Université de Montréal

# Grothendieck et les topos : rupture et continuité dans les modes d'analyse du concept d'espace topologique

par

Mathieu Bélanger

Département de philosophie
Faculté des arts et sciences

Thèse présentée à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de Philosophiæ Doctor (Ph.D.)
en Philosophie

avril 2010

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Cette thèse intitulée

**Grothendieck et les topos : rupture et continuité dans les modes d'analyse du concept d'espace topologique**

présentée par

Mathieu Bélanger

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes :

François Lepage
(président–rapporteur)

Jean-Pierre Marquis
(directeur de recherche)

Yvon Gauthier
(membre du jury)

Colin S. McLarty
(examinateur externe)

Abraham Broer
(représentant du doyen)

# Sommaire

La thèse présente une analyse conceptuelle de l'évolution du concept d'espace topologique. En particulier, elle se concentre sur la transition des espaces topologiques hérités de Hausdorff aux topos de Grothendieck.

Il en ressort que, par rapport aux espaces topologiques traditionnels, les topos transforment radicalement la conceptualisation topologique de l'espace. Alors qu'un espace topologique est un ensemble de points muni d'une structure induite par certains sous-ensembles appelés ouverts, un topos est plutôt une catégorie satisfaisant certaines propriétés d'exactitude.

L'aspect le plus important de cette transformation tient à un renversement de la relation dialectique unissant un espace à ses points. Un espace topologique est entièrement déterminé par ses points, ceux-ci étant compris comme des unités indivisibles et sans structure. L'identité de l'espace est donc celle que lui insufflent ses points. À l'opposé, les points et les ouverts d'un topos sont déterminés par la structure de celui-ci. Qui plus est, la nature des points change : ils ne sont plus premiers et indivisibles. En effet, les points d'un topos disposent eux-mêmes d'une structure.

L'analyse met également en évidence que le concept d'espace topologique évolua selon une dynamique de rupture et de continuité. Entre 1945 et 1957, la topologie algébrique et, dans une certaine mesure, la géométrie algébrique furent l'objet de changements fondamentaux. Les livres *Foundations of Algebraic Topology* de Eilenberg et Steenrod et *Homological Algebra* de Cartan et Eilenberg de même que la théorie des faisceaux modifièrent profondément l'étude des espaces topologiques. En contrepartie, ces ruptures ne furent pas assez profondes pour altérer la conceptualisation topologique de l'espace elle-même. Ces ruptures doivent donc être considérées comme des microfractures dans la perspective de l'évolution du concept d'espace topologique.

La rupture définitive ne survint qu'au début des années 1960 avec l'avènement des topos dans le cadre de la vaste refonte de la géométrie algébrique entreprise par Grothendieck. La clé fut l'utilisation novatrice que fit Grothendieck de la théorie des catégories. Alors que ses prédécesseurs n'y voyaient qu'un langage utile pour exprimer certaines idées mathématiques, Grothendieck l'emploie comme un outil de clarification conceptuelle. Ce faisant, il se trouve à mettre de l'avant une approche axiomatico-catégorielle des mathématiques.

Or, cette rupture était tributaire des innovations associées à *Foundations of Algebraic Topology*, *Homological Algebra* et la théorie des faisceaux. La théorie des catégories permit à Grothendieck d'exploiter le plein potentiel des idées introduites par ces ruptures partielles.

D'un point de vue épistémologique, la transition des espaces topologiques aux topos doit alors être vue comme s'inscrivant dans un changement de position normative en mathématiques, soit celui des mathématiques modernes vers les mathématiques contemporaines.

**mots clés** : Alexandre Grothendieck, espace topologique, topos de Grothendieck, théorie des catégories, *Foundations of Algebraic Topology*, *Homological Algebra*, théorie des faisceaux, mathématiques contemporaines.

# Summary

The thesis presents a conceptual analysis of the evolution of the topological space concept. More specifically, it looks at the transition from topological spaces inherited from Hausdorff to Grothendieck toposes.

This analysis intends to show that, in comparison to traditional topological spaces, toposes radically transform the topological conceptualization of space. While a topological space is a set of points equipped with a structure induced by some of its subsets called open, a topos is a category satisfying exactness properties.

The most important aspect of this transformation is the reversal of the dialectic between a space and its points. A topological space is totally determined by its points who are in turn understood as being indivisible and devoided of any structure. The identity of the space is thus that induced by its points. Conversely, the points and the open of a topos are determined by its very structure. This entails a change in the nature of the points : they are no longer seen as basic nor as indivisible. Indeed, the points of a topos actually have a structure.

The analysis also shows that the evolution of the topological space concept followed a pattern of rupture and continuity. From 1945 to 1957, algebraic topology and, to a lesser extend, algebraic geometry, went through fundamental changes. The books *Foundations of Algebraic Topology* by Eilenberg and Steenrod and *Homological Algebra* by Cartan and Eilenberg as well as sheaf theory deeply modified the way topological spaces were studied. However, these ruptures were not deep enough to change the topological conceptualization of space itself. From the point of view of the evolution of the topological space concept, they therefore must be seen as microfractures.

The definitive rupture only occurred in the early 1960s when Grothendieck introduced toposes in the context of his reform of algebraic geometry. The key was his novel use of category theory. While mathematicians before him saw category theory as a convenient language to organize or express mathematical ideas, Grothendieck used it as a tool for conceptual clarification. Grothendieck thus put forward a new approach to mathematics best described as axiomatico-categorical.

Yet, this rupture was dependent of the innovations associated with *Foundations of Algebraic Topology*, *Homological Algebra* and sheaf theory. It is category theory that allowed Grothendieck to reveal the full potentiel of the ideas introduced by these partial ruptures.

From an epistemic point of view, the transition from topological spaces to toposes must therefore be seen as revealing a change of normative position in mathematics, that is that from modernist mathematics to contemporary mathematics.

**keywords** : Alexandre Grothendieck, topological space, Grothendieck topos, category theory, *Foundations of Algebraic Topology*, *Homological Algebra*, sheaf theory, contemporary mathematics.

# Table des matières

# Remerciements

De sincères remerciements sont dus

- à mes parents ;
- à mon directeur de recherche, Jean-Pierre Marquis, pour son intérêt envers le projet, sa disponibilité, ses commentaires et suggestions toujours éclairants ;
- au Département de Philosophie de l'Université de Montréal, ne serait-ce que pour son soutien financier, ainsi qu'à son personnel ;
- au Fonds québécois de recherche en science et culture pour son soutien financier.

# Introduction

Comparativement à la plupart des branches des mathématiques, les premiers balbutiements de la topologie sont pour le moins singuliers. Jusqu'au début du XX$^{e}$ siècle, le terme « *Analysis situs* » était fréquemment employé pour désigner la topologie. Le célèbre article du même nom d'Henri Poincaré et ses cinq compléments constituent à cet égard un témoignage des plus éloquents. Or, ce terme est bien antérieur à la discipline elle-même puisqu'employé par Leibniz dès 1679 en référence au calcul vectoriel. [Pont 1974, p. 8]

De plus, la discipline acquit une certaine maturité bien avant d'obtenir sa désignation définitive. En effet, le terme « topologie » est dû à Johann Benedikt Listing qui, comme le rapporte Pont, l'employa pour la première fois dans une lettre de 1836 :

> Leibniz définissait cette science comme l'étude de la connexion et des lois de la situation réciproque des corps dans l'espace, indépendamment des rapports de grandeur, qui ressortissent à la géométrie ; il lui donna le nom d'*analysis situs*. Comme cependant le terme de géométrie ne peut décemment caractériser une science d'où les notions de mesure et d'extension sont exclues, comme en outre on a déjà attribué la dénomination géométrie de position à une autre discipline, et comme, finalement, notre science n'existe pas encore, je me servirai du nom, convenable me semble-t-il, de topologie. [J. B. Listing cité par Pont 1974, p. 42]

L'histoire de la topologie débute avec la résolution par le mathématicien suisse Leonhard Euler du problème des ponts de Königsberg. Ce célèbre problème consistait, étant donné un point de départ arbitraire, à trouver un chemin empruntant chacun des sept ponts enjambant le fleuve Pregolia une et une seule fois tout en revenant au point de départ. En 1736, Euler démontra qu'un tel chemin n'existait pas. Si, d'un point de vue contemporain, le problème des ponts de Königsberg relève davantage de la théorie des graphes, il n'en demeure pas moins que l'argument de Euler est foncièrement topologique puisqu'il repose sur la constatation que seule la position relative des berges et des ponts importe.

En tant que discipline, la topologie ne débutera véritablement qu'une quinzaine d'années plus tard avec le théorème de Euler sur les polyèdres. Dans un mémoire de 1750 intitulé « *Elementa doctrinæ solidorum* », Euler proposa une classification des polyèdres à l'aide de trois nombres caractéristiques : le nombre de sommets $e$, le nombre de faces $f$ et le nombre d'arêtes $k$. La célèbre caractéristique de Euler $e - k + f = 2$ exprime la relation de dépendance entre ces trois nombres.

Le théorème de Euler était cependant incorrect. Premièrement, son énoncé ne s'appliquait pas à tous les polyèdres, mais seulement à la classe restreinte des polyèdres homéomorphes à la sphère et dont les faces et les arêtes sont elles-mêmes respectivement homéomorphes au disque et au segment. [Dieudonné 1986, p. 219] Deuxièmement, la démonstration avancée par Euler en 1751 n'était pas satisfaisante [1].

Sur la base de ces brèves considérations et comme l'illustrait déjà la citation de Listing ci-dessus, il appert que la topologie fut d'abord comprise sur un mode géométrique. Premièrement, l'*Analysis situs* étant envisagée comme une géométrie de position, c'est-à-dire comme une géométrie où seule importe la position relative des points et faisant abstraction de toute considération métrique. Dans son mémoire sur le problème des ponts de Königsberg, Euler écrivait d'ailleurs :

> Outre cette partie de la géométrie qui traite des grandeurs et qui a été de tout temps cultivée avec beaucoup de zèle, il en est une autre, jusqu'à nos jours complètement inconnue, dont Leibniz a fait le premier mention et qu'il appela géométrie de position. D'après lui, cette partie de la géométrie s'occupe de déterminer seulement la position et de chercher les propriétés qui résultent de cette position (...) c'est pourquoi lorsque récemment il fut question d'un problème qui semblait, à la vérité, se rattacher à la géométrie ordinaire, mais dont cependant la solution ne dépendant ni de la détermination de grandeurs, ni du calcul de quantités, je n'ai point balancé à le rapporter à la géométrie de position, d'autant plus que les considérations de position entrent seules dans la solution, tandis que le calcul n'y est pour rien [2]. [L. Euler, *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* cité par Pont 1974, p. 14]

Historiquement, il semble que l'appellation « géométrie de position » n'ait pas été retenue parce que déjà utilisée chez Carnot pour désigner une géométrie synthétique projective [3].

Deuxièmement, en étudiant les polyèdres, la topologie s'inscrivait dans la grande tradition géométrique remontant à Euclide. En effet, le polyèdre, défini implicitement et vaguement comme le volume délimité par une surface polyédrique elle-même composée de polygones, est un objet géométrique au sens classique.

Dans la foulée de Euler, plusieurs mathématiciens dont Legendre, Poinsot et Cauchy présentèrent des démonstrations de la formule portant le nom du mathématicien suisse. En fait, il ne serait guère exagéré d'affirmer que, jusqu'à Riemann, l'histoire de la topologie se confond avec celle de la caractéristique de Euler. Aucune de ces démonstrations n'était toutefois satisfaisante, soit parce qu'erronée comme chez Cauchy, soit parce qu'artificielle comme chez Legendre [4].

---

1. Voir Pont [1974, p. 18] pour les problèmes minant la démonstration de Euler.
2. Il importe de rappeler que l'*Analysis situs* ne doit que son nom à Leibniz.
3. Dans un mémoire de 1810, Poinsot insiste sur la distinction entre la géométrie de situation ou *Analysis situs* et la géométrie de position. Voir Pont [1974, p. 20].
4. Voir Pont [1974, p. 19–31] pour une présentation des principales tentatives.

Simon Antoine Jean Lhuilier enrichit ces efforts d'une réflexion sur les conditions de validité de la formule de Euler. Dans un mémoire publié en 1813, il présente systématiquement les exceptions dont souffre le théorème de Euler, établissant par le fait même que celui-ci n'est pas valide pour les polyèdres arbitraires [5]. En gros, tout polyèdre qui ne satisfait pas une des conditions d'homéomorphie est un contre-exemple. Lhuilier considère notamment le cas d'un polyèdre creux. Il mit donc en évidence la nécessité de préciser la notion de polyèdre de manière à pouvoir départager, parmi les configurations de polygones, celles qui constituent réellement des polyèdres. Plus fondamentalement, comme l'écrit Pont, « [Lhuilier] sort la notion de corps solide du cadre trop restreint dans lequel l'avait enfermé [*sic*] la géométrie classique ; de nouvelles formes, possédant des propriétés inconnues, sont ainsi livrées à la réflexion mathématique. » [1974, p. 27]

Par contre, l'*Analysis situs* ne s'appropria pas immédiatement ces nouveaux solides « pathologiques ». Au lieu de transposer le théorème de Euler dans un cadre topologique afin qu'il s'applique, par exemple, à des polyèdres dont les faces ou les arêtes sont courbes, la classe des polyèdres considérée fut restreinte de manière à empêcher la construction de contre-exemples et à écarter les cas « pathologiques ». En conséquence, les recherches relatives au théorème de Euler se recentrèrent sur une classe particulière d'objets géométriques : les polyèdres eulériens.

Il fallut attendre 1847 pour que Karl von Staudt formule et démontre le théorème de Euler correctement. Dans son mémoire *Geometrie der Lage*, il avance une caractérisation des polyèdres eulériens qui saisit ce qui les distingue des polyèdres quelconques et démontre rigoureusement que ceux-ci satisfont la caractéristique de Euler. Quelques années plus tard, soit en 1852, Ludwig Schläfli généralisa la formule de Euler à $n$ dimensions. Par la suite, cette voie de recherche s'intéressera de plus en plus à des notions plus générales de polyèdres.

La topologie commença à se distancer de la géométrie vers 1850 sous l'influence de Bernhard Riemann. Ses travaux en théorie des fonctions le conduisirent à introduire la notion de surface de Riemann. L'intérêt de cette notion tient notamment à ce que les propriétés d'une fonction donnée sont déterminées par la surface de Riemann qui lui est associée. Pour Riemann, la topologie devint rapidement indispensable pour l'étude des fonctions. Il développa de nouvelles méthodes anticipant celles de l'homologie à l'aide desquelles il définit certains invariants de surfaces de plus en plus générales. [Ferreirós 1999, p. 56]

Cette percée géométrico-topologique en théorie des fonctions s'accompagnait toutefois de certaines questions sur ses fondements. Tout d'abord, les surfaces de Riemann ne sont pas des objets géométriques classiques puisqu'elles relèvent des espaces de dimension supérieure. L'étude des fonctions par le biais des surfaces de Riemann exigeait donc de clarifier les fondements de la géométrie $n$-dimensionnelle.

5. Voir Pont [1974, p. 26] pour les trois types d'exceptions.

De plus, Riemann employait des concepts et méthodes associés à l'*Analysis situs* dont le statut était encore flottant. [Ferreirós 1999, p. 59]

Une nouvelle conception des mathématiques devenait donc nécessaire pour rendre compte des innovations de Riemann en théorie des fonctions. En effet, jusque vers 1850, la conception des mathématiques en tant que science des grandeurs héritée des Grecs était encore courante. [Ferreirós 1999, p. 41–42] Cette dernière opposait les grandeurs discrètes et continues, les premières étant l'objet de l'arithmétique et de l'algèbre, les secondes de la géométrie et de l'analyse. La première moitié du XIXe siècle avait bien vu quelques tentatives de généralisation du langage et des idées géométriques de trois à $n$ dimensions, mais sans grand succès puisqu'elles se heurtaient toutes à la difficulté de définir la notion de grandeur dans un contexte $n$-dimensionnel [6].

S'inspirant de Gauss dont les travaux sur les nombres complexes l'avaient convaincu de la nécessité d'une théorie abstraite des grandeurs et de leur étude topologique [Ferreirós 1999, p. 43–44], la nouvelle conception des mathématiques que proposa Riemann dans son *Habilitationsvortrag* de 1854 se basait sur le concept de *Mannigfaltigkeit* dont la définition allait comme suit :

> *Notions of magnitude are only possible where there is an antecedent general concept which admits of different ways of determination. According as a continuous transition does or does not take place among these determinations, from one to another, they form a continuous or discrete manifold; the individual determinations are called points in the first case, in the last case elements, of the* [Mannifaltigkeit]. [B. Riemann, *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* cité par Ferreirós 1999, p. 47]

D'après Ferreirós [1999, p. 53], cette définition doit se comprendre à la lumière de la philosophie de Herbart et de la relation traditionnelle entre un concept et son extension. Une *Mannigfaltigkeit* est donc l'extension d'un concept, c'est-à-dire la classe de tous les objets auxquels réfère le concept. Riemann donne l'exemple du concept de couleur dont chaque couleur particulière, que ce soit le bleu, le rouge ou encore le jaune, est une détermination donnée. La *Mannigfaltigkeit* est la classe — pour ne pas dire l'ensemble — de toutes les déterminations possibles du concept. Une *Mannigfaltigkeit* est donc une totalité. De plus, une *Mannigfaltigkeit* peut être discrète ou continue selon que la transition entre les déterminations du concept soit discrète ou continue. Il s'agit également d'une notion extrêmement générale puisque tout concept donne lieu à une *Mannigfaltigkeit*.

Les *Mannigfaltigkeiten* furent à l'origine d'un renouvellement des mathématiques dans la mesure où Riemann associe les termes « grandeurs » et « *Mannigfaltigkeit* » au même concept. Autrement dit, les grandeurs classiques ne sont que des cas particuliers du concept général introduit dans l'*Habilitationsvortrag*.

Les *Mannigfaltigkeiten* furent également cruciales du point de vue de l'évolution du concept d'espace topologique, puisque, comme l'écrit Scholz, « *Riemann sketched*

6. Voir Scholz [1999, p. 25–26] pour certaines de ces tentatives.

*the draft for a conceptual starting point for what later was to become general set theory (discrete manifold) and topology (continuous manifold).* » [1999, p. 26]

Premièrement, la théorie des *Mannigfaltigkeiten* consacra l'avènement du point de vue ensembliste en mathématiques car Riemann considérait que la théorie des nombres naturels était incluse dans sa théorie des *Mannigfaltigkeiten* discrètes. Elle représentait donc un premier pas vers une théorie des ensembles en bonne et due forme telle qu'elle apparaîtrait quelques années plus tard chez Cantor et Dedekind. « *The core idea of regarding sets as the basic referent for arithmetic was suggested by Riemann, and would be developed by his friend Dedekind, among other authors.* » [Ferreirós 1999, p. 68] À cet égard, le problème de la représentation des fonctions par des séries de Fourier conduisit Riemann à étudier l'intégrale d'une fonction possédant une infinité de discontinuités et, du coup, à mettre en évidence l'existence de différents types d'ensembles de points infinis. [Manheim 1964, p. 56–65]

Deuxièmement, pour les besoins du problème de l'espace qui était un des principaux objets de son *Habilitationsvortrag* [Ferreirós 2006, chapitre II, §3], Riemann étudia la topologie des *Mannigfaltigkeiten*. La grande innovation est la distinction entre les structures métrique et topologique d'une *Mannigfaltigkeit*. Ainsi, une même structure topologique peut donner lieu à plusieurs structures métriques. Pour cette raison, Bourbaki attribue à Riemann l'avènement d'un point de vue topologique en mathématiques ou, pour reprendre ses termes, le début de la topologie en tant que discipline autonome :

> Ce sont d'une part ses recherches sur les fonctions algébriques et leurs intégrales, d'autre part ses réflexions (largement inspirées par l'étude des travaux de Gauss) sur les fondements de la géométrie, qui amenèrent Riemann à formuler un programme d'études qui est celui de la topologie moderne, et à donner à ce programme un commencement de réalisation. [1974, p. 176] [7]

La tradition de la topologie générale mettrait de l'avant une compréhension pointilliste de l'espace selon laquelle un espace se compose de points. D'après celle-ci, les points sont préexistants et demande à être organisés. La cohésion de l'espace est alors celle à l'œuvre sur ses points. Pour sa part, la tradition combinatoire comprendrait plutôt l'espace comme un tout pouvant être représenté par le recollement de plusieurs blocs géométriques de dimensions variables : sommets, arêtes, faces, etc. Cette compréhension n'irait pas sans rappeler la géométrie d'Euclide pour qui une figure n'était pas une collection de points [8]. De ce point de vue, un espace ne s'analyserait pas à travers ses points, mais bien à travers les blocs qui, assemblés correctement, en constituent un modèle.

Par ailleurs, dans la première moitié des années 1940 survint un événement qui s'avérerait déterminant pour l'évolution subséquente du concept d'espace topologique : la création, par Saunders Mac Lane et Samuel Eilenberg, de la théorie des

7. Bourbaki réfère ici à la topologie combinatoire qui deviendra la topologie algébrique.
8. Voir Cartier [2001, §3].

catégories. Rétrospectivement, l'influence de la théorie des catégories sur la théorisation de l'espace peut être ramenée au cadre conceptuel qu'elle mit à la disposition des mathématiciens et à l'appréhension inédite de la structure de topologie que celui-ci permit.

Près de vingt ans furent cependant nécessaires pour qu'un mathématicien en prenne conscience. Au début des années 1960, les recherches en géométrie algébrique d'Alexandre Grothendieck [9] le confrontèrent aux limites techniques et conceptuelles inhérentes aux espaces topologiques traditionnels. Pour le dire simplement, en tant que structure spatiale, une topologie était trop grossière pour saisir certains invariants de ces espaces de nature discrète mieux connus sous le nom de variétés algébriques. Ceci conduisit Grothendieck à définir le concept de topos. Brièvement, un topos est une catégorie qui, en vertu de sa structure, est de nature topologique. En ce sens, la stratégie de Grothendieck pour résoudre ce problème fut, au plan conceptuel, d'une simplicité, voire d'une naïveté désarmante puisqu'elle consista à transformer le concept d'espace topologique traditionnel.

Comme les considérations précédentes le laissent deviner, la présente thèse se propose d'analyser l'évolution du concept d'espace en topologie et, plus précisément, la transition vers le point de vue des topos [10]. Cette analyse entend mettre en évidence que la conceptualisation topologique de l'espace évolua selon une dynamique de rupture et de continuité.

Au cours des années 1940 et 1950, la topologie algébrique fut profondément transformée par la publication des livres *Foundations of Algebraic Topology* de Eilenberg et Steenrod et *Homological Algebra* de Cartan et Eilenberg ainsi que par les travaux de Leray, Cartan et Serre en théorie des faisceaux. Parce qu'ils permettaient d'étudier les espaces différemment, *Foundations of Algebraic Topology*, *Homological Algebra* et la théorie des faisceaux causèrent des fractures dans le développement de la topologie. Ces fractures ne furent cependant que partielles parce que pas assez franches pour altérer le concept d'espace qui s'était imposé dans les premières décennies du XX$^{e}$ siècle. En effet, Eilenberg et Steenrod, Cartan et Eilenberg, Leray, Serre, etc. travaillaient sur des espaces compris comme des ensembles munis d'une structure définie sur leurs sous-ensembles. Pour cette raison, elles seront appelées microfractures.

La rupture définitive dans l'évolution du concept d'espace topologique ne survint qu'avec l'avènement des topos. En définissant les topos, Grothendieck mit de l'avant un concept d'espace radicalement différent des espaces topologiques traditionnels.

9. D'origine russe et allemande, Grothendieck francisa son prénom « Alexander ». Cela ne l'empêcha pas de signer ses textes sous l'une des formes suivantes : Alexander Grothendieck, Alexandre Grothendieck ou A. Grothendieck. Pour des raisons d'uniformité, il fut choisi de s'en tenir à la graphie française.

10. Pour être exact, les topos de Grothendieck seront abordés. À la fin des années 1960, F. William Lawvere et Myles Tierney définirent les topos élémentaires. S'ils sont plus généraux que ceux de Grothendieck, les topos élémentaires relevaient à l'origine principalement de la logique.

En effet, dans la mesure où, conceptuellement, une structure topologique sur un espace doit se comprendre comme un mécanisme de décomposition d'un tout en parties, la pierre de touche de cette transformation fut un renversement de la relation dialectique unissant un espace à ses points. Selon la conception pointilliste, un espace est déterminé par ses points ou à tout le moins par certains sous-ensembles appelés ouverts. Selon cette même conception, les points sont envisagés comme des objets premiers et indivisibles. L'identité de l'espace est alors celle que lui insufflent ses points. Du point de vue des topos, c'est plutôt l'espace qui prime puisque ses points et ses ouverts sont déterminés par sa structure. En conséquence, la nature même des points change. Non seulement ne sont-ils plus premiers, mais ils ne sont plus indivisibles : les points d'un topos disposent eux-mêmes d'une structure. Ceci a notamment pour conséquence qu'un espace peut être non vide tout en n'ayant aucun point, situation évidemment inimaginable selon la conception pointilliste.

Cette rupture s'inscrivait néanmoins dans la continuité des microfractures puisque le concept de topos est fortement tributaire des innovations dues à *Foundations of Algebraic Topology*, à *Homological Algebra* et à la théorie des faisceaux.

La thèse soutient également que c'est l'utilisation systématique et singulière que fit Grothendieck des catégories et de la théorie les régissant qui lui permit de transformer le concept d'espace topologique. En soi, le recours, en topologie algébrique et en géométrie algébrique, aux catégories, foncteurs, transformations naturelles et autres objets propres à la théorie des catégories n'était pas inédit puisque déjà présent à divers degrés dans *Foundations of Algebraic Topology*, *Homological Algebra* et en théorie des faisceaux. Grothendieck parvint cependant à les employer d'une manière que ne laissaient aucunement entrevoir les contributions de ses prédécesseurs.

Dans une perspective épistémologique, la transition des espaces topologiques traditionnels aux topos est symptomatique de celle, plus générale, des mathématiques modernes vers les mathématiques contemporaines. Selon J. Gray [2006, 2008], au plan intellectuel, le modernisme mathématique doit se comprendre comme une position normative, voire comme une idéologie mathématique. Une telle position prescrit des normes à respecter dans la pratique mathématique ou, pour le dire familièrement, une certaine manière de faire des mathématiques. Ces normes renvoient au sens des concepts de même qu'aux outils et méthodes à privilégier dans la résolution de problèmes. La transition des mathématiques modernes vers les mathématiques contemporaines relève donc d'un changement de position normative.

En tant que position normative, le modernisme mathématique s'imposa progressivement à la fin du XIXᵉ siècle pour atteindre son apogée vers 1930 et peut être caractérisé comme suit. Premièrement, les mathématiques modernes sont détachées du monde sensible. Par exemple, en géométrie, le concept de ligne ne se définit désormais plus par la formalisation du concept populaire, mais par son appartenance à un réseau de concepts par le biais desquels sont spécifiées ses propriétés. L'objet mathématique n'a alors plus rien à voir avec l'objet réel.

> *The modernist argument preferred to define straight lines only as part of a system of definitions for, as it might be, plane or high-dimensional geometry, and it did this not by telling you what a straight line is, but by telling you what you could say about it. Whatever met the definition was a straight line, even if it might look very strange. There was no attempt to show that the new, implicit, definitions somehow captured the essence of the real object, because the real object was only incidentally what it was about.* [J. Gray 2006, p. 390]

Deuxièmement, les mathématiques modernes reposent sur la méthode axiomatique. Celle-ci permet d'appréhender les objets mathématiques indépendamment de leur nature et seulement en vertu de leur appartenance à un tel réseau de concepts. La méthode axiomatique oriente les mathématiques vers l'étude de structures — décrites à l'aide d'axiomes il va sans dire — sur des ensembles. À chacune de ces structures correspond une théorie qui regroupe la collection des propositions qui peuvent être démontrées, c'est-à-dire logiquement déduites, sur la base des axiomes qui la définissent.

En conséquence, le modernisme mathématique en vint à se baser sur la théorie des ensembles. En effet, les questions de fondements forcèrent le processus de modernisation des mathématiques à adopter le cadre conceptuel et le langage de la théorie des ensembles. Au modernisme mathématique correspond donc une approche axiomatico-ensembliste des mathématiques.

Historiquement, les travaux de Grothendieck en géométrie algébrique de la fin des années 1950 à la fin des années 1960 peuvent être interprétés comme ayant mis de l'avant une nouvelle position normative : les mathématiques contemporaines. Sans rentrer immédiatement dans les détails puisque ces aspects seront abordés dans les pages à venir, la contemporanéité mathématique se caractérise par un internalisme radical, un renouvellement de la méthode axiomatique et un postulat méthodologique fondamental à l'effet que tout problème possède son contexte naturel.

Premièrement, la refonte de la géométrie algébrique qu'accomplit Grothendieck se caractérise par son internalisme. Une analogie avec l'étude géométrique des surfaces au XIX$^{\text{e}}$ siècle facilitera l'explication de ce point. Avant Gauss, toute surface est plongée dans un espace numérique et est caractérisée relativement à ce plongement. Le langage employé est donc externe puisqu'il s'agit de celui de l'espace dans lequel la surface est plongée. En comparaison, Riemann caractérise la surface en elle-même, c'est-à-dire indépendamment d'un quelconque plongement dans un espace ambiant. Du coup, la géométrie de la surface en question est caractérisée à l'aide d'un langage interne, c'est-à-dire spécifique à la surface. En conséquence, les méthodes sur lesquelles se base cette caractérisation sont intrinsèques [11].

Un peu comme avant Gauss et Riemann, dans le contexte de la théorie des ensembles, tout objet mathématique est caractérisé relativement à un univers fixe et déterminé, à savoir l'univers des ensembles. En particulier, tout espace topologique est caractérisé en fonction de son inscription dans l'univers des ensembles qui fournit

11. À ce sujet, voir Boi [1995].

le cadre théorique homogène et fixe des mathématiques. Cette caractérisation se base donc sur des méthodes qu'il convient d'appeler extrinsèques.

Le passage de la théorie des ensembles à la théorie des catégories permet de quitter l'univers fixe indissociable de la première. En effet, Grothendieck conçoit certaines catégories, mais plus spécifiquement la théorie des topos, comme fournissant des contextes à l'intérieur desquels développer naturellement des théories mathématiques. D'un univers fixe, il opère donc une transition vers des univers qu'il convient de qualifier de variables. De plus, en vertu de cette association des théories mathématiques à des types de catégories, les méthodes employées seront intrinsèques puisque spécifiques aux catégories en question. Cette tendance se manifesta pour la première fois avec les catégories abéliennes qui encodent les ingrédients essentiels à la théorie de l'homologie et de la cohomologie. Avec les topos, Grothendieck parvient donc à caractériser un univers mathématique de manière intrinsèque.

Deuxièmement, la méthode axiomatique ne s'applique plus seulement à des structures, mais aussi à des théories. Tout comme la méthode axiomatique est employée, selon la perspective moderniste, pour clarifier des types d'objets en identifiant leurs propriétés, Grothendieck s'en sert pour clarifier des théories mathématiques, c'est-à-dire isoler les ingrédients essentiels à un domaine des mathématiques. Par exemple, comme l'exposera la section 3.1.3.2, la structure de catégorie abélienne garantit la présence de tous les éléments pertinents à la théorie de l'homologie *in abstracto*[12].

Troisièmement, l'œuvre mathématique de Grothendieck se base sur un postulat méthodologique fondamental stipulant que tout problème possède son contexte naturel, c'est-à-dire un contexte qui le rend conceptuellement trivial. La stratégie optimale pour solutionner un problème donné consiste donc à construire ce contexte. Chez Grothendieck, ce postulat méthodologique fondamental s'adjoint de la conviction que ces contextes doivent être construits de manière catégorielle, c'est-à-dire à l'aide des concepts et des méthodes de la théorie des catégories. En effet, ce sont le langage et le cadre conceptuel de la théorie des catégories qui sont le plus aptes à saisir les relations fondamentales qui sous-tendent le problème. En ce sens, Grothendieck s'inscrivait dans le processus d'algébrisation abstraite des mathématiques entrepris au cours des années 1920.

En géométrie algébrique, construire le contexte naturel d'un problème revient à définir le bon topos. Les principaux concepts et méthodes sont catégoriels et les objets de la géométrie algébrique doivent impérativement être traités par leur biais. Par exemple, un topos est une catégorie satisfaisant certaines propriétés d'exactitude et un faisceau est un foncteur à valeurs dans une certaine catégorie. Pour donner

12. Dans la foulée de Eilenberg et Steenrod, la perspective contemporaine attribue également une nouvelle fonction à la méthode axiomatique. De vouée qu'elle était à la description de domaines des mathématiques, la méthode axiomatique devint normative en ce qu'elle prescrit les outils et les méthodes, bref la machinerie, à utiliser pour l'étude de ces mêmes domaines. Voir Marquis [2006, p. 256–257].

un autre exemple, les propriétés de certains objets comme les schémas se laissent apercevoir beaucoup plus aisément au niveau des catégories qu'ils forment.

Comparativement aux mathématiques modernes, les mathématiques contemporaines se basent sur une approche qui peut être qualifiée d'axiomatico-catégorielle.

Selon ce cadre, les microfractures dont il fut précédemment question doivent être vues comme des fissures dans la position normative moderne. *Foundations of Algebraic Topology*, *Homological Algebra* et la théorie des faisceaux introduisirent des éléments qui, rétrospectivement, peuvent être associés à la contemporanéité mathématique, mais sans pour autant imposer une nouvelle position normative. Les changements qu'introduisirent Eilenberg et Steenrod, Cartan et Eilenberg, Leray, Serre, etc. préparèrent le terrain pour l'instauration de nouvelles normes qui baliseraient l'évolution subséquente du concept d'espace topologique, et plus généralement des mathématiques. Par exemple, en proposant une théorie des théories de l'homologie, *Foundations of Algebraic Topology* transforma la méthode axiomatique.

Il semble que l'élément qui, chez Grothendieck, entraîna un changement de position normative définitif fut sa croyance que la théorie des catégories permettait de clarifier, et donc de simplifier, conceptuellement une situation mathématique.

L'analyse de l'évolution du concept d'espace topologique proposée se déploie en trois temps de telle sorte que le texte se compose de trois chapitres.

Le premier chapitre se penche sur le double développement de la topologie en tant que branche des mathématiques et sur les différentes compréhensions du concept d'espace topologique auxquelles il donna lieu. L'intention n'est évidemment pas de faire une histoire de la topologie, mais bien de retracer les grandes étapes qui façonnèrent la conceptualisation topologique moderne de l'espace.

Le deuxième chapitre aborde tour à tour chacune des microfractures qui caractérisèrent le développement de la topologie algébrique et, dans une moindre mesure, de la géométrie algébrique au cours des années 1940 et 1950, c'est-à-dire les livres *Foundations of Algebraic Topology* et *Homological Algebra* de même que la théorie des faisceaux. L'objectif est de comprendre les transformations qui affectèrent l'étude des espaces topologiques sous l'effet de ces ruptures tout en mettant en évidence qu'elles n'eurent un impact que négligeable sur le concept d'espace lui-même.

Le troisième chapitre est entièrement consacré aux topos. Il sera d'abord question du projet de refonte de la géométrie algébrique qu'entreprit Grothendieck puisque c'est dans ce contexte qu'il fut confronté à l'insuffisance du concept d'espace topologique traditionnel. Par la suite, les topos seront examinés en tant qu'espaces topologiques transformés. Ce chapitre clarifiera donc les éléments de rupture et de continuité associés à l'avènement du point de vue des topos dans la foulée des microfractures tout en caractérisant le rapport de Grothendieck à la théorie des catégories.

Avant d'entrer dans le vif du sujet, une remarque méthodologique s'impose. De par le fil conducteur historique, les textes d'origine furent grandement utilisés. À l'instar de certains auteurs, il aurait évidemment été possible d'en traduire le contenu mathématique en termes contemporains [13]. Il fut plutôt choisi de demeurer, dans l'ensemble, fidèle aux formulations et notations employées dans les textes. Cela a peut-être comme conséquence de donner un style mathématique plus décousu et de ne pas toujours clarifier le propos de l'auteur, voire d'en compliquer la compréhension pour le lecteur contemporain. En contrepartie, ce choix a l'avantage de rendre compte de l'évolution des notations et des formulations d'un auteur à l'autre, mais aussi des zones d'ombre qui pouvaient persister à chaque étape. En effet, la clarification qui pourrait résulter d'une transcription dans le langage standardisé d'aujourd'hui ne serait que rétrospective.

De plus, puisque la licence l'exige, les diagrammes commutatifs ont été réalisés avec le module *Commutative Diagrams in TEX*.

13. Sans vouloir le pointer du doigt, voir Dieudonné [1989*b*, 1994] pour quelques exemples de cette approche.

# Chapitre 1

# Le double développement du concept d'espace topologique

La topologie fut l'objet d'un double développement qui conduisit les mathématiciens à distinguer la topologie générale et la topologie combinatoire ou, à partir de la fin des années 1920, la topologie algébrique. En effet, l'interprétation ensembliste des *Mannigfaltigkeiten* introduites par Riemann est à l'origine du concept d'espace topologique et de la topologie générale. La topologie combinatoire, et plus tard la topologie algébrique, trouve plutôt sa source dans une interprétation géométrique de ces mêmes *Mannigfaltigkeiten*.

Ce premier chapitre adopte un fil conducteur historique afin de retracer ce double développement du concept d'espace topologique. L'objectif est de cerner la compréhension topologique de l'espace auquel donna lieu le modernisme mathématique et, parallèlement, la conception de la topologie que celle-ci induisit. Ceci fournira un point de repère qui, dans les chapitres suivants, permettra de comprendre la rupture que marqua le point de vue des topos au début des années 1960.

Pour ce, il sera successivement question du développement du concept d'espace en topologie générale et en topologie combinatoire. Par la suite, les conceptualisations de l'espace auxquelles ces deux formes de topologie donnèrent définitivement lieu seront cernées par une brève analyse de la présentation qu'en firent respectivement Bourbaki et Lefschetz au début des années 1940.

## 1.1 La topologie générale

Historiquement, la topologie générale apparut dans le cadre des recherches sur la théorie des fonctions. Au XVIII$^{e}$ siècle, le problème de la corde vibrante souleva la question de la représentation de fonctions par des séries trigonométriques. Cette voie de recherche conduisit les mathématiciens à considérer des ensembles de points et leurs propriétés topologiques.

Un moment charnière fut la publication par Joseph Fourier, en 1822, de l'ouvrage *Théorie analytique de la chaleur*[1]. Fourier y aborde le problème d'un point de vue général. Étant donnée une fonction arbitraire $f(x)$, c'est-à-dire qui peut être tracée arbitrairement [Manheim 1964, p. 50], il cherche des coefficients $a_n$ et $b_n$ tels que, sur un intervalle donné,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

En d'autres termes, Fourier recherche une série qui converge vers la fonction $f$.

Or, le concept de série de Fourier dépend du concept d'intégrale puisque les coefficients $a_n$ et $b_n$ se calculent en intégrant sur la période de la fonction. Les travaux de Fourier furent donc à l'origine d'une identification de la classe des fonctions représentables et de celle des fonctions intégrables. [Cooke 1993, p. 285] À cet égard, l'intégrale de Riemann étendit la classe des fonctions intégrables, et par le fait même la classe des fonctions représentables. Contrairement à l'intégrale de Cauchy qui supposait les fonctions continues, l'intégrale de Riemann, dont le développement dans son *Habilitationsschrift* de 1854 fut grandement motivé par des questions relatives à la théorie des séries trigonométriques[2], permit de traiter des fonctions munies de points de discontinuité.

De plus, l'unicité de la représentation est garantie par la convergence uniforme de la série. En effet, si celle-ci converge uniformément, alors l'intégration terme à terme fait en sorte que les coefficients de Fourier sont uniques. La distinction entre convergence ponctuelle et convergence uniforme ayant mis du temps à s'imposer, il fallut attendre 1870 pour que Heinrich Eduard Heine reconnaisse le rôle crucial de la convergence uniforme en théorie des séries trigonométriques.

> *The treatment of series in general, and Fourier series in particular, by Fourier, Dirichlet, Riemann, and Lipschitz had been innocent of uniformity considerations. The relevance of this omission was first recognized by Heinrich Eduard Heine (1821–1881).* [Manheim 1964, p. 97]

En particulier, il remarqua que différentes séries non uniformément convergentes peuvent représenter une même fonction.

Du point de vue de Heine, les travaux de ses prédécesseurs — Dirichlet, Riemann et Lipschitz — identifiaient des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction soit représentable, mais laissaient ouverte la question de l'unicité de cette représentation. Heine combla cette lacune en démontrant qu'une série uniformément convergente représente de manière unique une fonction sauf en un nombre fini de points[3] :

1. Certaines des idées de Fourier sur le sujet avaient déjà été présentées à l'Académie des Sciences dès 1807. Voir Manheim [1964, p. 45].
2. Voir Ferreirós [1999, p. 150–153] et Cooke [1993, p. 286–292].
3. En fait, Schläfti trouva une erreur dans la démonstration de Heine et la corrigea. [Manheim 1964, p. 100]

**Théorème** (Heine 1870)**.** Si une série trigonométrique de la forme $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx + b_n \sin nx$ est uniformément convergente et représente zéro sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$, alors tous les coefficients sont nuls et la série représente la fonction constante $f(x) = 0$ partout.

Le problème de l'unicité de la représentation força donc les mathématiciens à étudier la distribution des points de discontinuité, étude qui, chez Cantor, déboucha sur la notion d'ensemble de points.

### 1.1.1 Cantor : théorie des fonctions et ensembles de points

Sous l'influence de Heine, Georg Cantor s'intéressa à la théorie des séries trigonométriques et, plus particulièrement, au problème de l'unicité de la représentation des fonctions. L'importance de ses travaux sur le sujet est double. Premièrement, il généralisa les résultats de Heine sur l'unicité de la représentation des fonctions par des séries trigonométriques. Deuxièmement, et ceci touche directement au développement de la topologie, cette généralisation utilisa de manière essentielle la notion d'ensemble de points. Par le fait même, la compréhension de l'espace commença à se transformer d'une totalité, comme chez Riemann, à un ensemble de points.

#### 1.1.1.1 Des séries trigonométriques aux ensembles de points

Entre 1870 et 1872, Cantor publia plusieurs articles sur le problème de l'unicité. C'est dans le cadre de ses recherches sur le sujet qu'il en vint à étudier les propriétés des ensembles de points [4].

**L'article de mars 1870** L'article « *Über einen die Trigonometrischen Reihen Betreffenden Lehrsatz* » [Cantor 1966*a*], publié en mars 1870, constitue en quelque sorte un prologue aux recherches sur le problème de l'unicité. Cantor y démontre un théorème — aujourd'hui connu sous le nom de théorème de Cantor–Lebesgue [5] — qui s'avèrera nécessaire à la démonstration d'un théorème d'unicité.

**Théorème** (Théorème de Cantor–Lebesgue, Cantor 1966*a*)**.** Si deux suites infinies $a_1$, $a_2$, …, $a_n$ et $b_1$, $b_2$, …, $b_n$ sont telles que $\lim_{n\to\infty} a_n \sin nx + b_n \cos nx = 0$ sur un intervalle donné $(a, b)$, alors $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ et $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Ce théorème affirme donc que les coefficients d'une série convergente tendent vers zéro du moment que les termes de la série ont eux-mêmes tendance à s'annuler.

Dans les articles suivants, Cantor démontra trois théorèmes d'unicité de plus en plus généraux.

4. La présentation qui suit s'inspire principalement de Dauben [1979].
5. Manheim [1964], Ferreirós [1999] et Cooke [1993] présentent plutôt ce résultat comme un cas particulier du théorème de Cantor-Lebesgue. Comme le souligne Dauben [1979, p. 32, n. 7], c'est en fait un cas particulier par rapport à la généralisation qu'en donna Lebesgue en 1906.

**L'article d'avril 1870** La première généralisation du théorème de Heine se trouve dans « *Beweis, dass eine für jeden reellen Wert von x durch eine trigonometrische Reihe gegebene Funktion f(x) sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen läßt* » [Cantor 1966*b*], un article d'avril 1870, et passe par l'élimination de la condition de convergence uniforme.

Soient deux séries trigonométriques qui représentent une même fonction $f(x)$ et qui convergent vers la même valeur en tout point. En soustrayant une série à l'autre, Cantor obtient une représentation convergente en tout $x$ de la fonction constante nulle :

$$0 = C_0 + C_1 + C_2 + \cdots + C_n + \ldots$$

où $C_0 = \frac{1}{2}d_0$ et $C_n = c_n \sin nx + d_n \cos nx$.

Il construit ensuite la fonction

$$F(x) = C_0 \frac{xx}{2} - C_1 - \cdots - \frac{C_n}{nn} - \ldots$$

Cantor démontre que cette fonction est de la forme $cx + c'$ en utilisant un résultat de Schwarz selon lequel une telle fonction $F$ est linéaire si (1) $F$ est continue dans le voisinage de tout point $x$ et (2) la limite de sa dérivée seconde

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{F(x+\alpha) - 2F(x) + F(x-\alpha)}{\alpha\alpha}$$

s'annule en tout point [6]. Cantor est alors en mesure de montrer que la série trigonométrique de départ converge uniformément. En posant $F(x) = cx + c'$, il obtient

$$cx + c' = C_0 \frac{xx}{2} - C_1 - \frac{C_2}{4} - \cdots - \frac{C_n}{nn} - \ldots$$

d'où

$$\begin{aligned} C_0 \frac{xx}{2} - cx - c' &= C_1 + \frac{C_2}{4} + \cdots + \frac{C_n}{nn} + \ldots \\ &= \sum \frac{c_n \sin nx + d_n \cos nx}{n^2} \end{aligned}$$

Le terme de droite étant périodique, le terme de gauche se doit de l'être également. Cantor en déduit que $c = 0$ et $C_0 = \frac{1}{2}d_0 = 0$ et obtient l'égalité suivante :

$$-c' = C_1 + \frac{C_2}{4} + \cdots + \frac{C_n}{nn} + \ldots$$

Le terme de droite de cette égalité forme une série uniformément convergente. L'intégration terme à terme de cette série est donc légitime. Il en résulte que la

6. Voir Cantor [1966*b*, p. 82] pour la démonstration.

limite de $c_n \sin nx + d_n \cos nx$ est zéro. En vertu du théorème de Cantor-Lebesgue, les coefficients s'annulent, c'est-à-dire $c_n = 0$ et $d_n = 0$.

Par conséquent, la fonction constante nulle ne peut être représentée par une série trigonométrique convergente que si les coefficients de cette dernière convergent eux-mêmes vers zéro. Autrement dit, la seule série trigonométrique qui converge vers zéro en tout point est la série constante nulle. D'où le théorème d'unicité recherché :

**Théorème** (Cantor 1966*b*)**.** Si une fonction réelle $f(x)$ est représentée par une série trigonométrique convergente pour tout $x$, alors il n'existe pas d'autre série de la même forme qui converge pour tout $x$ et représente la même fonction $f(x)$.

À la lumière de ces considérations, Cantor n'élimine pas tant la condition de convergence uniforme dont l'importance avait été mise en évidence par Heine qu'il la démontre superflue puisqu'elle est une conséquence de la convergence ponctuelle de la série en vertu du théorème de Cantor-Lebesgue et du lemme de Schwarz.

