent accès à ce sens. Certains chercheurs (Lamon, 1999; Behr, Wachsmuth, Post et Lesh, 1984, dans Biddlecomb, 2002, p.167) statuent sur la difficulté occasionnée par la surgénéralisation des procédés de traitement des nombres entiers, lors du traitement des nombres rationnels, sur les obstacles inhérents à cette transition et parlent ainsi des connaissances des élèves sur les nombres entiers, en termes d'interférences. Pour d'autres chercheurs (Tzur, 1999; Hunting et Davis, 1996, dans Biddlecomb, 2002, p. 168) le désir d'offrir un ancrage et une continuité dans les apprentissages prédomine et les conduit à une prise de position fort différente : ils considèrent ainsi les connaissances sur les nombres entiers comme une fondation importante (Hunting et Davis, 1996, dans Biddlecomb, 2002, p. 168).

Moss et Case (1999) précisent qu'une explication possible des difficultés rencontrées par les élèves, dans l'apprentissage des opérations sur les nombres rationnels, serait que les situations proposées ne permettent pas aux élèves de différencier suffisamment les nombres rationnels des nombres entiers, lorsque les enseignants tentent d'introduire les nombres rationnels de manière significative. Par exemple, nous pourrions dénoncer l'usage quelque peu réducteur de formes géométriques, préalablement divisées, par lesquelles l'addition de fractions se résume à une tâche de comptage, de dénombrement ou encore, l'emploi unique de contextes permettant d'effectuer les opérations sur les nombres décimaux, comme s'il s'agissait de nombres entiers (ex. monnaie, mesure, etc.). Au même titre que Lachance et Confrey (2002, p.507), nous pourrions décrier la compartimentation abusive des savoirs liés aux opérations sur les nombres entiers et sur les nombres rationnels. Ceci dit, le clivage entre ces savoirs s'accentue lorsque les dispositifs sont destinés aux opérations de multiplication et de division, compte tenu de leurs obstacles spécifiques. Bien que nous ne niions pas l'importance de prendre en considération ces fondements, il nous semble plus opportun de chercher à les arrimer, plutôt que de les considérer de façon extrême, dichotomique et opposée. Ainsi, comment peut-on alors concevoir des dispositifs visant à construire le sens des opérations impliquant des nombres rationnels? Quand et comment est-il possible de s'appuyer sur les connaissances des élèves sur les nombres entiers, tout en leur permettant d'accéder à la spécificité des nombres rationnels? C'est donc dans cette perspective que nous présentons maintenant quelques dispositifs visant une construction, voire une reconstruction, du sens des opérations sur les nombres rationnels.

Dans une étude longitudinale effectuée auprès d'élèves du 3^{e} cycle du primaire présentant des difficultés d'apprentissage en mathématiques, Lemoyne et Bisaillon (2006) ont travaillé en collaboration avec les enseignants titulaires des classes et, entre autres, pris acte des difficultés de ces élèves lors de calculs impliquant des nombres décimaux. Ainsi, lors d'une période de récupération, l'addition suivante, soit 128,23 + 45,08, a été présentée par l'enseignant et a été exécutée adéquatement par les élèves. Répondant à l'invitation de l'enseignant de participer à cette période, les chercheures ont cru bon de présenter l'addition suivante : 112,5 + 21,38. La réponse de 5 des 8 élèves a été la suivante: 133,93. Elles ont poursuivi en proposant les additions suivantes : 112,55 + 21,38 et 112,5 + 21,38. Puis, face aux problèmes soulevés par la seconde addition, elles ont alors demandé d'écrire autrement le nombre décimal 12,5, afin de pouvoir l'additionner avec le nombre 21,0018. Elles ont ensuite invité les élèves à comparer les sommes : 1) 1250 +2073; 2) 12,50 + 20,73; 3) 12,5 + 20,73; 4) 125,0 + 20,73. Enfin, elles leur ont demandé pourquoi les nombres 12,50 et 12,5, intervenant dans les calculs 2 et 3, ne changent pas les résultats obtenus. Devant leur mutisme, il leur a été demandé de comparer les nombres 50/100, 5/10, 0,50 et 0,5. Les élèves ont pu ensemble comprendre qu'il s'agissait des mêmes nombres et ont, par la suite, pu réinterpréter leurs réponses aux calculs précédents et corriger leurs erreurs.

Ce résultat a amené les chercheures à examiner les procédés de multiplication mis en place par les élèves, procédés que les élèves savaient appliquer sans erreur, sans pouvoir toutefois « donner sens » aux actions de décompte des chiffres après la virgule, actions qui leur étaient enseignées. Ces élèves ne pouvaient également expliquer pourquoi, lors des additions et des soustractions, les décomptes des chiffres après la virgule étaient différents de ceux effectués lors des multiplications. Nous rendons compte du travail visant à donner sens aux procédés de multiplication. Divers problèmes leur ont alors été présentés, problèmes multiplicatifs représentatifs des problèmes d'isomorphismes de mesures définis par Vergnaud (1981). Chacun des problèmes comportait diverses parties. Nous reproduisons un des problèmes présentés (Lemoyne et Bisaillon, 2006, p. 26)

> « **Partie 1** : « Un marchand place des petits gâteaux dans des boîtes; chacune contient toujours 17,75 gâteaux. Comme le dit le marchand, les clients ne sont pas tenus d'acheter un nombre entier de boîtes ou de gâteaux. Pouvez-vous compléter ce tableau? »
> **Partie 2** : « Et si le nombre de gâteaux dans chacune des boîtes n'était que de 1,775, faites un second tableau en utilisant les mêmes nombres de boîtes. »
> **Partie 3 :** « Et, si dans un problème similaire, au lieu de faire 12,25 x 24,008, je fais 1225 x 24008, le produit que j'obtiens est combien de fois plus élevé que celui que j'aurais dû obtenir? »
>
> Le tableau suivant accompagnait la réalisation de la première partie du problème (*Ibid.*, p. 26)

Nombre de boîtes	**Nombre de gâteaux**
1	**17,75**
150	**?**
15	**?**
1,50	**?**

Les élèves parviennent à trouver le nombre de gâteaux dans 150 boîtes. Il leur est alors demandé de comparer les nombres 150 et 15,0 et de dire quel est le plus grand. Certains élèves déclarent alors que « 150 est beaucoup plus grand que 15,0 ». Un autre élève ajoute « plus grand que 15 tout court. » Presque tous disent « 10 de moins » voulant dire « 10 fois moins ». La seconde partie du problème est alors introduite. Deux élèves disent que ce sera 1000 fois trop, parce que « on prend le plus grand nombre de chiffres après la virgule. » Il leur est demandé de prendre leur calculatrice et de comparer. Ils s'aperçoivent que c'est beaucoup plus que 1000 fois et disent ne pas comprendre. Certains disent qu'ils ne font jamais cela en classe. Il leur est proposé alors de calculer « 12,25 x 41 et 1225 x 41 ». Un élève suggère de faire 1225 x 41 avant et après « d'enlever ». Cette suggestion est acceptée par tous. Et, pour passer à 12,25, ils proposent de diviser par 100, « 12 boîtes ou à peu près … comparés à 1225 boîtes ». Sur cette lancée, les chercheures proposent 4,1 x 12,25. Un élève dit « on divise encore par 10 … 4 boîtes et des poussières ».

Les conduites précédentes des élèves présentant des difficultés d'apprentissage sont des « témoignages » éloquents de la pertinence de recourir à des tâches qui permettent aux élèves d'effectuer certaines adaptations de leurs procédés de calcul appliqués aux nombres naturels, d'évaluer la pertinence de ces adaptations en recourant à divers calculs qui mettent en cause certaines de ces adaptations et de recourir à leurs connaissances sur les écritures décimales pour réviser leurs procédés de calculs. Les problèmes multiplicatifs sont enfin des leviers importants pour poursuivre ce travail sur les opérations impliquant des nombres décimaux.

Dans la perspective d'une construction, voire d'une reconstruction du sens des opérations sur les nombres rationnels, l'étude de Mack (1990) nous apparaît également fort pertinente. Les tâches conçues par ce chercheur étaient destinées à des élèves qui démontraient peu de compréhension des « symboles usuels de fractions » et des procédures algorithmiques sur ces nombres, afin de leur permettre de donner sens à ces opérations. Les idées principales qui ont orienté les situations durant les périodes d'enseignement (*Ibid*., p. 19, traduction libre) sont les suivantes:

> « *a) plus une unité est divisée en un nombre important de parties, plus les parties sont petites; b) une fraction représentée symboliquement est un seul nombre avec une valeur spécifique plutôt que deux nombres entiers indépendants; c) les idées d'équivalence choisies sont reliées à des représentations concrètes et symboliques; d) l'addition et la soustraction de fractions représentées symboliquement exigent des dénominateurs communs.* »

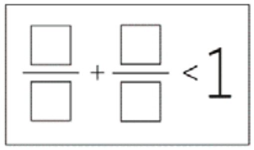
Dans cette étude, les élèves bénéficiaient d'un enseignement individuel. La majorité des problèmes ont été présentés verbalement aux élèves qui étaient encouragés à penser à voix haute. Trois types de situations ont été conçues : a) situations dans lesquelles il fallait approximer la fraction associée à des figures, à des situations réelles, à des représentations symboliques; b) situations dans lesquelles il était demandé d'estimer les sommes et les différences impliquant des fractions et de se prononcer sur la pertinence des réponses ainsi produites; c) situations dans lesquelles les élèves étaient invités à utiliser des fractions pour « construire » des sommes ou des différences qui soient voisines, mais non égales à 1. Pour réaliser ces situations, les élèves disposaient de cercles et de bandelettes. Après un certain temps, ils étaient invités à délaisser ces supports matériels pour effectuer un travail à partir de représentations symboliques

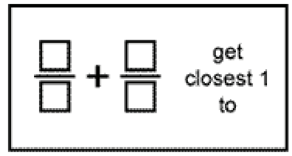
Mack (1990) présente et analyse plusieurs conduites des élèves montrant tout l'intérêt de la démarche utilisée et plus encore, toute l'importance de tenter d'établir des ponts entre les connaissances informelles des élèves et les connaissances provenant d'un enseignement antérieur portant sur les procédés d'addition et de soustraction. Ainsi, lors de la première période, un élève déclare que pour additionner des fractions, il faut additionner les nombres du dessus et les nombres du bas. Le chercheur lui propose alors de résoudre le problème suivant; elle montre une pièce de papier sur laquelle est écrit «4 – 7/8. Cet élève propose d'abord de changer le 4 par 4/4 et justifie ainsi sa proposition : *« Parce que vous avez besoin d'un tout, donc vous devez avoir une fraction et que c'est la fraction, et alors vous devez réduire, ou peu importe comment on appelle cela, que (le 4) 2 fois 2, ainsi vous aurez 8/8. Huit huitièmes moins 7, ainsi c'est 1/8 »* (*Ibid.*, p. 24, traduction libre). L'enseignant poursuit en lui disant : « *Maintenant, supposez que je vous ai dit que vous avez 4 biscuits et que vous mangez 7/8 d'un biscuit, combien de biscuits vous reste-t-il ?* » L'élève corrige alors sa réponse et dit qu'il reste 3 et 1/8. Par la suite, cet élève peut utiliser l'algorithme construit dans la situation réelle pour réviser son algorithme pour la soustraction et construire un algorithme approprié pour effectuer 4 1/8 – 5/8.

Cette étude nous apparaît fort pertinente, car elle suppose la mise en place de situations pour « accueillir les connaissances informelles et les connaissances plus formelles », pour « les faire intervenir et les examiner » et enfin, pour « accepter qu'elles soient sources de conflits ». Cette chercheure a d'ailleurs montré la pertinence de ces orientations dans une recherche subséquente sur la multiplication de fractions (Mack, 2001). Elle a montré l'évolution des raisonnements des élèves lors de la résolution de problèmes, évolution qui dénote l'importance de prendre en compte leurs connaissances informelles, notamment leurs capacités à partitionner, à recomposer une unité, prises en compte qui s'avèrent précieuses pour penser une construction/reconstruction harmonieuse de leurs rapports aux opérations. Cette étude corrobore également les résultats/constats obtenus par plusieurs chercheurs (Confrey, 1994; Kieren, 1995 ; Olive, 1999; Empson 2003, 2005) qui estiment que les mesures et les relations entre des parties résultant de diverses partitions d'un tout peuvent servir de tremplin dans le développement d'une compréhension de la multiplication de fractions.

Behr, Harel, Post et Lesh (1992, 1994) soulignent l'importance de s'attarder à la relation entre le dénominateur du multiplicande et le numérateur du multiplicateur lorsque le multiplicateur est considéré comme opérateur. Ces études portent à notre attention l'importance de confronter les élèves à la diversité des types de relations possibles : (a) a/b X b/d; (b) 1. a/nb X b/d or 2. a/b X nb/d ; (c) a/b X c/d. Kieren (1995), Olive (1999), Mack (2001), ainsi que Hackenberga et Tillemab (2009), soulignent également que les problèmes multiplicatifs impliquant deux fractions unitaires (1/b x 1/d) constituent l'entrée la plus accessible aux élèves puisqu'ils sont susceptibles de rejoindre davantage leurs connaissances sur les nombres entiers et la division. Hackenberga et Tillemab (2009) précisent d'ailleurs que les enseignants doivent être sensibles à la diversité de ces relations, car elles sollicitent des processus cognitifs qui ne s'équivalent pas en terme de difficulté.

L'étude effectuée par Behr, Wachsmuth et Post (1985), ainsi que celle effectuée par Behr et Post (1986), proposent différentes activités d'addition de fractions. Dans cette dernière, les élèves sont amenés à sélectionner différents nombres (ex. 1, 3, 4, 5, 6,7), formant des fractions, dont la somme doit être soit : a) plus petite que 1; b) le plus près possible de 1; c) égale à 1. Afin d'encourager l'estimation faisant appel à l'ordre de grandeur des fractions et de décourager la recherche d'un algorithme, un délai est imparti.





Lors de ces tâches, les élèves ont mis en œuvre différentes stratégies: 1) l'utilisation de fractions repères : former deux fractions qui sont près de ½ (ex. de réponse d'élève 6/11 et 3/7); choisir une fraction (ex. 5/6; regarder ce qu'il manque pour compléter l'entier et choisir la fraction la plus près pouvant être formée (1/7) ou former deux fractions qui soient près de ½ (6/11 et 3/7); 2) l'exploitation de certaines opérations mentales (ex. « 1/3 est équivalent à 4/12. Combien de douzièmes sont nécessaires pour obtenir 1? »). Cependant, ces stratégies ne sont pas toujours exploitées de façon adéquate; par exemple,

Au terme de l'expérimentation, les auteurs concluent que l'estimation n'est pas une tâche facile pour les élèves, qu'elle est plus complexe qu'ils ne l'avaient prévu. Ils invitent alors les élèves à : a) nommer une fraction qui est très près de 1; b) nommer une fraction qui est si près de 1 que tu penses que personne ne pourra en donner une plus près; c) nommer une fraction qui est si près de 0 que tu penses que personne ne pourra en donner une plus près. Ces activités visent également à permettre aux élèves d'observer l'influence du changement des numérateurs ou des dénominateurs sur l'ordre de grandeur des fractions. Par la suite, des tâches similaires à celles présentées antérieurement sont alors proposées; dans ces dernières tâches, diverses contraintes sont imposées: a) sur le choix de fractions faisant partie d'une liste, par exemple de la liste suivante : 1/2, 1/3, 2/3, 1/4, 2/4, 3/4, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5); b) sur le nombre de fractions pouvant être utilisées (par exemple, 3 fractions); c) sur la fraction cible (par exemple, 3/4 ou 1 1/12); d) sur les opérations à exploiter. Une autre variation sous forme de jeu consiste à opposer deux élèves qui doivent choisir les fractions et les opérations, afin d'atteindre précisément certaines cibles (0,1, ½ , 1 ½ ou 2), avec ou sans calculatrice. Avec la calculatrice un élève choisit une cible et entre la première fraction; l'autre élève détermine l'opération et l'autre nombre et ainsi de suite. Les points sont accordés au regard de la proximité de l'atteinte de la cible.

Bien que ces activités « rétroactives » ont montré des résultats forts intéressants (comparaison de fractions comportant des numérateurs ou des dénominateurs communs; estimation de la partie manquante d'une fraction pour compléter l'entier (4/5 vs 5/6)), nous croyons qu'il aurait été profitable d'offrir aux élèves - dès le départ - un milieu leur fournissant des rétroactions sur leur résultat et leur permettant de faire les réajustements possibles. Ceci dit nous retenons que la compréhension de l'ordre de grandeur des fractions et l'estimation sont des aspects fort importants en vue d'effectuer des opérations et de résoudre des problèmes.

2.3.2.3. Dispositifs visant non seulement une transformation des rapports aux nombres rationnels des élèves en difficultés, mais également de leurs habitus d'élèves en difficultés

Les études présentées, jusqu'à maintenant, rendent compte de l'importance de la résolution de problèmes dans la construction du concept de nombre rationnels et des opérations sur les nombres rationnels. Nous complétons notre présentation des dispositifs didactiques en nous intéressant à une étude dont la préoccupation centrale est la modification des pratiques mathématiques des élèves. Dans notre recherche auprès d'élèves en difficultés d'apprentissage, une telle préoccupation revêt une importance indéniable; sans une telle transformation, il est difficile d'agir et surtout, d'infléchir leurs habitus « d'élèves en difficultés ».

Les erreurs identifiées dans l'exécution de calculs sur des fractions, comme nous l'avons vu précédemment, sont généralement interprétées comme des événements qui invitent à une re-construction du concept de fraction et du sens des opérations sur les fractions (voir, entre autres, les études effectuées par Vergnaud, Benhadj et Dussouet, 1979). Le dispositif conçu et mis à l'épreuve par Sensevy (1998) a retenu notre attention pour diverses raisons : il s'agit d'un dispositif qui, non seulement permet aux élèves d'éprouver leurs connaissances et leurs compétences, mais également modifie leurs rapports aux mathématiques, à leur apprentissage, à leur « statut d'élèves », à leurs habitus.

Comme le rappelle Sensevy (1998, p. 111),

> *« La recherche relatée ici tente donc en particulier de comprendre et de caractériser le « profit épistémologique » que les élèves peuvent tirer de la modification topologique qui leur assigne une tâche particulière, non celle de résoudre des problèmes, mais celle d'en fabriquer les énoncés. Ce type de tâche a été proposé par exemple par Brousseau (1986), au sein d'une recherche dont la question était : « Une activité réflexive (laquelle, dans quelles conditions, etc.) peut-elle améliorer la compréhension des notions et l'efficacité des apprentissages (comment le vérifier)? »*

Sensevy s'appuie sur la typologie des problèmes impliquant des fractions définie par Vergnaud, Benhadj et Doussouet (1979) et sur leur étude effectuée auprès de plusieurs classes d'élèves de l'enseignement primaire (CM2) et secondaire (6^{e}). Dans cette étude, trois types de tâches ont alors été examinés (Sensevy, 1998, p. 112) : *« Tâche (a) : connaissant la grandeur initiale et l'opérateur fractionnaire, trouver la grandeur finale; Tâche (b) : connaissant la grandeur initiale et la grandeur finale, trouver l'opérateur; Tâche (c) : connaissant l'opérateur et la grandeur finale, trouver la grandeur initiale. »*). Les chercheurs ont alors retenu deux tâches particulièrement difficiles, soit : *« - la recherche du rapport entre deux grandeurs (Tâche b); - la recherche de la grandeur initiale dont on a pris une fraction connue (Tâche c)* » (Sensevy, 1998, p. 113). Ils suggèrent une démarche didactique offrant aux élèves la possibilité de se familiariser avec la structure des problèmes comportant des fractions. Les tâches suivantes pourraient être proposées aux élèves : a) anticiper la ou les questions que l'on peut formuler à partir des données fournies par le problème, problème ne comportant pas de questions; b) identifier les informations à considérer pour résoudre le problème; c) produire une représentation (schéma ou écriture mathématique) du problème.

Le dispositif sur « la fabrication des problèmes de fractions » conçu et mis à l'épreuve par Sensevy (1998) auprès d'élèves faibles en mathématiques, élèves intégrés dans des classes régulières de la dernière année de l'enseignement primaire, prend appui sur les études précédentes. Dans un premier temps, Sensevy présente aux élèves la typologie de problèmes établie par Vergnaud (1981) et invite les élèves à recourir à cette typologie pour identifier divers types de problèmes de soustraction. Il leur est ensuite demandé de produire une fiche comportant un problème de chaque type. Au verso de chacune des fiches, les élèves doivent recourir à la typologie pour inscrire le type de problème rédigé. Chaque fiche est ensuite vérifiée par une dyade d'élèves. Si elle est jugée adéquate, elle est placée dans le fichier de la classe. Sinon, les élèves doivent aller voir ceux qui ont construit la fiche et trouver un consensus. S'il y a accord, on place la fiche dans le fichier; dans le cas contraire, les élèves doivent examiner ensemble le problème. Les élèves ont de plus la responsabilité de détecter les erreurs.

À la fin de la première année de la recherche, les élèves commencent à travailler sur les fractions. Au fur et à mesure de leurs apprentissages, on leur présente des problèmes de fractions. Avec le soutien de l'enseignant, ils peuvent reconstituer la typologie effectuée par Vergnaud (1981) pour les problèmes impliquant les fractions et utiliser le vocabulaire s'y rapportant. Après cette période de familiarisation avec la typologie, les élèves sont alors invités à rédiger des problèmes de fractions et à inscrire ces problèmes sur une fiche, en identifiant les types de problèmes.

Pour montrer le travail réalisé par les élèves, Sensevy (1998, p. 121) fait état d'une fiche comportant 6 problèmes; nous reproduisons cette fiche. Notez que cette fiche a été vérifiée par un groupe d'élèves.

> *« 1/ Dans une bouteille de limonade, il y a 500 bulles. Trois quarts des bulles sont plus petites que les autres. Quel est le nombre de bulles plus petites que les autres? [État final]*
> *2/ Dans une bibliothèque, il y a deux tiers des livres, ce qui veut dire 14 livres, qui sont recouverts. Combien de livres y a-t-il dans cette bibliothèque? [État initial]*
> *3/ En colonie de vacances, deux tiers sont des filles. Il y a 30 filles. Combien y a-t-il d'enfants dans cette colonie? [État initial]*
> *4/ En montagne, 10 promeneurs sur 40 aiment les animaux. Quelle fraction des promeneurs aiment les animaux? [Transformation]*
> *5/ Un bus transporte 32 personnes. 5/8 sont handicapés. Combien de personnes sont handicapées?[État final]*
> *6/ Dans une usine d'automobiles, 30 voitures sur 180 sont de marque américaine. Quelle fraction de voiture est de marque américaine? [Transformation] »*

Les problèmes précédents sont représentatifs des problèmes fabriqués par la majorité des élèves. L'analyse des données des problèmes rédigés par l'ensemble des dyades permet d'identifier certaines caractéristiques des productions des élèves (Sensevy (1998, pp. 122-124), dont : l'utilisation exclusive de nombres entiers ; l'utilisation exclusive de grandeurs discrètes; le recours à des fractions de numérateur 1 et à de petits nombres, dans les problèmes de transformations; le recours fréquent à des nombres qui sont des mesures discutables des objets choisis; la pauvreté de la syntaxe des phrases ; le choix de situations plus ou moins plausibles. Une fiche de critères pour la production d'énoncés de problèmes a alors été construite par le chercheur, à partir des erreurs et difficultés mises en évidence chez les élèves. Cette fiche a été utilisée pour orienter les discussions des élèves, lors de la fabrication et de la vérification des problèmes, ainsi que pour faire « évoluer les productions des élèves ». Les élèves étaient invités à consulter cette fiche pour rédiger leurs problèmes et examiner les textes alors produits. Il importe de mentionner que plusieurs fiches ont été proposées au cours de l'année; ces fiches prenaient ainsi en compte l'évolution des analyses et des suggestions proposées par les élèves lors d'examens de fiches déjà construites. « *Les élèves devaient donc se pencher sur des fiches déjà construites, ils cherchaient à les améliorer, et tentaient de critérier l'amélioration qu'ils pensaient avoir apportée* » (Sensevy, 1998, p. 126).

Les résultats de cette séquence sont très positifs. On remarque un «*accroissement de la perspicacité numérique des élèves*» (Sensevy, 1998, p. 124) ; une telle perspicacité ne peut se construire qu'à partir de pratiques et d'exercices diversifiés. On observe également une complexification des problèmes de fractions. À titre d'exemple, voici un énoncé de problème, énoncé faisant suite à une révision par les élèves (p. 144) : *« Une marchande a des légumes et des oranges. Elle a 48,88 kg d'oranges, cela représente les 8/3 des kilos de légumes. Combien a-t-elle de kilos de légumes? »* Sensevy (1998) mentionne enfin que les résultats de ces élèves aux épreuves de fin d'année sont positifs. La majorité des élèves ont, entre autres, réussi à fabriquer au moins un problème avec une fraction supérieure à un et à expliciter leur travail; ils ont pu également formuler des questions pertinentes et résoudre des problèmes impliquant des nombres rationnels. Le problème suivant qui a été réussi par 19 des 23 élèves présents lors des épreuves de fin d'année permet d'apprécier l'évolution de leurs rapports aux problèmes impliquant des nombres rationnels (p. 166) : *« À la Clore Galery (Tate Galery), le nombre d'aquarelles* *de Turner constitue les 9/2 du nombre de tableaux du même peintre. La Clore Galery possède 1 350 aquarelles de Turner.* »

Synthèse sur les dispositifs didactiques pour la construction ou la reconstruction de rapports plus adéquats aux nombres rationnels

Les dispositifs didactiques pour la construction ou la reconstruction de rapports plus adéquats aux nombres rationnels, comme le montrent les études précédentes effectuées par plusieurs chercheurs, nous semblent prendre appui sur les difficultés dont nous avons fait état à la section précédente et sur des transpositions didactiques de connaissances et savoirs sur les nombres rationnels qui peuvent concourir à la construction ou à la reconstruction de rapports adéquats à ce domaine important des mathématiques. Que ce soit par l'entremise de situations sollicitant le recours à divers sens de la fraction, à des registres sémiotiques variés, à l'estimation de fractions ou de résultats d'opérations, à la résolution de problèmes impliquant divers sens de la fraction et permettant de contrer les rapports souvent technicistes aux opérations sur les fractions, ces dispositifs font appel à des coordinations de connaissances sur les nombres rationnels qui peuvent contribuer à l'établissement de rapports plus adéquats aux nombres rationnels. Nous avons ainsi constitué un répertoire de rapports problématiques en fonction des principaux habitats et une banque de dispositifs qui pourront être utilisés ou adaptés dans une perspective d'insertion écologique de situations, selon l'évolution du processus d'acculturation des différents acteurs. En effet, les choix des situations, de leur adaptation et de l'ordre de présentation dans lesquels nous comptons inscrire de telles tâches seront déterminés par le milieu. Nous avons vu à ce propos que même si nous avons réussi à cerner certains rapports problématiques, il n'en demeure pas moins que la prise en compte des conditions institutionnelles (habitus des élèves, contrat, etc.) est nécessaire pour mieux comprendre les conditions dans lesquelles de telles conduites apparaissent, afin de mieux interpréter leurs difficultés et ainsi pouvoir infléchir leurs rapports aux nombres rationnels. Ce travail nous éclaire toutefois quant aux variables didactiques potentielles permettant de concevoir des situations qui, non seulement, confrontent l'élève aux difficultés répertoriées précédemment mais, incluent également des moyens de les surmonter.

Nous avons pu également percevoir qu'il existe trop peu de situations proposées aux élèves en difficultés comportant des tâches qui ne sont pas différentes de celles présentées à des élèves de classes régulières, voire parfois plus complexes que celles généralement présentées aux élèves de classes régulières. Pourtant, comme le montrent Mazzocco et Devlin (2008), ce n'est pas tant le type de difficultés qui distingue les élèves qui présentent ou non des difficultés d'apprentissage, mais la persistance de ces difficultés.

Comme nous en avons fait état précédemment, les dispositifs didactiques conçus par Nadine et Guy Brousseau (1987), dispositifs qui ont été adaptés et exploités avec profit par Blouin (2002), auprès d'élèves de 1re secondaire présentant des difficultés d'apprentissage, proposent des situations dans lesquelles les élèves peuvent s'investir et profiter des rétroactions du milieu pour réviser leurs démarches. Les situations de formulation et de validation que comportent ces situations permettent également aux élèves de confronter leurs démarches, leurs représentations et leurs solutions. Rares, à notre connaissance, sont les dispositifs didactiques qui présentent de telles possibilités. Toutefois, nous avons pu apprécier les choix des situations présentées dans plusieurs des dispositifs visant la transformation des rapports des élèves à des objets spécifiques de l'enseignement des rationnels. Les textes qui présentent ces dispositifs et rendent compte des conduites des élèves qui ont bénéficié de ces dispositifs font peu état des interactions didactiques, interactions qui, comme l'a bien montré Conne (2003), s'avèrent encore plus déterminantes, lorsque l'enseignement concerne des élèves en difficultés d'apprentissage. Parmi les interactions didactiques préconisées par Conne (Conne, Favre et Giroux, 2006), celles qui consistent à réagir à des réponses inadéquates des élèves, à des questions formulées par des élèves qui peinent à s'engager dans des tâches, en proposant à ces élèves des tâches similaires, comportant, par exemple, des données numériques plus faciles à traiter, s'avèrent des plus précieuses (voir, entre autres : Lemoyne et Bisaillon (2006); Mack (1990)). Les interactions didactiques, il va de soi, peuvent revêtir diverses formes (questions, informations,…) et affecter le contrat didactique. Ces interactions sont fréquemment associées à des incidents, à des événements inattendus.

2.4. Opérationnalisation des résultats issus de la recherche dans une perspective écologique

Nous avons fait état, dans la problématique, des défis que soulève l'enseignement aux élèves présentant des difficultés d'apprentissage, notamment, lorsque cet enseignement concerne les nombres rationnels. La prise en compte de ces défis, dans une perspective didactique, nous a également permis de faire état des orientations générales de notre recherche. Le choix de favoriser une intégration écologique de situations d'enseignement/apprentissage nous a conduit à mettre en place diverses phases du processus d'acculturation. Nous avons ainsi procédé à un examen des programmes d'enseignement des nombres rationnels, au 3e cycle du primaire et au 1er cycle du secondaire. Nous avons poursuivi notre démarche d'acculturation par l'analyse de recherches faisant état de rapports problématiques aux nombres rationnels d'un pourcentage non négligeable d'élèves de l'enseignement primaire et secondaire, recherches effectuées dans plusieurs pays. Visant une transformation de ces rapports, plusieurs chercheurs ont conçu et mis à l'essai de nombreux dispositifs didactiques, dispositifs que nous avons examinés et qui nous ont, entre autres, permis de constituer un répertoire de situations didactiques qui pourraient potentiellement être mises à profit dans notre recherche ou adaptées, en prenant en considération le fonctionnement du milieu.

L'inscription écologique de situations est un objectif essentiel dans notre recherche; l'atteinte d'un tel objectif n'est pas évidente. Afin de dégager les dimensions à privilégier pour une inscription écologique de situations, nous nous appuierons sur la recherche effectuée par Roditi (2005). Cette recherche nous permettra ensuite de préciser les phases de la démarche d'acculturation institutionnelle que nous privilégierons dans notre recherche. Les objectifs poursuivis dans notre recherche seront ensuite précisés.

2.4.1. Analyse de pratiques : la nécessité de tenir compte à la fois des effets potentiels visés et des acteurs.

L'étude effectuée par Roditi (2005) porte sur les pratiques de 4 enseignants de 6e année, lors de l'enseignement de la multiplication des décimaux (3 à 5 heures environ). Ces enseignants partageaient une même formation et des expériences comparables; les classes étaient également fort comparables (conditions d'enseignement analogues : durée, manuel scolaire, niveau des élèves, effectifs, etc.). Par l'entremise de cette étude, Roditi tente de préciser «*ce que recouvre entre contraintes et liberté pédagogique, une pratique ordinaire d'enseignement. »* (*Ibid*., p.18). Ces précisions nous permettent, dans le cadre de notre recherche, de mieux caractériser la démarche d'acculturation institutionnelle du chercheur.

L'analyse des pratiques enseignantes effectuées par Roditi montre notamment la présence d'une homogénéité tangible (ex. organisation de la leçon), bien que maintes divergences apparaissent (ex. gestion des incidents). À titre d'exemple de convergence, Roditi (2005) remarque sensiblement le même nombre d'exercices d'application, comme s'il existait un nombre d'exercices à partir duquel il était possible d'attester de la «compréhension» des élèves. Le chercheur relève également un dosage fort similaire entre les calculs qui posent une difficulté d'application de la règle de la virgule (60%) et ceux qui n'en posent pas (40%). Cela permettrait d'offrir conjointement l'opportunité de travailler sur les erreurs des élèves et d'attester de leur réussite. Ce levier compensatoire préserve ainsi la confiance des élèves en leurs capacités d'apprentissage. L'ensemble des analyses réalisées par Roditi révèlent que la convergence des pratiques enseignantes peut être attribuée à la multiplicité de contraintes institutionnelles qu'ils partagent (objectifs et contraintes d'enseignement de la multiplication des décimaux) et à la connaissance du métier qui leur confèrent une « légitimité sociale » aux yeux de leurs collègues, des parents et des élèves. Il en est ainsi de certaines

> « *contraintes globales comme l'organisation du système scolaire qui conduit à la répartition des élèves en divisions d'effectif donné, à l'attribution d'un contingent horaire, à la définition d'un programme national commun, des contraintes plus locales liées aux relations que chaque professeur entretient avec les différents acteurs de son établissement scolaire : l'administration, les collègues, les élèves et leurs parents; des contraintes plus localement encore, l'utilisation de tel manuel scolaire. D'autre part, il faut comprendre les contraintes qui viennent de l'exercice du métier dans la classe, les contraintes de temps, de gestion d'un groupe de trente élèves dont les dynamiques d'apprentissages sont toutes différentes, et aussi des contraintes professionnelles comme la gestion de la fatigue, de la tension.»* (*Ibid.*, p. 27).

Par ailleurs, nous pouvons remarquer que malgré l'emploi d'un manuel commun et la présence de conditions fort similaires, de nombreuses divergences émergent dans les pratiques des enseignants. Par exemple, l'enseignant qui exploitait le plus d'activités issues du manuel s'avère être celui dont le projet diffère le plus de celui des auteurs du manuel. Et, selon Roditi (2005, p.123), ce projet agit comme principal fil conducteur et moteur dans les choix des enseignants : «*Alors que les professeurs utilisent le même manuel scolaire, ils s'investissent personnellement dans la conception des projets d'enseignement, exerçant ainsi leur liberté pédagogique*». Cet investissement est considérablement influencé par l'adhésion à l'une des deux grandes conceptions guidant le projet d'enseignement, une vision de la classe « lieu de savoir » dans laquelle *« l'exposition des savoirs a lieu très tôt, les activités effectives sont surtout des applications, les incidents sont plutôt des questions ou des erreurs, leur gestion relance rarement l'activité des élèves. Dans une classe « lieu de travail », le savoir est institutionnalisé assez tard comme un bilan, les activités de recherche dominent, la gestion des incidents relance l'activité des élèves (p.180)».* Ainsi, en dépit des contraintes et des conditions communes, il existe des marges de manœuvre possibles. Des divergences entre les pratiques enseignantes peuvent ainsi apparaître, non seulement, dans la priorisation de certaines situations d'enseignement, mais également, dans la gestion des incidents. Ces résultats fort intéressants montrent la nécessité, pour un chercheur souhaitant procéder à une inscription écologique de situations, de procéder à une démarche d'acculturation. En effet, sa présence en classe permet de mieux comprendre les différentes contraintes locales et la liberté que se donne l'enseignant, mais surtout d'accéder, par l'entremise du projet de l'enseignant, à la cohérence[20] qui unifie sa pratique pédagogique (même si cela implique parfois des compensations, compensations qui sont davantage visibles, tangibles en « situation d'action » en classe.)

La recherche effectuée par Roditi (2001) concerne les « pratiques enseignantes ordinaires de la multiplication des décimaux », alors que, dans notre recherche, nous nous préoccupons de la conception (élaboration et gestion) et de l'insertion de situations d'enseignement/apprentissage qui visent une transformation des habitus des élèves en difficultés d'apprentissage et une re-construction de rapports plus adéquats aux nombres rationnels (représentation, calculs et résolution de problèmes). Ainsi, il nous semble primordial de viser non seulement l'acculturation du chercheur à l'enseignant, mais aussi

---

[20] Ce que certains chercheurs appellent l'ingéniosité didactique de l'enseignant.

du chercheur aux élèves (habitus et rapports) et *vice versa.* La réciprocité de ce processus nous apparaît également nécessaire pour favoriser la complicité de l'enseignant et des élèves, car il favorise l'arrimage des projets des élèves, de l'enseignant et du chercheur. Ce qui, à notre connaissance, est très rarement pris en compte dans les recherches.

2.4.2. La démarche d'acculturation institutionnelle retenue pour une inscription écologique de situations

La démarche d'acculturation institutionnelle retenue pour une inscription écologique de situations, comme nous l'avons écrit précédemment, prend appui sur la démarche effectuée par Roditi (2005) pour examiner les pratiques enseignantes. Cette démarche nous est particulièrement précieuse pour établir diverses phases de la démarche d'acculturation que nous privilégions.

Première phase d'acculturation : s'informer de l'enseignement possible

Dans son étude, Roditi (2005) procède d'abord à une analyse *a priori* qui prend en compte ce qui est prescrit (par l'institution scolaire au professeur, et par le professeur aux élèves), ce qui est contraint (par les horaires, les programmes, le manuel utilisé…), et ce qui pourrait être fait. Cette première analyse constitue, selon nous, une « première phase » du processus d'acculturation du chercheur. L'intérêt porté aux publications de recherches en didactique des mathématique, aux publications à l'intention des professeurs, aux manuels scolaires, aux programmes, aux compléments et instructions officielles, ainsi qu'aux évaluations des compétences des élèves, favorise une meilleure compréhension des pratiques enseignantes en fonction des apprentissages potentiels et des contraintes institutionnelles. Cette démarche est fort intéressante car elle met en exergue l'importance de considérer, dans une démarche écologique, les enseignements possibles. « *L'adjectif « possible » doit s'entendre d'une part sans tenir compte du contexte institutionnel, et d'autre part en considérant les prescriptions et les contraintes qu'il impose* » (*Ibid*., p.18).

Seconde phase d'acculturation : comprendre l'enseignement envisagé

L'analyse *a priori* complétée, Roditi effectue une première analyse du projet des enseignants, en tenant compte des choix du champ mathématique, des stratégies d'enseignement et des tâches prescrites aux élèves. Ainsi, pour mieux comprendre la démarche de l'enseignant, le chercheur peut, dans une seconde phase, rencontrer l'enseignant, s'informer des projets d'enseignement envisagés, de l'utilisation qu'il compte faire ou qu'il fait du manuel.

Troisième phase d'acculturation : assister à l'enseignement

Cette troisième phase d'acculturation permet au chercheur d'assister à quelques périodes d'enseignement pour mieux identifier les rapports des élèves à l'enseignement/apprentissage, aux mathématiques enseignées, les interactions didactiques (échanges entre les élèves, échanges entre les élèves et l'enseignant, gestion des incidents (des événements) didactiques par l'enseignant et par les élèves, etc.

Quatrième phase d'acculturation : participer à l'enseignement

Avec l'appui de l'enseignant, le chercheur peut par la suite participer à l'enseignement. Les situations d'enseignement peuvent provenir de l'enseignant, puis d'un travail de collaboration entre l'enseignant et le chercheur (la situation initiale pouvant provenir de l'enseignant ou du chercheur). Pour qu'une telle participation soit féconde, elle doit prendre appui sur démarche d'acculturation réciproque du chercheur, de l'enseignant et des élèves.

L'inscription écologique dans une démarche d'acculturation institutionnelle des différents acteurs (élèves, enseignants, chercheurs) permet de s'enquérir d'une meilleure compréhension de la particularité de l'institution classe, dans laquelle le chercheur souhaite intervenir, afin de créer des situations qui puissent s'y intégrer harmonieusement, mais également de saisir et de créer des niches (place des incidents, leurs gestions, projet de l'enseignant, activité effective des élèves, marge de manoeuvre que s'octroie l'enseignant) qui nous semblent déterminantes dans les interventions auprès des élèves en difficultés d'apprentissage.

2.5 Objectifs spécifiques de la recherche

Notre recherche concerne l'enseignement des nombres rationnels auprès d'élèves du 1er cycle du secondaire présentant des difficultés d'apprentissage en mathématiques. Elle a pour objectif général d'étudier les apports et les limites de l'insertion écologique de situations visant une transformation des rapports problématiques de ces élèves aux nombres rationnels. Ainsi, les situations envisagées devront non seulement prendre appui sur les études examinées précédemment, mais également tenir compte du programme d'enseignement, du manuel utilisé, des orientations de l'enseignante et du fonctionnement de la classe de mathématiques. Ces situations doivent ainsi s'inscrire dans une démarche d'acculturation institutionnelle qui concerne l'enseignant, le chercheur, les élèves. Les situations construites par le chercheur et l'enseignant seront ainsi objets d'étude.

Les objectifs spécifiques de notre recherche sont les suivants: 1) caractériser la progression de la démarche d'acculturation institutionnelle de l'enseignant, du chercheur et des élèves et ses effets sur les processus d'élaboration et de gestion des situations d'enseignement, ainsi que sur les caractéristiques de ces situations; 2) préciser l'évolution des connaissances, des habitus et des rapports des élèves aux rationnels, au cours de la séquence d'enseignement.

Chapitre III. Méthodologie

Pour définir notre méthodologie de recherche, nous présentons d'abord le dispositif d'acculturation institutionnelle de notre recherche. Le processus d'élaboration et de gestion de dispositifs didactiques sur les nombres rationnels est, dans le cadre d'une insertion écologique que nous privilégions, un processus itératif et dynamique requérant l'insertion du chercheur dans ce milieu et la prise en compte de la noosphère, notamment, des enseignants qui oeuvrent dans ce milieu, des orientations et pratiques qu'ils privilégient, ainsi que des programmes scolaires et dispositifs didactiques préconisés par les responsables de l'éducation (Chevallard, 1994). Au regard de notre adhésion à cette approche, nous rendons compte de ce qui relève de la planification méthodologique, planification ne pouvant être clairement définie dans la mesure où elle émergera du processus d'acculturation des différents acteurs (enseignante, étudiante-chercheure, chercheure, élèves). En effet, une part importante d'informations, habituellement répertoriées dans la partie méthodologique, notamment, les informations concernant le processus de gestion et d'élaboration des dispositifs didactiques, sera exposée de façon plus précise au chapitre IV. Nous complétons ce chapitre en précisant les processus de collecte, de construction, d'analyse et d'interprétation des données de notre recherche.

Considérant l'importance et la complexité d'une démarche d'acculturation pour l'inscription écologique de dispositifs didactiques, pour l'analyse et l'interprétation des données de notre recherche, nous avons jugé plus que pertinent d'accroître la fiabilité dès ces diverses phases en y associant différents acteurs (étudiante-chercheure et directrice de thèse[21]), ces acteurs participant également à l'enseignement effectué en classe. Ainsi, en plus de l'enseignante et de l'étudiante-chercheure, la directrice de thèse participe à l'ensemble des activités réalisées dans le cadre de cette recherche (interjuge). Afin d'avoir une vue d'ensemble de ce processus, nous présentons à la page suivante, une figure faisant état des objectifs et procédés associés à chacune des phases de la méthodologie de notre recherche. Les éléments de cette figure seront examinés plus en détail par la suite.

[21] Nous recourons à l'expression « étudiante-chercheure » pour désigner l'auteure de cette thèse et à l'expression « chercheure » pour désigner la directrice de cette thèse.

PHASES DU PROCESSUS D'ACCULTURATION
(inspiré de Roditi, 2001)

PHASE 1 — **S'informer de l'enseignement possible**
Analyse *a priori* de ce qui
- est prescrit
- est contraint
- pourrait être fait

PHASE 2 — **Comprendre l'enseignement envisagé**

PHASE 3 — **PHASE 3,5** — **PHASE 4** — **Intégration progressive dans le milieu**
Assister à l'enseignement — **Participer à l'enseignement**

COLLECTE ET TRAITEMENT DE DONNÉES

PHASE 1

Étude pilote
- expérimentation de situations de résolution de problèmes avec aides à la représentation

Programmes
- 3[e] cycle priamire
- 1[er] cycle secondaire

*identification de différentes fonctions
*identification de sauts conceptuels

Recherches portant sur :
* Faire ressortir les convergences

1) objet Nombres rationnels

2) difficultés recensées
* selon habitats
* élèves du secteur régulier/spécial
* recherches actuelle/ ancienne

3) dispositifs d'enseignement
* programme/spécifique
* nationale international
* élève du secteur régulier/spécial

Manuel, cahier de l'élève et guide de l'enseignant
En croisant nos regards de chercheurs, d'enseignant et d'élève
a) réaliser la tâche
b) identifier les connaissances sollicitées
c) identifier les difficultés potentielles
d) proposer différentes adaptations, en fonction
* des recherches
* de l'adéquation entre les objectifs poursuivis par l'auteur et la situation proposée

PHASE 2

1. Entretien téléphonique
ECH et ENS de l'étude pilote
- prise en compte de ses recommandations
- préparation de la rencontre

2. Adaptation de l'analyse du manuel
- sélection de la partie à venir dans leur classe
- souligner les adaptations

3. Rencontres
ECH, CH, 2 ENS de 1[re] sec. et 1 ENS de 2[e] sec. (étude pilote)
- Questions sur leur appréciation et utilisation manuel
- Présentation de situations potentielles

PHASES 3 – 4

intervention pendant l'enseignement
*soutenir le travail de certains élèves
* relever des conduites intéressantes

Observations en situations
* d'enseignement/apprentissage/ d'évaluation
* individuelle/en équipe

Journal de bord
- objets traités
- modalités pédagogiques
- évènements marquants
- difficutlsé des élèves

Partage des observations

Confrontation des interprétations

Identification de certaines niches/point d'ancrage

Élaboration et gestion des situations
*situations issues du manuel Perspective comportant, au besoin, des adaptations;
*situation construites en référence aux études effectuées dans le domaine, certaines de ces situations découlant d'une analyse de situations issues du manuel et d'autres, prenant appui sur les analyse des conduites des conduites des élèves dans d'autres situations;
*situations découlant d'une analyse de besoins spécifiques de l'enseignant

- enregistrements audio et audio visuel
* en cours de réalisation/ du retour
* Identifier les évènements marquants
- interactions entre ECH, CH, ENS, ELS
- conduites/productions, etc.

-production écrite

RÉSULTATS

PHASE 1

Identification de habitats et niches potentiellement fécondes
* représentation des nombres
* opération sur les nombres
* résolution de problèmes

Critères de gestion et de conception de situations
* exposer les élèves à une varitété de représentations et leur permettre d'effectuer des transitions à l'intérieur(traitement) et entre différents registres
* accueillir et prendre appui sur les connaissances informelles des élèves
* solliciter les divers sens de la fraction
* favoriser les interactions
* confronter les élèves aux conditions rendant les tâches difficiles (se référer à la partie sur les rapports problématiques)

Répertoire de situations phares
* épaisseur d'une feuille de papier
* situations de modélisation (experimentées)

Répertoire de rapport problématiques d'élèves selon l'habitat
* sériation : différents registres utilisés , quantité de nombres à comparer, etc.
* intercalation : si les nombres paraissent sucessif (2/3 et 3/4), etc.
* opérations: sens (représentation des opérations); calculs (modèles implicittes: la multiplication donne plus grand)

PHASE 2

Utilisation du manuel
- utilisation linéaire du manuel
- accompagnement des élèves dans l'entrée d'un dossier (situation-problème)
- ajout d'exercices
- prises de notes dans un cahier

Acculturation du chercheur et des enseignants
- réajustement de la présentation des adaptations possibles

PHASES 3 – 4

A VENIR...

Objectif 1: Caractériser la progression de la démarche d'acculturation institutionnelle et ses effets sur le processus d'élaboration et de gestion des situations d'enseignement.

Description de l'intégration progressive, du processus et de gestion des situations d'apprentissage
- choix de l'objet d'apprentissage
- choix des variables didactiques
- partage des tâches
- évènements marquants : montrant des modifications dans les modèle culturaux initiaux

Objectif 2: Préciser l'évolution des connaissances, des rapports et des habitus
- présentation des conduites des élèves
* taux de réussite général du groupe
* triangulationdes donneés permettant d'inférer les connaissances mobilisées par les élèves; leur rapport au savoir

- comparaison des conduites
* dans le temps
* à celles des taches répertoriées dans le cadre auprès d'élèves du régulier
* dans divers contextes (apprentissage/évaluation)
* dans des tâches construites par les acteurs de la recherche/ par les enseignants de l'école

Figure 6 : Tableau synthèse de la méthodologie de recherche

3.1. Dispositifs d'acculturation institutionnelle de notre démarche de recherche

L'acculturation institutionnelle de notre démarche de recherche, comme nous en avons fait état au chapitre précédent, est à la fois un objectif et un processus incontournables pour une inscription écologique et pertinente de dispositifs didactiques pour les élèves présentant des difficultés en mathématiques. Dans le cadre de notre recherche, il appert essentiel de mieux comprendre le fonctionnement didactique de l'institution « classe » afin de préparer, si possible, l'entrée, dans cette institution, de dispositifs qui permettent un travail « de dé-transposition / re-transposition didactique » (Antibi et Brousseau, 2001) et de construction de rapports plus adéquats aux mathématiques, aux nombres rationnels.

3.1.1. Phase 1 : S'informer de l'enseignement possible

Tel que défini dans le cadre théorique et présenté dans la figure 6, représentant l'ensemble de notre démarche de recherche, la première phase du processus d'acculturation consiste à « s'informer de l'enseignement possible », ce qui est prescrit, ce qui est contraint et ce qui peut être fait. Dans le cadre de notre recherche, cela s'est traduit par l'analyse des programmes, l'analyse des recherches portant sur l'objet *nombres rationnels*, sur les rapports problématiques des élèves aux nombres rationnels et sur les dispositifs didactiques visant la construction, ou la re-construction, de rapports plus adéquats aux nombres rationnels. Ces analyses ont été effectuées préalablement, lors de la présentation de la problématique et du cadre conceptuel de notre recherche. Avant l'entrée formelle dans la classe où s'est déroulée notre recherche, nous avons également effectué une étude exploratoire et procédé à l'analyse du manuel Perspective (Guay, Hamel et Lemay, 2005) que nous présentons ci-dessous.

3.1.1.1. Étude exploratoire effectuée auprès d'élèves d'une classe de 1[er] secondaire de l'école Vanguard

Comme nous en avons fait état au premier chapitre, avant d'entreprendre une telle recherche, une étude exploratoire (2004-2005) sur la résolution de problèmes, auprès d'élèves en difficultés d'apprentissage d'une classe de 1[er] secondaire de l'école Vanguard a été effectuée. En collaboration avec un enseignant de mathématiques[22], nous avons pu éprouver la pertinence de situations de résolution de problèmes mathématiques offrant entre autres aux élèves divers dispositifs de représentation de problèmes arithmétiques (Julo, 1995). Le choix des élèves était aussi guidé par les conditions et les objectifs d'enseignement prévalant dans ce groupe classe de 1[re] secondaire. Cette classe bénéficiait d'une période d'enseignement par semaine consacrée uniquement à la résolution de problèmes. De plus, il n'y avait pas de contrainte évaluative; le choix des problèmes n'était pas nécessairement relié aux objectifs précédemment poursuivis en classe. Le rapport de l'élève à la résolution de problèmes s'en trouvait ainsi affecté. L'enseignant responsable de ces activités encourageait les élèves à essayer diverses façons de résoudre des problèmes et adoptait une attitude ouverte face aux erreurs des élèves. Son expérience pratique a enrichi le contexte d'apprentissage, en permettant notamment de mieux anticiper les conduites des élèves et d'évoquer des contextes faisant partie de sa mémoire de maître (Brousseau, 1998; Brousseau et Centeno, 1991). Il s'agissait de conditions qui nous apparaissaient idéales pour cette première étude sur la résolution de problèmes

Lors de cette étude, l'enseignant titulaire de cette classe nous avait permis de présenter diverses situations en résolution de problèmes. C'est à cette occasion que nous avons pu expérimenter, entre autres, certaines situations issues de la recherche, telle *L'épaisseur d'une feuille de papier* (N. et G. Brousseau, 1987) et assister à la présentation et la gestion de situations issues du milieu. Les élèves montrant un engagement remarquable, un tel engagement a bien sûr ravi l'enseignant et l'étudiante-chercheure et nous a permis d'apprécier les possibilités d'apprentissage de ces élèves. Les interactions avec l'enseignant nous ont permis de mieux apprécier la pertinence et les exigences de la

[22] Nous tenons à remercier l'enseignant qui nous a permis d'effectuer cette étude exploratoire. Ses interventions ainsi que ses commentaires ont été grandement appréciés.

démarche d'acculturation institutionnelle. Ce premier contact avec le milieu *École Vangard* a aussi contribué à l'établissement d'une première complicité, complicité qui a servi de pont à l'entrée de notre projet dans le milieu. En effet, bien que cet enseignant ait, par la suite, été assigné à l'enseignement des mathématiques en 2e secondaire, il a accepté de nous conseiller et de nous accompagner dans la présentation de notre projet aux deux enseignantes de 1er secondaire. Lors d'un entretien téléphonique précédant la présentation de notre projet, il nous informe du prochain dossier qui fera l'objet de leur enseignement dans les semaines à venir.

3.1.1.2. Analyse a priori du manuel Perspective, manuel exploité en classe

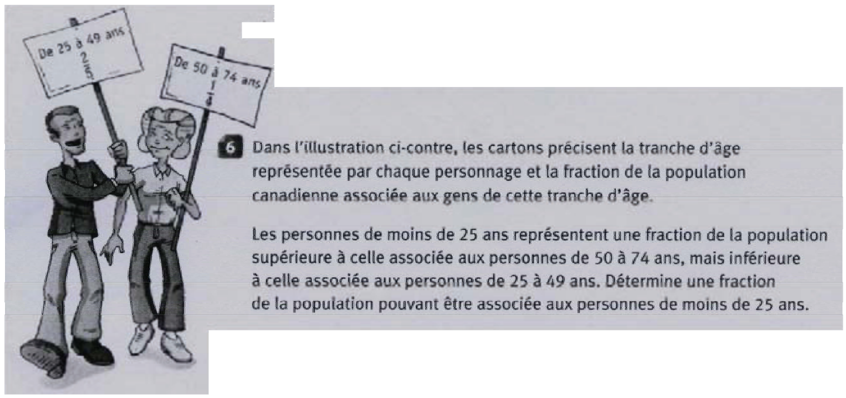
Tout enseignant, quels que soient par ailleurs ses rapports aux mathématiques et à l'enseignement de cette discipline, est, jusqu'à un certain point, contraint de respecter la décision de l'institution scolaire concernant le manuel d'enseignement en usage dans cette institution. Il est donc tout à fait essentiel d'examiner ce manuel afin d'effectuer une entrée « respectueuse, instruite et harmonieuse » du chercheur dans l'institution scolaire. Ce travail nous permettra de mieux comprendre les contraintes et les possibilités didactiques qu'offre son usage, ainsi que le projet de l'enseignant (ex. situations privilégiées).

Notre analyse prend appui sur les études qui ont été présentées dans le cadre conceptuel de notre recherche (construction des nombres rationnels, propriétés des nombres rationnels, sens des fractions, difficultés liées aux représentations, aux opérations et à la résolution de problèmes impliquant des nombres rationnels), ainsi que sur la typologie des problèmes additifs et multiplicatifs effectuée par Vergnaud (1991). En nous référant aux études précédentes, nous nous préoccuperons également de l'adéquation entre les objectifs poursuivis par l'auteur et le potentiel des situations qu'il propose. Nous procédons donc à une analyse de chacune des tâches et de l'ensemble des situations proposées dans une séquence.

Pour mieux apprécier le trajet didactique proposé par les auteurs du manuel, nous convenons de croiser nos regards de chercheur, d'enseignant-chercheur et d'élève sur les différents dispositifs proposés. Nos différents regards permettront de mieux saisir les enjeux de chacun des dispositifs, de mieux comprendre les choix effectués, de relever les apports, mais aussi les limites de chacun de ces dispositifs, de suggérer également l'aménagement de certains dispositifs. Nos regards simulés d'élèves seront précieux, dans la mesure où ils pourront nous faire voir les apprentissages résultant de chacun de ces dispositifs, leurs possibles transpositions d'un dispositif à l'autre et les apprentissages résultant des diverses tâches associées à chacun des dispositifs. Nous avons examiné chacune des séquences suggérées dans le guide d'enseignement du manuel *Perspective* (Guay, Hamel et Lemay, 2005) qui portent sur les nombres rationnels. Ce parcours nous a conduit à examiner le cahier de l'élève, le manuel de l'élève et le guide de l'enseignant et à : a) réaliser la tâche; b) identifier les connaissances mises en jeu; c) identifier les difficultés possibles et le potentiel de la tâche; d) proposer des adaptations, en fonction des recherches, de l'adéquation entre les objectifs poursuivis par l'auteur et la situation proposée, afin de construire un milieu pour permettre aux élèves de surmonter les difficultés ou encore, de les confronter à la complexité des nombres rationnels. Compte tenu de l'étendue de cette analyse, nous présentons fort brièvement l'organisation générale du manuel de l'élève et uniquement un exemple de problème qui permettra de saisir l'exploitation qui a été faite du cadre théorique. L'analyse ayant fait l'objet de la première rencontre avec les enseignants sera présentée dans la partie suivante; celle-ci permettra de mieux comprendre l'analyse générale d'un dossier. Il sera également possible de consulter l'analyse des situations retenues dans le chapitre d'analyse des résultats.

À travers différents dossiers thématiques (contextes extramathématiques), l'organisation du manuel *Perspective* (Guay, Hamel et Lemay, 2005) se présente ainsi : 1er temps → la préparation des apprentissages : situation exploratoire à laquelle reviendra l'élève à la fin du dossier pour effectuer la réalisation personnelle; 2^{e} temps → la réalisation des apprentissages se fait par trois situations-problèmes auxquelles sont associées des activités permettant de construire les nouveaux concepts et processus ainsi que des situations d'application; 3e temps → l'intégration et le réinvestissement des apprentissages sont vécus par la réalisation personnelle et la résolution d'une banque de situations-problèmes.

Analyse d'une situation d'application provenant du manuel Perspective (Guay, Hamel et Lemay, 2005, p.286)



6 Dans l'illustration ci-contre, les cartons précisent la tranche d'âge représentée par chaque personnage et la fraction de la population canadienne associée aux gens de cette tranche d'âge.

Les personnes de moins de 25 ans représentent une fraction de la population supérieure à celle associée aux personnes de 50 à 74 ans, mais inférieure à celle associée aux personnes de 25 à 49 ans. Détermine une fraction de la population pouvant être associée aux personnes de moins de 25 ans.

Cette situation a retenu notre attention pour les raisons suivantes : a) il n'est pas toujours évident pour les élèves de procéder à des intercalations de fractions, en particulier, lorsque les numérateurs et les dénominateurs des fractions sont des nombres naturels qui se suivent, les relations entre ces nombres faisant écran à la pertinence de recourir à des fractions équivalentes; b) le contexte de comparaison de populations peut, par ailleurs, être exploité pour permettre un travail plus conséquent sur les représentations de chacune des fractions, par exemple : 1) on pourrait inviter les élèves à produire diverses représentations fractionnaires de chacune des fractions; il est alors possible que la fraction spontanément associée à ¼ soit 2/8; si tel est le cas, on pourrait demander à ces élèves de trouver une fraction qui soit plus grande que 2/8, mais plus petite que 2/5; 2) on pourrait inviter les élèves à représenter les fractions en recourant à des nombres décimaux, ce qui pourrait permettre à certains des élèves de réviser leur jugement concernant l'impossibilité d'intercaler une fraction entre les fractions ¼ et 2/5; 3) on pourrait aussi inviter les élèves à recourir à diverses mesures de populations, à déterminer les mesures correspondant à chacune des tranches d'âge, à représenter les relations entre chacune de ces mesures et les mesures respectives des populations, à trouver ainsi d'autres mesures qui pourraient être associées à des fractions se situant entre ¼ et 2/5, en mettant en œuvre un raisonnement proportionnel et enfin, à exprimer les relations entre ces mesures (sens du dénominateur, des fractions équivalentes, de l'addition de fractions).

3.1.2. Phase 2 : Comprendre l'enseignement envisagé : rencontre avec les enseignants

L'acculturation du chercheur au fonctionnement de l'institution se manifeste clairement dans la manière de réaliser les premiers contacts avec les enseignants. Une présentation « instruite et respectueuse » du projet de recherche envisagée, présentation tenant compte du fonctionnement de l'institution et des apports précieux que les enseignants peuvent fournir aux chercheurs préoccupés par l'enseignement des mathématiques, est alors importante. Ainsi, lors de cette rencontre avec les deux enseignantes de 1^er^ secondaire et avec l'enseignant de 2^e^ secondaire qui avait participé à notre étude exploratoire[23], a) nous nous sommes intéressée à l'appréciation et l'utilisation du manuel par les enseignants; b) nous avons présenté une partie de notre analyse du dossier « J'ai un rêve». Le choix de ce dossier repose sur l'exploitation imminente[24], par les deux enseignantes, de ce dossier; c) nous avons également présenté quelques situations construites par l'enseignant ayant participé à l'étude exploratoire, situations qui nous semblaient importantes, compte tenu des objectifs de la présente recherche.

Les enseignants nous ont fait part de plusieurs remarques à l'égard du manuel : situations-problèmes parfois trop complexes, incohérence à l'intérieur de certains dossiers, retour intéressant sur la matière d'un dossier à l'autre, etc. Le plus grand problème était, selon eux, la présence de trop de documentations (manuel, cahier exercices, cahier complément, ressources en ligne, etc.); ils nous ont alors fait part des aménagements d'organisation et de sélection qu'ils ont effectués. L'utilisation qu'ils font

[23] Sa présence lors de cette rencontre nous apparaissait fort importante, cet enseignant pouvant témoigner de la pertinence de certaines tâches qui avaient été présentées aux élèves de sa classe.
[24] Cette information provient d'un entretien téléphonique avec l'enseignant ayant participé à l'étude pilote.

du manuel varie d'une classe à l'autre, mais selon leur propos, les enseignantes de 1er secondaire l'utilisent de façon linéaire.

Par la suite, nous avons expliqué les grands objectifs de notre projet : a) permettre de sauver du temps et, en même temps, de modifier les habitus et les rapports des élèves aux nombres rationnels; b) pour atteindre cet objectif, au lieu de multiplier, d'augmenter le nombre d'activités, d'exercices, nous favoriserons le recours à des situations plus riches (ex. augmenter le nombre de données pour obliger les élèves à établir des relations entre ces données, notamment, entre différentes représentations des nombres rationnels). Nous avons fait ressortir l'importance des assises écologiques de notre projet, c'est-à-dire de la nécessité de considérer la viabilité des situations pour la classe, de respecter les projets de l'enseignant, d'établir la cohérence des activités, etc. Nous avons également souligné l'importance d'une inscription progressive dans la démarche d'enseignement, arguant que nous devions nous familiariser avec les approches présentées en classe, les conduites des élèves et les objectifs poursuivis par les enseignantes. Pour illustrer nos propos, nous leur avons remis un document d'analyse et avons repris quelques exemples.

Nous présenterons une partie de l'analyse qui a été présentée aux enseignants. La figure suivante (Guay, Hamel et Lemay, 2005, p. 255b) donne un bref aperçu de l'organisation du dossier « J'ai un rêve »; il montre bien les objets d'enseignement privilégiés et la prise en compte des besoins de certains élèves (fiches de révision et de soutien, exercices complémentaires).

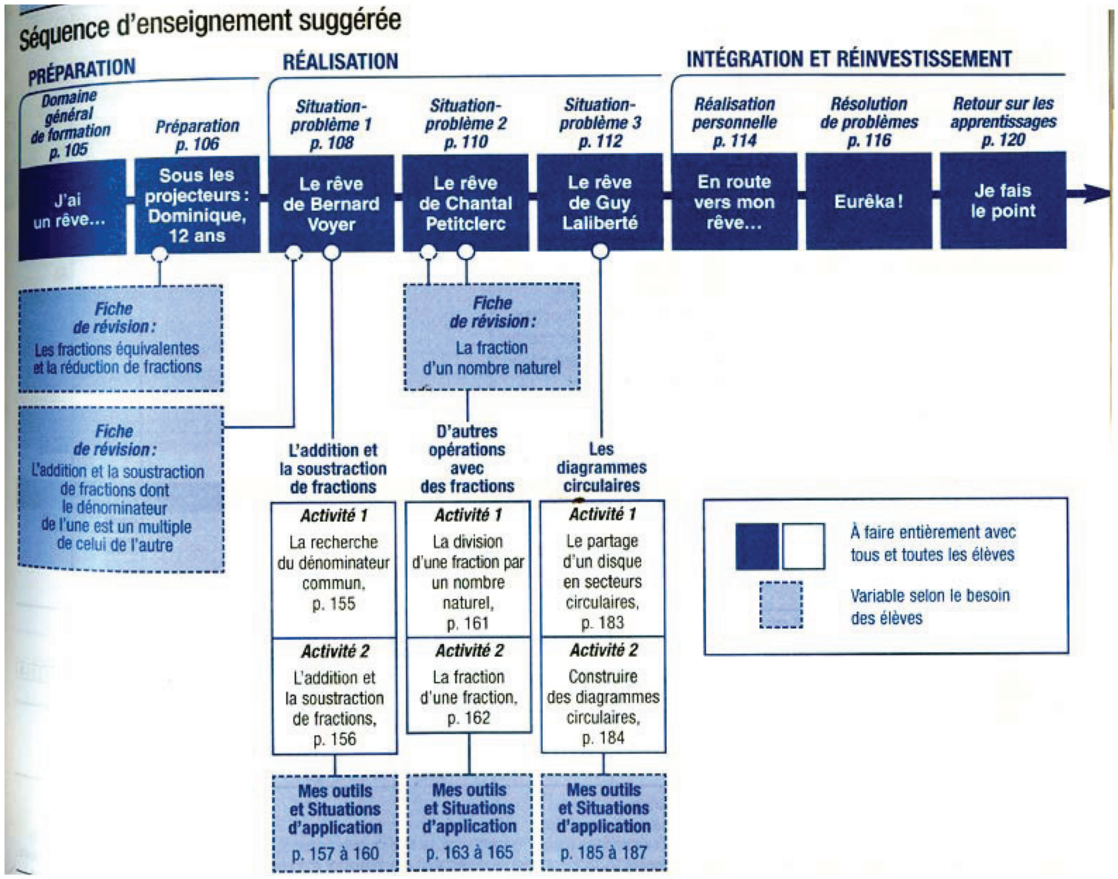


Figure 7 : Aperçu de l'organisation du dossier "J'ai un rêve" (Guay, Hamel et Lemay, 2005, p. 255b)

La résolution de situations-problèmes vise à donner sens aux concepts et aux processus qui seront objets d'apprentissage dans le dossier concerné. Les élèves ne peuvent réussir complètement et d'emblée les tâches associées à ces situations-problèmes, puisque, généralement, ils n'ont pas acquis les connaissances requises pour surmonter les obstacles auxquels ils sont confrontés. Ces connaissances seront construites par l'entremise d'activités associées à chacune des situations-problèmes et consolidées par des situations d'application. Pour effectuer ces activités, les élèves peuvent faire appel à des « boîtes à outils » qui rappellent certaines définitions/représentations de concepts et de procédés mathématiques. Les activités effectuées, les élèves peuvent alors revenir à la situation-problème de départ.

La première situation-problème, soit « Le rêve de Bernard Voyer », qui fait suite à l'activité préparatoire est la suivante. Nous analyserons successivement chacune des tâches qui sont présentées dans le cahier de l'élève (Guay, Hamel et Lemay, 2005, p.108)

Première tâche :

« Répartition des différents éléments de l'équipement selon leur masse.

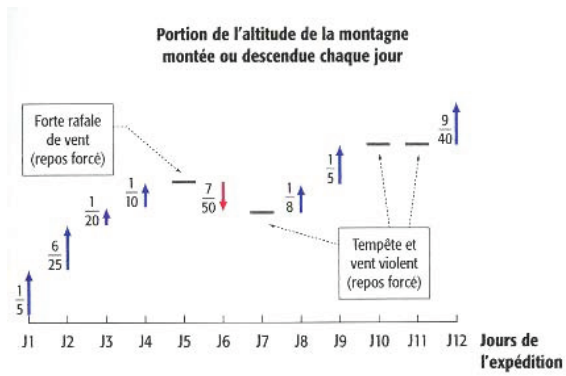
Article de cuisine 1/12
Équipement d'escalade 1/4
Équipement technologique 1/20
Nourriture 3/10
Tente et accessoire pour la nuit 1/20
Traîneau et sac à dos 1/15
Vêtements 1/5

a) Au cours de cette expédition, Bernard Voyer veut gravir la dernière partie de la montagne avec environ la moitié de sa charge initiale. À sa place qu'apporterais-tu avec toi? De quelle fraction de ta charge te libérerais-tu ainsi? »

À la première tâche que comporte cette situation-problème, les élèves doivent additionner des fractions. La tâche est loin d'être évidente; la masse totale des différents éléments n'est pas donnée; les élèves doivent conjuguer les sens rapport et partie-tout des fractions; une seule de ces fractions comporte un numérateur différent de 1; aucun des dénominateurs des fractions n'est un multiple de tous les autres dénominateurs. Au regard des activités précédemment réalisées, il appert que la nouveauté (l'obstacle cognitif) réside dans la recherche d'un dénominateur commun. La structure de ce problème n'est toutefois pas complexe; il s'agit en effet d'un problème de composition de mesures dans lequel il faut rechercher les éléments de la composition permettant d'obtenir un composé qui soit ½ de la masse totale.

Dans une démarche de modélisation, ce problème s'avère intéressant dans la mesure où la validation doit être effectuée à la fois sur un plan mathématique et extra-mathématique. Ainsi, plusieurs modèles sont possibles, soit combiner quelques articles pour obtenir ½, prendre une partie de tous les articles, prendre la moitié de chacun des articles! La combinaison d'articles pour obtenir ½ de la masse totale peut se faire en effectuant d'abord une combinaison de fractions dont l'un des dénominateurs est un multiple des autres, par exemple : 1/20 + 1/5 + ¼+ 3/10+ 1/20 = 1/20 + 4/20 + 5/20 + 6/20 + 1/20 = ... Si la validation n'est effectuée que sur un plan mathématique, nous pouvons simplement choisir la nourriture (6/20 ou 3/10) et les vêtements (4/20 ou 1/5); il faut convenir que sur un plan extra-mathématique, ce choix serait plutôt étonnant, voire inapproprié.

Seconde tâche : la figure suivante reproduit la seconde tâche faisant partie de cette situation-problème (Guay, Hamel et Lemay, 2005, p. 109)



b) D'après ces données notées au jour le jour par Bernard Voyer, ont-ils réussi à atteindre le sommet de la montagne?

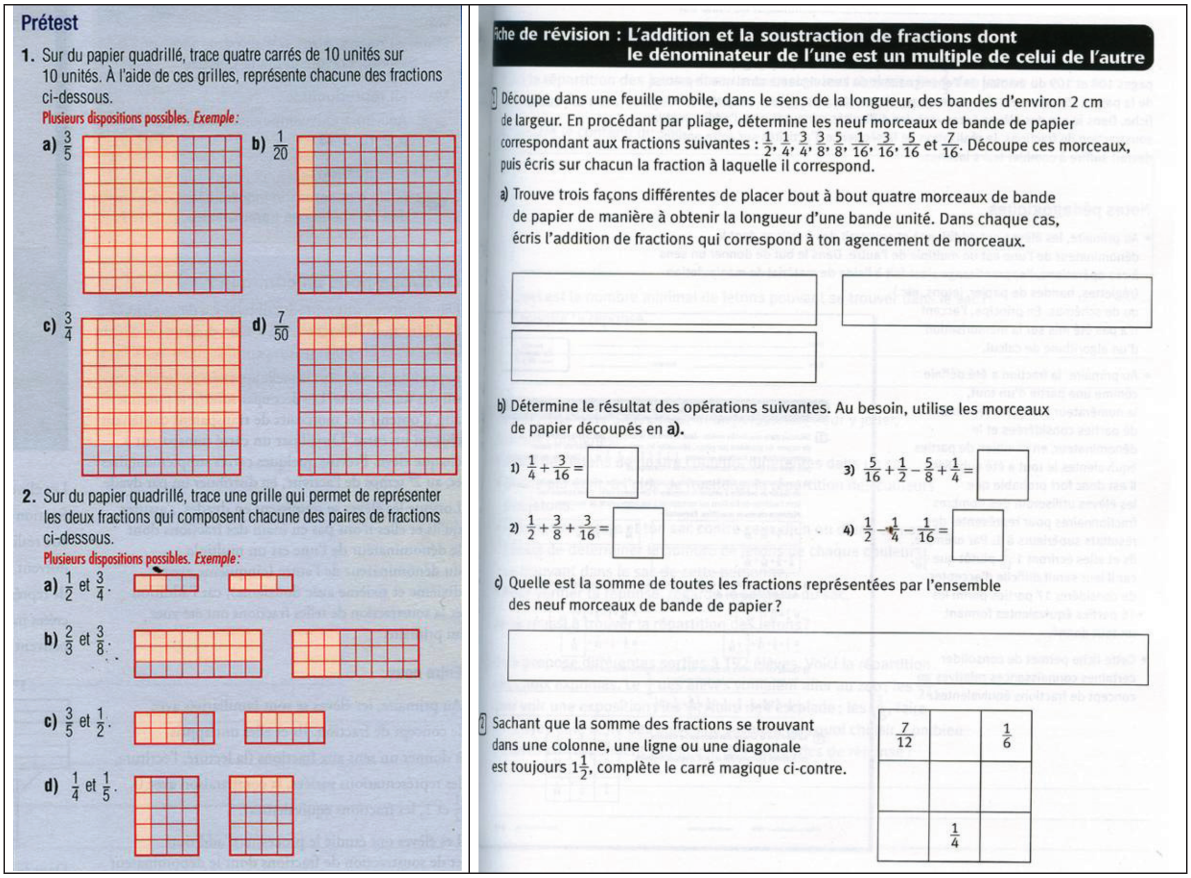
Laisse les traces de tes calculs.

Figure 8: Problème additif de transformation de mesures

La difficulté de ce problème de composition de transformations est justement que les éléments de la composition sont des rapports; l'élève doit donc modéliser la situation pour vérifier si la somme des transformations équivaut à 1, soit le tout, le sommet de la montagne. Par ailleurs, malgré ce que préconise le corrigé, il n'est pas nécessaire de recourir au dénominateur 200 pour représenter toutes les fractions. Un travail préalable de composition peut être fait, d'autant plus que la présence de fractions unitaires rend évidente la relation entre le numérateur et le dénominateur et facilite ainsi la recherche de fractions équivalentes. On peut ainsi additionner 1/8 et 9/40, 1/8 pouvant être représenté par 5/40; la somme obtenue, soit 14/40, peut être représentée par 7/20, ou encore, par

35/100. Il est ainsi possible de recourir à un dénominateur de 100 pour représenter les autres fractions. On pourrait également procéder à une composition de compositions de fractions; par exemple : a) monter de 1/10 et descendre de 7/50 résulte une augmentation de la distance à parcourir de 4/100 ou 1/25; b) si à la descente correspondant à 1/25, on ajoute la montée de 6/25, la montée résultante est alors de 5/25 ou 1/5… En poursuivant une telle démarche, on peut montrer que Bernard Voyer parvient au sommet.

Afin d'approfondir leurs connaissances et ainsi, par la suite, pouvoir résoudre la situation-problème 1, l'élève est amené à réaliser des activités, de même qu'à résoudre des problèmes d'application. Mais avant d'entamer les activités, un pré-test (Guay, Hamel et Lemay, 2005, p.155A) doit permettre de cibler les élèves qui ont besoin d'aide supplémentaire. Suite au pré-test, si les élèves éprouvent de la difficulté, une fiche de révision travaillant l'addition et la soustraction de fractions, dont le dénominateur d'une de ces fractions est un multiple de celui de l'autre, est disponible (*Ibid.*, p.2-43). Parallèlement, un travail sur différentes combinaisons possibles pour obtenir un entier – travail exigé dans la situation-problème- est effectué. Voici ces 2 fiches :



Prétest

1. Sur du papier quadrillé, trace quatre carrés de 10 unités sur 10 unités. À l'aide de ces grilles, représente chacune des fractions ci-dessous.
Plusieurs dispositions possibles. *Exemple :*
a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{1}{20}$
c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{7}{50}$

2. Sur du papier quadrillé, trace une grille qui permet de représenter les deux fractions qui composent chacune des paires de fractions ci-dessous.
Plusieurs dispositions possibles. *Exemple :*
a) $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{4}$.
b) $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{8}$.
c) $\frac{3}{5}$ et $\frac{1}{2}$.
d) $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{5}$.

che de révision : L'addition et la soustraction de fractions dont le dénominateur de l'une est un multiple de celui de l'autre

1 Découpe dans une feuille mobile, dans le sens de la longueur, des bandes d'environ 2 cm de largeur. En procédant par pliage, détermine les neuf morceaux de bande de papier correspondant aux fractions suivantes : $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{3}{16}$, $\frac{5}{16}$ et $\frac{7}{16}$. Découpe ces morceaux, puis écris sur chacun la fraction à laquelle il correspond.

a) Trouve trois façons différentes de placer bout à bout quatre morceaux de bande de papier de manière à obtenir la longueur d'une bande unité. Dans chaque cas, écris l'addition de fractions qui correspond à ton agencement de morceaux.

b) Détermine le résultat des opérations suivantes. Au besoin, utilise les morceaux de papier découpés en a).
1) $\frac{1}{4} + \frac{3}{16} =$ 3) $\frac{5}{16} + \frac{1}{2} - \frac{5}{8} + \frac{1}{4} =$
2) $\frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} =$ 4) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{16} =$

c) Quelle est la somme de toutes les fractions représentées par l'ensemble des neuf morceaux de bande de papier ?

2 Sachant que la somme des fractions se trouvant dans une colonne, une ligne ou une diagonale est toujours $1\frac{1}{2}$, complète le carré magique ci-contre.

$\frac{7}{12}$		$\frac{1}{6}$
	$\frac{1}{4}$	

Les liens entre ce pré-test, cette fiche de révision, l'activité préparatoire et les activités suivantes, qui sont liées à la situation-problème 1, sont loin d'être évidents. En effet, qu'ajoutent ce pré-test et cette fiche de révision, à l'activité préparatoire que nous avons analysée ci-dessus. Si, dans les tâches b), c) et d), aucun des dénominateurs des fractions n'est un multiple des autres dénominateurs, il en est autrement dans la fiche de révision. De plus, on se demande pourquoi, dans la fiche de révision, les auteurs précisent la dimension de la largeur des bandes de papiers? Par ailleurs, la 2e tâche de la fiche de révision nous semble intéressante, dans la mesure où la somme à composer est supérieure à 1 et que la complétion de la première ligne, dans laquelle le nombre de contraintes est le plus élevé, est une étape importante, car le nombre d'essais doit être minimisé. Il serait important, si cette fiche est maintenue, de demander aux élèves de minimiser leur nombre d'essais.

Nous poursuivons notre analyse par une présentation des activités qui sont associées à la situation-problème 1 (*Ibid.*, 2005, p.155).

« ***Activité 1*** *:* Qu'avons-nous en commun ?

1er temps

On te remet un papier sur lequel est inscrite une fraction *(1/5; 1/6; 5/8; 7/10; 7/12; 2/5; 5/6; 7/8; 9/10; 11/12; 3/5; 1/8; 1/10; 1/12; 4/5; 3/8; 3/10; 5/12)*[25] , ainsi qu'un transparent sur lequel est tracé un carré *(le côté du carré est de 6cm)*[26]. À l'intérieur du carré trace une grille permettant de représenter cette fraction.

2e temps

Fais équipe avec un ou une camarade qui a un dénominateur différent du tien. Un autre transparent vous sera remis, où figure un carré. Ensemble, à l'intérieur du carré, tracez une nouvelle grille qui permettrait de représenter vos deux fractions.

Utilisez cette grille pour trouver la somme et la différence de vos fractions. Notez vos réponses et vos façons.

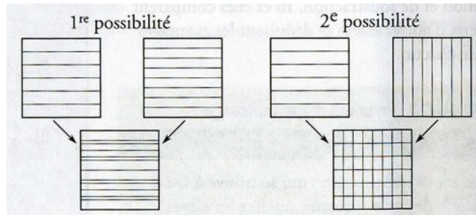
3e temps

En groupe classe, discutez de la réalisation des tâches du 2e temps.
Comment les autres équipes ont-elles procédé pour
a) tracer leur grille commune
b) trouver la somme et la différence de leurs fractions »

Puisqu'il faut s'assurer que les dyades d'élèves n'aient pas de fractions dont l'un des dénominateurs soit un multiple de l'autre, il nous est difficile de comprendre pourquoi cette activité n'est pas considérée comme une situation-problème parce qu'il s'agit, selon nous, d'un problème intra-mathématique relativement original, du moins si l'on se fie aux problèmes effectués précédemment. Par ailleurs, on peut penser que l'élève sait ce qu'il doit faire à chaque étape. De plus, cette activité est facilement accessible via le sens partie-tout de la fraction, ce qui n'était pas le cas pour la situation-problème1.

Autre fait questionnable. Puisque que les activités et les situations d'application qui accompagnent la situation-problème 1 devaient travailler « le » dénominateur commun et les fractions équivalentes, il aurait été d'autant plus intéressant de laisser les élèves choisir les dimensions et la forme du tout. Par ailleurs, la dimension de 6 cm ou 60 mm se prête bien à la représentation désirée en 5e, 6e, 10e et 12e, mais exige une partition différente pour les 8e, ce qui risque d'entraîner souvent des approximations.

[25] Ces fractions ne sont pas dans la consigne pour l'élève. Leur insertion n'est qu'utilitaire pour l'analyse de l'activité.
[26] Ceci est une description que nous avons ajoutée pour l'analyse de l'activité.



Enfin, alors que la superposition est conseillée (2 types sont présentés dans le guide de l'enseignant) pour trouver le résultat de l'addition et qu'ils doivent utiliser une grille, que feront-ils si le résultat est supérieur à 1? Si les divisions ne facilitent pas une comparaison? Il aurait été intéressant de demander aux élèves de choisir judicieusement leur coéquipier en fonction des dénominateurs et de joindre ensuite une autre équipe, ainsi de suite. Le but visé étant de développer des « pratiques mathématiciennes », soit tenir compte des relations entre les données avant d'agir! Il serait important de faire un retour sur le choix de leur équipe**.**

Nous reproduisons maintenant la seconde activité (*Ibid.*, p. 156) qui est associée à la situation-problème 1.

« ***Activité 2** :* La fête est terminée
La fête que Cédric a organisée est terminée. En faisant le ménage, il trouve des contenants de jus de format identique qui ne sont pas vides.

a) Réponds aux questions des situations ci-dessous. Laisse les traces de tes calculs
b) Élabore une façon d'additionner et de soustraire des fractions sans recourir à des représentations, c'est-à-dire des calculs écrits seulement.

Compare ta façon de faire avec celle d'un ou d'une camarade de classe.

Situation 1 : Quelle quantité de jus obtiendrait-il en mélangeant le quart d'un contenant et le sixième d'un autre?

Situation 2 : S'il buvait les 5/6 d'un contenant rempli aux 7/8, quelle quantité de jus resterait-il dans le contenant?

Situation 3 : Près du canapé, il trouve trois contenants : un qui est rempli aux 2/3; un autre, aux 4/9; et un dernier, à 1/6. Quelle quantité totale de jus cela représente-t-il?

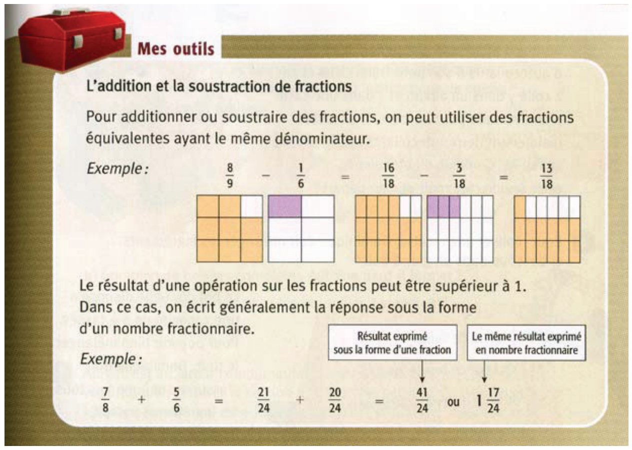
Situation 4 : Sur une table on a laissé 6 contenants de jus pleins et un autre rempli aux 5/12. Cédric verse dans un grand pot de jus l'équivalent de 3 contenants de 7/10. Quelle quantité de jus reste-t-il alors sur la table? »

Cette activité est principalement une répétition de la précédente, si l'on tient compte des connaissances impliquées. La distinction réside uniquement dans l'ajout d'un contexte et l'obligation «d'inventer» un procédé de calcul, procédé ayant fait l'objet d'activités préalables (ex. situation-problème et fiche de révision). Par ailleurs, il est plutôt curieux de demander de laisser des traces de calculs en a); il s'agirait plutôt de « traduire » sous forme de calculs la représentation effectuée et en b), de tenter de généraliser un procédé de calculs. Autrement, il nous semble que les élèves seront dès lors orientés vers le calcul.

Ces situations appartiennent principalement à des structures additives de composition (1-3) et de transformation (2-4) de mesures. La 4^{e} situation contient plus d'une structure, dont une structure multiplicative (proportion simple). La première situation, fort simple, requiert la recherche de la mesure composée du volume de jus, cette mesure pouvant être trouvée d'abord, comme à l'activité précédente, par une représentation dont le nombre d'objets, de divisions du tout (dénominateur commun) est - par exemple- 12. La confrontation des représentations pourrait s'avérer intéressante dans la mesure où différentes grandeurs ou différents types de représentation (continu/discret) seraient utilisés par les élèves.

Ces différentes activités visant à donner sens à l'addition de fractions et à permettre la création de procédés de calcul d'additions de fractions mèneront l'élève, à travers son manuel, à la rencontre d'une boîte à outils que nous vous présentons ci-dessous.

La boîte à outils



Mes outils

L'addition et la soustraction de fractions

Pour additionner ou soustraire des fractions, on peut utiliser des fractions équivalentes ayant le même dénominateur.

Exemple : $\frac{8}{9} - \frac{1}{6} = \frac{16}{18} - \frac{3}{18} = \frac{13}{18}$

Le résultat d'une opération sur les fractions peut être supérieur à 1. Dans ce cas, on écrit généralement la réponse sous la forme d'un nombre fractionnaire.

Exemple :

Résultat exprimé sous la forme d'une fraction

Le même résultat exprimé en nombre fractionnaire

$\frac{7}{8} + \frac{5}{6} = \frac{21}{24} + \frac{20}{24} = \frac{41}{24}$ ou $1\frac{17}{24}$

On remarque que leur boîte à outils ne leur fournit pas la même procédure de superposition que dans l'activité 1 et qu'elle ne propose pas de représentations lorsque le résultat de l'addition est supérieur à 1. Au regard de ce que nous sommes habituée de voir dans les manuels, il est intéressant de voir que le dénominateur commun n'est pas forcément celui obtenu par la multiplication des dénominateurs des fractions. Cependant, il faudrait voir à ce que cette procédure ne soit pas forcément rejetée, elle représente quand même le modèle unificateur de tous les cas possibles. Il suffit de discuter des différents modèles /procédés de calculs après avoir demandé aux élèves de construire une telle boîte au regard des activités réalisées. Lors de la «confrontation » des boîtes à outils ainsi construites, il serait constructif de contraster l'économie des diverses possibilités.

À la suite des situations précédentes issues du manuel en usage en 1ère secondaire, nous avons entamé la présentation de situations provenant de recherches, ainsi que de situations conçues par l'enseignant qui avait participé à la recherche exploratoire. Celui-ci a rappelé différents évènements déterminants de la recherche précédente et de la capacité des élèves à réussir de telles tâches. Nous avons aussi fait valoir notre ouverture, toujours présente, à d'autres situations qui bénéficieraient de l'expertise des enseignants. Malgré la réticence des enseignants à participer au projet, compte tenu des contraintes qui pèsent sur leur enseignement (1re année de mise en place de la réforme en éducation, 1re année d'utilisation du manuel, etc.), nous avons convenu qu'ils nous informeraient de leur intérêt ou non à participer à la recherche. Enfin, une enseignante s'exprime ainsi: « *Idéalement, pour être efficace avec nous, il faudrait que vous travailliez à partir* *de notre planification*[27] *afin de coller directement à notre quotidien. Ce serait plus facile pour nous d'expérimenter* ». Nous acquiesçons à sa demande, d'autant plus que cela s'intègre dans notre processus d'acculturation : cette requête fait directement référence aux contraintes temporelles institutionnelles. Nous revenons toutefois sur l'exemple du carton qui montre bien notre intention de répondre aux besoins. Seule une enseignante a répondu favorablement à notre demande, l'autre enseignante nous ayant informée qu'elle ne pouvait, à regret, nous accueillir dans sa classe, les responsabilités qu'elle devait assumer ne lui permettant pas de s'engager dans une telle collaboration.

3.1.3. Phases 3 ; 3,5 et 4 : Intégration progressive dans le milieu

L'entrée dans la classe de l'enseignante de mathématiques qui a accepté de nous accueillir constituait un défi important. Nous présentons succinctement un portrait des caractéristiques du milieu et les diverses fonctions que nous avons progressivement assumées et partagées, au cours des périodes d'enseignement des nombres rationnels, l'attribution de ces fonctions résultant, entre autres, d'une entente entre l'enseignante, l'étudiante-chercheure et la chercheure (directrice de notre thèse). Nous avons reproduit, en annexe, une lettre d'autorisation rédigée par la direction des écoles Vanguard, qui a été acheminée aux parents avant de procéder aux expérimentations. Nous leur avons également fait parvenir la lettre rédigée en collaboration avec l'enseignante, lettre ayant fait l'objet de la délivrance du certificat d'éthique. Le certificat d'éthique émis par le Comité plurifacultaire d'éthique de la recherche (CPÉR) de l'Université de Montréal, reproduit en annexe, atteste du respect des normes déontologiques énoncées dans la « Politique sur la recherche avec les êtres humains »

3.1.3.1. Caractéristiques du milieu institutionnel

[27] L'enseignante fait référence à leur modèle de planification qu'elle nous fournira éventuellement après avoir accepté de participer à la rechercher. Un exemple d'exploitation de la planification de l'enseignante est présenté à l'annexe 1.

Notre expérimentation est effectuée dans une classe de 1^er^ secondaire d'une école secondaire Vanguard; cette classe comporte 17 élèves francophones. Les écoles Vanguard sont des écoles semi-privées spécialisées. Elles accueillent des élèves en difficultés graves d'apprentissage, élèves qui ont un retard de deux ans en mathématiques et en français. Ces élèves ne présentent ni problème grave de comportement, ni incapacité intellectuelle. Comme un bon nombre d'élèves faibles qui fréquentent des classes régulières du premier cycle de l'enseignement secondaire, les élèves de première secondaire, qui sont admis dans une des écoles secondaires Vanguard, éprouvent des difficultés en mathématiques et ont construit, au fil des ans, des habitus qui réduisent grandement leurs possibilités d'apprentissage, comme en témoignent, entre autres, leurs rapports aux nombres rationnels. Or, comme nous l'avons indiqué antérieurement, les nombres rationnels occupent un habitat privilégié en première secondaire, habitat composé des habitats associés au concept de nombres rationnels, aux opérations et à la résolution de problèmes impliquant de tels nombres et des niches associées à ces habitats. Le choix d'intervenir auprès de ces élèves est aussi guidé par les conditions d'enseignement, lesquelles visent à établir une transition didactique, cognitive et sociale entre l'enseignement dans ces classes et l'enseignement dans les classes régulières. Diverses modalités sont ainsi prises en compte pour supporter le travail de ces élèves : effectif réduit (14-17 élèves par classe), aménagements variés lors des examens, possibilité d'effectuer leur première secondaire en 2 ans, cheminement personnalisé (possibilité de multi-niveaux), enseignement offert par des orthopédagogues, etc. Nous avons délibérément choisi de ne pas dresser un portrait individuel des élèves afin de ne pas être influencée par des a priori et reproduire l'effet Pygmalion, d'autant plus que le piège de dresser un portrait fort réducteur de l'élève « créateur et porteur de difficultés » est plutôt grand.

3.1.3.2. Assister à l'enseignement : observations passives et actives de « situations régulières ».

Au cours d'une première phase d'intégration, lors de situations «régulières» d'enseignement, les fonctions de l'étudiante-chercheure sont les suivantes : a) prise de notes; b) échanges avec l'enseignante; c) interventions pendant l'enseignement, afin de soutenir le travail de certains élèves. Ces interventions s'avèrent particulièrement précieuses : 1) elles permettent de prendre acte des rapports de plusieurs élèves aux nombres rationnels, de leurs habitus, de leurs représentations du contrat didactique (Brousseau, 1980); 2) elles sont des moments précieux pour une acculturation institutionnelle des élèves et de l'étudiante-chercheure. Durant cette phase, l'enseignante assume ses rôles habituels (planification, animation et gestion de situations usuelles d'enseignement, corrections des devoirs des élèves, partages de certaines situations avec sa collègue-enseignante qui a la responsabilité d'un autre groupe d'élèves du même niveau). À la fin de chacune des périodes d'enseignement, l'enseignante demande à l'étudiante-chercheure de lui faire part de ses observations. Un tel partage est une source d'informations pour l'étudiante-chercheure et l'enseignante. L'étudiante-chercheure peut ainsi bénéficier d'observations sur les conduites des élèves effectuées par l'enseignante et de l'expertise de l'enseignante pour interpréter certaines observations qu'elle a consignées. L'enseignante peut, de son côté, mieux appréhender les objectifs poursuivis par l'étudiante-chercheure. Soulignons enfin que cette première phase constitue une étape décisive du processus d'acculturation institutionnelle de l'étudiante-chercheure, de l'enseignante et des élèves. Comme nous en avons fait état précédemment, la chercheure a pu également, après quelques semaines, participer à l'observation de « situations régulières d'enseignement », ce qui a permis de partager certaines observations.

3.1.3.3. Participer à l'enseignement : Élaboration et gestion de situations

Tel que mentionné précédemment, l'insertion dans le milieu permet au chercheur de construire sa mémoire didactique du milieu. Les démarches d'acculturation institutionnelle servent ainsi d'assises pour une inscription écologique de situations: a) situations issues du manuel Perspectives (Guay, Hamel, Lemay et Perron, 2005), comportant, au besoin, certaines adaptations; b) situations construites en référence aux études effectuées dans le domaine, certaines de ces situations découlant d'une analyse de situations issues du manuel et d'autres, prenant appui sur l'analyse des conduites des élèves dans d'autres situations; c) situations découlant d'une analyse de besoins spécifiques exprimés par l'enseignante.

L'analyse des situations précédentes donne lieu à des échanges entre l'étudiante-chercheure, la chercheure et l'enseignante; certaines situations sont alors choisies et parmi celles-ci, certaines peuvent donner lieu à des adaptations. L'étudiante-chercheure et l'enseignante se partagent ensuite la responsabilité de la présentation et de la gestion des situations; il est ainsi convenu que l'étudiante-chercheure assume la responsabilité de la présentation et de la gestion de certaines situations qui sont peu familières à l'enseignante. L'étudiante-chercheure, la chercheure et l'enseignante s'engagent toutefois à soutenir l'engagement et les démarches des élèves, lors de la réalisation de l'ensemble des activités retenues. À la suite de l'expérimentation de ces situations en classe, l'enseignante, l'étudiante-chercheure et la chercheure partagent leurs points de vue sur les apports et les limites de ces situations, sur les adaptations possibles.

Les situations qui ont été présentées aux élèves résultent d'une inscription écologique relevant d'une démarche d'acculturation institutionnelle; ces situations seront présentées au chapitre suivant. Il nous est toutefois possible, en nous appuyant sur les études présentées au chapitre précédent sur le cadre conceptuel de notre recherche, études faisant état de rapports problématiques d'un nombre important d'élèves de l'enseignement primaire et secondaire et de dispositifs qui ont permis d'infléchir ces rapports, d'identifier certaines situations et paramètres qui nous sont apparues particulièrement pertinents et que nous envisageons de proposer à l'enseignante. Les situations permettant une construction des différents sens de la fraction (voir, entre autres, les situations sur l'épaisseur d'une feuille de papier, sur l'agrandissement de puzzles (N. et G. Brousseau, 1987)) ont ainsi retenu notre attention. Il nous a semblé particulièrement important de prévoir des situations qui donnent accès à différentes représentations des nombres rationnels (voir, entre autres, les études effectuées par Bednarz, 2009; Camer, Wyberg et Leawitt, 2009; Moss et Case, 1999)). Dans des situations impliquant des fractions (sériation, opérations, résolution de problèmes), le recours à des numérateurs et des dénominateurs bien choisis peut permettre aux élèves de transformer leurs rapports technicistes aux fractions, si les procédés qu'ils essaient d'appliquer s'avèrent peu économiques, voir impossible à mener à terme. Les rapports technicistes aux nombres décimaux (représentations, opérations et résolution de problèmes) pourraient également être revisités en recourant, par exemple, à des situations qui comportent des nombres naturels et des nombres décimaux comportant les mêmes chiffres (Lemoyne et Bisaillon, 2006). Nous pouvons également nous référer à différents critères de gestion et de conception de situations qui ont émergé de l'analyse des dispositifs (se référer à la figure 6).

Des situations qui s'inspirent des situations précédentes pourraient s'avérer d'autant plus fructueuses qu'elles seraient arrimées à des situations d'enseignement, à des conduites d'élèves, constituant des niches importantes pour inscrire de telles situations. En effet, il importe de mettre en place, tel que préconisé par Mack (1990, 2001), des situations pour « accueillir les connaissances», pour « les faire intervenir et les examiner » et enfin, pour « accepter qu'elles soient sources de conflits ».

3.2. Processus de collecte, de construction, d'analyse et d'interprétation des données de notre recherche

Le processus de gestion et d'élaboration des dispositifs didactiques sera exposé de façon plus précise au chapitre IV. En effet, celui-ci tiendra compte du fonctionnement du système didactique dans lequel s'inscrit notre recherche via la construction de niches écologiques, la prise en compte des contraintes institutionnelles et la nécessité de rendre transparentes les interactions entre enseignants/étudiant-chercheur/chercheur.

Plusieurs des recherches sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques qui ont été effectuées au cours des dernières décennies, comme nous en avons fait état dans les chapitres précédents, visent une meilleure compréhension des dispositifs d'enseignement privilégiés par les enseignants et les chercheurs et de leurs effets sur les apprentissages des élèves. Ces recherches privilégient généralement une méthodologie de recherche qualitative. Dans la mesure où notre recherche vise, entre autres, à caractériser le processus complexe d'acculturation entre élèves, enseignant et chercheur, le caractère exploratoire nous amène aussi à privilégier une recherche qualitative descriptive. Nous pourrions nous contenter d'indiquer qu'une telle méthodologie est celle privilégie dans notre recherche. Mais, comme le soulignent Van der Maren (1996) et Perrin-Glorian et

Reuters (2006), une telle précision ne pourrait rendre compte du travail de collecte, de construction, d'analyse et d'interprétation des données de notre recherche, travail orienté par les objectifs poursuivis dans notre recherche.

À la section 3.1.2, nous avons décrit le canevas de la démarche d'intégration progressive dans le milieu. Cela nous a permis de prendre connaissance du choix de recourir à divers instruments de collecte, de construction, d'analyse et d'interprétation des données de notre recherche: 1) observations (pendant les phases 3 , 3,5 et 4) effectuées par l'enseignante, l'étudiante-chercheure et la chercheure, lors de chacune des périodes d'enseignement, observations visant à rendre compte de certaines conduites représentatives des rapports des élèves aux situations didactiques ou, au contraire, de certaines conduites « atypiques » montrant des rapports inattendus de certains élèves aux situations didactiques; ces observations ont permis également de mieux connaître les contextes d'apprentissage et ont été colligées par l'étudiante-chercheure dans un journal de bord dans lequel figuraient les objets traités, les modalités pédagogiques, les événements marquants (situations, conduites d'élèves, interactions entre les élèves, l'enseignante et l'étudiante-chercheure, etc.) et toutes autres observations jugées pertinentes dans l'évolution du processus d'acculturation, dans la transformation des rapports des élèves aux nombres rationnels et de leurs habitus. Il importe de mentionner qu'à la suite de ce partage d'informations entre l'étudiante-chercheure, la chercheure et l'enseignante, l'enseignante présentait à l'étudiante-chercheure les situations qu'elle prévoyait présenter aux élèves, lors des périodes suivantes d'enseignement et invitait l'étudiante-chercheure à réagir à ces situations, à proposer des modifications ou encore, l'invitait à décrire des situations qu'elle souhaitait présenter aux élèves ; 2) enregistrements audios et audio-visuels des interactions lors des séances d'enseignement, à l'exception de quelques séances lors de l'entrée dans la classe; il peut s'agir également d'entretien individuel ou avec un groupe de travail d'élèves pendant qu'ils effectuent la tâche. Ces enregistrements sont transcrits intégralement en remplaçant les prénoms des élèves par des prénoms fictifs. Les *verbatim* sont examinés indépendamment par l'étudiante-chercheure et la chercheure, à la suite des périodes d'enseignement; elles leur ont permis de partager des épisodes marquants dont nous rendons compte lors de l'analyse des résultats de notre recherche, aux chapitres suivants. Nous pouvons préciser d'emblée que par épisode, nous entendons, «*un enchaînement d'actes pédagogiques et d'échanges entre le professeur et les élèves en vue de parvenir à un but qui est en général la réalisation d'une tâche.(Roditi, 2001, p.34)*» ; 3) productions des élèves lors de la réalisation de situations variées; la collecte de ces documents écrits et sonores sont complémentaires dans la compréhension des démarches des élèves, démarches à travers lesquelles sont exposé leur rapport au savoir et interprétée leurs connaissances et leur habitus ; 4) copies des examens des élèves, examens donnés par l'enseignant et traitant des nombres rationnels. Les questions sont sélectionnées et regroupées selon les principaux habitats (représentation, opération et résolution de problème). Les résultats et processus (ex. stratégies de comparaison : recours au dénominateur commun; comparaison à 1/2), sont consignés pour chaque élève. Un tableau général est ensuite constitué pour avoir un portrait général de la classe. Ces données nous ont permis de mieux cibler les situations qui pourraient être par la suite proposées aux élèves, à la suite d'une analyse de ces situations effectuées par l'enseignante et l'étudiante-chercheure.

Le recours à une variété d'instruments de collecte, de construction, d'analyse et d'interprétation des données de notre recherche nous est apparu incontournable compte tenu de nos objectifs et de leur complexité, faisant nôtre la démarche préconisée par Van der Maren (1996) en ce qui concernant la triangulation des données. En effet, la triangulation (Huberman et Miles, 2003) peut se faire à divers niveaux (sources de données, des méthodes de données et de types de données) qui permettront d'avoir une interprétation plus fidèle et valide de l'état de connaissances des élèves puisqu'il s'agit d'une interprétation du chercheur à partir de ce qui est fait, de ce qui est dit. Il importe à ce propos de souligner que notre participation à une diversité de situations d'enseignement, situations parfois contrastées, a constitué un vecteur important d'acculturation institutionnelle et nous a permis également de préciser l'évolution des connaissances, des habitus et des rapports des élèves aux rationnels. Il faut ajouter que la durée de l'expérimentation est également un facteur non négligeable de validation d'une recherche qualitative et permet d'éviter les biais provenant des effets du chercheur sur le site (Huberman et Miles, 2003). En effet, s'il est admis que la présence du chercheur a des effets sur le site et *vice versa*, les différents acteurs, enseignants et élèves, ne peuvent sur une base aussi longue adopter des comportements inhabituels.

En inscrivant notre travail dans le cadre des études en ingénierie didactique (Reuter et Perrin-Glorian, 2006; Brousseau, 2008), en choisissant une démarche écologique, (Roditi, 2001) comme en fait état le premier objectif de notre recherche, il nous est apparu important de procéder à un premier examen des conduites des élèves et des interactions didactiques, afin d'identifier les événements qui ont marqué l'évolution des rôles de l'enseignante et l'étudiante-chercheure dans la conception et la gestion de dispositifs didactiques, évolution nous permettant une première appréciation de la démarche d'acculturation institutionnelle que nous avons privilégiée. Cet examen sera effectué au chapitre IV. Cet examen tiendra compte du fonctionnement du système didactique dans lequel s'inscrit notre recherche via la construction de niches écologiques, la prise en compte des contraintes institutionnelles, la nécessité de rendre transparentes les interactions entre l'enseignante, l'étudiante-chercheure et la chercheure.

Le chapitre V constitue « la pierre angulaire de notre recherche ». En effet, si la démarche d'acculturation institutionnelle de l'étudiante-chercheure et de la chercheure, constitue un enjeu important pour une participation éclairée de l'étudiante-chercheure et de la chercheure à l'enseignement effectuée par l'enseignante et une inscription écologique de dispositifs didactiques visant une construction, voire une reconstruction des rapports des élèves aux nombres rationnels, comme nous en avons fait état précédemment, retracer l'évolution des connaissances et des rapports des élèves aux nombres rationnels n'est pas évident. En effet, il est possible que certains élèves, qui investissent peu certaines situations et se réfugient dans des rapports technicistes aux rationnels, puissent bénéficier des interactions avec l'enseignante, l'étudiante-chercheure, la chercheure et les autres élèves et construire, par la suite, des connaissances et des rapports plus satisfaisants. Il importe de prendre en compte ces événements pour établir les conditions qui ont permis à ces élèves d'effectuer des apprentissages significatifs. Il est possible également que des élèves qui, de prime abord, témoignent de rapports plus adéquats aux nombres rationnels, puissent bénéficier également des interactions avec les élèves qui entretiennent des rapports plus problématiques aux nombres rationnels. Pour rendre compte de l'évolution des connaissances des élèves, comme nous en avons fait état précédemment, il nous apparu important, non seulement de présenter les dispositifs didactiques qui ont été présentés aux élèves, mais également de faire état de certaines interactions entre les élèves, l'enseignante, l'étudiante-chercheure et la chercheure, interactions que nous avons jugées significatives, de tels jugements étant partagés par l'étudiante-chercheure et la chercheure. Les épisodes marquants, comme nous en avons convenu, pouvaient être variés: a) épisodes montrant des interprétations et procédés économiques, prenant appui sur des connaissances et savoirs pertinents sur les nombres rationnels; b) épisodes montrant la complexité de la gestion des interactions didactiques avec des élèves qui réclament notre aide (voir, entre autres, le recours à des jeux de tâches, comme le préconise Conne (2004); c) épisodes sur les interactions entre l'enseignante, les chercheures et les élèves, lors du retour sur les conduites des élèves (ex. : conduites montrant des rapports pertinents ou encore des rapports problématiques aux nombres rationnels), épisodes permettant à des élèves de commenter leurs démarches ou les démarches d'autres élèves. Il importe également de mentionner que nous avons jugé important de ne pas trop préciser ensemble les épisodes/événements que nous pourrions relever, jugeant qu'il serait important d'en discuter ensemble et, ainsi, procéder à une co-confrontation (Reuter et Perrin-Glorian, 2008). De façon générale, nous avons effectué une sélection fort comparable.

CHAPITRE IV. PRÉSENTATION ET ANALYSES DES RÉSULTATS DE LA RECHERCHE

La majorité des dispositifs didactiques sur l'enseignement des nombres rationnels sont le fruit d'une démarche d'acculturation entre chercheures, enseignante et élèves. Ils sont ainsi des produits de la recherche. Au chapitre précédent, nous avons décrit les phases d'acculturation institutionnelle de notre démarche de recherche (principales phases et démarches retenues). Toutefois, une part considérable de notre démarche requiert l'insertion dans le milieu duquel elle se nourrit pour évoluer. Nous dressons d'abord un bref aperçu des dispositifs sur l'enseignement des rationnels, lors d'observation de situations « régulières » et de l'élaboration et la gestion de situations, pour mieux caractériser la progression des démarches d'acculturation institutionnelle (objectif 1). Cela nous permettra, entre autres, d'identifier des événements et des niches qui ont permis l'inscription écologique de situations d'enseignement originales. Nous effectuons ensuite, pour chacun des dispositifs, une analyse des conduites des élèves et des interactions didactiques afin de préciser la transformation des habitus et l'évolution des connaissances, des rapports des élèves aux nombres rationnels, au cours de la séquence d'enseignement (objectif 2) et d'approfondir les effets de la progression des démarches d'acculturation (objectif 1). Enfin, une synthèse de ces différentes sections, en fonction des objectifs, sera effectuée.

4.1. Aperçu des dispositifs sur l'enseignement des rationnels et de l'ancrage progressif de la participation des chercheures à la conception de ces dispositifs

Notre travail dans la classe s'est étalé sur une période de 6 mois. Au moment de notre entrée dans la classe, l'enseignement des fractions, notamment des opérations sur les fractions, était commencé; nous avons saisi ces premières occasions pour comprendre les visées d'un tel enseignement et les ouvertures possibles aménagées par l'enseignante et par les élèves. Notre travail dans la classe a commencé en janvier 2007 et s'est poursuivi jusqu'en juin de la même année. Nous avons été présentes dans cette classe durant 51 jours[28]; à chaque jour, deux périodes d'enseignement étaient réservées aux mathématiques, soit environ deux heures. Pour construire une « première vision » de l'ancrage progressif de la participation des chercheures à la conception des dispositifs

[28] L'enseignante a fait la demande qu'une seule personne soit présente dans la classe pour entamer la recherche afin de ne pas perturber son groupe, ce que nous avons respectée.

d'enseignement, le tableau suivant indique les objets de l'enseignement des mathématiques qui ont été traités au cours de ces périodes; lorsque l'enseignement concerne plus spécifiquement les rationnels, le tableau résume « en quelques mots » les caractéristiques des situations d'enseignement/apprentissage par l'entremise desquelles ils ont été traités. Nous indiquons également les dates de réalisation de ces situations. Afin de rendre compte de l'évolution de l'acculturation institutionnelle des chercheures, de l'enseignante et des élèves, nous indiquons les situations proposées par l'enseignante (ENS), par l'étudiante-chercheure (ECH) et la directrice de la thèse (CH), et y adjoignons quelques observations sur les conduites des élèves et les interactions entre l'enseignante et les chercheures.

Tableau XVII: Objets de l'enseignement des nombres rationnels qui ont été traités lors de la présence des chercheures dans la classe de mathématiques

Dates, objets traités Situations proposées par ENS, ECH et ECH	Provenances et caractéristiques des situations	Observations sur les situations, sur les conduites des élèves et les interactions entre l'enseignante, les chercheures et les élèves, rendant compte de l'acculturation des acteurs, de niches potentielles et des points d'ancrage pour une insertion écologique
15/01/2007 *Addition et soustraction de fractions* ENS	***Situation provenant du manuel en usage.*** Présentation de l'addition de 2 fractions : incitation à trouver le plus petit commun multiple des dénominateurs. ***Situation construite par l'enseignante : eu en fin de période*** Effectuer, le plus rapidement possible, divers additions de fractions. Ex. 2/3+3/8; ½+3/4 Les dénominateurs des fractions sont soit multiples (a/b + c/nb), soit premier entre eux (a/b + c/d).	***Niches potentielles pour l'insertion écologique de situations*** ENS : a) référence à l'économie de la démarche en fonction du choix nombres pour représenter les fractions; b) enseignement d'une seule procédure de calcul. ELS : référence à l'économie, en terme de « procédure infaillible » de la multiplication des dénominateurs pour trouver le dénominateur commun. ECH : le choix des nombres proposés ne permet pas de trancher sur l'économie de la démarche. Le jeu, pratique usuelle de la classe, semble être une pratique qui permettra l'insertion écologique d' «écritures inusitées» sans perturber l'avancée du temps didactique.
16/01/2007 *Multiplication de fractions* ENS	***Situation provenant du manuel en usage.*** Présentation et inscription dans leurs notes de cours de la technique usuelle de multiplication de fractions. Multiplications à effectuer dans le cahier d'exercices. Les relations entre le dénominateur du multiplicande et le numérateur du multiplicateur des fractions sont variées : a/b x b/c; a/b x nb/c ; a/b x c/d.	***Compréhension du projet de l'enseignante par ECH*** ECH : le choix des nombres dans le manuel et dans le cahier d'exercices favorise un accès au sens de la multiplication, « prendre une partie d'une partie ». ENS : favorise, dans un 1[er] temps, l'apprentissage de la technique et, dans un 2[e] temps, le sens des gestes impliqués dans la technique.
18/01/2007 *Division de fractions* ENS	***Situation provenant du manuel en usage.*** a) Présentation de la *division d'une fraction par un entier;* recours à une fraction équivalente pour représenter la fraction, tenant compte des relations ente le numérateur de la fraction et l'entier. b) Présentation de la technique usuelle de *division de deux fractions.* Présentations suivies de divisions à effectuer.	***ECH*** : propose à 2-3 élèves une « nouvelle » pratique : « faire parler des écritures ». ELS : 2-3 élèves disent vouloir « comprendre ce qu'ils font ». ECH : propose de « faire parler des écritures » en unifiant les deux pratiques de division préconisées par l'enseignante. EL : un élève réutilise, plus tard la procédure a) pour la division de deux fractions : $\frac{7/15}{28/45} = \frac{21/45}{28/45} = \frac{21}{28}$.
22/01/2007 *Résolution de problèmes additifs et multiplicatifs impliquant des fractions* ENS	***Situation provenant du manuel en usage.*** Résolution de problèmes d'application: les élèves choisissent 13 problèmes parmi les 20 proposés. Problèmes additifs de composition de mesures. Problèmes multiplicatifs : la majorité des problèmes ne comportent qu'un seul espace de mesures (produits scalaires); quelques problèmes d'isomorphisme de mesures sont aussi présentés. - Le terme « de » est associé à la multiplication (truc mnémotechnique).	***ECH et ENS échangent quelques difficultés observées*** : 1) trouver l'opération à effectuer ; 2) effectuer certains calculs : 25 x 1/3 = 25/75; 3) positionner des fractions sur une droite; 4) attribuer un sens à l'expression « nombres rationnels »; 5) confusion dans les procédés de calculs additifs et multiplicatifs. ***Habitus*** ECH : peu d'élèves s'attardent aux nombres pour choisir la procédure la plus économique. ELS choisissent les énoncés selon la longueur du texte, le sujet de l'énoncé, etc.

29/01 et 01/02/2007 *Résolution de problèmes (fractions, pourcentages)* ENS	***Situation provenant du manuel en usage.*** Le diagramme circulaire comme moyen de représenter la répartition de différentes parties d'un ensemble. L'enseignant effectue la situation-problème avec les élèves et leur présente les «étapes» de construction de la représentation, étapes que les élèves inscrivent dans leur cahier de notes. ***Situation construite par l'enseignante*** (mini-test). Diagramme circulaire : présentation de 3 sondages, choix de l'un d'entre eux et représentation des données à l'aide du diagramme circulaire. Les nombres de répondants à ces sondages sont respectivement de 72, 360 et 1800.	***« Production » de fractions équivalentes dans ce contexte*** - exploitation du produit croisé; arrondissement des données ; absence de prise en compte du contexte. ***Compensation : tension évaluation de la compréhension vs MELS :*** EL : un élève utilise une démarche économique : choisit le groupe incluant 360 réponses. ENS : demande à l'élève de montrer sa démarche et d'inscrire les calculs, c'est-à-dire qu'il est invité par l'enseignante à effectuer des calculs pour représenter chacun des nombres de réponses par une fraction comportant les dénominateurs 100 et 360.
30/01/2007 et 1/02/2007 *Résolution d'un problème* (nombres décimaux) ECH et ENS (proposition de ENS)	***Situation empruntée à Bélisle (1999) « Dites-le avec des fleurs ».*** A) Résolution de la situation : 4 bouquets de fleurs sont présentés. Pour composer ces bouquets, on a fait un choix parmi 4 espèces de fleurs. Connaissant les prix associés à 3 de ces bouquets, les élèves doivent trouver le prix du 4e bouquet. Les 3 bouquets dont les prix sont connus sont composés de 4 fleurs; le bouquet dont il faut trouver le prix est composé de 5 fleurs. - milieu offrant la possibilité aux élèves de valider leur résultat - diverses procédures sont possibles B) Retour sur la situation : les élèves présentent leurs démarches et sont invités à interpréter celles des autres. ECH présente ensuite les démarches des étudiants universitaires. Discussion sur l'économie des démarches et les pratiques mathématiques.	***Adaptations jugées « adéquates » selon ECH et ENS :*** ENS : Enlève la contrainte d'écrire leur raisonnement ECH : Donner la réponse à deux élèves en leur demandant alors d'indiquer comment cette réponse peut être obtenue. ***Évaluation de la situation : Situation « point tournant »*** ENS\ECH : situation particulièrement féconde pour accueillir et construire à partir des connaissances des élèves - l'utilisation par ECH d'une procédure enseignée par ENS alors que ECH n'était pas présente revêt une pertinence institutionnelle - Situation jugée exemplaire par ENS, ELS et ECH. ENS la présente à sa collègue. ELS : Raisonnements déductifs montrant une prise en compte des relations entre les données. Les élèves restent engagés durant toute la période. Les élèves participent à l'enseignement, se posent des questions, etc.
5/02/2007 *Représentation de nombres rationnels et Résolution de problèmes multiplicatifs impliquant des nombres rationnels* ENS, ECH et CH	1) ***Situation construite par ENS***: « Je pense à un nombre ». Cette situation vise à faire le passage des centièmes aux millièmes. 2) ***Situation co-construite par ECH, CH et ENS***. Les élèves doivent trouver le maximum de représentations pour les nombres : ½, 3/5 et 0,3, situations inspirées par les études sur les représentations et les dispositifs. 3) ***Situation inspirée des recherches effectuées par Lemoyne et Bisaillon (2006).*** Problème de proportionnalité simple : connaissant le nombre de gâteaux par boîte, les élèves complètent 3 tableaux mettant en jeu des relations entre un nombre de boîtes et un nombre de gâteaux. D'un tableau à l'autre, le nombre de gâteaux par boîte est 10 fois plus petit et 10 fois plus grand. Les mesures sont exprimées à l'aide de nombres naturels, de fractions et de décimaux. Il leur est interdit de recourir à une calculatrice. Des démarches économiques peuvent être mises en place, en prenant appui sur les relations entre les nombres de boîtes, dans un même tableau et d'un tableau à l'autre. 4) ***Situation construite par ENS et CH,*** situation inspirées des études sur les difficultés et provenant d'une demande de l'enseignante. Problème de produit de mesures dans lequel l'élève doit compléter le calcul en positionnant la virgule et répondre à une question (Le produit qu'il a obtenu est combien de fois plus élevé que celui qu'il aurait dû obtenir?). Cette situation visant un maillage entre ce qui était prévu (enseignement de la technique) et ce qui est fait (entrée par une situation-problème).	***Indices d'intégration écologique*** 1ère co-conception et co-animation. ENS propose d'inviter la directrice de thèse à intégrer la classe. ***Première co-construction (acculturation)*** - arrimage des projets de ENS et ECH; - la proposition de ENS d'intégrer la représentation de 1/2 s'avère des plus précieuse et agira comme « catalyseur » dans les prochaines situations; - la proposition de ENS de donner la valeur unitaire permettra de limiter l'évocation du recours au « produit croisé »; - ENS accepte le traitement conjoint de différentes représentations des nombres rationnels, même si ce qui est visé est la multiplication de nombres décimaux; - ENS, ECH et CH modifie la « chronogénèse usuelle ». ***Modification des habitus, évolution des connaissances*** - ELS représentation variées, coordinations de différents registres sémiotiques (numérique, alpha numérique, graphique), diverses connaissances (composition additive, multiplicative, sens rapport et partie-tout, quotient). Ex $\frac{100\%\text{-}0{,}100\text{-}0{,}10\text{-}10\%\text{-}10\%}{2}$ - Suite à la proposition d'un élève, soit 0,6 ÷ 2, CH propose 0,6 ÷ 84/42. L'élève dit : « là c'est la même chose que moi » - Dans les tableaux de proportionnalité simple, quelques ELS prennent appui sur les relations entre les mesures (pour 9 boîtes, ils utilisent le contenu de 10 boîtes auquel il soustrait celui d'une boîte.); quelques élèves recourent à des procédés de calcul économiques (ex.150 x 17,5 = 15 x 175), pour trouver les nombres de gâteaux.
8/02/2007 *Résolution de problèmes multiplicatifs impliquant des nombres rationnels* ENS, ECH et CH	***Situations construites par ECH et CH à la demande de ENS.*** Problèmes isomorphes à la période précédente. Modification du contexte et des nombres. Des procédés économiques peuvent être appliqués en tenant compte des relations entre les données. Les mesures sont exprimées à l'aide de nombres naturels, de fractions et de décimaux afin d'accueillir et de pouvoir construire à partir des connaissances des élèves.	***Modification des habitus/acculturation/participation des élèves à l'enseignement*** Un élève questionne/interroge les nombres sur l'obtention des mêmes nombres dans les montants associés à ½ journée et à 50 jours de skis. - plusieurs élèves prennent appui sur les relations entre les mesures et recourent à des procédés de calculs économiques (42,60 x 150 = 42,60 x 100 + ½ (42,60 x 100); …) Devant l'incompréhension d'un élève quant à l'influence sur le produit de prendre un multiplicande et un multiplicateur 10 fois plus grand, ECH revient sur le contexte et le questionne sur l'influence individuelle puis combinée de ces modifications.

12/02/2007 *Multiplication de nombres décimaux* ENS	A) ***Construction des notes de cours par ELS.*** ENS présente un premier calcul et invite les élèves à l'effectuer et à construire leur note de cours. Les nombres à multiplier ne comportent pas le même nombre de chiffres après la virgule et sont supérieurs à 1; Les questions d'un élève amènent l'enseignante à proposer une deuxième multiplication dont les nombres décimaux proposés dans le calcul ont le même nombre de chiffres après la virgule et sont inférieurs à 1. Collectivement, à partir de ces exemples, les élèves construisent leurs notes de cours. B) ***Exercices construits par l'enseignante.*** Divers calculs et estimations leur sont proposés.	***Modification considérable de la chronogénèse et la topogénèse:*** - ENS non seulement modifie le contenu notes de cours qu'elle avait prévu, mais les fait construire par les élèves.: les notes de cours rendent compte de l'importance et de l'utilité de l'estimation, de la technique de calcul et du sens des gestes (« déplacement de la virgule ») - ENS répond à un élève en lui proposant une autre tâche. - ECH propose à un élève de « commenter diverses écritures et divers calculs (calculs : 635 x 126; 6,35 x 12,6, …) »
13/02/2007 Multiplication de nombres rationnels ENS, ECH et CH	1) ECH rend publique le questionnement d'un élève de la classe qui « interrogeait » les nombres et leur produit. ***2) Situations qui émanent du manuel en usage proposées par ENS.*** a) un «mini-quizz» portant, entre autres, sur la multiplication et la division de nombres décimaux par des multiples de 10 pour prendre le pouls de la classe b) multiplications de nombres décimaux par des multiples de 10 (calcul mental); propositions de multiplications comportant des nombres décimaux, production d'expressions équivalentes ; c) la résolution de problèmes multiplicatifs comportant des nombres décimaux, ces problèmes provenant du cahier d'exercices. ***3) Jeu proposé par ENS et ECH*** Les élèves doivent effectuer, le plus rapidement possible, diverses additions et soustractions impliquant diverses représentations de nombres rationnels (fractions, pourcentages, nombres décimaux); les relations entre les nombres présentés sont des leviers importants (ENS : ex. 7/14 – 50%; 7/14 – 77/143; ECH : ex. 0,125 – 6/5 + 5/1000; 15% - 0,01).	***Effet de contrat*** - «la nécessité», dans une situation d'évaluation, de laisser des traces de leur raisonnement, amène les élèves à poser et effectuer l'algorithme de la multiplication et de la division part une de 10. - Les exercices de calculs usuels « montrent » des rapports plutôt technicistes des élèves aux opérations (habitus) ***Acculturation*** - Le choix par l'enseignante d'une activité est fort intéressant : l'une d'entre elles concerne la production d'expressions multiplicatives équivalentes, qui fait référence à ce qu'a fait une élève lors du travail du 5/02/2007 - Le choix des nombres proposés dans le jeu ont fortement évolué depuis ceux proposés le 15/01/2007 ***Topogénèse*** ECH se fait surprendre et se retrouve en difficulté; elle guide grandement un élève et courtcircuite le problème.
19/02/2007 Division de nombres décimaux ENS et ECH	1) activités et exercices sur la division de nombres décimaux; 2) consignation/construction des notes de cours sur la division de nombres décimaux; les nombres entrant dans les divisions sont composés des mêmes chiffres; 3) résolution d'un problème impliquant des nombres décimaux, problème isomorphe au problème « Dites-le avec des fleurs »	***Modification topogénèse et chronogénèse*** - ENS recourt à diverses écritures qu'elle demande aux élèves de « faire parler » :100 ÷ 0,1; 100÷ 1/10 ; 100 x10. - ENS montre plus d'une façon de procéder ENS demande à ECH de construire une situation isomorphe à la situation « Dites-le avec des fleurs »
19-26-27/03/2007 Préparation et réalisation de l'examen ENS	1) Trois périodes sont consacrées à la préparation (document de révision) et à la réalisation de l'examen qui met, entre autres, en jeu des nombres rationnels. 2) ***Jeu proposé par ENS et ECH.*** Les élèves doivent effectuer, le plus rapidement possible, diverses additions et soustractions impliquant diverses représentations de nombres rationnels (fractions, pourcentages, nombres décimaux); les relations entre les nombres présentés sont des leviers importants. (ECH : ex. ¾ - 0,5; ENS :100% - 1/5;1 4/9 + 3 2/18; 252/504 + 342/684;…)	***Effet de contrat (lors de l'examen)*** - des conduites technicistes et inattendues: 3 élèves n'arrivent pas à associer 0,5 et ½, ces élèves ayant portant montré dans des tâches précédentes qu'ils pouvaient y arriver. - des conduites qui rendent compte d'une «obligation» de laisser des traces.
26/04/2007 *Représentation des nombres rationnels - sériation-* *besoin spécifique de l'enseignante qui nous lègue cette partie sur la sériation/comparaison* ECH et CH	***Adaptation* de deux situations provenant du manuel en usage*** Adaptation de tâches de sériation de fractions -en référence aux recherches (Lemoyne, 1992; Mazzocco et Devlin, 2008), aux pratiques de la classe, au savoir visé-: a) augmentation de la quantité de nombres; b) représentations «inusitées» : 0,50001, 171/340 ; c) ajout d'un pourcentage et nombres décimaux ; d) représentations différentes d'un même nombre : 255/510, et ½ ; e) enlever le contexte 1ère tâche réalisée seul et la 2e en duo. Ordonne du plus petit au plus grand (chaque nombre est inscrit sur un bout de papier): 3/7; 5/9; ½; 255/510; 7/35; 171/340 ; 0,76; 3/8; 6/11; 7/8; 21%; 251/504. Retour en grand groupe sur la 2e tâche.	M**odification** ***de la topogénèse et de la chronogénèse*** **-** pas d'exposé préalable sur les savoirs, amalgame de « sous-tâches » qui oblige les élèves à s'attarder aux nombres ***Habitus et rapports des élèves aux nombres rationnels*** - ELS : réclament la calculatrice, ils sont démunis, déroutés pour ensuite montrer des rapports fort diversifiés aux nombres rationnels : allant à la représentation indépendante des pourcentages, décimaux et fractions à la coordination de connaissances sur le sens des fractions (rapport, partie-tout : pizza; quotient), des registres de représentation : 141/240 = 7/12 + 1/240 ; etc. - plusieurs erreurs répertoriées dans la littérature apparaissent (traitement indépendant; 6/11 = 3/8; manque 5 parties pour compléter l'entier), auprès d'élèves du régulier - les élèves relient les nombres à des contextes connus (ex. pizza) ***Modification des habitus et des rapports des élèves aux nombres rationnels*** - un élève habituellement faible (Guy) surprend ENS et ECH par ses interventions - recourent à des écritures intermédiaires : ex. 17,1/34

30/04/2007 Représentation des nombres rationnels/Addition des nombres rationnels *permet de valider certaines hypothèses sur les erreurs ECH et CH	***Situation construite par les chercheures en référence aux conduites des élèves*** (examen du 27 mars) Les élèves doivent effectuer la représentation de 2 différentes partitions de tablette de chocolat et la comparaison des parts données. Utilisation de papier quadrillé; Choix de nombres a) favorisant le recours à divers sens de la fraction; b) leur quantité et leur diversité rendant coûteuse et peu pertinente la recherche du dénominateur commun par « multiplication des dénominateurs »; demandant le recours à une coordination de connaissances variées sur les représentations ; c) entrée vers de « nouveaux raccourcis » pour 0,125 (ex. nombres utilisés : 0,125 ; 31/124; 25% ;100/320] Diverses questions sont formulées (générosité, préférence, représentation) Retour en grand groupe.	***Modification de la topogénèse*** CH propose à des élèves de comparer ¼…0,25….1/8….0,125 ***Habitus et rapports des élèves aux nombres rationnels*** - la plupart recourent généralement au plus petit dénominateur commun - certains recourent au pourcentage, produit croisé, sans tenir compte du contexte. - certains identifient la partie manquante graphiquement et/ou numériquement ***Démarches économiques*** - s'attardent à la relation entre le numérateur et le dénominateur; sens quotient; fractions équivalentes (réduction); recourent à diverses représentations - réductions originales de 31/124 = ¼ en a) regardant la relation entre 3 et 12 ; 1 et 4 ; b) divisant 31 par 124; c) divisant 124 par 31 - recours à plusieurs raccourcis 0,375 = 0,250+125; 0,500 – 0,125; 3 x 1/8
30/04/2007 et 1/05/2007 Résolution de problèmes ECH, CH et ENS	***1) Situation empruntée à N. et G. Brousseau (1987),*** à la demande de l'enseignante qui veut travailler les divers sens de la fraction : « Épaisseur d'une feuille de papier » ***2) Situation provenant du cahier d'exercices en usage.*** Consolidation des connaissances et pratique sur la sériation de fractions	Cette activité s'est avérée fort précieuse pour évaluer le trajet notionnel parcouru par plusieurs élèves. Les élèves déploient les mêmes raisonnements que ceux répertoriés auprès d'élèves « du régulier » ***Modification des habitus et rapports aux nombres rationnels*** - engagement général des élèves dans des pratiques mathématiques, les élèves « se surprennent » et surprennent ECH, ENS et CH ***Acculturation*** Il est intéressant de relever le choix par l'enseignant d'activités puisées dans le manuel, activités qui permettent d'exploiter les connaissances et les pratiques mises en place par les élèves jusqu'à ce jour dans la comparaison des nombres rationnels.
10/05/2007 Retour sur les rationnels : intégration ENS, ECH et CH	1) ***Situation d'intercalation de fractions construite par la chercheure*** Les numérateurs des 2 fractions semblent «successifs» et le dénominateur est constant : obliger un travail sur les propriétés/obstacles des nombres rationnels (idée de successeur n'a plus de sens; densité; infinité de représentations d'un même nombre; infinité de représentations entre 2 nombres quelconques). Tâche sans contexte 2) ***Situation provenant du cahier d'exercices en usage.*** A) Problème d'intercalation requérant la comparaison Les dénominateurs des 4 fractions rendent peu économique le recours au dénominateur commun pour les sérier. Les dénominateurs semblent «successifs» et les numérateurs constants. Les nombres permettent de travailler, en contexte, ce qui a été fait dans l'activité précédente d'intercalation. B) Exercice de sériation. Les relations entre les numérateurs et les dénominateurs qui diffèrent « de 1 » requièrent l'évaluation de la partie manquante. 3) ***Situation construite par CH et ECH en référence à l'ouverture faite par les élèves (*** *difficultés, pratiques)* Les élèves procèdent à : a) l'examen d'une définition des nombres rationnels. 4) ***Situation construite par CH, ECH et ENS*** Construction d'une tâche d'évaluation et de son corrigé qui porte sur la comparaison de nombres rationnels	***Acculturation*** ENS : a) propose de noter, de photocopier ce que les élèves doivent retenir, avec des exemples, pour que les élèves ajoutent ces notes dans leurs cahiers de notes « comme tu fais d'habitude ».; b) reconnaît publiquement l'adéquation de diverses démarches différentes de celle enseignée ***Habitus et rapports des élèves aux nombres rationnels*** - certains élèves reviennent à des représentations fort élémentaires de la fraction dans la comparaison de 97/98 et 123/124. ***Modification des habitus et rapports des élèves aux nombres rationnels*** - repoussent l'aide proposée par ENS et ECH et exposent leurs différentes démarches; déterminent en grand groupe la « meilleure » façon de procéder en terme d'économie de calcul sans requête de notre part; des élèves occupant des « positions inférieures » rivalisent avec des élèves occupant les « meilleurs rangs »; ***Modification du contrat, la position « enseignante » prise par les élèves qui*** - osent prendre des risques, ne perçoivent plus les tâches comme étant menaçantes… - surprennent la chercheure: démarche fort économique qu'elle n'avait pas anticipée (tâche 2)); s'attardent aux nombres dans des tâche de Résolution de problèmes des plus usuelles. ***Effet pervers du contrat*** - infinité de représentation et de nombre versus une « bonne réponse à rendre »… - fluctuation rapport techniciste / pratique mathématique * connaissances mobilisées; (associe 0,0125 et 1/80), connaissent les pièges » : beaucoup de chiffres; ce qui manque pour compléter l'entier…
15/05/2007 *Résolution d'un problème additif* ECH et CH (heure du midi)	***Adaptation d'une situation du manuel en usage*** Problème de répartition des habitants, selon les tranches d'âges. *Ajout de questions afin de : a) travailler le sens des gestes impliqués dans l'addition de fractions (fraction équivalente); b) obliger à recourir à diverses représentations; à valider le choix en fonction du contexte; c) travailler sens du numérateur/ dénominateur; d) estimation de la réunion des différentes répartitions. *Modification des nombres ¼ et 2/5 pour 3/7; 25% et 1/9	***Habitus et rapports des élèves aux nombres rationnels*** Peu d'élèves tiennent compte du contexte dans la résolution du problème (ex. nombre d'habitants proposé par plusieurs élèves est 28; utilisation de pourcentage (produit croisé et arrondissement) : effet de contrat ? de la présence de pourcentage? - les élèves occultent la question sur l'estimation - peu produisent différentes représentations ***Acculturation*** - ELS : comparaison de 9/28 à 1/9 : a) 9/28 environ 9/27 ..1/3 > 1/9; b) 1/9 = 9/81…9/81 < 9/28 - ECH : il est en effet plus facile pour les élèves de se représenter « le tout » lorsqu'ils utilisent une représentation en pourcentage (100%) au lieu d'une représentation fractionnaire (28/28 = 1).