**L'article de janvier 1871** L'article « *Notiz zu dem Aufsatze: Beweis, dass eine für jeden reellen Wert von x durch eine trigonometrische Reihe gegebene Funktion f(x) sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen läßt* » [Cantor 1966*c*], publié en janvier 1871, apporta une double contribution au problème de l'unicité des représentations de fonctions à l'aide de séries trigonométriques. Faisant sienne une remarque de Kronecker, Cantor démontre que le théorème de Cantor–Lebesgue peut être omis dans la démonstration présentée dans l'article d'avril 1870.

De plus, comparativement à l'article de mars 1870, celui de janvier 1871 assouplit l'hypothèse exigeant qu'une série trigonométrique représentant la fonction constante nulle converge uniformément pour tout $x$ sur l'intervalle considéré puisqu'il y est démontré que l'existence de certaines valeurs de $x$ pour lesquelles la série $C_0 + C_1 + C_2 + \cdots + C_n + \ldots$ ne représente pas la fonction nulle ou ne converge pas n'altère pas la validité du théorème d'unicité.

> « Si on a admis, *pour toute valeur* de $x$, une représentation convergente de la fonction nulle par une série trigonométrique $[C_0 + C_1 + C_2 + \cdots + C_n + \ldots]$, alors les coefficients $c_n$, $d_n$ de cette représentation sont nuls. »
>
> Les hypothèses peuvent alors être modifiées : on abandonne, pour certaines valeurs de $x$, soit la représentation de la fonction nulle par $[C_0 + C_1 + C_2 + \cdots + C_n + \ldots]$, soit la convergence de la série [7]. [Cantor 1966*c*, p. 85]

Soit une suite croissante infinie $\ldots x_{-1}, x_0, x_1, \ldots$ telle que (1) en chacun des $x_i$, la série $C_0 + C_1 + C_2 + \cdots + C_n + \ldots$ ne représente pas la fonction nulle ou bien ne

7. „*Hat man* eine für jeden Wert *von x gültige, d.h. konvergente Darstellung des Wertes Null durch eine trigonometrische Reihe* $[C_0 + C_1 + C_2 + \cdots + C_n + \ldots]$, *so sind die Koeffizienten* $c_n$, $d_n$ *dieser Dastellung gleich Null.*“

*Es lassen sich nun hierbei die Voraussetzungen in dem Sinne modifizieren, daß man für gewisse Werte von x entweder die Darstellung der Null durch* $[0 = C_0 + C_1 + C_2 + \cdots + C_n + \ldots]$ *oder die Konvergenz der Reihe aufgibt.*

converge pas et (2) tout intervalle fini contient au plus un nombre fini de $x_i$. Cantor considère à nouveau la fonction

$$F(x) = C_0 \frac{xx}{2} - C_1 - \cdots - \frac{C_n}{nn} - \ldots$$

et souligne qu'elle est linéaire de la forme $F(x) = k_i x + l_i$ sur chacun des intervalles $(x_i \ldots x_{i+1})$. Il montre que cette fonction $F(x)$ est identique sur tous les intervalles $(x_i \ldots x_{i+1})$. Comme dans la démonstration de mars 1870, la linéarité de $F(x)$ permet de conclure que les coefficients $c_n$ et $d_n$ sont nuls.

En résumé, la notice de 1871 montre que la représentation d'une fonction au moyen d'une série trigonométrique demeure unique même si elle possède un nombre fini de points exceptionnels. Comme le souligne Cooke, il s'agit d'une faible généralisation, mais qui n'en fut pas moins fondamentale pour le développement de la théorie des ensembles : « *Though it was a small generalization in itself, however, it seems to have caused Cantor to reflect on the geometry of the line*. » [1993, p. 294] Après avoir considéré un nombre fini de points exceptionnels, il n'y avait qu'un pas à franchir avant d'en considérer une infinité.

**L'article de 1872** Cantor exposa sa stratégie pour généraliser le théorème d'unicité à une infinité de points dans le compte-rendu du *Universitätsprogramm* de Hermann Hankel qu'il fit pour le *Deutches Zentralblatt*[8]. Celle-ci allait comme suit.

Soit un intervalle $(\alpha, \beta)$ tel que la fonction $F(x)$ y possède une infinité de singularités $x_i$. Par le théorème de Bolzano–Weierstrass, tout voisinage contenant une infinité de singularités contient au moins un point de condensation $x'$. En supposant ce point de condensation unique, tout sous-intervalle $(s, t)$ de $(\alpha, x')$ ne pourrait contenir qu'un nombre fini de points singuliers $x_i$. Sinon, il y aurait un autre point de condensation dans $(\alpha, \beta)$. Le théorème de janvier 1871 garantirait alors que la fonction $F(x)$ est linéaire et identique sur tous les intervalles $(s, t)$. Finalement, la fonction $F(x)$ étant continue et les points $s$ et $t$ pouvant être arbitrairement proches de $(\alpha, x')$, $F(x)$ serait linéaire sur $(\alpha, x')$. Il en serait de même si l'intervalle $(\alpha, \beta)$ contenait un nombre fini de points de condensation $x'_0, x'_1, \ldots, x'_n$. Par conséquent, en autant que les points de singularité soient distribués comme ci-dessus, le théorème d'unicité de Cantor demeurerait vrai même pour un nombre infini de ces points.

Selon Cantor, cet argument permettrait également de montrer que le théorème d'unicité est valide lorsque l'intervalle $(\alpha, \beta)$ contient une infinité de points de condensation $x'_0, x'_1, \ldots, x'_n, \ldots$. Dans ce cas, le théorème de Bolzano–Weierstrass garantirait l'existence d'au moins un point de condensation $x''$ pour les $x'_i$. Si ce point d'accumulation $x''$ était unique, alors il ne pourrait y avoir qu'un nombre fini de singularités $x'_i$ dans tout sous-intervalle $(s, t)$ de $(\alpha, x'')$. Il en résulterait que la fonction $F(x)$ serait linéaire sur $(\alpha, x'')$. Un raisonnement similaire permettrait même de traiter des points de condensation $x^{\prime \cdots \prime}$.

8. Pour un aperçu de ce compte-rendu, voir Dauben [1979, p. 36–37].

Cette stratégie reposait cependant sur certaines suppositions encore sans réponses, voire sans fondements.

> *But technical difficulties intervened. The idea was one thing; making it work was quite another. How could Cantor describe such a procedure in a clear and rigorous way? How might he disentangle the various levels of singularities condensed one atop another? Given such complex point sets, how was it possible to identify their elements and to distinguish one from another in a mathematically precise manner? The only satisfactory solution was to proceed arithmetically, but Cantor discovered that do to so required a rigorous theory of real numbers. This in turn raised the difficulty of relating the arithmetic continuum of real numbers with the geometric continuum of points on a line. Thus before any significant extension of his uniqueness theorem was possible, there were a number of fundamental problems that had to be resolved*. [Dauben 1979, p. 37]

Ou, pour citer Cantor lui-même : « À cette fin, je suis obligé de commencer par des explications, ou plutôt par quelques indications destinées à mettre en lumière les diverses manières dont peuvent se comporter des grandeurs numériques en nombre fini ou infini (...) [9] » [Cantor 1966*d*, p. 92]

Pour cette raison, la première partie de l'article « *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen* » de 1872 [Cantor 1966*d*] développe une théorie des nombres réels. Sans rentrer dans les détails [10], Cantor considère le domaine $A$ des nombres rationnels, incluant zéro et commence par définir la notion de suite fondamentale [11]. Une suite infinie de nombres rationnels $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ est une *suite fondamentale* s'il existe un entier $N$ tel que pour tout $\epsilon$ positif et rationnel, $|a_{n+m} - a_n| < \epsilon$ pour tout $m, n > N$.

Cantor dit d'une suite fondamentale $\{a_n\}$ qu'elle possède une limite déterminée $b$. Il insiste pour dire cependant qu'il ne s'agit que d'un nom donné à une propriété : « Ces mots ne doivent être compris que comme exprimant *cette* propriété de la série (...) [12] » [Cantor 1966*d*, p. 93] Après avoir défini une relation d'ordre sur les suites, il démontre que la suite $\{a_n\}$ tend bel et bien vers $b$ et en conclut que cette appellation est parfaitement justifiée. De plus, ces grandeurs numériques $b$ forment un domaine $B$ auquel les opérations arithmétiques peuvent être étendues.

En considérant des suites $\{b_n\}$ dans le domaine $B$, le même procédé donne naissance à un système $C$. Plus généralement, $\lambda$ applications de ce procédé déboucheront

9. *Zu dem Ende bin ich genötigt, wenn auch zum größen Teile nur andeutungsweise, Erörterungen voraufzuschicken, welche dazu dienen mögen, Verhältnisse in ein Licht zu stellen, die stets auftreten, sobald Zahlengrößen in endlicher oder unendlicher Anzahl gegeben sind* (...)

10. Pour une présentation de la théorie des nombres réels de Cantor, voir notamment Dauben [1979, p. 37–40], Manheim [1964, p. 86–89] ou Ferreirós [1999, p. 124–131].

11. En fait, ce terme n'est pas encore utilisé par Cantor dans « *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen* ».

12. *Es haben also diese Worte zunächst keinen anderen Sinn als den eines Ausdruckes für* jene *Beschaffenheit der Reihe* (...)

sur un système $L$ et ainsi de suite. Cantor appelle les objets du système $L$ des grandeurs numériques de $\lambda^e$ espèce.

Contrairement au passage du domaine $A$ au domaine $B$, la construction des systèmes $C$, $D$, ..., $L$, etc. n'introduit aucun nouveau nombre. Bref, les systèmes $C$ et suivants ne contiennent aucun nombre que ne contient déjà $B$. La différence est en fait conceptuelle. Les systèmes $C$, $D$, ..., $L, \ldots$ sont autant de types différents de nombres réels.

L'objet de la deuxième partie de l'article est l'identification du continuum arithmétique et du continuum géométrique, c'est-à-dire des nombres et des points de la droite.

D'une part, à tout point de la droite correspond un nombre réel. En effet, les points de la droite sont déterminés par la distance, exprimée à l'aide d'une unité de mesure, qui les sépare de l'origine. Si le rapport de la distance entre un point de la droite et l'origine et l'unité de mesure est rationnel, alors à ce point correspond un élément du système $A$. Dans le cas contraire, il existe une suite $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ de points de la droite qui tend vers ce point. Or, à chacun des points de la suite correspond un nombre du système $A$. Ces nombres forment une suite fondamentale qui tend elle-même vers un nombre $b$ du système $B$. Ce nombre $b$ exprime la distance qui sépare le point de l'origine. Le même raisonnement s'applique pour les grandeurs numériques des systèmes $C$, $D$ et suivants.

D'autre part, Cantor affirme qu'à tout nombre correspond un point de la droite. L'impossibilité de démontrer cet énoncé en général le contraint toutefois à en faire un axiome. Il écrit à ce propos : « J'appelle ce théorème un *axiome* parce qu'il est dans sa nature de ne pouvoir être démontré de manière générale [13]. » [1966*d*, p. 97]

Il en ressort qu'un point de la droite est déterminé si la distance qui le sépare de zéro correspond à une grandeur numérique de $\lambda^e$ espèce.

L'importance de cette identification tient à ce qu'elle ouvre la voie à l'étude des distributions de points dans le continuum géométrique, voire de la topologie de la droite réelle. Chez Cantor, le point de départ de cette étude est la notion d'ensemble dérivé.

**Définition 1.1.1.1** (Cantor 1966*d*)**.**
- Un *voisinage* d'un point de la droite est un intervalle dont l'intérieur contient ce point.
- Soit un ensemble de points $P$. Un *point limite* de $P$ est un point de la droite tel qu'il y ait une infinité de points de l'ensemble $P$ dans son voisinage.
- Le *premier ensemble dérivé* $P'$ de $P$ est l'ensemble des points limites de $P$.

Appliqué à ce contexte, le théorème de Bolzano–Weierstass garantit l'existence d'au moins un point limite pour tout ensemble infini. Les ensembles dérivés décrivent

13. *Ich nenne diesen Satz ein* Axiom*, weil es in seiner Natur liegt, nicht allgemein beweisbar zu sein.*

donc la relation entre un ensemble de points et les points de la droite réelle. En effet, pour tout ensemble $P$, tout point de la droite réelle est un point limite de $P$ ou non. [Dauben 1979, p. 41]

Par exemple, soit $P$ l'ensemble des points rationnels de la droite réelle, c'est-à-dire l'ensemble des points associés aux nombres de l'ensemble $A$ des nombres rationnels. Dans ce cas, le premier ensemble dérivé $P'$ de $P$ n'est évidemment rien d'autre que l'ensemble $B$ des nombres réels.

De plus, si le premier ensemble dérivé $P'$ n'est pas fini, alors la considération des points limites de $P'$ permet de construire son ensemble dérivé $P''$, c'est-à-dire le deuxième ensemble dérivé de $P$. Plus généralement, $P^v$ sera le $v^{\text{e}}$ ensemble dérivé de $P$. Par définition, un ensemble de points dont le $v^{\text{e}}$ ensemble dérivé $P^v$ est fini est un *ensemble de $v^{\text{e}}$ espèce*. L'existence des ensembles dérivés est donc garantie par la correspondance entre les ensembles dérivés de $v^{\text{e}}$ espèce et les ensembles de nombres de $v^{\text{e}}$ espèce.

Finalement, la troisième partie de *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen* démontre le théorème d'unicité dans toute sa généralité.

**Théorème** (Cantor 1966*d*)**.** Soit une équation de la forme

$$0 + C_0 + C_1 + \cdots + C_n + \dots$$

telle que $C_0 = \frac{1}{2}d_0$ et $C_n = c_n \sin nx + d_n \cos nx$ pour toutes les valeurs de $x$ à l'exception de celles qui correspondent aux points d'un ensemble $P$ de $v^{\text{e}}$ espèce dans l'intervalle $(0, 2\pi)$ où $v$ désigne un entier arbitrairement grand. Alors, $d_0 = 0$ et $c_n = d_n = 0$.

Comme précédemment, la démonstration du théorème d'unicité se ramène à celle de la linéarité de la fonction

$$F(x) = C_0\frac{xx}{2} - \frac{C_2}{4} - \cdots - \frac{C_n}{nn} - \dots$$

Pour ce, Cantor considère des intervalles $(p, q)$ de $(0, 2\pi)$ contenant un nombre fini de points de $P$ et montre que $F$ est linéaire et identique sur chacun de ces intervalles. Il répète ensuite ce processus pour les ensembles dérivés de $P$. Celui-ci étant un ensemble de $v^{\text{e}}$ espèce, ce processus se termine au $v^{\text{e}}$ ensemble dérivé $P^v$ de $P$. Celui-ci étant fini, tout intervalle contient forcément un nombre fini de points de $P^v$.

Les recherches relatives au théorème d'unicité furent donc à l'origine de plusieurs innovations mathématiques fondamentales pour le développement de la topologie générale. Premièrement, Cantor définit les nouvelles notions de point limite et d'ensemble dérivé. Deuxièmement, Cantor amorça une transition des ensembles de nombres vers des ensembles de points. Comme la section 1.1.2 l'illustrera, il s'agissait d'une condition nécessaire à la généralisation de la notion d'espace.

#### 1.1.1.2 Le concept de dimension

En 1878, Cantor publia un article intitulé « *Ein Betrag zur Mannigfaltigkeitslehre* » [Cantor 1966*e*] qui fait partie des annales de l'histoire des mathématiques en raison de la transformation du concept de dimension dont il est à l'origine. Cantor, comme il le rappelle dans l'introduction, y poursuit son étude des ensembles dans la continuité des recherches de Riemann sur les *Mannigfaltigkeiten*. Il y adopte cependant un point de vue novateur en ce qu'il examine les ensembles continus et de dimension $n$ en termes de leur puissance ou, en termes contemporains, de leur cardinalité. « Dans ce qui suit, les *Mannigfaltigkeiten* dites continues et $n$-dimensionnelles seront étudiées du point de vue de leur puissance [14]. » [Cantor 1966*e*, p. 120]

Ainsi, dans la perspective de l'évolution du concept d'espace topologique, l'importance des outils ensemblistes progressivement développés à partir de 1872 pour étudier les *Mannigfaltigkeiten* infinies trouva un aboutissement dans la mise en lumière de l'insuffisance du concept de dimension intuitif hérité des Grecs.

> *In 1877, Georg Cantor (1845–1918) looked at dimension in a different way. He showed that the points of geometrical figures like squares, "clearly 2-dimensional", could be put into one-to-one correspondance with the points of straight line segments, "obviously 1-dimensional". The "simple" idea of dimension was immediately rendered problematic*. [Crilly 1999, p. 1]

Traditionnellement, le concept de dimension avait été compris géométriquement. Par exemple, chez Euclide, la définition des objets géométriques présupposait un concept de dimension.

> 1) Un *point* est ce qui n'a aucune partie (indivisible).
> 2) Une *ligne* est une longueur sans largeur.
> 3) Les *extrémités* d'une ligne (bouts) sont des points.
> 4) Une *droite* est une ligne dont l'extension entre deux quelconques de ses points est égale à la distance entre ces points.
> 5) Une *surface* est ce qui possède longueur et largeur seulement.
> 6) Les extrémités d'une surface (bords) sont des lignes. [Euclide 1978, p. 1]

Pour donner un autre exemple, au début du XIXᵉ siècle, Bolzano formula des définitions précises de point, ligne, surface et des autres figures géométriques élémentaires en utilisant les voisinages. [Crilly 1999, p. 3] À l'instar de ses contemporains, Riemann utilisa ce concept de dimension et fit de l'invariance de la dimension le présupposé essentiel de sa théorie des *Mannigfaltigkeiten* comme le souligne Cantor :

> Les recherches sur les hypothèses qui servent de fondements à la géométrie entreprises par *Riemann*, *Helmholtz* et d'autres après eux se basent sur des *Mannigfaltigkeiten* continues et $n$-étendues et considèrent que leur caractéristique essentielle est que leur éléments dépendent de $n$ variables réelles,

14. *Im folgenden sollen nun die sogenannten stetigen, $n$-fachen Mannigfaltigkeiten hinsichtlich ihrer Mächtigkeit untersucht werden.*

> continues, indépendantes l'une de l'autre de sorte qu'à chaque élément de la *Mannigfaltigkeit* correspond un système de valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ admissible et, réciproquement, à chaque système de valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ admissible correspond un élément de l'ensemble [15]. [Cantor 1966*e*, p. 121]

Selon le concept intuitif, une correspondance biunivoque entre des figures géométriques de dimensions différentes était tout simplement impensable.

Cantor était d'avis que l'inexistence d'une telle correspondance ne pouvait être acceptée sans preuve. En mai 1877, après de vaines tentatives en ce sens, il changea de stratégie et tenta de démontrer qu'une telle bijection existait. À sa grande surprise, il y parvint, d'où la célèbre phrase : « Je le vois, mais n'y crois pas. » [Lettre de G. Cantor à R. Dedekind du 29 juin 1877 cité par Dauben 1979, p. 47]

L'existence d'une correspondance biunivoque entre des *Mannigfaltigkeiten* à $n$ et $m$ dimensions ($m, n \in \mathbb{N}$) remettait en question le concept traditionnel de dimension. Comme l'écrit Crilly, « *The strange result immediately called into question the very concept of dimension. Was it well-defined or even meaningful?* » [1999, p. 4] Plus précisément, le résultat de Cantor soulevait l'insuffisance de la compréhension géométrique intuitive selon laquelle les éléments d'un espace à $n$ dimensions sont déterminés par $n$ coordonnées.

La première réaction de Cantor fut de considérer la théorie des *Mannigfaltigkeiten*, ou nouvelle géométrie, comme fondée sur une hypothèse fausse.

> Now it seems to me*, that all philosophical and mathematical deductions that make use of that erroneous assumption are unacceptable. One must rather seek the distinction between figures with* different *number of dimensions in aspects completely different from the number of independent coordinates, which is taken to be characteristic*. [Lettre de G. Cantor à R. Dedekind du 30 juin 1877 cité par Ferreirós 1999, p. 195]

Dans leur correspondance, Dedekind adopta une position plus modérée à laquelle Cantor finit par adhérer. Selon Dedekind, la dimension est l'invariant le plus important d'un espace. Il reconnut néanmoins la nécessité d'une démonstration rigoureuse pour remplacer l'acceptation intuitive et formula le problème de la dimension, c'est-à-dire l'invariance de la dimension d'un espace sous les transformations topologiques :

> *If one succeeds in setting up a one-to-one and complete correspondance between the points of a continuous manifold $A$ of $a$ dimensions on the one hand and the points of a continuous manifold $B$ of $b$ dimensions on the other, then this correspondence itself must necessarily be discontinuous if $a$ and $b$ are unequal*. [Lettre de R. Dedekind à G. Cantor du 2 juillet 1877 cité par Crilly 1999, p. 7]

15. *Die Forschungen, welche* Riemann *und* Helmholtz *und nach ihnen andere, über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen, angestellt, gehen bekanntlich von dem Begriffe einer $n$-fach ausgedehnten, stetigen Mannigfaltigkeit aus und setzen das wesentliche Kennzeichen, derselben in den Umstand, daß ihre Elemente von $n$ voneinander unabhängigen, reellen stetigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ abhängen, so daß zu jedem Elemente der Mannigfaltigkeit ein zulässiges Wertsystem $x_1, x_2, \ldots, x_n$, aber auch umgekerht zu jedem zulässigen Wertsysteme $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ein gewisses Element der Mannigfaltigkeit gehört.*

Ce problème ne serait solutionné qu'au début des années 1910 par Brouwer [16].

En rétrospective, l'existence de correspondances biunivoques entre des ensembles $n$ et $m$ dimensionnels établit la droite réelle comme modèle à partir duquel étudier les propriétés fondamentales de la continuité. De plus, les recherches de Cantor relatives au problème de la dimension marquent une première distanciation — certes timide — entre les *Mannigfaltigkeiten* comprises en tant qu'espaces et en tant qu'ensembles dans la mesure où la puissance est une propriété ensembliste alors que la dimension est une propriété spatiale.

#### 1.1.1.3 L'autonomie de la théorie des ensembles

À terme, les travaux de Cantor sur les ensembles le conduisirent à une théorie des ensembles de points infinis qu'il exposa dans la série d'articles « *Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten* » qu'il publia entre 1879 et 1884.

Cette série d'articles fut importante pour l'évolution de la topologie, mais aussi pour celui des mathématiques en général. Premièrement, Cantor y étudie les propriétés des ensembles dérivés et, ce faisant, généralise la théorie des ensembles de points aux espaces à $n$ dimensions. Deuxièmement, Cantor y développe la théorie des nombres transfinis. Par conséquent, ces articles marquent la naissance de la théorie des ensembles comme discipline mathématique autonome puisque la théorie y est présentée et étudiée en elle-même, c'est-à-dire sans faire référence à un problème extérieur ou à une motivation pratique.

Le premier article de la série [Cantor 1966$f$] poursuit l'étude des ensembles linéaires de points et classifie ces derniers de deux manières différentes.

La première classification repose sur la notion d'ensemble dérivé. Cantor en rappelle la définition et l'utilise pour distinguer les ensembles de premier et de deuxième genre. Soit $P$ un ensemble. S'il existe $n$ tel que le $n^{\text{e}}$ ensemble dérivé $P^n$ de $P$ est fini, alors $P$ est un ensemble de la $n^{\text{e}}$ espèce et du premier genre. Sinon, $P$ est un ensemble du deuxième genre.

Cantor examine ensuite la relation entre les ensembles dérivés et les ensembles partout denses dans un intervalle. Étant donné $P$ un ensemble dont l'intersection avec un intervalle $(\alpha, \beta)$ est non vide, $P$ est *partout dense dans l'intervalle* $(\alpha, \beta)$ si chaque sous-intervalle $(\gamma, \delta)$ de $(\alpha, \beta)$ contient des points de $P$. Cette relation est principalement décrite par les deux résultats suivants : (i) les ensembles partout denses sont de deuxième espèce et (ii) les ensembles de premier genre ne sont pas partout denses.

La seconde classification des ensembles linéaires de points utilise quant à elle la notion de puissance comme critère. Deux ensembles ont la même puissance si leurs éléments respectifs sont reliés par une bijection.

> [Nous avons] dit en général que deux ensembles $M$ et $N$ géométriques, arithmétiques ou appartenant à toute autre catégorie bien définie ont la *même puissance*

16. Voir Crilly [1999, p. 14–17].

> si on est en mesure d'établir entre eux une loi déterminée de telle sorte que corresponde à chaque élément de $M$ un élément de $N$ et, réciproquement, à chaque élément de $N$, un élément de $M$ [17]. [Cantor 1966*f*, p. 141]

Selon ce critère, deux ensembles de points sont équivalents si et seulement s'ils ont la même puissance.

Cantor distingue deux types d'ensembles sur la base de ce critère qu'il nomme les ensembles de première classe et de deuxième classe. La première classe regroupe tous les ensembles qui ont la même puissance que $\mathbb{N}$ alors que la seconde classe regroupe tous ceux qui ont la même puissance que $\mathbb{R}$. Autrement dit et bien qu'il n'utilise pas cette terminologie, les ensembles de la première classe sont dénombrables alors que ceux de la seconde sont non dénombrables.

Avec ce premier article, Cantor établit que les concepts ensemblistes — ensemble dérivé, puissance, etc. — ne sont pas inexorablement liés à l'étude des séries trigonométriques. Il s'agit évidemment d'un pas crucial vers l'autonomie et le développement futur de la théorie des ensembles.

Le deuxième article de la série [Cantor 1966*g*] s'affaire à deux tâches. Dans un premier temps, Cantor définit certaines notions ensemblistes comme l'intersection de deux ensembles, l'ensemble vide, l'inclusion et introduit les symboles correspondants.

Dans un second temps, il se tourne vers une caractérisation des ensembles de deuxième genre. Comme le montra le premier article de la série, les ensembles de premier genre sont complètement caractérisés par la notion d'ensemble dérivé puisque tout ensemble $P$ de premier genre et de $n^{\text{e}}$ espèce a la propriété suivante : $P^{n+1} \equiv \emptyset$, c'est-à-dire que son $n+1^{\text{e}}$ dérivé est équivalent à l'ensemble vide. La notion d'ensemble dérivé ne permet cependant pas de caractériser les ensembles de deuxième genre. En effet, pour tout $n$, le $n^{\text{e}}$ dérivé d'un tel ensemble n'est jamais fini et contient donc toujours des points limites. Cantor définit donc la notion d'ensemble dérivé d'ordre $\omega$ qui donne un avant-goût des résultats sur l'infini à venir.

Le troisième article de la série [Cantor 1966*h*] porte sur la généralisation de la théorie des ensembles de points linéaires aux ensembles de dimension supérieure.

> (...) les notions précédemment données sur les *dérivés* des divers ordres déterminés non seulement par des nombres entiers finis, mais aussi parfois par des symboles d'infini, s'étendent immédiatement aux ensembles de points que l'on rencontre dans les ensembles continus $n$-dimensionnels [18]. [Cantor 1966*h*, p. 149]

17. [*Wir haben*] *allgemein von zwei geometrischen arithmetischen oder irgendeinem andern, scharf ausgebildeten Begriffsgebiete angehörigen Mannigfaltigkeiten M und N gesagt, daß sie* gleiche Mächtigkeit *haben, wenn man imstande ist, sie nach irgendeinem bestimmten Gesetze so einander zuzuorden, daß zu jedem Elemente von M ein Element von N und auch umgekehrt zu jedem Elemente von N ein Element von M gehört.*

18. (...) *so sind die bisher vorgekommenen Begriffe der* Ableitungen *vershiedener Ordnung, wobei letztere nicht bloß durch eine endliche ganze Zahl bestimmt wird, sondern unter Umständen auch durch gewisse scharf bestimmte Unendlichkeitssymbole charakterisiert werden muß, ohne weiteres auf die stetigen n-dimensionalen Gebieten vorkommenden Punktmengen ausdehnbar.*

Cantor commence par transposer plus ou moins formellement les notions de point limite, d'ensemble dérivé et d'ensemble partout dense au cas $n$-dimensionnel. Il en ressort que les ensembles $n$-dimensionnels jouissent des mêmes propriétés que les ensembles linéaires.

Afin de motiver l'étude de la puissance d'ensembles à $n$ dimensions, Cantor effectue par la suite une courte incartade fondationnelle en caractérisant le concept d'ensemble. Selon Cantor, la théorie des ensembles ne se limite pas aux ensembles de points, mais s'applique à tout ensemble bien défini. Un ensemble est *bien défini* si (1) pour tout objet, il est possible de déterminer s'il appartient à l'ensemble ou non et (2) pour toute paire d'objets de l'ensemble, il est possible de déterminer s'ils sont égaux. Pour citer Cantor :

> J'appelle une *Mannigfaltigkeit* (un agrégat, un ensemble) d'éléments appartenant à une sphère abstraite quelconque, *bien définie* quand, par suite du principe logique du tiers exclu, on peut la considérer déterminée de telle façon que, d'abord, un objet quelconque appartenant à cette sphère abstraite étant choisi, l'on puisse regarder comme *intrinsèquement déterminé* s'il appartient ou non au système en question et que, deuxièmement, étant donnés deux objets appartenant à l'ensemble, l'on puisse regarder comme *intrinsèquement déterminé* s'ils sont égaux ou non, malgré les différences qui peuvent se présenter dans la manière dont ils sont donnés [19]. [1966*h*, p. 150]

Bien que Cantor ne franchisse pas explicitement ce pas, cette caractérisation suggère implicitement que le concept d'ensemble va bien au-delà des ensembles de points à $n$ dimensions. En d'autres termes, les éléments d'un ensemble pourraient être autre chose que des points ou des nombres.

En plus de rappeler que les ensembles $n$-dimensionnels ont la même puissance que les ensembles linéaires, Cantor formule quelques théorèmes sur les ensembles dénombrables et non dénombrables. En particulier, toute son étude de la dénombrabilité repose sur les deux résultats affirmant que toute partie infinie d'un ensemble dénombrable est elle-même dénombrable et que l'union d'ensembles dénombrables est dénombrable.

La suite du troisième article ainsi que quatrième, cinquième et sixième articles de la série « *Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten* » — le cinquième portant également le titre de « *Grundlagen deiner allgemenein Mannigfaltigkeitslehre* » — s'avèrent d'un intérêt moindre pour le développement du concept d'espace topologique puisqu'ils traitent principalement de l'infini. Cantor y développe notamment les nombres transfinis et distingue deux types d'infini ce qui le conduit à étudier la puissance des ensembles infinis et à formuler l'hypothèse du continu. Le cinquième

19. *Eine Mannigfaltigkeit (ein Inbegriff, eine Menge) von Elementen, die irgendwelcher Begriffssphäre angehören, nenne ich* wohldefiniert*, wenn auf Grund ihrer Definition und infolge des logischen Prinzips vom ausgeschlossenen Dritten es als* intern bestimmt *angesehen werden muß,* sowohl *ob irgendein derselben Begriffssphäre angehöriges Objekt, zu der gedachten Mannigfaltigkeit als Element gehört oder nicht,* wie auch*, ob zwei zur Menge gehörige Objekte, trotz formaler Unterschiede in der Art des Gegebenseins einander gleich sind oder nicht.*

article n'est cependant pas dénué de tout intérêt puisque Cantor y définit la notion d'ensemble parfait : un ensemble $P$ est *parfait* si $P = P'$.

À la lumière de ces considérations, les travaux de Cantor en théorie des ensembles contribuèrent de manière importante à la topologie. Premièrement, en définissant les notions d'ensemble fermé, dense, dénombrable, parfait, etc., il mit en place un cadre conceptuel et technique sur lequel se basera la topologie générale. Deuxièmement, Cantor décrivit la structure topologique de la droite réelle et des ensembles $n$-dimensionnels. Finalement, il associa de manière irréversible l'étude de la continuité à la topologie.

### 1.1.2 Vers un concept d'espace abstrait

Dans les années suivant la publication des articles « *Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten* » de Cantor, quelques extensions de la théorie des ensembles de points furent proposées.

En soi, la possibilité d'étendre les résultats de la théorie cantorienne des ensembles aux ensembles de fonctions suggérait une théorie des ensembles abstraits, c'est-à-dire faisant abstraction de la nature particulière des éléments considérés. Une telle théorie sera formulée par le mathématicien français Maurice Fréchet au tout début du XX^e siècle.

#### 1.1.2.1 Premières extensions de la théorie des ensembles

Les premières tentatives d'extension du concept d'ensemble à des objets mathématiques autres que des nombres sont dues à l'école italienne d'analyse et relèvent du développement de l'analyse fonctionnelle. À la fin du XIX^e siècle, certains des principaux protagonistes de cette école abordèrent le problème de la convergence uniforme d'une suite de fonctions par le biais d'ensembles de fonctions. L'extension du cadre théorique mis en place par Cantor pour les ensembles de points que ces travaux entraînèrent conduisit aux espaces fonctionnels.

L'idée d'une étude des espaces de fonctions apparut vers 1883 dans les travaux de Vito Volterra. [Epple et al. 2002, p. 701] Volterra entreprit l'étude de fonctions ayant pour domaine, non pas des nombres, mais d'autres fonctions. Il n'approfondit guère ses recherches sur le sujet en raison de l'absence d'application, mais celles-ci mirent néanmoins en évidence la possibilité d'analyser les espaces de fonctions et leurs propriétés topologiques.

En 1884, Giulio Ascoli publia un article, « *Le Curve limite di une varietà data di curve* », ayant pour objectif l'extension du théorème de Bolzano–Weierstrass aux ensembles de fonctions. Dans sa forme classique, ce théorème affirme que tout ensemble borné et infini possède un point d'accumulation. Ascoli démontre que toute suite de fonctions possède une sous-suite convergente.

**Théorème** (Ascoli 1884)**.** Soit $M$ un ensemble de fonctions continues sur $[a, b]$. Toute suite de fonctions uniformément bornées et uniformément continues $f_n$ possède une sous-suite convergente.

Quelques années plus tard, Cesare Arzelà définit la notion de fonction limite d'un ensemble de fonctions continues.

**Définition 1.1.2.1** (Arzolà 1889)**.** Soit $M$ un ensemble de fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$. Une fonction $g$ est une *fonction limite de* $M$ si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un nombre infini de fonctions $f \in M$ telles que, pour tout $x \in [a, b]$,

$$g(x) - \epsilon < f(x) < g(x) + \epsilon$$

En France, l'étude des ensembles de fonctions, et donc des extensions de la théorie des ensembles, ne prit réellement son envol qu'avec la conférence de Jacques Hadamard au premier Congrès international des mathématiciens qui eut lieu à Zürich en 1897. [Epple et al. 2002, p. 702] Son allocution s'ouvre sur l'idée d'une théorie abstraite des ensembles :

> Quoique la théorie des ensembles fasse abstraction de la nature des éléments, on a surtout considéré, jusqu'à présent, les ensembles composés de nombres, ou, tout au plus, de points dans l'espace à $n$ dimensions.
>
> Il ne me semble pas inutile de signaler l'intérêt qu'il y aurait à étudier des ensembles composés de *fonctions*. De tels ensembles peuvent d'ailleurs présenter des propriétés tout autres que les précédents. [Hadamard 1898, p. 201]

Selon Hadamard, une telle théorie légitimerait la réduction de questions d'existence d'intégrales d'équations aux dérivées partielles à des questions d'existence de minima. Hadamard propose donc d'étudier l'ensemble $E$ des fonctions continues sur l'intervalle $[0, 1]$, et, plus généralement, sur des ensembles. [1898, p. 202]

Dans les années suivantes, Émile Borel recourut de plus en plus fréquemment aux ensembles dans ses recherches sur la théorie des fonctions. En particulier, son article « Contribution à l'analyse arithmétique du continu » de 1903 [Borel 1903*a*] utilise explicitement des ensembles de droites et de plans et en décrit brièvement la topologie en termes d'ensemble dérivé, d'ensemble fermé et de point intérieur. Il en fait de même pour les ensembles de points à $n$ dimensions, mais ne suggère aucun lien entre ces deux types d'ensembles [20].

Dans « Quelques remarques sur la théorie des ensembles de droites ou de plans », un court texte publié dans le *Bulletin de la Société Mathématique de France* [Borel 1903*b*], la perspective change : les ensembles de droites et de plans sont considérés indépendamment de tout autre objectif de recherche. L'unique but de cet article est de présenter certaines propriétés des ensembles de droites et de plans. Implicitement, ces ensembles deviennent des objets mathématiques à part entière. Par le fait même, Borel repousse les limites relatives aux objets considérés en théorie des ensembles. La première phrase de son article donne d'ailleurs le ton :

20. Voir Borel [1903*a*, p. 356–360 et p. 367–372].

> La notion d'ensemble de points est aujourd'hui tout à fait classique ; il semble que l'on soit moins habitué à considérer des ensembles dont les éléments sont d'autres éléments géométriques ; cependant, certains de ces ensembles, par exemple, les ensembles de droites dans le plan ou de plans dans l'espace, se présentent dans bien des recherches et leur étude systématique, d'ailleurs aisée, est presque aussi utile que l'étude des ensembles de points. [1903*b*, p. 272]

Cette étude des ensembles de droites et de plans se fait selon un point de vue qui mérite certainement d'être qualifié de topologique. Borel commence par définir une notion de proximité pour ces objets, en parfaite analogie avec Weierstrass :

> *Étant donnée une droite fixe $D$, la droite variable $D'$ sera dite infiniment voisine de $D$ si, deux points quelconques $A$ et $B$ étant choisis sur $D$, on peut à tout nombre positif $\varepsilon$ faire correspondre une position de $D'$ telle que la distance à $D'$ de chacun des points $A$ et $B$ soit inférieure à $\varepsilon$.* (...)
>
> De même, *étant donné un plan fixe $P$, le plan variable $P'$ sera dit infiniment voisin de $P$ si, trois points quelconques non en ligne droite $A$, $B$, $C$, étant choisis sur $P$, on peut à tout nombre positif $\varepsilon$ faire correspondre une position $P'$ telle que la distance à $P'$ de chacun des points $A$, $B$, $C$ soit inférieure à $\varepsilon$.* [1903*b*, p. 272]

Avec cette notion de proximité, pour ne pas dire de limite, les propriétés topologiques fondamentales se définissent naturellement.

**Définition 1.1.2.2** (Borel 1903*b*)**.**
- Étant donné un ensemble de droites (ou de plans), l'*ensemble dérivé* est l'ensemble des droites (ou des plans) tel qu'il y ait des droites de l'ensemble infiniment voisines de ces droites.
- Un ensemble est *fermé* s'il contient tous les éléments de son ensemble dérivé. Il est *parfait* s'il est identique à son ensemble dérivé.
- Un ensemble est *borné* lorsque, étant donné un point quelconque $O$, il existe un nombre $A$ tel que la distance du point $O$ à une droite (ou plan) quelconque de l'ensemble est inférieure à $A$.

Le reste de l'article énonce quelques propriétés des ensembles dérivés et des ensembles bornés.

À la lumière de ces considérations, si ces travaux de Borel amenèrent la théorie des ensembles au-delà du cadre cantorien, ils n'en provoquèrent pas l'éclatement. Borel proposait certes que les éléments puissent être d'autres objets géométriques, mais pas des éléments quelconques.

Ces premières extensions de la théorie des ensembles comportaient néanmoins en elles la possibilité d'une théorie générale en raison de leurs ressemblances évidentes. Comme l'écrit Manheim,

> *As important, however, as these extensions are for the development of mathematics they are at best peripherical to the fundamental generalizations by abstraction. It is the generalizations rather than the piecemeal extensions which serve the unifying purpose of mathematical inquiry.* [1964, p. 115]

Il fallut attendre que Fréchet aborde les ensembles d'un point de vue abstrait par l'entremise d'axiomes pour qu'une théorie des ensembles générale unifiant les extensions particulières voit le jour.

#### 1.1.2.2 Fréchet : vers les ensembles abstraits

Les travaux de Fréchet constituent un point charnière dans l'évolution de la topologie en tant que discipline moderne, mais surtout dans celle du concept d'espace topologique. Premièrement, Fréchet poursuivit l'investigation des propriétés topologiques des ensembles et introduisit de nouvelles notions qui devinrent rapidement indispensables pour étudier les espaces — la compacité pour ne nommer que l'exemple le plus évident. Deuxièmement, en prônant l'étude des ensembles indépendamment de la nature de leurs éléments, il dégagea une conception abstraite de l'espace.

La thèse de doctorat de Fréchet est habituellement décrite — avec raison au demeurant — comme un point tournant dans l'histoire de la topologie. Par exemple, Dieudonné écrit : « Le pas décisif dans la création de la Topologie générale est franchi par M. Fréchet en 1906. » [1994, p. 40] En mettant de l'avant un point de vue abstrait, Fréchet inaugura une voie de recherche qui trouverait un premier aboutissement avec les axiomes de Hausdorff en 1914. Tout importante soit-elle, la thèse de Fréchet n'en demeure pas moins indissociable de ses recherches sur le calcul fonctionnel dont témoignent les notes de 1904 et 1905, publiées principalement dans les *Comptes rendus des séances hebdomadaires de l'Académie des sciences*. Le contenu de ces notes formerait effectivement le noyau de la thèse, mais celle-ci les présenterait en se basant sur une compréhension de l'espace en tant qu'ensemble muni d'une structure axiomatique.

**La note de novembre 1904** Les recherches de Fréchet sur les ensembles abstraits débutèrent avec la publication en novembre 1904 d'une note dans les *Comptes rendus des séances hebdomadaires de l'Académie des sciences* intitulée « Généralisation d'un théorème de Weierstrass » [Fréchet 1904]. Comme son titre le laisse présager, le sujet de cette notice est la généralisation du théorème de Bolzano–Weierstrass aux opérations fonctionnelles.

Cette généralisation se base sur une extension du domaine des arguments de la fonction. Fréchet se donne une collection — il utilise en fait le mot « catégorie » — d'éléments d'un type donné, c'est-à-dire d'entités mathématiques dont il ne spécifie pas la nature particulière. La seule condition imposée à ces éléments est qu'ils puissent être distingués. « Nous supposons donnée une certaine catégorie $\mathcal{C}$ d'éléments quelconques (nombres, surfaces, etc.), dans laquelle on sache discerner les éléments distincts. » [Fréchet 1904, p. 849] De cette collection, il extrait un ensemble $E$ sur lequel il définit une notion abstraite de fonctionnelle : $U_A$ est une *fonction* (ou *opération fonctionnelle*) *uniforme dans un ensemble* $E$ d'éléments de $\mathcal{C}$, si à tout $A$ de $E$ correspond un nombre bien déterminé $U_A$.

De par l'objectif de cette note, Fréchet se doit de transposer la structure topologique en vigueur sur la droite réelle aux ensembles abstraits. C'est elle qui est à l'œuvre dans le théorème de Bolzano–Weierstrass. Celui-ci ne pourra donc s'appliquer aux fonctionnelles – qui reposent sur des ensembles abstraits, faut-il le rappeler — que si une structure analogue y est disponible. « Ces ensembles abstraits ont évidemment besoin d'une "structure topologique" et cela dépend — comme dans le cas d'un intervalle fermé borné — d'une caractérisation de ses sous-ensembles auxquels s'applique le théorème de Bolzano–Weierstrass [21]. » [Epple et al. 2002, p. 702]

Dans la note de 1904, et bien qu'elle n'y soit qu'esquissée, cette structure topologique requise dépend d'une notion générale de limite.

**Définition 1.1.2.3** (Fréchet 1904)**.** La suite infinie $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ d'éléments de $\mathcal{C}$ a une *limite* $A$ si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(1) si la suite $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ a une limite, toute suite $A_{p_1}, A_{p_2}, \dots$ formée d'éléments d'indices croissants de la première a aussi une limite qui est la même ;

(2) si aucun des éléments $A_1, A_2, \dots$ d'une suite quelconque n'est distinct de $A$, cette suite a une limite qui est $A$.

En appliquant cette notion de limite à un ensemble d'éléments d'une catégorie $\mathcal{C}$, des notions topologiques peuvent y être définies.

**Définition 1.1.2.4** (Fréchet 1904)**.**

- Un *élément limite* d'un ensemble $E$ est un élément $A$ qui est la limite d'une suite d'éléments distincts pris dans $E$.
- Un ensemble $E$ est *fermé* s'il ne donne lieu à aucun élément limite ou s'il contient ses éléments limites.
- Un ensemble $E$ est *compact* s'il existe toujours au moins un élément commun à une suite infinie quelconque d'ensembles $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ tous non vides contenus dans $E$ lorsque ceux-ci sont fermés et chacun contenu dans le précédent.

Sur une note historique, cette définition marque la première utilisation du terme « compact ». Évidemment, la notion de compacité sera redéfinie à quelques occasions, à commencer par Fréchet lui-même dans les années suivantes, avant d'atteindre sa forme contemporaine.

Fréchet utilise cette notion de limite pour définir la continuité d'une fonctionnelle. Le résultat recherché suit immédiatement [22].

21. *Diese abstrakten Mengen benötigten natürlich eine "topologische Struktur" und es kam darauf an, in ihnen Teilmengen zu charakterisieren, für die — analog zu einem beschränkten abgeschlossenen Intervall — der Satz von* Bolzano–Weierstrass *gilt.*

22. Pour le détail, voir Fréchet [1904, p. 849].

Fréchet conclut sa notice avec une remarque sur la relation entre les ensembles abstraits compacts et les ensembles de points limités : « La définition montre aussi que les ensembles compacts jouissent de propriétés analogues à celles des ensembles limités de points de l'espace. » [1904, p. 850] Pour ne donner qu'un exemple simple, tout ensemble fini est compact et tout ensemble de points fini est limité. Il explique cette parenté en appliquant la compacité aux ensembles de points munis de la définition usuelle de limite. Sur une droite, tout ensemble limité de points est un ensemble compact. Ce faisant, il met en évidence que la théorie des ensembles de points s'intègre naturellement à son cadre axiomatique pour les ensembles, mais surtout que celui-ci s'applique à d'autres situations qui n'ont pas été examinées explicitement.

Pour résumer, l'introduction d'une structure de limite s'appliquant aux ensembles indépendamment de la nature particulière de ces derniers induit une structure proto-topologique — parce que pas tout à fait au point — qui rend possible la généralisation du théorème de Bolzano–Weierstrass aux opérations fonctionnelles. Néanmoins, au-delà de la formation de cette armature proto-topologique, l'importance de la note de 1904 pour le développement du concept d'espace topologique tient davantage à l'apparition d'un point de vue abstrait sur les ensembles.

**La note de janvier 1905** La note aux *Comptes rendus* de janvier 1905, « Sur les fonctions limites et les opérations fonctionnelles » [Fréchet 1905*a*], s'inscrit dans la continuité de la note de novembre 1904. Au plan mathématique, Fréchet y poursuit son élaboration du calcul fonctionnel. Il expose à cet égard une déficience inhérente à la notion générale de limite qui sous-tend la structure topologique exposée dans sa note précédente. Dans la théorie des ensembles de points, tout ensemble dérivé est fermé. Malheureusement, le calcul fonctionnel tel qu'il y est ébauché ne satisfait pas ce résultat, c'est-à-dire qu'il existe un ensemble dont l'ensemble dérivé n'est pas fermé [23].