24/05/2007 *Résolution de problèmes additifs* ECH et CH (heure du midi)	***Adaptation d'une situation du manuel Clicmath et problèmes isomorphes au précédent (15/05/2007)*** Les deux problèmes comportent des adaptations de situations proposées dans le manuel Clicmaths (2003). * modifications : a) du contexte (timbre et jardin); b) d'un seul nombre 3/7 pour 2/7; c) demande de dessiner les répartitions	***Habitus et rapports des élèves aux nombres rationnels*** Certains élèves tiennent à tout traduire en pourcentage (produit croisé et arrondissement) et considèrent peu compte du contexte ***Topogénèse*** La demande de représentation permet à certains d'obtenir leurs fractions équivalentes et à d'autres d'appréhender que la réunion des diverses parties devrait donner 1. ***Acculturation de ECH, CH*** ELS : « ça nous prépare pour l'examen »
24/05/2007 *Résolution de problèmes additifs et multiplicatifs impliquant des nombres rationnels* ECH et CH	***A) Situation construite par l'étudiante-chercheure à la demande de l'enseignante (Projet Angus)*** Demande de l'enseignante : avoir un contexte assez riche pour travailler le sens des opérations. Difficultés observées chez les élèves, notamment pour la multiplication (incomprhéension des gestes; confusion avec la produciton de frractions équivalentes). Problème de composition de mesures et de proportionnalité simple. Contexte: partage d'un terrain entre divers contractants; coûts respectifs des lots attribués à ces contractants, selon la répartition. Choix de nombres simples : 2/8 ; 2/16; 7/12 et 1/24 et de représentations inusitées : 33 1/3 %. Relations plus « complexes » : 1/8 – 24 000 1/64 - ? ***B) Adaptation d'une situation du manul Clicmath (Jus d'orange)*** Proportionnalité simple : relation entre le nombre d'oranges pressées et la quantité de jus en litres * Modifications : a) des nombres : utilisation de représentations décimale et fractionnaire; choix de nombres rendant économique la prise en compte des relations (6/4 = 6*1/4), car il serait difficile de représenter des 28^e, des 32^e, des 7^e et des 100^e ; b) de la disposition (tableau)	A) Occasion pour les élèves de « mettre en valeur » les connaissances et les pratiques qu'ils ont pu construire dans des tâches plus représentatives des attentes de l'institution, ce qu'ils ont su faire. Sauf une équipe qui utilise la calculatrice pour faire le produit croisé car ils ont pris 336 comme dénominateur commun. ***Acculturation : Modification des habitus des élèves*** «un élève enseigne à son co-équipier : il modifie les nombres; change le contexte» *Économie, prise en compte de la relation entre les nombres :* quelques élèves utilisent les fractions qu'ils ont exprimées sur 24 afin de trouver ceux sur 12. D'autres repartent des représentations de fractions initiales B) Beaucoup d'élèves participent au retour de cette tâche (jus d'orange) ***Modifications des habitus et rapport des élèves aux nombres rationnels*** Les élèves « jouent » avec les nombres : plusieurs recourent spontanément à diverses représentations et mesures qui facilitent la mise en relation des données et les procédés de calcul : a) 6/4 = 1+1/2 … = 1 2/4 = 6*1/4 - l'utilisation d'une demi (1/2) facilite encore l'accès au sens de l'opération ½ de ¼ : « la moitié de ¼, tu le sépares en 2 ça fait 1/8 » - coordination importante du sens des fractions; conjuguent gestes et dessins. Le contexte a semblé avoir beaucoup aidé
29/05/2007 Résolution d'un problème sur la répartition de l'aire d'un drapeau ECH et CH	***Situation construite par l'étudiante-chercheure (Drapeau)*** *Intégration de différentes situations précédentes (30/04; 22/05) par rapport aux difficultés des élèves;à l'intention, chronogénèse de l'enseignante après la technique , sens ..* Il s'agit d'aménager des espaces peints de différentes couleurs. Les élèves doivent estimer, trouver et comparer des produits. Les élèves doivent dessiner un drapeau et montrer les espaces peints. Les relations entre le dénominateur du multiplicande et le numérateur du multiplicateur ont été choisies pour faciliter la compréhension de la multiplication (1/4 de 4/7; ½ de 4/7) et les relations entre les différentes portions également	**Acculturation** - ENS témoigne de son intérêt pour ce problème ; de donner un accès de plus aux élèves - difficulté à les faire entrer dans le sens de la multiplication, rapport techniciste qui leur semble suffisant : nécessite un travail en grand groupe
4/06/2007 Sériation de nombres rationnels et résolution de problèmes multiplicatifs ECH et CH	***Situation construite par l'étudiante-chercheure et la chercheure*** Choix de nombres permettant d'apprécier l'évolution et le transfert des connaissances, 1) Activité de sériation de nombres rationnels 0,50001; 6/7; 180/240; 7/35; 6/11; 11/6; -415/830; -0,25; 0,76; 3/7; 8/9; 20%; 2) 2 Problèmes multiplicatifs (proportionnalité simple)	***Acculturation*** - Situation qui soulève plusieurs problèmes, mais laisse également place à l'établissement de relations adéquates et de coordinations de connaissances sur les nombres rationnels. ***Effet de contrat / obstacle épistémologique*** Deux nombres associés à des représentations différentes ne peuvent occuper la même position.
12/06/2007 Résolution d'un problème impliquant des nombres rationnels ECH et CH	***Situation construite par l'étudiante-chercheure et la chercheure*** Reprise de la tâche d'évaluation de sériation, mais avec plus de contraintes, car les 7 nombres que les élèves devaient proposer et ordonner devaient tenir compte du contexte, soit d'un livre de 216 pages. Il devait également faire face à une autre contrainte, celle d'exprimer un nombre correspondant à une fraction du nombre de pages lues par Philippe. Le choix de 216 repose sur les nombreuses possibilités de distribution des pages lues	***Effet de contrat / obstacle épistémologique*** Deux nombres associés à des représentations différentes ne peuvent occuper la même position. ***Acculturation, insertion écologique de situations*** - La diversité des démarches montre l'appui sur des situations réalisées précédemment (population/timbre/…) : partent du nombre de pages comme dénominateur; exploitent différents sens de la fraction (rapport, opérateur); utilisent fractions repères - représentations inusitées : π/π - interprétation intéressante des nombres au contexte (317%) - réutilisation de représentations vues dans les autres tâches (0,125 et 1/8; 33,33333333% et 1/3)

15/06/2007 Représentation, calculs et résolution de problèmes impliquant des nombres rationnels ENS	***Situation construite par les enseignantes du premier cycle*** Cet examen final a été préparé par les enseignants de 1ere secondaire - Les nombres sont simples - plusieurs tâches rendent possible l'exploitation des procédures fort approximatives : produit croisé, estimation , pourcentage… - La calculatrice est permise.	***Évaluation du projet/influence du processus d'acculturation*** ENS/ECH-CH : si on fait abstraction de quelques questions, notamment de celles portant sur la distance entre des nombres rationnels, les conduites d'un nombre non négligeable d'élèves sont aussi satisfaisantes que celles des élèves de l'enseignement régulier. ECH/CH : certaines conduites d'élève contrastent, en terme de réussite et de procédures déployées, avec ce qu'ils ont montré dans les tâches d'apprentissage que nous avons réalisées avec eux, particulièrement celles requerrant la sériation de nombres rationnels.

Le tableau précédent donne un aperçu des différents dispositifs d'enseignement et de l'intégration progressive des chercheures dans la conception de ces dispositifs. Mais il faut comprendre que chacune des situations a une histoire didactique qui lui est propre; les situations sont ainsi dépendantes des événements qui les ont précédées. Ainsi, il va de soi que nous ne pouvons rendre compte davantage de l'acculturation des chercheures, de la complicité entre l'enseignante et les chercheures, des adaptations des situations conçues par l'enseignante et les chercheures, sans entrer dans une analyse des conduites des élèves qui sera l'objet de la prochaine section. Il nous a semblé toutefois important, non seulement de présenter les objets d'enseignement qui ont pris vie durant notre séjour dans la classe, mais également de montrer les partages progressifs, entre l'enseignante et les chercheures, des situations sur l'enseignement des rationnels.

Comme le montre ce tableau, 9 des situations d'enseignement des rationnels ont été proposées par l'enseignante, 8 par les chercheures et 8 par l'enseignante et les chercheures. Au cours des deux premières semaines d'enseignement consacrées aux techniques usuelles de calcul sur les fractions, l'étudiante-chercheure a eu l'occasion, en répondant aux questions des élèves, de proposer à certains de ces élèves, des fractions différentes de celles qui faisaient partie des situations initiales, fractions qu'ils étaient invités à examiner, dans l'espoir qu'ils puissent donner sens à diverses écritures des fractions, et ainsi mieux comprendre les gestes composant les techniques de calcul (voir, entre autres, les propositions effectuées lors de l'enseignement de la division de fractions le 18 janvier 2007). Les techniques enseignées se sont avérées des « milieux propices » pour « une dé-transposition et une re-transposition didactiques » (Antibi et Brousseau, 2000) des objets de savoir. Les conduites des élèves ont été portées à l'attention de l'enseignante, soit durant la période de retour sur les activités effectuées par les élèves, soit à la suite des périodes d'enseignement, l'enseignante et l'étudiante-chercheure s'étant entendues pour partager leurs analyses des situations et des conduites des élèves. C'est à la suite de ces interactions, soit deux semaines après l'entrée de l'étudiante-chercheure dans la classe, que l'enseignante a invité l'étudiante-chercheure à présenter en classe la situation « Dites-le avec des fleurs » (Bélisle, 1999). Jugée intéressante par l'enseignante et les élèves, cette situation fut une « occasion inattendue » d'apprécier les procédés mis en œuvre par les élèves, et les raisonnements fort pertinents qui ont permis à certains élèves de trouver de façon économique le résultat attendu. Impressionnée par les conduites des élèves, l'enseignante les invite alors à présenter leurs démarches et à interpréter celles des autres élèves. Reprenant les termes de Davis (2005) dans ses recherches effectuées en collaboration avec les enseignants, une complicité entre l'enseignante et les chercheures s'était ainsi établie. Nous pourrions parler d'une complicité « entre l'enseignante, l'étudiante-chercheure et les élèves ».

La complicité entre l'enseignante et les chercheures, comme le montre le tableau, se manifeste, par la suite, dans les situations sur la représentation des nombres rationnels, sur la résolution de problèmes impliquant des nombres rationnels. Les chercheures sont ainsi régulièrement invitées à proposer des activités, certaines prenant appui et prolongeant « de manière naturelle » les activités réalisées par l'enseignante, activités qui engagent de plus en plus les élèves dans des pratiques mathématiciennes sur les nombres et les opérations [voir, entre autres, les activités sur la représentation des nombres rationnels (5 février 2007), sur les calculs impliquant des nombres rationnels (13 février 2007)], d'autres résultant d'adaptation de situations proposées dans les manuels [entre autres, les activités sur la comparaison et la sériation de nombres rationnels (8 février 2007, 26 et 30 avril 2007)], ainsi que sur la résolution de problèmes impliquant des nombres rationnels [22 , 24 et 29 mai 2007], d'autres provenant d'études effectuées par les chercheurs en didactique des mathématiques [tel est le cas de la situation « Épaisseur d'une feuille de papier » , empruntée à Guy Brousseau (1987)]. Notons enfin la collaboration entre l'enseignante et les chercheures dans la conception de situations originales [voir, entre autres, la situation d'intégration des connaissances sur les nombres rationnels présentée le 10 mai 2007].

En complétant ce survol sur l'ancrage progressif de la participation des chercheures à la conception des dispositifs sur l'enseignement des rationnels, il nous apparaît fort important de souligner l'apport non négligeable des situations usuelles d'enseignement des nombres rationnels, notamment des opérations sur ces nombres, situations privilégiées dans les institutions scolaires, et plus encore, lorsqu'il s'agit d'institutions accueillant des élèves présentant des difficultés. En effet, ces situations ont été à la source de questionnements, de tâches opérant « une dé-transposition et une re-transposition » didactique des savoirs sur les nombres rationnels et les opérations sur ces nombres. Les élèves ont véritablement participé à ce travail et ont été des instigateurs fort précieux des collaborations entre l'enseignante et les chercheures. Pour apprécier ce travail, il nous apparaît essentiel de procéder à une analyse des conduites des élèves et des interactions entre les élèves, l'enseignante et les chercheures, lors de la réalisation des situations d'enseignement. Cette analyse nous permettra de préciser l'évolution des rapports des élèves aux rationnels et des rapports de l'enseignante et des chercheures à l'enseignement des rationnels.

4.2. Présentation des situations d'enseignement des nombres rationnels et analyse des conduites des élèves et des interactions didactiques

L'analyse des conduites des élèves, et des interactions entre les élèves, l'enseignante et les chercheures, au cours des situations d'enseignement des nombres rationnels, est orientée par les objectifs de notre recherche, à savoir: 1) identifier la progression des démarches d'acculturation institutionnelle de l'enseignante, des chercheures et des élèves et leurs effets sur les processus d'élaboration et de gestion des situations d'enseignement, ainsi que sur les caractéristiques de ces situations; 2) préciser l'évolution des connaissances, des habitus et des rapports des élèves aux rationnels, au cours de la séquence d'enseignement. Cette analyse tient compte des différentes phases de la démarche d'acculturation institutionnelle.

4.2.1. Situations d'enseignement consacrées aux opérations sur les fractions et à la résolution de problèmes additifs et multiplicatifs

Les deux premières semaines d'enseignement (période s'échelonnant entre le 12 et le 30 janvier 2007), comme en fait état le tableau précédent, ont porté sur l'enseignement des techniques usuelles de calcul sur les fractions et la résolution de quelques problèmes additifs et multiplicatifs impliquant des fractions, un examen complétant cet enseignement. Les situations ont été conçues et gérées par l'enseignante. L'étudiante-chercheure était présente dans la classe et était invitée à répondre aux questions des élèves et à soumettre à l'enseignante ses observations lors du déroulement de ces situations; elle a, de plus, eu l'occasion de participer à la correction de l'examen. Par ailleurs, respectant la décision de l'enseignante, elle s'est abstenue d'effectuer des enregistrements des périodes d'enseignement et de garder traces des productions écrites des élèves. Les données sur lesquelles s'appuie l'analyse qui suit sont donc fragmentaires; elles permettent toutefois d'apprécier les pratiques d'enseignement et d'apprentissage et les rapports aux fractions privilégiés dans la classe. Il importe de noter que les interdictions précédentes ont été levées par la suite, les élèves, l'enseignante et l'étudiante-chercheure ayant établi une première complicité.

4.2.1.1. Addition et soustraction de fractions

Au cours de la période précédant l'entrée en classe de l'étudiante-chercheure (12 janvier 2007), les élèves avaient été invités à effectuer une activité d'addition et de soustraction de fractions puisée dans le manuel Perspective (Guay, Hamel et Lemay, 2005; volume 1A, p. 155). Les instructions pour cette activité sont les suivantes :

Qu'avons-nous en commun?
1^er^ temps : On te remet un papier sur lequel est inscrite une fraction, ainsi qu'un transparent sur lequel est tracé un carré. À l'intérieur du carré, trace une grille permettant de représenter cette fraction.

2^e^ temps : Fais équipe avec un ou une camarade qui a un dénominateur différent du tien. Un autre transparent vous sera remis, où figure un carré. Ensemble, à l'intérieur du carré, tracez une nouvelle grille qui permettrait de représenter vos deux fractions.

Utiliser cette grille pour trouver la somme et la différence de vos fractions. Notez vos réponses et vos façons de procéder.

3^e^ temps : En groupe classe, discutez de la réalisation des tâches du 2^e^ temps. Comme les autres équipes ont-elles procédé pour

a) tracer leur grille commune?
b) trouver la somme et la différence de leurs fractions?

Les fractions proposées dans le manuel sont : 1/5; 2/5; 3/5; 4/5; 1/6; 5/6; 1/8; 3/8; 5/8; 7/8; 1/10; 3/10; 7/10; 9/10; 1/12; 5/12; ces fractions sont reproduites, de manière à ce que chacun des élèves reçoive une fraction écrite sur un papier et une feuille comportant un carré. Il importe de mentionner que cette activité avait été présentée par l'étudiante-chercheure, lors de la rencontre avec les enseignants. Et, à ce moment, tenant compte du fait que les élèves n'avaient à traiter que deux fractions et que, dans cette condition, la tentation était grande de procéder à une multiplication des dénominateurs, pour trouver un dénominateur commun qui permette de représenter aisément les deux fractions, de trouver leur somme et leur différence, celle-ci avait proposé l'adaptation suivante de cette activité : demander aux élèves de choisir judicieusement leur coéquipier en fonction des dénominateurs et de se joindre ensuite à une autre équipe, et ainsi de suite. Au moment de la présentation de cette activité par l'enseignante, elle a dit à l'étudiante-chercheure qu'elle avait tenu compte de l'adaptation qu'elle avait suggérée, en proposant à chacun des élèves de faire équipe avec un élève, de sorte que ces élèves se retrouvent avec deux fractions dont le dénominateur de l'une est un multiple du dénominateur de l'autre. L'enseignante commente ainsi sa proposition; elle nous dit « insister » pour que les élèves essaient de trouver une démarche économique, notamment, en recherchant le plus petit commun multiple des nombres apparaissant aux dénominateurs des fractions et en réduisant, si possible, les fractions résultant des calculs. Nous aurons l'occasion de voir, lors de la période d'enseignement suivante, que les avis des élèves sont partagés en ce qui a trait à l'économie de cette démarche.

Cette activité complétée, l'enseignante demande aux élèves de faire « en devoir » la section « Je vérifie mes connaissances » qui accompagne l'activité précédente. Nous reproduisons les consignes pour cette tâche :

Effectue les tâches ci-dessous en considérant chaque paire de fractions.

a) Sur un papier quadrillé, trace une grille pouvant représenter les deux fractions qui composent chacune des paires.

b) Trouve la somme et la différence de chaque paire de fractions.

1) $\frac{3}{4}$ *et* $\frac{1}{2}$ 3) $\frac{2}{3}$ *et* $\frac{1}{5}$ 5) $\frac{7}{10}$ *et* $\frac{1}{2}$

2) $\frac{8}{9}$ *et* $\frac{1}{3}$ 4) $\frac{5}{6}$ *et* $\frac{2}{9}$ 6) $\frac{5}{8}$ *et* $\frac{5}{12}$

La correction de ce devoir coïncide avec l'entrée en classe de l'étudiante-chercheure (15 janvier 2007). Comme nous l'avons relevé précédemment, à propos de l'activité effectuée en classe sur l'addition et la soustraction de fractions, trouver un dénominateur commun aux deux fractions en multipliant les dénominateurs de ces fractions constitue une démarche relativement économique et ce, d'autant plus que dans les consignes, il n'y a pas d'invitation spécifique à exprimer les sommes et les différences en recourant à une fraction irréductible. Mais, la majorité des élèves déclarent plus facile de procéder à la recherche du plus petit commun multiple des dénominateurs, invoquant le fait qu'ils « travaillent alors » avec des plus petits nombres; cette déclaration reflète bien les propos de l'enseignante, propos que ces élèves ont fait leurs. Un élève avoue toutefois que pour ne pas se casser la tête, il multiplie toujours les dénominateurs. Cette réaction, que nous avons partagée avec l'enseignante, à la fin de cette période, permettait de lier le projet de l'étudiante-chercheure à celui de l'élève et de l'enseignante et de lui conférer ainsi une pertinence institutionnelle; ce projet consistant à procéder, dans des activités ultérieures, à divers choix de fractions, de représentations de fractions, qui permettent de lier l'économie de certaines démarches de calcul aux fractions, ainsi qu'à leurs représentations. Cet événement témoigne de la participation de cet élève à l'enseignement.

La correction du devoir précédent fait apparaître une difficulté chez plusieurs élèves, difficulté liée à l'addition des fractions $\frac{8}{9}\ et\ \frac{1}{3}$. En effet, plusieurs élèves associent, à la fraction $\frac{11}{9}$, le nombre fractionnaire $1\frac{1}{9}$; ils ne savent interpréter la fraction $\frac{11}{9}$ comme une composition additive des fractions $\frac{9}{9}\ et\ \frac{2}{9}$ et ainsi, comprendre le changement de représentation proposée par l'enseignante. Il est possible que ces élèves prennent appui sur leurs connaissances et procédés liés au traitement de nombres naturels (ex. : si on a 11 unités, on peut former 1 dizaine). À la suite de la correction du devoir, l'enseignante invite les élèves à former des équipes pour réaliser l'activité suivante, soit « La fête est terminée », activité puisée dans le manuel Perspective (*Ibid.*, p. 156). Les élèves sont alors invités à résoudre des problèmes additifs de composition et de transformation de mesures (Vergnaud, 1991).

« La fête que Cédric a organisée est terminée. En faisant le ménage, il trouve des contenants de jus de format identique qui ne sont pas vides.

Situation 1 Quelle quantité de jus obtiendrait-il en mélangeant le tiers d'un contenant et le sixième d'un autre?	**Situation 2** S'il buvait les 5/8 d'un contenant rempli au7/8, quelle quantité de jus resterait-il dans le contenant?
Situation 3 Près du canapé, il trouve trois contenants : un qui est rempli au 2/3, un autre, aux 4/9 et un dernier, à 1/6. Quelle quantité totale de jus cela représente-t-il?	**Situation 4** Sur une table, on a laissé 6 contenants de jus pleins et un autre rempli au 5/12. Cédric verse dans un grand pot de jus l'équivalent de 3 contenants 7/10. Quelle quantité de jus restera-t-il sur la table?

Pour effectuer cette activité, les élèves sont invités à former des équipes. Cette activité est interrompue par l'enseignante, l'engagement des élèves dans les situations proposées étant peu évident. L'enseignante propose le jeu suivant. Les élèves sont invités à former des équipes. L'enseignante distribue aux élèves de chacune des équipes, des crayons, certains élèves obtenant des crayons bleus et d'autres des crayons verts. Elle informe les élèves qu'ils auront diverses additions de fractions à effectuer; les équipes gagnantes seront celles qui obtiennent le plus de points. Dès qu'une addition est proposée, chacun des élèves d'une équipe utilise son crayon et essaie de trouver rapidement la somme; les réponses inscrites avec un crayon bleu valent 2 points, tandis que les réponses inscrites avec un crayon vert ne valent que 1 point. Dans une équipe, les réponses sont jugées et pour inscrire la réponse qui leur semble la plus adéquate, les élèves peuvent échanger leurs crayons et inscrire ainsi cette réponse avec le crayon bleu. Diverses additions sont alors proposées; il s'agit d'additions relativement simples, par exemple : $\frac{2}{8}+\frac{3}{8};\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$; etc. L'enseignante recourt assez régulièrement à ce type de jeux, auquel les élèves participent avec enthousiasme, les jeux ainsi proposés, comme le montre l'exemple précédent, étant à la portée de la majorité des élèves. Ce type de jeux nous est rapidement apparu propice à l'introduction d'un travail non négligeable sur les représentations des nombres rationnels.

À la suite des activités précédentes, l'enseignante demande aux élèves d'effectuer « en devoir » diverses additions et soustractions de fractions; voici quelques exemples qui montrent la progression des calculs : a) 5/16 + 3/16 + 7/16 = _____________; b) 9/15 + 2/3 = _____________; c) 10/9 + 10/36 = ____________ d) 5/8 + 3/12 = ______________. Comme le montrent les exercices et les consignes accompagnant ces exercices, ce devoir est une autre occasion pour chacun des élèves de mettre en pratique, les procédés enseignés en classe. Selon les témoignages de l'enseignante, plus de la moitié des élèves s'acquittent très bien de cette tâche. Les élèves laissent toutefois peu de traces des calculs effectués, se contentant très souvent d'indiquer leurs réponses.

4.2.1.2. Multiplication de fractions

L'enseignement de la technique usuelle de multiplication de fractions fait suite à l'enseignement des techniques d'addition et de soustraction de fractions. Cet enseignement est effectué le 16 janvier 2007. Malheureusement, ni l'étudiante-chercheure, ni la chercheure, n'ont pu assister à cet enseignement. Les informations que nous a transmises l'enseignante sont par ailleurs fort éclairantes. Pour l'enseignante, il s'agit, dans un premier temps, de permettre aux élèves d'assimiler la technique, la compréhension du sens des calculs entrant dans cette technique étant traitée ultérieurement. Les élèves sont alors invités à prendre note des calculs entrant dans le déroulement de la technique, ces calculs sont ainsi présentés :

Pour multiplier des fractions, on doit :
1. Multiplier les numérateurs;
2. Multiplier les dénominateurs;
3. Réduire la fraction.

Exemple : $\frac{2}{3} \times \frac{9}{12} = \frac{18}{36}\frac{\div 2}{\div 2} = \frac{9}{18}\frac{\div 3}{\div 3} = \frac{3}{6}\frac{\div 3}{\div 3} = \frac{1}{2}$

[…]

Pour multiplier une fraction avec un entier, il faut mettre le dénominateur 1 pour l'entier.

Exemple : $\frac{4}{5} \times \frac{10}{1} = \frac{40}{5}\frac{\div 5}{\div 5} = \frac{8}{1} = 8$

Ce travail fait, les élèves se répartissent en équipe et effectuent les calculs provenant du cahier d'exercices (Leclerc, 2004, p. 40).

> « **3.** Détermine la valeur des expressions suivantes.
> a) Le tiers d'une demie.
> b) La moitié de douze quinzièmes.
> c) Les trois quarts de 4/9
> d) Les sept huitièmes de 1/4.
> e) Les 3/5 de 5/6.
> f) Les 2/3 de 9/10.
> g) Les 8/9 de 6/7.
> h) Les 4/11 de 22/25.
> i) Les 5/12 de 10/17.
> j) Les 20/31 de 4/5.
> k) Le 1/3 de 12 4/7.
> l) Les 2/5 de 20 5/9. »

Les fractions entrant dans les calculs précédents nous semblent bien choisies, les types de relations entre le dénominateur du multiplicande et le numérateur du multiplicateur sont variées, tel que préconisé dans plusieurs recherches (ex. Cramer, Wyberg et Leavitt, 2009). Les numérateurs de plusieurs des fractions sont des multiples des dénominateurs des fractions qui leur sont associées dans les calculs (items b), c), e), f), h), j)). Il aurait pu être pertinent, après une application de la technique usuelle de calcul, de demander aux élèves de bien examiner les relations entre les numérateurs et les dénominateurs des fractions, de trouver des procédés plus économiques que ceux qu'ils ont appliqués pour effectuer certains des calculs, en leur suggérant, le cas échéant, d'effectuer des représentations des fractions. Si l'on tient compte du fait que plusieurs élèves parviennent à effectuer correctement les calculs, en simplifiant si nécessaire les fractions résultant de ces calculs, cette ouverture aurait pu être possible. Le manuel Perspective comporte d'ailleurs plusieurs activités qui suscitent un examen des relations entre les numérateurs et les dénominateurs des fractions. En prenant en considération l'importance du processus d'acculturation mis en place, la décision de ne pas ouvrir immédiatement « une telle fenêtre », comme nous pourrons le constater ultérieurement, s'est cependant avéré opportune, la maîtrise par plusieurs élèves des techniques usuelles de calcul leur assurant « une confiance non négligeable » pour entrer dans des situations impliquant un travail plus poussé sur les nombres rationnels et les opérations impliquant ces nombres.

4.2.1.3. Division de fractions

L'enseignement de la division de fractions est effectué le 18 janvier 2007. Pour introduire ce calcul, l'enseignante commente les transformations et les opérations effectuées pour diviser une fraction par un nombre naturel. La division « 4/5 ÷ 6 » est alors présentée de la façon suivante : « Tu dois obtenir une fraction équivalente dont le numérateur sera divisible par le nombre naturel : $\frac{4}{5} \div 6 =$; $\frac{4}{5} \times \frac{3}{3} = \frac{12}{15}$; $\frac{12}{15} \div 6 = \frac{2}{15}$ 12 est divisible par 6. » (Guay, Hamel et Lemay, 2005, volume 1A, p. 163). Toutefois, contrairement à qui est proposé dans le manuel, aucune représentation n'accompagne les opérations effectuées; l'enseignante ajoute aussi : « Il ne faut pas diviser le dénominateur ». L'enseignante poursuit ensuite en présentant la division de fractions et en demandant aux élèves de prendre des notes. La division suivante est alors décrite :

« Division de fractions	4/5 ÷ 6/7
1. Copier la première fraction	4/5
2. Changer la division en multiplication	4/5 x
3. Inverser la 2^{e} fraction	4/5 x 7/6
4. Effectuer la multiplication	4 x 7 / 5 x 6 = 28/30
5. Réduire, simplification de la fraction	28 ÷ 2 / 30 ÷ 2 = 14/15 »

Elle ajoute ensuite que « Les nombres fractionnaires doivent être transformés en fractions impropres : 1 4/7 … 7 x 1 + 4 = 11 /7 »

L'enseignante distribue, à chacun des élèves, 2 feuilles sur la division de fractions provenant du cahier d'exercices (Perspective Mathématique, 2004, p. 50-51). Voici quelques-unes des activités présentées aux élèves.

« 2.10. **Division de fractions**
[…]

7. Détermine le quotient.

a) 2/9 ÷ 5/7 = _______________;	d) 8/9 ÷ 3/8 = __________________
b) 3/5 ÷ 7/18 = ______________;	e) -4/9 ÷ -5/8 = _________________
c) 5/11 ÷ 6/13 = _____________;	f) 4/5 ÷ 9/18 = __________________

8. Calcule les divisions suivantes. (Écris ta démarche.)

a) 8/15 ÷ 12/25 = _______________;	d) 8/9 ÷ 4/27 = __________________
b) 3/8 ÷ 9/14 = ______________;	e) 8/21 ÷ 10/27 = _________________
c) 7/15 ÷ 28/45 = _____________;	f) 5/21 ÷ 15/28 = __________________

[…]

11. Transforme les nombres fractionnaires en fractions et divise.

a) 3 1/2 ÷ 5/6 = _______________; h) 4 1/5 ÷ 3/10 = __________________

b) 6 2/3 ÷ 4/9 = _______________; i) 1 5/6 ÷ 11/14 = _________________

c) 3 ¾ ÷ 3/8 = _____________; j) 2 7/9 ÷ 5/6 = __________________

d) 4 7/8 ÷ 3 = _______________; k) 2 4/5 ÷ 4 = __________________

e) 5 5/6 ÷ 7 = ______________; l) 3 3/4 ÷ 5 = _________________

f) 2 4/9 ÷ 4 = _____________; m) 3 5/9 ÷ 10= __________________

g) 21 ÷ 3 ¾ = _______________; n) 10 ÷ 2 ¼ = _____________________ »

Pour effectuer les calculs précédents, les élèves doivent se référer à leurs feuilles de notes. En aucun moment, tant dans l'introduction que dans les exercices précédents, le sens de l'opération « division » n'est invoqué.

Étant donné le nombre important d'exercices, aucun élève ne parvient à compléter cette activité. De plus, si plusieurs élèves se réfèrent bien à leurs notes pour effectuer les calculs, quatre élèves seulement (Prince, Martin, Guy et Samuel) disent « vouloir comprendre ce qu'ils font ». L'étudiante-chercheure propose, entre autres, à Samuel et Prince de commenter, de mettre des mots, sur les écritures suivantes « ex. : 5/6÷3/4, 10/12÷9/12; 3/5 ÷ 1/5; 3/5 ÷ 5/5; 3/5 ÷ 6; 3/5 ÷ 9/14». Ces élèves effectuent une analyse des nombres en jeu et des relations entre ces nombres, une telle analyse leur permettant de saisir, « du moins intuitivement », le sens des calculs auxquels ils recourent pour effectuer les divisions. Ces élèves exploitent cette façon de faire dans le traitement du calcul « 7/15 ÷ 28/45 » (no. 8 c); ils procèdent alors ainsi : 7 (x 3) / 15 (x 3) ÷ 28/45 = 21/28. Ce procédé est montré à l'enseignante qui le juge fort pertinent, du moins pour les élèves « forts»; elle leur rappelle toutefois « qu'elle veut voir s'ils sont capables d'exploiter aussi la façon qu'elle leur a montrée. » Il nous semble important de souligner que la proposition que nous avons faite aux élèves s'appuie à la fois sur ce que l'enseignante a privilégié lors de la division de fractions par des nombres naturels et sur ce que les auteurs du manuel de l'élève prévoient, lors de la division de fractions (Guay, Hamel et Lemay, 2005, p. 296).

4.2.1.4. Résolution de problèmes additifs et multiplicatifs

À la suite de l'enseignement des procédés usuels de calcul sur les fractions, les élèves sont invités par l'enseignante à résoudre plusieurs problèmes additifs et multiplicatifs impliquant des fractions. Deux périodes sont consacrées à ces tâches, le 22 janvier 2007. Les problèmes proviennent du Manuel Perspective (Guay, Hamel et Lemay, 2005, pp. 157-160 et pp. 163-165). Pour la première série de problèmes (pp. 157-160), les élèves choisissent 7 des 10 problèmes présentés; pour la seconde série de problèmes (pp. 163-165), ils doivent choisir 6 des 10 problèmes présentés. Leurs choix reposent généralement sur la longueur du texte, l'intérêt pour le sujet de l'énoncé, etc. Les nombres et leur relation ne sont pas pris en considération. Nous reproduisons les problèmes ainsi présentés pour chacune des séries et nous commentons brièvement les conduites des élèves. Il importe de souligner que nous n'avons eu qu'un bref aperçu de ces conduites, les élèves ne souhaitant pas que nous puissions examiner plus attentivement leurs réponses, leurs solutions, certains nous disant qu'ils ne se sentaient pas assez bons.

Problèmes présentés à la première période (pp. 157 à 160)

« 1. Le papyrus de Rhind est l'un des plus anciens documents mathématiques qui nous soient parvenus. En effet, il date de l'an 1650 avant notre ère. Il contient entre autres des méthodes de calcul pour effectuer des opérations avec des fractions. Pour résoudre le septième problème, il faut effectuer la chaîne d'additions ci-dessous. (une image donnant un aperçu d'un papyrus de Rhind accompagne ce problème).

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{28}+\frac{1}{8}+\frac{1}{56}+\frac{1}{16}+\frac{1}{112}$$

Quelle est ta réponse?

2. Durant l'été, Laure et Samuel sont stagiaires dans un camp de jour.
Voici une partie de leur planification d'une journée avec les jeunes.

Jeux en groupe	Bricolage	Dîner	Repos
2 heures ¾.	2 heures ½ .	¾ d'heure.	1 heure 1/3.

a) Si une journée correspond à 7 heures 1/2, combien d'heures leur reste-t-il à planifier?

b) Le nombre d'heures trouvé en a) correspond à combien de minutes?

3. Audrey a offert une grande feuille d'autocollants à son petit frère. Celui-ci en a collé 4/7 dans un album et 2/5 dans une carte d'anniversaire pour sa mère. Il lui reste maintenant deux autocollants sur sa feuille. Combien d'autocollants cette feuille contenait-elle au départ?

4. Pour réaliser une recette, Dominique doit mélanger les ingrédients ci-dessous dans un grand bol.

   2 1/3 tasses de farine
   ¾ de tasse de beurre fondu
   3/8 de tasse de levure chimique →
   ½ tasse de lait
   1 2/3 tasse de mélasse

   Le bol dont elle dispose a une capacité de 5 1/3 tasses. Pour pouvoir bien mélanger le tout, Dominique doit s'assurer que, une fois tous les ingrédients versés, il restera un quart de tasse disponible dans le bol. Peut-elle utiliser ce bol? Explique ta démarche.

5. Le jour de ses 14 ans, Maxime demande à son père la permission de faire une promenade avec le véhicule tout-terrain. Son père est d'accord, mais précise qu'il ne reste presque plus d'essence dans le réservoir. Maxime met alors une quantité d'essence correspondant aux deux tiers du réservoir. Voici ce que l'on peut alors voir sur la jauge d'essence :

   Quelle fraction du réservoir l'essence occupait-elle avant que Maxime en ajoute ?

6. Dans l'arrière-boutique de l'épicerie de sa tante, Antoine range des bouteilles vides. Les bouteilles sont réparties inégalement dans des caisses de même capacité. Voici les fractions de caisse qu'occupent ces bouteilles (4 bouteilles sont dessinées; les fractions sont indiquées sur des caisses identiques (cubes dessinés); nous indiquons dans l'ordre les fractions inscrites sur ces caisses)

$$\frac{1}{8}\quad \frac{5}{12}\quad \frac{1}{12}\quad \frac{1}{3}\quad \frac{7}{12}\quad \frac{2}{3}\quad \frac{1}{6}\quad \frac{7}{8}\quad \frac{5}{6}\quad \frac{5}{8}\quad \frac{3}{8}\quad \frac{3}{4}\quad \frac{11}{12}\quad \frac{1}{2}\quad \frac{1}{4}$$

   a) Combien de caisses complètes Antoine peut-il former?
   b) À quelle fraction de caisse les bouteilles qui restent correspondent-elles?

7. Abigail est au jardin communautaire avec sa grand-mère. Celle-ci voudrait bien clôturer la section des fines herbes et celle des fleurs. « Malheureusement, dit-elle à sa petite-fille, je n'ai rien apporté pour mesurer. » Abigail lui propose de mesurer en utilisant une roue de sa trottinette, c'est-à-dire en comptant le nombre de tours qu'elle fait. Voici ce qu'elle obtient.

   La section des fines herbes est de forme carrée. L'un de ses côtés mesure 6 tours 2/3. La section des fleurs est de forme rectangulaire. La largeur mesure 5 tours ¾ et la longueur, 8 tours 1/5.

   Quelle longueur de clôture devra-t-on acheter pour délimiter les deux sections? Écris ta réponse en nombre de tours de roue.

8. La mère de Nicolas travaille dans une petite entreprise. Pour y préparer du café, on utilise l'eau d'un distributeur dont la bonbonne a une capacité de 10 litres. La mère de Nicolas décide de faire une estimation de la consommation quotidienne d'eau. Voici ce qu'elle a noté pour une journée. [un dessin représentant un petit garçon qui commence à verser l'eau d'un distributeur dans un des verres identiques déposés sur une table]

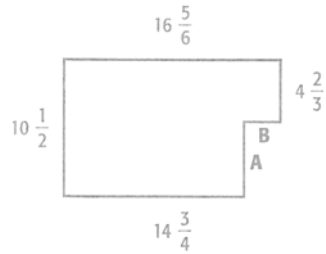
   On remplit trois fois la cafetière d'une capacité de 2 ¼ L. La consommation du personnel correspond à 25 tasses de 1/3 L chacune; celle de la clientèle, à 10 gobelets de 1/5 L chacun.

   Si la bonbonne du distributeur était pleine au début de la journée, combien de litres d'eau restait-il à la fin de la journée?

9. Léonie désire poser une bande de papier peint sur le haut des murs de sa chambre. Son grand-père a pris quelques mesures dans la chambre, puis a tracé le plan ci-contre. Les mesures sont données en pieds. Il n'a pu prendre les mesures aux endroits associés aux lettres A et B sur le plan. (le dessin du plan est reproduit plus bas)

a) Déduis ces mesures à partir des données du plan.

b) De quelle longueur de papier peint Léonie aura- t-elle besoin?



10. Le centre sportif où Meredith, Paola et Emma s'entraînent comprend un couloir de course à pied de forme circulaire. Chaque athlète a commencé son entraînement à la même ligne de départ. Observe le tableau ci-contre pour connaître la distance parcourue par chaque athlète jusqu'à maintenant.

Distance parcourue par chaque athlète	
Noms	Nombre de tours
Meredith	5 1/12
Paolo	3 5/8
Emma	4 8/9

a) De combien de tours la personne en tête devance-t-elle les deux autres?
b) Combien de tours au total les trois athlètes ont-ils faits jusqu'à maintenant?
c) Si Emma s'immobilise, quelle fraction de tour chacune des deux autres personnes devra-t-elle faire pour passer à côté d'elle?

Selon la typologie des problèmes additifs définie par Vergnaud (1991), les problèmes présentés font appel essentiellement à des compositions additives de mesures. Si l'on exclut le premier problème, dans lequel le dénominateur de la dernière fraction à additionner, soit 112, est un multiple des autres dénominateurs, les élèves doivent eux-mêmes trouver un dénominateur commun leur permettant de traiter les fractions proposées, ce qui devrait, en principe, poser peu de difficultés, compte tenu des dénominateurs des fractions proposés. Il est intéressant, par ailleurs, de noter le choix particulièrement pertinent des nombres fractionnaires et des fractions que comporte le problème 4; en effet, pour résoudre ce problème, les élèves peuvent procéder de la façon suivante : 1 2/3 + 2 1/3 = 3; ¾ + 3/8 + ½ = 13/8 (1 5/8); 3 ¾ + 1 5/8 = 5 3/8; ils peuvent ensuite comparer les nombres 5 3/8 et 5 1/3 et, puisque le second nombre peut aussi être représenté par 5 3/9, conclure « que le bol dont dispose Dominique ne peut être utilisé ». Les notes que nous avons pu prendre lors de la résolution de ces problèmes par les élèves montrent que deux élèves ont ainsi procédé, soit Martin et Prince. Mentionnons également que la très grande majorité des élèves n'ont effectué que quelques problèmes seulement, soit les quatre premiers problèmes.

Problèmes présentés à la seconde période (pages 163 à 165)

« 1. Laurent a grandi rapidement. Il doit donner les deux tiers de ses vêtements. Il les répartit également en quatre piles pour ses petits-cousins. Quelle fraction des vêtements de Laurent chacune des piles représente-t-elle?

2. La mère d'Hugo reçoit en héritage les cinq douzièmes de la fortune de son oncle. Elle décide d'en donner les deux cinquièmes à son fils. À quelle fraction de la fortune de l'oncle l'héritage reçu par Hugo correspond-il?

3. Patricia a invité deux amies à souper. Pour le dessert, elles se sont partagé équitablement les quatre cinquièmes d'une tarte aux pommes. Chacune a-t-elle eu plus d'un quart de tarte? Explique ta réponse à l'aide de calculs.

4. Mathieu passe les trois quarts de son temps libre à faire du sport. Parmi les sports qu'il pratique, celui qu'il préfère est le soccer. Il y réserve les deux tiers du temps qu'il consacre aux sports.
Es-tu d'accord avec l'affirmation de Mathieu, ci-contre? Explique ta réponse.
Un dessin d'un garçon accompagne ce problème. Ce garçon dit : « Je passe la moitié de mon temps libre à jouer au soccer!]

5. L'illustration ci-contre représente un contenant gradué également, dans lequel on a versé une quantité d'eau. Quelle fraction du contenant sera occupée par l'eau quand on en aura enlevé
a) les 3/5 de cette eau? b) les 4/9 de cette eau? [On voit un dessin d'un verre (cylindre) sur lequel 7 parties égales sont dessinées. Cinq de ces parties sont colorées et correspondent à l'eau déposée dans ce verre]

6. Aux trois quarts de la partie d'un jeu de société, Lucie abandonne le jeu. Elle possède alors les cinq huitièmes des propriétés qu'il s'agit d'acquérir. Elle les répartit équitablement entre les trois autres personnes qui jouent. Quelle fraction des propriétés du jeu chacune obtiendra-t-elle de Lucie?

7. Rose utilise sa corde à sauter pour mesurer la longueur de la cour de son école. Elle obtient 18 cordes ¾. Elle veut partager la longueur de la cour en 6 parties équivalentes. Quelle sera la mesure de chacune de ces parties en utilisant la corde à sauter comme unité de mesure?

8. Comme chaque année, l'école Beausoleil organise un cross-country. La distance à parcourir est séparée en cinq parties équivalentes, à la fin desquelles se postent des personnes-ressources. Après avoir complété la troisième partie du parcours, Luce s'arrête pour attacher le lacet d'une de ses espadrilles. Elle dit à une enseignante : « J'ai couru le quart de la distance depuis le départ avec mon soulier détaché! »
   a) Quelle fraction de la distance totale de la course Luce a-t-elle parcourue avec un lacet détaché?
   b) Si la distance totale du cross-country est de 5 km, quelle est la distance en mètres parcourue par Luce avec un lacet détaché?

9. Deux amis discutent lors des olympiades de leur école. Quelle fraction de la distance record le poids de Zacharie a-t-il atteinte? [Les dialogues suivants sont associés aux personnages de Zacharie et Henri)] Premier personnage : « Tu sais, Zacharie, je pensais avoir dépassé la distance record du lancer du poids de l'école, mais je n'en ai atteint que les 7/8… »; Second personnage : « Ne t'en fais pas, Henri! Mon poids n'est tombé qu'aux cinq sixièmes de la distance atteinte par le tien! »

10. Dans la bibliothèque des parents de Casandra, 12 tablettes sur 15 sont occupées par des ouvrages classiques français. Avant de choisir l'un d'eux, Casandra veut terminer sa lecture des romans québécois, qui se trouvent sur les autres tablettes. En fait, il ne lui reste à lire que les deux neuvièmes de ces romans. En considérant que chacun des livres occupe environ le même espace, détermine à quelle fraction environ des romans de la bibliothèque de ses parents correspondent les livres que Casandra a lus jusqu'à présent. Laisse les traces de tes calculs. »

La majorité des problèmes multiplicatifs, selon la typologie définie par Vergnaud (1991), impliquent des produits scalaires (un seul espace de mesure étant impliqué); seuls les problèmes 1, 3 et 6 (et, à la rigueur, le problème 7) peuvent être associés à des problèmes d'isomorphismes de mesure (proportionnalité simple). Ce choix nous apparaît refléter les choix didactiques effectués précédemment, lors de l'enseignement des procédés de multiplication et de division des fractions. Par ailleurs, même si dans l'enseignement de la division de fractions, les élèves étaient invités à procéder à la division d'une fraction par une autre fraction, tous les problèmes présentés ne font appel qu'à la division d'une fraction par un nombre naturel. Parmi ces derniers problèmes, il est intéressant de relever que, dans le problème 7, il s'agit de partager 18 cordes ¾ (longueur de la cour) entre 6 parties équivalentes; pour effectuer un tel partage, les élèves qui prenaient acte de la relation entre les nombres 18 et 6, pouvaient procéder ainsi : 18 ÷ 6 = 3; ¾ ÷ 6 = ¾ x 1/6 (selon le procédé enseigné) ou encore, 6/8 ÷ 6 = 1/8 (en recourant à une fraction équivalente à ¾, selon un autre procédé enseigné), la réponse alors produite étant 3 1/8. Selon les notes que nous avons pu recueillir au cours de la réalisation de ces problèmes, si près de la moitié des élèves effectuent bien le calcul « 18 ÷ 6 », trois élèves seulement (Samuel, Martin et Prince) recourent à la fraction 6/8 pour effectuer ensuite la division par 6. Mais, comme les élèves avaient aussi appris à mettre les nombres fractionnaires en fractions impropres, Rebecca et Hélène ont effectué les calculs suivants : 18 ¾ ÷ 6 → 4 x 18 + 3/4 = 75/4…75/4 x 1/6 → 75/24.

Peu d'élèves parviennent à effectuer le nombre de problèmes qu'il leur était demandé de choisir (soit 6 problèmes). Plusieurs élèves ne savent aussi trouver l'opération à effectuer. Plusieurs élèves qui, à l'occasion, interprètent correctement le problème, ne savent effectuer correctement l'opération : un élève, Bertrand, dit qu'il « faut mettre les fractions sur un dénominateur commun pour effectuer la multiplication; plusieurs élèves commettent diverses erreurs dans l'application de procédés de calcul, par exemple : ¾ ÷ 6 = ¾ x 6 = 18/24; 25 * 1/3 = 25/75; etc. On remarque aussi qu'un élève ne sait trouver le nombre d'entiers dans 22/4 (dans leurs cahiers de notes, les élèves ont inscrit le passage inverse, soit 5 2/4 … 4 x 5 + 2/4 =

22/4). Au cours de la résolution des problèmes, un élève demande à l'étudiante-chercheure si 18 ¾ est « 18 et ¾ plus loin ou 18 ¾ ». De plus, comme nous l'avons relevé antérieurement, les élèves ne prennent pas le temps de regarder les nombres pour choisir la « procédure » la plus économique. Enfin, voyant les difficultés des élèves, l'enseignante fait remarquer aux élèves que l'on « remplace le « de » par une multiplication.

4.2.2. Situations impliquant le recours à un diagramme circulaire

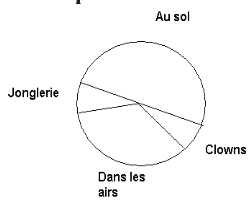
Au cours des situations précédentes, les élèves ont été invités à effectuer divers calculs sur les fractions et à résoudre des problèmes additifs et multiplicatifs impliquant des fractions. Comme nous avons pu le voir, les élèves ont eu peu d'occasions d'établir des relations entre les numérateurs et les dénominateurs des fractions, relations leur permettant non seulement de donner sens aux calculs enseignés, mais également de mettre en œuvre des procédés économiques et efficaces de calcul et de résolution de problèmes. Le choix effectué par l'enseignante de poursuivre l'enseignement, en présentant des situations impliquant le recours à un diagramme circulaire pour représenter les données, s'est ainsi avéré très pertinent. Deux périodes ont été consacrées à cet enseignement, les 29 janvier et 1 février 2007.

La situation-problème présentée en introduction, situation-problème que l'enseignante effectue avec les élèves, provient du manuel Perspective (Guay, Hamel et Lemay, 2005, pp. 112-113); il s'agit d'une situation relativement complexe. Nous reproduisons le libellé de cette situation, ainsi que les diagrammes circulaires qui y sont associés.

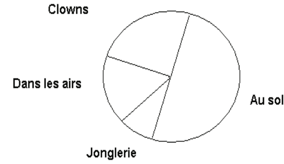
> « Cracheur de feu et musicien, Guy Laliberté rêvait de divertir les gens, de voyager et de s'amuser. En 1984, avec d'autres artistes de la rue, il crée la Fête foraine de Baie-Saint-Paul, premier festival qui met en vedette des amuseuses et des amuseurs publics. Ainsi est né le Cirque du Soleil, le rêve de sa vie.
>
> Depuis sa création, le Cirque du Soleil a attiré plus de 40 millions de spectateurs et de spectatrices en présentant à chaque spectacle plus d'une dizaine de numéros de diverses catégories. Voici, par exemple, la répartition des numéros constituant deux spectacles présentés en tournée, selon leur catégorie.

a) Pour chaque spectacle, donne un nombre possible de numéros dans chacune des catégories qui respecte ce qui est représenté par les diagrammes circulaires ci-contre.

Spectacle A



Spectacle B



Spectacle à la carte
Imagine que tu sois le concepteur ou la conceptrice d'un nouveau spectacle de cirque. Ce spectacle doit proposer divers numéros des différentes catégories. Voici les deux contraintes à respecter :

- Il doit y avoir de 12 à 20 numéros.
- Il doit y avoir au moins quatre catégories différentes de numéros (des acrobates au sol ou dans les airs, de la jonglerie, des clowns, des numéros avec animaux, de la magie, etc.). N'hésite pas à créer de nouvelles catégories!

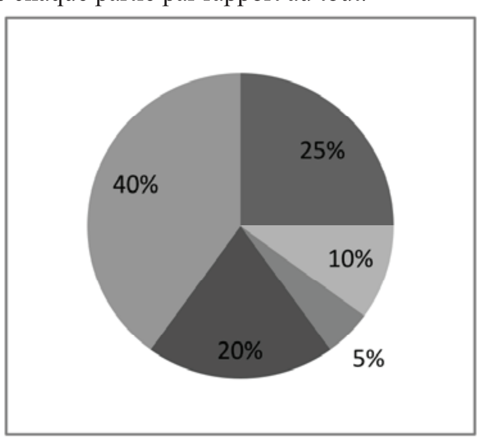
Pour t'inspirer, consulte dans Internet des sites de différents cirques. Tout en respectant les contraintes ci-dessus, choisis des numéros qui correspondent à tes goûts.

b) À l'aide d'un diagramme circulaire, représente la répartition des numéros du spectacle que tu auras conçu, selon leur catégorie. N'oublie pas de donner un nom à ton spectacle.
c) Compare ton diagramme avec celui de tes camarades. Discuter de votre choix en répondant aux questions ci-dessous.
Y a-t-il un thème général qui a guidé votre choix de numéros?
Y a-t-il une catégorie de numéros qui prédomine? »

[…]

À la suite de cette présentation, les élèves sont invités à prendre des notes. Voici les notes associées aux diagrammes circulaires, notes que l'enseignante a construites, et que les élèves doivent reproduire dans leur cahier de notes:

« Sert à illustrer, la répartition des différentes parties d'un ensemble. Ils mettent en évidence la fraction ou le pourcentage de chaque partie par rapport au tout.



Construction de diagramme circulaire.

1- Convertir nos données en pourcentage.
2- Convertir nos données en degrés (360^0)
3- Dessinez un cercle, son centre et son rayon.
4- Construire les angles selon les données du tableau. »

Un rappel sur les angles est aussi présenté par l'enseignante, une représentation accompagnant ce rappel: angle nul; angle aigu; angle droit; angle obtus; angle plat; angle rentrant; angle plein. Enfin, l'enseignante rappelle comment mesurer les angles à l'aide du rapporteur d'angles.

Ces entrées dans la situation terminées, l'enseignante questionne les élèves [ex. Est-ce que le temps pour les clowns Spectacle A est nécessairement plus petit que dans le B?] et produit les écritures suivantes, écritures représentant la conversion des pourcentages en degrés :

Jonglerie 1

Clown 2
Dans les airs 4
Au sol <u>7</u>

14 100 360

Un élève évoque alors la pertinence d'utiliser le produit croisé, ce à quoi l'enseignante acquiesce : « Oui ! Avec 14 et 100 d'abord ». Ils prennent donc la calculatrice et l'enseignante leur explique comment effectuer un arrondissement des nombres.

Le cours suivant, les élèves sont ensuite invités à effectuer individuellement le problème suivant en guise de mini-test (origine inconnue). Voici ce problème que nous reproduisons.

« **Diagramme circulaire**
On a posé à des jeunes de trois groupes les questions suivantes : Quelle est ta couleur préférée?

Groupe 1		**Groupe 2**		**Groupe 3**	
Couleurs proposées	**Réponses données**	**Couleurs proposées**	**Réponses données**	**Couleurs proposées**	**Réponses données**
Vert	10	Vert	160	Vert	345
Bleu	16	Bleu	115	Bleu	120
Rouge	24	Rouge	25	Rouge	560
Jaune	8	Jaune	60	Jaune	275
Orange	10			Orange	500
Violet	4				

> Choisis l'un de ces groupes, puis construis un diagramme circulaire représentant la répartition des réponses selon les couleurs proposées.
> Indique quel groupe tu as choisi.
> Fais tes calculs sur une feuille annexée à cette page.»

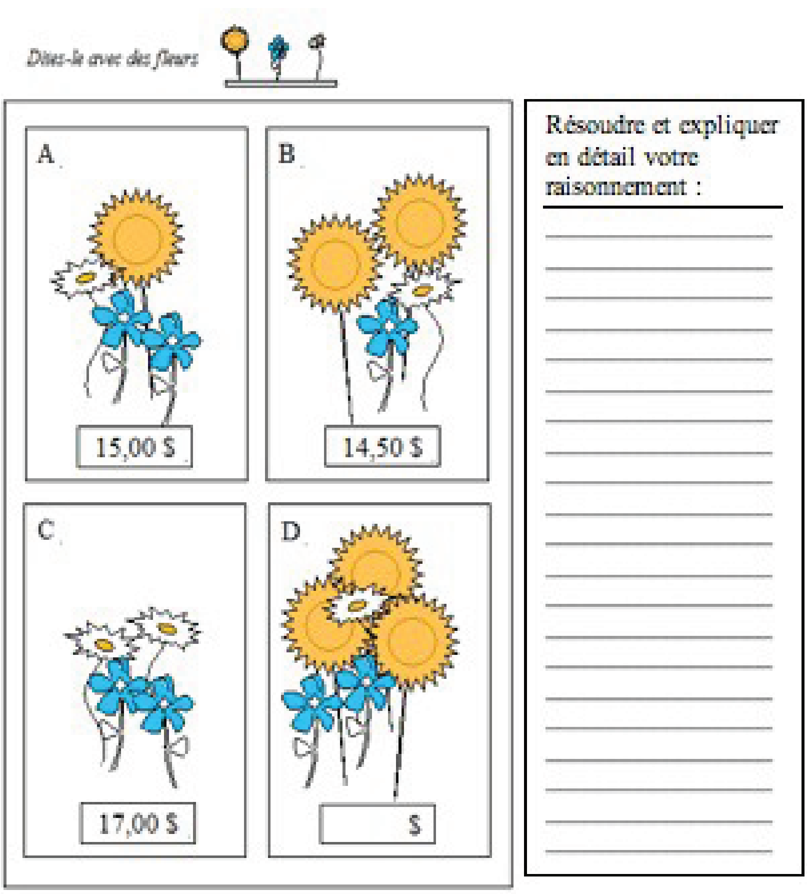
Lors de la réalisation de ce problème, Réjean choisit le groupe 2, choix des plus économiques, puisque la somme des réponses est de 360 et lui donne ainsi accès directement à la correspondance en degrés. Cependant, l'enseignante lui démarche de faire les calculs, car elle a besoin de traces pour savoir s'il sait représenter les fractions en utilisant le dénominateur 100, puis 360. Le processus d'acculturation privilégié dans cette recherche nous permet de comprendre qu'il s'agit d'une compensation (Roditi, 2007) au regard des contraintes évaluatives, l'enseignante reconnaissant par ailleurs la pertinence de la « pratique mathématique », de « l'économie de la procédure » choisie par l'élève au regard de l'objet d'apprentissage.

4.2.3. Résolution impliquant des nombres décimaux, situation élaborée par Belisle (1999)

La situation « Dites-le avec des fleurs » (Belisle, 1999) a été présentée aux élèves à la suite de l'enseignement sur le diagramme circulaire [résolution (30 janvier 2007) et retour sur les démarches de résolution (1 février 2007)]. Cette situation a retenu l'attention de l'enseignante, lors d'un échange informel avec l'étudiante-chercheure, échange portant sur les activités proposées aux étudiants en formation des maîtres et les raisonnements déployés par ceux-ci. Nous lui avons confié que, dans le cadre de la formation initiale des maîtres et de la pré-expérimentation, cette activité avait suscité beaucoup d'intérêt auprès de diverses populations (différents cycles, populations allophones, populations en difficultés d'apprentissage, etc.). Dans cet ordre d'idées, nous avons pu également témoigner de la richesse et de la diversité des processus mis en jeu dans cette situation. L'enseignante a aussi exprimé son enthousiasme à l'égard de la présentation imagée de l'activité, compte tenu des difficultés de ses élèves (lecture, écriture). Elle nous a alors fait part de son intention d'aborder, très prochainement, la multiplication et la division de nombres décimaux.

L'enseignante propose alors d'inviter ses élèves à réaliser cette tâche. Cependant, elle recommande d'enlever l'exigence d'écrire de façon détaillée leur raisonnement (compte tenu des difficultés des élèves, elle ne veut pas que ça les décourage). L'enseignante suggère également que seule l'étudiante-chercheure (la chercheure n'ayant pas intégré encore la classe, à la demande de l'enseignante) répond aux questions des élèves, afin qu'elle puisse profiter de cette période pour examiner les conduites des élèves. Nous procédons donc ainsi. Lors du cours suivant, l'enseignante demande aux élèves de présenter leurs démarches et les invite à interpréter celles des autres. Ce travail fait, nous exposons aux élèves quelques démarches d'étudiants universitaires, ce qui leur permet de mieux apprécier leurs démarches.

La tâche suivante est proposée aux élèves, à qui il est demandé de trouver le prix du bouquet D.



Cette situation constitue une véritable situation-problème. En effet, bien que les élèves peuvent mettre en place un procédé essai-erreur, en attribuant des prix aux fleurs, il leur est difficile de mener à terme un tel procédé, sans effectuer une comparaison entre les compositions des différents bouquets et les prix respectifs de ces bouquets, sans mettre en jeu un raisonnement déductif. Mentionnons enfin que cette situation fait appel à diverses opérations sur des nombres rationnels, décimaux et entiers.

Analyse des conduites des élèves et des interactions didactiques, lors de la résolution du problème

Pour la réalisation de cette tâche, l'enseignante propose aux élèves de former des équipes, s'ils le souhaitent, ce que font : Gael et Réjean; Prince et Martin; Bertrand, David et Rémi; Rébecca et Hélène. Alex, Marcel, Guy, Noa, Samuel, Gaudi et Anne décident de travailler seuls. Nous présentons, dans un premier temps, les conduites des élèves. Puis, nous rendons compte des interactions entre les élèves, l'enseignante et l'étudiante-chercheure, lors du retour collectif sur les démarches des élèves.

Dès les premiers moments de l'entrée des élèves dans cette situation, après avoir porté attention aux conduites de certains élèves qui avaient sollicité son aide, l'étudiante-chercheure s'adresse à tous les élèves et apporte les précisions suivantes : quel que soit le bouquet, le prix d'une même fleur est toujours le même; les prix des fleurs différentes sont également différents; il faut bien examiner les relations entre les prix des différents bouquets et les fleurs qui les composent. Remarquant que certains élèves (Gael et Réjean) ne prennent notes que des différences entre les prix de certains bouquets, sans y associer clairement la provenance de ces différences; l'étudiante-chercheure leur demande alors de compléter leurs représentations des relations en s'appuyant sur ce qu'ils ont fait avec leur enseignante dans leur cahier d'exercices (Leclerc, 2004, p. 5). D'autre part, Rébecca et Hélène se montrent fort préoccupées par l'obtention de la réponse qu'elles n'arrivent pas à trouver rapidement; l'étudiante-chercheure décide alors de leur donner la réponse en leur spécifiant que c'est la démarche qui l'intéresse. Cependant, l'enseignante n'approuve pas cette initiative qui, selon elle, enlève beaucoup de crédit à la réussite de l'activité. Pour l'étudiante-chercheure, il s'agit d'un aspect important qu'elle souhaite instaurer, dès le départ, afin que les élèves ne se sentent pas inhibés par la recherche de «la bonne réponse». À ce propos, dans cette activité, les élèves ont validé au fur et à mesure leur résultat, ce qui a permis à la majorité des élèves d'obtenir la bonne réponse. Seuls Anne et Guy n'ont pu obtenir le bon résultat dans le délai imparti. Guy a toutefois complété l'activité à la maison en adoptant un mode de résolution plus évolué. Nous avons regroupé, dans le tableau ci-dessous, les démarches des élèves selon les données et le nombre de relations considérées. Il est ainsi possible de constater une évolution de l'économie des démarches déployées.

Tableau XVIII: Démarches des élèves dans la recherche du prix du bouquet D

Essais-erreurs contrôlés	
Guy Prise en compte de la composition des bouquets.	-Bouquet C : attribue un montant à l'une des fleurs et trouve celui manquant pour compléter le prix du bouquet en effectuant une soustraction. -Bouquet A : à l'aide des montants précédents, trouve le prix de la marguerite. -Bouquet B : valide les différents montants en les substituant dans le bouquet B. -Reprend ou non les étapes précédentes. * Guy a exploité le même raisonnement que Martin et Prince lorsqu'il a repris cette activité à la maison
Prise en compte de la partie décimale du prix (50 cents)	
Marcel; Anne; Alex; Noa Prise en compte de la présence de décimales dans les coûts des bouquets et mise en relation avec la composition des bouquets	- Observe les prix des bouquets : certains sont entiers et d'autres ont une décimale (Bouquet B : X,50$). *Anne fait un essai et abandonne. - Recherche la fleur qui serait « responsable » de cette décimale. Observe la composition des bouquets et de leur prix. *Bouquet B* : ce n'est pas le tournesol, car il y en a deux, donc leur coût donnerait un entier. *Bouquet A* : élimination de la fleur bleue car il y en a deux, donc c'est la fleur blanche. - Essais systématiques avec le bouquet C en attribuant une valeur décimale (x,50$) à la fleur blanche et en recherchant le montant manquant (fleurs bleues) pour compléter le tout (prix du bouquet C).
Prise en compte des relations entre les bouquets A et B ainsi que les bouquets A et C	
Rébecca, Anne David, Bertrand et Rémi Selon leur nature : positive, négative	- Bouquets A et B ; Bouquets A et C : Compare les bouquets et les prix. Étant donné qu'entre eux une seule fleur diffère, il arrive à trouver laquelle est la plus coûteuse et la moins coûteuse - Différents essais sont effectués
Gaudi, Gael et Réjean : *Selon leur nature et leur mesure*	- Compare les bouquets et les prix. Étant donné qu'entre eux une seule fleur diffère, ils arrivent à trouver laquelle est la plus coûteuse et la moins coûteuse et la différence. La bleue coûte 50 cents de plus que la jaune. La blanche coûte 2$ de plus que la jaune - Différents essais sont effectués, mais la relation n'est pas totalement prise en compte. (positive/négative)
Samuel : Prise en compte de 3 relations	- Compare les bouquets et leur prix. Étant donné qu'entre eux une seule fleur diffère, il arrive à trouver laquelle est la plus coûteuse et la moins coûteuse et la différence. La bleue coûte 50 cents de plus que la jaune. La blanche coûte 2$ de plus que la jaune - Déduction de la relation entre la blanche et la bleue : la blanche coûte 1,50$ de plus que la bleue

Observation d'une régularité : le couple « bleue-blanche » est présent dans chacun des bouquets	
Martin et Prince : Prise en compte du couple «bleue-blanche» présent dans chacun des bouquets.	- Bouquet C : Obtention du coût d'un couple «bleue-blanche» (8,50$) - Bouquet B : détermination du prix du tournesol. - Bouquet A : détermination du prix de la fleur bleue - Bouquet C : détermination du prix de la fleur blanche - Bouquet D : remplacer chaque fleur par son prix.

Il est intéressant de constater la nécessité pour les élèves de trouver la valeur unitaire des fleurs. Ce comportement évoque l'analyse de dysfonctionnements de représentation (Julo, 1995), selon laquelle « à partir du moment où le contraire n'est pas dit, il s'agit bien d'une donnée du problème » et/ou que « les expériences antérieures entraînent parfois la mobilisation d'un prototype pour structurer notre représentation et entraînent l'utilisation d'une procédure automatisée » ou « l'interprétation du contexte sémantique introduit parfois de « fausses » contraintes au niveau de la représentation de l'objet et de la tâche ». Cela a peut-être été également inféré à la suite des précisions fournies par l'étudiante-chercheure. D'autre part, il faut mentionner que Rébecca et Hélène ainsi que David, Bertrand et Rémi, ont bénéficié de l'aide de l'étudiante-chercheure afin de mener à terme leur résolution, compte tenu de la faible quantité et qualité des relations considérées. Mentionnons enfin que l'étudiante-chercheure et l'enseignante ont été particulièrement impressionnées par les démarches des élèves et la ténacité de Guy qui, généralement, doute de ses capacités.

Il nous semble par ailleurs important de rapporter les principales démarches des étudiants universitaires, données qui ont fait l'objet de retours collectifs; seules les démarches 1 et 2 ont été présentées aux élèves (démarches recueillies par l'étudiante-chercheure lors d'un cours en didactique des mathématiques offerts aux étudiants en adaptation scolaire, au cours de l'année 2007), car elles étaient différentes des leurs; peu d'étudiants universitaires ont toutefois eu recours à ces démarches :

« 1) J'ai tout de suite remarqué que le bouquet D n'était ni plus ni moins que le bouquet A auquel on avait ajouté deux tournesols; il ne me restait donc qu'à découvrir la valeur de cette fleur. Pour y arriver, j'ai observé que le bouquet B était une combinaison de deux tournesols, d'une marguerite et d'une pensée, alors que le bouquet C contenait deux marguerites et deux pensées. J'ai donc isolé une marguerite et une pensée du bouquet C en divisant le coût total en 2, obtenant ainsi le coût d'une pensée et d'une marguerite (8,50$), soit le montant pour cette paire de fleurs dans le bouquet B. Par la suite, je n'avais qu'à soustraire 8,50$ du coût du deuxième bouquet pour connaître le montant associé aux deux tournesols, qui est de 6$. Pour trouver la valeur du bouquet mystère, je n'avais qu'à additionner le prix du bouquet A (15$) au coût des deux tournesols (6$) pour obtenir 21$.

2) J'ai tout de suite remarqué que le bouquet D n'était ni plus ni moins que la réunion du bouquet A et du bouquet B auquel il fallait enlever une fleur blanche et une fleur bleue; il ne me restait donc qu'à découvrir la valeur de ce duo de fleurs. Pour y arriver, j'ai observé que le bouquet C était une combinaison de deux bleues et deux blanches. J'ai donc isolé une marguerite et une pensée du bouquet C en divisant le coût total en 2, obtenant ainsi le coût d'un pensée et d'une marguerite (8,50$). Par la suite, j'ai soustrait 8,50$ du coût de la réunion des bouquets A et B (15,00$+14,50$ = 29,50), donc 29,50 – 8,50$ = 21,00$ pour trouver la valeur du bouquet mystère.

3) En observant les différents bouquets, j'ai remarqué que le bouquet B se détaillait à un montant se terminant par .50$ et que les deux autres bouquets affichaient un montant « rond ». Je savais donc qu'une des fleurs coûtait un montant X.50$. J'ai donc regardé dans les bouquets A et C pour trouver la fleur unique. J'ai ainsi déterminé que la fleur foncée (pensée) était la fleur coûtant X.50. Comme le bouquet B coûtait 0,50$ de moins que le bouquet A et qu'il y a deux tournesols et une pensée dans le bouquet B et un seul tournesol et deux pensées dans le bouquet A, je pouvais conclure que la pensée coûtait 0.50$ de plus que le tournesol. Par la suite, j'ai remarqué qu'il y avait 2$ de différence entre les bouquets A et C. J'ai aussi vu qu'il y avait un tournesol et une marguerite dans un bouquet A et que deux marguerites dans le bouquet C; je pouvais donc dire que la marguerite valait deux dollars de plus que le tournesol. Par la suite, j'y suis allée à tâtons j'ai ainsi déterminé que la marguerite valait 5$, le tournesol 3$ et la pensée 3,50$. Afin de vérifier mes choix de montants j'ai pu les valider en les réutilisant avec les autres bouquets. Comme mes chiffres fonctionnaient, j'ai pu calculer que le dernier bouquet coûtait 21$. »

L'étudiante-chercheure ajoute également que la majorité des étudiants avaient procédé par essais-erreurs et enfin, que d'autres n'avaient pas trouvé la solution.

Analyse des interactions didactiques lors du retour sur les démarches de résolution du problème

Les conduites de l'ensemble des élèves sont particulièrement intéressantes, les élèves effectuant des raisonnements qui sont loin d'être triviaux. Il nous apparaît donc judicieux de rapporter, et d'examiner brièvement, les raisonnements de quatre élèves qui ont été invités à présenter leurs démarches. Les interactions didactiques lors du retour sur les démarches des élèves sont particulièrement instructives. Elles permettent à l'enseignante, à l'étudiante-chercheure, et à plusieurs élèves, de reconnaître et d'apprécier la pertinence des démarches utilisées dans leur classe, interactions engageant ainsi tous les acteurs dans une activité mathématique; l'appréciation des démarches les obligeant à « faire des mathématiques » (Conne, 1999). Ce n'est donc pas sans raison, comme nous l'avons dit à la section précédente, que cette situation se soit révélée « déterminante » pour tous et ait entraîné l'établissement d'une complicité non équivoque entre l'enseignante, les chercheures et les élèves. Il faut aussi mentionner que l'ordre dans lequel les élèves ont été sollicités à présenter leurs démarches repose, entre autres, sur l'évolution des relations prises en compte afin de permettre aux élèves de pouvoir prendre part graduellement à des démarches «plus évoluées » .

Interactions entre l'étudiante-chercheure, l'enseignante et Noa invité à présenter sa démarche

ECH On va demander à d'autres d'expliquer leur façon de faire, tiens Noa ? Vous pouvez questionner Noa, lui demander d'expliquer mieux si vous ne comprenez pas. Ne vous gênez pas pour intervenir.

NOA Moi j'ai comparé les prix, j'ai regardé en premier le A … puis quand je suis arrivé au B, j'ai vu qu'il avait 50 sous celui-là… Comme il y avait 2 grosses fleurs, je me suis dit que ça ne peut pas être une de celle-là qui a les 50 sous alors c'est une des plus petites. Je suis allé au bouquet C qui coûte plus cher que les autres [Bertrand lui demande de se déplacer car il ne voit rien]. Je suis allé au bouquet C et je me suis dit une de celles-là a 50 sous dans son prix à cause d'ici [Bouquet B], mais j'ai remarqué qu'au A, elle, la blanche était toute seule alors ça peut pas être elle. Je suis allé par essais et erreurs en ajoutant toujours 50c à celle-là (la noire). Au début, j'ai essayé 2,50$ ici (la noire), j'ajoutais l'argent qu'il fallait pour que ça donne 17$. J'allais voir ici j'ajoutais l'argent qui manquait pour ici

ENS Peux-tu le faire au complet ton essai?

NOA Ok. Ici j'ai choisi 2,50 au début.

ECH Vous avez suivi, vous n'avez pas de questions?

ELS On a fait un peu comme lui. On veut que vous dites ce qu'il a fait; C'est plus facile avec vous; on comprend mieux.

[À partir de ce moment, on peut observer que la plupart des élèves suivent bien les explications, qu'ils en discutent entre eux, qu'ils essaient de comprendre. Pour cette raison, ni l'enseignante, ni l'étudiante-chercheure, ne jugent utile d'intervenir pour que les élèves formulent des questions, des commentaires. On entend souvent dans les propos des élèves des remarques du type : ah oui! c'est ça, c'est comme ça qu'on a pensé. Les moments d'échange entre les élèves sont indiqués de cette façon : [échanges entre les élèves]. Notez que nous avons laissé un temps aux élèves pour ces échanges, avant de poursuivre]

ECH Donc, il disait qu'il avait choisi 2,50 parce qu'il avait remarqué que c'était 14$ et 50 sous pour le bouquet B. Il s'est dit qu'il devait y avoir une fleur qui coûte quelque chose et 50, mais que ça ne pouvait pas être la grosse fleur car il y en avait deux. Ensuite, il a regardé le bouquet A pour se donner une idée de la fleur qui coûterait quelque chose et 50. Il s'est dit ce n'est sûrement pas la blanche puisqu'il n'y a pas de 50 sous dans le prix et qu'il y avait qu'une seule fleur blanche, mais si j'ai deux fleurs noires, 50 sous plus 50 sous ça donne bien 1$, donc je ne verrai plus apparaître quelque chose et 50 . Donc là il a fait un essai avec 2,50$ pour la fleur noire dans le bouquet C.

NOA 2,50$ et là je rajoutais ce qu'il manquait pour faire 17.

ECH Fais-le au complet.

ENS Ça fait 2,50$ pour l'autre à gauche aussi.

GAEL 5,00$.

NOA Ouais, c'est pour une fleur le 2, 50$ alors, j'ajoute le 2,50 pour l'autre ici… ça donne 5$ …en tout ça donne *5$.* Vu que j'ai 5$, j'ai vais devoir ajouter ce qu'il manque en haut.

[échanges entre les élèves]

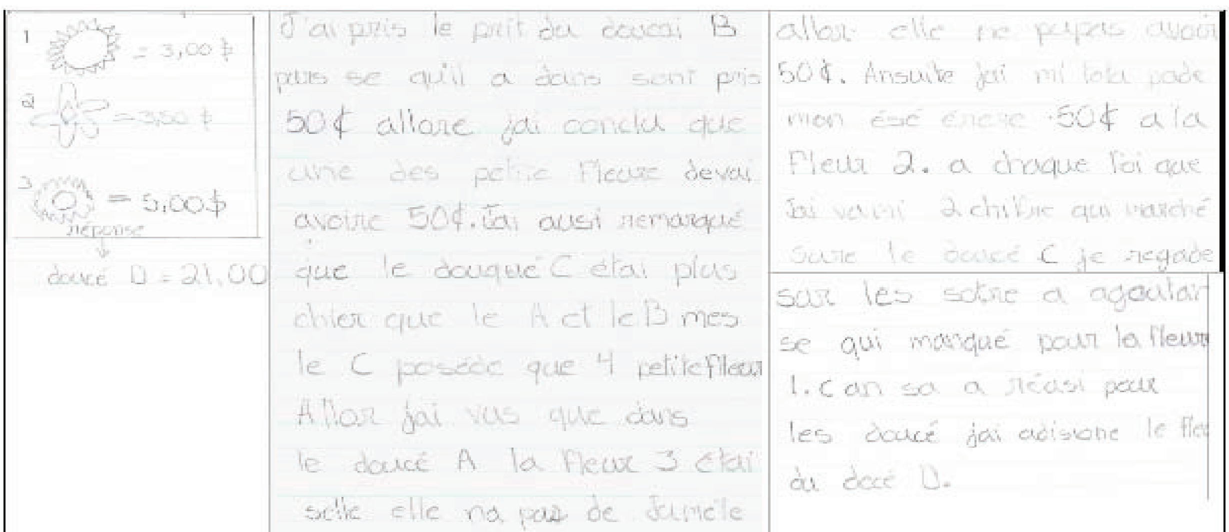
NOA Ce qui manque pour avoir 17$, il manque 12$ en tout … ces deux fleurs (montrant les blanches) donnent 12$ … une seule c'est 6$.

[échanges entre les élèves]

NOA Je suis allé au bouquet A, vu qu'il y en a deux, ça donne 5$ aussi là j'ai pris la fleur blanche c'est 6$, ça donne 11$. Là vu que c'est 15$ je me suis dit il manque 4$, alors celle-là (la grosse) doit être 4$. J'ai ajouté 4 alors ça m'a donné 15 le prix que ça coûte normalement pour ce bouquet là. Pour vérifier si j'avais pris la bonne affaire, je suis allé au bouquet B, j'ai fait 4+4, 8 pour les 2 fleurs en haut après j'ai rajouté 2,50$, j'ai rajouté le 6 $.

ENS	Qui donne un total de 16,50$.
[échanges entre les élèves]	
NOA	Ça marchait pas. Alors chaque fois que ça ne marchait pas, je retournais au C, je réessayais d'autres numéros (nombres).
[échanges entre les élèves]	
ECH	Mais là comme tu obtenais 16,50$, qu'est-ce que tu changeais dans ton prochain essai?
NOA	Il y en a une que je diminuais, l'autre je la montais un petit peu …après j'ai essayé 3,50$ et 5$ et j'ai vu que ça marchait … j'ai fait en tout 2 essais. Comme j'ai trouvé tous les prix des fleurs, j'ai additionné les grosses plus les 3 petites, ça m'a donné 21$.
[Les élèves applaudissent]	
ECH	Génial !

La remarque de l'étudiante-chercheure à propos de la démarche de Noa ne semble pas exagérée. En effet, cet élève a effectué un raisonnement fort approprié : il s'est appuyé sur une valeur hypothétique du prix des fleurs, en établissant des relations entre les prix des bouquets exprimés par des nombres décimaux et le nombre de fleurs; il validait ensuite les valeurs trouvées et ajustait en conséquence son prochain essai. Raisonnement « assez inattendu », du moins si on l'interprète en nous appuyant sur les propos de plusieurs enseignants et chercheurs concernant les élèves présentant des difficultés d'apprentissage, comme le souligne Giroux (2008). Si cet élève a pu déployer un tel raisonnement, c'est, il nous semble, parce qu'il a profité d'un milieu propice au travail mathématique. De plus, il est un des deux seuls élèves à avoir écrit son raisonnement, tel qu'il apparaît ci-dessous :



Son texte :
j'ai pris le prix du bouquet B parce qu'il a dans son prix 50c alors j'ai conclu qu'une des petites fleurs devaient avoir 50c… J'ai aussi remarqué que le bouquet C était plus cher que le A et le B mais le C possède que 4 petites fleurs. Alors j'ai vu que dans le bouquet A la fleur 3 (blanche) était seule… elle n'avait pas de jumelles alors elle ne pouvait avoir 50c. Ensuite, j'ai mi un total avec 50c à la fleur noire. A chaque fois que j'ai mis 2 chiffres qui marchent sur le bouquet C je regarde sur les autres à ajouter qui manque pour la grosse fleur 1. Quand ça a réussi pour les bouquets j'ai additionné les fleurs du bouquet D.

Rappelons qu'ayant jugé « décourageante » cette écriture pour des élèves dylsexiques, dysorthographiques, l'enseignante ne l'avait pas exigée. Cependant, nous pensons que cette étape de formulation est importante, car elle oblige l'élève à s'attarder aux processus, aux relations mises en jeu dans la résolution du problème. Elle semble également faciliter le retour collectif. À la suite de cette tâche, cet élève a investi les situations qui lui ont été présentées. L'enseignante et l'étudiante-chercheure pourraient également témoigner du changement d'attitude de cet élève.

Interactions entre l'étudiante-chercheure, l'enseignante et Prince qui est invité à présenter sa démarche

ECH	On va regarder d'autres démarches, car c'est vraiment intéressant de voir différentes façons de faire. Est-ce qu'il y a quelqu'un qui pourrait venir expliquer sa démarche, Prince? Elle va se rapprocher plus de celles des étudiantes universitaires qui ont pris plus de temps pour comparer les bouquets pour se faciliter la vie.
PRINCE	J'ai vu que le premier bouquet ici (bouquet A), j'ai fait ouin… , j'ai regardé le 2e bouquet (Bouquet B) j'ai fait ouin…et là lui (bouquet C), j'ai vu qu'il y avait deux pareils, elle et lui, elle et lui, 2 paires. Après j'ai divisé 17$ en 2, ça m'a donné 8,50$.
ECH	Donc pour trouver le prix d'une paire, tu as fait 8,50$ et 8,50$, parce que si on les additionne ça donne 17$.
ENS	Bravo!
[échanges entre les élèves]	
PRINCE	Là, j'ai regardé le B, j'ai vu que la paire revenait, après j'ai fait 14,50 – 8,50 … ça donne 6$, je l'ai divisé par deux pour obtenir le prix de ces deux-là, ça donné 3$. Ici (Bouquet A) elle revient encore donc 8,50$ … j'ai fait plus 3$¸ ça arrive à 11,50$.
RÉJEAN	Là t'as trouvé le prix de l'autre.
PRINCE	Oui, j'ai fait 15$ moins 11,50$, ça m'a donné 3,50$.
ECH	Donc, ici comme il savait qu'ici c'était 3$, ici c'était 8,50$ donc ça lui permettait de trouver le prix de la fleur en fait…
RÉJEAN	15 – 11,50 qui lui a donné 3,50$.
[échanges entre les élèves]	
PRINCE	Pis ensuite j'ai calculé avec les prix que j'avais trouvés. Pis après quand j'ai trouvé les prix de chacun, j'ai pu calculer en bas (bouquet D).
ECH	Donc vous voyez c'était une démarche qui était …
MARCEL	Plus simple.
RÉJEAN	Oui!
ECH	C'est parce qu'il a pris le temps de bien regarder…Quand il a dit, vous avez ri tout à l'heure, j'ai regardé le A …
GAEL et RÉJEAN	Ouin!
ECH	Ça ne lui disait pas grand chose, j'ai regardé le B
Plusieurs	Ouin
ECH	Ça ne lui disait pas grand-chose non plus, mais rendu au bouquet C ah, là il a vu.[…]

Prince et Martin ont procédé à l'examen des relations entre les prix de chacun des bouquets et la composition de ces bouquets; ils constatent qu'il est possible de déterminer très facilement le prix total d'une fleur bleue et d'une fleur blanche. En effet, puisque le nombre de fleurs bleues et blanches dans le bouquet C est le double du nombre de fleurs bleues et blanches dans le bouquet B et que ce dernier bouquet comporte un même nombre de fleurs que le bouquet C, ils concluent alors, fort à propos, que le prix total d'une fleur bleue et d'une fleur blanche est la moitié du prix du bouquet C, soit 8,50$. Et, puisque le bouquet B comporte aussi deux fleurs jaunes, il lui est facile de calculer le prix d'une fleur jaune, en effectuant les calculs suivants : 14,50 – 8,50 = 6; 6 ÷2 = 3; 3$ est donc le prix d'une fleur jaune. Il leur est tout aussi facile de trouver le prix d'une fleur bleue et enfin, le prix du bouquet D. Le raisonnement de ces élèves, n'oublions pas qu'il s'agit d'un élève présentant des difficultés graves d'apprentissage, est particulièrement « brillant ».

Interactions entre l'étudiante-chercheure, l'enseignante et Gael invité à présenter sa démarche

ECH	On va écouter une autre démarche, Rémi et Gael?
GAEL	[il valide d'abord son raisonnement avec l'ECH] On a regardé le A et B et on a vu une différence de 50 sous. Entre le A et le C, c'était 2$.
ELEVES	Ça l'air intelligent.
GAEL	On a vu que la seule chose qui les différenciait tous c'est les grosses fleurs…Ici il manque une petite fleur noire et une grosse fleur. On s'est dit que la grosse fleur est de 50 sous et la petite plus que 50 sous. Ici c'était la même chose.
ECH	Es-tu sûr que c'est ça que vous aviez dit?
REJEAN	Non.
ECH	Aide-le
REJEAN	Je ne m'en souviens pas plus.
ECH	Pouvez-vous les aider, même ceux qui n'ont pas fait ce raisonnement-là, vous êtes capables de le retrouver.
REBECCA	Moi je dis que c'est la fleur noire qui coûte 2,50 parce qu'il manque une fleur noire
GAEL	Non ce n'était pas 2,50$
[les élèves échangent]	
ECH	On va essayer de retrouver son raisonnement. Il a comparé les deux bouquets et a vu qu'ils avaient une différence de prix de 50 sous. Maintenant Réjean si on regarde au niveau des fleurs, qu'est-ce qui se différencie? C'est ici on a une petite fleur pour une grosse fleur. Donc c'est la seule différence car les trois autres reviennent dans les deux bouquets.
ÉLÈVES	Ouais.
ECH	Donc qu'est-ce que ça nous permet de dire?
MARCEL	Que la petite fleur vaut 50 sous.
SAMUEL et GAEL	De plus!
ECH	De plus ou de moins?
Élèves	De plus!
ECH	Donc ça nous permet de dire que la petite est 50c de plus que celle-là [ECH fait volontairement un trait reliant le bouquet A et B et inscrit 50 sous].
ENS	Est-ce que je peux juste ajouter quelque chose? [oui] Quand on passe de là à là [ECH l'arrête et lui dit que c'est justement à quoi elle veut que les étudiants en viennent, elle veut montrer le besoin de noter la nature de la relation] ok parfait.
ECH	Après ça vous avez comparé le A et C, vous aviez vu 2$, comment avez-vous expliqué

	cette différence de prix de 2 $? Les autres aussi vous essayez de trouver comment ils ont fait!
GAEL	Ben de 15 à 17, tu fais 17 moins 15 qui donne 2$.
ECH	Ouais mais quand tu regardes au niveau des fleurs comment tu peux l'expliquer?
GAEL	Ben la grosse fleur n'est plus là et ils ont ajouté une petite fleur blanche.
ECH	Ça te permet de dire quoi?
GAEL	Que la blanche vaut plus que la grosse fleur.
SAMUEL	2$ de plus [ECH relie le bouquet A et C et inscrit 2].
ECH	Une fois que vous avez trouvé ces relations-là, qu'est-ce que vous avez fait?
GAEL	On a commencé à utiliser des chiffres par essais par erreurs et à un moment donné on est arrivé à 3$ pour le…
ECH	Attends un petit peu, vous avez fait des essais et des erreurs.
MARCEL	Comment ils on fait ça?
ECH	Essais et erreurs, c'est-à-dire qu'ils savaient les relations entre les fleurs. Ils mettaient un prix pour une fleur, admettons.
GAEL	2$ pour la grosse. Donc si elle est 2$, la …
SAMUEL et MARCEL	4$
GAEL	2,50
ECH	Donc à partir des relations qu'ils avaient trouvées, ils pouvaient faire leur essais et erreurs. Mais là aujourd'hui tu le fais « tout beau », mais quand tu le faisais la première fois, ils étaient tout mêlés parce que ici ils avaient le 50 sous mais ne savaient plus s'ils devaient enlever ou ajouter 50 sous. Donc malgré tous les efforts, toutes les belles relations qu'ils avaient réussi à trouver ce qui était un des raisonnements les plus compliqués, quand c'était le temps de faire leurs essais et erreurs, ils s'embrouillaient. Qu'est-ce que vous pensez qui aurait pu vous aider ou organiser autrement votre dessin? Là ils ont leur deux fleurs et le 50 sous de différence, mais là on ne sait pas laquelle vaut plus ou moins.
GAEL	De ce côté-là , il y a plus de sous, donc l'argent va de ce côté-là, le 50 sous va à la petite noire.
ECH	Je pourrais donc faire une flèche et écrire plus de 50 [ECH faisait référence à une activité qu'ils avaient déjà faite dans leur cahier d'exercices bien avant sa venue**]**.
ENS	On vu ça au début de l'année des flèches avec des opérations dessus.
ÉLÈVES	Oui.
BERTRAND	Ah oui, lui a plus que l'autre.
ECH et ENS	Oui, c'est ça.
ECH	Donc ce qui les empêchait de réussir en fait c'était juste au niveau de la représentation. Vous vous en souvenez les gars, parce qu'une fois que vous aviez fait les flèches, que vous avez trouvé un moyen pour la même chose ici , plus 2 $ ici [$\xrightarrow{+2\$}$], ça devenait beaucoup plus facile de gérer les essais et les erreurs.
[…]	
ECH	La démarche de Gael et Réjean est plus longue que celle de Prince.
GAEL	En réalité les deux sont faciles.
ECH	En fait, il faut faire une différence entre le raisonnement que vous avez utilisé et la démarche de Prince.
ENS	Prince a été économe.
ECH	Et quand on parle en mathématique d'efficacité, c'est d'essayer d'être le plus économique possible.

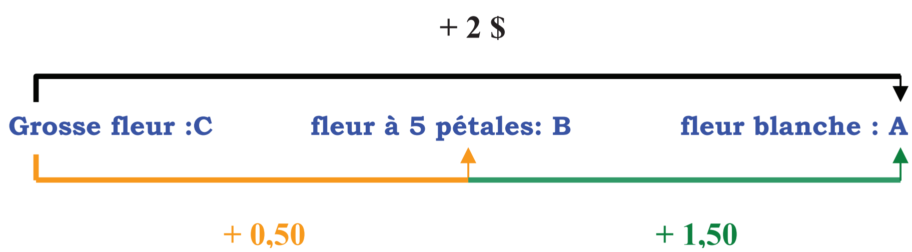
La démarche de Gael et Réjean s'appuie sur une analyse encore plus poussée, que celle effectuée par l'élève Noa, des relations entre les prix des différents bouquets. L'économie de cette démarche, comparativement à celle de Noa, provient de son observation des relations entre le prix du bouquet C et le fait que ce bouquet contient 2 paires de fleurs différentes. Il s'agit d'un « point charnière » qui lui permet par la suite de trouver aisément les prix des différentes fleurs. Le rapprochement fait entre les démarches des élèves Gael, Réjean et Samuel permet à l'étudiante-chercheure, qui se souvient des outils de représentation prônés dans la classe (activité faite dans le cahier d'exercices avant son arrivée), de montrer l'importance de recourir à des représentations explicites, ce que l'enseignante apprécie. La remarque de l'étudiante-chercheure acquiert ainsi une pertinence institutionnelle. De plus, cette activité ayant été expérimentée lors de la pré-expérimentation à l'école Vanguard (2005-2006), ainsi que dans le cadre de différents cours en formation initiale des maîtres, l'étudiante-chercheure pouvait interpréter plus facilement les conduites des élèves et intervenir plus efficacement. Remarquons enfin que le choix de ces deux premières démarches, choix effectué en consultation avec l'enseignante, est particulièrement heureux et offre aux élèves qui ont eu recours à des procédés « essais-erreurs » ou à des démarches similaires à celle de Prince, une occasion de mieux apprécier le travail qu'ils ont fait.

Interactions entre l'étudiante-chercheure, l'enseignante et l'élève Samuel invité à présenter sa démarche

Le retour sur les démarches de résolution de ce problème est complété par l'invitation faite par l'enseignante à Samuel de présenter sa démarche. Ce choix est particulièrement heureux, les élèves pouvant mettre à profit leur compréhension des démarches précédemment examinées pour entrer dans la démarche «algébrique» de cet élève.

ENS	J'aimerais que Samuel nous explique un peu ce qu'il a fait avec les différences…
SAMUEL	…
ENS	Nous autres ont va t'aider.
NOA	Moi je peux comprendre.
MARCEL	C'est parce qu'il a fait de l'algèbre.
ENS	Il faut comprendre que Samuel a fait à peu près trois pages de démarches donc il ne sait pas nécessairement où commencer, il a réfléchi sur le problème notre Samuel.
SAMUEL	Comme Gael a dit, on sait qu'entre le A et B, il y a une différence de 50 sous (pointe la représentation précédente). Ici c'est la même affaire, c'est une différence de 2$ (entre A et C).
ECH	Donc on voit que le raisonnement au départ est exactement le même que celui de Gael et Réjean.
SAMUEL	Moi, j'ai donné des noms aux plantes : C : grosse fleur; B : petite fleur noire; A : petite fleur blanche. On sait que B = C + 0,50.

ECH	C'est juste une façon différente d'écrire votre raisonnement. La fleur B, ici est bien égale à la C plus 50.
ENS	Au lieu d'avoir une flèche, c'est mis avec des lettres, c'est plus simple à voir un petit peu une fois qu'on est habitué.
Gael	Et A = C + 2 $
ECH	Oui! Vous allez avoir pris de l'avance, bravo!
ENS	Oui, on commence l'algèbre dans quelques semaines. C'est qu'au lieu d'utiliser des flèches, des inconnus, des petits carrés, on utilise des lettres.
SAMUEL	Là on sait la différence entre B et C et A et C, là il faut savoir la différence entre A et B.
ECH	Samuel a cherché la relation entre A et B, la relation ici [bouquet B et bouquet C]
SAMUEL	Là on sait que le B c'est 50 cents et que l'autre c'est 2$ alors tu fais 2$ - 50 cents qui va donner1,50$ pis ça c'est la différence entre les deux.
[échanges entre les élèves]	
ENS	Wow, le raisonnement est assez…
ÉLÈVES	Compliqué, magique!
ECH	On sait que la différence entre A et C est de 2$ et entre C et B 50 de cents. Donc laquelle coûte la plus cher?
GUY	Le A.
ECH	Ensuite?
DAVID, GAEL, REBECCA	Le B.
ECH	Complète la représentation de Gael et Guy pour rendre compte de la relation entre A et B qui n'avait pas été déduite précédemment.



ECH	Donc là on peut connaître la différence entre A et B.
GAEL	2- 0,50 = 1,50$
SAMUEL	Moi je me suis un peu compliqué la vie.
ECH	Il a fait tout cela à partir des nombres et des lettres.
MARCEL	Comment ça il sait déjà faire de l'algèbre lui?
SAMUEL	J'ai un grand frère! Maintenant on sait qu'il y a 2A (Bouquet C)…donc la différence entre les 2B c'est 1,50 x 2, entre ceux-là et ceux-là c'est 3$ de différence.
ENS	Entre le paquet de 2 blanches et le paquet de 2 noires, il y a une différence de 3$ vous êtes d'accord avec ça?
ÉLÈVES	[échanges entre les élèves] Oui
ENS	Lesquelles valent plus chères?
ÉLS	Les blanches.
SAMUEL	Le 3$ de différence, tu l'ajoutes au 17$ et c'est comme si tu avais 4 blanches, les blanches c'est 20$ divisé par 4, 5$.
GAEL	T'as changé les deux noires par deux blanches?
SAMUEL	Ouais j'avais 2A + 2B = 17 pis là 4A = 20
[longues échanges entre Gael et Samuel sur le passage d'une écriture à l'autre ex. (A + A) + (B + B) = 17; 2A + 2B = 17; A = B +1,50; 2A + 2A - 3 = 17; 4A = 20)]	
SAMUEL	Pour trouver la fleur B…ben c'est 17 – 10 = 7 … 7 ÷ 2 = 3,50$.
GAEL	Et C = B - 0,50….3,50 - ,5 = 3$.

À la suite d'un problème d'audibilité de la bande, nous n'avons pas accès aux échanges précis entre Gael et Samuel, ce qui est fort regrettable, compte tenu de la pertinence des questions de Gael l'ayant mené à l'appropriation progressive de la démarche de Samuel. Nous avons jugé utile de présenter la démarche de Samuel, démarche indiquée sur sa feuille.

Démarche de SAMUEL (selon la feuille)
A (Image 1) : C + A + (B + B) = 15
B (Image 2) : C + C + A + B = 14,50
C (Image 3) : A + A + (B+B) = 17
D (Image 4) : 3C + 2 B + A = ?
B + 50c que C
en tout 7B + 5A + 6 C = … total
... Plusieurs autres écritures présentant divers essais sont inscrites

Verso de la feuille :	**Image 1 et Image 2**
B = C + 50c	15 - 0,50 = 14,50
A = C + 2$	
A + A = C + 4 = 17	A + (B + B) + C = 15
B + B = C + 1	
	A + B + C + C =14,50
A + A = C + 4	
	Différence
B + B = C + a	- B + C C+ 0,50 = B
A – 1,50 = B	B = C + 0,50 C = B – 0,50
B + 1,50 = A	
B = C + 50	
A = C + 2	
A + A = 2B – 3$	
Image 1 et Image 3	**Image 3**
A + (B + B) + C = 15 (A + A) + (B + B) = 17	(A + A) = (B + B)
	+ 3,00 que (B + B)
Différence	
- C + A	17 - 3 = 14
A = C + 2,00	14 ÷ 2 = 7,00
	7,00 + 3,00 = 10,00
Différence entre A et B	10,00 ÷ 2 = fleur A
A = C + 2,00	A = 5
B = C + 0,50	B = 3,50 (17 – 10 = 7 … 7 ÷ 2 = fleur B …
2,00 – 0,50 = 1,50	
A = B + 1,50	C = 3 C = b – 50 donc 3,50 – 50
A = 5,00	
B= 3,50	**Image 4**
C= 3,00	2B + 1 A + 3C = 7 + 5 + 9 = 21

Il ne fait aucun doute que cet élève établit bien les relations entre les prix des bouquets et les compositions de ces différents bouquets. Ces relations sont aussi relevées chez les élèves qui recourent à des démarches similaires, voir, entre autres, la démarche de Prince que nous avons présentée. La fonction sémiotique de l'écriture algébrique des relations entre les prix des fleurs permet un meilleur contrôle de la démarche et se révèle (comme le montrent certains échanges avec les élèves) un outil de calcul non négligeable.

Le raisonnement de Samuel, comme le montre sa démarche, prend appui sur une coordination de connaissances importantes, voire sur une articulation entre des raisonnements arithmétique et algébrique. Cet élève a non seulement considéré les relations entre les fleurs bleues et jaunes, puis entre les fleurs blanches et jaunes, mais a aussi déduit la relation entre les fleurs blanches et bleues, ce qui le mena à substituer le coût des fleurs bleues par celui des fleurs blanches dans le bouquet C. En choisissant de présenter la démarche de cet élève, à la suite de l'examen des démarches précédentes, plusieurs élèves ont pu alors comprendre le raisonnement de cet élève.

Comme nous l'avons évoqué antérieurement, nous avons choisi de présenter aux élèves la démarche d'un étudiant universitaire, à la suite de l'analyse des démarches précédentes, ce qui a permis aux élèves de donner sens au raisonnement de cet étudiant. Remarquons d'abord que cet étudiant, comme l'a fait l'élève Prince, trouve facilement qu'une fleur blanche et une fleur bleue valent 8,50$. Cet étudiant effectue aussi un examen de l'ensemble des bouquets et du bouquet D, ce qui lui permet aisément de trouver que le prix du bouquet D correspond à la somme des prix des bouquets A et B, à laquelle, toutefois, il importe de déduire le prix d'une fleur bleue et d'une fleur blanche. La représentation de la situation, chez cet étudiant et chez les étudiants universitaires, se distingue de celle des autres élèves, par l'établissement de relations entre la composition du bouquet D et les compositions des différents bouquets, relations faisant l'économie de la recherche du prix unitaire de chacune des fleurs. Il nous semble qu'une telle représentation témoigne aussi « d'un regard algébrique » sur les relations, regard différent de celui que nous avons retrouvé chez l'élève Samuel.

La comparaison entre les conduites des étudiants universitaires et des élèves en difficultés d'apprentissage a fait émerger l'importance et la nécessité de prendre le temps de bien examiner les relations entre les données de la situation, avant de s'engager dans des calculs. Cette situation et les interactions en classe constituent « un point tournant » dans les rapports de plusieurs élèves aux mathématiques. L'enseignante, les chercheures, et les élèves ont également été impressionnés par les raisonnements que les élèves ont pu mettre en place.

Évolution des rapports des élèves aux nombres rationnels et aux mathématiques, ainsi que des démarches d'acculturation institutionnelle de l'enseignante, des chercheures et des élèves

Lors de l'analyse des conduites des élèves et des interactions entre les élèves, l'enseignante et l'étudiante-chercheure, en prenant appui sur les objectifs poursuivis dans notre recherche, nous avons fait état, à quelques reprises, de l'évolution des rapports des élèves aux mathématiques, notamment, de l'entrée des élèves dans des pratiques mathématiques impliquant la mise en œuvre de démarches fondées sur des raisonnements prenant en compte les relations entre les données de la situation-problème. Nous aimerions ajouter également que cette situation nous semble avoir marqué les rapports de ces élèves aux nombres rationnels, notamment aux nombres décimaux, les relations établies entre ces nombres et les calculs effectués ont permis aux élèves d'interroger ces nombres et d'effectuer des calculs pertinents. Nous pourrons voir par la suite si ces rapports permettent aux élèves de mieux saisir le sens des calculs sur les nombres décimaux, calculs qui seront objets d'un enseignement ultérieurement (voir, entre autres, l'objectif 2). Il importe de mentionner que nous avons pu prendre appui sur l'intérêt de l'enseignante pour cette situation, sur son engagement dans les échanges qui ont eu lieu lors du retour sur les démarches des élèves et enfin, sur l'importance qu'elle accorde aux représentations des relations dans la résolution de problèmes. Nous ne saurions enfin passer sous silence les pratiques mathématiques mises en place par plusieurs élèves qui se sont montrés fortement intéressés par cette situation, entrevoyant les mathématiques comme des outils essentiels pour résoudre des problèmes non triviaux.

Au terme de cette situation, nous pourrions également affirmer que l'intérêt de l'enseignante pour cette situation et ses interactions avec l'étudiante-chercheure et les élèves, ont constitué un moment important du processus d'acculturation institutionnelle de l'étudiante-chercheure et de la chercheure (voir, entre autres, l'objectif 1). Bien que cette dernière n'était pas présente, à la demande de l'enseignante[29], au moment de la réalisation de cette situation, elle a pu apprécier les conduites des élèves et les rôles joués par l'étudiante-chercheure et l'enseignante dans les interactions didactiques. Nous ne saurions trop insister sur le rôle déterminant des élèves qui ont engagé l'enseignante et l'étudiante-chercheure dans un travail mathématique visant à donner sens à leurs démarches, cet engagement ayant « si on peut oser le dire » consacrer les collaborations entre les chercheures et l'enseignante. Reste à voir si les apports de cette situation se sont maintenus. L'analyse des interactions au cours des situations successives pourra en témoigner.

4.2.4. Situations portant sur l'identification de nombres décimaux, sur la représentation de nombres rationnels, sur la résolution de problèmes multiplicatifs comportant des nombres rationnels et enfin, sur la multiplication de nombres décimaux

Les situations présentées le 5 février 2007 émergent d'une première véritable co-construction impliquant l'enseignante, la chercheure et l'étudiante-chercheure. Elles concernent : 1) l'identification de nombres décimaux; 2) la représentation de nombres rationnels; 3) la résolution de problèmes multiplicatifs comportant des nombres rationnels; 4) la multiplication de nombres décimaux. La résolution de problèmes multiplicatifs impliquant des nombres rationnels est la visée fondatrice de cette séquence. Afin d'alléger la lecture, nous segmenterons la présentation en prenant en compte les deux périodes distinctes d'enseignement consacrées à la réalisation de ces situations. La première période traitera du jeu d'identification de nombres décimaux et des représentations de nombres rationnels; la seconde période sera consacrée à la résolution

[29] Elle estimait qu'il était trop précoce pour intégrer de nouveau un autre intervenant. Elle craignait que les élèves soient déstabilisés.

de problèmes multiplicatifs impliquant des nombres rationnels et à la multiplication de nombres décimaux.

4.2.4.1. Description des situations présentées au cours de la première période : « identification de nombres décimaux » et « représentations de nombres rationnels»

L'élaboration des situations qui ont été présentées aux élèves, au cours de la première période d'enseignement, a donné lieu à de nombreux échanges entre l'enseignante, l'étudiante-chercheure et la chercheure, échanges menant à des adaptations des propositions soumises par chacune des intervenantes et à l'établissement d'une complicité non négligeable entre ces intervenantes[30]. Comme il s'agit de moments cruciaux pour la poursuite de notre projet, nous présenterons dans un premier temps, en respectant la chronologie de l'expérimentation, les différentes étapes de concertation entre la chercheure, l'enseignante et l'étudiante-chercheure. Les justifications ayant mené aux diverses adaptations seront aussi apportées. Nous exposerons, dans un deuxième temps, les conduites des élèves lors de la réalisation de la situation d'identification de nombres décimaux; nous commentons brièvement ces conduites, les élèves n'ayant pas été invités à réagir aux propositions de leurs pairs. Nous examinerons plus attentivement les conduites des élèves pendant la réalisation de la seconde situation portant sur les représentations variées de nombres rationnels, ainsi que les interactions entre les élèves, l'enseignante et l'étudiante-chercheure.

Démarche d'acculturation : évolution des échanges entre l'enseignante, l'étudiante-chercheure et la chercheure ayant permis de déterminer les situations présentées à la première période

En gardant à l'esprit l'orientation écologique de notre projet de thèse et l'objet unificateur de celui-ci, soit la construction de relations entre différentes représentations

[30] Nous rendrons compte des effets de ce travail collaboratif dans la partie « Évolution des rapports des élèves aux nombres rationnels et aux mathématiques, ainsi que de la démarche d'acculturation institutionnelle de l'étudiante-chercheure ».

des nombres rationnels qui puissent permettre de mieux appréhender l'importance de ces nombres, de faciliter la compréhension des opérations arithmétiques impliquant ces nombres et enfin, de faire un choix éclairé de représentations de ces nombres permettant la mise en place de démarches plus économiques de calcul et de résolution de problèmes, il nous est apparu « opportun » de proposer à l'enseignante une situation permettant de construire et de « rassembler » différentes représentations des nombres rationnels. En effet, en tenant compte, entre autres, de la planification de l'enseignante, nous avons pu identifier que l'enseignement précédemment dispensé avait traité de fractions équivalentes et d'opérations sur les fractions, ainsi que de pourcentages et de nombres décimaux (taux et transformation d'un pourcentage en nombre décimal). Nous avons aussi pu constater que l'enseignante prévoyait poursuivre avec l'enseignement de la multiplication et la division de nombres décimaux. En nous appuyant également sur l'historicité de la classe (activités, interactions, planifications), il s'est révélé fort pertinent de traiter conjointement différentes représentations des nombres rationnels qui semblaient dissociées chez les élèves. Nous avons donc soumis à l'enseignante la situation suivante portant sur les « Représentations de nombres rationnels ».

Différentes façons de parler des nombres : a) 2/5; b) 0,3

Les représentations du nombre 2/5 permettent de « modeler » les représentations du nombre 0,3 que les élèves doivent trouver. Ainsi, après chacune des représentations du nombre 2/5, les élèves sont invités à produire une représentation similaire du nombre 0,3.

2/5 : à tour de rôle, nous présentons des façons différentes de parler de 2/5, par exemple : 1) mon nombre est inférieur à 1; il est assez près d'une demie; 2) mon nombre correspond à une fraction décimale qui peut être représentée par 4/10, 40/100, 400/1000…; 3) mon nombre correspond à l'addition suivante : 2/10 et 8/40; 4) mon nombre peut être représenté par plusieurs nombres à virgule, dont : 0,4 ; 0,40; …; 5) mon nombre peut aussi être représenté par la division du nombre 40 par ?; 6) mon nombre correspond au résultat de la multiplication suivante : 25/125 x 2 ou 2 x 25/125; 7) mon nombre, s'il est associé à une mesure donnée en cm, peut correspondre à la longueur d'une fourmi .

À la suite de quelques conversations téléphoniques, l'enseignante propose de commencer avec un jeu *« je pense à un nombre »*, car les élèves ont déjà vu les nombres décimaux, mais ils doivent maintenant, selon l'enseignante, « se rendre aux millièmes ». Elle souhaite leur faire « ressentir le besoin de précision ». Nous ajustons donc la situation en conséquence et convenons qu'elle sera responsable de cette partie.

Elle suggère également de remplacer la fraction 2/5 par ½ : « *On devrait plutôt commencer avec ½ et faire un genre de réseau de concepts au tableau pour qu'ils trouvent eux-mêmes. Ils connaissent les représentations, ils seront beaucoup plus motivés tandis qu'avec 2/5, il y a des calculs à faire. On va davantage avoir leur attention, on va pouvoir aller plus les chercher. Cela leur permettra d'avoir une attitude de questionnement au lieu d'une passivité devant les propos de l'enseignante du style « je vous montre quelque chose »*. Cette idée de renversement du contrat didactique, de responsabilisation de l'étudiant, nous convenait parfaitement; c'était d'ailleurs une des raisons pour lesquelles nous demandions aux élèves de produire, au fur et à mesure, une représentation similaire. Cependant, nous voulions les amener au-delà de ce qu'ils connaissaient déjà. L'étudiante-chercheure était plutôt réfractaire à cette modification. Pour sa part, la chercheure a convenu que ce n'était pas une mauvaise idée dans la mesure où, effectivement, cela leur permettrait d'entrer dans la tâche et qu'il nous serait toujours possible d'intervenir à partir de leurs propositions. Il fallait aussi considérer qu'il s'agissait de notre première proposition et que l'adhésion des différents acteurs (élèves et enseignante) à notre projet était primordiale. Enfin, tout au long du projet, nous tenions à offrir à l'enseignante un espace décisif non-négligeable, car le processus d'intégration écologique de situations didactiques engage forcément la responsabilité des divers acteurs, acteurs devant occuper des positions symétriques. Nous avons donc accepté cette adaptation.

Par la suite, l'enseignante avance l'idée d'inclure les élèves dans des équipes concurrentes, afin de trouver le plus de représentations différentes. Le climat de la classe et les choix pédagogiques de l'enseignante sont propices à l'exploitation de jeux compétitifs. En effet, nous avons constaté, à maintes reprises, l'engouement des élèves et les effets bénéfiques de telles pratiques. Dans cet ordre d'idées, nous avons voulu reconnaître et valoriser le *« savoir en action »* en intégrant, à notre activité, cette approche de l'enseignante, coutumière à la classe.

Au terme de ces échanges, il est convenu d'amorcer cette situation par la tâche « Je pense à un nombre » qui est effectuée avec l'ensemble des élèves de la classe. L'enseignante choisit un premier nombre inconnu des élèves, soit 6,53, et les invite à proposer des nombres pour l'identifier. Les élèves sont informés que ce nombre se situe entre 0 et 10. Dès qu'un nombre est proposé, l'enseignante fait connaître la relation entre celui qui est nommé et le nombre retenu (ex. : votre nombre est « plus petit » que le nombre désigné). Lorsque les élèves ont trouvé le premier nombre, l'enseignante en sélectionne un autre, soit 13,417, et invite les élèves à émettre diverses propositions sachant que le nombre est situé entre 0 et 15. Cette première tâche complétée, les élèves, regroupés en équipe concurrentes, sont alors invités à trouver le plus grand nombre de représentations possibles des nombres ½, 3/5 et 0,3. Pour que les élèves interprètent bien la consigne et puissent invoquer certaines représentations qu'ils n'ont pas exploitées, un premier retour collectif est effectué pour le nombre ½, permettant ainsi aux trois intervenantes et aux élèves de réagir. Puis, les élèves retrouvent leurs équipes respectives et effectuent le même travail pour la fraction 3/5 et le nombre décimal 0,3. Enfin, un retour collectif sur l'activité est effectué.

Analyse des conduites des élèves et des interactions lors de la réalisation des tâches d'identification de nombres décimaux choisis par l'enseignante

Les tâches d'identification de nombres décimaux ont donné lieu à une implication de la majorité des élèves. Le caractère ludique de ces tâches, caractère rarement retrouvé dans les tâches usuelles, a probablement permis à un plus grand nombre d'élèves d'oser « prendre la parole ». Il importe de mentionner que la vitesse d'exécution de ces tâches ne nous a pas permis d'identifier, sauf en de rares occasions, les élèves prenant la parole. Il faut aussi mentionner que les élèves Guy et Anne étaient absents, lors de la réalisation des activités proposées au cours de cette journée. Le tableau suivant indique, pour chacun des nombres choisis par l'enseignante, les nombres successivement proposés par les élèves, ainsi que les relations entre ces nombres et le nombre retenu.

Tableau XIX: Propositions des élèves et réponses de l'enseignante lors des tâches d'identification des nombres 6,53 et 13,417

PREMIER NOMBRE CHOISI PAR L'ENSEIGNANTE : 6,53 / INDICE : ENTRE 0 ET 10		
Nombres proposés par les élèves	Relations entre ce nombre et le nombre choisi énoncées par l'enseignante *Notation :*Nombre choisi plus grand (plus grand ↑) ou plus petit (plus petit ↓) que le nombre proposé par l'élève	Appréciation de l'essai des élèves *Notation :*Prise en compte adéquate (A) ou erronée (E) de la relation donnée par l'enseignante
7	Plus petit ↓	A
6	Plus grand ↑	A
7,5	Plus petit ↓	E
7,1	Plus petit ↓	E
6,5	Plus grand ↑	A
6,6	Plus petit ↓	A
6,65	Plus petit ↓	E
6,01	Plus grand ↑	E
6,55	Plus petit ↓	A
6,54	Plus petit ↓	A
6,03	Plus grand ↑	E
6,53	Bravo!	A
SECOND NOMBRE CHOISI PAR L'ENSEIGNANTE : 13,417 / INDICE : ENTRE 0 ET 15		
Nombres proposés par les élèves	Relations entre ce nombre et le nombre choisi énoncées par l'enseignante *Notation :* Nombre choisi plus grand (plus grand ↑) ou plus petit (plus petit ↓) que le nombre proposé par l'élève	Appréciation de l'essai des élèves *Notation :* Prise en compte adéquate (A) ou erronée (E) de la relation donnée par l'enseignante
3	Plus grand ↑	A
5	Plus grand ↑	A
10	Plus grand ↑	A
15	Plus petit ↓	A
11	Plus grand ↑	A
12	Plus grand ↑	A
13,13	Plus grand ↑	A
14,50	Plus petit ↓	A
14	Plus petit ↓	A
7	Plus grand ↑	E
13,50	Plus petit ↓	A
13,49	Plus petit ↓	A
13,25	Plus grand ↑	A
13,35	Plus grand ↑	A
Entre 13 et 14	Vrai	A
Entre 13,13 et 13,50	Vrai	A
Entre 13,25 et 13,49	Vrai	A
Entre 13,40 et 13,47	Vrai	A
Entre 13,415 et 13,419	Vrai	A
13,40	Plus grand ↑	E
13,47	Plus petit ↓	E
13,45	Plus petit ↓	E
13,43	Plus petit ↓	E
13,42	Plus petit ↓	E
13,41	Plus grand ↑	E
13,419	Plus petit ↓	A
13,415	Plus grand ↑	A
13,417	Bravo !	A

Comme le montre ce tableau, dans l'identification du premier nombre 6,53, la moitié des propositions effectuées par les élèves ne tiennent pas compte de l'ensemble des réponses de l'enseignante, ne prenant en compte généralement que la dernière réponse de l'enseignante. C'est le cas notamment des élèves Réjean, Gael , Rémi, Gaudi et Marcel. Dans l'identification du second nombre 13,417, on relève une seule proposition qui semble être faite sans tenir compte des informations provenant des propositions précédentes; cette proposition est effectuée par Marcel, élève sollicité par la chercheure pour prendre la parole. Par ailleurs, il est intéressant de relever les questions du type « entre tel nombre et tel autre nombre », introduites par Gael et Noa; ce type de questions a été reproduit par Réjean, Samuel et Rébecca et ont permis d'encadrer de plus en plus finement le nombre à identifier, même si on relève, comme à la tâche précédente, des questions qui ne tirent pas profit des informations provenant des réponses données par l'enseignante aux questions de ce type.

Les conduites des élèves lors de la réalisation des tâches de représentation des nombres rationnels de ½, 3/5, 0,3

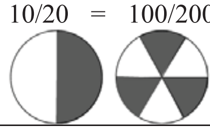
Les tâches de représentation des nombres rationnels constituent « un moment clé, voire un événement majeur » de la séquence d'enseignement des nombres rationnels et permettent l'exploitation d'une niche importante pour l'inscription de situations déterminantes sur l'enseignement des nombres rationnels, un tel résultat constituant un objectif important de notre recherche. Comme nous l'avons exprimé précédemment, les élèves sont invités à proposer diverses façons de représenter chacun des nombres rationnels suivants : ½; 3/5; 0,3. Le premier nombre a été consciemment choisi pour engager les élèves dans une démarche de représentation mettant à profit leurs connaissances sur les nombres rationnels, les relations entre les écritures décimales et fractionnaires des nombres rationnels, les relations entre diverses écritures fractionnaires d'un même nombre rationnel, les relations entre les fractions décimales, les nombres décimaux et les fractions non décimales, les calculs impliquant une transformation des fractions, etc. Pour faciliter un tel engagement, nous avons décidé de présenter en premier la fraction ½ et d'inviter les élèves à former des équipes et à proposer diverses représentations de ce nombre rationnel. Ce travail est aussi associé à plusieurs interventions de l'enseignante, de l'étudiante-chercheure et de la chercheure. Un retour est effectué sur les représentions de la fraction ½ et les élèves sont ensuite invités à poursuivre leur travail de représentations des nombres 3/5 et 0,3.

Les conduites des élèves lors de la représentation de la fraction ½ et les interactions didactiques qui les accompagnent

Nous présentons, dans le tableau ci-dessous, les résultats obtenus par les différentes équipes pour le nombre 1/2. La très grande majorité des représentations sont adéquates, seulement une d'entre elles est erronée, soit 1, 5 (Rébecca, Réjean, Hélène, Rémi, Gael et David). Les productions des équipes répertoriées dans le tableau et les interactions, lors de l'examen des productions, montrent que plusieurs élèves ont eu recours à la production de fractions équivalentes, soit en divisant ou en multipliant le numérateur ou le dénominateur par le même opérateur scalaire. De tels procédés prennent appui sur les démarches enseignées précédemment, démarches consignées dans les notes de cours, sous la rubrique « fractions équivalentes » : pour modifier une fraction, nous pouvons 1- multiplier le numérateur et le dénominateur par la même quantité, pour produire des fractions équivalentes; 2- diviser le numérateur et le dénominateur par une même quantité (simplifier)**).** Il importe toutefois de mentionner que pour trouver une fraction équivalente, les élèves Prince et Martin ont eu recours à une stratégie novatrice consistant à choisir un numérateur et à le multiplier par deux pour obtenir le dénominateur (480 x 2 → 960; 480/960 = 1/2**)**, un tel procédé nous apparaissant relever d'une interprétation « rapport » de la fraction, interprétation qui, comme nous le verrons plus tard, s'avère pertinente et économique dans plusieurs situations impliquant des nombres rationnels. Une seule équipe, soit l'équipe composée des élèves Marcel, Gaudi et Betrand, a eu recours à des pourcentages, alors qu'aucun élève n'a exploité la notation décimale. L'équipe composée des élèves Rébecca, Réjean et Hélène a exploité des représentations graphiques. Notons enfin que l'équipe formée des élèves Rémi, Gael et

David s'est limitée à l'ajout de zéros, pouvant ainsi générer une infinité de représentations différentes sans effectuer le moindre calcul.

Tableau XX: Représentations du nombre ½

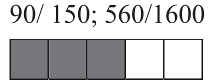
ÉQUIPES	REPRÉSENTATIONS DU NOMBRE RATIONNEL : ½	
	ADÉQUATE	ERRONÉE
Marcel Gaudi Bertrand	½ = 2/4, 4/8, 8/16, 6/12, 50%, 100/200, 200/400, 400/800, 3/6 = 10/20 = 15/30 = 20/40 = 25/50 = 30/60 = 40/80 = 500/1000 = 600/1200 = 700/1400= 800/1600 = 900/1800 = 1000/2000 = 500000/1000000=	
Rébecca Hélène Réjean	½ = 2/4 = 4/8 = 8/16 = 16/32 = 32/64 …. 2 ÷ 4 10/20 = 100/200 = 15/30 = 30/60 = 60/120 =120/240 = 50/100; 	1,5
Noa Samuel Alex	2/4; 4/8; 8/16; 16/32; 40/80; 20/40; 30/60; 50/100; 60/120; 70/140; 6/12; 10/20; 80/160; 90/180; 100/200 ¼ + ¼ : écriture de la chercheure 2/8+2/8 0,5/ : écriture de la chercheure	
David Rémi Gael	5/10; 100/200, 10/20, 1000/2000, 10000/20000, 100000/200000, 1000000/2000000, 10000000/20000000, jusqu'à $1x10^{11}$ / $2x10^{11}$	1,5
Prince Martin	½; 4/8; 6/12; 12/24; 16/32; 32/64; 5/10; 50000/100000; 500000/1000000; 2/4; 15/30; 50/100; 500/1000; 30/60; 5000/10000; 480/960; 240/480; 40/80; 120/240; 60/120;	

Lors du retour collectif, les élèves sont invités à faire part des représentations qu'ils ont produites. Ne pouvant inscrire au tableau toutes les représentations proposées par les élèves, l'étudiante-chercheure choisit les représentations suivantes : Hélène : 2/4; Gael : $1x10^{13}/2x10^{13}$; Martin : représentation graphique; Marcel : 6/12; Samuel : 2/8+2/8; Noa : 40/80; Bertrand: 10/20, 50%; Gaudi : 500000/1000000, 500/1000; Rémi : 5/10; Rébecca: 100/200; Alex: 8/16; ce choix permet de mettre en évidence la diversité des représentations et des processus ayant mené à celles-ci. De plus, la suggestion effectuée par Réjean, soit d'inscrire 1,5, a été discutée avec les élèves qui ont convenu de l'équivalence des écritures 5/10 et 0,5, suite à nos questionnements (notamment, sur la dénomination des nombres). La possibilité d'écrire ½ en exploitant le symbole de la division, comme l'avait tentée Rébecca et Réjean, a été reprise. C'est pourquoi nous retrouvons l'inscription 1÷2. De plus, l'ajout de 4150/8300 par l'étudiante-chercheure visait à vérifier si les élèves, autres que Prince et Martin, pouvaient interpréter aisément et rapidement la relation entre le numérateur et le dénominateur. Ceux-ci étant sollicités à procéder de la même façon, ils ont proposé les écritures équivalentes suivantes : 512/1024, 1024/2048, 400/800. Aussi, la stratégie « d'ajout de 0 » proposée par Gael a été ré-exploitée, mais cette fois, en s'appuyant sur l'écriture décimale, ce qui provoqua l'inscription du nombre 0,500000000. Enfin, la chercheure suggère d'inscrire 2,5/5, car aucun élève n'avait exploité ce type d'écritures, bien qu'elle ait écrit *0,5/?* sur la feuille de Noa et Samuel.

Les conduites des élèves lors de la représentation du nombre décimal 0,3 et de la fraction 3/5 et les interactions durant le retour collectif sur les représentations produites par les équipes

Nous avons regroupé dans les tableaux ci-dessous les différentes représentations des nombres 0,3 et 3/5 produites par les membres des équipes. Toutes ces représentations s'avèrent justes, à l'exception de la majorité de celles produites par l'équipe de Prince et Martin, pour la fraction 3/5; ceux-ci ont inscrit 32/40, 320/400, 64/80, 640/800, 6400/8000, 128/160, 1280/1600, 12800/16000, 256/320, 2560/3200, 1024/1280, 512/640 et 5120/6400. Ces méprises s'expliquent d'abord par une erreur de table (3/5 x 8/8… *3x8 = 32*…8 x 8 = 40…32/40) pour 32/40, erreur qui se répercutera directement sur les prochaines fractions puisqu'ils se sont appuyés sur ces premières représentations erronées (ex. 32/40 x10/10 = 320/400…320/400 x 4/4 = 1280/1600…1280/1600 x4/4 = 5120/6400, etc.). Nous présentons le tableau et discuterons par la suite des pratiques et des représentations qui diffèrent de celles exploitées précédemment pour ½.

Tableau XXI: Représentations des nombres 0,3 et 3/5

Équipe	**Représentations du nombre rationnel : 0,3**		**Représentations du nombre rationnel : 3/5**	
	adéquate	**erronée**	**adéquate**	**erronée**
Marcel Gaudi Bertrand	3/10 ; 9/30; 18/60; 36/120; 6/20 $\frac{100\%-0{,}100-0{,}10-10\%-10\%}{2}$ 0,6 ÷ 2 0,1 + 1/10 + 10% = ; 0,3 = 3/10	100% - 0,2 - 2/10 - 20/100 - 1/20	3/5=6/10=12/20=24/40 30/50=300/500= 3000/5000= 30000/50000 ; 300 000/500 000 ; 240/400 3000000/5000000; 120/200 30000000/50000000; 60/100 90/ 150; 560/1600  Écriture de CH: 3 sur 10 30% 3 sur 5 60% 	28/80 280/800

Rébecca Hélène Réjean	3 dixièmes 3/10 = 30/100 = 60/200 = 120/400 = 240/800 = 480/1600 = 960/3200 = 1920/6400 = 3840/12800 = 7680/25600 = 15360/51200 = 30720/102400 = 61440/204800 = 122880/409600 3/10 = 30/100 ; 30%; 1,00-0,70; 0,15 x 2		3/5 = 6/10 = 12/20 = 24/40 48/80 = 96/160=192/320 18/30; 108/180 42/70; 114/190 48/80; 54/90; 60/100; 66/110; 72/120; 78/130; 84/140; 90/150; 96/160; 100/170	
Noa Samuel Alex	0,3/1 30 centièmes 0,1 + 0,1 + 0,1 = 0,3 0,1/1 + 0,1/1 + 0,1/1 = 0,3/1 0,15 + 0,15 = 0,30 0,15/1 + 0,15/1 = 0,30		6/10 ; 2/10 x : écriture de CH, l'élève ajoute le 3…2/10 x 3 1,5/5 + 1,5/5 ; 1,50/5 + 1,50/5 ; 1,500/5 + 1,500/5 1,5000/5 + 1,5000/5 ; 1,50000/5 + 1,50000/5 1/5 +1/5+1/5 ; 1/5 x 3 1,5/2,5 ajout de zéros jusqu'à 1,50000000/2,50000000	
David Rémi Gael	0,30 ; 0,300 ; 0,3000 ; 0,30000 ; 0,300000 ; 0,3000000 ; 0,30000000; 0,300000000 3/10; 30/100; 30/1000; 3000/10000 6/20; 60/200; 600/2000; 6000/20000 9/30; 90/300; 900/3000; 9000/30000 12/40; 120/400; 1200/4000;12000/40000 15/50; 150/500; 1500/5000;15000/50000 18/60; 180/600; 1800/6000; 18000/600000; 180000/6000000		3/5, 30/50 jusqu'à $3x10^{12}$ / $5x10^{12}$ 6/10, 60/100, jusqu'à $6x10^{7}$ / $10x10^{7}$	
Prince Martin	54/180;48/160; 39/130; 36/120, 33/110, 30/100, 27/90, 60/200, 57/190, 51/170, 45/150, 42/140, 24/80, 9/30, 21/70, 12/40, 15/50; 3/10; 18/60		6/10; 12/20; 36/60; 60/100; 120/200 ●●●○○  $\frac{3*3}{5*3} = \frac{9}{15}$ 27/45; 81/135; 180/300; 540/900	32/40; 320/400; 64/80; 640/800; 6400/8000 1024/1280; 128/160; 1280/1600; 12800/16000; 256/320; 2560/3200; 5120/6400; 512/640; 600/6000;

À la lumière de ce tableau, nous constatons que plusieurs élèves recourent à la production de fractions équivalentes par la multiplication ou la division du numérateur et du dénominateur d'une fraction par un même opérateur scalaire et l'ajout de zéros. L'équipe composée des élèves Rémi, Gael et David en est un bon exemple : ces élèves ne se sont appuyés que sur un procédé qui s'avère effectivement simple et efficace pour répondre à la question demandée. Toutefois, nous avons vu émerger diverses attitudes intéressantes menant à des conduites plus singulières ou à des réinvestissements des échanges effectués précédemment, lors du retour collectif sur les représentations produites pour la fraction ½. Dans l'exemple ci-dessous, on peut observer l'association de différentes écritures pour traduire un nombre (0,3) :

90 80 70 60

$$\frac{100\% - 0{,}100 - 0{,}10 - 10\% - 10\%}{2}$$

Cette production étayée par les propos de Gaudi témoigne des connaissances qu'il détient sur l'étendue des représentations des nombres rationnels, des compositions additives pour représenter un nombre et des équivalences d'écritures. En effet, on voit clairement qu'il passe d'une écriture décimale (0,3) à une écriture en pourcentage, soit 30%. Par la suite, il retranche 40% (-0,100-0,10-10%-10%) du 100%, afin d'obtenir 60%. Enfin, il ne lui reste qu'à procéder à la division par 2 pour obtenir 30%. Par ailleurs, il est intéressant de noter que l'élève privilégie l'utilisation d'un signifiant fractionnaire (a/b, 60%/2) plutôt que le symbole ÷ pour la division. Dans le même ordre d'idées, une autre équipe s'est permise d'exploiter des écritures non conventionnelles, soit 1,5/5 + 1,5/5, 1,5/2,5 et 0,15/1 + 0,15/1 = 0,30. Cette production semble témoigner d'un réinvestissement et de l'amalgame de diverses écritures produites précédemment par la chercheure sur la copie de ces élèves pour ½ : 0,5/? et ¼ + ¼.

Nous avons observé également le recours à l'addition des numérateurs et des dénominateurs qui est habituellement contre-indiquée, tel qu'inscrit dans les notes de cours des élèves pour l'addition de fractions : « ** Ne pas additionner les dénominateurs! ** ». Pourtant, l'exploitation du sens rapport des fractions rend possible cette procédure. Si l'on s'attarde plus précisément à la production de Prince et Martin, on remarque que les élèves ont, chaque fois, ajouté 3/10 pour produire successivement les fractions équivalentes suivantes : 27/90, 30/100, 33/110, 36/120, 39/130. Nous n'avons malheureusement pas fait de retour sur leur démarche. La démarche de cette équipe reflète une façon différente de trouver un rapport équivalent de celle consistant à multiplier le numérateur et le dénominateur par un même opérateur scalaire.

Nous avons enfin constaté quelques effets du retour collectif effectué précédemment sur les représentations de la fraction ½. En effet, deux équipes (Rébecca, Réjean et Hélène; Samuel, Noa et Alex) ont exploité un langage « alphanumérique » : 3 dixièmes et 30 centièmes. De plus, l'équipe composée des élèves Samuel, Noa et Alex a transposé et complété la représentation laissée par la chercheure pour ½ (0,5/?) en inscrivant 0,3/1 pour 0,3. Comme le montre le tableau, 3 équipes sur 5 ont procédé à une exploitation de compositions additives et multiplicatives, de telles compositions avaient été amenées précédemment par la chercheure; lorsqu'il s'agit, par exemple, de représenter 0,3, nous retrouvons les opérations suivantes : 1,00 - 0,70 ; 0,15 x 2. Ces écritures n'étant pas sans intérêt, la chercheure inscrit 0,15 x 82/41 au tableau et Noa s'empresse de dire qu'il s'agit du même nombre : « Mais là, c'est la même chose». Nous avons aussi souligné la nouveauté de la représentation *0,6 ÷ 2* pour exprimer différemment 0,3, représentation produite par l'équipe de Gaudi, Bertrand et Marcel. Aucune équipe n'a réutilisé directement le sens quotient de la fraction (3/10 = 3 ÷10 ; 3/5 = 3 ÷5). D'autre part, l'équipe formée de Gaudi, Bertrand et Marcel, ainsi que celle formée de Prince et Martin, ont repris l'utilisation de la représentation graphique qui avait été proposée par Rébecca, Hélène et Réjean. De plus, Prince et Martin ont aussi eu recours à une représentation discrète (collections). Chez les élèves qui ont eu recours à des dessins, le nombre d'objets de la collection ou la mesure d'un des côtés d'un rectangle étaient toujours égaux au nombre figurant au dénominateur des fractions considérées. Mentionnons également que les élèves Marcel, Bertrand et Gaudi, ont eu recours spontanément aux pourcentages pour représenter chacun des nombres. Rébecca, Hélène et Réjean ont pris appui sur la représentation de la fraction ½ des élèves précédents, pour recourir à un pourcentage pour représenter le nombre 0,3.

Évolution des rapports des élèves aux nombres rationnels et aux mathématiques, ainsi que de la démarche d'acculturation institutionnelle de l'étudiante-chercheure

Lors des échanges ayant mené à la construction des situations précédentes sur l'identification et la représentation de nombres rationnels, la prise en compte des rétroactions de l'enseignante et des élèves a permis de dépasser les limites des situations d'enseignement initialement proposées. Elle a constitué un terreau fertile pour la poursuite du projet et la survie des situations. Il nous semble important de présenter un extrait d'échanges mettant en exergue l'émergence des perceptions de l'enseignante quant à notre présence en classe.

Lors d'un entretien téléphonique, l'enseignante dit à l'étudiante-chercheure

> « *Dans le fond, on travaille juste différemment. Toi, tu les mets plus devant des gros défis, moi, je micro-gradue beaucoup. En fait, je choisis bien les tâches et l'ordre pour qu'ils puissent les faire seuls sans mon aide. Ils n'ont pas besoin de moi. Comme ça c'est plus significatif, car c'est eux qui le font. Aussi, c'est mieux pour leur motivation et leur estime.[…]*
>
> À la fin de la discussion, elle affirme : « *Finalement, je dois t'avouer franchement que les élèves sont mieux qu'avant que tu ne sois là. Ils savent qu'ils ont deux professeurs différents pour répondre à leur question. Ceux qui avaient à être dérangés par ta présence se sont replacés, ils sont maintenant plus autonomes, ils posent moins de questions.* »

Ces propos reflètent une modification fondamentale de la perspective dans laquelle nous étions depuis le début de l'expérimentation. En effet, si au début, l'étudiante-chercheure pouvait apparaître comme un corps étranger menaçant le fonctionnement usuel de la classe, elle apparaissait maintenant comme une alliée. L'enseignante considérait maintenant que les différences liées aux situations, approches pédagogiques et interactions didactiques privilégiées constituaient un levier d'apprentissage pour les élèves qui, par la présence de l'étudiante-chercheure et par nos échanges, n'avaient qu'une visée constructive et ne reflétaient nullement un jugement de notre part. D'ailleurs, cette situation favorable entre les différents acteurs a conduit l'enseignante à suggérer la venue de la chercheure en classe.

Il semble que chacun des acteurs (élèves, enseignante, chercheures) ait bénéficié de retombées positives de la situation sur les « Représentations de nombres rationnels ». L'évolution des démarches au cours de cette situation témoigne de la liberté et du plaisir qui ont marqué leurs investissements. En effet, à l'entrée dans cette situation, les élèves se limitaient à une procédure et à l'utilisation des fractions. Par la suite, nous avons vu apparaître, entre autres, la coordination de différents registres sémiotiques (numérique, graphique et alphanumérique : 3/5, ●●●○○, 3 dixièmes) et l'exploitation de diverses connaissances (compositions additives et multiplicatives, relations entre numérateurs et dénominateurs, exploitation de divers sens de la fraction (partie-tout, quotient, rapport), etc. De plus, cette première situation a permis aux élèves de se rendre compte d'une propriété fort importante, soit qu'un nombre rationnel peut être représenté par une infinité de fractions (Ex: 12 x ? = 4 a pour solution le rationnel noté 4/12, 12/36, 1/3, etc.). Cette propriété montre, en partie, l'étendue des moyens dont on dispose pour représenter un nombre rationnel. Cette puissance, il va sans dire, n'apparaît pas aisément à l'élève habitué à désigner un nombre entier par un seul code digital. Cette habitude rend ardue la construction de la notion de fractions équivalentes. Et, l'achèvement d'une telle construction va bien au-delà de l'habileté à calculer des fractions équivalentes, exigeant la plupart du temps de ne trouver qu'un nombre restreint de représentations (voire, au plus, 4 ou 5 représentations).

Dans un autre ordre d'idées, nous ne sommes pas en mesure de déterminer si l'équipe composée des élèves Gael, Rémi et David avait conscience des différences entre les traitements des écritures suivantes : a) 1,5/2,5 : ajout de zéros jusqu'à 1,50000000/2,50000000; b) 3/5 : ajout d'un 0 au numérateur et au dénominateur de cette fraction, produisant alors la représentation « 30/50 »; les élèves ajoutent ensuite un même nombre de 0 au numérateur et au dénominateur, produisant alors une écriture que nous représentons, pour simplifier, ainsi : « $3x10^{12}$ / $5x10^{12}$ ». Dans les écritures produites en a), les élèves se contentent d'ajouter des 0, à la partie décimale de chacun des nombres, ce qui n'affecte en rien ces nombres; dans les écritures produites en b), les élèves se contentent toujours d'ajouter des 0, mais sont-ils alors conscients que dans cette condition, si le rapport entre le numérateur et le dénominateur est conservé, les nombres apparaissant au numérateur et au dénominateur sont multipliés par 10, par 100, etc. Il aurait été intéressant de questionner les élèves à ce sujet.

4.2.4.2. Description des situations présentées au cours de la seconde période : « multiplication de nombres décimaux » et «résolution de problèmes multiplicatifs impliquant des nombres rationnels »

Les situations soumises aux élèves lors de la seconde période prennent appui sur la planification de l'enseignante, planification dont nous avons fait état antérieurement. Selon cette planification, il était prévu de proposer d'abord aux élèves des multiplications de nombres décimaux. La multiplication de nombres décimaux constituait l'objet d'apprentissage au centre de cette séquence. L'élaboration de la situation-problème est née d'un échange informel entre l'enseignante et l'étudiante-chercheure sur le sens de la multiplication de décimaux et a été conçue par la chercheure et l'étudiante-chercheure. Il a alors été convenu que, lors de cette seconde période, les élèves devaient d'abord résoudre des situations de proportionnalité simple et effectuer par la suite les multiplications de nombres décimaux prévues initialement par l'enseignante.

Dans un premier temps, nous présenterons la démarche d'acculturation dans l'élaboration de la situation problème impliquant la multiplication de nombres rationnels. Dans un second temps, nous reproduirons et discuterons des conduites des élèves, lors de la réalisation de cette situation et de la tâche provenant du manuel.