> On peut se demander s'il y aurait lieu d'ajouter à ces deux conditions la suivante (qui constitue une des propriétés les plus importantes des ensembles de points) : « *Tout ensemble dérivé est fermé.* » Ou bien cette condition ne résulte-t-elle pas des deux premières ? La réponse à cette double question est négative (...) [Fréchet 1905*a*, p. 28]

La conséquence est immédiate : la structure topologique basée sur la notion générale de limite ne reproduit pas celle traditionnellement considérée sur les ensembles de points et ne peut donc servir de base à la théorie générale recherchée.

Au plan conceptuel, Fréchet n'abandonne pas pour autant l'approche abstraite inaugurée dans la note de novembre 1904. Au contraire, dans le premier paragraphe de « Sur les fonctions limites et les opérations fonctionnelles », il insiste sur la force que sa généralité confère au cadre axiomatique.

23. Pour un contre-exemple, voir Fréchet [1905*a*, p. 28]. En fait ce contre-exemple est une conséquence du contre-exemple que Fréchet présentera dans sa thèse. Voir Fréchet [1906, p. 16].

> De même qu'en Mécanique, une théorie préliminaire des vecteurs permet d'éviter la répétition des mêmes démonstrations sur les forces, les moments, les vitesses, etc.; de même, il y aurait avantage à détacher des théories sur les ensembles de points, de fonctions, de lignes, etc. et sur les opérations fonctionnelles définies dans ces ensembles, les propriétés qui leur sont communes. Mais il est indispensable, dans ce but, d'introduire (...) la notion de *limite* sans spécifier la nature des éléments auxquels elle s'applique. [Fréchet 1905*a*, p. 27]

Cet avantage en est évidemment un d'unification et de simplification. Ainsi, tout théorème de la théorie générale en est *de facto* un de toute théorie particulière parce qu'il est indépendant de la nature des éléments et découle tout simplement des propriétés des ensembles *qua* ensembles. C'est précisément le passage à une théorie abstraite qui permet de dégager ces propriétés essentielles et de les décrire axiomatiquement.

En contrepartie, le défi posé par cette approche consiste à construire la « bonne » théorie abstraite, c'est-à-dire celle qui parviendra à donner un sens aux notions topologiques malgré la totale généralité dans laquelle elles s'inscrivent désormais. Le cas échéant, le point de vue abstrait dévoilera sa pleine richesse.

**La note de février 1905** La note de février 1905, intitulée « Sur les fonctions d'une infinité de variables » [Fréchet 1905*b*], marque un point tournant dans l'étude des ensembles abstraits. Fréchet se penche sur un cas particulier du calcul fonctionnel en abordant le problème de la généralisation de la théorie des ensembles de points aux espaces à une infinité dénombrable de dimensions. « La plupart des théorèmes sur les ensembles linéaires de points ont pu être généralisés dans l'espace à $n$ dimensions. Je me propose de montrer qu'on peut pousser cette extension jusque dans un $E_\infty$, à une infinité dénombrable de dimensions. » [Fréchet 1905*b*, p. 567]

Afin d'expliciter les propriétés topologiques de l'espace $E_\infty$, Fréchet utilise une restriction de la notion générale de limite qui sera la clé de la généralisation subséquente de la théorie des ensembles de points aux ensembles arbitraires.

**Définition 1.1.2.5** (Fréchet 1905*b*)**.** Soient deux points $A$ et $A_n$ dont les coordonnées sont respectivement $a_1, a_2, \ldots a_p, \ldots$ et $a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \ldots, a_p^{(n)}, \ldots$. La suite de points $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ *tend vers* $A$ si, pour tout $p$, la suite des nombres $a_p^{(1)}, \ldots, a_p^{(n)}, \ldots$ tend vers le nombre $a_p$.

Cette notion restreinte de limite permet de définir les notions topologiques habituelles : point limite, ensemble dérivé, ensemble fermé, ensemble parfait, etc. De plus, la structure topologique $E_\infty$ satisfait les mêmes propriétés que les ensembles de points de dimension fini. À la lumière de la note de janvier 1905, la proposition affirmant que tout ensemble dérivé est fermé est particulièrement importante.

La note de février 1905 réaffirme donc la possibilité de transposer fidèlement la structure topologique caractéristique des ensembles de points au calcul fonctionnel.

Le cas de l'espace $E_\infty$ suggère qu'en adoptant une restriction appropriée de la notion générale de limite, la lacune mise en évidence dans la note de janvier 1905 — certains ensembles dérivés n'étaient pas fermés — puisse être comblée. Une tâche s'impose alors : définir cette notion restreinte de limite pour le calcul fonctionnel.

**La note de mars 1905** La note suivante, publiée en mars 1905 dans les *Comptes rendus des séances hebdomadaires de l'Académie des sciences* sous le titre « La Notion d'écart dans le Calcul fonctionnel » [Fréchet 1905*c*], est consacrée à une reconstruction du calcul fonctionnel sur la base d'une notion restreinte de limite. Cette dernière s'inspire de Weierstrass et porte le nom d'écart.

> Dans ses *Leçons sur le calcul des variations*, Weierstrass a fait un grand usage de ce qu'il appelle le *voisinage* de deux courbes infiniment voisines. Je me propose de montrer ici l'intérêt qu'il y a, dans le Calcul fonctionnel, à étendre cette notion (sous le nom d'*écart*) au cas de deux éléments quelconques. [Fréchet 1905*c*, p. 772]

La première étape de cette reconstruction est évidemment la définition de cette notion d'écart. Comme dans les notes précédentes, le point de vue est abstrait.

**Définition 1.1.2.6** (Fréchet 1905*c*)**.** Soient $\mathcal{C}$ une classe d'éléments de nature arbitraire. À toute paire d'éléments $A$ et $B$ de $\mathcal{C}$ correspond un nombre réel $(A, B)$ appelé l'*écart* de $A$ et $B$ tel que

(1) $(A, B) \geq 0$

(2) $(A, B) = 0$ si et seulement si $A = B$

(3) Si $(A, C)$ et $(B, C)$ sont infiniment petits, alors $(A, B)$ est infiniment petit.

Il importe d'insister sur le fait que ce n'est pas une notion différente de limite qui est définie, mais bien une restriction de celle originellement introduite dans « Généralisation d'un théorème de Weierstrass », la note de 1904. Fréchet n'insiste pas tellement sur cette nuance se contentant de mentionner dans une note de bas de page que tout écart satisfait également les deux conditions définissant la limite en général. Cette idée de coexistence de structures de limite différentes sur un même ensemble atteindra sa pleine réalisation dans sa thèse dont elle sera une idée clé.

L'écart de deux éléments d'un ensemble permet de définir la limite d'une suite dans un ensemble abstrait :

**Définition 1.1.2.7** (Fréchet 1905*c*)**.** Une suite d'élément $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ *tend vers l'élément* $A$ si l'écart $(A, A_n)$ tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

Reconstruite en termes d'écart, la structure topologique des ensembles abstraits possède toutes les propriétés des ensembles de points. En particulier, Fréchet démontre que tout ensemble dérivé est fermé. Il en résulte que la notion d'écart donne lieu à une généralisation satisfaisante de la théorie des ensembles de points. En effet, toute théorie des ensembles d'un type d'objets donné doit dorénavant être vue comme un cas particulier de cette théorie générale.

> J'ajouterai pour terminer que les propositions précédentes et celles qui figurent dans les Notes du 21 novembre 1904 et du 2 janvier 1905 doivent être considérées comme la généralisation de théorèmes fort importants obtenus précédemment par M. Cesare Arzelà. Elles se réduisent à ces théorèmes (sans avoir à les utiliser pour leurs démonstrations) en prenant, selon les cas, comme éléments particuliers tantôt les nombres, tantôt les fonctions ou des courbes. [Fréchet 1905*c*, p. 774]

Ainsi, si la théorie de Fréchet est historiquement tributaire des premières extensions de la théorie cantorienne, à l'inverse et plus fondamentalement, celles-ci sont conceptuellement tributaires de la sienne. Les théories des ensembles de points, de courbes, de fonctions, etc. se présentent comme des cas particuliers valables pour un type d'éléments spécifique de la théorie générale. Ce faisant, Fréchet établit clairement l'intérêt d'une approche abstraite en topologie.

**Les articles de l'automne 1905** Fréchet publiera deux autres textes reliés à la théorie des ensembles abstraits et au calcul fonctionnel avant sa thèse. Le premier, complété en mai 1905, fut publié en octobre 1905 dans les *Transactions of the American Mathematical Society* sous le titre « Sur l'écart de deux courbes et sur les courbes limites » [Fréchet 1905*d*]. Le mois suivant, c'est-à-dire en novembre 1905, parut la note « Les ensembles de courbes continues » dans les *Comptes rendus des séances hebdomadaires de l'Académie des sciences* [Fréchet 1905*e*].

Ces deux notes étudient les ensembles d'arcs de courbes continues dans l'espace tridimensionnel et ne contiennent aucun nouveau développement de la théorie abstraite des ensembles. Malgré cela, elles s'inscrivent dans la lignée des notes précédentes dans la mesure où les ensembles d'arcs de courbes sont l'occasion d'un retour de la théorie des ensembles abstraite vers un cas concret. Premièrement, les arcs de courbes dans l'espace à trois dimensions sont étudiés à l'aide de la notion d'écart. Deuxièmement, au lieu d'étudier directement les ensembles d'arcs de courbes continues et leurs propriétés, Fréchet les aborde à travers le prisme de la théorie générale ou, autrement dit, en tant que cas particulier d'ensembles abstraits. La définition d'un écart sur les arcs de courbes continues est donc suffisante pour en obtenir une caractérisation topologique : « On pourra donc appliquer les théorèmes énoncés dans les Comptes-Rendus [*sic*] du 20 Mars [*sic*] 1905, *Sur la notion d'écart dans le Calcul fonctionnel.* » [Fréchet 1905*d*, p. 439, n.] Le cas des arcs de courbes illustre le processus de contextualisation d'une théorie abstraite à des objets dont la nature est spécifiée.

Fréchet présenta systématiquement la théorie abstraite des ensembles dans sa thèse.

**La thèse de 1906** La thèse de Fréchet, complétée en avril 1906 et publiée dans les *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, porte le titre « Sur quelques points du calcul fonctionnel » [Fréchet 1906]. Son objectif est de développer systématiquement les principes fondamentaux du calcul fonctionnel et de les appliquer à des cas concrets. La thèse reprend donc les idées et résultats énoncés dans les différentes notes des années 1904 et 1905, mais en donne une présentation fort différente dans la mesure où Fréchet développe son point de vue abstrait de manière systématique.

Selon Fréchet, puisque le calcul fonctionnel dépend de la théorie des ensembles qui le sous-tend, le point de vue abstrait garantit une généralité et une simplicité maximales. Premièrement, une théorie des ensembles abstraits fait en sorte que les notions topologiques sont définies pour n'importe quel type d'objets mathématiques et donc que les théorèmes déduits auront une portée maximale.

> Les résultats qu'on obtiendra dans une telle théorie seront d'autant plus étendus qu'on s'adressera à des ensembles généraux. Pour obtenir la plus grande généralité, il y aurait donc lieu de chercher d'abord des résultats applicables à des ensembles abstraits, c'est-à-dire dont on ne spécifie pas la nature des éléments. [Fréchet 1906, p. 4]

Deuxièmement, parce qu'elle fait abstraction de la nature des objets, une théorie abstraite des ensembles ne prend en considération que ce qui est commun à toutes les théories particulières. En travaillant au niveau abstrait, les propriétés démontrées sont celles de la théorie générale.

> En procédant ainsi, il arrive que certaines démonstrations sont rendues plus difficiles puisqu'on se prive d'une représentation plus concrète. Mais ce que l'on perd ainsi, on le regagne largement en se dispensant de répéter plusieurs fois sous des formes différentes les mêmes raisonnements. On y gagne souvent aussi d'apercevoir plus nettement ce qui dans les démonstrations était véritablement essentiel et de les simplifier ainsi en les débarrassant de ce qui ne tenait qu'à la nature propre des éléments considérés. C'est ce que nous allons essayer de faire pour le Calcul Fonctionnel et en particulier pour la théorie des ensembles abstraits. [Fréchet 1906, p. 5]

À ce propos, l'approche de Fréchet est encadrée par une conception claire de ce qu'est une « bonne » théorie abstraite des ensembles. Il énonce trois conditions qu'une théorie devra respecter pour être satisfaisante :

(1) s'énoncer indépendamment de la nature des éléments considérés ;

(2) s'appliquer aux classes d'éléments rencontrées le plus fréquemment dans les applications ;

(3) inclure des généralisations des théorèmes sur les ensembles de points de la ligne et les fonctions continues réelles. [Fréchet 1906, p. 17]

Dans une certaine mesure, ces conditions étaient implicitement à l'œuvre dans les différentes notes aux *Comptes rendus*. Dans la thèse, elles servent explicitement de guide dans la construction de la structure de limite appropriée.

« Sur quelques points du calcul fonctionnel » comporte deux parties. La première s'intéresse à la structure topologique des ensembles abstraits. À cet égard, il est intéressant de remarquer que Fréchet n'utilise pas le terme « topologie », mais affirme plutôt étudier les ensembles abstraits tout simplement. La notion fondamentale est toujours celle de limite d'une suite d'éléments.

**Définition 1.1.2.8** (Fréchet 1906)**.** Une *classe* $(L)$ est une classe abstraite telle que

(1) il est possible de déterminer si deux éléments sont distincts ;

(2) une suite infinie d'éléments d'un ensemble $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ a une limite $A$ si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

   (a) si la suite $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ a une limite, toute suite $A_{p_1}, A_{p_2}, \ldots$ formée d'éléments d'indices croissants de la première suite a aussi une limite qui est la même ;

   (b) si aucun des éléments $A_1, A_2, \ldots$ d'une suite quelconque n'est distinct de $A$, cette suite a une limite qui est $A$.

Par définition, un ensemble d'éléments d'une classe $(L)$ est un ensemble muni de la structure générale de limite définie par Fréchet dans sa note de novembre 1904 [24]. Les classes $(L)$ renvoient donc à un type d'espace qui se distingue, non par la nature de ses éléments, mais par sa structure.

Par la suite, Fréchet transpose les notions topologiques utilisées pour caractériser les ensembles de points aux classes $(L)$ : élément limite, ensemble dérivé, ensemble fermé, ensemble parfait, élément de condensation, etc. Par exemple,

**Définition 1.1.2.9** (Fréchet 1906)**.** Soient une classe $(L)$ et $E$ un ensemble d'éléments de cette même classe. Un élément $A$ de la classe $(L)$ est un *élément limite* de $E$ s'il existe une suite infinie d'éléments distincts $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ qui tend vers $A$.

Les classes $(L)$ ont cependant un défaut de taille : un ensemble dérivé d'éléments d'une classe $(L)$ n'est pas nécessairement fermé. Il est alors impossible, dans les classes $(L)$, de reproduire les théorèmes sur les ensembles de points qui découlent habituellement de ce résultat. Conséquemment, les classes $(L)$ ne satisfont pas toutes les conditions imposées par Fréchet afin qu'une théorie abstraite des ensembles puisse fonder le calcul fonctionnel.

En contrepartie, l'impossibilité de démontrer que tout ensemble dérivé est fermé ne signifie pas que la notion de limite privilégiée par Fréchet est erronée, mais plutôt que la structure des classes $(L)$ est trop générale pour satisfaire aux conditions imposées à une théorie des ensembles abstraits, en particulier celle stipulant qu'une telle théorie doit généraliser la théorie des ensembles de points.

24. Cf. définition 1.1.2.3.

> Nous avons vu dans ce qui précède comment on peut arriver à généraliser certains théorèmes dans les classes si étendues que nous avons appelées classes ($L$). Néanmoins le petit nombre des hypothèses que nous avons faites sur les classes ($L$) ne nous permettra pas de poursuivre cette extension. On s'aperçoit bien vite que certaines propositions fondamentales de la théorie des ensembles linéaires et des fonctions continues, dont l'énoncé mis sous forme convenable peut garder un sens pour les classes ($L$), que ces propositions, dis-je, ne sont plus vraies pour toute classe ($L$). Par là-même échoue toute tentative de généralisation des propositions ultérieures auxquelles elles servent de base. [Fréchet 1906, p. 15]

Pour pallier à la situation, Fréchet introduit une autre structure de limite sur les ensembles qu'il appelle « voisinage ». Celle-ci reprend la notion d'écart définie dans la note de mars 1905 à la différence près qu'elle précise ce qu'il faut entendre par « infiniment petit »[25]. Les entités mathématiques résultantes seront les classes ($V$).

**Définition 1.1.2.10** (Fréchet 1906)**.** Une *classe* ($V$) est une classe ($L$) telle que pour tout éléments $A$, $B$, il existe un nombre $(A, B)$, le voisinage de $A$ et $B$, tel que :

(1) $(A, B) = (B, A) > 0$ ;

(2) $(A, B) = 0$ si et seulement si $A = B$ ;

(3) il existe une fonction positive $f(\varepsilon)$ définie pour $\varepsilon$ positif telle que

  (a) $\lim_{\varepsilon\to 0} f(\varepsilon) = 0$ ;

  (b) pour tout $C$, si $(A, B) < \varepsilon$ et $(B, C) < \varepsilon$, alors $(A, C) < f(\varepsilon)$.

À la lumière de cette définition, un voisinage doit se comprendre comme une fonction à valeur réelle qui fournit une mesure de la proximité de deux points. De plus, les voisinages s'obtiennent en imposant des conditions supplémentaires à la notion de limite à la base des classes ($L$). Ces conditions traduisent une structure de limite moins générale que celle en vigueur dans les classes ($L$). L'utilisation de classes de types différents traduit à merveille l'idée qu'un voisinage n'est pas une autre notion de limite, mais bien une restriction de la notion générale : toute classe ($V$) est un cas particulier de classe ($L$) satisfaisant des conditions supplémentaires. Par exemple, la limite d'une suite d'éléments d'une classe ($V$) se définit comme suit :

**Définition 1.1.2.11** (Fréchet 1906)**.** Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ une suite d'éléments dans une classe ($V$). Cette suite a pour *limite* $A$ si le voisinage $(A_n, A)$ tend vers 0 avec $\frac{1}{n}$.

Une limite pour une telle suite dans une classe ($V$) en est également une dans une classe ($L$). Il en est ainsi parce que toute limite dans une classe ($V$) satisfait les deux conditions de la définition générale. Par contre, tout élément limite d'une suite d'éléments d'une classe ($L$) n'en est pas nécessairement un dans une classe ($V$).

25. Cf. définition 1.1.2.6.

Par conséquent, la structure topologique des classes $(V)$ est tributaire de celle des classes $(L)$. En raison de la restriction de la notion de limite sur laquelle elle se base, leur structure est également plus riche. Pour ne donner qu'un exemple très important, l'ensemble dérivé d'un ensemble d'éléments d'une classe $(V)$ est fermé. Les classes $(V)$ offrent donc la souplesse et la généralité nécessaires pour l'élaboration de la théorie des ensembles abstraits recherchée.

L'étude topologique des classes $(V)$ conduit Fréchet à introduire de nouvelles notions — par exemple la séparabilité et la complétude, bien qu'il n'utilise pas ce terme comme le fait remarquer avec insistance Taylor [1982, p. 256] — et à généraliser plusieurs résultats classiques comme les théorèmes de Borel–Lebesgue et de Cantor–Bendixson.

Fréchet se voit toutefois incapable de démontrer qu'un ensemble $G$ dans une classe $(V)$ est fermé et compact si toute opération fonctionnelle continue sur $G$ y est bornée et y atteint son extremum. Ceci le conduit à introduire une restriction des classes $(V)$ : les classes $(E)$ [26].

**Définition 1.1.2.12** (Fréchet 1906)**.** Une *classe* $(E)$ est une classe $(V)$ telle que pour tout $A$, $B$ et $C$, $(A, C) \leq (A, B) + (B, C)$.

Autrement dit, une classe $(E)$ est une fonction à valeur réelle qui satisfait l'inégalité triangulaire. Fréchet lui donne le nom d'écart. En termes contemporains, toute classe $(E)$ est munie d'une distance et est donc un espace métrique [27].

La deuxième partie de la thèse est consacrée à l'application de la théorie générale à des cas particuliers. Fréchet considère six exemples de classes $(E)$ parmi lesquels la droite réelle et les espaces euclidiens à $n$ dimensions. Sa stratégie est claire : il suffit de contextualiser la théorie générale en spécifiant le type d'entités mathématiques considérées. La principale difficulté est de construire une notion d'écart qui respecte la description axiomatique et qui tient compte des propriétés particulières de ces entités mathématiques.

> La méthode que nous aurons à employer pour appliquer la théorie générale aux cas particuliers obtenus en spécifiant la nature des éléments, s'indique d'elle-même. Dans tous les exemples qui suivront, nous commencerons par définir la classe d'éléments sur laquelle nous aurons à opérer ; en particulier nous donnerons une règle permettant de discerner les éléments distincts, ce qui n'est pas aussi simple qu'on pourrait le croire (n° 76–77). Puis nous montrerons qu'on peut toujours considérer la définition ordinaire de la limite de ces éléments comme rentrant dans la définition que nous avons donnée de l'*écart* (cas particulier de voisinage, n° 49). *Ceci fait, il n'y aura plus qu'à répéter les théorèmes généraux de la* Première Partie *énoncés dans le langage qui correspond*

26. Hahn démontra que cette proposition est vraie dans les classes $(V)$ en 1908. En 1917, la démonstration de Chittenden à l'effet que tout espace topologique est métrisable rendra définitivement caduque la distinction entre les classes $(V)$ et les classes $(E)$. [Shore 1998]

27. Historiquement, l'appellation « espace métrique » est due à Hausdorff. Voir [Epple et al. 2002, p. 703], mais aussi la section 1.1.3.3.

> *à la classe considérée*. Enfin, nous donnerons dans chaque cas une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble soit compact (n° 9). Cela revient à remplacer la définition générale de l'ensemble compact par une définition d'une apparence moins abstraite, mais particulière à chaque cas. [Fréchet 1906, p. 34]

Historiquement, l'impact mathématique de certains aspects des travaux topologiques de Fréchet fut limité comme en témoigne l'oubli dans lequel sont tombées les classes $(L)$, $(V)$ et $(E)$. À l'opposé, l'étude abstraite des espaces, c'est-à-dire par l'entremise d'axiomes de manière à ne pas tenir compte de la nature des objets, eut une influence cruciale sur le développement du concept d'espace. Ce saut dans l'abstraction permit d'atteindre une généralité totale comme le dit éloquemment Hadamard :

> Du moment qu'on abandonne les ensembles ponctuels à la considération desquels s'était borné Cantor, convient-il de s'astreindre à étudier uniquement les ensembles de fonctions ? Le très grand mérite de M. Fréchet est d'avoir compris qu'il n'y a aucune raison pour cela. Nous ne sommes plus aidés par cette intuition du continu qu'a [*sic*] guidé Cantor et ses continuateurs même dans les conclusions les plus paradoxales auxquelles ils ont abouti ; du moment qu'il est ainsi, il n'y a aucune [*sic*] avantage, tout au moins jusqu'à nouvel ordre, à supposer que les éléments sur lesquels nous raisonnerons et que nous grouperons en ensembles soient des fonctions plutôt qu'autre chose. M. Fréchet nous a appris à raisonner sur des ensembles entièrement abstracts [*sic*], c'est-à-dire composés d'éléments sur lesquels on ne fait, tout au moins en commençant, aucune hypothèse. Il va d'un coup à l'extrême généralité, une généralité qui, par définition, ne pourra jamais être dépassée. [Rapport de J. Hamadard du 26 février 1934 à l'Académie des Sciences afin d'appuyer la candidature de Fréchet cité par Taylor 1982, p. 263] [28]

Par ricochet, Fréchet établit hors de tout doute la fertilité de son point de vue. « *What was significant, historically, was the fact that an abstract point set topology was shown to be feasible and fruiful and that it applied significantly to realms other than point set theory in Euclidean space of 1 or n dimensions*. » [Taylor 1982, p. 261] D'une part, les applications exposées dans la seconde partie de sa thèse attestaient de la pertinence d'une approche abstraite. D'autre part, l'introduction de nouvelles notions topologiques telle la compacité, pour n'en nommer qu'une seule, rendait possible une étude plus fine de la structure topologique des espaces. Or, l'introduction de ces concepts n'était possible que dans le contexte d'une théorie abstraite.

Finalement, avec les classes $(L)$, $(V)$ et $(E)$, Fréchet introduisit trois types d'ensembles abstraits et montra, par le fait même, que diverses structures topologiques pouvaient être considérées sur un même ensemble. La coexistence de plusieurs structures sur un même ensemble participa à la conceptualisation de l'espace en tant qu'ensemble muni d'une structure et contribua à l'apparition d'une distinction claire entre les concepts d'espace et d'ensemble.

28. Les fautes de français sont vraisemblablement dues à Taylor.

Pour Fréchet, un espace se compose donc de points, fussent-ils des nombres, des fonctions, etc. de telle sorte que ses espaces abstraits contribuèrent à imposer une compréhension pointilliste. Par le fait même, par rapport aux *Mannigfaltigkeiten* de Riemann qui étaient, il importe de le rappeler, des totalités, le glissement qu'avait initié Cantor s'était transformé en cassure.

Les recherches topologiques subséquentes maintiendront le point de vue induit par le concept abstrait d'espace. En faisant abstraction de la nature des éléments, Fréchet permit à la topologie d'atteindre une première forme de généralité. Il restait cependant à définir un concept d'espace topologique qui soit lui-même général, c'est-à-dire dont la structure serait la plus dépouillée possible.

### 1.1.3 Axiomatisation du concept d'espace topologique

Au cours de la décennie suivant la thèse de Fréchet, les recherches sur les espaces topologiques prirent principalement la forme de tentatives d'axiomatisation dans le contexte de la théorie des ensembles. L'objectif commun à toutes ces tentatives était la formulation d'un concept d'espace topologique satisfaisant, c'est-à-dire l'identification d'axiomes qui lui conféreraient sa pleine généralité. Dans la pratique, la principale difficulté consistait à s'assurer que les axiomes choisis induisaient un concept d'espace suffisamment général pour toutes les applications tout en évitant qu'il ne le soit trop et qu'il soit donc inopérant. Les travaux de Riesz et de Hausdorff furent des moments clés dans le dévoilement de la structure des espaces topologiques.

#### 1.1.3.1 Hilbert et les axiomes du plan

Historiquement, l'idée de fondements axiomatiques de la topologie semble trouver son origine chez David Hilbert. Dès 1902 et donc avant la méthode abstraite de Fréchet, Hilbert définit dans le cadre de ses travaux sur les fondements de la géométrie le plan comme une *Mannigfaltigkeit* bidimensionnelle connexe en formulant des axiomes de voisinages :

> Le plan est un système de points. Chaque point $A$ détermine certains sous-systèmes de points auxquels il appartient lui-même et qui s'appellent voisinages du point $A$.
>
> Inversement, les points d'un voisinage se laissent toujours clairement représenter par les points d'un domaine de Jordan dans le plan des nombres. Tout domaine de Jordan contenu dans un de ces domaines de Jordan qui contient le point $A$ est à nouveau un voisinage de $A$. Le domaine de Jordan s'appellera une image de chaque voisinage. Posons les différentes images d'un voisinage, alors la transformation inverse des domaines de Jordan concernés est de ce fait clairement continue.
>
> Si $B$ est un point quelconque dans un voisinage de $A$, alors ce voisinage est également un voisinage de $B$.
>
> Pour deux voisinages quelconques d'un pont $A$, il y a toujours un tel voisinage du point $A$ qui réunit les deux voisinages.

> Si $A$ et $B$ sont deux points quelconques de notre géométrie, alors il y a toujours un voisinage qui contient simultanément les deux points $A$ et $B$[29]. [D. Hilbert, *Über die Grundlagen der Geometrie* cité par Epple et al. 2002, p. 708]

Tout en accordant une place de choix aux points, la définition de Hilbert n'en suggère pas moins que le plan puisse être compris en termes de voisinages. De plus, elle met de l'avant une conception abstraite du plan, c'est-à-dire d'un cas particulier d'espace.

Dans son livre *Grundlagen der Geometrie*, Hilbert ajouta une remarque importante à propos des conditions qui déterminent abstraitement le plan dans sa définition : « Elles fournissent les bases en vue d'un traitement axiomatique de l'Analysis situs[30]. » [D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie* cité par Epple et al. 2002, p. 710]

Hilbert ne creusa pas plus loin l'idée d'une définition axiomatique de l'espace et, historiquement, force est d'admettre qu'elle eut une influence mineure sur le développement du concept d'espace à l'œuvre en topologie générale[31]. Conceptuellement, l'idée n'en était pas moins lancée…

#### 1.1.3.2 Riesz et l'axiomatisation du continuum mathématique

Le mathématicien hongrois Frigyes Riesz publia entre 1907 et 1910 quelques articles qui abordèrent la question de l'axiomatisation du concept d'espace topologique. Le premier de ces articles, « *Die Genesis des Raumbegriffs* », fut publié en 1907 et est tiré d'une conférence prononcée le 22 janvier 1906 à l'Académie hongroise des sciences [Riesz 1960*a*].

Au plan mathématique, Riesz, à l'instar des mathématiciens dont il fut question dans les sections précédentes, en vint à considérer cette question dans le cadre de ses recherches en théorie des ensembles et en analyse fonctionnelle. Or, l'intérêt de Riesz est également épistémologique. La première partie de l'article se penche sur

29. *Die Ebene ist ein System von Punkten. Jeder Punkt A bestimmt gewisse Theilsysteme von Punkten, zu denen er selbst gehört und welche Umgebungen des Punktes A heißen.*

*Die Punkte einer Umgebung lassen sich stets umkehrbar eindeutig auf die Punkte eines gewissen Jordanschen Gebietes in der Zahlenebene abbilden. Jedes in diesem Jordanschen Gebiete enthaltene Jordansche Gebiet, welches den Punkt A umschließt, ist wiederum eine Umgebung von A. Das Jordansche Gebiet wird ein Bild jener Umgebung gennant. Liegen verschiedene Bilder einer Umgebung vor, so ist die dadurch vermittelte umkehrbar eindeutige Transformation der betreffenden Jordanschen Gebiete aufeinander eine stetige.*

*Ist B irgendein Punkt in einer Umgebung von A, so ist diese Umgebung auch zugleich eine Umgebung von B.*

*Zu irgend zwei Umgebungen eines Punktes A giebt es stets eine solche Umgebung des Punktes A die beiden Umgebungen gemeinsam ist.*

*Wenn A und B irgend zwei Punkte unserer Geometrie sind, so giebt es stets eine Umgebung die beide Punkte A und B gleichzeitig enthält.*

30. *Auch bieten sie die Grundlage für eine axiomatische Behandlung der Analysis situs.*

31. Voir Epple et al. [2002, p. 708–710]. Sur les axiomes de voisinages de Hilbert, voir également Koetsier et Mill [1999, p. 211].

la conceptualisation de l'espace, c'est-à-dire, comme il l'écrit dans l'introduction, « *die Frage* (...) *der Entwicklungen des Raumbegriffs.* » [Riesz 1960*a*, p. 113] Plus spécifiquement, Riesz cherche à établir une relation entre l'expérience subjective de l'espace et l'espace mathématique. [Koetsier et Mill 1999, p. 211] Il discute longuement du problème de l'espace et des thèses de Poincaré sur le sujet et donne une caractérisation de l'espace physique.

Dans un second temps, Riesz propose une axiomatisation de l'espace mathématique ou, pour reprendre sa terminologie, d'un continuum mathématique basée sur la notion de point de condensation.

**Définition 1.1.3.1.** (Riesz 1960*a*) Une *Mannigfaltigkeit* est un *continuum mathématique* si pour tout élément $p$ et sous-ensemble $M$, une et une seule des deux conditions suivantes est satisfaite :

(1) $p$ est un point isolé de $M$ ;

(2) $p$ est un point de condensation de $M$.

Dans ce cas, les axiomes suivants sont satisfaits :

a) tout élément d'un sous-ensemble fini est un point isolé de celui-ci ;

b) Si $p$ est un point de condensation d'un sous-ensemble $M$, alors $p$ est également un point de condensation de tout sous-ensemble $M'$ inclus dans $M$ ;

c) Si un sous-ensemble $M$ est divisé en deux sous-ensembles $M'$ et $M''$, alors tout point de condensation de $M$ est également un point de condensation de $M'$ ou de $M''$ ;

d) Si $p$ est un point de condensation d'un sous-ensemble $M$ et $q$ est un élément différent de $p$, alors il existe un sous-ensemble $M'$ distinct de $M$ tel que $p$ est un point de condensation de $M'$ et $q$ est un point isolé de $M'$.

Les ensembles de points constituent l'exemple le plus simple d'espace mathématique [32]. Riesz ajoute que, dans le contexte des ensembles de points, des axiomatisations basées sur les concepts de distance et de type d'ordre sont possibles.

Différentes notions topologiques sont par la suite définies : voisinage, élément intérieur, élément limite, ouvert, frontière, connexité [33], ensemble dérivé, etc. Par exemple, un sous-ensemble d'un espace mathématique est un *voisinage* d'un élément $A$ s'il contient $A$ et si $A$ est un point isolé de son complément. Un élément $A$ d'un sous-ensemble $M$ est un *élément intérieur* de $M$ si (1) $M$ est un voisinage de $A$ et (2) $A$ n'est pas un point de condensation du complément de $M$. Un sous-ensemble est *ouvert* s'il ne se compose que d'éléments intérieurs.

32. Riesz [1960*a*, p. 119] parle en fait de « *Punktmannigfaltigkeiten* ».

33. Contrairement à la topologie combinatoire, Riesz caractérisait la connexité à l'aide de méthodes ensemblistes et non géométrico-algébriques. Voir Wilder [1978, 1980] pour l'évolution de la notion de connexité.

Ces notions sont secondaires par rapport à celle de point de condensation dans la mesure où la définition de continuum mathématique est formulée en termes de la dernière et non de l'une des premières. Par contre, la notion de voisinage n'en est pas pour autant assujettie à celle de point de condensation. Les voisinages d'un continuum se définissent sans faire référence aux points de condensation de l'espace.

Finalement, une analyse topologique des continuums mathématiques à l'aide de ce réseau de concepts permet d'obtenir plusieurs propriétés de ces objets mathématiques. Pour n'en indiquer que deux, les théorèmes de Bolzano–Weierstrass et de Borel sont démontrés [34].

L'article « *Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre* » de 1908 [Riesz 1960*b*] marque un recentrage sur la seule caractérisation de l'espace topologique de manière à clarifier la notion de continuité. Riesz y expose une axiomatisation des *mathematischen Kontinua* — terme qu'il continue à employer pour désigner les espaces. Sans la motiver directement, les espaces abstraits de Fréchet n'en influencèrent pas moins partiellement l'axiomatisation de Riesz dans la mesure où il ne les trouvait pas assez généraux. [Riesz 1960*b*, p. 157] Bien qu'elle se base encore sur la notion de point de condensation, les axiomes sont différents.

**Définition 1.1.3.2** (Riesz 1960*b*)**.** Un *continuum mathématique* est un ensemble pour lequel la notion de point de condensation est définie et qui satisfait les trois postulats suivants :

(1) Si $p$ est un point de condensation d'un sous-ensemble $M$, alors $p$ est également un point d'accumulation de tout ensemble contenant $M$.

(2) Si un sous-ensemble $M$ est divisé en deux sous-ensembles, alors tout point de condensation de $M$ est un point de condensation d'au moins un des deux sous-ensembles.

(3) Un sous-ensemble constitué d'un seul élément n'a pas de point de condensation.

Le concept d'espace auquel donnent lieu ces trois postulats est cependant trop général pour être réellement utile au plan mathématique comme l'écrit Riesz : « Les trois conditions (...) sont si larges que, sur leur seule base, l'on ne peut construire que bien peu [35]. » [1960*b*, p. 156]

Une quatrième condition est imposée afin de pallier à cette lacune et donc d'obtenir un concept d'espace dont la généralité serait moindre, mais surtout plus fructueuse :

(4) Tout point de condensation $p$ d'un ensemble $M$ est uniquement déterminé par la totalité des sous-ensembles de $M$ dont $p$ est un point de condensation.

34. Voir Riesz [1960*a*, p. 136 et 137 respectivement].

35. *Die drei Forderungen (...) sind so weit gefasst, dass man auf ihnen allein nur sehr wenig weiter bauen kann.*

Riesz ne donne cependant aucune indication quant à ce qu'il faut comprendre par « uniquement déterminé » (*eindeutig bestimmen*).

Tel que mentionné ci-dessus, Riesz aborde dans « *Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre* » l'étude des continuums mathématiques comme un moyen de comprendre le phénomène mathématique fondamental qu'est la continuité. Dans cette optique, la motivation implicite était de montrer que la continuité peut être entièrement caractérisée en termes de point de condensation. Il doit toutefois admettre que le concept d'espace déterminé par ses quatre axiomes est à cette fin inadéquat. Par exemple, $\mathbb{R} - \{0\}$ et $\mathbb{R} - [0, 1]$ sont équivalents en ce qui a trait à leurs points de condensation, mais sont fondamentalement différents au chapitre de la continuité.

Riesz en conclut qu'un nouveau concept qui permettrait de déterminer si deux sous-ensembles arbitraires d'une *Mannigfaltigkeit* sont liés est requis. Ce concept sera celui de liaison [36]. Riesz décrit axiomatiquement ce nouveau concept :

(1) Si $M_1$ et $M_2$ sont deux ensembles liés, alors toute paire d'ensembles contenant $M_1$ et $M_2$ sont liés.

(2) Si $M_1$ et $M_2$ sont deux ensembles liés et si $M_1$ est divisé en deux sous-ensembles, alors au moins un de ces sous-ensembles est lié à $M_2$.

(3) Si $M_1$ et $M_2$ sont deux ensembles qui ne contiennent qu'un seul élément, alors $M_1$ et $M_2$ ne sont pas liés.

L'idée de Riesz était d'associer les notions de point de condensation et de liaison d'une *Mannigfaltigkeit*.

Comme le souligne Bourbaki, la théorie de Riesz resta au stade d'ébauche : « Quant à F. Riesz, qui partait de la notion de point d'accumulation (ou plutôt, ce qui revient au même, d'ensemble « dérivé »), sa théorie était encore incomplète et resta au stade d'ébauche. » [1974, p. 180] Pour cette raison, les travaux en théorie des ensembles de Riesz n'eurent qu'une faible influence sur le développement de la topologie générale comme le remarquent Epple et al. [2002, p. 703]. Pourtant, Riesz était convaincu qu'une théorie abstraite des ensembles pouvait être construite en utilisant les notions de point de condensation et de liaison. [Koetsier et Mill 1999, p. 212] Par contre, comparativement à celles de Fréchet, ses notions apparaissent peu efficaces, mais aussi bien moins élégantes. L'impact qu'aurait pu avoir la théorie de Riesz, l'eut-il complétée, n'en est que plus incertain.

En contrepartie, les recherches que menaient en parallèle Riesz et d'autres mathématiciens comme Schmidt en analyse fonctionnelle à la même époque évoquèrent la possibilité d'une théorie axiomatique des espaces de fonctions. D'après Epple et al. [2002, p. 708], celles-ci mirent en évidence la pertinence d'imposer un point de vue homogène sur les voisinage, intervalle, point de condensation, etc. à l'aide d'un concept d'espace général afin d'éviter les répétitions inhérentes à plusieurs théories

36. En allemand, Riesz emploie le nom *Verkettung* et le verbe *verketten*. Koetsier et Mill [1999, p. 212] traduisent *Verkettung* par *linkage*.

particulières. Ce traitement homogène des espaces topologiques se cristallisera dans les recherches de Hausdorff sur la théorie des ensembles.

#### 1.1.3.3 Hausdorff et les axiomes de voisinages

Le livre *Grundzüge der Mengenlehre* de Felix Hausdorff [Hausdorff 1949] franchit une étape importante en vue d'une axiomatisation définitive du concept d'espace topologique. En effet, Hausdorff parvint à choisir des axiomes permettant de traiter les espaces abstraits avec toute la généralité et la flexibilité souhaitées.

À la base de ce succès se trouve une reconsidération de la notion de voisinage. À l'instar des mathématiciens de la fin du XIX^e^ et du début du XX^e^ siècle, Hausdorff l'avait par le passé considérée comme utile, mais fondamentalement extrinsèque [Epple et al. 2002, p. 713], et ce bien qu'il fut familier avec la caractérisation axiomatique du plan basée sur les voisinages de Hilbert. À partir de 1912, ses travaux sur les surfaces de Riemann le conduisirent à porter un regard nouveau sur cette notion [37].

Conformément à ce que le titre suggère, *Grundzüge der Mengenlehre* est consacré à l'étude des ensembles. La perspective de Hausdorff est fondationnelle. D'emblée, il affirme que les fondements des mathématiques sont donnés par la théorie des ensembles : « La théorie des ensembles est le fondement de toutes les mathématiques (...) [38] » [1949, p. 1]

Bien qu'Hausdorff ne fasse pas une telle distinction, les 10 chapitres de l'ouvrage peuvent être considérés comme formant deux parties distinctes. La première partie regroupe les six premiers chapitres et expose la théorie des ensembles à proprement parlée ou, pour le dire autrement, une théorie abstraite des ensembles. Parmi ceux-ci, les trois premiers chapitres donnent une caractérisation générale des ensembles : définition des notions de base telles celles de sous-ensemble et de complément, définition d'une fonction en termes de paire ordonnée, cardinalité, puissance, etc. Les trois suivants examinent les ensembles ordonnés et abordent notamment la question du principe du bon ordre. Les quatre derniers chapitres traitent des ensembles de points et ont comme trame de fond la question de la continuité [39].

Le titre du septième chapitre — *Punktmengen in allgemeinen Räumen* — pourrait laisser croire que les ensembles de points y sont étudiés. À vrai dire, ce chapitre est consacré aux espaces topologiques abstraits. Pour Hausdorff, une telle théorie sera nécessairement une théorie axiomatique :

> Une théorie des espaces de points aurait, en raison des nombreuses propriétés des espaces habituels, un caractère unique et si on voulait d'emblée se

37. Pour l'évolution des idées de Hausdorff, voir Epple et al. [2002, p. 711–717].
38. *Die Mengenlehre ist das Fundament der gesamten Mathematik* (...)
39. Koetsier et Mill [1999, p. 214] proposent une autre subdivision selon laquelle les sept premiers chapitres couvrent la théorie générale des ensembles et les trois derniers la théorie des ensembles de points.

> limiter à ce cas particulier, on aurait à développer à chaque fois une nouvelle théorie pour les ensembles de points d'une droite, d'un plan, d'une sphère, etc. L'expérience a montré que l'on peut éviter cette répétition et construire une théorie générale qui englobe non seulement les cas déjà mentionnés, mais aussi d'autres ensembles (surfaces de Riemann, ensembles à un nombre fini et infini de dimensions, ensembles de courbes et de fonctions, etc.). De plus, une telle généralité n'entraîne pas une plus grande complexité, mais bien au contraire une simplification considérable puisque nous avons à faire, du moins pour les fondements de la théorie, à seulement quelques axiomes simples. Finalement, nous nous protégeons avec cette approche logico-déductive des erreurs dues à l'*intuition* ; cette source de connaissance — dont personne ne niera la valeur heuristique évidemment — s'est avérée si fréquemment insuffisante et peu fiable dans des questions délicates de la théorie des ensembles que l'on ne peut faire confiance à son apparente évidence qu'après un examen attentif [40]. [Hausdorff 1949, p. 210]

Une théorie axiomatique présente donc deux avantages : premièrement, en unifiant toutes les théories particulières, elle entraîne, en vertu de sa généralité, une plus grande simplicité et, deuxièmement, elle prévient les dérives que peut causer le recours à l'intuition et garantit par le fait même la rigueur des démonstrations.

Selon Hausdorff, la théorie des espaces topologiques peut se baser sur plusieurs notions différentes. Une première possibilité est la distance entre deux éléments. Soit $M$ un ensemble. Une distance est une fonction qui, à toute paire d'éléments $(a, b)$ de $M$, associe un élément $n$ d'un autre ensemble $M'$.

> (...) à toute paire $(a, b)$ d'éléments d'un ensemble $M$ peut être associé un élément $n = f(a, b)$ d'un autre ensemble $N$. (...) Une théorie générale de ce type souffrirait évidemment de nombreuses complications et présenterait un intérêt limité. Parmi certains cas particuliers, tels la théorie des ensembles ordonnés, qui présentent un intérêt considérable, il faut considérer la théorie des ensembles de points dans l'espace où la relation de base est une fonction

40. *Eine Theorie der räumlichen Punktmengen würde nun, vermöge der zahlreichen mitspielenden Eigenschaften des gewöhnlichen Raumes, natürlich einen sehr speziellen Charakter tragen, und wenn man sich von vornherein auf diesen einzigen Fall festliegen wollte, so würde man für Punktmengen einer Geraden, einer Ebene, einer Kugel, usw. jedesmal eine neue Theorie zu entwickeln haben. Die Erfahrung hat gezeigt, daß man diesen Pleonasmus vermeiden und eine allgemeinere Theorie aufstellen kann, die nicht nur die genannte Fälle, sondern auch noch andere Mengen (Riemannsche Flächen, Räume von endlich und unendlich vielen Dimensionen, Kurven- und Funktionenmengen u.a.) umfäßt. Und zwar ist dieser Gewinn an Allgemenheit nicht etwa mit einer erhöten Komplikation, sondern gerade umgekehrt mit einer erheblichen Vereinfachung verbunden, indem wir, wenigsten für die Grundzüge der Theorie, nur von ganz wenigen und einfachen Voraussetzungen (Axiomen) Gebrauch zu machen haben. Endlich sichern wir uns auf diesen logisch-deduktiven Wege vor den Irrtümern, zu denen die sogenannte* Anschauung *uns verleiten möchte; diese angebliche Erkenntnisquelle — deren heuristischen Wert natürlich niemand bestreiten wird — hat sich gerade in den subtileren erwiesen, daß man ihren so oft als unzureichend und unzuverlässig erwiesen, daß man ihrenscheinbaren Evidenzen nur nach vorsichtiger Prüfung trauen darf.*

> entre paire d'éléments, c'est-à-dire la *distance* entre ces deux points. Cette fonction prend d'ailleurs une infinité de valeurs [41]. [Hausdorff 1949, p. 210]

Deuxièmement, la notion de distance peut être remplacée par la limite d'une suite convergente d'éléments.

> La notion de distance est sous-tendue, par exemple, par les notions de *suite convergente de points* et de *limite* d'une telle suite. Ces notions peuvent être choisies comme fondements de la théorie des ensembles de points au détriment de la notion de distance [42]. [Hausdorff 1949, p. 210]

Une troisième possibilité est de recourir aux voisinages. Encore une fois, la théorie résultante fera fi de la notion de distance.

> Troisièmement, sur la base d'une distance, à tout point de l'espace peuvent être associés certains sous-ensembles de l'espace que nous appelons *voisinages* de ce point ; ce système de voisinages peut être pris comme fondement de toute la théorie sans faire référence à la distance [43]. [Hausdorff 1949, p. 210]

Chacune de ces notions — distance, limite et voisinage — donnera donc lieu à une axiomatisation parfaitement rigoureuse du concept d'espace topologique. Selon Hausdorff, privilégier une notion au détriment d'une autre se révèle être pratiquement une question de goût : « Le choix de privilégier l'un des trois concepts que sont ceux de distance, de limite et de voisinage comme point de départ est jusqu'à un certain point une affaire de goût [44]. » [1949, p. 211] L'originalité de Hausdorff est d'utiliser les relations mathématiques unissant les notions de distance, de limite et de voisinage pour comparer les axiomatisations qu'elles induisent. Il souligne que

- les notions de voisinage et de limite peuvent se définir en termes de distance ;
- la notion de limite peut se définir en termes de voisinage ;
- en général, la notion de distance ne se définit pas en termes de voisinage ;
- en général, ni la notion de voisinage ni celle de distance ne se définit en termes de limite.