Présentation de la démarche d'acculturation dans l'élaboration de la situation de résolution de problèmes multiplicatifs

La situation-problème créée initialement par la chercheure et l'étudiante-chercheure est une situation de proportionnalité simple mettant en jeu les mesures du nombre de boîtes de gâteaux et du nombre de gâteaux contenus dans ces boîtes. Les élèves doivent, à cet effet, compléter des tableaux dans lesquels certaines données sont manquantes. La tâche vise, notamment, à porter leur attention sur la relation entre les nombres, afin de donner sens à cette opération et à exploiter la démarche la plus économique qui soit. C'est pourquoi une attention toute particulière a été dédiée aux choix des nombres. En effet, nous avons exploité différentes représentations de nombres rationnels (nombres entiers, nombres décimaux, fractions), afin que les élèves puissent s'appuyer sur ce qu'ils ont construit précédemment (multiplication d'entiers et de fractions) pour construire le sens de la multiplication des décimaux. Cette intention s'est aussi traduite par la coexistence de trois tableaux dont la seule variation concerne le nombre de gâteaux par boîte qui, dans un cas, est 10 fois plus petit et, dans l'autre, dix fois plus grand. D'autre part, nous avons tenu à ne pas donner d'emblée la valeur unitaire, afin d'accroître la pertinence d'examiner les relations entre les nombres. À titre d'exemple, le nombre de gâteaux contenus dans 15 boîtes peut être obtenu en multipliant par 3 la quantité inscrite pour 5 boîtes ou diviser par 10, celle pour 150 boîtes. Enfin, nous avons inscrit un nombre sous deux formes différentes (1/2 et 0,5), notre intention étant que les élèves puissent utiliser l'une ou l'autre de ces représentations pour trouver une démarche appropriée, économique. Nous reproduisons ci-dessous la première version de la situation-problème construite par la chercheure et l'étudiante-chercheure.

Un marchand place des petits gâteaux dans des boîtes; cinq boîtes contiennent 17,5 gâteaux. Ce nombre qui apparaît un peu bizarre est dû au fait qu'un des employés a la bonne habitude, à chaque fois qu'il met des gâteaux dans des boîtes, de manger une partie d'un des gâteaux …Comme le dit le marchand, les clients ne sont pas tenus d'acheter un nombre entier de boîtes ou de gâteaux.

Partie 1 : Pouvez-vous compléter ce tableau?

Nombre de boîtes	Nombre de gâteaux
5	17,5
½	
150	
15	
7,5	
1	
25	
0,5	
500	
45/5	

***Partie 2 : a) Et si le nombre de gâteaux dans chacune des boîtes était de* 1,75 ? b) de 175 ?**
Complète les tableaux suivants :

Nombre de boîtes	Nombre de gâteaux
5	1,75
½	
150	
15	
7,5	
1	
25	
0,5	
500	
45/5	

Nombre de boîtes	Nombre de gâteaux
5	175
½	
150	
15	
7,5	
1	
25	
0,5	
500	
45/5	

Avant de soumettre cette situation-problème à l'enseignante, nous avons jugé pertinent de mieux comprendre l'enseignement de la multiplication des nombres décimaux qu'elle envisageait. L'enseignante nous a donc fait part de l'enseignement habituellement dispensé lors de la multiplication de nombres décimaux et des notes de cours qu'elle comptait offrir aux élèves :

1. Pour multiplier deux nombres décimaux, tu fais la multiplication sans tenir compte des virgules
2. Tu comptes le nombre de chiffres après la virgule
3. En commençant par la gauche, recule la virgule d'autant de positions qu'il y a de chiffres après la virgule.

*** Tu peux t'aider en faisant l'estimation du produit sans la partie décimale

Elle nous a confié qu'elle prônait cet enseignement afin que les élèves retiennent facilement comment procéder, le recours à l'estimation du produit pouvant alors favoriser leur compréhension du procédé enseigné. À la suite de ces explications, nous, l'étudiante-chercheure et la chercheure, avons apporté quelques modifications à notre situation de départ. Par exemple, nous avons ajouté une troisième partie, afin de valoriser l'accès au sens des actions intervenant dans le déroulement de l'algorithme qu'elle enseignait. Dans cet ordre d'idées, nous avons inscrit dans le document que nous lui avons transmis les propos suivants: « *Ici c'est pour reprendre ton idée d'estimation sans la virgule (ex. 112*50...6000), de leur permettre de mettre du sens sur le « déplacement » de la virgule et de faire le pont avec ce qu'ils auront travaillé dans les parties 1 et 2 [comme le prix est 100 fois plus grand et que le nombre de kg est 10 fois plus grand, il obtiendra un résultat (coût total) 1000 fois trop grand].* ». De plus, la question initiale construite par l'étudiante-chercheure était celle-ci : « *La démarche faite par Philippe est parfaite, mais incomplète. Peux-tu compléter sa démarche? ».* Voulant tenir compte du fonctionnement de l'enseignante, mais étant, par ailleurs, soucieuse de mettre l'accent sur le sens, l'étudiante-chercheure avait quelques interrogations qu'elle a soumises à la chercheure : « *Devrais-je inscrire d'autres questions??? Ex. Le produit qu'il a obtenu est combien de fois plus élevé que celui qu'il aurait dû obtenir? Et s'il avait fait 11 270 x 50,45 ? ».* La chercheure approuva la première modification car elle permettrait de bien fusionner les attentes de l'enseignante et les nôtres. Ce qui donna lieu à l'activité suivante :

Partie 3:

Philippe

Christine va au marché pour préparer le repas de son mariage. Elle souhaite acheter 112 kg de bifteck de contre-filet qui se vend à 50,45 $ le kilogramme. Le boucher est particulièrement fier de son estimation et demande à Christine si cela lui pose problème qu'il lui en vende un peu plus : 112,7 kg. Combien lui coûtera cet achat?

$$
\begin{array}{lr}
 & 1 \\
 & 3\ 3 \\
 & x\ 5\,0\,4\,5 \\
 & \underline{1\,1\,2\,7} \\
 & 3\,5\,3\,1\,5 \\
+ & 1\,0\,0\,9\,0 \\
 & 5\,0\,4\,5 \\
 & 5\,0\,4\,5 \\
\hline
 & 5\,6\,8\,5\,7\,1\,5
\end{array}
$$

Les calculs faits par Philippe sont parfaits mais sa démarche est incomplète. Peux-tu la terminer ?

Le produit qu'il a obtenu est combien de fois plus élevé que celui qu'il aurait dû obtenir?

En résumé, les trois parties ont été proposées à l'enseignante avec une seule contrainte : la non-utilisation de la calculatrice. L'enseignante accepta avec enthousiasme, tout en proposant de travailler par la suite la multiplication comme elle l'enseignait et aussi de fournir, dans notre activité, la valeur unitaire. Nous avons donc procédé à la modification de la première valeur en donnant le nombre de biscuits pour un contenant au lieu de cinq. Quoique cette modification minimisait l'importance de porter une attention particulière aux relations entre les nombres (afin d'utiliser la stratégie la moins coûteuse possible (ex pour passer du coût de 5 boîtes à 150 boîtes, il suffit de multiplier le résultat par 30)), elle détenait l'avantage de mettre l'accent sur le sens. En effet, comme nous l'avons remarqué à plusieurs reprises, il est fort à parier que dans de telles conditions les élèves auraient eu, machinalement, recours «au produit croisé». De plus, il serait plus aisé pour les élèves d'interpréter la valeur décimale du nombre de gâteaux contenu dans une boîte. Nous avons donc convenu de présenter cette situation et d'inviter par la suite les élèves à effectuer les calculs provenant du manuel Perspective.

Analyse des conduites des élèves au cours de la situation de « résolution de problèmes multiplicatifs impliquant des nombres rationnels »

La réalisation de cette activité n'a pas fait l'objet d'un enregistrement; toutefois, à la lecture de l'énoncé avec le groupe, Rébecca a spontanément réagi à la donnée « *cinq boîtes contiennent 17,5 gâteaux* » en s'exprimant ainsi : « il en a mangé une moitié ! ». Cette réaction constitue une belle entrée dans la situation. Rébecca recourait spontanément à une pratique que nous souhaitions voir apparaître : elle s'attardait au nombre en jeu, telles qu'en témoignent l'anticipation et l'interprétation précédentes. Nous présentons et examinons les réponses[31] des élèves pour les parties 1 et 2. Il convient de noter que Martin et Guy étaient absents lors de la réalisation de cette activité et que, bien que présente, Anne n'a rien fait.

Tableau XXII: Résultats des élèves lors de la résolution de la première partie du problème, dans laquelle le nombre de gâteaux dans une boîte était de 17,5

Nombre de boîtes	Nombre de gâteaux	Élèves	Appréciation des résultats A : adéquat E : erroné
1	17,5	---	---
1/2	8,75	Marcel, Samuel, Noa, Bertrand, Rebecca, Gael, Alex, David, Prince, Réjean, Rémi , Gaudi	A
	0,5	Hélène	E
150	2625	Marcel, Samuel, Noa, Bertrand , Rebecca, Gaudi, Gael, Prince, Réjean, Hélène, Rémi	A
	2622	Alex	E
	262,5	David	E
15	262,5	Samuel, Noa, Bertrand, Rebecca, Gaudi, Gael, Alex, David, Prince, Réjean, Rémi, Hélène	A
	illisible	Marcel	---
7,5	131,25	Samuel, Noa, Bertrand, Rebecca, Gaudi, Gael, Alex, Prince, Réjean, Rémi, Hélène	A
	71,5	David	E
	Aucun résultat	Marcel	E
25	437,5	Samuel, Noa, Bertrand, Rebecca, Gaudi, Gael, Alex, David, Prince, Réjean, Rémi, Hélène	A
	illisible	Marcel	---
0,5	8,75	Samuel, Bertrand, Rebecca, Gaudi, Gael, Alex, David, Réjean, Rémi, Hélène	A
	35	Marcel, Noa	E
	87,5/175	Prince	E

[31] Le manque de temps devant ce type de situation «nouvelle » ne nous a pas permis de traiter la troisième partie.

500	8750	Marcel, Samuel, Noa, Bertrand, Rebecca, Gael, Alex, Prince, Rémi, Hélène	A
	875000	Gaudi	E
	8,750	David	E
	3750	Réjean	E
10	175	Marcel, Samuel, Noa, Bertrand, Rebecca, Gaudi, Alex, David, Prince, Réjean, Rémi, Hélène, Gael	A
45/5	157,5	Marcel, Samuel, Noa, Alex, Bertrand, Hélène	A
	158	Rebecca, Gael, David, Réjean, Rémi	E
	1575	Gaudi	E
	787,5/87,5	Prince	E

Si nous nous référons à l'appréciation des résultats des élèves, nous remarquons qu'une majorité a bien réussi le problème de la *Partie 1*. Nous porterons donc une attention particulière à certaines démarches, ainsi qu'à certains des résultats erronés qu'il nous est possible d'interpréter, en tenant compte des traces de leurs calculs laissées par les élèves. Il importe de mentionner que nous n'avons pu effectuer un retour collectif sur les conduites des élèves, le temps alloué pour la réalisation de ces tâches étant écoulé, ce qui nous prive non seulement d'une meilleure compréhension des conduites des élèves, mais également d'une possibilité de permettre à des élèves de conférer un sens à certaines démarches et éventuellement, d'effectuer des apprentissages signifiants.

Lors de la réalisation de cette tâche, nous avons relevé quelques démarches remarquables. Citons par exemple, celle de Gaudi (tableau 26) qui, pour trouver le nombre de gâteaux dans une demi-boîte, a traité « momentanément » les deux parties du nombre 17,5 comme des entiers, afin d'effectuer la division par deux de ces nombres (17 ÷ 2 = 8,5 et 5 ÷ 2 = 2,5…8,75). Puis, il a réinterprété les quotients au regard de la valeur de position. Lors de la multiplication de 17,5 par 150, se remémorant la conduite précédente, la chercheure a inscrit sur la feuille de cet élève « 17,50…1750 → 100… 875→50 », sans bien sûr commenter cette inscription; l'élève a alors procédé à une composition additive des produits. Mentionnons également l'économie de la démarche de Bertrand, lors de la recherche du nombre de gâteaux pour neuf (45/5) boîtes; celui-ci s'est servi conjointement des résultats qu'il avait obtenus pour dix boîtes et pour une boîte et a effectué la soustraction suivante : (175-17,5 = 157,5). L'attention qu'il a portée aux données n'est pas courante; elle témoigne d'une prise en compte des relations entre les nombres 45/5 et 10 et d'une exploitation de la distributivité de la multiplication sur la soustraction dans la mise en place d'un procédé de calcul fort pertinent. Ces relations ont d'ailleurs dû être mises en exergue pour certains élèves, comme en témoignent les traces de l'étudiante-chercheure sur la feuille de Gael :

Boîtes	**Gâteaux**
1	17,5
10	175
45/5 = 9[32]	?

Cependant, il faut mentionner que le raisonnement de Bertrand a été possible suite à l'intervention de l'étudiante-chercheure sur l'interprétation de 45/5, comme le montrent les écritures suivantes apparaissant sur le document de cet élève: 45/5…45÷5 = 9…45/5 = 9. La conduite d'Hélène mérite également d'être examinée. Cette élève a montré une compréhension juste des relations entre les données et a effectué des transformations fort pertinentes, voire novatrices, des représentations des données. Ainsi, pour déterminer le nombre de gâteaux correspondant à 150 boîtes, contrairement aux élèves qui ont effectué la multiplication de 150 par 17,5 et aux écritures de l'étudiante-chercheure sur sa feuille (flèche allant de 1 à 150 et de 17,5, à la valeur inconnue, et sur laquelle repose l'inscription de la relation *x 150*), Hélène a privilégié la multiplication de 175 par 15. Elle a donc effectué une transformation des nombres 17,5 et 15, transformation n'affectant pas le produit et prenant en compte le fait que si elle multipliait le nombre 17,5 par 10 et divisait le nombre 150 par 10, elle pouvait procéder à une multiplication de nombres entiers.

Dans un autre registre, il nous semble important de nous attarder maintenant aux erreurs des élèves, afin de bénéficier d'une interprétation plus éclairée des résultats. De plus, cette prise en compte favorisera la compréhension de la démarche d'acculturation dans la conception des situations didactiques ultérieures. Comme le montre le tableau 26, nous pouvons déceler 13 erreurs. Il nous est toutefois impossible d'interpréter plusieurs des erreurs commises par les élèves, ne disposant pas d'informations claires sur les procédés mis en place, certains élèves ne laissant même aucune trace des procédés qu'ils avaient utilisés.

[32] L'équivalence d'écriture 45/5 = 9 ayant été préalablement trouvé par l'étudiant seul.

Si nous examinons d'abord les erreurs ne mettant pas en cause la compréhension de la multiplication, nous remarquons qu'Hélène a inscrit 0,5 pour rendre compte du nombre de gâteaux pour une demi-boîte. Nous savons toutefois qu'elle répondait aux attentes de l'activité précédente lui demandant de trouver une représentation différente d'un nombre rationnel, car elle a noté ½ = 50/100. Ce n'est qu'après l'intervention de l'étudiante-chercheure qu'elle a traité, dans la Partie 2b, la demie de 175 (tableau 26), l'étudiante-chercheure étant revenue sur la *Partie 1* en dessinant une flèche de part et d'autre du nombre de boîtes et de gâteaux pour 1 boîte et ½ boîte, à laquelle elle associe « *÷2* ». De son côté, Alex a écrit que 2622 gâteaux étaient contenus dans 150 boîtes, alors qu'il s'agissait de 2625 gâteaux. Cependant, compte tenu de la nature de ses troubles d'apprentissage, nous pouvons fortement penser à un effet miroir (inversion du 5 en 2), d'autant plus qu'il a obtenu de bonnes réponses pour toutes les autres données.

Nous nous attarderons maintenant aux erreurs relevant davantage du sens des opérations. Il importe toutefois de souligner qu'il nous a souvent été difficile d'interpréter ou d'identifier l'origine de certaines des erreurs, les démarches des élèves étant peu explicites, voire souvent absentes. Nous examinons d'abord les erreurs que nous avons regroupées en tant qu' « erreurs de positionnement ». Gaudi a écrit 1575 gâteaux pour 9 (45/5) boîtes et 875 000 gâteaux pour la multiplication de 500 boîtes par 17,5 alors que les résultats attendus étaient de 157,5 et 8750. Il est possible que l'ajout des deux 0 au nombre 8750 relevait d'une habitude bien ancrée concernant le produit d'un nombre quelconque a) par un nombre b) se terminant par des 0, à savoir que l'écriture du nombre obtenu doit se terminer par le même nombre de 0 que comportait le nombre b). On peut ainsi penser qu'il a transposé l'écriture des deux zéros du nombre 500, donnant comme résultat final 875000.

Marcel et Noa ont associé 35 gâteaux à 0,5 boîte; ils ont pris en considération la relation entre 1 boîte et 0,5 boîte, soit « 1 boîte équivaut à 2 fois ½ boîte ». Ils ont alors appliqué l'opérateur « x » au nombre de gâteaux pour 1 boîte : 17,5 x 2. Soulignons, par ailleurs, que cette erreur est la seule commise par Noa, ce qui n'est pas le cas pour Marcel.

Les réponses de Prince pour déterminer le nombre de gâteaux que comportent respectivement 0,5 (0,5 étant spontanément représenté par 5/10) boîte et 45/5 boîtes sont, de prime abord, étonnantes; elles le sont d'autant plus que cet élève a trouvé sans difficulté les nombres de gâteaux associés aux autres boîtes. Cet élève a procédé ainsi a) : 5 x 17,5 / 10 x 17,5; b) 45 x 17,5 / 5 x 17,5. Il est possible que cet élève ait voulu exprimer ses réponses à l'aide de représentations fractionnaires pour respecter les représentations associées aux nombres de boîtes. Il se peut également que cette situation fasse écho à des techniques associées aux multiplications de fractions, tel que nous l'avons vu lors de l'enseignement du diagramme circulaire. Il importe, par ailleurs, de rappeler que cet élève avait rapidement et correctement trouvé le nombre de gâteaux pour ½ boîte, en divisant par 2, le nombre de gâteaux contenus dans 1 boîte, la relation entre ½ et 1 lui étant plus familière.

Comme le montre le tableau précédent, Réjean a commis deux erreurs. Il a ainsi obtenu 3750 gâteaux pour 500 boîtes, alors que le résultat devait être 8750. Le produit que cet élève a réalisé correspond à la multiplication de 7,5 par 500. Cet élève, comme plusieurs élèves, a arrondi à l'unité près, le nombre de gâteaux correspondant à 45/5 de boîtes. Nous n'avons pu toutefois interroger ces élèves pour comprendre pourquoi ils ont jugé bon de procéder ainsi.

Les analyses précédentes sont fort instructives. Malgré les erreurs relevées, elles montrent sans équivoque que la grande majorité des élèves est en mesure de recourir aux relations entre les mesures pour orienter leurs démarches. L'établissement de ces relations a, soulignons-le, grandement bénéficié des interventions de l'étudiante-chercheure, de la chercheure et de l'enseignante. Examinons maintenant les conduites des élèves lors de la résolution de la seconde partie du problème. Dans le prochain tableau, nous exposons les résultats obtenus par les élèves et leur appréciation, lorsque le nombre de gâteaux par boîte devient 1,75. Nous examinerons par la suite les démarches des élèves.

Tableau XXIII: Résultats des élèves lors de la résolution de la seconde partie du problème (2a), dans laquelle le nombre de gâteaux dans une boîte était de 1,75

Nombre de boîtes	Nombre de gâteaux	Élèves	Appréciation du résultat A : adéquat E : erroné
1	1,75	---	---
1/2	0,875	Samuel, Noa, Bertrand, Rebecca, Gael, Alex, Prince, Réjean, Rémi	A
	0,8875	Gaudi	E
	3,5	Marcel	E
	0,5	Hélène	E
150	262,5	Marcel, Samuel, Noa, Bertrand, Gaudi, Gael, Alex, Prince, Hélène	A
	2625	Rebecca, Rémi	E
	26,25	Réjean	E
15	26,25	Marcel, Samuel, Noa, Bertrand,Rebecca, Gaudi, Gael, Alex, Prince, Réjean, Rémi, Hélène	A
7,5	13,125	Samuel, Noa, Bertrand, Rebecca, Gael, Alex, Prince, Réjean, Rémi, Hélène, Gaudi	A
	13	Marcel	E
25	43,75	Samuel, Noa, Bertrand, Rebecca, Gaudi, Gael, Alex, Prince, Réjean, Rémi, Hélène	A
	43,8	Marcel	E
0,5	0,875	Samuel, Bertrand, Rebecca, Gael, Réjean, Rémi, Hélène, Gaudi	A
	0,872	Alex	E
	3,5	Noa	E
	8,75/17,5	Prince	E
	Aucun résultat	Marcel	---
500	875	Marcel, Samuel, Bertrand, Alex, Prince, Hélène	A
	875,0	Noa, Gael	A
	8750	Rebecca, Rémi	E
	887,5	Gaudi	E
	375,0	Réjean	E
10	17,5	Samuel, Noa, Bertrand, Gael, Alex, Prince, Réjean, Hélène	A
	17,50	Gaudi	A
	175	Rebecca, Rémi	E
	17	Marcel	E
45/5	15,75	Samuel, Noa, Bertrand, Alex, Hélène	A
	15,8	Gael, Réjean	E
	15	Marcel	E
	158	Rebecca, Rémi	E
	155,75	Gaudi	E
	78,75/8,75	Prince	E

À la présentation de ce tableau, nous pouvons également remarquer que le nombre d'erreurs commises par les élèves est plus important que celui que nous avons relevé lors de la réalisation de la tâche précédente, passant ainsi de 13 à 20. Nous regardons maintenant plus en détail ces méprises, afin de comprendre les raisons de cet accroissement.

Tout d'abord, 8 de ces erreurs s'expliquent par l'exploitation de réponses erronées produites lors de la réalisation de la *première partie*, ce qui n'entache en rien la pertinence des procédés que les élèves ont mis en place. Il importe d'ailleurs de noter que ces élèves ont fait usage d'une démarche fort efficiente : en remarquant que la seule variation concernait le nombre de gâteaux par boîte (Partie 1 : 17,5; Partie 2a : 1,75), ils ont tout simplement divisé leurs résultats précédents par 10 : a) Noa a écrit 3,5 gâteaux pour 0,5 boîte; b) Gael et Réjean obtiennent 15,8 gâteaux pour 45/5 de boîtes, ceux-ci ayant trouvé 158 pour un même nombre de boîtes à la *Partie 1*; c) Réjean a trouvé 375 gâteaux pour 500 boîtes et 15,8 gâteaux pour 45/5 boîtes. Bien que Prince obtienne des fractions équivalentes à celles obtenues dans la *Partie 1* pour les contenus de 0,5 et 45/5 boîtes, (8,75/17,5 et 78,75/8,75), il s'est appuyé sur les données précédentes, en divisant par 10 le numérateur et le dénominateur. Parallèlement, sur la feuille de Marcel nous retrouvons 3,5 gâteaux pour ½ boîte, résultat que l'on pourrait associer aux 35 gâteaux trouvés pour 0,5 boîte lorsque le contenu d'une boîte était de 17,5 gâteaux.

Deux autres erreurs s'avèrent identiques à celle précédemment relevées dans la *Partie 1*, c'est pourquoi, nous nous contenterons de les énumérer : 1) Hélène écrit 0,5 gâteaux pour ½ boîte; 2) Alex a produit une inversion en notant 0,872 gâteaux pour 0,5 boîte, au lieu de 0,875.

Une augmentation notable du type d'« erreurs de positionnement » est à souligner; on relève en effet 8 erreurs de ce type. Nous croyions à tort que le fait que le multiplicande et le multiplicateur soient des nombres décimaux aurait occasionné des difficultés, mais il semble plutôt que ce soit les nombres qui se terminent par 0 qui aient été sources d'erreurs : 3 erreurs avec 150; 1 avec 7,5; 2 avec 500 et 2 avec 10. Rébecca et Rémi ont déterminé que, dans 150 boîtes, il y avait 2625 gâteaux, tandis que Réjean n'a assigné à ce même nombre de boîtes que 26,25 gâteaux; Rébecca et Rémi ont inscrit

8750 gâteaux pour le contenu de 500 boîtes (875), 175 pour 10 boîtes (17,5). Notons également, d'autres erreurs qui, de prime abord, pourraient être associées à des erreurs de positionnement. Gaudi a ainsi trouvé 131,25 comme produit de la multiplication de 7,5 par 1,75 (13,125); Rébecca et Rémi ont obtenu le même résultat pour 45/5 boîtes que ces boîtes contiennent 17,5 gâteaux par boîte (Partie 1) ou 1,75 gâteaux par boîte (Partie 2a).

Dans le prochain tableau, nous présentons les nombres de gâteaux trouvés par les élèves lorsque le nombre de gâteaux par boîte s'élève à 175 et nous en discuterons par la suite.

Tableau XXIV: Résultats des élèves lors de la résolution de la seconde partie du problème (2b, dans laquelle le nombre de gâteaux dans une boîte était de 175

Nombre de boîtes	Nombre de gâteaux	élèves	Appréciation du résultat A : adéquat E : erroné
1	175	---	---
½	87,5	Samuel, Noa, Gael, David, Prince, Rémi	A
	87,500	Réjean	A
	8,7,5	Rebecca	E
	88,75	Gaudi	E
	210	Marcel	E
	605	Hélène	E
150	26250	Samuel,Noa, Prince, David	A
	262500	Rebecca, Gaudi, Rémi	E
	26,25	Gael	E
	2625,000	Réjean	E
	459	Marcel	---
	11250	Hélène	E
15	2625	Samuel, Noa, Rémi, Hélène	A
	2625,00	Rebecca, Gael	A
	26250	Gaudi	E
	262500	Réjean	E
	1500	David	E
	illisible	Prince	---
	illisible	Marcel	---
7,5	1312,5	Samuel, Noa, Rebecca, Prince, Rémi, Hélène	A
	1312,500	Réjean	A
	131250	Gaudi	E
	illisible	Gael	---
	135? illisible	Marcel	---
	750	David	E
25	4375	Samuel, Noa, Rebecca, Prince, Rémi	A
	4375,00	Gael, Réjean	A
	43750	Gaudi	E
	437	Marcel	E
	2500	David	E

0,5	87,5	Samuel, Rebecca, Rémi	A
	87,500	Réjean	A
	875	Marcel, Gael	E
	88,75	Gaudi	E
	875/1750	Prince	E
	50	David	E
	350	Noa	E
500	875	Marcel	E
	87500	Samuel, Noa, Prince, David	A
	17500	Rebecca	E
	88750000	Gaudi	E
	8750,00?	Gael	E
	87,0000	Réjean	E
	875000	Rémi	E
10	1750	Samuel, Noa, Rebecca, Gaudi, Prince	A
	1750,00	Réjean	A
	175	Marcel, Gael	E
	17500	Rémi	E
	7500	David	E
45/5	1575	Samuel, Noa	A
	1580,0	Réjean	E
	15800	Rémi, Rebecca	E
	155750	Gaudi	E
	158,00?	Gael	E
	7875/875	Prince	E
	rien	Marcel	E

Plusieurs élèves ont déterminé tous les nombres gâteaux associés aux différents nombres de boîtes, tandis que d'autres ne l'ont fait que partiellement et d'autres enfin, n'ont produit aucune réponse. Alex et Bertrand n'ont répondu à aucune question, alors qu'Hélène a déterminé uniquement le nombre de gâteaux pour 15 et 7,5 boîtes. Si nous prenons uniquement en compte les élèves qui ont produit des réponses, il faut convenir que l'enregistrement de 36 réponses erronées est relativement étonnant. Il faut cependant nuancer cette augmentation, car 11 d'entre elles ont été engendrées par l'exploitation de données précédemment erronées : elles sont toutefois cohérentes avec les résultats de la Partie 2a, résultats qu'ils ont multipliés par 100, en tenant compte de la nouvelle quantité de gâteaux par boîte.

Élèves	Nombre de boîtes	Nombre de gâteaux (*Partie 2a*)	Nombre de gâteaux (*Partie 2b*)
Rébecca	150 45/5	2625 158	262 500 15800
Réjean	150 45/5	26,25 15,8	2625,00 1580,0
Rémi	150 500 10 45/5	2625 8750 175 158	262 500 875000 17500 15800
Noa	0,5	3,5	350
Prince	0,5 45/5	8,75/17,5 78,75/8,75	875/1750 7875/8750

Dans la même perspective, Gaudi a tenu compte de la relation entre le nombre de gâteaux par boîte dans la partie 2a et la partie 2b. Cependant, il a considéré que dans la partie 2b, le nombre de gâteaux par boîte était 1000 fois plus grand que celui considéré dans la partie 2a, ce qui a entraîné des réponses erronées pour le nombre de gâteaux contenu dans 150,15, 7,5 et 25 boîtes. Comme on peut le constater, les «erreurs de positionnement» sont prédominantes dans la partie 2b. Une seule erreur concerne le contenu d'une demi-boîte pour lequel Rébecca a noté 8,7,5; il est cependant difficile d'expliquer la provenance d'une telle erreur, pour le moins inhabituelle. Dans le même ordre d'idées, Gael a rencontré de sérieuses difficultés dans le respect de l'ordre de grandeur des produits menant aux résultats suivants : a) un nombre de gâteaux 10 fois plus petit que celui attendu, lorsque les nombres de boîtes sont les suivants : 500; 10; 45/5; b) un nombre de gâteaux 10 fois plus grand que celui attendu, lorsque les nombres de boîtes sont les suivants : 7,5; 0,5 boîte; c) un nombre de gâteaux 1000 fois plus petit que celui attendu, lorsque le nombre de boîtes est 150. Il importe de mentionner que cet élève n'avait jamais commis de telles erreurs auparavant. Tout comme Gael, Marcel a défini que 0,5 boîte contenant 875 gâteaux, quantité qu'il a aussi curieusement associée à 500 boîtes. Il a aussi assigné 175 gâteaux à 10 boîtes. Quant à Réjean, il a associé 262500 gâteaux à 15 boîtes et 87,0000 à 500 boîtes.

Discussion générale

Malgré les erreurs qu'a pu entraîner la prise en compte des relations entre les nombres de gâteaux par boîte, chez plusieurs erreurs, cela ne remet pas en cause la pertinence de leurs procédés. Au contraire, ils ont traité de façon économique l'influence de la modification du nombre de gâteaux par boîte sur le produit obtenu. Nous effectuons maintenant une comparaison des nombres de gâteaux pour 150 boîtes et 15 boîtes, lorsque le nombre de gâteaux par boîtes est identique.

Tableau XXV: Comparaison du taux de réussite dans la recherche du contenu de 150 et 15 boîtes lorsque le nombre de gâteaux par boîtes varie de 17,5; 1,75 et 175

Nombre de gâteaux par boîte	**150 boîtes**			**15 boîtes**		
	Réussite (2625; 262,5; 26250)	Échec	Sans réponse	Réussite (262,5; 26,25; 2625)	Échec	Sans réponse
17,5	Réjean, Prince, Samuel, Marcel, Rebecca, Gaudi, Gaudi, Hélène, Gael, Noa, Bertrand,Alex	David (262,5)		Réjean, David, Prince, Samuel, Rebecca, Rémi, Gaudi, Hélène, Gael, Noa, Bertrand, Alex		Marcel (illisible)
1,75	Prince, Samuel, Marcel, Gaudi, Hélène, Gael, Noa, Bertrand, Alex	Réjean, Rebecca (2625) Rémi		Réjean, Prince, Samuel, Marcel, Rebecca, Rémi, Gaudi, Hélène, Gael, Noa, Bertrand, Alex,	Hélène (262,5)	
175	Prince, Samuel, Noa	Marcel, Rebecca, Rémi, Gaudi (262500), Gael, Réjean (2625, 0000), Hélène	Bertrand, Alex	Samuel, Rebecca, Rémi, Hélène, Gael, Noa	Réjean (262500), David, Prince, Marcel, Gaudi (26250)	Bertrand, Alex

Parmi la majorité des élèves ayant trouvé le nombre de gâteaux pour 150 boîtes lorsque le nombre de gâteaux par boîte est de 17,5 (12 élèves) et de 1,75 (9 élèves), seulement trois d'entre eux (Samuel, Noa et Prince) ont obtenu le bon résultat lorsque le nombre de gâteaux par boîte est de 175. Dans le même ordre d'idées, six élèves ont produit la bonne réponse pour 15 boîtes, mais deux de ces élèves seulement ont répondu correctement pour 150 boîtes. Un autre élève n'a pas associé le bon nombre de gâteaux à 15 boîtes, bien qu'il ait produit une réponse correcte pour 150 boîtes. Cela porte à notre attention le fait que certains élèves semblent négliger l'importance de s'attarder aux relations entre les nombres de boîtes et leurs influences respectives sur les nombres de gâteaux, lorsque le nombre de gâteaux par boîte est constant. En effet, certains élèves ne semblent pas interpellés pas l'incohérence de leurs résultats. Par exemple, Réjean a obtenu un nombre plus élevé de gâteaux pour 15 boîtes que pour 150 boîtes (175 gâteaux/boîte), tandis que Hélène a obtenu 262,5 gâteaux pour 15 boîtes, peu importe qu'il y ait 17,5 ou 1,75 gâteaux par boîte.

Dans la prochaine partie, tout en continuant à discuter des erreurs relatives au sens des opérations et en regard de la deuxième activité portant sur les différentes représentations d'une demie, nous traiterons des contenus d'une demi-boîte (1/2 et 0,5). Afin de faciliter la lecture, nous avons compilé dans le tableau ci-dessous, les réussites et les échecs des élèves, et ce, pour les différents nombres de gâteaux par boîte (17,5; 1,75 et 175).

Tableau XXVI: Comparaison du taux de réussite dans la recherche du contenu de ½ boîte et 0,5 boîte lorsque le nombre de gâteaux par boîte varie : 17,5; 1,75; 175

Nombre de gâteaux par boîte	½ boîte			0,5 boîte		
	Réussite	Échec	Sans réponse	Réussite	Échec	Sans réponse
17,5	Réjean, David, Prince, Samuel, Marcel, Rebecca, Rémi, Gaudi, Gael, Noa , Bertrand,Alex	Hélène		Réjean, David , Samuel, Rebecca, Rémi, Gaudi, Gael, Hélène, Bertrand, Alex	Prince , Marcel, Noa	
1,75	Réjean , David , Prince , Samuel, Rebecca, Rémi, Gael, Noa, Bertrand, Alex	Marcel , Gaudi, Hélène		Réjean , Samuel, Rebecca, David Rémi, Gael, Bertrand, Alex [33]	Prince , Marcel , Gaudi,Hélène, Noa ,	
175	Réjean , David, Prince, Samuel , Rémi, Gael, Noa	Rebecca Gaudi, Hélène,	Bertrand, Alex	Réjean, Samuel, Rebecca, Rémi, Marcel	David, Prince, Gaudi, Noa, Gael	Bertrand, Alex

[33] Nous n'avons pas considéré l'inversion du 5 et du 2 comme erreur (0,872 au lieu de 0,875).

		Marcel				

Les résultats des élèves montrent l'influence de la représentation des nombres rationnels sur l'interprétation de la situation et des procédés de calcul. Les conduites de Prince ont d'abord retenu notre attention. En effet, celui-ci a trouvé le nombre de gâteaux pour une ½ boîte; ensuite, il a traité 0,5 correctement comme étant 5/10, mais a ensuite multiplié le numérateur et le dénominateur par 17,5, obtenant ainsi 87,5/175. Il a appliqué la même démarche pour 1,75 et 175 gâteaux par boîte. Une procédure identique a été mise en œuvre pour le calcul de 45/5 de boîtes, ce qui l'a conduit au résultat suivant : 787,5/87,5. Noa est aussi parvenu à trouver le nombre de gâteaux pour ½ boîte, mais a échoué pour 0,5. Il semble cependant, au regard des réponses obtenues (35, 3,5 et 350), qu'il ait traité 0,5 comme 2 boîtes ayant pris en considération la relation entre 1 boîte et 0,5 boîte, soit « 1 boîte équivaut à 2 fois ½ boîte ».

Évolution des rapports des élèves aux nombres rationnels et aux mathématiques, ainsi que de la démarche d'acculturation institutionnelle de l'enseignante, des chercheures et des élèves

Au terme de cette deuxième activité, nous avons pu constater la difficulté des élèves à donner sens aux opérations qu'ils effectuent. De plus, ils n'ont pas l'habitude de s'attarder aux nombres avec lesquels ils travaillent. Cette constatation nous portera à poursuivre ce travail dans les prochaines activités. Lors de cette séance (préparation, adaptations, réalisation, évaluation), nous constatons que l'enseignante nous octroie un espace de travail de plus en plus important, celle-ci nous ayant laissé volontairement le champ libre pour le choix des activités portant sur la multiplication de nombres décimaux lors de sa planification. Les effets des échanges précédents se font ressentir par son souci constant de conjuguer nos différentes façons de faire.

4.2.5. Situation de résolution de problèmes multiplicatifs comportant, entre autres, des nombres décimaux, et sur l'algorithme usuel de multiplication de nombres décimaux

La situation de résolution de problèmes multiplicatifs a été élaborée par la chercheure et l'étudiante-chercheure, à la suite d'une demande de l'enseignante qui a jugé la situation du 5 février fort pertinente. Elle estimait que l'exploitation de contextes variés pertinents permettait effectivement aux élèves de donner sens à la multiplication de nombres rationnels. Nous pensions également qu'au regard des conduites des élèves (prise en compte des relations : erreurs de positionnement de la virgule dans l'écriture des nombres associés aux produits de multiplications comportant des nombres décimaux) et de l'intérêt manifesté par l'enseignante, il serait approprié de proposer aux élèves des énoncés isomorphes à ceux présentés le 5 février. Nous avons simplement ajouté une colonne permettant de rendre compte des calculs ayant mené à leur solution. Nous reproduisons cette situation et rendons compte brièvement des variables que nous avons considérées dans la rédaction de cette situation-problème.

4.2.5.1. Situation de résolution de problèmes multiplicatifs

Au Mont-Tremblant, les billets de skis pour adolescents de 13 à 17 ans sont de 42,60 $ pour une journée. Contrairement à ce qu'on voit habituellement, il n'y a aucun rabais pour l'achat de billets de plus longues durées.

a) Pouvez-vous compléter ce tableau? »

Nombre de journées	Montants ($)	Solutions
1	42,60	
?	21,30	
150	?	
3,5	?	
100	?	

b) Et si le prix d'un billet pour une journée était de 426,00$ **? Complétez le tableau suivant :**

Nombre de journées	Montants ($)	Solutions
1	426,00	
?	213,00	
150	?	
3,5	?	
100	?	

Cette situation comporte deux problèmes de proportionnalité simple dans lesquels l'élève doit trouver les montants déboursés pour différents nombres de journées consacrées au ski. Le second problème ne diffère du premier que par le prix à payer pour une journée de ski, ce prix étant 10 fois plus grand que le prix indiqué dans le premier problème. Puisque ce prix est 10 fois plus grand, il aurait pu être exprimé par un nombre entier. Nous avons choisi d'exprimer ce prix par un nombre décimal, afin d'examiner l'influence d'une telle expression sur les produits obtenus par les élèves. Dans chacun de ces problèmes, nous avons aussi conservé certains des nombres inclus dans les problèmes présentés antérieurement (les nombres 1, ½, 150 faisaient partie des problèmes présentés le 5 février), afin que les élèves puissent mettre à contribution les relations qu'ils avaient alors exploitées; ce choix respectait aussi la demande qui nous avait été adressée par l'enseignante concernant la valeur unitaire. Comme nous l'avions fait pour l'activité présentée le 5 février, nous avons inséré un nombre décimal (3,5) dans la liste des mesures comportant des nombres entiers, le produit associé à cette mesure pouvant être obtenu aisément par composition de résultats précédents. D'autre part, nous avons modifié, à une reprise, la nature de l'inconnue en indiquant le montant pour lequel les élèves devront trouver le nombre de jours associés. De plus, comme les élèves n'avaient pas traité la dernière activité de la situation présentée le 5 février, situation visant à expliciter le « déplacement de la virgule », nous avons simplement changé le contexte et reproduit cette activité (situation 2).

Dans les tableaux ci-dessous, nous avons regroupé les solutions et résultats des élèves pour chacune des activités que comportait cette situation. De plus, nous rendons compte de l'appréciation de leurs résultats (E : erroné; A : adéquat). Comme en font état ces tableaux, les élèves ont, dans l'ensemble, très bien réussi cette activité. Il faut tout de même mentionner que certains élèves ont fait appel aux intervenantes, celles-ci les questionnant sur les relations entre les nombres et leur influence sur le produit recherché, sur la comparaison des multiplications avec ou sans virgules, sur l'estimation du produit, etc. Puisque les élèves n'avaient pas de telles habitudes et qu'il s'agissait d'une introduction à la multiplication des décimaux, nous souhaitions que les élèves puissent ressentir les bénéfices d'un tel questionnement. De plus, certains élèves (Marcel, Bertrand, et Rébecca) connaissaient déjà l'algorithme de multiplication de nombres décimaux bien que cet objet n'ait pas fait l'objet d'un enseignement dans cette classe. Notons enfin que Guy n'était pas présent lors des périodes précédentes et n'était pas présent lors de l'introduction de la situation actuelle. Comme nous le verrons au moment de l'analyse, il a bénéficié d'un support constant de l'étudiante-chercheure.

a) analyse des résultats et solutions des élèves à l'activité 1a.

Le tableau suivant présente les solutions et les résultats (A: résultat adéquat; E: résultat erroné) de chacun des élèves lors de la réalisation de la première activité (activité 1a).

Tableau XXVII: Appréciation des résultats et solutions des élèves à l'activité 1a

Nombre de journées	**Montants ($)**	**Résultats**	**Solutions**	**Élèves**	**Résultats : A/E**
1	**42,60**	---	---	---	---
?	**21,30**	½	42,60 ÷ 2 = 21,30	Guy, Marcel, Dan, Martin et Prince, Réjean et Rémi	A
			Aucune trace	David et Bertrand, Alex	A
			Aucune trace	Gael et Noa	A
			Aucune trace	Rébecca et Hélène	A
		0,5	aucune trace	Gaudi	A
		2	aucune trace	Anne	E
150	**?**	6390	42,60 x 100 = 4260 Algo : 42,60 x 50 =2130 4260 + 2130 = 6390	Martin + Prince	A
			150 x 2 = 300…4260 x 3 = 12780 12780 ÷ 2 = 6390	Samuel	A
			42,60 x 100 = 4260 4260+ 2130= 6390	Gaudi	A
			42,60 x 100 = 4260 4260÷2 = 2130 4260+2130 = 6390	Gael+Noa	A
			150 x 42,60 …. 42,60 x 100 = 4260 4260÷2 = 2130 4260+2130 = 6390	Rébecca et Hélène; Marcel	A
			150 x 42,60 = 6390	David et Bertrand	A
		636,3,0	42,60 x 150 000 21030 42600 636,3,0	Réjean et Rémi	E
		639000	algo : 4260 x 150 =639000	Alex	E
		639	algo : 42,60 x 150 = 639,00	Anne	E
3,5	**?**	149,1	3 x 42,60 =127,80 127,80 + 21,30 = 149,10	Gaudi, Dan,	A

			3 x 42,60 =127,80 127,80 + 21,30 = 149,10	Rébecca et Hélène	A
			42,60+42,60+42,60+21,30= 149,10	Gael + Noa	A
			Algo : 42,6 x 3,5= 149,10	Martin +Prince	A
		128,45	42,60+42,60+42,60+0,5 = 128,45	David+Bertrand	E
		148,11	3 x 42,60 =127,80 + 21,30 = 148,11	Anne	A
		1591,0	42,6 x 3,5 213,0 + 1378,0 1591,0	Réjean+Rémi	E
		14910	Algo : 42,6 x 3,5= 14910	Alex	E
100	**?**	4260	42,60 x 100 00,00 00000 4260,00	Réjean et Rémi, Hélène et Rébecca; Martin et Prince	A
			Déplacement de la virgule 42,60 x 100 = 4260	Marcel; Gael et Noa; Gaudi, Réjean, Alex, Samuel, David et Bertrand	A

Comme le montre le tableau précédent, seulement 2 élèves ne parviennent pas à trouver le nombre de journées associées au montant de 21,30$ (2^{e} entrée dans la liste des prix). Nous pouvons noter que tous les élèves, sauf Gaudi, ont exprimé une demi-journée en recourant à la notation fractionnaire. Rappelons qu'à la situation précédente, Gaudi avait rapidement reconnu que les nombres ½ et 0,5 représentaient un même nombre rationnel; cette reconnaissance lui avait permis, par la suite, de trouver rapidement les nombres de gâteaux associés à différents nombres de boîtes. Nous constatons aussi que plusieurs élèves n'ont pas inscrit de solution. C'est pourquoi nous nous référons aux extraits révélant quelques-unes des interprétations concernant le passage du coût de 42,60$ à 21,30$:

ECH	Ici tu as une journée et le montant et là, tu as le prix.
RÉBECCA	Mais le prix est plus petit que celui-là, donc ça veut dire que c'est une personne plus jeune que 13 ans.
ECH	Ah intéressant, mais en considérant qu'il ne s'intéresse qu'à des personnes de 13-17 ans, le prix plus bas veut dire…
RÉBECCA	Que c'est moins d'une journée.
ECH	Mais qu'est ce que tu remarques?
RÉBECCA	42 / 2 = 21 …ça veut dire une demi-journée.

GUY	C'est peut-être pour les petits enfants d'abord.
ECH	C'est drôle Rébecca a dit la même chose, mais là, on ne s'intéresse qu'aux 13-17 ans.
GUY	Peut-être que ça serait une demi-journée…
ECH	On sait que pour une journée c'est 42,60, donc une demi-journée…
GUY	Euh..
ECH	Si on te disait que pour une journée c'est 8 $.
GUY	4$ dans le fond.
ECH	Et qu'est-ce que tu as fait?
GUY	J'ai divisé par 2..ok je fais la même affaire avec 42,60.

MARCEL	Je sais que pour une journée, ça coûte 42,60, mais ici… le produit manquant…selon moi c'est pour une demi-journée, car 42,60 divisé par 2 ça donne 21,30$. Mais j'écris quoi?
ECH	Comme tu as fait…46,60 ÷ 2 = 21,30$. Continue.

GAEL	½ journée…c'est facile il y a là (42,60$ et 21,30$) un 2, un 4, un 2 et un 1.

À la lumière de ces propos, nous remarquons que leurs interprétations s'appuient tantôt sur les nombres, tantôt sur le contexte ou la combinaison des deux. L'absence de traces de calcul peut témoigner, dans le cas de Gael, de la facilité avec laquelle il a trouvé le montant; la comparaison des nombres ne lui apparaissait pas comme un raisonnement nécessitant un calcul. Dans le cas de Marcel, on voit davantage l'incapacité de l'élève à traduire son raisonnement sous la forme d'un calcul ou encore, à associer ce calcul à la demande effectuée, soit indiquer la solution.

Dans un autre registre, nous retrouvons quelques erreurs dans la recherche du nombre de jours associés au montant de 21,30$. D'abord, Anne a inscrit 2 journées. Nous croyons qu'elle a tout simplement transcrit l'opérateur scalaire qui permet le passage de 42,60 à 21,30, sachant qu'il fallait faire une division par 2. Nous croyons que la recherche du nombre de journées a empêché le recours à la démarche qu'elle privilégiait, soit la multiplication du nombre de journées par le coût unitaire.

Nous avons également eu droit à des raisonnements astucieux pour la recherche du montant associé à 150 jours. Par exemple, Samuel a trouvé le montant relatif à 300 jours en sachant qu'il s'agissait du double de ce qu'il recherchait réellement. Il lui semblait alors plus facile d'exploiter le montant associé à une journée (42,60$) qu'il a aisément transformé pour trouver le montant associé à 100 journées (4260$), puis celui associé à 300 journées (4260 x 3 = 12780). Enfin, il a tout simplement divisé ce résultat par 2, pour trouver le montant associé à 150 journées (12780 ÷ 2 = 6390). Les conduites de Gaudi, Gael et Noa sont également fort pertinentes; ils ont effectué spontanément une composition additive du nombre de jours (150 = 100+50), afin de faciliter leur calcul. Il faut dire que ces élèves avaient aussi exploité la composition additive, lors de la recherche de représentations de nombres rationnels et que l'étudiante-chercheure avait mis en relief cette relation, lorsque, dans l'activité présentée le 5 février, Gaudi devait trouver le nombre de gâteaux contenus dans 150 boîtes (17,5 par 150 : ECH écrit 17,50…1750→100…875→50). Gael et Noa ont ainsi d'abord trouvé le produit pour 100 jours, puis lui ont ajouté celui de 50 jours, montant correspondant à la moitié du précédent. De son côté, Gaudi a eu recours à un procédé fort économique; il a considéré le montant associé à 0,5 jour qu'il a multiplié par 100 pour trouver celui de 50 jours.

Bien que Rébecca, Hélène, Marcel et Guy aient exploité une composition additive du nombre 150, il importe de souligner que cette démarche a été portée à leur attention par les questions formulées par l'enseignante et l'étudiante-chercheure, questions prenant en compte leurs difficultés à trouver le produit de 150 par 42,60$, en recourant à l'algorithme de multiplication. Rébecca et Marcel ont alors activé rapidement un raisonnement les conduisant à mettre en place une solution économique, alors que pour Hélène et Guy, un étayage plus important a été jugé nécessaire. Marcel et Rébecca arrivent facilement à identifier et à traiter cette décomposition, connaissant la pertinence d'exploiter le nombre 100 et d'obtenir aisément le coût pour 50 jours. Pour sa part, Guy, qui était absent au cours précédent, a éprouvé plus de difficultés à exploiter les relations, comme le montrent les interactions suivantes:

ECH	Combien ça coûte pour 10 jours ?
GUY	426$
ECH	Pour 100 ?
GUY	4260$
ECH	Pour 150 ?
GUY	J'aurais de la difficulté à multiplier.
ECH	Ok, est-ce que 150, tu peux m'en parler autrement? S'il voulait payer en deux fois, qu'est-ce que tu pourrais me dire?
GUY	On pourrait prendre 75x2.
ECH	Oui, mais est-ce qu'on aime travailler avec ces nombres ? Est-ce que c'est plus facile? Si tu voulais trouver le produit rapidement tu choisirais combien de jours ?
GUY	100.
ECH	Et qu'est-ce qu'il lui resterait à payer?
GUY	50…ok pour 100 jours, c'est …4260$, pour 50 c'est 50 x 42,60$
ECH	Oui, mais tu sais Guy, on n'aime pas ça se compliquer la vie…Si tu regardes la relation entre ça (100 x 42,60) et ça (50 x 42,60).

GUY	Il faut faire fois 2 pour trouver pour 100 jours…donc divisé par 2? WOW!
ECH	Wow, c'est ton raisonnement mon cher. Tu n'as même pas besoin de faire ta division comme ça (algorithme : 4260|_2)
GUY	Ah non?
ECH	Ben regarde les nombres.
GUY	Ok donc 2-1-3-0…ah!
ECH	Génial ! Donc pour continuer, tu vas.
GUY	Additionner les deux, c'est ça…
ECH	Exactement
GUY	6+3, 9; ….6390

Le choix des nombres dans la décomposition de 150, comme nous avons pu le constater avec Guy, ne va pas de soi. Ce n'est, il nous semble, qu'une question d'habitude à porter une attention particulière aux nombres avant d'effectuer des calculs. Son comportement devant la division de 4260 par 2 en témoigne également. Il faut dire que Guy, dû à une arrivée tardive, ne pouvait mettre à profit les recommandations suivantes de l'enseignante, lors de l'introduction de cette situation : « *Au dernier cours, on vous avait fait faire un tableau avec les gâteaux, les boîtes et le nombre de gâteaux par boîte. On vous avait montré à observer les nombres avant de faire n'importe quoi*». Au terme des échanges entre l'étudiante-chercheure et cet élève, ce dernier fait une remarque fort intéressante et inattendue :

GUY	Ah c'est étrange, c'est (2130) la même chose que 21,30$ juste qu'il n'y a pas de virgule.
ECH	Ah tu viens de remarquer quelque chose…pour 50 et une demie… Est-ce que tu es capable d'écrire 1/2 en notation décimale?
GUY	1,2 ?
ECH	Tu n'étais pas là la semaine dernière quand on a fait les différentes représentations d'une demie… c'est bien un objet qu'on a divisé en deux et on en prend une partie, on peut l'écrire 1/2, on peut aussi l'écrire comme 5/10, on peut l'écrire de plein de façons. Tout à l'heure, tu m'as dit qu'une demie c'était plus grand ou plus petit que 1?
GUY	Plus petit.
ECH	Alors est-ce que ça se peut 1,2?
GUY	Non, ce serait point 5
ECH	Donc 0,5 ça donne 21,30$ et pour 50, ça donne 2130
GUY	Ah ben oui.
ECH	Pourquoi? T'as combien de fois ici?
GUY	C'est 100 fois dans le fond…
ECH	La relation entre 0,5 et 50 c'est bien fois 100, donc c'est normal que la réponse soit fois 100. Si tu prends 100 fois plus de jours, c'est normal que ça soit 100 fois plus cher et qu'on retrouve les mêmes chiffres.
GUY	Ayoye, wow, c'est l'fun!

La conduite inattendue de cet élève, comme le montre l'épisode précédent, retient notre intérêt. Nous remarquons que cet élève porte soudainement une attention aux relations entre les mesures. Être témoin d'un tel raisonnement constitue un levier à l'intégration harmonieuse de nos situations complexes en classe et témoigne de la pertinence de l'approche privilégiée dans ce projet. Nous aurons l'occasion de revenir sur l'influence de ce raisonnement dans la poursuite de notre projet, car nous avons tenu à reconnaître publiquement ce raisonnement. À la lecture de ces échanges, les propos prononcés par François Conne (2004), lors d'une conférence, revêtent un sens important : « Avec les élèves en difficulté, ce qui est le plus passionnant, c'est d'apprendre à se laisser surprendre ».

Martin et Prince ont également décomposé 150 en 100+50, mais ils ont recherché le coût pour 50 jours en effectuant la multiplication « 42,60 x 50 », appliquant l'algorithme usuel. Tandis que Anne, David et Bertrand, Guy et Rémi ont appliqué l'algorithme usuel de la multiplication pour trouver le produit correspondant à « 150 x 42,60 », seuls Bertrand et David ont obtenu le bon résultat. À l'exception de Bertrand qui nous fait part de sa familiarisation avec la « technique de multiplication de nombres décimaux », familiarisation qui précède l'enseignement réalisé par la suite par l'enseignante, il importe de le souligner, qu'aucun des autres élèves n'avait bénéficié d'un enseignement préalable de la multiplication de nombres décimaux, du moins au cours de l'année en cours. Les conduites de ces élèves sont alors le fruit d'une improvisation spontanée. À la suite de l'application des multiplications effectuées, aucun de ces élèves ne vérifie la pertinence des produits ainsi obtenus. Alex a traité les nombres décimaux, comme s'il s'agissait de nombres entiers (150 x 4260). Réjean, Rémi et Anne essaient de prendre en compte le traitement des parties décimales des nombres, en prenant appui sur les procédés d'addition de nombres décimaux, comme le montrent les reproductions suivantes des calculs qu'ils ont effectués.

Réjean et Rémi	Anne
42,60 x 150 000 + 21030 42600 636,3,0	150 × 42,60 000 + 900 300 600 639,00

Afin de trouver le montant associé à trois jours et demi de ski, David et Bertrand, Gael et Noa ont mis de l'avant un procédé intéressant en décomposant ainsi le nombre de jours: 3,5 = 1+1+1+0,5; une telle décomposition leur a permis d'utiliser les produits obtenus précédemment pour une journée et une demi-journée. Cependant, en faisant la somme des coûts (42,60 + 42,60 + 42,60 + 0,5 = 127,13), Bertrand et David ont commis une erreur en additionnant 0,5, soit le nombre de jours, plutôt que le coût qui lui était associé, soit 21,30$. Réjean, Gaudi, Dan, Rébecca, Hélène et Anne ont mis en place un procédé similaire, mais en exploitant des relations multiplicative et additive : 3,5 = 3x1 + 0,5, ce qui les a conduits à faire la multiplication de 3 par 42,50 et à ajouter 21,30$ au produit obtenu. Il faut dire que Rébecca, Hélène, Guy et Anne ont reçu de l'aide de l'étudiante-chercheure pour établir cette relation. Malgré cela, lors de l'addition, Anne a traité chacune des parties comme étant des entiers indépendants : 127,80 + 21,30 = 148,110. De plus, nous pensions que les relations suivantes identifiées par Guy, soit « 500→2130…½ = 0,5→21,30$... », auraient pu attirer son attention sur la présence du 0,5. Ce qui n'a pas été fait spontanément, comme le montrent les interactions suivantes, mais répondait aux questions soutenues de l'étudiante-chercheure, questions qui l'orientaient fortement vers la solution attendue, solution qu'il se montre capable de mettre en œuvre.

ECH	Ok tu vas prendre encore le temps de bien regarder les nombres pour 3,5…
GUY	Là ça veut dire que …
ECH	Est-ce que tu peux écrire 3,5 autrement, d'une autre manière ?
GUY	350? 35 ?
ECH	Ce serait 35 divisé en 10, ouais mais si tu regardes avec ce que tu as trouvé jusqu'à maintenant, tu as trouvé pour 1, pour 0,5, pour 100, pour ??…ici tu as 3,5, ça pourrait être…
GUY	…
ECH	Est-ce que tu es d'accord avec moi que 3,5 c'est 3+0,5.
GUY	Non, ah ouin ok, ça devrait pas être plutôt…3 journées plus une demie… point 5. 3 x 1 + 0,5
ECH	Tu peux le faire comme ça, ton 3,5 c'est bien 1+1+1+0,5 !
GUY	Ahh tabarouette, c'est fou, trop fou ! (il calcule) 6,12,18,21..2,4,6,8,..9, 4,8,12,14...ça fait 149,10$.
ECH	Donc tu as fini la première page!

Dans l'application de l'algorithme de multiplication, pour trouver le produit des nombres 3,5 et 42,60, Réjean et Rémi procèdent de la façon suivante :

$$\begin{array}{r} 42{,}6 \\ \underline{\text{x}\quad 3{,}5} \\ 213{,}0 \\ +\underline{1378{,}0} \\ 1591{,}0 \end{array}$$

Ces élèves associent le nombre 13 au produit des nombres 3 et 4. Ils omettent le chiffre 0 du nombre 42,60, de manière à pouvoir traiter des nombres comportant le même nombre de chiffres après la virgule, ces élèves sachant probablement que les nombres 42,60 et 42,6 sont égaux. Ils jugent pertinents d'inscrire la virgule directement dans les sous-produits : 2130 → 213,0; 13780 → 1378,0. En fait, bien qu'ils aient procédé à la multiplication, il appert que le « traitement » de la virgule ait davantage été celui de l'addition de nombres décimaux. L'importance d'inscrire des nombres comportant un même nombre de chiffres après la virgule nous apparaît aussi être une préoccupation pour Marcel.

Tous les élèves, sauf Anne[34], ont réussi à trouver le montant pour 100 jours, montant qui a été obtenu de deux différentes façons; l'algorithme a été effectué par 3 équipes et le déplacement de la virgule par 2 équipes et 6 autres élèves qui travaillaient individuellement. Les traces laissées par la plupart des élèves révèlent, selon nous, leur intention de respecter la consigne de la tâche, à savoir « rendre compte de leurs démarches ». Les élèves qui ont bénéficié des interventions de l'étudiante-chercheure, interventions leur permettant d'établir des relations entre les nombres, ont réussi à construire des solutions adéquates et à réviser leurs démarches et leurs calculs.

Les analyses précédentes rendent compte de l'importance d'amener les élèves à s'attarder aux nombres en jeu afin de choisir les opérations les plus économiques. En effet, les élèves ayant « développé cette pratique » (ex. pour 150…100…50…) réussissent davantage que ceux ayant mis de l'avant l'algorithme de multiplication. La résolution des problèmes multiplicatifs présentés antérieurement, ainsi que les diverses situations consacrées aux représentations de nombres rationnels, ont probablement

[34] Il convient de noter qu'Anne n'a pas effectué cette dernière activité.

contribué à rendre ces élèves plus attentifs aux relations entre les nombres et à mettre en place des procédés « économiques » de calcul. Il importe toutefois de souligner que, depuis leur entrée à l'école secondaire, les élèves n'avaient pas encore bénéficié d'un enseignement de l'algorithme usuel de la multiplication de nombres décimaux.

b) analyse des résultats et solutions des élèves à l'activité 1b.

Nous procédons maintenant à l'analyse des conduites des élèves et des interactions, lors de la réalisation de la seconde activité faisant partie de cette situation (Situation 1: Activité 1b) Rappelons que dans cette activité, les mesures du nombre de jours sont les mêmes que celles utilisées dans la première activité, seules les mesures des montants sont différentes, ces mesures étant 10 fois supérieures à celles utilisées dans la première activité. Mentionnons également qu'il n'y a pas eu de retour collectif sur les démarches des élèves, lors de la réalisation de la première partie. Nous pourrons ainsi mieux apprécier les relations entre les conduites utilisées par les élèves dans ces deux activités et possiblement, les progrès accomplis dans le traitement des relations entre les nombres et dans la multiplication des nombres. Enfin, puisque les élèves ont accès à leurs démarches, lors de la réalisation de la première activité, il leur est possible de s'y référer.

Dans le tableau suivant, nous avons regroupé les réponses et les solutions des élèves pour chacun des items que comporte la présente activité.

Tableau XXVIII: Appréciation des résultats et solutions des élèves à l'activité 1b

Nombre de journées	**Montants ($)**	**Réponse**	**Solutions**	**Élève**	**Appréciation des résultats A : Adéquat E : Erroné**
1	**426,00**	---	---	---	---
?	**213,00**	1/2	21,3x10	Guy ; Samuel; Gael et Noa;	A
			Aucune trace	Rébecca et Hélène	A
			On divise par 2	Réjean et Rémi	A
		2	Aucune trace	Anne	E
		0,5	Aucune trace	Gaudi	A
150	**?**	63900	6390 x 10 = 63900	Guy ; Samuel; Gaudi; Gael et Noa; Marcel	A

			150 x 426 = 63900	Rébecca et Hélène	A
			Algo : 426,00 x 150 000,00 21300,00 42600,00 63900,00	Réjean et Rémi	A
			426,00 x 100 =42600,00 *4260*÷2 = 2130 *42600,00+21300,00 = 63900,00*	Martin et Prince	A
		60900	*Algo : 426,00 x 150 = 60900*	David et Bertrand	E
		6390	*Algo :426,00 x 150 = 6390*	Anne	E
		6390000	Algo : 150 x 426,00 = 6390000	Alex	E
3,5	**?**	1491,0	149,10 x 10 = 1491	Guy ; Samuel; Gaudi; Gael et Noa; Marcel	A
			3,5 x 426=1491	Rébecca et Hélène	A
			426,00 x 3,5 = 1491,00	Réjean, Rémi	A
			426+426+426+213 = 1491	David et Bertrand	A
		149100	Algo : 3,5 x 426	Alex	E
		1488,9	Algo : 426,00 x 3,5	Martin et Prince	E
		1485	3 x 426 = 1272+213=1485	Anne	E
100	**?**	42600	4260 x 10 = 42600	Guy ; Samuel; Gaudi; Gael et Noa : Marcel	A
			100 x 426,00 = 42600	Karine; Jesica et Hélène; Réjean et Rémi; Alex Anne, David et Bertrand	A
			Algo : 426,00 x 100	Martin et Prince,	A

Le taux de réussite de cette tâche est fortement comparable à celui de la tâche précédente (voir le tableau précédent). Et pour cause, plusieurs élèves se sont appuyés sur les résultats obtenus à la tâche précédente pour trouver de façon plus économique les données manquantes du 2e tableau. Ce qui n'est pas surprenant, compte tenu que la seule modification concernait le prix d'un billet, et que cette relation demandait un simple réajustement du produit précédent, ce qu'ont fait correctement Guy, Samuel, Gaudi, Gael et Noa, Marcel, Rébecca et Hélène. Rébecca semble avoir bénéficié des interventions de l'étudiante-chercheure, lors de la rencontre du 5 février, qui l'avait questionnée sur l'influence de la relation entre les données figurant dans l'un et l'autre des tableaux. En effet, bien qu'Hélène et Rébecca aient inscrit chaque fois la multiplication à titre de solution, aucun calcul n'est effectué. Il semble qu'elles aient simplement traduit la situation et multiplié par 10 chacun des résultats apparaissant au tableau qu'elles avaient complété lors de l'activité précédente. Par ailleurs, Réjean et Rémi n'ont pas eu recours à l'algorithme usuel pour effectuer les deux dernières multiplications, soit 426 x 3,5 et 426 x 100. Nous pouvons à ce moment supposer qu'ils ont perçu la relation avec les résultats obtenus pour 42,60$. En ce qui concerne Martin et Prince, nous pouvons apprécier l'évolution de leur démarche, qui pour 150 jours, n'ont pas, cette fois-ci, effectué la multiplication par 50, mais ont divisé le produit obtenu pour 100 jours par 2. De son côté, Anne a eu recours à une démarche pertinente, mais a commis une erreur de calcul. Bertrand et David ont aussi réussi à trouver le montant adéquat pour 3,5 jours, ce qui n'avait pas été le cas lors de la tâche précédente. Ils ont effectué la même décomposition et ont transcrit : 426+426+426+213 = 1491. Tout comme dans la complétion du tableau précédent, Anne et Alex ont produit des erreurs similaires; Anne a inscrit un résultat 10 fois plus petit pour 150 jours, alors qu'Alex a obtenu des résultats 100 fois trop grands pour 150 et 3,5 jours. David et Bertrand ont aussi commis une erreur dans l'application de l'algorithme. Martin et Prince ont enfin associé le nombre 15 à « 3 x 6 », ce qu'il leur a valu le montant erroné de 1488,0$ pour 3,5 jours. Il nous semble enfin étonnant que quelques élèves seulement utilisent le nombre entier 426 : est-ce pour tenir compte du contexte?; est-ce plutôt pour se conformer à l'écriture décimale présentée?

4.2.5.2. Situation sur l'algorithme de multiplication de nombres décimaux

Au terme de la première situation, comme nous l'avons indiqué précédemment, il nous est apparu particulièrement pertinent de « ré-introduire » la situation sur l'algorithme usuel de multiplication de nombres décimaux, pour tenir compte de la planification de l'enseignante. Comme nous l'avons indiqué précédemment, au cours des périodes d'enseignement du 5 février, les élèves n'ont pas réalisé l'activité visant à donner sens au « déplacement de la virgule » qui permet de transformer le nombre entier en nombre décimal, lors de l'application de l'algorithme usuel de la multiplication de nombres décimaux. Nous avons repris simplement l'activité initiale en changeant le contexte.

Cette situation nous semblait d'autant plus pertinente que les tâches faisaient appel à plusieurs connaissances et relations qui avaient été « des objets sensibles » au cours de la situation précédente : a) relations multiplicatives entre différents nombres décimaux, nombres comportant ou non le même nombre de chiffres après la virgule; b) prise en compte des parties décimales des nombres dans l'écriture des produits, nombres comportant ou non un même nombre de chiffres après la virgule; c) intérêt de l'estimation des produits de nombres décimaux dans l'appréciation des produits résultant de l'application de l'algorithme de la multiplication.

Nous reproduisons la situation soumise aux élèves. Nous présentons d'abord les résultats et les démarches des élèves, puis rendons compte du retour collectif sur les conduites des élèves.

Situation 2 :
Sachant que le prix d'un billet pour une journée d'accès à la patinoire au Lac des Castors était de 4,26$, Philippe voulait faire le calcul pour 3,5 jours et voici ce qu'il a fait :

$$\begin{array}{rr} & 1 \\ & 1\,3 \\ & \mathbf{426} \\ \times & \underline{\mathbf{35}} \\ & 2130 \\ + & \underline{1278\_} \\ & 14910 \end{array}$$

Les calculs faits par Philippe sont parfaits mais sa démarche est incomplète. Peux-tu la terminer ?

Le produit qu'il a obtenu est combien de fois plus élevé que celui qu'il aurait dû obtenir?

La majorité des élèves (Prince et Martin, Noa et Gael, Samuel, Marcel, Rébecca, Hélène, Anne, Rémi, Gaudi et Réjean) ont bien complété la démarche de Philippe (première question). Certains ont ajouté adéquatement les virgules au multiplicande, au multiplicateur et au produit, alors que d'autres les ont simplement ajoutées au produit. Le peu de traces sur les productions de Marcel, Martin et Prince, Gael et Noa nous porte à croire qu'ils ont effectué le « décompte des chiffres après la virgule », afin de positionner la virgule dans le produit final; il est peu probable qu'ils aient eu recours à l'estimation pour effectuer ce positionnement, mais nous ne disposons pas d'informations suffisantes pour valider cette interprétation. L'attitude de Bertrand est représentative de celle de bons nombres d'élèves de la classe. Nous pouvons constater dans l'extrait suivant que le recours à la technique de « déplacement des virgules » est la démarche privilégiée, sans qu'il y ait pour autant un sens accordé à ces manipulations. L'étudiante-chercheure a donc procédé à une segmentation de l'influence du multiplicande et du multiplicateur sur le produit et adressé des questions à cet élève. Comme le montrent les interactions suivantes, l'élève est en mesure de donner sens, au fur et à mesure, aux questions qui lui sont adressées par l'étudiante-chercheure. Il peut alors s'appuyer sur les relations entre les nombres pour évaluer l'effet de la transformation des nombres décimaux en nombres entiers par élimination simple des virgules. Il se révèle également capable d'apprécier les effets combinés des transformations apportées au multiplicande et au multiplicateur sur les produits qui en résultent.

BERTRAND	Pourquoi ils mettent 35 au lieu de 3,5?
ECH	Commence par tes tableaux…parce que tu vois ici, le prix pour une journée est de 4,26$, lui il l'a fait comme ça sans mettre ses virgules.
BERTRAND	Donc ici ça va être comme ça après…
ECH	Comment tu le sais?
BERTRAND	Parce qu'ici c'est 2..euh non non , c'est 1….il y a un chiffre après la virgule, est-ce que c'est bon? Oui? c'est bon, c'est pas bon?
ECH	Est-ce que tu as pris le temps de t'arrêter et de réfléchir?
BERTRAND	Non, j'ai juste regardé les virgules
ECH	Bon si tu regardes ici…il a pris un billet combien de fois trop cher? Toi est-ce que tu aimerais mieux payer un billet de 4,26$ ou 426$?
BERTRAND	4,26$
ECH	Donc il a pris un billet beaucoup trop cher, combien de fois?
BERTRAND	J'pense 100 fois…
ECH	Et ici, au lieu de prendre pour 3,5 jours, il a pris pour 35 jours, donc combien de fois trop?
BERTRAND	10 fois. Ah ok, je vais juste rajouter…j'ai compris.
ECH	Ok alors s'il avait pris des billets à 4,26$ mais pour 35 journées, son produit, son résultat serait combien de fois trop cher?
BERTRAND	Euh…3,5…
ECH	Admettons il a pris 4,26 x 35 et a obtenu 149,10$
BERTRAND	….10 ?
ECH	donc ça réponse va être …
BERTRAND	10 fois plus alors il faut faire divise par 10?
ECH	Voilà!
BERTRAND	Merci!
ECH	Là tu as pris pour 35 jours, mais là si tu regardes il a pris…
BERTRAND	100 fois plus cher…10 fois trop de billets.
ECH	Donc son résultat va être combien de fois trop grand?
BERTRAND	426 000$...euh attends, c'est ça?...non non ils ont déjà ajouté hein? Attends…ça c'est déjà ajouté.
ECH	Oui!
BERTRAND	1000 fois…ah c'est ça?
ECH	Oui, donc qu'est ce que tu vas devoir faire pour trouver le bon résultat à partir de celui-ci
BERTRAND	Diviser par 1000… (14 910 ÷ 1000) 14.
ECH :	Et ici on te demande .. .combien de fois…
BERTRAND :	1000 fois
ECH :	Explique pourquoi le 1000 fois

BERTRAND :	On a additionné 100 fois d'une journée…et 10 fois du billet…

La plupart des élèves ont répondu correctement à la seconde question : « Le produit qu'il a obtenu est combien de fois plus élevé que celui qu'il aurait dû obtenir ? » Marcel a répondu 3, cette réponse étant directement reliée à la technique apprise, au nombre de positions pour lequel il fallait déplacer la virgule. Le retour collectif sur les conduites des élèves nous permet d'apprécier les démarches de certains élèves.

Retour collectif sur la situation2

ECH	Je me suis promenée dans les diverses équipes et j'ai trouvé qu'il y avait des raisonnements vraiment intéressants. Il y en avait qui avaient déjà appris certaines procédures d'autres non; ça été vraiment intéressant. Donc j'aimerais qu'on revienne sur la façon de le faire, plus particulièrement sur la situation 2. En fait, on dit que …sachant que … Philippe voulait…quel calcul il aurait dû faire?
MARCEL	Ah je le sais.
MIC	4,26 x 3,5
MARCEL	Mais il a fait fois 35.
ECH	Si on regarde, Philippe a fait 426 x 35.
MARCEL	Yé pas intelligent.
ECH	Au contraire…lui il a dit des virgules, ça…ne lui tente pas de s'embêter avec ça. Donc il s'est dit je vais juste prendre des nombres entiers et j'ajusterai ma réponse à la fin. Donc on va essayer de comprendre comment il a fait.
MARCEL	Mais 4,26$, c'est mieux 4,26 par exemple hein?
ECH	Sa réponse va être combien fois trop grande par rapport celle-là?
Élèves	100, 1000 (plusieurs élèves faisant référence à 426 x 35, tandis que d'autres se limitaient à 4,26 x 35)
GAEL	10
ECH	On va prendre les paris. Si au lieu 4,26 x 3,5 on a 4,26 x 35.
Élèves	100,10 .
ECH	Qui dit 10?
	Plusieurs élèves lèvent la main, dont GAEL
ECH	Donc vous pensez que parce qu'il a pris dix fois plus de jours, le montant va être 10 fois plus grand.
GAEL	Oui, ben en prenant plus de jours ça va prendre en plus d'argent, ça va coûter plus cher.

Les conduites des élèves au cours de cette situation sont jugées par l'enseignante et les chercheures « propices » à une entrée plus ciblée sur les procédés de multiplication de nombres décimaux.

4.2.6. Activités sur la multiplication de nombres décimaux

À la suite des activités présentées les 5 et 8 février sur le sens de la multiplication des décimaux, l'enseignante suggère de procéder, dans un premier temps, à la construction des notes de cours et, dans un deuxième temps, à la réalisation d'exercices. Nous accueillons favorablement la proposition de l'enseignante et nous lui proposons de l'accompagner dans son enseignement qui a lieu le 12 février.

Nous procédons à une analyse des conduites des élèves lors de la construction des notes de cours et lors de la réalisation des exercices permettant aux élèves de « montrer » les apprentissages qu'ils ont réalisés.

Analyse des conduites et des interactions lors de la construction des notes de cours et la réalisation d'exercices sur la multiplication de nombres décimaux

Tel que mentionné précédemment, quelques élèves avaient été initiés à la technique de multiplication des nombres décimaux, selon laquelle, il faut compter le nombre de chiffres après la virgule du multiplicande et du multiplicateur et reporter la virgule dans le produit en tenant compte de ce nombre. Ainsi, lors de la construction des notes de cours, l'enseignante insiste sur l'importance de comprendre le sens de ces manipulations. Pour ce faire, elle leur propose de multiplier 12,6 par 6,35, en détaillant chacune des étapes à respecter de la façon suivante:

ENS	Premièrement, qu'est-ce qu'on doit faire quand on multiplie des nombres décimaux ?
GAEL	On ne l'avait pas déjà fait ça?
MARCEL	Ah! Je le sais. On multiplie sans les nombres à virgule
ENS	On l'a travaillée, mais on n'a pas pris les notes de cours. [Elle écrit au tableau : Changer la multiplication pour n'avoir que des entiers.]
ENS	Mathématiquement, on n'a pas le droit d'enlever les virgules. Pour les enlever, je dois faire une opération mathématique.
SAMUEL, GAEL	On va multiplier 6,35 par 100, ça va nous donner 635.
ENS	Et 12,6?
MARCEL	Par 100
ENS	Ben il va falloir que tu tasses une fois et que tu ajoutes un zéro…c'est faisable, tu as le droit mais tu vas te compliquer la vie…
ALEX	50?
ANT	Par 10, ça donne 126.
[…]	
GAEL	[s'adressant à l'enseignante] C'est parce que tu as oublié les virgules. c'est pour ça que ça ne marchera pas!
ENS	Ok, alors quelle opération je dois faire pour revenir à ce que je voulais .
SAMUEL	10 fois 100.
ENS	J'ai multiplié par 1000, donc ici je vais devoir …
BERTRAND	Tasser de 3 virgules.

ENS	Je ne veux pas entendre parler de virgules![35] Je vais devoir diviser par 1000. 10 fois 100, c'est comme si j'avais pris 1000 fois trop, maintenant je peux réécrire ma réponse ici.
MARCEL	Comme dans l'exemple de l'autre jour avec les billets.
ECH	Oui c'est la même chose!
ENS	Et je vais devoir diviser par 1000, j'ai 3 zéros, je tasse donc ma virgule de …
MARCEL	3 positions.
ENS	Donc j'obtiens 80 \$ et 1 sous.
Élèves	Tout ça pour ça?
ENS	Et oui! Il y en a qui ont des petits trucs, mais le danger avec les raccourcis, c'est que tu ne t'en souviens pas. Là je vous ai montré une démarche qui est tout à fait logique pour faire une multiplication de décimaux, pour que vous compreniez!

L'enseignante procède ensuite minutieusement à l'application de l'algorithme de multiplication pour le produit des nombres 635 et 126, en s'appuyant sur la valeur de position pour expliquer « l'ajout de zéros » dans les sous-produits et sur la décomposition des nombres pour expliquer la somme des sous-produits, ce qui n'était pas maîtrisé par tous les élèves. Ainsi, au terme de ce travail, les élèves inscrivent dans leurs notes de cours la démarche suivante :

1- Changer la multiplication pour n'avoir $\boxed{\text{que}}$ des entiers.

Ex.1.

$$\begin{array}{rcr} 6{,}35 & \xrightarrow{\times 100} & 635 \\ \times\ \underline{12{,}6} & \xrightarrow{\times 10} & \times\ \underline{126} \\ & & 3810 \\ & & +\ 12700 \\ & & \underline{63500} \\ 80{,}010 & \xleftarrow{\div 1000} & 80010 \end{array}$$

À la suite de cet exemple, elle propose aux élèves d'effectuer seul un 2^e exemple, soit 0,984 x 0,195. Quelques élèves éprouvent des difficultés. Par exemple, voulant qu'une virgule ne soit plus inscrite entre deux chiffres pour ainsi pourvoir considérer les nombres comme des entiers, Rémi a procédé ainsi : 0,984 x 10 → 984; 0,195 x 10 → 195. De même, Rébecca a multiplié les nombres 984 et 195, obtenant alors 0191 880; elle inscrit le résultat 019,1880 ayant déplacé de trois positions à partir de la gauche. De son côté, Alex se demande s'il faut diviser par 2000 (1000+1000) ou par 1000 le produit de 984 par 195, afin de retrouver la solution du calcul original. De prime abord, les conduites de ces élèves sont étonnantes; lors des situations précédentes de résolution de problèmes multiplicatifs, ces élèves avaient mis à profit les relations multiplicatives entre

[35] Il nous apparaît pertinent de relever que l'enseignement envisagé par l'enseignante, avant la présentation des problèmes multiplicatifs, était bien de montrer la prise en compte des virgules dans l'algorithme de multiplication de nombres décimaux.

des nombres décimaux et des nombres naturels composés des mêmes chiffres pour passer d'un produit à l'autre (ex. : 4,26 x 3,5 vs 426 x 35); soulignons toutefois que ces problèmes n'induisaient pas un rapport techniciste à la multiplication, ce qui n'est pas le cas, dans la situation actuelle consacrée à l'enseignement de l'algorithme de multiplication. Préoccupée par les conduites problématiques de certains élèves, lors du retour collectif sur cette multiplication, l'enseignante apporte les précisions suivantes :

ENS	Si vous doutez, ce que vous pouvez faire, c'est d'annuler en deux fois vos transformations. Si vous n'êtes pas sûrs s'il faut additionner ou multiplier, vous pouvez l'annuler en deux coups. Mais de toute façon est-ce que les chiffres devraient changer entre la multiplication de 6,35 par 12,6 et 635 par 126?
Élèves	Non.
ENS	Alors il est impossible que l'on divise par 2000. Tout ce qu'on veut faire bouger après, c'est la virgule. On veut la faire bouger de façon à ce qu'on revienne à notre réponse du calcul initial.

Afin d'offrir aux élèves un autre moyen leur permettant de juger de l'adéquation de leur résultat, l'enseignante les interroge également sur le produit attendu si l'on procède à l'estimation du multiplicateur et du multiplicande. Enfin, ils reprennent au complet l'exemple que les élèves ont construit [*ENS : ok j'ai fait la multiplication, par combien est-ce que je vais devoir diviser?; Samuel : 1000x1000, 1 000 000; etc.*] et le retranscrivent dans leurs notes de cours :

Ex.2.

$$\begin{array}{rcr} 0{,}984 & \xrightarrow{\times 1000} & 984 \\ \times\ \underline{0{,}195} & \xrightarrow{\times 1000} & \times\,\underline{195} \\ & & 4920 \\ & & +\ 88560 \\ & & \underline{098400} \\ 0{,}191880 & \xleftarrow{\div 1000000} & 191880 \end{array}$$

Les exemples 1 et 2 choisis par l'enseignante ne sont pas le fruit du hasard. En effet, il est rarement demandé aux élèves, du moins aux élèves présentant des difficultés d'apprentissage, d'effectuer des opérations sur des nombres décimaux ne comportant pas le même nombre de chiffres après la virgule, alors que cela permet effectivement de mettre l'accent sur la valeur de position, comme le montre le premier exemple. Cet exemple a aussi permis à l'enseignante de revenir sur la procédure proposée par Rébecca

(8 février) et de faire bénéficier tous les élèves de l'examen de cette procédure. Rébecca avait alors proposé d'ajouter autant de zéros qu'il était nécessaire, afin d'obtenir le même nombre de chiffres dans « la partie décimale » du multiplicande et du multiplicateur avant d'effectuer l'algorithme de la multiplication. Pour examiner cette proposition, plutôt que de montrer l'inutilité d'une telle transformation, l'enseignante a eu recours, dans l'exemple 1, à la multiplication des nombres : 6,35 et 12,6. L'enseignante a de plus ajouté un exemple plus « standard », afin de traiter la confusion de plusieurs élèves en ce qui concerne le traitement de la virgule dans l'addition versus celui qui est requis dans la multiplication de nombres décimaux, comme le montre le second exemple (Ex.2.) Le choix des nombres permettait, par la même occasion, d'offrir à Marcel une situation dans laquelle il fallait effectivement multiplier les deux nombres par le même opérateur scalaire.

Il s'agissait de la première explicitation formelle et complète de la multiplication des décimaux, après la réalisation de diverses activités liées à cet objet de savoir. Cette chronologie (situations-problèmes, mise en place de diverses démarches de calcul, procédés usuels de calcul) n'est pas usuelle auprès des élèves en difficultés d'apprentissage, comme le montre l'étude effectuée par Giroux et De Cotret (2003) et l'atteste l'enseignante, dans notre recherche. Nous remarquons conjointement une modification de la topogénèse des savoirs. En effet, c'est la première fois que ces élèves sont amenés à construire leurs notes de cours, contrairement aux pratiques courantes, où ils sont initiés, dès le début d'un nouvel apprentissage, à recopier des notes inscrites au tableau, afin de les utiliser ultérieurement dans divers exercices.

L'enseignante invite ensuite les élèves à faire les exercices suivants en équipes, en précisant qu'ils doivent effectuer le premier numéro en respectant la démarche qui a été présentée dans les exemples des notes de cours. Précisons que ces exercices ont été préparés par l'enseignante à l'aide du logiciel Excel.

1- Place la virgule au bon endroit en utilisant l'estimation

Arrondissement

a)	6,35	x	12,6	≈	(________________) =	80010
b)	2,93	x	10,44	≈	(________________) =	305892
c)	87,1	x	8,34	≈	(________________) =	726414
d)	103,1	x	4,35	≈	(________________) =	448485
e)	0,984	x	0,195	≈	(________________) =	191880
f)	100,1	x	5,25	≈	(________________) =	525525
g)	31,8	x	3,18	≈	(________________) =	101124
h)	83,7	x	83,1	≈	(________________) =	695547
i)	1,35	x	7,87	≈	(________________) =	106245
j)	92,7	x	6,23	≈	(________________) =	577521
k)	44,4	x	19,3	≈	(________________) =	85692
I)	5,31	x	96,6	≈	(________________) =	512946
m)	0,722	x	3,79	≈	(________________) =	273638
n)	107	x	13,9	≈	(________________) =	148730
o)	0,359	x	623	≈	(________________) =	223657

2- Place la virgule au bon endroit en comptant le nombre de chiffres après la virgule

					Nombre de chiffres après la virgule	
a)	0,561	x	344	=	(________________)	192984
b)	4,6	x	4,79	=	(________________)	220340
c)	0,972	x	0,54	=	(________________)	524880
d)	18,7	x	3,67	=	(________________)	68629
e)	82,6	x	5,53	=	(________________)	456778
f)	0,48	x	9,87	=	(________________)	473760
g)	6,76	x	88,6	=	(________________)	598936
h)	8,79	x	9,07	=	(________________)	797253
i)	788	x	5,49	=	(________________)	432612
j)	10,33	x	31,1	=	(________________)	321263
k)	92	x	81,7	=	(________________)	751640
I)	35,7	x	109,9	=	(________________)	392343
m)	71,2	x	34,9	=	(________________)	248488
n)	0,776	x	109,7	=	(________________)	851272
o)	4,1	x	73,7	=	(________________)	302170

3- Place la virgule au bon endroit

a)	54,6	x	103,6	=	565656
b)	73,8	x	67,3	=	496674
c)	0,402	x	866	=	348132
d)	6,56	x	9,95	=	652720
e)	7,43	x	1003	=	745229
f)	9,12	x	57,2	=	521664
g)	0,967	x	9,66	=	934122
h)	15,4	x	30	=	46200
i)	0,901	x	4,72	=	425272
j)	9,71	x	81,7	=	793307
k)	98	x	98,6	=	966280
l)	3,66	x	4,03	=	147498
m)	54,7	x	23,9	=	130733
n)	57,6	x	35,6	=	205056
o)	1,025	x	14,6	=	149650

4- Effectue les calculs

a)	26,4	x	1,7	=	_____________
b)	1,047	x	0,483	=	_____________
c)	0,757	x	12,9	=	_____________
d)	7,08	x	109,3	=	_____________
e)	9,48	x	97,7	=	_____________
f)	957	x	3,17	=	_____________
g)	1,86	x	10,32	=	_____________
h)	28	x	0,641	=	_____________
i)	8,94	x	14	=	_____________
j)	8,56	x	100,4	=	_____________
k)	4,24	x	0,454	=	_____________
l)	9,78	x	10,98	=	_____________
m)	109	x	42,3	=	_____________
n)	42,1	x	4,25	=	_____________
o)	660	x	43,4	=	_____________

Lors de la réalisation de ces exercices, les élèves réussissent majoritairement bien**.** Nous ne ferons état que de quelques difficultés et remarques que nous avons jugées pertinentes. Au premier numéro, certains élèves ont éprouvé de la difficulté avec l'arrondissement, alors que d'autres trouvaient les exigences de l'enseignante inutiles, car ils pouvaient trouver aisément la réponse avec l'estimation ou le « décompte » des virgules. Par exemple, Marcel interroge l'étudiante-chercheure, pour le numéro 1a, afin de savoir s'il aurait été possible d'arriver au bon résultat simplement en arrondissant. Celle-ci lui dit que ce procédé ne donne pas la valeur exacte, mais permet effectivement de vérifier la pertinence du résultat obtenu. Ainsi, au numéro suivant, 1b), il reconnaît directement l'emplacement de la virgule dans 726414 pour la multiplication de 87,1 par 8,34 en faisant 90 fois 8. Au numéro 4a, Marcel effectue l'estimation de 26,4 x 1,7 en utilisant 30 x 2 = 60, afin de vérifier son résultat : « 60 ce n'est pas proche de 44,88 ». Afin de permettre à Marcel de comprendre qu'il ne s'agit là que d'un ordre de grandeur, l'étudiante-chercheure lui propose de s'attarder aux valeurs de position. Marcel se rend enfin compte que 26 est plus près de 25 et que par conséquent l'estimation avec ce nombre sera plus près du résultat attendu.

De leur côté, Prince ou Martin font intervenir l'enseignante suite à leur désaccord en ce qui concerne la multiplication de 1,025 x 14,6, l'un d'entre eux ayant obtenu 149,650 et l'autre 14,9650. L'enseignante leur demande alors d'effectuer l'estimation afin de faire leur choix par eux-mêmes. Cette réaction montre bien un effet de l'évolution du processus d'acculturation chez l'enseignante.

Quant à Rémi, lors de la multiplication de 7,08 x 109,3, il applique l'algorithme de la façon suivante :

$$\begin{array}{r} {}^{6\,7}\\ 708 \\ \times\ 1093 \\ \hline \ldots \\ 6932 \\ \ldots \end{array}$$

Nous remarquons alors qu'il effectue correctement la multiplication de 9 par 8. Cependant, lorsque vient le temps de traiter 9 x 0 + 7, Rémi effectue, 9 x 0 = 0 ; 9 x 7 = 63. L'étudiante-chercheure intervient en lui demandant la valeur de la « retenue 7 ». Il reconnaît alors que « c'est 7 dizaines …ah donc 70! ». L'étudiante-chercheure reprend alors les explications de l'enseignante en décomposant les nombres, afin de lui permettre de considérer la valeur de position et le fait qu'il devait ajouter et non multiplier cette valeur.

Enfin, une erreur s'étant glissée dans le document, les élèves ont majoritairement inscrit 47,3760 comme réponse à la multiplication 0,48 x 9,87 (2f) en s'appuyant sur le « décompte du nombre de chiffres après la virgule ». L'enseignante ne manquera pas cette opportunité pour souligner à nouveau aux élèves l'importance de l'estimation.

Après quelques minutes, l'enseignante demande aux élèves de passer directement au numéro 4 pour pratiquer « la multiplication ». À ce moment, ils peuvent utiliser la méthode de leur choix, du moment qu'ils la comprennent et qu'ils puissent reproduire celle montrée par l'enseignante. Comme nous le constatons dans l'extrait ci-dessous, extrait rendant compte des interactions entre l'étudiante-chercheure et un élève, à la suite de la réalisation du calcul présenté à l'item b, bien que les élèves réussissent à exploiter leur méthode, certains ne peuvent donner sens à leur calcul :

ECH	Est-ce que tu penses que ta réponse pour 1,047 fois 0,483 a du sens? Est-ce que ça du sens que ça donne 0,5…?
BERTRAND	Non, parce qu'il y en a un (dans 1,047) ici après la virgule déjà.
ECH	Donc tu penses que tu devrais avoir un entier dans ta réponse?
BERTRAND	Oui.
ECH	Pour avoir un entier comme réponse il faudrait que tu aies minimalement 1 fois combien ?
BERTRAND	…
ECH	Attends on va l'écrire autrement. Si on fait l'estimation, le 1,047 c'est à peu près quel nombre?
BERTRAND	1
ECH	Et 0,483?
BERTRAND	Estime combien?…pour un entier?
ECH	Non, mais si au lieu de dire 483 millièmes ou 0,483, estime ce nombre-là, ça donne à peu près combien?
BERTRAND	Non, mais combien quoi?
ECH	Combien de dixièmes par exemple?
BERTRAND	5
ECH	Oui, 0,5. Et 1 x 0,5, ça donne.
BERTRAND	1 euh non la même chose.
ECH	Donc est-ce que ta réponse a du sens?
BERTRAND	Oui.
ECH	0,5, est-ce que tu es capable de l'écrire sous forme de fraction?
BERTRAND	½…1/2 de 1 .
ECH	C'est ça la moitié de 1 donc ton 0,5 il est bon.
BERTRAND	Ah ok! Alors pourquoi tu m'as dit que c'est pas bon…
ECH	Non, je voulais que tu sois sûr et que tu m'expliques pourquoi.

Dans cet extrait, nous remarquons que Bertrand n'échappe pas aux difficultés soulevées dans la littérature, selon lesquelles, il est difficile d'admettre que le produit sera inférieur à l'un des nombres impliqués dans la multiplication. Nous pouvons aussi constater que la difficulté que cet élève rencontre dans l'estimation réside dans l'ordre de grandeur de l'estimation et que ce moyen n'occupe pas un statut privilégié pour cet élève :

BERTRAND	Est-ce que c'est bon [12,9 x 0,757 = 9,7653]?
ECH	On va faire quelque chose : c'est toi qui vas me dire si c'est bon.
BERTRAND	1,2,3,4…1,2,3,4…oui c'est bon!
ECH	Est-ce que tu pourrais utiliser un autre moyen pour te corriger?
BERTRAND	Non c'est plus facile.
ECH	C'est normal, tu utilises le même moyen […] regarde les nombres que tu as ici, est-ce que tu peux trouver un autre moyen?

BERTRAND	Je ne suis pas sûr…fois 0,8.
ECH	Encore plus facile, 0 virgule 8 c'est proche de quel nombre?
BERTRAND	0, 10 … 1
ECH	et 12,9?
BERTRAND	13…1x13 =13
ECH	Donc est-ce que 13 aurait du bon sens ou 1,…. Ou 130…Donc est-ce que 10 ça du bon sens ?
BERTRAND	Oui
ECH	On devrait être dans le bon ordre de grandeur car on a multiplié des dizaines par des dixièmes.

Dans un autre ordre d'idées, l'étudiante-chercheure profite du fait qu'un élève a terminé son travail pour lui proposer d'expliciter les écritures suivantes qu'elle inscrit au tableau :

$$
\begin{aligned}
635 \times 126 &= 80010 \\
6,35 \times 12,6 &= 635 \div 100 \times 126 \div 10 \\
&= 635 \times 126 \div 1000 \\
&= 80010 \div 1000 \\
&= 80,010
\end{aligned}
$$

ECH	Si tu avais à expliquer pourquoi une personne a écrit ça, est-ce que tu comprends? Elle est partie de 635 x 126, ça lui a donné 80010 et en-dessous…
GAUDI	J'ai compris ce qu'elle a écrit. Ben dans le fond, c'est pratiquement la même mais en plus compliqué parce que 6,35 ça va être la même chose que si on fait la division (635 ÷ 100) et aussi pour 12,6. Donc ça revient au même calcul à la fin en tout cas le même résultat mais juste en plus long.
ECH	Mais est-ce que tu comprends pourquoi la personne à la 3e ligne a écrit 635 fois 126 divisé en 1000.
GAUDI	Je comprends exactement. Je trouve que c'est 2 phrases mathématiques qui se ressemblent, tu fais la même affaire (parle du ÷ 100 et du ÷ 10 qui équivaut au ÷ 1000).
ECH	Super!

Devant ce raisonnement, l'étudiante-chercheure décide de le présenter à l'enseignante. Bien que l'enseignante ait fait des adaptations considérables pour l'enseignement de la multiplication des décimaux, une telle présentation lui semble hors de la portée de ses élèves :

ENS	Ça juste Samuel pourrait comprendre ça.
ECH	Mais c'est la même chose que l'on a fait. Ils peuvent voir l'équivalent mais en écriture.
ENS	Oui, mais juste qu'il y en a plein qui ne suivront pas.
ECH	C'est important dans la mesure où ils peuvent comprendre qu'on se sert de la réponse de la multiplication des nombres entiers et voient les transformations effectuées… ça leur donnerait une entrée de plus.

Évolution des rapports des élèves aux nombres rationnels et aux mathématiques, ainsi que de la démarche d'acculturation institutionnelle de l'enseignante, des chercheures et des élèves

Ce qui nous étonne davantage est sans contredit l'adaptation de l'enseignante, non seulement quant à la structuration de la séquence d'enseignement de la multiplication des décimaux, mais également dans la construction des notes de cours qui, rappelons-le, étaient initialement les suivantes:

a. Pour multiplier deux nombres décimaux, tu fais la multiplication sans tenir compte des virgules
b. Tu comptes le nombre de chiffres après la virgule
c. En commençant par la gauche, place la virgule d'autant de position qu'il y a de chiffres après la virgule.
*** Tu peux t'aider en faisant l'estimation du produit sans la partie décimale

Quelle a été notre surprise devant la nouvelle proposition de l'enseignante qui décide, seule, d'amalgamer ce qui a été fait précédemment. Cette évolution est si marquée que l'enseignante réprimande ceux qui recourent uniquement au « décompte des chiffres après la virgule ». Il semble que l'apport des contextes précédents (gâteau/boîte, billet de ski/journée) ait convaincu l'enseignante de la pertinence et surtout de la faisabilité d'un tel apprentissage par ses élèves. D'ailleurs, elle nous confie spontanément apprécier notre travail de collaboration : « J'aime ça faire ça, merci! ».

4.2.7. Poursuite des activités sur la résolution de problèmes multiplicatifs impliquant des nombres rationnels

Donner sens aux procédés de multiplication et de division de nombres rationnels et résoudre des problèmes multiplicatifs impliquant de tels nombres constituent des défis importants auxquels sont confrontés tous les élèves, notamment, les élèves présentant des difficultés d'apprentissage. Pour cette raison, lors de la rencontre du 13 février, il nous est apparu essentiel de poursuivre le travail effectué au cours des périodes précédentes. Nous avons d'abord jugé pertinent de faire un retour sur l'observation effectuée par l'élève Guy, lors de la résolution du problème multiplicatif présenté la semaine précédente. L'enseignante a ensuite soumis aux élèves un petit quizz sur la multiplication et la division de nombres décimaux, puisé dans le manuel Perspective (Guay, Hamel et

Lemay, 2005), pour « avoir un pouls de la classe », ainsi que des problèmes et exercices provenant du manuel.

4.2.7.1. Analyse des conduites et des interactions lors de la réalisation des activités suivantes : retour sur la résolution du problème multiplicatif; complétion du quizz sur la multiplication et la division de nombres décimaux

La résolution du problème multiplicatif présenté la semaine précédente a donné lieu, comme nous en avons fait état à la section précédente, à de multiples échanges entre les élèves, l'enseignante, l'étudiante-chercheure et la chercheure. Comme nous l'avons indiqué précédemment, il nous est apparu important de soumettre aux élèves une observation effectuée par Guy. Ainsi, après avoir calculé les coûts engendrés par l'achat d'un billet de ski pour ½ journée et pour 50 jours, cet élève avait remarqué que les chiffres composant les sommes étaient les mêmes (21,30$ et 2130$). Nous tenions à reconnaître publiquement cette prise en compte spontanée des relations entre les nombres, d'autant plus que ces propos émanaient d'un élève qui prenait rarement une telle initiative, compte tenu de sa tendance à se réfugier dans l'application d'algorithmes et à limiter ses démarches mathématiques à celles proposées par l'enseignante. De plus, étant donné le laps de temps écoulé depuis cette manifestation, nous trouvions opportun de la rendre publique, estimant que la réalisation des activités sur la multiplication de décimaux et sur la résolution de problèmes, activités proposées par l'enseignante et faisant suite à cette activité, pourraient bénéficier des connaissances évoquées lors de ce retour. Nous reproduisons et examinons les échanges auxquels a donné lieu ce retour.

ECH	J'aimerais que l'on revienne sur une question qui a été posée par un élève de la classe qui avait remarqué que c'était les mêmes chiffres qui apparaissaient pour ½ journée et 50 journées, est-ce que vous êtes capables d'expliquer pourquoi?
RÉBECCA	Parce que 50 c'est la moitié de 100.
GUY	50 c'est la demie de 100.
ECH	Oui, Rémi.
RÉMI	Parce que lui a une virgule et l'autre n'a pas de virgule?
MARCEL	Parce que 1/2 c'est la même chose que 50…50 sur 100 et 21, …ils ont oublié de mettre la virgule mais c'est la même chose.
ECH	Donc Marcel nous a dit que ½ c'était la même chose que 50/100.
SAMUEL	Parce que ½ c'est 0,50 alors la différence est de 100 fois plus ?
ECH	Alors Samuel nous dit que ½ c'est la même chose que 0,5 donc je peux écrire.
SAMUEL	0,5 x 42,60, ça va nous donner 21,30.
ECH	Et il ajoute que la relation entre 0,5 et 50 est de 100.
GAEL	Divisé par 100, il faut tasser la virgule.

SAMUEL	Fois 100.
GAEL	Ben, fois c'est pour tasser la virgule par en avant , à droite et quand tu fais diviser c'est par l'autre bord.
ECH	Donc pour passer de 0,5 à 50.
ÉLS	Multiplier.
ECH	Et pourquoi tasser vers la droite, je devrais obtenir un nombre.
ÉLS	Plus grand.
CH	Ah vous êtes moins paresseux que moi, quand je vois 0,5, je me dis que je vais faire un raisonnement plus simple…Au lieu de prendre ½, je fais d'abord comme si c'était 1 et non ½. 50 c'est combien de fois plus que 1? 50 fois. Mais, si j'ai ½ et non 1, 50 serait combien de fois plus que ½? Il faut donc que je multiplie par quel nombre pour avoir le prix pour 50?
GUY	Par 100.
CH	Je me mets presque toujours à 1 pour regarder ces choses-là.
MARCEL	Ça veut dire que nous aussi on peut faire comme ça.
ECH	Ben oui! Donc tu es en train de me dire, si par exemple j'ai payé un billet de ski 100 fois plus cher.
SAMUEL	Tu tasses la virgule de 2.
ECH	Donc ça me coûte 100 fois plus cher aussi.
MARCEL	2130$

Lors du retour, Rébecca et Guy répondent à la question de l'étudiante-chercheure qui leur demande de préciser pourquoi ce sont les mêmes chiffres qui apparaissent dans les montants associés à ½ journée et à 50 journées de ski, en prenant appui sur l'identité des relations entre ½ et 1 et entre 50 et 100, même s'il leur est difficile de le formuler. Cette difficulté est une source d'interactions entre les élèves qui montrent différents rapports aux nombres rationnels et aux situations multiplicatives. Marcel s'appuie ainsi sur les démarches précédemment effectuées en suggérant qu'ils avaient omis la virgule. Bien que son raisonnement soit peu explicite, voire confus, l'étudiante-chercheure prend appui sur la relation entre ½ et 50/100 énoncée par cet élève pour poursuivre les échanges. L'intervention initiale effectuée par Marcel a ainsi conduit Samuel à proposer l'équivalence entre ½ et 0,5 et à rendre compte de la relation entre 0,5 et 50; il ajoute alors que « la différence est de 100 fois plus ». Cette énonciation de la différence est, de prime abord, étonnante. Toutefois, comme son enseignante nous l'a mentionné lors de l'activité « dites-le avec des fleurs », la difficulté principale de Samuel réside dans l'emploi du langage mathématique adéquat. D'ailleurs, malgré l'usage du terme « différence », nous savons pertinemment qu'il faisait référence à une relation multiplicative de 100. Une fois cette relation identifiée, les élèves recourent à des techniques permettant de trouver le montant de 50 jours à partir de celui de 0,5 jour.

Nous pouvons donc voir dans cet extrait la pertinence de l'activité sur les différentes représentations du nombre ½ et de l'intervention de l'enseignante, lors de la construction des notes de cours, au cours de laquelle elle porte à l'attention des élèves le fait que les produits obtenus par la multiplication de nombres décimaux ou de nombres entiers, nombres formés de mêmes chiffres (ex. : 12,6 x 6,35 ou 126 x 635), comportent aussi les mêmes chiffres.

À la suite de ce retour, les élèves reçoivent un petit quizz auquel ils doivent répondre individuellement, et que nous reproduisons ci-dessous (Guay, Hamel et Lemay, 2005, p. 166). Il est à noter qu'ils disposent de leurs tables de multiplication.

Je vérifie mes connaissances

1.	Effectue les opérations ci-dessous		
	a) 5,35 x 10	c) 5,35 x 1000	e) 125 ÷ 100
	b) 5,35 x 100	d) 125 ÷ 10	f) 125 ÷ 1000
2.	Parmi les expressions ci-dessous, lesquelles donnent le même résultat?		
	• 4 x 250	• 40 x 2,5	• 0,4 x 250
	• 400 x 2,5	• 400 x 25 ÷ 100	• 400 x 25

Ce mini-test a été bien réussi par la majorité des élèves, selon les observations que nous avons consignées au moment de la réalisation de cette activité. Pour effectuer les opérations proposées aux deux premiers numéros, la majorité des élèves ont eu recours à l'algorithme usuel; ils ont donc effectué chacun des calculs. Bien que nous ayons spécifié, après avoir fait cette observation, qu'il n'était pas nécessaire de faire des calculs[36] s'ils connaissaient d'emblée la réponse, les élèves ont tenu à inscrire leur démarche. Ceux-ci étaient dans une situation d'évaluation qui, pour eux, est marquée de la nécessité de laisser des traces, afin que l'enseignante puisse savoir ce qu'ils ont fait. Cet effet du contrat didactique (Brousseau et Peres, 1981) n'est pas surprenant dans la mesure où l'on répète sans cesse aux élèves que la démarche prédomine et que s'ils laissent des traces montrant une démarche adéquate, cela permet à l'enseignante de leur octroyer des points, même s'ils inscrivent une réponse erronée. Notons, par ailleurs, que

[36] L'enseignante avait souligné qu'ils avaient de la place dans le bas de la page pour qu'elle puisse voir leurs démarches.

Rémi, Bertrand, Anne et Hélène, ont peine à se souvenir de l'algorithme de multiplication de nombres décimaux. Par exemple, Rémi adresse à la chercheure la question suivante : « *C'est de ce côté-là qu'on tasse la virgule?* »; la chercheure lui répond alors: « *Vous le savez; j'en suis sûre* ».

4.2.7.2. Analyse des conduites et des interactions didactiques lors de la résolution de problèmes d'application provenant du manuel Perspective

La seconde période d'enseignement a été consacrée à la résolution de problèmes d'application provenant du manuel et du cahier d'exercices de Perspective. Nous reproduisons ces problèmes et procédons ensuite à l'analyse des conduites des élèves et des interactions didactiques lors de la réalisation de ces problèmes.

Problèmes provenant du manuel (Guay, Hamel et Lemay, 2005, p.170)

« 2. Effectue mentalement les opérations ci-dessous.

a) 10,5 x 10	d) 10,5 x 10 000	g) 312,5 ÷1000
b) 10,5 x 100	e) 312,5 ÷ 10	h) 312,5 ÷10000
c) 10,5 x 1000	f) 312,5 ÷100	

3. Pour chacune des multiplications ci-dessous, trouve deux autres expressions impliquant une multiplication et qui ont le même résultat.

a) 25,5 x 120 b) 140 x 3,5 c) 12,2 x 6,25»

Problèmes provenant du cahier d'exercices (Leclerc, 2004, pp. 44-45)

« 8 - Bruno vend des épinglettes pour financer son tournoi de hockey. Chaque épinglette lui rapporte 2,38$. Combien d'argent aura-t-il amassé s'il en vend 41?

9- Dominic est charpentier et il veut construire un balcon pour son chalet. D'après ses calculs, il a besoin de 54 planches de 2,3 m de longueur. À combien s'élèvera sa facture si les planches se vendent 4,50$ le mètre?

10- À l'occasion de l'Halloween, Daphné, qui est enseignante, a acheté des bonbons en vrac coûtant 2,55$ le kilogramme.

a) Si elle a payé 3,06$, combien de kilogrammes de bonbons a-t-elle achetés?
b) Si chaque bonbon pèse 0,004 kg, combien de bonbons a-t-elle achetés? »

Bien que tous les élèves aient traité chacun des problèmes précédents, nous ne pouvons donner un aperçu de l'ensemble des conduites, les feuilles sur lesquelles étaient inscrites les démarches et les réponses des élèves n'ayant pas été conservées. Nous avons pu toutefois enregistrer les échanges que nous avons eus avec quelques élèves qui ont réclamé notre aide.

Notre première analyse concerne les conduites et les échanges lors de la réalisation du numéro 2, au cours de laquelle Marcel, comme plusieurs élèves de la classe, a un rapport plutôt techniciste aux opérations et rencontre des difficultés dans la lecture du produit obtenu, ce qui amènera l'étudiante-chercheure à s'appuyer sur les différentes registres (langagier, numérique, etc.) pour y donner sens :

ECH	Quel résultat tu obtiens pour 10,5 x 1000 ?
MARCEL	Un million cinq cent ?
ECH	Écris le nombre que ça te donne ici. [il écrit 10 500]. Comment tu fais pour savoir …10 x 1000…
MARCEL	10 000
ECH	Tu as écrit « un zéro cinq zéro zéro » comment tu as fait pour savoir ça?
MARCEL	Ah 10 500…parce que je rajoute les 2 zéros…j'enlève la virgule … je fais l'affaire de la virgule .
ECH	Ok.
MARCEL	Ici [10,5 x 10 000] je ne le sais même pas quoi faire?
ECH	Ben oui tu fais comme tantôt. Si tu la déplaces d'une position par la droite, c'est comme si tu avais fait fois combien?
Marcel	100
ECH	Fois 10, mais là, il te reste encore fois 1000, donc 105 fois 1000, ça va te donner?
MARCEL	10 milles…
ECH	Cent cinq
MARCEL	105 dix milles
ECH	105 000
MARCEL	Comme ça?
ECH	Ben non tu n'as pas fait disparaître ton 5 mon grand. On a dit 10,5 fois 10 000, c'est la même chose que 10,5 x 10 x 1000.
MARCEL	Oui.
ECH	Donc 10,5 fois 10 ça donne combien?
MARCEL	105
ECH	Et 105 fois 1000 ça te donne?
MARCEL	Euh…105 000.
ECH	Maintenant tu es rendu au e) 312,5 divisé par 10, ça donne combien?
MARCEL	31,25.
ECH	Est-ce que cela a du sens que ça donne un nombre plus petit?
MARCEL	Ben oui, c'est divisé.
ECH	f) 312,5 divisé par 100.
MARCEL	3,125…..et ici comment on fait ?
ECH	g) 312,5 divisé en 1000 ?
MARCEL	0,3125
ECH	Exactement!
MARCEL	Si c'était un examen, là, est-ce que j'aurais 100%?

Les demandes répétées de Marcel reflètent bien son besoin constant d'une présence « adulte » et son désir de nous montrer qu'il peut réussir. Notre accompagnement nous permet toutefois de prendre note, au-delà des bonnes réponses obtenues, de la pertinence de conjuguer diverses représentations des nombres. Il nous suggère également des pistes de réinvestissement possibles, notamment, des relations entre le quotient et le dividende : le quotient sera plus petit que le dividende si le diviseur est plus grand que 1; le quotient sera, par ailleurs, plus grand que le dividende si le diviseur est plus petit que 1, etc.

Nous exposons ci-dessous un extrait des échanges entre l'étudiante-chercheure et Bertrand, lors du traitement du numéro 3, numéro pour lequel, à l'instar de plusieurs autres élèves (Hélène, Gael, Rémi, Réjean, Rébecca), cet élève a procédé de la façon suivante pour trouver une expression donnant un résultat identique à celui correspondant à celui obtenu en effectuant le calcul « 25,5 x 120» a) application de l'algorithme de multiplication, obtenant alors le produit suivant: 3060; b) application à nouveau de l'algorithme de multiplication pour effectuer le calcul « 255 x 12 »; c) obtenant un produit identique en a) et b), cet élève conclut que son expression est juste.

ECH	Tu aimes bien te casser la tête. Ils disent : « trouve d'autres manières d'écrire ça pour que ça te donne le même résultat », mais tu n'es pas obligé de trouver le résultat.
BERTRAND	Ah ok c'est bon je comprends.
ECH	Tu as 25,5 x 120…produis une autre écriture …si je commençais par exemple avec 255..qu'est-ce que je devrais faire à 120…
BERTRAND	T'enlèves le 0.
ECH	Pourquoi?
BERTRAND	Parce que ici aussi il faut le diviser par 10.
ECH	Parce qu'au premier terme tu as fait quoi?
BERTRAND	Fois 10…ici divisé et ici fois 10…
ECH	Oui comme ça.
BERTRAND	Hey que je suis bon! C'est juste que je n'avais pas compris la question.
ECH	C'est juste qu'on utilise une autre écriture.
BERTRAND	Ah oui on peut faire ça? Ça fait 120 ÷ 10 x 255.

Les interactions précédentes sont fort instructives. Elles permettent à l'élève de recourir à diverses connaissances sur les écritures décimales, sur les relations multiplicatives entre diverses écritures décimales, sur la composition des transformations d'écritures dans l'interprétation de produits, etc. Un tel recours, comme nous avons pu le constater, lors de cette période, est une démarche privilégiée par un nombre non négligeable d'élèves qui nous semblent avoir construit des pratiques plus efficaces et plus économiques dans le traitement de problèmes impliquant des nombres rationnels; tel est le cas des élèves Samuel, Réjean, Gaudi, Noa et Prince.

Le problème 8, comme nous l'avions prévu, a été réussi par la majorité des élèves. Il s'agissait d'un problème multiplicatif «classique» d'isomorphismes de mesures (Vergnaud, 1991). Comme il leur avait été enseigné, la plupart des élèves ont procédé à la multiplication des nombres 238 et 41, obtenant alors 9758; ils ont ensuite tenu compte du nombre de chiffres après la virgule dans le nombre 2,38 pour inscrire une virgule dans le nombre 9758, produisant alors le nombre 97,58. Les élèves ont procédé de façon similaire pour résoudre le problème 9, en calculant le nombre de mètres correspondant à 54 planches, puis le coût correspondant à la longueur précédemment trouvée des 54 planches.

La résolution du problème 10 ne va pas de soi pour un grand nombre d'élèves. Il faut dire que ce problème de proportionnalité multiple (nombre de bonbons, coût, poids) est plus complexe que les problèmes précédents, même si le problème 9 était également un problème de proportionnalité multiple (nombre de planches, longueur, coût). En effet, même si au problème 10, le prix d'un kg de bonbons et la masse d'un bonbon sont connus, il n'est pas demandé de trouver le prix d'un certain nombre de kg de bonbons, mais le nombre de kg correspondant au coût payé pour cet achat, puis connaissant la masse d'un bonbon, il est ensuite demandé de trouver le nombre de bonbons correspondant au nombre de kg de bonbons achetés. Pour trouver le nombre de kg de bonbons achetés, il faut établir la relation entre les coûts et connaissant cette relation, déterminer le nombre de kg de bonbons achetés, la relation entre 1 kg et le nombre de kg achetés devant être identique à celle établie entre les coûts. Une démarche similaire doit ensuite est appliquée pour trouver le nombre de bonbons correspondant à la masse totale en kg des bonbons achetés. Il n'est étonnant qu'un grand nombre d'élèves aient éprouvé des difficultés importantes lors de la résolution de ce problème. Examinons de plus près les procédés mis en œuvre par plusieurs élèves.

Afin de résoudre le problème précédent, plusieurs élèves tentent en vain d'exploiter le « produit croisé », démarche généralement privilégiée par l'enseignante pour résoudre ce type de problèmes. Une telle exploitation montre bien que ces élèves prennent en compte les relations entre les données et peuvent ainsi associer ce problème aux problèmes de ce type rencontrés antérieurement. Si, parmi eux, certains parviennent à trouver le nombre de kilogrammes de bonbons achetés, il en est autrement lorsqu'il s'agit de déterminer le nombre de bonbons achetés; plusieurs de ces élèves avouent être incapables de trouver la réponse, d'utiliser le produit croisé. D'autres élèves, tels Martin et Prince proposent de multiplier 2,55 par 0,004; 2,55$ correspondant au prix d'un kg de bonbons et 0,004 kg correspondant au poids d'un bonbon. Cette proposition est loin d'être « insensée »; le moins que l'on puisse dire est qu'elle montre bien les conditions que ces élèves ont retenues pour l'application du produit croisé, notamment, l'existence de deux types de mesures; cette condition est aussi associée au problème de proportionnalité simple.

Les échanges entre l'étudiante-chercheure, la chercheure et Bertrand sont particulièrement intéressants. Rappelons que cet élève avait été explicitement invité par l'enseignante à recourir au produit croisé. Bertrand avoue trouver ce problème « *bien compliqué* et suggère d'effectuer les calculs suivants : pour la partie a) 3,06 – 2,55; pour la partie b) 3,06 x 4. À la demande de l'étudiante-chercheure, il explique son raisonnement de la façon suivante :

Question a)	
BERTRAND	C'est-tu bon ça?
ECH	Explique-moi pourquoi tu as fait cette opération?
BERTRAND	Je sais qu'il y a déjà un kilo dans 3,06$
ECH	Parfait donc tu sais que ta réponse sera d'au moins 1. Ensuite, pourquoi tu as fait la soustraction?
BERTRAND	Pour trouver le reste ben… un kilo pis les dixièmes et les centièmes, qu'est-ce qu'il reste après.
ECH	Et qu'est-ce que la soustraction te donne comme information?
BERTRAND	51…1 kilo et 51…1,51
ECH	Mais c'est quoi ici tes unités...Tu as fait 3,06 $ qui est le montant qu'elle a payé moins le prix qu'elle paie pour 1 kg…2,55$/kg. …[Elle fait un tableau de proportionnalité simple dans lequel elle inscrit les 2 mesures : coût et poids] Donc tu es d'accord qu'elle paie 2,55$ pour 1 kg et là on cherche le nombre de kilogrammes pour 3,06$. Tu sais déjà que la réponse va être plus grande que 1 et la soustraction que tu as faite ici là ça se trouve à être quoi?
BERTRAND	Ben de l'argent.
ECH	Ton 0,51 ça te donne la différence entre les deux mais pas en kilogrammes et c'est ça que tu veux! Ça veut dire qu'il resterait 0,51/2,55.
BERTRAND	Je sais pas.
ECH	Est-ce qu'on pourrait le savoir pour 0,51, hummm ce n'est pas évident….. et s'adressant à la chercheure : j'ai besoin de vous parce que avec Bertrand on regardait.

BERTRAND	Je voulais trouver ce qui reste 1 kg et quoi. J'ai essayé de le trouver en soustraction.
CH	Ben oui, c'est correct c'est comme une division donc… vous cherchez combien de fois vous pouvez entrer 2,55 dans 3,06…vous avez trouvé 1 fois et il vous reste 0,51.
ECH	Mais lui voulait écrire 1,51 comme réponse.
CH	Ah! Non, mais il faut regarder la proportion, 1 kilo ça vaut 2,55$ …51 par rapport à 2,55 $? Là vous avez trouvé pour 1 kilo mais il vous reste encore 51 cents…1 kilo vaut 2,55 donc quelle fraction de ce qui reste ?
BERTRAND	Ah ok, 51 sur…
CH	255, ça fait quoi? Vous allez avoir une fraction parce que l'autre vaut…51/255 c'est facile…Regarder c'est la même chose que 1 sur…
ECH	Ah…
BERTRAND	…
CH	Sur 5.
BERTRAND	Ok, on multiplie et on divise?
CH	Ok…. on a regardé une fraction équivalente, 51/255, c'est le même nombre que 1 sur 5, 1/5 de kilo, ça s'écrit comment en notation décimale ça?
BERTRAND	1,5.
CH	1/5 …donnez-moi une autre fraction équivalente avec laquelle ça va être facile de travailler.
BERTRAND	Euh 2/10.
CH	C'est quel nombre décimal ça.
BERTRAND	0,210 : 0 virgule 10, 0 virgule deux dix .
CH	0,2 seulement..ça c'est 1, ça c'est des dixièmes.
BERTRAND	Ah!
CH	Donc vous allez voir 1 kilo et 2 dixièmes … donc vous l'avez fait correctement.
ECH	Et ce qu'on regardait ici tantôt, c'est justement ce petit quelque chose qui manquait…on cherchait à savoir combien de kg de bonbons on pouvait avoir pour 51 sous.

Les échanges précédents font ressortir toute l'importance de la reconnaissance par l'étudiante-chercheure de la pertinence du travail entrepris par l'élève (3,06 – 2,55), travail, faut-il le souligner, relativement original. En effet, la comparaison du prix d'un kilogramme et du prix payé permet rapidement à l'élève de prendre acte du fait que Daphné a acheté plus d'un kg de bonbons. Par ailleurs, le nombre de kg achetés, soit 1,51, pose problèmes et les échanges qui suivent ont pour but d'amener l'élève à reconsidérer sa réponse et examiner le rapport entre 0,51$ et 2,55$, ou entre 51 et 255, autrement dit, à interpréter le « reste » en termes de rapport. Les représentations décimales de la fraction 1/5, comme le montrent les propositions de l'élève, sont assez étonnantes. Il aurait été important que la chercheure puisse demander à cet élève de représenter d'autres fractions avec des nombres décimaux (par exemple, ½). Mais, comme nous l'avons évoqué dans notre cadre méthodologique, il n'est pas toujours évident de réagir à une erreur en proposant une autre tâche (jeu de tâches).

Comme le montrent les échanges suivants entre l'étudiante-chercheure et Bertrand, le traitement de la partie b) du problème n'est pas évident. Avant d'examiner ces échanges, il importe de souligner que les problèmes impliquant une division de nombres décimaux n'avaient pas encore été abordés en classe. Ce n'est donc pas sans raison que l'étudiante-chercheure a eu recours aux nombres entiers pour donner sens à l'opération à effectuer. De plus, prenant en compte les difficultés rencontrées par Bertrand dans le traitement des rapports entre divers nombres décimaux, il était important de ne pas manquer l'occasion de porter à l'attention de Bertrand l'importance de considérer les relations entre les nombres (1,2/0,004 = 1200/4 à comparer avec 12/4).

Question b)	
BERTRAND	Il faut faire 3,06 x 4… ça marche-tu ça parce qu'ils veulent savoir c'est combien de bonbons.
ECH	Est-ce qu'on va avoir des bonbons?
BERTRAND	Oui!
ECH	Tu sais que ça coûte 2,55 le kg, tu sais qu'elle a payé 3,06$ et donc qu'elle a acheté 1,2 kg et on sait que chaque bonbon pèse 0,004 kg…
BERTRAND	Ah ok ok alors j'ai compris, on fait 1,2 fois 0,4.
ECH	Comment tu as fait pour choisir ton opération ?
BERTRAND	C'es-tu bon?
ECH	Comment tu as fait pour choisir la multiplication ?
BERTRAND	Parce que je sais que 1,2 c'est 2,55.
ECH	1,2 c'est quoi ça?
BERTRAND	Le nombre de kg qu'elle a achetés…
ECH	Et on sait aussi que chaque bonbon pèse 4 millièmes de kg.
BERTRAND	Alors on peut faire…j'sais pas!
ECH	C'est comme si on disait, par exemple, qu'elle a acheté pour 16 kg et on sait que chaque bonbon pèse 2 kg, qu'est-ce que tu ferais?
BERTRAND	Ben j'ai fait une multiplication.
ECH	Écoute bien, si on te dit qu'elle a acheté 16 kg de pommes et que chaque pomme pèse 2 kg, combien de pommes a-t-elle achetées?
BERTRAND	32, euh non non non non…ok mais c'es-tu divisé par 2? Je sais comment le faire en dessin, j'aime plus le faire en dessin 2, 2, 2 jusqu'à temps que tu aies 16…8 pommes.
ECH	Ok ça correspond à quelle opération ça?
BERTRAND	Une division.
ECH	Oui, 16 divisé en 2, 8...2 fois combien pour avoir 16...Donc ici c'est la même chose, tu veux savoir combien de bonbons si en tout ça lui a donné 1,2 kg, regarde les relations, regarde les nombres, ça te fait penser à quoi?
BERTRAND	Ok 1,2 divisé par 4.
ECH	Ouais ou plutôt 0,004.
BERTRAND	Mais pour transformer ça il faut ajouter des zéros ici.
ECH	On peut le mettre en grammes aussi c'est comme on veut. Ok toi tu veux juste des nombres entiers…
BERTRAND	Oui!
ECH	Pour faire une écriture équivalente et ici tu marquerais quoi?
BERTRAND	4
ECH	Et si tu as écrit 4, ça veut dire que tu as pris combien de fois plus?
BERTRAND	Fois 1000.

ECH	Et là aussi on va faire .
BERTRAND	Fois 1000.
ECH	Et ça va te donner combien?
BERTRAND	1200
ECH	Ok donc ça tu es capable de trouver ça en 30 secondes.
BERTRAND	Oui..(rires).
ECH	Regarde tes nombres avant de commencer tes calculs Bertrand.
BERTRAND	oui ok.
ECH	4 fois quoi va te donner 12?
BERTRAND	3.
ECH	Mais, là est-ce que tu as 12? Tu as 1200!
BERTRAND	Ok, tu mets les virgules.
ECH	C'est 100 fois plus grand.
BERTRAND	Ah ok, mais c'est pas 1000 qu'on a mis?
ECH	C'est-à-dire que si on regarde la relation entre 4 et 12 tu sais que pour passer de 4 à 12 c'est fois 3, mais ta réponse ce n'est pas 12 ,.mais 1200 donc c'est 300
BERTRAND	Ok alors ici c'est 3?
ECH	Non c'est la même chose, c'est 300.
BERTRAND	Ah ok.
ECH	C'est juste qu'ici tu as trouvé une écriture équivalente quand tu as multiplié par 1000, c'est normal que si mes bonbons me coûtent 1000 fois plus cher, je vais avoir 1000 fois plus de kg.
BERTRAND	Ok, ouais ça l'air bon.

Les échanges précédents montrent bien l'influence des représentations initiales des opérations. En effet, la proposition effectuée à l'entrée par Bertrand, soit de multiplier 3,06 par 0,004, relève d'une lecture et d'une interprétation primitives du problème que l'on pourrait traduire ainsi. Puisque la partie b traite du nombre de bonbons, puisque le nombre de bonbons que l'on peut acheter dépend généralement de l'argent en poche, pour savoir combien de bonbons j'ai achetés je dois donc multiplier, car plus j'ai d'argent plus j'ai de bonbons. L'élève est amené par la suite à revoir son interprétation; les questions qui lui sont adressées l'invitent à effectuer un voyage dans le temps, en traitant d'objets familiers associés à des problèmes dans lesquels l'opération de division prend sens. Ce voyage est toutefois fortement orienté par les interventions de l'étudiante-chercheure; on assiste pratiquement à un guidage « pas à pas ». Il aurait été souhaitable de laisser l'élève effectuer la division, sans intervenir.

4.2.8. Activités consacrées à l'enseignement de la division des nombres décimaux et à la résolution d'un problème impliquant des nombres décimaux

Au cours des périodes d'enseignement précédentes, les élèves ont été invités à résoudre des problèmes impliquant des additions, des soustractions et des multiplications de nombres rationnels. Si les élèves avaient bénéficié d'un premier enseignement sur la division de fractions, ils n'avaient pas encore été initiés à la division de nombres décimaux. Il était donc important que l'enseignante puisse amorcer un tel enseignement. Des activités visant à conférer un sens à l'algorithme usuel de la division et aux opérations de division de nombres décimaux qui pouvaient être appliquées pour résoudre des problèmes multiplicatifs, et à établir des relations entre différentes divisions impliquant des nombres décimaux, ont alors été préparées et présentées par l'enseignante, le 19 février 2007. Au moment de la planification des activités, l'enseignante souhaitait également ré-exploiter une situation isomorphe à la situation « Dites-le avec des fleurs » qui avait été présentée antérieurement; nous avons alors construit une telle situation. Il s'agissait donc d'une situation découlant de besoins spécifiques exprimés par l'enseignante.

Plusieurs activités ont ainsi été réalisées au cours des deux périodes d'enseignement. L'ordonnancement de ces activités a été effectué par l'enseignante : 1) activités et exercices sur la division de nombres décimaux; 2) construction de notes de cours sur la division de nombres décimaux; 3) résolution d'un problème impliquant des nombres décimaux.

Nous présentons d'abord les deux premières activités et faisons état des conduites des élèves et des interactions entre les élèves et l'enseignante.

4.2.8.1. Analyse des conduites des élèves et des interactions, lors de la réalisation d'activités sur la division de nombres décimaux

Afin d'amorcer la construction du sens des actions intervenant dans la division de nombres décimaux, l'enseignante propose diverses divisions comportant des nombres qui permettent d'examiner les conditions dans lesquelles le quotient résultant de la division de nombres décimaux est plus petit ou plus grand que le dividende et dans lesquelles le produit résultant de la multiplication de nombres décimaux est plus petit ou plus grand que le multiplicande. Ces choix ne sont pas le fruit du hasard, car il est reconnu que le passage aux nombres rationnels confronte les élèves à certains obstacles (voir, entre autres, les études effectuées par N. et G. Brousseau (1987), études présentées au second chapitre de notre thèse), les élèves n'envisageant pas facilement que le produit d'une multiplication puisse être plus petit que le multiplicande et que le quotient d'une division puisse être plus grand que le dividende. Pour faciliter cette compréhension, l'enseignante invite d'abord les élèves à créer des contextes appuyant les calculs proposés, calculs mettant d'abord en jeu des nombres entiers.

ENS	Première chose : est-ce que quelqu'un peut me dire ce que 100 divisé en 10 donne?
ÉLÈVES	10.
GUY	T'enlèves un 0.
ENS	Vous êtes sûr? Est-ce qu'il y a quelqu'un pourrait me donner un exemple de la vie courante qui aurait cette division-là ?
MARCEL	Ben ton livre a 100 pages et tu as 10 jours pour le lire, tu dois lire combien de pages par jour?
ENS	Excellent parfait! Quelqu'un peut me donner la réponse de 100 ÷ 0,10 ?
Plusieurs élèves	1000.
ENS	Vous êtes sûr? Ben là, je ne comprends pas pourquoi quand je divise ça grossit le nombre?
GUY	Parce que j'ai pris en sous.
ENS	Ah toi tu as décidé de prendre l'exemple en dollars au lieu de séparer 100$ en billets de 10$, là j'ai demandé de séparer 100$ en 10 sous donc il y a 10 pièces de 10 sous dans 1 $ pis s'il y en a 100 fois plus on arrive à 1000. Pourquoi est-ce que mon nombre a grossi…moi je voulais diviser!
GUY	Parce que j'ai appris que quand je fais une division tu recules la virgule et tu ajoutes le 0
ENS	Oui! tu serais un bon mécanicien : tu obéis à ce qu'on te dit de faire; est-ce que tu le comprends nécessairement, ça je ne le sais pas. Pourquoi est-ce que mon nombre a grossi?
ALEX	Tu as un 0.
ÉLÈVES	(inaudibles)
ALEX	Parce que tu as reculé.
SAMUEL	C'est plus bas que le chiffre que tu as donné avant donc…fois 0,10 ça donne plus grand ; il faut que tu multiplies 0,10 par un plus grand nombre pour avoir 100; si on n'utilise pas un plus grand nombre, ça diminue.
ENS	Samuel me dit que si je prends 100 fois 10 ça va me donner plus grand mais si je prends 100 fois 0,1, là ça diminue. Est-ce que je peux multiplier et que ça diminue?
ÉLÈVES	Oui.
ENS	Est-ce que je peux multiplier et que ça augmente ?
ÉLÈVES	Oui.
ENS	Pourquoi Prince?
PRINCE	À cause du 0.
ENS	Oui, mais c'est pas la raison.
GAEL	Par exemple, si je multiplie par 10, j'augmente; si je multiplie par 0,1, le nombre 0,1 est en bas de la virgule et ça diminue … le nombre est plus petit.
ENS	plus petit que quoi GAEL?
GAUDI	Que 1 entier.

Ces échanges montrent des rapports à la division de décimaux fort contrastés. Il faut dire que certains élèves de la classe (Guy, Alex, Gael) semblent avoir déjà abordé ces opérations, ces élèves montrant un rapport plus techniciste (tu recules la virgule, tu ajoutes un 0) que ceux qui peuvent expliciter l'influence des nombres en jeu sur le quotient ou le produit (Bertrand, Gaudi, Samuel). Il est intéressant de noter que Marcel sait rapidement proposer un contexte approprié pour interpréter la division présentée initialement. Cette entrée ainsi que l'évocation par Guy d'un autre contexte pour donner sens à la division de 100 par 0,10 ouvrent une fenêtre importante qui permet à l'enseignante d'aborder les questions principales concernant les relations entre les produits, les quotients et les nombres sur lesquelles portent les opérations. Soulignons enfin la réponse de Gaudi qui conclut bien ces échanges. Les événements qui marquent ces échanges nous montrent bien comment les élèves peuvent participer à l'enseignement (Mercier, 1998).

Le passage de la division à la multiplication, dans les échanges précédents, permet également d'aborder l'élément neutre de la multiplication et de la division, passage favorisant, par la suite, la mise en lien avec la stratégie de calcul qu'ils ont abordée avec la division de fractions : « *ENS : oui, dans le fond ce que je demande, je fais une division par quelque chose de plus petit que 1, est-ce qu'on a déjà vu quelque chose qui ressemble à ça?* ». À ce moment, l'enseignante doit leur rappeler qu'ils ont vu comment procéder avec les fractions, Marcel affirmant qu'il s'agissait du produit croisé, alors que d'autres parlaient « d'inverser » sans trop pouvoir préciser. Elle leur présente alors les trois écritures suivantes : 100 ÷ 0,1 ; 100 ÷ 1/10 et 100 x 10. Reconnaissant qu'il s'agit d'écritures qui donneront le même résultat, les élèves sont ensuite invités à effectuer la division suivante : «16 ÷ 0,25 ». L'enseignante propose alors de représenter 0,25 par 25/100, représentation allant à l'encontre de celle proposée initialement par plusieurs élèves, consistant plutôt à associer 0,25 à la fraction ¼. Son intention est alors d'établir un pont entre les représentations traitées lors des échanges précédents, représentations par une fraction décimale du nombre 0,25, et les représentations de la division de fractions enseignées antérieurement. L'opération 16 ÷ 0,25 pourra ainsi être représentée par :

$16 \div 25/100$; a) $\frac{16}{0{,}25} = \frac{1600}{25}$; b) $\frac{16}{25/100}$; c) $16 \times \frac{100}{25}$

Cette méthode a, d'une part, l'intérêt de lier décimaux et fractions et, d'autre part, de permettre l'introduction d'une deuxième façon d'aborder la division des décimaux, celle qu'elle souhaite institutionnaliser, soit a). Celle-ci consiste à poser la division sous une forme fractionnaire (a ÷ b = a/b) et à trouver une fraction équivalente en multipliant numérateur et dénominateur par une puissance de 10 afin d'obtenir, au dénominateur, un nombre entier. Enfin, il ne reste qu'à effectuer la division en exploitant l'algorithme usuel appris pour les nombres entiers. La présence, le cas échéant, d'une décimale dans le dividende sera reportée dans le quotient, par exemple :

$$126{,}6 \div 3 \;\ldots\; \begin{array}{r|l} 126{,}6 & \underline{\;3\;} \\ \underline{12\;\;} & 42{,}2 \\ 6\; & \\ \underline{6}\; & \\ 6 & \\ \underline{6} & \end{array}$$

Il faut dire que cette procédure n'a pas été divulguée d'entrée, les questionnements de l'enseignante ont amené les élèves à effectuer un tel cheminement. Marcel a d'abord reconnu que la division 147 ÷ 0,3 pouvait être représentée par une fraction 147/0,3. Ensuite, plusieurs élèves ont trouvé des représentations équivalentes (Réjean : 294/0,6; Rébecca : 254/0,6; Marcel : 588/0,12; Samuel :441/0,9; Bertrand : 1470/3; Gaudi : 588/1,2). Bien que les méprises dénotent, dans le cas de Rébecca, une erreur de calcul et, dans le cas de Marcel, un traitement des nombres décimaux similaire à celui des entiers (0,3 x 4 = 0,12), les élèves ont reconnu la pertinence de l'écriture de Bertrand; Gael affirmant : « *Moi j'aime mieux 1470 sur 3 car le chiffre est rond* ». Bertrand voulait, à la suite de la division, effectuer un déplacement de la virgule (division par 10), afin d'annuler la transformation effectuée. L'enseignante demande aux élèves de sortir leur calculatrice et d'effectuer 147 divisé par 0,3 et 1470 divisé par 3, ce à quoi Gael réplique que « *tous les chiffres qu'on avait auraient donné la même chose* ». Il est par ailleurs intéressant de noter l'intervention de Samuel qui propose de multiplier par 0,33333 au lieu d'effectuer la division par 3; cette proposition ne sera pas examinée. Enfin, d'autres calculs sont demandés aux élèves, car l'enseignante souhaitait qu'ils voient la pertinence de multiplier par une puissance de 10. Par exemple, pour 346 divisé par 0,02, plusieurs élèves effectuent des multiplications successives par 2, ce qui permet à l'enseignante de préciser qu' « *il y en a qui ont continué à faire fois 2 en espérant que la virgule allait disparaître, ça aurait marché après bien du temps. La façon la plus efficace était de multiplier par des multiples de 10* » (comme l'a suggéré Noa). L'étudiante-chercheure décide alors d'intervenir pour proposer son raisonnement : « *moi j'ai regardé les nombres et leur relation et comme les deux sont des multiples de deux je peux déjà trouver 173/0,01 ou 1730/0,1... et ça nous donne le quotient très facilement* ». L'enseignante rétorque : *« moi aussi c'est comme ça que j'ai trouvé dans ma tête* ». Il semble cependant qu'elle privilégie une « méthode générale », car cela lui semble plus facile pour ses élèves et craint qu'ils ne se mélangent s'ils connaissent plusieurs façons différentes.

À la suite de ces échanges sur la division de décimaux, les élèves reçoivent une feuille d'exercices, comportant plusieurs calculs à effectuer (plus de 30). Ils doivent recopier la division sous la forme d'une fraction et trouver une fraction équivalente à celle-ci pour que la division soit plus facile à effectuer. Ils disposent d'une courte période en classe pour démarrer cette activité, sachant qu'ils devront la compléter en devoir. En classe, nous avons pu remarquer que les élèves effectuent assez facilement ces opérations, les difficultés se retrouvent davantage dans l'application de l'algorithme de la division : mauvais positionnement de la virgule dans le quotient, méconnaissance des tables de multiplication. Nous n'avons malheureusement pas eu accès à l'ensemble des calculs effectués par les élèves.