Il en résulte, premièrement, que la théorie basée sur la distance est la plus particulière et, deuxièmement, que la théorie basée sur la limite est la plus générale.

41. *(...) jedem Paar $(a, b)$ von Elementen einer Menge $M$ ein bestimmtes Element $n = f(a, b)$ einer zweiten Menge $N$ zugeordnet sei. (...) Eine ganz allgemein gehaltene Theorie dieser Art würde natürlich erhebliche Komplikationen bedingen und wenig positive Ausbeute liefern. Zu den speziellen Beispielen aber, die ein erhöhtes Interesse beanspruchen, gehört neben der Theorie der geordneten Mengen gerade die Lehre von dem Punktmengen im Raume, und zwar ist die grundlegende Beziehung hier wieder eine Funktion der Elementpaare, nämlich die* Entfernung *zweier Punkte: eine Funktion, die aber jetzt unendlich vieler Werte fähig ist.*

42. *Auf Grund des Begriffs Entfernung läßt sich, z. B. der Begriff einer* konvergenten Punktfolge *und ihres* Limes *definieren, und diesen Begriff kann man wieder, mit Ausschaltung des Begriffs Entfernung, zum Fundamenta der Punktmengentheorie wählen.*

43. *Drittens lassen sich auf Grund der Entfernung jedem Punkt gewisse Teilmengen des Raumes zuordnen, die wir* Umgebungen *dieses Punktes nennen; und wieder läßt sich dieses System der Umgebungen zur Grundlage der ganzen Theorie machen, mit Elimination des Begriffs Entfernung.*

44. *Welchen der drei oben genannten Grundbegriffe Entfernung, Limes, Umbegung man zur Basis der Betrachtung wählen will, ist bis zu einem gewissen Grade Geschmacksache.*

Par ailleurs, il importe de souligner que chacune des notions envisagées par Hausdorff se définit en référence aux points de l'ensemble considéré. Cette préséance des points se reflétera dans l'axiomatisation proposée.

Hausdorff choisit de développer sa théorie spatiale des ensembles en utilisant la notion de voisinage. Il commence son exposition avec un cas concret, celui des voisinages définis à l'aide d'une distance.

**Définition 1.1.3.3** (Hausdorff 1949)**.** Un *espace métrique* est un ensemble $E$ tel que pour toute paire d'éléments $x$ et $y$, il existe un nombre réel non négatif, leur distance $\overline{xy} \geq 0$, qui respecte les axiomes suivants :

(a) $\overline{xy} = \overline{yx}$ (axiome de symétrie) ;

(b) si $\overline{xy} = 0$, alors $x = y$ (axiome de coïncidence) ;

(c) $\overline{xy} + \overline{yz} \geq \overline{xz}$ (axiome triangulaire[45]).

Dans le contexte des espaces métriques, un voisinage se définit comme suit :

**Définition 1.1.3.4** (Hausdorff 1949)**.** Soit $E$ un espace métrique. Un *voisinage* $U_x$ d'un point $x$ est l'ensemble de tous les points $y$ de $E$ tels que la distance entre $x$ et $y$ soit inférieure à un nombre positif $\rho$ donné, c'est-à-dire $\overline{xy} < \rho$.

En contrepartie, la portée de cette définition se limite au contexte des espaces métriques ; elle ne dit pas ce qu'est un voisinage en général. Là est tout l'intérêt de l'approche axiomatique : elle définit abstraitement la notion de voisinage, non par l'entremise d'une autre notion comme celle de distance, mais en spécifiant directement les propriétés qui la déterminent. Une telle caractérisation sous-tend la définition axiomatique des espaces topologiques.

**Définition 1.1.3.5** (Hausdorff 1949)**.** Un *espace topologique* est un ensemble $E$ dont les éléments $x$ appartiennent à certains sous-ensembles $U_x$, appelés voisinages de $x$, qui satisfont les axiomes suivants :

(A) Tout point $x$ appartient à au moins un voisinage $U_x$ ; tout voisinage $U_x$ contient le point $x$ ;

(B) Si $U_x$ et $V_x$ sont deux voisinages d'un point $x$, alors il existe un voisinage $W_x$ qui est un sous-ensemble des deux ($W_x \subseteq U_x \cap V_x$) ;

(C) Si $y$ est un point situé dans $U_x$, alors il existe un voisinage $U_y$ qui est un sous-ensemble de $U_x$ ($U_y \subset U_x$) ;

(D) Pour deux points distincts $x$ et $y$, il existe deux voisinages $U_x$ et $U_y$ sans point commun ($U_x \cap U_y = \emptyset$).

45. Hausdorff utilise les termes *Symmetrieaxiom*, *Koinzidenzaxiom*, et *Dreickaxiom*.

À la lumière de cette définition, un espace topologique doit se comprendre comme un ensemble dont les points forment un système de voisinages. Chez Hausdorff, la théorisation de l'espace repose donc sur les points. Les axiomes expriment l'organisation que doivent respecter les points d'un ensemble pour que celui-ci soit un espace topologique. En particulier, l'axiome (D), qui est aujourd'hui vu comme un axiome de séparation restrictif, est considéré essentiel par Hausdorff : la conception pointilliste comprenant un espace comme un ensemble de points, il est impératif que ceux-ci puisse être distingués.

Pour montrer que tout espace métrique est un espace topologique, Hausdorff vérifie que les voisinages définis à l'aide de la distance satisfont les axiomes de la définition [46]. Il en conclut que le concept d'espace métrique est un cas particulier du concept d'espace topologique : « un espace métrique se révèle un espace topologique spécial [47]. » [1949, p. 214] Par conséquent, toutes les propriétés qui se déduisent des axiomes de voisinages et qui caractérisent donc les espaces topologiques s'appliquent en particulier aux espaces métriques.

Le reste du chapitre est consacré à l'introduction de plusieurs notions à l'aide desquelles pourra être caractérisée la structure topologique des ensembles. Autrement dit, Hausdorff instaure le cadre conceptuel de la topologie générale en ne supposant que les axiomes de voisinages. À l'instar de la définition ci-dessus, ce cadre repose sur les points. Ce sont les propriétés de ces derniers qui déterminent celles de l'espace qu'ils forment.

Afin d'illustrer cette procédure axiomatique, soient $E$ un espace topologique et $A$ un ensemble de points, c'est-à-dire un sous-ensemble de $E$.

- Un point $x$ est un *point intérieur* de $A$ si $x$ appartient à un voisinage $U_x$ de $A$.
- Un *point frontière* de $A$ est un point de $A$ qui n'est pas un point intérieur.
- L'*intérieur* de $A$ est l'ensemble $A_i$ des points intérieurs de $A$.
- La *frontière* de $A$ est l'ensemble $A_r$ des points frontières de $A$.

Ces notions permettent à leur tour d'en définir d'autres. Une des plus importantes est sans aucun doute celle d'ouvert [48] : un *ouvert* est un ensemble sans point frontière, c'est-à-dire dont tous les points sont des points intérieurs. Autrement dit, un ouvert $A$ est un ensemble tel que $A = A_i$. L'espace $E$ et tout voisinage $U_x$ sont des exemples d'ouverts.

Afin d'étudier les phénomènes continus, Hausdorff formule une distinction entre trois types de points.

**Définition 1.1.3.6** (Hausdorff, 1914)**.** Soient $E$ un espace topologique, $A$ un ensemble de points et $x$ un point de $E$.

- $x$ est un *$\alpha$-point* (point d'adhérence) de $A$ si tout voisinage $U_x$ de $x$ contient au moins un point de $A$ ;

46. Voir Hausdorff [1949, p. 213–214] pour la vérification.
47. *ein metrischer Raum ist spezieller topologischer Raum erkannt.*
48. Hausdorff [1949, p. 215] utilise le terme « *Gebiet* ».

- $x$ est un $\beta$-*point* (point d'accumulation) de $A$ si tout voisinage $U_x$ de $x$ contient une infinité de points de $A$.
- $x$ est un $\gamma$-*point* (point de condensation) si tout voisinage $U_x$ de $x$ contient une infinité non dénombrable de points de $A$.

Les ensembles des points d'adhérence, des points d'accumulation et des points de condensation de $A$ sont respectivement notés $A_\alpha$, $A_\beta$ et $A_\gamma$. L'ensemble $A_\beta$ n'est d'ailleurs rien d'autre que le premier ensemble dérivé de Cantor.

Ces trois types de points sont utilisés pour définir plusieurs notions fondamentales de la topologie : ensemble fermé, ensemble dense en lui-même, ensemble parfait, compacité, suite d'ensembles, connexité, etc. Par exemple, un ensemble $A$ est *fermé* si $A \supseteq A_\beta$, *dense en lui-même* si $A \subseteq A_\beta$ et *parfait* si $A = A_\beta$ [49].

Il est alors possible de démontrer différentes propriétés des espaces topologiques. Par exemple, l'intersection d'un nombre arbitraire d'ensembles fermés est fermée et l'union d'un nombre fini d'ensembles fermés est également fermée. De plus, le complément d'un ensemble fermé est un ouvert alors que le complément d'un ouvert est un ensemble fermé.

Rétrospectivement, l'importance historique de l'axiomatisation de Hausdorff est une conséquence de ses avantages au plan mathématique. Premièrement, tel que suggéré précédemment, Hausdorff parvint à donner des axiomes suffisamment généraux pour englober la classe des espaces topologiques, mais suffisamment restrictifs pour que ces espaces aient des propriétés intéressantes.

> *Hausdorff's generalization of the notion of space represented a major contribution to the unification of mathematics. Geometry and analysis had been separated disciplines. Axiomatisation ended that. Hausdorff succeeded in picking a set of axioms that was, on the one hand, general enough to handle abstract spaces and, on the other hand, restrictive enough to yield an interesting theory. He succeeded in giving a theory of topological and metric spaces that encompassed the previous results and generated many new notions and theorems.* [Koetsier et Mill 1999, p. 215]

Deuxièmement, l'analyse des notions de distance, de limite et de voisinage clarifia les différentes structures et types d'espaces qu'elles induisent : espace topologique, espace métrique, etc. Par le fait même, Hausdorff mit clairement en évidence la coexistence possible de plusieurs structures spatiales sur un même ensemble ainsi que les relations entre celles-ci. Cette possibilité contribua quant à elle à distinguer les concepts d'ensemble et d'espace et à renforcer la conception d'un espace topologique comme ensemble muni d'une structure.

Historiquement, tout importants furent-ils, les axiomes de voisinages formulés par Hausdorff n'imposèrent pas une définition définitive du concept d'espace topologique. D'autres axiomatisations furent effectivement proposées jusqu'à la fin des

49. La définition de ces propriétés à l'aide des ensembles $A_\alpha$, $A_\beta$ et $A_\gamma$ n'est pas unique. Par exemple, $A$ est également fermé si $A = A_\alpha$. Voir Hausdorff [1949, p. 221–222].

années 1920. Ceci ne diminue cependant en rien l'importance de la contribution de Hausdorff. En effet, les axiomatisations subséquentes s'inscrivent directement dans la lignée de la sienne dans la mesure où elles avaient pour principal objectif de raffiner ses axiomes de voisinages. En conséquence, il semble raisonnable d'affirmer que le concept d'espace topologique traditionnel fut forgé par Hausdorff. Ainsi, par son usage de la méthode axiomatique, Hausdorff fit définitivement entrer la topologie générale dans la modernité mathématique.

### 1.1.4 Derniers dépouillements de la structure d'espace topologique

Tel que vu dans la section précédente, Hausdorff eut recours à la méthode axiomatique afin de définir des espaces topologiques qui soient conceptuellement et techniquement adéquats. Malgré leur importance, les axiomes de voisinages de Hausdorff souffrent de quelques lacunes. [Epple et al. 2002, p. 720] Premièrement, deux systèmes de voisinages peuvent induire deux topologies équivalentes, c'est-à-dire essentiellement la même structure. Il en est ainsi parce que les axiomes de Hausdorff déterminent des bases de voisinages ouverts et non pas des topologies. Deuxièmement, l'axiome (D) renvoie à une propriété de séparation des espaces topologiques. Si la conception pointilliste le considérait comme essentiel à la définition du concept, la transition vers des axiomatisations basées sur les ouverts de l'espace montreront le contraire et aussi que son inclusion restreint sa généralité.

Au début des années 1920, d'autres axiomatisations furent présentées afin de combler ces lacunes. Les plus importantes furent celles de Vietoris, Kuratowski, Tietze et Alexandroff.

#### 1.1.4.1 Vietoris : des axiomes de voisinages plus généraux

Leopold Vietoris fut le premier à modifier les axiomes de voisinages de Hausdorff. En 1921, il publia « *Stetige Mengen* » [Vietoris 1921], un article consacré au traitement des lignes et surfaces de dimensions arbitraires par des méthodes purement ensemblistes.

La première partie de « *Stetige Mengen* » présente les bases théoriques, c'est-à-dire topologico-ensemblistes, dont dépendent les résultats sur les lignes et surfaces qui sont démontrés dans la seconde partie et qui forment l'objet véritable de l'article. Vietoris s'appuie sur l'axiomatisation de la théorie des ensembles de Zermelo ainsi que sur des axiomes de voisinages :

> Nous basons notre réflexion sur l'axiomatisation de la théorie des ensembles de Zermelo et sur les axiomes de voisinages suivants :
>
> **Axiomes de voisinages**
>
> (A) « Tout point $x$ appartient à au moins un voisinage $U_x$ ; tout voisinage $U_x$ contient le point $x$. »

(B) « Si $U_x$ et $V_x$ sont des voisinages d'un point $x$, alors il existe un voisinage $W_x$ qui est un sous-ensemble de $U_x$ et $V_x$ ($W_x \subseteq U_x \cap V_x$) ».

(C) Pour tout voisinage $U_x$ d'un point $x$, il existe un voisinage $V_x$ de $x$ tel que tout point de $V_x$ possède un voisinage inclus dans $U_x$.

(D) « Pour toute paire de points $x$ et $y$, il existe deux voisinages $U_x$ et $U_y$ qui n'ont aucun point commun ($U_x \cap U_y = \emptyset$). »

(E) Un voisinage $U_x$ d'un point $x$ contient toujours un voisinage $W_x$ de $x$ tel que tout point de $\complement U_x$ (l'ensemble complémentaire de $U_x$) possède un voisinage inclus dans $\complement W_x$ [50]. [1921, p. 173]

Quelques remarques sur ces axiomes sont de mises. Premièrement, Vietoris présente clairement son axiomatisation comme une modification de celle de Hausdorff. D'une part, les axiomes (A), (B) et (D) sont identiques à ceux de Hausdorff et sont d'ailleurs entre guillemets comme s'ils étaient cités. D'autre part, l'axiome (C) de Vietoris est différent de celui de Hausdorff dans la mesure où il permet de considérer des voisinages qui ne contiennent pas exclusivement des points intérieurs. L'axiome (E) est quant à lui totalement inédit et renvoie à une propriété de régularité. À l'instar de celle formulée dans *Grundzüge der Mengenlehre*, l'axiomatisation de Vietoris détermine donc des bases de voisinages et non pas des topologies.

Deuxièmement, tout de suite après avoir énuméré ses axiomes, Vietoris introduit un axiome (D') qui est une conséquence de l'axiome (D).

(D') Pour tout point $x$, il existe un voisinage $U_x$ qui ne contient pas un point $y \neq x$ donné [51]. [Vietoris 1921, p. 174]

Cet axiome exprime une condition de séparation plus faible que celle de Hausdorff. En langage contemporain, les espaces topologiques définis par Hausdorff sont dits séparés, Hausdorff ou T2 alors que ceux de Vietoris sont dits accessibles ou T1.

---

50. *Wir stützen unsere Betrachtungen auf die Zermelosche Axiomatik der Mengenlehre und die folgenden Axiome des Umgebungsbegriffs.*

***Umgebungsaxiome.***

(A) *„Jedem Punkt $x$ entspricht mindestens eine Umgebung $U_x$; jede Umgebung $U_x$ enthält Punkte $x$."*

(B) *„Sind $U_x$, $V_x$ zwei Umgebungen desselben Punktes $x$, so gibt es eine Umgebung $W_x$, die Teilmenge der beiden anderen ist ($W_x \leqq \vartheta(U_x, V_x)$ [sic]".*

(C) *Zu einer Umgebung $U_x$ von $x$ gibt es immer eine Umgebung $V_x$ von $x$, so daß jeder Punkt von $V_x$ samt einer seiner Umgebungen in $U_x$ liegt.*

(D) *„Für zwei verschiedene Punkte $x$, $y$ gibt es zwei Umgebungen $U_x$, $U_y$ ohne gemeinsamen Punkt ($\vartheta U_x U_y) = 0$) [sic]."*

(E) *Eine Umgebung $U_x$ eines Punktes $x$ enthält immer eine Umgebung $W_x$ von $x$, so daß jeder Punkt von $\complement U_x$ (Komplementärmenge von $U_x$) samt einer seiner Umgebung in $\complement W_x$ liegt.)* [sic]

51. *(D') Zu einem Punkte $x$ gibt es immer eine Umgebung $U_x$, welche einen vorgegebenen Punkt $y \neq x$ nicht enthält.*

À l'instar de Hausdorff, Vietoris fait donc reposer la théorisation de l'espace sur ses points. Cependant, en assouplissant la condition de séparation, Vietoris met un peu plus d'emphase sur les voisinages eux-mêmes, c'est-à-dire sur certains sous-ensembles de l'espace, et la distancie, timidement certes, des points.

Finalement, en affirmant se baser sur les axiomes de Zermelo et les axiomes de voisinages, Vietoris confirme la distinction claire entre la théorie des ensembles et la topologie, non seulement en théorie, mais aussi dans la pratique mathématique.

#### 1.1.4.2 Kuratowski : une axiomatisation de l'opération de fermeture

En 1922, Kazimierz Kuratowski publia un article ayant pour titre « Sur l'opération $\overline{A}$ de l'Analysis Situs » [Kuratowski 1922] dont l'objectif était de clarifier les fondements de la topologie afin de garantir un développement rigoureux de la discipline.

> *In times when the basic set-theoretic and topological notions were still taking shape, Kuratowski wanted to know what he was talking about. This is why, in the beginning of the 1920s, he took such interest in the notions of finite set and order, in the role of ordinal numbers in mathematical reasoning, and in the axioms for topological spaces. For him this kind of analysis meant, in the first place, building up the necessary foundations for specific and concrete topological research he was already conducting.* [Engelking 1998, p. 436]

À ce propos, une des grandes préoccupations de Kuratowski était ce qu'il convient d'appeler la pureté des méthodes topologiques dans l'étude des espaces. Celle-ci devait donc idéalement être exempte de considérations géométriques, combinatoires ou encore algébriques. *Kuratowski always stressed the importance of "eliminating non-topological methods" from the topological study of the place. He meant by this using only topological notions (thus, no polygonal lines) and reducing algebraic apparatus to a minimum.* [Engelking 1998, p. 440]

Pour la clarification envisagée, Kuratowski développa une théorie axiomatique des espaces topologiques. Son axiomatisation du concept d'espace topologique se distingue de celles proposées par Riesz, Hausdorff et Vietoris en ce qu'elle ne se base ni sur la notion de limite, ni sur celle de voisinage, mais plutôt sur l'opération de fermeture.

Dans l'espace euclidien à $n$ dimensions qu'il désigne par le symbole 1, la fermeture d'un ensemble $A$ est l'ensemble $\overline{A}$ de $A$ composé de tous les points de $A$ et de tous les points limites de $A$. Dans ce contexte, il est aisé de démontrer les propriétés suivantes :

I. $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$ ;

II. $A \subset \overline{A}$ ;

III. $\overline{\emptyset} \subset \emptyset$ ;

IV. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

Kuratowski utilise ces propriétés pour définir un espace topologique dans un contexte abstrait :

> Cette note est consacrée à l'analyse de ces propositions et de leurs conséquences. Nous procédons axiomatiquement : nous supposons donnés un ensemble arbitraire 1 et une fonction $\overline{A}$ telle que, pour tout $A$ contenu dans 1, $\overline{A}$ y est contenu également et remplit les axiomes I–IV. [1922, p. 182]

Ainsi, même s'il ne la formule pas explicitement, Kuratowski suggère la définition formelle suivante :

**Définition 1.1.4.1** (Kuratowski 1922)**.** Un *espace topologique* $X$ est un ensemble muni d'une opération qui associe à tout sous-ensemble $A$ de $X$ un sous-ensemble $\overline{A}$, sa fermeture, et qui satisfait les axiomes suivants :

I. $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$ ;
II. $A \subset \overline{A}$ ;
III. $\overline{\emptyset} \subset \emptyset$ ;
IV. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

Trois remarques s'imposent quant à cette définition. Premièrement, compte tenu de la volonté de Kuratowski de réduire la machinerie algébrique à son minimum, son axiomatisation est des plus surprenantes puisqu'elle se base sur un opérateur algébrique ! Deuxièmement, et cet aspect est indissociable du premier, la théorisation de l'espace proposée par Kuratowski ne repose pas sur les points de l'ensemble sous-jacent. Contrairement aux axiomes de Hausdorff et Vietoris, ceux de Kuratowski ne réfèrent aucunement aux points de l'espace. La structure topologique de l'espace provient des propriétés de l'opérateur de fermeture. Finalement, le recours à un opérateur algébrique rend superflue la nécessité imposée par Hausdorff de distinguer les points. En conséquence, la définition de Kuratowski ne contient aucun axiome de séparation et confère au concept d'espace topologique sa pleine généralité.

Dans la deuxième section de « L'opération $\overline{A}$ de l'Analysis Situs », Kuratowski définit les principales notions topologiques à l'aide des axiomes de fermeture : ensemble fermé, bord d'un ensemble, intérieur d'un ensemble, ouvert, etc. Par exemple, un ensemble $A$ est *fermé* si $A = \overline{A}$. L'ensemble $\overline{A'}'$ est l'*intérieur* de $A$. Un ensemble $A$ est *ouvert* si $A = \overline{A'}'$. Par conséquent, les ouverts ainsi définis ont les propriétés souhaitées. Par exemple, un ensemble est ouvert si et seulement si son complément est fermé. Au risque d'insister, ces notions confirment que les points ne sont pas à la base de l'édifice conceptuel de Kuratowski. Un espace est toujours le résultat de la subdivision de son ensemble sous-jacent en parties, mais ces parties ne s'obtiennent plus par l'organisation des points de l'ensemble en systèmes de voisinages.

En terminant, l'article de Kuratowski rend compte du degré de maturité logique qu'avait atteint la méthode axiomatique. La dernière section est consacrée à un examen des propriétés logiques de la théorie axiomatique des espaces topologiques. Kuratowski y démontre notamment que ses axiomes de fermeture sont indépendants.

#### 1.1.4.3 Tietze : une axiomatisation en termes d'ouverts

En 1923, Heinrich Tietze publia dans *Mathematische Annalen* « *Beiträge zur allgemeinen Topologie* » [Tietze 1923], un article en trois parties sur la topologie générale. La première de ces trois parties est particulièrement intéressante puisque Tietze y présente une axiomatisation du concept d'espace topologique en termes d'ouverts et la compare à celle de Hausdorff.

Tel que vu à la section 1.1.3.3, Hausdorff considérait que tout ensemble muni d'un système de voisinages satisfaisant certains axiomes A, B, C et D était un espace topologique. Tietze propose de se restreindre à un système de voisinages spécifique : celui que forment tous les ensembles ouverts d'un espace topologique :

> Parmi la collection de tous les systèmes de voisinages d'un espace topologique, c'est-à-dire tous les systèmes équivalents à un système, il en est un qui se distingue : le système de tous les ensembles ouverts où chaque ouvert est considéré comme voisinage de ses points. Ceci suggère de partir d'emblée de ce système de voisinages. À l'instar de tous les autres systèmes, celui-ci satisfait évidemment les conditions (A), (B), (C), (D) [52]. Il n'est alors pas difficile de renforcer ces conditions de manière à ce que, d'une part, tout système formé de tous les ensembles ouverts $M$ d'un espace topologique satisfasse ces conditions et, d'autre part, que tout système de sous-ensembles d'un ensemble $M$ qui satisfait ces conditions soit justement le système de tous les ensembles ouverts d'un espace topologique formé des points de $R$ [53]. [1923, p. 294]

À cette fin, Tietze caractérise le concept d'espace topologique sur la base de la seule notion d'ensemble ouvert.

**Définition 1.1.4.2** (Tietze 1923)**.** Un *espace topologique* est un ensemble muni de certains sous-ensembles, appelés ouverts, tels que les axiomes suivants sont satisfaits :

(A°) Tout point $x$ appartient à au moins un ensemble ouvert $M$ ;

(B°) Si deux ensembles ouverts $M_1$, $M_2$ ont au moins un point commun, alors leur intersection $M_1 \cap M_2$ (l'ensemble de leurs points communs) est aussi un ensemble ouvert ;

(C°) S'il existe pour tout point $x$ contenu dans un ensemble $U$ un ensemble ouvert qui contient $x$ et qui est un sous-ensemble de $U$, alors $U$ est un ensemble ouvert ;

52. Tietze fait ici référence aux axiomes de voisinages de Hausdorff.

53. *In der Gesamtheit aller Umgebungssysteme eines topologischen Raumes, d. h. aller mit einem System gleichwertigen Systeme ist eines ausgezeichnet: das System aller offenen Mengen, jede derselben als Umgebung jedes ihrer Punkte genommen. Dies legt nahe, von vornherein von diesem System von Umgebungen auszugehen. Wie alle anderen Systeme genügt natürlich auch dieses den Forderungen (A), (B), (C), (D). Es ist aber nicht schwer, die Frage nach besonderen, verschärften Forderungen zu beantworten, derart, daß einerseits diesen Forderungen jedes aus allen offenen Mengen M eines topologischen Raumes bestehende System genügt und daß andererseits jedes System von Teilmengen einer Menge M, das diesen Forderungen genügt, gerade das System aller offenen Mengen eines aus den Punkten von R gebildeten topologischen Raumes ist.*

(D°) Pour toute paire de points $x$, $y$ distincts, il existe deux ensembles ouverts disjoints tel que l'un contient $x$ et l'autre contient $y$.

Compte tenu que l'article s'ouvre sur un rappel de la définition d'espace topologique formulée par Hausdorff, une telle définition soulève évidemment la question de la comparaison de ces deux systèmes d'axiomes. Tietze montre que les axiomes de Hausdorff et les siens donnent lieu à un concept d'espace topologique équivalent. D'une part, les ouverts définis en termes de voisinages d'un espace topologique satisfont les axiomes (A°), (B°), (C°) et (D°). Tout espace topologique au sens de Hausdorff en est donc également un au sens de Tietze. D'autre part, soit un système de sous-ensembles satisfaisant les axiomes (A°), (B°), (C°) et (D°), c'est-à-dire les ouverts de l'espace topologique. Étant donné un point $x$, un voisinage $U(x)$ se définit en prenant tous les ouverts $O$ tels que $x \in O$. Ces voisinages satisfont les axiomes (A), (B), (C) et (D). Conséquemment, tout espace topologique au sens de Tietze en est également un au sens de Hausdorff.

Comparativement à ceux de Hausdorff et Vietoris, les axiomes de Tietze ont l'avantage de déterminer, non pas des bases de voisinages ouverts, mais des topologies. Il en est ainsi à cause du glissement qu'ils marquent quant au rôle des points dans la théorisation de l'espace. Les points sont certes toujours présents dans l'axiomatisation de Tietze, mais ils perdent de leur importance au profit des ouverts de l'espace. La structure de l'espace n'est pas tant déterminée par les propriétés des points que par celles des ouverts et d'au moins une opération algébrique — l'intersection — sur ceux-ci.

De plus, Tietze comprend qu'une des principales différences entre les différentes axiomatisations proposées par le passé relève d'axiomes de séparation différents. Dans la deuxième section de « *Beiträge zur allgemeinen Topologie* », il examine quatre axiomes de séparation. Par exemple, le troisième axiome de séparation affirme que si $M$, $N$ sont deux ensembles ouverts tels que la somme de $M$ et $N$ est égale à l'espace au complet, c'est-à-dire $M \cup N = R$, alors il existe deux ensembles ouverts disjoints $M_1$, $N_1$ tels que $M \cup M_1 = R$ et $N \cup N_1 = R$. Par le fait même, il met clairement en évidence le caractère accessoire des axiomes de séparation dans une caractérisation générale du concept d'espace topologique. Encore une fois, il s'agit d'une conséquence de l'emphase mise sur les ouverts au détriment des points. Comparativement à Hausdorff pour qui la structure de l'espace dépend des points de son ensemble sous-jacent, il n'est pas nécessaire de pouvoir distinguer les points les uns des autres pour Tietze.

À la lumière de ces considérations, la principale contribution de Tietze au développement du concept d'espace topologique tient à ce que son axiomatisation fut à l'origine d'une transition vers une conception dont la notion fondamentale est celle d'ouvert.

#### 1.1.4.4 Alexandroff : l'axiomatisation définitive

La définition axiomatique définitive du concept d'espace topologique en termes d'ouverts sera formulée par le mathématicien russe Pavel S. Alexandroff dans un article de 1925 intitulé « *Zur Begründung der n-dimensionalen mengentheoretischen Topologie* » [Alexandroff 1925] [54]. Ironiquement, l'objectif de cet article est de démontrer que, sous certaines conditions, tout espace topologique à $n$ dimensions est homéomorphe à un simplexe euclidien à $n$ dimensions et a probablement plus à voir avec la topologie combinatoire qu'avec la topologie générale [55].

**Définition 1.1.4.3** (Alexandroff 1925)**.** Un *espace topologique* est un ensemble $X$ muni de certains sous-ensembles, appelés ouverts, tel que les conditions suivantes sont satisfaites :

(1) L'intersection de deux ouverts et l'union d'un nombre arbitraire d'ouverts est un ouvert ;

(2) Pour toute paire de points distincts, il existe toujours deux ouverts disjoints qui contiennent respectivement ces deux points.

La définition d'Alexandroff décrit entièrement une topologie comme une structure sur les sous-ensembles de l'espace, structure qui est saisie en considérant ses ouverts. D'ailleurs, le premier axiome reprend deux propriétés des espaces topologiques que les axiomatisations précédentes permettaient de démontrer. De plus, Alexandroff élimine complètement les points de la définition axiomatique du concept d'espace topologique de telle sorte qu'elle ne se base désormais que sur le système des ouverts.

À vrai dire, la définition d'Alexandroff contient un axiome de séparation et n'est donc pas totalement générale. Alexandroff souligne d'ailleurs que parce que tout voisinage est un ouvert, sa définition est essentiellement équivalente à celle de Hausdorff : « En regardant tout voisinage d'un point $\xi$ comme inclus dans un ouvert, nous revenons, pour l'essentiel, à la définition originelle de Hausdorff qui, en vertu des explications de Tietze, est ici considérée équivalente [56]. » [1925, p. 298] Il importe d'insister que cette équivalence est exclusivement extensionnelle : les espaces relevant des définitions respectives de Hausdorff et d'Alexandroff sont les mêmes. Cette équivalence ne doit toutefois pas masquer le glissement conceptuel fondamental quant au rôle des points dans l'axiomatisation du concept d'espace topologique qui sépare les théorisations de Hausdorff et de Alexandroff.

54. C'est du moins ce qu'affirme Alexandroff dans son manuel *Einführung in die Mengenlehre und in die allgemeine Topologie*. Voir Alexandroff [1984, p. 95].

55. Compte tenu du flottement qui entoura longtemps la notion, il est intéressant de souligner qu'Alexandroff ne précise pas ce qu'il entend par « homéomorphe ». La section 1.2 fera état de l'évolution de la notion d'homéomorphisme. À ce sujet, voir aussi Moore [2007].

56. *Indem wir als Umgebung eines Punktes $\xi$ ein jedes ihn enthaltendes Gebiet betrachten, kehren wir, im wesentlichen, zu der ursprünglichen Hausdorffschen Definition zurück, die mit der hier gegebenen, von Tietze herrührenden Erklärung unmittelbar äquivalent ist.*

## 1.2 La topologie combinatoire

Le concept d'espace topologique et la topologie générale découlèrent d'une interprétation ensembliste des *Mannigfaltigkeiten* de Riemann. Selon celle-ci, un espace est un ensemble de points. Parallèlement à cette avenue de recherche, une interprétation d'inspiration géométrique de ces mêmes *Mannigfaltigkeiten* conduisit à une toute autre forme de topologie — la topologie combinatoire — qui appréhenda l'espace d'une toute autre manière. En effet, la topologie combinatoire adopta une conception diamétralement opposée selon laquelle ce n'est pas l'espace qui est déterminé par ses points, mais bien ceux-ci qui le sont par l'espace.

Historiquement, la pertinence de recourir à la topologie pour étudier les surfaces, les polyèdres et, plus généralement, les *Mannigfaltigkeiten* ne s'imposa définitivement qu'au tournant des années 1860, principalement sous l'influence de Listing.

Dès 1847, dans son ouvrage *Vorstudien zur Topologie*, Listing décrit la topologie comme une géométrie qualitative, c'est-à-dire une géométrie s'intéressant aux questions de position et d'ordre par opposition à une géométrie mettant l'emphase sur les relations métriques et les grandeurs.

> *By topology we mean the doctrine of the modal features of spatial objects, or of the laws of connection, of relative position and of succession of points, lines, surfaces, bodies and their parts or their aggregates in space, always without regards to matters of measure or quantity.* [J. B. Listing, *Vorstudien zur Topologie*, p. 817 cité par Breitenberger 1999, p. 916]

En 1861, Listing s'intéressa à son tour au théorème de Euler dans *Census oder Verallgemeinerung des Euler'schen Satzes von den Polyedern*. Tel que vu dans l'introduction, l'approche standard consistait à voir les contre-exemples au théorème de Euler comme des monstres et donc à limiter le domaine d'application de la formule de manière à en empêcher la construction. Selon Listing, les contre-exemples mettaient plutôt en lumière les limitations inhérentes au concept de polyèdre à la base du théorème et, par le fait même, la nécessité d'en rechercher un plus général. Listing considère des complexes spatiaux qu'il définit comme suit :

> Par complexe spatial, nous entendrons toute configuration de points, de lignes et surfaces dans l'espace ; les lignes et les surfaces pouvant à volonté être droites ou courbes, ouvertes ou fermées, limitées ou illimitées. On demandera toutefois qu'elles soient d'un seul tenant, sans quoi on comptera autant de complexes qu'il y aura de configurations distinctes. [J. B. Listing, *Census oder Verallgemeinerung des Euler'schen Satzes von den Polyedern* cité par Pont 1974, p. 46]

Listing envisage donc le théorème de Euler comme un problème topologique : les espaces considérés ne sont plus des objets géométriques comme les polyèdres classiques, mais bien des objets topologiques.

Cela dit, comme le montreront les sections suivantes, la topologie combinatoire ne commença à adopter la position normative caractéristique des mathématiques modernes qu'à partir du milieu des années 1920.

### 1.2.1 Vers une théorie des *Mannigfaltigkeiten*

Contrairement à la topologie générale, la topologie combinatoire ne se pencha guère sur le concept d'espace dans l'optique de le définir dans toute sa généralité. Après Riemann, soit à partir de 1860 environ, la réflexion géométrico-topologique sur le concept d'espace s'inscrivit plutôt dans l'étude des surfaces et autres *Mannigfaltigkeiten*. La topologie combinatoire post-riemannienne se façonna donc progressivement un concept d'espace adapté à ses besoins théoriques et pratiques. L'analyse de différents problèmes — fussent-ils géométriques ou analytiques — mit en évidence les propriétés en termes desquelles devaient se concevoir ces objets spatiaux. Historiquement, le concept d'espace de la topologie combinatoire se transforma d'abord sous l'impact de plusieurs contributions éparses parmi lesquelles celles de Möbius, Jordan, Betti, Klein et Dyck semblent les plus importantes [57].

#### 1.2.1.1 Möbius : les surfaces et leurs propriétés

En 1858, l'Académie des Sciences de Paris annonça le concours de son Grand Prix de Mathématiques de 1861 : « perfectionner, en quelque point important, la théorie géométrique des polyèdres. » [Pont 1974, p. 88] August Ferdinand Möbius choisit d'y participer et soumit un mémoire en deux parties. La première partie généralise les notions d'aire et de volume à des polygones et des polyèdres dont le périmètre se recoupe lui-même. La seconde introduit la notion de transformation topologique, sous l'appellation corrélation élémentaire, afin de classifier les surfaces.

En 1863, Möbius publia « *Theorie der elementaren Verwandtschaften* », le premier de deux articles reprenant les idées du mémoire soumis à l'Académie des Sciences de Paris. Cet article se concentre, comme son titre l'annonce, sur les corrélations élémentaires. Möbius définit cette notion jusqu'alors inédite comme suit :

> Deux figures sont dites en corrélation élémentaire, lorsqu'à tout élément infiniment petit de l'une correspond un élément infiniment petit de l'autre, de telle manière qu'à deux éléments qui se touchent dans la première correspondent deux éléments qui se touchent dans la seconde ; ou aussi : deux figures sont en corrélation élémentaire, lorsqu'à tout point de l'une correspond un point de l'autre, de telle manière qu'à deux points infiniment voisins correspondent toujours deux points infiniment voisins. Dès lors, une ligne ne peut être en corrélation élémentaire qu'avec une ligne, une surface avec une surface et un corps spatial avec un corps spatial. [A. F. Möbius, « *Theorie der elementaren Verwandtschaften* » cité par Pont 1974, p. 91]

Informellement, deux figures sont en corrélation élémentaire si la forme de l'une peut être ramenée à celle de l'autre sans la déchirer. La notion de corrélation élémentaire anticipe donc celle d'homéomorphisme.

57. Pour une présentation plus détaillée des contributions de ces mathématiciens et pour d'autres, voir Pont [1974].

Chez Möbius, cette notion sert de critère de classification des surfaces. En effet, elle induit un critère d'équivalence sur les surfaces : deux surfaces sont équivalentes si elles sont en corrélation élémentaire.

Deux ans plus tard, soit en 1865, parut « *Über die Bestimmung des Inhaltes eines Polyeders* », un article visant à définir en toute généralité le volume d'un polyèdre. À cette fin, Möbius commence par définir les notions de polygone et de polyèdre.

> Un polygone plan peut être défini comme un système de lignes droites limitées, contenues dans un même plan, et unies entre elles de façon que chaque extrémité d'une droite soit confondue avec l'extrémité d'une seule autre droite du système. Ces lignes porteront le nom d'arêtes, au lieu de la détermination habituelle de côté, à laquelle on attribuera par la suite un autre sens. De la même manière, un polyèdre sera défini comme un système de polygones de l'espace, unis entre eux de telle sorte que chaque arête appartienne à deux, et à deux surfaces seulement. » [A. F. Möbius, « *Über die Bestimmung des Inhaltes eines Polyeders* » cité par Pont 1974, p. 103]

Cette définition rend compte d'une compréhension élargie des polyèdres. Elle permet par exemple de considérer des polyèdres unilatères comme le célèbre ruban de Möbius. De plus, afin d'étudier la question du volume d'un polyèdre en général, Möbius doit considérer leur orientation.

La contribution de Möbius fut donc double. Premièrement, il introduisit l'idée de transformation topologique. Deuxièmement, il formula une définition générale des notions de polygone et de polyèdre et, ce faisant, les élargit. Historiquement, les travaux de Möbius n'eurent qu'une diffusion marginale et par conséquent eurent une influence limitée sur le développement de la topologie combinatoire [58].

#### 1.2.1.2 Jordan : la géométrie de caoutchouc

Quelques années plus tard, Camille Jordan développa indépendamment des idées similaires à celles de Möbius. Dans un article de 1866 publié dans le *Journal de mathématiques pures et appliquées* [Jordan 1866], Jordan formula le problème de l'équivalence topologique des surfaces.

> Un des problèmes les plus connus de la géométrie est le suivant : trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que deux surfaces ou portions de surfaces flexibles et inextensibles puissent être appliquées l'une sur l'autre sans déchirure ni duplication.
>
> On peut se proposer un problème analogue, en supposant au contraire que les surfaces considérées soient extensibles à volonté. La question ainsi simplifiée rentre dans la géométrie de situation (. . .) [Jordan 1866, p. 105]

La solution de Jordan prendra la forme d'un théorème énonçant deux conditions nécessaires et suffisantes pour que deux surfaces ou portions de surface soient équivalentes. À l'instar de Möbius, Jordan travaillait donc dans ce qu'il convient d'appeler

58. Pont [1974, p. 111] suggère quelques raisons.

une géométrie de caoutchouc dont la notion fondamentale est celle de déformation sans déchirure.

#### 1.2.1.3 Betti : les invariants topologiques d'un espace $n$-dimensionnel

Influencé par Riemann, le mathématicien italien Enrico Betti généralisa aux espaces à $n$ dimensions les liens entre la théorie des fonctions analytiques et l'ordre de connexion mis en lumière par le premier pour les cas à une et deux dimensions.

Dans son mémoire *Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni* de 1871, Betti commence par définir la notion de *spazi*, c'est-à-dire d'espace à $n$ dimensions.

> Soient $z_1, \ldots, z_n$, $n$ variables qui prennent toutes les valeurs réelles de moins l'infini à plus l'infini. Nous appellerons espace à $n$ dimensions le champ $n$ fois infini des systèmes de valeurs de ces variables, et nous le noterons $S_n$. Un système $(z_1^0, \ldots z_n^0)$ déterminera un point $L_0$ de cet espace, dont $z_1^0, \ldots, z_n^0$ sont les coordonnées. Un système de $m$ équations déterminera un champ des systèmes des valeurs des $n - m$ variables indépendantes, qui sera un espace à $n - m$ dimensions, contenu dans $S_n$. [E. Betti, *Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni* cité par Pont 1974, p. 80]

Un espace à $n$ dimensions est donc une sous-variété de $\mathbb{R}^m$. Cette définition manque cependant de généralité car elle exclut les surfaces unilatères. [Pont 1974, p. 80]

Betti s'intéresse plus spécifiquement aux espaces fermés et connexes. Soit $S_{n-1}$ un espace à $n - 1$ dimensions décrit par l'équation $F(z_1, \ldots, z_n) = 0$. Si $F$ est continue, alors $S_{n-1}$ sépare $S_n$ en deux régions correspondant respectivement aux valeurs pour lesquelles $F < 0$ et à celles pour lesquelles $F > 0$. Une région $X$ est *connexe* s'il est possible de passer d'un point à l'autre par variation continue sans passer par les points de $F$, c'est-à-dire si pour toute paire de points $x$, $y$ de $X$, il existe une fonction continue $f \colon [0, 1] \to X$ telle que $f(0) = x$, $f(1) = y$ et pour tout $t \in [0, 1]$, $f(t) \neq F(z_1, \ldots, z_n)$. [Pont 1974, p. 80]

Betti définit ensuite l'ordre de connexion d'un espace $n$-dimensionnel.

> Si, dans un espace $R$ à $n$ dimensions, limité par un ou plusieurs espaces à $n-1$ dimensions, chaque espace fermé à $m$ dimensions, avec $m < n$, est le contour d'une partie d'un espace connexe à $m+1$ dimensions entièrement contenue dans $R$, nous dirons que $R$ a la connexion 1 pour toutes les dimensions, il sera dit simplement connexe. Si, en revanche, on peut indiquer dans $R$ un nombre $p_m$ d'espaces fermés à $m$ dimensions, qui ne peuvent pas former le contour d'une partie connexe d'un espace à $m + 1$ dimensions, entièrement contenue dans $R$, et tels que tout autre espace à $m$ dimensions forme seul, le contour d'une portion connexe d'un espace à $m + 1$ dimensions, entièrement contenue dans $R$, nous dirons que $R$ a la connexion $p_m + 1$ pour le genre $m$. [E. Betti, *Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni* cité par Pont 1974, p. 81]

L'ordre de connexion d'un espace à $n$ dimensions est indépendant des coupures effectuées pour le calculer. En d'autres termes, l'ordre de connexion est un invariant topologique de l'espace. Ceci signifie que l'ordre de connexion est une propriété à l'aide de laquelle un espace peut être caractérisé intrinsèquement.

En résumé, Betti fut le premier à s'intéresser à la topologie des *Mannigfaltigkeiten* à $n$ dimensions et à les caractériser en termes de leurs invariants homologiques.

#### 1.2.1.4 Klein : groupe de transformations et surfaces non orientables

En 1872, Felix Klein publia son désormais célèbre « *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* » [Klein 1893], mieux connu sous le nom de Programme d'Erlangen. L'idée maîtresse du Programme d'Erlangen est de mettre en relation les groupes de transformation et les invariants d'une géométrie.

Étant donnée une théorie géométrique définie sur une *Mannigfaltigkeit*, les transformations qui laissent invariantes les propriétés caractéristiques de cette géométrie forment un groupe appelé groupe principal. Réciproquement, les propriétés essentielles de cette géométrie se caractérisent par leur invariance sous les transformations du groupe principal. Klein met donc en évidence une détermination réciproque entre le groupe de transformations d'une géométrie et les propriétés caractéristiques de celle-ci. Par exemple, la géométrie affine se caractérise par le groupe des transformations affines, c'est-à-dire les transformations laissant les lignes droites intactes. Par extension, la topologie pourrait être vue comme l'étude des invariants du groupe des transformations topologiques. Elle apparaîtrait alors comme la géométrie la plus générale parce que ces transformations seraient elles-mêmes les plus générales.

De plus, certains travaux de Klein relatifs à la théorie des fonctions du début des années 1880 sont à l'origine d'un changement de perception des surfaces non orientables. En effet, avec les surfaces symétriques, Klein introduit un concept permettant de traiter uniformément les surfaces orientables et non orientables de même que les surfaces avec ou sans bord. Une surface est dite symétrique si elle autorise des transformations involutives — c'est-à-dire qui sont leurs propres inverses — qui ne préservent pas le sens des angles. De plus, une surface est orthosymétrique si elle est partagée en deux parties disjointes par une coupure le long des points que laissent fixes de telles transformations et diasymétrique si elle n'est pas séparée par une coupure. Par exemple, les surfaces bilatères sont orthosymétriques alors que les surfaces unilatères sont diasymétriques [59]. D'après Pont [1974, p. 131], sous l'influence de Klein, de curiosités mathématiques, les surfaces non orientables devinrent des objets d'étude topologiques aussi légitimes et pertinents que les surfaces orientables.

#### 1.2.1.5 Dyck : la caractérisation des espaces à invariance près

Du point de vue du développement du concept d'espace topologique, les travaux du mathématicien allemand Walther von Dyck firent une synthèse des recherches géométriques sur la topologie des *Mannigfaltigkeiten*.

59. Dans sa thèse de doctorat de 1883, Guido Weichold, un étudiant de Klein, clarifiera différents aspects des surfaces symétriques. Voir Pont [1974], p. 128–131.