Par la suite, les élèves ont procédé à la consignation de leurs notes de cours sur la division des décimaux. Nous reproduisons les notes que l'enseignante a écrites au tableau :

Notes de cours
Pour diviser par un nombre à virgule, nous devons transformer notre division en une division équivalente.

Ex. $1{,}53 \div 0{,}3 = \dfrac{1{,}53 \times 10}{0{,}3 \times 10} = \dfrac{15{,}3}{3} = \quad 15{,}3 \,\underline{|3} = 5{,}1$

…

Pour trouver que le dénominateur soit un entier, il faut multiplier par 10,100, 1000, …

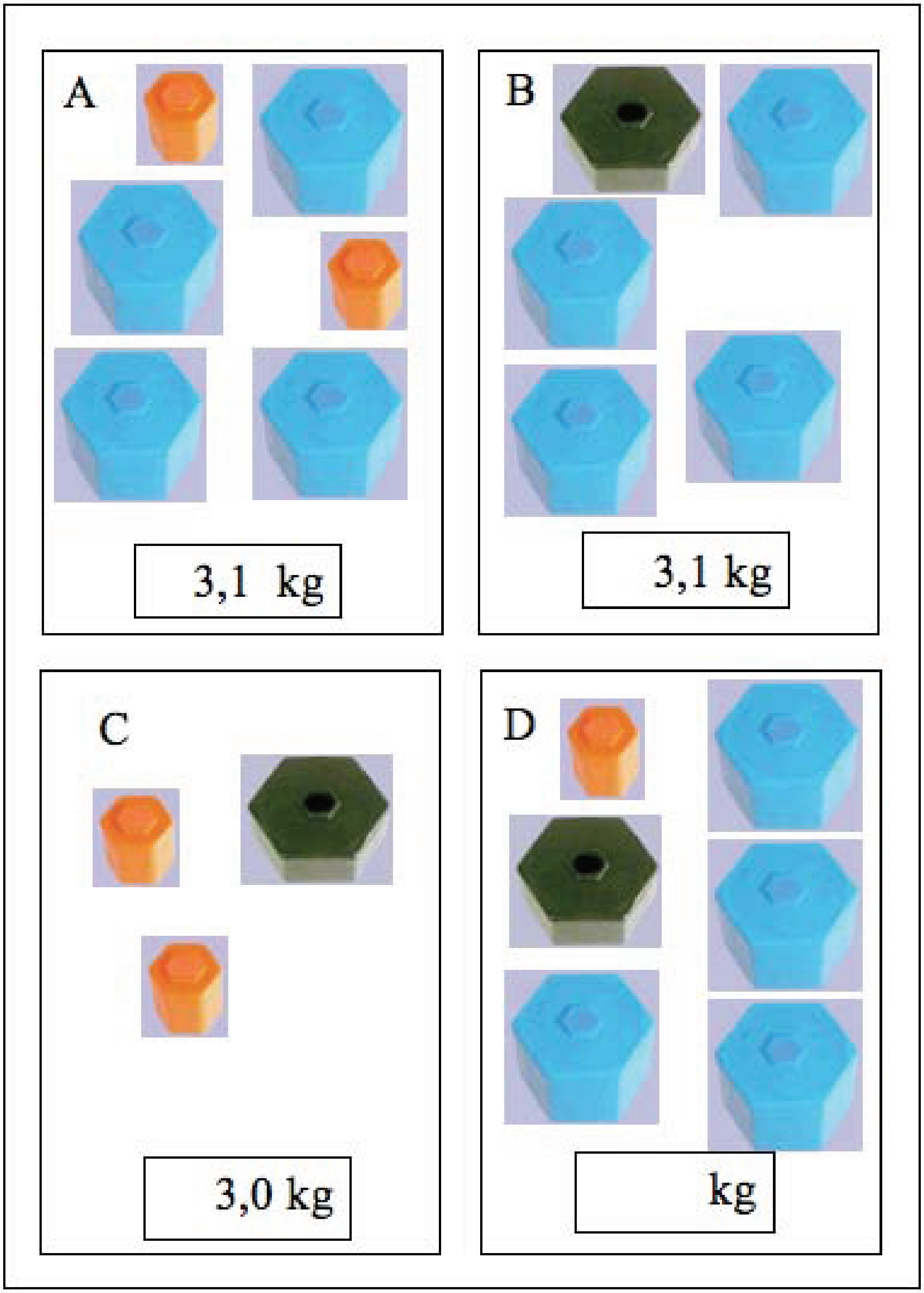
Ex. $0{,}684 \div 0{,}09 = \frac{0{,}684}{0{,}09} = \frac{68{,}4}{9} = 68{,}4 \underline{|9} = 7{,}6$

Quelques échanges entre l'enseignante et l'étudiante-chercheure ont permis de préciser le contenu des notes de cours, car cette dernière désirait s'approprier la méthode de l'enseignante afin d'harmoniser ses interventions. En effet, celle-ci pensait que l'enseignante exigeait aussi un recours à la notation fractionnaire usuelle (a/b). L'examen des relations entre les représentations des nombres rationnels et les calculs associés aurait ainsi permis de se prononcer sur l'efficacité et l'économie des calculs, en regard des représentations effectuées. Cependant, l'enseignante préférait limiter l'ordre de grandeur des nombres en jeu pour limiter les erreurs de calculs. Elle a toutefois, à la suite de ces échanges, précisé que le dénominateur devrait être un entier.

Lors de cette prise de notes, Marcel demande à l'enseignante : « Est-ce qu'il y a des exceptions pour les affaires de 10, 100, 100? » L'enseignante lui répond alors : « Ben oui, j'ai mis 3 petits points. » La réponse donnée par l'enseignante n'est pas celle attendue par cet élève. Cet élève faisait référence aux propositions faites par l'étudiante-chercheure lors des divisions suivantes : a) 346 ÷ 0,2 → (346 x 5)/(0,2 x 5) → 1700; b) 346 ÷ 0,02 → ((346 ÷ 2) / (0,2 ÷ 2)) x 100. Ces propositions reflètent d'ailleurs l'intégration d'une démarche différente, mais tout aussi efficace et cohérente avec les attentes de l'enseignante, c'est-à-dire obtenir les plus petits nombres possibles avant d'effectuer la division. Marcel recherchait ainsi l'approbation de l'enseignante en se référant aux propositions précédentes, où il apparaissait parfois plus simple d'effectuer des opérations (multiplication ou division) par un nombre qui n'est pas une puissance de 10.

4.2.8.2. Analyse des conduites des élèves et des interactions, lors de la réalisation de résolution d'un problème impliquant des nombres décimaux

À la deuxième période, l'enseignante présente ainsi l'activité de résolution de problème: *« On sait que vous avez eu énormément de plaisir à faire l'activité avec des* *fleurs; c'est une activité mathématique au niveau du raisonnement, mais ce n'est pas des mathématiques au niveau du calcul, il y en a mais c'est accessoire. Aujourd'hui c'est une période d'évaluation. Alors, je passe une vraie évaluation réforme ».* Pour résoudre le problème présenté, les élèves pouvaient former des équipes, s'ils le désiraient, mais ils devaient exprimer leur raisonnement individuellement devant l'enseignante. L'enseignante a suggéré aux élèves d'utiliser leur calculatrice, compte tenu qu'elle s'attardait davantage au raisonnement. Cependant, nous estimions que les calculs faisaient partie intégrante du raisonnement et qu'il s'agissait d'un moment opportun pour les exploiter, puisque qu'il était l'objet d'apprentissage dans cette période. Avec la permission de l'enseignante, nous avons ainsi dit aux élèves de délaisser la calculatrice. Nous présentons ci-dessous la tâche qui a été présentée aux élèves, tâche dans laquelle ils devaient trouver le poids total de l'ensemble D; nous précisons ensuite les choix qui ont été effectués.



En prenant en compte les démarches qui avaient été mises en œuvre dans la situation originale « Dites-le avec des fleurs », nous avons essayé de promouvoir une même démarche économique : le fait qu'il n'est pas nécessaire de connaître le poids de tous les objets. Nous avons ainsi fait en sorte que le poids associé aux objets de la figure D puisse être très facilement trouvé : en comparant les figures A et B, on peut voir que l'objet noir a le même poids que deux petits objets oranges. Or, ce qui distingue la figure D de la figure B est l'ajout à la figure D d'un petit objet orange. Or, le poids de ce petit objet étant la moitié du poids de l'objet noir, en examinant la figure C, on trouve facilement que ce poids est de 0,75 kg (1/2 de 1,5 kg). On sait maintenant que le poids des objets de la figure D est 3,85kg (poids des objets en B et poids d'un petit objet orange).

Il est intéressant de noter que dès l'entrée dans cette situation, certains élèves ont reconnu la parenté entre cette situation et celle « Dites-le avec des fleurs », situation présentée le 30 janvier. Comme dans cette dernière situation, la taille des fleurs n'était pas liée au prix, en voyant la composition des figures de la situation actuelle, ils nous ont alors demandé: « est-ce que c'est réel, le plus petit pèse moins que le moyen et le gros? ». Afin qu'ils s'attardent davantage aux relations mathématiques entre les prix et les masses des objets entrant dans les compositions des différentes cases, nous avons spécifié que les masses des objets n'étaient pas proportionnelles à leurs tailles et que cela dépendait du matériau utilisé. Nous nous attarderons maintenant à la démarche de chacune des équipes. De façon générale, très peu d'élèves ont eu recours à la démarche économique que nous avons ci-haut décrite. Ainsi, ils n'ont pu établir le poids de l'ensemble des objets de la case D, sans recourir à une mesure de la masse de l'objet bleu.

La démarche privilégiée par la majorité des élèves, soit Rébecca, Noa, Marcel, David, Rémi, Gael, Hélène, Réjean, Gaudi, Guy et Samuel, a été de comparer les compositions et les poids des objets des cases A et B et de déterminer qu'un objet noir avait la même masse que deux objets oranges. Ensuite, grâce à la composition de la case C, ils trouveront, par substitution, les masses d'un objet noir ou d'un objet orange. Enfin, ils détermineront la masse d'un objet bleu, dans les cases A ou B, grâce aux données précédentes et additionneront la masse de chacun des objets contenus dans la case D. Comme nous l'avons indiqué ci-dessus, il n'était pas nécessaire de déterminer la masse des objets bleus. Il est possible que ces élèves, par un effet de contrat, aient jugé important de déterminer la masse de chacun des objets. Nous reproduisons ci-dessous les détails des démarches de quelques-uns de ces élèves.

1. Marcel a commencé par la comparaison des cases A et B. Il se rend alors compte que la case B contient un objet de moins et affirme, compte tenu de cette observation et du fait que le poids total est le même, que « le noir est plus élevé » et qu'il a compris « que ces 2 affaires-là égalent à une affaire noire ». Ainsi, à la case C, il fait 3 divisé en 2 « pour savoir combien chacune de ces 2 petites affaires-là vaut ». Ensuite cela lui permet d'obtenir la masse du poids orange 1,5 ÷2 = 0,75 et du poids noir (3,0 -1,5 = 1,5). Il retourne à la case B, soustrait le 1,5 du 3,1, mais commet une erreur en obtenant 2,4 qu'il divise par la suite correctement par 4 pour obtenir la masse d'un poids bleu, soit 0,6kg. Enfin, il additionne tous les poids de la case D : 1,5 + 0,75 + 0,6 + 0,6 + 0,6 + 0,6 = 4,65 kg.

2. David et Rémi ont effectué pratiquement le même raisonnement que Marcel. En comparant les cases A et B, ils se sont rendu compte que la masse de 2 objets oranges équivalait à la masse d'un objet noir. Ils ont donc divisé 3,0kg, poids total de la case C, par 2, pour obtenir la masse des objets oranges. Ensuite, ils ont divisé à nouveau cette masse en 2 pour connaître la masse d'un objet orange. Cependant, pour cette partie, ils ont eu besoin d'assistance car David affirme : « Ben comment je vais faire, 1,50 ça ne se sépare pas en 2 ». L'étudiante-chercheure décompose alors le nombre et demande aux élèves de diviser successivement 1kg et 0,5kg en 2 et les laisse poursuivre. Il aurait été intéressant de demander à David de justifier ce qu'il avance. Au terme de la résolution de ce problème, David formule ainsi leur raisonnement « On a trouvé la poids de ça, on a trouvé le poids de ça. Vu qu'il y avait le même nombre de gros, on s'est dit que ces deux-là sont le même poids que lui. Là, ces deux cubes-là, ça donne ça. Donc, on a divisé ça, on a vu que ça donne 1,50 pour ces deux-là donc là on a divisé ça en 2, ça donne le vrai poids du petit, 0,75. On a regardé lui pour savoir le poids de tous ceux-là parce qu'ils sont aussi 4 là faque on a pris lui moins ça pour qu'il ne soit plus là lui après ça ça nous a donné 2,40 mais je crois qu'on a fait une erreur de calcul…là faut juste qu'on additionne ça +ça+ça pour trouver la réponse mais on n'a pas encore trouvé ». L'étudiante-chercheure invite les élèves à comparer les cases B et D, ce qui permet à David d'affirmer : « Ah ok je fais juste ,75 plus 3,1 ».

3. Rébecca et Hélène ont rapidement résolu cette tâche pour laquelle Rébecca a eu le temps d'inscrire le raisonnement suivant : si on regarde le A et le B c'est le même poids (kilos) et les 2 petits sont égaux au moyen parce que le kilogramme total est égal et il y a le même total de gros. Puis on regarde le C qui donne 2 petits qui égalent à un moyen alors je fais le kilogramme (elle a remplacé dans le C les 2 petits par 1 moyen) et divise en deux le prix du moyen qui donne le prix du petit. Tu vas au B tu fais le prix total moins le prix du moyen qui donne le kg total sans le moyen (3,1 – 1,5 = 1,6). Après ça tu divises le total qui t'as donné sans le moyen en 4 qui te donne le prix d'un gros (1,6 ÷ 4 = 0,4). Le D on fait 0,4 + 0,4 + 0,4 + 0,4 + 1,5 + 0,75 = 3,85

4. Gael et Réjean : « on a remarqué qu'il y avait les 4 gros, ces deux-là ont le même chiffre, la différence c'est ça. On s'est dit que ça équivaut à ces deux petits là...Là ici la moitié de 3 donc 1,50 ok on s'est dit que 75+75 sous …1,5+1,5 égal à 3. 3,1 moins 1,5 et là divisé en 4 ça donné point 40…J'ai vérifié en checkant ça si ça marche ici (case A) et ici ça veut dire que c'est bon. On a toute additionné pour le D. On a alors obtenu 3,85.

Une seconde démarche a permis à Guy et Gaudi de trouver la masse totale des objets de la case D. Cette démarche repose toujours sur la masse de chacun des objets, tel qu'expliqué ci-dessous :

a. Ils procèdent d'abord par essais et erreurs à partir de la case C : 0,5 kg pour le petit orange. Alors l'objet noir sera de 3,0 - (0,5 x 2) = 2 kg. Ensuite, ils recherchent la masse de l'objet bleu à la case B (3,1 kg – 2 = 1,1; 1,1 ÷ 4 = 0,275) et exploitent la case A pour vérifier leurs hypothèses qui s'avèrent erronées. À ce moment, ils adoptent une autre démarche.

b. Ils comparent les masses des objets dans les différentes cases : entre A et C, ils notent le 0,1 kg de différence, entre A et B, ils constatent que c'est la même masse. Ensuite, ils comparent les constitutions des quatre cases. Ils décident de réunir les cases A et B (3,1 +3,1 = 6,2) et d'y soustraire la case C afin d'obtenir la masse pour une seule sorte d'objet. Ainsi, ils trouvent que l'objet bleu est de 0,4 kg (6,2 – 3 = 3,2; 3,2 ÷8 = 0,4kg) et à l'aide des bouquets A et B, ils trouvent les masses des objets noirs et oranges (1,50kg et 0,75kg). Enfin, pour la case D, ils ont fait la somme de chacune des masses.

La troisième démarche, pour sa part plus économique, a été déployée par Prince et Martin. Prince explique ainsi son raisonnement :

« Vu que ces quatre-là revenaient dans le A et le B, j'ai vu qu'ils ont la même masse donc le gros est égale à 2 petits. Après j'ai divisé par deux et ça m'a donné 1,05 (1,50) et là j'ai fait 1,5 – 3,1= 1,6. Là, il fallait que je trouve les deux petits car j'avais le gros. J'ai fait 1,5 divisé par 2, ça m'a donné 0,75kg. Pour savoir ce que je cherchais j'ai additionné le 1,6 + 1,5 + 0,75 pis j'ai écrit la réponse 3,1 kg pour D. »

Évolution des rapports des élèves aux nombres rationnels et de la démarche d'acculturation institutionnelle

L'enseignement de la division des nombres décimaux effectué par l'enseignante montre bien les effets du processus d'acculturation. En effet, sans qu'il y ait concertation, l'enseignement dispensé montre un maillage important entre ce qui a été fait par l'enseignante et les chercheures, maillage qui rend compte de l'exploitation de diverses représentations, qui, selon la situation, permettent de recourir à une démarche plus économique. Selon son témoignage, elle était d'ailleurs particulièrement fière et satisfaite des adaptations qu'elle avait apportées à son enseignement usuel.

D'autre part, dans l'activité des poids, nous remarquons que les élèves s'appuient davantage aux relations entre les compositions et les sommes respectives des poids inscrits dans chacune des cases que dans la situation « Dites-le avec des fleurs ». Certains ont exploité les mêmes démarches, citons à titre d'exemples, Prince qui prenait le temps de s'attarder aux régularités dans les compositions de chacune des cases et Gael qui vérifiait toujours ses résultats à l'aide de cases inutilisées. Bien que cette façon de faire de Gael était nécessaire dans l'activité « Dites-le avec des fleurs », car il utilisait certaines relations et avait recours à des procédés d'essais/erreurs, dans l'activité des poids, les relations, sur lesquelles il s'était basé, étaient suffisantes.

4.2.9. Examen d’étape sur les nombres rationnels

L’examen d’étape en mathématiques est effectué par les élèves le 27 mars 2007. Une période d’un mois s’est écoulée depuis la présentation de la dernière situation sur la division des nombres décimaux. Cette période a été consacrée à la réalisation d’un projet en géométrie intitulé « La maison de mes rêves ». L’apprentissage des nombres rationnels n’était pas lié à ce projet; l’implication des élèves était ainsi davantage orientée vers une création imaginaire d’une maison. Il nous est apparu intéressant d’assister à la réalisation de ce projet, cette participation nous permettant d’établir une complicité avec l’enseignante et les élèves. À la suite de ce projet, un examen d’étape sur les nombres rationnels et la géométrie a été présenté aux élèves. Cet examen a été préparé par les enseignantes des classes de première secondaire; il a été convenu d’aménager deux périodes de révision avant de présenter ces examens aux élèves. Nous n’avons pu malheureusement assister à ces périodes.

L’analyse des conduites des élèves, que nous effectuons maintenant, ne concerne que les questions traitant des nombres rationnels. Puisque l'examen comporte deux parties, nous avons jugé opportun de procéder successivement à l'analyse des conduites lors du traitement des questions de chacune des parties.

4.2.9.1. Analyse des conduites des élèves lors de la réalisation de la première partie de l’examen

Dans la première partie de l’examen, les élèves sont invités à effectuer divers calculs sur les nombres rationnels, à représenter et à comparer des nombres rationnels. Nous examinons d’abord les conduites des élèves lors de la réalisation des calculs.

Analyse des conduites des élèves lors de la réalisation des calculs

Pour effectuer les calculs que comporte la première partie de l’examen, les élèves n’ont pas accès à leur calculatrice. Le tableau suivant donne un aperçu des réussites et des échecs des élèves lors de la réalisation de ces calculs. Avant de présenter ce tableau, nous reproduisons les questions des énoncés en jeu :

5. Effectue :
   a. 3 x 100 = __________
   b. 3,45 x 100 = __________
   c. 123 456,77 x 1000 = __________
   d. 4,5 ÷ 10 = __________

6. Complète avec 10, 100 ou 1000
   a. 13 x _____ = 1300
   b. 7,45 ÷ _____ = 0,745
   c. 1300 ÷ _____ = 1,3

11. Calcule :
   a. 1,2 x 2 = __________
   a. 3,5 x 2,1 = __________

13. Quel montant d'argent est le plus élevé? (encercle la réponse).

   a) Les 2/3 de 75$ b) Le ¼ de 160$

14. Julien a les 3/10 de l'âge de sa mère qui a 40 ans. Quel âge a Julien?

   Démarche :

   Réponse : __________

18. Effectue les opérations suivantes et exprime le résultat à l'aide d'un nombre fractionnaire.
   a. 6 4/9 – 2 2/9 = __________
   b. 8 3/8 + 3 5/8 = __________
   c. 12/9 – 12/36 = __________
   d. 4/6 + 13/30 = __________

Parmi ces calculs, nous retrouvons des multiplications et des divisions de nombres décimaux par des nombres correspondant à des puissances de 10, des additions et des soustractions de fractions, des multiplications de nombres entiers par des fractions. Pour chacune de ces questions, nous indiquons: a) la réponse attendue par les enseignantes; b) la liste des élèves qui ont produit la réponse attendue; c) la liste des élèves qui n'ont pas produit la réponse attendue ou qui n'ont donné aucune réponse (Échec).

Tableau XXIX:Appréciation des conduites des élèves lors de la réalisation de calculs impliquant des nombres rationnels

Item : réponse attendue	Réussite	Échec (réponse incorrecte ou aucune réponse)

5a : 3x100 = *300*	Prince, David, Anne, Noa, Gael, Alex, Rémi, Bertrand, Rebecca, Gaudi, Samuel, Martin, Réjean	
5b : 3,45 x 100 = *345*	Prince, David; Anne, Gael, Alex, Bertrand, Rebecca, Samuel, Martin, Réjean	Noa (300,450), Rémi (382,45), Gaudi (34,5)
5c : 123456,77 x 1000 = *123456770*	Prince; David; Anne; Gael, Alex, Bertrand, Rebecca, Gaudi, Samuel, Réjean	Noa (123456000,7700) , Rémi (131160,47147), Martin (rien)
5d : 4,5 ÷10 = *0,45*	Prince; David, Noa, Gael, Alex, Bertrand, Rebecca, Gaudi, Samuel, Martin, Réjean	Anne (2) , Rémi (4)
6a : 13 x *100* = 1300	Prince; David ; Noa, Gael, Alex, Rémi, Bertrand, Rebecca, Gaudi, Samuel, Martin, Réjean	Anne (10)
6b : 7,45 ÷*10* = 0,745	Prince; David ; Noa, Gael, Alex, Rémi, Bertrand, Rebecca, Gaudi, Samuel, Martin, Réjean	Anne (100)
6c : 1300 ÷ *1000* = 1,3	Prince; David; Noa, Gael, Alex, Rémi, Bertrand, Rébecca, Gaudi, Samuel, Martin, Réjean	Anne (100)
11a :1,2 x 2 = *2,4*	Prince, Anne, Noa, Gael, Alex, Rémi, Bertrand, Rebecca, Gaudi, Samuel, Martin, Réjean	David (3,2)
11b : 3,5 x 2,1 = 7,35	Prince, Gael, Rémi, Bertrand, Rebecca, Gaudi, Samuel, Martin, Réjean	David (5,6), Anne (6,5), Noa (10,5) ; Alex, (4,35)
13 : A A- 2/3 x 75 = 50 B- ¼ x 160 = 40	Prince; Anne, Noa, Gael, Alex, Rémi, Rebecca, Gaudi, Samuel, Martin, Réjean	David (B), Bertrand (B)
14 : 3/10 *x* 40 = *12*	Prince, David, Gael, Alex, Rebecca, Gaudi, Samuel, Martin, Réjean	Anne (13); Noa (1), Rémi (26), Bertrand (30)
18a : $6\frac{4}{9}-2\frac{2}{9}=$ *4 2/9*	Pince, Anne, Gael, Rémi, Bertrand, Rebecca, Gaudi, Samuel, Martin, Réjean, David	Noa (4,2) ; Alex, (522/180)
18b : $8\frac{3}{8}+3\frac{5}{8}=$ *12*	Prince, Anne, David; Noa; , Gael, Alex, Gaudi, Samuel, Rémi, Bertrand, Rebecca, Martin, Réjean	Anne ($12\frac{7}{8}$)
18c : $\frac{12}{9}-\frac{12}{36}=$ *4*	Prince, David, Noa, Gael, Bertrand, Rebecca, Gaudi, Samuel, Martin, Réjean	Rémi (rien) ; Anne ($1\frac{8}{9}$) ; Alex (54/27)
18d : $\frac{4}{6}+\frac{13}{30}=$ 1 3/30 = 1 1/10	Prince, David, Bertrand, Gaudi, Samuel, Rebecca, Gael, Alex, Martin, Réjean.	Rémi (rien) ; Anne ($3\frac{5}{6}$) ; Noa (0,23)

La majorité des élèves ont effectué correctement les calculs proposés. Seule Anne n'a pu effectuer correctement que la moitié des calculs; il importe de rappeler que cette élève présente des problèmes importants (problèmes associés à des troubles envahissants du développement). Il nous est cependant difficile d’interpréter la plupart des réponses erronées produites par cette élève, d’autant plus qu’elle n’a souvent laissé aucune trace des calculs qu’elle a effectués.

La première erreur commise par Gaudi (5b) est étonnante, compte tenu de la simplicité du calcul (5b: 3,45 x 100=?) et du fait qu'il a réussi tous les autres calculs. Il semble que cet élève a tout simplement multiplié par 10. Les méprises de Noa (nos 5b et 5c) et de Rémi (no 5b) sont davantage révélatrices d'une non-maîtrise de la multiplication d'un nombre décimal par une puissance de 10. Par exemple, pour effectuer le calcul suivant "3,45 x 100" (no 5b), Noa traite chacune des parties du nombre décimal, comme si elles étaient indépendantes : il ajoute à la partie entière, autant de zéros qu'en contient le multiplicateur (3 devient alors 300) et à la partie décimale, un nombre de zéros suffisant pour que le nombre obtenu soit dans les centaines (,45 devient alors ,450). Les traitements des nombres présentés aux numéros 5a et 5b effectués par Rémi sont aussi, pour le moins inattendus, et relèvent d'une application erronée de l'algorithme de la multiplication. Par exemple, pour multiplier 3,45 par 100 (no 5a), il multiplie d'abord 345 par 1, puis 345 par 10, puis 345 par 100; l'addition de ces produits partiels lui donne alors le nombre 38245, puis le nombre 382,45. Par ailleurs, il importe de relever que lorsqu'il ne s'agit pas de multiplications de nombres décimaux par des nombres entiers qui soient des multiples de 10, Rémi ne commet aucune erreur, ce qui n'est pas le cas pour d'autres élèves, notamment pour Noa, David et Alex. Ainsi, au numéro 11, David a confondu la multiplication avec une addition. Au numéro 11b, Noa effectue ainsi le calcul 3,5 x 2,1 : 3,5 x 1= 3,5 ; 3,5 x 2 = 7,0 ; 3,5 + 7,0 = 10,5; si l'on exclut l'erreur commise par cet élève qui au lieu de multiplier 3,5 par 0,1 a multiplié 3,5 par 1, sa démarche repose sur une prise en compte de la distributivité de la multiplication sur l'addition. Le calcul effectué par Alex au numéro précédent est le suivant:

$$\begin{array}{r} \overset{1}{3}5 \\ \times\ 21 \\ \hline 35 \\ +\ 400 \\ \hline 4{,}35 \end{array}$$

Pour obtenir le nombre 400, il a d'abord ajouté un 0 sous le chiffre 5, reproduisant alors les gestes usuels; il a ensuite multiplié 5 par 2 et reporté le chiffre 1 au-dessus du chiffre 3, reproduisant à nouveau les gestes usuels; mais, au lieu de multiplier ensuite 3 par 2 et ajouter la retenue, il a multiplié 3 par 1 et ajouté la retenue. Il a ensuite inséré une virgule dans le produit 435, produisant alors le nombre 4,35.

Pour répondre à la question 13, les élèves devaient déterminer le montant d'argent correspondant à une fraction d'un montant total; deux fractions et deux montants d'argent différents étaient alors proposés. Ils devaient ensuite identifier le montant d'argent le plus élevé qu'ils pourraient ainsi obtenir. Comme le montre le tableau, la question 13 a été fort bien réussie. Il faut dire que les élèves avaient l'habitude d'exploiter le truc mnémotechnique (inscrit dans les notes de cours sur la multiplication) consistant à substituer le « de » par la « x » dans le choix de l'opération appropriée. David a fourni une réponse erronée en ne considérant que le dénominateur des fractions dans le calcul effectué (160 ÷ 4 vs 75 ÷ 3); il a ainsi obtenu un résultat plus élevé pour ¼ de 160 (40) que pour 2/3 de 75 (25). Bertrand n'a effectué aucun calcul, se contentant, il nous semble, de comparer les montants d'argent.

En ce qui concerne la question 14, l'augmentation du nombre d'erreurs peut peut-être s'expliquer par la non référence explicite à un texte évocateur du calcul attendu. Par exemple, Bertrand a plutôt fait appel à la soustraction (40/1 – 3/10 = 400/10 – 3/10 = 397/10…397÷10 = 39… 30) pour marquer la différence d'âge entre la mère et son fils. Pour sa part, Noa a répondu 1 an, effectuant les calculs suivants « 40 ÷ 10 = 4 et 4 ÷ 3 =1 »; cette démarche est difficile à interpréter, d'autant plus que cet élève avait trouvé sans difficulté les 2/3 de 75. Est-ce que le contexte a pu influencer sa démarche? Est-ce que sa démarche est due à l'absence d'un texte évocateur du calcul? Rémi a repris, en partie, les nombres du numéro précédent (no 13), en recherchant le 2/3 de 40 au lieu du 3/10 de 40, ce qui explique son erreur [2/3x 40/1 = 80/3; 80 ÷ 3 = 26].

Comme en fait état le tableau précédent, au numéro 18 de l'examen, les élèves devaient effectuer deux additions et deux soustractions de fractions et de nombres fractionnaires. Les erreurs commises lors de ces calculs, comme le montre le tableau, sont peu nombreuses; pour chacun des calculs, le nombre d'erreurs varie entre 1 et 4. Au numéro 18a, Noa a plutôt traité les parties entières et fractionnaires de façon indépendante, ce qui, au regard des nombres proposés, constituait une procédure légitime; il a effectué les calculs suivants «6 - 2 = 4 et 4/9 – 2/9 = 2/9», mais a inscrit comme réponse 4,2. Yan a considéré les soustractions, en a et en c, comme des divisions. Ainsi, au numéro 18a, devant faire le calcul « 6 4/9 - 2 2/9 », il a procédé de la façon suivante: il a représenté chacun des nombres par une fraction, obtenant alors 58/9 et 20/9; il a effectué la multiplication suivante « 58/9 x 9/20 » (inversant cette seconde fraction), obtenant alors 522/180; il fait quelques tentatives pour réduire cette fraction, mais abandonne rapidement et écrit pour réponse 522/180. Enfin, comme en fait état le tableau, le nombre d'erreurs commises par les élèves, lors des additions (numéros 18b et 18d), sont encore moins nombreuses que celles observées lors des soustractions. La première addition, soit « 8 3/8 + 3 5/8 », n'a été échouée que par Anne ; elle obtient bien 96/8, mais y associe le nombre fractionnaire 12 7/8 ; il est possible qu'elle ait répondu à la demande de présenter un nombre fractionnaire. Deux élèves, soit Anne et Noa, n'ont pas effectué correctement l'addition « 4/6 + 13/30 ». Pour obtenir 3 5/6, Anne effectue la division de 30 par 13, obtenant alors 3 reste 1; elle ajoute le reste au numérateur de la fraction 4/6 obtenant alors 5/6, puis 3 5/6. La conduite de Nic est pour le moins inattendue; en effet, il exprime correctement la fraction 4/6 en utilisant le dénominateur de la fraction 13/30, obtenant ainsi 20/30 ; il inscrit toutefois le nombre 0,23 ; mais ne laisse aucune trace de ce passage.

Analyse des conduites des élèves lors de la réalisation des tâches sur les représentations de nombres rationnels

La première partie de l'examen comprenait 5 questions portant sur les représentations de nombres rationnels, soit les numéros 10, 12, 15, 16 et 17. Nous reproduisons ci-dessous ces énoncés :

«

10. Utilise les fractions suivantes, (1/2, ¼, ¾, 7/10, 3/5) pour compléter les égalités.
    a. 0,7 = __________
    b. 0,5 = __________
    c. 0,25 = _________
    d. 0,6 = __________

12. Transforme les pourcentages ci-dessous en nombres décimaux.

    a. 15% = __________
    b. 4% = ___________

15. Trouve la fraction irréductible de chacune des fractions suivantes.
    a) 8/32 = ______ b) 9/63 = ______ c) 7/42 = _______

16. Exprime les nombres fractionnaires suivants en fractions impropres.
    a) 6 2/3 _______ b) 8 1/10 _________

17. Exprime les fractions en nombres fractionnaires.
    a) 42/5 ________ b) 37/2 _________ »

Au tableau suivant, comme nous l'avons fait précédemment, pour chacune des questions, nous indiquons: a) la réponse attendue par les enseignantes; b) la liste des élèves qui ont produit la réponse attendue; c) la liste des élèves qui n'ont pas produit la réponse attendue ou qui n'ont donné aucune réponse (Échec).

Tableau XXX:Appréciation des conduites des élèves lors de la réalisation des tâches sur les représentations des nombres rationnels

ITEM : REPONSE ATTENDUE	REUSSITE	ÉCHEC (REPONSE INCORRECTE OU AUCUNE REPONSE)
10a : 0,7 = *7/10*	Prince, David, Anne, Noa, Gael, Alex, Rébecca, Gaudi, Samuel, Martin, Réjean, Marcel, Anne	Rémi (3/5); Bertrand (3/5)
10b : 0,5 = *½*	Prince, David, Anne, Noa, Gael, Alex, Rémi, Bertrand, Gaudi, Samuel, Martin, Réjean,	Rébecca (3/5) ; Marcel (3/5), Anne (3/4)
10c : 0,25 = *¼*	Prince, Anne, Noa, Gael, Alex, Bertrand, Rébecca, Gaudi, Samuel, Martin, Réjean, Marcel, Anne	David (3/5); Rémi (3/5)
10d : 0,6 = *3/5*	Prince, Anne, Noa, Alex, Gaudi, Samuel, Martin, Réjean, Anne	David (3/4); Gael (3/4); Rémi (1/4); Bertrand (7/10); Rébecca (1/2); Marcel (1/2)
12a : 15% = *0,15*	Prince, Noa, Alex, Bertrand, Gaudi, Samuel, Martin, Marcel	Anne (15,00); Gael et David (pas de réponse); Rémi (3/20); Rébecca (20); Réjean (15/100), Anne (15,00)
12b : 4% = *0,04*	Prince, Bertrand, Gaudi, Samuel	Anne (4,00); Noa (0,4); Gael et David (pas de réponse); Alex (0,4); Rémi (1/25); Rébecca (25); Martin (0,004); Réjean (4/100); Marcel (0,4), Anne (4,00)
15a : 8/32 = *¼*	Prince, David, Gael, Alex, Rémi, Bertrand, Rébecca, Gaudi, Samuel, Martin,	Anne (2/8); Noa (1/3); Réjean (2/8); Marcel (1/2)
15b : 9/63 = *1/7*	Prince, David, Anne, Alex, Bertrand, Samuel, Martin, Jesse	Noa (9/63); Gael (3/31) Rébecca (3/23); Gaudi (1/9); Réjean (3/32,9), Marcel (7/4)
15c : 7/42 = *1/6*	Prince, Anne, Alex, Rémi, Bertrand, Rébecca, Gaudi, Samuel, Martin, Réjean	David (pas de réponse) ; Noa (7/42); Gael (7/42), Marcel (7/6)

16a : $6\frac{2}{3}=\frac{20}{30}$	Prince, David, Noa, Gael, Alex, Rémi, Bertrand, Rébecca, Samuel, Martin, Réjean	Anne (8/3); Gaudi (18/3) , Marcel (26/3)
16b : $8\frac{1}{10}=\frac{81}{10}$	Prince, David, Noa, Gael, Alex, Bertrand, Rébecca, Gaudi, Samuel, Martin, Réjean	Anne (9/10); Rémi (81), Marcel (81/10)
17a : $\frac{42}{5}=8\frac{2}{5}$	Prince, David, Noa, Gael, Rémi, Bertrand, Gaudi, Samuel, Réjean	Anne (38 4/5); Alex (5/42); Rébecca (8 4/5); Martin, Marcel (92/5)
17b : $\frac{37}{2}=18\frac{1}{2}$	Prince, David, Noa, Gael, Bertrand, Gaudi, Samuel, Réjean	Anne (35 ½); Alex (2/37); Rébecca (18 5/2); Rémi (16 ½); Martin , Marcel (14 ½)

Comme le montre ce tableau, de prime abord, les résultats pour l'ensemble de la classe sont relativement décevants. Par ailleurs, les fréquences de réponses erronées sont variables; ce sont, en effet, lors de questions portant sur les représentations de pourcentages en nombres décimaux ou encore, de questions portant sur les représentations de fractions impropres par des nombres fractionnaires, que l'on observe les fréquences les plus élevées. Il importe de souligner que le traitement de ces représentations n'a pas occupé une place importante dans les situations d'enseignement. Et, plus encore, dans les situations impliquant de telles représentations, les élèves ont plutôt été invités à représenter un nombre décimal par un pourcentage et un nombre fractionnaire par une fraction impropre, comme en témoignent leurs notes de cours. Mais, pour mieux identifier les difficultés des élèves, nous procédons à une analyse de leurs réponses à chacune des questions.

Plus précisément, à la question 10, les élèves devaient associer à chacun des nombres décimaux proposés, une des fractions, parmi celles qui leur étaient proposées, correspondant à chacun des nombres précédents. Devant la simplicité de la tâche, nous avons été étonnée de la difficulté rencontrée par certains élèves : a) 3 élèves n'ont pu associer le nombre 0,5 à ½ (Rébecca, Marcel et Anne) et deux élèves, le nombre 0,25 à ¼ (David et Rémi), bien que ces nombres figuraient dans plusieurs situations antérieures et qu'ils leur étaient donc relativement familiers; b) 6 élèves n'ont pas associé 3/5 au nombre 0,6; tous ces élèves avaient associé la fraction 3/5 à d'autres nombres.

À la question 12, les élèves devaient associer un nombre décimal à chacun des pourcentages qui leur étaient présentés. Comme le montre le tableau, 7 élèves n'ont su répondre correctement à la question 12a et 11 élèves, à la question 12b. La majorité des élèves laissent peu de traces de leurs démarches, d'où la difficulté d'interpréter leurs réponses (ex. : 12 a – Rébecca : 15% = 20). Nous pouvons penser que Réjean et Rémi ont mal compris la consigne en recherchant plutôt une représentation fractionnaire (ex. : Rémi- 12a : 15% = 3/20; 12b : 4% = 1/25; Réjean- 12a : 15% = 15/100; 12b : 4% = 4/100). Pour leur part, Noa, Alex et Martin ont commis des « erreurs de positionnement » dans la notation décimale de 4% (0,4 , 0,4 et 0,04). Notons également que David et Gael n'ont pas répondu à cette question

À la question 15, les élèves devaient trouver la fraction irréductible associée à chacune des fractions proposées. Les réussites à cette question sont plus satisfaisantes que celles enregistrées à la question 12; les nombres d'erreurs se répartissent ainsi : 15a) 4; 15b) 6; 15c) 4. Au numéro 15a, Anne et Réjean ont procédé à une première réduction de la fraction 8/32, obtenant alors 2/8; ils n'ont toutefois pas poursuivi la réduction. Toujours pour le numéro 15a, ayant inscrit 1/3, Noa réduit la fraction 8/32 à 4/12, puis à 2/6, puis à 1/3; sa démarche est pertinente, bien qu'il commette une erreur (possiblement, une erreur de tables, puisqu'il divisait toujours chacun des nombres par 2) dans la réduction de la fraction 8/32 à 4/12. Cet élève n'est pas le seul à commettre des erreurs dans les divisions des nombres apparaissant aux numérateurs et aux dénominateurs; on remarque aussi qu'au numéro 15b, Réjean, Rébecca et Gael commettent aussi de telles erreurs. De son côté, au numéro précédent, Gaudi a associé 1/9 à 9/63, tout en ayant obtenu 7 lors de la division de 63 par 9; nous avons pu voir qu'une telle erreur était relativement fréquemment commise par cet élève. Au numéro 15c, Noa et Gael ne procèdent pas à la réduction de la fraction 7/42; par ailleurs, comme le montre le tableau, ce numéro ne semble pas être source de difficultés pour la grande majorité des élèves.

La question 16 requiert la transformation d'un nombre fractionnaire en fraction impropre, alors que la question 17 fait appel au processus inverse. Il nous semble important de mentionner que dans leurs notes de cours, les élèves avaient inscrit une procédure permettant le passage d'un nombre fractionnaire à une fraction impropre, mais pas l'inverse. Les traitements des nombres effectués par Anne pour répondre aux questions précédentes sont, pour le moins, inusités. En effet, pour exprimer le nombre fractionnaire 6 2/3 par une fraction impropre (numéro 16a), elle procède ainsi : 6 + 2 = 8; 8/3 (addition du nombre entier 6 et du numérateur 2 de la fraction 2/3 et report du dénominateur); elle utilise ce procédé pour répondre au numéro 16b, mais reporte le dénominateur utilisé au numéro 16a. Les procédés de transformation des nombres fractionnaires en fractions impropres (numéro 17) effectuées par cette élève semblent inspirés par les procédés utilisés au numéro précédent : a) 42/5 est associé au nombre 38 4/5; b) 37/2 est associé au nombre 35 ½ (cette élève ne laisse aucune trace de ses démarches; on ne peut savoir d'où vient le choix de 35 ½ au lieu de 36 ½).

Établir des relations entre les procédés de transformation de nombres fractionnaires en fractions et les procédés de transformation de fractions en nombres fractionnaires n'est pas « chose évidente ». Ainsi, Alex réussit à représenter les nombres fractionnaires en fractions impropres (numéro 16), mais émet des réponses «insensées» lorsqu'il s'agit d'effectuer la démarche inverse (numéro 17); il se contente alors d'inverser le numérateur et le dénominateur de chacune des fractions (42/5 → 5/42; 37/2 → 2/37). De même que Alex, Martin sait exprimer les nombres fractionnaires en fractions impropres (numéro 16), mais s'abstient de répondre au numéro 17. Mentionnons également que pour la question 16a, Gaudi n'a tenu compte que du nombre entier, faisant partie de la fraction initiale « 6 2/3 », écrivant alors 18/3; cet élève avait par ailleurs représenté adéquatement les nombres fractionnaires par des fractions impropres au numéro précédent. Enfin, dans le traitement de la fraction « 8 1/10 », Rémi a omis le dénominateur, produisant alors le nombre 81.

Comme le montre le tableau et, comme nous l'avons souligné, plus du tiers des élèves ne parviennent pas à exprimer les fractions en nombres fractionnaires (numéro 17). Nous avons déjà fait état du traitement effectué par Alex. Quelques élèves commettent des erreurs de traitement des nombres composant les fractions (Rémi, Rébecca); leurs réponses montrent toutefois une compréhension des relations entre les représentations présentées.

Analyse des conduites des élèves lors des la réalisation des tâches sur la comparaison de nombres rationnels

La comparaison de nombres rationnels occupe un espace non négligeable dans l'examen d'étape présenté aux élèves; une telle comparaison est présente dans 3 des questions que comporte cet examen, à savoir les questions, 7, 19 et 20, que nous reproduisons ci-dessous :

« 7. Après avoir mesuré les élèves de la classe, on a placé les résultats dans ce tableau.

Prénoms	Grandeurs
Louis	1,17 m
Philippe	1,32 m
Benoit	1,34 m
Claude	1,41 m
Simon	1,45 m
Martin	1,52 m
Alexandre	1,58 m
Albert	1,59 m
Zacharie	1,61 m

Quels élèves ont entre 1,4 m et 1,5 m? ____________________________

19. Roxanne a réussi les 5/6 de l'examen de français, les 7/10 de l'examen d'anglais et les ¾ de l'examen de mathématique.

a) Dans quelle matière a-t-elle le mieux réussi? ___________

b) Dans quelle matière a-t-elle le moins bien réussi? __________

Démarche :

20. Simon a réussi 45 des 60 problèmes qui constituaient son devoir, alors que Josée-Anne a réussi 16 des 20 opérations qui constituaient le sien. Lors du deuxième devoir, Simon a réussi 32 problèmes sur 45 opérations et Josée-Anne en a réussi 18 des 36.

Lequel ou laquelle a réalisé la plus grande partie de son devoir la première fois?
Lequel ou laquelle a réussi la plus grande partie de son devoir la seconde fois?
Si on avait à donner une seule retenue à l'un de ces deux élèves, qui la mériterait?

Le tableau suivant fait état des résultats des élèves dans la réalisation de ces activités de comparaison.

Tableau XXXI:Appréciation des conduites des élèves lors de la réalisation des tâches sur la comparaison de nombres rationnels

Item : réponse attendue	Réussite	Échec (réponse fournie)
7 : Claude et Simon	Prince, David, Noa, Gael; Alex, Bertrand, Gaudi; Martin;	Anne (0); Rémi (Zacharie, Martin, Alexandre); Rébecca (Simon, Martin); Samuel (Claude, Simon, Martin, Alexandre, Albert); Réjean (Simon)
19a : français	Prince; David, Anne, Noa, Gael;	Rémi (math)

	Alex, Bertrand; Rébecca, Gaudi; Samuel, Martin; Réjean	
19b : anglais	Prince; David, Noa, Gael; Alex, Rémi; Bertrand; Rébecca, Gaudi; Samuel, Martin; Réjean	Anne (math)
20a : Josée-Anne	Prince; David, Anne, Noa, Gael; Alex, Bertrand; Rébecca, Gaudi; Samuel, Martin	Rémi (Simon), Réjean (Simon)
20b : Simon	Prince; Noa, Bertrand, Gaudi; Samuel, Martin; Réjean, Rémi, Gael	Anne (les 2), Alex (personne), Rébecca (Josée-Anne), David (pas de réponse)
20c : Josée-Anne	Prince; Anne, Gael; Alex, Rémi, Bertrand; Gaudi, Martin; Réjean	Rébecca (Simon), Samuel (Simon), Noa (Simon), David (pas de réponse)

La question 7 relève d'une tâche d'encadrement de nombres décimaux situés entre 1,4 et 1,5. Puisque tous les nombres comportent le même nombre de décimales, la tâche peut sembler « fort triviale ». Si nous nous référons aux études effectuées sur la comparaison de nombres décimaux (voir, entre autres, les études effectuées par Grisvard et Léonard (1981) et par Roditi (2007)), même les élèves qui considéreraient ces nombres comme des nombres entiers pourraient parvenir facilement à ordonner ces nombres et ainsi, à répondre à la question. Cependant, comme le montre le tableau précédent, 8 élèves seulement produisent une réponse juste. Et, plus encore, parmi les élèves qui ne répondent pas correctement, on retrouve quelques élèves qui généralement montrent une compréhension des nombres rationnels supérieure à celle des autres élèves. Il en est ainsi des élèves Samuel, Rébecca, Réjean. Pour simplifier la lecture des analyses, plutôt que d'indiquer les noms des élèves dont les mesures se situent entre 1,4m et 1,5m, nous avons choisi d'indiquer les mesures choisies par les élèves. Samuel situe ainsi les nombres 1,41, 1,45, 1,52, 1,59, entre 1,4 et 1,5; nous n'avons pas de données qui nous permettraient d'interpréter les choix effectués par cet élève. Sur sa feuille, on peut voir toutefois que cet élève a encadré les nombres entre 1,41 et 1,59 inclusivement, comme s'il avait interprété la question de la façon suivante : « tous les nombres qui ont les chiffres 4 ou 5 aux dixièmes », une telle interprétation étant peut-être attribuable à la formulation de la question. De son côté, Rébecca choisit les nombres suivants : 1,45 et 1,52. Réjean n'a choisi que le nombre 1,45.

La question 19 requiert la comparaison entre les fractions suivantes : 5/6, 7/10 et ¾. Presque tous les élèves répondent correctement à chacune des questions que comporte ce numéro. Parmi les 12 élèves qui répondent correctement, 8 élèves représentent chacune de ces fractions en recourant à un dénominateur commun, soit 60, 2 élèves représentent chacune de ces fractions en choisissant 100 comme dénominateur commun, 1 élève recourt aux pourcentages et enfin, 1 autre élève représente chacune de ces fractions en choisissant 10 comme dénominateur commun. Chez les élèves qui échouent, les conduites sont respectivement les suivantes : a) Rémi n'a inscrit aucune démarche, il s'est contenté d'écrire que la matière la mieux réussie était les mathématiques. Anne a indiqué, en réponse à la question 19b, que c'était l'examen de mathématiques qui était le moins bien réussi; pour ce faire, elle a choisi 10 pour dénominateur et a simplement reproduit chacun des numérateurs, obtenant alors les fractions suivantes : 5/10, 7/10 et 3/10.

La question 20 est relativement similaire à la question 19. Le contexte est toutefois plus développé. La troisième question du numéro 20 joue par ailleurs un rôle relativement important. En effet, si les élèves peuvent, comme au numéro 19, répondre relativement facilement à chacune des deux premières questions, ils doivent toutefois, pour répondre à la troisième question, considérer chacune des fractions. Ainsi, pour le premier devoir, Simon a réussi 45/60 et Josée-Anne 48/60; cette dernière devance donc très légèrement Simon (1/20); en revanche, pour le second devoir, Simon a réussi plus que les deux tiers de son devoir et Josée-Anne a, de son côté, réussi la moitié de son devoir. On peut conclure aisément que Josée-Anne mériterait une retenue. Une telle analyse, il va de soi, n'est pas celle attendue des élèves. Par ailleurs, ce problème invite les élèves qui recherchent une solution économique à faire appel à des représentations des nombres, à s'attarder aux relations entre les nombres, car l'obtention du dénominateur commun, habituellement trouvé en multipliant les deux dénominateurs, pourrait s'avérer peu efficace. Il est toutefois fort possible, puisque ce problème évoque une situation scolaire courante, soit l'évaluation par l'enseignant des réponses des élèves, que certains élèves représentent les résultats de chacun des élèves en recourant à des pourcentages et qu'ils appliquent alors la « technique du produit croisé », technique privilégiée dans l'enseignement ou qu'ils tiennent compte du nombre différents d'exercices dans les deux devoirs en faisant appel au sens rapport rapport de la fracton en comparant 77/105

(45/60+32/45) et 35/56 (16/20 + 18/36) et ce, sans avoir recours à un dénominateur commun.

Comme en fait état le tableau, les résultats des élèves sont relativement positifs : a) seulement deux élèves répondent incorrectement à la question 20a; b) quatre élèves répondent incorrectement à la question 20b; c) quatre élèves répondent incorrectement à la question 20c. Dans un premier temps, nous rendons compte d'abord des démarches des élèves qui ont traité correctement l'ensemble des questions; il s'agit des élèves Prince, Bertrand, Gaudi et Martin. Pour chacun des devoirs, Bertrand et Gaudi ont eu recours aux pourcentages pour représenter les rapports entre les problèmes réussis et les problèmes présentés, exploitant alors la « technique du produit croisé »; il pouvait alors répondre à la question 20c, sans procéder à d'autres calculs. Les élèves Prince et Martin ont représenté les rapports entre les problèmes réussis et les problèmes présentés, lors du premier devoir (question 20a), en recourant au dénominateur commun. Pour répondre à la question 20b, Martin a procédé ainsi à une comparaison des rapports, puisqu'il avait rapidement perçu que 18/36 était une fraction équivalente à ½, il a alors rapidement conclu que 32/45 était une fraction plus grande que 1/2 et commenté ainsi sa démarche : « 1/2, si je prends 45, ça serait 22,5, plus haut que ½ ». De son côté, Prince a eu recours au dénominateur commun 180 pour représenter chacun des rapports, obtenant alors les fractions 128/180 (32/45), 90/180 (18/36). Prince et Martin répondent correctement à la question 20c, mais ne laissent aucune trace de leur démarche.

Bien qu'ils aient répondu correctement aux questions 20a et 20b, Noa et Samuel n'ont su répondre correctement à la question 20c. Noa a exploité la même démarche que Bertrand et Gaudi pour répondre aux questions 20a et 20b; il ne laisse aucune trace de sa démarche pour la question 20c, se contentant d'inscrire le nom de Simon. Samuel procède de la même façon que Prince pour répondre aux questions 20a et 20b; comme Noa, il inscrit le nom de Simon à la question 20c, ne laissant aucune trace de sa démarche.

Les élèves David, Anne, Gael, Alex et Rébecca ont répondu correctement à la question 20a, mais ont produit une réponse erronée pour la question 20b. Anne a représenté chacune des fractions en utilisant 6 comme dénominateur commun; elle a procédé ainsi : a) pour 45/60, elle divise par 10 le numérateur et le dénominateur, obtenant alors 5,4/6 (alors que le résultat du calcul était 4,5); b) pour 16/20, elle divise le numérateur et le dénominateur par 10; elle inscrit alors 5,1/2, puis 5,1/6. Cette élève n'a pas traité les questions 20b et 20c. David, Gael et Rébecca ont procédé de la même façon que les élèves Gaudi, Bertrand et Noa pour répondre à la question 20a. David n'a toutefois pas répondu aux questions 20b et 20c. Bien que recourant à une même démarche pour répondre à la question 20b, Gael et Rébecca ont produit une réponse erronée pour la question 20b, commettant des erreurs de calcul. Alex a eu recours à un procédé identique à celui utilisé par Martin pour répondre aux questions 20a et 20b; sa réponse erronée à la question 20b s'explique par une « erreur de tables de multiplication, soit 20 x 8 = 180». Il est à noter enfin que Gael et Alex ont répondu correctement à la question 20c.

Les élèves Jessie et Réjean ont répondu correctement aux questions 20b et 20c, tout en ayant produit une réponse erronée pour la question 20a. Les démarches de Réjean pour les questions 20a et 20b sont identiques à celles de Martin et Alex, démarches que nous avons présentées précédemment. La réponse erronée produite par Réjean pour la question 20a est attribuable à une erreur de calcul, soit « 16 x 3 = 28 ». Jessie n'a toutefois laissé aucune trace des démarches qu'il a utilisées pour répondre aux différentes questions.

4.2.9.2. Analyse des conduites des élèves lors de la réalisation de la seconde partie de l'examen

La seconde partie de l'examen accorde une place privilégiée à la résolution de problèmes additifs et multiplicatifs. Trois situations-problèmes ont été présentées aux élèves, situations, rappelons-le, qui ont été élaborées par les enseignantes de mathématiques de première secondaire. Deux d'entre elles offraient la possibilité aux élèves de choisir entre deux énoncés. Les élèves étaient autorisés à utiliser une calculatrice pour résoudre chacun des problèmes. Les enseignantes souhaitaient ainsi vérifier leur compréhension des situations-problèmes. Nous présentons chacune de ces situations et examinons les conduites des élèves.

La première situation comporte deux problèmes. L'élève est invité à résoudre un de ces problèmes. Il doit faire état de sa démarche. Voici les problèmes présentés :

« 1. Brigitte dit qu'elle a 20,53$ dans son sac, Violette déclare qu'elle a 4 pièces de 1 dollar, 209 pièces de 0,10$ et 9 pièces de 0,01$. Quelle est la plus riche? De combien?

2. Louis travaille 35 heures par semaine selon un horaire variable. Il a travaillé 8,35 heures lundi, 7,60 heures le mardi et 8,95 heures le mercredi, combien d'heures devrait-il travailler le jeudi pour n'avoir que 3 heures à faire le vendredi? »

Dans les deux problèmes précédents, les notations décimales sont exploitées. Le premier problème est un problème de comparaison de mesures d'avoir monétaire; une seule mesure est donnée, les autres mesures devant être déterminées. Bien qu'il faisait intervenir une structure secondaire multiplicative de proportionnalité simple, il est facile d'effectuer les produits, compte tenu des pièces de monnaie considérées. Le second problème est un problème additif de composition de mesures dans lequel, connaissant la mesure totale, il faut trouver la mesure qui ajoutée aux mesures déjà connues permette d'obtenir la mesure totale. Une appréciation globale des conduites de chacun des élèves, lors de la réalisation de cette situation, est effectuée au tableau suivant.

Tableau XXXII:Choix de la première situation-problème et appréciation des conduites des élèves lors de la réalisation de celle-ci.

RÉPONSES ATTENDUES	RÉUSSITES	ÉCHECS
1a. Violette	David, Rémi, Rébecca, Martin, Samuel, Bertrand	Alex (24,18); Anne (25,8)
1b. 4,46$	David, Martin, Samuel, Bertrand	Anne (5$ et 8 cents), Alex (3,60$), Rémi (aucune réponse), Rébecca (24,99$)
2. 7,1 heures	Noa, Gael, David, Alex, Samuel, Bertrand, Réjean	Gaudi (19,10)

Anne, Rémi, Rébecca et Martin ont choisi de résoudre uniquement le premier problème, tandis que Noa, Gael, Réjean et Gaudi ont opté pour le second problème. Ce dernier choix est intéressant; il est possible que ces élèves aient rapidement compris qu'il s'agissait d'un problème additif usuel, problème qui pouvait être résolu simplement ; ces élèves figurent parmi les élèves de la classe les plus avancés en mathématiques. David, Alex, Samuel, Bertrand ont effectué les deux problèmes. Lors de la résolution du premier problème, tous les élèves ont bien déterminé le nom de la personne la plus riche et le montant d'argent qu'elle possédait, à l'exception d'Alex qui a traité chacune des parties du nombre décimal comme étant des nombres entiers indépendants (4 + 20,9 + 0,9 = 24,18) et d'Anne qui a fait une erreur de calcul (9 pièces de 0,01 = 0,9). Comme le montre le tableau, si on fait abstraction de Rémi qui n'a pas répondu à cette question, de Rébecca qui s'est contentée d'indiquer le montant d'argent que possédait Violette et d'Alex qui avait à la question précédente effectué une erreur de calcul dans l'attribution du montant d'argent de Violette, une élève, soit Anne n'a pas su déterminer la différence entre les avoirs de Violette et de Brigitte. Enfin, lors de la résolution du second problème, Gaudi produit une réponse erronée; il a procédé à l'addition des nombres d'heures travaillées les lundi, mardi, mercredi, obtenant alors 23,90, au lieu de 24,90; il a effectué les calculs suivants, soit 45,00 (au lieu de 35) – 23,90 = 22,10 ; 22,10 – 3,00 = 19,10. La démarche de Gaudi est tout à fait adéquate, mais entachée d'une erreur de calcul et d'une erreur dans le report d'une des données.

La seconde situation qui a été présentée aux élèves inclut les deux problèmes suivants. Comme à la première situation, les élèves sont invités à choisir l'un d'entre eux.

« 3- La somme de trois nombres est de $19\frac{5}{36}$. Le premier est $6\frac{8}{9}$, le deuxième est $4\frac{5}{6}$. Quel est le troisième?

4- Pour confectionner des décorations, Josée a acheté 40 m de ruban. Elle en a utilisé $10\frac{2}{3}m, 12\frac{4}{5}m, 5\,m\ et\ 8\frac{1}{2}m$. Combien lui reste-t-il de ruban? »

Le premier problème est un problème de composition de mesures; connaissant deux des trois nombres qui entrent dans la composition et le nombre résultant de cette composition, il s'agit de trouver le troisième nombre. Les nombres sont des nombres fractionnaires. Le traitement de ces nombres est fortement simplifié par le fait que le dénominateur de la fraction du nombre fractionnaire qui représente la somme, soit 36, est un multiple du dénominateur de chacune des fractions des nombres fractionnaires qui entrent dans la composition. Le second problème est un problème de transformation de mesures. Connaissant la mesure de l'état initial et les transformations successives qui y sont appliquées, il est alors demandé de calculer la mesure de l'état final. La mesure initiale est représentée par un nombre entier, tandis que les mesures associées aux transformations sont exprimées par des nombres fractionnaires. Toutefois, les dénominateurs des fractions qui composent ces nombres sont tous des nombres premiers; il convient toutefois de noter qu'il s'agit de nombres premiers inférieurs à 10, ce qui facilite la recherche d'un dénominateur commun. Le tableau suivant donne un aperçu des conduites des élèves dans la réalisation de cette situation.

Tableau XXXIII: Appréciation des résultats des élèves au regard de la situation-problème choisie

RÉPONSE ATTENDUE	RÉUSSITE	ÉCHEC
2.1 $7\frac{15}{36}$	David, Gael, Rémi, Gaudi	Anne ($4\frac{8}{9}$), Noa ($8\frac{15}{36}$), Alex ($10\frac{15}{36}$), Bertrand ($1\frac{20}{36}$), Rébecca ($8\frac{9}{36}$), Martin ($7\frac{11}{36}$), Réjean ($7\frac{8}{36}$), Samuel ($7\frac{5}{36}$)
2.2 3 1/30	Samuel	

Comme le montre le tableau, un élève seulement a effectué les deux problèmes, soit l'élève Samuel. Il produit toutefois une réponse juste. Comme nous l'avions anticipé, le premier problème constitue donc le choix de la majorité des élèves mais, fait étonnant, un nombre non négligeable d'élèves ne parviennent pas à trouver la réponse attendue. Ainsi, seulement les élèves David, Gael, Rémi et Gaudi obtiennent le bon résultat. À l'exception de Rémi, tous les élèves effectuent une transformation des nombres fractionnaires en fractions impropres ; tous les élèves, sauf David, recourent dès le départ au dénominateur 36 pour représenter les différents nombres. Les élèves qui ne trouvent pas la réponse attendue commettent des erreurs de calcul, par exemple : a) Samuel … 8 x 4 = 24 ; b) Alex … 6 + 4 = 8 ; c) Martin … 6 x 9 + 8 = 63.

La dernière situation ne comporte qu'un seul problème, problème que nous avons reproduit ci-dessous. Dans ce problème, les fractions permettant de déterminer les répartitions des circulaires peuvent être additionnées très facilement, et puisque le nombre de circulaires est un multiple des dénominateurs de ces fractions, il devient facile de répondre à chacune des questions.

« 5. Michel et Nicolas ont 200 circulaires à distribuer. Michel en a déjà réparti les $\frac{3}{10}$ et Nicolas les $\frac{7}{20}$.
Combien chacun a-t-il distribué de circulaires? Ils conviennent de terminer la distribution de façon égale. Pour finir la distribution, combien devront-ils en distribuer chacun**?**

Réponse 1 : _________________________
Réponse 2 : _________________________ »

Le tableau suivant donne un aperçu des réponses des élèves lors de la réalisation de cette dernière situation.

Tableau XXXIV:Appréciation des résultats des élèves

RÉPONSES ATTENDUES	RÉUSSITES	ÉCHECS
3.1. Nicolas : 70 Michel : 60	Martin, Rébecca, Alex, Noa; Gaudi; Réjean; David; Samuel; Prince	Bertrand (N :70; M :30); Anne (N :7 ; M :6); Gael (Michel doit faire 5% de plus que Nicolas)
3.2. 35 circulaires	David; Samuel; Prince	Rébecca (M : 140; N : 130); Alex (M :140; N : 130); Noa (M: 40; N :30); Gaudi (N : 30; M : 40); Martin (M : 40; N : 30); Réjean (M :45; N :25; Anne (6 circulaires) ; Gael (Les 2 séparent à 50%); Bertrand (N :30; M :70);

Comme le montre ce tableau, 9 élèves répondent correctement à la première question, alors que trois élèves seulement obtiennent le bon résultat à la deuxième question. Il importe toutefois de nuancer ce faible taux de réussite. En effet, la formulation de la deuxième question de ce problème peut susciter plusieurs interprétations, comme en témoignent les conduites de plus de la moitié des élèves.

Pour la première question, les réponses erronées relèvent d'interprétations différentes des fractions associées à la répartition des circulaires. Ces interprétations colorent également les réponses de plusieurs élèves à la seconde question. Après avoir établi correctement le nombre de circulaires distribuées par Nicolas, nombre correspondant à 7/20 de 200 (multipliant 7 par 10), pour établir le nombre de circulaires distribuées par Michel, Bertrand se contente de multiplier le numérateur de la fraction 3/10 par 10, comme il l'a fait précédemment pour trouver le nombre de circulaires correspondant à 7/20. De son côté, Anne exprime chacune des fractions en recourant à un même dénominateur, soit 7/20 et 6/20; elle se contente ensuite d'associer chacun des numérateurs aux nombres de circulaires distribuées. Et, en réponse à la seconde question, elle écrit : « Ils devront distribuer 6 circulaires ». Le nombre 6 correspond-il à la différence entre 20 et 13 ou encore, au nombre qui montrerait un partage équitable? Nous ne disposons pas d'informations qui puissent nous permettre de répondre à ces questions. Enfin, Gael procède à une comparaison des fractions associées aux répartitions de Michel et de Nicolas, faisant abstraction du nombre total de circulaires, soit 200. Pour effectuer cette comparaison, il recourt au dénominateur 100, obtenant alors 30/100 et 35/100; il reste donc 35/100 à distribuer. Il conclut alors que « Michel doit faire 5% de plus que Nicolas », étant sous-entendu qu'il considère que les deux doivent effectuer une distribution égale, distribution invoquée à la deuxième question. Il se contente d'inscrire les réponses suivantes : Réponse 1 : « Michel doit faire 5% de plus que Nicolas »; Réponse 2 : « Les 2 séparent à 50% » Mais, sur sa feuille on retrouve également les distributions suivantes : a) Michel : 30/100 + 20 /100 50/100; b) Nicolas : 35/100 + 15/100= 50/100. Le raisonnement de cet élève est loin d'être trivial. Il lui suffisait par la suite d'associer à chacune de ces fractions, le nombre correspondant de circulaires, soit 200.

Tel que mentionné précédemment, la seconde question sur la répartition des circulaires suscite plusieurs interprétations. Seuls David, Samuel et Prince produisent la réponse attendue. Tout d'abord, l'information : « *ont 200 circulaires à distribuer* » a été traitée par Rébecca et Alex comme étant : « *ont chacun 200 circulaires à distribuer* ». Cette représentation, conjuguée à celle de la phrase «*Ils conviennent de terminer la distribution de façon égale*», amène ces élèves à compenser pour les différences observées lors de la première distribution. Ils concluent donc que : a) Michel doit distribuer 140 circulaires, puisqu'il en avait distribuées 60, au premier tour; b) Nicolas doit distribuer 130 circulaires, puisqu'il en avait distribuées 70, au premier tour. Ainsi répartis, les nombres de circulaires distribuées par chacun respectent donc l'idée de « partage égal » retenue par ces élèves. Cette idée oriente également les démarches de plusieurs autres élèves et entraîne plusieurs échecs, lors du traitement de cette seconde question. C'est le cas notamment de Martin, Noa, Bertrand et Gaudi qui ont compris qu'il s'agissait d'un partage équitable de l'ensemble des circulaires (soit 200) et non du nombre de circulaires faisant partie de la seconde distribution (soit 70). Nous pensons que cette erreur est aussi attribuable à la présence du mot « chacun » dans la question, mot ayant amené les élèves à produire des résultats différents pour Nicolas et Michel. De plus, l'espace réservé pour l'inscription des réponses a causé quelques ambiguïtés, dont la réponse à une seule des questions posées (Réjean et Gael). Nous avons toutefois inscrit les réponses de Réjean et de Gael qui figuraient dans leurs démarches.

Réjean a bien réussi la première question. Pour répondre à la seconde question, après avoir trouvé que chacun devait distribuer 35 circulaires, il a voulu tenir compte de la différence entre les nombres de circulaires distribuées antérieurement par chacun, afin de rendre compte d'un partage équitable de l'ensemble des circulaires. Ainsi, considérant que Nicolas en avait distribuées 10 de plus que Michel, lors de la première distribution, il a alors enlevé 10 circulaires à Nicolas et les a confiées à Michel, lors de la seconde distribution.

4.2.10. Situations de «Comparaison et de sériation de nombres rationnels»

Les situations de comparaison et de sériation de nombres rationnels ont été réalisées en classe les 26 et 30 avril. À la suite de l'examen d'étape effectuée le 27 mars, plusieurs périodes ont été consacrées à l'introduction de l'algèbre et à l'enseignement de la géométrie, périodes s'étalant du 2 au 23 avril. Bien que ces savoirs ne soient pas l'objet de notre thèse, il nous est apparu important de poursuivre notre démarche d'acculturation et d'être mieux informée sur les pratiques d'enseignement et d'apprentissage de ces savoirs.

Les situations de comparaison et de sériation des nombres rationnels ont été conçues par l'étudiante-chercheure et la chercheure, répondant alors à l'invitation de l'enseignante qui nous a confié cette responsabilité devant la nouveauté attendue des différentes façons de comparer des fractions (Guay, Hamel et Lemay, 2005) : 1) à l'aide d'un dénominateur commun; 2) à l'aide du numérateur commun; 3) à l'aide de déduction;

4) à l'aide de la fraction ½; 5) à l'aide de nombres décimaux. Elle nous fournit également le «prétest» prévu en précisant que des adaptations seraient sûrement nécessaires, compte tenu qu'il met en jeu différentes fractions fort simples à comparer : 1) 5/7; 3/7; 4/7;…; 2) 1/5; ¼; ½; 1/6; …; 3) 3/5; ¾; 3/2; 3/6; …; 4) ½; 2/3; 4/7; 2/9; 10/11; 3/6 et 3/8. Nous avons donc procédé à une augmentation de la quantité des nombres en jeu (Mazzocco et Devlin (2008), à une variété de représentations (Bednarz, 2009) des nombres rationnels, fractions, pourcentage, décimaux, de sorte à solliciter une diversité et une coordination importante de connaissances sur les nombres rationnels. Nous examinons les conduites des élèves et les interactions didactiques au cours de la réalisation des deux tâches de sériation que comportent ces situations

4.2.10.1. Analyse des conduites des élèves et des interactions didactiques au cours de la première sériation

La première situation comporte deux tâches. Dans chacune d'elles, il est demandé aux élèves de mettre en ordre croissant des nombres rationnels. Chacun des élèves est invité à réaliser cette tâche. La consigne donnée par l'étudiante-chercheure est la suivante :

> « *Vous vous souvenez, on a appris à représenter de différentes façons les nombres rationnels : fractions, nombres décimaux, pourcentages, etc. Aujourd'hui, vous allez placer en ordre croissant des nombres rationnels. Vous faites cette activité en individuel, sans calculatrice. Chacun des nombres est inscrit sur une petite feuille; vous pourrez les ordonner en plaçant un numéro sur chacune des petites feuilles. Après pour l'autre tâche, vous pourrez vous mettre en équipe. J'aimerais vous faire remarquer que j'ai donné cette tâche à faire à mes étudiants à l'université* »

Les nombres rationnels présentés à la première tâche sont les suivants : 3/7; 5/9; ½; 255/510; 0,500001; 7/35; 171/340; 0,76; 3/8; 6 /11; 7/8; 21% ; 251/504; 8/9. Dès que les élèves reçoivent la feuille sur laquelle sont consignés les différents nombres, plusieurs élèves demandent le recours à la calculatrice qui leur est refusé. La réalisation de cette tâche est source de difficultés pour un grand nombre d'élèves. Nous reproduisons quelques-unes des demandes des élèves et des échanges entre l'enseignante, l'étudiante-chercheure et la chercheure et quelques élèves.

> Marcel demande à CH si un nombre est ½ (montrant 0,500001)
> […]

ECH [s'adressant à Rémi qui demande de l'aide]: regarde les numérateurs et les dénominateurs, compare
[…]
CH [s'adressant à Rémi] : tu vas très bien, continue
[…]
ENS [s'adressant à Gaudi qui lui demande si ce qu'il a fait est bon] : Je te le dirai pas si c'est bon ;
GAUDI: Je dois mettre mon raisonnement pour chacun?
CH : Si tu vois que c'est important … tu choisis… tu écris le raisonnement que tu as fait pour les ordonner… en gros…
[…]
CH encourage Anne à poursuivre…
[…]

ENS [s'adressant à David qui demande de l'aide] : je ne peux pas rien dire …
[…]
RÉMI [s'adressant à GAEL] : moi, je comprends rien mais j'essaie au moins … ; je sais que ces deux-là sont pareilles (montrant ½ et 255/510)
CH : Je vais mettre un écran entre vous.
[…]

Comme le montrent les interactions précédentes, plusieurs élèves semblent « déroutés », voire « démunis ». Pour cette raison, l'enseignante, l'étudiante-chercheure et la chercheure se consultent et décident, après près de 30 minutes consacrées à cette activité, de présenter la seconde tâche. Au tableau suivant, nous présentons la sériation proposée par chacun des élèves. Les fractions ½ et 255/510 représentent le même nombre rationnel; pour cette raison, lorsque ce fait est reconnu nous avons fusionné les cellules correspondant à ces nombres.

Tableau XXXV: Résultat de sériation des nombres 3/7; 5/9; ½; 255/510; 0,500001; 7/35; 171/340; 0,76; 3/8; 6 /11; 7/8; 21% ; 251/504; 8/9

	Sériation attendue													
	7/35	**21%**	**3/8**	**3/7**	**251/504**	**½ 255/510**		**0,500001**	**171/340**	**6 /11**	**5/9**	**0,76**	**7/8**	**8/9**
Élèves	**Sériations produites par les élèves**													
Prince	**7/35**	**21%**	**3/8**	**3/7**	**251/504**	**255/510**	**1/2**	**0,50001**	**171/340**	5/9	6/11	**0,76**	**7/8**	**8/9**
Alex	**7/35** **(20%)**	**21%**	**3/8** **(37%)**	**3/7** **(42,9%)**	**1/2**	**0,50001**	255/510	251/504	**171/340**	**6/11** **(54%)**	**5/9** **(55,5%)**	**0,76**	**7/8**	**8/9**
Martin	**7/35**	**3/7**	3/8	21%	**251/504**	**255/510**	½	**0,50001**	**171/340**	5/9	6/11	**0,76**	**7/8**	**8/9**
Noa	7/35	21%	3/8	251/504	255/510 1/2	0,50001	171/340	6/11	5/9	0,76	7/8			
Gaudi	**7/35**	**21%**	3/7	3/8	171/340	251/504	**1/2**	**255/510** **85/170**	**0,50001**	**6/11**	**8/9**	7/8	0,76	5/9
Samuel	0	5/9	8/9	3/8	7/8	7/35	3/7	21%	251/504 25.1/50.4	255/510 1/2	171/340	0,50001	6/11	0,76
Gael	**255/510** **1/2**	**3/8**	6/11	3/7	**251/504**	**0,50001**	0,76	21%	171/340	7/35	5/9	8/9	7/8	
Marcel	1/2	6/11	0,50001	5/9	0,76	8/9	7/8	251/504	255/510	**3/8**	**3/7**	7/35	21%	
Réjean	**7/35** 0,2	**21%** 0,21	6/11 **3/8**	171/340	**1/2**	**255/510** (1/2)								
Rebecca	251/504	171/340 (85,5/170)	255/510 (1/2)	8/9	1/2	7/8	**7/35** **(1/5)**	**3/7 (1/5)**	**6/11**	**5/9**	3/8	0,76	0,50001	21%
David	21%	1/2	3/7	3/8	5/9 (6/10 = 60%)	8/9 (9/10 = 90%)	7/8	7/35	0,76	6/11	171/340	0,50001	255/510	251/504
Hélène	21%	1/2	**3/8**	**3/7**	**5/9**	**7/8**	**8/9**	6/11	7/35	171/340	251/504	255/510	0,50001	0,76
Anne	1/2	7/8	3/7	3/8	6/8	5/9	6/11	7/35	255/510	251/504	171/340	0,76 (0,76/100)	21% (21/100 = 0,21)	0.50001 (0.50001/1 0)
Bertrand	0,50001	0,76	21%	1/2	3/7	7/8	3/8	5/9	8/9	6/11	7/35	171/340	251/504	255/510
Rémi	1/2	3/7	3/8	5/9	6/11	7/35	7/8	8/9	171/340	255/510	251/504	0,76	0,50001	21%

Noa, Martin et Prince se sont très bien sortis de cette situation-problème fort différente de celles auxquelles ils sont habituellement confrontés. En effet, ils n'ont commis que quelques erreurs. Martin, tout comme la moitié des élèves, a situé 3/7 avant 3/8; il a également placé 21% à la suite de 3/8; il a enfin placé 5/9 avant 6/11. Il précise ainsi son raisonnement : « *J'ai mis les demis ensemble et les nombres qui étaient plus haut que la demie, je les ai mis à la fin et les plus petits je les ai mis au début et après je calculais ceux que je n'étais pas sûr et ceux qui étaient presque égaux je les ai mis sur le même dénominateur».* Quant à Prince, il n'a commis qu'une seule erreur, la fraction 5/9 étant placée avant la fraction 6/11. Il explique ainsi sa démarche : « *j'ai regardé les plus gros chiffres en premier et j'ai multiplié par 2 le numérateur pour savoir si c'est plus grand que ½. Après, j'ai calculé les fractions* ». Quelques calculs et comparaisons de fractions apparaissent sur sa feuille :

« 7/35 = ?/100….700 divisé par 35 (algo)
8/9 (64/72)…7/8 (63/72)
3/7 251/504….504 divisé en 7 (algo) ..72….72 x 3 = 216 (algo)
3/7 = ?/100
5/9 (35/63)…3/7 (27/63)
3/7(27/56)…3/8 (21/56) »

Aucune trace ne nous laisse entrevoir la cause de son erreur. Cependant, nous pouvons remarquer que la procédure de Prince reprend celle émise lors de la période du 5 février sur la représentation de ½ consistant à considérer la relation entre le numérateur et le dénominateur dans la recherche de fractions équivalentes. Cette procédure est peu utilisée par les élèves qui multiplient habituellement le numérateur et le dénominateur par un même opérateur, s'appuyant alors sur la relation entre les numérateurs ou dénominateurs. Prince a aussi représenté les fractions 7/35 et 3/7 en recourant au dénominateur 100 et en exploitant la « technique du produit croisé ». Quant à Noa, il a obtenu une sériation sans erreur mais a omis 3/7 et 8/9, il explique son raisonnement en s'appuyant sur la fraction repère ½.

Alex a bien ordonné la grande majorité des nombres rationnels, mais il importe de considérer qu'il a, à notre avis, utilisé la calculatrice à notre insu pour représenter plusieurs nombres en pourcentage. Le peu de traces laissées sur sa copie ne nous permet pas d'interpréter davantage la sériation qu'il a produite.

Malgré l'ordonnancement incongru de Rébecca, nous pouvons noter qu'elle a mis en œuvre des connaissances et des procédures variées. Par exemple, elle s'est appuyée sur le sens rapport de la fraction en divisant chaque fois, pour les fractions 251/504, 3/8, 5/9, 7/35 et 255/510, le dénominateur par le numérateur, afin de connaître le nombre de fois qu'il y est contenu, bien que ce procédé ne lui ait pas toujours été profitable. De plus, afin de connaître quelle serait la fraction équivalente à ½ si le numérateur était de 251, elle additionne 251 et 251 (502). Elle note donc 251/504 comme étant plus petit que ½. De même, elle effectue la division de 340 par 2; toutefois, elle inscrit la fraction 171/340 comme étant plus petite que ½. D'autre part, nous remarquons qu'elle a comparé certaines fractions (4/5; ¾; 2/3 et ½) en s'attardant, pour chacune des fractions, à la «partie manquante pour compléter l'entier»; cependant, tout comme Réjean (6/11=3/8) et David (8/9 = 9/10), Rébecca (3/7 = 1/5) n'a pas su interpréter ces parties manquantes.

Gaudi a, pour sa part, commenté ainsi sa démarche : « *Toutes les fractions plus grosses que 50 je les réduis pour arriver au dénominateur de 50. Après, dans ma tête, je me suis fait des images des fractions, exemple 3/10 et 4/12, et après avec l'image que je me suis fait je peux trouver le plus petit et le plus grand. J'ai placé en ordre les fractions, pourcentages et nombres décimaux.* » Ces commentaires sont peu explicites. En revanche, si nous examinons les ordonnancements de certaines fractions, nous pouvons effectuer quelques inférences sur ses démarches : a) lorsque les dénominateurs de certaines fractions sont des nombres voisins, on peut observer diverses conclusions : 1- si les numérateurs sont égaux (ex. : 3/7 et 3/8), la fraction qui comporte le plus petit dénominateur est jugée plus petite que l'autre; 2- si le numérateur de chacune de ces fractions est un nombre inférieur et voisin du dénominateur, la fraction qui comporte le plus grand dénominateur est jugée inférieure aux autres fractions (ex. : 8/9 et 7/8); cette interprétation nous semble attribuée au fait que lorsque le dénominateur est plus grand qu'un autre, les parties sont plus petites et la fraction est plus petite. Les conduites de cet élève témoignent d'une diversité des interprétations des relations entre les numérateurs et les dénominateurs des fractions, diversité qui affecte la comparaison et la sériation des fractions.

De son côté, Marcel s'est « *dit que 0,76 était presque l'entier et 7/8 aussi; ½ et 6/11 est près de ½ et 0,50001 , 255/510 et 251/504 étaient difficiles à placer* ». Cependant, la mise en ordre des nombres qu'il a effectuée ne semble pas refléter ces propos. En effet, il a obtenu : ½, 7/8; 0,50001; 5/9; 0,76; 8/9; 6/11; 251/504; 255/510; 3/8; 3/7; 7/35; 21%. Nous pensons qu'il a traité certaines fractions deux à deux sans tenir compte de l'ensemble d'entre elles. D'autre part, nous pouvons remarquer que Marcel était dépourvu devant les fractions 255/510 et 251/504, ce qui est peu surprenant compte tenu de la faible fréquence à laquelle les élèves sont confrontés à des fractions composées de « grands nombres ».

Gael et David ont laissé très peu d'informations sur leurs procédés. Gael a regroupé « *les dénominateurs pareils ensemble et tous les pourcentages ensemble* ». Il semble toutefois que ces élèves aient d'abord privilégié le recours aux pourcentages. David a posé les équivalences 5/9 = 6/10 = 60% et 8/9 = 9/10 = 90%. Il a par ailleurs considéré que l'ajout d'un même nombre au numérateur et au dénominateur d'une fraction permet de produire diverses représentations d'une fraction. De son côté, Gael a eu recours à des fractions comportant un dénominateur égal à 100 pour représenter les nombres décimaux (0,76 → 76/100; 0,50001 → 50/100); bien que sur sa feuille, nous retrouvons les traces suivantes *1) 50/100 ; 2) 76/100 ; 3) /100 4) /100*, sa démarche semble avoir été abandonnée.

Samuel a inscrit les fractions 7/8 et 8/9 avant la fraction ½, bien qu'elles soient beaucoup plus grandes que ½. Les justifications inscrites sur sa feuille et les calculs réalisés, traces que nous avons réorganisées, nous permettent de prendre acte des interprétations de cet élève qui, dans les situations précédentes, avait montré des rapports relativement adéquats aux nombres rationnels. Bien que la sériation comporte plusieurs erreurs, il importe de reconnaître la pertinence des relations établies entre les nombres qui ont été regroupés. Par ailleurs, les cloisons établies entre ces divers regroupements ne permettent pas toujours de sérier convenablement les fractions. Ainsi, s'il ne fait pas de doute que la fraction 5/9 soit plus petite que la fraction 8/9 et que la fraction 3/8 soit plus petite que la fraction 7/8; on ne peut inférer que les fractions dont les dénominateurs sont 9 soient plus petites que celles dont les dénominateurs sont 8, ou tout autre nombre inférieur à 9, sans prendre en compte à la fois les numérateurs et les dénominateurs de ces fractions.

Position	Nombres	Justification	calculs
1	0	il est le plus petit, car il est rien	
2 3 4 5	5/9 8/9 3/8 7/8	ils se suivent tous de 9 à 8 et plus le dénominateur est grand plus la fraction est petite	
6 7	7/35 3/7	il est différent le 7/35 se divise par 7 donne 1/7, il est donc avant 8 donc plus grand. il est plus grand que 1/7 avec 3/7	
8	21%	1/5 = 20/100 donc 21/100 doit à peu près x/6	1/5 = 20/100; +1/5 = 21/100; x/6 = 21/100;
9 10 11 12 13	251/504 255/510 171/340 0,50001 6/11	donne un peu moins de ½ est la moitié plus que 1/2	251+ 251 = 502; Algo : 504 divisé en 6 (84…) et 251 divisé en 6 (4…); Algo : 25,1/50,4 …50,4 divisé en 5 (10,8) et 25,1 divisé en 5 (5,2) … 5,2/10,8 algo : 340 divisé par 10 = 34; algo : 171 divisé par 9 = 19; algo : 340 divisé par 9 = 3… ;171+171 = 324; algo : 171 divisé en 2 = 85,5; 85,5+85,5+85,5= 256,5; 256,5 + 85,5 = 342
14	0,76	plus que ½ mais ¾	

Les calculs de Samuel étant dans le désordre, il est difficile de « reconstruire » son raisonnement. Cependant, nous pouvons remarquer que les nombres 171/340 et 251/504 l'ont amené à produire divers calculs. Aussi dans ces deux cas, il a additionné plusieurs fois le numérateur afin de pouvoir comparer la somme obtenue au dénominateur et ainsi se prononcer sur son ordre de grandeur par rapport à ½. Il est aussi intéressant de noter qu'à travers ses diverses manipulations, il a pu arriver à des écritures intermédiaires lui permettant d'interpréter plus aisément la relation entre les nombres ex. 251/504 = 25,1/50,4…

Réjean n'a pas eu le temps de compléter la tâche. Parmi les sept fractions traitées, deux sont mal ordonnées. Il a d'abord transformé en notation décimale 7/35 en effectuant la division (7 ÷ 35 = 0,2) et placé ce nombre avant 21%. Il a ensuite inscrit 6/11 et 3/8 à la même position, considérant qu'il manquait 5 parties à chacune de ces fractions pour compléter l'entier. Il situe par ailleurs 6/11 à une position inférieure à ½. De même, il inscrit 171/340 comme étant une fraction plus petite que ½; à la suite d'une division de 340 par 2, division qui montrait bien qu'il savait que 171/340 était dans le voisinage de la fraction ½, mais si le nombre obtenu était inférieur au dénominateur, il concluait que la fraction était inférieure à ½; ce procédé est utilisé également dans le traitement des fractions 251/504. Il a aussi procédé à la division de 510 par 2 pour inscrire 255/510 = ½, mais comme plusieurs élèves, il a toutefois inscrit ½ avant 255/510.

De son côté, Hélène a tenté de réduire plusieurs fractions (8/9; 3/7; 21/100; 5/9 et 7/35) et a conclu que « *Si on regarde les nombres décimaux on sait déjà qu'ils sont tous irréductibles, donc il reste à les placer en ordre* ». À la lumière des traces qu'elle a laissées sur sa copie, il nous est difficile de comprendre comment elle a procédé. Il nous semble cependant qu'elle s'est appuyée en partie sur l'ordre de grandeur du dénominateur.

En ce qui concerne Anne, sa production témoigne de difficultés importantes. De plus, la seule information explicite que nous détenons est la transformation de tous les nombres sous forme fractionnaire (21%=21/100=0,21; 0,76 = 76/100; 0,50001 = 5/10).

Les résultats de Rémi et Bertrand illustrent bien les représentations erronées des élèves sur les nombres rationnels, notamment des représentations liées au traitement indépendant des numérateurs et des dénominateurs des fractions. Pour ordonner des fractions, ils s'appuient exclusivement sur les grandeurs respectives des numérateurs ou des dénominateurs : a) si les numérateurs des fractions sont tous différents, les dénominateurs ne sont pas pris en compte dans la sériation; b) si les dénominateurs des fractions sont tous différents, les numérateurs ne sont pas pris en compte dans la sériation; c) si les numérateurs de certaines fractions sont identiques, ces fractions sont ordonnées en tenant compte des dénominateurs (et vice-versa). Leurs propos confirment une telle interprétation de leurs démarches : *a)* Bertrand *« J'ai regardé les nombres décimaux et j'au vu qu'un nombre est plus grand que l'autre. J'ai regardé le dénominateur le plus petit au plus grand;* b) Rémi *« Je les ai placés de un à deux cent cinquante-un comme fraction et 0,76 et 0,50001 et 21% en dernier* ». La production de Rémi est étonnante, compte tenu du fait que cet élève reconnaît que les fractions ½ et 255/510 sont équivalentes.

Il semble donc que la quantité et la diversité des nombres rationnels déstabilisent la majorité des élèves qui commettent plusieurs erreurs, ces résultats ayant aussi été observés dans la recherche effectuée par Mazzocco et Devlin (2008) auprès d'une population d'élèves en classe régulière. Il faut par ailleurs admettre que cette situation a obligé les élèves à générer des processus originaux que nous n'aurions pu voir apparaître dans le pré-test prévu.

4.2.10.2. Analyse des conduites des élèves et des interactions didactiques au cours de la seconde sériation

La seconde tâche est similaire à la première; elle comporte toutefois moins de nombres rationnels à ordonner. Cette tâche a également été proposée par l'étudiante-chercheure et la chercheure à l'enseignante qui a donné son aval; il avait été entendu qu'elle ferait suite à la précédente et que placés en équipes, les élèves pourraient investir les connaissances introduites lors de la première tâche et partager ces connaissances pour parvenir plus aisément à ordonner les nombres. Cette tâche est une adaptation d'une tâche puisée dans le manuel scolaire (Guay, Hamel et Lemay, 2005, La course de la grande aiguille, p.282), dans laquelle les nombres à sérier sont les suivants : 2/3, 7/10, 5/6, 5/12 et 7/12. La tâche que nous avons proposée aux élèves intègre toutefois quelques nombres plus complexes, nombres choisis au regard de certains des nombres présentés à la première tâche et de l'intention de l'auteur du manuel : « Il existe plusieurs façons de comparer les fractions […] selon les fractions, les élèves devront opter pour celles (stratégies de comparaison) qui sont le plus efficaces» (*Ibid.*, p.282A, Guide de l'enseignant). Les élèves sont ainsi invités à placer en ordre croissant, les nombres suivants : 5/12; 0,50001; 7/12; 141/240; 7/10; 2/3 et 5/6. La consigne donnée par l'étudiante-chercheure est la suivante : « *Pour la prochaine activité, il y a moins de nombres et vous pouvez vous mettre en équipe. Vous essayez de faire le moins de calculs possible. Lorsque vous avez terminé, vous levez la main. Là ce sera le moment d'échanger vos façons de faire. Au cours de la première activité, on s'est promené dans les rangées et on a vu que vous aviez différents moyens. Vous pourrez en discuter* ». L'enseignante ajoute : « *Là vous allez vous entraider dans l'équipe que je vais nommer.* » L'enseignante invite les élèves à former les équipes suivantes : Réjean et Rébecca, Rémi et Gael, Samuel et Noa, Marcle, Gaudi et Guy, Prince et Martin; Bertrand et Hélène ; Anne ; David et Alex. Après 15 minutes, l'enseignante et l'étudiante-chercheure décident d'effectuer un retour collectif sur les démarches des élèves.

Les démarches des différentes équipes d'élèves et les interactions didactiques lors de la réalisation de la seconde tâche

Le tableau suivant présente la sériation des nombres rationnels effectuée par chacune des équipes, ainsi que les traces des démarches que chacune des équipes a inscrites sur les feuilles associées à chacune des fractions. Nous notons en rouge les erreurs commises, lorsqu'elles ne touchent que quelques fractions. Nous commentons brièvement ces conduites; l'analyse des interactions lors de la réalisation de cette tâche et lors du retour collectif effectué à la suite de cette tâche nous permettra de mieux interpréter ces conduites.

Tableau XXXVI:. Sériation des nombres 5/12; 0,50001; 7/12; 141/24; 2/3; 7/10 et 5/6 obtenue par chacune des équipes

Équipes	5/12	0,50001	7/12	141/240	2/3	7/10	5/6
Gael et Rémi	0,50001 [5,0001/10 ; 1/2 = 0,5]	5/12	7/12	141/240	2/3 [8/12]	7/10	5/6 [10/12]
Gaudi, Marcel et Guy	5/12	0,50001	7/12	141/240	7/10	2/3 [8/12]	5/6
Prince et Martin		5/12	7/12	141/240 [7,1/12]	2/3 [8/12]	5/6	7/10 [14/20]
Samuel et Noa	5/12	0,50001 [5/10 …]	141/240 [7/12…]	7/12	2/3 [8/12]	5/6 [10/12]	7/10
Rébecca et Réjean	0,50001 [5,0001/10]	5/12	7/12	141/240 [7,1/12]	2/3 4/ 6 = 8/12	5/6	7/10 [14/20]
Hélène et Bertrand	7/10	7/12	5/12	5/6	2/3	141/240	
Anne	2/3	5/6	0,50001 (5/10)	5/12	7/10	7/12	141/240
David et Alex	0,50001 (50,1%); 7/10 (70%) ; 5/6 (83%)						

Comme le montre le tableau précédent, même si aucune équipe ne parvient pas à ordonner correctement tous les nombres rationnels, seules les trois dernières équipes commettent plusieurs erreurs montrant des rapports problématiques aux nombres rationnels. Les deux premières équipes ne commettent qu'une erreur dans le traitement des nombres; contrairement à ce que nous avons relevé chez les équipes qui commettent plusieurs erreurs, ces équipes montrent des rapports « moins technicistes » aux nombres rationnels. Chez la première de ces équipes, l'erreur concerne les nombres 0,50001 et 5/12, le premier nombre étant jugé inférieur au second; il s'agit d'une erreur difficile à interpréter, lorsqu'on prend acte des relations que ces élèves établissent entre les autres nombres, notamment, entre les nombres 2/3, 7/10 et 5/6. Chez la seconde équipe, l'erreur produite concerne les nombres 7/10 et 2/3 qu'ils représentent également par 8/12. La troisième équipe composée de Prince et Martin omet d'inscrire le nombre 0,50001 dans la série produite; cette omission est peut-être volontaire. Le recours à une telle représentation est, à notre connaissance, rarement rencontrée dans les pratiques scolaires. Cette équipe commet une autre erreur, jugeant la fraction 5/6 inférieure à la fraction 7/10. L'équipe composée des élèves Samuel et Noa effectue des estimations des fractions pouvant être associées aux nombres 0,50001 et 141/240; le recours à un tel procédé est fort pertinent et peu fréquent. Cette estimation leur permet d'ordonner correctement ces nombres; le recours au dénominateur 12 pour estimer la fraction 141/240 les incite possiblement à recourir au dénominateur 12 pour représenter les nombres 2/3 et 5/6. L'équipe composée de Rébecca et Réjean ordonne correctement les nombres 5/12, 7/12, 141/240, 2/3 et 5/6, en représentant ces fractions à l'aide du dénominateur 12. Ils associent toutefois au nombre 0,50001 le nombre 5,0001/10; le nombre ainsi représenté ne semble pas évoquer la fraction ½, du moins si l'on se fie à la position de ce nombre dans la sériation. Ces élèves jugent enfin le nombre 7/10 supérieur à 5/6. Un tel jugement prend-il appui uniquement sur les relations entre les dénominateurs? Comme le montrent enfin les données consignées au tableau précédent, les trois dernières équipes montrent des rapports problématiques aux nombres rationnels.

Pour mieux apprécier les conduites des élèves dans la réalisation de cette seconde tâche, il nous semble intéressant de donner un aperçu des interactions entre les élèves de quelques équipes; il convient de souligner que, dans certaines équipes, les interactions ont été fort réduites, les élèves se contentant de proposer des réponses, de faire accepter leurs réponses. Il n'est pas étonnant que ce soit aussi dans les équipes composées d'élèves ayant construit des pratiques mathématiques et des rapports plus adéquats aux nombres rationnels que les interactions aient été plus riches. Les invitations répétées de l'enseignante et des chercheures visant à encourager les élèves des autres équipes à discuter ensemble de leurs démarches n'ont aussi pas porté fruit.

Interactions entre Gaudi, Marcel et Guy

Les interactions entre Gaudi, Marcel et Guy, élèves qui n'ont effectué qu'une erreur dans la sériation des nombres, sont particulièrement éclairantes sur les rapports de ces élèves aux nombres rationnels et sur leur mobilisation de connaissances et de pratiques diversifiées. Dans la comparaison des nombres 7/10 et 2/3, bien qu'ils produisent une fraction équivalente à 2/3, soit 8/12, fraction dont le dénominateur n'est pas très éloigné de celui de la fraction 7/10, ces élèves ne parviennent pas à statuer sur les relations entre ces nombres. Les propos de l'élève Gaudi renvoient à des pratiques de représentation des fractions qui posent problème :

le 7/10 son chiffre est un petit peu plus petit mais si tu fais 2 dessins le 7/10 …tu vas remarquer que le 8/12 va prendre plus de place ... fais-le donc le dessin...

Les propos de cet élève semblent convaincre les autres élèves de son équipe. Une représentation des fractions 7/10 et 8/12 est alors effectuée; toutefois, les dimensions des rectangles utilisés à cet effet, ne sont pas les mêmes, soit 5 cm par 2 cm environ pour la fraction 7/10 et 6 cm par 2 cm environ pour la fraction 8/12. Les élèves décident ensuite de comparer les fractions 5/6 et 2/3, concluant alors justement que : 5/6 > 2/3. Gaudi prend alors la parole et son raisonnement est alors accepté par ses co-équipiers :

Gaudi	*Si c'était 2/3 et 10/12 [5/6] ....12 c'est 4 fois plus grand que 3 mais pour 10, ça devrait être 12 pour être 4 fois plus*

Les élèves ordonnent ainsi les fractions suivantes : 5/12 < 7/12 < 7/10. L'étudiante-chercheure leur demande alors d'expliquer ce qu'ils ont fait :

Gaudi	*7/12 est plus petit que 7/10*
Marcel	*dans une tarte il y a des morceaux plus petits dans le 7/12… 7/12 plus petits morceaux que le 7/10* ... [cette intervention est prise en compte dans la comparaison des fractions 8/12 (2/3) et 7/10 …. voir la première intervention de Gaudi]
Gaudi	*ensuite 5/12*
Guy	*à cause que la moitié de 12 c'est 6…5/12 est plus petit que la moitié*
Gaudi	*et 7/12 plus que la moitié*

Le dialogue précédent montre bien comment intervient une coordination de connaissances et de pratiques sur les fractions. À la suite de ce travail, les fractions suivantes sont ordonnées : 5/12 ; 7/12 ; 7/10; 2/3 (8/12); 5/6 (10/12). Ensuite, les élèves insèrent le nombre 0,50001 entre 5/12 et 7/12, et 141/240, à la suite du nombre 7/12 :

Guy	*lui* [montrant 0,50001] *est juste un peu plus qu'une demie*
Gaudi	*141/240 et 7/12 ... 141/240 plus grand que 7/12 à cause du 1*

Interactions entre les élèves Noa et Samuel

Les échanges entre les élèves Noa et Samuel sont également fort intéressants. Ils montrent bien comment une intégration des sens de la fraction, de l'écriture fractionnaire, module le recours à des démarches efficientes et économiques.

Noa	*Là fais pas trop de calculs on va regarder avant, c'est quoi le but de mettre 5/12...Là ce qu'on sait, c'est que 7/12 a un de plus qu'une demie*

Samuel	[en parlant de 141/240] *Là 24 on divise par 2, les 2 ça va donner un chiffre ben pas rapport…*
Noa	[compare 141/240 à 120/240] *Pas besoin t'as juste à regarder …c'est plus qu'une demie…. t'as 21 de plus…*

Les interactions didactiques lors du retour sur les démarches des différentes équipes d'élèves

Les interactions didactiques lors du retour sur les démarches des différentes équipes d'élèves sont des occasions pour les élèves de chacune des équipes d'expliciter leurs démarches ou les démarches des membres de l'équipe et, pour les élèves des autres équipes, de « rencontrer et d'essayer de comprendre » les démarches des élèves des autres équipes, de commenter ces démarches, de poursuivre la construction de connaissances. Comme le souligne Brousseau (1998), ce retour peut aussi être un moment important d'institutionnalisation des connaissances. Nous rendons compte de ces interactions lors du retour sur les démarches des élèves dans la réalisation de la seconde tâche de sériation des nombres rationnels.

L'étudiante-chercheure inscrit au tableau les nombres rationnels que comportait la seconde tâche, soit : 7/10 7/12 5/12 5/6 2/3 141/240 0,50001. L'enseignante invite les élèves à reprendre leurs places respectives dans la classe et invite l'étudiante-chercheure à animer ce retour sur les démarches. Celle-ci fait d'abord remarquer que l'enseignante et les chercheures ont pu voir des raisonnements « très très bons » et que certains élèves sont parvenus à ordonner les nombres en faisant « très très peu » de calculs. Elle demande ensuite aux élèves de lever la main et d'expliquer leurs démarches.

Dans ce retour, les élèves montrent qu'ils savent ordonner aisément des fractions dont seul le dénominateur varie, et ce, en s'appuyant sur la représentation « première » de la fraction, soit partie-tout, et du contexte le plus commun, soit la pizza. C'est d'ailleurs à partir des nombres 7/10 et 7/12 que les élèves ont débuté leurs explications : *« dans une tarte, il y a des morceaux plus petits dans le 7/12… 7/12 plus petits morceaux que le 7/10* ». Ensuite, ils comparent ces nombres à 5/6, à la demande de l'étudiante-chercheure, en précisant qu'il s'agit de 10/12 et qu'il est plus grand que 7/12 et 7/10. Il faudra toutefois attendre plus tard avant qu'ils émettent les raisons de leur choix : 5/6 (10/12) > 7/10 > 7/12. Ils procèdent de la même façon avec la fraction 2/3= 8/12 sans toutefois la positionner. Puis, ils comparent 141/240 (14,1/24) à 7/12 (14/24) et déterminent rapidement que 141/240 est « plus grand que 7/12 à cause du 1 ». Cependant, tel que nous pouvons le constater dans les échanges suivants, il en est autrement lorsque vient le temps d'interpréter la différence de « 1 » entre 141/240 et 7/12 :

GAUDI	Si on met le nombre décimal du plus gros chiffre, 240 [fait référence à 14,1/24], si on le compare à 7/12, c'est environ plus gros à cause du 1.
GAEL	Ça revient au même, c'est juste que le 7, après la virgule, va avoir des chiffres à cause que le 1 est plus gros.
GAUDI	C'est qu'on va comparer le 7/12 au 141/240.
CH	Oui mais comment vous arrivez à ça ? Comment vous vous débarrassez de quelque chose en faisant ça?
GAUDI	On s'en débarrasse pas on va juste un petit peu le…
CH	Oui mais quand vous le regardez, vous faites abstraction de…
GAUDI	C'est facile, j'ai fait 14 virgule …Vu qu'on le met sur 12, le 240 on le réduit.
GAEL	Il dit tout ce que j'ai fait!
GAUDI	Le 141 va être…
SAMUEL	14,1
GAUDI	plus grand que le 7, que le 7/12.
ECH	Serais-tu capable de poursuivre? Il serait combien de plus que 7/12?
GUY	Ben, il y a juste 1 virgule…
GAEL	0 virgule 1 dixième.
GAUDI	Il est environ la moitié de 1/12 [veut dire ½+1/12], c'est 0,5.
GAEL	Serait pas 0,6.
CH	En faisant 141/240, vous avez négligé quelque chose et c'est pour ça que ECH vous demande ce serait 7/12 plus quoi?
GAEL	Plus 1.
ENS	On a fait comme si 141/240 était 140/240.
MARCEL	C'est la moitié.
ENS	On s'est dit que c'était assez proche, mais il nous manque une petite partie.
ÉLS	1.
ENS	1 sur combien?
GAUDI	240.
ECH	Écrit au tableau : 141/240 = 7/12+… = 140/240 +1/240.
GAEL	Donc il est un peu plus grand que le 7/12.

À la suite des questionnements qui leur sont adressés, les élèves déterminent qu'il s'agit de 1/240. Cette considération du dénominateur [1…240^{e} !] dans la représentation de la fraction 141/240 a finalement permis d'exprimer plus clairement la composition additive de ce nombre et sa relation avec 7/12. Sachant que 7/10 est plus grand que 7/12, que 5/6 (10/12) est plus grand que 7/12 et que 141/240 est plus grand que 7/12, les élèves poursuivent ensuite la sériation avec la comparaison de 5/6 (10/12) et 7/10.

Comme le montre cet extrait, la chercheure a dû à nouveau solliciter cette prise en compte du dénominateur, afin de permettre aux élèves de préciser leur raisonnement dans l'évaluation de la « partie manquante pour compléter l'entier » :

GAUDI	Est-ce qu'on peut mettre 5/6 et 7/10 en nombre décimal?
CH	Ça vous allonge pour rien. Si vous réfléchissez avec le concept, comme Guy et Gael l'ont fait avant, vous pouvez trouver assez aisément.
GAEL	En réalité le 7/10 est plus grand que le 10/12, euh non, attends…ben non c'est le contraire parce que pour arriver à 12, il manque juste 2 et l'autre 3.
CH	2 sur…
RÉMI	12 et l'autre 3sur 10.
CH	Où il en manque le plus?
GAEL	3/10 .
HÉLÈNE	Donc 7/10 est plus petit
ENS	Oui déjà les dixièmes c'est des plus grosses parties et il en manque plus, 3 parties.

À la suite des dernières interventions qui ont permis aux élèves de conclure que 7/10 est plus petit que 10/12, car « il manque 3/10 et l'autre 2/12 », l'étudiante-chercheure les invite à situer 2/3, ce qu'ils font en recourant à diverses représentations du nombre car, tel que le mentionne Gael : «Ça dépend avec quoi tu veux le comparer ». Enfin, pour situer le nombre 0,50001, comme en témoignent les propos suivants, les élèves s'appuient sur la fraction repère ½:

ENS	Que faites-vous avec le nombre à virgule qui nous reste à placer ?
GUY	Juste après le 5/12.
PRINCE	0,5 c'est comme 5/10 , 0,50001 c'est comme 5/10 avec un 1 c'est plus qu'une demie.
GAEL	5,0001/10
SAMUEL	Vous vous cassez la tête pour rien là.
ENS	C'est pas une écriture de fraction mais ça peut aider à voir un petit peu mieux.
GAEL	À cause que ça revient à 5/10, à ½ .
ECH	0,5. Et comme Gael faisait quand on travaillait les différentes représentations…il avait écrit 0,500000 pour parler d'une demie …
GAEL	Lui (montrant 0,50001) est juste un peu plus qu'une demie.
GUY	Juste après 5/12.
ELS	Je suis d'accord avec lui.
GUY	C'est entre les 5/12 et 7/12 parce que 0,5 c'est la moitié de 1et la moitié de 12 c'est 6.
SAMUEL	Ben 5/12 c'est en bas de la moitié et 7/12 en haut.
ECH	Bravo!
ENS	Et tu disais que tu avais soumis ça à tes étudiants de l'université.
ELS	Ah!ah!
NOA	C'est vrai que d'être paresseux des fois ça aide!
ECH	Assez intéressant ! on regarde les nombres pour trouver la façon la plus simple de travailler, le chemin le plus court!
ENS	Bravo, car ce n'était pas facile comme tâche, ça demandait plusieurs raisonnements.
ECH	Assez impressionant de voir Guy parler comme ça.
ENS	Oui quand je l'ai vu la main levée de même, wow!

C'est ainsi que les élèves produisent la sériation suivante : 5/6 (10/12) > 7/10 > 7/12 > 0,50001 > 5/12. Ce retour permet à plusieurs élèves (ex. Hélène, Gael, Samuel, Marcel) de recourir à diverses représentations, à aller au-delà de ce qu'ils avaient fait, à poursuivre les démarches et à entrer dans les raisonnements déployés par d'autres élèves. Nous pouvons remarquer, par exemple, qu'ils ont su donner sens à la composition additive de 141/240 comme étant 7/12+ 1/240, alors que dans l'étude effectuée par Chevallard et Julien (1989), nous pouvons voir qu'une grande majorité d'élèves n'associent pas les représentations 14/10 et 1 + 4/10.

4.2.11. Résolution d'un problème additif impliquant des nombres rationnels

La situation qui a été présentée aux élèves le 30 avril 2007, comme les activités précédentes, fait suite à la demande que nous avait adressée l'enseignante concernant la prise en charge de l'enseignement de la comparaison des fractions. Cette activité s'appuie sur l'analyse des conduites des élèves lors de l'examen qui portait sur les opérations sur les nombres rationnels (27 mars 2007). Pour cette situation, nous avons choisi des fractions pour lesquelles la recherche d'un dénominateur commun par l'application d'un procédé usuel (multiplication des dénominateurs) s'avérait, compte tenu des dénominateurs en jeu et de la variété des nombres rationnels, coûteuse et peu pertinente. En prenant appui, entre autres, sur les relations entre leurs numérateurs et leurs dénominateurs, notamment sur le sens rapport de la fraction, la simplification serait plus économique et les élèves pourraient donc trouver un dénominateur commun qui leur permettrait de les exprimer et de les comparer aisément. Nous avons aussi intégré un nombre décimal et un pourcentage, faisant ainsi appel à différents registres sémiotiques (Duval, 1995) et à des écritures diverses ; s'il était facile d'associer une fraction au pourcentage que nous avons choisi (soit 25%), ce nombre étant relativement familier aux élèves, exprimer le nombre décimal (soit 0,125) par une fraction qui puisse permettre d'établir des relations entre les différentes fractions était moins évident; en effet, si l'expression du nombre 0,125 par 125/1000 ne posait pas de problèmes majeurs aux élèves, il fallait procéder à une simplification de cette fraction, pour pouvoir l'associer aux autres fractions et produire ainsi une représentation économique de l'ensemble des fractions. Nous espérions que les élèves puissent prendre appui sur les représentations de 25%, soit 25/100 et 1/4, pour pouvoir simplifier la fraction 125/1000. Nous aurons l'occasion, lors de l'analyse des conduites des élèves, de voir si nos attentes étaient réalistes.

La tâche ci-dessous a été présentée aux élèves et une feuille quadrillée leur a été distribuée.

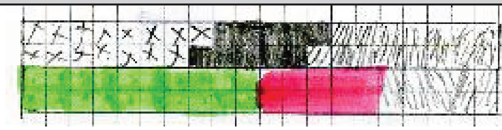
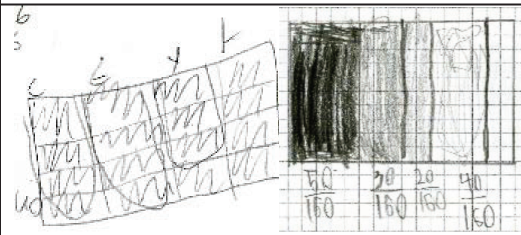
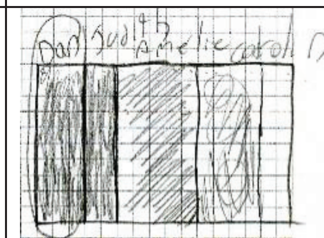
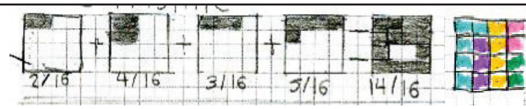
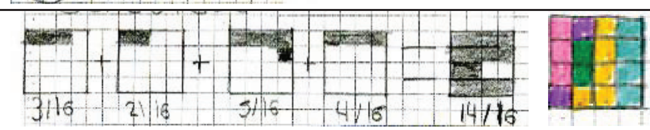
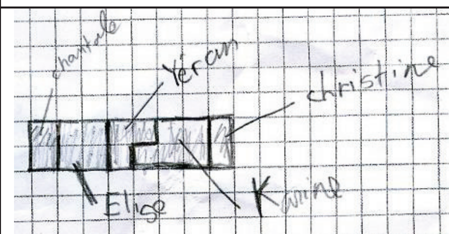
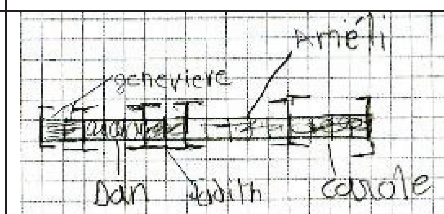
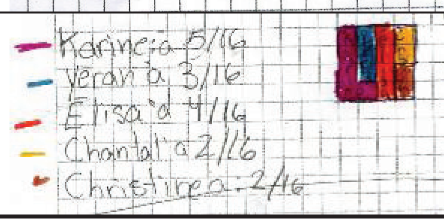
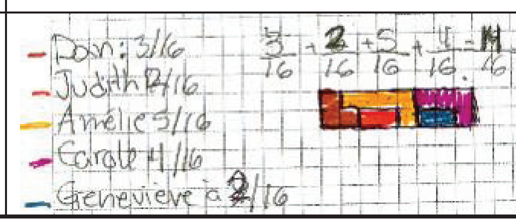
> Christine et Geneviève ont reçu chacune une tablette identique de chocolat noir Lindt très très mince qui présente l'allure d'une feuille quadrillée. Elles conviennent de donner une partie de leur tablette à 4 de leurs amies, mais elles ont des préférences.
>
> Voici ce que chacune recevra :

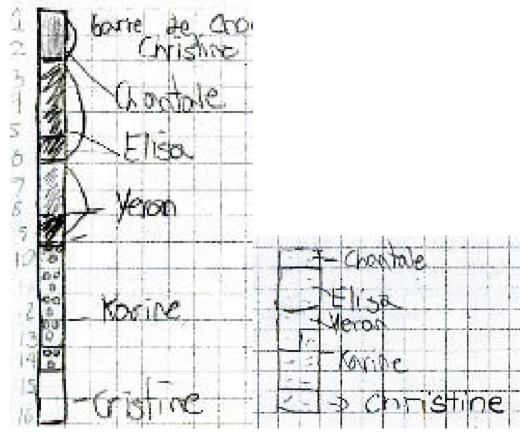
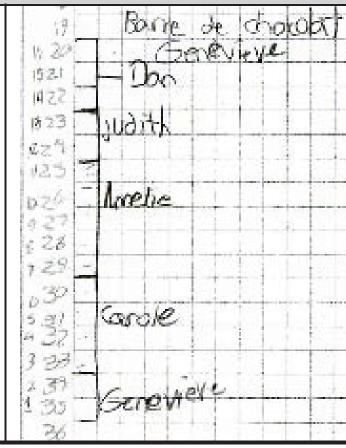
Christine a partagé ainsi sa tablette :	**Geneviève a donné:**
0,125 de sa tablette à Chantale	3/16 de sa tablette à Dan
31/124 de sa tablette à Elisa	3/24 de sa tablette à Judith
9/48 de sa tablette à Yéran	50/160 de sa tablette à Amélie
100/320 de sa tablette à Karine	25% de sa tablette à Carole
et le reste ...pour elle!	et le reste ...pour elle!

> Pour effectuer cette tâche, il est absolument indispensable que vous utilisiez le papier quadrillé et que vous soyez très très très précis dans vos mesures, de telle sorte qu'il soit facile de comparer la part de chacune.
> a) Qui est la plus généreuse?
> b) Quelle amie Christine préfère-t-elle?
> c) Quelle amie Geneviève préfère-t-elle?

Rappelons que le cœur de cette première situation consistait à « jouer » avec les représentations des nombres rationnels, afin de trouver un dénominateur commun permettant de représenter la part de chacune et de comparer les deux tablettes. Pour illustrer nos propos, nous présenterons maintenant deux tableaux : le premier tableau rend compte des productions des élèves, c'est-à-dire des fractions retenues pour chacun des partages et des représentations des tablettes de chocolat montrant les différents partages; le second tableau rend compte des processus et des stratégies privilégiées par les élèves pour effectuer les partages et les représentations des tablettes de chocolat. Dans le second tableau, nous avons identifié ainsi les différentes stratégies 1) rechercher le nombre de fois que le numérateur entre dans le dénominateur (sens rapport); 2) représenter le nombre fractionnaire sous une forme décimale en divisant le numérateur par le dénominateur (sens quotient) 3) application de procédures connues (Notes de cours : fractions équivalentes): 3a) division par un commun diviseur; 3b) division par le plus grand commun diviseur (fraction irréductible); 3c) produit croisé; 3d) multiplication du numérateur et du dénominateur par le même nombre et 4) coordination de différents registres (dénomination, nombre décimal, pourcentage, notation fractionnaire). Nous reproduisons également certaines interactions permettant une meilleure appréciation des conduites des élèves.

Tableau XXXVII: Fractions retenues pour chacun des partages et des représentations des tablettes de chocolat montrant les différents partages

<table>
<tr><th>Équipe</th><th colspan="2">Tablette Christine</th><th colspan="2">Tablette Geneviève</th></tr>
<tr><td>1
Hélène et
Bertrand</td><td>Écritures de la chercheure
31 /124…3/12 ÷ 3 = ¼ …
31/124 ÷ 31 = ¼ ; 100/320 = 10/32 ÷ 2 = 5/16; 9/48 ÷ 3 = 3/16</td><td>Aucune représentation</td><td>Dan : 15/80
Judith : 10/80
Amélie : 25/80
Carole : 20/80
Geneviève :</td><td></td></tr>
<tr><td>2
Alex et
David</td><td>Chantale :2/16=20/160(Y)
¼(Y)
Elisa : 4/16 = 40/160
Yéran : 3/16 = 30/160
Karine : 5/16 =50/160
Christine:2(Y);2/16 (C)</td><td></td><td>Dan : 30/160
Judith : 20/160
Amélie : 50/160
Carole : 40/160
Geneviève : 20</td><td></td></tr>
<tr><td>3
Prince et
Martin</td><td>Chantale : 2/16
Elisa : 4/16
Yéran : 3/16
Karine : 5/16
Christine :2/16</td><td></td><td>Dan : 3/16
Judith : 2/16
Amélie : 5/16
Carole : 4/16
Geneviève : 2/16</td><td></td></tr>
<tr><td>4
Noa et
Samuel</td><td>Chantale : 2/16
Elisa : 4/16
Yéran : 3/16
Karine : 5/16
Christine :2/16</td><td></td><td>Dan : 3/16
Judith : 2/16
Amélie : 5/16
Carole : 4/16
Geneviève : 2/16</td><td></td></tr>
<tr><td>5
Réjean et
Rébecca</td><td>Chantale : 2/16
Elisa : 4/16
Yéran : 3/16
Karine : 5/16
Christine :2/16</td><td></td><td>Dan : 3/16
Judith : 2/16
Amélie : 5/16
Carole : 4/16
Geneviève : 2/16</td><td></td></tr>
</table>

Équipe	*Tablette de Christine*		**Tablette de Geneviève**	
6 Guy, Gaudi et Marcel	*Chantale : 2/16* *Elisa : 4/16* *Yéran : 3/16* *Karine : 5/16* *Christine :2/16*		*Dan* : 3/16 *Judith* : 2/16 *Amélie* : 5/16 *Carole* : 4/16 *Geneviève* : 2/16	

7 Anne		Aucune représentation	*Carole* : 25% = 25/100 = ¼ = 4/16	Aucune représentation
8 Gael et Rémi	*Chantale : 12,5%* *Elisa : 25%* *Yéran : 18,75%* *Karine : 31,25%* *Christine : 12,5%*	Aucune représentation	*Dan :* 18,75% *Judith :* 12,5% *Amélie :* 31,25% *Carole :* 25% *Geneviève :* 12,5%	Aucune représentation

Tableau XXXVIII: Stratégies retenues pour chacun des partages et des représentations des tablettes de chocolat

Équipes	Tablette de Christine *Chantale : 0,125* *Elisa : 31/124* *Yéran : 9/48* *Karine : 100/320* *Christine : le reste*	Stratégie 1 rel.Num/denom. 2 quotient 3 fr. eq. 4 régistres	Tablette de Geneviève *Dan : 3/16* *Judith : 3/24* *Amélie : 50/160* *Carole : 25%* *Geneviève : le reste*	Stratégie 1 rel.Num/denom. 2 quotient 3 fr. eq. 4 régistres	Appréciation : J : juste E : erronée
1 Hélène et Bertrand	*Chantale : 1/8*	*4*	*Dan : 15/80*	*3d(3),3d(5)*	*J mais ne représente pas la plus petite tablette*
	Elisa : 1/4	*2 (3/12;1/4); 3b*	*Judith : 10/80*	*3b,3d*	
	Yéran : 3/16	*3b*	*Amélie : 25/80*	*3b,3d*	
	Karine : 5/16	*3a, 3a*	*Carole : 20/80*	*4,3b, 3d*	
	Christine :	---	*Geneviève :*	*numériquement*	
2 Alex et David	*Chantale :2/16=20/16 (C)..1/4(Y)*	*4, 3d, 3d*	*Dan : 30/160*	*3d*	*J mais ne représente pas la plus petite tablette*
	Elisa : 4/16 = 40/160	*1?, 3b, 3d, 3d*	*Judith : 20/160*	*3b,3d*	
	Yéran : 3/16 = 30/160	*3b,3d*	*Amélie : 50/160*	---	
	Karine : 5/16 =50/160	*3b,3d*	*Carole : 40/160*	*4 (1/4), 3d*	
	Christine : 2(Y);2/16 (C)	*numériquement*	*Geneviève : 20*	*numériquement*	
3 Martin et Prince	*Chantale : 2/16*	*4,3d,3a, 3a,3a,3d*	*Dan : 3/16*	*3d,3a*	*J*
	Elisa : 4/16	*1,3d*	*Judith : 2/16*	*3d,3a,3b,3d,3d,3a*	
	Yéran : 3/16	*3b*	*Amélie : 5/16*	*3d,3a*	
	Karine : 5/16	*3a,3b*	*Carole : 4/16*	*4,3a,3d,3a*	
	Christine :2/16	*graphiquement*	*Geneviève : 2/16*	*graphiquement*	
4 Samuel et Noa	*Chantale : 2/16*	*4,3a,3d, 4,3d*	*Dan : 3/16*	---	*J*
	Elisa : 4/16	*3d…1,3d, 3b(v)*	*Judith : 2/16*	*3b,3d*	
	Yéran : 3/16	*1(e),3b*	*Amélie : 5/16*	*3b*	
	Karine : 5/16	*3a,3b*	*Carole : 4/16*	*4-1,3d*	
	Christine :2/16	*graphiquement*	*Geneviève : 2/16*	*graphiquement*	
5 Rebecca et Réjean	***Chantale : 2/16***	*4,3a*	***Dan : 3/16***	---	*J*
	Elisa : 4/16	*1,3b*	***Judith : 2/16***	*1,3d*	
	Yéran : 3/16	*3b(9),3b(3)*	***Amélie : 5/16***	*3b*	
	Karine : 5/16	*3a,3a,3a /3a,3a*	***Carole : 4/16***	*4, 3d,3d*	
	Christine :2/16	*numériquement*	*Geneviève : 2/16*	*numériquement*	
6 Gaudi, Guy et Marcle	***Chantale : 2/16***	*4,3a,3b*	***Dan : 3/16***	---	*J*
	Elisa : 4/16	*2,4,1*	***Judith : 2/16***	*3b,3d*	
	Yéran : 3/16	*1(i)-2(e)-3b*	*Amélie : 5/16*	*3b*	
	Karine : 5/16	*3?ou4(e);3a,3b*	*Carole : 4/16*	*4,3d*	

Comme le montre le premier tableau 39, cinq équipes, soit les équipes 2, 3, 4, 5 et 6, ont bien représenté la répartition des tablettes de chocolat de Christine et Geneviève. Plusieurs équipes ont décidé de reproduire les plus petites tablettes possibles, en utilisant 16 comme dénominateur commun. On peut le constater pour les équipes 2, 3, 4, 5 et 6, en ce qui concerne la tablette de Christine. Ainsi, ils ont trouvé 2/16 pour Chantale, 4/16 pour Elisa, 3/16 pour Yéran, 5/16 pour Karine et le reste pour Christine, soit 2/16. À remarquer que Alex et David (équipe 2) ont produit une deuxième tablette comportant 160 carreaux, à la suite du dessin réalisé pour Geneviève, afin de pouvoir facilement les comparer. En ce qui concerne la tablette de Geneviève, les membres des équipes 3, 4, 5 et 6 ont choisi 16 comme dénominateur commun, inscrivant alors 3/16 pour Dan, 2/16 pour Judith, 5/16 pour Amélie, 4/16 pour Carole et enfin 2/16 pour Geneviève. Les équipes 1 et 2 ont respectivement opté pour 80 et 160 comme dénominateurs communs; chacun de ces dénominateurs leur a permis d'effectuer adéquatement les partages. Les équipes 7 et 8 n'ont produit aucune représentation graphique. Il faut dire que l'équipe 7 a rencontré plusieurs difficultés dans l'accomplissement de cette tâche. De son côté, l'équipe 8 a plutôt exploité les pourcentages. Cette dernière démarche permet de répondre correctement aux trois questions; son application rend toutefois impossible la représentation précise des parts de chacune des amies, bien que cette demande figurait dans l'énoncé du problème.

Afin de mieux comprendre ces résultats, nous nous attarderons aux procédés déployés par les différentes équipes. L'équipe composée des élèves Hélène et Bertrand (équipe 1) n'a produit aucune représentation pour la tablette de Christine. Plus encore, ces élèves requièrent l'aide de la chercheure, ne sachant trop comment procéder. La copie de ces élèves fait état des écritures proposées par la chercheure. Elle met, entre autres, en relation les écritures 0,125, ¼, 0,250 et 1/8, afin d'amener ces élèves à voir que 0,125 équivaut à 1/8 en s'appuyant sur leurs connaissances du nombre décimal 0,25 et de son équivalence fractionnaire, soit ¼, sans toutefois commenter ces écritures :

0,125…………………….. = 1/8 0,250…250/1000 = 25/100 = ¼

Pour Yéran (9/48), la chercheure inscrit 9 ÷ 3 et 48 ÷ 3; pour Karine (100/320), elle inscrit 10/32 = 5/16 et enfin, elle propose une comparaison des écritures suivantes : 31/124, 3/12 et ¼. Cependant, l'exploitation du rapport entre le numérateur et le dénominateur ne sera pas explicitée lors du retour collectif, Bertrand évoquant sans plus qu'il faut « *diviser 124 par 31* ». Il nous est donc difficile de nous prononcer sur la réception par les élèves des propositions de la chercheure. L'analyse de leurs conduites, lors de la répartition de la tablette de Geneviève, nous permettra maintenant de prendre acte des effets de ces interactions. Ils ont d'abord multiplié[37] le numérateur et le dénominateur de la fraction 3/16 par 3 [9/48], puis par 5 [15/80], afin d'obtenir le dénominateur commun 80; ce choix qui, de prime abord, semble étonnant, pourrait traduire leur souhait de produire une tablette dont la taille est voisine des tablettes usuelles. Ce choix les a amenés successivement: 1) à réduire 3/24 à 1/8 et à multiplier cette fraction par 10 [10/80]; 2) à transformer 50/160 en 5/16 et à multiplier cette fraction par 5 [25/80]; 3) à représenter 25% sous une forme fractionnaire [25/100], puis à réduire la fraction obtenue [5/20] et enfin, à multiplier cette fraction par 4 [20/80]. Ces démarches montrent qu'ils ont su profiter de certaines des interventions de la chercheure, lors de l'analyse des relations entre les données associées à la tablette de Christine. Ils n'ont pas su toutefois réexploiter la démarche explicitée précédemment par la chercheure pour réduire la fraction 31/124 (soit 3/12, ¼), ni l'équivalence inscrite entre 25/100 et ¼, mais les procédés montrés pour traiter les fractions 9/48 et 100/320 leur ont servi d'ancrage pour mener à terme cette résolution en effectuant diverses réductions. Le dénominateur commun et les fractions équivalentes ont été trouvés judicieusement, ce qui les a amenés à trouver numériquement la part de Geneviève et à procéder à la représentation de sa tablette.

L'équipe d'Alex et de David a aussi bénéficié de l'aide de la chercheure pour la représentation de la tablette de Christine. Celle-ci a mis en exergue, pour la part de Chantale (0,125), la relation entre 0,125 et 0,250 (25%, 25/100, ¼) tout en l'accompagnant, cette fois, d'un dessin  permettant de voir que la moitié d'un

[37] Afin de ne pas alourdir le texte, nous nous limiterons, dans l'analyse de cette activité, à l'expression « mutliplier par » qui réfère à la multiplication du numérateur et du dénominateur.

quart est un huitième. Les élèves ont écrit *1/8 = 2/16* pour Chantale. Pour Élisa, la chercheure a écrit 3/12 = ¼; les élèves ont ensuite raturé le 1 du 31 et le 4 du 124 dans 31/124 pour enfin inscrire *¼ = 4/16*. Cette façon de faire nous est apparue fort originale. En effet, contrairement à ce qu'on pourrait penser, elle est bien fondée sur les relations entre les nombres qui composent chacune des écritures : les élèves ont ainsi reconnu que dans 31/124 le 1 et le 4 ont la même relation que le 3 et le 12. La chercheure leur a demandé d'interpréter de la même façon la fraction 32/124; ils ont répondu qu'ils ne pouvaient le faire, puisque les relations entre 3 et 12 puis 2 et 4 ne sont pas les mêmes (3/12 versus 2/4). Yéran ayant reçu 9/48 de la tablette, les élèves l'ont représenté par 3/16 et la part de Karine (100/320) a été traduite par 5/16. Aucun calcul n'accompagne l'obtention de ces fractions équivalentes. Il est à noter que pour la part de Christine, Alex a inscrit 2 et David, 2/16. De même, nous remarquons que peu d'informations accompagnent la représentation de la tablette de Geneviève; seules les transformations suivantes sont inscrites sur leur feuille : 3/16 = 30/160, 3/24 = 1/8 = 20/160 et 25% = ¼ = 40/160. Ils écrivent ensuite le nombre 20 pour rendre compte de la part que Geneviève conserve. On ne peut toutefois pas savoir si ce nombre a été obtenu graphiquement (dénombrement des parties non hachurées sur le dessin) ou numériquement (calcul de la différence entre la somme des numérateurs des fractions déjà identifiées et le dénominateur 160). À la suite de la représentation de la tablette de Geneviève qu'ils ont effectuée avec 160 morceaux, ils ont repris celle de Christine afin de la mettre sur le même dénominateur et de pouvoir ainsi les comparer facilement. C'est pourquoi nous retrouvons deux représentations pour la tablette de Christine.

Les productions de Prince et Martin reflètent bien leurs connaissances sur l'addition de fractions (voir les représentations reproduites au tableau 39). Leurs premières tentatives ont été influencées par la prise en compte des dénominateurs de certaines fractions qui étaient assez élevés (ex. 320, 124). Nous reproduisons les traces des premiers calculs apparaissant sur leurs feuilles : « 90/480 = 45/240…240 ÷ 3 = 80; 100/320 = 50/160; 0,125 = 125/1000 …÷ 5 = 25/200 et 31/124…124 x 5 = 620…620 ÷ 2 = 310…31 x 5 = 155…155 ÷ 2…marche pas ». Abandonnant ces calculs qui ne les satisfaisaient pas, ces élèves ont essayé d'exprimer la part de chacune, en recourant au dénominateur 16, dénominateur qui leur était possiblement suggéré par les relations entre certains dénominateurs, non seulement dans la tablette de Christine, mais aussi dans celle de Geneviève (9/48, 3/16, 3/24, 50/160), ce travail donnant lieu aux calculs suivants: 0,125 = 12,5/100 = 125/1000 = 25/200 = 5/40 = 1/8 = 2/16; 31/124 = ¼ = 4/16; 9/48 = 3/16 et 100/320 = 10/32 = 5/16. Ces élèves ont eu recours à des procédés différents en fonction des relations entre les numérateurs et dénominateurs. Ainsi, le passage de 31/124 à ¼ a été obtenu en recherchant la relation entre le numérateur et le dénominateur, effectuant consécutivement 31 x 2 puis 31 x 4 = 124. S'attarder ainsi à connaître le nombre de fois que le numérateur est contenu dans le dénominateur ne fait pas partie des comportements habituels des élèves. Pour réduire la fraction 125/1000, ils ont effectué les calculs suivants, prenant en compte que chacun des nombres se divise par 5 : 125/1000 (÷5/÷5) = 25/200 (÷5/÷5) = 5/40 (÷5/÷5) = 1/8 = 2/16). Ils ont suivi cette même démarche dans le traitement de la tablette de Geneviève, mais en recourant au dénominateur 160, recours prenant appui sur la prise en compte des fractions 3/16 et 50/160. Ils ont alors inscrit : 3/16 = 30/160; 3/24 = 30/240…3/24 =1/8 = 2/16 = 20/160 ; 50/160 ; 25/100 = 4/16 = 40/160. Par la suite, pour pouvoir comparer les différentes tablettes, comme le montrent les productions suivantes, ils ont produit des fractions équivalentes, en recourant aux dénominateurs 16 et 160 pour les deux tablettes :

Tablette de Christine		**Tablette de Geneviève**	
Chantale : 20/160 *Elisa : 40/160* *Yéran : 30/160* *Karine : 50/160*	*Chantale : 2/16* *Elisa : 4/16* *Yéran : 3/16* *Karine : <u>5/16</u>* *14/16*	*Dan :* 30/160 *Judith : 20/160* *Amélie :50/160* *Carole : 40/160*	*Dan :* 3/16 *Judith : 2/16* *Amélie : 5/16* *Carole : <u>4/16</u>* *14/16*

Leur choix s'est enfin arrêté sur le dénominateur 16 pour représenter chacune des tablettes, ce qui leur a permis effectivement d'effectuer des représentations économiques. En prenant appui sur ces représentations, ils ont été en mesure de trouver la part de Christine et celle de Geneviève, soit 2/16.

Samuel et Noa ont pour leur part exploité diverses représentations pour la tablette de Christine, représentations qui témoignent de connaissances sur les nombres rationnels leur permettant d'exploiter divers procédés pour comparer et exprimer des fractions. Par exemple, ils ont traduit ainsi la part de Chantale : 0,125 = 12,5/100…125/1000. La chercheure a réagi en inscrivant, sans les commenter, les écritures suivantes 0,125…0,250 et 1/8. Les élèves ont alors écrit les fractions suivantes : 1/8, 5/40, 310/1240. Étant donné qu'il s'agissait du premier partage, le nombre élevé d'écritures rend compte des différentes tentatives de recherche d'un dénominateur commun. Cette quête est aussi palpable dans la mise en relation des fractions 9/48 et 31/124, comme en témoignent les additions 48 + 48= 96 et 96 + 48 = 144, essayant d'atteindre 124. D'autre part, la fraction ¼ a été obtenue en regardant la relation entre le numérateur et le dénominateur : 31 + 31 = 62; 62+62 = 124. Ils ont aussi essayé d'appliquer ce raisonnement à 9/48 en additionnant successivement 9 jusqu'à 45. Cette attitude est assez inhabituelle dans ce type de tâches. Pour s'assurer de l'égalité entre ¼ et 31/124, une flèche relie 1 et 31, puis 4 et 124 et il est inscrit x 31. Enfin, tous les nombres rationnels ont été transformés afin de retrouver 16 comme dénominateur commun. Pour la part de Karine (100/320), ils ont raturé un 0 au numérateur et au dénominateur (10/32) et inscrit ÷2 pour obtenir 5/16. Pour celle de Yéran (9/48), ne pouvant trouver un nombre qui multiplié par 9 donne 48, ils ont divisé par 3 le numérateur et le dénominateur de la fraction (3/16). Pour Chantale, ils ont inscrit que 0,125 = 125/1000 (divisé par 25) = 5/40 (divisé par 5) = 1/8 = 2/16. Pour Élisa, ils sont repartis du ¼ et ont multiplié le numérateur et le dénominateur de cette fraction par 4 (4/16). Pour la production de la tablette de Geneviève, Samuel et Noa ont représenté chacune des fractions en utilisant 16 comme dénominateur commun de ces fractions : 1) 3/16 ; 2) 3/24 = 1/8 = 2/16; 3) 50/160 [ayant raturé les 2 zéros] = 5/16 ; 4) 25% = ¼ = 4/16. Enfin, ils ont effectué correctement les illustrations des tablettes de Christine et de Geneviève et ils ont déterminé que chacune conservait 2/16. Aucune trace des calculs effectués n'accompagne cette dernière réponse; ils ont peut-être dénombré, sur chacune des tablettes, le nombre de petits carrés non hachurés ou encore, effectué la somme des fractions et identifié la fraction à additionner pour obtenir 16/16.