En 1884, il prononça une courte conférence au congrès de la *British Association for the Advencement of Science* au cours de laquelle il formula clairement le problème fondamental de la topologie des espaces tridimensionnels :

> L'objet de ces considérations est de déterminer des nombres caractérisant les espaces fermés à trois dimensions, au point de vue des possibilités de correspondances géométriques biunivoques ; ces nombres seront les analogues de ceux introduits par Riemann dans la théorie de ses surfaces. [W. von Dyck, « *On the* analysis situs *of Threedimensional Spaces* » cité par Pont 1974, p. 132]

Par extension, la topologie est l'étude des invariants des espaces ou, pour le dire autrement, la caractérisation des espaces par l'entremise de leurs invariants.

De plus, Dyck mena une étude approfondie des *Mannigfaltigkeiten* à une, deux et $n$ dimensions. Premièrement, il proposa dans le contexte des surfaces la première définition rigoureuse de la notion de transformation topologique : « (...) *um daraus noch einige Schlüsse über diejenigen Abzählungen zu machen, welche nothwendig sind, um für zwei Flächen die Möglichkeit umkehrbar, eindeutiger stetiger Beziehung aller ihrer Elements zu constatiren.* » [Dyck 1888, p. 486] [60] Ces transformations topologiques devaient évidemment fournir un critère d'identité sur les *Mannigfaltigkeiten*.

Deuxièmement, dans la deuxième partie de son article « *Beiträge zur Analysis situs* » [Dyck 1890], Dyck proposa une définition des *Mannigfaltigkeiten*. La définition se déploie en deux temps. Une *Mannigfaltigkeit* élémentaire à $n$ dimensions $E_n$ est un système de points $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ où les $x_i$ sont des variables réelles, indépendantes et bornées tel que le voisinage de chaque point $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n)$ est déterminé par l'inéquation $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_i)^2 < r^2$. Une *Mannigfaltigkeit* à $n$ dimensions consiste alors en tout système de valeurs $(x_1, \dots, x_n)$ topologiquement équivalent à la *Mannigfaltigkeit* élémentaire $E_n$.

Troisièmement, il s'intéressa aux invariants qui caractérisent les *Mannigfaltigkeiten*, notamment la caractéristique et l'orientabilité.

Que ressort-il de cette brève analyse de cette période charnière de l'histoire de la topologie combinatoire ? Premièrement, dans la foulée de Riemann, une théorie topologique des surfaces orientables et compactes se cristallisa, principalement grâce à l'apport de Jordan, Betti et Klein. En particulier, de nouveaux outils anticipant l'homologie et l'homotopie virent le jour afin de caractériser les espaces.

---

60. Pont [1974, p. 147] y voit la première définition rigoureuse et générale de transformation topologique, c'est-à-dire d'homéomorphisme. Moore [2007, p. 336] souligne que les mots *umkehrbar eindeutiger stetiger Beziehung* peuvent être interprétés de deux façons. Il serait question, dans le premier cas, d'une fonction continue et biunivoque et, dans le second, d'une fonction bicontinue et biunique. Pour compliquer l'interprétation de ce passage, l'extrait sur lequel se base Moore (Dyck [1888, p. 457, n. $**$]) ne parle pas d'une *umkehrbar eindeutiger stetiger Beziehung*, mais bien d'une *umkehrbar eindeutiger Beziehung*, c'est-à-dire d'une fonction biunivoque ! Moore souligne néanmoins que les mathématiciens suivants interpréteront la définition de Dyck au sens d'une fonction continue biunivoque. Selon cette interprétation, Dyck ne clarifia pas le concept d'homéomorphisme, mais bien de fonction continue biunivoque entre deux sous-ensembles de l'espace euclidien.

Deuxièmement, les années 1860 à 1890 furent marquées par un élargissement du concept de *Mannigfaltigkeit*. D'une part, les *Mannigfaltigkeiten* de dimensions supérieures furent considérées. D'autre part, différents types de *Mannigfaltigkeiten* furent distingués : unilatères, orientées, connexes, etc. Cet élargissement s'accompagna de quelques tentatives d'étendre la théorie des surfaces vers une théorie des *Mannigfaltigkeiten* plus unifiée.

Troisièmement, l'objet de la topologie — classifier les espaces à équivalence près — se clarifia progressivement durant cette période. Dans la même veine, une caractérisation des espaces sur la base de leurs invariants fut entreprise.

L'étude des espaces était cependant encore fortement tributaire de la géométrie. En fait, l'inspiration géométrique de la théorie des *Mannigfaltigkeiten* était un obstacle à la construction d'une théorie générale et unifiée. Il manquait le point de vue et le cadre conceptuel foncièrement topologique qu'introduirait Poincaré quelques années plus tard.

### 1.2.2 Poincaré ou la topologie combinatoire par delà la géométrie

Le développement de la topologie entre 1860 et 1890 forgea une compréhension inédite des espaces. D'objets géométriques classiques, ceux-ci en vinrent à être compris comme relevant de la topologie, cette nouvelle géométrie appelée à l'origine *Analysis situs*. En contrepartie, le cadre conceptuel et symbolique par l'entremise duquel étaient appréhendés les espaces demeurait foncièrement géométrique. Ce n'est en effet qu'à la fin du XIX^e^ siècle que le mathématicien français Henri Poincaré entreprit, sans pour autant adopter une position normative qui puisse être qualifiée de moderne, d'élaborer un cadre proprement topologique.

Au cours des années 1880, Poincaré eut fréquemment affaire au concept de *Mannigfaltigkeit* dans ses recherches en analyse et en géométrie, notamment en théorie des fonctions automorphes ou encore en vue d'une classification des points de singularité d'un espace vectoriel [61]. En 1915, Poincaré décrirait cette omniprésence latente de la topologie combinatoire comme suit :

> Quant à moi, toutes les voies diverses où je m'étais engagé successivement me conduisaient à l'Analysis Situs. J'avais besoin des données de cette science pour poursuivre mes études sur les courbes définies par les équations différentielles et pour les étendre aux équations différentielles d'ordre supérieur et en particulier à celles du problème des trois corps. J'en avais besoin pour l'étude des fonctions non uniformes de 2 variables. J'en avais besoin pour l'étude des périodes des intégrales multiples et pour l'application de cette étude au développement de la fonction perturbatrice.
>
> Enfin j'entrevoyais dans l'Analysis Situs un moyen d'aborder un problème important de la théorie des groupes, la recherche des groupes discrets ou des groupes finis contenus dans un groupe continu donné. [Poincaré 1915, p. 101]

61. Voir Scholz [1999, p. 39–41] pour une description de certains exemples.

À terme, ces multiples rencontres avec les espaces de la topologie combinatoire le persuadèrent de la nécessité de les étudier en bonne et due forme.

En 1895 parut le mémoire « *Analysis Situs* » dans le *Journal de l'École Polytechnique* [Poincaré 1953*b*], fruit des réflexions de Poincaré sur le concept de variété et sa nature topologique. Ce mémoire s'inscrit dans la continuité des travaux de Riemann et Betti. Dans le même texte de 1915, Poincaré écrira d'ailleurs : « cette branche de la science a été jusqu'ici peu cultivée. Après Riemann est venu Betti qui a introduit quelques notions fondamentales ; mais Betti n'a été suivi par personne. » [1915, p. 101] L'objectif annoncé de Poincaré est d'enrichir la théorie topologique des *Mannigfaltigkeiten* à $n$ dimensions qu'avaient esquissée ses prédécesseurs.

Entre 1898 et 1904, Poincaré publia cinq autres articles sur le sujet — les « Compléments à l'*Analysis Situs* » — qui témoignèrent d'une nouvelle approche et qui posèrent les bases des développements à venir de la discipline.

> *In this series Poincaré set the stage for a theoretical exploration and characterization of manifolds of any (finite) dimension which expanded so fruitfully and vastly in our century. Moreover, in the elaboration of the tools of analysis situs to make the "hypergeometry" of manifolds symbolically accessible, he brought combinatorial topology to the point where it could easily transcend the limits of manifolds and become a field of study on its own.* [Scholz 1999, p. 41]

Du point de vue du développement du concept d'espace, la contribution de Poincaré à la topologie est donc double. Premièrement, il définit et caractérisa les variétés en tant qu'objets mathématiques. Deuxièmement, il mit en place un cadre conceptuel et symbolique pour les appréhender.

#### 1.2.2.1 La notion de variété

La définition et la caractérisation des variétés est la principale motivation de l'« *Analysis Situs* ». Le mémoire s'ouvre sur une présentation des objets qui y seront étudiés, c'est-à-dire les variétés. Poincaré présente deux principales définitions de ce concept. Il importe cependant de préciser que celles-ci sont imprécises dans la mesure où, comme le rappelle Scholz, Poincaré décrit plus des méthodes de constructions qu'il ne formule des définitions formelles. [1999, p. 41]

Selon le premier de ces procédés de construction, une variété est un ensemble de points décrit par un système d'équations et d'inégalités.

**Définition 1.2.2.1** (Poincaré 1953*b*)**.** Un ensemble de points $V$ dans l'espace à $n$ dimensions forme une *variété à $n-p$ dimensions* s'il existe un système d'égalités $F_\alpha(x_1, \ldots, x_n) = 0$ $(\alpha = 1, \ldots, p)$ et d'inégalités $\varphi_\beta(x_1, \ldots, x_n) > 0$ $(\beta = 1, \ldots, q)$ tel que les fonctions $F$ et $\varphi$ sont uniformes et continues, ont des dérivées continues et les déterminants de la matrice $[\partial F_\alpha / \partial x_i]$ ne s'annulent jamais tous à la fois.

Par exemple, une surface est une variété à $n-1$ dimensions, c'est-à-dire un cas particulier de variété à $n-p$ dimensions où $n \neq 2$ et $p = 1$. Une courbe est tout simplement une variété à une dimension, c'est-à-dire une variété à $n-p$ dimensions où $n=2$ et $p=1$. [Poincaré 1953*b*, p. 198]

En particulier, un *ouvert* est une variété qui n'est définie que par des inégalités. Un ouvert est donc une portion de l'espace à $n$ dimensions [62].

À vrai dire, Poincaré entend n'étudier que les variétés connexes [63]. Il affirme qu'une variété est *connexe* si, pour toute paire de points $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ et $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ de $V$, il est possible de passer de manière continue de $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ à $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ dans $V$.

Les variétés sont donc conçues comme la généralisation à un nombre arbitraire de dimensions des courbes et des surfaces. [V. J. Katz 1999, p. 116] En termes contemporains, les objets étudiés par Poincaré sont donc des variétés différentielles $C^1$ connexes. [Dieudonné 1989*b*, p. 17]

Poincaré introduit ensuite quelques notions relatives aux variétés. Premièrement, une variété est *finie* si pour tout point $(x_1, \ldots, x_n)$, $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2 < K^2$ où $K$ est une constante. Deuxièmement, la frontière d'une variété $V$ à $n-p$ dimensions est une variété de dimension inférieure. Un peu plus formellement, la *frontière complète* de $V$ est l'ensemble des points tels que $F_\alpha = 0$ $(1 \leq \alpha \leq p)$, $\varphi_\beta = 0$ $(1 \leq \beta \leq q)$ et $\varphi_\gamma > 0$ $(1 \leq \gamma \leq q$ et $\gamma \neq \beta)$. La *frontière* $\partial V$ de $V$ est la frontière complète à $n-p-1$ dimensions de $V$. La frontière de $V$ est donc la plus grande variété à $n-p-1$ dimensions incluse dans la frontière complète de $V$. Une variété est alors dite *illimitée* si elle n'a pas de frontière. À l'inverse, elle est dite *limitée* si elle a une frontière. Finalement, une variété est *fermée* si elle est connexe, finie et limitée.

Poincaré définit par la suite des difféomorphismes [64] qui induisent un critère d'équivalence sur les variétés. Soient $V$ et $V'$ deux variétés de dimension $n$ définies respectivement par les conditions $F_\alpha = 0$, $\varphi_\beta = 0$ et $F'_\alpha = 0$, $\varphi'_\beta = 0$. Soit également une fonction $\psi : V \to V'$ telle que

$$x'_k = \psi_k(x_1, \ldots, x_n) \quad (k = 1, 2, \ldots, , n)$$

Les variétés $V$ et $V'$ sont *difféomorphes* s'il existe un bijection $V \to V'$ qui se prolonge en une bijection différentiable entre des ouverts en remplaçant l'équation $F_\alpha = 0$ par $-\epsilon < F_\alpha < \epsilon$ [65]. Par exemple, tous les polygones ayant le même nombre de côtés sont difféomorphes.

Comparativement à la définition, par exemple, de Möbius où il était question de points infiniment proches transformés en points infiniment proches, celle de Poincaré est certes plus formelle, mais ces difféomorphismes sont loin d'avoir la généralité des homéomorphismes.

62. Poincaré parle d'un domaine plutôt que d'un ouvert.
63. Poincaré utilise plutôt le terme « continue ».
64. Poincaré les appelle « homéomorphismes ». Moore [2007, p. 335] attribue en conséquence à Poincaré le terme « homéomorphisme », mais pas le concept.
65. Cette formulation des conditions est tirée de Sarkaria [1999, p. 127]. Celle de Poincaré est beaucoup moins synthétique.

La deuxième méthode indique comment construire une variété à partir d'autres variétés. Soient $V$ et $V'$ deux variétés à $m$ dimensions respectivement décrites par les systèmes d'équations $x_i = \theta_i(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ $(i = 1, \ldots, n)$ où $y_1, \ldots, y_m$ sont des variables linéairement indépendantes et $x'_i = \theta'_i(y'_1, y'_2, \ldots, y'_m)$ où les variables $y'_1, \ldots, y'_m$ sont linéairement indépendantes. La variété $V$ est la continuation analytique de $V'$ — et réciproquement — si l'intersection $V \cap V'$ est une variété $m$-dimensionnelle, c'est-à-dire si les $y$ sont des fonctions analytiques des $y'$. Ainsi, la continuation analytique permet de construire des variétés par recollement.

**Définition 1.2.2.2** (Poincaré 1953*b*)**.** Une *variété* est un réseau continu de variétés, c'est-à-dire un ensemble de variétés $V_1, V_2, \ldots, V_k$ reliées par continuation analytique.

Cette deuxième définition suggère que, pour Poincaré, l'espace est une totalité constituée par l'agencement de parties géométriques, mais aussi que, en tant que totalité, il a préséance sur ses points. Elle est également moins générale que la première. Poincaré donne effectivement une démonstration que toute variété au sens de la première en est également une au sens de la deuxième. Il se contente toutefois d'affirmer qu'une variété au sens de la deuxième n'en est pas nécessairement une au sens de la première, ce que ne manque pas de le souligner Dieudonné [1989*b*, p. 17].

L'« *Analysis Situs* » se démarque donc par une volonté de clarifier le concept de variété.

> *Although he did not even attempt to give a formal analysis and unified delimitation of the concept, Poincaré's work was thus highly effective and gave a tremendous push towards a more refined understanding of the general concept outlined by Riemann and so difficult to understand in the second half of the 19th century*. [Scholz 1999, p. 43]

Cependant, en raison des hypothèses auxquelles elles sont soumises, les variétés considérées et définies par Poincaré étaient encore loin du concept général qui s'imposerait plus tard au XX$^e$ siècle.

#### 1.2.2.2 Le cadre symbolique dans l'« *Analysis Situs* »

Dans les sections suivantes de l'« *Analysis Situs* », Poincaré introduisit différentes notions de manière à rendre possible une analyse et une caractérisation topologiques des variétés : homologie, groupe fondamental et triangulation. Ce faisant, il dota la topologie combinatoire d'un cadre conceptuel et symbolique.

**L'homologie** Dans « *Analysis Situs* », Poincaré développe une notion d'homologie s'inscrivant dans la continuité de Riemann et Betti. Soit $V$ une variété à $p$ dimensions. La *relation d'homologie*

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_\lambda \sim 0$$

signifie qu'il existe une sous-variété $W$ de $V$ à $q$ dimensions ($q \leq p$) dont la frontière complète se compose de $\lambda$ variétés connexes à $q-1$ dimensions $v_1, v_2, \ldots, v_\lambda$. En général, une relation d'homologie de la forme

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_\lambda v_\lambda \sim 0$$

signifie que la frontière complète de la variété $W$ se compose de $k_i$ variétés « peu différentes » [Poincaré 1953*b*, p. 207] de $v_i$.

Poincaré n'explicite guère la signification d'une relation d'homologie. Pour le lecteur contemporain, force est d'admettre qu'elle en bénéficierait ! Nonobstant le manque de limpidité de sa définition, Poincaré a le mérite de proposer un calcul dont les objets sont les sous-variétés qui interviennent dans une relation d'homologie de même qu'une représentation algébrique de ces relations. Par exemple, l'addition de deux relations d'homologie

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_p v_p \sim 0 \qquad k'_1 v'_1 + k'_2 v'_2 + \cdots + k'_q v'_q \sim 0$$

donne une relation d'homologie

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_p v_p + k'_1 v'_1 + k'_2 v'_2 + \cdots + k'_q v'_q$$

L'importance de l'homologie tient particulièrement à ce qu'elle permet de définir les ordres de connexion d'une variété. Soit $V$ une variété et $v_1, v_2, \ldots, v_\lambda$ des sous-variétés de dimension $m$. Ces sous-variétés sont *linéairement indépendantes* s'il n'existe aucune relation d'homologie entre elles. S'il existe exactement $P_{m-1}$ variétés de dimensions $m$ fermées linéairement indépendantes, alors l'ordre de connexion de $V$ par rapport à $v_1, \ldots, v_{P_m - 1}$ est égal à $P_m$. Par définition, les *nombres de Betti* $P_1, P_2, \ldots, P_m$ d'une variété $V$ sont ses ordres de connexion par rapport à des variétés de dimensions $1, 2, \ldots, m-1$ [66]. En d'autres termes, le nombre de Betti $P_m$ d'une variété $V$ est le nombre maximal moins 1 de sous-variétés de $V$ qui ne sont pas liées par une relation d'homologie.

Le principal résultat relatif à l'homologie des variétés est le théorème de dualité.

**Théorème** (Théorème de dualité, Poincaré 1953*b*)**.** Soit $V$ une variété fermée. Les nombres de Betti de $V$ également distants des extrêmes sont égaux, c'est-à-dire $P_p(V) = P_{n-p}(V)$ pour $0 \leq p \leq n$.

La démonstration de Poincaré se base sur les intersections de variétés, mais est loin d'être rigoureuse.

66. Les nombres de Betti ainsi définis sont différents des ordres de connexion de Riemann et Betti. Les critiques de Heegaard conduiront Poincaré à le réaliser. Voir section 1.2.2.3.

**Le groupe fondamental** Poincaré envisage le groupe fondamental comme un outil en vue d'une classification des espaces à déformation continue près. En effet, le groupe fondamental est l'invariant caractéristique d'une variété : deux surfaces peuvent être transformées l'une dans l'autre si et seulement si elles ont le même groupe fondamental. Dans « Sur l'*Analysis Situs* », un court texte de 1892 [Poincaré 1953*a*], il écrivait déjà à ce propos :

> On peut se demander si les nombres de Betti suffisent pour déterminer une surface fermée au point de vue de l'*Analysis Situs*, c'est-à-dire si, étant données deux surfaces fermées qui possèdent mêmes nombres de Betti, on peut toujours passer de l'une à l'autre par voie de déformation continue. Cela est vrai dans l'espace à trois dimensions et l'on pourrait être tenté de croire qu'il en est encore de même dans un espace quelconque. C'est le contraire qui est vrai. (...)
>
> Le groupe $G$ peut donc servir à définir la surface et s'appeler le groupe de la surface. Il est clair que si deux surfaces peuvent se transformer l'une dans l'autre par voie de déformation continue, leurs groupes sont isomorphes. La réciproque, quoique moins évidente, est encore vraie, pour des surfaces fermées, de sorte que *ce qui définit une surface fermée au point de vue de l'Analysis Situs, c'est son groupe*. [1953*a*, p. 189]

Soit $V$ une variété définie par les relations $f_\alpha = 0$ et $\varphi\beta > 0$. Soient également $F_1(x_1, \ldots, x_n), F_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, F_\lambda(x_1, \ldots, x_n)$ des fonctions satisfaisant certaines conditions qui garantissent que, pour tout contour infiniment petit et pour tout lacet sur $V$, elles reviennent à leurs valeurs initiales [67]. Poincaré affirme que tout contour fermé permutera les valeurs initiale et finale des fonctions $F_i$. Il en conclut que les permutations sur les contours fermés forment un groupe : « *L'ensemble de toutes les substitutions que les fonctions $F$ subiront ainsi, quand le point $M$ décrira tous les contours fermés que l'on peut tracer sur la variété $V$ en partant du point initial $M_0$, formera évidemment un groupe que j'appelle $g$.* » [1953*b*, p. 240]

Afin de définir le groupe fondamental, Poincaré introduit quelques notations sur les contours et des relations qu'il nomme équivalences. Premièrement, la notation $M_0AM_0 \equiv 0$ signifie que le contour fermé $M_0AM_0$ de point initial $M_0$ tracé sur $V$ se réduit à un lacet. Par « se réduire », il semble que Poincaré veuille dire que toutes les fonctions $F_i$ reviennent à leur valeur initiale sur $M_0AM_0$. [Vanden Eynde 1999, p. 84] La concaténation de deux chemins $M_0AM_1BM_0$ et $M_0BM_1CM_0$ s'écrit $M_0AM_1BM_0 + M_0BM_1CM_0$. Deuxièmement, une *équivalence* est une relation de la forme

$$k_1C_1 + k_2C_2 + \cdots \equiv k_\alpha C_\alpha + k_\beta C_\beta + \ldots$$

où les $k_i$ et les $k_j$ ($i = 1, 2, \ldots,\ j = \alpha, \beta, \ldots$) sont des entiers et les $C_i$ et les $C_j$ des contours fermés sur $V$ partant d'un point $M_0$. Dans une telle équivalence, les fonctions $F_i$ prennent les mêmes valeurs sur les chemins $k_1C_1 + k_2C_2 + \ldots$ et $k_\alpha C_\alpha + k_\beta C_\beta + \ldots$. Les équivalences ressemblent aux homologies, mais s'en distinguent en deux points : (1) dans les relations homologiques, les contours peuvent partir d'un

67. Pour ces conditions, voir Poincaré [1953*b*, p. 240].

point initial quelconque et (2) dans les relations homologiques, les termes d'une somme peuvent être intervertis.

L'opération de concaténation doit donc se comprendre comme une loi de composition sur les contours fermés. Munis de cette opération, les contours fermés d'une variété forment un groupe, appelé le groupe fondamental de la variété en question.

**Définition 1.2.2.3** (Poincaré 1953*b*)**.** Soit $V$ une variété. Le *groupe fondamental* $V$ est le groupe $G$ satisfaisant les conditions suivantes :

(1) À chaque contour fermé $M_0BM_0$ correspond une permutation $S$ du groupe ;

(2) $S$ se réduit à la permutation identité si et seulement si $M_0BM_0 \equiv 0$ ;

(3) Soient $S$ et $S'$ des permutations du groupe correspondant aux contours $C$ et $C'$. Si $C'' \equiv C + C'$, alors $SS'$ est la permutation correspondant à $C''$ [68].

La construction du groupe fondamental et la reconnaissance de son caractère invariant marquent l'introduction de concepts et de méthodes algébriques en topologie, et ce même si son rôle se limite au calcul de relations d'homologie par opposition à une caractérisation homotopique des surfaces.

**Triangulation** Le mémoire se termine avec une généralisation de la caractéristique de Euler aux variétés de dimension $n$. Tout au long du XIX$^{\text{e}}$ siècle, la formule avait été l'objet de quelques généralisations. D'une part, pour les polyèdres convexes à $n$ dimensions, la formule était la suivante :

$$\alpha_{n-1} - \alpha_{n-2} + \alpha_{n-3} - \cdots + (-1)^{n-1}\alpha_0 = 2$$

où $\alpha_j$ $(1 \leq j \leq n-1)$ est le nombre de faces à $j$ dimensions du polyèdre. D'autre part, la caractéristique de Euler des polyèdres non convexes était plutôt donnée par la formule $S - A + F = 3 - P_1$ où $S$, $A$ et $F$ sont respectivement le nombre de sommets, d'arêtes et de faces du polyèdre et où $P_1$ est le nombre de Betti du polyèdre considéré comme une variété fermée à deux dimensions.

Poincaré cherche à appliquer une formule similaire à la première aux polyèdres non convexes de dimensions arbitraires. Il obtiendrait ainsi une formule générale s'appliquant à toutes les variétés à $n$ dimensions. Concrètement, il veut montrer que la caractéristique d'une variété fermée à $n$ dimensions est donnée par la formule

$$N = \alpha_n - \alpha_{n-1} + \alpha_{n-2} - \cdots + (-1)^n\alpha_0$$

où $\alpha_i$ est le nombre de $v_i$.

Pour ce, il donne une définition générale de polyèdre. Intuitivement, un polyèdre est une variété munie d'une triangulation, c'est-à-dire qui peut être subdivisée en plusieurs cellules.

68. Le recours aux permutations dans cette définition découle de ce que seuls les groupes de permutations et de transformations étaient à l'époque utilisés. Voir Vanden Eynde [1999, p. 86].

**Définition 1.2.2.4** (Poincaré 1953*b*)**.** Un *polyèdre* à $n$ dimensions est une variété $V$ à $p$ dimensions telle que

(1) $V$ se subdivise en $\alpha_p$ variétés $v_p$ à $p$ dimensions qui ne sont pas fermées et qui sont difféomorphes à l'hypersphère ;

(2) pour tout $k \leq p$, la frontière de $v_k$ est formée de $\alpha_{k-1}$ variétés à $k-1$ dimensions difféomorphes à l'hypersphère ;

(3) $V$ est l'union des variétés $v_p, v_{p-1}, \ldots, v_1$.

Poincaré est donc convaincu que toute variété possède une triangulation et peut être représentée comme un polyèdre. Cette conviction confirme d'ailleurs qu'il ne conçoit pas un espace comme un ensemble de points.

En résumé, dans l'« *Analysis Situs* », l'étude des variétés s'inscrivait dans un cadre symbolique déterminé par les notions d'homologie, de groupe fondamental et de triangulation. Poincaré fut toutefois rapidement obligé de le réviser afin d'en combler certaines lacunes.

#### 1.2.2.3 Le cadre symbolique dans les « Compléments à l'*Analysis Situs* »

Dans sa thèse de doctorat de 1898, le mathématicien danois Pool Heegaard analysa le mémoire de Poincaré et y releva plusieurs imprécisions et erreurs. En particulier, il remit en question le théorème de dualité et sa démonstration. Dans l'introduction de « Complément à l'*Analysis Situs* », Poincaré commente les critiques de Heegaard et admet que sa démonstration possède des faiblesses auxquelles il se doit de remédier [69].

Au lieu de colmater les brèches dans la théorie de l'homologie telle qu'elle se présentait dans l'« *Analysis Situs* », Poincaré développa une toute nouvelle approche dont la pierre de touche est la notion de triangulation. Les « Compléments à l'*Analysis Situs* », mais principalement les deux premiers respectivement publiés dans *Rendiconti del Circlo Matematico di Palermo* en 1899 [Poincaré 1953*c*] et dans *Proceedings of the London Mathematical Society* en 1900 [Poincaré 1953*d*], présentèrent donc un cadre conceptuel révisé par rapport au mémoire de 1895. En effet, le renouvellement de l'homologie le conduisit à définir les notions de subdivision barycentrique, de triangulation duale et de coefficient de torsion.

**Subdivision barycentrique et triangulation duale** Dans « Complément à l'*Analysis Situs* » et comme il l'avait fait dans le mémoire original pour démontrer la formule de Euler, Poincaré définit une variété fermée à $p$ dimensions comme

69. Pour les critiques de Heegaard et les commentaires de Poincaré, voir Heegaard [1916] et Poincaré [1953*c*] respectivement.

un polyèdre, c'est-à-dire comme une variété qui peut être récursivement subdivisée en variétés de dimensions inférieures.

La subdivision barycentrique, ou polyèdre dérivé pour reprendre la terminologie de Poincaré, $P'$ d'un polyèdre $P$ dans l'espace à $p$ dimensions se construit comme suit. Premièrement, $P$ est subdivisé en plusieurs variétés $a_i^{p-1}$ à $p-1$ dimensions. Ces variétés $a_i^{p-1}$ sont à leur tour subdivisées en variétés $a_i^{p-2}$ variétés à $p-2$ dimensions et ainsi de suite jusqu'à ce que les arêtes $a_i^1$ soient subdivisées en leurs sommets $a_i^0$.

Deuxièmement, pour tout $k = 1, \dots, p-1$, un point $P(a_i^k)$ est marqué à l'intérieur de chacune des variétés $a_i^k$. Ce point est le barycentre de la variété $a_i^k$. Pour tout $k = 1, \dots, p-1$, le point $P(a_i^k)$ est relié aux sommets de la variété $a_i^k$ et à chacun des points $P(a_i^{k-1})$. Par exemple, des lignes sont tracées entre le point $P(a_i^2)$ et chacun des sommets de la variété $a_i^2$ et chacun des points $P(a_i^1)$ marqués sur les variétés $a_i^1$. Ces lignes subdivisent la variété $a_i^2$ en triangles. Similairement, ce processus subdivise la variété $a_i^3$ en tétraèdres ayant pour sommets les points $P(a_i^3)$ et pour bases les triangles subdivisant la variété $a_i^2$. La *subdivision barycentrique* $P'$ de $P$ est la collection des « triangles » de dimensions $p$ et de sommets $P(a_i^{p-1})$.

La triangulation duale — Poincaré parle du polyèdre réciproque — s'obtient par la construction d'un polyèdre à l'aide de « triangles » duaux à ceux de la subdivision barycentrique. L'idée est de construire, pour tout $k = 1, \dots, p-1$, des variétés $b_i^k$ à partir des barycentres des variétés de $P'$. Par exemple, une variété $b_i^1$ est donnée par deux lignes joignant $P(a_i^2)$ respectivement à $P(a_j^3)$ et $P(a_l^3)$ de telle sorte que les variétés $a_j^3$ et $a_l^3$ soient séparées par $a_i^2$. Plus généralement,

- À chaque variété $b_i^{p-1}$ de $P^*$ correspond un sommet $a_i^0$ de $P$ ;
- À chaque variété $b_i^{p-2}$ de $P^*$ correspond une variété $a_i^1$ de $P$ ;

  $\vdots$

- À chaque variété $b_i^1$ de $P^*$ correspond une variété $a_i^{p-1}$ de $P$.

Bref, les variétés $b_i^k$ du polyèdre réciproque sont en correspondance biunivoque avec les variétés $a_i^{p-k}$ de la subdivision barycentrique. Le *polyèdre réciproque* $P^*$ de $P$ est la collection de ces variétés $b_i^{p-1}$ [70].

Dans « Complément à l'*Analysis Situs* », les notions de subdivision barycentrique et de triangulation duale sont utilisées pour démontrer le théorème de dualité. Comme le remarque Dieudonné, compte tenu que, premièrement, un polyèdre $P$ et sa subdivision barycentrique $P'$ ont les mêmes nombres de Betti et, deuxièmement, toute subdivision barycentrique $P'$ de $P$ est également une subdivision barycentrique de $P^*$, il suffit en fait de montrer que $P_p(P) = P_{p-q}(P^*)$. [1994, p. 51]

Poincaré montre à cette fin que les nombres de Betti d'un polyèdre peuvent être calculés à l'aide de matrices — il les appelle en fait des « tableaux » — et développe un algorithme dont les seules opérations sont l'addition et la soustraction de même que la permutation de colonnes et de lignes. Cet algorithme en est un de

70. Pour le détail de la construction, voir Poincaré [1953*c*, p. 314–315].

diagonalisation. L'idée est que les matrices considérées encodent les triangulations des polyèdres.

Ce calcul matriciel confirme un changement de perspective en homologie ; chez Poincaré, les nombres de Betti sont associés non pas directement à un espace, mais à une triangulation de celui-ci. De plus, démonstration intuitive à l'appui, les nombres de Betti sont indépendants du choix de la triangulation. Il en résulte que la triangulation offre une reconstruction et ainsi une représentation de l'espace à l'aide d'un agencement de parties géométriques régulières. Bref, c'est le caractère de totalité de l'espace qui prime sur le fait que les points qui le composent forment un ensemble.

**Les coefficients de torsion** Selon le cadre symbolique élaboré dans l'« *Analysis Situs* », les nombres de Betti ne sont pas des invariants topologiques puisque deux variétés ayant les mêmes nombres de Betti ne sont pas nécessairement homéomorphes. Poincaré était pleinement conscient de ce problème. À la section 14, après avoir présenté quelques exemples, il écrit : « Pour que deux variétés fermées soient [difféomorphes], il ne suffit donc pas qu'elles aient les mêmes nombres de Betti. » [1953*b*, p. 257] Poincaré présenta sa solution dans le « Second Complément à l'*Analysis Situs* » : il faut également considérer les coefficients de torsion de la variété.

Soit $T_q$ une matrice associée à un polyèdre $P$. En appliquant l'algorithme de diagonalisation, $T_q$ se réduit à une matrice diagonale $\mathrm{diag}(\omega_1^q, \omega_2^q, \ldots, \omega_r^q, 0, \ldots, 0)$ où, pour tout $i = 1, \ldots, r-1$, $\omega_i^q$ divise $\omega_{i+1}^q$. Ces entiers $\omega_i^q$ sont les coefficients de torsion $k$-dimensionnels du polyèdre $P$ [71].

Ainsi, une variété est *sans torsion* si ses coefficients de torsion sont tous égaux à 0 ou 1, c'est-à-dire si pour tout $i = 1, \ldots, r$, $\omega_i^q = 0$ ou $\omega_i^q = 1$. Inversement, une variété est *à torsion* si certains de ses coefficients de torsion sont différents de 0 et 1, c'est-à-dire s'il existe $1 \leq i \leq r$ tel que $\omega_i^q = k$ où $k \neq 0$ et $k \neq 1$. Les coefficients de torsion permettent de tenir compte du fait qu'une même variété apparaît plusieurs fois dans la frontière.

Dans cette optique, l'information homologique d'une variété est encodée dans ses nombres de Betti et ses coefficients de torsion.

Avec son mémoire « *Analysis Situs* » et les cinq compléments qui le suivirent, Poincaré inaugura une théorie topologique des variétés. Premièrement, il mit de l'avant un concept de variété qui synthétisait les différents concepts avec lesquels avaient travaillé les mathématiciens s'étant intéressés à la topologie depuis Riemann. En effet, Poincaré comprend que l'orientation, la fermeture, l'existence d'une frontière, etc. sont des propriétés des variétés et participent à une description topologique de celles-ci.

Deuxièmement, le mémoire de 1895 instaura un cadre conceptuel et symbolique que raffinèrent les compléments. Chez Poincaré, la topologie combinatoire qui

71. Poincaré appelle les coefficients de torsion les invariants de la matrice $T_q$.

découle des concepts et méthodes formant ce cadre analyse et caractérise les espaces en termes d'invariants : nombres de Betti, coefficients de torsion et groupe fondamental. À cet égard, ce mode d'analyse des espaces se distingue par le recours à des concepts et méthodes algébriques et marque donc l'introduction de ceux-ci en topologie. Il en résulte un changement fondamental : là où l'approche d'inspiration géométrique se basait sur des invariants numériques, Poincaré associe des invariants algébriques aux variétés. « *The first and foremost* [*novelty*] *was that, whereas mathematicians before him tried to attach* numbers *invariant under homeomorphisms to spaces, Poincaré was the first who introduced the idea of* computing with topological objects*, not only numbers*. » [Dieudonné 1989*b*, p. 17]

En conséquence, avec Poincaré, la théorie des variétés prend un tournant topologique comme le souligne Scholz :

> *In the end Poincaré had achieved a lot for a homological theory of (differentiable compact) manifolds about the turn of the century. He had introduced the old invariants (Betti numbers) in a new, much clearer symbolical framework, had introduced new ones (torsion coefficients), developed a well algebraicized calculus to compute them, calculated them in a great variety of cases, and proven two basis theorems (duality, Euler–Poincaré). Moreover he had introduced and given basic analysis of the topological importance of the fundamental group* (...) *Thus, even taken into consideration that Poincaré took basic principles to be valid without any hesitation (triangulability, Hauptvermutung), that turned out to contain serious problem potential for the future clarification of basic structures of the topology of manifolds during the century to come, there can be no doubt that he was the initiator of a topological theory of manifolds of wide range.* [1999, p. 45]

En contrepartie, le recours à l'intuition typique de la démarche de Poincaré ouvrit la porte à de nombreuses imprécisions et erreurs. Des hypothèses sont ainsi fréquemment admises sans être soumises à un examen critique, probablement parce que considérées évidentes. De plus, les démonstrations, lorsqu'elles ne sont pas carrément omises, souffrent habituellement de nombreux sauts ou présentent des erreurs. Par exemple, Poincaré prend pour acquis que toute variété possède une triangulation.

> *As in so many of his papers, he gave free reign to his imaginative powers and his extraordinary "intuition," which only seldomly led him astray; in almost every section is an original idea. But we should not look for precise definitions, and it is often necessary to guess what he had in mind by interpreting the context. For many results, he simply gave no proof at all, and when he endeavoured to write down a proof hardly a single argument does not raise doubt. The paper is really a* blueprint *for future developments of entirely new ideas, each of which demanded the creation of a new technique to put it on a sound basis*. [Dieudonné 1989*b*, p. 17]

Dans cette optique, le développement subséquent de la topologie combinatoire apparaît comme une réalisation rigoureuse d'un programme que Poincaré aurait dégagé dans l'« *Analysis Situs* » et les compléments.

### 1.2.3 La formation d'une armature conceptuelle rigoureuse

En dissociant l'étude des variétés de son arrière-plan géométrique, Poincaré fit prendre à l'*Analysis Situs* de ses prédécesseurs un nouveau départ. Pour cette raison, Sarkaria n'hésite pas à dire que la topologie combinatoire commença avec Poincaré : « *Topology, as we know it today, started with Poincaré's* "Analysis Situs*" and its five* Compléments. » [1999, p. 123]

Ironiquement, l'élan que donna Poincaré à la topologie est au moins partiellement imputable à ses erreurs et imprécisions. En effet, jusqu'au milieu des années 1920, la majorité des contributions à la topologie combinatoire eurent pour principal objectif de combler les lacunes du « programme » exposé dans l'« *Analysis Situs* » et les compléments. Dieudonné écrit à ce propos : « *It took about 30 years to construct a theory of homology applicable to curvilinear "polyheadra," embodying all the ideas of Poincaré and entirely rigorous.* » [1989*b*, p. 36]

Deux mouvements distincts, mais néanmoins interdépendants et complémentaires, caractérisèrent le développement de la topologie combinatoire entre 1905 et 1930. Le premier mouvement enrichit le cadre conceptuel et symbolique mis sur pied par Poincaré afin de doter la topologie combinatoire d'outils à l'aide desquels démontrer rigoureusement les résultats de l'« *Analysis Situs* » et des compléments.

> Les successeurs de Poincaré dans les recherches de Topologie algébrique (dite alors « Topologie combinatoire ») s'aperçurent assez vite que les mémoires de Poincaré, malgré le nombre des idées profondes et originales qui y foisonnaient, ne constituaient pas autre chose qu'un *programme de travail*. Les notions de base étaient bien là (en fait, aucune idée d'importance comparable n'apparut en Topologie avant 1920) ; mais il manquait les *outils* nécessaires pour fournir des démonstrations correctes, et Poincaré n'en disposait pas. [Dieudonné 1994, p. 52]

À la fin de cette période, l'armature conceptuelle de la topologie combinatoire comprendrait l'homotopie, les méthodes simpliciales, la notion de degré, l'invariance de l'homologie relativement aux triangulations, la dualité d'Alexander, l'homologie relative, l'homologie d'un produit de complexes cellulaires et la notion d'intersection de deux variétés.

Pour sa part, le second mouvement s'affaira à préciser le concept d'espace sous-jacent à la topologie combinatoire. Ce mouvement s'inscrivait notamment dans une entreprise plus vaste visant à définir le concept de variété en général et à distinguer les structures topologique, combinatoire et analytique [72].

Historiquement, trois grandes approches peuvent être identifiées dans le développement de la topologie combinatoire entre 1905 et 1930.

72. Seuls les aspects ayant eu une influence directe sur la conceptualisation de l'espace seront abordés. Pour une analyse exhaustive, voir Dieudonné [1989*b*, partie 1, chapitre II] ou encore Dieudonné [1994, §8].

#### 1.2.3.1 Les variétés comme complexes cellulaires

Selon Poincaré, toute variété possède une triangulation et peut donc être interprétée comme un polyèdre. De ce point de vue, toute variété peut être décomposée en plusieurs cellules de dimensions inférieures. Cette méthode de construction des variétés fut à l'origine d'une compréhension des variétés en tant que complexes cellulaires géométriques qui apparut dans les années suivant immédiatement la publication de l'article « Cinquième Compléments à l'*Analysis Situs* ». Dehn et Heegaard, Tietze ainsi que Steinitz furent les principaux protagonistes de cette première phase [73].

Dans leur article consacrée à la topologie dans *Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften* [Dehn et Heegaard 1907], Max Dehn et Pool Heegaard proposèrent de définir une variété comme un complexe cellulaire. Sur la base d'un complexe de points $C_0$ — essentiellement une collection de points $\{P_0', P_0'', \ldots, P_0^{\alpha_0}\}$ —, Dehn et Heegaard construisent, pour tout $n$, un complexe $n$-dimensionnel $C_n$ et, à partir de celui-ci, une variété $n$-dimensionnelle $M_n$ [74]. En comparaison, chez Poincaré, une variété était interprétée, voire reconstruite, comme un polyèdre, mais n'était pas définie comme tel.

Avec cette définition, Dehn et Heegaard imposèrent une compréhension de l'espace selon laquelle celui-ci est le résultat d'un collage :

> *Spaces were treated as being made up of cells, usually simplexes. The topology of the cells was regarded as well-understood; the interest lay in the way they were fitted together to form the space. Although this viewpoint was implicit in the work of Poincaré it was Dehn and Heegaard who made it explicit*. [James 1999, p. 562]

De plus, Dehn et Heegaard définissent un critère d'équivalence topologique sur les complexes, et par extension sur les variétés. Ce critère est donné, non pas par la notion habituelle de fonction bicontinue et bijective, mais par celle de correspondance élémentaire [75].

L'année suivante, soit en 1908, Tietze aborda l'étude des variétés $n$-dimensionnelles d'une manière similaire dans un article intitulé « *Über die topologischen Invarianten mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten* » [Tietze 1908] Tietze considère successivement les cas à une, deux et trois dimensions pour suggérer comment traiter le cas $n$-dimensionnel. En gros, il définit les variétés par le biais de complexes cellulaires — il emploie le terme schéma, *Schemata* en allemand. Une variété est un complexe cellulaire tel que, pour toute cellule $m$-dimensionnelle $C^m$, $\mathrm{St}\, C^m$ est combinatoirement équivalent à la sphère $S^{n-m-1}$ [76].

73. La présentation qui suit reprend pour l'essentiel celle de Scholz [1999, §5.2].
74. Pour le détail, voir Dehn et Heegaard [1907, p. 156–157] ou, pour une présentation se généralisant aisément, [1907, p. 161–163].
75. Pour la définition, voir Dehn et Heegaard [1907, p. 159–160].
76. Pour le détail, voir les quatre premières sections de Tietze [1908].

Tietze s'intéresse également à un critère d'équivalence sur les variétés, c'est-à-dire aux variétés homéomorphes pour reprendre ses termes, mais sans vraiment préciser comment reconnaître de telles variétés.

Toujours en 1908, Ernst Steinitz proposa une axiomatisation du concept de variété combinatoire. Dans un premier temps, les complexes cellulaires sont caractérisés à l'aide six axiomes. Dans un second temps, l'ajout de trois axiomes permet de définir les variétés combinatoires et de les distinguer des complexes en général. D'après Scholz, l'influence de l'axiomatisation de Steiniz fut cependant limitée en raison de la faiblesse du concept de variété auquel elle donne lieu. [1999, p. 49]

#### 1.2.3.2 Les méthodes simpliciales

Entre 1910 et 1912, Brouwer publia plusieurs articles dans lesquels il aborda les variétés d'un point de vue rappelant les subdivisions barycentriques de Poincaré [77]. Contrairement à Dehn et Heegaard, Tietze et Steinitz, il ne définit pas une variété à l'aide de complexes cellulaires, mais plutôt à l'aide de complexes simpliciaux.

**Brouwer** La contribution de Brouwer à la topologie combinatoire fut triple. La première fut de donner un sens précis aux déformations continues en définissant la notion d'homotopie, ce qu'il fit dans une note de base de page en 1912 :

> *Under a continuous modification of a univalent continuous transformation we understand in the following always the construction of a continuous series of univalent continuous transformations, i.e. a series of transformations depending in such a manner on a parameter, that the position of an arbitrary point is a continuous function of its initial position and the parameter*. [1975, p. 7, n]

Sauf pour le formalisme, cette définition est absolument identique à la contemporaine, cette dernière stipulant que, étant données deux applications continues $f, g\colon E \to F$, une *homotopie* est une application continue $\alpha\colon E \times [0,1] \to F$ telle que, pour tout $x \in E$, $\alpha(x,0) = f(x)$ et $\alpha(x,1) = g(x)$.

La deuxième contribution de Brouwer, tel que suggéré ci-dessus, fut l'avènement du point de vue simplicial et l'élaboration de concepts et méthodes inédits à l'aide desquels caractériser les variétés. Dans « *Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten* » [Brouwer 1911], Brouwer définit une variété comme complexe simplicial. Tout d'abord, un complexe simplicial se définit de la même façon que les subdivisions barycentriques de Poincaré. Une *variété $n$-dimensionnelle $M$* est alors un complexe simplicial de dimension $n$ tel que (1) toute paire de $n$-simplexes d'intersection non vide ont en commun une face $p$-dimensionnelle ($1 \leq p \leq n-1$) de même que toutes les faces de dimensions inférieures de celle-ci et (2) pour tout sommet, la collection

77. Par contre, Brouwer ne fait aucune référence à Poincaré. À ce sujet, voir Dieudonné [1989*b*, p. 167–168].

des simplexes incidents est homéomorphe à un voisinage de dimension $n$ [78]. Brouwer ajoute qu'une variété est fermée si son complexe simplicial se compose d'un nombre fini de simplexes et, inversement, ouverte s'il se compose d'un nombre infini de simplexes.

Pour étudier les variétés ainsi comprises, Brouwer développe des méthodes inédites. La plus importante est l'approximation simpliciale qui, intuitivement, peut être vue comme une méthode généralisée d'approximation par des fonctions linéaires.

En termes contemporains, une application simpliciale se définit comme suit. Soient $X$ et $Y$ deux complexes simpliciaux. Une *application simpliciale* $\alpha\colon X \to Y$ est une application continue telle que, pour tout $p \geq 0$, l'image des sommets $A_1, A_2, \ldots, A_p$ d'un $p$-simplexe $S$ de $X$ est incluse dans un $q$-simplexe de sommets $\alpha(A_1), \alpha(A_2), \ldots, \alpha(A_p)$ de $Y$, $q \leq p$, et telle que la restriction $\alpha|_S$ est affine.