L'équipe de Rébecca et Réjean sollicite, dès le départ, l'aide de l'étudiante-chercheure : « *C'est juste qu'on ne sait pas sur quoi le mettre sinon on serait capable!* » Elle leur indique qu'il s'agit précisément de l'intérêt de cette activité. Rébecca et Réjean décident alors de procéder à la réduction des différentes fractions. Pour la transformation de la part d'Élisa [31/124], ils ont dressé une liste des multiples de 3 et de 5 afin de savoir si 31 en faisait partie et ainsi connaître le nombre par lequel ils effectueraient la division de 124. Ils se sont aperçus que 31 était un nombre premier. L'enseignante les invite alors à s'attarder à 124. Ils ont cherché à connaître le nombre de fois que le numérateur est contenu dans le dénominateur. Ils ont additionné consécutivement 31 jusqu'à l'obtention de 124 (31+31+31+31) et ont trouvé la fraction équivalente, soit ¼. Rébecca et Réjean ont tenté de faire la même démarche avec la fraction 9/48 en divisant 48 par 9, obtenant « 5 reste 3 »; devant cet échec, ils ont simplement réduit 9/48 en divisant le numérateur et le dénominateur par 3 pour obtenir 3/16. La représentation de la part de Karine a été transformée en effectuant consécutivement deux divisions par 2 : 100/320 = 50/160 = 25/80. Ensuite, ils ont recherché un dénominateur commun en réunissant les parties écrites sous forme fractionnaire, soit celles d'Élisa, Yéran et Karine [1/4+ 3/16+ 25/80]. Se sentant dépourvus, l'étudiante-chercheure les invite à réexaminer la fraction 100/320, en prêtant une attention particulière aux nombres en jeu, afin d'effectuer la division la plus judicieuse possible. Ils ont alors divisé le numérateur et le dénominateur par 10, dans un premier temps, pour obtenir 10/32 et, dans un deuxième temps, par 2, obtenant alors le nombre 5/16. Ce constat les a amenés à privilégier 16 comme dénominateur commun et à transformer leurs nombres rationnels en conséquence : 4/16+3/16+5/16. Pour la part de Chantale (0,125), ils ont inscrit 125/1000 à la suite du questionnement suscité par l'étudiante-chercheure sur la dénomination de ce nombre. Par la suite, ils ont effectué la division de 1000 par 125, afin de connaître la relation entre le numérateur et le dénominateur (125, 250, 375, 400…); ils concluent que « c'est 8 x 125 qui donne 1000 » et que « 1000 serait remplacé par 8… ». À partir du quotient obtenu, soit 8, ils ont écrit 1/8 comme fraction équivalente, puis 2/16. Il leur était alors possible de réunir les différentes portions des amies de Christine (5/16+3/16+4/16+2/16 = 14/16) et de s'apercevoir que Christine en avait conservé 2/16. Ensuite, ils ont procédé à la représentation de la tablette de chocolat. En ce qui a trait à celle de Geneviève, Rébecca et Réjean ont rapidement perçu qu'avec les dénominateurs 16, 160, 24 et les relations entre les numérateurs et les dénominateurs des fractions 3/24 et 50/160, ils pouvaient réutiliser le dénominateur 16 pour représenter chacune des parts. Étant donné que 25%

est un nombre avec lequel ils ont l'habitude de travailler, l'écriture ¼ est apposée à celle de Carole, de même que 2/8 et 4/16.

Réjean On en a déjà une en seizièmes [3/16] et tchèque celui-là [50/160], c'est facile, 5/16 et 3/24 …
Rébecca 24 divisé en 3… 5,10,15, 16,17,18,19,20,21,22,23,24…ça serait 3/8..6/16…
Réjean: 25% ça serait ¼..4/16…
Rébecca (s'adressant à ECH): ça marche pas…on en a juste une tablette pas un entier et quelque chose, ça donne genre 18/16…

Comme le montrent les interactions précédentes, Rébecca a toutefois commis une erreur dans le traitement de la fraction 3/24. Afin de rechercher la relation entre le numérateur et le dénominateur, elle a représenté le dénominateur par des multiples de trois, trois étant le nombre apparaissant au numérateur. Elle a donc effectué[38] les décompositions suivantes en verbalisant : « 5,10,15…16,17,18...19,20,21…22,23,24 »

5 5 5
1 1 1
1 1 1
1 1 1

Elle a alors inscrit que 3/24 = 3/8 = 6/16, ce qu'elle a rapidement réajusté en constatant que la somme des différentes parties était déjà plus grande qu'une tablette [3/16+ 6/16 +5/16+ 4/16=18/16], alors qu'ils n'avaient pas encore traité du reste de la tablette conservé par Geneviève. En s'appuyant sur la relation entre 3 et 24, relation obtenue en divisant 24 par 3, les élèves ont remplacé 3/8 par 1/8 = 2/16. Enfin, ils ont additionné les différentes portions 3/16 + 2/16 + 5/16 + 4/16, afin de connaître la portion de Geneviève, soit 2/16. Il importe de souligner que, même si ces élèves réclament à quelques reprises l'aide de l'étudiante-chercheure, ils peuvent mettre en place des démarches pertinentes et plus encore, identifier leurs erreurs et mettre en place des procédés leur permettant de corriger leurs erreurs, ce qui atteste de connaissances non négligeables sur les nombres rationnels, ainsi qu'une prise en compte de la situation.

Disposant d'une enregistreuse à la table de travail des membres de l'équipe 6 composée de Gaudi, Marcel et Guy, nous présentons plus en détail les échanges ayant

[38] À notre connaissance, il ne s'agit pas d'un procédé usuel dans la classe. Il est possible que Rébecca réfère à certaines représentations de la division : diviser par 3 voulant dire répartir une collection en 3 colonnes, une rangée comportant un même nombre d'objets.

mené à l'obtention de leurs résultats. Dès l'entrée dans cette situation, l'étudiante-chercheure a interrogé les élèves, afin qu'ils puissent s'appuyer sur les relations entre les nombres, plutôt que d'avoir recours à la calculatrice qu'ils avaient en main. Les propos suivants témoignent du cheminement ayant mené aux diverses représentations de la part de Chantale :

ECH	Donc, dans la tablette de Christine tu dois représenter la part de Chantale [0,125]. Comment lis-tu ce nombre-là ?
GAUDI	Sur 10?
ECH	Qu'est-ce qui serait sur 10?
GUY	1,25.
GAUDI	12.
ECH	Comment lisez-vous ce nombre-là (0,125)? C'est 125 quoi?
MARCEL	125 sur 100.
ECH	Ok ça c'est 1 quoi?
MARCEL	1 dixième.
ECH	Ça c'est…
GUY	12 centièmes.
MARCEL	125 millièmes.
ECH	Bien! Alors comment tu peux l'écrire?
GAUDI	125 sur 1000.
ECH	Ok, est-ce que tu peux l'écrire autrement?
MARCEL	On peut réduire la fraction : 1,25 sur 10.
GAUDI	Non faut plus la virgule.
GUY	Ah!
ECH	Mais si tu regardes la relation entre les deux, si tu regardes les nombres, 125, 1000..
MARCEL	Divisé par 5? par 25?
ECH	Voilà, et ça donne combien?
MARCEL	Prends ta calculatrice!
ECH	Mais dans 100 il y a combien de 25?
GAUDI	4…alors 5
ECH	Donc 5 sur … dans 100 il y en a 4 , dans 1000?
MARCEL	8
ECH	De 100 à 1000, c'est combien?
GUY	C'est 10 fois plus.
ECH	Donc si dans 100 c'est 4, dans 1000 il va y en avoir combien?
MARCEL	40
ECH	Voilà! Donc là on a 5 sur 40, est-ce qu'on peut l'écrire autrement ?
MARCEL	Oui la réduire en divisant par 5, ça fait 1/8.
ECH	Donc, vous pouvez de continuer comme ça…

Comme le montrent les premières interactions avec l'étudiante-chercheure, la proposition effectuée par Gaudi, laquelle consiste à recourir au dénominateur 10 pour exprimer par une fraction le nombre décimal 0,125, proposition reprise par Guy qui suggère de représenter ce nombre par 1,25/10, est un événement qui aurait pu être mis à profit autrement par l'étudiante-chercheure. Celle-ci aurait pu inviter les élèves à expliciter et à défendre leurs points de vue. Ainsi, Gaudi aurait pu faire valoir le fait que

1,25/10 n'est pas une fraction (comme il le souligne bien en disant «*non faut plus la virgule »); * l'étudiante-chercheure aurait pu prendre acte de ce jugement et demander aux élèves d'exprimer par une fraction la relation entre les nombres 1,25 et 10 et s'ils ne parvenaient pas à le faire, proposer diverses représentations, par exemple, 2,5/10, 0,5/10. Les élèves auraient pu recourir à leurs connaissances et pratiques sur les nombres rationnels, pour exprimer par une fraction le rapport entre les nombres 1,25 et 10. Par ailleurs, comme le montrent les interactions entre l'étudiante-chercheure et les élèves, les élèves peuvent prendre appui sur la relation entre 25 et 100 pour effectuer une composition de la relation entre 125 et 1000.

Pour déterminer la portion d'Élisa, l'étudiante-chercheure a voulu poursuivre le travail exigeant la prise en compte de la relation entre le numérateur et le dénominateur. Elle a profité de l'ouverture créée par les interactions entre Marcel et Gaudi, afin de les confronter à la « lourdeur » de leur démarche. Regardons de plus près ces échanges :

MARCEL	Mais 31 pour 124 on va faire quoi?
GUY	On réduit toujours!
ECH	Regardez la relation entre les deux. Par exemple, ici [125/1000 = 1/8], ça nous dit que notre dénominateur est 8 fois notre numérateur.
GUY	C'est pas fou ça!
MARCEL	Alors il faut diviser par 8.
ECH	Regardez maintenant la relation entre 31 et 124.
[ECH continue de circuler dans la classe…]	
GUY	Lui le 31 sur 124…
MARCEL [s'adressant à GAUDI qui a une calculatrice]: divise 124 par 31	
GAUDI	0,25, un nombre décimal.
GUY	D'où tu sors ça?
MARCEL	Il a divisé 124 par 31.
GAUDI	Non 31 divisé par 124 égale 0,25…il y a combien de 25 cents dans 1 dollar?
MARCEL	4.
GAUDI	Donc ça donne 1/4, comprends-tu petit Guy?
GUY	Ahhhhh, oui!
MARCEL	T'es vraiment smart!

Les élèves ont donc inscrit sur leur feuille *31/124 …31÷124/124÷124 = 0,25/1 = 0,25 = ¼*. Bien que cette écriture soit onéreuse, elle semble relever davantage du contrat (reproduire des démarches reconnues dans les notes de cours) que de leur échange (*31/124 …31÷124= 0,25 = ¼*). Quoi qu'il en soit, elle a le mérite de coordonner des connaissances fort importantes et peu fréquemment utilisées dans ce type de tâches. En s'appuyant sur un contexte connu (argent), ils ont, à la fois, exploité les sens rapport et quotient de la fraction. La proposition de Marcel qui souhaitait connaître la relation entre le numérateur et le dénominateur (sens rapport), soit de diviser 124 par 31, a créé une entrée faisant réagir Gaudi qui a suggéré de diviser 31 par 124 (sens quotient). Toutefois, nous pouvons remarquer que Gaudi reprend indirectement l'idée de Marcel lors de l'exemple avec la monnaie.

Ainsi, l'étudiante-chercheure a clos cet épisode en demandant aux élèves d'expliquer comment ils auraient pu parvenir plus rapidement à cette réponse :

ECH	Ok. C'est bon vous avez raison, mais maintenant je vais vous demander de m'expliquer, comment vous auriez pu le voir, plus facilement, dès le départ que la relation entre le numérateur et le dénominateur est de ¼…que le dénominateur est 4 fois plus grand que le numérateur.
MARCEL	Parce qu'on a dit combien de 25 sous dans 1 dollar?
ECH	Oui, mais là on dirait combien de 31 dans 124?
MARCEL	Alors on fait 124 divisé par 31.
ECH	Oui, mais regarde les nombres. Quelle relation peut-on voir?
GUY	Fois 4 [ECH fait une flèche allant du 31 vers 124 à laquelle elle ajoute x 4].
ECH	Donc ici tu as 4 fois plus d'unités et ici, 4 fois plus de dizaines. Si tu regardes la relation entre le numérateur et le dénominateur... pour passer de l'un à l'autre c'est fois 4…1/4

En amenant les élèves à s'attarder davantage aux nombres en jeu avant de procéder à des calculs, cela a permis, par la même occasion, de valider la stratégie de Marcel qui avait été délaissée.

Les difficultés rencontrées par la majorité des élèves lors de calculs comportant des nombres pouvant être traités facilement, sans recourir à leur calculatrice ou aux algorithmes usuels, comme nous avons pu le relever à maintes reprises, constituent un obstacle important dans le traitement des nombres et des relations entre ces nombres, obstacle auquel nous avons été sensible, comme le montrent les interactions suivantes avec ces élèves lors du traitement de la portion dévolue à Yéran (9/48) :

GAUDI	Là on est rendu à 9 sur 48, le 9 divisé par 48, est-ce que tout le monde est d'accord?
GUY, MARCEL	Ouais!
GAUDI	Ça va donner un nombre décimal pis après ça le nombre décimal va nous apporter la fraction finale.
[GUY : fait, sans recourir à la calculatrice, la division de 48 par 9 et obtient 5 1/3]	
GAUDI	Ça va donner un beau nombre décimal de… 0,1875.
GUY	Tu as utilisé la calculatrice?
GAUDI	Oui!
GUY	Ça marche pas… 9 ça se divise bien par 3!
ECH	Vas-y donc!

GUY	3.
ECH	Et pour 48 divisé en 3?
ÉLS	Euh…
MARCEL	On ne sait pas nos tables de multiplication.
ECH	Si on avait 30 divisé en 3?
MARCEL	10
ECH	Là on a 48.
MARCEL	11
ECH	Si on avait 45?
MARCEL	15
ECH	Mais là vous n'avez pas 45 vous avez 48.
MARCEL	c'est 16.

Gaudi, il importe de le mentionner, souhaitait trouver un nombre décimal, sachant bien qu'il peut représenter un nombre décimal par une fraction, comme il l'a fait précédemment pour simplifier la fraction 31/124 (0,25 = ¼). D'ailleurs, sur sa calculatrice, il a effectué la division de 9 par 48. De son côté, Guy divise 48 par 9 et comme le quotient obtenu [5 et 1/3] n'est pas un entier, il propose fort pertinemment de diviser par 3 le numérateur et le dénominateur, 9 étant un multiple de 3, procédé enseigné dans la recherche de fractions équivalentes. Ces élèves semblent avoir chacun une approche différente. Marcel essaie d'établir le rapport entre le numérateur et le dénominateur en proposant de diviser le dénominateur par le numérateur; Gaudi voit dans la fraction l'expression d'un quotient à effectuer en proposant de diviser le numérateur par le dénominateur; Guy fait aussi intervenir le sens rapport de la fraction en proposant de diviser le numérateur et le dénominateur par 3. La réaction des élèves, lors de la proposition de diviser le numérateur et le dénominateur par 3, est révélatrice de leurs difficultés à effectuer ce calcul, sans recourir à l'algorithme usuel et, comme l'avoue un des élèves (Marcel), aveu non démenti par les autres, cette difficulté révèle un manque de connaissances sur les tables de multiplication. En proposant diverses divisions impliquant des dividendes voisins de 48, l'étudiante-chercheure permet à un élève (Marcel) de trouver le quotient attendu, soit 16. La portion de la tablette alors attribuée à Yéran est 3/16.

Pour la part de Karine, les élèves ont d'abord divisé le numérateur et le dénominateur de la fraction 100/320 par 100. Puisque le quotient obtenu comportait une décimale [1/3,2], ils ont réajusté leur démarche en effectuant une division par 10 du numérateur et du dénominateur du nombre 100/320, pour se retrouver avec deux entiers et obtenir 10/32. À ce moment, il leur était aisé de réduire la fraction [obtenant 5/16] et de choisir un dénominateur commun pour effectuer la représentation comme en atteste la discussion suivante :

ECH	Regardez celui-là [100/320] est encore plus simple!
GUY	Ah! Je l'ai, par 100…
ECH	Ok on a dit qu'on pouvait prendre ça momentanément, mais que l'on n'a pas le droit…
GUY	Des chiffres à virgule…ah! [barre les 2 zéros]Par 2, ça va donner 5 sur 16.
ECH	Essayez de dessiner la tablette de Christine maintenant.
GAUDI	Je ne comprends rien.
GUY	Je vais te l'expliquer.
ECH	Là vous devez le dessiner avec la plus petite tablette possible.
GUY	Sur 16 ça se divise partout!
GAUDI	Ok là on est rendu à 14.

Au moment de représenter la tablette de chocolat, les élèves se retrouvent avec les fractions 1/8; ¼ et 5/16 et, tel que l'a fait remarquer Guy, 16 constitue le plus petit dénominateur commun. Ils ont donc transformé toutes les fractions en utilisant ce dénominateur et additionné les différentes parties données par Christine [2+4+3+5 = 14], afin de connaître ce qu'elle conservait pour elle [2/16]. Ils ont aussi traduit cette part par 1/8. Enfin, Gaudi, Guy et Marcel ont produit deux tablettes de chocolat [1 par 16 et 2 par 8] et inscrit correctement la part de chacune. Par la suite, ils n'ont effectué que très peu de calculs pour la tablette de Geneviève, ayant choisi, au regard des nombres en jeu, de réexploiter le même dénominateur (16) pour représenter les fractions correspondant aux parts de chacune; ils ont ainsi inscrit sur leur feuille : 3/16 pour Dan; 3/24 = 1/8 = 2/16 pour Judith; 50 /160 = 5/16 pour Amélie; 25% = ¼ = 4/16 pour Carole. La portion de Geneviève a été déterminée, cette fois-ci, à partir de l'illustration.

Tel que mentionné précédemment, Anne n'a pas effectué de représentation graphique. Elle a rapidement sollicité l'aide de la chercheure. Nous pouvons retrouver, pour la tablette de Christine, plusieurs des écritures de la chercheure sur sa feuille (31 /124…3/12 ÷ 3 = ¼ … 31/124 ÷ 31 = ¼ ; 100/320 = 10/32 ÷ 2 = 5/16; 9/48 ÷ 3 = 3/16), mais aucune de l'élève. La chercheure lui a aussi prêté main forte pour la représentation de la tablette de Geneviève, inscrivant ainsi sur leur copie : 3/24 = 1/8 = 2/16; 50/160 = 5/16. Elle n'a produit qu'une seule écriture, soit 25/100 = ¼ x 4 = 4/16; Anne explicitera ainsi cette écriture lors du retour collectif: « *25 pour cent, 25 sur 100 égale ¼ car 25 peut entrer 4 fois dans 100* »; elle s'est appuyée sur le sens rapport de la fraction. Ce dernier événement mérite d'être souligné; il s'agit d'une première pour cette élève qui généralement ne s'exprime jamais, lors des retours collectifs.

De leur côté, Gael et Rémi ont rendu une copie pratiquement vierge, seules la présence de pourcentages et les réponses aux trois questions apparaissant. Cependant, la demande de validation adressée par Gael à l'enseignante, ainsi que le retour collectif sur les conduites des élèves, nous permettent de connaître leur cheminement, cheminement qui n'est pas sans rappeler les gestes[39] appris lors de la réalisation d'activités précédentes sur le diagramme circulaire et l'enseignement de situations de proportionnalité.

GAEL	(s'adressant à l'enseignante) : *est-ce qu'on aurait pu faire juste faire le produit croisé?*
ENS	*à l'occasion ça peut être correct.*
GAEL	*on a tout mis ça en pourcentage*
ENS	*des fois c'est pas stratégique.*
ECH	*là ça n'arrivait pas juste avec les pourcentages*
RÉMI	*ouais, je le sais, on a arrondi*
CH	*comme vous dit votre enseignante, si c'est pour mettre en ordre, des fois arrondir c'est avantageux, mais si on vous demande de représenter ça dépend des nombres, de l'activité*

En effet, dans cette tâche, les mesures ne se prêtaient pas à la notation en pourcentage. Malgré tout, ils ont transformé chacune des parts en effectuant le produit croisé, puis ont arrondi les nombres ainsi trouvés (ex. pour Yéran [*9/48]*, l'amie de Christine, ils ont fait *9/48 = ?/100….100 x 9 =900 …900 ÷ 48 = 18,75%...= 19%)* pour la tablette de Christine. Il faut dire que cette équipe s'était retirée dans un autre local afin de travailler en silence. Ainsi, ils n'ont reçu aucun soutien de la part des intervenantes et ils n'ont pas pris connaissance de l'interdiction d'utiliser la calculatrice. Toutefois, le retour nous a permis de savoir que ces élèves pouvaient prendre part aux discussions et compléter le raisonnement des autres élèves sur des sujets qu'ils n'avaient

[39] Tel qu'en témoigne cet extrait des notes de cours sur le Diagramme circulaire [On obtient nos valeurs par produit croisé : 1) convertir nos données en pourcentage; 2) convertir nos données en degrés (360°) *** arrondir si nécessaire] et ces écritures et ces propos lors de l'enseignement de la proportionnalité : proportions ≈ produit croisé; « *la proportionnalité ça veut dire on a le droit d'utiliser le produit croisé, c'est logique de faire des fractions équivalentes dans cette situation là* ».

pas traités. Prenons, à titre d'exemple, les affirmations de Gael traitant de la représentation de la tablette de Chrisitine :

> GAEL : *Ben nous autres on a fait en pourcentage faque ..ok je le sais c'est quoi, pour Chantale,en seizièmes ... quand ils ont fait 1/8, il en a coloré 2*
> ECH : *Et pour Élisa?*
> GAEL : *ça fait 4*

D'autre part, nous pouvons noter qu'ils ont associé, sur leur feuille, les amies de Geneviève et de Christine ayant reçu la même part de chocolat, soit Amélie et Karine, Carole et Élisa, Judith et Chantale, Yéran et Dan. Bien que cela n'ait pas été demandé, cette observation est tout à fait pertinente et juste! Ces associations semblent une exploitation de leurs représentations en pourcentage, une telle représentation permettant d'emblée de reconnaître l'égalité des partages.

Bien qu'il aurait été possible de répondre aux trois questions en ne comparant que les parts données à chacune, nous avons demandé aux élèves de représenter les différentes tablettes. À la suite de ce travail, les élèves devaient répondre à trois questions : 1) Qui est la plus généreuse?; 2) Quelle amie Christine préfère-t-elle?; 3) Quelle amie Geneviève préfère-t-elle? À la lecture du tableau ci-dessous, les équipes de Martin et Prince, Noa et Samuel, Rébecca et Guy, Gaudi, Réjean et Marcel ont bien répondu à toutes les questions. Le tableau résume les résultats obtenus par les différentes équipes, les cellules grisâtres signifient que les réponses sont adéquates.

Tableau XXXIX : Résultats obtenus par les différentes équipes aux trois questions posées

ÉQUIPES	QUI EST LA PLUS GÉNÉREUSE?	QUELLE AMIE CHRISTINE PRÉFÈRE-T-ELLE?	QUELLE AMIE GENEVIÈVE PRÉFÈRE-T-ELLE?
1- Hélène et Bertrand	C'est Geneviève qui a donné à Carole	Élisa	Carole
2- Alex et David	Christine	Karine	Carole
3- Martin et Prince	Aucune, car les deux ont donné égal	Karine	Amélie
4-Noa et Samuel	Elles sont égales elles ont tous les deux donné 14/16	Karine	Amélie
5- Rébecca et Réjean	Elles sont les deux aussi généreuses	Karine	Amélie

6- Gaudi, Guy et Marcel	Si les deux ont donné la même fraction donc elles sont pareilles	Karine	Amélie
7- Anne	Geneviève	Karine	Carole
8-Rémi et Gael	Geneviève	Karine/ Chantale	Amélie

Pour la première question, seulement quatre équipes (3, 4, 5 et 6) ont répondu correctement, en admettant que Geneviève et Christine étaient également généreuses, les équipes 3, 4 et 6 prenant appui sur la portion totale qui a été offerte. Les équipes 1, 7 et 8 ont plutôt décerné ce titre à Geneviève. Ces élèves n'ayant laissé aucune trace, nous ignorons les données qui ont appuyé un tel raisonnement. Nous pouvons supposer que la méprise commise par l'équipe 2, ayant choisi Christine, résulte du fait que les élèves de cette équipe n'ont considéré que les nombres de parties inscrites sur leur feuille, Geneviève gardant 20[40] morceaux alors que Christine en conserve seulement 2. Cependant, leur dessin composé de 16 morceaux témoigne bel et bien de l'équivalence de la générosité de chacune des personnes. Devant les méprises de certaines équipes et toujours dans le but de leur permettre l'accès au sens rapport de la fraction, la chercheure profite du retour collectif pour exploiter davantage le contexte de don, afin de comparer le numérateur et le dénominateur. Les élèves admettront enfin qu'il s'agit bien dans tous les cas de ¼ tel, qu'en témoigne l'extrait suivant :

ECH	Donc qui a été la plus généreuse ?
RÉBECCA	C'est Geneviève.
ALEX	Christine.
ELS	Les deux sont pareilles.
ECH	Oui, car on a gardé la même portion pour nous.
CH	J'aimerais qu'on regarde quelque chose avant de terminer. J'ai parlé à quelques-uns des dons de charité. Si on regarde, par exemple, Geneviève qui a 124$ et qui en donne 31, Christine qui a 4$ en offre 1$, est-ce que vous pensez qu'elles sont généreuses de la même façon?
RÉJEAN	Ils sont égales car ils ont donné la même somme.
CH	Le même rapport.
RÉJEAN	Par rapport à eux autres.
ENS	Céline Dion qui donne 10 millions parce qu'elle en a 40, elle est aussi généreuse que moi…en proportion!
ELS	Ça fait un quart !

En ce qui concerne la deuxième question, six équipes sur huit ont donné la bonne réponse, soit les équipes 2, 3, 4, 5, 6 et 7. Les échanges enregistrés entre Rébecca et Réjean, lors de la représentation de la tablette de Christine, soutiennent l'idée qu'ils ont

[40] Rappelons à cet effet, qu'ils avaient effectué deux représentations, une sur 160 et l'autre sur 16.

répondu aux questions en s'appuyant sur leur représentation : « *Karine est son amie préférée regarde le gros morceau qu'elle lui donne* ». Quant à l'équipe de Rémi et Gael, ils ont fourni deux réponses, soit Karine (100/320) et Chantale (0,125). Curieusement, Alex et David ne se sont pas servis des fractions équivalentes dans leurs représentations pour comparer ce qui a été offert à chacune des amies, choisissant alors, parmi les nombres de départ, la fraction ayant le plus grand nombre de parties. Le rapport entre le numérateur et le dénominateur n'ayant pas été considéré, nous ne pouvons nous prononcer sur l'exactitude du résultat obtenu pour l'amie préférée de Christine. En ce qui concerne Hélène et Bertrand, ceux-ci n'ayant pas effectué de représentation pour Christine, nous ne sommes pas en mesure de savoir ce sur quoi ils se sont appuyés, d'autant plus que les traces de la chercheure sur la feuille de Bertrand laissaient entrevoir que Karine en avait reçu davantage (5/16 versus ¼ pour Elisa).

Enfin, la troisième question a été répondue adéquatement par cinq équipes sur huit. Les équipes 1, 2 et 7 ayant inscrit Carole comme réponse. Étant donné qu'ils ont représenté adéquatement les tablettes, nous pouvons supposer qu'ils se sont appuyés sur le nombre 25 (25%), sans tenir compte du signe de pourcentage l'accompagnant. Ainsi, nous croyons que certaines équipes ont répondu à ces questions sans même exploiter leurs illustrations.

Avant de clore l'analyse des conduites des élèves, nous présentons, ci-dessous, un extrait du début du retour collectif. Nous pourrions dire, en nous référant à Brousseau (1998), qu'il s'agissait, en quelque sorte, d'un processus d'institutionnalisation au cours duquel les élèves devaient, entre autres, rendre compte des apprentissages qu'ils ont effectués et les transposer à de nouveaux contextes. Lors de ces échanges, nous avons remarqué que les élèves qui prennent spontanément la parole et qui semblent, entre autres, bien se représenter les relations entre les écritures fractionnaires et décimales (¼, 1/8, 0,25 et 0,125), sont les élèves qui ont réclamé le plus d'aide lors de l'interprétation de ces relations (David, Rébecca, Bertrand, Marcel, Guy). Puisque ces élèves nous semblaient répéter presque textuellement les propos de l'étudiante-chercheure et de la chercheure, la chercheure a jugé bon d'intervenir en recourant à un segment de droite pour montrer les relations entre les écritures décimales et fractionnaires. Ce travail fait, les élèves ont été invités à trouver une représentation décimale de la fraction 3/8. Comme le montrent, entre autres, les interactions, la flexibilité dont les élèves ont fait preuve au cours de cette activité, nous a également permis de traiter les fractions en tant que nombres. En exploitant la droite numérique, les élèves ont coordonné, de façon très habile, leurs connaissances sur les nombres rationnels dans la recherche de l'écriture décimale d'une fraction; ils ont profité de l'écriture décimale connue de certaines fractions dont la composition additive leur permettait d'obtenir le résultat escompté (un élève sachant que 5/8 = 4/8 +1/8 = ½ +1/8, propose le « raccourci » suivant : 0,500 + 0,125 pour 5/8]).

<table>
<tr><td>ECH</td><td>Qu'est ce qu'on a fait dans cette activité-là en général?</td></tr>
<tr><td>RÉBECCA</td><td>On a regardé la relation entre deux chiffres.</td></tr>
<tr><td>BERTRAND</td><td>On a comparé.</td></tr>
<tr><td>MARCEL</td><td>Des fractions réductibles.</td></tr>
<tr><td>ECH</td><td>Pour exprimer selon différentes représentations.</td></tr>
<tr><td>CH</td><td>0,25, ça faisait quelle fraction ?</td></tr>
<tr><td>RÉJEAN</td><td>¼</td></tr>
<tr><td>CH</td><td>Si 0,25 c'est ¼, 0,125 c'est ? [écrit au tableau 0,125… 0,250…1/4].</td></tr>
<tr><td>DAVID</td><td>1 sur 8</td></tr>
<tr><td>CH</td><td>Parce que c'était par rapport à ¼…</td></tr>
<tr><td>DAVID</td><td>La moitié.</td></tr>
<tr><td>GAEL</td><td>Il y a quatre 25 cents dans 1$.</td></tr>
<tr><td>CH</td><td>¼, 25%, 25 sur 100 … toutes des représentations de 0,25</td></tr>
<tr><td>GUY</td><td>C'est plus simple à voir comme ça que l'autre [il veut dire que c'est plus facile de trouver la fraction de 0,125 à partir de l'écriture de 0,250 = ¼].</td></tr>
<tr><td>CH</td><td>Comme on sait qu'on a doublé qu'est-ce qu'on fait pour revenir à la fraction initiale?</td></tr>
<tr><td>GAEL</td><td>Diviser par 2.</td></tr>
<tr><td>CH</td><td>Et donc pour un quart?</td></tr>
<tr><td>SAMUEL</td><td>1/8</td></tr>
<tr><td>[…]</td><td></td></tr>
<tr><td>CH</td><td>C'est ça, je prends la moitié d'un quart du tout [dessine un rectangle séparé en 4, puis divise un quart en deux]. Quand je passais à côté de vous, ce que je regardais avec plusieurs, c'est que lorsque vous avez des nombres comme ça dites-vous bon ça serait simple, moi je connais un nombre qui est le double de cela. On peut changer un nombre quitte à le retransformer après. Quand j'ai vu 0,125… 0,250… je me suis dit c'est le double, c'est facile 0,250 c'est ¼ et si on fait par exemple sur une droite numérique, j'ai trouvé ½, j'ai trouvé ¼ et que quelqu'un me dit de placer 0,125 et que 0,250 c'est la même chose que 0,250, je sais que je dois prendre la moitié je vais tomber ici, ça va être quelle fraction? [CH a dessiné une droite numérique] :
0,250 0,500
|-----|-----|------|------|------|--></td></tr>
</table>

	1/8 ¼ ½
ELS	1/8
CH	Est-ce que quelqu'un sait ce que donnerait 3/8 en nombre décimal, en partant de ce que l'on sait ici?
MARCEL	On ne le sait pas madame
CH	Ici on a ¼ 0,250..ici 1/8
GAUDI	3/8
CH	Alors est-ce que quelqu'un peut expliquer 0,375 ?
PRINCE	0,250 +0,125
GAEL	Moi j'ai fait un autre calcul….1/8…3/8…fois 3
MARCEL	Moi la soustraction!
SAMUEL	500 -125
ENS	Vous voyez un peu… on prend des raccourcis avec ce que l'on connaît, t'as pas besoin de les connaître tous tu les retrouves, il y a plein de stratégies
MARCEL	Est-ce que tu peux donner un exemple de raccourci?
SAMUEL	0,500 + 0,125 pour 5/8
ENS	Excellent!

Évolution des rapports des élèves aux nombres rationnels et de la démarche d'acculturation institutionnelle

De façon générale, comme nous l'avons déjà mentionné, la représentation de la tablette de Geneviève a requis beaucoup moins de calculs; cette réduction est fort probablement attribuable aux nombres en jeu, au fait que le dénominateur commun trouvé précédemment fonctionnait toujours pour cette tablette et enfin, aux interventions de l'enseignante, de l'étudiante-chercheure et de la chercheure qui ont eu lieu lors du traitement de la situation précédente. Effectivement, il peut sembler plus simple de mettre 3/16, 3/24, 50/160 et 25% sur un dénominateur commun que 0,125; 31/124; 9/48 et 100/320. En effet, dans le cas de Geneviève, nous pouvons voir plus rapidement que les dénominateurs sont des multiples de 8, à l'exception de 25% qui est un nombre bien connu des élèves (25/100 = 1/4).

En somme, bien que l'activité n'ait pas permis à tous les élèves d'atteindre le même niveau de compréhension, ils ont su traiter conjointement diverses connaissances, connaissances impliquées dans les activités antérieurement réalisées. Ainsi, lors de la recherche du dénominateur commun, diverses stratégies connues et novatrices ont été mises de l'avant dans la transformation des nombres : 1) Rechercher le nombre de fois que le numérateur entre dans le dénominateur (sens rapport); 2) Représenter le nombre fractionnaire sous une forme décimale en divisant le numérateur par le dénominateur (sens quotient); 3) Appliquer des procédures connues (contenues dans les notes de cours) : diviser par un commun diviseur; diviser par le plus grand commun diviseur; effectuer un produit croisé; 4) Coordonner différents registres langagiers et scripturaux (dénomination, nombre décimal, pourcentage, notation fractionnaire).

La majorité des élèves a su exploiter à bon escient le sens rapport de la fraction, afin de mettre en œuvre une démarche plus économique. Compte tenu de la persistance du sens partie-tout, de son accessibilité dans cette activité et de gestes connus pouvant être exploités, cette évolution n'est pas négligeable. Aussi, certains élèves ont su déployer des démarches contrôlées tout à fait originales. Citons, à titre d'exemple, l'équipe 6 qui exploitait une écriture intermédiaire pour la transformer par la suite en une écriture fractionnaire [31/124 = 0,25/1= 0,25 = ¼..].

4.2.12. Situation élaborée par Nadine et Guy Brousseau (1987) : l'épaisseur d'une feuille de papier

Trois périodes d'enseignement ont été consacrées à la réalisation de la situation « L'épaisseur d'une feuille de papier » (1ère période : 30 avril 2007 ; 2e et 3e périodes : 1 mai 2007), situation adaptée de la situation originale conçue par Nadine et Guy Brousseau (1987). Cette situation répond à une requête de l'enseignante effectuée à la suite de la réalisation en classe de diverses activités impliquant les nombres rationnels. L'enseignante souhaitait que soient traités les divers sens de la fraction. Nous présentons cette situation et analysons, par la suite, les conduites des élèves à chacune des tâches qu'elle comporte.

Au regard de la demande qui nous était adressée et du temps imparti, nous avons procédé à quelques adaptations de la situation originale décrite dans le cadre conceptuel que nous décrivons ci-dessous. Des enveloppes contenant divers types de feuilles identifiées par une lettre sont distribuées aux élèves de chacune des équipes de quatre élèves formées par l'enseignante. Les élèves doivent inventer un code permettant d'identifier les types de feuilles. Dans cette situation, le choix des types de feuilles est fort important. On doit à la fois envisager des feuilles dont l'épaisseur est relativement voisine et des feuilles pour lesquelles la différence d'épaisseur est même visuellement appréciable. Nous avons choisi 6 types de papier :

LETTRE ASSOCIÉE AU TYPE DE PAPIER	TYPE DE PAPIER	ÉPAISSEUR (CM)
A	Feuille blanche d'impression	0,01
B	Papier circulaire	0,004
C	Papier construction	0,02
D	Papier cartonné	0,022
E	Carton épais	0,25
F	Carton mince	0,05

Dans la réalisation de la 1ère tâche soit de créer un code pour distinguer les types de papier, il nous a semblé important, dans un premier temps, de laisser les élèves trouver un code en déterminant eux-mêmes les moyens de le faire. Ainsi, le choix de retarder l'utilisation du pied à coulisse, outils que les élèves n'avaient jamais utilisé, favorisait la centration sur la tâche et permettait de ressentir davantage le besoin de précision. Une période a été consacrée à cette activité. Lors de la 2e période, un pied à coulisse a été mis à la disposition des élèves qui étaient invités à réviser leurs codes, s'ils le jugeaient nécessaire.

Lors de la 2e tâche, les élèves étaient invités à inscrire leur code (nombre de feuilles et épaisseur correspondante) au tableau et à identifier ceux qui correspondaient à un même type de feuilles. Enfin, nous avons jugé pertinent de clore cette situation en demandant d'ordonner les codes produits par une des équipes en fonction des différentes épaisseurs des feuilles de papier. Le choix de cette équipe sera précisé ultérieurement.

La 1ère tâche est introduite aux élèves, par l'étudiante-chercheure, de la façon suivante :

> *« Pour l'activité que l'on va faire pendant les prochaines périodes, vous allez être en équipes concurrentes, cachées par des paravents. J'ai préparé des feuilles dans des enveloppes et sur chacune des enveloppes, il y a des lettres pour permettre de les distinguer (A, B, C, etc.). Dans une même enveloppe, les feuilles ont la même épaisseur mais d'une enveloppe à l'autre, elles peuvent ou non être de la même épaisseur. Chacune des équipes va avoir 3 différentes enveloppes. Là ça va être à vous d'inventer un code permettant d'identifier les différents types de feuilles de papier, selon leur épaisseur. Vous devez tous vous entendre sur le code que vous choisissez. »*

Chacune des équipes formées par l'enseignante regroupe deux équipes, chacune de ces équipes étant constituée d'élèves qui ont l'habitude de travailler ensemble. Il importe toutefois de mentionner que lors de ce regroupement, l'enseignante a essayé de jumeler des élèves qui avaient des rapports différents aux mathématiques et qui acceptaient de collaborer.

Nous donnons un aperçu des codes générés par les élèves en fonction des différents types de feuilles et de l'utilisation ou non du pied à coulisse. Nous avons pris appui sur les analyses produites par N. et G. Brousseau (1987) et distingué trois démarches principales dans la réalisation de cette tâche, soit :1) Choisir une mesure et compter le nombre de feuilles (MES/nF); 2) Trouver l'épaisseur d'une feuille (1F/MES); 3) Choisir un nombre de feuilles qui permet d'obtenir l'épaisseur du carton E (nF/1carton E). Nous avons dû également faire état d'une démarche utilisée par certains élèves, démarche qui consiste uniquement à calculer le nombre de feuilles contenues dans chacune des enveloppes (nF/enveloppe)

	SANS PIED À COULISSE			AVEC PIED À COULISSE		
	Démarche	Code trouvé	code p : pertinent Np : non-pertinent	Démarche	Code trouvé	code p : pertinent Np : non-pertinent
Équipe 1 : Samuel, Noa, David et Alex	nf/1carton E	A : 24 f → 1fE B : 60 f → 1fE C : 15 f → 1fE	p	MES/nf À noter que la MES correspond à 2 fE	A : 49 f → 5 mm B : 117 f → 5 mm C : 26 f → 5 mm E : 2f → 5 mm	p
Équipe 2 : Rébecca, Hélène, Réjean et Bertrand	Nf/enveloppe	D : 48 B : 267 F : 36	Np	MES/nf	B : 267 f → 1,1 cm D : 48 f → 1,1 cm F : 20 f → 9 mm	p
Équipe 3 : Rémi, Gael, Martin et Prince	MES/nf	G : 44 f D : 43 f E : 25 f	Np	MES/nf et 1f/MES	G : 1cm ÷ 44 f = 0,227 D : 1cm ÷ 44 f = 0,227 E: 5mm ÷ 44 f = 0,227	p
Équipe 4 : Gaudi, Anne, Guy et Marcel	1 F/MES	A : 1/10 mm B : 1/25 mm E : ¼ cm	p	MES/nf	A : 20 f → 2mm B : 50f → 2mm E : 8 f → 2,1cm	p

Seul un code ne respecte pas l'épaisseur réelle du papier, soit celui du papier E de l'équipe 3. On remarque également que l' « erreur de calcul » du papier D relève plutôt d'une absence d'unités de mesure dans le résultat. Toutes les autres mesures sont adéquates (si on considère, bien sûr, une légère marge d'erreur). Comme le montre le tableau, le type de papier dont disposaient les élèves a eu une légère incidence sur les démarches qu'ils ont déployées. En effet, l'équipe 1 qui avait en leur possession le carton très épais (E) a utilisé la mesure de celui-ci comme repère, obtenant ainsi 1 carton pour 24 feuilles, 60 feuilles et 24 feuilles. De plus, les élèves de l'équipe 3, dont deux types de feuilles avaient la même épaisseur, ont recherché l'épaisseur d'une feuille.

Les équipes 1, 2 et 3 ont, au terme de l'activité, adopté la première conduite, c'est-à-dire : choisir une mesure et compter le nombre de feuilles. De son côté, l'équipe 4 a eu recours à deux démarches différentes, la première consistant à trouver l'épaisseur d'une seule feuille de papier, et la seconde, reposant sur le choix de mesures pouvant facilement être comparées (2cm, 2mm). Pour mieux interpréter ce travail, nous rendons compte d'interactions entre les membres des équipes et les chercheures.

Les équipes de Samuel, Noa, David, Alex et Rémi, Gael, Martin, Prince ont reproduit la conduite qu'ils avaient privilégiée lors de la période précédente, soit : 1) Choisir une mesure et compter le nombre de feuilles. Remarquant que certaines feuilles ne faisaient « *même pas 1mm »,* l'équipe de Samuel explique ainsi leur démarche : « *On a fait des tas qui sont de la même épaisseur qu'un carton et on a calculé le nombre de feuilles. On les a empilées ... lui il en faut 1 pour 15... l'autre. »* Ainsi, ils ont inscrit dans leur cahier de notes le code suivant : A = 24 f; C = 15 f; E = 1 f; B = 60 f. Bien qu'ils en aient mesuré l'épaisseur, ceux-ci ne l'ont pas notée. Lors de la 2^{e} période, ils ont été invités à indiquer cette épaisseur. Ils ont alors choisi une épaisseur 2 fois plus grande, soit celle de 2 cartons et on écrit : 5 mm : A = 49 f, C = 26 f, E = 2 f, B = 117 f. Cette modification leur permettait d'être plus précis, d'autant plus que l'utilisation du pied à coulisse, le permettait. Le travail de ces élèves a été fait minutieusement; comparant les mesures obtenues lors de la 1ère et de la 2^{e} période, ceux-ci ont remarqué l'incompatibilité des résultats pour le papier A. Nous reproduisons quelques interactions entre les élèves de cette équipe, interactions répondant à la demande de l'étudiante-chercheure.

SAMUEL	Moi je dis qu'il y en a trop…
NOA	Moi, j'te dis que non !
SAMUEL	Ben oui : 1 c'est 24 pis là c'est 49 pour 2 .
NOA	Oui, mais on avait pas cet instrument-là la dernière fois.
SAMUEL	Pette pas ma bulle..24,5 feuilles est-ce que ça existe? Non ! bon ben!

Cette phase de validation mettant en jeu la comparaison de rapports sera l'objet de la seconde partie. Nous verrons à ce moment que ces élèves bénéficieront de la démarche réflexive précédemment entamée pour formuler des hypothèses sur les différences notées entre les mesures d'un même type de feuilles. L'évolution du raisonnement de cette équipe a conduit l'enseignante à aller au-delà de ce qui était exigé en leur demandant s'ils étaient capables de dire quel papier était le plus mince et pourquoi. À cette question, ils ont rétorqué en parlant du papier : « *lui parce que ça en prend plus pour égaler la même hauteur* ». Elle les a donc invités à mettre leurs paquets de feuilles en ordre croissant d'épaisseur, ce qu'ils ont effectué rapidement et adéquatement.

L'équipe composée de Rémi, Gael, Martin et Prince exprime ainsi sa démarche : « *on a commencé à calculer les feuilles, en calculant les feuilles. On a remarqué ceux qui en ont moins, ceux qui en ont plus. Après ça on a pris une règle et on a regardé l'épaisseur des feuilles* ». L'enseignante leur demandant alors de préciser leur code, ceux-ci répondent :

GAEL	Eux de Martin les beiges, ils ont 44 feuilles, eux de Rémi, 43 feuilles et eux de Prince 25. »
ENS	Et, ça c'est votre code ?
GAEL	Ouais, 44, 43, 25.

À la deuxième période, les élèves de l'équipe précédente reprennent leurs mesures, mais cette fois, en précisant qu'il s'agit de la mesure d'un cm. « *J'ai pris le paquet, ça en réalité ça serait 1 cm quand tu les aplatis, lui il calcule les feuilles, moi j'écris la lettre pour la personne ensuite pour le papier et le nombre de feuilles avec un « f », par exemple, ici G R : 44 f on a trouvé la mesure de 44 feuilles. Après ça on va diviser par ça pour trouver ben...une feuille.* » On peut donc lire les écritures suivantes dans leur cahier : G R:1 cm ÷ 44 f = 0,227; DJ : 1cm ÷ 44 f = 0,227; E C: 5mm ÷ 22 f = 0,227». Curieusement, ils ont trouvé trois mesures identiques, alors qu'ils avaient trois types de feuilles différentes.

L'équipe composée de Gaudi, Anne, Guy et Marcel, a trouvé l'épaisseur d'une feuille. Cependant avant de trouver cette mesure, différentes tentatives ont été effectuées, comme en témoignent les traces dans leur cahier :

1) A ne fait pas de bruit quand on le secoue. B est plus léger que le A. Le A est plus rigide. Le D est plus rigide que le B. 2) Le A tombe plus rapidement….plus c'est lourd, plus ça tombe vite. 3) Pour mesurer le carton A, on prend les paquets de 8 feuilles avec la règle; il va nous donner 2 cm. On divise 2 par 8 feuilles; ça va nous donner l'épaisseur d'une feuille de papier, 1/4.

Le point 2) ne fait pas l'unanimité : certains élèves disent que ce sera les plus légers qui tomberont plus vite : « si on fait un test de la vitesse qui vont tomber … la plus légère va plus vite… ». La chercheure, voyant qu'ils « voulaient jouer à Galilée », les a arrêtés en précisant que l'on s'intéressait à l'épaisseur.

À la suite de la précision donnée par la chercheure, lors de la 2e période, et l'utilisation du pied à coulisse, les élèves reprennent les mesures et inscrivent :

4) D : 8 f … 2,1 cm; A : 20 f … 2 mm; B : 50 f… 2mm On sait maintenant que A est plus épais que B… Explication : ils ont la même épaisseur malgré la différente proportion [quantité].

Enfin, l'équipe composée des élèves Rébecca, Hélène et Réjean a inventé différents codes, codes devenant de plus en plus précis. On ne peut associer précisément leur conduite à celles que nous avions initialement prévues. Au départ, ils se sont appuyés sur des critères qualitatifs : 1) Types de papiers : Papier revue, papier construction, papier bricolage; 2) Poids des enveloppes : ça c'est plus lourd; 3) Dénombrement du nombre total de feuilles dans chaque enveloppe et reprise de la « pesée » : « *on compte les feuilles; on va voir qui en a le plus, car selon le nombre qu'il a et le poids…*». Ils obtiennent 48, 267 et 36. *« Par exemple, celle-là, on dit que si la qualité est forte et qu'il y en a pas beaucoup, ça va être plus lourd. Si la qualité est cheap ça pèse moins … Lui* *est plus léger mais il en a plus » « C'est la même affaire [même poids] mais lui est plus gros [plus de feuilles] »*. Ils ajoutent aussi que pour une même enveloppe, *« plus il y en a, plus c'est lourd »;* 4) Ils poursuivent ainsi : « *Mettons c'est la même épaisseur, plus sont minces, plus il y en a et plus ils sont épaisses, moins il y en a… » « On met toute la même grosseur ». « ECH : Est-ce que vous avez toute la même épaisseur » « Réjean : À peu près…Rébecca non… » « ECH : Votre raisonnement est très bon, mais il n'est pas encore tout à fait au point, il manque quelques détails »*

Ces différentes analyses semi-qualitatives ne produisent peut-être pas les comportements attendus pour l'instant, mais celles-ci peuvent être à l'origine de l'engagement de ces élèves dans les prochaines parties, servant alors de levier à la compréhension du modèle quantitatif. Lors de la deuxième période, ils ont simplement procédé à la mesure de chacun des paquets, selon les indications fournies en début de période et inscrit : Pour le papier « revue », il y a 267 feuilles dans l'enveloppe et ça mesure 1,1 cm. Pour le papier D, il y a 48 feuilles dans l'enveloppe et ça mesure 1,1 cm. Pour le carton mince F, il y a 20 feuilles dans l'enveloppe et ça mesure 9mm. Interrogés par l'enseignante, les élèves expliquent ainsi leur démarche: *« Puisque là on a calculé l'épaisseur, on a vu que plus la feuille est mince plus on a besoin d'en mettre pour que ce soit la même épaisseur… 267 feuilles… 48 feuilles. »* Il semble donc qu'au terme de cette activité, leur conduite s'approche de celle consistant à comparer le nombre de feuilles à épaisseur égale.

Pour montrer la richesse de cette situation et des connaissances mises en œuvre par les élèves, nous examinerons la réalisation de la 2^{e} tâche, au cours de laquelle les élèves doivent trouver les équipes ayant les mêmes types de feuilles. Pour ce faire, nous avons reproduit, au tableau, les mesures obtenues par les différentes équipes, mesures ainsi présentées.

Tableau XL:Mesures obtenues par les différentes équipes, en fonction du nombre de feuilles

Équipe1	5 mm pour 49 f	5 mm pour 2 f	5 mm pour 26 f	5 mm pour 117 f
Équipe2	1,1 cm pour 267 f	1,1 cm pour 48	9mm pour 20 f	
Équipe3	1cm pour 44 f	1cm pour 44 f	5mm pour 22 f	

Équipe4	2,1 cm pour 8 f	2 mm pour 50 f	2mm pour 20 f	

Dans le tableau suivant, nous exposons, en ordre chronologique, les types de feuilles jugés identiques par les élèves.

Tableau XLI: les types de feuilles jugés identiques par les élèves

Couple trouvé	Code 1	Code 2	Exactitude (papier)
1er	1cm pour 44 f	1,1 cm pour 48	Oui (D)
2e	5 mm pour 2 f	2,1 cm pour 8 f	Oui (E)
3e	5 mm pour 49 f	2 mm pour 20 f	Oui (A)
4e	2 mm pour 50 f	5 mm pour 117 f	Oui (B)

Tel qu'inscrit dans le tableau ci-dessus, les élèves ont reconnu adéquatement 4 types de papier soit les papiers A, B, D et E. Il importe de noter que nous avons limité, faute de temps, leur recherche à quatre couples. Nous présenterons les conduites des élèves ayant mené à ces identifications en respectant l'ordre d'énonciation.

1) 1,1 cm pour 48 feuilles et 1 cm pour 44 feuilles

La présentation de ces résultats a généré des échanges fort pertinents, voire étonnants, en ce qui concerne l'identification des mesures représentant le même type de papiers. À la question initiale formulée par ECH, à savoir : « Est-ce qu'on peut voir si certaines équipes avaient les mêmes papiers? », Gael déclare : « Il y a plein de centimètres qui se ressemblent, mais aucune feuille qui peut être reliée ». Samuel réplique en disant qu'il faut regarder aussi pourquoi et il ajoute que « c'est 48 pis 44 de l'équipe 2 et 3 », ce que Noa conteste. Samuel poursuit en disant « parce que le 1,1 et 4 de plus »; il ajoute aussi : « les 0,1, pour 4 à 1 pour 44 ». Après quelques échanges suscités par ECH qui demande aux élèves de se prononcer, Rémi dit : « nous on a 44 eux 48, 44 + 4 … 48 … c'est 4 feuilles de différence qui est égal à 0,1 cm… ». C'est alors que CH formule la question suivante : « c'est combien de fois plus … de 4 à 44 ». « Et ici? » poursuit ECH, en proposant de comparer 0,1 à 1? ». La discussion se poursuit et plusieurs élèves sont convaincus qu'il s'agit bien des mêmes types de feuilles. Il leur est demandé enfin de trouver un moyen pour mesurer l'épaisseur d'une seule feuille. ECH suggère alors de trouver une notation pour écrire « 1 cm pour 44 feuilles ». Rébecca dit alors « 1/44 ». Il leur est ensuite demandé de trouver un nombre décimal qui corresponde à 1/44. Cette demande suscite plusieurs interactions, interactions impliquant une coordination des sens rapport et mesure de la fraction, ainsi que des relations entre les écritures fractionnaires et décimales. Certains élèves parviennent à exprimer l'épaisseur d'une feuille de papier en travaillant sur les fractions équivalentes : 0,1/4 = 1/40 = 0,100/4 = 0,025/1. Devant ces différentes représentations, Guy ajoute « et 0,050 pour 2 feuilles… ben c'est logique, c'est comme l'argent combien de 25 cents dans 1 $ », démontrant ainsi une compréhension importante du sens rapport.

Les échanges qu'a occasionnés l'examen des autres mesures que comporte le tableau précédent sont tout aussi riches et montrent une intégration de connaissances sur les nombres rationnels, intégration à laquelle ont sûrement contribué l'ensemble des situations qui ont précédé cette situation. Regardons plus en détail chacune d'entre elles.

2) 5mm pour 2 feuilles et 2,1 cm pour 8 feuilles

Bien que ce soit Noa qui ait présenté ces données comme étant représentative du même papier, Rébecca avait fortement réagi lors de la notation de ces mesures au tableau : *« Aye, elles sont épaisses ces feuilles-là, 5mm pour 2 feuilles » […] « 8 feuilles? »* ! Noa relève que les couples 5 mm pour 2 feuilles et 2,1 cm pour 8 feuilles représentent le même papier en soulignant la présence d'imprécision : *« mais il y a eu une faute, ils ont dû mal calculer »*. Les élèves prêtent donc attention à cette marge d'erreur qu'ils relèguent, entre autres[41], à la mesure de l'épaisseur que Samuel exprimera ainsi : *« à moins que ce soit nous qui aient 0,1 cm de trop. Si tu calcules, si tu t'en vas à 2 cm avec 2 feuilles ça donne 8 feuilles… 5 + 5 + 5 + 5, faut faire fois 4 pis lui aussi fois 4»*. Noa reformulera ces propos : *« si t'en prends 8 avec 5 mm ça te donne 2 cm alors ça équivaut à la même affaire! »*. Devant la formulation implicite d'équivalence d'écritures lors du changement d'unités de mesure et souhaitant représenter ce que l'élève avait dit, ECH remplace l'écriture de 5 mm par 0,5 cm et CH demande aux élèves s'ils sont d'accord pour dire que 0,5 cm est le même nombre que 5 mm, ce à quoi la majorité des élèves répondent oui. Afin de permettre à tous de comprendre ce qui venait d'être exposé, la chercheure amène les élèves à regarder la relation entre les millimètres et les centimètres.

---

[41] Certains faisant aussi allusion à un défaut de fabrication (feuille plus épaisse ou plus mince), à un élève qui aurait mal compté les feuilles ou manqué de précision, etc.

RÉMI	Ben, c'est plus petit
CH	Combien de fois plus petit?
MARCEL et RÉMI	10
GAEL	Faut juste tasser la virgule c'est tout.
CH	[réécrit 5mm au-dessus de 0,5cm] Est-ce que l'écriture est 10 fois plus petite?
ELS	Oui!
RÉMI	Non, t'as pas de 0.
[…]	
RÉBECCA	Regarde … 2 pour te rendre à 8, ça faque tu fais fois 4, le 0,5…ça donne 2,0.
ECH	Donc on a vu que l'on avait 0,5cm/2feuilles.
CH	On peut aussi passer par 4 feuilles.
ECH	Quelle épaisseur ça nous donnerait pour 4 feuilles Hélène ?
HÉLÈNE	Ben tu fais le produit croisé.
GAEL	Hélène c'est facile s' il y a 8 feuilles pis ça donne 2...8 divisé par 2, ça va donner 4… c'est 1 sur 2… ½ …
RÉBECCA	Tu fais fois 2.
	[ECH écrit 0,5/2 = 1/4 = 2/8]
MARCEL	C'est la même affaire en plusieurs façons différentes...

L'extrait précédent montre la pertinence du retour sur le passage des millimètres aux centimètres; passage souvent exécuté machinalement. Il permet aussi à ceux qui avaient réussi de comprendre le sens du « déplacement de la virgule », en s'appuyant sur l'écriture et la dénomination des nombres (dixièmes). Dans le même ordre d'idées, les propositions de Gael et Rébecca montrent bien comment l'usage d'une technique peut parfois être évitée en considérant les nombres en jeu; propositions qui ne sont pas sans rappeler les analyses verticale et horizontale précédemment réalisées par Guy et Réjean. En effet, bien que les propos de Gael ne soient pas si évidents à comprendre sans le visionnement de la vidéo, celui-ci explique la relation entre le nombre de feuilles qui est, dans le passage de 8 feuilles à 4 feuilles, 2 fois moins (÷2), et la correspondance de cette relation qui doit être conservée au regard de leur épaisseur respective. C'est pourquoi, il mentionne à Hélène que l'épaisseur peut être obtenue en multipliant celle de 8 feuilles par ½. De plus, la démarche de Samuel [+5+5+5+5], rappelée précédemment, prend appui sur les actions qui sont reliées à l'itération d'un certain nombre de piles de feuilles; itération qui commande également une itération comparable des mesures de chacune des piles pour conserver le rapport entre le nombre de feuilles et l'épaisseur. Samuel effectue une conversion des cm en mm, donc 5 mm pour 2 feuilles, pour 8 feuilles, c'est 20 cm ou 2 cm. Ce qui relève d'une excellente connaissance des fractions exprimant des rapports entre des mesures.

Enfin, l'invitation de la chercheure a permis aux élèves de percevoir une fois de plus l'équivalence des différentes représentations d'un nombre et la pertinence de trouver la mesure pour 4 feuilles : le choix de la fraction 1/4 rendait plus aisé la recherche de l'épaisseur d'une feuille. Les représentations suivantes 0,5/2; ¼ 2/8 n'ont malheureusement pas été exploitées, faute de temps. Par ailleurs, l'étudiante-chercheure, la chercheure et l'enseignante étaient convaincues que les élèves étaient en mesure d'exploiter ces relations, ce que nous avons pu mettre en évidence dans d'autres situations.

3) 5mm pour 49 feuilles et 2 mm pour 20 feuilles

En réponse à la question posée par la chercheure, Samuel se propose de fournir une réponse; il affirme que 5 mm pour 49 feuilles et 2 mm pour 20 feuilles sont des mesures de feuilles identiques, tout en y ajoutant qu'une erreur de leur part est envisageable. L'étudiante-chercheure demande alors aux élèves qui avaient trouvé cette équivalence de ne pas expliquer leur raisonnement [Samuel, Noa, Gael et Marcel] et invite Guy à le faire. L'extrait suivant montre comment l'élève procède à une analyse des relations entre les mesures de même nature; il établit la relation [opérateur scalaire, Vergnaud, 1981] entre les nombres de feuilles [20 et ≈50], souhaitant vérifier s'il s'agit de la même relation que celle obtenue entre les épaisseurs [2 et 5]. Devant cette relation [2,5] qu'il n'arrive pas à obtenir précisément, un autre élève propose de procéder autrement, en examinant les relations entre les nombres de feuilles et les mesures de leurs épaisseurs [coefficient de proportionnalité] remarquant rapidement que la relation est beaucoup plus simple à identifier [10 feuilles/mm] :

GUY	*ok si on met environ 5 mm mettons pour 50 feuilles … 2 mm pour 20 feuilles c'est plus que la moitié de ... si c'était la moitié, mettons 25 feuilles pour 2 mm ... là ça aurait été 4 mm pour 50 feuilles.*
CH	*tout à fait, c'est beau mais on peut voir encore plus simplement...*
GUY	*ok je le sais! Version plus simple : quand tu checkes le 2mm pour 20 ...c'est plus facile de savoir que pour 1 mm c'est 10 feuilles ... bon voilà à chaque mm il y a 10 feuilles, c'est juste que là [49] il y a une feuille de différence*

CH	*Parfait! Réjean avait regardé la relation entre le nombre de feuilles [] ...mais ça serait plus que 2, pourriez-vous corriger votre réponse? C'était pas posé mais si on regardait pour 25 feuilles en partant de 49...*
MARCEL	*3*
GUY	*2,5*
ECH	*écrit 2,5/25 = 5/50 = 2/20 (explique l'écriture intermédiaire que l'on peut utiliser en faisant référence aux tablettes de chocolat]*

L'enseignante, la chercheure et l'étudiante-chercheure affirment être surprises par l'attitude de Guy. D'une part, elles n'avaient pas anticipé un tel raisonnement. Et bien que celui-ci ne soit pas complet, il montre néanmoins une interprétation fort pertinente des rapports. D'autre part, cet élève est habituellement angoissé à l'idée de s'exprimer en grand groupe, comme en témoigne son incapacité à présenter sa démarche lors de la situation *Dites-le avec des fleurs*, situation pour laquelle il était extrêmement fier de son raisonnement et pour laquelle nous avions validé l'excellence de sa démarche. De plus, partageant les travaux d'équipes avec Gaudi, Guy rejette généralement son raisonnement et adhère plutôt à celui de son collègue qui, selon lui, est « meilleur ». Il a même tenu à confier à l'enseignant, lors de la récréation, ces propos très éloquents : « *Ayoye y a été bon mon raisonnement !* »

Le comportement de Guy est tributaire des nombreuses situations permettant et obligeant les élèves à s'attarder aux relations entre les nombres dans le but d'exploiter la démarche la plus économique. Ce raisonnement a aussi permis de regarder l'obtention de fractions équivalentes en s'appuyant sur le rapport entre le numérateur et le dénominateur tout en accédant à l'épaisseur d'une feuille de papier, comme en témoigne le prochain extrait.

CH	Vous n'avez toujours pas trouvé l'épaisseur pour une feuille, Guy a dit qu'on a 1 mm pour 10 feuilles, ça va être quoi pour une feuille?
GAEL	Tu fais 1 divise par 10…0 virgule quelque chose
ECH	1 divisé par 10 je peux l'écrire comment aussi [ECH écrit 1÷10 =]?
GAEL	0,1 je pense.
ECH	Oui, mais on a aussi un symbole pour représenter la division, ça serait quoi?
DAVID	1/10 de mm?

Il est à noter que le cheminement parcouru jusqu'à maintenant a fourni l'opportunité à Gael de conférer un sens à l'opération permettant d'obtenir l'épaisseur d'une feuille de papier : lui qui avait auparavant divisé le nombre de feuilles par l'épaisseur, dans son cahier de notes. Il est aussi intéressant de noter que c'est David qui a réussi à faire appel au sens mesure de la fraction en ajoutant l'unité mm à la fraction obtenue. Il a su s'appuyer sur ce qu'il avait traité dans la situation sur la définition des rationnels, situation dans laquelle il a bénéficié d'une aide soutenue de l'enseignante.

4) 2mm pour 50 feuilles et 5 mm pour 117 feuilles

Au retour de la pause, Samuel prend à nouveau la parole pour rendre compte de ce qu'il a trouvé avec Noa. Le verbatim ci-dessous fait état de la difficulté des élèves à établir les relations entre les mesures des nombres de feuilles et les mesures des épaisseurs associées. Nous leur proposons donc de passer par la valeur unitaire.

SAMUEL	2mm pour 50 feuilles et 5 mm pour 117 feuilles mais il doit y avoir quelques erreurs de mesure d'un côté ou de l'autre [parlant des différentes équipes]
ECH	Mais tu n'expliques pas comment tu as trouvé ces mesures.
NOA	C'est moi qui l'explique.
GAUDI	Non c'est moi...
ECH	Ni un ni l'autre.
NOA	C'est pas juste tu bloques notre intelligence!
ECH	Est-ce que quelqu'un d'autre est capable de dire comment ils ont associé le 2 mm pour 50 feuilles et 5mm pour 117 feuilles? [Rémi et Martin lèvent la main].
REMI	Ben 50 + 50, ça fait 100...
ECH	Donc tu dis pour 100 …
GAEL	Ben moi j'aurais fait...
REMI	Hey, chut, laisse-moi parler...
ECH	Ça ferait combien pour l00 feuilles?
REMI	Encore deux...donc 4mm.
ECH	Ok, je réécris 2 mm pour 50 feuilles 4 mm pour 100 feuilles
REMI	Pis là...on va chercher… pour 17 feuilles, ça serait des mm non?
GAEL	C'est 1 mm.
REMI	Hey, c'est moi qui a levé la main!
ECH	Mais si on tient compte des erreurs comme Samuel l'a mentionné, que l'on corrigeait… si on décidait que les 2 étaient les mêmes feuilles, il y aurait des ajustements à faire au niveau des mesures, si ici on avait 5 mm ici , ça serait combien ?
REMI	Pour le 117?
ECH	Non pour celui-là : Tu as 2 mm pour 50 (2/50). 4 mm pour 100 (4/100). 5 mm pour ?
REMI	150.
SAMUEL	Non 150, ça va être 6.
GAUDI	125, 125.
ECH	5 mm pour combien de feuilles ?

GAEL	Ben moi j'ai fait le produit croisé [Il utilise sa calculatrice].
ECH	Est-ce qu'on est capable de trouver pour 1mm?
GAUDI	Oui, on est capable!
GAEL	Moi j'ai fait 2,5.
ECH	Attends un petit peu… Est-qu'on est capable de trouver pour 1mm ?
GAEL et REMI	25
ECH	Donc on aurait 1mm.
REMI	Pour 25 feuilles.
ECH	Donc combien on aurait 5 mm pour ...?
GUY	125 feuilles.
CH	Oui.
REMI	Ben tu fais 25 fois 5...125 feuilles…
CH	Exactement!
REMI	Aye, j'suis bon j'pensais pas que j'allais l'avoir!

Malheureusement, l'étudiante-chercheure ne fait pas de retour sur les propos de Gael affirmant qu'il a fait 2,5. La confrontation des différents moyens d'obtenir la réponse aurait pu permettre aux élèves de conférer un sens à la démarche de Gael. Elle aurait pu aussi aller au bout de l'idée de Rémi quant à la mesure de 17 feuilles, idée permettant de rendre compte de la difficulté à trouver cette mesure, compte tenu des nombres en jeu. Face à cette difficulté, l'étudiante-chercheure a réorienté la démarche. L'étudiante-chercheure aurait pu aussi demander de trouver l'épaisseur d'une feuille à partir de l'épaisseur obtenue pour 100 feuilles (4/100). Cela dit, il est étonnant de voir la détermination de Rémi qui, malgré les difficultés, parvient à trouver diverses relations entre l'épaisseur et le nombre de feuilles. Il est lui-même étonné de sa réussite. En somme, les élèves ont montré leur engagement et leur capacité à trouver différents couples pour rendre compte de l'épaisseur des feuilles de papier.

4) 5 mm pour 26 feuilles et 5 mm pour 22 feuilles

L'étudiante-chercheure a invité les élèves à se prononcer sur une dernière équivalence avant d'entamer la mise en ordre de l'épaisseur de quelques feuilles de papier. La dernière intervention, réalisée par Noa, comme le montre cet extrait, n'a pas offert un potentiel très prometteur dans la validation de l'adéquation entre les mesures des feuilles de papier examinées. En effet, les élèves voient rapidement que si l'on accepte l'erreur de 4 feuilles, nous avons simplement la même fraction! L'étudiante-chercheure en profite donc pour questionner les élèves sur l'épaisseur des feuilles.

ECH	On va en regarder un dernier avant de mettre en ordre ceux que l'on a trouvés.
NOA	5mm pour 26 et 5 mm pour 22, avec sûrement une faute dans un des deux…

GUY	Il y a 4 feuilles de différence.
ECH	C'est ça mais si les feuilles sont minces…le sont-elles?
GUY	non parce qu'il y en a pas beaucoup et le paquet est gros quand même…
RÉBECCA	Là [5 /26] il serait plus mince que là [5 / 22].
ECH	Pourquoi?
GAEL	Parce que..plus qu'il y en a plus [chut dit ECH].
RÉBECCA	Parce que t'as plus de feuilles pour le même mm. Si ça t'en prend moins, ils sont plus épaisses.
GAEL	Comme on a vu avec les tartes, plus tu as de morceaux, plus les morceaux sont petits. Comme ça c'est plus évident que celui-là [5/22] c'est des plus gros morceaux faque c'était lui qui était le plus gros.

Cet extrait rend compte, entre autres, de la capacité des élèves à comparer, de manière fort approximative, les épaisseurs des feuilles et ce, en mettant en relation les nombres de feuilles et les épaisseurs. Les propos de Guy, au regard des autres feuilles précédemment examinées (5 mm pour 49 feuilles, 5 mm pour 117 feuilles et 1 mm pour 44 feuilles), sont tout à fait justes; il conclut que ces feuilles sont plus épaisses que les feuilles précédemment examinées. Quant au raisonnement de Rébecca, raisonnement tout aussi juste, il permet aux élèves d'exploiter les numérateurs égaux dans la comparaison des fractions, ce qui a été initié dans des activités présentées au cours des semaines précédentes (voir, entre autres, les activités présentées le 26 avril (ex. 5/12, 5/6)). Au-delà de cette transposition, l'association de différents contextes ne peut que favoriser la viabilité et la durabilité des connaissances, dont la pertinence est ici reconnue. Ces arguments permettront, d'ailleurs, de mettre en ordre, selon leurs épaisseurs respectives, les feuilles reçues par l'équipe 4, ce qui sera traité dans la prochaine partie.

Au terme de cette activité, nous avons trouvé pertinent de prolonger cette situation pour poursuivre l'intégration des connaissances mises en œuvre pas les élèves. Nous avons ainsi demandé de mettre en ordre croissant les mesures obtenues par l'équipe 4. Quoique cette sériation ait été effectuée par certaines équipes, elle nous permettait de revenir sur la finalité de l'activité qui consistait à mettre à l'épreuve un code discriminant les types de feuilles selon leur épaisseur. Nous avons choisi les résultats de l'équipe 4 [2,1 cm pour 8 feuilles, 2 cm pour 20 feuilles et 2 mm pour 50 feuilles], car ils offraient la possibilité de travailler à la fois sur la conversion des unités de mesure (mm et cm) et sur des relations relativement voisines entre les diverses mesures de l'épaisseur des feuilles. Le travail a été proposé à l'ensemble de la classe et nous avons choisi de donner d'abord la parole à des élèves qui intervenaient rarement. Nous reproduisons quelques interactions :

ECH	Donc prenez une feuille et un crayon on va essayer d'ordonner, de trouvez parmi les feuilles de l'équipe 4 quel était le papier le plus épais, le plus mince. Êtes-vous capables de les ordonner rapidement avec les propos que Rebecca vient de nous dire? On avait 2,1 cm pour 8 feuilles, 2 cm pour 20 feuilles et 2 mm pour 50 feuilles. [Rebecca lève la main] J'aimerais plutôt entendre quelqu'un qui n'a pas encore parlé [plusieurs élèves lèvent la main : Anne, Hélène, Marcel, etc.] Alex?
ALEX	Le plus mince c'est le dernier, le plus épais c'est le premier, l'autre ce serait le moyen.
ECH	Comment tu as fait pour dire ça Alex ?
ALEX	Ben j'ai regardé la mesure pis la quantité de feuilles. Quand il y avait plus de feuilles dans la même quantité, le papier était plus mince.
REBECCA	Ça se peut pas que 2,1 cm soient pour 8 feuilles, parce que regarde les feuilles seraient épaisses.
NOA	Non on avait du carton, t'en mets 8 de même ça fait vraiment épais.
ECH	Comment on serait capable de l'écrire comme on l'a travaillé jusqu'à maintenant en fractions?
ALEX	1 sur 25 mm pour le plus mince, le moyen 1/10 mm pour une feuille.
REJEAN	¼ cm pour le plus épais…ben à peu près à cause du virgule 1.
ECH	Attention l'autre est en cm. Ça serait combien si on mettait 2,1 cm en millimètre?
GAEL	J'ai fait le produit croisé…
HÉLÈNE	21
ALEX	21/8 mm.
DAN	2 feuilles pour 5 mm.
GAEL	1 entier et quelque chose.

Nous remarquons, dans ce dernier extrait, que même les élèves n'ayant pas beaucoup participé aux activités précédentes, notamment Alex et Hélène, ont bien construit l'objet traité dans cette situation, Hélène arrivant alors à délaisser le produit croisé en effectuant rapidement le passage des centimètres aux millimètres. Réjean et Alex ont, quant à eux, exploité le sens mesure de la fraction pour rendre compte de l'épaisseur d'une feuille de papier.

Évolution des rapports des élèves aux nombres rationnels et de la démarche d'acculturation institutionnelle

Nous avons pu remarquer un changement de perspectives qui amène les élèves à regarder les relations entre les nombres, avant de «se réfugier» dans des calculs «conventionnels», de s'attarder à la fraction en tant que rapport et mesure, alors qu'antérieurement, ils étaient plutôt freinés par le sens partie-tout. Cette expérience fort instructive nous porte à croire que l'on insistera jamais suffisamment sur l'importance de considérer l'hétérogénéité didactique, qui réfère à l'appropriation du savoir et caractérise la situation d'échec en termes de position de l'élève dans une tâche particulière (Sarrazy, 2002). La richesse de cette situation didactique et des contrats qu'elle sollicite sont plus à même de rendre compte des variations individuelles que les seules caractéristiques psychogénétiques de l'élève. Les élèves nous ont clairement démontré qu'ils peuvent s'extraire du rang «d'élève faible» -étiquette générale stigmatisante-, pour occuper une position qui leur rend davantage justice. Encore faut-il qu'ils en aient l'opportunité ! Les élèves nous ont clairement montré, tout au long de cette activité, par leurs réactions et leurs adaptations, toute l'importance qu'ils ont accordée au sens.

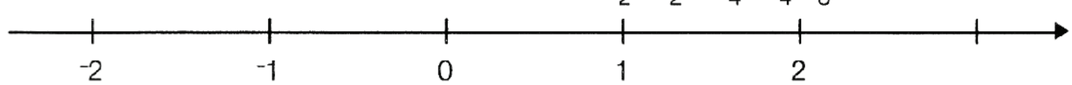
L'évolution des rapports des élèves aux nombres rationnels que nous avons pu mettre en évidence dans cette situation peut être mise en parallèle avec les propos de l'enseignante qui reconnaît l'importance des activités proposées : «*Ce qui est bien de tes activités, c'est que ça travaille le raisonnement pas le calcul*». La complicité qui s'est construite entre l'enseignante et les chercheures s'est bien fait ressentir dans les pratiques, parfois même, à l'insu de ses acteurs! Grâce à cette collaboration « didactique », les élèves ont eu l'opportunité de mettre à l'épreuve leurs connaissances, de s'engager dans une démarche de construction de connaissances et d'apprécier les effets de leur engagement cognitif. Citons pour terminer les remarques éloquentes de Marcel et Gael; Marcel déclare alors : « *Il faudrait enregistrer tout ça et l'envoyer au ministère de l'éducation de mathématiques* » et Gael rétorque ainsi à ses propos « *ben non il nous trouverait trop bons!* »

4.2.13. Intégration des nombres rationnels : appropriation d'une définition des nombres rationnels et construction d'une tâche d'évaluation portant sur la sériation de nombres rationnels

À la suite du travail sur la comparaison de fractions (1/05/2007), les élèves ont effectué diverses tâches dans leur cahier d'exercices, tâches inscrites dans leur milieu usuel d'enseignement. Ayant circulé dans les rangées et fourni des rétroactions aux élèves lors de la réalisation de ces tâches, nous avons choisi d'effectuer, le 10 mai 2007, un retour collectif uniquement sur deux de ces tâches, tâches puisées dans le cahier d'exercices du manuel Perspective (Leclerc, 2004, p.87, n°5 et n° 4e) et nous paraissaient porteuses d'apprentissages non négligeables.

Avant d'effectuer le retour sur le problème n°5, la chercheure a cru bon de proposer une tâche préparatoire plus simple, afin de faciliter l'entrée dans la résolution du problème qui n'avait pas été effectuée par l'ensemble des élèves en devoir. Les élèves ont donc été invités à trouver une fraction se situant entre 5/10 et 6/10. Ensuite, nous avons repris les deux activités du manuel (p.87, n°5 et n° 4 e). Puis, les élèves ont été amenés à investiguer la définition des rationnels. Cette dernière tâche a été élaborée par la chercheure et l'étudiante-chercheure, en regard des difficultés rencontrées lors de la réalisation de leur document de révision (19, 26 et 27 mars 2007). À cette occasion, l'étudiante-chercheure qui remplaçait l'enseignante avait pu constater que les élèves ignoraient la signification de l'expression « nombres rationnels » dans la tâche suivante :

Place les nombres rationnels suivants sur la droite : $\frac{3}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{4}$, $-\frac{5}{4}$, $\frac{7}{8}$.



Il a donc été décidé de revenir en classe sur cette définition. Enfin, les élèves ont été invités à construire une tâche d'évaluation qui porte sur la sériation des nombres rationnels; la référence à l'évaluation nous est apparue importante car elle plaçait les élèves, pour une première fois, dans une position « enseignante ». Nous présenterons successivement, et plus en détail, chacune des activités qui ont été présentées au cours de cette période d'enseignement, de même que l'analyse des conduites des élèves. Pour montrer l'évolution des connaissances mises en jeu, nous avons segmenté le verbatim en épisodes que nous commenterons plus précisément par la suite.

4.2.13.1. Présentation et analyse des conduites des élèves et des interactions didactiques au cours de la tâche préparatoire d'intercalation de fractions entre 2 fractions

La tâche d'intercalation de fractions entre les nombres 5/10 et 6/10 a été présentée simultanément à l'ensemble des élèves de la classe, l'idée étant alors de permettre aux élèves une première rencontre avec la « densité des nombres rationnels », les élèves pouvant alors constater qu'il est toujours possible de proposer des fractions différentes pouvant s'intercaler entre deux fractions. Quelques élèves émettent rapidement une réponse, notamment, Noa et Gaudi qui proposent respectivement, 5,5/10 et 11/20. Les propos ci-dessous reflètent la recherche, par les autres élèves, des raisonnements ayant mené à l'obtention de ces réponses.

Épisode 1 : premières interprétations des relations entre 5/10, 6/10, 11/20 et 5,5/10

ECH	Est-ce que quelqu'un est capable de me donner une fraction qui se situe entre ces deux fractions-là [5/10 et 6/10]? Je vais prendre toutes les propositions.
NOA	5,5/10 [en sourdine]
MARCEL	1/2.
ECH	Ici? [montre le doigt entre les deux fractions]. Entre les deux?
MARCEL	La même chose que le 5/10.
ECH	1/2, ok, mais nous on veut quelque chose entre 5/10 et 6/10. Est-ce quelqu'un d'autre a une idée ?
GAUDI	20/11.
ÉLÈVES	Hein?
CH et ÉLÈVES	11/20 tu veux dire ?
GAUDI	Ouain, c'est ça.
ECH	Ok. Comment a-t-il trouvé ça ?
ÉLÈVES	Ah…
CH	On va y demander ce qu'il a fait.
ENS	Est-ce que tu veux qu'il te l'explique ?
RÉMI	Je sais que le 5, le 6. [compte 5+6 sur ses doigts]
GUY	J'sais que si tu fais diviser par deux ça va égaler la même affaire que onze en haut et 10 en bas, right? [essaie d'expliquer l'obtention de 11/20 à partir de 5,5/10]
CH	Diviser par deux, oui, mais après c'est pas très clair.
ECH	Oui. Rémi.
RÉMI	Ben le 10, on a fait fois deux pour 20.
ÉLÈVES	Ouais.
RÉMI	Pis le cinq, on a calculé avec le six, qui fait onze.
CH	On a ajouté pour que ce soit plus grand que 10/20, c'est ça ?
RÉMI	On a calculé. Right. On fait cinq plus six égale onze. Pis là, dix plus dix égale vingt.

Dans cet extrait, nous remarquons que Gaudi trouve rapidement et correctement une fraction se situant entre 5/10 et 6/10. Fait intéressant, les élèves désirent trouver eux-mêmes le raisonnement effectué par Gaudi, repoussant ainsi les propositions d'aide offertes par la chercheure et l'enseignante. Cet engouement rend compte d'un renversement des habitudes fréquemment rencontrées chez les élèves en difficultés d'apprentissage; en effet, comme le montrent plusieurs études (Perrin-Glorian, M.-J., 1993; Mercier, 1995, 1998; Brousseau et Péres, 1981; Brousseau, 1998), ces élèves ont fréquemment tendance à minimiser leur engagement dans des situations « nouvelles, originales, non balisées », dans l'attente que l'enseignant prenne la responsabilité de la réalisation de cette situation. Face aux situations qui diffèrent passablement des situations usuelles, par exemple, lorsqu'il leur est demandé non pas de trouver une fraction à intercaler entre deux fractions dont les numérateurs ou/et les dénominateurs ne sont pas des nombres qui se suivent (ex. : 5/10 et 16/20; ½ et 4/6), mais de trouver plusieurs fractions se situant entre des fractions qui partagent un même dénominateur et dont les numérateurs se suivent, comme c'est le cas dans la tâche précédente, les élèves avouent généralement leur incapacité à répondre à une telle demande, ne pouvant recourir à des procédés usuels. Dans la tâche précédente, l'investissement des élèves, il importe de le reconnaître, est le fruit d'une démarche d'enseignement comportant des situations qui leur ont permis « d'oser prendre des risques en faisant appel à diverses connaissances et procédés ». Leur engagement témoigne ainsi de leur perception de leur compétence qui, dans cette tâche, semble suffisamment élevée pour qu'ils puissent rivaliser avec des élèves qui occupent généralement des positions « supérieures »! Alors que Guy explique l'obtention de 11/20 à partir 5,5/10 par une relation multiplicative, Rémi expose une relation additive entre 5/10 et 6/10. Malgré l'erreur commise par ce dernier élève, nous devons noter que sa réponse n'est pas impulsive, mais résulte bien d'une observation des relations additives entre les numérateurs et les dénominateurs qui entrent dans la composition des rationnels, les numérateurs et les dénominateurs étant toutefois pris isolément, comme s'il s'agissait de nombres naturels.

Épisode 2 : Quand deux résultats se conjuguent pour donner sens aux démarches des élèves

ECH	Qu'est-ce que vous pensez? Parce que Jessie pense qu'on a formé 11/20 en faisant le cinq plus le six et le dix plus le dix.
RÉMI	C'est pas ça?
ECH	Non. Gael?
GAEL	Ce qu'y ont fait c'est cinq virgule cinq fois deux qui va donner onze. Pis là dix fois deux égale vingt.
GUY	C'est ce que j'ai dit tantôt!
GAUDI	Non, c'est pas tout à fait ça que j'ai fait.
CH	Mais c'est une bonne idée!
ECH	Donc, on est capable de voir qu'on peut passer d'une représentation à une autre mais … oui Samuel.
SAMUEL	Si tu veux te casser la tête un peu là, tu fais cinq fois, 5/10 fois deux ça va donner 10, euh,10/20. Tu fais 6/10 x 2 pis ça va donner 12/20 pis là tu tchèques entre les deux pis c'est onze, mais c'est long.

ENS	Ouais, mais c'est la bonne façon de le faire. Je pense que c'est comme ça que Gaudi a pensé. Gaudi, est-ce que c'est comme Samuel l'a expliqué que t'avais réfléchi?
GAUDI	Oui… un p'tit peu moins vite (rires).
ENS	Excellent.

Il convient de noter que le recours aux fractions équivalentes a été la voie privilégiée par plusieurs élèves, selon les observations que nous avons pu recueillir. Cette conduite reflète par ailleurs la démarche valorisée par l'enseignante : « *mais c'est la bonne façon de le faire* ». Il n'est donc pas surprenant que les élèves y aient eu recours compte tenu de l'histoire didactique de la classe. Comme le montre l'épisode précédent, Samuel reconnaît toutefois la lourdeur de cette pratique au regard de la démarche proposée par Noa, Gael et Guy. Cette dernière, dont le produit résulte en une écriture intermédiaire [5,5/10], s'appuie sur le traitement des numérateurs : trouver un nombre entre 5 et 6. Il ne reste qu'à transformer cette écriture [5,5/10], en une écriture fractionnaire, tel que le souligne Samuel à l'épisode 3. Les élèves reconnaissent l'économie de cette démarche, bien qu'elle ne soit pas privilégiée dans l'enseignement usuel. Ce qui ouvre une porte pour un travail éventuel sur les représentations d'une fraction, voire d'un nombre rationnel. Il importe donc, par la suite, de permettre aux élèves, ayant jusqu'à maintenant choisi le nombre médian, de s'apercevoir qu'il existe une infinité de nombres entre les fractions 5/10 et 6/10.

Épisode 3 *: Représentation fractionnaire d'un nombre*

ECH	Mais eh, qui a donné 5,5/10?
NOA	C'est moé.
ECH	Moi j'ai un problème avec ça comme question par exemple.
SAMUEL	Ç'est pas une fraction, c'est un nombre à virgule.
CH	Est-ce qu'on a un moyen de la rendre en fraction?
SAMUEL	Cinquante-cinq centièmes.
ECH	Ha, ha oui. (écrit au tableau).
CH	Bon ben franchement, vous m'étonnez.
ELS	Merci. Oh my god!
ECH	Vous avez vu ce qu'il a fait?
ELS	Oui.
GUY	Il a fait fois dix

4.2.13.2. Présentation et analyse des conduites des élèves et des interactions didactiques au cours d'une situation provenant du cahier d'exercices Perspective, prenant appui sur les connaissances et savoirs mis en œuvre dans la tâche précédente

Une des situations du cahier d'exercices du manuel Perspective (2004; no 5, p.87) qui a retenu notre attention est celle portant sur l'intercalation d'une fraction entre 6/10 et 6/11. Pour réaliser cette tâche, les élèves peuvent prendre appui sur les connaissances et procédés utilisés dans le traitement de la situation précédente, pour pouvoir poursuivre et mettre à profit les propriétés des rationnels selon lesquelles il existe une infinité de nombres rationnels entre deux nombres rationnels quelconques et une infinité de représentations d'un même nombre. Cette tâche permet d'envisager la mise au front d'obstacles souvent présents chez les étudiants, ces derniers se refusant à accepter l'idée que le successeur d'un nombre rationnel n'a plus de sens. Nous reproduisons ci-dessous l'énoncé du manuel (Perspective, p.87, n°5):

> « *Un groupe de jeunes jouent à un jeu vidéo. Luc a franchi avec succès les 3/5, Julie, les 3/8, Loïc, les 6/11 et Marie-Andrée, 1/3. Si l'on sait que Christina est la 2e meilleure du groupe, par quelle fraction peut-on représenter sa réussite ?* »

Les conduites des élèves mettent en exergue le choix important des nombres rationnels dans la constitution de cet énoncé, nombres rendant peu économique la recherche du dénominateur commun. La prise en compte de ce facteur a été soulevée par plusieurs élèves qui se sont mis immédiatement à la recherche de divers moyens pour résoudre la situation : fractions équivalentes, écritures intermédiaires, etc. L'étudiante-chercheure a d'ailleurs été agréablement surprise par les propositions des élèves, celle-ci n'ayant pas entrevu ces possibilités puisqu'elle avait précédemment entamé la tâche en ne considérant que les deux plus grandes fractions (3/5 et 6/11) qu'il était facile de comparer en recourant à la fraction repère ½. Cependant, aucun élève n'a exploité la relation entre le numérateur et le dénominateur dans la comparaison des fractions. Ils ont plutôt opté pour la mise en ordre décroissant de l'ensemble des performances, privilégiant le procédé courant dans ce type de situation, soit le recours à un dénominateur commun. Les interactions ci-dessous illustrent bien ces propos. Pour montrer l'évolution des connaissances mises en jeu, nous avons segmenté le verbatim en épisodes que nous commenterons.

Épisode 1 : Entrée privilégiée : le dénominateur commun

ECH	Ok. Eh, j'aimerais qu'on regarde un problème, si vous ne l'avez pas fait, on va le faire ensemble, qui se trouve dans le cahier Perspective à la page quatre-vingt-sept, le numéro cinq. Comment avez-vous résolu la situation?
HÉLÈNE	Tu les mets sur le même dénominateur.
ECH	Est-ce que tu les a mises toutes sur le même dénominateur?
SAMUEL ET GAEL	C'est impossible!
SAMUEL	Ben ça va être long.
ECH	Donc ça serait long mais pas impossible mais quand on regarde pour représenter à la fois des onzièmes, des huitièmes, des cinquièmes, des tiers…

Cette entrée, bien que verbalisée uniquement par Hélène, traduit l'accès privilégié par plusieurs élèves dans les tâches de comparaison de fractions. La réaction de deux élèves (Samuel et Gael), face à cette démarche, favorise une transition amenant la chercheure à demander aux élèves s'ils sont en mesure de les mettre en ordre en minimisant le nombre de calculs. Plusieurs élèves (Marcel, Rémi) acquiescent et s'empressent de lever la main : « *Moi, moi j'ai une idée, j'ai trouvé!* ».

Épisode 2 : À la recherche d'un autre moyen pour ordonner les fractions

CH	Est-ce que vous êtes capables de les mettre en ordre, sans trop calculer?
GAEL	J'ai une question ECH, est-ce qu'on aurait pu tout mettre les chiffres en haut sur 6 ?
ECH	Ben oui. J'ai même pas pensé à faire ça! On a des sixièmes, des tiers, euh, six parties, trois parties, trois parties, une partie,
GAEL	C'est même pas ce que j'avais fait mais bon !
CH	Expliquez-nous ce que vous faites ensuite ?
La majorité des élèves trouvent facilement les fractions équivalentes aux fractions initiales avec le numérateur 6 et peuvent les ordonner. Voici l'ordre proposée : 6/10; 6/11; 6/16; 6/18.	
CH	Ça, c'est du plus petit au plus grand?
GUY et NOA	Ben non, c'est le contraire.
GAEL	Ouais, parce que dix-huit y a de plus petits morceaux et dix, y a plus de gros morceaux fait que c'est ça.
GUY	Ben voilà!

Dans cet extrait, Gael propose un accès tout à fait hors du commun. Il porte une attention particulière aux numérateurs -facteurs de 6- lui permettant aisément de comparer les fractions qui ont un numérateur commun. Cette proposition montre bien, il nous semble, comment, en libérant les élèves du contrat didactique usuel, les situations ont permis à cet élève de porter un regard différent sur les nombres et d'envisager un procédé original.

La suite de la discussion (voir ci-dessous) nous permet, par ailleurs, de constater l'effet bénéfique de l'activité préparatoire (trouver une fraction entre 5/10 et 6/10). En effet, celle-ci a servi de tremplin afin de donner sens au résultat obtenu par Samuel [12/21], plus encore de trouver une voie plus économique à l'obtention du même résultat. La cohabitation de ces diverses écritures montre l'étendue des moyens dont on dispose pour représenter un nombre rationnel et permet aussi à l'enseignante de clore cet épisode en reconnaissant ces fractions équivalentes comme étant toutes de bonnes réponses.

Il faut aussi préciser que la réponse de Samuel (12/21 comme fraction entre 6/10 et 6/11) a étonné les chercheures. Sur l'enregistrement vidéo, il est aisé de percevoir le doute ressenti. En effet, cette conduite n'est pas sans rappeler la démarche précédente de Rémi qui, pour une même tâche, avait additionné les numérateurs et les dénominateurs. Mais, il s'agit d'une impression qui s'avère fausse. En effet, l'enseignante a alors confirmé rapidement l'exactitude de la réponse comme vous pourrez le constater à l'épisode suivant :

Épisode 3 : Apport de l'activité préparatoire

CH	Et alors eh vous la trouvez comment ? Elle est arrivée 2^{e}. Où est-ce qu'elle est située?
RÉMI	Si elle est arrivée 2e, on la mettrait après, là.
ECH	Ici? Entre 6/10 et 6/11?
ÉLÈVES	Oui.
CH	On a fait tout à l'heure, quelque chose de semblable. Quand on vous demandait c'était quoi le nombre qui venait entre 5/10 et 6/10? (Regarde Marcel).
[…]	
SAMUEL	On peut la mettre 12/21.
ENS	Samuel t'as bien dit 12/21? J'suis d'accord. C'est brillant!
GAEL	Si tu fais douze…C'est juste que je ne catche pas, si y fait douze y s'en va l'autre bord? Ah non vingt et unième. Vingt et un divisé par deux ça donne quoi ENS?
[…]	
CH	Qui avait proposé 5,5 tantôt? Est-ce qu'on pourrait faire pareil? Le même raisonnement ici?
GAEL	Ok, j'ai catché, c'est 6/10,5.
CH	À ce moment-là, ce n'est plus une écriture de fraction, qu'est-ce qu'on fait pour l'avoir?
SAMUEL	60/105.
CH	Ben oui!
ENS	Ou 12/21.

Ce travail terminé, l'étudiante-chercheure se permet d'exploiter ce qui a été fait, entre autres, par Gael qui travaille à partir du dénominateur. Tel que mentionné précédemment, le but escompté consiste à fournir aux élèves un milieu leur permettant de remarquer et reconnaître, qu'entre deux rationnels, on peut toujours intercaler d'autres rationnels, une infinité.

Épisode 4 : Quand le processus d'acculturation permet des ouvertures.

ECH	Mais toi Gael qui aime bien les 0, tu peux ne pas te casser la tête et le mettre tout de suite pour trouver une fraction équivalente…60/100….60/110.
[…]	
GAEL	Entre 100 et 110 qu'est-ce qu'il y a ? C'est 105!
ECH	Plus que ça… par exemple 60/104.
RÉMI	Sur 102, 103.
GAEL	Je sais, mais je veux dire que si tu fais 10 divisé par 2 ça fait 5.
ECH écrit au tableau 600/1000 et 600/1100	
RÉMI	Ah ben là!
CH	Est-ce que vous voyez qu'on pourrait continuer longtemps d'en mettre entre les 2?
ÉLÈVES (SAMUEL, GAEL)	Ben oui, c'est sûr!
CH	D'après vous, il y en combien entre les deux ?
GUY	Pas mal, tu peux ajouter plein de zéros.
MARCEL	Une infinité.
RÉMI	D'abord si c'est l'infinité, la réponse ça va être quoi.
ECH	Ben c'est-à-dire qu'il y avait plusieurs réponses possibles.
ENS	Dans le fond, c'est juste qu'à chaque fois on va de plus en plus précis, on sépare l'unité en de plus en plus de parties donc on augmente toujours le nombre de réponses.
CH	Et bien dit donc bravo! Vous êtes réveillés!

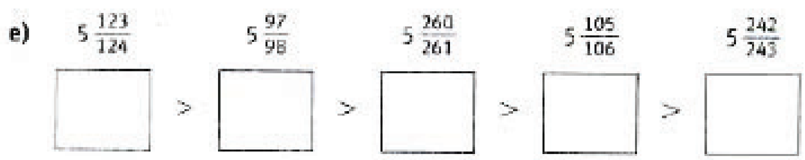
Dans cet épisode, Rémi nous montre bien l'effet « pervers » du contrat didactique. Alors qu'il est un des premiers à reconnaître qu'entre deux fractions, il en existe plusieurs fractions (dit : « 60 sur 102 et 103 entre 60/100 et 60/110 » et s'exprime ainsi: « *ah, ben là »* quand ECH écrit 600/1000 et 600/1100, car il voit le nombre de fractions s'accroître), il devient très ambivalent quant à la réponse à produire, à privilégier; cette réaction peut être attribuable au fait qu'il se demande comment rendre compte de l'infinité. Il aurait été intéressant de lui permettre de développer davantage son interprétation. Il va sans dire que la puissance d'écriture des rationnels n'apparaît pas aisément à l'élève habitué à désigner un nombre entier par un seul code digital. Certes, le pas fait par les élèves dans cette activité est loin d'être négligeable, d'autant plus qu'il a été possible de reconnaître l'apport de cette connaissance dans la réalisation d'activités antérieures[42].

[42] La chercheure ayant souligné et fait le pont avec le travail fait sur les probabilités lors de notre absence.

4.2.13.3. Présentation et analyse des conduites et des interactions didactiques au cours de la tâche de comparaison des nombres fractionnaires provenant du manuel Perspective

À la suite des activités précédentes, nous avons convenu avec l'enseignante d'effectuer un retour sur une tâche qu'elle leur avait soumise en devoir le 1er mai 2007. Dans cette tâche, les élèves devaient comparer des nombres fractionnaires, sans toutefois pouvoir recourir aux dénominateurs communs. Cette tâche nous apparaissait particulièrement pertinente, puisqu'elle permettait de confronter les élèves aux limitations de l'utilisation unique du procédé usuel et leur fournissait un nouveau point d'ancrage pour ordonner des fractions. Voici la tâche qui a ainsi été présentée aux élèves (Guay, Hamel et Lemay, 2005, p.87 nº4 e).

Place dans l'ordre demandé les fractions ou les nombres fractionnaires suivants.



Alors que dans les tâches précédentes, pour pouvoir comparer et sérier des nombres rationnels, notamment des fractions, les élèves pouvaient recourir à diverses représentations des nombres (ex. : a) 5/10, 5,5/10, 6/10 → 50/100, 55/100, 60/100; b) 3/8, 1/3 → 3/8, 3/9), dans la tâche reproduite ci-dessus, la différence entre les numérateurs et les dénominateurs est constante et il s'agit de considérer la partie manquante pour compléter l'entier. Cette dernière tâche a mobilisé l'attention de l'enseignante et des chercheures qui ont jugé important d'effectuer un retour collectif, prenant en compte le fait que plusieurs élèves n'avaient pas réalisé cette tâche. Ce retour, comme le montrent les épisodes suivants, a permis de retracer l'évolution des conduites des élèves, évolution résultant d'une interprétation de plus en plus raffinée du sens partie-tout des fractions.

Épisode 1 : observation d'une régularité

ECH	Est-ce que c'était facile de les mettre en ordre?
[Devant le mutisme des élèves, l'enseignante et les chercheures constatent que la majorité des élèves n'a pas effectué cette tâche]	
ECH	Regardez les nombres qui sont devant vous et vous allez être capables de faire tout de suite cette tâche.
GAEL	C'est quasiment toute...y a un chiffre de différent à la place que ça fasse un entier, c'est comme mettons 60/61, il manque toujours un chiffre pour arriver à l'entier

ECH	Donc c'est comme si on avait 9/10. Ce qu'on voit quand on compare ces nombres entre eux c'est qu'il manque toujours une partie …
GAEL	En réalité ce serait comme genre ¾.
ECH	Justement, entre ¾ et 9/10 ou ceux de l'exercice, comment fais-tu pour les mettre en ordre; tu avais remarqué qu'il leur manquait toujours une partie pour compléter l'entier.
GAEL	Ben ça fait toutes des ¾.
RÉJEAN	Ou ben, ça peut être aussi des 2/3!
SAMUEL	Non! Attends!

D'entrée de jeu, se référant au peu d'investissement des élèves dans cette tâche, l'étudiante-chercheure les invite à bien regarder les nombres, cette invitation permettant de faire le pont entre cette activité et les activités précédentes. Comme le montre avec beaucoup de pertinence Gael, dans l'extrait précédent, si nous portons à l'attention des élèves les nombres qui composent les fractions et les relations entre les nombres, les élèves peuvent exploiter ces connaissances à bon escient dans diverses situations, dans ce cas, en tant qu'entrée permettant de choisir la démarche la plus économique[43]. Ces interventions ne sont habituellement pas celles qui sont privilégiées auprès des élèves en difficultés d'apprentissage, la pratique courante étant de se limiter à une seule démarche générale, afin de ne pas «les mélanger[44]».

Bien que ce regard sur les numérateurs et les dénominateurs des fractions soit bien amorcé, la prise en compte de la différence entre le numérateur et le dénominateur, de la partie qu'il faut ajouter à la fraction pour composer le tout, l'entier, ne sera pas tâche facile pour les élèves. Dans l'extrait suivant, nous voyons que l'appréciation de la fraction, selon le sens partie-tout, a laissé place à quelques méprises; par exemple, s'appuyant uniquement sur le dénominateur (nombre de parties qui composent le tout), sans se préoccuper du numérateur, Samuel et Réjean en concluent que « plus le dénominateur est grand, plus la fraction est petite. »

Épisode 2 : Considération unique du dénominateur dans la compréhension de la partie qu'il faut ajouter pour compléter le tout

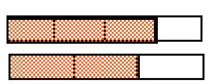
CH	On va en prendre 2 fractions [écrit au tableau : 5 123/124 et 5 97/98]. Comment sait-on laquelle est la plus grande? Dans les deux cas, il manque une partie. Quelle est la

[43] Comme ce fut aussi le cas pour l'observation des numérateurs dans l'activité précédente.
[44] Pour reprendre les propos de l'enseignante qui, dans les situations précédentes de multiplication de fractions (22/02/2007), était très réticente à la recherche préalable d'une fraction équivalente afin de donner accès au sens de l'opération, trouvant qu' « il était plus simple de retenir une seule façon de faire », notamment, la multiplication des numérateurs et des dénominateurs.

	partie, la fraction qui manque pour compléter l'entier ?
SAMUEL	J'pas sûr que c'est ça. On parle de la façon de trouver laquelle est la plus grande?
ECH	Oui.
SAMUEL	Ben c'est facile! Tu prends celui qui a le moins de chiffres, celui en bas de la fraction (le dénominateur) donc les parties sont plus grosses dans 97/98, c'est qu'il y a 97 parties sur 98, c'est quasiment tout le chiffre de l'affaire.
CH	Vous dites que ceci (5 97/98) est plus grand que cela (5 123/124) ?
ÉLÈVES	Oui.
CH	Ah bon, vous ne regardez pas de la même façon que moi.
RÉJEAN	Ben c'est juste que les pointes sont …
GAEL	il y a plus de …
CH	Quel est le nombre le plus grand dans les deux?
SAMUEL	Pas 124 parce que 98 les morceaux sont plus gros.
CH	Donc il en manque un morceau sur 98, est-ce qu'il manque un plus gros morceau-là qu'un morceau sur 124?
MARCEL	Oui!
RÉJEAN	Oui, mais c'est juste que lui il en a mangé plus, il lui reste juste un petit bout à manger.
GAEL	Ah non! Moi je dis que c'est 124.

La comparaison des deux nombres éveille leur premier contact avec les fractions (pointes, morceaux, relation dénominateur/grandeur des pointes de pizza). Ainsi, le premier sens, partie-tout, sert d'appui dans l'interprétation de la fraction sans être conjugué avec l'observation initiale de Gael qui est de porter une attention à la partie manquante pour compléter l'entier. Cette difficulté est aussi présente chez les élèves les plus forts, notamment, chez Samuel, ce qui amène la chercheure, dans la partie suivante, à proposer l'examen de fractions pouvant être aisément illustrées.

3e épisode : Prise en compte du numérateur et du dénominateur de la fraction dans l'évaluation manquante pour compléter le tout.

CH	Peut-être qu'on peut prendre un exemple plus simple. Si moi je vous dis 2/3 et ¾, vous me dites quelle est la fraction plus grande?
RÉMI	2/3
CH	2/3? Dans les deux cas est-ce que vous êtes d'accord qu'il manque une partie? Je sais pas mais moi si on m'offre quelque chose…le plus grand c'est trois quarts, il manque 1 quart et l'autre 1 tiers. 
ECH	Donc il en manque moins pour arriver à 4/4.
CH	S'il vous manque juste une partie sur 125 ou une partie sur 95, dans laquelle des deux il vous en manque moins?
MARCEL	125.
CH	Oui une sur 125, parce que c'est plus petit.
ENS	moi, j'aime mieux que vous ratiez une question sur 10 que vous ratiez une question sur 2.
CH	Ben voilà! On est d'accord?
ENS	Ou une question sur 100 c'est encore mieux!

RÉJEAN	Mais t'aimes pas ça qu'on ait 1%.
ENS	Non non, j'aime mieux que tu aies une demie dans ce cas-là que 1 sur 100.
RÉJEAN	Ben là je passe toujours pas!
CH	Ben oui (rires) ! Est-ce que ça va ou pas?
ALEX	Oui, ça va!
CH	Sûr? S'il y a plus de parties, ça veut dire que chacune des parties est…
HÉLÈNE	Plus petite.
CH	Plus petite. Donc ça veut dire que si dans les deux cas il manque une partie. Quand les parties sont plus petites, il en manque …
ÉLÈVES	Moins.

De prime abord, les interventions de la chercheure sont pour le moins étonnantes, dans la mesure où, dans cette recherche, on a valorisé le recours à des situations et à des interactions didactiques qui invitent les élèves à prendre la responsabilité d'une révision de leurs conceptions et des procédés qu'ils mettent en œuvre. Il aurait été important que la chercheure invite les élèves à effectuer des représentations des fractions 2/3 et ¾ et à expliciter les relations entre ces fractions, de manière à pouvoir par la suite réviser les comparaisons qu'ils avaient effectuées précédemment. Nous aurons toutefois l'occasion, dans des tâches subséquentes, de mieux apprécier les effets de ces mises en contexte et de ces questionnements.

4.2.13.4. Présentation et analyse des conduites des élèves et des interactions didactiques lors de la tâche visant à donner sens à la définition des rationnels

À la suite des activités précédentes, les élèves ont été amenés à investiguer la définition de nombres rationnels proposée par de Champlain, Mathieu, Patenaude et Tessier (1996) et utilisée dans le glossaire du curriculum (MELS, 2005, p.97) :

> «***Un nombre rationnel** est un nombre obtenu à partir du quotient de a et b où a et b sont des nombres entiers et b est différent de 0. **Une fraction** est un nombre rationnel exprimé sous la forme a/b où a et b sont des nombres entiers et b est différent de 0. Une fraction irréductible est une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont relativement premiers entre eux.*»

Ensuite, ils étaient invités à se prononcer sur certaines affirmations : Comment peut-on affirmer que : i) 1,0865/0,0000041 est un nombre rationnel?; ii) 12,51% est un nombre rationnel?; iii) 12,51%/3,004% est un nombre rationnel?...)

Nous avons vu que différents aspects de cette définition ont été abordés par les élèves dans les situations précédentes. La tâche actuelle représentait le noyau de notre séquence. Elle avait été construite à l'origine grâce au processus d'acculturation de l'étudiante-chercheure qui s'était aperçue que les élèves ne pouvaient donner sens à l'expression « nombre rationnel ». En concertation, l'enseignante, la chercheure et l'étudiante-chercheure ont jugé qu'il s'agissait aussi d'une bonne opportunité permettant de mieux distinguer les nombres naturels, les nombres entiers relatifs, les nombres rationnels décimaux et non décimaux, les pourcentages. L'accès à la compréhension et à l'exploitation de cette définition nous semblait favoriser les chances que les élèves construisent des rapports adéquats à cet objet du savoir mathématique. Les conduites qui suivent exposent bien comment l'entrée dans cette tâche s'est avérée ardue, mais témoignent fort éloquemment d'une évolution indéniable des connaissances.

Lors de la première lecture de l'énoncé, les élèves rencontrent plusieurs difficultés. D'une part, le manque de vocabulaire accroît leur incompréhension. C'est pourquoi, en grand groupe, nous revenons sur des termes précis (quotient, entier, etc.), répondant ainsi à leur demande. D'autre part, ces élèves ne sont que très peu fréquemment confrontés à un travail conséquent sur les définitions. Ils ont plutôt comme habitude de transcrire des définitions -simplifiées par l'enseignante- dans leur cahier de notes. Ces pratiques semblent témoigner d'adaptations tenant compte des troubles d'apprentissage de plusieurs élèves de la classe (par exemple, dyslexie). Cependant, tel qu'on pourra le constater dans les passages qui suivent, l'enseignante n'est pas réfractaire à cette pratique, elle va jusqu'à lui octroyer un statut institutionnel au regard du développement des compétences exigées par le Ministère de l'éducation.

ALEX	Effectue une lecture à haute voix de la définition [plusieurs élèves semblent déroutés]
ECH	On va reprendre
ENS	*[s'adressant à l'étudiante-chercheure] peut-être qu'individuellement ou en équipe de deux on pourrait leur laisser 2-3 minutes pour qu'ils essaient de la comprendre avant même de la regarder?*
CH	*oui oui!*
ALEX	*Mais c'est quoi un quotient?*
MARCEL	*Une division*
CH	*C'est le résultat de l'opération de la division : le quotient de 5 divisé par 4 peut être exprimé par un nombre rationnel, par exemple : 1 ¼ , 5/4*
ENS :	*Si quelqu'un peut m'expliquer la définition, je lui donne un bonus sur la compétence 3 en langage mathématique*
CH	*Mettez-vous des notes, des mots à côté et on reviendra sur vos notes après*
SAMUEL	*Je ne comprends pas cette feuille-là*
CH	*il n'est pas réveillé ce matin?*

ENS	*Non, c'est plus le langage mathématique, pour certains c'est plus difficile et pour d'autres plus facile.*

Les remarques de la chercheure et de l'enseignante annoncent ce qui sera le reflet de l'activité. Dès le départ et ce, tout au long de l'activité, des changements très marqués de position chez les élèves ressortent : des élèves généralement «faibles» prennent la parole et font avancer le temps didactique, alors que des élèves généralement «forts» et participatifs se font plus discrets. Une telle activité qui vise à exploiter une définition est généralement absente des pratiques en classe. Cette activité permet enfin d'évoquer, voire peut-être d'institutionnaliser ou, tout au moins, de faire revivre les connaissances impliquées dans les situations précédentes.

Nous rendons compte ci-dessous de quelques interactions entre les élèves de quelques équipes et des commentaires de l'enseignante précédant le retour collectif sur le travail effectué par les différentes équipes. Nous traiterons dans un premier temps du travail sur la définition et, dans un deuxième temps, des questions qui l'accompagnaient.

Voici d'abord deux extraits d'une discussion entre Rémi et l'étudiante-chercheure, ainsi qu'entre Gael et l'enseignante. Dans ces exemples, nous remarquons la difficulté des élèves à considérer simultanément les deux conditions associées à la définition d'une fraction, de même que la difficulté que pose la terminologie des ensembles de nombres.

Échange 1 : ECH et RÉMI

ECH	Donc on dit a divisé par b, c'est égal à.
RÉMI	Un nombre rationnel.
ECH	Oui, que tu peux écrire.
RÉMI	a sur b.
ECH	Sous cette forme-là exactement. Et ça nous donnerait…
RÉMI	Une fraction.
ECH	Oui, mais là on dit attention : a et b sont des nombres entiers et b différent de zéro.
RÉMI	b est différent de 0, mais c'est 0,5.
ECH	Il est vrai que ça serait différent de zéro, mais on voit que ça ne pourrait pas tout à fait être ça parce que ça ne peut pas être un nombre décimal. Il faut que a et b soient des entiers.

Échange 2 : ECH et GAEL

GAEL	Ok ça serait genre 0,5/13.
ENS	Pas tout à fait, ça ça ne marcherait pas. Si tu regardes le reste de ta définition … où a et b

	sont des nombres entiers.
GAEL	1 sur ½.
ENS	Ça pourrait être 4, 4 c'est un entier sur -7. Ce sont des entiers les deux sont différents de 0 et c'est une division entre les deux, c'est ça la définition de rationnels.
GAEL	Ok, j'ai catché, comme un divisé en deux donne une demie.
ENS	Bravo, franchement là!

Nous poursuivrons avec les propos de Rémi expliquant fièrement à l'enseignante ce qu'il en a compris. Le traitement des questions [Comment peut-on affirmer que : i) 1,0865/0,0000041 est un nombre rationnel?; ii) 12,51% est un nombre rationnel?; iii) 12,51%/3,004% est un nombre rationnel?...] est, par ailleurs, représentatif de celui de la majorité des élèves qui ont un rapport plutôt « techniciste » dans la transformation d'un nombre décimal en entier : compter le nombre de chiffres après la virgule et le multiplier par un multiple de 10 ayant autant de zéros que de chiffres après la virgule.

Échange 3 : ENS et RÉMI

RÉMI	Un nombre peut se diviser… a par b qui est égal à une fraction qui est représentée par des entiers et b est différent de zéro.
ENS	Bien! Est-ce que tu es capable de me donner des exemples avec des nombres, de rationnels qui répondraient aux conditions de la question?
RÉMI	5 divisé par 2 qui est égal à…
ENS	5 divisé par deux, 5 et 2 sont des nombres entiers.
RÉMI	Et que b, 2 est différent de zéro … Ce nombre rationnel qui est obtenu à partir de la division comme à mettons que le 2 divisé par 5 est égal à a et b et que le a et b sont des entiers et que le b est différent de zéro.
ENS	C'est un rationnel! Est-ce que 8 divisé par 4 est un rationnel?
RÉMI	Oui.
ENS	Est-ce qu'on peut dire que 8 divisé par 4 est une fraction?
RÉMI	Oui!
ECH	[s'adressant à l'enseignante] : ne devance pas sur ce qui avait été prévu; on y reviendra.
ENS	Ils sont rendus là!
ECH	Ok (rires).
ENS	Je me permets parce qu'il s'amuse.
ECH	Bien parfait!
ENS	Là si on regarde celui-là (1,0865/0,0000041), est-ce que c'est un rationnel ?
RÉMI	Euh…
ENS	Pas présenté comme ça, est-ce qu'on peut l'arranger?
RÉMI	Oui, t'enlèves les zéros et tu tasses la virgule...
ENS	On va multiplier par un certain nombre de fois par 10.
RÉMI	1,2,3,4,5,6,7.
ENS	4 en haut et7 en bas, par combien on va multiplier?

RÉMI	7 et 7.
ENS	Là, il va falloir ajouter des zéros en haut, est-ce que ça devient deux entiers qui se divisent?
RÉMI	Oui!

Bien que dans cet extrait Rémi ne commet pas de méprises, dans les activités suivantes, nous pourrons observer que le peu de sens accordé à la transformation de la représentation occasionne quelques difficultés, ne sachant plus comment faire le décompte, multipliant par deux nombres différents le numérateur et le dénominateur.

Ayant terminé l'investigation de la définition, l'étudiante-chercheure profite de cette occasion pour faire un retour sur leur compréhension dans un contexte différent; ayant été soumis auparavant aux questions des intervenantes (vulgariser l'énoncé, donner des exemples, etc.), les élèves sont ensuite confrontés à un exemple leur permettant de reconnaître l'inclusion des nombres entiers dans l'ensemble des nombres rationnels.[45] Tel qu'amorcé par l'enseignante dans l'extrait précédent, à propos de la division de 8 par 4 (« …est-ce que 8 divisé par 4 est un rationnel, … est-ce que 8 divisé par 4 est une fraction »), il s'agit maintenant de reconnaître que les entiers sont des nombres rationnels, de le montrer par des écritures respectant la définition des nombres rationnels.

Échange 4 : retour collectif sur la définition d'un nombre rationnel pour représenter un nombre entier

ECH	Ok. On va regarder tout le monde ensemble maintenant.
CH	Est-ce que quelqu'un est capable d'écrire 3 sous la forme d'une fraction?
ENS	Oui, oui, 3/0.
ÉLÈVES	Non.
RÉMI	Ben non b doit être différent de 0.
ECH	Vous avez entendu ce qu'il a dit? Très bien Rémi! Oui, Gaudi.
GAUDI	3 c'est une entier, ça faque si on veut le mettre en nombre rationnel, il faut mettre le dénominateur qui est un entier et non un nombre à virgule ou à 0.
ENS	Oui, mais est-ce que tu es capable de nous le dire?

Plusieurs élèves proposent par la suite, des fractions dont le numérateur est 3 ou encore, des fractions représentant un entier (ex. : 3/3). Les élèves n'ont pris comme contrainte que les conditions de la définition et la présence du nombre trois, ce qui est assez éloigné du but escompté. Surmonter cet obstacle n'est pas tâche facile, la mémoire

[45] Il s'agit aussi d'une bonne occasion pour faire le lien avec la transformation difficile ou techniciste d'une fraction impropre en un nombre fractionnaire, comme le montrent, entre autres, les conduites des élèves lors de l'examen effectué le 27 mars 2007.

didactique des élèves ayant été longuement nourrie par l'unicité de l'écriture (un seul code digital) ou de la représentation d'un entier.

Afin de permettre aux élèves de comprendre que l'on cherche bien une représentation différente, une écriture différente d'un même nombre, l'enseignante oriente son questionnement en exploitant l'élément neutre de la division.

Échange 5 : poursuite des échanges sur la représentation d'un nombre entier par un rationnel

ENS	Un nombre qui ne changerait rien qui représenterait 3 ans… Trois divisé par quoi donnerait trois?
MARCEL	1
ENS	Par 1, MARCEL l'a dit. En divisant par 1 est-ce que ça change le nombre?
Élèves	Non!
ENS	Mais est-ce qu'on peut l'écrire sous cette forme-là si on en a besoin?
RÉMI et GAEL	Oui à cause que c'est différent de 0.

Ayant une histoire didactique avec ces élèves[46] plus longue et plus étoffée que celles de la chercheure et de l'étudiante-chercheure, l'enseignante est bien évidemment mieux placée qu'elles ne le sont pour permettre aux élèves d'effectuer cette transition à partir des connaissances qu'ils ont pu construire. Pour sa part, la chercheure permettra aux élèves de faire un pas important dans la généralisation de l'exemple proposée par l'enseignante.

CH	Est-ce que tous les nombres entiers, on peut les écrire sous la forme d'une fraction?
ÉLÈVES	Oui [ECH écrit 18/6 au tableau]
ÉLÈVES	Hein?
GAUDI	C'est des nombres rationnels.
ENS	Vous proposez de mettre un signe d'égalité entre 18/6 et 3?
ÉLÈVES	Oui.
ENS	3 ce n'est pas 18/6 ?
RÉMI	Ben oui c'est bon !
GAUDI	Oui, c'est égal. Supposons que 3 c'est un nombre entier, là on veut le mettre sur 6. Combien de 6 …
GAEL	Ok ouais je sais ce qu'il a fait. 3 fois 6 qui a donné 18 et 1 fois 6 égal à 6.
RÉMI et SAMUEL	Oui!
CH	Combien de 6 dans 18, c'est ça?
GAUDI	C'est ça que j'essayais d'expliquer.
CH	Est-ce que vous voyez un peu … vous avez compris pourquoi ça pris du temps de construire les rationnels dans l'histoire des maths? Là on vient de rentrer carrément dans plusieurs problèmes sur les nombres.

[46] D'ailleurs, elle a certains de ces élèves (GAB, ANTL, JESSE) depuis deux ans.

Plusieurs élèves arrivent enfin à montrer que le nombre 3 est un nombre rationnel. Les propos de Gaudi sont alors bien différents de l'explication « technique » de Gael (3x6/1x6). En effet, Gaudi déploie un raisonnement beaucoup plus général; lorsqu'il dit, par exemple, « Combien de 6… » dans 18, il prend appui sur le sens quotient de la fraction, sens qui est invoqué dans la définition du nombre rationnel. L'enseignante effectue ensuite une capsule historique sur les nombres. Celle-ci a permis de porter à l'attention des élèves le fait que la division n'aboutit pas toujours à un nombre entier. D'où la nécessité de définir un nouvel ensemble de nombres dans lequel la solution de l'équation b x ? = a, a et b étant des entiers (b non nul) a toujours une solution qui est un nombre rationnel et que l'on écrira sous la forme d'une fraction a/b. L'ajout d'autres exemples, conjugué au travail de l'enseignant, amène enfin les élèves à reconnaître la fraction comme -résultat- de la division de a par b.

ECH	Regardez, si on avait 17 divisé en 6.
NOA et RÉJEAN	Ça serait un nombre à virgule.
ECH	Oui.
ENS	Non! Moi je dis que ça ferait une fraction.
ECH	Réjean nous dit que ça donne un nombre à virgule et l'enseignante nous dit que c'est une fraction. Si vous vous servez de la définition, comment pourriez-vous écrire le résultat de 17 divisé en 6?
RÉMI	Tu pourrais l'écrire en fraction, tu pourrais mettons… 17 ça sera a et b c'est 6 qui est égal soit à une fraction, ça donnerait A sur B, il faut faire 17 sur 6, ça donnerait 17 sixièmes: C'est comme de l'algèbre !

La réflexion de Rémi est reprise par l'enseignante qui effectue un retour sur certaines pratiques d'écriture mises en place dans les activités antérieures, notamment en géométrie. Cette réaction de l'enseignante sera associée au jeu auquel se prêtaient régulièrement l'enseignante et l'étudiante-chercheure, c'est-à-dire que lorsque l'enseignante utilisait une forme d'écriture, l'étudiante-chercheure affirmait pouvoir l'écrire autrement, comme le montre l'écriture suivante, lors d'une tâche sur l'introduction à l'algèbre (chaîne d'opérations : (12 x 4 – 12) ÷ 2 … 12 x 4 – 12 / 2). Cette transformation a aussi été exploitée par l'enseignante lors de l'enseignement de la division de nombres décimaux (19/02/2007). L'épisode est entamé par un questionnement de l'étudiante-chercheure devant le commentaire d'Hélène ayant remarqué que, jusqu'à maintenant, ils ont été soumis à des fractions dont le numérateur est plus grand que le dénominateur : « *dans le fond le numérateur va être plus grand que le dénominateur* ». L'intervention de Gael profitera aux autres élèves, car la familiarité des élèves avec la fraction ½ leur permettra de se centrer sur les différentes écritures.

ECH	Est-ce que vous pouvez me donner un exemple de division dans laquelle ça donnerait une fraction où le numérateur n'est pas forcément plus grand que le dénominateur?
MARCEL	Donne-en un ENS, toi tu connais ça!
GAEL	1/2
RÉMI	1/4
ECH	Ok, mais qu'est ce que je mettrais ici? (parle de l'écriture A ÷ B).
GAEL	1 divisé par 2 (production de l'écriture 1 ÷ 2 = ½ au tableau).
ENS	Est-ce que vous êtes en train de me dire que la barre entre le 1 et le 2 équivaut à une division?
GAUDI et NOA	Ouais.
ENS	Ça me fait penser un petit peu aux formules d'aires qu'on avait vues.
ECH	Ah oui, quand on s'obstinait toi et moi, toi tu écrivais ( ) ÷ 2).
ENS	Pis toi tu utilisais une espèce de barre qui ressemble à une barre de fraction là (écriture de la barre et du 2 en-dessous).
SAMUEL	Ah oui c'est divisé.
ECH écrit au tableau (bxh) ÷ 2 et bxh/2	
ENS	Est-ce que c'est la même opération?
Plusieurs ELS	Ouais.
GAUDI	Oui, c'est la même opération, c'est juste que tu as enlevé la division pour la mettre en une barre.
RÉMI	C'est une autre façon de trouver, de faire une division.
ENS	Oui c'est une autre façon de l'écrire.
MARCEL	Mais il y en a d'autres, l'angle droit comme, il me semble dans les devoirs (fait référence à une représentation de l'algorithme de division).
ENS	Oui aussi.

Afin de clore cette partie, la chercheure souhaitant permettre l'ancrage de la définition à sa dénomination[47], tout en mettant davantage l'accent sur le sens rapport, propose de s'attarder au terme rationnel.

CH	Je voulais juste vérifier avec vous, pourquoi est-ce qu'on devrait utiliser le mot rationnel d'après vous?

---

[47] Ces deux aspects faisant référence à des difficultés précédentes des élèves :
1) Contrairement à ce qu'on pourrait penser, bien que Rémi ait très bien travaillé sur la définition, l'association à la terminologie ne va pas de soi :
ENS : Est-ce que tu es capable de me donner un exemple de rationnel qui marcherait?
REMI : C'est quoi un rationnel?
ENS : Ben c'est ce que tu viens de me dire
REMI : ah! (rires)
2) De plus, nous avons vu la prégnance du sens partie-tout qui cause parfois des limitations importantes!

SAMUEL	Parce que c'est un ratio.
CH	Ratio, est-ce que ça vous dit quelque chose?
MARCEL	Une partie.
CH	C'est un rapport.
ENS	Un ratio ça pourrait être, par exemple, ici à l'école il y a en général un prof pour 17 élèves, ça c'est un ratio. Présentement on est 3 profs pour 15 élèves. Ça c'est un ratio.
RÉMI	Les nombres à virgules.
ENS	Et quand on dit pour, on peut le représenter sous la forme d'une fraction, ça voudrait dire que si on séparait des groupes on aurait combien d'élèves pour combien de profs.
Plusieurs	5 élèves pour 1 prof.
ENS	Ou 1 prof pour 5 élèves pour respecter l'ordre que j'avais dit.
MARCEL	C'est l'affaire des taux hein ça?
ENS	Ça ressemble aux taux, c'est des ratios.
ECH	Ou 5mm pour une feuille (écrit au tableau 5/1).
SAMUEL	Ah ouin!
ECH	Ou 5 mm pour 2 feuilles (écrit 5/2).
CH	Ou 3 filles pour 8 garçons dans la classe.
ENS	Ou 3 filles sur 8 élèves.

Dans l'extrait précédent, le recours au terme « *pour* » plutôt qu'au terme « *sur* », utilisé jusqu'à maintenant, de même que le recours aux relations entre le nombre d'élèves associés à un enseignant et l'épaisseur d'une pile de feuilles et le nombre de feuilles, permettent aux élèves d'attribuer encore plus de sens aux fractions équivalentes. En effet, à aucun moment les élèves ne font mention de procédés. Alors que jusqu'à maintenant, les fractions avaient été traitées en tant que « surface équivalente », l'exploitation du sens « rapport » permet de les considérer en tant que « proportion ». De plus, la considération de la relation entre deux parties offre une autre interprétation du dénominateur et amène les intervenants et les élèves à jouer avec ces relations : 5 élèves pour 1 prof (5/1) ou 1 prof pour 5 élèves (1/5), 3 filles pour 8 garçons (3/8) ou 3 filles pour 8 élèves.

En plus des différents nombres ayant fait l'objet d'une analyse (17/6; ½;1/4; 3 = 18/6; 3/8; 3/15, 1/5; 5/1;5/2; 1/17), divers nombres ont été traités durant le retour collectif sur cette activité. Nous ferons un bref rappel des contextes et des nombres impliqués n'ayant pas fait l'objet d'une analyse précise. Il y a eu notamment tout un travail sur les nombres 0,125 et 0,250 et leurs notations fractionnaires, faisant ainsi référence à une activité réalisée précédemment (30 avril 2007). D'autre part, le retour a permis de questionner les élèves quant à l'existence de nombres non rationnels; quelques élèves ont alors fait référence au nombre π. Cette discussion a permis de faire le lien avec une lecture effectuée dans leur manuel, π étant traité temporairement sous une forme fractionnaire tel qu'en témoigne cet extrait (Guay, Hamel et Lemay, 2005, p. 242) :

> « *Déjà vers l'an 200 av. J.-C. en Babylonie et en Égypte, on s'intéressait au problème suivant : Combien de fois le diamètre d'un cercle « entre-t-il » dans la ligne courbe représentant ce cercle? P.243 Différents personnages sont accompagnés de leurs propos 1) Nous, en Babylonie, on considérait que le diamètre d'un cercle entrait 3 fois et 1/8 dans la ligne courbe formant le cercle; 2) Selon nous, en Égypte, c'était plutôt 3 fois et 13/81; 3) En Inde, nous pensions que c'était 3 fois et 177/1250; 4) Pour nous, en Chine, c'était plutôt 3 16/113*) »

Les représentations ont d'ailleurs fait réagir quelques étudiants : a) Gaudi : « *Il ne se divise pas en fraction, c'est pas un entier* » […]; b) ENS : « *Ben non ce n'est pas un entier ni même un rationnel* »; c) Rémi : « *ils n'ont pas encore trouvé le reste de la formule »; d) Samuel : « il n'a pas de fin »*. Enfin, après consultation entre l'enseignante, l'étudiante-chercheure et la chercheure, nous avons jugé opportun de proposer le nombre 7/0,05 et de demander aux élèves de vérifier s'il s'agit bien d'un nombre rationnel. Ce choix nous est apparu pertinent, prenant en considération le fait que jusqu'à maintenant les nombres proposés aux élèves, dans ce type de tâches, ne comportaient que des nombres entiers « aux dénominateurs ». Étant venus à la conclusion que l'on pouvait l'écrire sous la forme 700/5, les élèves ont aisément conclu que c'était bel et bien un nombre rationnel.

Bien que ce travail sur la définition paraisse, au départ, hors d'atteinte pour plusieurs élèves (notamment, pour les élèves ayant des troubles du langage), sa contribution ne fait nul doute. Ce travail a, entre autres, permis aux élèves, de rassembler diverses connaissances (taux, rapport, ratio, quotient, etc.) et représentations (÷, « division angle droit », « barre », etc.) sur les nombres rationnels et, par le fait même, de mieux comprendre les rationnels tant sur leur aspect constitutif et historique (absence de résultat entier pour certaines divisions) que sur leur relation avec les autres nombres (ensemble des nombres naturels, des entiers relatifs, des nombres rationnels décimaux et non décimaux.). Les propos de l'enseignante pendant la récréation évoquent particulièrement bien l'engagement des élèves dans cette tâche -ces élèves poursuivant leur travail pendant la récréation- et le changement de position (hétérogénéité péridiadactique[48], Sarrazy, 2002) des élèves « forts » et « faibles » :

ENS	Aye Geneviève.
ECH	C'est l'fun hein?
ENS	Super!
CH	Moi, je vous dis qu'ils pourraient faire mieux que bien des élèves du régulier. On vient de faire des maths aujourd'hui.
ENS	La définition c'est intéressant et moi de voir RÉMI là de même.
ECH	Ben lui ça le raccroche, c'est bizarre.
ENS	C'est fou.
CH	C'est incroyable!
ECH	Rémi ça lui a vraiment parlé, quand je suis allée le voir , j'étais vraiment impressionnée! Bravo Rémi!
RÉMI	Je sais pas ce que j'ai eu.
ENS	Rémi, tu m'as vraiment impressionnée.
RÉMI	Ah moi aussi je m'impressionne moi-même.
ENS	Tu t'en viens bon, là faudrait pas, t'es pas supposé être bon.
ECH	C'est impressionnant.
ENS	Ils m'impressionnent vraiment beaucoup, lui et GAEL aujourd'hui sont vraiment réveillés, GAUDI aussi. Il y a NOA qui fait comme un petit boost en début de période. C'est drôle que les supposément plus brillants sont pas ceux qui parlent le plus.
ECH	non, c'est pas ceux qui utilisent les meilleurs arguments …
ENS	Non, parce qu'ils sont tellement habitués que ce soit facile peut-être qu'ils n'apprennent pas.

Les commentaires de l'enseignante reflètent parfaitement l'idée de «détransposition-retransposition» (Antibi et Brousseau, 2000), de nouveauté faisant en sorte que les élèves ne perçoivent plus le côté « menaçant » et redondant de la tâche, mais perçoivent plutôt la tâche comme « *une activité où l'élève prend du plaisir -ce qui n'exclut pas l'effort, mais le soutient-, une activité qui permet un fonctionnement de la pensée non contraint par des règles extérieures vécues par l'élève comme artificielles et arbitraires*» (Bkouche, Chariot et Rouche, 1991). Les élèves nous arrêtent et veulent trouver par eux-mêmes le raisonnement de leurs collègues. Des élèves, tels que Hélène et Rémi, osent désormais prendre la parole, à un point tel qu'ils se surprennent eux-mêmes! Et, ils n'auront pas manqué de surprendre l'enseignante qui remarque : « *C'est drôle que les supposément plus brillants sont pas ceux qui parlent le plus. […] parce qu'ils sont tellement habitués que ce soit facile, peut-être qu'ils n'apprennent pas* ». Les propos de l'enseignante ne font que confirmer une fois de plus la pertinence de la théorie sur les

[48] Il s'agit de l' « *ensemble des caractéristiques liées aux acquisitions disciplinaires comme par exemple le " niveau scolaire des élèves en mathématiques* »

formes d'hétérogénéité développée par Sarrazy (2002, théorie inspirée des travaux de Brousseau, 1997), théorie mettant de l'avant le caractère dynamique et régulé de l'hétérogénéité didactique. En nous référant aux études effectuées par Sarrazy, nous pouvons constater que la modification *« des exigences contractuelles »* de cette activité a donné lieu à des « *phénomènes de déplacement et de réduction des hétérogénéités péri-didactiques »* (Sarrazy, 2002, p.7), l'enseignante ne pouvant échapper au dilemme de réguler ses activités afin de faire progresser le plus grand nombre d'élèves possible.

Dans la suite de cette activité, les élèves sont amenés à produire des représentations de différents nombres, en s'appuyant sur la définition d'un nombre rationnel. Les nombres présentés sont les suivants : i) 1,0865/0,0000041 est un nombre rationnel?; ii) 12,51% est un nombre rationnel?; iii) 12,51%/3,004% est un nombre rationnel? (nombres utilisés par la chercheure dans un cours en didactique des mathématiques). Nous présenterons quelques interactions entre les élèves lors de la réalisation de cette activité; nous faisons état également des interactions lors du retour collectif sur une des représentations associées au nombre 12,51% (ii)), le temps dont nous disposions ne nous ayant pas permis d'examiner les autres représentations. Ce choix repose aussi sur le fait que les élèves avaient bien réussi à trouver une autre représentation du nombre 1,0865/0,0000041 (item i)), les difficultés étant apparues lors du traitement du nombre 12,51%, les élèves étant peu habitués à cette écriture n'ont pu recourir directement aux « techniques » apprises. La présentation de la tâche illustre bien la complicité qui s'est construite entre les intervenantes :

> *« On vous invite à faire, vous pouvez le faire en équipes, la transformation des nombres qui apparaissent sur votre feuille* [ECH] *selon la définition* [ENS] *pour que ces nombres soient bien reconnus comme des nombres rationnels* [CH] »

Les échanges qui suivent font suite aux nombreuses interrogations de Rémi face à la démarche proposée par Gael. Rémi ne comprend pas le déplacement de la virgule proposé par Gael pour traiter le numérateur et le dénominateur du nombre 1,0865/0,0000041 afin de montrer que ce nombre est bien un nombre rationnel. Nous reproduisons les premières interactions entre ces élèves :

RÉMI	[s'adressant à GAEL] Comment tu fais? Pourquoi? Normalement quand on tasse la virgule…ça va donner 865
[…]	
RÉMI	Mais pourquoi tout à l'heure, on a compté qu'à partir d'ici, parce qu'ici c'est un 0 ?
GAEL	Rémi regarde tu pars de là, 1,2,3,4,5,6,7, tu comptes en arrière du 1 ici , comme si la virgule était là …
RÉMI	Pourquoi?
GAEL	Parce que ça enlève la virgule!
RÉMI	On part tu de là ou de là?
GAEL	Fuut que tu tasses la virgule.
RÉMI	Par là ?
GAEL	C'est ça.
[…]	
GAEL	Oui, mais parce qu'ici le chiffre est là, t'as besoin de d'autres chiffres en haut, comme ici il y en a 1,2,3,4.., Si ici il y en a 7, il faut qu'il y en ait 7 en haut…Parce qu'il y en a 4, tu ajoutes 3 zéros en arrière.

Devant les difficultés rencontrées par Rémi, difficultés liées au sens du déplacement de la virgule, à savoir «ce qui devait être compté » et le fait que le numérateur et le dénominateur devaient être multipliés par le même nombre afin de conserver le rapport, Gael lui propose d'examiner le nombre 1/0,005 :

GAEL	Mettons ce chiffre-là…[1/0,005].
ECH	Oui t'es bon, bon exemple.
GAEL	Ce chiffre-là, combien de fois qu'il faut que tu tasses la virgule?
RÉMI	3
GAEL	Si tu tasses de 3, c'est égal à 5.
RÉMI	Oui.
GAEL	Et comme tu as tassé de 3 en bas, en haut faut que tu fasses la même affaire. Faque ici c'est comme euh…
RÉMI	1000 ?
GAEL	Oui, 1000 oui donc ici c'est fois 1000 hein?
RÉMI	Oui.
GAEL	Ici combien de fois faut que tu… Ici le 1 va être égal à genre 1,0, combien de fois il faut que tu tasses la virgule?
RÉMI	3 fois.
GAEL	3 fois, 1 tu tasses d'un zéro, 2,3.

Les interactions précédentes, comme le souligne l'étudiante-chercheure, montrent une acculturation de l'élève Gael aux pratiques d'enseignement. Pour permettre à Rémi de comprendre que toute transformation effectuée sur le dénominateur doit également être appliquée au numérateur et vice-versa, Gael jugeait aussi important que Rémi comprenne que pour effectuer la même opération sur le numérateur que celle qui a été effectuée sur le dénominateur, il peut être nécessaire d'ajouter des 0 à l'écriture de ce nombre. Le choix du nombre 1/0,005 pour étayer une telle proposition est particulièrement judicieux. Comme le montre l'extrait suivant, Gael fait appel aux procédés de transformation des écritures qui mettent en jeu des connaissances sur les rapports entre les déplacements de la virgule et la multiplication, le recours à ces procédés permettant de conserver le rapport entre 1,0865 et 0,0000041, ce que Rémi réussit à exploiter.

RÉMI	Faque ici, tu tasses de 7…le 1 ici [inaudible].
GAEL	À cause que le 1 tu peux pas l'effacer.
RÉMI	Parce qu'ici, il y a des 0 faque tu l'écris pas mais le 1 ici tu l'écris.
GAEL	Écoute.
RÉMI	Faque ici, 1,2,3,4,5,6,7 et ici comme à la fin il n'y avait pas de nombre, il y a juste 2 zéros, tu écris tout le chiffre.
GAEL	C'est ça, à cause que le 1…
RÉMI	Non, mais c'est ça.
GAEL	Oui, à cause que le 1 est important, comme un 0, en réalité le 0 n'est pas un chiffre.
RÉMI	Faque c'est 1086500, comme ça?
GAEL	Oui.

Il importe de mentionner que nous n'avons pu, comme il avait été prévu initialement, effectuer un retour collectif sur les conduites des élèves dans le traitement des nombres : 1,0865/0,0000041; 12,51%; 12,51%/3,004%. Nous pourrons, à la situation suivante, que plusieurs élèves ont pris appui sur ces représentations pour construire une tâche de sériation de nombres rationnels.