Soit maintenant $\alpha\colon X \to Y$ une application simpliciale. Une *approximation simpliciale* de $\alpha$ est une application $\beta\colon X \to Y$ telle que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une triangulation $T'$ de $X$ obtenue par subdivisions barycentriques telle que (1) $\beta$ et $\alpha$ coïncident aux sommets de $T'$, (2) $|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in X$ et (3) $\beta$ est affine sur tout simplexe de $T'$ [79]. L'idée est que l'application simpliciale $\alpha$ peut être déformée de manière à être linéaire sur chacun des simplexes du complexe simplicial.

La troisième grande contribution de Brouwer fut la démonstration rigoureuse de plusieurs théorèmes topologiques importants : invariance de la dimension, théorème de Jordan–Brouwer, théorème de point fixe, etc. Au-delà des résultats eux-mêmes, l'aspect important est que, contrairement à celles de Poincaré, les démonstrations de Brouwer sont rigoureuses : « C'est à Brouwer (1911) que l'on doit les premières démonstrations rigoureuses en Topologie algébrique. » [Dieudonné 1994, p. 52]

Pour ce, Brouwer se base sur la notion de degré. Intuitivement, le degré d'une application simpliciale $\alpha$ exprime le nombre de fois qu'un point $x$ est couvert par son image $\alpha(x)$. Soient $M$ et $M'$ des variétés à $n$ dimensions et $\alpha\colon M \to M'$ une application simpliciale. Pour définir le degré de $\alpha$ en général, la stratégie de Brouwer consiste à montrer que toutes les approximations simpliciales $\beta\colon M \to M'$ assez près de $\alpha$ sont de degré $c$. Il ne reste alors qu'à définir le degré de $\alpha$ comme étant ce nombre, c'est-à-dire $\deg(\alpha) = c$ [80].

En contrepartie, Brouwer lui-même ne mit pas à profit ses méthodes simpliciales afin de combler les lacunes du programme de Poincaré, c'est-à-dire de démontrer rigoureusement certains résultats établis par Poincaré. Ses articles sont effectivement dénués de considérations homologiques au point de suggérer que Brouwer voulait complètement éviter l'homologie. [Dieudonné 1989*b*, p. 161] Ce pas sera franchi par Alexander quelques années plus tard.

---

78. Cette formulation est tirée de Scholz [1999, p. 49]. Elle est équivalente à celle de Brouwer [1911, p. 97], mais a l'avantage d'être plus directe.

79. Cette définition est adaptée de Dieudonné [1989*b*, p. 44].

80. Pour la définition exact de Brouwer, voir [1911, p. 103–105]. Pour une présentation plus contemporaine, voir Dieudonné [1994, p. 169–173].

**Alexander** Deux grands résultats topologiques sont dus à James W. Alexander : le théorème d'invariance de l'homologie et le théorème de dualité, mieux connu sous le nom de dualité de Poincaré–Alexander.

Le théorème d'invariance établit l'indépendance des nombres de Betti et des coefficients de torsion du choix de la triangulation. Autrement dit, étant données une variété $X$ et deux triangulations $T$ et $T'$, les invariants homologiques obtenus sur la base de $T$ et de $T'$ seront isomorphes. Au cours des années, Alexander publia trois démonstrations. Parmi celles-ci, deux s'inscrivent directement dans la continuité des travaux de Brouwer dans la mesure où elles s'appuient sur les méthodes simpliciales.

La première démonstration se trouve dans l'article « *A Proof of the Invariance of Certain Constants of Analysis Situs* » de 1915 [Alexander 1915]. Cette première tentative repose sur l'extension de l'approximation simpliciale aux complexes simpliciaux et aux applications continues arbitraires. Bien qu'elle souffre de nombreuses imprécisions, elle présente néanmoins un intérêt historique parce que la notion de simplexe singulier y fait sa première apparition. [Dieudonné 1989*b*, p. 44–45]

Chronologiquement, la troisième démonstration se trouve dans « *Combinatorial Analysis Situs* », un article de 1926 également publié dans les *Transactions of the American Mathematical Society* [Alexander 1926]. Alexander montre à l'aide des méthodes simpliciales que si deux complexes simpliciaux $X$ et $Y$ sont homéomorphes, alors leurs nombres de Betti et coefficients de torsion sont isomorphes [81].

Entre-temps, son article « *A Proof and Extension of the Jordan–Brouwer Separation Theorem* » de 1922 donna une deuxième démonstration de l'invariance de l'homologie. Comparativement aux deux autres, l'approche est totalement différente. Premièrement, Alexander considère l'homologie de sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$ et non plus de seuls complexes simpliciaux compacts [82]. Autrement dit, il affirme que de tels ouverts peuvent être l'objet de triangulations. Deuxièmement, il établit une jonction entre l'homologie et les théorèmes de Brouwer qui, il importe de le rappeler, évitaient soigneusement toute considération de cette nature. L'objectif de cet article était la démonstration homologique du théorème de dualité. Celui-ci affirme que les invariants topologiques d'un complexe simplicial curvilinéaire $X$ et ceux de $S^n - X$ sont liés par une relation de dualité : pour $1 \leq i \leq n-1$, $R^i = \bar{R}^{n-i-1}$ où $R$ et $\bar{R}$ sont respectivement l'$i^{\text{e}}$ ordre de connexion de $X$ et de $S^n - X$. L'invariance de l'homologie est en fait une conséquence de sa méthode pour démontrer ce résultat puisqu'elle exige que les invariants homologiques soient indépendants du choix d'une triangulation.

En terminant, Alexander énumère quelques corollaires du théorème de dualité, l'un de ceux-ci étant le théorème de Jordan–Brouwer.

81. Pour être exact, la démonstration d'Alexander utilise les ordres de connexion modulo $n$ ($n > 1$) qui sont des invariants homologiquement équivalents au sens où ils donnent la même information que les nombres de Betti et les coefficients de torsion. Voir Alexander [1926, p. 322].

82. Alexander définit en fait une triangulation sur la sphère $S^n$ ce qui est équivalent. Voir Dieudonné [1989*b*, p. 56–57].

#### 1.2.3.3 Vers un concept d'espace unifié

Comparativement aux espaces topologiques de la topologie générale, la représentation des espaces à l'aide de complexes cellulaires ou simpliciaux privilégiée par la topologie combinatoire présentait l'inconvénient de ne s'appliquer qu'à une classe restreinte. Ce n'est qu'avec la publication du livre *Topologie* de Pavel Alexandroff et Heinz Hopf [Alexandroff et Hopf 1935] que l'homologie d'espaces arbitraires put être traitée. Alexandroff et Hopf y généralisent une méthode développée par Alexandroff pour les espaces métriques compacts dans son article « *Untersuchungen über Gestalt und Lage Abgeschlosserer Mengen beliebiger Dimension* » [Alexandroff 1928][83].

Soit $X$ un espace métrique compact et $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ un recouvrement ouvert fini ou dénombrable de $X$. À un tel recouvrement correspond un complexe simplicial $N(\mathcal{U})$ appelé le *nerf* du recouvrement. Les sommets de $N(\mathcal{U})$ sont les éléments $U_\alpha$ du recouvrement et les $p$-simplexes de $N(\mathcal{U})$ sont les sous-ensembles $U_{\alpha_0}, U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_p}$ de $p+1$ éléments du recouvrement tels que $U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_p} \neq \emptyset$.

L'intérêt de cette construction est qu'elle permet de définir les groupes d'homologie de l'espace $X$. Par définition, un recouvrement $\mathcal{V}$ est *plus fin* qu'un recouvrement $\mathcal{U}$ si, pour tout $V_\beta$, il existe un $U_\alpha$ tel que $V_\beta \subset U_\alpha$. Il en résulte une application simpliciale $N(\mathcal{V}) \to N(\mathcal{U})$ qui, à tout simplexe $\{V_{\beta_0}, \ldots, V_{\beta_p}\}$, associe le simplexe $\{U_{\varphi(\beta_0)}, \ldots, U_{\varphi(\beta_p)}\}$. Cette application induit à son tour un homomorphisme $H_*(N(\mathcal{V})) \to H_*(N(\mathcal{U}))$ entre les groupes d'homologie des complexes que sont les nerfs des recouvrements.

En considérant des recouvrements de plus en plus fins, Alexandroff obtient une suite de recouvrements $(\mathcal{U}_n)$ telle que la limite, lorsque $n \to \infty$, du diamètre maximum des ensembles de $\mathcal{U}_n$ est 0. Alexandroff appelle cette suite le spectre de projection[84]. Les groupes d'homologie $H_*(X, A)$ de l'espace $X$ à coefficients dans un anneau $A$ correspondent à la limite de ce système projectif.

Avec les notions de nerf et de spectre de projection, Alexandroff et Hopf unifièrent la topologie au sens suivant : les méthodes homologiques de la topologie combinatoire permettaient d'étudier des espaces topologiques arbitraires, aussi pathologiques soient-ils. En d'autres termes, tant les polyèdres généralisés de la topologie combinatoire que les espaces topologiques à la Hausdorff pouvaient être analysés par les méthodes homologiques.

De plus, avec les espaces topologiques arbitraires, Alexandroff et Hopf intégrèrent dans le giron de la topologie combinatoire des objets résolument modernes, c'est-à-dire définis axiomatiquement dans le langage de la théorie des ensembles.

Il ressort de ce bref survol de la topologie combinatoire que, en l'espace d'une vingtaine d'années, les recherches s'inscrivant dans l'élaboration d'une armature

83. La présentation qui suit s'inspire principalement de Dieudonné [1989*b*, p. 71].
84. De l'allemand *Projektionsfolge* que Dieudonné [1989*b*, p. 71] traduit en anglais par *spectrum of projection*.

conceptuelle rigoureuse pour encadrer l'étude topologique inaugurée par Poincaré cristallisèrent une compréhension de l'espace comme complexe cellulaire ou encore complexe simplicial. Or, contrairement aux espaces topologiques, ces complexes ne relèvent pas d'une compréhension pointilliste de l'espace. Un complexe, fut-il cellulaire ou simplicial, est une représentation de l'espace à l'aide de structures géométriques simples. Pour cette raison, les espaces de la topologie combinatoire ne tirent pas leur cohésion de leurs points. Les méthodes ensemblistes ne sont alors guère utiles pour les analyser. Les méthodes de Poincaré et ses successeurs sont plutôt algébriques.

À partir du milieu des années 1920, les concepts et méthodes de l'algèbre abstraite imposèrent leur pertinence en vue d'une caractérisation des invariants des espaces. Cette idée fut à l'origine d'une transformation profonde de la topologie.

### 1.2.4 Le tournant algébrique de la topologie

Sous l'influence, d'une part, d'Emmy Noether et de Vietoris et, d'autre part, de Hopf et de Witold Hurewicz, la topologie combinatoire se transforma progressivement en topologie algébrique dans la seconde moitié des années 1920 et au début des années 1930. Le moteur de cette transformation fut la considération explicite d'invariants topologiques prenant la forme de structures algébriques abstraites au lieu des nombres de Betti, des coefficients de torsion et, de par l'appréhension inédite qui en résulta, du groupe fondamental. Ainsi, la topologie algébrique entreprit de caractériser les espaces à l'aide de groupes d'homologie et de groupes d'homotopie. Comparativement à l'armature combinatoire, le recours à des structures algébriques eut pour conséquence de faciliter la caractérisation d'espaces totalement généraux.

Par ailleurs, ce recours aux structures algébriques doit également être vu comme un élément de modernisme. En effet, les invariants algébriques, fussent-ils des groupes, des modules, etc. étaient définis axiomatiquement comme des ensembles munis de certaines opérations sur les éléments de celui-ci. Ils relevaient de l'approche axiomatico-ensembliste typique des mathématiques modernes.

#### 1.2.4.1 L'homologie

Historiquement, les groupes d'homologie furent explicitement introduits par Noether et Vietoris.

En janvier 1925, Noether prononça une conférence, *Ableitung der Elementarteilertheorie aus der Gruppentheorie*, dans laquelle elle fit remarquer que les invariants homologiques peuvent être obtenus directement à l'aide de groupes abéliens. Le résumé de la conférence, publié en 1926, va comme suit :

> Il est bien connu que la théorie des diviseurs élémentaires donne, pour tout module de combinaisons linéaires à coefficients entiers, une base normale de la forme $(e_1y_1, e_2y_2, \dots e_ry_r)$ où chaque $e$ est divisible par le suivant ; les $e$

> sont ainsi fixés, à leur signe près, de manière unique. Puisque chaque groupe abélien avec un nombre fini de générateurs provenant du système de résidus est isomorphe à un tel module, le théorème de décomposition de ces groupes s'obtient comme somme directe de groupes cycliques. Inversement, le théorème de décomposition peut maintenant s'obtenir directement par les moyens de la théorie des groupes, par la généralisation de la démonstration habituelle pour les groupes finis, et la théorie des diviseurs élémentaires se déduit du passage des systèmes de résidus à un module. Le théorème de décomposition des groupes s'établit alors comme un théorème élémentaire ; il est donc superflu de revenir à la théorie des diviseurs élémentaires dans les applications du théorème de décomposition des groupes — par exemple les nombres de Betti et les coefficients de torsion en topologie [85]. [Noether 1926, p. 104]

Avec cette note, Noether opère un renversement. Traditionnellement, le théorème de décomposition des groupes abéliens de génération finie se déduisait de la théorie des modules et des diviseurs élémentaires. Non seulement Noether souligne-t-elle que ce théorème peut être démontré directement à l'aide de la théorie des groupes, c'est-à-dire sans recourir à la théorie des modules et des diviseurs élémentaires, elle affirme également que le théorème des diviseurs élémentaires est un cas particulier du théorème de décomposition des groupes.

Ce renversement eut une conséquence de taille pour la topologie puisqu'il entraînait que les invariants homologiques — nombres de Betti et coefficients de torsion — pouvaient se calculer sans passer par les diviseurs élémentaires [86].

D'après McLarty [2006], la véritable innovation de Noether n'est toutefois pas d'avancer que les invariants homologiques doivent être vus comme des structures algébriques — des groupes abéliens principalement. Il souligne [2006, p. 189–191 et p. 207–208], comme l'avait fait avant lui Mac Lane [1986, p. 307], que, malgré certaines réticences à utiliser le terme, Poincaré et ses successeurs étaient conscients que les cycles sur les surfaces topologiques disposaient d'une structure de groupe [87]. Le changement conceptuel se trouve plutôt dans le passage vers l'abstraction que

85. *Die Elementarteilertheorie gibt bekanntlich für Moduln aus ganzzahligen Linearformen eine Normalbasis von der Form* $(e_1 y_1, e_2 y_2, \ldots e_r y_r)$*, wo jedes e durch das folgende teilbar ist; die e sind dadurch bis aufs Vorzeichen eindeutig festgelegt. Da jede Abelsche Gruppe mit endlich vielen Erzeugenden dem Restklassensystem nach einem solchen Modul isomorph ist, ist dadurch der Zerlegungssatz dieser Gruppen als direkte Summe größter zyklischer mitbewiesen. Es wird nun umgekehrt der Zerlegungssatz rein gruppentheoretisch direkt gewonnen, in Verallgemeinerung des für endliche Gruppen ublichen Beweises, und daraus durch Ubergang von Restklassensystem zum Modul selbst die Elementarteilertheorie abgeleitet. Der Gruppensatz erweist sich so als der einfachere Satz; in den Anwendungen des Gruppensatzes — z. B. Bettische und Torsionszahlen in der Topologie — ist somit ein Zurückgehen auf die Elementarteilertheorie nicht erforderlich.*

86. Pour une analyse plus technique du résumé de Noether, voir Basbois [2009, §5.2] ou encore Dieudonné [1984].

87. La question de savoir si Poincaré était conscient de travailler avec des groupes suscita une certaine polémique entre Dieudonné et Mac Lane. Voir Dieudonné [1984] et Mac Lane [1986], mais aussi McLarty [2006] qui tranche en faveur de Mac Lane et qui considère également l'influence de Brouwer à l'époque.

permettent les méthodes de l'algèbre abstraite. Pour caractériser les espaces, l'emphase doit être mise, non pas tant sur les structures algébriques elles-mêmes, mais bien sur les homomorphismes entre ces structures algébriques. L'appréhension des espaces topologiques doit passer par ceux-ci.

> *Noether brought something much deeper and more comprehensive to topology than just the use of homology groups.* (...) *She brought an entire programme of looking at groups, and other structures in algebra, and other structures outside of algebra like topological spaces, in terms of the homomorphisms between them.* [McLarty 2006, p. 188]

La conférence de Noether n'ayant jamais été suivie par un article détaillé, ce fut Hopf qui développa systématiquement la théorie des groupes d'homologie afin de démontrer une généralisation de la formule de Euler–Poincaré de même que le théorème de point fixe de Lefschetz, celui-ci étant une conséquence de la première.

En janvier 1928, Hopf annonça dans les *Proceedings of the National Academy of Sciences* une généralisation du théorème de point fixe de Lefschetz aux $n$-complexes. La démonstration de cette généralisation fut soumise au *Mathematische Zeitschrift* quelques mois plus tard, soit en avril 1928. Au cours de l'été 1928, Hopf parvint à simplifier sa démonstration originelle par l'utilisation des groupes d'homologie que prônait Noether. [Mac Lane 1986, p. 305] Il la publia l'année suivante et écrivit à ce sujet :

> *During a course of lectures given in summer 1928 in Göttingen, I was able, by using group-theoretic concepts, influenced by E. Noether, to make much more transparent and simple my original proof of the generalization of the Euler–Poincaré formula*[88]. » [H. Hopf, « *Eine Verallgemeinerung der Euler–Poincaréschen Formel* » cité et traduit par Krömer 2007, p. 42]

Chez Noether et Hopf, la description des invariants homologiques en tant que structures algébriques entraîne donc une simplification et une unification de l'homologie.

Historiquement, Vietoris fut le premier à utiliser les groupes d'homologie[89]. Dès 1926, Vietoris envisagea de décrire l'homologie des espaces métriques compacts, c'est-à-dire d'espaces plus généraux que les variétés et que les complexes cellulaires ou simpliciaux étudiés par ses contemporains.

Cet objectif le confronta toutefois au problème de définir des invariants aptes à saisir les propriétés homologiques de ces espaces. En effet, la structure des espaces métriques compacts est substantiellement différente de celle des complexes — les premiers peuvent avoir une infinité de trous pour donner une indication intuitive [Mac Lane 1986, p. 306] — de telle sorte que les nombres de Betti et les coefficients de torsion sont ici inadéquats.

88. *Meinen ursprünglichen Beweis* [*der*] *Verallgemeinerung der Euler–Poincaré schen Formel konnte ich im Verlauf im Sommer 1928 in Göttingen von mir gehaltenen Vorlesung durch Heranziehung gruppentheoretischer-Begriffe unter dem Einfluß von Fräulein E. Noether wesentlich durchsichtiger und einfacher gestalten.*

89. Voir Mac Lane [1986], mais aussi McLarty [2006] et Basbois [2009, §5.3] qui soulignent l'influence de Brouwer.

> (…) la notion de groupe est dans le cadre de [l'] étude [de Vietoris] absolument nécessaire car ses objets d'étude (les espaces métriques compacts) ne pouvaient en général être décrits avec les nombres de Betti et de torsion jusqu'alors suffisants pour l'étude des complexes. Les groupes abéliens de type fini sont incapables de coder l'information homologique pour les espaces métriques compacts généraux. [Basbois 2009, p. 126]

Dans « *Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und eine Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen* », un article de 1927 [Vietoris 1927], Vietoris introduisit les groupes d'homologie à cette fin.

Vietoris procède en deux temps [90]. Dans un premier temps, il se restreint à des complexes combinatoires, mais les aborde abstraitement, c'est-à-dire de manière à se distancer de leurs interprétations géométriques.

D'après Vietoris, un *$n$-simplexe* est un ensemble $S^{(k)}$ formé de $n+1$ points et, pour $k=1,\dots,n$, de tous les $k$-tuplets de ces points. Un *complexe simplicial* est alors un ensemble fini $C$ de simplexes tel que (1) toute paire de simplexes de $C$ ont pour intersection une face commune et (2) toute face d'un simplexe de $C$ appartient elle-même à $C$.

Dans le cas de simplexes non orientés, le *bord* d'un complexe $C$ à $k$ dimensions homogène [91] est le complexe formé des simplexes à $k-1$ dimensions qui sont les faces d'un nombre impair de simplexes de $C$. Un *cycle* est un complexe $n$-dimensionnel homogène sans bord. La *somme* de deux complexes $C$ et $C'$ est l'ensemble des sous-simplexes de $C$ et $C'$. La relation d'homologie sur les complexes est alors la suivante : $R^{(k-1)} \sim 0$ dans $C$ si $R^{(k-1)}$ est le bord d'un simplexe $k$-dimensionnel $S^{(k)}$ du complexe $C$. Le $n^e$ *groupe de connexité* d'un complexe $C$ se définit alors comme le groupe des cycles $n$-dimensionnels non orientés de $C$ modulo la relation d'homologie. Le $n^e$ nombre de connexité d'un complexe $C$ est le nombre maximal $s$ de $n$ cycles de $C$ qui ne sont pas l'objet d'une relation d'homologie $\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \cdots + \alpha_s C_s \sim 0$.

Dans le cas de simplexes orientés, il suffit d'ajuster la définition du bord pour tenir compte de l'orientation des faces. Ceci permet de définir le $n^e$ *groupe d'homologie* d'un complexe $C$ comme le groupe des cycles orientés de $C$ modulo la relation d'homologie.

Dans un second temps, Vietoris transpose ces notions aux espaces métriques compacts. Un *complexe* dans un tel espace $M$ est un complexe combinatoire dont les sommets sont des éléments de $M$. La relation d'homologie se définit comme suit : un cycle $C$ dans $M$ est *$\varepsilon$-homologue à* 0 *dans* $M$, $C \sim 0$, si $C$ est combinatoirement homologue à une somme de bords de simplexes de diamètre inférieur à $\varepsilon$.

Les groupes de connexité et d'homologie de $M$ se définissent en termes de suites fondamentales. Une suite infinie de cycles $k$-dimensionnels $C_1, C_2, \dots$ est une *suite*

---

90. La présentation qui suit reprend celle de Vietoris [1927, §I et II], présentation que Basbois [2009, §5.3] rend fidèlement.

91. Un complexe est homogène si tous ses simplexes sont de dimension $k$ et si aucun simplexe n'est une face d'un autre simplexe.

*fondamentale* $F$ dans $X$ si (1) la longueur des arêtes de $C_m$ tend vers 0 lorsque $m \to \infty$ et (2) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_\varepsilon$ tel que, pour tout $n_1, n_2 > n_\varepsilon$, $C_{n_1} \sim C_{n_2}$. Une suite fondamentale est *$\varepsilon$-homologue à* 0 s'il existe $n_\epsilon$ tel que, pour tout $n > n_\varepsilon$, $C_n \sim_\varepsilon 0$. En particulier, une suite fondamentale est *nulle*, $F \sim 0$, si $F \sim_\varepsilon 0$ pour tout $\varepsilon$. Les suites fondamentales formant un groupe additif, il ne reste qu'à définir le $n^{\text{e}}$ groupe de connexité comme le groupe des suites fondamentales modulo la relation d'homologie. Le $n^{\text{e}}$ groupe d'homologie s'obtient de la même façon lorsque les cycles sont orientés.

Pour Vietoris, les groupes d'homologie permettent donc d'étendre l'homologie à des espaces plus généraux.

#### 1.2.4.2 L'homotopie

Dans la foulée de Poincaré, l'homotopie fut considérée comme un raffinement de l'homologie à une dimension en raison des liens entre le groupe fondamental et le premier groupe d'homologie [92]. Les invariants homotopiques d'un espace — essentiellement son groupe fondamental — furent donc d'abord appréhendés à travers le prisme de ses invariants homologiques.

Historiquement, les travaux de Hopf sur les applications continues entre sphères sont à l'origine de la théorie de l'homotopie et, par le fait même, d'un changement de statut de l'homotopie. En 1925, Hopf apporta une réponse positive à une conjecture énoncée par Brouwer au Congrès international des mathématiciens de 1912 en démontrant que deux applications ayant le même degré sont homotopes, c'est-à-dire que pour toutes fonctions $f, g\colon S^n \to S^n$, si $\deg(f) = \deg(g)$, alors $f \simeq g$.

Ce résultat soulevait la question de la classification des applications entre sphères de dimensions différentes, c'est-à-dire des applications $f\colon S^n \to S^m$ telles que $n \neq m$, à l'aide de la notion de degré. Dans le cas $n < m$, il était déjà connu que $f$ est homotope à une constante. La pertinence de l'homotopie se révéla dans le cas $n > m$. Hopf publia en 1931 un article, *Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfäche*, dans lequel il démontra que les classes d'homotopie des applications $S^3 \to S^2$ sont en nombre infini. En comparaison, les invariants homologiques ne permettent pas de classifier de telles applications pour la simple raison que tout homomorphisme entre les groupes d'homologie des sphères $S^n$ et $S^m$ est trivial. L'homotopie avait donc l'avantage de rendre accessible une facette de la topologie des espaces que les invariants homologiques étaient incapables de saisir.

> *It is certainly fair to say that Hopf showed that homotopic methods could provide important information about spaces that seemed to be inaccessible otherwise and, in this sense, launched homotopy theory. Hopf's work convinced mathematicians that homotopy classes of maps could be used effectively to obtain information about various spaces.* [Marquis 2006, p. 249]

92. Pour ces liens, voir Dieudonné [1989*b*, p. 304].

Il fut pour la première fois publiquement question des groupes d'homotopie supérieurs lors du Congrès international des mathématiciens de 1932. À cette occasion, Eduard Čech les définit en tant que généralisation du groupe fondamental de Poincaré. Contrairement à celui-ci, les groupes de Čech étaient toutefois commutatifs. Compte tenu que l'abélianisé du groupe fondamental [93] d'une variété est isomorphe au premier groupe d'homologie de cette variété, les mathématiciens présents conclurent que seuls des groupes non commutatifs seraient susceptibles de révéler de l'information supplémentaire par rapport à l'homologie. [James 1999, p. 566 ; Marquis 2006, p. 250]

L'étude des espaces à l'aide des groupes d'homotopie ne s'imposa que dans la seconde moitié des années 1930 lorsque Hurewicz définit les groupes d'homotopie supérieurs et étudia leurs propriétés dans quatre notes qui forment *Beiträge zur Topologie der Deformationen*. Au lieu de porter directement sur des applications, la définition de Hurewicz a plutôt pour point de départ des espaces de fonctions, c'est-à-dire, pour $X$ un espace compact et $Y$ un espace métrique, l'ensemble $X^Y$ des fonctions $Y \to X$ muni d'une topologie appropriée [94].

Concrètement, Hurewicz considère deux espaces pointés $(X, x_0)$ et $(S^1, *)$ où $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ est la sphère de dimension 1 et $* = (1, 0)$ de manière à former l'espace de fonctions $(X, x_0)^{(S^I, *)}$, aussi appelé espace de lacets $\Omega(X, x_0)$. Il suffit alors de constater que l'espace des lacets $\Omega(X, x_0)$ est lui-même un espace pointé $(\Omega(X, x_0), \alpha_0)$ où $\alpha_0 \colon S^1 \to \{x_0\}$ est l'application constante. Cet espace pointé possède alors un groupe fondamental $\pi_1(\Omega(X, x_0), \alpha_0)$. La construction d'un groupe fondamental pouvant être répétée pour tout espace de lacets $\Omega^n(X, x_0)$, le $n^e$ *groupe d'homotopie* $\pi_n(X, x_0)$ est le groupe fondamental du $n-1^{\text{e}}$ espace de lacets de $(X, x_0) \colon \pi_n(X, x_0) = \pi_1(\Omega^{n-1}(X, x_0), \alpha_{n-1})$ [95].

Si la définition de Hurewicz était différente de celle de Čech, les groupes obtenus n'en étaient pas moins équivalents. L'impact véritable de la définition de Hurewicz découle plutôt de ce qu'il relia, par l'entremise du théorème portant son nom, les groupes d'homologie aux groupes d'homotopie et facilita ainsi le calcul des premiers.

Hurewicz définit également la notion de type d'homotopie. Soient $X$ et $Y$ deux espaces. Une application continue $f \colon X \to Y$ est une *équivalence homotopique* s'il existe une application continue $g \colon Y \to X$ telle que $g \circ f \sim 1_X$ et $f \circ g \sim 1_Y$, c'est-à-dire telle que leurs compositions soient homotopes aux identités sur $X$ et $Y$. Deux espaces $X$ et $Y$ ont alors le même *type d'homotopie* s'il existe une équivalence homotopique $f \colon X \to Y$.

93. Par définition, l'abélianisé d'un groupe $G$ est le quotient de $G$ par son sous-groupe dérivé, celui-ci étant le sous-groupe engendré par tous les commutateurs de $G$.

94. Vers 1940, la topologie compact–ouvert permettra de considérer des espaces topologiques arbitraires. [Dieudonné 1989*b*, p. 330]

95. Pour une présentation plus détaillée, voir Dieudonné [1989*b*, p. 330–333] ou [1994, §14.2]. Pour un résumé plus simple, voir Marquis [2006, p. 251] dont la présentation s'inspire.

L'importance de la notion de type d'homotopie tient à ce qu'elle induit des classes d'équivalence dans l'espace des fonctions continues. Les invariants homotopiques donnent donc lieu à une classification des espaces. Ce faisant, l'homotopie change de vocation : au lieu de classifier des applications entre espaces, elle classifie des espaces selon leurs types d'homotopie. Dans la perspective de l'évolution de la conceptualisation de l'espace, la conséquence est immédiate : la transition de la topologie combinatoire à la topologie algébrique mit de l'avant une nouvelle façon de classifier les espaces topologiques dans la mesure où ceux-ci ne sont plus seulement classifiés selon leurs invariants homologiques, mais aussi selon leurs invariants homotopiques.

De plus, les mathématiciens découvrirent par la suite que les invariants homologiques étaient homotopiquement invariants. Autrement dit, les espaces ayant le même type d'homotopie ont des invariants homologiques isomorphes. Non seulement les invariants homotopiques donnaient-ils accès à une autre facette que les invariants homologiques, ils donnaient accès à une facette plus fondamentale.

## 1.3 La double image de la topologie

Il ressort des sections 1.1 et 1.2 que l'étude topologique des espaces, et par le fait même le concept d'espace qui y est à l'œuvre, fut l'objet d'un double développement. Premièrement, le concept d'espace topologique et la topologie générale que dégagèrent les Hausdorff, Kuratowski et autres Alexandroff découla d'une interprétation ensembliste des *Mannigfaltigkeiten* introduites par Riemann. Deuxièmement, l'interprétation géométrique de ces mêmes *Mannigfaltigkeiten* conduisit Poincaré, Brouwer, Vietoris et Hurewicz, pour ne nommer que ceux-là, aux variétés et aux différents complexes de la topologie combinatoire, puis algébrique.

Tel que mentionné à quelques reprises déjà, ces deux compréhensions s'opposaient quant au statut accordé aux points. La topologie générale se base sur une compréhension pointilliste de l'espace. Un espace est donc défini à partir d'un ensemble de points ou, pour être exact, de sous-ensembles contenant des points. Du côté de la tradition combinatoire, les points ne sont pas vus comme des objets fondamentaux sans dimension, mais participent à une représentation de l'espace à l'aide de structures géométriques de dimensions variables. La structure d'espace précède les points en ce sens.

Par la suite, le développement respectif de la topologie générale et de la topologie algébrique fut principalement technique puisqu'il s'organisa autour de l'étude des objets précédemment dégagés et de la démonstration de propriétés. C'est dans ce contexte que se cristallisèrent des conceptions de l'espace qui peuvent être qualifiées de définitives, mais aussi de la topologie comme formée de deux branches dont le propre est d'étudier chaque type d'espaces. Les présentations que donnèrent au début des années 1940 Bourbaki et Lefschetz de la topologie illustrent bien ces deux conceptions.

### 1.3.1 La conceptualisation de l'espace en topologie générale

Dans *Topologie générale* [Bourbaki 1971], l'un des nombreux livres qui forment le vaste traité *Éléments de mathématiques*, Bourbaki offre une présentation dogmatique, pour reprendre son terme, de la théorie du même nom. Dans la perspective de la conceptualisation de l'espace, deux points doivent être soulignés.

Premièrement, selon Bourbaki, un espace topologique doit se comprendre comme un ensemble muni d'une structure qu'y induisent certains sous-ensembles.

**Définition 1.3.1.1** (Bourbaki 1971)**.** On appelle *structure topologique* (ou plus brièvement *topologie*) sur un ensemble $X$ une structure constituée par la donnée d'un ensemble $O$ de parties de $X$ possédant les propriétés suivantes (dites axiomes des structures topologiques) :

(I) Toute réunion d'ensembles de $O$ est un ensemble de $O$ ;

(II) Toute intersection finie d'ensembles de $O$ est un ensemble de $O$.

Les ensembles de $O$ sont appelés ensembles *ouverts* de la structure topologique définie par $O$ sur $X$.

Un espace topologique se définit alors explicitement comme un ensemble muni d'une topologie :

**Définition 1.3.1.2** (Bourbaki 1971)**.** On appelle *espace topologique* un ensemble muni d'une structure topologique.

Comme chez Alexandroff, les points sont complètement absents de la théorisation topologique de l'espace. C'est la structure de treillis à laquelle donnent lieu les ouverts, c'est-à-dire des parties de l'ensemble sous-jacent, qui sous-tend l'espace et non pas ses points. Par le fait même, cette caractérisation des espaces topologiques marque un glissement vers l'algèbre.

Malgré le glissement qu'elle suggère, une topologie n'est pas une structure algébrique pour Bourbaki. En effet, selon ce dernier, la structure de topologie est fondamentalement différente des autres types de structures mathématiques. Bourbaki distingue dans « L'architecture des mathématiques » [Bourbaki 1962], un texte de la même époque, trois types de structures : les structures algébriques, les structures d'ordre et les structures topologiques. Les premières se caractérisent par une loi de composition. Une loi de composition est une relation sur les éléments d'un ensemble qui, pour citer Bourbaki, « détermine de façon unique le troisième en fonction de deux premiers. » [1962, p. 41] Dans le cas des structures d'ordres, les éléments d'un ensemble sont, comme leur nom le laisse présager, reliés par une relation d'ordre. Les structures topologiques se distinguent en ce qu'elles se basent sur des opérations, non pas entre des éléments de l'ensemble, mais des parties de celui-ci. En effet, une topologie est définie sur des sous-ensembles appelés ouverts [96].

Ceci suggère qu'un espace s'obtient par la décomposition d'un ensemble en parties et que, une fois en présence d'une telle décomposition, l'ensemble sous-jacent devient secondaire. Bref, c'est la structure de l'espace qui importe vraiment [97].

Deuxièmement, à l'instar de Cantor, Bourbaki conçoit la topologie générale comme l'étude de la proximité et de la continuité.

> À côté des structures *algébriques* (groupes, anneaux, corps, etc.) qui ont fait l'objet du Livre d'Algèbre, interviennent, dans toutes les parties de l'Analyse, des structures d'une autre sorte : ce sont celles où l'on donne un sens mathématique aux notions intuitives de *limite*, de *continuité* et de *voisinage*. C'est l'étude de ces structures qui fait l'objet du présent Livre. [Bourbaki 1971, p. xi]

Ainsi, toute structure topologique, par le biais des ouverts qui la définissent — ouverts que préfère d'ailleurs Bourbaki aux voisinages pour des raisons de simplicité [1971, p. xiii] — permet de comprendre de manière parfaitement générale et rigoureuse l'idée de proximité en la dissociant des points de l'ensemble. Tout phénomène qui se déroule dans la proximité d'un point est en fait localisé dans un ouvert qui contient le point en question. De la même façon, une propriété qui est vraie pour tout point suffisamment près d'un point donné l'est dans un ouvert de ce point.

De plus, intuitivement, une fonction est continue en un point $x$ si pour tout point infinitésimalement près de $x$, la fonction prend une valeur infinitésimalement près de $f(x)$. Une topologie sur un espace permet évidemment de donner un sens précis à cette idée intuitive : une fonction est continue en $x$ si pour tout point $y$ voisin de $x$, $f(y)$ est voisin de $f(x)$. Par le fait même, les espaces topologiques deviennent le lieu mathématique privilégié pour l'étude de la continuité.

### 1.3.2 La conceptualisation de l'espace en topologie algébrique

Une excellente façon de cerner la conceptualisation de l'espace sur laquelle la topologie algébrique en vint à se baser semble être d'examiner les manuels qui, une fois passée l'ébullition ayant marqué la fin des années 1920 et le début des années 1930, donnèrent une présentation organisée et exhaustive du sujet. Parmi ceux-ci, un des plus utilisés fut *Algebraic Topology* de Solomon Lefschetz [Lefschetz 1942].

En écrivant ce manuel, Lefschetz avait pour objectif de faire le portrait de la topologie telle qu'elle se présentait après avoir intégré les concepts et méthodes de l'algèbre abstraite. Il écrit ainsi au tout début de la préface :

96. Selon Bourbaki [1962, p. 44], ces trois structures-mères forment un noyau auquel se greffent des structures dites multiples parce que combinant deux ou plusieurs structures-mères. Il mentionne la topologie algébrique comme exemple.

97. Rétrospectivement, ce glissement structurel doit être vu comme crucial pour l'émergence du point de vue des locales. Voir Johnstone [2001].

> *When the present volume was first contemplated some five years ago it was primarily meant to be a second edition of the author's* Topology *(1930, Volume XII of the American Mathematical Society Colloquium Series). It soon became evident however that the subject had moved too rapidly for a mere revised edition, and that a completely new book would have to be written.* (...) *Its basic topic, often referred to as "Combinatorial Topology," is in substance the theory of complexes and its applications. Many factors have contributed to a great increase in the role of algebra in this subject. For this reason it is more appropriately described as "Algebraic Topology'* (...) [Lefschetz 1942, p. iii]

Comme l'écrit Lefschetz, la topologie algébrique doit être comprise comme l'étude des complexes. L'étude topologique des variétés s'inscrit donc dans celle plus générale de la topologie des complexes. Contrairement à Poincaré, Brouwer et leurs successeurs, Lefschetz ne considère ni des complexes cellulaires, ni des complexes simpliciaux, mais plutôt des complexes abstraits. Il définit ainsi une variété combinatoire comme un complexe d'un certain type [98].

**Définition 1.3.2.1** (Lefschetz 1942)**.** Un *complexe* $X$ est un ensemble $\{x\}$ d'éléments muni d'une relation d'ordre $\prec$, d'une fonction $\dim x\colon X \to \mathbb{Z}$ appelée la dimension de $x$ et d'une fonction $[x : x']\colon X \times X \to \mathbb{Z}$ appelée le nombre d'incidence de $x$ et $x'$ telles que

K1 si $x' \prec x$, alors $\dim x' \leqq \dim x$ ;

K2 $[x : x'] = [x' : x]$ ;

K3 si $[x : x'] \neq 0$, alors $x \prec x'$ ou $x' \prec x$ et $|\dim x - \dim x'| = 1$ ;

K4 Pour toute paire d'éléments $x$, $x''$ tels que $|\dim x - \dim x''| = 2$, il existe au plus un nombre fini de $x'$ tel que $[x : x'][x' : x''] \neq 0$ et donc $\sum_{x'}[x : x'][x' : x''] = 0$.

La *dimension* d'un complexe $X$, notée $\dim x$, est le supremum de la dimension de ses éléments $\sup \dim x$.

À l'instar de la topologie générale, la topologie algébrique subdivise un espace en parties. Celles-ci sont cependant fondamentalement différentes. En effet, en topologie générale et plus particulièrement chez Bourbaki, les parties sont ensemblistes, c'est-à-dire qu'elles sont des sous-ensembles de l'ensemble sous-jacent à l'espace. Les parties que considère la topologie algébrique sont plutôt géométriques. En conséquence, les concepts et les méthodes par le biais desquelles la topologie algébrique caractérise les espaces sont totalement différents de ceux de la topologie générale.

Certaines notions pertinentes pour la caractérisation des complexes sont alors introduites. Soit $X$ un complexe et $x \in X$. L'*étoile* de $x$ est définie comme l'ensemble $\mathrm{St}\, x = \{x' \mid x \prec x'\}$. La *fermeture* de $x$ est l'ensemble $\mathrm{Cl}\, x = \{x' \mid x' \prec x\}$. La *bordure* de $x$ est l'ensemble $\mathfrak{B}x = \mathrm{Cl}\, x - x = \{x' \mid x' \prec x, x' \neq x\}$. Pour $Y \subset X$, $\mathrm{St}\, Y = \bigcup_{x \in Y} \mathrm{St}\, x$, $\mathrm{Cl}\, Y = \bigcup_{x \in Y} \mathrm{Cl}\, x$ et $\mathfrak{B}Y = \mathrm{Cl}\, Y - Y$.

98. Pour être un peu plus précis, une variété est un complexe simple ouvert satisfaisant certaines propriétés. Cf. Lefschetz [1942, p. 196–198].

Un sous-ensemble $Y \subset X$ est un *sous-complexe* de $X$ si, muni des mêmes fonctions dim et $[- : -]$, $Y$ est un complexe. Un sous-complexe $Y$ est *ouvert* si $\mathrm{St}\, Y = Y$, mais *fermé* si $\mathrm{Cl}\, Y = Y$. Le *complexe dual* $X^*$ de $X$ est un ensemble d'éléments $\{x^*\}$ en correspondance biunivoque avec les éléments $x$ de $X$ tels que (1) $x \prec x'$ si et seulement $x'^* \prec x^*$, (2) $\dim x^* = -\dim x$ et (3) $[x^* : x'^*] = [x : x']$.

Les complexes simpliciaux et complexes cellulaires doivent alors être vus comme des cas particuliers de complexes abstraits. Par exemple, un *complexe simplicial* est un ensemble de simplexes $\{\sigma\}$ tel que si $\sigma$ fait partie de $\{\sigma\}$, alors toutes ses faces en font également partie. Un *$p$-simplexe* $\sigma^p$ est ici défini comme un ensemble de $p+1$ objets $\{A_0, A_1, \ldots, A_p\}$ appelés les sommets de $\sigma^p$. Une $q$-face d'un simplexe $\sigma^p$ est un simplexe de dimension $q$ dont les sommets font partie de ceux de $\sigma^p$.

Les groupes d'homologie d'un complexe se définissent de la manière suivante. Soient $X = \{x\}$ un complexe fini [99] et $G$ un groupe additif. Une *$p$-chaîne sur $G$* est une somme $\sum g_i x_i^p$, $g_i \in G$, telle que $\sum g_i x_i^p \pm \sum g_i' x_i^p = \sum (g^i \pm g_i') x_i^p$. Les $p$-chaînes forment un groupe, noté $\mathfrak{C}^p(X, G)$. Soit $C^p$ une $p$-chaîne. La *frontière* de $C^p$ est la $(p-1)$-chaîne $FC^p = \sum_j g_i [x_i^p : x_j^{p-1}] x_j^{p-1}$. Si $FC^p = 0$, $C^p$ est un *cycle de $X$ sur $G$*. L'opération $F$ détermine un homomorphisme de chaînes $\mathfrak{C}^p \to \mathfrak{C}^{p-1}$. L'image du groupe des $(p+1)$-chaînes $\mathfrak{C}^{p+1}$ par cet homomorphisme est le groupe $\mathfrak{F}^p$ des « bounding » $p$-chaînes sur $G$. Le noyau $\mathfrak{Z}^p$ de cet homomorphisme est formé de tous les $p$-cycles sur $G$. $\mathfrak{Z}^p$ est donc le groupe des $p$-cycles sur $G$. Parce que $\mathfrak{F}^p$ est un sous-groupe de $\mathfrak{Z}^p$, $\overline{\mathfrak{F}}^p$ est un sous-groupe de $\mathfrak{Z}^p$. Pour obtenir les groupes d'homologie, il suffit de prendre leur quotient. Le *$p^e$ groupe d'homologie de $X$ sur $G$* est donc le groupe $\mathfrak{P}(X, G) = \mathfrak{Z}^p(X, G)/\overline{\mathfrak{F}}^p(X, G)$.

Les nombres de Betti et les coefficients de torsion se définissent par l'entremise des groupes d'homologie. Par exemple, le rang $R^p$ du $p^e$ groupe d'homologie est le $p^e$ groupe d'homologie du complexe $X$.

Le complexe dual $X^*$ de $X$ étant lui-même un complexe, ses groupes d'homologie se définissent comme ci-dessus. Les groupes d'homologie de $X^*$ sont les *groupes de cohomologie* de $X$.

À la lumière de ce bref aperçu, la topologie algébrique étudie les complexes et a pour principale préoccupation leurs propriétés homologiques, mais aussi homotopiques. Autrement dit, elle se concentre sur les conditions d'identité entre différentes représentations des espaces. En comparaison, la topologie générale, par son emphase sur les homéomorphismes d'espace et la continuité, est plutôt préoccupée par les propriétés des espaces que préservent les applications entre ceux-ci. Dans son premier manuel, *Topology*, publié en 1930 [Lefschetz 1956], Lefschetz écrivait à ce sujet : « *Side by side with general topological invariance, one may consider more strictly combinatorial invariance, or invariance under subdivision of the cells of a complex.*

99. Le traitement des complexes infinis est identique du moment que leurs étoiles et/ou leurs fermetures sont finies, ce que Lefschetz [1942, p. 127] suppose.

*In its treatment continuity should play no part, and its study constitute combinatorial topology proper*. » [1956, p. vi]

Il en résultait une tension dans l'étude des espaces topologiques puisque ceux-ci pouvaient être analysés de deux manières totalement hétérogènes. En d'autres termes, la topologie générale et la topologie algébrique constituaient deux théories différentes, mais portant sur les mêmes objets mathématiques, à savoir les espaces topologiques.

De plus, la topologie générale était dans la foulée de Hausdorff devenue une théorie moderne comme l'illustrent les définitions de topologie et d'espace topologique formulées par Bourbaki. En comparaison, bien qu'elle avait été transformée par rapport à la théorie de Poincaré par certains éléments de modernisme, la topologie algébrique ne relevait pas tout à fait des mathématiques modernes. Elle s'appliquait certes à des espaces définis axiomatiquement — les espaces topologiques arbitraires — et considérait des invariants prenant la forme de structures algébriques abstraites, mais la topologie algébrique n'en était pas pour autant une théorie axiomatique, ce qui constituait sa principale lacune du point de vue du modernisme mathématique.

À partir du milieu des années 1940, la topologie, mais aussi la géométrie algébrique, fut l'objet de profondes transformations qui conférèrent à l'étude des espaces un visage inédit. Or, comme le chapitre suivant l'établira, si ses travaux donnèrent lieu à une nouvelle appréhension des espaces topologiques, ils ne changèrent pas le concept d'espace lui-même.

# Chapitre 2

# Des microfractures dans le développement de la topologie

Entre le milieu des années 1940 et le milieu des années 1950, les livres *Foundations of Algebraic Topology* de Eilenberg et Steenrod et *Homological Algebra* de Cartan et Eilenberg ainsi que la théorie des faisceaux changèrent irrémédiablement le visage de la topologie algébrique, mais plus particulièrement celui de la théorie de l'homologie. Cette transformation de l'homologie tient aux trois aspects suivants. Premièrement, Eilenberg et Steenrod clarifièrent la notion même de théorie de l'homologie. Deuxièmement, Cartan et Eilenberg introduisirent un cadre conceptuel régissant l'application des concepts et méthodes homologiques en algèbre. De ce cadre émergea un nouveau domaine des mathématiques : l'algèbre homologique. Troisièmement, Leray, Cartan et Serre introduisirent un nouveau type d'invariants homologiques, c'est-à-dire des groupes d'homologie à coefficients dans un faisceau.