4.2.13.5. Présentation et analyse des conduites des élèves et des interactions didactiques lors de la tâche portant sur la construction d'une question d'examen dans laquelle les élèves doivent trouver et ordonner cinq rationnels

Dans cette dernière tâche, fruit d'une concertation entre l'enseignante et les chercheures, les élèves ont été invités, s'ils le souhaitaient, à former des équipes, à proposer 5 nombres rationnels à ordonner et à effectuer cette sériation. Ils avaient aussi comme mandat de rendre la tâche complexe; il leur était dit de trouver : « 5 nombres rationnels assez embêtants à ordonner ». Pour ce faire, ils pouvaient utiliser diverses formes d'écriture en autant qu'ils puissent montrer qu'il s'agissait bien de nombres rationnels.

Avant d'exposer certains raisonnements d'élèves, nous rendons compte des productions des différentes équipes. Nous avons jugé pertinent d'inclure aussi dans ce tableau notre appréciation de ces productions selon l'ordre suivant : peu satisfaisant, moyennement satisfaisant, satisfaisant, fort satisfaisant et excellent. Soulignons que la présentation de la tâche a laissé place à différentes interprétations, tant chez les élèves que chez l'enseignante. Cela permet de mieux comprendre les propositions des différentes équipes, certaines ayant exploité la complexité dans la transformation des nombres en nombres rationnels et d'autres, étant davantage orientées par les connaissances devant être mises en jeu pour ordonner les nombres rationnels. Ainsi, nous porterons attention à la démarche des élèves permettant d'obtenir de tels résultats, de même qu'à l'imprégnation des tâches précédentes et à l'influence des interventions de l'enseignante, de l'étudiante-chercheure et de la chercheure. Avant d'entamer cette analyse, il importe de mentionner qu'Alex et Bertrand étaient absents lors de cette situation.

Tableau XLII: résultats obtenus par les différentes équipes dans la création et la sériation de 5 nombres rationnels

ÉQUIPES	RATIONNELS CHOISIS ET CORRIGÉ	APPRÉCIATION
Martin et Prince	1) $14\,\frac{832{,}1}{1340{,}260}$ = 12481500/1340260 = 1248150/134026 [calculs : (832,1 x 14 + 832,1) x 1000 / (1340,260 x 1000)] 2) 3 15,151/51,151 = 168604/51151 [calculs : 51,151 x 3 + 15,151; 168,604 x 1000 /51,151 x 1000] 3) 26,26% = 2626/10000 4) 1260,56% = 126056/10000 5) 5 1800,1/1000,669 = 10800600/1000669 [calculs : 1800,1 x 5= 10800,600; 100,669 x 1000= 100669]	Satisfaisant
Rébecca et Réjean	1) 0,5/2 2) 2/7 3) 33333333/99999999 4) 6/12 5) 55,5%	Excellent
Gael et Rémi	1) 0,420%/32% = 420/32000 = 42/3200 ÷ 2 = 21/1600 ≈ 20/1600 = 10/800 2) 24463219/24563219 = 100000/24563219 = 1- 1/245,63214 3) 24563218/24563219 = 1- 1/24563219 4) 5 ½ = 11/2 5) 5 7/12 = 67/12	Excellent
Noa et Samuel	1) 0,0125 = 1/80 2) 1634%/4905% = 1/3 – 1/4905 3) 33 1/3 % = 1/3 4) $\frac{472693847263504 9821{,}429371625534907}{4726938472635049821{,}429371626534907}$ 5) π/3	Excellent

Guy et Gaudi	1) 0,000000001%/0,56% = 0,00000000001/0,0056 (x100000000000/100000000000) = 1/560000000…. 2) 0,56% = 0,56/100= 0,56÷100= 0,0056 3) 2,3/560,1…x10…23/5601 4) 341,0917%/56,00001%...3410917/560001 5) 2/5,600000681 ….x 10 000…20 000 0000/560000681 6) 800000/56,00212…80000000000/5600212	Excellent
David	Produit à la suite des interventions de l'enseignante dont nous rendrons compte lors de l'examen des productions. *Plus petit que 10/100 :1/101; 0,092* *Égal à 10/100 : 100/1000; 10%; 0,10* *Plus grand que 10/100 :* 10,1/100; 114/1000; 11%	Moyennement satisfaisant
Hélène	1) 37,2 % 2) 4/10 3) 170 °/360° 4) 0,49 5) 11/20	Fort satisfaisant
Anne	1) 6/8…x5 = 30/40 …÷15/20 2) 16/20 = 3) 3/5…x 8 = 24/20 4) 4/2 …x10 40/20 5) 2,01 = 21/10	Moyennement satisfaisant
Marcel	1) 99876547/99876548 (en utilisant la p.87 du manuel Perspective comme modèle) 2) 200% (écriture de CH : 200% 200/100 = 2) 3) 100/99 (Écriture de ??? >1) 4) 50,5% 5) 5/11	Peu satisfaisant

Martin et Prince ne fournissent pas de piste quant à la sériation de leurs nombres, pour laquelle ils commettent une erreur. Nous effectuons cette tâche afin d'évaluer le niveau de complexité des nombres proposés. Le nombre le plus petit est 26,26%; ce nombre, comme le montrent ces élèves est jugé équivalent à 2626 /10000; ce nombre est le seul nombre inférieur à 1. Vient ensuite le nombre 94345143/94335143 qui été produit en ne modifiant qu'un seul chiffre; ce nombre peut ainsi être facilement comparé à 1. Tel qu'ils le mentionnent : « *il est un peu plus grand que 1* »; le nombre fractionnaire associé à ce nombre est alors 1 10000/94335143. Les troisième et quatrième nombres de la série ordonnée sont respectivement 3 15,151/51,151, qui est environ 3 1/3, puis 5 1800,1/1000,669, qui se situe près de 7, en négligeant les parties décimales et en arrondissant 800/1000 à 1. Le nombre 1260,56% qu'ils ont aussi présenté sous la forme 126056/10000, soit 12,6056, occupe la position suivante dans la série ordonnée. Enfin, le plus grand nombre est 14 832,1/1340,260. En somme, ordonner les nombres choisis n'aurait pas posé problème, mais aurait obligé les élèves à s'attarder à la relation entre le numérateur et le dénominateur, car la recherche du dénominateur commun devient beaucoup trop lourde. Cette tâche aurait, par ailleurs, nécessité le recours à des connaissances permettant le passage d'un nombre fractionnaire à une fraction impropre, ce qui a parfois posé problème à ces élèves qui, dans le cas de 14 832,1/1340,260 ont multiplié le numérateur par la partie entière puis additionné à nouveau le numérateur. En revanche, les représentations fractionnaires des écritures initiales ont toujours été effectuées correctement, que les nombres de chiffres après la virgule dans les nombres figurant aux numérateurs et aux dénominateurs soient ou non égaux. Ils ont cependant tenu à conserver le zéro à la position des millièmes dans 1340,260.

Si l'on porte attention à la production de Rébecca et Réjean, nous pouvons penser que leurs choix de nombres ont été guidés par des fractions repères familières: a) les nombres 55,5% et 6/12 sont des nombres près de la fraction ½; b) les nombres 33333333/99999999 et 2/7 sont choisis en référence à la fraction 1/3; c) le nombre 0,5/2 est enfin une représentation de la fraction ¼. Ces élèves commentent ainsi leurs choix des fractions repères : « si des fractions ont un numérateur identique, plus le dénominateur est grand, plus la fraction est petite. »

L'équipe composée des élèves Gael et Rémi a grandement bénéficié des activités effectuées au cours de cette période. Ils ont exploité la présentation issue du manuel (p.87 no. 4), en comparant des fractions impropres sous forme de nombres fractionnaires soit 5 ½ [11/12] et 5 7/12 [67/12]. Le choix des nombres ne rend cependant pas la tâche très ardue dans la mesure où les relations entre les numérateurs et les dénominateurs des fractions choisies sont facilement comparables, égale à une demie ou juste un peu plus grande qu'une demie. Ces élèves ont ensuite comparé les fractions 24563218/24563219 et 24463219/24563219, en regardant ce qu'il manque à chacune d'elles pour compléter l'entier, démarche que nous avions exploitée lors de la comparaison des fractions 2/3 et ¾. De plus, dans ce cas, ils ont intégré une écriture intermédiaire suffisante [1-1/245,63214 et 1- 1/24563219] pour les ordonner aisément. Cette démarche contextualise bien les propos précédents de l'enseignante : *« Mais est-ce qu'on peut l'écrire sous cette forme-là si on en a besoin?* » Le dernier nombre, 0,420%/32%, étant beaucoup plus petit qu'un entier n'a pas nécessité de calcul précis pour l'ordonner. Son écriture est en lien avec l'écriture 12,51%/3,004% qui a été proposée à la tâche précédente. Bien que celle-ci leur avait causé bien des soucis, ils sont parvenus à représenter par une fraction le nombre 0,420%/32%. Les productions de ces élèves sont remarquables; ils recourent à des écritures complexes et variées pour représenter les nombres, la sériation de ces nombres n'étant pas évidente.

L'équipe de Noa et Samuel s'est prêtée, de façon exemplaire, au jeu de complexification et de sériation de nombres rationnels. Pour ce faire, les élèves de cette équipe ont coordonné diverses connaissances. Le premier nombre rationnel (0,0125) a été créé en référence au nombre 1/8, en prenant appui sur ce qui a été fait lors de l'activité de représentation de tablettes de chocolat (30 avril)[49]. En effet, en connaissant la représentation décimale de 1/8 (0,125), ils ont inscrit un nombre décimal dix fois plus petit (0,0125) et la fraction correspondante (1/80). Cette exploitation des relations rend compte d'une bonne compréhension de la fraction comme nombre : si le dénominateur est dix fois plus grand, alors le nombre rationnel sera dix fois plus petit. Le deuxième nombre rationnel (1634%/4905%) qu'ils ont choisi met de l'avant l'exploitation des pourcentages, ces élèves ayant compris que l'insertion du symbole de pourcentage au numérateur et au dénominateur n'avait aucune influence sur le nombre, celui-ci conservant le même rapport. Ils ont simplement fait cet ajout pour que le nombre semble plus complexe. Les relations entre les nombres choisis, soit 1634 et 4905, ne sont pas le fruit du hasard : ils ont ainsi multiplié le nombre 1635 par 3 afin d'obtenir un dénominateur permettant la représentation de la fraction 1/3, en s'appuyant sur le sens rapport de la fraction. Ils ont ensuite modifié le numérateur pour que la fraction soit plus petite que 1/3 en référence au troisième nombre rationnel qu'ils ont choisi, soit 33 1/3%. La relation entre 1634 et 4905 a été notée de la façon suivante : 1/3 – 1/4905. Quant au troisième nombre rationnel (33 1/3%), il constitue une reprise de l'écriture produite par la chercheure lors d'une activité précédente. Le quatrième nombre qu'ils ont choisi, soit 47269384726350498 21,429371625534907 / 4726938472635049821,429371626534907, constitue, selon eux, le nombre le plus complexe qu'ils ont créé, ce nombre comportant

[49] Rappelons qu'il s'agissait d'un travail sur ¼ et sa représentation décimale qui est connue des élèves afin de trouver la correspondance décimale de 1/8.

un nombre inusité de chiffres. Il est à noter qu'un seul chiffre diffère entre le numérateur et le dénominateur et ce, dans la partie décimale. Ce choix permet d'obtenir une fraction tout près de 1, car le numérateur est légèrement plus petit que le dénominateur. Ainsi, contrairement aux autres équipes, ils n'ont pas ressenti le besoin de trouver une représentation fractionnaire en « éliminant » la partie décimale, d'autant plus que la différence avec le dernier nombre (π/3) est appréciable sans le recours à cette transformation. Soulignons que ce dernier nombre n'est pas un nombre rationnel; lors d'un bref rappel historique sur la construction des rationnels, le nombre π avait été présenté en faisant référence aux relations entre le diamètre et la circonférence d'un cercle. Il est possible que ces élèves aient recouru à ce nombre pour « impressionner » les membres de leur classe.

L'équipe composée des élèves Gaudi et Guy a mis à profit les questions de la feuille sur la définition des rationnels qui leur avait été présentée dans les activités précédentes. Dans les écritures sous la forme fractionnaire a/b qui leur avaient été présentées, a et b n'étaient pas toujours des entiers (pourcentages, décimaux, entiers), mais ils avaient été en mesure de les modifier pour montrer qu'il s'agissait bien de nombres rationnels. En ce qui concerne l'ordre proposé, ils ont d'abord commencé par écrire 0,000000001%/0,56% et enfin, 1/560000000, suite à la modification première des pourcentages en nombres décimaux (0,00000000001/0,0056), puis en nombres entiers. Le réinvestissement adéquat de ces écritures est d'autant plus remarquable que la tâche dans laquelle figurait la représentation « 12,51%/3,004% » n'a pas fait l'objet d'un retour collectif. Le deuxième nombre choisi par ces élèves est 2,3/560,1, nombre que l'on peut estimer à environ 1/280 et comparer facilement à 1/560000000. Cependant, rien ne nous permet d'affirmer qu'ils ont utilisé une telle démarche pour comparer ces nombres. Peut-être ont-ils comparé les relations entre les nombres figurant au numérateur et au dénominateur de chacune des représentations de ces nombres rationnels, la relation entre le numérateur et le dénominateur étant nettement plus élevée dans le premier que dans le second nombre. Par la suite, ils ont inscrit le nombre 341,0917%/56,00001% qu'ils ont représenté par 3410917/560001. Le fait que le numérateur soit supérieur au dénominateur leur permettait facilement de conclure que ce nombre était supérieur aux nombres précédents, puisqu'il était supérieur à 1. Ils ont cependant commis une erreur en inscrivant 2/5,600000681 [20 000 0000/560000681] après ce nombre, 2/5,600000681 étant juste un peu plus petit qu'une demie, selon la relation entre le numérateur et le dénominateur qui était inférieure à 2/5. Ils ont finalement terminé avec le nombre 800000/56,00212 [80000000000/5600212], nombre nettement supérieur à 1. Au terme de cette activité, ces élèves commentent ainsi leur choix de nombres : « ça commence toute par 56 c'est pour pas qu'on se mêle ! » .

Nous avons choisi d'examiner en dernier les productions individuelles de David et Hélène, ces élèves ayant bénéficié d'une aide soutenue de l'enseignante. L'entretien ci-dessous rend compte de la démarche privilégiée par l'enseignante.

ENS	Bon David, qu'est-ce qui ne clique pas? Ceux-là ici (fait référence au numéro 4 de la p.87 du cahier d'exercices) qu'est ce qu'ils ont en commun? Ils ont choisi 5 fractions à ordonner, qu'est-ce qu'ils ont fait? Regarde bien les fractions qu'est-ce qu'elles ont de pareil?
[…]	
ENS	Donne-toi une fraction, n'importe laquelle une fraction facile, qu'on utilise souvent.
DAVID	10 sur 100.
ENS	Ok. écris ça. Ok. Trouve-toi d'autres qui valent la même chose
[…]	
DAVID	0 virgule 10
ENS	0 virgule 10, 0 virgule 1, ok. Bon on en a plein là. Ils valent toute la même chose. Es-tu capable d'aller mettre un peu plus petit que ça ou un peu plus grand que ça? Pour qu'ils soient proches? Ton but maintenant c'est de les compliquer. Proche de 1/100?
DAVID	Ça pourrait être 1 sur 101.
ENS	C'est plus petit ou plus grand que 1 sur 100? Est-ce que tu aimes mieux que ton gâteau soit coupé en 100 ou en 101?
DAVID	En 100.
[…]	
ENS	Ben dans le fond là, on est parti avec une fraction, ça tu l'avais, on a joué avec, on a grossi un petit peu, on a rapetissé un peu. Alors si quelqu'un regarde ça, ce n'est pas évident lequel est le plus gros, lequel est le plus petit à l'œil, tout de suite en regardant!

David a choisi 1/100 comme fraction de départ et Hélène, ½. Par la suite, ils ont été invités à trouver des écritures équivalentes avant de modifier certaines d'entre elles, plus petites et plus grandes que leur nombre initial. Bien que ceux-ci aient reçu de l'aide de l'enseignante, il est à noter que, malgré leurs difficultés, ils ont réussi à créer diverses représentations des nombres rationnels : notations décimale, fractionnaire, pourcentage. Tous les deux ont exploité les sens partie-tout et rapport de la fraction. L'extrait qui suit montre bien comment l'enseignante a su, pour Hélène, mettre à profit l'exploitation de la calculatrice.

ENS	On en a quatre, il reste juste à trouver un nombre qui serait proche. En connais-tu un qui vaut une demie? Est-ce qu'on pourrait mettre 132 sur 264 [ENS prend la calculatrice] ? Est-ce que ça vaut ½ ça? [Appuie sur égal] Écris ça…Fais-en un toi-même [tend la calculatrice à l'élève]. Juste en multipliant par 2 pour obtenir ½. [L'élève fait 180 fois deux sur la calculatrice] C'est bon ça! Et là trouve-toi un nombre qui serait proche.

Il importe de noter que ces élèves n'ont pas effectué la mise en ordre des nombres obtenus, quoiqu'il était facile, pour David, de représenter pratiquement toutes les fractions en recourant à un même dénominateur (1000) ou de les représenter en notation décimale (10,1/100; 114/1000; 11%; 0,092), à l'exception de la fraction 1/101. Cette fraction, tout comme le nombre décimal 0,092, représentait un nombre inférieur à 10/100; il était également facile de comparer les nombres 0,092 et 1/101. En s'appuyant sur la démarche proposée par l'enseignante, Hélène aurait pu comparer les nombres à la fraction ½, ce qui lui aurait permis d'ordonner les nombres, de la façon suivante : 1) 11/20 (1/2 + 1/20); 2) 0,49 (49/100 = 1/2-1/100) ; 3)170 ^{o}/360^{o} (1/2- 1/36); 4) 4/10 (1/2 - 1/10) ; 5) 37,2% (½ -12,8/100).

Anne a choisi des nombres rationnels relativement simples, soit 6/8, 16/20, 3/5, 4/2 et 2,01. Afin de les ordonner, elle a eu recours à un dénominateur commun pour représenter les fractions. En ce qui concerne le nombre 2,01, cette transformation n'était pas nécessaire, puisque ce nombre n'était que légèrement supérieur au nombre représenté par la fraction 4/2. Elle est toutefois parvenue à ordonner correctement les nombres, car elle a représenté le nombre 2,01 par la fraction 21/10.

Lorsqu'on regarde la production de Marcel, diverses connaissances sont nécessaires pour effectuer la tâche. Il a utilisé des nombres repères tels que ½ (50,5% et 5/11) et 1 (100/99 et 99876547/99876548), choisissant chaque fois un nombre rationnel un peu plus grand et un peu plus petit. Ces nombres étant suffisamment éloignés pour pouvoir comparer les nombres deux à deux. Une seule erreur s'est glissée dans la sériation qu'il a produite; il a ainsi jugé le nombre 99876547/99876548 supérieur aux nombres 100/99 et 200%.

Évolution des rapports des élèves aux nombres rationnels et aux mathématiques, ainsi que de la démarche d'acculturation institutionnelle de l'enseignante, des chercheures et des élèves

Il va sans dire que les différentes situations ont mené les élèves dans des voies tumultueuses de compréhension/incompréhension, mais au terme de ces situations, ils ont su surmonter ce déséquilibre en conjuguant différentes représentations qui mettaient en jeu leurs connaissances sur les sens des fractions partie-tout et rapport, ainsi que diverses connaissances dans la comparaison de fractions (numérateur commun, etc.). Nous ne prétendons pas que ces connaissances soient acquises par tous les élèves et soient persistantes. La dernière tâche d'élaboration d'une question d'examen montre toutefois bel et bien le progrès accompli. En effet, si l'on s'attarde aux productions des élèves et à leurs comportements lors de la présentation de la première tâche de sériation de fractions (26/04/2007), tâche pour laquelle plusieurs élèves se sont sentis déroutés, avec celle présentée dans cette situation (mise en ordre des nombres rationnels dans la production du corrigé de l'examen, 10/05/2007), nous constatons une amélioration notable. Dans les deux cas, les activités font appel à des connaissances similaires; toutefois, le dernier travail est plus exigeant en termes de connaissances, puisque les élèves doivent effectuer la transformation de ces écritures en nombres rationnels. Exigence d'autant plus élevée au regard de la complexité des nombres qu'ils ont proposés. Est-ce que les liens qu'ils ont réussi à faire seront suffisamment significatifs pour transformer leurs rapports à long terme aux nombres rationnels? Nous aurons l'occasion d'examiner cette question dans les situations ultérieures.

L'analyse des conduites des élèves et des interactions entre les élèves, l'enseignante, l'étudiante-chercheure et la chercheure montre bien toute l'importance de la démarche d'acculturation, démarche impliquant un investissement important. En effet, les nombreuses activités réalisées précédemment et la meilleure connaissance du système « classe » ont créé un moment opportun, un milieu propice à l'investissement des élèves dans les situations proposées lors de cette période. Par ailleurs, nous pouvons noter que l'engagement des élèves a clairement dicté le rôle qu'ils souhaitaient prendre dès l'entrée dans la tâche. Non seulement leurs interventions nous ont portée au-delà de nos attentes initiales, mais ces élèves ne sont pas gênés pour nous faire comprendre qu'ils pouvaient s'expliquer entre eux sans notre intervention. Rappelons aussi à ce sujet, les propos de l'enseignante reflétant l'investissement exemplaire des élèves : « ils s'amusent, c'est pour ça que je me permets de prendre de l'avance !»

Selon les études effectuées par Sarrazy (2001, p.6) dans plusieurs classes, les interactions verbales « *constituent de véritables instruments didactiques qui, pour certains professeurs, leur permettent de faire avancer le temps didactique en interrogeant un " bon élève " ou pour d'autres, d'enseigner en rectifiant publiquement l'erreur d'un plus faible* ». Cette observation est particulièrement précieuse, dans notre situation, puisqu'elle nous permet d'apprécier toute l'importance de l'acculturation institutionnelle et des interactions entre les chercheures, l'enseignante et les élèves, dans l'engagement des élèves et la responsabilité progressivement partagée par les élèves, les chercheures et l'enseignante, de l'enseignement/apprentissage des mathématiques. La prise de parole des élèves « plus faibles » et la volonté de plusieurs élèves de comprendre les raisonnements des élèves qui avaient, à l'entrée dans les situations, des rapports plus positifs aux nombres rationnels, ont favorisé une dynamique propice à l'évolution de la situation d'apprentissage.

Nous avons pu aussi constater les impacts de la démarche d'acculturation lors de l'élaboration des situations d'apprentissage. Ceux-ci sont, entre autres, l'œuvre des retombées positives des activités précédentes pour les différents agents (élèves, enseignante, chercheures). La pratique réflexive lors de la co-construction de l'activité a mené l'enseignante à proposer l'adaptation suivante : « *une discussion facile/difficile... pourquoi?... Ce qu'ils doivent retenir avec des exemples (comme vous faites d'habitude), je le noterai et le photocopierai pour qu'ils le mettent dans leur cahier de notes après!* ». Le respect de la niche écologique a donc permis au système « de demeurer le même tout en changeant et de se conserver tout en se transformant.» (de Rosnay, 1994, Ecologie et approche systémique, para.3). Ainsi, l'enseignante a accepté le travail sur la définition, travail mettant en jeu des écritures complexes et pour lequel elle a reconnu, une fois sa réalisation accomplie, un apport évident. Ceci a été possible grâce à la latitude que l'enseignante nous a laissée et qui a conféré l'espace didactique nécessaire pour se permettre et nous permettre de se laisser « surprendre » par les élèves!

4.2.14. Résolution de problèmes additifs de compositions additives

Pendant les périodes du 15 et 24 mai 2007, trois situations ont été réalisées. Ces périodes, d'environ 40 minutes chacune, ont eu lieu à l'heure du dîner; les élèves se sont présentés sur une base volontaire, l'enseignante les encourageant à effectuer les tâches proposées. Il faut aussi savoir que deux périodes de mathématiques avaient précédé chacune de ces rencontres.

Les trois situations ont été proposées par les chercheures à la suite d'une analyse des difficultés rencontrées par les élèves lors de la réalisation d'une situation voisine puisée dans le manuel Perspective (Guay, Hamel et Lemay, 2005, p.108). Puisque cette activité a été réalisée plusieurs semaines auparavant, il nous semblait intéressant de prendre acte des progrès réalisés et des difficultés persistantes. Il s'agissait également d'un moment opportun pour faire le retour sur ces questions, compte tenu de l'arrivée éminente de l'évaluation. Nous présenterons donc, dans un premier temps, les justifications ayant mené à l'adaptation de la première activité et les conduites des élèves lors de la réalisation de cette activité. Dans un deuxième temps, nous nous attarderons aux deux autres situations, ainsi qu'aux conduites des élèves lors de la réalisation des tâches que comportaient ces situations.

4.2.14.1. Analyse des conduites et des interactions didactiques au cours de la résolution d'un problème additif concernant la répartition d'une population en fonction de diverses tranches d'âge, répartition impliquant des nombres rationnels

Nous reproduisons ci-dessous, l'énoncé original puisé dans le manuel Perspective (Guy, Hamel et Lemay, 2005, p.266) :

6 Dans l'illustration ci-contre, les cartons précisent la tranche d'âge représentée par chaque personnage et la fraction de la population canadienne associée aux gens de cette tranche d'âge.

Les personnes de moins de 25 ans représentent une fraction de la population supérieure à celle associée aux personnes de 50 à 74 ans, mais inférieure à celle associée aux personnes de 25 à 49 ans. Détermine une fraction de la population pouvant être associée aux personnes de moins de 25 ans.

Ce contexte nous semblait prometteur, dans la perspective d'un travail plus conséquent sur les nombres rationnels. Par ailleurs, le choix des fractions nous semblait grandement faciliter le travail d'intercalation d'une fraction. De plus, nous voulions coordonner ce travail à celui portant sur le sens des gestes impliqués dans l'addition. Nous avons alors jugé pertinent de retenir un tel contexte et de conserver l'idée d'inviter les élèves à comparer les différentes populations, selon les tranches d'âges. Nous avons toutefois proposé des nombres rationnels qui sollicitaient la coordination de diverses connaissances sur les représentations des nombres rationnels, soit 25% et 3/7. De plus, nous avons ajouté des questions permettant de revenir sur le sens du dénominateur et du numérateur des fractions, suite aux propositions des élèves sur le nombre de personnes qui pouvait constituer la population totale, notre intention étant de permettre aux élèves de reconnaître qu'il s'agit, dans tous les cas, de fractions dont le rapport est équivalent, mais dont les informations auxquelles elles nous donnent accès diffèrent. Par exemple, lorsque le dénominateur des fractions représente le nombre total d'habitants que comporte la population, le numérateur de chacune de ces fractions nous livre directement le nombre de personnes associées à chaque tranche d'âge. Par ailleurs, si on exprime chacune des fractions en recourant au plus petit dénominateur commun, expression qui témoigne d'un rapport fort satisfaisant aux nombres rationnels, il est, de toute évidence, peu réaliste d'associer à ce dénominateur commun, le nombre total d'habitants que comporte la population; il importe donc de procéder à d'autres représentations des nombres. L'activité suivante a ainsi été proposée :

Problème 1
Dans des analyses statistiques, on s'intéresse souvent à différentes populations. Lors d'un dernier recensement effectué dans un village de la Beauce, on a ainsi examiné la répartition de la population en fonction de l'âge des habitants. Le tableau suivant indique certaines des données provenant de ce travail. Ce tableau a été publié dans le journal local.

Nombre d'habitants dans le village	**Répartition selon les tranches d'âge**		
	0 à 19 ans	**20 à 64 ans**	**65 ans et plus**
?	**25%**	**3/7**	**?**

Question 1 : Un quidam lisant son journal dans un parc a vite déclaré que les personnes de 65 ans et plus représentaient 1/9 de la population, étant sûr que les personnes âgées se font plus rares que les personnes plus jeunes. Pensez-vous que sa perception est juste, est bien fondée sur les données du tableau? S'agit-il d'une personne qui a fait un travail mathématique?

Question 2 : Pouvez-vous trouver la fraction associée à la tranche d'âge des 65 ans et plus?

Question 3 : Maintenant, à vous de déterminer quelle population pourrait convenir à ce village et permettrait de rendre compte du nombre d'habitants dans chaque tranche d'âge?

Question 4 : Si on fait abstraction de la réalité, quel serait le plus petit nombre d'habitants qui permettrait de rendre compte de cette répartition? Montrez quelle serait cette répartition.

Nous avons aussi ajouté deux problèmes isomorphes comportant les mêmes nombres : 1) répartition d'une collection de timbres; 2) répartition des aires consacrées aux légumes dans un jardin. Cet ajout s'inspire des aides proposées par Julo (1995) afin de favoriser la représentation de l'énoncé sans intervenir dans la phase de résolution (action). Nous en discuterons plus longuement dans la deuxième partie. Nous exposons d'abord les conduites des élèves lors de la résolution de la tâche principale sur la répartition de la population. Nous présentons ensuite les deux autres problèmes et traitons des conduites des élèves lors de ces dernières tâches.

Ces problèmes ont été présentés à 9 élèves qui ont accepté de venir « faire des mathématiques » durant l'heure du dîner : Marcel, Guy, Gaël, David, Rémi, Hélène, Samuel, Bertrand et Anne. Au regard du temps dont nous disposions pour la réalisation de cette situation, seules les deux premières questions ont été réalisées individuellement. Les autres ont été traitées lors du retour collectif. La question 4 a été implicitement répondue par les élèves, car plusieurs ont utilisé le plus petit dénominateur commun, soit 28. Nous effectuons une appréciation globale des conduites de la façon suivante : fort satisfaisante (f.s.), satisfaisante (s.), peu-satisfaisante (p.s.) et non-satisfaisante (n.-s.). Il importe de souligner que ces conduites sont aussi marquées par les interactions avec la chercheure et l'étudiante-chercheure. Notre appréciation tient compte du poids de l'aide apportée aux élèves et de de la prise en compte, par ces élèves, de la situation. On retrouve ainsi une appréciation différente de réponses fort comparables, voire identiques.

Élèves	Nombre d'habitants dans le village	Répartition selon les tranches d'âge			Appréciation globale des conduites			
		0 à 19 ans	**20 à 64 ans**	**65 ans et plus**	N.S	P.S	S	F.S.
	?	**25%**	**3/7**	?				
Samuel	700	25/100 = 175/700	300/700	225/700				x
Marcel	56	¼…14	24	56-38 = 18			x	
	28	7/28	12/28	9/28				
Hélène	28	7/28	12/28	9/28		x		
Bertrand	28	7/28	12/28	9/28		x		
Guy	28	25/100 = ¼ = 7/28	12/28	9/28			x	
Anne	100	25/100	42/100	42 ÷9 = 4,6	x			
Rémi	100	25%	42%...43%	32% = 8/25		x		
Gael	100	25%	43%	32% = 0,32/1		x		
David	100	25/100	42/100	33/100	x			

Comme le montre ce tableau, les réponses du tiers des élèves sont dans l'ensemble satisfaisantes et rendent compte d'une interprétation pertinente de la situation. Avant de procéder à un examen plus détaillé des conduites, il est intéressant de noter les réactions de quelques élèves après la lecture de la situation, réactions qui donnent lieu à des échanges concernant la pertinence de bien examiner les nombres en jeu. Nous reproduisons certaines de ces interactions qui ont eu un poids non négligeable sur l'interprétation de la tâche chez plusieurs élèves :

GAEL	Est-ce qu'on peut utiliser la calculatrice ?
ECH	Non, mais au pire, si c'est ça qui te gêne, écris d'abord les calculs GAEL et j'irai te voir.
SAMUEL	Faut même pas faire de calculs pour ça.
[…]	
ECH [à Guy]	Comment vas-tu faire ça?
GUY	Ben déjà là 3/7 c'est plus que 25 %.

Ces extraits montrent bien, comme le mentionne Samuel, qu'il est possible d'effectuer cette tâche avec très peu de calculs. Guy a alors proposé de s'attarder à l'ordre de grandeur des nombres. Il nous semblait important de le mentionner, d'autant plus que, pour Guy, cela représente un pas non négligeable dans l'interprétation des fractions, dans la mesure où cet élève se réfugie habituellement dans les gestes appris en classe, peu importe la situation.

Si l'on s'attarde plus particulièrement aux démarches des élèves, nous remarquons que deux conduites ont été majoritairement utilisées : exploitation des pourcentages ou utilisation du plus petit dénominateur commun, soit 28. Tous les élèves, sauf Samuel, ont spontanément recours aux pourcentages. Il importe de souligner que ce procédé avait été antérieurement enseigné pour résoudre une situation qui traitait aussi de la répartition d'une population, mais dont le but consistait à représenter cette répartition à l'aide d'un diagramme circulaire. Étant donné que l'utilisation du pourcentage ne permettait pas d'obtenir de façon juste la répartition de chacune des tranches d'âge, quatre élèves ont changé de procédé en trouvant un dénominateur commun à 25% et 3/7 : 28, 56 ou 700.

La première question exigeait de la part des élèves une estimation de la réunion des différentes répartitions de la population. Nous souhaitions que les élèves s'attardent aux nombres en jeu pour s'apercevoir qu'il était faux de prétendre que les personnes âgées se font plus rares que les personnes plus jeunes. En effet, si nous regardons les nombres, nous avons ¼, 3/7 qui est près de ½, et 1/9 qui est près de 1/10, ce qui est loin de donner l'entier représentant la population totale. Cependant, aucun élève n'a eu recours à cette modélisation de la situation. Il faut dire que l'entrée dans cette tâche a occasionné quelques difficultés aux élèves. Hélène, Guy, Anne, Marcel et Bertrand ne percevaient pas que la somme des répartitions représentait la population totale et par conséquent s'exprimait par un entier. Deux différentes démarches ont plutôt été mises de l'avant. La première a été utilisée uniquement par certains élèves qui ont exploité le pourcentage : Gael et Rémi ont additionné les nombres 25%, 3/7 et 1/9, représentant chacune des fractions par un pourcentage, afin de savoir si la somme des pourcentages ainsi trouvés correspondait à 100%. La seconde démarche, utilisée par Hélène, Bertrand, Guy, Samuel, David et Marcel, consistait à trouver la fraction correspondant aux personnes de 65 ans et plus et à la comparer à 1/9. Nous nous attardons plus en détail à ces différentes démarches.

Pour représenter chacune des répartitions en pourcentage, Gael et Rémi ont transformé la répartition des personnes de 20 à 64 ans en pourcentage en utilisant le produit croisé, soit 3/7 = ?/100….100 x 3 ÷ 7 = 42,8, le résultat obtenu étant arrondi à 43. Rémi a ensuite utilisé le produit croisé pour transformer 1/9 en pourcentage (100 x 1 ÷ 9 = 11%), alors que Gael a évalué la fraction 1/9 comme étant juste un peu plus grande que 10% pour procéder à l'addition des répartitions. Au regard de leur résultat, ils ont nié les propos du quidam :

REMI	Je les ai tous mis sur 100…100 fois 3 divisé par 7, ça donne 42,8, tu l'arrondis. Ici, j'ai fait 100 fois 1 divisé par 9 est égal à 11% et comme ça fonctionne pas… non, ça donne pas 100 exactement.
GAEL	Pour que ça fasse un entier.
CH	Oui! Parce qu'on parle de la population, on la partage.
REMI	J'ai fait 25 + 43 égale 68…100-68..32% pour les 65 ans et plus ou 8/25.
[…]	
REMI	Mettons si on gardait ça comme ça…25+43+11, ça donnerait 79…quand ont fait 32 + 25 + 43, là ça donne 100%.

David et Anne ont utilisé la même démarche que Gael et Rémi pour transformer les fractions en pourcentages. Cependant, pour déterminer si le quidam avait raison, s'il avait fait un travail mathématique, ils ont directement recherché la répartition de la population représentant les 65 ans et plus. David a simplement retranché le 25% et le 42% (3/7) du 100% et a obtenu 33%. Il a donc inscrit qu'il était en désaccord avec le quidam, car il a obtenu des résultats différents (11% (1/9) et 33%) pour les personnes de 65 ans et plus. En ce qui concerne Anne, elle a divisé 42 par 9 (4,6), calcul pour le moins déroutant. Il est possible qu'elle ait mal évalué la partie restante pour cette population, car elle a écrit 42 au lieu de 32 et que la division par 9 soit liée à l'information contenue dans la question, selon laquelle le quidam affirme que 1/9 de la population est âgé de 65 ans et plus. Quant à Hélène, bien que ses réponses soient bonnes, il importe de nuancer ses résultats, car aucune trace ne figure sur sa feuille et elle a réclamé à plusieurs reprises l'aide de l'étudiante-chercheure. De plus, nous pourrons constater que dans les situations subséquentes sur la répartition, elle éprouve toujours de la difficulté et sollicite l'aide des intervenantes.

Marcel et Guy ont aussi directement recherché la fraction de la population représentée par les 65 ans et plus. Ils ont représenté 25% sous une forme fractionnaire réduite (¼), puis ils ont trouvé les fractions équivalentes en utilisant 28 comme dénominateur commun, dénominateur qu'ils ont obtenu en multipliant les deux dénominateurs des fractions ¼ et 3/7. Ils ont réuni ces deux parts et déterminé la fraction de la population représentée par les 65 ans et plus (12/28 + 7/28= 19/28; 28 – 19 = 9 ... 9/28). Toutefois, le traitement de ces données a été plus laborieux pour Guy : il essaie d'abord d'exprimer les nombres en pourcentages, mais il s'aperçoit que cela ne fonctionne pas pour la fraction 3/7. Puis, il a effectué une soustraction des fractions 3/7 et ¼ (12/28 – 7/28 = 5/28), comme si la différence obtenue correspondait à la population restante pour les 65 ans et plus. L'étudiante-chercheure lui a alors demandé pourquoi il procédait à une soustraction. Devant l'absence de réponse, elle lui demande de relire l'énoncé, ce qui lui a permis une nouvelle interprétation. Il s'est, par la suite, révisé et a expliqué ainsi sa démarche :

GUY	Ben moi, j'ai fait 25/100 divisé en 25, ça m'a donné ¼ pis là après j'ai décidé de prendre le 3/7 et de mettre ça sur le même dénominateur, sur 28. Donc, j'ai fait 7 x 4 = 28 , 3 x4 = 12 donc c'est 12 /28 et 4 x 7 , 28 donc 1 x7= 7..7/28. Donc 12 + 7 = 19…19/28.

Au moment de comparer 9/28 à 1/9, Guy et Marcel ont exploité des raisonnements différents. Guy a transformé la fraction 1/9 en 9/81, obtenant ainsi un numérateur identique à celui de la fraction 9/28, ce qui lui a permis d'affirmer rapidement qu'il était en désaccord avec les propos de la personne.

Quant à Marcel, ayant reçu l'aide de la chercheure, il a pu comparer 9/28 à 1/9 en estimant que 9/28 est près de 9/27, donc de 1/3 et que la fraction est beaucoup plus grande que 1/9. Il a aussi trouvé rapidement la répartition des tranches d'âge de la population en utilisant 56 comme dénominateur, suite à l'intervention de la chercheure : *« Vous n'avez pas pris un grand nombre, c'est une petite paroisse ! ».*

De son côté, Samuel a tenu à respecter davantage le contexte et à exploiter une démarche économique en choisissant, comme dénominateur commun, 700. Il a simplement associé 25% à la fraction 25/100 et multiplié cette fraction par 7/7 (175/700); il a additionné cette dernière fraction à une fraction équivalente à 3/7, soit 300/700. Il a obtenu 475/700, ce qui lui a permis de déterminer la fraction de la population que représentaient les personnes de 65 ans et plus : 700 - 475 = 225 … 225/700. La comparaison des fractions 225/700 et 1/9 a été faite en exploitant le sens rapport de ces fractions :

Sur 900, ça ferait 100/900…là le dénominateur est plus petit et le numérateur plus grand…il n'a pas raison! »

Lors du retour collectif, les élèves ont été invités à exposer leurs différentes démarches. Tel que mentionné précédemment, à l'exception de Samuel, les élèves n'ont pas su répondre à la première question sans effectuer de calculs. Plus encore, malgré les différents questionnements de la chercheure lors du retour, les élèves ne pouvaient se détacher de leurs calculs :

CH	Ok alors si vous regardez ça ici ça donne combien?
Élèves	25%
NOA	¼
CH	Ok est-ce qu'on voit que 1/9 ça pas de sens, 25%, 11%,…30/70, ça vous dit quoi 30/70?
RÉMI	C'est 43%.
[…]	
CH	Vous allez trop vite, vous avez tout pour répondre à la 1ère question. Est-ce que c'est possible que ça donne 1/9?
RÉMI	C'est 8/25 (32%..100 fois 8 divisé par 25).
CH	Et pourquoi ça marche pas?

D'autre part, comme la question 3 n'a pas été réalisée individuellement, nous avons fait un retour en grand groupe. Ainsi, la démarche de Samuel a servi d'ancrage; rappelons que cet élève avait associé 700 à la population totale. Ce qui a également retenu notre attention était la conclusion à laquelle un bon nombre d'élèves étaient parvenus, à savoir que le nombre d'habitants du village devait être un entier, donc un multiple de 28 pour que ce nombre soit à la fois approprié et réaliste. C'est d'ailleurs un des intérêts de revenir sur cette question, puisque nous souhaitions que les élèves relient nombres et contexte et qu'ils accordent ainsi davantage de sens à la production de fractions équivalentes, production associée trop souvent à l'application de gestes sans signification[50].

CH	Là on va prendre les données…d'après moi ça peut être variable le nombre d'habitants. Il faudrait que ça soit quoi? Quelles sont les conditions pour qu'on ait un nombre d'habitants correct?
SAMUEL	Ah, ça peut être gros.
CH	Ouais, mais il faut qu'il ait quelque chose de particulier notre nombre..On avait…
SAMUEL	Ben ¼ c'est 4 personnes..
CH	Ouais, mais ici quand vous avez raisonné avec 100 ici, est-ce que ça se peut ce nombre?
SAMUEL	Ben moi je trouve que c'est un peu petit.
MARCEL	Moi j'ai trouvé un nombre encore plus petit, 56.
CH	C'est bon mais c'est moins réaliste … un village avec peu de familles. Est-ce que vous voyez pourquoi il a mis sur 56? Quelles fractions avait-il trouvées?
GAEL	Pour le nombre d'habitants, le dénominateur.
SAMUEL	¼ de 56
MARCEL	Ceux sur 28 ... fois 2.
CH	Samuel lui avait trouvé avec quel nombre?
ÉLÈVES	700.
CH	Oui, on se débrouille aussi avec 700. Est-ce qu'il y a quelqu'un qui a trouvé au début un nombre d'habitants qui n'avait pas d'allure?
GAEL	Moi, j'ai mis sur 100, en pourcentage, c'est pour ça que ça été si rapide … il y avait déjà 25%.
ECH	Mais, pour ton 3/7, ça te donnait combien en pourcentage?
GAEL	43.
CH	43 juste?
REMI	non 42,8.
CH	Donc ça c'est des parties de personnes.
GAEL	Ouais, ben justement tu l'arrondis [il fait référence à ce qui a été fait en classe lors de la résolution du problème sur la répartition des numéros faisant partie de spectacles, problème présenté quelques mois auparavant (29 janvier 2007)].
CH	Non, on ne peut pas faire ça. Dans ce problème il fallait tenir compte du contexte.
ECH	Donc, si on regarde ces nombres, 28, 56, 700, pourquoi ces nombres fonctionnaient bien?
MARCEL	Parce que 28 fois 2 ça donne 56.
ECH	Mais, pourquoi ça fonctionnait?
SAMUEL	parce que c'est tous des multiples de 28.
CH	Voilà! Vous voyez ce qu'on fait ici c'est encore plus dur que ce que vous faites d'habitude, on prend de l'avance.
MARCEL	Pour une des rares fois.

[50] Par exemple, Bertrand affirmera que 30/70 c'est dix fois plus que 3/7.

Le retour sur la question 4 a été fort expéditif, dans la mesure où non seulement Guy avait exposé sa démarche qui avait été bien comprise, mais également en raison de la présence d'un pourcentage dans l'énoncé du problème qui était, pour plusieurs élèves, facilement associé à ¼, association fréquente en classe. Ainsi, l'exploitation de cette fraction irréductible leur donnait directement accès à la plus petite collection qu'il était possible de former avec ces répartitions.

4.2.14.2. Analyse des conduites et des interactions didactiques au cours de la résolution de problèmes traitant de la répartition d'une collection de timbres et de la répartition des aires consacrées aux légumes dans un jardin

Les activités traitant de la répartition d'une collection de timbres, et de la répartition des aires consacrées aux légumes dans un jardin, ont été présentées le 22 mai 2007. Lors de cette période, Marcel, Guy, Gael, David, Hélène, Samuel, Bertrand, Anne et Rémi étaient présents. Pour ces activités comportant des problèmes isomorphes aux problèmes liés à la situation initiale sur la répartition d'une population, selon les tranches d'âge, nous avons simplement modifié le contexte et un des nombres, soit 2/7 au lieu de 3/7, tout en conservant les mêmes dénominateurs. C'est pourquoi nous avons d'abord invité les élèves à lire ces problèmes avant de les résoudre. Nous avons aussi joué sur les caractères discret et continu des mesures, de façon à ce que les élèves considèrent la nature des objets dans le choix de leurs mesures, certaines de ces mesures pouvant être exprimées plus naturellement par des nombres entiers ou décimaux dans le cas du problème de la répartition du jardin. La confrontation de ces différentes situations permet d'entrevoir la généralité du modèle de résolution et la spécificité du contexte. Ces situations visent donc à faire émerger la généralité du modèle en remarquant non seulement qu'il s'agit de données fort similaires, mais surtout, qu'il s'agit d'effectuer des tâches similaires à celles réalisées précédemment lors de la situation initiale. Nous souhaitions que les élèves s'attardent davantage à la struture de fond car, plusieurs études ont bien montré l'habitude des « novices » à s'attarder plutôt à la structure de surface (Schoenfeld, 1985). Nous reproduisons ci-dessous les énoncés des problèmes qui leur ont été soumis :

« Avant de résoudre l'un ou l'autre des problèmes, on vous demande de les lire et de noter vos impressions mathématiques

Problème 1 :
Dans une très très très petite collection de timbres, 2/7 des timbres proviennent de l'Orient, 25% de l'Amérique et le reste de l'Europe de l'Ouest. Dessinez cette collection, en identifiant les parties de la collection définies par la provenance des timbres. Quelle fraction de la collection les timbres provenant de l'Europe de l'ouest représentent-ils?

Problème 2 :
Dans un jardin rectangulaire vraiment vraiment miniature, 2/7 de l'espace est réservé aux pommes de terre; dans ce même jardin, 25% de l'espace est réservé aux brocolis.

Dessinez un tel jardin, en vous référant à ce que vous avez fait dans le cas de la collection présentée au problème 1 pour déterminer l'aire de votre jardin. Montrez quelles sont les mesures possibles des côtés de ce jardin, et identifiez la fraction du jardin qui demeure libre. Utilisez le papier quadrillé.

Contrairement à ce que nous avons fait au problème 1, avec les timbres, dans ce problème « de jardin », il est possible de réduire encore l'aire du jardin. Quelles pourraient être les mesures du jardin? Utilisez le papier quadrillé. »

Conduites des élèves

Dans le tableau suivant, nous faisons état des réponses des élèves aux problèmes liés à chacune des situations. Nous effectuons une appréciation globale des conduites de la façon suivante : fort satisfaisante (f.s.), satisfaisante (s.), peu-satisfaisante (p.s.) et non-satisfaisante (n.s.) .

Tableau XLIII: Résultats des répartitions d'une collection de timbre et du jardin

Élèves	Collection de timbres		Jardin			Appréciation
	Nombre total d'objets dans la collection	Portion de timbre appartenant à l'Europe de l'Ouest	Mesures 1	Mesures 2	Portion de la partie vacante	
David	100 28	32% 9/28	4 x 7 (28)	2 x 14 (28)	13/28	s
Rémi	100	32	4 x7			p.s
Gael	28	9/28	4 x 7 (28)	1 x 28 1x 14	13/28	s
Bertrand	10	---	---	---		n.s.
Guy	28	9/28	4 x 7 (28)		13/28	s
Hélène	100; 70 ; 28	9/28	Manque de temps : pas fait.			s
Anne	28	9/28	4 x 7 (28)		13/28	s
Marcel	28	9/28	4 x 7 (28)	2 x 7 (14)	13/28; 6,5/14	fs
Samuel	700	325/700	700	2 x 14 (28); 2 x 7 (14); 2 x 3,5 (7); 1 x 3,5	13/28 6,5/14 3,25/7 1,75/3,5	fs

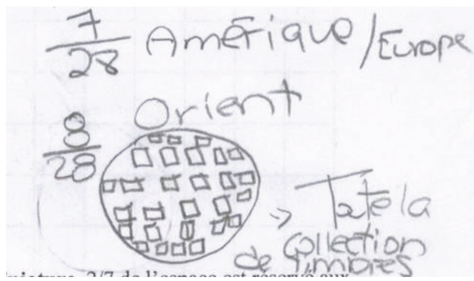
				(3,5)		

Ayant reconnu la similitude entre le problème 1 de chacune des situations et le problème 1 de la situation précédente sur la répartition de la population, la majorité des élèves ont vite déterminé le dénominateur commun permettant de représenter les différentes distributions. Cependant, David, Hélène et Bertrand ont eu spontanément recours aux pourcentages en utilisant le produit croisé, bien qu'Hélène ait réajusté ses essais (100, 70, 28) jusqu'à l'obtention d'un dénominateur qui permettait d'obtenir uniquement des entiers. Les tentatives de cette dernière ne sont pas le fruit du hasard, chacun de ces dénominateurs a été proposé par les élèves lors de la situation précédente sur la répartition de la population. David et Hélène ont bénéficié respectivement de l'aide de la chercheure et de l'étudiante-chercheure. La chercheure a tout simplement rappelé à David qu'il devait effectuer une représentation de la collection en lui faisant remarquer que, de préférence, il fallait obtenir un nombre entier de timbres, l'invitant ainsi à représenter 2/7 et 1/4 autrement. En revanche, les interactions entre l'étudiante-chercheure et Hélène ont été beaucoup plus importantes. Cette élève avait tendance à recourir à des calculs sans tenir compte du contexte et de la question posée. L'étudiante-chercheure a pratiquement été contrainte de piloter chacun des calculs de cette élève, comme le montrent les interactions que nous reproduisons ci-dessous :

HÉLÈNE	On les met sur 100.
ECH	Mais les 7e ?
HÉLÈNE	Sur 70?
ECH	Essaie.
HÉLÈNE	25/10...30/70.
ECH	Ce serait plutôt 2,5/10 donc tu vois que ce dénominateur n'est pas facile. Est-ce que tu connais une autre façon d'écrire ce nombre?
HÉLÈNE	C'est la moitié de 100, comme ½.
ECH	C'est quoi la moitié de 100?
HÉLÈNE	50.
ECH	Mais là tu as ..
HÉLÈNE	25.
ECH	Donc, c'est...
HÉLÈNE	¼.
ECH	Là, tu as ¼ et 2/7 comment tu peux faire pour savoir ce qu'il manque.
HÉLÈNE	Tu multiplies?
ECH	On vient de te décrire ces deux parties-là et on te dit le reste c'est à …
HÉLÈNE	Faut que tu additionnes l'Orient plus l'Amérique.
ECH	Ok et comment vas-tu trouver le reste? Si tu avais 2/7 et ¼ à représenter tu pourrais mettre combien de timbres pour que ce soit facile à représenter ?
HÉLÈNE	Tu les mets sur le même dénominateur.

ECH	Et dans ce cas-ci tu en mettrais combien de timbres?
HÉLÈNE	Sais pas d'habitude j'ai une feuille (parle de la feuille de tables) je regarde pour 4 et 7
ECH	Sur 28.
HÉLÈNE	2x4 =8; 1x7 = 7.
ECH	Regarde si on représente 28 ça se sépare bien en quatre...Est-ce que tu es capable maintenant de représenter ton 2/7...
HÉLÈNE	T'en comptes 1,2,3,4,5,6,7 tu en colores 2 ....1,2,3,4,5,6,7... etc.
ECH	Et qu'est-ce qui reste pour l'Europe de l'Ouest.
HÉLÈNE	Tu comptes ceux-là ici...13 sur 28.

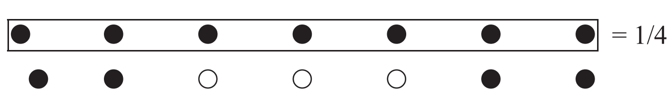
La demande de représentation de la répartition de la collection de timbres a amené Hélène, Marcel et Guy à produire un dessin comportant 28 timbres. Guy a réparti aléatoirement les timbres et produit les écritures suivantes : 25% = ¼ (x7/x7) = 7/28 (Amérique); 2/7 (x4/x4) = 8/28 (Orient).



Il a donc colorié chacune des parties de la collection selon leur provenance et a identifié la fraction de la collection totale qui correspondait aux timbres provenant de l'Europe de l'Ouest. Comme le montre l'extrait suivant, cet élève montre qu'il a su bénéficier des situations précédentes; il a associé directement 25% à ¼, représenté les fractions 2/7 et ¼ en utilisant 28 comme dénominateur commun et a su donner sens à ce dénominateur en se référant au contexte du problème :

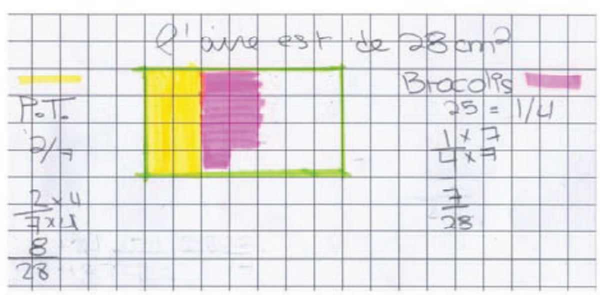
GUY	Là je sais que 25% c'est ¼ , parce que 25 fois 4 ça fait 100 donc j'ai décidé de les mettre sur le même dénominateur, 28
ECH	Et qu'est-ce que ça représente ce dénominateur?
GUY	Le tout de tous les timbres, la collection.

Quant à Hélène et Marcel, ils ont réparti de la même façon la collection de 28 timbres en 4 rangées de 7 timbres. Ce choix leur a permis de déterminer aisément les fractions équivalentes à ¼ (1 rangée) et à 2/7 (2 colonnes) et la fraction de la collection des timbres provenant de l'Europe de l'ouest, tel que le montre la représentation d'Hélène :



○ ○ ○ ○ ○ ● ●
○ ○ ○ ○ ○ ● ●
Europe de l’ouest: 13/28 = 2/7 = 8/28

De la même façon, les productions de Marcel sur les représentations fractionnaires des différentes collections [¼ + 2/7 + … = 1 = 28/28] et sur l’illustration des différentes collections [7/28 + 8/28 = 15/28…13] montrent une exploitation pertinente des fractions équivalentes. On peut aussi noter que la première écriture rend compte de l’évolution de sa compréhension de l’ensemble de la collection (28/28). En ce qui concerne la représentation des aires consacrées aux différents légumes du jardin, Guy a également produit un jardin dont les dimensions correspondent à 4 et 7 petits carreaux, reproduisant les calculs qu’il a effectués précédemment pour la répartition de la collection de timbres; il a inscrit ensuite l’aire du jardin, soit 28 cm^2, prenant pour acquis que la longueur de chacun des côtés des petits carreaux sur sa feuille quadrillée étaient de 1 cm.



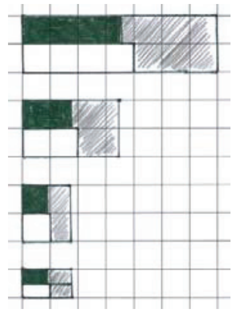
Cependant, Guy nous a avoué avoir rencontré des difficultés à interpréter ce problème, notamment à donner un sens à la demande d’ « identifiez la fraction du jardin qui demeure libre». Cette remarque a aussi été formulée par Samuel. Ces élèves s’attendaient possiblement à ce que cette portion soit occupée par d’autres légumes et qu’une référence à cette portion soit effectuée dès l’entrée dans la situation.

Marcel a tout simplement représenté sa collection en recourant à un rectangle de 4 par 7 petits carreaux. Il a aussi effectué une deuxième représentation de 2 par 7 petits carreaux sur laquelle il a identifié chacune des aires consacrées aux différents légumes. Pour sa part, Hélène n’a pas eu le temps d’accomplir cette tâche.

De son côté, pour la collection de timbres, Bertrand a d’abord tenté de réduire 25/100 en divisant le numérateur et le dénominateur par 10, mais devant l’absence de l'expression du numérateur par un entier, absence qui contrevenait à la représentation d'une fraction, il a inscrit ¼. Il n'a pas davantage investigué la tâche.

David a exploité les pourcentages : il a d'abord procédé à l'application du produit croisé [ex. 2/7 = ?/100….100 x 2 = 200...200 ÷ 7 = 28] puis, il a réuni les parties occupées par les pommes de terres et les brocolis [28+25 = 53], ce qui lui permettait d'obtenir la portion restant libre [100 – 53 = 47%]. Malgré les approximations nécessaires et l'inadéquation dans un contexte requérant des mesures précises, inadéquation qui avait d'ailleurs fait l'objet d'un examen lors du retour collectif sur les démarches des élèves au problème précédent sur la répartition de la population, il s'en est tenu à ce procédé. C'est pourquoi la chercheure a souhaité intervenir auprès de cet élève en le questionnant sur le choix d'un dénominateur approprié; choisissant alors 28, David a inscrit: ¼ + 2/7 + ...7/28 +8/28 + 13/28….15/28…28/28. Il n'a toutefois pas exploité ce travail, ayant écrit : 1 timbre pour l'Amérique, 2 timbres pour l'Orient, ces écritures correspondant aux numérateurs des fractions initiales. Cette conduite nous a semblé opportuniste, cet élève manifestant peu d'intérêt pour la résolution de ce problème comme le montre l'enregistrement vidéo. Il n'a aussi produit aucune illustration des collections de timbres. Pour le problème 2, il a simplement représenté un jardin de 4 par 7 petits carreaux et de 2 par 14 petits carreaux en identifiant correctement chacune des parties. En fait, comme il a reconnu la similitude entre ce problème et le problème précédent, il s'est appuyé sur les calculs effectués pour la collection de timbres.

En ce qui concerne Samuel, pour le problème 1, celui-ci s'est contenté de répondre aux questions concernant la répartition des timbres; il n'a produit aucune illustration de la répartition des timbres, étant donné le nombre élevé de timbres dans sa collection, soit 700. Pour déterminer les fractions montrant la répartition des timbres, il a dit : « *le 2/7, tu ajoutes 2 zéros à chaque, tu multiplies par 100 pis l'autre* [25%] *25 x 7 = 175..l'autre est 325..sur 700* ». montre l'illustration suivante, pour montrer la répartition des aires du jardin, il a pris plaisir à produire diverses représentations de mesures possibles du jardin: 7 par 2 petits carreaux ; 3,5 par 2 petits carreaux; 1,75 par 2 petits carreaux; 1,75 par 1 petit carreau:



Avant d'effectuer ces représentations, il a travaillé à partir de la portion libre du jardin, 13/28, en produisant des rapports équivalents, obtenant alors: 6,5/14; 3,25/7; 1,75/3,5. Notons cependant que le dernier rapport, soit 1,75/3,5 , est incorrect.

Enfin, le retour sur leurs démarches a été bénéfique pour la majorité des élèves. Par exemple, lorsqu'Hélène a expliqué sa démarche, prenant en compte sa représentation pour le jardin, Guy a perçu l'intérêt d'organiser sa collection pour faciliter la recherche de fractions équivalentes.

ECH	J'aimerais que tu m'expliques Hélène comment tu as fait?
HÉLÈNE	Si on regarde le 25% ensuite que c'est ¼ pis si on regarde le 2/7 et le ¼ il faut…
MARCEL	Comment tu fais pour savoir que 25% c'est ¼?
HÉLÈNE	Ben c'est comme l'argent, ça prend quatre 25 sous pour faire 1 $.
CH	Ou encore : 25% c'est la moitié de 50%, 50% c'est ½ et la moitié d'une demie.
MARCEL	¼.
CH	Donc, c'est une façon souvent de raisonner, c'est de se trouver une fraction, vous avez souvent travaillé avec ½, elle vous permet de regarder les autres après.
HÉLÈNE	Après il faut les mettre sur le même dénominateur, sur 28, ça fait 8/28.
MARCEL	Et l'autre 7/28, après c'est facile et tu additionnes les 2.
ECH	Combien est-ce que ça fait, il y a quelqu'un qui a dessiné la collection?
BERTRAND	28 timbres.
HÉLÈNE	28, c'est le nombre de timbres. Quand tu dessines les timbres après c'est plus facile de mettre le 2/7, tu comptes 7 timbres tu en colores 2. [le dessin est reproduit au tableau]
RÉJEAN	Ah! C'est facile comme ça!
ECH	Et ça fait…
MARCEL	8/28
CH	Il reste combien à mettre?
MARCEL	Est-ce que je peux faire le prochain ?
ECH	Vas-y!
MARCEL	7+8 = 15; 28 – 15 = 13, comme ça j'ai pu savoir combien il allait en rester.
CH	C'est quelle portion de la collection de timbres?
MARCEL	13/28
ECH	Et le ¼?
BERTRAND	7/28
MARCEL	Et là tu peux compter combien il t'en reste pour l'Europe de l'Ouest.
CH	Oui, on peut vérifier si on ne s'est pas trompé.

Par ailleurs, nous pouvons remarquer qu'Hélène, qui a eu un support important dans cette tâche, arrive à exprimer très clairement ce qu'elle a fait et à répondre aux questions des élèves. De son côté, Bertrand, qui n'a pas résolu la tâche, participe et montre aussi une compréhension adéquate du problème.

Dans la poursuite des interactions avec les élèves, l'étudiante-chercheure invite les élèves à représenter par une écriture mathématique les relations entre les représentations produites, relations qui tiennent compte de l'ensemble de la situation. Comme le montre l'extrait suivant, Samuel a recours à la lettre x pour indiquer le numérateur recherché, faisant possiblement référence à l'identification des inconnues lors de l'enseignement introductif à l'algèbre.

ECH	Donc quelle écriture mathématique pourrait rendre compte de ce que vous avez fait?
GAEL	28/28 – (7/28+8/28)
CH	Mais ça c'est pour trouver la portion de l'Europe de l'ouest, mais pour représenter la situation?
SAMUEL	7/28 + 8/28 + x/28 = 1 ou 28/28.
CH	Donc on connaissait deux choses dans le problème et on cherchait un troisième qui allait nous donner un entier. C'est ce que ça représente sur le plan mathématique. Pour le calcul, on a plein de possibilités. On pourrait utiliser plein de contextes pour utiliser cette écriture; on cherche une des fractions qui permet de composer le tout, de déterminer quelle partie il nous manquait pour compléter le tout…Par exemple…

Les interactions précédentes ont été exploitées et les échanges successifs avec plusieurs élèves nous ont permis, une fois de plus, de prendre acte du pas franchi par les élèves n'ayant pas résolu le problème sur la répartition des aires du jardin consacrées aux différents légumes, ces élèves participant activement à l'examen collectif des démarches examinées :

ECH	Quelles mesures de côtés tu pourrais choisir pour faire ton 28 cm^2 d'aire?
DAVID	Euh…
ECH	Hélène tu peux l'aider?
HÉLÈNE	4 x 7
MARCEL	2 et 14
CH	Et de plus plat, de plus simple?
GUY	1 et 28.
CH	Est-ce qu'on pourrait utiliser des mesures plus petites ?
DAVID et BERTRAND	Ouais.
SAMUEL	Moi, c'est 1,75.
CH	N'oubliez pas vos carreaux, qu'est-ce qu'on peut faire quand c'est des aires?
DAVID	14
ENS se présente pour voir comment les élèves réagissent aux situations	
ECH	Ouais et qu'est-ce que vous choisiriez comme mesures?

MARCEL	2 et 7.
SAMUEL	Sinon il y a 1 et 14
CH	Et 2/7 il faudrait séparer comment les parties? Comment représentez-vous votre ¼? Votre 2/7? On fait quoi avec les parties?
SAMUEL	Ils vont être à virgule c'est tout! ¼ ça va être 3,5/14.
BERTRAND	3,5 c'est la moitié de 7. On peut les réduire encore plus.
SAMUEL	1 et 7.
CH	Si on ne peut pas couper des personnes ou des timbres on peut toujours séparer des parties de jardin.
SAMUEL	Et ça fait 1,75 sur 7.
CH	Et on pourrait descendre encore.
ENS	Super!

Évolution des rapports des élèves aux nombres rationnels et de la démarche d'acculturation institutionnelle

Les problèmes faisant partie des situations que nous avons présentées aux élèves ont contribué à améliorer leur compréhension de ce type de problèmes (composition de mesures: recherche d'une mesure), problèmes étant plus complexes lorsque les nombres utilisés sont des nombres rationnels. Comme en témoigne le retour, Bertrand a fait ainsi des progrès remarquables. Réjean et Hélène sont, sans contredit, ceux qui ont davantage bénéficié de ces activités. Malgré le délai d'une semaine entre la réalisation de ces tâches et des situations d'apprentissage qui ont été effectuées entre temps, Guy a montré un progrès important : dès le départ, il a considéré l'ensemble de la collection comme un entier, a trouvé aisément le dénominateur commun et n'a eu recours à aucune aide dans la 2^e^ période. De son côté, Hélène a su s'appuyer sur sa représentation pour donner sens aux calculs à effectuer. D'ailleurs, ces différentes situations ont permis aux élèves de mettre à profit le sens rapport des fractions dans la recherche de fractions équivalentes, de conférer un sens à la modification des dénominateurs des fractions (population, nombre d'objets dans la collection, dimensions du jardin), de mieux identifier leurs influences sur l'interprétation des numérateurs qui composent ces fractions et enfin, de mieux apprécier l'équivalence de diverses représentations des fractions, sans recourir, par exemple, à une superposition des aires correspondant à la répartition des fractions pour juger de l'équivalence des fractions.

Enfin, se joignant à nous à la fin des périodes d'enseignement, l'enseignante demande à certains élèves de rendre compte du travail qu'ils ont réalisé; les témoignages de ces élèves confirment l'importance et l'intérêt des situations précédentes :

MARCEL	Ça nous prépare pour l'examen. Ça passe vite tes cours, est-ce qu'on pourrait les faire plus longs?
[…]	
ENS	Guy comment ça été?
GUY	Ça speedé aujourd'hui, j'ai compris vite!
ENS	Et toi Hélène?
HÉLÈNE	Ben là j'ai compris !
ENS	Samuel tu t'es bien amusé?
CH	Il a travaillé très fort, des grandes et de petites collections, il voulait tout ratisser!
SAMUEL	Au contraire, je n'ai pas travaillé très fort!
CH	C'est vrai, j'ai trouvé que ce que vous avez fait correspondait bien à un travail de mathématiciens!

Il est intéressant de constater l'implication des élèves dans des conditions qui ne sont pas a priori très favorables. Les élèves perçoivent la pertinence de nos activités, au regard de leur parcours scolaire. D'ailleurs, Marcel et Réjean affirment que la résolution des problèmes que comportent ces situations leur sera utile pour leur examen. Plus encore, certains d'entre eux trouvent dommage que ces périodes soient si courtes. Ces propos reçoivent l'approbation de la grande majorité des élèves.

La participation des élèves nous a permis de comprendre les difficultés que pouvait engendrer la formulation de l'énoncé dans le processus de représentation. Ainsi, dès l'entrée dans la situation de répartition du jardin, Samuel et Réjean soulignent la confusion résultant de l'absence d'information sur « la partie libre du jardin ». D'autre part, la remarque de Marcel concernant la possibilité de réduire les dimensions du jardin, de passer d'une aire de 28 à 14 cm^2 (référence aux feuilles quadrillées) nous porte à croire que la présence d'objets dans le jardin pouvait aussi créer une ambiguïté :

MARCEL	Mais c'est la même affaire, les mêmes chiffres, ça va être sur 28 encore…pourquoi tu nous as fait ça?
ECH	Tu n'y vois aucune différence, regarde la 2e question du jardin.
MARCEL	Ben on peut pas avoir des demi-brocolis !

4.2.15. Situations impliquant l'addition et la multiplication de nombres rationnels

Deux situations ont été présentées le 24 mai 2007; l'enseignante n'a pu toutefois participer à la présentation de ces situations. Les élèves étaient libres de former des équipes de 2 ou 3 élèves ou encore, d'effectuer individuellement les tâches que comportait chacune des situations. Ces situations sont le fruit d'une concertation entre l'étudiante-chercheure et l'enseignante, l'enseignante ayant suggéré d'exploiter un contexte relativement riche permettant aux élèves de donner sens aux opérations sur les nombres rationnels. Les tâches que comportent ces situations ont également tenu compte d'un premier examen des conduites des élèves lors de l'enseignement de la multiplication de fractions effectué par l'enseignante. En effet, nous avions pu constater que les élèves n'accordaient pas de sens aux gestes consistant à multiplier les numérateurs et les dénominateurs des fractions et que certains élèves confondaient la multiplication de fractions et la production de fractions équivalentes lorsqu'ils s'exprimaient oralement ou à l'écrit. La conduite de Noa est assez représentative des conduites que nous avons pu observer. Lors de la rédaction de sa feuille de notes préparatoires à l'examen, cet élève a écrit : Multiplication de fractions : 2/3 x 4 = 8/12. Les tâches que nous avons privilégiées comptent également sur l'apport potentiel de contextes, au regard de l'hypothèse formulée par Roditi (2007, p.6) selon laquelle, pour les élèves « faibles », « le contexte jouerait alors un rôle facilitant, mais pas toujours suffisant pour contrer des règles implicites fortes de traitement syntaxique des écritures numériques.» Cet aspect est d'autant plus important que les élèves connaissent les rouages techniques de la multiplication de fractions.

Afin de favoriser la transition de l'enseignement/apprentissage de l'addition et de la comparaison de fractions à celui de la multiplication de nombres rationnels, nous avons proposé deux situations de résolution de problèmes impliquant des données et des relations entre les données relativement familières aux élèves : composition additive de mesures et proportionnalité simple (Vergnaud, 1991).

4.2.15.1 Analyse des conduites et des interactions didactiques au cours de la première situation « Projet Angus »

La première situation, soit le projet Angus, comporte deux problèmes additifs et deux problèmes multiplicatifs. Nous reproduisons ci-dessous cette situation.

« À Montréal: le projet Angus et le redéveloppement d'un espace industriel dégradé

Le projet Angus, qui a été réalisé dans le quartier Rosemont à Montréal, se situe sur le site d'anciennes installations industrielles du Canadien Pacifique. Il comprend un ensemble diversifié de fonctions urbaines : des bâtiments résidentiels de moyenne densité, incluant des maisons de ville ainsi que des condominiums et des logements locatifs de type duplex / triplex ; un marché d'alimentation, implanté dans un ancien bâtiment industriel ; quelques autres commerces de proximité et le Technopôle Angus, un parc industriel géré par la Société de développement Angus, un organisme issu du milieu.

Principes de design urbain
Le projet est aménagé conformément aux objectifs et aux principes de design urbain mis de l'avant par le programme de développement, ce qui comprend, entre autres: une trame de rues perpendiculaires prolongeant celle des rues environnantes, ce qui facilite les déplacements et contribue à l'intégration du projet dans le quartier ; un ensemble de petits lots dans lesquels sont établis les immeubles résidentiels, commerciaux, parcs.

Partage de terrain
Depuis qu'il n'y a plus d'habitations disponibles dans le parc Angus, le promoteur a procédé à la mise en place d'un nouveau projet: Le développement Vanguard. Son terrain rectangulaire s'y prêtant bien, il a ainsi effectué une répartition de son terrain initial et mis en vente un certain nombre de lots rectangulaires, de mêmes superficies. Voici la répartition des lots après vente :

2/8 des lots appartiennent au contractant Colombus
2/16 des lots appartiennent au contractant Vascus
7/12 des lots appartiennent au contractant Cartius
1/24 des lots appartiennent au contractant Champlus

Question 1 : Quel peut être le nombre de lots dans ce nouveau développement? Et dans ce cas, pouvez-vous indiquer quel est le nombre de lots achetés par chacun des contractants? Pouvez-vous représenter à l'aide d'un dessin cette répartition des lots et mettre en évidence la part de chacun des contractants?

Question 2 : Croyez-vous que les contractants auraient pu s'entendre si le promoteur n'avait offert que 12 lots? Et dans ce cas, pouvez-vous indiquer quel est le nombre de lots achetés par chacun des contractants? Pouvez-vous représenter à l'aide d'un dessin cette répartition des lots et mettre en évidence la part de chacun des contractants?

Question 3 : Si Vascus a payé 24 000$ pour son achat, quel serait le montant déboursé par chacun des contractants?

Question 4 : Si le prometteur décide de partager un autre de ses terrains, de la même façon qu'il l'a fait précédemment, et de vendre des lots à d'autres contractants, quels seraient ainsi les coûts déboursés par chacun des contractants. Pouvez-vous ainsi compléter le tableau suivant :

Répartition des lots vendus	Montants déboursés par chacun des contractants
1/8	24 000$
?	3 000$
33 1/3%	?
?	4 500$

Dans les deux premières questions, les acquisitions des différents contractants sont exprimées par des fractions du nombre de lots que comporte le développement. Les fractions utilisées sont familières aux élèves et plus encore, les dénominateurs de ces fractions sont des multiples de 4. De plus, le recours à la fraction 1/24 peut inciter certains élèves à une répartition du développement en 24 lots et à trouver une représentation des fractions en recourant au dénominateur de 24. Pour cette raison, à la question 2, il leur est demandé de se prononcer sur une répartition possible en 12 lots, ce qui contraint à revoir les parts attribuées à chacun des contractants. Dans ce cas, il est possible que certains élèves éprouvent des difficultés à exprimer ces parts, notamment la part correspondant à 2/16 des lots.

Les questions 3 et 4 impliquent le traitement de relations multiplicatives; il s'agit de problèmes de proportionnalité simple. À la question 3, le choix de 24 000$ n'est pas étranger à l'anticipation des réponses à la question 1; les élèves qui ont recours à un dénominateur de 24 pour représenter les différentes parts et qui s'attardent aux relations entre les nombres répondront aisément à cette question, sans procéder à des calculs. Enfin, à la question 4, sachant que pour acheter 1/8 des lots, il faut débourser 24 000$, il leur est demandé soit de trouver la fraction des lots correspondant à d'autres montants déboursés ou encore, le montant associé à une répartition des lots vendus. Combien d'élèves procéderont en établissant des rapports entre les prix ou entre les répartitions de lots pour calculer les données absentes? Penseront-ils à représenter la fraction 1/8 par 3/24 pour associer 1/24 de lots à 8 000$?

Comme le montre l'analyse précédente, répondre aux questions que comporte cette situation peut être une excellente occasion donnée aux élèves pour « mettre en valeur » les connaissances et les pratiques qu'ils ont pu construire dans les situations précédentes.

Appréciation globale des conduites des élèves

Nous effectuons d'abord une appréciation globale des réponses des élèves et procédons par la suite à une analyse plus détaillée de leurs conduites. Comme le montre le tableau suivant, les élèves Samuel, Anne, Alex et Noa ont choisi de travailler seuls.

Tableau XLIV: appréciation globale des conduites des élèves dans la tâche Angus

Réponses attendues	Élèves ayant produit des réponses adéquates	Élèves ayant produit des réponses erronées	Élèves n'ayant pas résolu la tâche
Question 1 Colombus : 6/24 Vascus : 3/24 Cartius : 14/24 Champlus : 1/24	***Dénominateur de 24*** Réjean et Rébecca; Martin et Prince; Hélène; Gael +Rémi; Guy, Gaudi et Marcel; Samuel; Anne; Alex; Noa ***Dénominateur de 48*** Noa et Alex; **Dénominateur de 336** Bertrand et David		
Question 2, « oui » Colombus : 3/12 Vascus : 1,5/12 Cartius : 7/12 Champlus : 0,5/12	Réjean et Rébecca; Alex; Martin et Prince ; Bertrand et David; Hélène; Gael et Rémi; Samuel ; Guy, Gaudi et Marcel; Noa		Anne Colombus : 3/12 Cartius : 7/12
Question 3 Colombus : 48 000$ ***Vascus : 24 000$*** Cartius : 112 000$ Champlus : 8 000$	Réjean et Rébecca; Samuel; Noa; Bertrand et David; Gael et Rémi Guy, Gaudi et Marcel	Martin et Prince Colombus : 96 000$ Cartius : 84 000$ Champlus : 12 000$	Alex; Hélène; Anne
Question 4 **1/8 – 24 000$** **1/64 -** 3000$ 33 1/3% **- 64 000$** **3/128 -** 4 500$	Réjean et Rébecca: réponses identiques à celles indiquées dans la première colonne Samuel: 63 360$ pour 33 1/3%	Alex 1/24 – 3 000$ 33 1/3% - 48 000$ 1/16 - 4 500$	Gael et Rémi; Martin et Prince; Guy; Bertrand+David; Hélène; Anne

Comme en fait état le tableau précédent, les réponses de tous les élèves à la première question sont adéquates : cinq équipes et deux autres élèves ont utilisé le plus petit dénominateur commun, soit 24; le dénominateur choisi par l'équipe composée des élèves Bertrand et David, soit 336, correspond au nombre total de carreaux sur la feuille; les élèves Alex et Noa, qui ont effectué la tâche individuellement, ont enfin eu recours au nombre 48 pour représenter les fractions associées aux différents lots.

À l'exception d'Anne, qui se contente de reproduire les fractions dont le dénominateur est 12, la seconde question a été, comme la première question, un succès pour tous: les élèves répondent qu'il est possible d'effectuer la répartition avec 12 lots et produisent un dessin formé de 12 lots identiques (rectangle de 1cm par 12 cm ou de 2 cm par 6 cm ou de 3cm par 4 cm). En majorité, les élèves qui avaient choisi 24 lots pour représenter la répartition (question 1), se contentent de diviser par 2 le numérateur des fractions obtenues précédemment, ce qui, pour la fraction 1/24 (par exemple) donne lieu à l'une ou l'autre des écritures suivantes : ½/12; 0,5/12. D'autres élèves trouvent des fractions équivalentes à celles que comportent les données du problème (2/8; 2/16; 7/12; 1/24), le dénominateur de chacune des fractions étant alors 12; ils produisent des écritures comparables à celles trouvées par les équipes précédentes. Ceux qui avaient exploité le dénominateur 336 pour répondre à la première question procèdent à une simplification de chacune des fractions pour répondre à la seconde question et produisent des écritures comparables à celles des autres équipes.

Onze élèves sur dix-sept ont répondu correctement à la troisième question. Cette question mettait en cause l'établissement de relations multiplicatives entre des mesures représentées par des nombres naturels (coûts) et des mesures représentées par des nombres rationnels (portions de terrain). Les élèves qui avaient représenté les différentes portions en recourant à un dénominateur de 24 voyaient leur tâche simplifiée, en autant qu'ils recourent à ces représentations. Ainsi, on aurait pu s'attendre à ce que Réjean, Rébecca, Hélène, Gaël, Rémi, Samuel, Anne, Guy, Rémi, Marcel, Martin et Prince, réussissent plus facilement cette tâche. Cette attente s'est avérée trop optimiste. En effet, Hélène et Anne n'ont pas effectué cette tâche et les réponses produites par Martin et Prince sont erronées.

La question 4 est similaire à la question précédente. Toutefois, en raison des nombres utilisés, il est plus difficile de trouver les relations entre les prix de vente et les portions du terrain. Seuls les élèves Réjean, Rébecca et Samuel parviennent à répondre correctement à cette question. Ayant représenté 33 1/3% par le nombre décimal 0,33 (approximation), Samuel a alors associé le nombre 63 360 à 33 1/3%.

Analyse des conduites des élèves et des échanges entre les élèves et les chercheures

Pour mieux apprécier les résultats des élèves lors de la réalisation des tâches que comporte cette situation, nous procédons maintenant à une analyse de leurs conduites et des échanges entre ces élèves et les chercheures.

RÉJEAN et RÉBECCA

Très peu de calculs accompagnent les productions de Réjean et Rébecca. Dès la lecture de la *première question*, ils affirment qu'il est d'abord nécessaire de mettre les fractions sur un dénominateur commun pour pouvoir effectuer la représentation des lots. Ils utilisent leurs feuilles sur lesquelles sont inscrites les tables de multiplication et de division pour trouver un dénominateur commun permettant de produire ensuite des fractions équivalentes. Réjean suggère de réduire la fraction 2/16 à 1/8, disant *« je ne peux pas faire 12 fois quelque chose qui va donner 16 »*. L'étudiante-chercheure demande aux élèves de délaisser leurs feuilles sur lesquelles sont inscrites les tables pour regarder plus attentivement les nombres : *«Quel dénominateur pourriez-vous choisir pour représenter à la fois des 8^e^, des 12^e^ et des 24^e^ ? »* Rébecca propose alors 24 et les élèves trouvent facilement les fractions rendant compte de la répartition des lots, soit : Colombus: 6/24; Vascus: 3/24; Cartius: 14/24; Champlus: 1/24. Ensuite, Réjean suggère d'additionner tous les numérateurs afin de vérifier si leur somme donne bien 24. Leurs résultats étant bons, ils procèdent adéquatement à la représentation des différents lots.

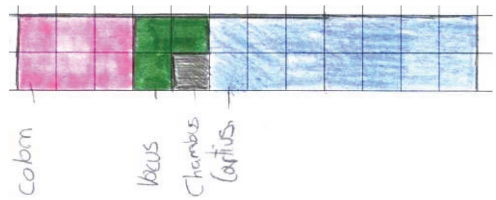
Pour répondre à la *seconde question* concernant la possibilité d'effectuer la répartition en n'offrant que 12 lots, Rébecca répond spontanément: « *la réponse c'est oui sinon ils n'auraient pas posé la question!* » Malgré ces propos empreints de leurs habitudes scolaires, les élèves Rébecca et Réjean montrent une bonne compréhension du problème; ils s'appuient sur leurs résultats précédents et divisent par 2 les numérateurs des fractions: « c'est la moitié… 6/24 = 3/12; 3/24 = 1,5/12; 14/24 = 7/12; 1/24 = 0,5/12 ». Rébecca et Réjean représentent ensuite adéquatement la répartition des 12 lots.

Pour répondre à la question 3, où il leur est demandé de préciser le montant déboursé par chacun des contractants, connaissant le montant payé par Vascus, Rébecca et Réjean prennent le temps de s'attarder aux relations entre la part de chacun, afin de déterminer le montant correspondant : a) Guy : « *6/24 c'est le double de Vascus, Colombus ça serait 2 fois 24 000$ (24 +24 = 48). Cartius…je ne peux pas me rendre de 3 à 14… »; b) Rébecca : « Champlus… 24 divisé par 3…il paie 8 000$. … là il faut trouver 14/24… 6 fois 24…3/24…mais..*» Les élèves font ensuite appel à l'étudiante-chercheure qui leur demande d'expliquer ce qu'ils ont fait et de préciser pour quelle fraction ils ont trouvé 8000$, ce à quoi les élèves réagissent rapidement : « *Ah 1/24! Donc, 14 x 8 = 112…112 000 $* ».

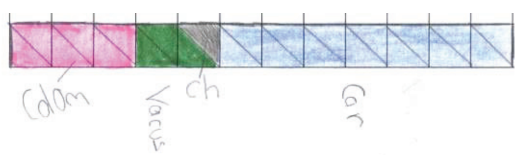
À la question 4, pour trouver la répartition associée à 3 000$, répondant à leur demande, la chercheure leur recommande de comparer 3 000$ à 24 000$, à la suite de quoi les élèves disent que c'est le huitième de 24 000 $ et écrivent 1/8 x 1/8 = 1/64. La chercheure accompagne aussi les élèves dans la recherche du montant associé à 33 1/3%. Rébecca affirme d'abord que le signe « % » signifie sur 100. Ensuite, la chercheure écrit « 33 x 3 = 99 » et dit « si l'on multiplie aussi 1/3 par 3... »**;** à la suite de quoi, les élèves remplacent 33 1/3% par 1/3 et lui font correspondre 64 000$. Rébecca, en aparté, dit alors à la chercheure que c'est curieux; la chercheure lui a alors demandé de lui dire à quelle fraction correspondraient 11 1/8% et 11 1/9%, ce à quoi elle a répondu : « c'est facile pour 11 1/9… 11 x 9 = 99 et 1/9 x 9 = 1… même chose pour les deux donc 1/9 »; elle a ajouté que ce n'était pas pareil pour 11 1/8… parce que « 1/8 il faut multiplier par un autre nombre… pas par 9 … on ne peut faire ça… ». Il avait été prévu que cette élève puisse rendre compte de sa démarche, mais faute de temps, cela n'a pas été possible. La conduite de cette élève « en difficultés » montre des coordinations non triviales de connaissances. Par la suite, Rébecca et Réjean sont parvenus à trouver le montant associé à 33 1/3%, en effectuant les opérations suivantes : 1/8 → 24 000$.... 24 000$ x 8 … 8/8 →192 000$ … 192 000$ ÷ 3). Pour trouver ensuite la portion de terrain dont le coût s'élèverait à 4 500$, ils divisent 4 500 par 192 000, puis 4 500 par 3 000. Cette dernière opération leur a permis d'obtenir le rapport entre les montants d'argent, et puisque ce rapport de 1,5 devait être conservé entre les portions de terrain, ils notent 1,5/64 qu'ils transforment en 3/128.

GUY, GAUDI ET MARCEL

L'équipe composée des élèves Guy, Gaudi et Marcel répond rapidement à la question 1 : *« C'est facile, nous avons tout mis ça sur 24, le 7 pour 12 tu fais fois 2 ».* L'étudiante-chercheure leur demande si les seizièmes ne les embêtent pas, ce à quoi Gaudi répond : « Non tu vas voir … comme on va utiliser le carré ... là (montrant alors la partie qui reste; sur le dessin, c'est en effet la dernière partie qui est identifiée), ça va donner la section sur 16. » Au terme de cette question, ils ont obtenu les fractions suivantes : Champlus :1/24 Colombus : 6/24, Cartius : 14/24 qu'ils ont représentées de la façon suivante :



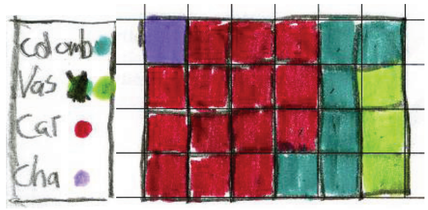
Pour répondre à la deuxième question, ils divisent chacun des numérateurs par 2; ils rendent compte ainsi de leur démarche à l'étudiante-chercheure : « Nous avons divisé les parts en deux ». La représentation suivante des répartitions des lots montre bien qu'ils ont subdivisé chacun des 12 petits carreaux en deux petits triangles, de façon à obtenir 24 petits triangles, ce qui leur a facilité la tâche!



Pour répondre à la question 3, ils exploitent les fractions qu'ils ont trouvées à la question 1 et s'appuient sur la valeur d'un lot (1/24), en sachant que 3/24 coûte 24 000$. Par exemple, pour Champlus, ils font 24 000 / 3 = 8 000$, ce qui leur permet d'obtenir le montant déboursé pour 1/24. Pour Cartius (14/24), ils inscrivent 112 000$, à la suite de la multiplication de 8 000$ par 14; pour Colombus (6/24), ils inscrivent 48 000$ après avoir multiplié le montant associé à Vascus (3/24) par 2 (24 000 x 2 = 48 000$). Leurs raisonnements s'avèrent tout à fait adéquats, voire même économiques. Ils n'ont malheureusement pas eu le temps d'entamer la question 4.

MARTIN ET PRINCE

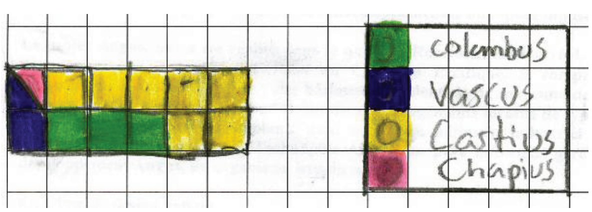
La question 1 n'a posé aucun problème à l'équipe de Martin et Prince. Ces élèves ont vite reconnu que 24 était un dénominateur commun et ont représenté chacune des fractions en recourant à ce dénominateur. Comme le montre le dessin suivant, la répartition des différents lots a adéquatement été représentée en recourant à un rectangle comportant 24 petits carreaux.



La question 2 a généré quelques réticences chez ces élèves : Prince affirme que « *si on multiplie par le même nombre au numérateur et au dénominateur, ça va toujours donner 24* » et Martin réplique : « *On ne peut pas aller plus bas, il faudrait faire des moitiés* ». Les raisonnements de ces élèves étaient absolument valables, 24 est le plus petit dénominateur commun des nombres rationnels en jeu. Comme en témoigne l'extrait ci-dessous, ils ont rapidement clarifié la situation :

MARTIN	Non, regarde celui-là aussi a une moitié … faque 2 moitiés ça fait 1.
ECH	Si lui avait 1 partie pour 24, combien il aurait pour 12?
CH	½
ECH	Ça se coupe en deux des terrains...
PRINCE	D'habitude on n'a pas droit aux chiffres à virgule mais là on peut les mettre.
MARTIN	À cause que c'est des terrains.
ECH	C'est ça avec des personnes ça ne fonctionnerait pas.

Ils ont ainsi trouvé que 1/24 = 0,5/12 (Champlus) et que 6/24 = 3/12 (Colombus); ils ont ensuite repris la fraction initiale représentant la portion de Cartius, soit 7/12. Enfin, ils décident de dessiner les lots identifiés, car ils savent que la portion restante correspondra à celle de Vascus.



Pour la question 3, Martin inscrit 24 000 divisé par 3 = 8 000, mais il ne précise pas que ce montant est celui déboursé par Champlus. De son côté, Prince ne laisse aucune trace de ses calculs et se contente d'inscrire les réponses suivantes : Champlus :

12 000$; Vascus : 24 000$; Colombus : 84 000; Cartius : 96 000. Malheureusement, nous n'avons pu interroger cet élève.

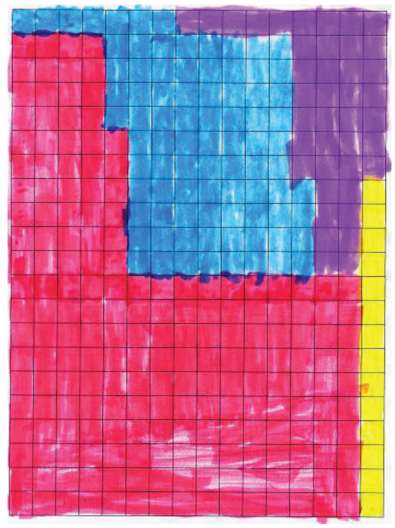
Enfin, pour la question 4, les élèves se contentent d'écrire « 1/64 pour 3 000 », relation qui s'avère exacte. L'étudiante-chercheure a questionné les élèves sur la relation entre 24 000 et 3 000 et ceux-ci ont indiqué que 3 000 était 8 fois plus petit que 24 000. Afin de rendre compte d'une fraction 8 fois plus petite que 1/8, ils ont écrit 1/64. Elle leur a demandé de poursuivre, mais ils ont avoué avoir besoin d'elle, ne sachant comment trouver les autres réponses. Le temps filant, celle-ci leur a conseillé de passer à l'activité suivante.

BERTRAND ET DAVID

Nous avons été étonnées par les productions de Bertrand et David. À la première question, ces élèves se sont d'abord attardés au nombre total de carreaux que contenait la grille qui était à leur disposition. Celle-ci avait des dimensions de 16 par 21 petits carreaux, soit 336 petits carreaux, d'où le dénominateur considéré pour répondre à la question 1. Malgré l'absence de traces des calculs qu'ils ont effectués, nous savons, grâce à l'enregistrement audio, qu'ils ont effectué un produit croisé pour trouver des fractions équivalentes aux différentes fractions qui rendaient compte de la répartition des lots, par exemple : 2/8 = ?/336…336 x 2 = 672…672 ÷ 8 = 84…donc 2/8 = 84/336. La répartition des lots ainsi obtenue est alors la suivante : [Colombus : 84/336, Champlus : 14/336, Cartius : 186/336 et Vascus : 42/336. Ils ont de plus utilisé la calculatrice, malgré notre interdiction :

ECH	Arrêtez de prendre votre calculatrice; on a choisi des nombres pour que vous n'ayez pas besoin de l'utiliser.
DAVID	Mais on fait le produit croisé.
BERTRAND	On a mis sur 336 parce qu'on a compté...
ECH	T'es pas obligé, c'est à toi de choisir le nombre pour qu'il soit facile de représenter des 12^e, des 24^e, des 8^e .
DAVID	336 x 2 = 672...divisé en 8, ça fait 84...

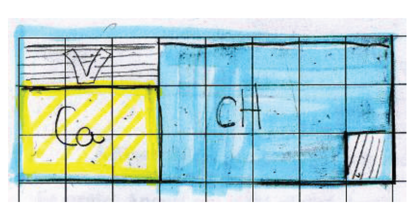
Ils ont par la suite représenté correctement chacune des fractions trouvées de la façon suivante :



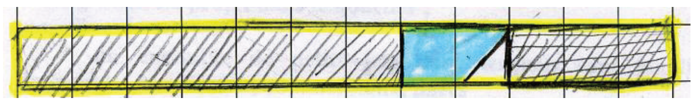
Aucune trace, outre les résultats, n'apparaît sur leur feuille pour les questions 2 et 3, ces élèves utilisant une fois de plus la calculatrice. Pour les répartitions des 12 lots, ils se contentent d'indiquer « *Colombus: 3/12; Vascus : 0,5/12; Cartius: 7/12; Champlus: 1,5/12;* pour le montant déboursé pour chacune des portions, ils écrivent: *3/24 = 24 000$; 14/24 = 112 000$; 1/24 = 8 000$* (24000 divisé par 3). Cela dit, tous leurs résultats et leurs représentations sont adéquats. Notons enfin que ces élèves n'ont pas traité la question 4.

HÉLÈNE

Hélène a répondu correctement à la première question en effectuant les calculs usuels pour trouver les fractions équivalentes, c'est-à-dire en multipliant le numérateur et le dénominateur par un même nombre. On peut retrouver, par exemple les notes suivantes : 7 x 2 /12 x 2 = 14/24. Elle a aussi procédé à une réduction de la fraction 2/16 avant de produire une fraction équivalente comportant un dénominateur de 24 : 2/16 = 1/8…1x3 /8x3 = 3/24. Elle effectue ensuite une représentation adéquate de la répartition des différents lots; un rectangle de 3 petits carreaux par 8 petits carreaux est alors produit.



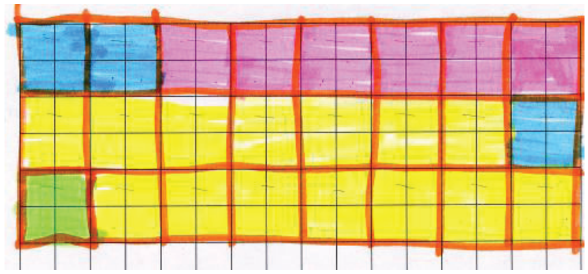
À la question 2, elle pose 2/8 = ? / 12 et souhaite faire le produit croisé, ce à quoi l'étudiante-chercheure répond : *« oui mais si tu veux être plus paresseuse, tu les a tous trouvées sur 24 tout à l'heure, alors qu'est-ce que tu pourrais faire pour 12? »*. Hélène réagit alors en disant qu'il s'agit de la moitié. Elle produit alors le dessin suivant, dessin comportant 12 petits carreaux, ce qui lui permet de trouver aisément une répartition juste des lots, soit : 7/12; 3/12; 1,5/12 et 1/2/12.



Faute de temps, elle n'a toutefois pas répondu aux questions 3 et 4; l'étudiante-chercheure l'a plutôt invitée à résoudre la situation-problème suivante, situation comportant également un problème de proportionnalité simple.

GAEL et RÉMI

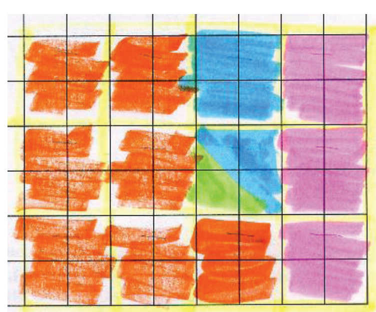
Comme plusieurs, dès le début de la tâche, Gael et Rémi s'attardent à trouver un dénominateur commun. Rémi propose d'essayer avec 24 et lorsqu'il arrive aux seizièmes, il affirme que ça ne fonctionne pas. À ce moment, Gael lui propose de réduire la fraction *« en la divisant par deux pour obtenir 1/8 »* et lui mentionne qu'ensuite, « *il sera facile de la mettre sur 24* ». Ils parviennent ainsi à représenter correctement toutes les fractions, en multipliant le numérateur et le dénominateur de chacune des fractions par le nombre permettant d'obtenir 24 au dénominateur. Le dessin présenté montre une répartition adéquate des lots. Ce dessin montre un rectangle de 16 par 6 petits carreaux; prenant en compte les fractions retenues précédemment, ils effectuent des réunions de petits carreaux, chacune des 24 parties est alors formée de carrés identiques (2 par 2 petits carreaux). Ils affirment d'ailleurs avoir choisi 24 comme mesure, mais ne veulent pas travailler avec des petits carrés. Ce qui amène l'étudiante chercheure à proposer de regarder les fractions équivalentes (sur 24 et sur 96).



Pour répondre à la question 2, ils divisent tout simplement les numérateurs de 14/24 et 6/24 par 2, car tel qu'ils le mentionnent : « *24 divisé en 2 égale 12* ». Il est à noter que pour les répartitions de 1/24 et 3/24 des lots, ils se sont plutôt appuyés sur leur dessin afin de trouver d'abord la « *superficie* » et ensuite, de la réinterpréter numériquement. La remarque effectuée par Gael est intéressante et montre bien que cet élève ne fait pas abstraction du contexte.

GAEL	1/24 par exemple, ça va donner quoi? 0 virgule quelque chose…
RÉMI	Ah, c'est une moitié, comme ça [pointe le dessin] la moitié d'un carré.
GAEL	0,5/12, mais ça serait la moitié d'une maison ça ne se peut pas.
ECH	Non, ça serait une moitié de terrain…

Sur leur feuille, on retrouve les traces suivantes : 6/24 = 3/24; 3/24 = 1,5/12; 14/24 = 7/12 et 1/24 = 0,5/12; un dessin de 8 par 6 carreaux, sur lequel on voit la constitution de 12 carreaux comportant chacun 4 petits carreaux, reflète des répartitions justes des lots :



À la question 3, Gael a fait preuve d'une patience déconcertante *(« je prends mon temps* (15-20 minutes) *pour expliquer à Rémi*»), d'une interprétation juste des difficultés de son coéquipier et du recours à des stratégies fort judicieuses pour lui permettre de comprendre le problème. En effet, pendant la pause, Gael suggère un autre contexte à Rémi, afin qu'il saisisse la relation de proportionnalité, car Gael nous confie, avec exactitude, que « *Rémi se mélangeait entre les lots et les personnes : il voulait diviser 3/24 par 4. Quand je lui disais que 3/24 c'est pour 3 lots et que ça coûte 24 000$ donc 24 000 divisé en 3 c'est pour savoir pour 1 carré, il ne comprenait pas. Je lui ai demandé comment il ferait pour passer de 3 à 14, en fait, il faut que tu saches pour 1 lot. J'ai essayé de lui montrer avec le dessin que si trois lots coûtaient 24 000, un lot coûte 24 000 divisé en 3..8 000$....8 000$ + 8 000 + 8 000 = 24 000$, ça l'aidait un peu des fois. »* À la suite de tentatives infructueuses, il le questionne autrement : *« si 3 gommes te coûtent 24, combien te coûte 1 gomme?* » En fait, Gael venait d'enlever la source d'incompréhension de Rémi qui considérait 3 mesures : nombre de personnes, partition du terrain et coût de celui-ci; le choix de recourir à des entiers est aussi pertinent. Rémi déclare alors qu'il faut diviser par 3 et revient à la situation de départ en disant qu'il faut aussi diviser par 3 parce qu'il y a 3 lots. Après quelques explications supplémentaires, ils conviennent qu'un lot coûte 8 000$. Gael poursuit son questionnement : « *pour 6 lots, qu'est-ce qu'il faut que tu fasses ?* (rep : *fois 6) et 14 lots?* (rep : *fois 14) ».* Ils obtiennent enfin: 48 000; 24 000$; 112 000 et 8 000.

Il est intéressant de constater dans les enregistrements audio, qu'à certains moments, Rémi « *fait comme s'il avait compris* », mais le prolongement des questions de Gael l'amène à raffiner ses interprétations, voire à découvrir de nouvelles façons de faire. Par exemple, alors qu'il lui avait expliqué comment trouver le montant associé à 6/24 en passant par la valeur unitaire (en passant par 1/24), il s'aperçoit qu'il aurait été aussi possible de multiplier par 2 le montant associé à Vascus (3/24…24000$) : « *au pire tu aurais pu faire ça fois 2* ». Ce comportement n'est pas anodin; cet élève montre une très bonne compréhension des calculs relationnels qui caractérisent les problèmes de proportionnalité, pouvant procéder à des analyses des relations entre les mesures d'un même type et à des relations entre les mesures de types différents (Vergnaud, 1991).

À la question 4, la complexité des nombres et de leurs relations amène Gael à vouloir utiliser le produit croisé, faisant fi de tous les moyens qu'il a su exploiter précédemment. Leur ayant interdit de recourir à la calculatrice, l'étudiante-chercheure décide alors de les interroger sur la relation entre 3 000$ et 24 000$:

GAEL	[s'adressant à ECH] Est-ce qu'on peut utiliser la calculatrice?
ECH	Non.
GAEL	1/8 c'est pour 1 lot sur 8, mais ici t'as 3 000$, faque là ce n'est plus rendu sur 1/8? Ça veut dire que le chiffre a grossi.
RÉMI	Non baissé.
ECH	Vous voulez dire la même chose, essayez de vous expliquer, qu'est-ce qui grossit, qu'est-ce qui rapetisse?
[ils s'obstinent et finissent par admettre que puisque le coût a diminué, la portion est plus petite, donc que le dénominateur est plus grand]	
GAEL	Comme avec les tartes, plus de morceaux que tu coupes, plus les morceaux vont être petits.
ECH	1/8 pour 24 000$ et là ton 3 000$ quelle partie de ton 1/8…
GAEL	0 virgule 0 quelque chose…
ECH	Regarde bien tu as 24 et 3...
GAEL	Tu fais 24 divisé par 3.
ECH	Combien ça te donne?
GAEL	Je ne sais pas.
RÉMI	Ah ! 24 000 divisé par 8 donne ça!
ECH	Tu as ton terrain 1/8...c'est 24 000$, mais là 3 000$ ... (ECH fait un dessin) parce que là tu l'as divisé en 8...c'est 8 fois plus petit, 3 000, 3 000, 3 000 … si tu additionnes tout ça, ça donne 24 000$. Comment tu fais pour voir que tu as divisé par 8, que ta fraction est 8 fois plus petite?
RÉMI	Tu fais fois 8 à la place (cet élève faisant référence au dénominateur).
GAEL	Non.
RÉMI	Ben oui, si tu fais diviser par 8 ici tu fais fois 8 ici parce que c'est le contraire de minimiser… au lieu de minimiser tu augmentes le dénominateur.
GAEL	[revient sur 1/8 de 1/8] Ok j'ai catché tout ce que tu as fait, c'est que t'as pris le 1 ici, le 1 vaut 24 000$, ça le 1 carré (1 partie sur 8) mais si on prend ...ça y donne 8 choses pour 1 carré qui donne un petit carré dans ce huit-là … alors si tu fais 8 x 8 donne 64…donc si tu veux juste savoir pour 1...1/64.
ECH	Ok c'est parfait ça.
RÉMI	J'ai rien compris.
ECH	Gael tu réfléchis plus à partir du dessin mais si tu regardes ici, tu as divisé par 8 pour passer de 24 000$ à 3 000$, mais ici tu as 1/8 divisé par 8. Pour avoir quelque chose de 8 fois plus petit.
GAEL	Il faut un dénominateur 8 fois plus grand.
ECH	Parce que tes morceaux vont être 8 fois plus petits.
RÉMI	64 c'est plus loin de 1 donc c'est plus petit.
GAEL	Ok regarde Rémi, il y a 8 terrains. Dans les 8 terrains, t'as 1 terrain puis tu le sépares en 8.
RÉMI	Oui, je le sais.
GAEL	Pour que ça donne 3000$ savoir pour un petit terrain (parle du 3000$), un petit terrain dans 8 terrains qui est dans 8 terrains faque si tu veux savoir c'est 8 terrains dans ce huit-là, comment tu vas faire?
RÉMI	Je vais faire fois 8.
GAEL	Donc 8 fois 8 donne 64, faque tu as 64.
RÉMI	Dans 1 terrain, ouais, j'ai compris.

Il est fort intéressant de constater que la restriction d'utiliser la calculatrice a amené Gael et Rémi à prendre en compte les relations entre 1/8 → 24 000$ et ? → 3000$, relations leur ayant permis d'évaluer l'ordre de grandeur de la réponse. Il est aussi particulier de noter que malgré le vocabulaire employé par l'étudiante-chercheure qui fait davantage appel à la division, Gael le réinterprète et réexplique à Rémi en exploitant la multiplication (une partie d'une partie). Le dessin a probablement amené cet élève à conférer un sens aux gestes effectués.

La notation suivante 33 1/3 % ne sera pas sans embêter les élèves qui demandent l'aide de la chercheure :

RÉMI	Le prochain va être difficile, un pourcentage! 1/3 pourcent, c'est quoi ça?
GAEL	Trois cent trente et un tiers pourcent, c'est quoi ça?
CH	Non c'est 33 et 1/3%, 33 et 1/3 …sur 100 .
GAEL	Ah ok produit croisé.
CH	Attends plus simple, je vais te montrer quelque chose, on a fait exprès...33 si vous le multipliez par 3, ça donne combien?
GAEL	66
RÉMI	99
CH	et 1/3 fois 3?
GAEL et RÉMI	3/9
CH	Non, si vous prenez 1/3, un autre tiers et un autre vous allez avoir 3 fois 1/3, 3/3 et ça c'est quel nombre? 99 et 3/3 on peut l'écrire autrement, c'est quel nombre?
GAEL	100%
CH	C'est ça 33 et 1/3 pourcent, c'est 1/3.
GAEL	En réalité, le produit croisé serait revenu au même?(sur sa feuille c'est 33 1/3 = ?/100)
CH	Ouais mais… faites-le, vous allez voir!
RÉMI	C'est 1/3 sur 100$?
CH	1/3
RÉMI	Ouais, mais pour le montant déboursé, c'est quoi?
CH	Je sais pas . . c'est quoi le montant déboursé quand on achète au complet le lot? Quand on achète tout? ...1/8 , c'est 24 000$... et pour le tout? Pour 8/8 vous allez payer combien?
RÉMI	24 000 fois 8...
CH	192 000, maintenant vous pouvez calculer le tiers.
RÉMI	192 divisé par 3....ça donne 64 000$.

De son côté, Rémi semble plus ou moins comprendre les transformations d'écritures bien qu'il réponde correctement aux questions de la chercheure portant sur la multiplication. Nous verrons d'ailleurs que les difficultés précédentes ne sont engendrées que par la difficulté d'interprétation de l'écriture, car les passages suivants présentent une prise en compte des relations entre les nombres, bien que « fois plus » et « de plus » soient confondus :

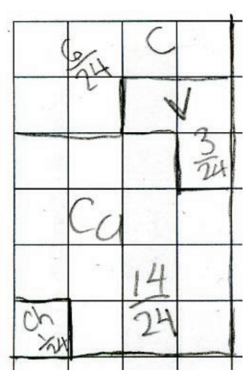
GAEL	Ici c'est facile, 2/5, ben 2 virgule…
RÉMI	Non, non, non… tu l'as pas.
GAEL	2,5/64 va donner 4 500$.
CH	Comment vous avez fait ça?

GAEL	1½ + 1 donne 2,5…1/64 donne 3 000$, tu veux avoir 1 500$ de plus. En réalité c’est 1,5 de plus ca serait 2,5... 3 000…. 4 500…1 et ½…1,5 de plus..2,5/64 pour donner 4 500$.
CH	Par rapport à l’autre, si je multiplie 3 000 par 1,5, j’obtiens 4 500$. Ce n’est pas de plus, c’est fois plus, c’est une erreur qu’on fait souvent. Si j’ai 3 000 à 4 500, vous avez bien compris que c’est 1,5, 1 fois et demie pas plus. Une fois 3 000 donne 3 000, une demie fois donne 1 500 et tout ça donne 4 500. Deux fois donneraient 6 000 donc c’est entre les 2.

De son côté, Rémi a tenté de trouver la part de lot correspondant à 4 500$ en s’appuyant sur les relations 1→24 000$ et ? → 4 500$: « 24 000 divisé en 6 = 4 000$...où tu trouves ton 500, tu multiplies après? » Bien qu’il n’ait pas mené à terme sa réflexion, nous savons qu’indépendamment Gael et Rémi se sont basés sur les données précédemment trouvées pour rechercher la part manquante et qu’il s’agissait de bon départ.

SAMUEL

Samuel, travaillant seul, répond à la première question très rapidement : « *le 3/8 on peut faire fois 3 pour le mettre en 24^{e}, ça donne 9/24; le 2/16 on le réduit à 1/8 pis ensuite on fait fois 3 pour donner 3/24. Ensuite le 7/12, on fait fois 2, ça donne 14/24. Pis le 1/24, on fait rien.* » Il procède alors à la réalisation d’un dessin de 6 par 4 petits carreaux :

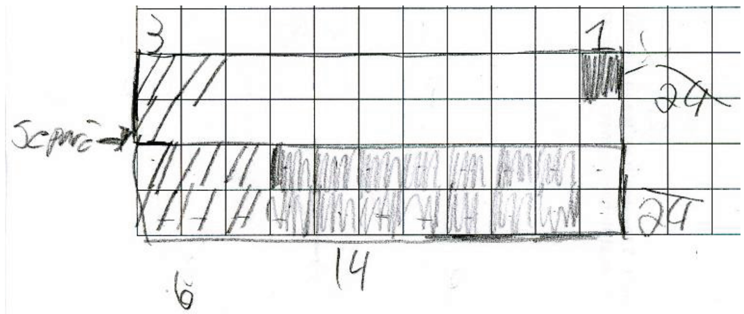


Pour la question 2, il inscrit qu’il est possible que les contractants puissent s’entendre si le promoteur n’avait offert que 12 lots, car 24 peut être divisé en 12. Nous ne pouvons savoir s’il a travaillé à partir des nombres ou de la représentation précédente. Le dessin de 4 par 3 petits carreaux laisse entrevoir une répartition adéquate à laquelle sont associées les portions suivantes : Colombus : 3/12; Vascus : 0,5/12; Cartius : 7/12; Champlus : 1,5/12.

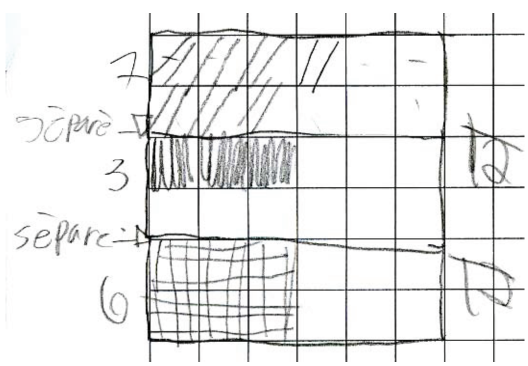
En réponse à la question 3, Samuel trouve la valeur d'un lot en divisant 24 000 par 3 (3/24 = 24 000…1/24 = 8 000) et identifie rapidement les données manquantes : C = 48 000 (2 x 24 000); Ca = 112 000 (48 000 x 2 +16 000); Ch = 8 000. À la question 4, en sachant que 1/8 de terrain coûte 24 000$, il associe 1/64 pour la répartition de lots vendus au montant de 3 000$: « *8 fois 3 ça donne 24, faque j'ai fait 8 fois 8, 64* ». Pour 33 1/3%, il recherche d'abord le coût de 33% des lots et ensuite celui de 1/3% des lots, en effectuant le produit croisé; les nombres ont probablement eu une influence sur le recours à un tel procédé, procédé auquel cet élève a peu souvent recours. Samuel est un des élèves qui préfèrent ne travailler qu'à partir des nombres. D'ailleurs, dans ce cas-ci, le contexte n'a pas favorisé la régulation de son résultat : il ne pouvait donner sens à l'écriture de 33%. Devant cette interprétation erronée, l'étudiante-chercheure l'accompagne en lui demandant s'il pouvait lire le nombre (trente-trois et un tiers pourcent) et s'il connaissait l'écriture décimale de 1/3. Ayant nommé 0,333, l'étudiante-chercheure croyait qu'il serait alors plus facile pour l'élève de considérer 33,33% comme 1/3. Ce ne fut pas le cas. L'élève demande à la chercheure s'il peut utiliser la calculatrice. La chercheure n'autorise pas cet accès; elle inscrit plutôt sur une feuille « 33 1/3 … 99 3/3 ». Samuel écrit alors : 28 x 4 = 192 000; ?/192 000 = 33,3… (notation périodique)/ 100 et pour trouver ce résultat, il effectue les calculs suivants: 192 000 x 333 = 63 936 000 ; 63 936 000 ÷ 1000 = 63 936.

ANNE

Afin de permettre à Anne d'interpréter la question 1, l'étudiante-chercheure a reformulé la consigne et lui a fait part de la similitude de cette situation avec l'activité de représentation des tablettes de chocolat : « *tu dois choisir le nombre de carreaux sur un terrain rectangulaire pour pouvoir représenter à la fois tes 8^{e}, 12^{e}, 16^{e}, 24^{e}...un peu comme on avait fait pour la tablette de chocolat* ». Anne effectue alors un bon travail sur les fractions équivalentes pour la question 1 : Colombus : 2/8 = 6/24; Cartius : 7/12 = 14/24 ; Champlus : 1/24. Elle simplifie aussi 2/16 en 1/8 pour ensuite trouver 3/24. Toutefois, le dessin effectué montre un traitement inadéquat du dénominateur. Elle dessine un terrain de 11 par 4 petits carreaux, sur lequel elle hachure un nombre de carreaux correspondant aux différents numérateurs.



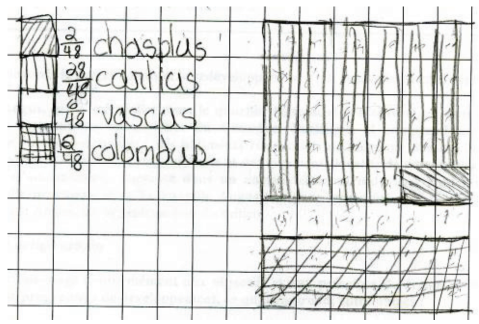
À la deuxième question, elle répond qu'il est possible d'effectuer une répartition sur 12 et afin d'en rendre compte, elle réduit la fraction 2/8 à ¼ et puis trouve la fraction équivalente à celle-ci, soit 3/12, pour représenter la part de Colombus. Pour représenter la part de Champlus, elle multiplie le numérateur et le dénominateur de la fraction 1/24 par 4, obtenant alors la fraction erronée 4/72; elle procède ensuite à la soustraction « 72 – 4 », obtenant alors 68. Elle n'inscrit toutefois pas ce dernier nombre dans le relevé de la répartition. Elle inscrit également le nombre 6/12 dans son relevé, mais ne laisse aucune trace de ses calculs; le ? qu'elle associe à cette fraction montre enfin qu'elle ne peut associer ce nombre à un contractant. Le dessin qu'elle produit montre un traitement indépendant de chacune des fractions; on a ainsi pour 6/12, 6 carreaux hachurés sur 12, pour 3/12, 3 carreaux hachurés sur 12 nouveaux carreaux et pour 7/12, 7 carreaux sur hachurés sur 12 nouveaux carreaux.



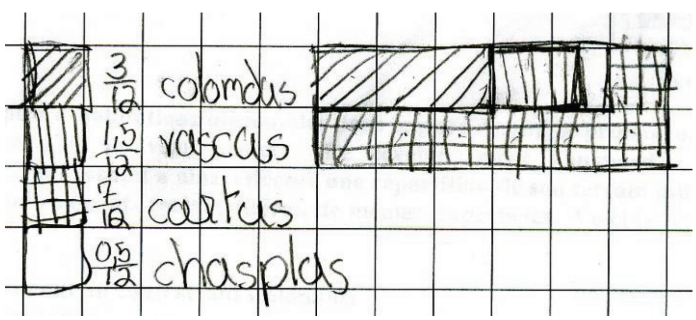
Enfin, elle n'a pas eu suffisamment de temps pour répondre aux questions 3 et 4.

NOA

Pour la première question, Noa choisit le dénominateur commun 48; il effectue les calculs suivants : 2x6/8x6 = 12/48; 2x3/16x3 = 6/48; 7x4/12x4 = 28/48 et 1x2/24x2 = 2/48. L'exploitation de ce dénominateur n'a pas requis la réduction de fractions, tous les dénominateurs des fractions initiales étant des facteurs de 48. Le dessin présenté est juste et adéquat dans la mesure où il n'y a eu aucune contrainte quant à la grandeur du terrain :



D'autre part, cet élève répond affirmativement à la deuxième question et représente numériquement les lots achetés par chaque contractant en divisant le numérateur des fractions précédentes par 4 : 3/12, 1,5/12, 7/12 et 0,5/12. Afin de rendre compte de ces répartitions, il produit le dessin suivant et identifie adéquatement chacune des parts.

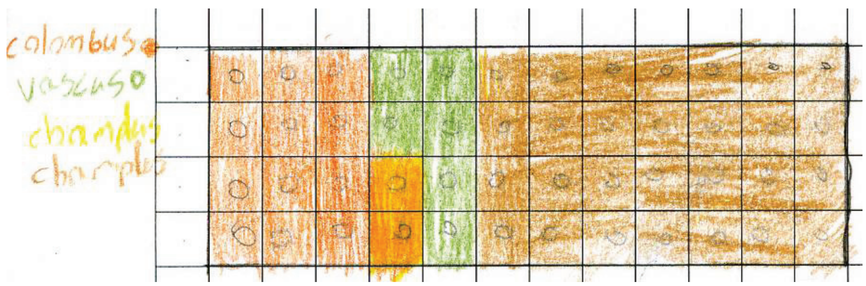


Toujours en s'appuyant sur les résultats précédents, Noa détermine les montants déboursés (question 3) de la façon suivante : Vascus ayant payé 24 000$, montant qu'il a associé à la fraction 6/48, il divise 24 000 par 6; 4 000$ devient alors le montant de référence, la valeur unitaire (1/48). Ensuite, il multiplie 4 000$ par chacune des parties détenues par les contractants : 4 000 x 2 = 8 000 pour Champlus; 4 000 x 12 = 48 000

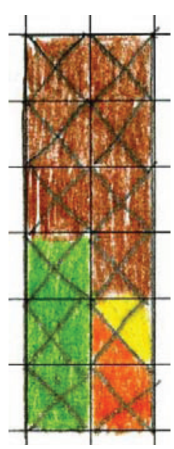
(Colombus) et enfin, 4 000 x 28 …56+56=112…112 000$ (Cartius). Cet élève n'a toutefois pas répondu à la question 4.

ALEX

Alex a aussi choisi 48 pour rendre compte du nombre de lots dans ce nouveau développement. Nous retrouvons les écritures suivantes sur sa feuille : a) 24, 32, 48; b) Colombus : 2/8…. X 7….14/56; Vascus : 2/16…x 3…6/48; Cartius : 7/12…x 4….28/48 ; Champlus : 1/24…x 2…2/48. Il n'utilise pas le plus petit commun multiple mais les fractions, sauf la première, sont justes. En ce qui concerne la première fraction, il semble s'être trompé dans le choix de l'opérateur (7 au lieu de 6). Cependant, le dessin et la répartition correspondent aux bonnes fractions (12/48; 6/48; 2/48 et 28/48)



Aucun calcul n'accompagne la question 2, toutefois le dessin produit est exact (rectangle de 2 petits carreaux par 6 petits carreaux) et les parties hachurées sont bien associées aux fractions qui montrent une interprétation juste, soit : 7/12, 1 1/2/ 12; 1/2/12; 3/12. Il est intéressant de noter qu'il a subdivisé chaque petit carreau en 4 parties, de façon à retrouver 48 petits triangles lui facilitant sûrement le passage d'une représentation à l'autre.

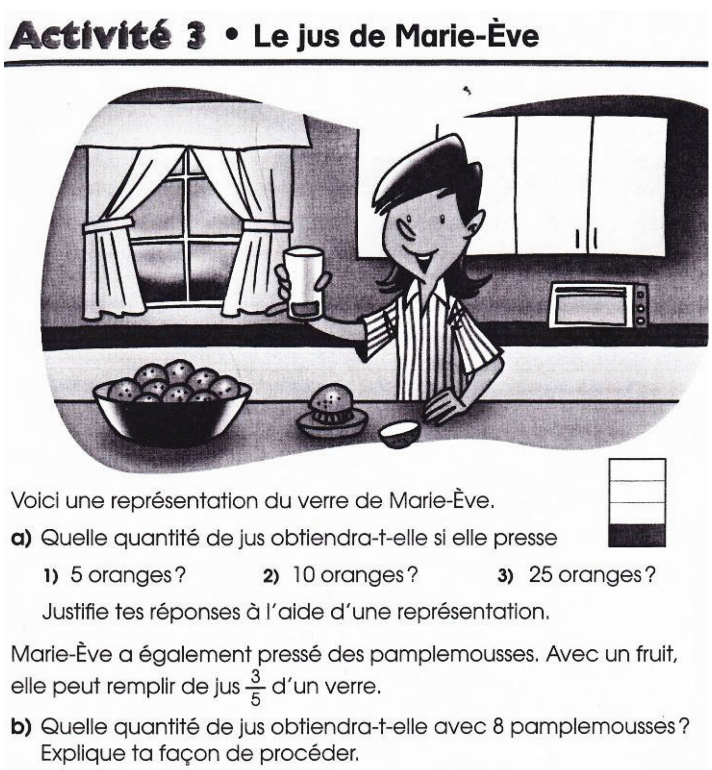


Pour la question 3, on ne relève aucun calcul sur sa feuille; il ne produit aucune réponse. Les réponses produites pour la question 4 sont erronées.

Il importe enfin de noter que plusieurs élèves déterminent le prix pour un terrain, ce passage par la valeur unitaire nous semble prendre appui sur les problèmes multiplicatifs effectués précédemment.

4.2.15.2. Analyse des conduites et des interactions didactiques au cours de la seconde situation « Jus d'orange»

La seconde situation qui a été présentée aux élèves, le 24 mai 2007, est une adaptation de la situation suivante puisée dans le manuel Clicmath (Guay, Hamel et Lemay, 2003, p.47)



Activité 3 • Le jus de Marie-Ève

Voici une représentation du verre de Marie-Ève.

a) Quelle quantité de jus obtiendra-t-elle si elle presse

1) 5 oranges ? **2)** 10 oranges ? **3)** 25 oranges ?

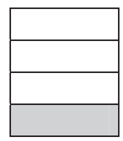
Justifie tes réponses à l'aide d'une représentation.

Marie-Ève a également pressé des pamplemousses. Avec un fruit, elle peut remplir de jus $\frac{3}{5}$ d'un verre.

b) Quelle quantité de jus obtiendra-t-elle avec 8 pamplemousses ? Explique ta façon de procéder.

Comme nous en avons fait état, à maintes reprises, le choix des nombres dans toutes situations d'enseignement est crucial. Il nous a semblé ainsi pertinent d'effectuer une meilleure exploitation de la situation précédente, notamment, des relations entre des nombres entiers d'oranges pressées pour déterminer les quantités de jus d'orange associées à ces nombres et réexploiter par la suite cette démarche dans le traitement d'autres mesures. La situation suivante a ainsi été proposée aux élèves qui pouvaient, comme à la situation précédente, former des équipes s'ils le désiraient.

> Marie-Ève est chargée de préparer du jus d'orange frais pour toute la famille. Elle utilise un très grand verre qui peut contenir 1 litre de jus, lorsqu'il est rempli à ras bord. Voici une représentation du verre de Marie-Ève après qu'elle ait pressé une orange.



> Quelle quantité de jus obtiendra-t-elle si elle presse différentes quantités d'oranges ? Pour les besoins de la cause, nous faisons l'hypothèse que chacune des oranges produit la même quantité de jus.

NOMBRE D'ORANGES PRESSEES	**QUANTITE DE JUS OBTENU (L)**
5	
1	
½	
	6/4
1/8	
	3,75

Dans cette situation, la quantité de jus « 6/4 L » inscrite sur la 4^{e} ligne du tableau n'a pas été choisie au hasard; elle correspond à la réunion des quantités précédemment trouvées pour 5 oranges et 1 orange. Cette quantité peut aussi être associée à la relation multiplicative entre ¼ et 6/4, soit 6/14 = 6*1/4, ce qui donne directement accès, grâce aux données du problème (1 orange pour 1/4L), au nombre d'oranges pressées. Mentionnons enfin que les fractions ½ et 1/8 associées aux nombres d'oranges pressées sont très familières aux élèves; leur mise en relation s'en trouve ainsi facilitée.

Appréciation globale des conduites des élèves

Nous effectuons d'abord une appréciation globale des réponses des élèves et procédons par la suite à une analyse plus détaillée. Le tableau suivant dresse ainsi un portrait général des conduites des élèves. Pour ce faire, nous avons regroupé les élèves ayant produit les réponses attendues, ceux ayant commis des erreurs et enfin, ceux n'ayant pas produit de réponse.

Tableau XLV: Résultats des élèves dans une situation de proportionnalité simple

<table>
<tr><th>NOMBRE D'ORANGES PRESSEES</th><th>QUANTITE DE JUS OBTENU (L)</th><th>ÉLEVES AYANT PRODUIT LA REPONSE ATTENDUE</th><th>ÉLEVES N'AYANT PAS PRODUIT LA REPONSE ATTENDUE</th><th>ÉLEVES N'AYANT PAS PRODUIT DE REPONSE</th></tr>
<tr><td rowspan="4">5</td><td>1 ¼</td><td>Anne; Gael et Rémi; Gaudi, Guy et Marcel; Hélène ; Alex</td><td rowspan="4"></td><td rowspan="4">David et Bertrand</td></tr>
<tr><td>1 ¼ l ou 1,25 l</td><td>Rébecca et Réjean</td></tr>
<tr><td>1250 ml</td><td>Samuel</td></tr>
<tr><td>1,25</td><td>Prince et Martin</td></tr>
<tr><td rowspan="3">1</td><td>¼</td><td>Hélène; Prince et Martin; Alex; Anne; Gael et Rémi</td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3">David et Bertrand</td></tr>
<tr><td>¼ l ou 0,25 l</td><td>Guy et Rébecca</td></tr>
<tr><td>250 ml</td><td>Samuel</td></tr>
<tr><td></td><td>¼ ou 250 ml</td><td>Gaudi, Guy et Marcel</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">½</td><td>1/8</td><td>Gael et Rémi; Gaudi, Guy et Marcel; Hélène; Prince et Martin</td><td rowspan="3">Alex (¼)</td><td rowspan="3">Anne
David et Bertrand</td></tr>
<tr><td>1/8 l ou 0,125 l</td><td>Rébecca et Réjean</td></tr>
<tr><td>125 ml</td><td>Samuel</td></tr>
<tr><td>6</td><td>6/4 l</td><td>Rébecca et Réjean; Gaudi, Guy et Marcel; Gael et Rémi; Hélène; Martin et Prince; Samuel</td><td>Alex (25)</td><td>Anne ;
David et Bertrand</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1/8</td><td>1/32 l</td><td>Rébecca et Réjean ;
Prince et Martin</td><td rowspan="2">Gael et Rémi (8/32)
Alex (1/8) ;</td><td rowspan="2">Anne ; Hélène;
David et Bertrand</td></tr>
<tr><td>1/32 l ou 31,25 ml</td><td>Samuel ; Gaudi, Guy et Marcel</td></tr>
<tr><td>15</td><td>3,75 l</td><td>Rébecca et Réjean;
Gaudi, Guy et Marcel
Martin et Prince (3 3/4)
Samuel (3 ¾ ou 3,75)</td><td>Alex (3/75)</td><td>Gael et Rémi; Hélène; Anne ; David et Bertrand</td></tr>
</table>

Compte tenu des difficultés rencontrées dans l'activité précédente, David et Bertrand n'ont pas été en mesure d'entreprendre l'activité; Anne a trouvé uniquement la quantité de jus obtenu pour 1 et 5 oranges; Hélène a produit quatre réponses sur six.

Au regard de ce tableau, nous remarquons la diversité des représentations des réponses émises par les élèves : fractions; nombres fractionnaires; nombres entiers et nombres décimaux, ces derniers nombres étant utilisés pour exprimer les quantités en litres ou en millilitres. Le peu de traces présentes sur les documents des élèves traduit, pour certains élèves, l'exploitation de la représentation graphique et pour d'autres, la simplicité des calculs ayant été effectués. Nous remarquons, à ce propos, que cette tâche a été très bien réussie, si l'on tient compte bien sûr du fait que les élèves qui ont éprouvé des difficultés lors de la réalisation de la situation précédente n'ont pas eu le temps de s'engager dans la réalisation de cette situation. Parmi les élèves qui ont laissé des traces des procédés mis en œuvre pour effectuer cette tâche, Alex est le seul à avoir rencontré de sérieuses difficultés.

Analyse des conduites des élèves et des échanges entre les élèves et les chercheures

Pour mieux apprécier les résultats des élèves lors de la réalisation de cette situation, nous procédons maintenant à une analyse de leurs conduites et des échanges entre ces élèves et les chercheures.

HÉLÈNE

Si l'on s'attarde d'abord, plus particulièrement, au travail effectué par Hélène, nous constatons qu'elle a davantage fait preuve d'un rapport « techniciste » aux procédés de résolution du problème. Par exemple, elle explique à l'étudiante-chercheure que pour ½ orange, « *Je sais que ça [1/4] c'est pour une orange, elle l'a coupée en 2. C'est la moitié de ... c'est ½ de ¼ et que le «de», c'est fois*[51] ». Les traces laissées sur sa feuille nous permettent d'entrevoir les interventions de l'étudiante-chercheure qui souhaite permettre à l'élève de comprendre davantage le sens des calculs qu'elle propose. Les questions de l'étudiante-chercheure l'ont conduite à partager en deux la quantité de jus produite par une orange et afin d'interpréter cette nouvelle mesure, elle compare le calcul précédent à « 1/4 ÷ 2 » et inscrit 1/8. L'étudiante-chercheure l'a amenée aussi à revenir sur le résultat correspondant à la quantité de jus obtenue en pressant 5 oranges; elle a alors dessiné un deuxième verre au côté de celui présenté dans l'énoncé du problème et colorié cinq parties correspondant à ¼, soit la mesure correspondant à une orange. Au moment de traiter 6/4 L, Hélène a sollicité l'aide de l'étudiante-chercheure, aide qui a mené aux échanges suivants :

[51] Truc qui fait partie de leurs notes de cours.

HÉLÈNE	6 oranges pour 4 litres....c'est pas 6 oranges parce qu'il faut que ça fasse comme une fraction, ECH viens nous voir! Ici c'est le nombre d'oranges qu'on doit presser..ici le 6/4 c'est 6 oranges pour 4 litres..ou...
ECH	C'est juste des litres, 6/4 de litres. Est-ce que tu peux l'écrire autrement ce 6/4?
HÉLÈNE	3/2?
ECH	Oui, mais ça ne nous aide pas plus à voir.
HÉLÈNE	[qui regarde son dessin] 4/4+2/4.
ECH	Regarde, on a 1 orange pour ¼...donc pour 6/4...
HÉLÈNE	6 oranges.
ECH	Oui!

Dans cet échange, nous avons pu constater qu'Hélène n'accédait pas pas privilégié d'emblée la relation multiplicative « 6 * ¼ » pour interpréter la fraction 6/4, qui donnait directement accès au nombre d'oranges pressées, soit 6. Les petits détours lui a cependant permis de conférer un sens à cette relation. Pour le 1/8 d'orange pressée, elle fait, une fois de plus, appel à l'étudiante-chercheure :

HÉLÈNE	Ici pour le 1/8...
ECH	Elle va avoir quelque chose de très très petit….
HÉLÈNE	Tu sépares encore en 2 ?
ECH	Ce qu'elle a fait pour 1 orange, là elle a fait 1/8 de ça.
HÉLÈNE	J'abandonne !
ECH	Elle a fait 1/8 de ça (pointe la représentation de 1/4)

Nous aurions pu nous attendre à ce que cette élève utilise le même raisonnement qu'elle avait déployé pour ½ orange qui, dans ce cas, aurait été 1/8 de ¼. Cependant, nous pouvons constater qu'elle s'appuie sur le dessin et confond le nombre d'oranges avec la quantité de jus : elle propose de partager la quantité de jus pressée que fournit une orange (¼) en deux pour obtenir 1/8, mais il s'agit de 1/8 d'orange et non de litres. L'étudiante-chercheure n'est pas intervenue davantage car elle désirait voir comment l'étudiante procèderait, travail qu'elle n'a malheureusement pas poursuivi.

PRINCE ET MARTIN

Prince et Martin ont tout d'abord répondu au problème en inscrivant, dans la case libre, une représentation différente du nombre donné : 5 -> 5,00; 1 -> 1,00; ½ -> 50%; 6/4 -> 1+ ½ ; 1/8 -> 3/24; 3,75 -> 3 ¾. L'enseignante leur suggère donc de relire l'énoncé, intervention permettant aux élèves de résoudre adéquatement la situation. Le choix des représentations sous une forme fractionnaire ou décimale nous informe des relations ayant été prises en compte pour résoudre le problème. Par exemple, la relation entre 5 oranges pour 1,25 litres a permis aux élèves de savoir que pour 3,75 litres, Marie-Ève aurait besoin de trois fois plus d'oranges, soit 15.

GAUDI, GUY et MARCEL

Il est intéressant de noter que les trois premières réponses produites par Gaudi, Guy et Marcel étaient exprimées en faisant référence à la relation partie-tout, par exemple : 1/8 de 1 litre; toutefois, la prise en compte de la quantité de jus correspondant à 6/4 L leur a permis de réinterpréter leur résultat précédent comme une mesure, soit 1/8 l. Afin de trouver la quantité de jus obtenu à partir de 1/8 d'orange pressée, Gaudi a divisé, en utilisant l'algorithme usuel, la quantité pour 1 orange, soit 250 ml, par 8 (250 ÷ 8) et a inscrit 31,25 ml. On peut penser que pour déterminer cette opération, il a pris appui sur l'interprétation produite par Guy qui a partagé le verre de jus en quatre parties égales et a établi une correspondance entre ces parties et les volumes respectifs de jus (250 ml… 500ml… 750ml…1000 ml), puisque Gaudi et Marcel avaient initialement associé ¼ de litre à une orange. La chercheure a aussi porté à leur attention, les relations entre les différentes mesures; elle a alors inscrit « ½ orange pour 1/8 litre; 1/4 d'orange pour 1/16 litre » et leur a demandé de trouver la quantité de jus pour 1/8 d'orange, en s'appuyant sur les relations précédentes. C'est ainsi, qu'ils ont aussi trouvé 1/32 litre.

Afin de trouver le nombre d'oranges pressées pour donner 6/4 litres, la chercheure propose à Guy d'examiner ce que Gaudi a exploité; elle fait une flèche sur la feuille de Guy reliant les quantités 6/4 et ¼ l. Guy conclut rapidement qu'il faut prendre 6 oranges et apprécie l'économie d'un tel procédé. Enfin, la quantité correspondant à 3,75 L a été représentée par 3 ¾ L par la chercheure, représentation immédiatement exploitée par les élèves pour établir la relation entre ce volume et le volume de 1 ¼ L associé à 5 oranges et indiquer qu'il faut multiplier 5 par 3 pour obtenir le nombre d'oranges permettant d'obtenir 3 ¾ l. Suite à cette réponse, la chercheure leur a aussi fait remarquer que 3 ¾ équivalait à 15/4 et que cette donnée pouvait être mise directement en relation avec la quantité de jus associée à une orange, soit ¼.

SAMUEL

Sur la feuille de Samuel, nous retrouvons les écritures suivantes :

250	
250	
250	
250	*¼*

Cette combinaison des représentations fractionnaires (l) et entières (ml) lui a permis tout au long de cette activité de composer plus facilement les différentes mesures attendues, de valider ses résultats, etc. D'ailleurs, pendant la période de travail, Samuel explique ce qu'il fait à Rémi (qui fait partie d'une autre équipe), de la façon suivante : « *millilitre ça veut dire 1000 donc 1 litre c'est 1000 ml, divisé par 4 ça donne 250 ml…250 ml par quart.* » Il a inscrit « *1500 ml* » et *« 1 et 2/4 »* au côté de la donnée 6/4 L, puis associé 3 ¾ à 3,75L. Ces dernières écritures rendent compte des seules relations ayant nécessité la conservation de traces. En effet, pour trouver le nombre d'oranges pressées permettant d'obtenir 6/4 l, il s'est appuyé sur l'équivalence entre 1 500 ml et 6/4 l et a alors exploité les réponses précédentes, réponses qu'il a exprimées non seulement en nombres entiers de millilitres, mais aussi en nombres fractionnaires de litres (ex. à 5 oranges, il a fait correspondre 1 ¼ ou 1 250 ml). Ayant précédemment obtenu 1 ¼ ou 1250 ml pour 5 oranges, ainsi que ¼ ou 250 ml pour une orange, il a composé le 1 500 ml à partir du 1 250 ml et du 250 ml et fait correspondre le nombre d'oranges correspondant, soit 6. Pour une demie orange, il a exploité les résultats trouvés précédemment pour une orange et a noté 1/8 l et 125 ml.