Ces ruptures rendirent possible une analyse inédite des espaces topologiques. De plus, cette analyse confirmerait que l'étude des espaces topologiques n'avait pas à faire intervenir de manière essentielle leurs points. En contrepartie, ces ruptures laissèrent intact le concept d'espace topologique lui-même ; l'homologie s'appliquait toujours à des espaces topologiques traditionnels, c'est-à-dire qu'un espace était toujours compris comme un ensemble muni d'une structure topologique. Pour cette raison, ces transformations sont appelées des microfractures.

Le présent chapitre aborde chacune des microfractures l'une après l'autre. Il sera ainsi question de *Foundations of Algebraic Topology*, puis de *Homological Algebra* et finalement de la théorie des faisceaux.

## 2.1 *Foundations of Algebraic Topology*

La première microfracture peut être identifiée au livre *Foundations of Algebraic Topology* de Samuel Eilenberg et Norman Steenrod [Eilenberg et Steenrod 1952].

Annoncé dès 1945, mais finalement publié qu'en 1952, *Foundations of Algebraic Topology* effectua une clarification conceptuelle de l'homologie rendue nécessaire par l'apparition, entre la fin des années 1920 et le début des années 1940, d'une multitude de théories différentes : homologie de Čech, homologie simpliciale, homologie singulière, etc.

Informellement, Eilenberg et Steenrod se posèrent la question « qu'est-ce qu'une théorie de l'homologie ? ». Bref, ils cherchèrent, pour paraphraser Marquis, à identifier les ingrédients essentiels d'une telle théorie. [2009, p. 67] Leur réponse fut axiomatique, c'est-à-dire qu'ils enchâssèrent ces ingrédients essentiels dans des axiomes.

### 2.1.1 L'homologie vers 1940 : un domaine chaotique

Traditionnellement, une théorie de l'homologie était une méthode de calcul des groupes d'homologie sur un espace donné. Dans la préface de *Foundations of Algebraic Topology*, Eilenberg et Steenrod [1952, p. viii] résument la construction des groupes d'homologie d'un espace en quatre étapes :

1. construction d'un complexe sur un espace ;
2. construction d'un complexe orienté à partir d'un complexe ;
3. construction du groupe de chaînes sur le complexe orienté ;
4. construction du groupe d'homologie à partir du groupe de chaînes.

La diversité des théories découlait des multiples façons de définir un complexe sur les espaces considérés en topologie algébrique, c'est-à-dire de les représenter à l'aide de complexes, mais aussi des limites techniques inhérentes à chacune. Par exemple, chez Veblen, les chaînes singulières sur un espace topologique ne forment pas un groupe. La construction des groupes d'homologie ne peut donc se faire par le biais du groupe des chaînes et apparaît artificielle. Toujours en homologie singulière, les groupes définis par Lefschetz en 1933 ne sont pas libres de telle sorte que les complexes ne sont pas des complexes abstraits en bonne et due forme. Pour sa part, la théorie de Čech a à l'origine le défaut de ne s'appliquer qu'aux espaces compacts.

L'impression de chaos qui se dégageait de la théorie de l'homologie était donc imputable à la complexité du cadre symbolique et technique de même qu'à la diversité des théories.

Premièrement, selon le modèle décrit par Eilenberg et Steenrod, la construction d'une théorie de l'homologie était loin d'être une tâche facile puisqu'elle exigeait la définition et la caractérisation de nombreux concepts ainsi que de nombreuses manipulations symboliques. Par exemple, dans sa théorie de l'homologie singulière, Eilenberg considère d'abord les groupes d'homologie de complexes singuliers en reprenant pour l'essentiel l'approche de Lefschetz [1]. Il définit ensuite les notions de simplexe singulier, de groupe des chaînes singulières, de frontière et de

1. Voir Lefschetz [1942] ou, pour un résumé, la section 1.3.2

nombre d'incidence pour définir un complexe singulier d'un espace topologique et ainsi obtenir les groupes d'homologie de ce dernier [2]. Qui plus est, ceci ne tient pas encore compte des difficultés associées au calcul des groupes d'homologie !

Deuxièmement, l'équivalence de certaines des théories de l'homologie était déjà connue. Par exemple, *Algebraic Topology* de Lefschetz présentait une unification partielle du domaine :

> *The nerves (in the sense of Alexandroff) of the totality of the open converings of $\mathfrak{R}$ make up a net whose homology theory is a typical Čech theory. A similar theory arises out of the closed coverings. Let us refer to them as the $\mathfrak{U}$- and $\mathfrak{F}$-theories. The $\mathfrak{U}$-theory is chosen as our basic homology theory and will be discussed at length. For normal spaces, both are the same. In addition to the preceding there are in existence:*
>
> *for compacta: theories due to Vietoris, Alexandroff and Lefschetz;*
>
> *for general spaces: a theory due to Kurosch, and another due to (or rather patterned after one due to) Alexander and Kolmogoroff.*
>
> *It is not difficult to reduce the Alexandroff and Lefschetz theories to that of Vietoris (...) The latter will be examined more fully and reduced to the $\mathfrak{U}$-type. A complete discussion will also be given of the Kurosch and Alexander–Kolmogoroff types and they will be proved equivalent to the $\mathfrak{F}$-type. Thus at least a certain unity will have been brought into this group of questions.* [1942, p. 244]

Pour ce, il avait démontré que les théories en question donnaient lieu à des groupes d'homologie isomorphes. Pour n'en reproduire qu'un seul, le théorème 26.3 affirme que les groupes d'homologie de Vietoris et de Čech d'un espace compact sont isomorphes. [Lefschetz 1942, p. 273]

En contrepartie, les équivalences connues entre quelques théories particulières ne suffisaient pas à dissiper complètement la diversité des théories. L'homologie simpliciale, l'homologie singulière et l'homologie du type de Čech apparaissaient comme trois classes irréductibles puisqu'aucune équivalence n'était connue entre des théories relevant de deux classes différentes.

Selon Eilenberg et Steenrod, la variété des théories représentait une des principales difficultés associées à l'étude algébrique de la topologie :

> *The construction of a homology theory is exceedingly complicated.* (...) *Part of the complexity of the subject is that numerous variants of the basic definitions have appeared, e.g the singular homology groups of Veblen, Alexander, and Lefschetz, the relative homology of Lefschetz, the Vietoris homology groups, the Čech homology groups, the Alexander cohomology groups, etc*. [1952, p. vii]

Le caractère chaotique de l'homologie était donc intimement lié à la portée propre à chacune des théories. En effet, au-delà des applications pour lesquelles elle avait été façonnée, c'est-à-dire des problèmes qu'elle permettait de résoudre, la portée de chacune des théories de l'homologie semblait principalement déterminée par le type d'espace qu'elle permettait de traiter : espace métrique compact, espace triangulable, espace topologique arbitraire, etc.

2. Pour une présentation détaillée, voir Eilenberg [1944].

Au niveau conceptuel, la coexistence de toutes ces théories de l'homologie et l'existence d'équivalences entre certaines d'entre elles soulevait la question de ce qu'était réellement une théorie de l'homologie. Eilenberg et Steenrod offrirent une réponse des plus originales à cette question.

### 2.1.2 Une théorie axiomatique des théories de l'homologie

Dans *Foundations of Algebraic Topology*, Eilenberg et Steenrod proposèrent une axiomatisation de l'homologie. Ils adoptèrent ce point de vue afin d'éviter les deux principales difficultés affectant la présentation habituelle d'une théorie de l'homologie, c'est-à-dire l'obscurité de la motivation et la complexité des manipulations :

> *The origin of the present axiomatic treatment was an effort, on the part of the authors, to write a textbook on algebraic topology. We were faced with the problem of presenting two parallel lines of thought. One was the rigorous and abstract development of the homology groups of a space in the manner of Lefschetz or Čech, a procedure which lacks apparent motivation, and is noneffective as far as calculation is concerned. The other was the nonrigorous, partly intuitive, and computable method of assigning homology groups which marked the early historical development of the subject. In addition the two lines had to be merged eventually so as to justify the various computations. These difficulties made clear the need of an axiomatic approach.* [1952, p. ix]

En soi, l'adoption d'un point de vue axiomatique pour traiter l'homologie n'était pas totalement inédite. Comme le rappellent Eilenberg et Steenrod, Mayer et Tucker avaient respectivement axiomatisé les concepts de complexe de chaînes et de complexe cellulaire abstrait. [1952, p. x] L'axiomatisation de Eilenberg et Steenrod s'en distingue toutefois dans la mesure où elle rend compte du processus complet de construction d'une théorie de l'homologie.

Au-delà de cet accomplissement technique, *Foundations of Algebraic Topology* marque une rupture beaucoup plus profonde en raison de l'utilisation inédite que firent Eilenberg et Steenrod de la méthode axiomatique. Celle-ci constitue la pierre de touche de leur réponse à la question « qu'est-ce qu'une théorie de l'homologie ? », c'est-à-dire qu'ils l'utilisèrent pour clarifier, à un niveau purement conceptuel, la notion même de théorie de l'homologie.

> *The various homology and cohomology theories appear as complicated machines, the end product of which is an assignment of a graded group to a topological space, through a series of processes which look so arbitrary that one wonders why they succeed at all.* (...) *Eilenberg and Steenrod endeavored to break through this maze of unpleasant mathematics by adopting a totally different viewpoint, concentrating on* properties *of these end products rather than on the various methods devised to get them. This is the* axiomatic theory of homology *(*and cohomology*).* [Dieudonné 1989*b*, p. 107]

Dans un premier ordre d'idées, Eilenberg et Steenrod introduisent brièvement les notions topologiques et algébriques nécessaires à leur axiomatisation. La notion la plus importante est celle de catégorie admissible. Bien qu'ils ne le présentent pas comme cela, ils se trouvent à définir les entités mathématiques qui constitueront les objets et les morphismes de cette catégorie.

**Définition 2.1.2.1** (Eilenberg et Steenrod 1952)**.**

- Une *paire d'ensembles* $(X, A)$ est la donne d'un ensemble $X$ et d'un sous-ensemble $A$ de $X$.
- Une *application* $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ entre deux paires d'ensembles $(X, A)$ et $(Y, B)$ est une fonction $f\colon X \to Y$ tel que $f(A) \subset B$.
- Le *treillis* d'une paire $(X, A)$ est formé par les paires

$$\begin{tikzcd}
 & & (X,0) \arrow[dr] & & \\
(0,0) \arrow[r] & (A,0) \arrow[ur] \arrow[dr] & & (X,A) \arrow[r] & (X,X) \\
 & & (A,A) \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

  leurs identités de même que les inclusions et compositions que suggère le diagramme.

En particulier, une *paire d'espaces topologiques* $(X, A)$ est une paire d'ensembles $(X, A)$ où $X$ est un espace topologique et $A$ est un sous-espace de $X$ muni de la topologie induite.

**Définition 2.1.2.2** (Eilenberg et Steenrod 1952)**.** Une famille $\mathcal{A}$ de paires d'espaces et d'applications entre celles-ci forme une *catégorie admissible* pour la théorie de l'homologie si

(1) Si $(X, A) \in \mathcal{A}$, alors toutes les paires et inclusions du treillis de $(X, A)$ sont dans $\mathcal{A}$ .

(2) Si $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ est dans $\mathcal{A}$, alors $(X, A)$ et $(Y, B)$ sont dans $\mathcal{A}$ de même que les applications associant aux éléments de $(X, A)$ des éléments de $(Y, B)$ définies par $f$.

(3) Si $f_1$ et $f_2$ sont dans $\mathcal{A}$, alors, si elle est définie, leur composition $f_1 f_2$ est également dans $\mathcal{A}$.

(4) Si $(X, A) \in \mathcal{A}$, alors le produit cartésien $(X, A) \times I = (X \times I, A \times I)$ est dans $\mathcal{A}$ et les applications

$$g_0\colon (X, A) \to (X, A) \times I \qquad\qquad g_1\colon (X, A) \to (X, A) \times I$$
$$x \mapsto (x, 0) \qquad\qquad\qquad\qquad x \mapsto (x, 1)$$

sont dans $\mathcal{A}$ .

(5) Il existe un espace $P_0$ dans $\mathcal{A}$ qui consiste en un unique point. Si $X$ et $P$ sont dans $\mathcal{A}$, $f\colon P \to X$ et $P$ est un unique point, alors $f \in \mathcal{A}$ .

Par exemple, l'ensemble $\mathcal{A}_1$ de toutes les paires $(X, A)$ et de toutes les applications entre ces paires forme une catégorie admissible. L'ensemble $\mathcal{A}_C$ de toutes les paires compactes et de toutes les applications entre elles forme également une catégorie admissible.

Les paires d'ensembles et les applications d'une catégorie admissible sont elles-mêmes appelées admissibles.

L'importance de la notion de catégorie admissible tient à ce qu'elle sous-tend celle de théorie de l'homologie. La notion de théorie de l'homologie ne se définit pas directement sur un espace, mais bien sur une catégorie admissible.

**Définition 2.1.2.3** (Eilenberg et Steenrod 1952)**.** Une *théorie de l'homologie* $H$ sur une catégorie admissible $\mathcal{A}$ est une collection formée des trois fonctions :

1. $H_q(X, A)$ qui, à toute paire d'ensembles $(X, A)$ de $\mathcal{A}$ et à tout $q \in \mathbb{Z}$, associe un groupe abélien, le groupe d'homologie relative $q$-dimensionnel de $X$ modulo $A$ ;
2. $_*$ qui, à toute application $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ de $\mathcal{A}$ et à tout $q \in \mathbb{Z}$, associe un homomorphisme $f_*\colon H_q(X, A) \to H_q(Y, B)$, l'homomorphisme induit par $f$ ;
3. $\partial(q, X, A)$ qui, à toute paire d'ensembles $(X, A)$ de $\mathcal{A}$ et à tout $q \in \mathbb{Z}$, associe l'homomorphisme $\partial(q, X, A)\colon H_q(X, A) \to H_{q-1}(A)$, l'opérateur de bord ;

telles que les axiomes suivants sont satisfaits :

Axiome 1 Si $f$ est l'identité, alors $f_*$ est également l'identité.

Axiome 2 $(gf)_* = g_* f_*$

Axiome 3 $\partial f_* = (f|_A)_* \partial$

Axiome 4 (axiome d'exactitude) Si $(X, A)$ est une paire admissible et $i\colon A \to X$, $j\colon X \to (X, A)$ sont des inclusions, alors la suite inférieure de groupes et d'homomorphismes

$$\ldots \xleftarrow{j_*} H_{q-1}(A) \xleftarrow{\partial} H_q(X, A) \xleftarrow{j_*} H_q(X) \xleftarrow{i_*} H_q(A) \xleftarrow{\partial} \ldots$$

est exacte[3]. Cette suite inférieure s'appelle la suite d'homologie de $(X, A)$.

Axiome 5 (axiome d'homotopie) Si $f_0, f_1\colon (X, A) \to (Y, B)$ sont des applications admissibles homotopes dans $\mathcal{A}$, alors, pour tout $q$, les homomorphismes $f_{0*}, f_{1*}\colon H_q(X, A) \to H_q(Y, B)$ coïncident.

Axiome 6 (axiome d'excision) Si $U$ est un ouvert de $X$ tel que $\overline{U}$ est un sous-ensemble de l'intérieur de $A$ et si l'inclusion $(X - U, A - U) \to (X, A)$ est admissible, alors, pour tout $q$, cette inclusion induit un isomorphisme $H_q(X - U, A - U) \approx H_q(X, A)$.

Axiome 7 (axiome de dimension) Si $P$ est un espace admissible qui consiste en un unique point, alors, pour tout $q \neq 0$, $H_q(P) = 0$.

3. Une suite d'homomorphismes $A_m \to A_{m+1} \to \cdots \to A_n$ $(m + 1 < n)$ est exacte si pour tout $m < q < n$, $\mathrm{Im}(A_{q-1} \to A_q) = \ker(A_q \to A_{q+1})$.

Sans trop rentrer dans les détails, les deux premiers axiomes signifient que l'homologie est un foncteur covariant. Selon le troisième axiome, l'opérateur de bord commute avec les homomorphismes induits. L'axiome 4 décrit la suite exacte des espaces $X$, $A \subset X$ et $X - A$. Les axiomes 5 et 6 affirment respectivement que l'homologie, en tant que foncteur, est invariante sous l'homotopie et qu'elle est invariante sous le retrait de certains sous-espaces. Finalement, le dernier axiome stipule qu'un espace à un seul point est homologiquement trivial. [Krömer 2007, p. 77] Il faut cependant souligner qu'il n'est nulle part mention des points de l'espace. L'analyse homologique d'un espace s'en passe donc complètement.

La présentation des axiomes d'une théorie de l'homologie forme la section 3 du premier chapitre de *Foundations of Algebraic Topology*. Cette section est suivie d'une section « miroir », numérotée 3c, où sont présentés les axiomes définissant une théorie de la cohomologie. Cette numérotation astucieuse rend bien compte du fait que, parce qu'ils s'inscrivent dans le cadre de la théorie des catégories, les axiomes de l'homologie définissent indirectement une théorie de la cohomologie. Il suffit de prendre les axiomes duaux. La principale différence entre une théorie de l'homologie et une théorie de la cohomologie est que la première est un foncteur covariant alors que la seconde est un foncteur contravariant de la catégorie des espaces topologiques vers la catégorie des groupes abéliens.

Une théorie de la cohomologie sur une catégorie admissible $\mathcal{A}$ est donc la collection des trois fonctions

1. $H^q(X, A)$ qui associe à toute paire $(X, A)$ et à tout $q \in \mathbb{Z}$ le groupe de cohomologie relative de $X$ mod $A$ $q$-dimensionnel ;
2. $f^*$ qui, à toute application admissible $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ et à tout $q \in \mathbb{Z}$, associe l'homomorphisme $f^*\colon H^q(Y, B) \to H^q(X, A)$ ;
3. $\delta(q, X, A)$ qui associe à toute paire $(X, A)$ et à tout $q \in \mathbb{Z}$ l'opérateur de cobord $\delta\colon H^{q-1}(A) \to H^q(X, A)$

telles qu'elles satisfassent les axiomes duaux. Par exemple, l'axiome d'exactitude 4 devient l'axiome 4c :

Axiome 4c Si $(X, A)$ est admissible et $i\colon A \to X$, $j\colon X \to (X, A)$ sont des inclusions, alors la suite supérieure de groupes et d'homomorphismes

$$\ldots \xrightarrow{i^*} H^{q-1}(A) \xrightarrow{\partial} H^q(X, A) \xrightarrow{j^*} H^q(X) \xrightarrow{i^*} H^q(A) \xrightarrow{\partial} \ldots$$

est exacte. Cette suite supérieure est la suite de cohomologie de $(X, A)$.

En conséquence, pour toute propriété de l'homologie, la cohomologie possède la propriété duale.

La suite du livre examine les principales théories de l'homologie et de la cohomologie — homologie simpliciale, homologie singulière et homologie de Čech — à travers le filtre des axiomes. Un des résultats les plus importants est le théorème d'unicité qui fournit un critère d'équivalence sur les théories de l'homologie. Ce théorème affirme que, étant données deux théories de l'homologie $H$ et $H'$, tout homomorphisme $h_0 \colon G \to G'$ entre les groupes de coefficients de ces théories induit un homomorphisme $h(q, X, A) \colon H_q(X, A) \to H'_q(X, A)$ entre leurs groupes d'homologie. En particulier, si $h_0 \colon G \to G'$ est un isomorphisme, alors $h(q, X, A)$ est un isomorphisme. Ce théorème permet donc de déterminer si deux théories sont équivalentes, et ce même si leurs groupes respectifs se calculent de manière radicalement différente.

En axiomatisant la théorie de l'homologie, *Foundations of Algebraic Topology* transforma la topologie algébrique en une discipline moderne en bonne et due forme. Paradoxalement, parce qu'elle était d'un type inédit en comparaison de celles développées dans la première moitié du XX^e siècle, cette même axiomatisation ébranla la position moderniste et doit être vue comme un premier pas vers la position normative contemporaine que développerait Grothendieck.

### 2.1.3 Un cas paradigmatique d'abstraction

Dans la foulée des travaux de Hilbert, de nombreux concepts mathématiques avaient déjà été décrits à l'aide d'axiomes : groupe, corps, anneau, espace topologique, etc. Ces axiomatisations avaient en commun d'identifier les caractéristiques essentielles d'un concept et de le définir par l'entremise de celles-ci. Elles offraient du même coup une description abstraite et synthétique d'une classe d'objets mathématiques. Dans cette optique, la méthode axiomatique était étroitement associée à la structure des objets mathématiques ; elle isolait la structure commune à des objets mathématiques d'un même type.

L'approche axiomatique au cœur de *Foundations of Algebraic Topology*, tout en demeurant tributaire de cette tradition, l'ouvre à un nouvel horizon. En effet, là où la théorie axiomatique, par exemple, des groupes isole les propriétés essentielles d'objets mathématiques d'un type donné, les axiomes de Eilenberg et Steenrod capturent les « ingrédients » d'une théorie de l'homologie, c'est-à-dire ce qui définit réellement une théorie de l'homologie. Ils déterminent une théorie des théories de l'homologie pour reprendre l'expression de Krömer [2007, p. 80]. Bref, alors que la théorie axiomatique des groupes porte sur des objets, la théorie axiomatique de l'homologie s'applique à des théories et est donc d'un type inédit en comparaison aux différentes axiomatisations développées dans la première moitié du XX^e siècle.

Il en est ainsi parce que les axiomes de Eilenberg et Steenrod se concentrent sur la mécanique commune à la construction de toutes les théories de l'homologie. Contrairement aux théories classiques, la théorie axiomatique de l'homologie ne cherche pas à rendre compte de la structure topologique d'un type d'espace particulier par le biais d'invariants algébriques. Autrement dit, les axiomes de Eilenberg et Steenrod ne s'intéressent pas aux groupes abéliens qui peuvent être associés à tel ou tel type d'espace, mais rendent plutôt compte du processus lui-même par lequel un groupe est associé à un espace.

> *Before, algebraic topology concerned objects whose means of constitution were mainly calculatory, such that consequently, the theory concentrated to a certain degree on the problems posed by calculation. The objects of the new theory, however, are the* propositions *about the previous objects (the axioms and what follows from them deductively; propositions about homology theories as data, apart from the constitution of these data) and the models of this collection of propositions.* [Krömer 2007, p. 80]

Chez Eilenberg et Steenrod, l'homologie doit donc être vue comme un pont abstrait entre une structure de type spatiale et une structure de type algébrique. Ce passage vers l'abstraction a pour conséquence de conférer à la théorie de l'homologie une clarté conceptuelle inédite.

Premièrement, la théorie de l'homologie axiomatique se distingue par une grande simplicité conceptuelle. Tel que mentionné à la section 2.1.1, les théories classiques de l'homologie exigeaient la maîtrise de nombreux concepts : complexe, simplexe, chaîne, cycle, bord, triangulation, etc. Dans *Foundations of Algebraic Topology*, une théorie de l'homologie ne fait appel qu'à des concepts topologiques et algébriques : « [*The*] *statement* [*of the axioms*] *requires only the concepts of point set topology and of algebra. The concepts of complex, orientation, and chain do not appear here.* » [Eilenberg et Steenrod 1952, p. ix] À cette liste, il faudrait ajouter ceux de foncteurs, de transformations naturelles et de diagrammes commutatifs qui relèvent de la théorie des catégories.

Deuxièmement, et cet aspect est relié au premier, l'approche de Eilenberg et Steenrod fait grand usage de la méthode des diagrammes commutatifs ce qui, comparativement aux manipulations symboliques inhérentes aux théories classiques, a l'avantage de simplifier la démonstration des théorèmes : « *The diagrams incorporate a large amount of information. Their use provides extensive savings in space and in mental effort. In the case of many theorems, the setting up of the correct diagram is the major part of the proof.* » [Eilenberg et Steenrod 1952, p. xi]

Troisièmement, les axiomes unifient l'homologie en tant que domaine mathématique. Tout d'abord, la distinction entre plusieurs théories ou à tout le moins entre plusieurs types de théories de l'homologie se dissipe puisqu'elle est rendue conceptuellement accessoire par l'identification des ingrédients qui déterminent ce qu'est une théorie de l'homologie. L'homologie simpliciale, l'homologie singulière et l'homologie de Čech ne sont que des cas particuliers de théorie de l'homologie. De plus, l'unification de la théorie de l'homologie se retrouve également dans la relation clarifiée entre l'homologie et la cohomologie. La propriété de dualité intrinsèque à la théorie des catégories fait en sorte que l'axiomatisation du concept de théorie de l'homologie définit simultanément celui de théorie de la cohomologie. L'une ne peut aller sans l'autre.

Finalement, l'étude concrète de la topologie des espaces bénéficie de cette unification. Tout résultat qui est une conséquence des axiomes — ou pour le dire autrement, tout résultat qui peut être démontré abstraitement — est valable pour toutes les théories particulières. Toutes les théories particulières jouissent donc des mêmes propriétés générales pour la simple raison qu'elles satisfont les axiomes. Eilenberg et Steenrod ne manquent pas de souligner que le travail du mathématicien s'en voit grandement simplifié :

> *The great gain of an axiomatic treatment lies in the simplification obtained in proofs of theorems. Proofs based directly on the axioms are usually simple and conceptual. It is no longer necessary for a proof to be burdened with the heavy machinery used to define the homology groups. Nor is one faced at the end of a proof by the question, Does the proof still hold if another homology theory replaces the one used? When a homology theory has been shown to satisfy the axioms, the machinery of its construction may be dropped*. [1952, p. x]

Ce passage vers l'abstraction confère également à la théorie de l'homologie une généralité inédite. Une théorie de l'homologie est désormais définie, non plus par la construction concrète de groupes d'homologie, mais par la satisfaction des axiomes. Il en résulte que tout ce qui satisfait les axiomes est une théorie de l'homologie.

> (...) *a homology theory is everything about which such and such propositions are valid. It is common sense on a technical level, the experience flowing from the work with homology theories that justifies calling everything a homology theory that fulfils these axioms*. [Krömer 2007, p. 80]

Cette conceptualisation de l'homologie en tant que pont entre des structures spatiales et algébriques est rendue possible par l'inscription de l'homologie dans le cadre de la théorie des catégories. Dans *Foundations of Algebraic Topology*, l'homologie n'est rien d'autre qu'un foncteur entre la catégorie des espaces topologiques et la catégorie des groupes abéliens caractérisé par certaines propriétés naturelles.

### 2.1.4 Une conception fonctorielle de l'homologie

Sur le plan épistémologique, la conception de l'homologie comme pont abstrait entre des structures spatiales et d'autres algébriques marque une rupture. Traditionnellement, une théorie de l'homologie était une méthode de calcul de groupes abéliens sur un type d'espace donné. Comme l'explique clairement Marquis [2009, p. 68], une théorie de l'homologie est plutôt la donnée de transformations de deux types d'après les axiomes de Eilenberg et Steenrod :

1. des foncteurs de la catégorie des espaces topologiques **Top** vers la catégorie des groupes abéliens **AbGrp**. À tout espace topologique $X$ est associé un groupe abélien $H_q(X)$ et à toute application continue entre deux espaces $f\colon X \to Y$ est associé un homomorphisme de groupe $f_*\colon H_q(X) \to H_q(Y)$. Ces transformations encodent algébriquement des propriétés topologiques de l'espace.
2. des transformations naturelles d'un foncteur $H_q\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{AbGrp}$ vers un autre foncteur $H'_q\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{AbGrp}$. Ces transformations permettent de passer d'une théorie de l'homologie particulière à une autre.

L'homologie est donc un outil de traduction d'une situation topologique pour reprendre l'expression de Marquis [2009, p. 69] Le passage d'un espace topologique vers un groupe abélien fait en sorte qu'un problème topologique est traduit en un problème algébrique. Les propriétés du groupe vont donc rendre compte de celles de l'espace.

> *Speaking roughly, a homology theory assigns groups to topological spaces and homomorphisms to continuous maps of one space into another. To each array of spaces and maps is assigned an array of groups and homomorphisms. In a way, a homology theory is an algebraic image of topology. The domain of a homology theory is the topologist's field of study. Its range is the field of study of the algebraist. Topological problems are converted into algebraic problems.* [Eilenberg et Steenrod 1952, p. vii]

Or, cette conception de l'homologie en tant que famille de transformations n'est possible qu'en vertu de l'inscription de la théorie de l'homologie, et plus généralement de la topologie algébrique, dans le cadre de la théorie des catégories.

Premièrement, et cet aspect va de soi, les concepts de foncteur, de catégorie admissible, de transformation naturelle, etc. relèvent de la théorie des catégories. L'homologie est donc modelée par son insertion dans le cadre conceptuel de la théorie des catégories comme l'annoncent Eilenberg et Steenrod : « *The ideas of category and functor inspired in part the axiomatic treatment of homology theory given in this book. In addition, the point of view that these ideas engender has controlled its development at every stage.* » [1952, p. 108]

Deuxièmement, la théorie des catégories permet de saisir et d'exprimer le mécanisme de traduction dans toute sa généralité. De par leur emphase sur les morphismes existant entre les objets de la catégorie des paires d'espaces $(X, A)$, les axiomes d'Eilenberg et Steenrod se concentrent sur les propriétés du mécanisme de traduction en tant que tel, c'est-à-dire indépendamment de tout cas particulier : « *Our axioms are statements of the fundamental properties of this assignment of an algebraic system to a topological system.* » [Eilenberg et Steenrod 1952, p. vii] Il en est ainsi parce que la théorie des catégories caractérise les objets mathématiques par l'entremise des relations qu'ils entretiennent avec d'autres objets.

À la lumière de ces considérations, l'axiomatisation de l'homologie mise de l'avant par Eilenberg et Steenrod marqua une rupture dans le développement de la topologie algébrique dans la mesure où elle transforma l'appréhension des espaces topologiques. Le recours aux concepts et méthodes de la théorie des catégories fit en sorte que l'homologie des espaces ne fut tout simplement plus étudiée de la même manière après *Foundations of Algebraic Topology*.

En contrepartie, les espaces considérés en topologie algébrique demeurèrent on ne peut plus traditionnels comme l'illustre indirectement la citation suivante de Marquis :

> *Hence a homology theory, or in fact most of algebraic topology, is comparable to a translation device. Seen this way, a category is merely a framework in which*

> *the "data" has to be presented for the translation to be effected. For the basic objects of study are the topological spaces (and the mappings between them) and in order to apply the translation device, they have to be "prepared" in a certain way, that is they have to be presented to the device in the form of a category.* [2009, p. 69]

Bref, la rupture que marqua *Foundations of Algebraic Topology* ne fut pas assez profonde pour atteindre le concept d'espace topologique lui-même.

## 2.2 *Homological Algebra*

La deuxième microfracture correspond à la création de l'algèbre homologique ou, plus précisément, à la publication du livre *Homological Algebra* d'Henri Cartan et Samuel Eilenberg [4] [Cartan et Eilenberg 1956].

Historiquement, le livre fut publié en 1956, mais la microfracture elle-même peut être considérée comme antérieure. Premièrement, le livre était prêt dès 1953 comme l'indique la préface qui est datée de septembre 1953, mais sa publication fut reportée. Les raisons réelles de ce délai demeurent toutefois nébuleuses. Dans son compte-rendu de novembre 1956 dans le *Bulletin of the American Mathematical Society*, Mac Lane blâme la maison d'édition pour avoir tout simplement pris trop de temps : « *It took nearly three years from completed manuscript to bound book; Princeton is penalized 15 years for holding.* » [1956, p. 615] Plus récemment, Krömer a suggéré qu'André Weil en avait bloqué la publication en raison de l'approche catégorique adoptée par Cartan et Eilenberg. [2007, p. 96]

Deuxièmement, l'onde de choc s'était fait sentir bien avant la publication du livre dans la mesure où le manuscrit avait déjà été considérablement diffusé. Mac Lane est on ne peut plus explicite quant à l'impact qu'avait déjà eu *Homological Algebra*. Son compte-rendu s'ouvre avec la phrase suivante : « *At last this vigorous and influential book is at hand.* » [1956, p. 615] Quelques pages plus loin, il écrit encore : « *In spite of the delay of its publication, widespread acquaintance with the manuscript and with the ideas of this book has already played an important role in the development of this lively subject.* » [1956, p. 621] De plus, en 1957, Grothendieck fit paraître dans le *Tôhoku Journal of Mathematical* un article intitulé « Sur quelques points d'algèbre homologique » [Grothendieck 1957] présentant une refonte de la nouvelle discipline. Cet article était le résultat de recherches menées durant un séjour à *University of Kansas* en 1955, soit bien avant la publication de l'ouvrage de Cartan et Eilenberg.

Ceci ne veut en aucun cas affirmer que l'impact des innovations au cœur de *Homological Algebra* s'étiola après sa publication, mais plutôt, comme en témoigne l'article de Grothendieck, que celles-ci avaient déjà été digérées par certains des contemporains de Cartan et Eilenberg.

4. À ce propos, voir Weibel [1999] et Marquis [2009, p. 72].

*Homological Algebra* rappelle *Foundations of Algebraic Topology* dans la mesure où Cartan et Eilenberg montrent que les invariants homologiques et cohomologiques associés à différentes structures algébriques relèvent d'un même schème. Ils décrivent ce schème en introduisant le concept inédit de foncteur dérivé auquel ils ramènent les différents cas particuliers.

### 2.2.1 L'infiltration des méthodes homologiques en algèbre

Comme son nom le suggère, l'algèbre homologique est la branche des mathématiques qui étudie l'application des méthodes homologiques à l'étude de systèmes algébriques. Les recherches en algèbre homologique s'organisent autour de deux grands problèmes. Le premier est la définition de structures d'homologie et de cohomologie sur des structures algébriques comme des groupes, des modules, etc. Le second est l'étude de la structure homologique ou cohomologique d'un espace par le biais d'une structure algébrique. En effet, les groupes d'homologie ou de cohomologie de certains types d'espace sont identiques à des structures algébriques connues.

Pour reprendre l'expression utilisée par Hochschild dans son compte-rendu de *Homological Algebra* [Hochschild 1957], l'algèbre homologique entreprit sa phase expérimentale au début des années 1940, moment à partir duquel il devint de plus en plus clair que la théorie de l'homologie, à l'origine développée pour caractériser des espaces, permettait également d'obtenir des invariants de systèmes algébriques. Au cours des années suivantes, l'étude, premièrement, de la cohomologie des groupes par Eilenberg et Mac Lane, Hopf, Freudenthal et Eckmann, deuxièmement, des algèbres de Lie par Hochschild et, troisièmement, des algèbres associatives par Chevalley et Eilenberg élargit le champ d'application des méthodes homologiques au-delà du contexte spatial. Afin d'illustrer l'infiltration des méthodes topologiques, et plus précisément homologiques, en algèbre, il semble suffisant de se pencher sur la cohomologie des groupes telle que la développèrent Eilenberg et Mac Lane [5].

Le point de départ de la théorie de la cohomologie des groupes se situe en septembre 1941 lorsque Hopf transmit au journal *Commentarii Mathematicii Helvetici* un article intitulé « *Fundamentalgruppe und zweite Bettische Gruppe* ». [Mac Lane 1977, p. 3] Dans cet article, Hopf s'intéresse aux groupes d'homologie et de cohomologie d'un complexe $K$ et tente d'en donner une description algébrique. Le théorème principal affirme que (i) tout groupe $G$ détermine, par un procédé algébrique, un groupe $G_1^*$ différent de zéro en général et (ii) si $G$ est le groupe fondamental d'un complexe $K$ dont le deuxième groupe de Betti est tel que $B^2 = H_2(K, \mathbb{Z})$ et si $S^2$ est le sous-groupe sphérique de $B^2$, alors $B^2/S^2 \simeq G_1^*$.

Ce théorème repose sur un procédé algébrique consistant à représenter le groupe fondamental $G$ comme le quotient $F/R$ d'un groupe libre $F$ par un sous-groupe $R$.

5. Pour l'homologie des algèbres de Lie et des algèbres associatives, voir Weibel [1999, p. 809 et p. 809–811 respectivement].

Hopf est alors en mesure de démontrer que

$$G_1^* = \frac{R \cap [F, F]}{[R, F]}$$

où $[F, R]$ est le sous-groupe de $F$ engendré par les commutateurs $frf^{-1}r^{-1}$ ($f \in F$, $r \in R$) et $[F, F]$ est le groupe des commutateurs de $F$. Ceci signifie que le groupe $G_1^*$ est indépendant du choix de la représentation $G \simeq F/R$ et qu'il ne dépend à vrai dire que du groupe fondamental.

Hopf met donc en évidence l'influence du groupe fondamental sur le groupe d'homologie de deuxième ordre. Pour citer Mac Lane : « *This* $G_1^*$ *is the algebraic construction used* (…) *to measure the influence of the fundamental group on the second homology group.* » [1977, p. 2] Par le fait même, un invariant topologique — le groupe d'homologie $H_2(K, \mathbb{Z})$ — se trouve à dépendre d'un autre invariant topologique — le groupe fondamental $G$.

Ce résultat soulevait une question évidente : existe-t-il des relations de dépendance similaires pour les groupes d'homologie de degré supérieur à 2, c'est-à-dire pour $H_n(K, \mathbb{Z})$ où $n \geq 3$ ? Eilenberg et Mac Lane s'attaquèrent à ce problème dès 1943 avec leur article « *Relations Between Homology and Homotopy Groups* » [Eilenberg et Mac Lane 1943] [6].

Soient $G$ un groupe et $A$ un groupe abélien. Eilenberg et Mac Lane construisent un complexe abstrait de fermeture finie $K(G)$. Une $n$-cellule $\sigma^n$ de $K(G)$ est une matrice $[x_0, \ldots, x_n]$ de $n+1$ éléments de $G$ soumis à la relation d'équivalence $[x_0, \ldots, x_n] = [xx_0, \ldots, xx_n]$ pour tout $x \in G$. L'opérateur de bord est défini par la relation $\partial[x_0, \ldots, x_n] = \sum_{i=0}^{n}(-1)^n[x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n]$ où $\hat{x}_i$ signifie que le terme $x_i$ a été omis. Cet opérateur est tel que $\partial\partial = 0$. Ce complexe $K(G)$ est tel que $H_2(K(G), A) = G_1^*$.

Les $n^{\text{e}}$ groupes d'homologie et de cohomologie de $G$ à coefficients dans $A$ sont donnés par les groupes d'homologie et de cohomologie du complexe $K(G)$, c'est-à-dire que $H_n(G, A) = H_n(K(G), A)$ et $H^n(G, A) = H^n(K(G), A)$ [7]. Pour reprendre l'expression de Dieudonné [1989*b*, p. 460], Eilenberg et Mac Lane créent ainsi les concepts de groupes d'homologie et de cohomologie d'un groupe à coefficients dans un groupe abélien.

Soit maintenant $X$ un espace connexe par arcs dont les groupes d'homotopie s'annulent, c'est-à-dire $\pi_n(X) = 0$ pour $1 < n < r$. Eilenberg et Mac Lane démontrent notamment que, pour $n < r$, les groupes de cohomologie de $X$ sont isomorphes aux groupes de cohomologie du groupe fondamental $\pi_1(X)$ :

$$H^n(X, A) \simeq H^n(\pi_1(X), A)$$

6. Entre 1944 et 1946, Hopf, Freudentahl et Eckmann arrivèrent à des résultats équivalents à ceux de Eilenberg et Mac Lane. Voir Mac Lane [1977].

7. Pour la définition exacte du complexe — ou les définitions puisque Eilenberg et Mac Lane en donnent trois — et celle des groupes, voir Eilenberg et Mac Lane [1945].

Similairement, pour $n < r$, les groupes d'homologie de $X$ sont isomorphes aux groupes d'homologie du groupe fondamental $\pi_1(X)$ :

$$H_n(X, A) \simeq H_n(\pi_1(X), A)$$

Ainsi, Eilenberg et Mac Lane donnent une description algébrique de la structure homologique et cohomologique de dimension $n$ d'un groupe $G$. De plus, ils montrent que ces structures sont identiques à celles d'un espace connexe par arcs dont le groupe fondamental est $G$. La relation de dépendance entre la structure homologique d'un espace et le groupe fondamental de celui-ci mise en lumière par Hopf est du coup généralisée aux groupes d'homologie de degré arbitraire [8].

Au début des années 1950, les concepts et méthodes de l'homologie avaient donc été transposés à trois types de structures algébriques : les groupes, les algèbres de Lie et les algèbres associatives. Or, il ne s'agissait pas de trois théories disparates, mais plutôt de trois cas particuliers d'une théorie abstraite.

### 2.2.2 Un schème commun révélé par les foncteurs Tor et Ext

Dans la préface de *Homological Algebra*, Cartan et Eilenberg annoncent un double objectif. Le premier est l'unification des théories de l'homologie et de la cohomologie construites pour les groupes, les algèbres de Lie et les algèbres associatives. Le second est la mise sur pied d'une théorie de l'homologie et de la cohomologie dans toute sa généralité.

> *During the last decade the methods of algebraic topology have invaded extensively the domain of pure algebra, and initiated a number of internal revolutions. The purpose of this book is to present a unified account of these developments and to lay the foundations of a full-fledged theory.*
>
> *The invasion of algebra has occurred on three fronts through the construction of cohomology theories for groups, Lie algebras, and associative algebras. The three subjects have been given independent but parallel developments. We present herein a single cohomology theory (and also a homology) theory which embodies all three; each is obtained from it by a suitable specialization.* [Cartan et Eilenberg 1956, p. v]

À la base de ce projet se trouve l'identification d'un schème commun aux théories cohomologiques auparavant introduites en algèbre. En effet, en utilisant les foncteurs Tor et Ext, Cartan et Eilenberg parviennent à décrire la cohomologie des groupes, des algèbres de Lie et des algèbres associatives selon un même schème. L'idée fondamentale derrière ces foncteurs est qu'ils se dérivent d'autres foncteurs.

Premièrement, le foncteur Tor se dérive du produit tensoriel $\otimes$. Soient $\Lambda$ un anneau, $A$ un $\Lambda$-module à droite et $C$ un $\Lambda$-module à gauche. Soit également une suite exacte

$$0 \to A' \to A \to A'' \to 0$$

8. Pour plus de détails, voir Eilenberg et Mac Lane [1943, 1945] ou encore Dieudonné [1989*b*, p. 454–463].

où $A'$ est un sous-module de $A$ et $A''$ est le module quotient. En général, la suite obtenue en prenant le produit tensoriel de chacun des termes d'une suite exacte n'est pas exacte. Par contre, si

$$A' \to A \to A'' \to 0$$

est exacte, alors la suite

$$A' \otimes_\Lambda C \to A \otimes_\Lambda C \to A'' \otimes_\Lambda C \to 0$$

obtenue en prenant le produit tensoriel par $C$ est exacte.

Lorsque $A$ est un module libre, le noyau de l'homomorphisme $A' \otimes_\Lambda C \to A \otimes_\Lambda C$ s'appelle le *produit de torsion* $\mathrm{Tor}_1^\Lambda(A'', C)$. Ce foncteur mesure à quel point la suite s'écarte de l'exactitude. Il existe effectivement un homomorphisme naturel $\mathrm{Tor}_1^\Lambda(A'', C) \to A' \otimes C$ tel que $\mathrm{Im}(\mathrm{Tor}_1^\Lambda(A'', C) \to A' \otimes C) = \ker(A' \otimes C \to A \otimes C)$. Le produit de torsion donne donc lieu à une suite exacte

$$\begin{aligned} \cdots \to \mathrm{Tor}_{n+1}^\Lambda(A'', C) \to \mathrm{Tor}_n^\Lambda(A', C) \to \mathrm{Tor}_n^\Lambda(A, C) \to \mathrm{Tor}_n^\Lambda(A'', C) \to \dots \\ A' \otimes_\Lambda C \to A \otimes_\Lambda C \to A'' \otimes_\Lambda C \to 0 \end{aligned}$$

en autant que $\mathrm{Tor}_0^\Lambda(A, C) = A \otimes_\Lambda C$.

Deuxièmement, le foncteur Ext s'obtient par une construction duale à partir du foncteur $\mathrm{Hom}(A, C)$ de tous les $\Lambda$-homomorphismes $A \to C$. À l'instar de $\otimes$, l'application du foncteur Hom à la partie gauche de la suite exacte

$$0 \to A' \to A \to A'' \to 0$$

permet d'obtenir une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(A'', C) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(A, C) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(A', C)$$

Cartan et Eilenberg définissent le foncteur $\mathrm{Ext}_\Lambda^1(A, C)$ comme le conoyau de l'homomorphisme $\mathrm{Hom}_\Lambda(A, C) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(A', C)$. Le foncteur Ext induit à son tour une suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(A'', C) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(A, C) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(A', C) \to \dots \\ \mathrm{Ext}_\Lambda^n(A'', C) \to \mathrm{Ext}_\Lambda^n(A, C) \to \mathrm{Ext}_\Lambda^n(A', C) \to \mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(A'', C) \to \dots \end{aligned}$$

en autant que $\mathrm{Ext}_\Lambda^0(A, C) = \mathrm{Hom}_\Lambda(A, C)$

La description uniforme de la cohomologie des groupes, des algèbres de Lie et des algèbres associatives qu'avancent Cartan et Eilenberg découle de ce que les groupes de cohomologie se définissent en termes des foncteurs Tor et Ext.

Premièrement, soit $\Pi$ un groupe multiplicatif et $C$ un groupe abélien additif dont le groupe des multiplicateurs à gauche est $\Pi$. Les groupes de cohomologie de $\Pi$ à coefficients dans $C$ sont

$$H^q(\Pi, C) = \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}(\pi)}^q(\mathbb{Z}, C)$$

où $\mathbb{Z}(\Pi)$ est l'algèbre de groupe de $\Pi$ sur $\mathbb{Z}$.

Deuxièmement, soit $g$ une algèbre de Lie sur un anneau commutatif $K$ et soit $C$ un espace de représentation de $g$. Les groupes de cohomologie de $g$ à coefficients dans $C$ sont

$$H^q(g, C) = \mathrm{Ext}^q_{g^e}(K, C)$$

où $g^e$ est une algèbre construite à partir de $g$.

Troisièmement, soit $\Lambda$ une algèbre associative sur un anneau commutatif $K$ et soit $A$ un $\Lambda$-module à gauche et à droite. Les groupes de cohomologie de $\Lambda$ à coefficients dans $A$ sont :

$$H^q(\Lambda, A) = \mathrm{Ext}^q_{\Lambda^e}(\Lambda, A)$$

où $\Lambda^e$ est une algèbre construite à partir de $\Lambda$.

Pour chaque type de structures, à savoir les groupes, les algèbres de Lie et les algèbres associatives, des constructions duales à l'aide du foncteur Tor définissent les groupes d'homologie [9].

À la lumière de ces considérations, la description de l'homologie et de la cohomologie des groupes, des algèbres de Lie et des algèbres associatives qu'offrent respectivement les foncteurs Tor et Ext s'avère foncièrement différente de celles originellement mises de l'avant par Eilenberg et Mac Lane, Hochschild ainsi que Chevalley et Eilenberg. Alors que les structures cohomologiques des groupes, des algèbres de Lie et des algèbres associatives apparaissaient totalement différentes les unes des autres, Cartan et Eilenberg montrent qu'elles sont toutes des cas particuliers d'un schème commun. En effet, les structures cohomologiques sont des cas particuliers de foncteurs exacts à gauche obtenus à partir du foncteur Hom. De la même façon, les structures homologiques sont décrites par le foncteur Tor qui est quant à lui un foncteur exact à droite dérivé du produit tensoriel.