GAEL et RÉMI

Tout d'abord, Rémi a effectué, en recourant à l'algorithme usuel, la division de 5 par 4, afin de trouver la quantité de jus correspondant à 5 oranges pressées. Il a cependant eu de la difficulté à interpréter son résultat, ne sachant trop quoi faire avec le reste de 1 : *« c'est 1 verre et quelque chose d'autre, mais je ne sais pas c'est quoi ce quelque chose d'autre.»* Gaël, de son côté affirme que : « *ça c'est pour 1 orange ... donc il faut qu'elle en presse encore 3 pour faire 1 litre … mais là il y en a 5… ça serait 1 litre et ¼* ». Ayant réitéré 5 fois ¼, Gaël assiste Rémi dans la compréhension du reste qu'il a obtenu en s'appuyant tant sur le calcul de la multiplication que sur le dessin associé au problème: « *5/4, 5 fois 1/4, 1,2,3,4,5…1 entier et cette petite partie* ».

Pour trouver le volume de jus provenant d'une orange, Gaël et Rémi se sont référés à la représentation associée et ont inscrit ¼. Ensuite, ils ont refait une répartition du dessin, en huit parties égales, afin de trouver qu'une demie orange donnait 1/8 L de jus. Lors du retour, nous avons aussi constaté que Gaël avait multiplié le dénominateur de ¼ par 2 afin d'obtenir une quantité deux fois plus petite.

En ce qui concerne le nombre d'oranges associé à 6/4 L, Gaël et Rémi ont d'abord écrit ce volume sous la forme 1 2/4 l, mais ne les ayant pas convaincus de son utilité, cette transformation a été effacée. En comparant des fractions présentes dans le tableau, Gaël s'est rendu compte que 6/4 était une mesure 6 fois plus grande que 1/4 L; il a, par conséquent, fait correspondre une quantité d'oranges 6 fois plus grande, soit 6. Il explique à Rémi: *« 1,2,3,4,5,6..6 fois!..6 fois quoi lui donne 6/4 ?».* Enfin, pour trouver la quantité de jus correspondant à 1/8 d'orange pressée, ils se sont basés sur la quantité de jus pour 1 orange, soit 1/4 L; ils ont alors multiplié le numérateur et le dénominateur de la fraction ¼ par 8. Ces élèves avaient auparavant effectué les calculs suivants pour trouver une fraction 2 fois plus petite que la fraction 1/8, soit : 1 ÷ 2 et 8 ÷ 2 (0,5/4); un tel procédé nous semble associé à une interprétation primitive de la division, soit « diviser pour diminuer », interprétation constituant un obstacle épistémologique (Brousseau, 1998). Faute de temps, ils n'ont pas traité le nombre d'oranges correspondant à la mesure 3,75 L.

RÉJEAN et RÉBECCA

L'équipe de Réjean et Rébecca a trouvé la quantité de jus correspondant à 5 oranges pressées en effectuant l'opération suivante : 0,25 x 5 = 1,25 l. Il est d'ailleurs étonnant de retrouver comme première écriture 0,25 l pour une orange, alors que la donnée initiale, selon la représentation proposée, évoquait davantage la fraction ¼. Les traces laissées par ces élèves montrent, dès le départ, un travail à partir d'écritures décimales (0,25 l; 0,125 l; 0,5 l), écritures qu'ils ont obtenues en divisant, notamment, 1 litre par 4 pour trouver le volume correspondant à 1 orange. Ce procédé a cependant été source de difficulté lorsqu'ils devaient trouver la quantité de jus produite par 1/8 d'orange. L'écriture de la chercheure [CH écrit 3,75 = 3 ¾….0,25…] traduit ce qui a évoqué aux élèves l'idée de réécrire leur résutats sous forme fractionnaire et ainsi trouver le résultat pour 1/8 d'orange (1 orange → ¼ ; 1/8 orange…1/32) et 3 ¾ L (5 oranges → 1 ¼ L ; 3 ¾ L … 15 oranges).

ALEX

Les résultats d'Alex nous ont étonnées. Bien qu'il ait trouvé la quantité de jus correspondant à 5 oranges (1 ¼ L) et associé celle d'une orange à ¼ L, les autres réponses qu'il a produites sont déconcertantes. Nous ne disposons pas d'informations suffisantes pour interpréter les autres réponses.

ANNE

Anne a d'abord inscrit la mesure correspondant à 1 orange, soit ¼; elle a, par la suite, trouvé que 5 oranges donneraient 5 fois plus de jus, soit 5/4 L. Elle a cependant décidé de fournir comme réponse 1 ¼, car il leur est habituellement demandé de transformer les fractions impropres en nombres fractionnaires. Anne nous a confié ne pas avoir été en mesure de traiter la quantité de jus pour ½ orange. Cependant, comme nous aurons l'occasion de le voir lors du retour, elle a su comprendre et réexpliquer fièrement l'obtention de 1/8 L. Elle n'a pas eu le temps de poursuivre l'activité.

Analyse des interactions lors du retour sur les procédés utilisés par les élèves

Bien que certains élèves n'aient pas terminé la tâche, nous avons décidé d'effectuer un retour collectif sur les procédés utilisés par les élèves. Bertrand et David n'ayant pas du tout entamé cette situation, l'étudiante-chercheure interroge d'abord ces élèves :

ECH	On va regarder ensemble comment vous avez fait le problème du jus. D'abord, on savait que Marie-Ève pressait une orange et obtenait…
ELS	¼
GAEL	¼ de litre.
SAMUEL	ECH, est-ce que je réponds aussi?
ECH	Oui.

ECH	DAVID si au lieu d'une orange qui donne ¼ de litre…
SAMUEL	Ou 250 ml.
ECH	…si elle a 5 oranges, combien de litre va-t-elle obtenir?
DAVID	Ça va déborder car il ne reste que 3 espaces vides.
BERTRAND	Le numérateur va être plus grand que le dénominateur, ça va déborder comme il dit.
GAEL	Elle peut prendre un autre verre.
MARTIN, RÉMI, HÉLÈNE, GUY	1 litre et ¼
CH	Ou?
MARCEL, DAVID	5/4
RÉMI	¼ + ¼ + ¼ + ¼ + ¼
CH	Ou encore ?
SAMUEL	1 250 ml.
MARTIN	Ou 1,25 l.
ECH	Comment on pouvait voir rapidement, comme DAVID que ça donnait 5/4?
DAVID	Parce qu'il y a déjà 4 cases et …
ECH	Non, mais si on regarde les nombres que l'on a ici (1→1/4; 5 → ?).
RÉMI	Parce que 4 oranges pressées ça donne 1 litre plus le ¼, ça donne 5…tu as pressé 5 oranges, ça fait 1 litre et ¼. 5 sur 4… il y a 4 oranges qu'il faut que tu presses pour avoir 1 litre, ça représente combien de litres ça donne, le 5 représente le nombre d'oranges pressées, 4 oranges pressée plus une autre orange.
ECH	Exact.
RÉMI	Aye, j'ai réussi là!
ECH	Mais est-ce qu'on voit que si on prend 5 fois plus d'oranges [ECH fait une flèche du 1 au 5], on a ici…
SAMUEL	On a 5 fois plus de jus [ECH fait une flèche allant du 1/4L au 5/4L et inscrit x5].
CH	Vous pouvez penser à ces problèmes même avec des nombres entiers. On regarde de la même façon les relations comme par exemple 1 L pour 12…5L pour…5 fois plus.
ECH	Pour le ½ orange…
RÉBECCA, GAUDI	1/8
SAMUEL	125 ml.
CH	Qui peut nous convaincre que c'est 1/8?
PRINCE, GAEL	lèvent la main.
ECH	HÉLÈNE, serais-tu capable?
HÉLÈNE	Tout ce que je sais c'est que tu dois séparer en deux ce que tu avais dans le verre.
CH	C'est pas bête ça!
GAEL	C'était si simple que ça, j'avais fait la même affaire qu'HÉLÈNE.
CH	Ben oui.
GAEL	Là tu sais que 1 orange tu la divises en 2 ça fait ½ , en réalité ça fait 1/8 partout.
CH	Ça partage à nouveau le verre en fait.
GAEL	C'est facile, si tu fais ¼, c'est 1 orange que tu as pressée pour pouvoir le remplir, mais là si tu prends la moitié d'une orange, ça ferait comme 0,5… là tu fais 1/4 fois 2 qui va te donner 1/8.
CH	Fois ½
ECH	Ou divisé par 2...

Le nombre important d'élèves ayant participé au retour et la diversité des représentations produites nous permettent d'apprécier la pertinence de cette situation de résolution d'un problème multiplicatif obligeant à plusieurs analyses des relations entre les mesures des volumes de jus, entre les mesures des nombres d'oranges et entre, les mesures des volumes de jus et des nombres d'oranges; les opérations impliquant des nombres rationnels, notamment la multiplication et la division de nombres rationnels prennent alors sens. Cette situation permet également à plusieurs élèves de prendre acte de l'importance de bien examiner les données, leurs représentations, afin de mettre en place des procédés de résolution efficients et économiques.

À la lumière de cet extrait, nous pouvons aussi constater que le questionnement de l'étudiante-chercheure est empreint des différents échanges qu'elle a eus avec les élèves, particulièrement avec Hélène. De plus, les propos de Rémi nous montrent qu'il a grandement bénéficié de l'aide apportée par Gaël. Ses explications pour le passage de 1 orange pour ¼ L à 5 oranges pour 5/4 L rendent compte d'une interprétation, par ailleurs étonnante : il interprète d'abord la fraction 5/4 L comme une mesure, mais s'appuie ensuite sur le sens rapport afin de donner sens aux nombres présents au numérateur et au dénominateur. Il importe de mentionner qu'Anne, élève peu éloquente, est venue voir l'étudiante-chercheure à la fin du retour pour lui dire qu'elle n'avait pas trouvé la quantité de litres pour 1/8 d'orange, mais que suite aux explications d'Hélène, elle a compris pourquoi c'était 1/8 :

ECH Ah oui, c'est génial ça! Est-ce que tu sais ce qui t'a permis de comprendre?
ANNE Merci! Ben vu que c'est une moitié d'orange, il fallait séparer les quarts en 2 pour les diminuer de moitié et ça donne 1/8.

Pour conclure sur les interactions précédentes, il nous apparaît important de souligner qu'à la suite de ces échanges, l'étudiante-chercheure invite Gaël à porter attention au vocabulaire qu'il utilise pour rendre compte de son raisonnement. Ainsi, pour rendre compte de l'opération qui lui a permis de passer de ¼ à 1/8 (opération par ailleurs adéquate), cet élève déclare qu'il a fait « ¼ fois 2 pour trouver 1/8 ».

Évolution des rapports des élèves aux nombres rationnels et de la démarche d'acculturation institutionnelle

La première partie de la résolution nécessitant l'addition et la représentation de lots a été fort simple pour les élèves. Bien que cette activité soit nettement moins exigeante que les précédentes, elle est néanmoins au-delà de ce qui est exigé, selon le programme de formation. Étant donné que les élèves ont majoritairement choisi 24 comme dénominateur commun, le passage à 12 lots requérait des mesures deux fois plus petites. Il est surprenant de constater que la présence d'une notation décimale (1,5/12), à l'exception d'une équipe, n'a pas dérangé les élèves. Se sont-ils réellement questionnés sur la « faisabilité » de ce problème, en fonction du contexte, ou ont-ils simplement travaillé à partir des nombres, comme l'a fait remarquer Samuel : « 24 se divise en 12 ». Il faut dire que nous avions travaillé ce type d'écritures précédemment. Pour y parvenir, les élèves se sont soit basés sur leur dessin ou sur leurs résultats en divisant le numérateur par 2. Une faible portion d'élèves (David, Bertrand et Hélène) ont eu recours au « produit croisé[52] » qui était habituellement la façon courante de procéder. L'exploitation de ce type de calcul apparaît plutôt à la question 3, lorsque les relations leur semblent plus complexes compte tenu de l'ordre de grandeur des nombres. Ayant comme données initiales que 3 lots sur 24 coûtent 24 000$, la très grande majorité ont recherché la valeur unitaire et ont par la suite multiplié ce montant selon la répartition de chacun. Il faut dire qu'ils devaient impérativement trouver ce résultat puisqu'un contractant avait 1/24 lot et que la présence du 14/24 nécessitait ce passage. Quelques élèves ont toutefois pris en compte la relation entre le coût engendré par l'achat de 3/24 et 6/24 de lot en multipliant le montant associé à 3/24 par 2. Le choix du deuxième contexte a réellement permis aux élèves de donner sens à la multiplication de fractions, conjuguant alors les gestes effectués sur les dessins aux calculs connus de la multiplication des numérateurs et des dénominateurs. Il semble seulement que la présence du nombre 3,75 ait amené certains élèves à recourir à la transformation des mesures en millilitres ce qui permettait de travailler à partir de nombres entiers et par le fait même de contourner la multiplication de fractions. Certains ont eu recours à plusieurs représentations d'une même mesure, ce qui facilitait la mise en relation de certaines d'entre elles (1 ¼ et 3 ¾; 1/4 et 6/4).

Nous remarquons que les élèves commettent beaucoup d'erreurs autant dans le langage oral qu'écrit pour rendre compte de la multiplication de fractions (ex. ½ fois 2 = ¼). Ce qui, nous semble-t-il, n'est pas sans gêner la construction de cet objet mathématique.

---

[52] Reprise de l'idée de l'enseignante de fournir la valeur unitaire dans problèmes de proportionnalité simple.

Étant donné que peu d'élèves ont inscrit 5/4 pour rendre compte de la quantité de jus produit par 5 oranges, aucun élève n'a exploité la composition de 5/4 et ¼ pour trouver la quantité pour 6 oranges. De plus, il semble que le choix du contexte, rendant signifiant l'exploitation de nombres entiers et décimaux ait amoindri l'apport de cette relation.

4.2.16. Analyse des conduites des élèves et des interactions didactiques au cours de la situation sur la répartition de l'aire d'un drapeau

La situation de résolution de problèmes impliquant des nombres rationnels, qui a été présentée le 29 mai 2007, est une intégration de la tâche du chocolat (Comparaison de nombres rationnels : 30/04/2007) et du jardin (Problèmes additifs impliquant des nombres rationnels, 22/05/2007) et de la multiplication des nombres rationnels. Elle a été choisie au regard des conduites précédentes des élèves lors de l'enseignement de la multiplication de fractions (ex. Notes de cours de Noa → *Multiplication de fractions : Le numérateur et le dénominateur x par la même quantité ex. ¾ x 2/2 = 6/8*) et des études réalisées faisant acte de l'importance de l'estimation des produits et du choix des nombres dans la multiplication de fractions (entre autres, Cramer, Wyberg et Leavitt, 2009). Cette situation tient également compte des connaissances visées lors de l'examen. Lors de cette période, l'élève David était absent. Nous reproduisons ci-dessous la tâche qui a été soumise aux élèves :

Drapeau

Une *designer* a reçu une curieuse de commande concernant l'élaboration d'un drapeau. Dans cette commande figurent différentes couleurs, ainsi que les portions de la surface du drapeau qu'elles occupent respectivement; la portion de la surface de couleur noire n'est toutefois pas donnée. Le client est un peu paresseux, mais surtout pas très astucieux ! La désigner décide aussi de ne pas trop se casser la tête et choisit des mesures de drapeau qui lui permettront de représenter facilement les différentes couleurs : après tout le client ne lui a jamais donné cette information !

Voici la commande :

Orange:	le 1/4 de 4/7
Bleu :	le ½ de 4/7
Vert :	le 1/4 de 4/8
Jaune :	25 %
Noir :	____________

Aire possible du drapeau	Orange	Bleu	Vert	Jaune	Noir

Questions :
1. Avant d'effectuer quoi que ce soit, détermine, la couleur de peinture préférée de Natacha : orange, bleu, vert ou jaune ?

2. Représente le drapeau et identifie la portion de la surface que chacune des couleurs occupe.

Dans ce problème, les données ont été judicieusement choisies. Pour comparer les portions de surface du drapeau occupées par différentes couleurs, si l'on comprend, par exemple, que pour trouver ¼ de 4/7, il faut identifier la partie qui correspond à 4/7 du tout et ensuite, identifier la partie qui correspond à ¼ de cette partie. Si on se réfère à cette interprétation, on peut facilement conclure que ½ de 4/7 occupe un espace supérieur à ¼ de 4/7 et à ¼ de 4/8. On peut tout aussi facilement conclure que 25% ou ¼ du drapeau occupe un espace inférieur à l'espace occupé par ½ de 4/7, puisque cet espace peut être représenté par 2/7, cet espace est donc supérieur à l'espace associé à ¼ ou 2/8.

Pour répondre à la seconde question, il importe de choisir des mesures d'un drapeau, pour que sur ce drapeau il soit possible d'identifier les parties déterminées précédemment, soit : 1/7, 2/7, 1/8, 1/4; il est possible de représenter chacune des portions des différentes couleurs en recourant, entre autres, au dénominateur 56 (¼ = 14/56; 1/7 = 8/56; 2/7 = 16/56; 1/8 = 7/56) et de trouver la portion correspondant à la partie restante, soit la partie noire à l'aide d'un dessin ou en ayant recours au calcul suivant : 1- 14/56 – 8/56 – 16/56 – 7/56 = 11/56. Nous présentons et examinons les conduites des élèves et des interactions didactiques au cours de la réalisation de chacune des tâches que comporte cette situation.

L'entrée des élèves dans la tâche montre bien le peu d'habitude et de signification qu'ils détiennent à l'égard de la représentation de relations multiplicatives et leur rapport plutôt techniciste au calcul. À la lecture de l'énoncé, quelques élèves font aussitôt référence à des «gestes mécaniques» : «le de c'est fois ; tu multiplies les numérateurs

… ». La chercheure, l'étudiante-chercheure et l'enseignante adressent alors diverses questions au groupe concernant le ¼ de 4/7, afin de leur permettre de construire le sens de la multiplication.

CH	Juste avant de commencer, quand on dit que vous devriez être en mesure en regardant les écritures d'ordonner les couleurs…sans calculer… si vous regardez effectivement le ¼ de 4/7, vous ne trouvez pas qu'il y a quelque chose qui rend la situation simple?
REMI	Je le sais. Si tu ajoutes 3 à 1 ça donne 4 et si tu ajoutes 3 à 4, ça donne 7.
GUY	Il faut mettre le dénominateur sur 28.
CH	Vous prenez un quart, vous avez 4/7 de quelque chose et vous en prenez un quart.
BERTRAND	Déjà un quart c'est vingt-cinq pourcent […inaudible].
REMI	Là quatre septièmes c'est le pourcentage.
ECH	Oui, mais, si tu regardais tu dois prendre le quart de quelque chose, là t'as le quart de quatre septièmes. Qu'est-ce que tu remarques?
GAEL	Ok. J'sais c'est quoi. Le septième marche pas, pour avoir le quart, eh…faudrait qu'ce soit un huit ou … pas un 7..euh…
ECH	Mais t'as combien?
GAEL	Faudrait que le sept ce soit quatorze… si tu divises …
REBECCA	Bon ben ce serait huit quatorzièmes pis lui ça serait deux huitièmes (silence).
CH	Ok, j'pense que…

Bien que les questions invitent les élèves à s'attarder aux nombres (1/4..25%) et aux relations entre le dénominateur du multiplicateur et le numérateur du multiplicande, les élèves prennent plutôt en compte les relations entre les dénominateurs. À ce moment, les intervenants tentent de faire émerger chez les élèves une coordination des connaissances sur les divers sens de la fraction et sur le sens des opérations sur les nombres naturels et sur les fractions : *Qu'est-ce que ça veut dire prendre le quart d'un tout? Quand je veux des quarts, que dois-je faire?* [diviser en 4 ou multiplier par 1/4]. *Combien d'objets choisirais-tu pour représenter un quart? Et lorsque c'est une partie d'une partie? Si vous avez quatre parties sur 7 et que vous voulez en prendre un quart de ça?* Cette suite de questionnements et d'interactions permettent à quelques élèves d'associer 1/7 à ¼ de 4/7.

SAMUEL	Ça donne un septième.
CH	Ça donne un septième, est-ce que vous voyez pourquoi?
SAMUEL	Un quart de quatre septièmes, c'est un septième.
CH	Est-ce que vous voyez pourquoi?
Élèves	Non.
REJEAN	J'suppose c'est parce qu'il y a des quatre dans les deux…
NOA	Il faut que peut-être que tu prennes un du quatre de quatre septièmes.

Afin d'appuyer les propos de Noa et de permettre aux autres élèves de comprendre comment Samuel a obtenu 1/7, l'étudiante-chercheure produit, sans commenter, une représentation graphique au tableau : $\boxed{\bullet}\bullet\bullet\bullet\circ\circ\circ$

> *GAEL : Ok. Oui, oui, j'viens juste de catcher non, non, j'viens juste de catcher, t'as fait sept ronds, t'en as colorié quatre, sur les quatre, t'en as pris juste un fac que ça fait un septième.*

L'enseignante intervient ensuite pour présenter un autre exemple, un peu plus complexe, mais dont le dénominateur du multiplicateur et le numérateur du multiplicande entretiennent une relation assez évidente, soit un cinquième de dix onzièmes.

ENS	Est-ce que je peux en donner un aussi?
CH	Oui et après on les laisse filer.
ENS	1/5 de 10/11?
NOA	C'est deux onzièmes.
CH	Ouais, ouais, ouais, vous voyez ici, il y a une relation entre ces nombres-là. Vous avez dix parties et un cinquième des dix. Ça fait deux parties.
ENS	Ça pas été long.
GAEL	C'est 1/11?
ENS	Non c'est 2… C'est un cinquième de dix…
ECH	Bon allez au travail!
BERTRAND	[s'adresse à ENS] Est-ce qu'on peut inverser?
ENS	Pour mutliplier, pourquoi inverser? Parce un cinquième c'est l'équivalent divisé par cinq? C'est ce que l'on fait dans notre tête.

Suite à cet exemple, certains élèves font le lien entre la multiplication et la division par l'inverse. Comme en témoigne cet extrait, l'enseignante reconnaît ce travail et le reformule pour l'ensemble de la classe. Enfin, après avoir traité de ¼ de 4/7 et de 1/5 de 10/11, les élèves sont invités à entamer la tâche originale.

Lors du retour, une attention particulière est plutôt portée à l'évaluation et à la comparaison des « produits » associés à : 1) ¼ de 4/7 et ¼ de 4/8; 2) ¼ de 4/7 et ½ de 4/7; 3) ¼ de 4/8 et 25%. Les élèves arrivent, sans faire de calculs, à répondre correctement. Il est intéressant de noter comment ils en sont venus à se prononcer sur ¼ de 4/8 et 25% : « *25%, c'est ¼ …ça serait le quart d'un tout mettont ¼ de 8/8…ça serait plus grand.* ». Le tableau ci-dessous présente les résultats globaux des élèves.

Tableau XLVI: Résultats des élèves au problème de répartition de l'aire d'un Drapeau

Question : Résultat attendu	**Élève ayant obtenu une réponse adéquate**	**Élève n'ayant pas obtenu une réponse adéquate**	**Élève n'ayant fourni aucune réponse ou n'ayant pas terminé**
Q.1 : Bleu	Rebecca et Réjean; Samuel; Martin et Prince; Rémi; Noa, Gael		Alex, Guy, Gaudi, Bertrand, Anne, Hélène
Q.2. *Recherche des portions* - produit - somme *Démarche (ou toutes autres fractions équivalentes)* Orange : ¼ de 4/7…1/7 Bleu : ½ de 4/7 … 2/7 Vert : ¼ de 4/8…1/8 Jaune : 25%...1/4 Noir : 11/56	***Dénominateur de 56*** Martin et Prince; Rebecca et Réjean; Alex, Rémi (avec aide de CH); Noa, Marcel, Gael ***Dénominateur de 28*** Noa et Samuel	Hélène Orange: ¼ de 4/7 = 4/28 Bleu: le ½ de 4/7 = 4/7 Vert: ¼ de 4/8 = 4/32 Jaune: 25%...25/100 [ECH: *4/28 + 4/7 + 4/32 + 25/100 + noire = 1 =…Accompagné d' un dessin*] Bertrand : 8/56 + 7/56 + 14/56 = 29/56 … 56-29 = 27 Gaudi	Anne, Guy a correctement trouvé les produits des portions orange, bleu et verte qu'il a représentés à l'aide du dénominateur 56 Mais il n'a pas terminé la tâche
Exemple de ***production du dessin*** *d'un drapeau* Orange : ¼ de 4/7…1/7…8/56 Bleu : ½ de 4/7 … 2/7…16/56 Vert : ¼ de 4/8…1/8…7/56 Jaune : 25%...1/4…14/56 Noir : 11/56	***Drapeau de 8 par 7*** Martin et Prince, Noa , Remi (avec aide de CH), Gael ***Drapeau de 14 par 4*** Martin ; Rebecca et Réjean ***Drapeau de 7 par 4*** Noa et Samuel	**Drapeau de 1 par 12** et de **3 par 4**. Gaudi	Bertrand, Hélène, Guy, Alex et Marcel.

Sur les copies des élèves, nous pouvons remarquer que certains élèves (ex. Martin et Prince) réexploitent le dessin fait au tableau par l'étudiante-chercheure pour donner sens au calcul alors que d'autres ni voient pas l'intérêt puisqu'ils savent comment multiplier (ex. Hélène). Pour ces derniers, il est cependant plus difficile de trouver le dénominateur commun, car ils obtiennent des 28^{e}, des 32^{e}, des 7^{e} et des 100^{e}.

Il est fort intéressant de constater que Noa et Samuel ont considéré non seulement les données mathématiques, mais aussi les données contextuelles, dans la validation des mesures afin qu'elles soient de plus en plus petites, car il est toujours possible de réduire les dimensions du drapeau tout en conservant les mêmes rapports.

Au terme de cette activité, les élèves traitent de la relation entre le nombre de parties et la portion de cette partie à prendre (ex 1/**3** de **9**/11). Cependant, sans l'utilisation d'un dessin, il semble qu'il leur soit plus difficile de reconsidérer les 9 parties non comme un tout mais comme une partie d'un tout et de prendre 1/3 de 9 onzièmes! Un problème similaire avait également été mis en évidence dans l'étude effectuée par Cramer, Wyberg et Leavitt (2009).

Malgré les retours en arrière fréquents lors de la réalisation du problème précédent, il importe de souligner qu'en fin de période, les élèves recourent à des démarches économiques et efficientes. Ainsi, ils accordent une importance à l'écriture des opérations en s'appuyant sur le sens de la multiplication au détriment de calculs « futiles ». Les propos de l'enseignante sont à ce sujet fort éloquents :

ENS [s'adressant à ECH]	*Tu as entendu le bon raisonnement de Bertrand.*
ENS [s'adressant à la classe]	*On vous a donné un accès de plus je suis contente!*

4.2.17. Situations impliquant des sériations de nombres rationnels

Plusieurs des situations qui ont été présentées aux élèves, comme en font état les analyses précédentes, invitaient les élèves à recourir à des procédés économiques et efficients, en établissant des relations entre les nombres rationnels. Il nous est apparu pertinent de prolonger ce travail.

4.2.17.1. Situations portant explicitement sur la sériation de nombres rationnels

La première situation que nous avons ainsi présentée aux élèves porte explicitement sur la sériation de nombres rationnels (4 juin 2007). Cette situation prend appui sur des connaissances et pratiques mises en œuvre dans plusieurs des situations présentées précédemment. Il nous est apparu important de présenter aux élèves une situation relativement familière et encore plus, de proposer diverses représentations de nombres rationnels, de manière à pouvoir apprécier l'évolution et le transfert des connaissances et pratiques construites dans des contextes différents. Les élèves ont d'abord été invités à sérier des nombres rationnels (Question 1) et ensuite, à identifier les nombres qu'ils ont trouvés faciles (Question 2) ou, au contraire, difficiles à comparer (Question 3). En nous référant aux conduites des élèves, lors de l'activité de sériation des nombres qu'ils avaient effectuée précédemment (26 avril 2007), conduites qui témoignaient d'un effet de contrat didactique (Brousseau, 1980), les élèves ayant attribué un rang différent à chacun des nombres, bien que plusieurs reconnaissaient que certains de ces nombres représentaient le même nombre rationnel, nous avons jugé pertinent de préciser, lors de la présentation de cette situation, que certains des nombres pouvaient occuper la même position.

Question 1- Le tableau suivant comporte plusieurs nombres rationnels. Peux-tu les placer en ordre croissant; pour cela, pour chacun, il faut indiquer le rang qu'il occupe. Il est possible que certains nombres occupent le même rang.

Nombres	Rangs
0,50001	
6/7	
180/240	
7/35	
6/11	
11/6	
-415/830	
-0,25	
0,76	
3/7	
8/9	
20%	

Question 2- Pouvez-vous indiquer les nombres qui vous ont été faciles à comparer, à ordonner?

Question 3- Pouvez-vous indiquer les nombres que vous avez jugés plus difficiles à comparer, à ordonner? Dans ce cas, pouvez-vous dire ce qui vous a permis de les comparer, de les ordonner?

Le tableau suivant fait état de la sériation des nombres rationnels effectuée par chacun des élèves. La sériation attendue est inscrite, ainsi que les sériations produites par chacun des élèves. Pour mieux visualiser les écarts entre les sériations de chacun des élèves et la sériation attendue, nous avons inscrit en rouge les nombres auxquels les élèves ont attribué des rangs incorrects.

Tableau XLVII: Sériation des nombres: 0,50001; 6/7; 180/240; 7/35; 6/11; 11/6; -415/830; -0,25; 0,76; 3/7; 8/9 et 20%

	Mise en ordre des nombres rationnels											
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
Sériation attendue Élèves	**-415/830**	**-0,25**	**20%; 7/35**		**3/7**	**0,50001**	**6/11**	**180/240**	**0,76**	**6/7**	**8/9**	**11/6**
Hélène	- 0,25	-415/830	0,76	0,50001	20%	180/240	8/9	6/7	3/7 ?	7/35	11/6	6/11
Guy	N'a rien ordonné											
Gaudi	-415/830	-0,25	20%	7/35	3/7	0,50001	6/11	6/7	180/240	0,76	8/9	11/6
Martin	-415/830	-0,25	7/35	20%	3/7	0,50001	6/11	180/240	0,76	6/7	8/9	11/6
Samuel	-415/830	-0,25	20%; 7/35		3/7	0,50001	6/11	180/240	0,76	6/7	8/9	11/6
Rémi	-415/830	-0,25	20%	7/35	3/7	8/9	0,50001	180/240	0,76	6/11	6/7	11/6 -
Prince	-415/830	-0,25	20%	7/35	3/7	0,50001	6/11	180/240	0,76	6/7	8/9	11/6
Gael	-415/830	-0,25	7/35	3/7	6/11				180/240	6/7	8/9	11/6
Noa	-415/830	-0,25	0,50001	0,76	7/35; 20%		3/7	180/240	6/11	6/7	8/9	11/6
Bertrand	-415/830	-0,25	11/6	6/11	H							
Anne	-415/830	-0,25	3/7	6/7	8/9	7/35	180/240 (18/24)	6/11	20%	0,76	0,50001	11/6
Marcel	-415/830	-0,25	20%	7/35			0,76	180/240		0,50001	6/11; 3/7; 8/9	11/6; 6/7
David	-415/830 (-1/2)	- ¼	0,50001 (1/2)									
Réjan	-0,25	-415/830	3/7	20%	7/35	6/7	180/240	0,76	0,50001	6/11	8/9	11/6
Alex	0,50001	-415/830	-0,25	7/35	20%	3/7	180/240	6/11	0,76	6/7	8/9	11/6
Rébecca	-415/830	-0,25	0,50001	0,76	7/35; 20%		180/240	6/11	3/7	6/7	8/9	11/6

Comme le montre le tableau précédent, seulement trois élèves (Samuel, Noa et Rébecca) ont situé au même rang les nombres 7/35 et 20%; seulement, Samuel ordonne correctement tous les nombres. On remarque, par ailleurs, que sept élèves (Gaudi, Martin, Rémi, Prince, Marcel, Réjean, Alex) ont placé ces nombres « côte à côte» et cinq de ces élèves placent 20% avant 7/35; parmi ces élèves, si on exclut les nombres 20% et 7/35, Martin et Prince ordonnent correctement tous les autres nombres, Gaudi ne commet qu'une erreur (6/7). Notons que sept élèves commettent un nombre important d'erreurs.

Ces commentaires généraux nous amènent à poursuivre avec une appréciation plus détaillée des conduites. Hélène n'est pas parvenue à ordonner correctement aucun des nombres. Cette élève laisse peu de traces des procédés qu'elle a utilisés; seuls les nombres 20% et 180/240 sont traités. Elle associe 20/100 à 20% et procède à une réduction de la fraction, obtenant alors 1/5; elle procède également à une réduction de la fraction 180/240. Fait étonnant, Guy qui était parvenu à représenter les nombres 180/340, 7/35; -415/830, -0,25 et 20%, à l'aide de fractions irréductibles, à effectuer des approximations fort pertinentes des nombres 0,500001 (1/2) et 0,76 (3/4) et enfin, à produire des fractions équivalentes aux fractions 6/11, 11/6 et 8/9 (12/22; 22/12; 16/18), n'a pas, par la suite, procédé à une sériation des nombres ainsi traités. Il est possible qu'il n'ait pu compléter cette activité en respectant le temps alloué.

Bertrand et David ont effectué une sériation de quelques nombres seulement; seuls les nombres -415/830 et -0,25 ont été correctement ordonnés. Bertrand n'a spontanément procédé qu'à la comparaison des fractions 3/7 et 6/7; David a associé les fractions 5/10 et ½ au nombre 0,50001 et le nombre 1 5/6 à la fraction 11/6. Suite à l'intervention de la chercheure leur demandant quelle était la relation entre 415 et 830 et, par la suite, quelle fraction pourrait-on associer à -0,25, ces élèves ont alors inscrit correctement sur leurs feuilles ces derniers nombres, ainsi que les nombres qu'ils avaient examinés.

Réjean, Marcel et Anne ont ordonné correctement moins de la moitié des nombres proposés. Réjean a associé 0,50001 à ½ et 0,76 à ¾; les points de suspension entre ces paires de nombres, selon les informations que nous avons recueillies, montrent que cet élève est conscient qu'il s'agit d'approximations. Cet élève a aussi bien interprété la relation entre les numérateurs et les dénominateurs des fractions 6/11 et 11/6; à côté de 6/11, il a inscrit « ½ et un bout » et à côté de 11/6, il a inscrit « 2/1 presque » Cet élève a correctement associé la fraction ¾ à 180/240, la fraction 1/5 à 7/35 et la fraction -1/4 à -0,25. Bien qu'il ait associé la fraction 1/5 aux nombres 20% et 7/35, il n'a pas attribué un même rang à ces nombres. Marcel a traité les nombres 7/35, 20%, 6/7, 6/11, 3/7 et 8/9 en indiquant les nombres de parties manquantes pour compléter chacun des entiers; il a alors représenté le nombre 20% par 20/100. Comme en fait état le tableau, il a situé les nombres 20% et 7/35 aux 3^{e} et 4^{e} rangs, les nombres 6/11, 3/7 et 8/9 au 11e rang et les nombres 11/6 et 6/7 au 12^{e} rang, positions nous semblant indiquer qu'il n'a possiblement comparé que les mesures associées aux nombres de parties manquantes. Ne sachant comment procéder avec les autres nombres, il a immédiatement réclamé l'aide de la chercheure. Celle-ci lui a alors proposé de procéder à la simplification des fractions -415/830 et 180/240, ce qu'il est parvenu à effectuer correctement. Puis, la chercheure lui a demandé d'écrire le nombre -0,25 sous la forme d'une fraction, ce qu'il a pu faire. Ces interventions fortement « dirigées » lui ont permis d'ordonner correctement ces nombres. Anne est parvenue à ordonner correctement les nombres -415/830, -0,25 et 11/6; elle n'a laissé aucune trace des procédés utilisés. Elle a associé au nombre 0,50001 la fraction 51/10000. Elle a réclamé l'aide de l'étudiante-chercheure pour interpréter les nombres 0,76 et 20%; elle a pu associer à chacun de ces nombres une fraction, mais n'a su tirer profit de ces représentations pour ordonner correctement ces nombres.

Alex, Rémi, Gaël, Noa et Rébecca ont ordonné correctement un peu plus de la moitié des nombres proposés. Ces élèves ont dans l'ensemble effectué un travail fort satisfaisant. Alex et Noa n'ont laissé pratiquement aucune trace des calculs qu'ils ont effectués. Sur la feuille utilisée par Alex, on ne relève que la transformation de la fraction 11/6 en un nombre fractionnaire; sur celle utilisée par Noa, on peut voir qu'il a associé aux fractions 6/7 et 7/8 les pourcentages 85% et 88% et qu'il a inscrit également que 20/100 était égal à 7/35. Rémi a inscrit à côté de chacune des fractions le nombre de parties manquantes pour compléter l'entier; il a inscrit sur sa feuille les relations suivantes : 0,50001… ½ et 0,76 … ¾, les trois petits points inscrits laissant entendre qu'il s'agit d'une approximation; il a bien inscrit que le nombre 11/6 est le dernier; il a également associé -415/830 à –½ et -0,25 à –1/4; la fraction ¾ a été liée au nombre 0,75. Gaël et Rébecca ont effectué un travail fort comparable à celui de Rémi. Bien que Gaël, Rébecca et Noa aient clairement indiqué que les nombres 20% et 7/35 étaient égaux, seuls Rébecca et Noa en ont tenu compte dans la sériation des nombres.

Comme nous en avons fait état précédemment, les performances des élèves Gaudi, Martin, Samuel et Prince sont excellentes. Prince ne nous a malheureusement pas remis la feuille sur laquelle il avait effectué des calculs. Les démarches des autres élèves auxquelles nous avons eu accès sont fort pertinentes et économiques. Samuel et Gaudi recourent à plusieurs procédés : a) simplification des fractions (180/340; 7/35 (Gaudi commet toutefois une erreur associant rapidement 7/35 à 1/4); -415/830); b) interprétation et représentation adéquates des nombres -0,25 et 20% par des fractions; c) estimation de plusieurs nombres : 0,50001 (Samuel écrit +½); 6/11 (Samuel écrit + ½ et Gaudi écrit + 50%); 6/7 (Samuel écrit ++½); 0,76 (Samuel écrit +¾ et Gaudi écrit 76/100 ce qui lui permet de comparer ce nombre au nombre 180/340 qu'il associe à 75%); 11/6 (Gaudi écrit +100%). Par ailleurs, seul Samuel juge nécessaire de représenter les fractions 6/7 et 8/9 en recourant à un dénominateur commun; Gaudi inscrit + 60% à côté de la fraction 6/7 et +90% à côté de la fraction 8/9, ce qui lui permet de bien ordonner ces nombres, de tels procédés auraient pu s'avérer peu opportuns si d'autres nombres voisins de ces nombres avaient été proposés. À l'instar de Samuel et Gaudi, Martin effectue des simplifications de fractions et des interprétations et représentations adéquates des nombres -0,25 et 20% par des fractions. Pour comparer les fractions 6/7 et 8/9, il écrit : 6/7 + 1/7 = 1; 8/9 + 1/9 = 1; 1/7 >1/9; 6/7 < 8/9; il est le seul élève à appliquer un tel procédé, procédé prenant appui, entre autres, sur le sens partie-tout de la fraction. Cet élève a également regroupé certains nombres, montrant ainsi les relations qu'il avait pu établir entre ces nombres: a) 180/240 et 0,76, représentant 0,76 par 3,01/4; b) 7/35, 20%; c) 3/7 et 6/7. Enfin, comme le montre le tableau précédent, bien que Martin, Samuel et Prince aient associé la fraction 1/5 aux nombres 20% et 7/35, Samuel est le seul élève à avoir octroyé le même rang à 20% et à 7/35. Il est possible que certains de ces élèves aient, par un effet de contrat didactique (Brousseau, 1980), pensé qu'il fallait attribuer une position différente à chacun des nombres, bien qu'à l'entrée dans cette situation, ces élèves avaient été informés de la possibilité que certains des nombres présentés occupent le même rang.

Bien que très peu d'élèves aient répondu aux questions 2 et 3, il nous semble important de rendre compte leur réponse. En ce qui concerne la question 2, soit les nombres les plus faciles à ordonner, Hélène inscrit les remarques suivantes : « *Les plus faciles sont les nombres négatifs en premier car on sait que c'est en dessous de zéro! Et le 20% parce qu'on sait aussi que la fraction irréductible est de 1/5 et c'est plus facile de le placer et 11/6, j'ai réussi à le placer parce que c'est plus grand que 1!*». Les propos d'Hélène s'avèrent fort pertinents et, plus encore, assez inattendus, compte tenu de la sériation qu'elle a produite. Comme elle le dit bien, il est aisé de comparer les nombres positifs avec les négatifs et les fractions avec les nombres fractionnaires. De plus, la transformation en notation fractionnaire facilite la comparaison et limite le nombre de traitements lorsque la fraction est irréductible. De son côté, Samuel inscrit « **2-** 11 et 10 (11/6; 8/9) ; 5 et 4 (0,50001; 3/7); etc. ; **3-** 5 et 6 (0,50001; 6/11); 9 et 10 (6/7; 8/9). Cet élève repère aisément les nombres qui sont voisins de 1 et d'une demie. Il sait tout aussi rapidement, apprécier les différences entre ces nombres et identifier les nombres qu'il juge faciles ou, au contraire, plus difficiles à ordonner; de telles conduites nous semblent témoigner d'une exploitation pertinente des représentations entre les écritures décimales et fractionnaires des nombres rationnels, ainsi que de différents sens de la fraction (partie-tout, rapport). Contrairement à Samuel, Prince écrit les nombres « 8/9; 6/7 » comme étant facile à comparer. Il se peut fort bien que cet élève ait facilement accès au raisonnement permettant de comparer deux nombres dont la relation consiste en l'absence d'une seule partie pour compléter l'entier, travail ayant été effectué lors d'activités précédentes. Il ajoute à cette liste les nombres « 11/6 et -415/830 » dont la facilité d'ordonnancement s'appuie sur des connaissances similaires à celles évoquées par Hélène. En réponse à la question 3, Prince juge, par ailleurs, le nombre « 180/240 » plus difficile à ordonner; ce jugement, de prime abord étonnant, nous semble plutôt relever d'un jugement rapide portant sur l'ordre de grandeur des nombres que comporte cette fraction. Les arguments d'Alex exposent bien l'histoire didactique des élèves dont la première « procédure » valorisée et mise en exergue pour la comparaison des nombres rationnels s'appuie sur la représentation des nombres par des fractions équivalentes, en recourant à la recherche d'un dénominateur commun : « *Les nombres sur le même dénominateur et les nombres négatifs sont faciles et les nombres qui ne sont pas sur le même dénominateur sont difficiles* ». Enfin, malgré le nombre important d'erreurs, Réjean estime que la sériation de toutes ces fractions est « facile », plus précisément pour les nombres : 180/240; -415/830; -0,25, 20%.

Évolution des rapports des élèves aux nombres rationnels

Dans cette situation, le choix des nombres rationnels à ordonner et des représentations de ces nombres, comme nous en avons fait état précédemment, nous permet d'apprécier les coordinations de connaissances, connaissances liées aux relations entre diverses écritures et représentations des nombres et prenant appui sur divers sens de la fraction, qui ont permis à un nombre important d'élèves d'établir des relations fondamentales entre les nombres proposés. Même chez les élèves qui commettent plusieurs erreurs, on remarque chez plusieurs, l'établissement de relations adéquates entre certains nombres, notamment, entre les nombres suivants: -415/830, -0,25; 6/7, 8/9 et 11/6.

4.2.17.2. Lecture d'un livre : complétion d'un énoncé de problème par ajout de nombres rationnels et sériation de ces nombres

Notre projet se termine quelques jours avant les examens de fin d'année, soit le 12 juin 2007. Au cours de cette période, deux élèves étaient absents en raison d'une reprise d'examen. Considérant le fait que les élèves seraient confrontés à un examen de mathématiques dans les jours suivants, nous avons décidé de clore avec une situation élaborée par la chercheure et l'étudiante-chercheure et approuvée par l'enseignante. Cette situation implique non seulement des connaissances, mais également des pratiques mathématiques liées aux nombres rationnels, connaissances et pratiques colorées par l'ensemble des situations qui ont porté sur ces objets. Pour ce travail, 35 minutes seulement ont été réservées, les élèves devant par la suite compléter un document de révision et des feuilles de notes en vue de leur examen de fin d'année. Originalement, il avait été décidé que cette activité allait servir de bilan individuel. Cependant, nous n'avons pu mener ce projet à terme, en raison de la fatigue et de l'anxiété manifestées par les élèves. Ainsi, à leur demande, nous avons accepté qu'ils forment des équipes pour effectuer cette activité. Afin de pouvoir avoir une meilleure appréciation des connaissances et pratiques des élèves, il nous est apparu pertinent de nous appuyer sur les études effectuées par Roditi (2007), études portant sur la comparaison de nombres décimaux, et ainsi, d'inviter les élèves à compléter un énoncé de problème, en inscrivant des données numériques, notamment des nombres rationnels, qui pourraient constituer un défi. Nous présenterons, dans un premier temps, la tâche qui a été proposée aux élèves et, dans un deuxième temps, les conduites des élèves.

L'énoncé du problème qui a été présenté aux élèves est le suivant :

> « Les 6 élèves inséparables de Michèle ont acheté le livre « La clé de Braha » d'Amos Daragon, le même jour. Ce livre contient 216 pages. Ces élèves se revoient une semaine plus tard et chacun utilise un nombre rationnel pour rendre compte de ce qu'il a pu lire.
>
> 1-Compléter le tableau suivant, en proposant un nombre rationnel pour chacun des élèves.

Noms des élèves	Nombres rationnels	Rang	Nombres de pages lues
Maria			
Alexandre			
Samuel			
Hubert			
Julia			
Philippe			

> 2- Ordonner les nombres rationnels du plus petit au plus grand.
> 3- Pour chacun des élèves, indiquer combien de pages lues.
> 4- Désolé! Nous avons oublié d'inscrire Pascal qui faisait aussi partie de ce groupe. Pascal nous a dit qu'il a lu une fraction de ce que Philippe a lu. Choisissez une fraction et indiquez combien de pages Pascal a lues. Indiquez enfin quelle fraction du livre Pascal est parvenu à lire.»

Le choix du nombre de pages (216) repose sur les nombreuses possibilités de distribution de pages lues; il est suffisamment important pour ouvrir à une diversité de nombres rationnels. Pour inciter les élèves à établir des relations entre les nombres, tâche pour laquelle nous avions été mandatée, il nous a semblé légitime de leur demander d'ordonner leurs nombres. D'autre part, afin de solliciter et de mettre en évidence la pertinence du nombre rationnel choisi au regard du nombre de pages, pertinence qui avait été examinée dans certaines des situations antérieures, entre autres, la situation précédente (29 mai), nous leur avons demandé d'inscrire le nombre de pages lues correspondant à chacune des portions qu'ils ont déterminées. Enfin, la sous-question 4 diffère des questions précédentes puisqu'il s'agit non seulement d'exprimer le nombre de pages lues par Pascal comme une portion des pages lues par Philippe, mais aussi de déterminer le nombre de pages effectivement lues par Philippe. Donc, une fois de plus, ce nombre doit être judicieusement choisi, mais en s'appuyant sur leurs connaissances de la multiplication des fractions. Mentionnons enfin que, dans l'énoncé du problème, le nombre de lecteurs est suffisant pour que les élèves puissent recourir à divers nombres rationnels, à diverses expressions de ces nombres rationnels.

La consigne suivante a été donnée aux élèves à la suite de la lecture de l'énoncé :

> ECH : *Donc on vous propose cette activité [lecture de l'énoncé]. Donc vous n'avez pas plus d'informations que ça. C'est à vous de choisir un nombre rationnel pour rendre compte de la portion du livre que chacun a lu. Pensez aux nombres rationnels que vous avez vus depuis le début de l'année. Ensuite vous devez mettre en rang les nombres qui représentent les différentes portions du livre que les élèves ont lues , du plus petit au plus grand nombre et ensuite indiquer le nombre de pages que chacun des élèves a lues.*

Bien que la formulation de la consigne favorise, chez les élèves, le recours à différentes représentations des nombres rationnels (décimaux, pourcentages, fractions), nous constatons que la majorité d'entre eux s'est limitée à une écriture fractionnaire. Cette limite nous semble malheureusement attribuable à une intervention de la chercheure qui d'entrée (après 10 minutes) pose le problème en terme de fractions. Cette limitation a un effet tout à fait prévisible sur le contrat didactique.

CH	Vous portez attention un peu…On va juste faire un exemple avec vous. Samuel par exemple, mettons qu'il est assez paresseux, est-ce que quelqu'un peut donner quelle fraction du nombre de pages il pourrait avoir lue?
BERTRAND	¼.
CH	¼, c'est simple!
REBECCA	18/95.
REMI	26/216.
CH	Bien c'est trop simple…parce qu'ils vont avoir...
REBECCA	26/18.
REMI	150 /216.
CH	N'utilisez pas 216 comme dénominateur …Lorsqu' on trouvait une fraction dans une collection, on ne le mettait pas forcément sur le nombre d'objets de la collection.
REBECCA	8/24.
REJEAN	Ok sur 8,3.
DAVID	5/10.
CH	Mettez plus compliqué, prenez la même idée : utilisez d'autres nombres.
MARCEL	99%.
CH	Ça va donner des parties de pages… il faut que ça se calcule.
NOA	On peut avoir des moitiés de page!
CH	Oui, si vous voulez…
NOA	Surtout s'il est paresseux.
REBECCA	½.
CH	Essaie de la transformer pour que ce soit plus compliqué.
REBECCA	8/16.
CH	Encore plus compliqué avec des grands nombres.

REBECCA	8000/16000.
CH	Attendez, moi j'ai décidé que je la compliquais encore plus que cela, moi je dis ceci 8195/16390, est-ce que je parle toujours du même nombre?
ELS	Oui.
CH	Donc vous embêtez les gens en écrivant 8195/16390 mais en sachant que c'est…
MARCEL	½.
ECH	Et ça donnerait combien de pages?
MARCEL	108 pages.
ECH	Donc vous voyez … vous devez utiliser ce qu'on faisait d'habitude ... on complique volontairement l'écriture des rationnels pour obliger les gens à regarder les relations entre les nombres, à travailler…[].

Les échanges précédents ont permis à certains élèves d'aller de l'avant. En effet, l'exploitation de la fraction familière ½ a été exploitée par plusieurs équipes afin de produire des fractions équivalentes en s'attardant à la relation entre le numérateur et le dénominateur. Cependant, nous pensons qu'elle a peut-être confiné les élèves à recourir à une écriture fractionnaire des nombres rationnels, tel que le laisse entrevoir le tableau récapitulatif des résultats des élèves.

Tableau XLVIII: Choix et sériation de nombres rationnels

Équipes	Mise en ordre de leur nombre rationnel (nombre de pages correspondant)						
Martin et Prince	1/18-1/36 (6p)	5/108 (10p)	7/54 (28p)	10800/46656 (50p)	21/81 (56p)	11/36 (66p)	
Rébecca et Réjan	0/18910123 (0p)	119045,5/952364 (27p)	503/3018 (36p)	131021/786126 (36p)	330894/1985364 (36p)	8109/32436 (54p)	8109/16218 (108p)
Hélène et Rémi	10/56 (1080/28p); 1/6 (54p); 1/8 (27p) *Ils n'ont pas déterminé le rang de chacun						
Anne	32/128 (54p)	64/192 (72p)	24/48 (108p)	7/9 (168p)			
Marcel	1000/2000 (108p)	48432/145296 (72p)	20/80 (54 pages)	516/2064 (54p)	36/216 (36p)	12,5 % (27p)	
Alex, David et Bertrand	Maria : 3^e rang- 12 pages; Alexandre : 6^e rang-125 pages; Samuel : 4^e rang – 80 pages; Hubert : 7^e rang -210; Julia : 1^{er} rang- 0 page; Philippe : 2^e rang 10 pages ;Pascal : 5^e rang 100. *Ils n'ont pas déterminé le rang de chacun ni la portion de pages lue						
Gaudi et Guy	0,25-5/27-2/108 (8p)	96/864 (parti de 24/216) (24p)	0,5/4 (27p)	0,001/0,004 (54p)	0,1 + 24% x 5 ÷ 3 (108p)	1/8 + 15/24 + 12,5% (189p)	
Noa et Samuel	317%. (684,8p)	π/π (216p)	33,33333333% (72p)	15% de π/π	1,44/100	1,1/10	0,004

Comme le montre ce tableau, la majorité des élèves ont eu recours à l'écriture fractionnaire. De plus, plusieurs d'entre eux n'ont pas complété la tâche. Nous regarderons plus attentivement les conduites de chacune des équipes.

Martin et Prince n'ont utilisé que des fractions : Maria : 2/72; Alexandre : 5/108; Samuel : 11/36; Hubert : 21/81; Julia : 7/54; Philippe : 10800/46656. Devant cette observation, la chercheure leur a indiqué qu'ils pouvaient exploiter des compositions. Ils ont alors modifié le nombre rationnel représentant la portion du livre lu par Maria : [2/72 = 1/18-1/36]. Cette intervention nous montre bien que les conduites des élèves rendent compte de leur rapport à un savoir dans une tâche particulière, ce qui nous permet pas nécessairement de conclure sur leurs connaissances. Afin de déterminer les différentes fractions, cette équipe a d'abord ciblé des facteurs de 216 pour représenter les dénominateurs. Ce choix est tout à fait éclairé, compte tenu qu'ils devaient rendre compte du nombre de pages lues, tel que leur avait souligné l'étudiante-chercheure. Même si le nombre de pages ne devait pas forcément être un entier, le choix de tels dénominateurs leur simplifiait la tâche.

MARTIN	On choisit n'importe quoi ?
ECH	Oui, mais il y a 216 pages.
MARTIN	Ok divise 216 par 7…
PRINCE	Ça marche pas.
MARTIN	Par 8?
PRINCE	27!

Ils ont donc ensuite déterminé aléatoirement un numérateur. Ils ont cependant complexifié la représentation d'Hubert en trouvant une fraction équivalente à 7/27 dont le dénominateur n'est plus un facteur de 216. Pour ce faire, ils ont multiplié le numérateur par trois et composé le dénominateur en effectuant le calcul suivant : 27+54 = 81. Ils ont exploité la même idée en ce qui a trait à la portion lue par Philippe en partant de la fraction 25/108 pour obtenir 10800/46656; les calculs suivants ont alors été effectués : multiplication du dénominateur par 100 afin d'obtenir un dénominateur qui soit un multiple du numérateur, de façon à ce que le quotient obtenu en divisant le dénominateur ainsi modifié par le numérateur soit un nombre entier (10800 ÷ 25 = 432); puisque le numérateur a été multiplié par 432, il faut aussi multiplier le dénominateur par 432, pour maintenir une fraction équivalente à la fraction initiale (108 x 432 = 46656). Il faut convenir qu'il s'agit d'un procédé, pour le moins alambiqué, mais qui montre bien que les élèves savent utiliser les relations entre le numérateur le dénominateur. Enfin, ils ont mis en ordre les différentes portions de façon adéquate en s'appuyant sur les nombres rationnels choisis, avant d'inscrire le nombre de pages lues. Ils ont comparé facilement certains nombres grâce aux numérateurs ou dénominateurs communs précédemment trouvés avant la complexification de leur représentation (ex. 7/27 (21/81) > 7/54; 25/108 (10800/46656) > 5/108 ; 1/36 (2/72 = 1/18-1/36) < 11/36). Ayant déterminé que 7/54 est plus petit que 7/27, que 10800/46656 (25/108) est près de ¼ et que 5/108 est beaucoup plus petit que les autres, étant donné la proximité du numérateur et l'ordre de grandeur du dénominateur, ils ont obtenu : 5/108 < 7/54 < 21/81 (7/17) < 10800/46656 (25/108). Par la suite, ils se sont appuyés sur la fraction ¼ pour ordonner 21/81, 10800/46656 et 11/36 : 21/81 et 11/36 sont plus grands que ¼ alors que 25/108 est plus petit. Alors, ils ont inscrit : 1) 1/18-1/36; 2) 5/108; 3) 7/54; 4) 10800/46656; 5) 21/81; 6) 11/36. Malgré le fait qu'ils n'aient pas donné de résultat pour Pascal, les raisonnements pour résoudre cette tâche sont judicieusement mis en œuvre. Ils évoquent des conduites antérieures lors de situations impliquant la comparaison de nombres rationnels, entre autres, en choisissant une fraction « référence » qui en l'occurrence était ¼. D'autre part, il faut noter qu'une seule autre équipe, soit celle de Martin et Prince, s'est basée sur les nombres rationnels afin de déterminer leur rang, les autres s'étant appuyées sur le nombre de pages.

L'équipe formée de Rébecca et Réjean a procédé différemment. Les élèves se sont appuyés, dès le départ, sur le nombre de pages. Ils ont déterminé que Maria n'aurait lu aucune page et lui ont associé la fraction 0/18910123. Ensuite, ils ont inscrit 36 pages pour Hubert et Julia, car ils avaient précédemment déterminé que si Alexandre avait lu 1/6 du livre, cela correspondrait à 36 pages. Ils ont exploité ce qui a été fait au tableau en complexifiant enfin l'écriture de 1/6 et ce, de trois façons différentes: 131021/786126, 503/3018 et 330894/1985364. Les échanges suivants nous permettent de comprendre comment ils ont obtenu ces fractions :

ECH	Pour Alexandre 1/6…36 pages… ok mais si vous le réutilisez, réécrivez-le de façon compliquée.
RÉBECCA	Mais ça serait 3/18.
ECH	Tu pourrais le complexifier encore plus.
RÉBECCA	30 sur…
RÉJEAN	Ok, je pourrais mettre genre 786126 divisé par 6.
ECH	Pas sûr que ça va fonctionner...

RÉJEAN	C'est un nombre pair.
ECH	Rebecca tu as choisi 3018 comme numérateur, comment ferais-tu pour obtenir le dénominateur?
RÉBECCA	1 fois 3018.
ECH	Regarde avant de prendre ta calculatrice.
RÉBECCA	Attends-là!... 1 fois 3018 divisé en 6 (fait le produit croisé : 1/6 = 3018/?) égale 503
ECH	Ok 503/3018, moi je te disais … c'est bien plus facile lorsque tu regardes la relation entre le numérateur et le dénominateur tu fais fois 6 alors tu prends n'importe quel nombre que tu multiplies par…
RÉJEAN	Ou sinon tu le divises le dénominateur.
ECH	Génial!

Alors que Rébecca effectuait le produit croisé, Réjean s'appuyait sur le sens rapport : il choisissait un nombre au dénominateur qu'il divisait par 6 pour obtenir le numérateur. L'étudiante-chercheure a donc profité de cette occasion, et du fait que Réjean croyait que le critère de *nombre pair* suffisait pour déterminer qu'un nombre est un multiple de 6, afin de présenter une démarche similaire. Ainsi, elle a présenté comment, à partir du raisonnement de Réjean, ils pouvaient trouver plus facilement le résultat, c'est-à-dire en choisissant d'abord le numérateur. Le choix des nombres est alors fort simple dans la mesure où cela permet toujours d'obtenir des nombres entiers. Pour Samuel, ils ont repris, en partie, l'exemple que Rébecca avait donné au tableau avec 108 pages. Ils ont néanmoins transformé la représentation d'une demie en 8109/16218. De plus, ils ont pris la moitié des pages lues par Samuel pour Philippe, soit 54, et lui ont conséquemment associé une fraction en divisant celle de Samuel par 2 [1/2 ÷2 = ¼]. Dans le but d'embêter les gens avec cette simple fraction, ils ont inscrit 8109/32436. Ils ont obtenu ce nombre en choisissant un dénominateur et en le divisant par 4. Bien qu'ils se soient aussi limités à une représentation fractionnaire, ceux-ci ont montré une bonne connaissance du sens rapport de la fraction et des relations entre les fractions et les nombres de pages lues dans la construction de leurs fractions. Ils ont aussi exploité une écriture intermédiaire non conventionnelle qu'ils ont su justifier à l'enseignante qui les confrontait sur l'appartenance de leurs nombres à l'ensemble des rationnels. Enfin, pour Pascal, Rébecca explique à Réjean comment elle a fait : « 1/4 de 216 c'est 54 pages et 8109/32436 c'est comme ¼….½ de ¼…1/8 pour Pascal…27 pages.» Sur leur feuille, ils ont inscrit 119045,5/952364. Nous ne pouvons passer sous silence l'ingéniosité de leurs raisonnements. Ils se sont appuyés sur une fraction familière (1/2) leur permettant d'obtenir aisément, à partir des relations entre les nombres, une portion des pages lues par

Philippe. Il faut dire que Rébecca tenait davantage à choisir des fractions dont le numérateur était un facteur de 9 alors que Réjean ne se sentait pas lié par cette contrainte. D'ailleurs, nous aurons l'occasion de voir que certains élèves, à l'instar de Réjean, se sont habitués, devant l'effet de contrat, à complexifier continuellement leurs représentations des nombres rationnels pour donner du travail à ceux qui devraient le résoudre ou le corriger! Ils ont ordonné ainsi les nombres rationnels : 1) 0/18910123; 2) 503/3018; 3) 131021/786126; 4) 330894/1985364; 5) 119045,5/952364; 6) 8109/32436; 7) 8109/16218. En ce qui concerne les nombres aux 2[e], 3[e] et 4[e] rangs, ils savaient que ceux-ci représentaient le même nombre de pages, mais ils ont toutefois décidé de les présenter selon l'ordre de grandeur des numérateurs et des dénominateurs. Il aurait été pertinent de leur demander pourquoi ces nombres occupaient des rangs différents, du moins lors du retour collectif.

L'interaction ci-dessous est fort intéressante : s'étant « approprié » l'exploitation du sens rapport de la fraction, lorsque le numérateur est 1 (ex. 1/6), Réjean s'interroge sur des fractions qui ne font pas l'objet de leur activité.

RÉJEAN	Ok, j'ai une question : on fait divisé par 6 pour 1/6 mais si on veut avoir mettons 3/6, est-ce qu'il faut que je fasse mon dénominateur divisé par 3 ou quelque chose comme ça?
ECH	Pour avoir 3/6? 1/2 peut-être! Pour ton 3/6 tu peux diviser par 6 pour avoir 1/6 et tu multiplies par 3 pour en avoir 3 fois plus, 3/6.
RÉJEAN	Ok juste pour que je comprenne, je vais prendre un nombre.
ECH	Choisis-en un qui se divise par 6, quel nombre avais-tu tantôt?
RÉJEAN	68542368 … divisé en 6…11423728.
ECH	Donc 1/6 = 11423728/68542368. Si tu veux 3/6, tu peux faire quoi?
RÉJEAN	Fois 2 [cet élève veut dire que l'on peut choisir un numérateur et le multiplier par 2 pour obtenir le dénominateur].
ECH	Ou ce que je te disais diviser 68542368 par 6 pour obtenir pour 1/6 et fois 3 ensuite pour 3/6.
RÉJEAN	Donc 3427184 sur 68542368.
ECH	Bien oui, on voit bien que ça donne.
RÉJEAN	½, et mettons que je voudrais 2/6 je ferais fois 2 après.
ECH	Oui, si tu pars du 1/6.

Bien que l'étudiante-chercheure fasse appel à des connaissances différentes (… ÷ 6 …1/6… x3….3/6), Réjean s'attarde à nouveau sur la relation entre le numérateur et le dénominateur (3/6) et propose de multiplier le numérateur par deux pour obtenir le dénominateur, ce qui est davantage économique!

Hélène et Rémi ont rencontré plus de difficultés, entre autres, lorsqu'il s'agissait de tenir compte du nombre de pages du livre pour déterminer les fractions. Par exemple, ils ont choisi 10/56 [5/28] pour Maria et afin de connaître le nombre de pages correspondant ils ont inscrit : *216 de 5/28 = 216 x 5/28 = 1080/28* (la multiplication remplace le « de » dans leurs notes de cours). Ils ne savaient plus à ce moment comment représenter ce nombre, d'autant plus qu'ils avaient utilisé la calculatrice pour produire l'écriture fractionnaire. Cependant pour Alexandre, ils ont fait un choix plus judicieux (1/6) et déterminé qu'il avait lu 36 pages (216 ÷ 6 = 36). Ils n'ont pas complexifié cette écriture. La chercheure a tenté de leur venir en aide en inscrivant : 25%= ¼…12,5% = 1/8, comme cela avait été traité lors d'une activité précédente. Malheureusement, cette équipe a eu peine à se mettre au travail et ce, malgré les encouragements répétés de la chercheure.

Quant à Anne, elle a d'abord noté que la moitié du livre correspondait à 108 pages. À sa demande, l'étudiante-chercheure lui explique ce qu'est un nombre rationnel en s'appuyant sur la définition précédemment travaillée et l'accompagne des écritures suivantes : a/b: 50% ; 50/100; 0,50. Anne décide donc d'inscrire 24/48 pour la portion lue par Maria et lui fait correspondre les 108 pages lues. Ensuite, elle produit diverses écritures équivalentes à 1/3 pour Alexandre : 1/3 = 4/12= 8/24= 16/48 = 32/96 = 64/192 (32+32 = 64..96+96 = 192). Elle effectue le même processus avec ¼ (1/4 = 4/16 = 8/32= 16/64 = 32/128) pour Samuel auquel elle associe les 54 pages lues tel que le présente l'extrait suivant :

ANNE	Je suis fatiguée et je ne comprends pas.
ECH	Ok, si pour Hubert on choisit ¼ dans notre tête, par exemple, mais ¼, c'est trop simple…comment on pourrait l'écrire autrement pour que ça ait l'air compliqué ?
ANNE	2/8.
ECH	T'as raison…
ANNE	2 sur 8 16 +16 = 32 ..32+32…64…32/128.
ECH	Et ça donnerait combien de pages?
ANNE	1 page sur 4…
ECH	Ouais, mais il y a 216 pages..
ANNE	Sais pas.
ECH	S'il en avait lu la moitié?
ANNE	108 pages.
ECH	Mais s'il en a lu le quart?
ANNE	Divisé par 4?
ECH	Ok et c'est combien?
ANNE	54.

L'étudiante-chercheure reprend le même questionnement afin qu'Anne détermine le nombre de pages lues par Alexandre, ce qu'elle réussit en divisant par 216 par 3 (1/3..72 pages). Nous pouvons également prendre connaissance de l'aide apportée par la chercheure qui écrit 7/9 comme nombre rationnel pour Hubert et l'accompagne de l'opération 216 ÷ 9 = 24…24 x 7 = 168 pages. Étant donné le manque de temps, l'élève est invitée à déterminer le rang de chacun. Anne, s'appuyant alors sur le nombre de pages, inscrit : 1) 32/128; 2) 64/192 ; 3) 24/48; 4) 7/9.

De son côté, Marcel a vraiment réinvesti l'exemple fait au tableau; exemple auquel il a participé allégrement. De façon générale, il a choisi des fractions simples dont les dénominateurs sont des facteurs de 216 et les a par la suite complexifiées avec le soutien de l'étudiante-chercheure :

MARCEL	J'ai fait 216 divisé par 4,5,6,7.
ECH	Est-ce que ça fonctionnait toujours?
MARCEL	Ben des fois, ici 30 ça va donner une virgule.
ECH	Ici, tu as mis 27 pages.
MARCEL	Divisé par 4.
ECH	Et ça serait quoi comme fraction?
MARCEL	¼.
ECH	Ok, parfait, mais au lieu de mettre ¼, comment pourrais-tu écrire cette fraction autrement?
MARCEL	0,25.
ECH	Et si tu complexifies la fraction, si tu l'écris autrement, pour qu'elle ait l'air compliqué?
MARCEL	2/8.
ECH	Mais c'est encore trop facile. Si on regarde les relations, si je choisis 516 au numérateur, qu'est-ce qu'il faudrait que je mette au dénominateur?
MARCEL	4 fois 516…2064 …
ECH	Ici pour obtenir 36 qu'est-ce que tu as fait?
MARCEL	Divisé par 6, 1/6…ça égal à 6 fois 6 …36, 6/36.
ECH	Oui mais est-ce qu'on peut mettre quelque chose de plus compliqué? Je te laisse aller.

Malheureusement, alors que Marcel proposait une nouvelle entrée, soit d'exploiter les nombres décimaux, l'étudiante-chercheure le réoriente vers la notation fractionnaire. Cela dit, Marcel a montré, par le passage de l'énumération des facteurs à la notation fractionnaire, qu'il s'appuyait sur la relation entre le numérateur et le dénominateur (sens rapport de la fraction), ce qui n'avait pas été mis en jeu par les élèves, lors de l'exemple effectué au tableau, mais souligné par la chercheure. C'est pourquoi les fractions initiales proposées sont unitaires. Il a présenté les fractions suivantes en ordre décroissant de pages lues, auxquelles il a associé le nombre de pages correspondant: 1- Samuel : ½ =

1000/2000 (108 pages) ; 2- Hubert : [1/3] 48432/145296 (72 pages) ; 3- ; Julia : [1/4] 20/80 (54 pages); 4- Maria : [1/4] = 516/2064 (54 pages); 5- Alexandre : [1/6] 36/216- 36 pages; 6- Philippe : 12,5 % (27 pages). Comme en témoignent les fractions trouvées pour Hubert, Maria et Alexandre, suite aux questionnements de l'étudiante-chercheure, Marcel a su réinvestir ce même raisonnement; il s'est arrêté sur un numérateur quelconque qu'il a multiplié par un nombre, appliquant la même opération au dénominateur, afin de conserver le rapport initial entre le numérateur et le dénominateur.

ECH	Montre-moi ce que tu as fait pour que je sois fière…. 100/300, tu as raison, mais c'est un peu simple.
MARCEL	J'étais à court d'idées.
ECH	Qu'est-ce que tu pourrais mettre comme numérateur?
MARCEL	999…(que ECH n'avait pas entendu).
ECH	On va laisser aller notre main… 48 432.
MARCEL	Quel horreur!
ECH	Comment vas-tu obtenir le dénominateur?
MARCEL	Divisé par 3, fois 3…
ECH	Comment pourrait-on savoir si c'est divisé ou multiplié par 3?
MARCEL	Ben si c'était divisé par 3 le nombre serait plus petit et le dénominateur doit être plus grand.

Il faut enfin noter que pour le 12,5%, la chercheure a repris un épisode de l'activité sur la représentation des rationnels (30 avril 2007) et a effectué une illustration accompagnée d'écritures (1/4…25%.....1/8….) permettant d'effectuer plus aisément le passage des écritures fractionnaires aux pourcentages.

L'équipe composée des élèves Alex, David et Bertrand s'est limitée à écrire des nombres de pages lues et à associer à chacun de ces nombres un rang : Maria : 3^{e} rang- 12 pages; Alexandre : 6^{e} rang-125 pages; Samuel : 4^{e} rang – 80 pages; Hubert : 7^{e} rang - 210; Julia : 1er rang- 0 page; Philippe : 2^{e} rang 10 pages; Pascal : 5^{e} rang 100. Il importe de souligner que cette équipe n'a pas réclamé l'aide de l'étudiante-chercheure, de la chercheure ou de l'enseignante. Étant donné les interactions soutenues avec les autres équipes, les conduites de cette équipe n'ont malheureusement pas retenu notre attention.

Contrairement aux autres équipes, celle de Gaudi et Guy, ainsi que celle de Samuel et Noa ont exploité diverses représentations des rationnels; ces élèves n'ont pas fait appel à l'aide de l'enseignante, de l'étudiante-chercheure ou de la chercheure. Plus encore, l'équipe de Gaudi et Guy a utilisé diverses compositions additives et multiplicatives de nombres rationnels. Par exemple, pour Maria, les élèves de cette équipe ont choisi la fraction 7/8 qu'ils ont représentée par « 1/8 + 15/24 + 12,5% » et lui ont associé le nombre de pages lues, soit 189. Tout aussi ingénieux, pour rendre compte de la portion du livre lu par Samuel, ils ont écrit 50% (1/2) sous la forme 0,1 + 24% x 5 ÷ 3. Ce nombre rationnel n'a pas été choisi au hasard : il leur était ainsi fort simple de connaître le nombre de pages lues, soit 108. Il est à noter que l'écriture « x 5 ÷ 3 » reflète une compréhension non négligeable de la fraction opérateur. Afin de rendre compte de la portion lue par Alexandre, ils ont noté 0,5/4 (1/8) et 27 pages. Ils ont aussi fait preuve d'une autre démarche très économique : ils sont partis de la fraction 24/216 qui leur donnait directement accès au nombre de pages correspondant (24 pages) et l'ont complexifiée en multipliant le numérateur et le dénominateur par 4 pour obtenir 96/864. Afin de faciliter la mise en rang des différentes portions, étant donné qu'ils avaient déjà déterminé des nombres rationnels pour ½, 7/8, 1/8, ils ont choisi les fractions ¼ et 1/27 qu'ils ont respectivement représentées par $\frac{0{,}001}{0{,}004}$ *et* $0{,}25-\frac{5}{27}-\frac{2}{108}$; malheureusement, la dernière représente plutôt la fraction 5/108 et non 4/108 (1/27). La mise en ordre de ces fractions et la détermination du nombre de pages correspondant a ensuite été facilement réalisée : 1) 0,25-5/27-2/108 [8 pages]; 2) 96/864 [24 pages]; 3) 0,5/4 [27 pages]; 4) 0,001/0,004 [54 pages]; 5) 0,1 + 24% x 5 ÷ 3 [108 pages]; 6) 1/8 + 15/24 + 12,5% [189 pages]. Les productions de cette équipe mettent en exergue l'intégration de diverses représentations qui ont été exploitées lors des activités précédentes. Rappelons, à ce propos, une de leurs représentations du nombre 0,3 sous la forme $\frac{100\%-0{,}100-0{,}10-10\%-10\%}{2}$, lors de la période du 5 février et l'exploitation de l'écriture 0,125 = 1/8 comme étant la moitié de ¼, ¼ ayant été associé à 0,250, lors de la période du 30 avril.

Tout aussi créative, l'équipe de Samuel et Noa a eu recours à une kyrielle d'écritures. Il importe de souligner qu'avant que la chercheure n'intervienne pour inviter les élèves à recourir à des représentations complexes, ces élèves avaient produit des fractions fort simples (exemple. 1/2, 1/4 , 1/8 : Maria : ½..108 pages; Samuel : 110/110…316 pages; Hubert : 7 ¼ ...1566 pages (1512+54); Philippe 8/16…108 pages;

Pascal : 0,25 de Philippe …27 pages.) et ne trouvaient pas l'activité particulièrement stimulante, comme le montrent les propos de Samuel: « *Et notre but c'est quoi??? C'est con, c'est nous autres qui décident le nombre qu'on veut* ». Cependant, lors de la modification de leurs nombres, ils n'ont pas tenu compte du nombre de pages contenues dans le livre dans la mesure où leurs choix, à l'exception du choix du nombre 1/3, ne leur permettaient plus d'obtenir un nombre entier de pages. Il nous semble qu'ils étaient davantage préoccupés par la production de nombres « inusités » et par la sériation de ces nombres. Pour Maria, leur choix s'est arrêté sur le nombre décimal 0,004 (40/10000), tandis qu'ils ont représenté la portion d'Alexandre par le nombre 1,1/10 (1100/10000) et celle de Samuel par 1,44/100 (144/10000), auxquels ils n'ont pas associé le nombre de pages lues. On remarque aussi l'exploitation de pourcentages pour traduire la portion lue par Hubert : 317%. Quoique ce nombre soit étonnant, les élèves connaissaient très bien le sens inhérent à cette écriture. À ce sujet, l'étudiante-chercheure les a questionnés et ces derniers lui ont répondu ainsi :

SAMUEL	Ben moi, je l'ai lu 4 fois.
NOA	Non, non, c'est parce que le gars a rien compris de la fin et il essaie toujours de comprendre!

Pour connaître le nombre de pages correspondant à 317%, ils ont, dans un premier temps, multiplié 216 par 3 (648) afin d'identifier le nombre de pages associé à 300%. Dans un deuxième temps, ils ont effectué un produit croisé permettant d'obtenir le nombre de pages lues correspondant à 17% [17/100 = ?/216…216x17 ÷100] et ils ont arrondi le résultat comme suit : 36,72 donne 36,8. Enfin, ils ont additionné les deux sommes obtenues, soit un total de 684,8 et ont eu recours, là aussi, à l'arrondissement du nombre. Ils ont donc conclu qu'il avait lu 685 pages. Samuel et Noa ont aussi représenté 1/3 par 33,33333333%; l'écriture 33 1/3% avait été présentée lors d'une activité récente (24 mai 2007). Ils lui ont aussi associé les 72 pages correspondantes. Ils ont exprimé la part de Philippe en sachant qu'un entier est un nombre rationnel et en souhaitant faire un clin d'œil à l'activité sur la définition des rationnels dans laquelle nous avions vu que π n'était pas un nombre rationnel. Ils ont donc voulu déjouer les autres élèves en produisant l'écriture π/π, le nombre ainsi obtenu livrant directement le nombre de pages lues, soit

216. Enfin, ils ont décidé que Pascal aurait lu 15 % de la part de Philippe. Puisque la part de Philippe est associée à 216 pages, ils ont procédé à un arrondissement du nombre de pages correspondant à 15%, soit du nombre 32,4, produisant alors le nombre 32. Cependant, il faut noter que leur premier choix, avant l'intervention de la chercheure, était bel et bien approprié : 108 pages pour Philippe et, pour Pascal, 0,25 du nombre de pages lues par Philippe. Cette équipe, il importe de le souligner est la seule qui a pris en compte la part de Pascal. Sur leur feuille, on retrouve aussi des écritures qui n'ont finalement pas été retenues, soit : 70/3024 – 5 pages; 1980/4752 - 90 pages. Noa commente ainsi son premier choix : « 70/3024, est-ce que c'est correct ENS, ça donne 5 pages, il est paresseux hein?, Ça me ressemble un petit peu… ». Suite à l'obtention de ces différents résultats, ils ont consigné le rang de chacun en ordre décroissant, en s'appuyant, contrairement à ce que les autres équipes ont fait, sur les nombres rationnels choisis : Hubert : 1er rang 317%. (684,8p); Philippe : 2^{e} rang π/π (216p); Julia : 3^{e} rang 33,33333333% (72p); Pascal : 4^{e} rang 15% de π/π ; Alexandre : 5^{e} rang 1,44/100; Samuel : 6^{e} rang -1,1/10; Maria 7^{e} rang 0,004.

Évolution des rapports des élèves aux nombres rationnels et de la démarche d'acculturation institutionnelle

Malheureusement, peu d'élèves ont complété cette tâche; il s'agit des élèves Noa, Samuel, Rébecca et Réjean. Il faut dire que les conditions d'enseignement/apprentissage, en ce temps de l'année scolaire, n'étaient pas propices à un investissement fécond. De plus, nous avons été étonnées de la requête de plusieurs élèves (Marcel, Rébecca, Samuel et Anne) demandant à l'étudiante-chercheure de leur réexpliquer ce qu'est un nombre rationnel. Elle a donc repris avec eux la définition (a/b où a et b sont des nombres entiers et b différent de 0). Cependant, le travail qui a été effectué nous a bien démontré que la majorité des élèves étaient en mesure de coordonner diverses connaissances sur les représentations des rationnels (33,33333333%, π/π, etc.), d'exploiter les sens rapport (Marcel : 48432/145296; il multiplie le numérateur par 3 pour obtenir une fraction équivalente à 1/3) et opérateur de la fraction, dans des compositions additives et multiplicatives (Gaudi et Guy : 0,1 + 24% x 5 ÷ 3), d'utiliser des compositions additives (Gaudi et Guy: 1/8 + 15/24 + 12,5% ; Martin et Prince: 1/18- 1/36 pour 2/72) et de prendre en considération les relations entre les nombres (Rébecca et Réjean : « *1/4 de 216 c'est 54 pages et 8109/32436 c'est comme ¼….½ de ¼…1/8 pour Pascal…27 pages….*»). En ce qui concerne la mise en ordre décroissant des portions du livre que les différents élèves ont lues, peu d'élèves ont réalisé cette tâche en recourant aux nombres rationnels exprimant ces différentes portions; ces élèves ont investi les connaissances et procédés développés lors de la réalisation d'activités précédentes (comparaison 2 à 2 des nombres rationnels; exploitation du sens rapport des fractions, comparaison des nombres à la fraction « référence » ¼, etc.). Enfin, nous avons pu constater l'ingéniosité des élèves, qui, voulant se faciliter la tâche, ont choisi des fractions familières dont les dénominateurs étaient des facteurs du nombre 216. Bien que chacun des élèves ait proposé des nombres rationnels pour rendre compte de la portion du livre que chacun des lecteurs a lue, la sériation des nombres rationnels a été effectuée en considérant le nombre de pages lues par chacun des lecteurs. De plus, malgré la contrainte de ne pas utiliser la calculatrice, plusieurs l'ont utilisée. Il faut convenir que le recours au procédé fétiche « produit croisé » valorise une telle utilisation.

Il nous semble important de reproduire enfin les propos de Marcel[53] qui, au début de l'année, avait des rapports fort problématiques aux nombres rationnels, aux mathématiques en général et attendait que l'enseignante ou les chercheures fassent le travail à sa place : «Bonjour, vous voyez, j'ai fait des choses intelligentes »

Lors de l'entrée dans cette tâche, l'enseignante a souhaité nous faire part de ces remarques élogieuses qui, selon nous, sont plutôt attribuables à l'ensemble des acteurs de cette classe (enseignante, élèves, étudiante-chercheure, chercheure) :

ENS	Je suis un peu triste car ça ne sera jamais pareil comme ce qu'on a fait cette année. Je pense que cette année a été pour tout le monde en mathématique, très agréable.
RÉMI	Mémorable.
ENS	Mémorable, c'est vrai?
Élèves	Ouais!
ENS	Je pense que cette année a été un grand succès pour vos apprentissages et je pense qu'on doit ça en grande partie à nos deux visiteuses droguées de notre classe.
ECH	[en sourdine à CH] : Non c'est à eux autres!
CH	[en sourdine à ECH] : À notre trio…

53 Il s'adresse à l'enregistreuse posée sur son bureau de travail

ECH	C'est surtout parce que vous étiez agréables que nous avions envie de revenir.
ELS	Comment? Peux-tu répéter?
ECH	(Rires) Vous êtes agréables!
ENS	C'est ce que je leur disais, quand le groupe décide d'être formidable, les profs essaient d'en faire autant, un groupe l'fun, agréable, ça fait des activités agréables!

Ces remarques sont sans contredit à l'image d'un travail continu dans le milieu scolaire et reflètent la satisfaction mutuelle des acteurs dans cette collaboration, de la participation des élèves à l'enseignement.

De plus, les propos ci-dessous de l'enseignante s'avèrent fort révélateurs de la complicité construite entre l'enseignante, les chercheures et les élèves :

ENS	Geneviève a décidé de vous apporter une dernière activité et il y a une très bonne raison pour ça, c'est pour montrer comment vous êtes rendus bons et je pense que Geneviève veut se prouver que vous êtes meilleurs qu'au régulier, que vous avez des attitudes bien meilleures et que vous êtes prêts pour l'examen de la semaine prochaine.

En effet, malgré l'absence de concertation quant à l'origine de cette situation d'apprentissage, l'enseignante a su comprendre nos intentions.

En ce qui a trait plus particulièrement aux élèves, nous avons pu constater que lors de cette situation, quelques-uns ont fait référence à des activités antérieures (comparaison/sériation de nombres rationnels, 26/04/2007) et d'autres (effet du contrat didactique) ont cherché à complexifier continuellement leurs représentations pour donner du travail à ceux qui devraient résoudre le problème ou apprécier leurs propositions!

4.2.18. Examen final : évaluation individuelle des élèves

La période du 15 juin était réservée à l'évaluation de fin d'année. L'examen a été construit par les deux enseignantes de mathématiques intervenant auprès des élèves de première secondaire. En respectant notre approche écologique, nous ne sommes pas intervenues dans ce processus. Nous avons plutôt décidé d'analyser les tâches et les conduites des élèves, ce qui nous informait de l'influence des tâches (contenus, contexte : évaluation/apprentissage) sur leur conduites des élèves et nous permettrait de contraster ces conduites à celles observées dans des situations plus « inusitées ». Pour cette évaluation, les élèves ont accès à leur calculatrice et à un aide-mémoire constitué d'une feuille de notes qu'ils ont eux-mêmes construit. Il est explicitement précisé aux élèves que : *« Chaque question, ainsi que sa démarche ou sa justification, a son importance. Assure-toi de nous montrer ton raisonnement! Nous ne pouvons pas lire dans ta tête! »*. Ces conditions de réalisation ne seront pas sans affecter le choix des démarches des élèves tel que nous pourrons le constater dans la section suivante sur l'examen des réponses des élèves aux différentes questions traitant des nombres rationnels.

Neuf des 18 questions de l'examen concernent les nombres rationnels: a) trois questions traitent plus spécifiquement de la représentation, de la comparaison et de la sériation de nombres rationnels (questions 1, 2 et 14); b) six questions font appel à la résolution de problèmes additifs ou multiplicatifs (questions 4, 9, 15, 16, 17 et 18).

4.2.18.1. Analyse des réponses des élèves aux questions portant sur la représentation, la comparaison et la sériation de nombres rationnels

Nous reproduisons ci-dessous les questions portant sur la représentation, la comparaison et la sériation de nombres rationnels.

« *1. a) Sur une droite numérique, situe précisément les points ci-dessous.*

A.-2,5 B.-0,75 C. 0,25 D.-1,25 E. 2,25 F.-3,25

b) Parmi tous les nombres donnés, quel est
1) le plus grand nombre´?______ 2) le plus petit nombre?_______

c) La distance entre deux points est égale à 1. Quels sont ces points? [un espace est réservé à la démarche]

d) Quelle est la distance entre les points A et F? [un espace est réservé à la démarche]

2. Mégane, Félix, Mathis et Théo font une randonnée pédestre. Chaque personne transporte sa réserve d'eau pour la journée. Voici à quelle fraction de la capacité chacune a rempli son contenant.

Mégane a rempli son contenant aux 7/8 de sa capacité.
Félix a rempli le sien au 17/25 de sa capacité.
Mathis a rempli le sien aux 9/10 de sa capacité.
Théo a rempli le sien aux 4/5 de sa capacité.
[un espace est réservé à la démarche]

a) Qui a le contenant d'eau
1) le plus plein?__________ 2) le moins plein?___________

Explique tes réponses.

b) *La personne dont le contenant est le plus plein a-t-elle nécessairement plus d'eau que les autres? Explique ton point de vue.*

14. En vue d'écrire un article dans le journal de l'école, Myriam a interrogé ses camarades sur leur destination de rêve. Voici les résultats qu'elle a obtenus.

Amériques	Europe	Afrique	Asie	Océanie
5	7	4	6	3

A l'aide de pourcentages, décris la répartition des élèves selon leur choix.

À la question 1a), il est demandé aux élèves de situer sur une droite numérique pré-graduée, les nombres décimaux suivants : -2,5; -0,75; 0,25 ; -1,25; 2,25; -3,25. Les nombres positifs et négatifs utilisés sont fort simples; puisque chacune des unités est déjà partagée en deux parties égales, il est également facile de procéder à une partition de ces parties pour représenter les nombres dont les parties décimales sont 0,25 ou 0,75. Faisant suite à cette question, la question 1b) demande d'identifier le plus grand et le plus petit des nombres présentés à la question 1a); pour y répondre, les élèves pouvaient se référer à la représentation qu'ils avaient produite à la question 1a). Les questions 1c) et 1d) font référence à la distance entre des points de la droite précédente; à notre connaissance, peu de situations ont été consacrées à la mesure de telles distances. On pouvait ainsi s'attendre à ce que peu d'élèves savent identifier les points « -0,75 et 0,25 » qui se situent à une distance de 1 sur la droite, bien que certains aient situé correctement ces points sur la droite. Il était également fort probable que plusieurs élèves évaluent la distance entre les points A et F à -0,75, puisqu'il s'agissait de nombres négatifs.

La question 2a) nous apparaît intéressante, dans la mesure où la comparaison des fractions qui sont proposées ne favorise pas la recherche d'un dénominateur commun. En effet, la présence de huitièmes, de vingt-cinquièmes, de dixièmes et de cinquièmes complexifie la recherche d'un dénominateur commun. De plus, plusieurs de ces fractions (7/8, 9/10 et 4/5) peuvent être aisément ordonnées en s'appuyant sur le sens partie-tout. Cependant, la demande d'inscription d'une démarche explicite et l'accès à la calculatrice n'encouragent sûrement pas l'exploitation d'un tel raisonnement. La question 2b) est tout aussi pertinente, les élèves étant invités à établir une distinction entre une fraction représentant une partie d'un tout et la mesure de ce tout, ce qui, dans la situation présentée, n'est pas évident. Ainsi, ce n'est pas parce que la fraction du contenant d'eau qui est rempli par Mathis est la plus grande, que ce dernier dispose d'un volume plus important d'eau. Enfin, à la question 14, les élèves doivent représenter les répartitions des destinations de rêve choisies par les élèves interrogés par Myriam, en recourant à un pourcentage. Ils doivent établir un rapport entre le nombre d'élèves ayant opté pour chacune des destinations et le nombre total d'élèves, puis représenter ce rapport par un pourcentage. Puisque le nombre d'élèves est 25, il est relativement facile de représenter chacun des rapports par un pourcentage. Nous croyons par ailleurs que, dans ce type de tâches, plusieurs élèves exploiteront le procédé du produit croisé, procédé qui, comme nous avons pu le constater au cours des situations d'enseignement précédentes, est fréquemment utilisé, faisant partie d'habitudes fortement ancrées chez les élèves.

Le tableau suivant donne un aperçu des conduites des élèves lors du traitement des questions portant sur la représentation, l'ordonnancement et la comparaison de nombres rationnels

Tableau XLIX: Appréciation des conduites des élèves lors du traitement des questions portant sur la représentation, la comparaison et la sériation de nombres rationnels

RÉSULTAT ATTENDU POUR CHACUNE DES QUESTIONS	ÉLÈVE AYANT OBTENU UNE RÉPONSE ADÉQUATE	ÉLÈVE N'AYANT PAS OBTENU LE RÉSULTAT ATTENDU
1a. F. -3,25; A.- 2,5; D.- 1,25; B. - 0,75; C. 0,25; E. 2,25. (soulignons que le positionnement de ces nombres sur la droite était également important)	Guy, Rebecca, Samuel, Martin, Prince, David, Gael, Alex et Noa	Remi n'a placé que le point C, soit -0,25 sur la droite, mi-chemin entre 0 et 1; Rejan (-2,5 à -2,25; -1,25 à -0,25) Bertrand (-3,25 est placé à -3,125; -1,25 est placé à -1,125; -0,75 est placé à -0,375; 0,25 est placé à -0,125; 2,25 est placé à 2,125…-2,5 ok;). Pour les nombres exprimés aux centièmes, il a considéré la distance de 0,5 comme étant 1 qu'il a séparé en 3 (0,125) Gaudi (-2,5 est placé à -1,5; et -0,75 à -0,25) Anne (-3,25 est placé à -3,75; -2,5 à -2,25; -1,25 à -1,75; -0,75 à -1,25); Hélène a déterminé adéquatement la distance entre 2 traits. Elle a placé -2,5 à -1,5; -1,25 à -0,9; 0,25 à près de 0,4 (mauvaise division); -0,75 à 0,5; -

		3,25 à 3,5; 2,25 à près de 2,4)
1b.1 le plus grand nombre: 2,25	Guy, Rebecca, Samuel, Martin, Remi, David, Anne, Noa, Gael, Alex, Bertrand, Gaudi, Prince, Rejan, Rebecca	
1b.2 le plus petit nombre: -3,25	Guy, Rebecca, Samuel, Martin, Bertrand, David, Anne, Gaudi, Prince, Rejan, Noa	Remi (-0,75).
1c. La distance entre deux points est égale à 1 : B et C	Rebecca, Samuel, David, Gael, Prince	Bertrand (C : 0,25 et D : -1,25), Martin (C : 0,25 et D : -1,25), Noa (C : 0,25 et D : -1,25), Remi (D : -1,25 et E : 2,25), Gaudi (D et B cohérent avec ses erreurs), Rejan (F et A) Alex, Hélène, Guy, Anne (aucune réponse)
1d : distance entre A (-2,5) et F (-3,25) : 0,75	Rebecca, Samuel, Remi, Prince, Noa (50+25 = 75…0,75), Gael.	Guy, Rejean, Anne, Anne, Gaudi (-0,75), Martin (-3,25 – 2,50 = -0,75), Alex (75) David (-2,5 - - 3,25 = 1,5); Bertrand (-3,25 - - 2,5 = - 5,5 rep. 5,5),
2a.1 : Mathis : 9/10	Guy, Remi, Bertrand, Rebecca, Gaudi, Samuel, Martin, Rejan, Prince, Anne, Noa, Gael, Alex	David (Mégane : 7/8), Hélène (Théo : 4/5)
2a.2 : Félix	Guy, Remi, Bertrand, Rebecca, Gaudi, Samuel, Martin, Rejan, Prince, David, Anne, Noa, Gael, Hélène, Alex	
2b : Non, cela dépend de la capacité du contenant	Rebecca, Martin, Rejan, Noa, Alex, Guy, Gaudi	Remi (oui car le plus tu es proche du dénominateur le plus tu auras d'eau dans ton contenant) Bertrand (oui car son contenant est presque rempli. Le numérateur est plus proche du dénominateur), Prince (oui parce que son contenant est plus plein que les autres) David (oui car le pourcentage montre le nombre

		d'eau) Gael (oui car il a pris le 90/100% de son eau et il lui faudrait prendre le 10/100% de son eau pour plus en avoir) Hélène (oui parce que plus le dénominateur est petit, plus la portion est grosse Samuel (oui, car les dénominateurs sont tous les mêmes donc chaque bouteille il y a 100% d'espace) Anne: pas nécessairement car Matis a 3 de plus que les autres (je pense 3/25)
14- AM : 5/25 = 20% EU : 7/25 = 28% AF : 4/25 = 16% AS : 6/25 = 24% OC : 3/25 = 12%	Hélène, Remi, Samuel, Rejan, Alex, Noa, Marcel, Prince, Martin; Anne : (fr. eq. ? /100); Gael, Rebecca, Gaudi : (fr.eq. /100 opérateur scalaire); Guy, Martin, David : (produit croisé- ex. 5x100 ÷25)	

Comme le montre ce tableau, il n'est pas surprenant de constater que pour la question 1, la partie la mieux réussie concerne l'identification du plus petit et du plus grand nombre (1b). En effet, tous les élèves identifient correctement le plus grand nombre et seul Rémi commet une erreur dans l'identification du plus petit nombre. Il a associé -0,75 au plus petit nombre; il importe toutefois de souligner que cet élève n'a pas su placer correctement sur la droite aucun des nombres. Il est possible que sachant que les nombres les plus petits soient des nombres négatifs et sachant que 0,75 est plus petit que 3,25 et 2,5, il ait ainsi choisi - 0,75.

Neuf élèves seulement se montrent capables de situer correctement les nombres sur la droite numérique. Par ailleurs, si l'on tient compte des résultats de plusieurs études (voir, entre autres, les études dont nous avons fait état au second chapitre, notamment : Charnay et al, 1999; EvaMath, 1994) et du fait qu'une telle tâche n'a pas fait partie des situations d'enseignement réalisées auprès de ces élèves, ce résultat nous semble satisfaisant. Rappelons que sur cette droite, les points -2, -1, 0, 1 et 2 étaient déjà indiqués. Bien que les autres élèves montrent qu'ils savent ordonner correctement ces nombres et respecter l'ordre dans le placement sur la droite, ils ne savent subdiviser correctement les distances entre deux entiers pour traiter la partie décimale du nombre. Ainsi, par exemple, Bertrand situe le nombre -3,25 à -3,125; considérant à tort que la distance entre deux traits était ainsi de 1, il a partagé en 4 cette distance, sachant que 0,25 = ¼. Les erreurs commises par presque tous les autres élèves sont similaires.

Les questions 1c) et 1d) reliées aux distances entre divers points, distances qui n'avaient pas été l'objet d'une attention particulière dans les situations d'enseignement, comme nous l'avions prévu, ont également entraîné un nombre important d'erreurs. Avant d'examiner de plus près ces erreurs, il importe de souligner que 5 élèves répondent correctement à la question 1c) et 7 élèves à la question 1d). Bertrand, Martin, Rémi et Noa ne se sont pas préoccupés, pour la question 1c, du fait qu'il s'agisse de nombres positifs ou négatifs. Ainsi, Bertrand, Martin et Noa ont choisi les nombres 0,25 et -1,25, alors que Rémi a choisi les nombres -1,25 et 2,25. Réjean et Gaudi se sont appuyés correctement sur leurs représentations des nombres sur la droite (1a), afin de déterminer deux points dont la distance était de 1 (F et A); cependant comme ils avaient précédemment commis une erreur dans le positionnement de ces nombres (voir leurs réponses à la question 1a), celle-ci s'est répercutée sur le résultat obtenu. Enfin, Alex, Anne, Guy et Hélène n'ont pas répondu à cette question.

À la question 1d, où les élèves devaient déterminer la distance entre les points -2,5 et -3,25, compte tenu qu'il s'agissait de nombres négatifs, Gaudi et Martin ont répondu -0,75. Pour leur part, faisant référence à des situations connues, situations associées au calcul d'une différence entre deux nombres, David et Bertrand ont proposé un calcul montrant une interprétation adéquate de la question. David a effectué une erreur dans la réalisation du calcul suivant (-2,5 - - 3,25 = 1,5), bien qu'il obtienne un entier positif. Bertrand n'a pas été en mesure de poser et de traiter adéquatement le calcul à effectuer (-3,25 - - 2,5 = - 5,5). Enfin, Anne, Guy et Réjean n'ont pas répondu à cette question.

Les questions 2a.1 et 2a.2 ont été une réussite pour la majorité des élèves. Tel que nous l'avions anticipé, les élèves ont recherché un dénominateur commun (ex. : 200, 25, 40 et 100), souhaitant, comme nous l'avions prévu, laisser des traces de leurs calculs. Seuls David (2a) et Hélène (2a) ont produit une réponse erronée. Les justifications de

Hélène témoignent de représentations erronées fort élémentaires : « *Plus le numérateur est petit, plus la portion est grosse* ». Elle a eu recours à des collections pour représenter les nombres 9/10 et 17/25 et à des rectangles de différentes grandeurs pour représenter les fractions 8/9 et 4/5. David a utilisé le procédé du « produit croisé » pour transformer les fractions en pourcentage. Nous nous expliquons mal sa réponse erronée, car les pourcentages qu'il avait obtenus étaient justes. D'ailleurs, plusieurs des élèves ayant réussi ce problème ont exploité le pourcentage, soit Gael, Samuel, Réjean, Rébecca et Gaudi, Gael et David ayant fréquemment exploité ce procédé lors des situations précédentes. Gaudi a également utilisé le produit croisé alors que Réjean a multiplié chacune des fractions par un opérateur scalaire pour trouver les fractions équivalentes sur 100; Gael, Rébecca et Samuel ne laissent pas suffisamment de traces de leurs démarches pour pouvoir préciser la procédure exploitée. De plus, Noa, Guy et Martin ont aussi utilisé le produit croisé pour mettre les fractions sur 100 et Alex pour trouver les fractions équivalentes sur 40. De son côté, Anne a choisi 25 comme dénominateur commun, étant donné qu'elle n'a pas traité le nombre 7/8. Pour ce faire, elle a multiplié par un opérateur scalaire afin d'obtenir des fractions équivalentes sur 50, puis elle a divisé les nombres obtenus par 2, pour représenter les fractions en utilisant le dénominateur 25, ce qui l'a amenée à arrondir le numérateur pour n'avoir que des entiers. Seuls Prince, Bertrand, Marcel et Rémi ont utilisé un dénominateur commun qui soit un multiple de chacun des dénominateurs, soit 200. Ces élèves n'ont pas effectué le produit de l'ensemble des dénominateurs, ayant pris le temps d'identifier les relations multiplicatives. Il est par ailleurs intéressant de constater que Rémi a considéré la relation entre le numérateur et le dénominateur dans la justification de sa réponse : *« Si Félix a rempli son contenant à 136/200, c'est que son numérateur est moins proche du dénominateur, ce qui fait qu'il en a moins et que Matis lui est plus proche de la fin, ce qui fait qu'il en a le plus* ». Les procédés utilisés par la grande majorité des élèves témoignent bien d'un souci de répondre à la demande des enseignantes, réponse associée à un recours à des calculs. Si on se remémore les conduites antérieures de plusieurs de ces élèves dans des tâches de comparaison de fractions, il leur aurait été possible de comparer les fractions 8/9, 4/5 et 9/10, sans recourir à des calculs, si aucune démarche écrite (qui est synonyme pour eux de calculs) n'avait été exigée?

La question 2b a été échouée par un peu plus de la moitié des élèves. Nous croyons que pour plusieurs de ces élèves (Rémi, Bertrand, Prince, David, Gael, Samuel) l'interprétation de la question a pris appui uniquement sur les représentations des fractions; puisqu'elles avaient toutes été représentées en recourant au même dénominateur, il allait de soi que plus le numérateur était grand, plus le contenant était plein. Ces élèves ont ainsi fait abstraction du contexte ou encore, considéré implicitement que tous les contenants étaient de la même grandeur, puisqu'aucune information n'était explicitement fournie. L'explication de Samuel qui, rappelons-le est un des élèves les plus performants de la classe, est, à ce propos, fort éloquente : « *Oui, car les dénominateurs sont tous les mêmes, donc chaque bouteille il y a 100% d'espace* ». Les réponses erronées des autres élèves (Anne et Hélène) sont tout aussi problématiques, comme en témoignent les justifications suivantes : a) Hélène: « *Oui, parce que plus il y a de personnes, plus il va y avoir moins d'eau dans ton verre* »; b) Anne : « *Pas nécessairement car Matis a 3 de plus que les autres*».

La question 14 a été réussie par tous les élèves. Ils ont résolu correctement ce problème : ils ont représenté les rapports entre les choix des différentes destinations et le nombre total de choix par des fractions (ex. : 5/25; 7/25;…), puis exprimé chacun de ces rapports en recourant au dénominateur 100; Gael, Rébecca et Gaudi précisent qu'ils ont obtenu ces pourcentages en multipliant par un opérateur scalaire, alors que les productions de Guy, Martin et David rendent compte de l'utilisation de la «technique du produit croisé». Les autres élèves se contentent d'inscrire les pourcentages, ce qui ne nous permet pas de reconnaître la démarche privilégiée.

4.2.18.2. Analyse des conduites des élèves lors de la réalisation des problèmes

Six problèmes impliquant des nombres rationnels faisaient partie de l'examen. Nous reproduisons ces problèmes et procédons par la suite à l'analyse des conduites des élèves lors de la résolution de ces problèmes.

Le problème 16, que nous présentons en premier, est un problème additif de relation entre deux mesures, une de ces mesures étant connue et l'autre mesure exigeant une composition additive de mesures. Parmi les problèmes multiplicatifs qui sont soumis aux élèves, les problèmes 4, 9, 15 et 18, sont des problèmes de proportionnalité simple et le problème 17 est un problème de produit de mesures. Les problèmes 9, 17 et 18 sont de facture « assez usuelle ». Le problème 4 nous semble par ailleurs représenter un niveau de difficulté plus important que les autres problèmes, compte tenu de la diversité des mesures (capacité, débit, heure) et des représentations de ces mesures (pourcentage et fraction).

« 16. *Pour réaliser une recette, Dominique doit mélanger les ingrédients ci-dessous dans un grand bol.*

- *2 1/3 tasses de farine*
- *¼ de tasse de beurre fondu*
- *5/8 de tasse de levure chimique*
- *½ tasse de lait*
- *1 2/3 tasse de mélasse*

Le bol dont elle dispose a une capacité de 5 1/3 tasses

Pour pouvoir bien mélanger le tout, Dominique doit s'assurer que, une fois tous les ingrédients versés, il restera au moins un quart de tasse disponible dans le bol. Peut-elle utiliser son bol de 5 1/3 tasses? Explique ta démarche.

4. *Les parents de Rébecca veulent remplir leur piscine aux 9/10 de sa capacité. Ils utilisent un boyau d'arrosage ayant un débit qui permet de remplir environ 12% de la piscine toutes les heures. Combien de temps le remplissage prendra-t-il? [un espace est réservé à la démarche]*

9. *Maude veut acheter un coffret de six disques DVD se vendant au prix de 99,60$. Elle se demande combien coûterait un seul disque si chacun était vendu séparément. [un espace est réservé à la démarche]*

15. *Pour la journée de plein air automnale, quatre activités ont été proposées aux 250 élèves de premier cycle d'une école secondaire. Voici les résultats des inscriptions aux activités.*

Résultat des inscriptions aux activités
Rallye : 14%
Pêche : 26%
Randonnée : 32%
Hébertisme : 28%

a) *Quelle activité a été choisie par environ*
   1. *Une personne sur trois?*
   2. *Une personne sur quatre?*

b) Combien d'élèves se sont inscrits à la pêche?
c) Combien d'élèves ne participeront pas au rallye?
d) L'hébertisme a été choisi par combien d'élèves de moins que la randonnée?

17. Un bon nombre de sports se pratiquent sur des surfaces rectangulaires. De nos jours, on recouvre souvent le sol de gazon artificiel. Quelle est la surface du gazon artificiel nécessaire pour couvrir

a) un terrain de soccer de 100 m sur 50,8 m? [un espace est réservé à la démarche]

b) un terrain de hockey sur gazon de 91,4 m sur 54,9 m? [un espace est réservé à la démarche]

18. Deux automobilistes se présentent à une station d'essence. Le prix annoncé pour l'essence ordinaire est de 84,9 cents le litre.

a) La première personne achète 25,5 litres d'essence. Combien doit-elle payer? [un espace est réservé à la démarche]

b) La seconde a 33,81 $ en poche. Avec cette somme, combien de litres d'essence peut-elle acheter? [un espace est réservé à la démarche] »

Le tableau suivant donne un aperçu des conduites des élèves lors de la résolution des problèmes précédents.

Tableau L: Appréciation des conduites des élèves lors de la résolution des problèmes

PROBLÈMES (RÉPONSES ATTENDUES)	ÉLÈVES AYANT PRODUIT UNE RÉPONSE ADÉQUATE (X) : produit croisé	ÉLÈVES AYANT PRODUIT UNE RÉPONSE ERRONÉE
16. Non, car 5 3/8 + ¼ est plus grand que 5 1/3 : 2 1/3 + ¼ + 5/8 + ½ + 1 2/3 = …2 8/24 + 6/24 + 15/24 + 12/24 + 1 16/24 = 3 57/24 = 5 9/24 = 5 3/8	Prince, Anne, Gael, Hélène, Rebecca, Gaudi, Samuel, Rejean, Bertrand; Remi; Martin	David (Oui, le pot serait assez grand : 236/100) Noa (oui, 4 16/18) Alex (oui, 129/24=5,3) Guy (34/23)
4 : 90÷12 = 7,5 **7h30**	Gael (produit croisé); Rebecca (7 ½); Gaudi (pourcentage); Samuel; David (7,5h); Alex(7,5h); Réjean (7,5h)	Prince et Martin (7H50); Anne (1,2H); Noa (8H20); Hélène (39h); Guy (10h08); Remi (aucune réponse), Bertrand (aucune réponse)
9 : 99,6÷6 = **16,60$/CD**	Remi, Martin, Noa, Gael : (calculatrice) 99,60 ÷ 6 = 16,6; Prince : (algo de la division) : 99,60 ÷ 6 = 16,6 Hélène : dessin de 6CD encerclé = 99,60….99,60/6 = ?/1 Anne; 99,60/6 = ?/1..sais pas comment? Guy (produit croisé) : 99,60$/?$ = 6/1 Bertrand, Rebecca, Gaudi, Samuel: 6DVD/99,60$...1DVD/?....99,60 ÷ 6 = 16,6 Alex : 6/99,60$ = 1/?	David (99,60÷6=11,06)
15 a.1. Randonnée	- David, Martin, Rebecca (ils considèrent que le nombre total d'élèves, soit 250, correspond à 100% des inscriptions; puis, ils déterminent les nombres d'élèves associés à chacun des	Hélène (14/100 = 35/250; 32/100 = 80/250; 28/100 = 70/250; 26/100 = 65/250…Rallye) Gael (750)

	pourcentages :1) David et Martin utilisent le produit croisé : ex. : 250 x 14 ÷100 = 35; Martin effectue aussi la division suivante, soit 100÷32 = 3,125; 2)Rebecca détermine le nombre d'inscriptions correspondant à 1/3 de 250 (250 ÷ 3 = 83), puis les nombres d'inscriptions correspondant aux différents pourcentages (ex. : 26/100x250 = 65 et compare ces nombres -Gaudi (recourt au produit croisé pour transformer les % en fractions sur 250. ex. 250 x 14 ÷100 = 35…35/250) ; -Noa (26/100 = 0,78/3; 28/100=0,84/3; 32/100 = 0,96/3; 14/100=0,42/3) -Marcel, Alex, Samuel, Remi (aucun calcul) -Rejean (100÷3 = 33); Prince (1/3 = 33/100)	Anne (26 ÷ 3 = 1 …pêche) Guy (1/3 = ?/28; (x) 9 personnes Bertrand (1/3 = 10/32; randonnée)
15 a.2. Pêche	David, Gaudi (x) Rejean (100÷4 =25); Rebecca (250 ÷ 4 = 62,5) Martin (100 ÷ 26 = 3,8); Marcel, Alex, Samuel, Remi (aucun calcul) Prince (1/4 = 25/100); Hélène (voir calculs 15 a.1.)	Bertrand (1/4 = 7/28…hébertisme) Noa (26/100 = 1,04/4; 28/100= 1,12/4 ; 32/100 = 1,2/4;14/100=0,56/4…randonnée) Gael (1000); Anne (14 ÷ 4 = 3,5 , arrondi, 4 : rallye); Guy (1/4 = ?/28; (x) 7 personnes)
15 b. 65	David, Marcel, Rejean, Alex, Samuel, Bertrand, Prince, Hélène, Noa, Gael (X), Gaudi (X), Martin(X) et Remi (X) : (26/100 = ?/250), Rebecca (26/100*250 = 65)	Anne (26/100 = ?/1; ? = 0,26) Guy (1/26 = ?/250; (X) 9,6 élèves)
15 c. 215	David, Martin (250-35) ; Rejean, Alex, Samuel, Noa, Gaudi (X), Gael (X) : (14/100 = ?/250; ?= 35...250-35 = 215) Bertrand,Prince (32/100=80/250; 28/100=70/250; 65+80+70=215) Rebecca (14/100*250 = 35; 250 – 35 = 215)	Marcel (35); Remi (35 : 35x100÷250); Hélène (14/100 = 35/250) ; Anne (14/100 = ?/1; 32/100 = ?/1; 28/100 = ?/1; 0,26+0,14+0,32+0,28 = 1); Guy (1/32=?/250; (X) 7,81; 7,8 personnes)
15 d. 10	David, Martin, Marcel, Bertrand : (80-70) Rejean, Alex, Samuel, Prince, Hélène, Noa, Gael, Gaudi, Remi: (32/100 = ?/250 : produit croisé; 28/100= ?/250; 80-70 = 10) Rebecca (32/100*250= 80; 28/100*250 = 70; 80-70=10)	Anne (32/100 – 28/100 = 4/100) Guy (32-28 = 4)
18a : 84,9 x 25,5 = **2164,95 cents** **…** **21,65$ appx**	Alex (25,5x 84,9 = 2164,95 cents); Samuel (25,5x 84,9 = 2164,95; 2165 ÷100 = 21,65$); Rebecca 25,5 x 0,84 + 25,5 x 0,009 = 21,42 + 0,2295 = 21,64$; Hélène (84,9 cents/1L = ?/25,5L; 2164,95 cents); Rejean (84,9 x 25,5= 2164,95 cents); Prince (84,9 x 25,5 = 2164,95 cents … 21,64$) Gaudi (0,849 x 25 = 21,225$; 0,894 ÷ 2 = 0,4245$; 21,225$+ 0,4245$ = 21,6495$)	-David (25,5 x 84,9 = 21,64 pas d'unité) Remi : (84,9 x 25,5 = 2164,95 pas d'unités); -Anne (84,9 x 25,5 = 2164,95 pas d'unités); Gael; (25,5L x 84,9 cents = 2164,95$) Martin (84,9 x 25,5 = 2164,95$); Guy (25,5 x 84,9 = 22,95$); Bertrand (84,9 x 25,5 =212,25) Noa (84,9 x 25 = 2122,5; 4,245 cents pour 5 ml; 2122,5 + 4,245 = 2126,745 pas d'unités);
18b : 33,81÷0,849=	Guy (33,81÷ 0,849= 39,8 L) ;	-Anne (84,9/1 = 33,81/? …0,398);

39,82L	David (33,81÷84,9 =39,82 pas d'unité) Samuel (3381÷84,9 =39,9L) Prince (3381÷84,9 =39,8L)	Gael (1L/84,9 cents = ?/33,81$... 0,398L) ; -Hélène (84,9c/1L = 33,81$/?L; 0,39L) -Noa (84,9 x 33= 28,017; 84,9 x 7 = 5,948; 28,017+5,943 = 39 litres); Bertrand (84,9 x 39 = 33,111; rep. 39 litres); -Rejean (3381÷84,9 = 40L); -Gaudi (0,849 x 25 = 21,225; 0,849 x 10 = 8,49; 0,849 x 5 = 2,547; 21,225+8,49+2,547 = 32,265…40 litres) -Alex (84,9 x 33,81 = 2870,469); Martin (33,81 x 84,9 =2870,46$); Rebecca (33,81 – 21,64 = 12,17; 12,17 x 84,9 = 10,33$ litre; 10,33+25,5 = 30,41 litre; 30,41 x 84,9 = 25,81$; 40,41 x 84,9 = 34,30; 39,41x84,9 = 33,45 rép. 33,45 litres); Remi (rien);
17a : 100 x 50,8 = **5080 m^2**	Prince; David; Anne; Noa; Gael; Hélène; Alex; Remi; Bertrand; Rebecca; Gaudi;Samuel; Martin; Rejean	Guy (100-50,8 = 49,2);
17b : 91,4 x 54,9= **5017,86 m^2**	Prince; David; Anne; Noa; Gael; Hélène; Alex; Remi; Bertrand; Rebecca; Gaudi; Samuel; Martin; Rejean	Guy (91,4 – 54,9 = 36,5)

Le problème 16 a été correctement résolu par un peu plus de 2/3 des élèves. Une démarche fort économique a été mise en place par Anne et Gaël : ils ont d'abord additionné les fractions des nombres fractionnaires (2 1/3 et 1 2/3 → 2/3 + 1/3 = 3/3 = 1 ; …4); ils ont ensuite trouvé la somme des autres fractions (1/2; ¼; 5/8) en utilisant 8 comme dénominateur commun; le nombre ainsi trouvé, soit 5 3/8, étant plus grand que 5 1/3, ils ont conclu rapidement que le bol était trop petit. Ces démarches montrent bien le trajet parcouru par ces élèves qui, au début de la session, n'avaient pas l'habitude d'examiner les nombres avant de procéder à des calculs. Prince et Réjean ont d'abord, comme les élèves précédents, effectué la somme des nombres 2 1/3 et 1 2/3. Ils ont transformé ces nombres fractionnaires en fractions impropres, obtenant alors 12/3, puis 4. Par la suite, Réjean conclut rapidement, sans faire de calculs, « qu'avec l'ajout des autres ingrédients, le bol est trop petit », alors que Prince trouve la somme des autres fractions en utilisant 8 comme dénominateur commun et conclut également que le bol est trop petit.

Les autres élèves (Gaudi, Samuel, Martin, Bertrand, Hélène, Rémi, David, Noa, Alex) ont effectué la somme de tous les nombres rationnels, en recourant à un dénominateur commun. Seuls Gaudi, Samuel, Martin et Bertrand ont d'abord représenté les nombres fractionnaires par des fractions impropres. Pour leur part, Bertrand, Hélène, Gaudi, Rémi et Alex ont utilisé 24 (24 étant un nombre multiple de chacun des dénominateurs des fractions), comme dénominateur commun, alors que Samuel et David ont exploité les pourcentages. Parmi les quatre élèves qui ont commis des erreurs, on remarque que : a) David a oublié de considérer les parties entières d'où l'obtention d'une quantité beaucoup plus petite que celle attendue; b) Noa a produit une représentation erronée du nombre 1 2/3 (1 2/3 → 1 24/18) et effectué quelques erreurs de calculs (ex. : 6/18 + 4,5/18 + 11,25/18 = 21,3/18), en plus de recourir à un dénominateur qui ne facilite pas la représentation des nombres; c) Alex a obtenu la somme exacte de tous les ingrédients, soit 129/24, et représenté cette somme par un nombre décimal approximatif, soit 5,3, ce nombre résultant de la division de 129 par 24; il a ensuite comparé ce nombre au nombre 5 1/3 représenté par 5 8/24 et conclut alors « *oui, car ça ne déborde pas, il reste encore de la place* »; d) le résultat obtenu par Guy, en cette période de l'année, et compte tenu de ses conduites lors de plusieurs activités antérieures, nous a étonnée; en effet, afin de réunir les ingrédients, il a simplement transformé tous les nombres fractionnaires en fractions impropres, ces nombres incluant le nombre 5 1/3 qui est associé à la mesure de la capacité du bol; il a ensuite additionné les numérateurs et les dénominateurs de ces fractions (16/3 + 6/3 + ¼ + 5/8 + ½ + 5/3 = 34/23), ce qui lui a valu le résultat de 34/23 ou 1 11/23. Il a expliqué ainsi sa démarche : «j'ai mis les taux en nombres impropres et elle a en tout 1 11/23 » puis, il a ajouté qu' *«elle pourrait donc mettre 3 59/69 de plus* »; les nombres 1 11/23 et 5 1/3 ont été représentés par les fractions suivantes « 102/69 et 368/69 », la différence entre ces nombres, soit 266/29, a été représentée par un nombre fractionnaire, soit 3 59/69.

Comme en fait état le tableau précédent, il existe des différences appréciables entre les réussites aux différents problèmes multiplicatifs. Ainsi, le problème 17 impliquant des produits de mesures, produits permettant de déterminer les aires respectives des terrains de soccer et de hockey, a été réussi par tous les élèves, à l’exception de Guy qui a procédé à une soustraction des mesures des côtés de chacun des terrains. Plusieurs des élèves qui ont répondu correctement à chacune des questions de ce problème, ont eu recours à leur calculatrice, un tel recours étant observé pour chacune des questions, bien que, compte tenu des mesures choisies pour le terrain de soccer, il ne soit pas économique d’utiliser une calculatrice, pour trouver l’aire de ce terrain. La permission qui leur est accordée de recourir à une calculatrice semble ainsi « les dispenser d’examiner les nombres ». Il faut d’ailleurs noter que peu d’élèves, soit Gaudi, Hélène, Samuel, David, Réjean, Alex et Marcel, inscrivent correctement l’unité de mesure d’aire, soit m^2. Guy, Gaël, Noa, Rémi et Rébecca reproduisent l’unité de mesure associée aux mesures initiales, soit m, alors que Anne, Prince, Martin et Bertrand ne s’en préoccupent pas.

Les problèmes de proportionnalité simple, soit les problèmes 4, 9, 15 et 18, n’ont pas donné lieu à des réussites comparables. En effet, comme nous l’avions prévu, le problème 4 a causé davantage de difficultés aux élèves : seulement 7 élèves ont correctement résolu ce problème, soit les élèves Gaël, Rébecca, Gaudi, Samuel, David, Alex et Réjean. Ces élèves ont mis en œuvre diverses démarches : produit croisé [1/12% = ?/90% (Alex); 12/1 = 90/? (Gaël)]; division de fractions [90 /100 ÷ 12/100 = 7 ½ (Rébecca, Réjean)]; division de nombres entiers [90 ÷ 12 = 7,5 (David (7,5H), Samuel (7h30)]; multiplication permettant de trouver le nombre de fois que 12 est contenu dans 90 [Gaudi (12x6=72%; 12x7=84%; 12x8=96%; 12x7,5=90%]. Il nous semble pertinent de noter que le procédé utilisé par Samuel, procédé économique, est aussi appliqué par David, ce qui témoigne bien du trajet « notionnel et procédural » parcouru par ce dernier élève. Les procédés utilisés par les élèves qui n’ont pas résolu correctement ce problème sont diversifiés. Par exemple, l’exploitation des nombres décimaux pour rendre compte de l’heure est à l’origine des erreurs commises par Prince et Martin. Ainsi, bien qu’ils aient interprété et résolu adéquatement le problème, le résultat obtenu, soit 7,5 heures, a été traduit par 7h50; s’il est juste de représenter le nombre 7,5 par le nombre 7,50, il n’est pas juste d’associer 7,5 heures à 7h50. Il est probable que si le résultat obtenu avait été 7,9 heures, ces élèves auraient possiblement pu exprimer en minutes 0,9 d’une heure. De son côté, Noa a d’abord exprimé la fraction 9/10 (fraction du volume de la piscine concerné par la situation, par l'activité de remplissage) sur 100 (90/100), afin de pouvoir traiter le débit de 12% par heure; il recherche alors le nombre de fois que 12 est contenu dans 90, en additionnant successivement 12, 8 fois. (12+12 = 24; 24+24=48; 48+24=62; 62+12=74; 74+12= 86). L'erreur qu'il commet dans l'addition des nombres 48 et 24 explique par la suite, le nombre de minutes qu'il obtient pour un débit de 4%. Ainsi, puisque 90 % correspond alors à 86% + 4%, il cherche ensuite à déterminer le nombre de minutes durant lequel le boyau d'arrosage devrait être activé pour pouvoir remplir 4% du volume. Et, bien que le procédé qu'il utilise soit approprié (86%+ 4 = 90%; 60÷12 = 5 ; 5 min/1%), l'erreur précédente se répercute dans sa réponse qui est alors 8h20 minutes. Enfin, plusieurs des calculs effectués par les autres élèves qui ont échoué sont difficiles à interpréter et semblent rendre compte de leur incapacité à traduire de façon opérationnelle la situation. Le tableau suivant indique les calculs effectués par ces derniers élèves. Mentionnons enfin que Rémi n'a pas effectué ce problème.

Élèves ayant échoué	**Opération posée**	**Réponse**
Guy	90/100 = ?/12 ; 10,8	10h08 minutes
Bertrand	12/100 x 10/1 = 120/100; 120÷100	1,2
Anne	12% /100 = 0,12/1 = 1,2	1,2 à l'heure
Hélène	12/100 – 9/10 = 78/100 = 39/50 12/100 = chaque heure	39 heures

Comme le montrent les résultats précédents, le problème 9 qui est un problème de proportionnalité simple n'a été échoué que par un élève, soit David. Il a posé adéquatement l'opération 99,60 ÷ 6, mais il a curieusement obtenu le résultat de 11,06 à l'aide de sa calculatrice. Peut-être squ'il s'est simplement trompé de touche et a divisé par 9. Les élèves qui ont résolu correctement ce problème (Prince, Noa, Gaël, Hélène, Alex, Anne, Guy, Rémi, Bertrand, Rébecca, Gaudi, Samuel, Martin, Réjean) ont tout simplement posé l'équivalence des rapports entre les nombres de DVD et les coûts (6DVD/99,60$ = 1DVD/? ; 99,60/6 = ?/1; 99,60$/?$ = 6/1) et ont effectué la division de 99,60 par 6, afin de trouver le coût d'un DVD. Pour ce faire, Prince a effectué l'algorithme de la division, Guy a employé la « technique du produit croisé », Hélène s'est appuyée sur un dessin qu'elle a produit (représentation de 6 DVD encerclés auxquels elle a associé le coût de 99,60$ et représentation d'un DVD accompagné d'un point d'interrogation), et Réjean a inscrit, sous la forme d'un tableau : 6 DVD pour

99,60$ et 1 pour ?, avant d'effectuer la division suivante : 99,60 ÷ 6 = 16,6. Les autres élèves n'ont pas laissé de traces de leurs calculs. #

Le problème 15 a été bien résolu par la majorité des élèves. Seuls les élèves Anne et Guy n'ont répondu correctement à aucune des sous-questions que comportait ce problème. Les conduites de Guy sont assez problématiques. En effet, cet élève associe chacun des nombres indiquant les différents pourcentages à la mesure de chacun des « touts » considérés; ainsi, pour répondre à la question 15a, il essaie de trouver une fraction équivalente à 1/3, fraction dont le dénominateur est 28, ce nombre étant considéré comme un tout et non comme un pourcentage; il obtient alors 7/28 et associe le numérateur 7 à 7 élèves. Un procédé identique est appliqué pour répondre à la question 15b. Des conduites similaires sont également utilisées par Bertrand pour répondre à ces questions (1/3 = 10/32[54]; ¼ - 7/28). Puisque les questions 15b et 15c portent sur le nombre d'élèves participant ou non à des activités, Guy essaie successivement de trouver une fraction équivalente à 1/26, au lieu de 26/100, (15c) et à 1/32, au lieu de 32/100, (15d), fraction dont le dénominateur correspond au nombre d'élèves, soit 250 (ex. : 15c) 1/26 = ?/250); il se contente d'inscrire les nombres d'élèves ainsi trouvés. Et, pour répondre à la question 15d qui porte sur la différence entre les nombres d'élèves ayant choisi l'hébertisme et la randonnée, il calcule la différence entre les pourcentages (32 – 28= 4); ce calcul constitue une bonne entrée pour déterminer les nombres d'élèves mais, malheureusement, là s'arrête sa démarche qui ne tient pas compte du nombre total d'élèves, soit 250.

Les conduites de l'élève Anne qui répond incorrectement à chacune des questions du problème 15 témoignent également de difficultés d'interprétation des données et des relations entre les données de ce problème. Pour les questions 15a.1. et 15a.2., elle choisit d'abord un pourcentage et le traite comme s'il s'agissait d'un nombre entier; ainsi, ayant choisi 26%, soit le pourcentage associé aux inscriptions aux activités de « pêche », elle divise ce nombre par 3 pour trouver 1/3 de ce nombre (26 ÷ 3 = 1…). Les « … » nous

[54] Bien qu'il obtienne la bonne réponse au numéro 15a. (randonnée), sa démarche démontre un raisonnement erroné.

laissent entendre qu'elle s'est possiblement contentée d'une approximation, puisqu'elle a maintenu son choix. Elle applique un procédé similaire dans le traitement de la question 15.a.2. et cette fois, elle indique clairement qu'elle procède à un arrondissement de ce nombre. Le traitement des questions 15b et 15c montre une volonté de prendre en compte le fait qu'il s'agit bien de trouver des nombres d'élèves. Pour ce faire, elle trouve une fraction équivalente à chacune des fractions correspondant aux pourcentages indiqués, fraction dont le dénominateur est 1; le recours à un tel dénominateur montre bien son intention de produire un nombre qui ne soit pas une fraction. Elle obtient ainsi des nombres décimaux. Enfin, elle procède de la même façon Guy pour répondre à la question 15d.

Examinons maintenant les conduites des élèves qui parviennent à répondre correctement à au moins deux questions que comporte la situation 15. Pour le numéro 15a.1. et 15a.2., Gaël n'a laissé aucune trace de ses calculs; cependant, ces résultats « 750 et 1000 » résultent, selon nous, des calculs suivants : 250 x 3 = 750 et 250 x 4 = 1000, (au lieu de 250 x 1/3 et 250 x ¼) calculs montrant une interprétation erronée de la situation. Il semble ainsi avoir considéré que le nombre d'élèves représentait une fraction du nombre total d'élèves (15.a.1. 250 → 1/3; 15.a.2. 250 → 1/4) et qu'il fallait trouver le nombre total. Pour sa part, Hélène n'a pas répondu correctement qu'au problème 15a.1. Elle avait pourtant bien entamé la résolution de ce problème en représentant chacun des pourcentages sous une forme fractionnaire dont le dénominateur correspond au nombre total d'élèves inscrits aux activités : rallye [14/100 = 35/250] ; randonnée [32/100 = 80/250] ; hébertisme [28/100 = 70/250] et pêche [26/100=65/250]. Cependant, lors de la comparaison de ces fractions à 1/3, son choix s'est arrêté sur l'activité du rallye (14/100=35/250). Est-ce parce qu'elle a considéré uniquement le numérateur, soit 35, ce numérateur étant plus près du numérateur de la fraction décimale qui correspond à 1/3? Nous ne disposons pas d'informations suffisantes pour conclure.

Quatre démarches différentes ont été déployées par les élèves qui ont répondu correctement aux questions 15.a.1. et 15.a.2. Comme le montre le tableau, certains élèves (David, Martin et Rébecca) ont recherché le nombre d'inscriptions à chacune des activités en considérant le nombre total d'élèves et les % du nombre d'élèves qui ont choisi l'une ou l'autre des activités; les nombres ainsi obtenus ont été comparés au nombre correspondant à 1/3 ou à ¼ du nombre total d'élèves. Pour ce faire, David et Martin ont exploité le « produit croisé » afin d'obtenir l'information recherchée (ex. 250 x 14 ÷100 = 35 élèves). Alors que David ne laisse aucune trace permettant de comprendre comment il a comparé les fractions à 1/3 et 1/4, Martin effectue les calculs suivants : 100÷ 32= 3,125 et 100 ÷ 26 = 3,8 afin de vérifier qu'ils sont près de 1/3 et ¼. Rébecca a recherché le nombre d'élèves inscrits à chacune des activités en effectuant, par exemple, le calcul suivant : 26/100 x 250 = 65. Relevant d'une interprétation similaire de la situation, Gaudi a eu recours au produit croisé pour représenter les % par des fractions dont le dénominateur correspondait au nombre total d'élèves (14% → 14 /100 = 35 … 35/ 250). Noa a exprimé chacun des pourcentages par une fraction dont le dénominateur était soit 3 (question 15.a.1.), soit 4 (question 15.a.2.)., afin de comparer les fractions obtenues à 1/3 ou à ¼. Il s'agit d'une démarche qui, comme la précédente, montre une interprétation adéquate de la situation, des données, des relations entre les données et enfin, des nombres rationnels. Toutefois, à la question 15.a.2, bien qu'il ait représenté correctement chacune des fractions, en prenant en compte le rapport attendu (pêche [26/100 = 1,04/4] ; hébertisme [28/100= 1,12/4]; randonnée [32/100 = 1,2/4 au lieu de 1,28/4] et rallye [14/100=0,56/4]), il a inscrit sur sa feuille l'activité de randonnée. A-t-il commis une erreur dans la comparaison des nombres 1,04 et 1,2, jugeant le second nombre plus près de 1 que le premier? Une troisième démarche effectuée par Réjean et Prince mérite d'être soulignée. Ces élèves ont représenté les fractions 1/3 (question 15.a.1) et ¼ (question 15.a.2.) par des pourcentages ce qui leur a permis d'identifier rapidement chacune des activités correspondantes; il s'agit d'une démarche efficiente et économique. Enfin, bien qu'ils aient répondu correctement à chacune des questions, Marcel, Alex, Samuel et Rémi n'ont effectué aucun calcul; il est possible qu'ils se soient appuyés sur la représentation des pourcentages et des fractions à l'aide d'un diagramme circulaire, mais nous ne disposons d'aucune information nous permettant de l'affirmer.

Le numéro 15b. a été fort bien réussi. La majorité des élèves (Réjean, Alex, Samuel, Bertrand, Prince, Hélène, Noa, Gaël, Gaudi, Martin, David et Rémi) ont tout simplement trouvé la fraction équivalente à 26/100 sur 250 (26/100 = ?/250); pour ce faire, Gaël, Gaudi, Martin, David et Rémi ont explicitement fait état du recours à la « technique du produit croisé » : 250 x 26 ÷ 100 = 65. De son côté, Rébecca a obtenu le même résultat, mais en recherchant la part «des élèves désirant pêcher» de la façon suivante : 26/100*250 = 65, procédé tout à fait acceptable et qui s'appuie sur une représentation « opérateur » de la fraction.

Pour le problème 15c, Rémi, Marcel[55] et Hélène ont calculé le nombre de personnes souhaitant participer au rallye (35 personnes : 14/100 = ?/250), alors que c'était le complément de ce nombre qui était recherché. D'ailleurs, Réjean, Alex, Samuel, Noa, Gaël, Gaudi, David et Martin[56] ont d'abord trouvé le nombre de personnes s'étant inscrites au rallye et ont soustrait ce nombre (35) du nombre total de participants (250 : 250 – 35 = 215). Rébecca a procédé de la même façon qu'elle l'avait fait au problème précédent, pour trouver le nombre de personnes inscrites au rallye et soustraire ensuite ce nombre du nombre total d'élèves (14/100*250 = 35; 250 – 35 = 215). Bertrand et Prince ont, pour leur part, déterminé le nombre de personnes ne participant pas au rallye en effectuant la somme des nombres d'élèves qui ont choisi la pêche, l'hébertisme et la randonnée : 32/100=80/250; 28/100=70/250; 65+80+70=215. Enfin, les élèves ont répondu à la question 15d en exploitant une démarche similaire à celle utilisée pour répondre à la question 15c.

En ce qui concerne le problème 18a, 5 des 9 réponses erronées sont attribuables à l'absence d'unités de mesure (David, Rémi et Anne) ou au recours à une unité de mesure erronée (Gaël et Martin). Ces derniers inscrivent 2164,95$ alors qu'il s'agit de 2164,95 cents. Les réponses erronées des élèves Guy, Bertrand et Noa au problème 18a sont dues à des erreurs de calculs; bien qu'ils aient en leur possession la calculatrice, ils ont multiplié 84,9 et 25,5 sans toutefois obtenir le bon résultat. Afin de connaître le coût engendré par l'achat de 25,5 litres d'essence, Noa a d'abord trouvé le coût adéquat pour 25 litres (84,9 x 25 = 2122,5), cependant, il a ensuite traité le 0,5 litre comme étant 5 ml

[55] Marcel ne laisse aucune trace de ses calculs
[56] Gael, Gaudi, David et Martin utilise la « technique du produit croisé »

au lieu de 5 dl, et a obtenu un coût dix fois trop petit (4,245 « cents[57] » pour 5 ml). Enfin, il a additionné 2122,5 et 4,245 cents et obtenu 2126,745$, ayant traité 4 cents à la position des unités bien que l'autre mesure soit en dollar; aucune unité de mesure n'accompagne ses calculs et sa réponse. La décomposition effectuée par NIC était toutefois pertinente. La démarche de Rébecca s'appuie également sur une décomposition, mais cette fois du coût de 84,9 cents (25,5 x 0,84 + 25,5 x 0,009 = 21,42 + 0,2295 = 21,64$). Ce traitement est fort intéressant et montre une composition additive prenant appui sur des représentations adéquates des unités de mesure. Les autres élèves qui ont adéquatement répondu à la question ont tout simplement multiplié 84,9 cents/L par 25,5 L et donné le résultat en cents ou multiplié 0,894$ par 25,5 L et fourni le résultat en dollars. Ceci dit, plusieurs élèves n'ont pas inscrit d'unités de mesure, ce qui rend plus difficile l'interprétation de leurs résultats. Notons par ailleurs la démarche ingénieuse de Gaudi qui effectue les calculs suivants : 0,849 x 25 = 21,225$; 0,894 ÷ 2 = 0,4245$; 21,225$+ 0,4245$ = 21,6495$. Le traitement de la décomposition effectuée sur le nombre 25,5 (25 +0,5) témoigne d'une prise en compte de la distributivité de la multiplication sur l'addition. Les calculs de cet élève montrent également une interprétation tout à fait juste de la multiplication part 0,5 permettant de remplacer cette opération par une division par 2.

Comme nous l'avons indiqué précédemment, 4 élèves seulement (Guy, David, Samuel et Prince) ont résolu correctement le problème 18b, en procédant à la division du nombre 33,81 par 0,849, un tel procédé montrant une prise en compte pertinente de l'égalité des rapports entre les mesures des prix et des volumes. Les procédés utilisés par les 12 élèves qui n'ont pas résolu correctement ce problème sont variés, certains montrant une représentation pertinente des relations entre les prix et les volumes d'essence. Ainsi, Anne, Gaël et Hélène ont correctement posé l'égalité des rapports entre la quantité d'essence et le coût engendré (ex. 84,9c/1L = 33,81$/?L). Cependant, ils ont considéré le 84,9 cents et le 33,81$ comme ayant la même unité de mesure; c'est pourquoi, ils obtiennent une réponse 100 fois trop petite. De leur côté, Noa, Bertrand, David, Réjean et

---

[57] Cette mesure n'est pas inscrite sur la feuille de Noa, mais permet une meilleure compréhension de son erreur.

Gaudi ont arrondi à l'unité près, les nombres de litres obtenus, proposant alors 39 ou 40 litres. Une fois de plus Gaudi a proposé une démarche « atypique »; il a alors effectué les calculs suivants : 0,894 x 25 = 21,225; 0,894 x 10 = 8,49; 0,849 x 5 = 2,547; 21,225 + 8,49 + 2,547 = 32,265; Rép. 40 litres. Cet élève n'a donc pas procédé en établissant un rapport entre le prix pour un litre et le prix payé. Il a appliqué un procédé similaire à celui qu'il avait effectué pour résoudre le problème 18a. Les nombres de litres qu'il utilise successivement montrent toutefois une prise en compte pertinente des relations entre les mesures et, à nouveau, une prise en compte de la distributivité de la multiplication sur l'addition. Un procédé similaire a été utilisé par Noa : 84,9 x 33 = 28,017….84,9 x 7 = 5,948…28,017+5,948..rep. 39. Quant à Rébecca, elle s'est judicieusement appuyée sur la relation trouvée au numéro 18a : 25,5 litres coûtent 21,64$. Ainsi, elle a soustrait de la somme totale dont dispose la deuxième automobiliste ce 21,64$ (33,81 – 21,64 = 12,17). Toutefois, pour trouver le nombre de litres qu'elle pouvait acheter avec 12,17$, elle a multiplié 12,17 par 84,9 obtenant alors 10,33 litres; elle a ensuite ajouté ce nombre de litres à 25,5 litres (nombre de litres pouvant être acheté avec 21,64$). Elle a procédé ensuite à une vérification en multipliant le nombre de litres obtenu, soit 30,41 par 84,9; le montant obtenu, soit 25,81$ étant inférieur au montant dont elle disposait, soit 33,81$, elle a poursuivi en considérant d'autres volumes d'essence, soit 40,41 litres et 39,41 litres, de façon à obtenir un nombre comparable à celui associé au montant d'argent dont elle disposait. Ce nombre n'est toutefois pas associé au volume d'essence. Comme en fait état le tableau, un élève, soit Rémi, s'est abstenu de réponde à la question et trois autres élèves, soit Alex et Martin ont recours à des opérations inadéquates.

4.2.18.3. Appréciation globale des résultats des élèves lors du traitement des questions de l'examen final concernant les nombres rationnels

Les analyses précédentes sur les conduites des élèves lors du traitement des questions concernant les nombres rationnels nous ont permis d'apprécier l'investissement important de la majorité des élèves dans la réalisation de tâches qui impliquaient fréquemment une coordination de connaissances et de pratiques liées à la représentation de ces nombres, aux opérations sur ces nombres et à la résolution de problèmes impliquant des nombres rationnels. Il nous apparaît pertinent de compléter notre exposé sur les conduites des élèves à l'examen final, en faisant état des réussites de l'ensemble des élèves à chacune des parties que comportait cet examen. Le tableau suivant présente donc pour chacune des tâches que comporte chacune des parties de l'examen, les résultats de l'ensemble des élèves.

Tableau LI: Résultats de l'ensemble des élèves à l'examen final

REPRÉSENTATION, COMPARAISON ET SÉRIATION DE NOMBRES RATIONNELS		***RÉSOLUTION DE PROBLÈMES***	
Questions	Nombre d'élèves : 17 Réussite n/17	Questions	*Nombres d'élèves : 17* *Réussite n/17*
1 a	9	4	*7*
1 b.1	16	9	*13*
1 b.2	14	15 a.1	*11*
1 c	5	15 a.2	*11*
1 d	7	15 b	*14*
2 a.1	13	15 c	*11*
2 a.2	15	15 d	*14*
2 b	7	16	*11*
14	16	17 a	*14*
		17 b	*14*
		18 a	*7*
		18 b	*4*
	Réussite moyenne: 73%		*Réussite moyenne: 64%*

Comme en fait état le tableau précédent, la réussite moyenne aux questions sur la représentation, la comparaison et la sériation de nombres rationnels est de 73%; la réussite moyenne aux questions sur la résolution de problèmes est de 64%. Ces résultats méritent d'être soulignés. Parmi les questions portant sur la représentation, la comparaison et la sériation de nombres rationnels, les questions 1c et 1d traitant de la distance entre des nombres rationnels posent problèmes à plus de la moitié des élèves; il importe de rappeler que la mesure de telles distances n'avait pas été objet d'enseignement. Par ailleurs, l'échec tout aussi important à la question 2b, nous semble attribuable à une interprétation plutôt courante de la situation : 1- utilisation d'une gourde, objet courant pour les élèves et qui correspond à un objet « type »; 2- situation de comparaison de mesures qui relève de compositions différentes de mesures qui, généralement, sont associées à des objets identiques. En ce qui concerne les résultats des élèves aux questions portant sur la résolution de problèmes, on remarque que ce sont les problèmes 4 et 18 qui posent problème à plus de la moitié des élèves. Nous avons fait état précédemment des difficultés des élèves associées aux unités de mesure : 4) traitement d'un nombre fractionnaire d'heures; 18) prise en compte des unités de mesure, interprétation des nombres décimaux associés aux mesures.

4.3. Synthèse des résultats de notre recherche

Depuis plusieurs années, les difficultés d'apprentissage des élèves sont au centre des préoccupations d'un nombre important de chercheurs en didactique. Les défis que soulève l'enseignement des mathématiques aux élèves présentant des difficultés d'apprentissage sont de taille. Comme en font état les études réalisées par Brousseau et Pérès (Brousseau, 1998; Brousseau et Pérès, 1981), études à l'origine de la notion de contrat didactique, les élèves présentant des difficultés d'apprentissage se réfugient dans des habitudes scolaires de dépendance à l'égard de l'enseignant et de désinvestissement des tâches qui leur sont proposées, ces élèves attendant que l'enseignant leur présente les procédés à effectuer. La notion de contrat didactique nous laisse entrevoir la complexité du travail « enseignant » auprès des élèves présentant des difficultés d'apprentissage et, plus encore, lorsqu'il s'agit d'élèves du secondaire qui ont pu développer des rapports problématiques à l'enseignement et à l'apprentissage, aux responsabilités qui sont partagées (Mercier, 1998). Concevoir et gérer des situations qui puissent permettre aux élèves présentant des difficultés de s'engager dans ces situations et d'effectuer des apprentissages déterminants en mathématiques, est le défi que nous avons essayé de relever dans notre recherche.

Notre recherche a été effectuée dans une classe de 1er secondaire de l'École Vanguard accueillant des élèves présentant des difficultés d'apprentissage. Elle a été consacrée à l'enseignement des nombres rationnels. Dans cet enseignement, la notion de fraction a constitué un objet incontournable, un concept central qui évoque diverses réalités (voir, entre autres, les études effectuées par Kieren (1988, 1992, 1994, 1995), Moseley (2005), Rouche (1998), Comin (2002), Nadine et Guy Brousseau (1987)).

Comme nous en avons fait état dans notre cadre théorique, plusieurs études effectuées auprès d'élèves de l'enseignement primaire et secondaire font état de rapports fort problématiques aux nombres rationnels (concept de nombre rationnel; opérations sur les nombres rationnels; résolution de problèmes impliquant des nombres rationnels). Plusieurs dispositifs didactiques visant la construction, voire la re-construction, de rapports plus adéquats aux nombres rationnels, ont également été expérimentés auprès de diverses clientèles d'élèves. À l'exception des études effectuées par Nadine et Guy Brousseau sur l'enseignement des décimaux (1987), études effectuées à l'École Michelet (Bordeaux), les études visant la construction, voire la reconstruction, de rapports plus adéquats aux nombres rationnels, ont porté sur des objets spécifiques de l'enseignement des rationnels. L'intérêt de ces études et des études sur les rapports problématiques des élèves aux nombres rationnels est indéniable; ces études nous ont permis de mieux comprendre les difficultés des élèves et d'orienter nos interactions didactiques lors de situations proposées par l'enseignante, ainsi que la conception de situations que nous avons soumises aux enseignants. Par ailleurs, puisque notre recherche est concernée par l'enseignement des nombres rationnels, enseignement qui concerne à la fois les représentations des nombres rationnels, les opérations sur les nombres rationnels et la résolution de problèmes impliquant des nombres rationnels, comme nous en avons fait état dans notre problématique et notre cadre conceptuel, une démarche d'acculturation institutionnelle s'est avérée indispensable. Une telle démarche nous a permis de prendre acte de la complexité de l'enseignement auprès d'élèves en difficultés d'apprentissage, de nous familiariser avec les situations présentées aux élèves, de participer à cet enseignement et d'identifier des niches pour une inscription écologique de situations qu'il nous semblait pertinentes, ce qui n'était pas évident. Une inscription écologique des situations que nous souhaitions présenter nous est apparue nécessaire (De Rosnay, 1994). Ces situations devaient être accueillies non seulement par l'enseignante, mais également par les élèves, un tel accueil permettant aux élèves de mieux investir ces situations. Il importe également de souligner l'importance de mieux connaître les défis quotidiens auxquels faisait face l'enseignante qui a accepté de nous accueillir dans sa classe. Rappelons enfin que notre recherche s'est étalée sur une période de 6 mois; nous avons ainsi participé à 52 périodes d'enseignement.

L'analyse des données de notre recherche, comme en font état les sections précédentes, a été orientée, voire balisée, par les objectifs poursuivis. Cette analyse nous a permis d'apprécier l'évolution du processus d'acculturation institutionnelle et ses effets sur les caractéristiques et la gestion des situations d'enseignement, ainsi que sur l'évolution des connaissances et savoirs des élèves sur les nombres rationnels. Pour mieux cibler la portée de notre recherche sur l'enseignement et l'apprentissage des nombres rationnels, il nous semble important de procéder à une synthèse des résultats de notre recherche, en fonction des objectifs poursuivis.

4.3.1. Progression de la démarche d'acculturation institutionnelle de l'enseignant, des chercheures et des élèves et ses effets sur les processus d'élaboration et de gestion des situations d'enseignement, ainsi que sur les caractéristiques des ces situations

Notre recherche s'inscrivait dans une démarche de recherche collaborative (Desgagné, Bednarz, Couture, Poirier et Lebuis, 2001), selon laquelle l'enseignant et le chercheur partageaient leurs expertises pour élaborer et gérer des situations d'enseignement des nombres rationnels qui puissent permettre aux élèves présentant des difficultés d'effectuer des apprentissages significatifs sur les nombres rationnels. L'inscription écologique de situations constituait une orientation incontournable (Roditi, 2001; de Rosnay, 1994), une telle inscription supposait une première phase d'acculturation institutionnelle de l'étudiante-chercheure, puis de la chercheure, qui leur permettait de s'enquérir d'une meilleure compréhension de la particularité de l'institution classe, dans laquelle elles souhaitaient intervenir, afin de créer des situations qui puissent s'y intégrer harmonieusement, mais également de saisir et de créer des niches qui pouvaient s'avérer déterminantes dans les interventions auprès des élèves en difficultés d'apprentissage.

Les deux premières semaines d'enseignement ont été consacrées aux techniques usuelles de calcul sur les fractions et à la résolution de problèmes additifs et multiplicatifs impliquant des fractions. L'entrée de l'étudiante-chercheure en classe coïncide avec le retour sur une tâche qu'elle avait présentée aux enseignants lors de la description de son projet, tâche pour laquelle l'enseignante souligne avoir procédé à quelques-unes des adaptations qui avaient alors été proposées. Lors du retour en classe sur les productions des élèves, l'enseignante a insisté sur l'économie de la démarche consistant à recourir au plus petit commun multiple des nombres apparaissant aux dénominateurs. La majorité des élèves déclarent plus facile de procéder ainsi, à l'exception d'un élève qui nous a alors avoué préférer multiplier toujours les dénominateurs. Cette réaction que nous avons partagée avec l'enseignante s'est avérée un événement important. L'étudiante-chercheure a par la suite suggéré à l'enseignante de procéder à divers choix de fractions et de représentations de fractions, qui pouvaient permettre de lier l'économie de certaines démarches de calcul aux fractions, ainsi qu'à leurs représentations. Les réticences de l'enseignante face à ces propositions se sont progressivement atténuées. Ainsi, en participant à la gestion des situations d'enseignement sur la multiplication et la division de fractions, ainsi que la résolution de problèmes additifs et multiplicatifs, situations faisant suite à aux situations d'enseignement des techniques d'addition et de soustraction de fractions, l'étudiante-chercheure a proposé à certains élèves, des représentations et des procédés différents de ceux qui faisaient partie des situations initiales, fractions qu'ils étaient invités à examiner, dans l'espoir qu'ils puissent donner sens à diverses écritures des fractions, et ainsi mieux comprendre les gestes composant les techniques de calcul. Les techniques enseignées se sont ainsi avérées des milieux propices pour «une dé-transposition et une re-transposition didactiques» (Antibi et Brousseau, 2000) des objets de savoir. Les conduites des élèves ont été portées à l'attention de l'enseignante, soit durant la période de retour sur les activités effectuées par les élèves, soit à la suite des périodes d'enseignement, l'enseignante et l'étudiante-chercheure s'étant entendues pour partager leurs analyses des situations et des conduites des élèves.

Les élèves ont aussi eu l'occasion de se familiariser avec les attentes de l'étudiante-chercheure qui les invitait à partager leurs démarches et s'appuyait sur leurs démarches pour leur permettre, si possible, de trouver une réponse satisfaisante à leurs questions. C'est à la suite de ces interactions, soit deux semaines après l'entrée dans la classe de l'étudiante-chercheure, que l'enseignante a invité l'étudiante-chercheure à présenter en classe la situation «Dites-le avec des fleurs» (Bélisle, 1999), situation-problème faisant appel à diverses opérations sur des nombres décimaux. Jugée intéressante par l'enseignante et les élèves, cette situation fut une «occasion inattendue» d'apprécier l'engagement des élèves, la diversité des procédés mis en œuvre et les raisonnements qui reflétaient une analyse pertinente des relations entre les données et ont permis à certains élèves de trouver rapidement le résultat attendu. Impressionnée par les conduites des élèves, l'enseignante invite alors quelques élèves à présenter leurs démarches et demande aux élèves de formuler toutes les questions que soulèvent ces démarches. Reprenant les termes de Davis (2005) dans ses recherches effectuées en collaboration avec les enseignants, une complicité entre l'enseignante, l'étudiante-chercheure, et la chercheure, qui a été invitée ensuite à participer à l'enseignement, s'était ainsi établie. Nous pourrions également parler d'une complicité « entre l'enseignante, les chercheures et les élèves ». Comme nous en avons fait état, lors de l'analyse des conduites des élèves et des interactions didactiques, cette situation nous semble avoir marqué les rapports de plusieurs élèves aux nombres rationnels, notamment aux nombres décimaux, les relations établies entre ces nombres et les calculs effectués ont permis à plusieurs élèves d'interroger ces nombres et d'effectuer des calculs pertinents. Nous assistons alors à une transformation du contrat didactique (Brousseau, 1980) : a) l'enseignante et les chercheures invitent les élèves à s'investir davantage dans les situations et généralement, ne répondent pas aux demandes des élèves en leur indiquant les procédés à mettre en place, mais en leur proposant plutôt de rendre compte de leurs démarches ou encore, en recourant à d'autres tâches similaires mais comportant des nombres différents, s'inspirant des procédés mis en œuvre par Conne (2004) dans ses études auprès d'élèves en difficultés; b) les élèves savent qu'ils ne peuvent attendre de l'enseignante ou des chercheures qu'elles leur indiquent comment procéder pour effectuer les tâches et qu'ils doivent eux-mêmes envisager des procédés avant d'interroger l'enseignante ou les chercheures, sachant qu'ils peuvent par ailleurs rendre compte de leurs procédés ou encore, examiner les tâches que leur soumettent l'enseignante ou les chercheures pour réviser leurs procédés. Une transformation des habitus de plusieurs élèves (Bourdieu, 1980) est alors visible; les témoignages de plusieurs élèves lors de la réalisation des tâches ou du retour collectif sur les démarches des élèves montrent bien que ces élèves ont pris acte de cette modification du contrat. À cet effet, il importe de souligner l'importance des premières phases d'acculturation institutionnelle (phase 1 et 2) qui se sont avérées déterminantes et qui nous ont permis d'établir un arrimage, non seulement entre les situations effectuées par l'enseignante et celles que nous avons proposées, mais également entre leurs gestions.

La complicité entre l'enseignante et les chercheures se manifeste dans les situations sur la représentation des nombres rationnels. La première situation proposée par l'enseignante comporte des tâches d'identification de nombres décimaux qui, bien que les nombres décimaux choisis soient relativement faciles à identifier, nous semblent, tout de même ouvrir une fenêtre non négligeable pour un travail important sur les représentations de nombres rationnels qui y font suite, nombres qui émanent d'une concertation entre l'enseignante et l'étudiante-chercheure. Pour cette situation, l'étudiante-chercheure avait proposé d'inviter les élèves à produire diverses représentations des nombres «2/5 et 0,3 »; l'enseignante a suggéré de remplacer le nombre 2/5 par ½; les propos de l'enseignante ont alors convaincu l'étudiante-chercheure et la chercheure de retenir les nombres «½, 2/5 et 0,3» et, enfin, à la demande des élèves, les nombres retenus ont été «1/2, 3/5 et 0,3». Les tâches que comporte cette situation constituent un moment-clé, voire un événement majeur. En effet, non seulement la plupart des élèves produisent des représentations adéquates des nombres précédents (fractions, nombres décimaux, pourcentages), mais plusieurs élèves exploitent divers sens de la fraction (partie-tout, rapport, quotient); certains élèves recourent même à des compositions additives et multiplicatives. Les conduites de plusieurs de ces élèves « en difficultés » nous apparaissent relativement exceptionnelles, si on les compare, entre autres, aux conduites relevées dans les recherches en didactique, conduites dont nous avons fait état dans notre cadre théorique (voir, entre autres, Chevallard et Julien, 1989). Ces élèves ont ainsi contribué à la création de niches importantes pour l'exploitation de situations déterminantes sur l'enseignement des rationnels, telles : a) les situations sur la représentation des nombres rationnels et les calculs impliquant des nombres rationnels, situations prenant appui et prolongeant « de manière naturelle », les activités réalisées par l'enseignante; b) les situations de comparaison et de sériation de nombres rationnels, ainsi que les situations de résolution de problèmes, situations résultant d'adaptation de situations proposées dans les manuels; c) les situations provenant d'études effectuées par les chercheurs en didactique des mathématiques. L'enseignante et les chercheures ont ainsi pris acte des rapports des élèves aux nombres rationnels, et de leurs habitus, pour procéder, au besoin, à des adaptations des situations pour constituer de véritables situations-problèmes impliquant des nombres rationnels obligeant les élèves à recourir à leurs connaissances et savoirs sur ces nombres pour mettre en place des procédés économiques. Notons enfin la collaboration entre l'enseignante et les chercheures dans la conception de situations originales (voir, entre autres, la situation d'intégration des connaissances sur les nombres rationnels).

4.3.2. Évolution des connaissances et des rapports des élèves aux rationnels, au cours de la séquence d'enseignement

L'acculturation institutionnelle de l'enseignante, des chercheures et des élèves, comme nous en avons fait état précédemment, et au cours de l'analyse des résultats de notre recherche, a permis l'élaboration et la gestion de situations didactiques sur les rationnels qui ont permis à la majorité des élèves de construire des connaissances et des rapports aux rationnels qui méritent d'être soulignés. Pour mieux apprécier ces résultats, nous avons jugé important d'effectuer une synthèse de l'évolution de leurs connaissances et rapports aux rationnels.

Effectuer une telle synthèse nous est apparu fort complexe. Comme nous en avons fait état lors de l'analyse des conduites des élèves à chacune des situations que comportait notre recherche, nous avons pu, à maintes reprises, montrer que plusieurs élèves, ont pu construire des connaissances et des rapports significatifs aux nombres rationnels. Nous avons pu également mettre en évidence, chez certains élèves qui, au départ, se réfugiaient dans des pratiques d'élèves en difficultés, en investissant peu les situations proposées, des progrès notables se manifestant non seulement par le recours à diverses connaissances sur les nombres rationnels, connaissances dont ils ne disposaient pas au début de l'enseignement, mais également par une transformation de leurs habitus d'élèves en difficultés, ces élèves acceptant les défis notionnels et cognitifs qui leur étaient demandés et acquérant progressivement une meilleure confiance en leurs possibilités d'apprentissage. Nous faisons, entre autres, référence aux élèves Marcel, Guy et Rébecca qui se réfugiaient dans des habitus d'élèves en difficultés.

Reconnaissant l'importance de procéder à une synthèse des résultats de notre recherche, synthèse que nous jugeons essentielle, malgré les problèmes auxquels une telle synthèse nous a confrontée, nous avons opté pour une sélection de situations qui pourraient permettre d'apprécier l'évolution des conduites de la majorité des élèves. Certaines des situations sont représentatives des situations que l'on retrouve dans les manuels scolaires et qui sont présentées en classe, tandis que d'autres ont été créées en prenant appui sur des recherches en didactique des mathématiques.

4.3.2.1. Évolution des connaissances et rapports des élèves aux rationnels, lors de situations portant plus spécifiquement sur la représentation de nombres rationnels

La représentation de nombres rationnels a occupé un espace important dans notre recherche. Pour rendre compte de l'évolution des connaissances des élèves, nous avons sélectionné certaines situations de sériation qui ont occupé une place importante tout au long de notre expérimentation. À l'exception des tâches proposées par l'enseignante lors d'examens, les situations que nous avons choisies ont été constituées par les chercheures à la demande de l'enseignante. Il faut cependant convenir qu'un nombre non négligeable de situations ont contribué à cette évolution. À titre d'exemple, mentionnons la modification des habitus des élèves lors de la tâche sur la représentation des nombres 3/5 et 0,3 dans laquelle ils s'étaient octroyé une liberté inhabituelle, liberté témoignant de leur plaisir de faire des mathématiques. Dans le tableau suivant, nous présentons la synthèse des résultats de chacun des élèves aux tâches de sériation présentées le 27 mars, le 26 avril, le 10 mai et le 15 juin. Notre appréciation des résultats de chacun des élèves à chacune des tâches tient compte de la pertinence des représentations et des procédés de sériation.

Tableau LII: Évolution des connaissances et des rapports des élèves à la représentation des nombres rationnels

Élèves	***27 mars*** *Examen* *Comparaison* *5/6; 7/10 et 3/4* *a) plus grand* *b) plus petit*	***26 avril*** *Sériation attendue* *7/35; 21% ; 3/8; 3/7;251/504; ½ - 255/510; 0,500001; 171/340; 6/11; 5/9; 0,76; 7/8; 8/9*	***10 mai*** *Création d'une tâche d'évaluation d'une sériation de 5 nombres rationnels complexes*	*15 juin* *Examen comparaison* *7/8; 17/25 ; 9/10 et 4/5* *a) plus grand* *b) plus petit*
Anne	**Non satisfaisant** a) 5/6 b) 3/4 50/60 30/40	**Non satisfaisant** 7/8 < 3/7 < 3/8 0,76 < 21% 5/9 <6/11 <7/35 sériation de nombres qui ont des dénominateurs ou des numérateurs voisins; sériation indépendante des %, des nombres décimaux et des fractions	**Moyennement satisfaisant** **1)** 6/8…x5 = 30/40 … 15/20 **2)** 16/20 = **3)** 3/5…x 8 = 24/20 **4)** 4/2 …x10 40/20 **5)** 2,01 = 21/10 Représentations fractionnaires des nombres 3/5 et 2,01 erronées. Choix des nombres intéressant : 3 premiers nombres inférieurs à 1; le 4^{e} nombre égal à 2 et le 5^{e} nombre juste un peu plus grand que 2.	**Satisfaisant** a) 9/10 b) 17/25 recours à un dénominateur commun, soit 50
Hélène	**Non satisfaisant** a) 3/4 b) 7/10	**Non satisfaisant** 8/9 < 6/11 < 7/35 171/340 < 251/504 < 255/510 sériation de nombres qui ont des dénominateurs ou des numérateurs voisins; sériation indépendante des %, des nombres décimaux et des fractions	**Fort satisfaisant** **Hélène et Bertrand ont fait équipe** **1)** 37,2% **2)** 4/10 **3)** 170°/360° **4)** 0,49 **5)** 11/20 Sériation juste Recours à la fraction repère ½ pour choisir les nombres et les ordonner correctement	**Peu satisfaisant** a) 4/5 b) 17/25 représentation de chacune des fractions, en recourant à des collections ou à des figures différentes pour indiquer le tout
Bertrand	**Fort satisfaisant** a) 5/6 b) 7/10 dénominateur commun 60	**Non satisfaisant** ½ < 3/7 < 3/8 171/340 < 251/504 < 255/510 0,76 < 21% sériation de nombres qui ont des dénominateurs ou des numérateurs voisins; sériation indépendante des %, des nombres décimaux et des fractions		**Fort satisfaisant** a) 9/10 b) 17/25 recours à un dénominateur commun, soit 200
David	**Satisfaisant** a) 5/6 b) 7/10 dénominateur commun 100 et pourcentages	**Non satisfaisant** procède à une comparaison des nombres dont les numérateurs ou les dénominateurs sont voisins; le traitement de certaines fractions (5/9 et 8/9) est pour le moins problématique : 5/9 = 6/10 = 60%; 8/9 = 9/10 = 90%.	**Moyennement satisfaisant** *-Plus petit que 1/10* : 1/101 et 0,092 *-Égal à 1/10* : 10/100; 1/10; 100/1000 ; 10%; 0,10 *-Plus grand que 1/10* : 10,1/100; 114/1000; 11%; 10,1/100. Recours à la fraction repère 1/10 pour effectuer diverses représentations de nombres. Représentations de nombres voisins appropriées. Sériation non effectuée.	**Peu satisfaisant** a) 7/8 b) 17/25 représentation des fractions en % (produits croisés)
Rémi	**Non satisfaisant** a) ¾ b) 7/10 procédé : aucune trace	**Non satisfaisant** ½ < 3/7 < 3/8 0,76 < 0,50001 < 21% sériation de nombres qui ont des dénominateurs ou des numérateurs voisins; sériation indépendante des %, des nombres décimaux et des fractions	**Excellent** **Rémi et Gael ont fait équipe** **1)** 0,420%/32% = 420/32000 ≅ 10/800 **2)** 24463219/24563219 = 1- 1/245,63214 **3)** 24563218/24563219 = 1- 1/24563219	**Fort satisfaisant**a) 9/10 b) 17/25 recours à un dénominateur commun, soit 200

Gael	**Satisfaisant** a) 5/6 b) 7/10 dénominateur commun 100	**Peu satisfaisant** tentative de représentations des nombres par des fractions dont le dénominateur est 100; les relations établies entre plusieurs nombres sont erronées. 6/11 < 3/7 0,76< 21% 171/340 < 7/35 8/9 < 7/8	**4)** 5 ½ = 11/2 **5)** 5 7/12 = 67/12 Sériation juste et recours à diverses représentations de nombres rationnels. Trois premiers nombres sont inférieurs à 1; les deux derniers nombres sont supérieurs à 1. L'écart entre les nombres 2 et 3, ainsi que l'écart entre les nombres 4 et 5, est minime. Le premier nombre choisi se veut un nombre « complexe ».	**Satisfaisant** a) 9/10 b) 17/25 représentation des fractions en %
Prince	**Fort satisfaisant** a) 5/6 b) 7/10 dénominateur commun 60	**Excellent** 5/9 < 6/11 utilisation de la fraction ½ comme repère; recours à un dénominateur commun; recours au produit croisé utilisant 100 comme dénominateur	**Satisfaisant** **Prince et Martin ont fait équipe** **1)** 14 832,1/1340,260 = ... = 1248150/134026 **2)** 3 15,151/51,151 = 168604/51151 **3)** 26,26% = 2626/10000 **4)** 1260,56% = 126056/10000 **5)** 5 1800,1/1000,669 =10800600/1000669 **6)** 94345143/94335143 Recours à diverses représentations de nombres rationnels (nombres fractionnaires, pourcentages, fraction), ce qui mérite d'être souligné. Les écritures fractionnaires associées aux pourcentages sont justes. Il en est autrement en ce qui concerne les représentations de nombres fractionnaires.	**Fort satisfaisant** a) 9/10 b) 17/25 recours à un dénominateur commun, soit 200
Martin	**Fort satisfaisant** a) 5/6 b) 7/10 dénominateur commun 60	**Satisfaisant** utilisation de la fraction ½ comme repère; recours à un dénominateur commun pour départager les fractions voisines. 3/7 < 3/8 < 21% 5/9 < 6/11		**Satisfaisant** a) 9/10 b) 17/25 représentation des fractions en % (produits croisés)
Marcel	**Fort satisfaisant** a) 5/6 b) 7/10 dénominateur commun 60	**Peu satisfaisant** recours à des nombres repères, soit ½, 1 entier, pour regrouper les nombres voisins; traitement par petits regroupements des nombres, en fonction des relations entre les numérateurs ou entre les dénominateurs ; ce qui donne lieu à un nombre appréciable d'erreurs 255/510 < 3/8; 3/7 < 7/35 ;8/9 < 6/11	**Peu satisfaisant** Consultation du manuel Perspective **1)** 99876547/99876548 **2)** 200% **3)** 100/99 **4)** 50,5% **5)** 5/11 Recours aux nombres repères 1 et ½ pour choisir des représentations de nombres rationnels voisins des nombres repères. La sériation des nombres est inadéquate.	**Fort satisfaisant** a) 9/10 b) 17/25 recours à un dénominateur commun, soit 200
Guy	**Satisfaisant** a) 5/6 b) 7/10 dénominateur commun 100	**Tâche non effectuée**	**Excellent** **Guy et Gaudi ont fait équipe** **1)** $\frac{0,000000001\%}{0,56\%} = \frac{0,000000000001}{0,0056} =$ $= \frac{1}{5600000000}$ **2)** 0,56% = 0,56/100= 0,56÷100= 0,0056 **3)** 2,3/560,1…x10…23/5601 **4)** 341,0917%/56,00001%... 3410917/560001 **5)** 2/5,600000681 ….x 10 000…20 000 0000/560000681 **6)** 800000/56,00212… 80000000000/5600212 Recours à diverses représentations de nombres rationnels : a) diverses expressions adéquates de rapports entre des pourcentages (nos 1 et 3); b)	**Satisfaisant** a) 9/10 b) 17/25 recours aux produits croisés pour obtenir un dénominateur commun, soit 100
Gaudi	**Satisfaisant** a) 5/6 b) 7/10 recours aux pourcentages	**Moyennement satisfaisant – voir les erreurs suivantes** 3/7 < 3/8 171/340 <251/504 8/9 <7/8 0,76<5/9		**Satisfaisant**a) 9/10 b) 17/25 représentation des fractions en % (produits croisés)

			diverses représentations adéquates de rapport entre des nombres décimaux (nos. 2, 4 et 5). Dans la sériation, le 4^{e} nombre est mal positionné.	
Noa	**Satisfaisant** a) 5/6 b) 7/10 dénominateur commun 100	**Fort satisfaisant** -les fractions 3/7 et 8/9 n'apparaissent pas dans la série; recours à la fraction repère ½	**Excellent** **Noa et Samuel ont fait équipe** **1)** 0,0125 = 1/80 **2)** 1634%/4905% = 1/3 – 1/4905 **3)** 33 1/3 % = 1/3 **4)** 4726938472635049821,429371625534907 4726938472635049821,429371626534907 **5)** π/3 Sériation juste. Recours à diverses représentations de nombres rationnels. Ils recourent aux fractions repères 1/3 pour représenter les nombres en positions 2 et 3. Le 4^{e} nombre représenté est 1 et le 5^{e} est légèrement supérieur à 1. Le premier nombre choisi est 10 fois plus petit que le nombre décimal correspondant à 1/8; il s'agit d'une intégration pertinente des connaissances construites. Notons enfin l'originalité des représentations du 2^{e} nombres : rapport entre pourcentages exprimés par une différence entre 2 fractions.	**Fort satisfaisant** a) 9/10 b) 17/25 recours à un dénominateur commun, soit 100 – (produits croisés)
Samuel	**Fort satisfaisant** a) 5/6 b) 7/10 dénominateur commun 60	**Moyennement satisfaisant –** recours à des fractions repères, soit ½, 1/5 et ¾; traitement par petits regroupements des nombres, en fonction des relations entre les numérateurs ou entre les dénominateurs, ce qui donne lieu à un nombre non négligeable d'erreurs. **voir les erreurs suivantes** 171/340 < 0,50001 3/7 < 21% 8/9 < 7/8 < 7/35 8/9 < 7/8 < ½		**Satisfaisant** a) 9/10 b) 17/25 représentation des fractions en %
Rébecca	**Fort satisfaisant** a) 5/6 b) 7/10 dénominateur commun 60	**Non satisfaisant** recours à la fraction repère ½ pour comparer certaines fractions (251/504; 171/340; 255/510), en procédant à division du dénominateur par 2; comparaison de fractions dont le numérateur et le dénominateur sont des nombres voisins (4/5, ¾, 2/3 et ½); simplification de fractions et appréciation des différences entre les numérateurs et les dénominateurs (7/35 (1/5) = 3/7 (1/5))	**Excellent** **Rébecca et Réjean ont fait équipe** 6) 0,5/2 7) 2/7 8) 33333333/99999999 9) 6/12 5) 55,5% Représentations variées. Les fractions repères ½, 1/3 et ¼ leur ont permis de proposer diverses représentations et d'ordonner correctement les nombres rationnels proposés	**Satisfaisant** a) 9/10 b) 17/25 recours au dénominateur commun, soit 100
Réjean	**Fort satisfaisant** a) 5/6 b) 7/10 dénominateur commun 60	**Non satisfaisant** recours à la fraction repère ½ pour comparer certaines fractions, en procédant à la division du dénominateur par 2 et si le nombre obtenu était inférieur au numérateur, il concluait que la fraction était inférieure à ½ (171/340 < ½); appréciation des différences entre les numérateurs et les dénominateurs (6/11 = 3/8); représentations décimales de fractions (7/35 = 0,2 ; 0,2 < 21%)		**Satisfaisant** a) 9/10 b) 17/25 représentation de chacune des fractions en %
Alex	**Fort satisfaisant** a) 5/6 b) 7/10 dénominateur commun 60	**Moyennement satisfaisant** représentation de plusieurs nombres par des pourcentages, à l'exception, entre des nombres, dont les numérateurs et les dénominateurs sont élevés.	Cet élève était absent au cours de cette période d'enseignement	**Satisfaisant** a) 9/10 b) 17/25 recours au produit croisé

		Erreur : 255/510 < 251/504 171/340 pas traité		

La première question de l'examen qui a eu lieu le 27 mars 2007 représente bien les « tâches types » auxquelles les élèves sont habituellement confrontés : les fractions fort simples (5/6; 7/10 et ¾) permettent de recourir aisément à un dénominateur commun pour comparer les fractions et les résultats de la majorité des élèves sont plus que satisfaisants. Les résultats chutent considérablement lors de la seconde situation (26 avril 2007) qui se distingue de la première par la quantité et la diversité des représentations proposées et fait apparaître chez certains élèves, même chez les élèves qui généralement obtiennent des performances supérieures à la plupart des élèves de leur classe (ex. : Samuel), le recours à des conduites qui montrent des rapports problématiques aux nombres rationnels, rapports fréquemment relevés dans les recherches en didactique (voir, entre autres, les recherches effectuées par Grisvard et Léonard (1981), ainsi que par Mazzocco et Devlin (2008)) : comparaison en fonction de l'ordre de grandeur des dénominateurs, comparaison des nombres 2 à 2 sans se soucier des autres nombres. Il importe toutefois de souligner qu'un certain nombre d'élèves recourent à des procédés de comparaison variés et originaux : exploitation de la fraction repère ½ pour évaluer l'ordre de grandeur des autres nombres; examen de fractions comportant un numérateur identique, un tel examen prenant appui sur le sens partie-tout de la fraction.

Les conduites des élèves lors de la situation précédente ont été un tremplin pour la poursuite d'un travail important sur la représentation des nombres rationnels. Comme le montrent les conduites des élèves lors de la situation présentée le 10 mai, situation dans laquelle les élèves étaient invités à proposer et ordonner 5 nombres rationnels, à l'exception de l'élève Anne, tous les élèves recourent non seulement à diverses représentations de nombres rationnels, plusieurs de ces représentations ne faisant pas partie des représentations proposées dans les manuels destinés aux élèves du 1er cycle du secondaire (voir, entre autres, les représentations proposées par Rémi et Gaël, Samuel et Noa, Rébecca et Réjean); les fractions repères auxquelles recourent plusieurs élèves constituent un point d'ancrage non négligeable pour un travail sur les représentations de nombres rationnels, travail mettant en cause une coordination de divers sens de la fraction.

Le pas franchi entre le 27 mars et le 10 mai, comme en font état les analyses précédentes, est notoire. Non seulement les élèves peuvent recourir à diverses représentations de nombres rationnels, mais ils acceptent de relever le défi « mathématique » que soulèvent certaines situations. L'évolution des rapports et des connaissances de ces élèves est différente de celle qui aurait eu cours dans le cadre de l'enseignement régulier, du moins, si l'on se fie aux attentes des situations d'évaluation de l'examen de fin d'année conçu par les 2 enseignantes, examen qui a eu lieu le 15 juin et qui comporte, comme en fait état le tableau précédent, une tâche de comparaison de fractions similaire à celle qui a été présentée le 27 mars. Cette tâche n'est échouée que par deux élèves (David et Hélène), ce qui n'est guère étonnant, compte tenu des nombres proposés. Bien que dans les situations précédentes plusieurs élèves pouvaient aisément comparer les fractions présentées sans recourir à un calcul, la demande d'expliquer leurs résultats qui leur a été adressée, lors de l'examen final, a fait en sorte qu'un grand nombre d'élèves recourent aux produits croisés. La prise en compte de cette évolution atteste, une fois de plus, de l'influence de la tâche, car s'il arrive que certains élèves montrent des comportements fort stéréotypés « comportements souvent associés aux élèves en difficultés d'apprentissage », nous avons pu voir apparaître chez ces mêmes élèves des démarches « économiques » montrant une excellente intégration des connaissances.

4.3.2.2. Évolution des connaissances et rapports des élèves sur la résolution de problèmes additifs de composition de mesures et de problèmes multiplicatifs d'isomorphisme de mesures impliquant des nombres rationnels

La résolution de problèmes ayant été la modalité privilégiée des situations portant sur la représentation et les calculs impliquant des nombres rationnels, nous présentons maintenant les situations sur la résolution de problèmes additifs et multiplicatifs impliquant des nombres rationnels, situations qui s'inscrivent dans différents contextes permettant de donner sens aux opérations. En raison de l'espace dont nous dispositions, il ne nous a pas été possible de présenter plusieurs situations plus directement axées sur les procédés de calcul, situations permettant de donner sens aux procédés usuels et de construire des procédés plus économiques en investissant davantage les relations entre les nombres sur lesquels portent les calculs.

L'évolution des démarches de résolution de problèmes multiplicatifs et des procédés de multiplication

La résolution de problèmes multiplicatifs de proportionnalité occupe un espace important dans l'enseignement au 1er cycle du secondaire. Plusieurs problèmes de proportionnalité simple ont ainsi été présentés aux élèves. Nous avons retenu trois situations de résolution de problèmes qui permettent de rendre compte de l'évolution des démarches des élèves, non seulement, dans la prise en compte des relations entre les données, mais également dans les procédés de résolution.

Tableau LIII: L'évolution des démarches de résolution de problèmes multiplicatifs et des procédés de multiplication

<table>
<tr>
<td></td>
<td>5 février
<table><tr><td>Nombre de boîtes</td><td>Nombres de gâteaux</td></tr><tr><td>1</td><td>a. 17,5, b. 1,75, c. 175</td></tr><tr><td>½</td><td></td></tr><tr><td>150</td><td></td></tr><tr><td>15</td><td></td></tr><tr><td>7,5</td><td></td></tr><tr><td>5</td><td></td></tr><tr><td>25</td><td></td></tr><tr><td>0,5</td><td></td></tr><tr><td>500</td><td></td></tr><tr><td>45/5</td><td></td></tr></table></td>
<td>8 février
<table><tr><td>Nombre de journées</td><td>Montants</td></tr><tr><td>1</td><td>a. 42,60, b. 426</td></tr><tr><td>½</td><td>21,30</td></tr><tr><td>150</td><td>?</td></tr><tr><td>3,5</td><td>?</td></tr><tr><td>100</td><td>?</td></tr></table></td>
<td>24 mai
<table><tr><td>Nombre d'oranges pressées</td><td>Quantités</td></tr><tr><td>5</td><td></td></tr><tr><td>1</td><td></td></tr><tr><td>½</td><td></td></tr><tr><td></td><td>6/4</td></tr><tr><td>1/8</td><td></td></tr><tr><td></td><td>3,75</td></tr></table>
Sachant que 1 orange → ¼ L</td>
</tr>
<tr>
<td>Anne</td>
<td>- n'a pas effectué cette tâche</td>
<td>a. 3 erreurs
21,30 → 2 (1/2)
150 → multiplication avec erreur
3,5 → 148,11 (149,10)
Procédé économique
Composition additive pour 3,5 : somme de 3 fois le montant pour 1 journée et de celui pour 0,5 jour
b. 3 erreurs
213→2 (1/2)
150 → 6390 (63 900)
3,5 →1485 [erreur de calcul]
Procédé économique
composition additive pour 3,5</td>
<td>Incomplet
5 oranges→ 1 ¼
1 orange → ¼ L</td>
</tr>
<tr>
<td>Hélène</td>
<td>a. 1 erreur : ½ →0,5 gâteau
Procédé économique :
Pour 150 x 17,5 →15 x 175
b. 1 erreur : ½ →0,5 gâteau
c. 2 erreurs : ½ → 605 (87,5)
150 → 11250 (26250)
Incomplet
À partir de 25 non résolu.</td>
<td>a. aucune erreur
3,5→ composition additive et exploitation du montant associé à 0,5 jour
b. aucune erreur
3,5 → algorithme</td>
<td>Incomplet
5 oranges→ 1 ¼
1 orange → ¼
1/2 orange→ 1/8
6/4L → 6
Rapport «technicistes» :
le «de», c'est fois</td>
</tr>
<tr>
<td>Bertrand</td>
<td>a. aucune erreur
Procédé économique :
- composition additive des produits partiels pour 150
[CH : 150 x 17,50
1750→100]
- 45/5(9)→175 (10) - 17,5(1) = 157,5
b. aucune erreur
c. aucune réponse</td>
<td>a. 1 erreur
3,5 →128,45 (149,10)
pour 3,5 … 42+42+42+0,5…
Procédé économique : tentative composition pour 3,5 : 3,5 .additionne 3 x + ½
b. 1 erreur
150 → 60 900 (63 900)
3,5 → additionne 3 x + ½</td>
<td rowspan="2">Équipe de Bertrand et David
Aucune réponse</td>
</tr>
<tr>
<td>David</td>
<td>a. 1 erreur
45/5 →158 (157,5)
b. aucune réponse
c. 5 erreurs
15→1500 (2625)
7,5 → (750) (1312,5)</td>
<td>a. 1 erreur
Pour 3,5 additionne 3 x 42 + 0,5
b. 1 erreur
150 → 60 900 (63 900)
3,5 → additionne 3 x + ½</td>
</tr>
</table>

	25 → 2500 (4375) 0,5 → 50 (87,5) 10 → 7500 (1750)		
Rémi	**a. 1 erreur** 45/5 →158 (157,5) **b. 4 erreurs** 150 → 2625 (262,5) 500 →8750 (875) 10 → 175 (17,5) 45/5→158 (15,75) **c. 4 erreurs** 150 → 262500 (26250) 500 → 875000 (87500) 10 → 17500 (1750) 45/5 → 15800 (1575)	**a. 2 erreurs** 150 → multiplication avec erreur 3,5 : algorithme ***Procédé économique*** - considère les relations entre les montants 42,60 et 21,30 pour déterminer le nombre de journées **b. 1 erreur** 150 et 3,5 (algorithme)	**Equipe de Rémi et Gael** 5 oranges→ 1 ¼ 1 orange → ¼ 1/2 orange → 1/8 6/4L → 6 1/8 orange → 8/32 3,75 L → pas de réponse **Procédés économiques** 1 orange → ¼ (dessin) **5 oranges…« 5 fois 1/4 …5/4 …1,2,3,4,5…1 entier et cette petite partie »** pour ½ orange, s'appuient sur le dessin 1 orange → ¼ 1/8 orange → prise en compte de la relation, mais ils commettent une erreur dans l'obtention d'une fraction 8 fois plus petite que ¼.
Gael	**a.1 erreur** 45/5 →158 (157,5). **b.1 erreur** Pour 45/5 → 15,8 (15,75) **c. 6 erreurs** 150 → 26,25 (26250) 7,5 → illisible 0,5 → 875 (87,5) 500 → 8750,00 (87500) 10 → 175 (1750) 45/5 → 158,00 (1575)	**a. aucune erreur** ***Procédés économiques*** - composition du multiplicande pour 150, il fait fois 100; il ajoute au produit obtenu, la moitié de ce produit- pour 3,5 : composition additive: somme de 3 fois le montant pour 1 jour et celui pour 0,5 jour **b.** aucune erreur ***Procédé économique*** 150 et 3,5 : exploite le résultat du tableau précédent (x10)	
Prince	**a. 2 erreurs** 0,5 boîte → 87,5/175 45/5 boîtes → 787,5/87,5 **b. 2 erreurs** 0,5 boîte → 8,75/17,5 45/5 boîtes → 78,75/8,75 **c. 3 erreurs** 15 → illisible 0,5 →875/1750 45/5 → 7875/875	**a. aucune erreur** ***Procédé économique*** - considère les relations entre les montants 42,60 et 21,30 pour déterminer le nombre de journées - pour 3,5 : algorithme **b. 1 erreur** 3,5 (algorithme) → 1488,9 ***Procédé économique*** - 150 : composition du multiplicande pour 150, il fait fois 100 auquel il ajoute la moitié de ce produit partiel.	**Equipe de Prince et Martin** Utilisation de différentes représentations des données fournies (ex. ½ → 50%; 6/4 → 1+ ½ ; 1/8 → 3/24; 3,75→ 3 ¾.) 5 oranges→ 1,25 1 orange → ¼ 1/2 oranges→ 1/8 **6/4L → 6** **1/8 (0,125) orange → 1/32** **3,75 L (3 ¾) → 15 oranges** ***Procédé économique*** Ils recourent à 1,25 L; ils s'appuient sur les relations entre plusieurs données 5 → 1,25 ? → 3,75
Martin	**absent**	**a. aucune erreur** ***Procédé économique*** - considère les relations entre les montants 42,60 et 21,30 pour déterminer le nombre de journées - pour 3,5 : algorithme **b. 1 erreur** 3,5 (algorithme) → 1488,9 ***Procédé économique*** 150 : composition du multiplicande pour 150, il fait fois 100 et ajoute au produit obtenu, la moitié de ce produit partiel.	

Tout d'abord, en ce qui concerne la première activité présentée le 5 février 2007, il faut se souvenir qu'il n'y avait pas eu d'enseignement préalable de la multiplication de nombres décimaux, ce qui, comme nous le verrons a eu des répercussions sur les conduites des élèves. Nous pouvons également noter que le nombre d'erreurs augmente considérablement plus on avance dans la tâche, alors que les nombres de gâteaux par boîte que nous avions choisis auraient dû faciliter la multiplication (a. 17,5; b. 1,75; c. 175). Par ailleurs, environ le quart des erreurs produites relève d'une prise en considération adéquate des relations entre les nombres de gâteaux par boîte dans chacun des tableaux. Gael et Réjean obtiennent 15,8 gâteaux pour 45/5 de boîtes, chacune des boîtes contenant 1,75 gâteaux, ces élèves ayant trouvé 158 gâteaux pour un même nombre de boîtes, chacune des boîtes contenant alors 17,5 gâteaux. Lorsque les nombres de gâteaux par boîte sont respectivement de 1,75 et 175, Gaudi a considéré que le second nombre était 1000 fois plutôt que 100 fois plus grand que le premier, ce qui a entraîné 4 erreurs. Dans le même ordre d'idées, la prise en compte de relations a permis à Hélène [Pour 150 x 17,5 →15 x 175], Bertrand [Pour 45/5 boîtes : il prend le nombre de gâteau associé à 10 boîtes auquel il soustrait le nombre de gâteaux correspondant à 1 boîte →175-17,5 = 157,5] et Gaudi [*Pour ½ boîte :* 17 ÷ 2 = 8,5 et 5 ÷ 2 = 2,5…8,75] d'exploiter des procédés forts astucieux. Il importe de rappeler que cette considération des relations ne fait pas partie des habitus des élèves : a) certains élèves ont vu tardivement l'influence du changement du nombre de biscuits par boîte sur les produits obtenus; b) d'autres élèves ont bénéficié de l'intervention des chercheures et de l'enseignante; c) la grande majorité des élèves n'a pas tenu compte des relations entre les données dans un même tableau.

À ce propos, nous avons pu remarquer, lors de l'activité subséquente (activité présentée le 8 février 2007), une augmentation substantielle de la prise en compte des relations (certains ayant bénéficié des interactions lors de la situation précédente), une mise en place de procédés de calcul économiques, et une diminution des erreurs. Par exemple, certains élèves ont exploité la composition additive de 150 jours, afin de trouver le montant qui lui était associé, en utilisant la somme du montant associé à 100 jours et de celui obtenu pour 50 jours, ce dernier représentant la moitié du précédent produit.

La pertinence de cette situation est reconnue par l'enseignante qui demande aux chercheures de construire une seconde situation, situation dont nous faisons état au tableau précédent, dans laquelle le choix des nombres et la diversité de leurs représentations puissent permettre aux élèves de donner sens à la multiplication des nombres décimaux. Lors de la création par la suite de leurs notes de cours, les élèves étaient invités à expliciter le « déplacement de la virgule » dans la multiplication de nombres décimaux. Si, ne pouvant s'appuyer sur des procédés ayant fait l'objet d'un enseignement antérieur à la présentation des problèmes précédents, plusieurs élèves ont pu recourir à des procédés économiques dans la multiplication des nombres décimaux, il en est autrement dans la résolution de problèmes multiplicatifs impliquant des fractions. Ainsi, pour trouver ¼ de 4/7 et ¼ de 4/8, un nombre appréciable d'élèves recourent à la multiplication des numérateurs et des dénominateurs, procédés ayant fait l'objet d'un enseignement; plus encore, plusieurs élèves ont retenu que le « de » veut dire « multiplier».

Enfin, nous pouvons également attester, tel qu'observé, entre autres, dans les recherches du RNP (Cramer, Wyberg et Leavitt, 2009), de la pertinence de tout le travail de représentation des nombres rationnels sur l'efficience des procédés de calcul des élèves. La situation du jus d'orange (24 mai) est correctement résolue par les élèves[58] qui recourent majoritairement à diverses représentations et unités de mesure. Il faut noter par ailleurs le processus d'acculturation de certains élèves qui, dès la réception de leur feuille, s'amusent à proposer diverses représentations des mesures fournies. De façon générale, leurs conduites sont à ce moment bien loin de celles adoptées lors de l'examen du 27 mars, plusieurs élèves procédant à l'algorithme usuel de calcul pour trouver le produit associé à 2,1 x 2.

[58] Il ne faut pas s'étonner de l'absence de résultats pour David et Bertrand ainsi que du travail incomplet d'Anne et Hélène, ces élèves ayant consacré beaucoup de temps à la résolution de la situation précédente (Angus : problème additif et multiplicatif).

L'évolution des démarches de résolution de problèmes additifs et des procédés d'addition

Tel que mentionné précédemment, nous avons peu investi la résolution de problèmes visant une meilleure compréhension et construction de connaissances sur les calculs, notamment sur les calculs additifs. Le temps étant sans contredit la principale contrainte institutionnelle évoquée, «la période dévolue à cet apprentissage étant échue», nous avons répondu favorablement à la suggestion de l'enseignante en présentant 3 situations additives, au cours des périodes libres du midi; les élèves étaient invités à se joindre à nous, sur une base volontaire.

Bien que peu de problèmes additifs aient été présentés aux élèves, nous pouvons quand même apprécier l'évolution des connaissances et démarches des élèves. Nous présentons 2 problèmes additifs de composition de mesures, le premier fait également appel à une comparaison des mesures (30 avril). Nous pouvons voir le fort lien qui unit ce premier problème au travail entamé sur la représentation de nombres rationnels, alors que les problèmes présentés le 24 mai font davantage référence au sens des gestes impliqués dans l'addition (sens du dénominateur commun, des fractions équivalentes, de la réunion des numérateurs) et à l'influence du contexte dans la modélisation du problème.

Tableau LIV: Évolution des démarches de résolution de problèmes additifs et des procédés de d'addition

Élèves	*30 avril*	*24 mai (heure du dîner)*
	Christine a donné 0,125 de sa tablette à Chantale 31/124 de sa tablette à Elisa 9/48 de sa tablette à Yéran 100/320 de sa tablette à Karine et le reste ...pour elle! **Geneviève a donné:** 3/16 ; 3/24 ; 50/160 ; 25% et le reste… pour elle. **a)** Qui est la plus généreuse? **a. 1.** choix du dénominateur et calcul **a. 2.** représentation (avec papier quadrillé)	***1. Timbre*** Dans une très très très petite collection de timbres, 2/7 des timbres proviennent de l'Orient, 25% de l'Amérique. **1.a.** Nombre total d'objets dans la collection **1.b.** Portion de timbre appartenant à l'Europe de l'Ouest. ***2. Jardin*** […] 2/7 de l'espace est réservé aux pommes de terre; […] 25% de l'espace est réservé aux brocolis. **2. a.** mesures possibles des côtés de ce jardin; 2**b**. fraction du jardin qui demeure libre; **2c** autre dimension possible du jardin et de la portion restante

Anne	**Non satisfaisant** **a. réponse erronée** **a.1. tablette de Christine: écritures de** CH: 31 /124…3/12 ÷ 3 = ¼ ; 100/320 = 10/32 ÷ 2 = 5/16; … **Tablette de Geneviève:** seule trace: *Carole* : 25% = 25/100 = ¼ = 4/16 : « *25 pour cent, 25 sur 100 égale ¼ car 25 peut entrer 4 fois dans 100* » **a. 2.** aucune représentation	**Satisfaisant** **1. a.** 28 **b.**: 13/28 **2. a.** 4x7 (28) **b**. 13/28
Hélène	Équipe d'Hélène et Bertrand **Peu satisfaisant** **a. réponse erronée** **a.1. Tablette de Christine :** plusieurs mises en relation effectuée par la chercheure: 0,125, ¼, 0,250,1/8 et 31/124, 3/12 et ¼; 10/32 = 5/16; 9/48 et 9 ÷ 3 ;48 ÷ 3 **Tablette de Geneviève :** aucune erreur; dénominateur commun de 80 **a.2.** représentation adéquate de la tablette de Geneviève	**Satisfaisant** **1. a.** 100; 70 ; 28 **b.** 13/28: **Procédé: appui sur le dessin pour faire l'addition, trouver les fractions équivalentes** dessin de 28 timbres en 4 rangées de 7 timbres. **2.** Manque de temps : non résolu
Bertrand		**Non Satisfaisant** **1. a.** 10 *** montre toutefois une compréhension adéquate du problème lors du retour.
Rémi	Équipe de Gael et Rémi **Peu satisfaisant** **a. réponse erronée** **a.1. Tablette de Christine et Geneviève** : dénominateur de 100, puis en pourcentage et utilisent le produit croisé **a.2.** aucune représentation	**Peu satisfaisant** **1. a.** 100 **b.** 32 **2. a.** 4x7 **b**. aucune réponse
Gael		**Fort satisfaisant** **1. a.** 28 **b.** 13/28 **2. a.** 4x 7 (28) ; 1x 28; 1x 14 **b.** 13/28 ; 6,5/14
Prince	Équipe de Prince et Martin **Excellent** **a. bonne réponse** **a.1. Tablette de Christine :** dénominateur commun: 16; 160 **Tablette Geneviève:** dénominateur : 160 ; 16 Recherchent d'abord un dénominateur commun élevé : 9/48 = 90/480… **Différents procédés et représentations:** 31/124 à ¼ : relation entre le numérateur et le dénominateur; 0,125 = 12,5/100 = 125/1000 = 25/200 = 5/40 = 1/8 = 2/16 **Procédé économique:** - S'attarder ainsi à connaître le nombre de fois que le numérateur est contenu dans le dénominateur - Trouve *graphiquemen*t la part de Christine et Geneviève **a.2.** représentations adéquates	**Élève absent**
Martin		**Élève absent**
Marcel	Équipe de Marcel, Guy et Gaudi **Excellent** **a. bonne réponse** **a.1**.tablettes de Christine et de Geneviève : recours au	**Fort satisfaisant** **1. a.** 28 **b.** 13/28 dessin de 28 timbres en 4 rangées de 7

	dénominateur 16 **a.2.** représentations adéquates des tablettes	timbres. [¼ + 2/7 + … = 1 = 28/28 7/28 + 8/28 = 15/28…13 **2. a. 4x 7 (28)** **b**. 13/28 c. **2 x 7 (14)** ; 6,5/14
Guy		**Satisfaisant** **1. a.** 28 **b.** 9/28 associé directement 25% à ¼: 25% c'est ¼ , parce que 25 fois 4 ça fait 100 **2. a. 4 x 7 :** reproduisant les calculs qu'il a effectués précédemment pour la répartition de la collection de timbres **b**. aucun résultat
Gaudi		Élève absent
Noa	**Équipe de Noa et Samuel** **Excellent** **a) bonne réponse** **a.1.** divers procédés pour comparer et exprimer des fractions; le dénominateur 16 est choisi. **a.2.** représentations adéquates des tablettes **Procédé économique /peu fréquent** 31/124 = ¼ ; (31/124 --- > 31 / (31+31+31…) → ¼	Élève absent
Samuel		**Excellent** **1. a.** 700 **b.** 325/700 **reflète le choix de la situation précédente sur la répartition de la population. Ne produit aucune dessin** **2. a.** 700 **b**. **c.** 2x14 (28)→13/28; 2x7 (14) →6,5/14; 2x3,5 (7) → 3,25/7; 1 x 3,5 (3,5) →1,75/3,5 Produits divers dessins à l'exception du jardin dont l'aire est 700.
Rébecca	**Équipe de Rébecca et Réjean** **Excellent** **a) bonne réponse** **a.1.** 31/124 = ¼ ; (31/124 --- > 31 / (31+31+31…) → ¼; 9/48 … 48 divisé par 9 → 5 reste 3 …; 9 divisé par 3 et 48 divisé par 3 -→ 3/16 …; 125/1000 → 1000 divisé par 125 → 8 a.2. représentations adéquates des tablettes	Élève absent
Réjean		Élève absent
Alex	**Équipe d'Alex et David** **Fort satisfaisant** **a)** réponse erronée **a.1**. recourent à divers dénominateurs (16 et 160) pour représenter, sous une forme fractionnaire, les nombres; procédé économique utilisé : 31/124: Rature le 1 de 31 et le 4 de 124. **a.2.** représentations adéquates .	Élève absent
David		**Satisfaisant** **1. a.** 100 ; 28 **b.** 32% ; 13/28 exprime le nombre 2/7 en pourcentage, utilisant le produit croisé **2. a.**: 4x7; 2x14 **b**. 13/28 il a reconnu la similitude entre ce problème et le précédent

Plusieurs élèves sont déroutés à l'entrée dans la situation du 30 avril (tablettes de chocolat), pour les raisons suivantes : a) différentes représentations des nombres sont proposées; b) aucune des fractions ne comporte un dénominateur qui puisse être utilisé comme dénominateur commun; c) différentes représentations des nombres leur sont moins familières (31/124; 0,125). D'ailleurs, comme le mentionne l'équipe de Rébecca et Réjean, faisant référence au dénominateur commun : « *C'est juste qu'on ne sait pas sur quoi le mettre sinon on serait capable!* ». La nouveauté de cette tâche a par ailleurs obligé les élèves à recourir à diverses représentations. Plusieurs ont aussi profité des interventions de l'enseignante, de l'étudiante-chercheure et de la chercheure, comme le montre le retour durant lequel quatre élèves expriment 0,375 de différentes façons :

PRINCE	*0,250 +0,125*
GAEL	*Moi j'ai fait un autre calcul….1/8…3/8…fois 3*
MARCEL	*moi la soustraction!*
SAMUEL	*500 -125*
ENS	*Vous voyez un peu… on prend des raccourcis avec ce que l'on connaît, t'as pas besoin de les connaître tous tu les retrouves, il y a plein de stratégies*
MARCEL	*Est-ce que tu peux donner un exemple de raccourci?*
SAMUEL	*0,500 + 0,125 pour 5/8*
ENS	*Excellent!*

Bien que la première activité n'ait pas permis à tous les élèves d'atteindre le même niveau de compréhension, tous les élèves ont su coordonner diverses connaissances. Ainsi, plusieurs procédés connus et novateurs ont été mis de l'avant dans la production de fractions équivalentes: 1) rechercher le nombre de fois que le numérateur entre dans le dénominateur (sens rapport); 2) représenter le nombre fractionnaire sous une forme décimale en divisant le numérateur par le dénominateur (sens quotient); 3) appliquer des procédures répertoriées dans les notes de cours : diviser par un commun diviseur; diviser par le plus grand commun diviseur; effectuer un produit croisé; 4) coordonner différents registres langagiers et scripturaux (dénomination, nombre décimal, pourcentage, notation fractionnaire). Un élève s'est aussi permis, pour parler de 0,125, d'inscrire 1,25 sur 10 et son coéquipier lui rétorquant *« … non faut plus la virgule ».* Il est aussi intéressant de noter que peu d'élèves ont tiré profit de la représentation leur permettant d'avoir accès directement à la partie restante, sans effectuer aucun calcul.

Les situations-problèmes présentées le 24 mai ne diffèrent que par le contexte. Dans la première situation, les élèves sont invités à proposer une mesure de la collection de timbres provenant de 3 pays, connaissant les portions de timbres provenant de deux pays, portions exprimées par une fraction (2/7) et un pourcentage (25%). Dans la seconde situation, les élèves sont également invités à proposer diverses mesures d'un jardin rectangulaire, jardin dans lequel deux légumes occupent diverses portions du jardin, portions exprimées par une fraction (2/7) et un pourcentage (25%). Ces problèmes ont été présentés à 9 élèves, élèves qui avaient répondu positivement à notre invitation de « faire des mathématiques » durant l'heure du dîner. Il nous semble toutefois que certains d'entre eux ont su tirer parti de la situation précédente de composition d'une population (15mai). Par exemple, Samuel, qui s'attarde davantage aux nombres qu'au contexte, a recours directement au dénominateur 700 pour rendre compte, à la première situation, du nombre de timbres dans la collection. Les élèves Marcel, Guy et Hélène, qui avaient eu de la difficulté à modéliser la situation de la population en pensant qu'il manquait une donnée, ont pu cette fois donner sens à la composition des trois mesures d'une collection de timbres, deux de ces mesures étant associées à des portions de la collection de timbres. En recourant au dénominateur de 28 pour exprimer les portions de la collection connues, ces élèves ont aisément traité les nombres 2/7 et 25% et recourir à une collection de 28 timbres pour montrer la répartition des timbres entre les divers pays. Le nombre total de timbres dans la collection ainsi que la portion de timbres provenant de l'Europe de l'Ouest qui ont aussi été proposés par les élèves Anne, Gaël et David sont tout à fait adéquats; l'interprétation du problème et le recours à une démarche appropriée pour répondre aux questions dont a fait preuve Anne méritent d'être soulignés, cette élève ayant montré antérieurement des rapports problématiques aux nombres rationnels. Notons enfin chez quelques élèves, dont l'élève Rémi, une tendance à recourir à une représentation des nombres rationnels par des pourcentages ou des fractions dont le dénominateur est 100, tendance qui, selon les nombres représentés, oblige à recourir à des approximations.

Mentionnons enfin que pour traiter la seconde situation-problème, soit la répartition des espaces réservés pour chacun des légumes du jardin, l'ensemble des élèves ont simplement reproduit les réponses qu'ils avaient trouvées à la première situation-problème. Toutefois, seuls Gael, Marcel et Samuel ont répondu à la dernière question concernant d'autres dimensions possibles du jardin. La liberté que ces élèves se sont donnée lors de la représentation des nombres leur a permis « d'adapter leurs mesures » en fonction du contexte.

Lors du retour sur la résolution des deux situations-problèmes, en réponse à la question que nous avons formulée, soit «Est-ce qu'on pourrait utiliser des mesures plus petites pour le jardin? », deux élèves qui n'avaient pas répondu à cette question, soit David et Bertrand, proposent rapidement des mesures appropriées, montrant un maillage important en la modélisation mathématique d'un problème et son contexte. Le retour collectif nous permet également de prendre acte du progrès réalisé par Bertrand, Guy et Hélène. En effet, dès le départ, Guy a considéré l'ensemble de la collection comme un entier, a trouvé aisément le dénominateur commun et n'a eu recours à aucune aide. De son côté, Hélène a su s'appuyer sur sa représentation pour donner sens aux calculs à effectuer. D'ailleurs, ces différentes situations ont permis aux élèves de mettre à profit le sens rapport des fractions dans la recherche de fractions équivalentes, de conférer un sens à la modification des dénominateurs des fractions (population, nombre d'objets dans la collection, dimensions du jardin), de mieux identifier leurs influences sur l'interprétation des numérateurs qui composent ces fractions et enfin, de mieux apprécier l'équivalence de diverses représentations des fractions, sans recourir, par exemple, à une superposition des aires correspondant à la répartition des fractions pour juger de l'équivalence des fractions.

Pour conclure, la synthèse précédente sur les résultats de notre recherche nous permet d'apprécier les apports de plusieurs situations sur la construction des nombres rationnels et la résolution de problèmes impliquant de tels nombres. Les conduites de plusieurs élèves, il nous apparaît important de le mettre en évidence, se comparent très avantageusement aux conduites dont rendent compte plusieurs études effectuées auprès de diverses clientèles d'élèves, études présentées dans le cadre conceptuel de notre recherche (ex. Boulet, 1993; Chevallard et Julien, 1989; Cramer, Post et Delmas, 2002; Morissette, 2006; Moskal et Magone, 2001; Perrin-Glorian, 1985; Prediger, 2008; Houssart, 2002; Timss, 2004, 2008).

CONCLUSION

Pour conclure cette recherche, nous procèderons d'abord à la présentation d'un bilan de la recherche, puis à la présentation de ses limites. Enfin, nous nous attarderons aux retombées de cette étude, dans les domaines de la recherche et de la pédagogie, et nous proposerons quelques nouvelles pistes de réflexion.

5.1. Bilan de la recherche

Notre recherche visait la transformation des rapports aux nombres rationnels d'élèves de 1re secondaire présentant des difficultés d'apprentissage. Comme l'ont montré plusieurs recherches, le défi majeur auquel sont confrontés les enseignants, ainsi que les chercheurs, est de ne pas s'enliser dans le cercle vicieux d'une réduction des enjeux de l'apprentissage des nombres rationnels et des possibilités d'apprentissage de l'élève en difficultés d'apprentissage, cet élève n'ayant pas la chance de mettre à l'épreuve ses connaissances, d'oser s'engager dans une démarche de construction de connaissances et d'apprécier les effets de son engagement cognitif. Afin de relever ce défi, nous avons misé sur l'insertion écologique de situations-problèmes. Pour ce faire, nous avons emprunté et cherché à caractériser la démarche d'acculturation, de même que son influence sur le processus de gestion et d'élaboration des situations et, par ricochet, sur l'évolution des connaissances et des rapports des élèves aux nombres rationnels. Sa caractérisation ayant été exposée antérieurement, nous tenterons maintenant de faire ressortir les caractéristiques qui nous semblent avoir joué un rôle prépondérant, au regard de la problématique de départ.

5.1.1. La structure de la démarche écologique dans une perspective d'acculturation des élèves, des chercheurs et de l'enseignant

Telles que caractérisées précédemment, les quatre phases proposées par Roditi (2007) ont chacune contribué à l'obtention des résultats de cette étude. Les phases 1 (s'informer de l'enseignement possible) et 2 (comprendre l'enseignement envisagé) nous ont servi de socle de référence, afin de poser des choix les plus judicieux possibles "en action". Notre particularisation de la démarche de Roditi dans une perspective d'acculturation institutionnelle des élèves, de l'enseignant et des chercheurs nous a amené à favoriser : a) l'insertion graduelle du chercheur dans une première itération de la démarche par l'ajout d'une phase intermédiaire, entre les phases 3 et 4, d'observations-interventions et; b) l'alternance non séquentielle, dans les itérations subséquentes, des phases d'observations/d'observations-interventions/ de participation à la conception et la gestion de situations. Cette structure nous semble avoir contribué à l'introduction et l'intégration de pratiques, de *situations qui ne paraissent ni menaçantes pour l'enseignante, ni menaçantes pour les élèves*, menaces que nous pourrions caractériser chez l'enseignante par une intégration qui ne bouscule pas l'avancée du temps didactique (Mercier, 1995).

5.1.2. La pertinence d'une telle démarche d'acculturation auprès d'une population en difficultés d'apprentissage dans la transformation des rapports aux nombres rationnels

S'il est un aspect indéniable de cette étude, il s'agit bien de la réussite du processus d'acculturation et de l'insertion écologique de situations dans la transformation des rapports des élèves aux nombres rationnels. En effet, nous avons assisté à diverses modifications dans les modèles culturels initiaux des différents groupes.

5.1.2.1. Modification du contrat didactique, qui favorisant la dévolution

Si au départ, il nous a semblé que, dans une démarche d'acculturation institutionnelle, l'approche écologique soit tout indiquée pour penser une «dé-transposition/re-transposition didactique» (Antibi et Brousseau, 2000) et reconstruire une mémoire porteuse d'espoirs (Brousseau et Centeno, 1998), nous pouvons maintenant en préciser les effets. L'utilisation de situations "défis, originales" ont effectivement favorisé l'engagement et la persévérance des élèves, ceux-ci ne pouvant évoquer les habitus usuels (Bourdieu, 1980). Ainsi, ils ont développé des pratiques modifiant leur habitus "d'élève en difficultés d'apprentissage" adoptant plutôt des pratiques mathématiques fécondes, telles qu'être plus attentifs aux données numériques et aux relations entre ces données. La fréquence et la pertinence de recourir à de tels habitus a favorisé leur transposition, ce qui confirme les propos de Hilgers (2006, para.24) selon lesquels, « *la transformation potentielle de l'habitus se fera selon la couche impliquée et selon l'intensité, l'inédit et la répétition de cette expérience*.» (Hilgers, 2006, para.24).

Ces modifications nous ont par ailleurs permis d'introduire des situations plus usuelles (ex: proportionnalité simple) dans lesquelles les élèves se sont engagés, car ils ont su réinterpréter leur rôle d'apprenant de façon différente. Il faut aussi préciser que la démarche d'acculturation nous a permis, lorsque nécessaire, de réguler des tensions potentielles, pour l'insertion écologique de situations défis, afin que les élèves puissent percevoir qu'ils ont suffisamment d'emprise sur ces situations pour s'y engager, dans le but de les rendre moins menaçantes. Ainsi, si la situation nouvelle leur paraît non menaçante, dans la mesure où ils ne peuvent la relier à une situation usuelle d'échec, les élèves s'y investissent. En revanche, il est possible que la nouveauté de cette situation nuise à sa dévolution si les élèves estiment qu'ils n'ont aucune emprise pour s'y engager.

5.1.2.2. La participation des élèves à l'enseignement

Si dans nos choix didactiques pour repenser l'enseignement des nombres rationnels auprès des élèves en difficultés d'apprentissage de 1re secondaire, nous avons insisté sur l'exploitation de la résolution de problèmes comme modalité d'intervention indispensable et incontournable, nous avons reconnu la nécessité d'une détransposition/retransposition et d'une inscription écologique, nous serions tentés maintenant de chapeauter ces choix par une variable indispensable: la participation féconde des élèves à l'enseignement.

Nous avons pu caractériser l'évolution du processus d'acculturation, notamment au regard de la participation des élèves à l'enseignement, tant au niveau de la quantité que de la nature de leurs interventions (interactions entre eux, avec les intervenants: ils s'enseignent sans se donner les réponses, repoussent nos offres de soutien, etc.) et de la nature de leurs conduites (liberté dans la production de représentations des nombres rationnels, coordination de plusieurs connaissances: sens de la fraction, etc.) et ainsi voir l'influence de ces modifications sur les différents acteurs et les adaptations effectuées dans le système didactique. À la fois indicateur de la réussite de l'intégration écologique et moteur du processus d'acculturation, nous avons à plusieurs reprises constaté une *participation qui "interroge et/ou fait parler les nombres"*: que ce soit Gaudi qui affiche publiquement une liberté dans la représentation des nombres, Hélène qui, dans le travail sur la définition des nombres rationnels, porte attention à la relation entre le numérateur et le dénominateur, Marcel qui questionne les procédés économiques, lors de la division de décimaux au regard des nombres proposés, Samuel qui interroge le choix des nombres (ex. 317%) en fonction du contexte (pages lues), Gaël qui, lors de la sériation de fractions, propose de les placer sur un « numérateur commun », Noa qui arrête un coéquipier pour lui demander de regarder les nombres, afin d'utiliser le procédé de comparaison le plus économique et réduire ainsi, le nombre de transformations nécessaires dans la comparaison des fractions 141/240, 5/12 et 7/12, etc.

Aussi banal que cela puisse paraître, prendre le temps de s'arrêter et de bien regarder les nombres ne fait pas partie des habitudes scolaires des élèves, voire de plusieurs étudiants universitaires inscrits dans les programmes de formation des maîtres, comme nous avons pu le voir à certaines reprises. Il suffit de prendre en exemple cette étudiante en formation des maîtres qui, pour faire l'addition de 345/690 + 698/1396, a utilisé une page complète afin de faire les calculs: elle a d'abord réduit 345/690 à 69/138 en effectuant d'abord une division du numérateur et du dénominateur par 5, obtenant alors 69/138; elle a poursuivi en effectuant une division du numérateur et du dénominateur de cette fraction réduite par 3, obtenant alors 23/46; elle a ensuite procédé à l'addition « 23 + 23 » pour se rendre compte qu'il s'agissait bien de la fraction 1/2. En ce qui concerne 698/1396, elle l'a réduite a 343/698 ayant commis une erreur lors de la division par 2. Enfin, elle a mis ½ + 343/698 sur le même dénominateur (349/698+343/698) et a obtenu 692/698.

Il est d'ailleurs intéressant de constater, qu'au même titre que pour les élèves en difficultés face aux élèves de l'enseignement régulier, il a fallu faire valoir la pertinence de plusieurs interventions pour les élèves qui occupent des «positions d'élèves faibles »

(Sarrazy, 2002). Ce n'est donc pas sans raison que nous avons, par exemple, procédé à la reconnaissance publique de la participation «étonnante» d'Hélène et de Guy dans la situation de multiplication de décimaux et de Rémi dans la définition des nombres rationnels.

D'ailleurs, la transformation de la nature de la participation d'un nombre non négligeable d'élèves à l'enseignement, dans cette étude, nous révèle la portée de nos attentes à leur égard. Si institutionnellement (manuel, examen), des représentations fort simples leur sont proposées, nous avons vu qu'ils profitaient de situations plus riches trop souvent réservées aux élèves forts.

5.1.2.3. Modification de la topogénèse et de la chronogénère

Nous pouvons également rendre compte de différentes manifestations du processus d'acculturation à l'égard des adaptations du fonctionnement du système didactique (topogénèse et chronogénèse).

Tableau LV : Manifestation de l'acculturation dans la modification de la topogénèse et de la chronogénèse

= = = = = = = = ⇒	
Enseignement d'une seule procédure de calculs	Enseignement qui favorise la construction de différentes procédures de calcul *via* diverses entrées
Enseignement → Prise de notes→ exercices	situation-problème → construction de notes → exercices
Enseignement compartimenté des pourcentages, fractions, décimaux et des différents habitats (nombres, opérations, résolution de problèmes)	Présentation simultanée de différentes représentations des nombres rationnels qui alimentent simultanément différents habitats. 
Acceptation, pour certains élèves uniquement, de faire parler des écritures	Exposé et proposition à l'ensemble de la classe de comparer diverses écritures 16 ÷ 25/100; a) ; b) ; c)
Représentation fort simples de ***fractions*** : 1/6; 4/7	Représentations riches de ***nombres rationnels***; composition additive, multiplicative, etc.

Il importe de souligner que ce tableau ne se veut pas représentatif d'un effet avant/après du passage des chercheurs, mais bien de l'influence conjointe de la participation des élèves, de l'enseignante et des chercheurs à l'enseignement. Pensons par exemple, aux élèves qui, au début de l'expérimentation ne veulent pas montrer leur travail et, qui, ensuite, s'octroient une liberté et ont du plaisir à exposer leur raisonnement. Ce qui nous encourage, chercheurs et enseignants, à leur proposer des situations plus riches, « plus complexes ». D'autre part, il faut ajouter qu'il est beaucoup plus facile pour le chercheur d'oser et de « prendre des risques » compte tenu qu'il n'est pas soumis aux mêmes contraintes que l'enseignante. Ces changements ne sont donc pas banals, changements reflétant le processus d'acculturation des différents acteurs.

5.1.3. La spécificité de l'enseignement aux élèves en difficultés au secondaire

Plusieurs études ont reconnu les difficultés qu'occasionne l'apprentissage des nombres rationnels et que, pour cette raison, plusieurs d'entre elles ont porté sur la conception de situations à l'entrée de l'apprentissage de ces nombres; dans notre cas, les élèves avaient déjà un passé scolaire avec cet objet et peu de recherches (Lemoyne et Bisaillon 2006; Stegen et Daro, 2007; Bednarz, 2009) s'étaient attardées à la conception de situations sur les nombres rationnels en 1ère secondaire. D'autre part, les élèves en difficultés étaient parfois retirés des recherches, sous prétexte qu'il leur serait préférable d'être soumis à des dispositifs d'enseignement/apprentissage différents (Moss et Case, 1999). Or, nous avons misé sur l'importance de les soumettre à des tâches riches, trop souvent réservées aux « bons élèves » et plusieurs de nos résultats tendent à montrer qu'ils ne sont pas si différents, tels que l'exposent les exemples présentés dans le tableau ci-dessous:

Exemples issus des recherches auprès d'élèves du régulier	Exemples issus des résultats de notre thèse auprès d'élèves en difficultés d'apprentissage	
	Tâches soumises	Résultats
Répertoire de difficultés Le choix des mesures d'une collection ou d'une figure est source de problèmes importants chez les élèves lorsqu'il s'agit de représenter, entre autres, plusieurs fractions, surtout si ces fractions exigent un traitement préalable et que le dénominateur commun ne correspond pas à aucun des dénominateurs des fractions.	- Tablettes de chocolat - Angus - Habitant - Timbre/jardin	Bien que plusieurs élèves sont embêtés au début, ils arrivent, non seulement à représenter des nombres rationnels, mais peuvent interpréter le sens des modifications apportées.

Répertoire de tâches Quel groupement des nombres est le plus grand,[1/8+1/16+1/2+.0625]ou [1/4+25%+.125+1/8] ?	- représentations variées de nombres -construction d'une tâche d'évaluation et sériation effectuée	Les représentations choisies par les élèves et les sériations effectuées sont tout autant sinon plus complexes et montre une coordination de diverses connaissances
Épaisseur d'une feuille de papier	Épaisseur d'une feuille de papier	Les élèves ont montré des conduites en tout point semblables à celles modélisées dans l'étude.
Dites-le avec des fleurs: situation initialement présentée à des étudiants universitaires	Dites-le avec des fleurs	Les élèves ont montré des conduites semblables à celles des étudiants universitaires, à l'exception de la démarche plus économique d'une étudiante universitaire.

Nos résultats corroborent ceux de Mazzocco et Devlin (2008) qui reconnaissent que la différence entre les élèves «réguliers » et « faibles », dans la sériation de nombres rationnels, ne résidait pas dans la nature des difficultés, mais dans leur persistance. De même, Moseley et Okamoto (2008), avaient montré que les élèves ayant une compréhension limitée du concept de nombres rationnels étaient en fait ceux non exposés à une étendue et diversité de représentations des nombres rationnels. De la même façon, nous avons pu voir, contrairement aux observations effectuées par Roditi (2007), que l'apport du contexte ne favorise pas toujours la comparaison des nombres rationnels chez les élèves en difficultés et, qu'au contraire, les effets de contexte peuvent parfois les éloigner d'un travail plus conséquent et que, s'ils sont exposés à diverses représentations, à « faire parler les nombres d'eux-mêmes », ils peuvent y arriver et ainsi, que leur rapport initial est plutôt le reflet des habitudes d'adaptations du système didactique oeuvrant auprès d'élèves en difficultés d'apprentissage (Giroux et René de Cotret, 2003; Bednarz, 2009). D'ailleurs, les critères[59] de conception et de gestion de situations mis en exergue, lors de l'analyse des recherches auprès d'une population de l'enseignement régulier, ont dévoilé leur pertinence dans notre étude. S'il en est un d'entre eux qui nous est apparu prépondérant auprès d'une population d'élèves en difficultés, c'est celui, particulièrement bien exposé dans l'étude de Mack (2001), de la mise en place de situations pour « accueillir les connaissances informelles et les connaissances plus formelles », pour « les faire intervenir et les examiner » et enfin, pour « accepter qu'elles soient sources de

[59] Se référer aux critères issus de la 1re phase d'acculturation dans la méthodologie

conflits ». Au même titre que pour l'élève, « oser » apprendre comporte des risques, les risques associés à cette pratique enseignante sont plus élevés, comme nous l'exposons à la partie suivante.

5.1.3.1. Ce que nous apprennent les élèves en difficultés d'apprentissage: apprendre à se laisser surprendre et à se faire prendre

Il nous apparaît important de compléter notre bilan en faisant état de la complexité du travail de soutien des élèves : 1) qui nous déstabilisaient par leurs conduites (proposition de démarches) ou les réponses qu'ils émettaient, qu'elles soient adéquates ou non; 2) qui réclamaient notre assistance lors de la réalisation de situations, un tel travail ne devant pas compromettre la démarche de dévolution des tâches qu'ils devaient effectuer par une présentation des procédés à mettre en place, une telle présentation produisant, ou prolongeant, certains effets nuisibles du contrat didactique (Brousseau et Pérès, 1981; Brousseau, 1998). Parmi les interactions didactiques préconisées par Conne (Conne, Favre et Giroux, 2006), celles qui consistent à réagir à des réponses inadéquates des élèves, à des questions formulées par des élèves qui peinent à s'engager dans des tâches, en proposant à ces élèves des tâches similaires, comportant, par exemple, des données numériques plus faciles à traiter, s'avèrent des plus précieuses (voir, entre autres, Lemoyne et Bisaillon, 2006). Ces interactions didactiques nous paraissaient particulièrement importantes. Adhérer à ces orientations des interactions n'est pas chose facile. Lors de l'analyse des interactions avec les élèves qui réclamaient notre aide, nous avons fait état d'échanges avec ces élèves qui consistaient à indiquer les procédés à appliquer, voire quelquefois à montrer comment appliquer ces procédés. De tels échanges étaient particulièrement visibles lors des premières périodes d'enseignement, périodes critiques dans notre démarche d'acculturation institutionnelle. Par la suite, on peut relever quelquefois de telles interventions, lorsque, comme il était souvent le cas lors de notre participation aux premières périodes d'enseignement, des conduites inattendues nous laissaient sans possibilité de réagir autrement que par un guidage des procédés à mettre en œuvre. Les apprentissages que nous avons pu faire au cours des semaines d'enseignement nous ont permis de mieux interpréter les demandes des élèves et leurs démarches et de nous inscrire dans des jeux de tâches, voisins de ceux préconisés par Conne (Conne, Favre et Giroux, 2006). Les élèves ont ainsi participé à notre enseignement. Ces événements nous ont permis d'apprécier encore davantage la complexité du travail de l'enseignant qui doit répondre à plusieurs évènements inattendus, complexité qu'il nous semblait important de relever, et ce, pour deux raisons. D'abord, ce constat rend compte, à notre avis, de l'apport indéniable d'exposer dans les études les conduites et interactions didactiques, tel que l'ont fait Guy et Nadine Brousseau (1987, 2004, 2007, 2008), Cramer, Post et Delmas (2002), afin de pouvoir anticiper certains jeux de tâches, car il n'est pas toujours évident de réagir dans l'immédiat. Ensuite, les raisons qui portent l'intervenant à faire un tel choix ne sont pas forcément visibles. Pensons, par exemple, au moment où l'étudiante-chercheure était prête à refuser 11/20 comme fraction entre 5/10 et 6/10, parce qu'un élève avait précédemment additionné les numérateurs et les dénominateurs, alors que là cet élève avait choisi 5,5/10...11/20 et que l'étudiante-chercheure s'attendait à obtenir une représentation entre 50/100 et 60/100! Cela nous montre la pertinence du processus d'acculturation dans l'interprétation du travail des élèves, du travail de l'enseignant et dans le développement d'attitude indispensable au chercheur, l'humilité (Van der Maren, 1996).

5.1.3.2. Les pratiques "inusitées" qui ont marqué le processus d'acculturation, l'attention des élèves en difficultés, des chercheures et de l'enseignante

L'approche écologique nous a permis de voir le développement de pratiques qui se sont avérées durables, pratiques dont nous rendons compte ci-dessous.

Faire parler les écritures: pratique que nous avons introduite, de façon ponctuelle auprès de quelques élèves, dans les phases d'observations-interventions et, de façon plus systématique, dans la conception et la gestion de situations; pratique que l'enseignante a reprise pendant son enseignement, sans notre intervention (ex. division des nombres décimaux); pratique à laquelle les élèves ont, par la suite, spontanément fait appel.

Augmenter la quantité de nombres, comparer, confronter différentes représentations des nombres rationnels, %, notations décimales, notations fractionnaires, se sont avérés également des choix importants. En effet, si au départ, les fractions, de même que les opérations sur ces nombres, étaient abordées de façon isolée, les chercheures, l'enseignante et les élèves ont su graduellement profiter de moments et de contextes qui leur ont semblé opportuns (jeu, transition, passage des fractions aux nombres décimaux, productions et questions d'élèves, demandes de l'enseignante, etc.), pour introduire et réinvestir cette pratique tout au long de l'enseignement/apprentissage des nombres rationnels.

Exposer les élèves à des démarches économiques, montrer des « raccourcis » (ex. 1/4....0,250; 1/8....0,125) *et construire des tâches qui favorisent leur recours ou qui requièrent le même type de raisonnement*, s'est aussi révélé être une pratique profitable pour les élèves. Ces interventions qui s'avéraient plus directives au départ ont été réexploitées, recontextualisées par plusieurs. Le type d'intervention expose les élèves à de nouvelles pratiques et leur réexploitation favorise la modification des habitus.

Placer les élèves dans une "position d'enseignant": cette pratique qui demandait aux élèves de construire une tâche d'évaluation a joué un rôle majeur pour nous montrer l'effet du type de requêtes sur ce que les élèves dévoilent. En lien avec cette demande, la chercheure a dit à un élève qu'il pouvait aussi recourir à des compositions pour rendre compte du nombre de pages lues. Ces invitations à recourir à diverses pratiques ont porté fruit et ont montré, entre autres, que les élèves peuvent participer à l'enseignement.

5.2. Limites de la recherche

Il existe une limite incontournable dans la recherche en sciences humaines, celle de la modélisation de la situation qui implique forcément une construction de données. Par conséquent, les résultats de notre recherche sont liés aux conditions spécifiques de notre expérimentation. Dans notre étude, cet aspect est d'autant plus présent que la prise en compte de la culture de l'institution-classe constituait une orientation fondamentale.

L'étendue de l'habitat couvert pour l'enseignement des nombres rationnels en 1re secondaire, selon le programme du premier cycle de l'enseignement secondaire, et le temps imparti pour cette recherche ne nous ont pas permis d'investir tous les objets que l'on souhaitait investir, tels que les techniques de calcul, l'exploitation de la droite, des distances entre deux points, l'estimation, etc.

À cela, il faut ajouter les impondérables absences des élèves et le fait que nous disposions de données plus nombreuses pour certains élèves qui ont participé davantage aux activités soumises, malgré les nombreuses invitations faites aux autres élèves.

Il importe enfin de souligner qu'il n'était pas évident de déterminer, de façon précise, le rôle joué par chacune des situations dans l'évolution des connaissances et des rapports des élèves aux nombres rationnels, puisque leurs effets étaient cumulatifs.

5.3. Retombées de notre thèse dans les domaines de la recherche et de la pédagogie et pistes de réflexion

Malgré les limites dont nous avons fait état précédemment, nous pensons que notre thèse ouvre des portes intéressantes pour l'enseignement/apprentissage des nombres rationnels, tant au niveau de l'élaboration que de l'intégration et la gestion de situations. D'ailleurs, comme en fait état notre cadre conceptuel, peu de recherches se sont intéressées à cette problématique, lorsqu'elle concerne des élèves en difficultés d'apprentissage fréquentant l'école secondaire et, de surcroît, lorsqu'elle priorise une démarche d'acculturation institutionnelle.

Nos résultats donnent accès à une banque d'activités et d'adaptations qui peuvent être utilisées pour l'apprentissage des nombres rationnels, que cet enseignement soit dispensé ou non à des élèves en difficultés d'apprentissage. Par ailleurs, lorsque le travail est effectué avec des élèves rencontrant des difficultés, il semble que la représentation de ces nombres soit une niche à privilégier pour proposer des situations défis et originales qui puissent favoriser une modification des habitus, facilitant ainsi l'évolution et la transformation des connaissances et savoirs des élèves. Il serait à ce propos intéressant lors de futures recherches de répertorier et confronter les adaptations proposées dans la phase 1 (s'informer de l'enseignement possible) aux choix effectués dans la phase 4 (participation à l'enseignement) en fonction du milieu, dans une visée d'insertion écologique des situations, comme nous l'avons vu lors de l'analyse a priori du manuel Perspective (Guay, Hamel et Lemay, 2005, p.286) en méthodologie et la sélection d'adaptations, dans l'analyse des résultats dans la tâche de la population, parmi celles possibles qui ont été proposées

De plus, la consignation de conduites d'élèves associées à diverses situations de résolution de problèmes impliquant des nombres rationnels est loin d'être négligeable et peut être fort utile. Ces données pourraient, d'une part, laisser place à de futures recherches portant sur la construction et l'expérimentation de jeux de tâches pouvant servir d'étayage en situations d'actions.

D'autre part, la recension de plusieurs conduites « inusitées » ne sera pas sans étonner chercheurs et enseignants qui, devant de tels résultats, seront prêts à affirmer qu'il ne s'agit pas d'élèves en difficultés! Cette réalité atteste plutôt du fait que les conduites auxquelles nous avons accès exposent les rapports des élèves à certains objets de savoirs et non leurs potentiels. Elles montrent aussi que ces rapports peuvent être modifiés, que ces conduites « inusitées » pourraient devenir « usuelles », si l'on confrontait plus souvent ces élèves à de vrais défis.

Soulignons enfin que les retombées positives de notre recherche sont tributaires de la démarche méthodologique que nous avons privilégiée, démarche qui, conjuguée aux résultats précédents, conforte l'idée de la viabilité et du potentiel des situations exploitées. D'ailleurs, certaines d'entre elles sont toujours exploitées par l'enseignante trois ans après l'expérimentation.

BIBLIOGRAPHIE

Adjiage, R. (2007). Rationnels et proportionnalité : complexité et enseignement au début du collège. *Petit x*, 74, pp. 5-33.

Aksu, M. (1997). Student performance in dealing with fractions. *Journal of Education and Research, 90 (6),* pp. 375-381

Antibi, A & Brousseau, G. (2000) La dé-transposition de connaissances scolaires. *Recherches en didactique des mathématiques*, 20(1), pp.7-40.

Barallobres, G. (2006). *Enseignement introductif de l'algèbre et validation* (Thèse de doctorat inédite). Université de Montréal.

Barallobres, G. & Lemoyne, G. (2006). L'enseignement des opérations sur les fractions : une visite commentée de manuels québécois et argentins. In M. Lebrun (dir.), *Le manuel scolaire. Un outil à multiples facettes,* Québec : Presses de l'Université du Québec, pp. 159-189.

Barash, A. & Klein, R. (1996). Seventh grade students algorithmic, intuitive and formal knowledge of multiplication and division of non negative rational numbers. Dans L. Puig, & A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2 (pp. 35-42). Valencia, Spain: University of Valencia.

Barbier, J.-M. (1994). *Savoirs théoriques et savoirs d'action.* Paris : Presses universitaires de France.

Baruk, S. (1973). *Échec et maths*. Paris : Éditions du Seuil.

Bednarz, N. (2009). Analysis of a Collaborative Research Project. A Researcher and a Teacher Confronted to Teaching Mathematics to Students Presenting Difficulties. Mediterranean Journal for research in mathematics education, 8 (1).

Bednarz, N. (2002). Pourquoi et pour qui enseigner les mathématiques? Une mise en perspective historique de l'évolution des programmes au Québec au XXème siècle. *ZDM*, 34(4), pp.146-157.

Behr, M., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1993). Rational Numbers: Toward a Semantic Analysis - Emphasis on the Operator Construct. In T. Carpenter, E. Fennema & T. Romberg (Eds.), *Rational Numbers: An Integration of Research* (pp. 13-47). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Bélisle, J.-G. (1999). La résolution de problèmes dans ma classe. Suggestions pour une gestion efficace. *Instantanés Mathématiques*, 35 (4), pp. 5-13.

Bell, A., Fischbein, E. & Greer, B. (1984). Choice of operation in verbal arithmetic problems: The effect of number size, problem structure and context. *Educational Studies in Mathematics,* 15, pp. 129-147.

Bell, A., Swan, M. et Taylor, G.. (1981). Choice of operations in verbal problems with decimal numbers. *Educational Studies in Mathematics,* 12, pp. 399-420.

Bezuk, N. S. & Bieck, M. (1992). Current Research on Rational Numbers and Common Fractions : Summary and Implications for Teachers. In D. T. Owens (Eds), *Research Ideas for the Classroom, Middle Grades Mathematics* (p. 118-136). National Council of Teachers of Mathematics New York : Macmillan Publishing Company.

Bezuk, N. S., & Cramer, K. (1989). Teaching About Fractions: What, When, and How? In P. Trafton (Eds.), National Council of Teachers of Mathematics 1989 Yearbook: New Directions For Elementary School Mathematics (pp. 156-167). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Biddlecomb, B. (2002). Numerical knowledge as enabling and constraining fraction knowledge: an example of the reorganization hypothesis. *Journal of Mathematical Behavior*, 21, pp. 167–190.

Bisaillon, N. (2005) La rédaction, la représentation et la résolution de problèmes arithmétiques, dans une perspective de construction de connaissances chez des élèves du 3e cycle du primaire présentant des difficultés d'apprentissage, Mémoire de maîtrise inédit, Université de Montréal.

Bloch, I. (2006). *Erreurs et obstacles*, d'après un texte de formation de Annie Berté et Jean Lafourcade, IUFM d'Aquitaine, Aquitaine, (août), 10 p., En ligne : *maths.educamer.org/pages/pedagogie/s1zf2.pdf*

Blouin, P. & Lemoyne, G. (2002). L'enseignement des nombres rationnels à des élèves en difficultés d'apprentissage: une approche didactique de la rééducation et ses effets. *Petit x*. 58, pp. 7-23.

Blouin, P. (1993). Dessine-moi un bateau : La multiplication par un et demi. Montréal : Éditions Bande Didactique.

Boirel, R. (1964). Comment résoudre aisément les problèmes de mathématiques, p. 9; Seine-et-Oise : Éditions de culture humaine

Bolon, J. (1996) *l'enseignement des décimaux à la charnière école-collège*, Thèse de Sciences de l'éducation, université Paris-5-Sorbonne.

Bolon, J. (1992). L'enseignement des décimaux à l'école élémentaire. *Grand N*, 52. Repéré à http://www.crdp.ac-grenoble.fr/imel/nx/n52_5.htm

Boulet, G. (1993). *The construction of the unit fraction concept*. (Thèse de doctorat inédite). Université de Montréal.

Bourdieu, P. (1980). *Le sens pratique*. Paris : Editions de Minuit.

Bourdieu P. (1971). Le marché des biens symboliques . *L'Année sociologique*, 22, pp.49-126.

Bourdieu P. & Passeron, J.-C. (1970). *La reproduction, éléments pour un système d'enseignement*. Paris : Editions de Minuit.

Bowen, F., Desbiens, N., Rondeau, M. & Ouimet, I. (2000). La prévention de la violence et de l'intimidation en milieu scolaire. *In* F. Vitaro et C. Gagnon (éds.), *Prévention des problèmes d'adaptation chez les enfants et les adolescents* (pp. 165-229). PUQ.

Briand, J. & Chevalier, M.-C. (1995). *Les enjeux didactiques dans l'enseignement des mathématiques*. Paris: Hatier

Brousseau, G. (2008) *L'observation des pratiques de classes*. Repéré à visa.inrp.fr/.../premieres-notes-sur-lobservation-des-pratiques-de-classe.pdf

Brousseau, G. (1998).*Théorie des situations didactiques* (Textes rassemblés et préparés par Nicolas Balacheff, Martin Cooper, Rosamund Sutherland, Virginia Warfield). Grenoble: La pensée sauvage.

Brousseau, G. (1986), Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), pp. 33-115.

Brousseau, G. (1980). L'échec et le contrat. *Recherches : La politique de l'ignorance*, 41, pp.177-182.

Brousseau, N. & Brousseau, G. (1987). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*. Bordeaux, France : IREM de Bordeaux.

Brousseau, G., Brousseau, N., & Warfield, V. (2008). Rationals and decimals as required in the school curriculum. Part 3. Rationals and decimals as linear functions. *Journal of Mathematical Behavior*, *26*, pp.153-176.

Brousseau, G., Brousseau, N., & Warfield, V. (2007). Rationals and decimals as required in the school curriculum. Part 2. From rationals to decimals. *Journal of Mathematical Behavior*, *26*, pp.81–300.

Brousseau, G., Brousseau, N., & Warfield, V. (2004). Rationals and decimals as required in the school curriculum. *Journal of Mathematical Behavior*, *23*, pp.1–20.

Brousseau, G. & Centeno J. (1991). Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant. *Recherches en didactiques des mathématiques,* 11(2.3), 167-210.

Brousseau, G. & Pérès, J. (1981). *Étude d'un enfant en difficulté en mathématiques*. « Le cas Gaël ». Université de Bordeaux I : IREM.

Brousseau, G. & Warfiel, V. (2002). Le cas de Gaël. *Les cahiers du laboratoire Liebniz*, 55. Repéré à http://math.unipa.it/~grim/Gael_broussea_fr.pdf

Brunet, J.- P. (1999). *Pour une définition des difficultés d'apprentissage : du caractère déclaratif à la modalité opérationnelle*. www.adaptationscolaire.org/.../textes_diap_brunet2.pdf

Bulgar, S. (2003) Children's sense-making of division of fractions. *The Journal of Mathematical: Behaviors:* Special Issue on Fractions, Ratio and proportional Reasoning, Part B. 22(3), pp.319-334.

Carpenter, T., Moser, J. (1983). *The acquisition of addition and subtraction concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.),*. Acquisition of mathematics: Concepts and processes. (pp. 7-44). New York: Academic Press.

Centeno, J. (1995). *La mémoire didactique de l'enseignant*. Thèse Posthume. Bordeaux : LADIST.

Charnay, R. (2005). *Fraction et décimaux*. Repéré à www.ia49.ac-nantes.fr/

Charnay, R. (1998). De l'école au collège, les élèves et les mathématiques. *Grand N*, 62, pp.35-46.

Charnay, R., Douaire, J., Guillaume, J-C. & Valentin, D. (1999). Apprentissages numériques et résolution de problèmes – Cours moyen (deuxième année). Paris : Hatier.

Charnay R. & Mante M. (1992). De l'analyse d'erreur en mathématiques aux dispositifs de re-médiation. *Repères-IREM*. 7, 3-31.

Chevallard, Y. (1994). Les processus de transposition didactique et leur théorisation. In G. Arsac, Y. Chevallard, J.-L. Martinand, A. Tibergien et N. Balacheff (Éds.) *La transposition didactique à l'épreuve*, (pp. 135-180). Grenoble : Editions La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1990). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Troisième partie : voies d'attaque et problèmes didactiques. *Petit x*, 23, pp. 5-38.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie : perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x*, 19, pp. 45-75.

Chevallard, Y., Bosch, M. & Gascon, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Barcelona: ICE-Horsori.

Chevallard, Y. & Julien, M. (1989). *L'enseignement des fractions au collège. Ingénierie, recherche et société*, Marseille : Publications de l'IREM d'Aix-Marseille.

Chopin M.-P. (2005). – L'hétérogénéité : quels critères, quelles fonctions ? » Travaux dirigés, 13, Ecole d'été de didactique des mathématiques, thème 2 : Etude d'une question vive : *Différenciations et hétérogénéités.* Sainte-Livrade, 18-26 août 2005.

Clarke, D. M. (2006). Fractions as division: The forgotten notion? *Australian Primary Mathematics Classroom*, 11(3), pp. 4-10.

Comin, E. (2002). L'enseignement de la proportionnalité à l'école et au collège. *Recherches en didactique des mathématiques*, 22/2.3, pp.135-182.

Comiti, C. et Neyret, R. (1979). À propos des problèmes rencontrés lors de l'enseignement des décimaux en classe de cours moyen. *Grand N*, 18, pp. 5-20.

Confrey, J. (1994). Splitting, similarity, and rate of change: A new approach to multiplication and expo- nential functions. In G. Harel & J. Confrey (Eds.) The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics (pp. 291-330). Albany, NY: SUNY Press.

Confrey and Scarano, 1995. Confrey, J., & Scarano, G. H. (1995). Splitting re-examined: results from a 3-year longitudinal study of children in grades three to five. In: D. T. Owens, M. K. Reed, & G. M. Millsaps (Eds.), *Proceedings of the seventeenth annual meeting of the North American chapter of the international group for the psychology of mathematics education* (pp. 421–426). Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Conne, F. (2003). Interactions de connaissances et investissement de savoir dans l'enseignement des mathématiques en institutions et classes spécialisées, In C. Mary et S. Schmidt (dir.), *La spécificité de l'enseignement des mathématiques en adaptation scolaire*, *Éducation et francophonie*, 31(2), Revue électronique

Conne, F. (1999). Faire des maths, faire faire des maths, regarder ce que ça donne. *In* G. Lemoyne et F. Conne (éds.), *Le cognitif en didactique des mathématiques* (pp. 31-69). Montréal : Presses de l'Université de Montréal.

Conne, F. (1984). Calculs numériques et calculs relationels dans la résolution de problèmes d'arithmétique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 5(3), pp.115-138.

Conne F., Favre J.-M., Giroux J. (2006). Répliques didactiques aux difficultés d'apprentissage en mathématiques : le cas des interactions de connaissances dans l'enseignement spécialisé. In: P.-.A. Doudin et L. Lafortune (eds), Intervenir auprès d'élèves ayant des besoins particuliers, Presses université du Québec, chap. 6, pp. 118-141.

Cramer, K., Wyberg, T., & Leavitt, S. (2009). *Fraction Operations and Initial Decimal Ideas.* [Companion module to RNP: Fraction Lessons for the Middle Grades]. Repéré à http://www.cehd.umn.edu/rationalnumberproject/rnp2.html

Cramer, K. A, Post, T. R. & del Mas, R. C. (2002) Initial Fraction Learning by Fourth- and Fifth-Grade Students: A Comparison of the Effects of Using Commercial Curricula With the Effects of Using the Rational Number Project Curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education.* 33 (2), pp. 111-144.

Dahan-Dalmedico, A. & Peiffer, J. (1985). *Une histoire des mathématiques – Routes et dédales.* Paris : Editions du Seuil.

Davis, B. (2005). Trois attitudes dans la recherche en éducation : autour de « l'explicite », de « l'implicite » et de « la complicité ». *Revue des sciences de l'éducation*, 31(2), pp. 397-416.

Deblois, L. & Giroux, J. (1998). État d'avancement de la connaissance. Difficultés d'apprentissage en mathématiques. Repéré à http://adapt-scol-franco.educ.infinit.net/themes/dima/presdima.htm.

De Champlain, D., Mathieu, P., Patenaude, P. & Tessier, H. (1996). *Lexique mathématique, enseignement secondaire*. 2e édition, Montréal : Les éditions du triangle d'or.

de Rosnay, J. (1994). Éducation, écologie et approche systémique, Actes du Congrès de l'AGIEM, Larochelle. Repéré à http://csiweb2.cite-sciences.fr/derosnay/articles/EduEco.htm

Desbiens, N. & Bowen, F. (2002). *Le développement de la compétence sociale chez les enfants : un moyen d'intervention auprès des élèves qui présentent des difficultés d'adaptation en milieu scolaire*. 27e Congrès de l'ACFAS.

Desgagné, S., Bednarz, N., Couture, C., Poirier, L. & Lebuis, P. (2001). L'approche collaborative de recherche en éducation : un rapport nouveau à établir entre recherche et formation. *Revue des sciences de l'éducation*, 27(1), pp. 33 à 64.

Desjardins, M. & Hétu, J.-C. (1974). *L'activité mathématique dans l'enseignement des fractions*, Québec : Presses de l'Université de Montréal.

Douady, R (1986), Jeux de cadres et dialectique outil-objet, Recherches en didactique des mathématiques, Vol. 7.2, La Pensée Sauvage, Grenoble, 5-31.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: registre sémiotique et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.

Empson, S.B.(2003). Low-performing students and teaching fractions for understanding: An interactional analysis, *Journal for Research in Mathematics Education,* 34,pp. 305–343.

Empson, S.B., Junk, D., Dominguez, H.& Turner, Er. (2006). Fractions as the Coordination of Multiplicatively Related Quantities: A Cross-Sectional Study of Children's Thinking. *Educational Studies in Mathematics,* 63(1), pp1-28.

English, L., & Halford, G. (1995). *Mathematics Education: Models and Processes*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Evamath (1994). *Réflexions et activités CM2-6ème*. Nice : CRDP

Fayol, M. et Abdi, H. (1986). Impact des formulations sur la résolution de problèmes additifs chez l'enfant de 6 à 10 ans. *European Journal of Psychology of Education*, 1(1), pp. 41-58.

Fischbein, E., M. Deri, M. Nello, and M. Marino. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal of Research in Mathematics Education,* 16(1), pp.3-17.

Fuchs, L.S., Powell, S.R., Seethaler, P.M., Cirino, P.T., Fletcher, J.M., Fuchs, D., Hamlett, C.L., & Zumeta, R.O. (2009). Remediating number combination and word problem deficits among students with mathematical difficulties: A randomized control trial. *Journal of Educational Psychology,* 101, pp.561-576.

Giroux, J. (2006). *Le plaisir de faire des mathématiques, de les enseigner et de les apprendre.* http://www.adaptationscolaire.org/themes/JacintheGiroux.pdf.

Giroux J. & René De Cotret S. (2003). – Le temps didactique dans trois classes de secondaire I (doubleurs, ordinaire, forts). In C. Mary et S. Schmidt (dir.), *La spécificité de l'enseignement des mathématiques en adaptation scolaire*, *Éducation et francophonie*, 31(2), Revue électronique

Godot, K. (2009). Situations recherche pour la classe. Des outils pour donner du sens à l'activité de recherche en mathématiques au fil de la scolarité, in Actes du colloque Espace Mathématique Francophone « L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés, Université de Sherbrooke (2006).

Grisvard, C. & Léonard, F. (1981). Sur deux règles implicites utilisées dans la comparaison des nombres décimaux positifs. *Bulletin de l'APMEP*, 327.

Guay, S, Hamel, J.-C. & Lemay, S. (2005). *Perspective mathématique A*, 1 cycle (1 partie). Montréal : Éditions Grand Duc.

Guay, S., Hamel, J-C. & Lemay, S. (2003) *Clicmaths,* 3e cycle. Manuel de l'enseignant et de l'enseignante, Manuel B, vol.1. Laval : Éditions HRW.

Hackenberg, A. J., & Tillema, E. S. (2009). Students' whole number multiplicative concepts: A critical constructive resource for fraction composition schemes. *Journal of Mathematical Behavior 28*, pp.1-18.

Hart, K.M. (1981). *Children's Understanding of mathematics*, Londres : John Murray, pp. 11-16.

Hart K.M. (1980). *Secondary school children's understanding of mathematics: a report of the mathematics component of the concepts in secondary Mathematics and Science Programme.* London : Chelsea College of Science and Technology.

Hasemann, K. (1981) On difficulties with fractions. *Educational Studies in Mathematics,* 12, pp. 71-87.

Heller, P., Post, T., Behr, M. & Lesh, R (1990). Qualitative and numerical reasoning about fractions and ratios by seventh and eighth grade students. *Journal for Research in Mathematics Education,* 21, pp.388-402.

Hiebert, J. & Behr, M. (1988). *Number concepts and operations in the middle grades*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Hiebert, J. & Wearne, D. (1986). *Procedures over concepts: The acquisition of decimal number knowledge. In J. Hiebert (Ed.),*. Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics. (pp. 199-223). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Hiebert, J. & Wearne, D. (1985). A model of students' decimal computation procedures. *Cognition and Instruction*, 2, pp.175-205.

Hilgers, M. (2006). Liberté et habitus chez Pierre Bourdieu., *EspacesTemps.net. Repéré à* http://espacestemps.net/document2064.html

Hinshaw, S. *P.* (1992). Externalizing Behavior Problems and Academic Underachievement in Childhood and Adolescence: Causal Relationships and Underlying Mechanisms. *Psychological bulletin*, 111(1) , pp. 127-155.

Houdement C. (1999). Le choix des problèmes pour la "résolution de problèmes". *Grand N*, 63, pp. 59-76.

Houssart, J. (2002). Simplification and Repetition of Mathematical Tasks: A Recipe for Success or Failure? *Journal of Mathematical Behavior*, 21(2), pp. 191–202.

Huberman, M. & Miles, M. (2003). *Analyse des données qualitatives* (2e ed.). Bruxelles : De Boeck.

Ifrah, G. (1994). *Histoire universelle des chiffres*. Poitiers : Robert Lafont.

Irwin, K. (2001). Using Everyday Knowledge of Decimals to Enhance Understanding. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(4), pp. 399- 420.

Izorche, M.L. (1977). Les réels en classe de Seconde. *Mémoire de DEA, Université Bordeaux I*.

Janosz, M. & Duval, A. (2001). *Prévenir la violence à l'école par une intervention sur l'environnement socioéducatif : théorie, outil et méthode*. Communication présentée dans le cadre de la *1ère Conférence Mondiale sur la violence à l'école et les politiques publiques.* Paris.

Joshua S. & Dupin JJ. (1993). *Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques.* Paris : PUF.

Julo J. (2002). Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes. *Grand N,* 69, pp. 31-52.

Julo, J. (1995). *Représentation de problèmes et réussite en mathématiques – Un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement*. Rennes : Presses Universitaires de Rennes.

Kamii C. (1990). *Les jeunes enfants réinventent l'arithmétique*. Berne: Éditions Peter Lang.F

Kerslake, D. (1986). Fractions: Children's Strategies and Errors, London: NFER-Nelson.

Kieran, C., Boileau, A. & Garançon, M. (1996) Introducing algebra by means of a technology-supported, functionnal approach. *In* Approaches to Algebra Perspectives for Reaserch and Teaching. Chap. 19 Mathematics Education library Kluwer Academic Publishers. 37 pages.

Kieren, T.E. (1995). Creating spaces for learning fractions. dans J. T. Sowder & B.P. Schappelle (Eds.), *Providing a foundation for teaching mathematics in the middle grades*. Albany: State University of New York Press, p. 31-65.

Kieren, T.E. (1994). Reflections and interactions on rational number thinking, learning and teaching. dans D. Kirshner (dir.), Proceedings of the 16th annual meeting of the North American chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Baton Rouge: Louisiana State University, vol. 1, p. 53-56.

Kieren, T.E. (1992). Rational and fractional numbers as mathematical and personal knowledge. dans G. Leinhardt, R. Putnam et R.A. Hattrup (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching*. Hillsdale, NJ: Erlbaum, p. 323-371.

Kieren, T. E. (1988). Personal knowledge of rational numbers. In J. Hierbert and M. Behr (Eds*.) Numberts concepts and operation in the middle grade*, Hillsdale, NJ : Erlbaum : Reston, FA : National Council of Teachers of Mathematics, pp. 1-18.

Kieren, T. E. (1980). Knowing rational numbers : Ideas and symbols, in M. M. Lindquist (Ed*) Selected issues in mathematics education* . Berkely, CA : Mc Cuchan.

Krikorian, N. (1996). *Compétences d'élèves de fin primaire concernant des aspects des fractions considérés essentiels et sur lesquels l'enseignant de secondaire 1 devrait construire sons enseignement des nombres rationnels* (Mémoire de maîtrise en mathématiques inédit). Université du Québec à Montréal)

Lachance, A. & Confrey, J. (2002). Helping Students Build a Path of Understanding from Ratio and Proportion to Decimal Notation. *Journal of Mathematical Behavior*, 20(4), pp. 503-526.

Lancup, P. (2005). Situations d'enseignement sur les fractions à l'intention d'élèves de secondaire 1 présentant des difficultés d'apprentissage (Mémoire de maîtrise inédit). Université de Montréal.

Leclerc, C. (2004). *Perspective Mathématique*, Cahier d'exercices A, 1er cycle du secondaire. Laval : Éditions Grand Duc.

Lemoyne, G. et Bisaillon, N. (2006). Liberté, engagement et audace dans la conception et la réalisation de recherches sur l'enseignement des mathématiques dans des classes intégrant des élèves en difficultés. Communication au congrès de L'AQETA, Montréal

Lemoyne, G. et Bisaillon, N. (2006). Dispositifs facilitant l'engagement cognitif et la construction de connaissances en arithmétique et en algèbre des élèves présentant des difficultés d'apprentissage. 31e Congrès annuel de l'AQETA

Lemoyne, G., Bisaillon, N. (2005). Conception et réalisation de recherches sur l'enseignement des mathématiques dans des classes intégrant des élèves en difficulté, in J. Giroux et D. Gauthier (Éds.) *Les difficultés d'apprentissage en mathématiques*, Éditions Bande didactique, Presses de l'Université du Québec à Trois-Rivières.

Lemoyne, G. & Lessard, G. (2003). *Les rencontres singulières entre les élèves présentant des difficultés d'apprentissage en mathématiques et leurs enseignants*, In C. Mary et S. Schmidt (dir.), *La spécificité de l'enseignement des mathématiques en adaptation scolaire*, *Éducation et francophonie*, 31(2), Publication électronique

Lemoyne, G. (1993). La quête de sens dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, *dans:* P. Jonnaert et Y. Lenoir (dir.): *Sens des didactiques et didactique du sens.* Éditions du CRP, Université de Sherbrooke, pp. 263-288.

Lemoyne, G., Conne, F.. & Brun, J. (1993). Du traitement des formes à celui des contenus d'écritures littérales : une perspective d'enseignement introductif de l'algèbre. *Recherches en Didactiques des Mathématiques,* 13 (3), pp. 333-384.

Ma, L. (1999). Knowing and Teaching elementary Mathematics. London: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Mack, N.K. (2001). Building on informal knowledge through instruction in a complex content domain: partitioning, units, and understanding multiplication of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(3), pp.267-295.

Mack, N. K. (1993). Learning rational numbers with understanding: The case of informal knowledge. In T. Carpenter, E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research* (pp. 85-106). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Mack, N. K. (1990). Learning fractions with understanding: Building on informal knowledge. Journal for Research in Mathematics Education, 21, pp.16-32.

Magone, M.E., Wang, N., Cai, J. & Lane, S. (1993). An analysis of the cognitive complexity of QUASAR's performance assessment tasks and their sensitivity to measuring changes in students' thinking, Paper presented in the symposium *Assessing Performance Assessments: Do They Withstand Empirical Scrutiny?* at the Annual meeting of the American Educational Research Association, Atlanta, GA.

Malara, N. (2002). Innovative paths for approaching rationnal numbers from the structural point of view. Proceedings of the International Conference on *Mathematics for Living.* Jordan, November 18-23, 2000.

Mazzocco, M. & Devlin, K. (2008). Parts and 'holes': gaps in rational number sense among children with vs. without mathematical learning disabilities. *Developmental Science*, 11(5), pp 681–691.

Mercier, A. (1998). *La participation des élèves à l'enseignement.* Recherches en didactique des mathématiques, 18(3), 279-310. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Mercier, A. (1995a). *La biographie didactique d'un élève et les contraintes temporelles de l'enseignement.* Recherches en didactique des mathématiques, 15/1 (43), 97-142.

Mercier, A. (1995b). Le traitement public d'éléments privés du rapport des élèves aux objets de savoir mathématiques. *In* G. Arsac, J. Gréa, D. Grenier et A. Tiberghien (éds.), *Différents types de savoirs et leur articulation* (p. 145-169). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport (2006a) Programme de formation de l'école québécoise. Enseignement secondaire, premier cycle.

Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport (2006b) Programme de formation de l'école québécoise. Enseignement primaire, Troisième cycle.

Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport (2006c). Indicateurs de l'éducation-Édition 2006. Partie 2.7. Le retard scolaire au primaire et au secondaire général-secteurs des jeunes. En ligne : http://mels.gouv.qc.ca/Stat/indic05/F2_7_2005.pdf

Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport (2006d). *Évaluation de l'application du Programme de formation de l'école québécoise - enseignement primaire.* Table de pilotage sur le renouveau pédagogique

Ministère de l'Éducation du Québec (2004). *Bulletin statistique sur la réussite et le taux dediplomation.* http://www.meq.gouv.qc.ca/sanction/epreuv2003/Epreuve2003.pdf

Ministère de l'Éducation du Québec. (2003). *Programme de formation de l'école québécoise (version provisoire).* Enseignement secondaire, premier cycle.

Ministère de l'éducation du Québec (2000). *Élèves handicapés ou élèves en difficulté d'adaptation ou d'apprentissage : Définitions*, Direction de l'adaptation scolaire et des services complémentaires, Québec.

Ministère de l'Éducation du Québec. (1999). Une école adaptée à tous ses élèves : Politique de l'adaptation scolaire, Québec.

Montague, M., Warger, C. & Morgan, T. H. (2000). *Solve it. Strategy Instruction to Improve Math. P.S.* Learning Disabilities Research and Practice, *15*(2), pp. 110-116.

Morisette, S. (2006). Matériel didactique animé pour l'enseignement des opérations sur les fractions à des élèves de secondaire 1 en adaptation scolaire, Mémoire de maîtrise inédit, Université de Montréal.

Moseley, B. & Okamoto, Y. (2008) Identifying Fourth Graders' Understanding of Rational Number Representations: A Mixed Methods Approach. *School Science and Mathematics*, 108(6), pp. 238-250.

Moseley, B. (2005). Students' early mathematical representation knowledge: the effects of emphasizing single or multiple perspectives of the rational number domain in problem solving, Educational Studies in Mathematics, 60 (1), pp.37-69.

Moskal, B.M. & Magone, M.E. (2001) Making sense of what students know: Examining the referents, relationships and modes students displayed in response to a decimal task. Educational studies in mathematics, 43, pp. 313-335.

Moss, J. et Case, R. (1999). Developing Children's Understanding of the Rational Numbers: A New Model and an Experimental Curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30 (2), pp. 122- 147.

Mounier, P. (2001). *Pierre Bourdieu, une introduction*. Paris : Pocket.

Mullis, I.V.S., Martin, M.O., & Foy, P. (with Olson, J.F., Preuschoff, C., Erberber, E., Arora, A., & Galia, J.). (2009). International Mathematics Report: Findings from IEA's Trends in International Mathematics and Science Study at the Fourth and Eighth Grades. Chestnut Hill, MA: Boston College.

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Gonzales, E. J., & Chrostowski, S. J., (2004). TIMSS 2003 International Mathematics Report. Findings From IEA's Trends in International Mathematics and Science Study at the Fourth and Eighth Grades. Chestnut Hill, MA: Boston College.

National Council of Teachers of Mathematics (1964). Rational Number. Document. Traduction effectuée par l'AMQ.

Novillis, C. (1976) An Analysis of the Fraction Concept into a Hierarchy of Selected Subconcepts and the Testing of the Hierarchical Dependencies Source: Journal for Research in Mathematics Education, 7(3), pp. 131-144.

OCDE (1998). Venir à bout de l'échec scolaire. Paris.

Olive, J. (1999). From fractions to rational numbers of arithmetic: A reorganization hypothesis. Mathematical Thinking and Learning, 1, pp. 279-314,

Oliveira, I. (2009). La proportionnalité à l'école : Qu'enseigne t-on? Qu'apprend-on? Montréal: Editions bandes didactiques.

Owens, D.T. (1993). *Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics.* New York: Macmillan.

Payne, J. N. (1976). *Review of research on fractions*. In Number and Measurement: Papers from a Research Workshop (Ed) Lesh, R. A. Ohio, USA: ERIC/SMEAC.

Perrin-Glorian, M.-J. (1992) Aires de surfaces planes et nombresdécimaux. Questions didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM-6ème .

Perrin-Glorian, M.-J. (1986). Représentations des fractions et des nombres décimaux chez des élèves de CM2 et de collège. Petit x, 10, 5-29.

Poirier, L. (1994). Conceptual and Developmental Analysis of Mental Models: An Example with Complex Change Problems. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association. New Orleans.

Post, T. (1981). Fractions: Results and Implications from National Assessment. The *Arithmetic Teacher,* 28(9), pp.26-31.

Post, T. & Carmer, K. A. (1987). Reserach into practice : Children's strategies in ordering rational numbers. *Arithmetic Teacher*, 35(2), pp. 33-35.

Prediger, S (2008). The relevance of didactic categories for analysing obstacles in conceptual change: Revisiting the case of multiplication of fractions. Learning and Instruction, 18, pp. 3-17.

Pressiat, A. (2003). Difficultés dans l'étude des nombres décimaux et rationnels au collège

Reuter, Y. & Perrin-Glorian, M.-J. (2006.). *Les méthodes de recherche en didactique*. Lille : Presses universitaires du Septentrion.

Riley, M. S., Greeno, J. G., & Heller, J. I. (1983). Development of children's problem-solving ability in arithmetic. In H. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking* (pp. 153-196). New York : Academic Press.

Roditi, E. (2008), La comparaison des nombres décimaux, comprendre les difficultés et aider à les surmonter, *Bulletin de l'APMEP*, n°477, p. 479-484.

Roditi, E. (2007a). Enseigner la comparaison des décimaux : Comprendre les procédures à l'œuvre et aider les élèves en difficulté. Actualité de la Recherche en Education et en Formation, Strasbourg. Repéré à www.congresintaref.org/actes_pdf/AREF2007_Eric_RODITI_209.pdf

Roditi, E. (2007b), Aider les élèves à apprendre à comparer des décimaux, *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation (NCRÉ)*, 10(1), pp. 5-26.

Roditi, E. (2005) *Les pratiques enseignantes en mathématiques ; entre contraintes et liberté pédagogique*. Paris : L'Harmattan.

Rouche, N. (1998). *Pourquoi ont-ils inventé les fractions ?* Paris : Ellipses.

Sallaberry, J.-C. (2002). Dynamique des représentations d'apprentissage des concepts scientifiques. *In* Sensevy, G. (dir.), *L'année de la recherche en sciences de l'éducation. Des représentations* (pp. 19-65). France : AFIRSE Matrice.

Sarrazy, B. (2003). Le problème d'arithmétique dans l'enseignement des mathématiques à l'école primaire de 1887 à 1990. *Carrefours de l'éducation*, 15, pp.83-101.

Sarrazy, B. (2002). Les hétérogénéités dans l'enseignement des mathématiques. *Educational Studies in Mathematics,* 49(1), pp. 89-117.

Sarrazy, B. (2001). Les interactions maître-élèves dans l'enseignement des mathématiques : Contribution à une approche anthropo-didactique des phénomènes d'enseignement. *Revue Française de Pédagogie*. 2001. n° 136. Pp.117-132.

Sarrazy B. (1996). *La sensibilité au contrat didactique* : Rôle des Arrière-plans dans la résolution de problèmes d'arithmétique au cycle trois, Thèse de doctorat, Université de Bordeaux 2.

Schmidt. S., Tessier, O., Drapeau, G., Lachance, J., Kalubi, J.C. & Fortin, L. (2003). *Recension des écrits sur le concept d' «élèves à risque» et sur les interventions éducatives efficaces.* Rapport de recherche présenté au fonds de recherche sur la société et la culture et au ministère de l'éducation. Repéré à http://www.mels.gouv.qc.ca/dassc/dassc/pdf/rap-eleve-risque.pdf

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, FL: Academic Press.

Schonert-Reichl, K. (2001). Programme pancanadien de recherche en éducation – PPRE. L'enfance et la jeunesse à risque : rapport du colloque. Toronto, Ontario : Conseil des statistiques canadiennes de l'éducation.

Schubauer-Leoni (2002). Didactique comparée et représentations sociales *In* Sensevy, G. (dir.), *L'année de la recherche en sciences de l'éducation. Des représentations* (pp. 127-149). France : AFIRSE Matrice.

Sensevy, G. (1998). *Institutions didactiques. Étude et Autonomie à l'école élémentaire*. Paris : Presses Universitaires de France.

Sharp, J., & Adams, B. (2002). Children's constructions of knowledge for fraction division after solving realistic problems. *The Journal of Educational Research,* 95, pp.333–347.

Slavit, D. (1999). The role of operation sense in transitions from arithmetic to algebraic thought. *Educational Studies in Mathematics, 37(3)*, pp. 251-274.

Steff, L.(2002). A new hypothesis concerning children's fractional knowledge*. Journal of Mathematical Behavior*, 20(3), pp. 267-307.

Stegen, P. & Daro, S. (2007). L'enseignement des rationnels à la liaison primaire-secondaire. Repéré à : http://www.hypo-these.be/spip/spip.php?rubrique40

Tardif, J. & Presseau, A. (2000). *L'échec scolaire en Amérique du Nord : un phénomène insidieux pour un grand nombre d'enfants et d'adolescents.* Revue Française de Pédagogie, 130, pp. 89-105.

Tirosh,D. (2000). Enhancing Prospective Teachers' Knowledge of Children's Conceptions: The Case of Division of Fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(1), pp. 5-25

Trudel, M, Puentes-Neuman, G. & Ntebutse, J.- G. (2002). Les conceptions contemporaines de l'enfant à risque et la valeur heuristique du construit de résilience en éducation. *Revue Canadienne des sciences de l'éducation*, 27(2-3), pp.153-173.

Tzur, R. (2000). An integrated research on children's construction of meaningful, symbolic, partitioning-related conceptions, and the teacher's role in fostering that learning. *Journal of Mathematical Behavior, 18,* 2, 123-147.

Vance, J.H. (1998). Number operations from an algebraic perspective. *Teaching children mathemati*cs, 4(5), 282-285.

Van der Maren, J.M. & Poirie, L. (2007). Produire des savoirs en pédagogie avec les enseignants. *In* Dupriez et Chapelle (dir.), Enseigner (pp.189-201), Presses Universitaires de France : France.

Vergnaud, G. (1999) A quoi sert la didactique ? *Sciences Humaines* (La dynamique des savoirs). Numero hors série, 24, pp. 48-52.

Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 10(2/3), pp. 133-170

Vergnaud G. (1983). Multiplicative Structures. In Lesh R., Landau M. (Ed.). *Acquisition of mathematics concepts and processes*, Academic Press, pp. 127-174.

Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems, *In* T. P. Carpenter, J. M. Moser & T. A. Romberg (éds.), *Addition and Subtraction : a cognitive perspective* (pp. 39-59). New Jersey: Hillsdale Erlbaum.

Vergnaud, G. (1981). *L'enfant, la mathématique et la réalité*. Berne : Peter Lang.

Veyrunes, P., Durny, A., Flavier, E. & Durand, M. (2005). L'articulation de l'activité de l'enseignant et des élèves pour résoudre un problème de mathématiques à l'école primaire : une étude de cas Revue des sciences de l'éducation, 31 (2), pp. 471-489. Repéré à http://id.erudit.org/iderudit/012765ar

Viau, R. (1999). *La motivation dans l'apprentissage du français.* St-Laurent, Québec : ERPI.

Viau, R. (1994). *La motivation en contexte scolaire*. Saint-Laurent, Québec : ERPI.

Watanabe, T. (2002). Representations in teaching and learning fractions. *Teaching Children Mathematics*, *8*, pp. 457-463.

Wong, M. & Evans, D. (2008). Fractions as a measure. In Goos M, Brown R, Makar K *Navigating Currents and Charting Directions. Proceedings of the 31st Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 597–603). Adelaide, 28 June-1 July 2008.

Xin, Y.P., Jitendra, A. Deatline-Buchman, A., Hickman, W. & Bertram, D.(2002). A comparaison of two instructional approaches on mathematical word problem solving by students with learning Problems. Inde : Purdue University.

ANNEXES

Annexe 1

Exemple de canevas de planification de l’enseignante
et d’adaptation des chercheurs

PARTIE 2:

L'addition et la soustraction de fractions
D'autres opérations de fractions
La multiplication et la division de décimaux
Les diagrammes circulaires
L'introduction à l'algèbre
Les frises et les transformations géométriques
Les dallages et les transformations géométriques
L'aire des triangles et des quadrilatères

PLANIFICATION PARTIE 2
DOSSIER 1
J'AI UN RÊVE
LES FRACTIONS ÉQUIVALENTES

Volume

p. 105-106-107 : Faire avec eux

Notes de cours :
Fractions équivalentes et réduction de fraction

Révision numérateur vs dénominateur

Pour modifier une fraction, nous pouvons :
1- Multiplier le numérateur et le dénominateur par une même quantité :
Ex. : $\frac{3 \times 2}{4 \times 2} = \frac{6}{8}$
2- Diviser le numérateur et le dénominateur par une même quantité :
$\frac{24 \div 2}{30 \div 2} = \frac{12}{15}$

Réduire une fraction consiste en la rendre irréductible. La majorité du temps, il te faudra diviser par 2, par 3, par 5 ou par 7.
$\frac{24 \div 2}{30 \div 2} = \frac{12 \div 3}{15 \div 3} = \frac{4}{5}$

CAHIER PERSPECTIVE

32-33

COMPLÉMENTS

p.29-(30)

DUO TANG

p.1, 4

PLANIFICATION PARTIE 3
DOSSIER 2
UN PROBLÈME UNIVERSEL
LA COMPARAISON DE FRACTIONS

Volume

p. 242-243 (Préparation) : établir le rapport entre la circonférence et le rayon
3 fois et 1/8 ; 3 fois et 13/81 ; 3 fois et 177/1250; 3 16/113 // 1/8 ..13*8 = 104...
donc 1/8 = 13/104...donc 13/81> 1/8 = 13/104 = 177/1416
Le choix des fractions n'est pas évident à comparer et à « démontrer » le bien fondé des apprentissages...la validité des connaissances enseignées.

Exemple de questions que l'on pourrait ajouter :
- Comment pourriez-vous être plus précis?
- Pensez à la grandeur possible des rayons qu'ils ont utilisés?

Adaptation suggérée soit en entrée soit après activité 1:
« Placer ces fractions en ordre croissant: 3 /7; 5/9; 1/2 ; 255/510; 7/35; 171/340; 3/8; 6/11, 7/8, 251/504, 8/9» (Lemoyne, 1993) **et ajouter des nombres décimaux.**

p. 282 Activité 1 : La course de la grande aiguille
1er temps : 2/3; 7/10; 5/6; 5/12; 7/12
5/6 > 5/12   7/10> 7/12 (même numérateur)
aussi 5/6 près de 1...plus grand....5/12...un peu plus petit que ½... (comparaison à 1 et ½)
7/10 et 7/12…plus grand que ½
5/6 > 7/10 > 7/12 > 5/12
2/3 et 5/6 près de 1 ....mais 2/3 est plus petit car la partie manquante est plus grande (déduction ou dénominateur commun)
2/3 (4/6 = ½ + 1/6) et 7/10 (= ½ + 2/10 = ½ + 1/5)

5/6 > 2/3 > 7/10 > 7/12 > 5/12

Adaptations suggérées :
Faire avec et sans contexte : après avec contexte pour voir si le recours au contexte évoquera le dénominateur commun 60.

2e temps :
23/60; 5/12; ¾; 1/6 ; 3/5
3/5 ...> ½ > 23/60
3/4   5/12
                    1/6

¾ > 3/5 > 1/6 > 23/60 >5/12

Le choix des nombres (23/60, 5/12, ..) ne justifie pas l'avantage d'exploiter d'autres stratégies...le recours au dénominateur commun est simple et efficace...malgré l'intention selon laquelle

> *« les élèves sont invités à recourir à un processus mental et efficace...Il existe plusieurs façons de comparer les fraction sans nécessairement utiliser des fractions ayant des dénominateurs communs...différentes façons des comparer les fraction seront présentées et, selon les fractions, les élèves devront opter pour celles qui sont les plus efficaces.* » (p.282A, Guide de l'enseignant)

Adaptation suggérée:
Dans le 2^e temps, ajouter les nombres 0,500001 ; 141/240

p. 283 Activité 2 : À bout de course
« Le contexte (distance) favorise l'utilisation des nombres décimaux [...] Les élèves ***doivent*** *donc transformer en notation décimale les fractions inscrites dans le tableau pour pouvoir ensuite les comparer facilement »(p.283A).* Va à l'encontre des propos précédents d'efficacité : les fractions 1/9, 1/7 et 1/3 se compare facilement (même numérateur) 1/9 <1/7 <1/3 car comprend le même nombre de parties mais dans certains cas (quand le dénominateur est plus grand) les partie sont plus petites. Il reste 3/8 et 2/5 ...tout près de ½ ...3/8 = 4/8 – 1/8 = ½ - 1/8....2/5 = 4/10...2/5 = ½ -1/10...4...bref 3/8 < 2/5 ...1/3 et 3/8..1/3 = 3/9 (plus petit que 3/8) Donc
1/9 <1/7 <1/3 < 3/8 < 2/5

- Voir avec eux la formulation
- Leur demander, dès le départ, de les placer sur une droite numérique

Pour ajouter la pertinence du recours à la notation décimale :
- Ajouter question tout de suite après c)
- Donnez deux façons d'en rendre compte?
- Sont-ils près les uns des autres ?

Notes de cours (processus : p.284) :

Leur demander de choisir un problème riche qu'ils ont fait et d'écrire comment ils l'ont réussi afin de construire collectivement leurs notes de cours qui pourrait avoir cet allure :

Comparaison de fractions
Pour comparer une fraction, nous pouvons :
1- Comparer à 1, 1/2 (sens partie-tout/ sens rapport...)
2- Mettre sur le même numérateur
    a. plus facile lorsque les numérateurs sont multiples
3- Mettre sur le même dénominateur (partie-tout
    a. plus facile lorsque les dénominateurs sont des multiples
4- Mettre en notation décimale (quotient)
    a. lorsqu'il s'agit d'une fraction dont le dénominateur est un facteur ou un multiple de 10
    b. lorsque cette notation permet de mieux interpréter le contexte
5- À l'aide de déduction
    a. 2/3 et 8/9...dans chacun des cas il manque une partie pour compléter l'entier, mais dans la fraction 2/3 la partie manquante (1/3) est plus grande que dans la fraction 8/9 (1/9)...ansi la fraction 8/9 est plus près de l'entier et ainsi plus grande!

[...]

Annexe 2

Lettre d’autorisation produite par les écoles Vanguard

ÉCOLE
VANGUARD QUÉBEC
SIÈGE SOCIAL - HEAD OFFICE SCHOOL

Fondée en
Founded in
1973

Chers parents,

L'École Vanguard, en sa qualité d'établissement spécialisé pour les élèves ayant des difficultés graves d'apprentissage, essaie d'être à l'avant-garde de la recherche qui se fait dans ce domaine afin de mieux rencontrer les besoins de ses élèves.

Récemment, nous avons été approchés par une chercheure de l'Université de Montréal, cette dernière désirant obtenir notre participation dans une recherche axée sur les activités d'enseignement des mathématiques.

Après avoir soigneusement étudié cette proposition de recherche, nous sommes heureux de vous informer que nous avons accepté d'y participer.

Vous voudrez bien lire les documents d'information qui accompagnent cette lettre et si **vous acceptez ou refusez** que votre enfant soit considéré comme un candidat potentiel pour cette étude, vous voudrez bien compléter le formulaire d'autorisation à cet effet et nous le retourner **au plus tard le jeudi 25 novembre**.

Si vous avez des questions supplémentaires, vous voudrez bien communiquer avec Monsieur François Papineau. Mais, si votre questionnement relève de l'étude elle-même, nous vous invitons à communiquer directement avec la responsable de cette recherche (son nom et son numéro de téléphone sont inclus dans les documents d'information).

Nous vous remercions à l'avance de l'attention particulière que vous accorderez à cette demande. Veuillez accepter l'expression de nos salutations distinguées.

François Papineau, directeur
École Vanguard secondaire Francophone

Carolyn Coffin-Caputo,
Directrice générale

/fma

Pièces jointes

1150, rue Deguire, Saint-Laurent (Québec) H4L 1M2 Tél.: (514) 747-5500 - Fax: (514) 747-2831
www.vanguardquebec.qc.ca

Annexe 3

Certificat d'éthique

Université de Montréal

COMITÉ PLURIFACULTAIRE D'ÉTHIQUE DE LA RECHERCHE (CPÉR)

CERTIFICAT D'ÉTHIQUE

Le Comité plurifacultaire d'éthique de la recherche a examiné le projet de recherche intitulé :

« ***Conception, mise à l'essai et évaluation de situations de modélisation mathématique pour des élèves de 1ère secondaire présentant des difficultés en mathématiques*** »

soumis par : ***Geneviève Lessard, étudiante au doctorat, Département de didactique, Faculté des sciences de l'éducation***

Le Comité a conclu que le projet respecte les normes de déontologie énoncées à la « Politique sur la recherche avec les êtres humains » de l'Université de Montréal.

Tout changement anticipé au protocole de recherche doit être communiqué au CPÉR qui devra en évaluer l'impact au chapitre de l'éthique afin de déterminer si une nouvelle demande de certificat d'éthique est nécessaire.

Toute interruption prématurée du projet ou tout incident grave devra être immédiatement signalé au CPÉR.

François Bowen, Président
Comité plurifacultaire d'éthique de la recherche
Université de Montréal

Date d'émission