Dans *Homological Algebra*, Cartan et Eilenberg reprirent la construction esquissée ci-dessus des foncteurs Tor et Ext d'un point de vue purement homologique. Ils furent alors en mesure de pousser l'idée d'une définition des invariants homologiques et cohomologiques par le biais de foncteurs dérivés beaucoup plus loin. Il en résulta une méthode plus générale — la méthode des résolutions projectives et injectives — s'appliquant à une classe beaucoup plus grande de foncteurs et donc de structures algébriques.

### 2.2.3 L'unification par les foncteurs dérivés

Les théories unifiées de l'homologie et de la cohomologie que présentent *Homological Algebra* reposent sur la notion de foncteur dérivé et la méthode des résolutions injectives et projectives. Ces outils rendent effectivement possible une description abstraite des invariants homologiques, ou cohomologiques selon le cas, associés à

9. Pour le détail, voir Cartan et Eilenberg [1956, p. v–ix].

une structure algébrique donnée. Dieudonné écrit à ce propos : « *The most prominent concepts, which dominate the book and allow a unified presentation of all examples mentioned above, are the projective and injective resolutions and the* derived functors. » [1989*b*, p. 147]

À l'instar des foncteurs Tor et Ext, les foncteurs dérivés mesurent l'« inexactitude » d'une suite. Cependant, là où les premiers étaient respectivement associés aux foncteurs $\otimes$ et Hom, les foncteurs dérivés peuvent être définis relativement à une classe de foncteurs beaucoup plus vaste. En ce sens, la méthode des résolutions injectives et projectives généralise l'idée qui sous-tend la construction des foncteurs Tor et Ext.

> *The point of departure was the discovery that the process of deriving the torsion product could be generalized so as to apply to a wide class of functors. In particular, the process could be iterated and thus a sequence of functors could be obtained from a single functor. It was then observed that the resulting sequence possessed the formal properties usually encountered in homology theory*. [Cartan et Eilenberg 1956, p. v]

Cartan et Eilenberg considèrent des foncteurs $\mathbf{Mod}_\Lambda \to \mathbf{AbGrp}$ de la catégorie des $\Lambda$-modules vers la catégorie des groupes abéliens où $\Lambda$ est un anneau. Plus spécifiquement, ils se concentrent sur une classe de foncteurs particuliers : les foncteurs additifs. Soient $\varphi_1, \varphi_2 \colon A \to A'$ et $\psi_1, \psi_2 \colon C' \to C$ des homomorphismes de modules. Un foncteur $T$ est *additif* si

$$T(\varphi_1 + \varphi_2, C) = T(\varphi_1, C) + T(\varphi_2, C)$$
$$T(A, \psi_1 + \psi_2) = T(A, \psi_1) + T(A, \psi_2)$$

La propriété d'additivité garantit que les homomorphismes de modules pourront être additionnés : « *We only consider functors which satisfy an addivity property reflecting the fact that homomorphisms of modules can be added*. » [Cartan et Eilenberg 1956, p. 18] À ce sujet, Cartan et Eilenberg travaillent avec des foncteurs binaires, mais insistent que leur méthode s'applique également à des foncteurs d'un nombre arbitraire de variables.

D'un point de vue homologique, une des plus importantes propriétés est la préservation des suites exactes. Un foncteur disposant de cette propriété transforme une suite exacte en une autre suite exacte et est dit exact. Formellement, un foncteur $T(A, C)$ covariant en $A$ et contravariant en $C$ est *exact* si pour toutes suites exactes

$$A' \to A \to A'' \qquad C' \to C \to C''$$

les suites

$$T(A', C) \to T(A, C) \to T(A'', C) \qquad T(A, C'') \to T(A, C) \to T(A, C')$$

obtenues par l'application du foncteur sont exactes.

Tous les foncteurs ne sont évidemment pas exacts. Certains ne le sont que partiellement. Soient

$$0 \to A' \to A \to A'' \to 0 \qquad 0 \to C' \to C \to C'' \to 0$$

des suites exactes courtes. Le foncteur $T(A, C)$ est *exact à droite* si les suites

$$T(A', C) \to T(A, C) \to T(A'', C) \to 0 \qquad T(A, C'') \to T(A, C) \to T(A, C') \to 0$$

sont exactes. $T(A, C)$ est plutôt *exact à gauche* si les suites

$$0 \to T(A', C) \to T(A, C) \to T(A'', C) \qquad 0 \to T(A, C'') \to T(A, C) \to T(A, C')$$

sont exactes.

Tel que mentionné précédemment, les foncteurs dérivés permettent de mesurer l'« inexactitude » d'un foncteur partiellement exact. L'idée est la suivante. Soit, par exemple, la suite exacte

$$0 \to T(A', C) \to T(A, C) \to T(A'', C)$$

obtenue par un foncteur exact à gauche $T$. Une telle suite peut être prolongée à droite par des foncteurs $\mathfrak{T}^i$ de manière à donner lieu à une suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \to T(A', C) \to T(A, C) \to T(A'', C) \to \\ \mathfrak{T}^1(A', C) \to \mathfrak{T}^1(A, C) \to \mathfrak{T}^1(A'', C) \to \mathfrak{T}^2(A', C) \to \dots \end{aligned}$$

Le foncteur $T$ est plus ou moins inexact selon que $\mathfrak{T}^i(A'C) = 0$ ou $\mathfrak{T}^2(A', C) = 0$, etc. En particulier, si $\mathfrak{T}^1(A', C) = 0$, alors le foncteur $T$ est carrément exact.

Les foncteurs dérivés se construisent par la méthode des résolutions projectives et injectives. À la base des notions de résolution projective et de résolution injective se trouvent celles de modules projectif et injectif qui généralisent les modules libres.

Un module à gauche $P$ est *projectif* si, pour tout homomorphisme $f\colon P \to A''$ et tout épimorphisme $g\colon A \to A''$, il existe un homomorphisme $h\colon P \to A$ tel que $f = gh$, c'est-à-dire tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d, "g"] \\ P \arrow[ur, dashed, "h"] \arrow[r, "f"'] & A'' \end{tikzcd}$$

Soit $A$ un module. Une *résolution projective* de $A$ est une suite exacte

$$\cdots \to X_n \to X_{n-1} \to \cdots \to X_0 \to A \to 0$$

et un complexe $X$ constitué par des modules projectifs $X_i$, $i = 0, 1, 2 \ldots$.

Similairement, un module à droite $Q$ est *injectif* si, pour tout module $A$, étant donné un sous-module $A'$ et un homomorphisme $A' \to Q$, il existe un homomorphisme $A \to Q$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
Q & \\
A' \arrow[u] \arrow[r] & A \arrow[ul, dashed]
\end{tikzcd}$$

Une résolution *injective* est une suite exacte

$$0 \to A \to X^0 \to X^1 \to \cdots \to X^n \to \ldots$$

et un complexe $X$ constitué par des modules injectifs $X^i$, $i = 0, 1, 2 \ldots$.

Cartan et Eilenberg montrent que tout module possède une résolution projective. Donc, pour tout module $A$, il existe une suite exacte

$$\cdots \to X_n \to X_{n-1} \to \cdots \to X_0 \to A \to 0$$

telle que tous les modules $X_i$ sont projectifs. La démonstration est une conséquence du fait que tout module est un quotient d'un module projectif. Ils démontrent également que tout module possède une résolution injective, c'est-à-dire que pour tout module $A$, il existe une suite exacte

$$0 \to A \to \cdots \to X^0 \to X^1 \to \cdots \to X^{n-1} \to X^n \to \ldots$$

La démonstration repose sur l'observation que tout module est un sous-module d'un module injectif[10].

Soit $T(A, C)$ un foncteur additif covariant en $A$ et contravariant en $C$. Soient également $X$ une résolution injective de $A$ et $Y$ une résolution projective de $C$. Dans ce cas, $T(X, Y)$ est un complexe de chaînes sur $T(A, C)$. Ce complexe induit un foncteur additif $RT(A, C) = \sum R^n T$ covariant en $A$ et contravariant en $C$ qui est indépendant du choix des résolutions. Cartan et Eilenberg définissent le $n^e$ *foncteur dérivé à droite de* $T$ comme étant la $n^e$ composante $R^n T(A, C)$ du foncteur $RT$.

Dualement, si $X$ est une résolution projective de $A$ et $Y$ est une résolution injective de $C$, Cartan et Eilenberg construisent un foncteur $LT = \sum L_n T$. Le $n^e$ *foncteur dérivé à gauche de* $T$ est la $n^e$ composante du foncteur $LT$.

Ainsi, un foncteur dérivé à droite mesure l'inexactitude d'un foncteur exact à gauche. Réciproquement, un foncteur dérivé à gauche mesure l'inexactitude d'un

10. Pour plus de détails, voir Cartan et Eilenberg [1956, p. 77–78, p. 7 et p. 9].

foncteur exact à droite. Par exemple, $\mathrm{Tor}_n^\Lambda$ est le foncteur dérivé à gauche du foncteur $\otimes_\Lambda$ alors que $\mathrm{Ext}_\Lambda^n$ est le foncteur dérivé à droite du foncteur $\mathrm{Hom}_\Lambda$.

Les foncteurs dérivés sont fondamentalement liés à l'homologie puisque les groupes d'homologie et de cohomologie se définissent par leur entremise. Premièrement, il existe des homomorphismes entre les foncteurs dérivés. Ces homomorphismes permettent de construire des suites exactes.

Soient $T(A, C)$ un foncteur covariant en $A$ et contravariant en $C$,

$$0 \to A' \to A \to A'' \to 0$$

une suite exacte,

$$0 \to X' \to X \to X'' \to 0$$

une résolution projective de cette suite [11] et $Y$ une résolution injective de $C$. Alors, la suite de complexes

$$0 \to T(X', Y) \to T(X, Y) \to T(X'', Y) \to 0$$

est exacte. Les homomorphismes connectants $H^n(T(X'', Y)) \to H^{n+1}(T(X', Y))$ induisent des homomorphismes $R^nT(A'', C) \to R^{n+1}T(A', C)$ entre les foncteurs dérivés correspondants.

De plus, par le même raisonnement, toute suite exacte

$$0 \to C' \to C \to C'' \to 0$$

induit des homomorphismes connectants $R^nT(A, C') \to R^{n+1}T(A, C'')$.

Par conséquent, pour toutes suites exactes

$$0 \to A' \to A \to A'' \to 0$$
$$0 \to C' \to C \to C'' \to 0$$

il existe des suites exactes de cohomologie de foncteurs dérivés à droite

$$\cdots \to R^nT(A', C) \to R^nT(A, C) \to R^nT(A'', C) \to R^{n+1}(A', C) \to \cdots$$
$$\cdots \to R^nT(A, C'') \to R^nT(A, C) \to R^nT(A, C') \to R^{n+1}(A', C'') \to \cdots$$

Un raisonnement analogue démontre l'existence de suites exactes d'homologie de foncteurs dérivés à gauche.

L'unification des différentes théories homologiques et cohomologiques se fait par l'entremise des anneaux augmentés. Cartan et Eilenberg utilisent les foncteurs dérivés pour décrire l'homologie et la cohomologie des anneaux augmentés. Par définition, un *anneau augmenté à gauche* est un triplet $\langle \Lambda, Q, \varepsilon \rangle$ où $\Lambda$ est un anneau, $Q$ est un $\Lambda$-module à gauche et $\varepsilon \colon \Lambda \to Q$ est un épimorphisme.

11. En fait, Cartan et Eilenberg [1956, p. 79] montrent que si $X$, $X'$ et $X''$ sont des résolutions projectives de $A$, $A'$ et $A''$ respectivement, alors la suite $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$ est une résolution projective de $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$.

Soient $\langle \Lambda, Q, \varepsilon \rangle$ un anneau augmenté à gauche, $A$ un $\Lambda$-module à droite et $C$ un $\Lambda$-module à gauche [12]. Soient des foncteurs $T(A)$ et $U(C)$. Soient également $X$ une résolution projective de $A$ et $Y$ une résolution injective de $C$ [13]. Alors, le $n^{\text{e}}$ groupe d'homologie de l'anneau augmenté $\Lambda$ à coefficients dans $A$ est donné par le $n^{\text{e}}$ foncteur dérivé à gauche $L_nT(A, Q)$. Le $n^{\text{e}}$ groupe de cohomologie de l'anneau augmenté $\Lambda$ à coefficients dans $C$ correspond quant à lui au $n^{\text{e}}$ foncteur dérivé à droite $R^nT(A, Q)$ :

$$H_n(T(X)) = L_nT(A, Q) \qquad H^n(U(Y)) = R^nT(A, Q)$$

En particulier, les groupes d'homologie et de cohomologie des groupes, des algèbres de Lie et des algèbres associatives correspondent aux foncteurs dérivés des foncteurs $\otimes$ et Hom. Ainsi, si $T(A) = A \otimes_\Lambda Q$ et $U(C) = \mathrm{Hom}_\Lambda(Q, C)$, les groupes d'homologie et de cohomologie sont respectivement donnés par les foncteurs Tor et Ext :

$$H_n(X \otimes_\Lambda Q) = \mathrm{Tor}_n^\Lambda(A, Q) \qquad H^n(\mathrm{Hom}_\Lambda^n(Q, Y)) = \mathrm{Ext}_\Lambda^n\, T(A, Q)$$

Dans les chapitres IX, X et XIII de *Homological Algebra*, Cartan et Eilenberg appliquent cette identification des groupes d'homologie et de cohomologie aux foncteurs Tor et Ext pour décrire par des méthodes purement homologiques les invariants des groupes, algèbres de Lie et algèbres associatives. En conséquence, il est désormais clair que ces groupes d'homologie et de cohomologie ne sont que des cas particuliers de foncteurs dérivés. Mac Lane écrivit à ce propos :

> *In this book the homology of groups appears as a special case of the homology of monoids (monoid = associative multiplicative system with identity), which in turn is a special case of the homology of supplemented algebras, again a case of the homology of augmented algebras, which is an instance of a torsion product, which (...) is an instance of a derived functor (...)* [1956, p. 622]

### 2.2.4 Le nouveau statut des groupes de cohomologie

*Homological Algebra* conféra un nouveau statut aux groupes d'homologie et de cohomologie. Traditionnellement, un groupe était conçu comme un ensemble de points muni d'une opération respectant certaines contraintes : associativité, existence d'un élément neutre et existence d'un inverse. Un groupe d'homologie était donc tout simplement un ensemble de points possédant une structure algébrique donnée ayant la particularité de décrire un aspect d'un espace topologique. Cartan et Eilenberg définissent plutôt ces groupes comme des foncteurs dérivés, c'est-à-dire comme un type particulier de foncteur.

12. Les anneaux augmentés à droite sont traités de manière similaire.
13. Le calcul des groupes d'homologie et de cohomologie peut également se faire à l'aide d'une résolution projective de $Q$.

De par ce nouveau statut épistémologique, le concept acquiert une portée inédite. Comme le souligne Krömer, la méthode des résolutions injectives et projectives met en lumière que l'existence d'un complexe de chaînes est une condition suffisante pour définir des groupes d'homologie et de cohomologie :

> *The homological algebra of Cartan and Eilenberg rests on the insight that one can speak about (co)homology whenever there is a module with an endomorphism D with $dd = 0$, no matter whether this endomorphism has been obtained by a topological calculation (as it is the case in algebraic topology) or not*. [2007, p. 98]

Cette observation ouvrit la porte à l'application de ces mêmes méthodes dans des contextes autres que la topologie algébrique.

De plus, le nouveau statut des groupes d'homologie et de cohomologie associés à des structures algébriques eut des conséquences profondes pour la théorie de l'homologie elle-même.

Premièrement et tel que mentionné précédemment, *Homological Algebra* adopte un point de vue similaire à *Foundations of Algebraic Topology* en ce que, là où Eilenberg et Steenrod montrèrent que les différentes théories de l'homologie disponibles pour caractériser des espaces ne sont que des cas particuliers d'une même théorie générale, Cartan et Eilenberg montrent que les théories homologiques et cohomologiques développées pour les groupes, les algèbres de Lie et les algèbres associatives sont trois cas particuliers d'une même théorie.

Cartan et Eilenberg unifient donc les théories de l'homologie et de la cohomologie en algèbre. Il en résulte une simplification technique et conceptuelle. Les particularités propres aux groupes, aux algèbres de Lie et aux algèbres associatives que laissaient entrevoir trois théories disparates disparaissent au profit de ce qu'elles ont en commun. Le traitement des différents cas se ramène à un seul, c'est-à-dire que le cas général subsume les différents cas particuliers. Comme le soulignent Cartan et Eilenberg dans la préface, « *This unification possesses all the usual advantages. One proof replaces three*. » [1956, p. v]

Deuxièmement, l'unification qu'accomplit *Homological Algebra* est rendue possible par le cadre catégorique adopté par Cartan et Eilenberg. En effet, la théorie des catégories, principalement par l'entremise des notions de morphisme et de foncteur, joue un rôle dans l'organisation des concepts homologiques et dans la présentation des théories homologiques associées à des structures algébriques. Ainsi, le recours aux foncteurs Tor et Ext met en lumière le schème commun aux théories développées dans le courant des années 1940 par Eilenberg et Mac Lane, Hochschild, Chevalley, etc. Plus généralement, les foncteurs dérivés permettent de définir abstraitement les invariants homologiques d'une structure algébrique.

La théorie des catégories rendit cette avancée possible puisqu'elle constituait à l'époque le seul langage suffisamment souple pour isoler dans toute sa généralité ce qu'est fondamentalement une théorie de l'homologie et de la cohomologie. Comme le démontre Marquis, Cartan et Eilenberg, mais aussi Eilenberg et Steenrod, utilisent la théorie des catégories comme un langage.

> *Both in Eilenberg and Steenrod's and in Cartan and Eilenberg's pioneering works in the foundations of algebraic topology and homological algebra, there is no categorical concept at work or which can be said to capture essential ingredients of the situation.* (...) *Thus* (...) *categories are: (1) heuristically useful to facilitate the statement of certain theorems, and (2) methodologically useful, for they provide certain constraints that help in finding proper definitions and the correct context for certain ideas and proofs. It is in this sense that category theory is merely a language* (...) [2009, p. 72]

Grâce à la notion de foncteur dérivé, le langage des catégories permet de découvrir et de synthétiser ce qui est commun à toutes les théories particulières et de formuler explicitement une théorie unifiée.

Troisièmement, en tant que branche des mathématiques, l'algèbre homologique met en relation la topologie algébrique et l'algèbre. D'une part, l'algèbre homologique marque un transfert de la topologie algébrique vers l'algèbre puisque, tel que mentionné au tout début de cette section, les méthodes développées en topologie algébrique pour caractériser les invariants homologiques d'un espace furent progressivement importées en algèbre à partir des années 1940. L'algèbre homologique vient formaliser l'utilisation de telles méthodes et des concepts topologiques leur étant associés dans un contexte algébrique. D'autre part, l'algèbre homologique enrichit en retour la topologie algébrique. En effet, les groupes d'homologie et de cohomologie correspondent aux groupes d'homologie et de cohomologie de certaines structures algébriques. L'étude de ces derniers contribue donc à celle des premiers. L'algèbre homologique prend ici la forme d'un complément conceptuel et méthodologique venant se greffer à la topologie algébrique puisque l'étude des espaces au moyen des outils homologiques traditionnels est enrichie par ce que révèle l'application de ces mêmes outils en algèbre.

Dans la perspective de l'évolution du concept d'espace topologique, et sans aucunement vouloir diminuer son importance, l'algèbre homologique n'en demeure pas moins une microfracture. En effet, la méthode des résolutions projectives et injectives telle que développée dans *Homological Algebra*, et donc l'appréhension des groupes d'homologie et de cohomologique en tant que foncteurs dérivés, n'avait pas été conçue pour traiter les espaces topologiques. McLarty exprime on ne peut plus clairement le fait que les théories de la cohomologie des espaces et des structures algébriques étaient engagées sur deux voies différentes :

> [*Cartan and Eilenberg*] *could treat the cohomology of several different algebraic structures: groups, Lie algebras, associative algebras. These all rest on injective resolutions. They could not include topological spaces, the source of the whole, and still one of the main motives for pursuing other cohomologies. Topological cohomologies rested on the completely different apparatus of fine resolutions* (...) [2007, p. 307]

L'algèbre homologique permettait évidemment d'en apprendre un peu plus sur les espaces topologiques en raison du pont établi entre la topologie algébrique et l'algèbre, mais son objectif premier n'était pas de caractériser les invariants homologiques d'un espace topologique.

En conséquence, même en supposant que les groupes d'homologie et de cohomologie associés à un espace topologique puissent être définis comme des foncteurs dérivés au même titre que les groupes associés à des structures algébriques — par une éventuelle synthèse des méthodes des résolutions projectives et des résolutions fines par exemple —, le concept d'espace topologique ne serait pas altéré ; un espace topologique est toujours un ensemble muni d'une structure déterminée par ses parties. L'étude homologique de tels espaces aurait certes été modifiée, mais elle n'en aurait pas moins toujours porté sur des espaces topologiques au sens traditionnel.

## 2.3 La théorie des faisceaux

La troisième microfracture est la théorie des faisceaux. L'importance conceptuelle de la théorie des faisceaux tient à ce qu'elle fournit un outil pour encoder et comprendre le passage du local au global : « (...) *sheaf theory is a part of geometry; namely that part concerned with the passage from local properties to global properties.* » [J. W. Gray 1979, p. 1] La notion de faisceau renvoie donc à une dichotomie fondamentale dans l'étude des espaces et inhérente au concept d'espace topologique. Pour ne donner qu'une indication simple, un phénomène topologique sera global lorsque relatif à l'espace lui-même, mais local lorsque confiné à une partie de celui-ci. Par exemple, l'analyse distingue les suprema globaux et locaux [14].

La théorie des faisceaux a ses racines en topologie algébrique de même qu'en analyse complexe. [J. W. Gray 1979, p. 2–3] D'une part, l'histoire des mathématiques en attribue — à juste titre, il va sans dire — la création à Jean Leray qui formula les premières définitions de la notion de faisceau et amorça l'étude de la cohomologie à coefficients dans un faisceau. D'autre part, quelque temps plus tard, Cartan transforma profondément la théorie des faisceaux sous l'influence de l'analyse complexe. En effet, il constata une ressemblance entre la notion de faisceau telle que définie par Leray et celle de germe d'une fonction holomorphe. L'influence de l'analyse complexe vint donc s'ajouter à celle, originelle, de la topologie algébrique.

La présente section retrace les grandes étapes de la théorie des faisceaux depuis ses débuts jusqu'au milieu des années 1950, soit avant les travaux de Grothendieck sur le sujet [15]. Les recherches de Leray, Cartan et Serre seront ainsi successivement examinées. Comme pour chacune des sections de ce chapitre, l'objectif n'est pas de faire une histoire de la théorie des faisceaux, mais bien de mettre en évidence la rupture partielle qu'elle marqua dans l'étude des espaces.

14. Pour une étude détaillée du couple local/global et de son évolution, voir Chorlay [2007].
15. La contribution de Grothendieck à la théorie des faisceaux sera abordée à la section 3.1.3.2.

### 2.3.1 Leray : la notion de faisceau

Les circonstances entourant l'apparition du concept de faisceau et les premiers développements de la théorie sont désormais célèbres : prisonnier de guerre de 1940 à 1945 dans le camp autrichien d'Oflag XVII, Leray décida d'y organiser une université de captivité. Il choisit toutefois de donner un cours en topologie algébrique plutôt qu'en hydrodynamique – sa spécialité — de crainte que de voir ses compétences exploitées par les Allemands. [Houzel 1998, p. 102]

Dans la mesure où elle la généralise, la théorie des faisceaux telle que conçue par Leray s'inscrit dans la continuité de la cohomologie à coefficients locaux élaborée par Steenrod au début des années 1940 pour les espaces localement simplement connexes [16]. En contrepartie, la motivation sous-jacente à la théorie des faisceaux allait bien au-delà de ce lien dont Leray était d'ailleurs pleinement conscient comme l'indique la référence à Steenrod dans une note aux *Comptes rendus des séances hebdomadaires de l'Académie des sciences* de 1946 [17]. En effet, Leray voulait construire la théorie de l'homologie d'une nouvelle façon.

#### 2.3.1.1 Le projet d'une reconstruction de la topologie algébrique

L'objet du cours de captivité de Leray [Leray 1945*a*,*b*,*c*] était l'application de la théorie de l'homologie à la théorie des équations. Pour ce, Leray entreprit ce que Houzel qualifie de reconstruction de la topologie algébrique [1998, p. 102] et proposa de soulager la topologie algébrique des hypothèses inutiles et des constructions intermédiaires qui caractérisaient l'association d'invariants homologiques à un espace topologique.

> Mon dessein initial fut d'imaginer une théorie des équations et des transformations s'appliquant directement aux espaces topologiques. J'ai dû recourir à des procédés nouveaux, renoncer aux procédés classiques, et il m'est impossible d'exposer cette théorie des équations et des transformations, sans, d'une part, donner une nouvelle définition de l'anneau d'homologie et, d'autre part, adapter les raisonnements cités de M. Hopf à des hypothèses plus générales que les siennes. [Leray 1945*a*, p. 97]

Dans les faits, l'intention de Leray était d'éliminer, dans le processus de construction des invariants homologiques d'un espace topologique, l'étape consistant à le représenter géométriquement par le biais d'une triangulation, d'un complexe singulier, etc. Bref, il cherchait à associer directement le formalisme algébrique de l'homologie à l'espace. Il écrit à cet égard dans l'introduction de l'article de 1945 :

> Par contre, je n'effectuerai aucune subdivision de complexes, je ne ferai aucune hypothèse d'orientabilité et je n'emploierai aucune approximation simpliciale : je ne supposerai jamais l'espace localement linéaire. Quand j'ai besoin de particulariser l'espace, j'énonce des hypothèses concernant seulement les propriétés

16. Voir Dieudonné [1989*b*, p. 120].
17. Voir Leray [1946*a*, p. 1367].

> de ses représentations en lui-même (...) je crois superflu, donc nuisible, d'introduire les groupes de Betti d'un espace topologique : le $p^e$ groupe de Betti n'a d'autre propriété que d'être le groupe des caractères du groupe que constituent les classes d'homologie de dimension $p$. [1945*a*, p. 98]

La reconstruction de Leray s'appuie sur deux changements majeurs. Premièrement, Leray détourne son attention de l'homologie pour se concentrer sur la théorie duale, c'est-à-dire la cohomologie [18]. À l'origine de cette transition se trouvent deux constats. Tout d'abord, la dualité unissant l'homologie et la cohomologie rend redondante l'étude simultanée des deux théories. Il est parfaitement suffisant d'étudier la cohomologie et de déduire l'homologie par dualité. De plus, la cohomologie d'un espace à coefficients dans un anneau présente l'avantage de toujours disposer d'une structure multiplicative et, dans le cas des variétés compactes orientables, la dualité de Poincaré permet de déduire la structure multiplicative de l'homologie de celle de la cohomologie. [Houzel 1998, p. 102]

Le second changement à la base de la reconstruction de la topologique algébrique est le remplacement de la notion de recouvrement de la topologie générale par celle de couverture, celle-ci étant mieux adaptée à la topologie algébrique.

> Jusqu'à présent la théorie de l'homologie a étudié la forme d'un espace topologique en analysant les propriétés de ses recouvrements par un nombre fini d'ensembles fermés ; nous allons effectuer cette étude en analysant les propriétés des couvertures de l'espace ; nous y gagnons de substituer à une notion de topologie ensembliste une notion bien plus maniable de topologie algébrique. [Leray 1945*a*, p. 108]

Pour bien comprendre ce qu'est une couverture, il faut d'abord introduire les notions de complexe abstrait et de complexe concret.

**Définition 2.3.1.1** (Leray 1945*a*)**.** Un *complexe abstrait* $C$ est la donnée de

(1) un nombre fini de variables indépendantes $X^{p,\alpha}$, nommées éléments, où $p$ désigne la dimension de $X^{p,\alpha}$ ;

(2) une loi de dérivation qui, à chaque $X^{p,\alpha}$, associe une combinaison linéaire

$$\dot{X}^{p,\alpha} = \sum_{\beta} C \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} X^{p+1,\beta}$$

des $X^{p+1,\beta}$ à coefficients $C[\alpha, \beta, \gamma]^t$ entiers, sa dérivée, telle que la dérivée seconde est nulle.

---

18. Leray mentionne pour la première fois qu'il utilise le terme « homologie » pour désigner la cohomologie dans sa quatrième note de 1946 dans les *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences* : « Nous nommons *classe d'homologie* ce que la plupart des auteurs nomment *classe de cohomologie.* » Leray [1946*c*, p. 413, n. 4] Les textes suivants seront plus clairs quant à ce changement puisque leurs introductions contiendront toutes une note similaire à la suivante « N'ayant pas à parler d'homologie, mais exclusivement de cohomologie, je dirai constamment homologie quand l'usage est de dire cohomologie. » [Leray 1949, p. 61].

La cohomologie des complexes abstraits se résume comme suit. Soient $C$ un complexe abstrait et $A$ un groupe de coefficients qui est soit l'anneau des entiers, l'anneau des entiers modulo $m$ ou le corps des nombres rationnels. Une *forme à $p$ dimensions* est une combinaison linéaire $L^p = \sum_\alpha A_\alpha X^{p,\alpha}$ des éléments à $p$ dimensions du complexe $C$ à coefficients dans $A$. Un *cycle* est une forme de dérivée nulle. Deux formes à $p$ dimensions sont *cohomologues* si leur différence est la dérivée d'une forme de $C$. En utilisant ces notions, le $p^{\text{e}}$ groupe de cohomologie de $C$ se définit comme le quotient du groupe des cycles par le groupe des cycles homologues à zéro.

Au lieu de représenter géométriquement un espace donné par une triangulation ou un complexe simplicial, Leray part d'un complexe abstrait. Il associe ensuite ce complexe abstrait à un espace par le biais d'un complexe concret. Intuitivement, un complexe abstrait est rendu concret en associant à chacun de ses éléments un support, c'est-à-dire un sous-ensemble non vide d'un espace topologique. Formellement,

**Définition 2.3.1.2** (Leray 1945*a*)**.** Un *complexe concret* $C$ est la donnée de

(1) un complexe abstrait, appelé le complexe abstrait de $C$ ;

(2) un espace $|C|$, appelé le support de $C$ ;

(3) une loi $C \to |C|$ qui associe à chaque élément $X^{p,\alpha}$ du complexe abstrait de $C$ son support $|X^{p,\alpha}|$ telle que

  (a) Si $X^{q,\beta} \in \overline{X}^{p,\alpha}$, alors $|X^{q,\beta}| \in |X^{p,\alpha}|$ ;

  (b) $|C| = \sum_{p,\alpha} |X^{p,\alpha}|$.

Quelques opérations sont ensuite définies sur les complexes concrets, deux desquelles interviennent directement dans la définition de la notion de couverture. La première est l'intersection d'un complexe concret et d'un ensemble de points. Soient $C$ un complexe concret dont les éléments sont $X^{p,\alpha}$ et $E'$ un sous-ensemble de $E$. L'*intersection* $C \cap E'$ a pour éléments $X^{p,\alpha} \cap E'$ et est le sous-complexe concret du complexe abstrait de $C$ défini par la loi $|X^{p,\alpha} \cap E'| = |X^{p,\alpha}| \cap E'$. Cette opération exprime le passage d'une propriété locale à une propriété globale. La seconde est l'intersection de deux complexes concrets. Soient $C$ et $C'$ deux complexes concrets ayant pour éléments $X^{p,\alpha}$ et $X'^{q,\beta}$ respectivement. L'*intersection* $C \cap C'$ est le sous-complexe concret du produit $C \times C'$ des complexes abstraits $C$ et $C'$. Les éléments de $C \cap C'$ sont $X^{p,\alpha} \cap X'^{q,\beta} = (-1)^{pq} X'^{q,\beta} \cap X^{p,\alpha}$. Le support d'un élément de $C \cap C'$ est $|X^{p,\alpha} \cap X'^{q,\beta}| = |X^{p,\alpha}| \cap |X'^{q,\beta}|$.

**Définition 2.3.1.3** (Leray 1945*a*)**.** Soit $E$ un espace topologique. Une *couverture* de $E$ est un complexe concret $K$ tel que

(1) le support $|X^{p,\alpha}|$ de chaque élément de $K$ est un ensemble fermé de points de $E$ ;

(2) l'intersection de $K$ par tout point de $E$ est un simplexe ;

(3) la somme $K^0 = \sum_\beta X^{0,\beta}$ des éléments à 0 dimension de $K$ est un cycle, le cycle unité de $K$.

La cohomologie d'un espace topologique se définit par le biais de celle de ses couvertures. Soient $E$ un espace topologique et $A$ un groupe de coefficients qui, encore une fois, est soit l'anneau des entiers, l'anneau des entiers modulo $m$ ou le corps des nombres rationnels. Une *forme* de $E$ est une forme $L^p$ d'une couverture $K$ de $E$ à coefficients dans $A$. Un *cycle* de l'espace $E$ est une forme dont la dérivée est nulle. Deux formes sont *cohomologues* si leur différence est la dérivée d'une forme de $E$. La relation de cohomologie étant une relation d'équivalence, l'addition et l'intersection des classes de cohomologie de $E$ permettent de définir son anneau de cohomologie [19].

À ce moment, Leray annonce que ces notions feront l'objet d'une analyse plus détaillée dans un article à venir. Le concept de faisceau est donc totalement absent de l'article de 1945, l'emphase étant plutôt mise sur les couvertures. Gray écrit à ce propos : « *The original fundamental idea was that of a module (or ring, or algebra, etc.) equipped with a support function taking values in the closed subsets of a topological space, and satisfying suitable properties*. » [1979, p. 4] L'importance de la cohomologie des couvertures tint à ce qu'elle servit de modèle à la cohomologie des faisceaux.

#### 2.3.1.2 La cohomologie des faisceaux

Les faisceaux firent leur apparition dans une brève note de 1946 dans les *Comptes rendus des séances hebdomadaires de l'Académie des sciences* intitulée « L'anneau d'homologie d'une représentation » [Leray 1946*a*]. Leray poursuit dans cette note son projet de reconstruction de la topologie algébrique. Son objectif est d'associer une théorie cohomologique, non pas à un espace topologique, mais plutôt à une représentation, c'est-à-dire à une application entre deux espaces topologiques : « Nous nous proposons d'indiquer sommairement comment les méthodes par lesquelles nous avons étudié la topologie d'un espace peuvent être adaptées à l'étude de la topologie d'une représentation. » [Leray 1946*a*, p. 1366]

Leray procède en deux étapes. Dans un premier temps, il présente la cohomologie d'un espace à coefficients dans un faisceau.

**Définition 2.3.1.4** (Leray 1946*a*)**.** Un *faisceau* $\mathcal{B}$ de modules [20] sur un espace topologique $E$ est la donnée de

(1) pour tout ensemble fermé $F \subset E$, un anneau $\mathcal{B}_F$ tel que $\mathcal{B}_\emptyset = 0$ ;

(2) pour tout sous-ensembles fermés $F_1$ et $F_2$ de $E$ tels que $F_2 \subset F_1$, un homomorphisme $\mathcal{B}_{F_1} \to \mathcal{B}_{F_2}$ qui, à tout élément $b_{F_1} \in \mathcal{B}_{F_1}$, associe l'intersection $b_{F_1} \cap F_2$ et tel que si $F_3 \subset F_2 \subset F_1$, alors pour tout $b_{F_1} \in \mathcal{B}_{F_1}$, $(b_{F_1} \cap F_2) \cap F_3 = b_{F_1} \cap F_3$.

19. Pour une présentation exhaustive, voir Leray [1945*a*]. Pour une présentation en termes contemporains, voir Dieudonné [1989*b*, p. 115-120].

20. Un faisceau d'anneaux se définit de la même manière.

En particulier, un faisceau $\mathcal{B}$ est *normal* si (1) si $b_F \in \mathcal{B}_F$, alors il existe un voisinage fermé $V$ de $F$ et un élément $b_V \in \mathcal{B}_V$ tel que $b_F = b_V \cap F$ et (2) si $b_F \in \mathcal{B}_F$, $F_2 \subset F_1$ et $b_{F_1} \cap F_2 = 0$, alors il existe un voisinage fermé $v$ de $F_2$ dans $F_1$ tel que $b_{F_1} \cap v = 0$.

Les faisceaux permettent une généralisation de la cohomologie des couvertures. Une *forme* d'un espace topologique $E$ est une combinaison linéaire $\sum_\alpha b_\alpha X^{q,\alpha}$ où les $X^{q,\alpha}$ sont les éléments à $q$ dimensions d'une couverture de $E$ et les $b_\alpha$ sont des éléments de $\mathcal{B}_{|X^{q,\alpha}|}$. La *dérivée* d'une telle forme $\sum_\alpha b_\alpha X^{q,\alpha}$ est $\sum_\alpha b_\alpha \dot{X}^{q,\alpha}$. En supposant que l'espace $E$ et le faisceau $\mathcal{B}$ sont normaux, le $q^e$ *module de cohomologie de l'espace $E$ relativement au faisceau* $\mathcal{B}$ se définit comme le quotient du module des formes à $q$ dimensions dont la dérivée est nulle par le module des dérivées des formes à $q-1$ dimensions.

Le recours aux points et aux voisinages dans les définitions de faisceau et de faisceau normal illustre bien que le concept d'espace auquel se réfère Leray est toujours celui hérité de Hausdorff. Ainsi, si Leray remplace les recouvrements par les couvertures afin de baser la topologie algébrique sur des notions lui étant spécifiques et non importées de la topologie générale, il maintient la conceptualisation de l'espace.

Dans un second temps, Leray considère la cohomologie des représentations fermées, c'est-à-dire des applications préservant les fermés. L'intérêt de ces applications tient à ce qu'elles permettent d'obtenir la cohomologie d'un espace à partir de celle d'un autre espace. Soient $E$ et $E'$ deux espaces topologiques normaux, $\pi\colon E \to E'$ une représentation fermée et $\mathcal{B}$ un faisceau normal de modules sur $E$. $\pi(\mathcal{B})$ est le faisceau de modules sur $E'$ défini comme suit. Premièrement, soit $F'$ un ensemble fermé de $E'$. Le module lui étant associé est $\mathcal{B}_{\pi^{-1}(F')}$. Deuxièmement, pour obtenir l'homomorphisme prescrit par la définition, la seule difficulté est de définir l'intersection dans $\pi(\mathcal{B})$. L'intersection de $F'$ par un élément de $\pi(\mathcal{B})$ est donnée par l'intersection de $\pi^{-1}(F')$ avec l'élément correspondant de $\mathcal{B}$.

Soient $A$ un anneau et $\mathcal{B}^p$ le $p^e$ faisceau de cohomologie de $E$ relatif à $A$. Leray propose d'appeler $(p,q)^e$ *module de cohomologie de $\pi$ relatif à $A$* le $q^e$ faisceau de cohomologie de $E'$ relatif à $\pi(\mathcal{B}^p)$. De la même façon, la *classe de cohomologie à $(p,q)$ dimensions de* $\Pi$ *relative à $A$* est une classe de cohomologie $Z^{p,q}$ à $q$ dimensions de $E'$ relative à $\pi(\mathcal{B}^p)$. Ces classes forment l'anneau de cohomologie de la représentation $\pi$.

Dans la seconde note de 1946 aux *Comptes rendus des séances hebdomadaires de l'Académie des sciences* [Leray 1946*b*], l'analyse de cet anneau de cohomologie repose sur la notion inédite de suite spectrale [21]. Elle permet à Leray d'expliciter la relation entre la cohomologie d'une représentation fermée $\pi\colon E \to E'$ et celles des espaces $E$ et $E'$ [22].

21. La notion de suite spectrale fut découverte indépendamment par Lyndon à la même époque. Voir Mac Lane [1956, p. 620].
22. Voir Leray [1946*b*] ou Dieudonné [1989*b*, p. 132–141].

Dans les années suivantes, Leray publia d'autres travaux sur la théorie des faisceaux, les plus importants étant le cours de l'hiver 1947–1948 sous le titre « L'homologie filtrée » dans les actes du XII Colloque international de topologie algébrique [Leray 1949] et « L'Anneau spectral et l'anneau filtré d'homologie d'un espace localement compact et d'une application continue » qui parut en 1950 dans le *Journal de mathématiques pures et appliquées* [Leray 1950]. Ces articles contiennent peu de nouveaux développements, mais plutôt un raffinement des idées déjà présentes dans les textes de 1945 et 1946. [J. W. Gray 1979, p. 6] À titre d'exemple, dès 1947, Koszul parvint à clarifier la structure algébrique de l'anneau d'homologie d'une représentation, c'est-à-dire l'idée générale de suite spectrale, en montrant qu'elle correspond à celle d'un anneau différentiel [23]. Leray adopta ce point de vue. Cela dit, les principaux changements relèvent de la terminologie et de la notation. Pour ne donner que deux exemples, les faisceaux sont notés $\mathcal{B}(F)$ au lieu de $\mathcal{B}_F$ et un faisceau normal est dit continu.

Avec le recul, la théorie des faisceaux telle qu'elle se présente chez Leray marque deux changements importants pour le développement subséquent de la topologie algébrique et la transition vers la géométrie algébrique. Premièrement, de l'homologie, le focus se déplaça vers la cohomologie. Deuxièmement, et ce point est crucial, l'étude de la cohomologie des représentations fermées suggéra que la topologie d'un espace donné pouvait être étudiée par le biais des applications le liant à d'autres espaces.

### 2.3.2 Cartan ou la cohomologie des faisceaux

Il fut question dans l'introduction de la présente section des deux sources de la théorie des faisceaux, à savoir la topologie algébrique et l'analyse complexe. Si la première était déjà bien présente dans les recherches de Leray, la seconde se manifesta pour la première fois dans les travaux de Cartan. En effet, entre 1947 et 1953, Cartan reformula la théorie des faisceaux telle qu'elle se présentait en topologie algébrique et l'appliqua aux espaces analytiques. À cet égard, quoique distincts, la reformulation de la théorie des faisceaux et son application à l'analyse complexe ne formèrent pas deux processus successifs, mais bien simultanés. Pour cette raison, il importe tout d'abord de clarifier la séquence historique des contributions de Cartan [24].

Cartan traita de la théorie des faisceaux pour la première fois dans le cadre d'un colloque de topologie algébrique à Paris en 1947 auquel participa également Leray. Les actes du colloque, publiés en 1949, contiennent toutefois une version remaniée de la conférence. Cartan écrit à cet égard :

> Les idées que j'avais exposées en 1947, sous ce titre, dans une conférence au Colloque international de Topologie algébrique, à Paris, ont passablement évolué

23. Voir Koszul [1947] ou Dieudonné [1989*b*, p. 133-138].
24. Cette présentation se base sur les textes de J. W. Gray [1979] et Houzel [1998].

> depuis cette date, sinon dans les principes essentiels, du moins dans la présentation. De plus, leur champ d'applicabilité a été assez notablement étendu. On comprendra que, deux ans plus tard, l'auteur ait préféré ne pas donner à l'impression un texte qui ne correspond plus entièrement à ses vues actuelles ; (...) [1949, p. 1]

Les premières années du Séminaire Cartan furent consacrées à la topologie algébrique et accordèrent une grande place à la théorie des faisceaux. D'ailleurs, tout porte à croire qu'il en fut ainsi dès l'édition inaugurale du séminaire, soit en 1948–1949, puisque cinq exposés y furent consacrés. Ces exposés furent cependant retirés de la version publiée.

En 1950, Cartan publia un article dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* intitulé « Idéaux et modules de fonctions analytiques de variables complexes ». Il y examine le rôle des idéaux de fonctions analytiques à plusieurs variables complexes dans des domaines holomorphes et, à cette fin, redéfinit pour une première fois la notion de faisceau.

Par la suite, les principales étapes du développement de la théorie des faisceaux eurent lieu dans le séminaire. Ainsi, l'année 1950–1951 du Séminaire Cartan fut l'occasion d'une reformulation complète de la théorie. À la base de ces changements se trouve, encore une fois, une nouvelle définition de la notion centrale : d'après une idée de Lazard, un faisceau est défini comme un espace étalé. La théorie des faisceaux permit à Cartan d'obtenir divers résultats en topologie algébrique.

L'année suivante, c'est-à-dire en 1951–1952, le Séminaire Cartan se tourna vers la théorie des espaces analytiques complexes, mais la théorie des faisceaux n'en continua pas moins de jouer un rôle de premier plan par le biais des faisceaux cohérents.

#### 2.3.2.1 Les faisceaux en topologie algébrique

À la suite des premiers textes de la fin des années 1940, la théorie des faisceaux fut complètement reformulée lors du Séminaire Cartan de 1950–1951 [Cartan 1950–1951]. L'exposé 14, le premier à aborder le sujet, annonce ce projet de reformulation comme suit : « Le but de cet exposé et des suivants est de reprendre entièrement la théorie des "faisceaux et carapaces" qui a fait l'objet des exposés 12 à 17 du Séminaire 1948/49. » [1950–1951, p. 14-01]

Cartan commence par définir, d'après une idée de Lazard, un faisceau comme un espace étalé.

**Définition 2.3.2.1** (Cartan 1950–1951)**.** Soient $X$ un espace topologique et $K$ un anneau unitaire commutatif. Un *faisceau de $K$-modules* sur $X$ est un ensemble $F$ muni d'une application $p\colon F \to X$, la projection de $F$ sur $X$, telle que

(1) pour chaque point $x \in X$, $p^{-1}(x) = F_x$ est un $K$-module ;

(2) $F$ est muni d'une topologie (en général non séparée) telle que

(a) les lois de composition de $F$ définies par la structure de $K$-module des $F_x$ sont continues ;

(b) $p$ est un homéomorphisme local, c'est-à-dire tout élément de $F$ possède un voisinage ouvert homéomorphe à un ouvert de $X$.

Intuitivement, un faisceau sur un espace topologique est donc une famille de $K$-modules paramétrée par les points de l'espace. De plus, l'union disjointe de tous les $K$-modules $F_x$ forme un espace topologique qui peut être projeté sur $X$ en envoyant chaque $F_x$ sur $x$ [25].

À prime abord, le rôle des points dans la définition de faisceau peut surprendre. Après tout, la topologie algébrique ne s'inscrivait-elle pas dans un mouvement visant à étudier les espaces sans faire référence à leurs points ? Il faut toutefois comprendre que l'indexation sur laquelle se base la notion d'espace étalé rend inévitable la référence aux points. En effet, une indexation n'est rien d'autre qu'une fonction, c'est-à-dire une relation entre deux ensembles telle qu'à tout point de l'ensemble de départ soit associé un et un seul point de l'ensemble d'arrivée. Bref, les fibres doivent être rattachées aux points de l'espace de base [26].

Une construction importante est le module des sections d'un faisceau $F$ au-dessus d'un ouvert. Soient $X$ un espace topologique et $O$ un ouvert de $X$. Une *section de $F$ au-dessus de $O$* est une application continue $s\colon O \to F$ telle que $p \circ s = \mathrm{id}_O$. L'ensemble des sections de $F$ au-dessus de $O$ forment un $K$-module appelé le *module des sections de $F$ au-dessus de $O$*, noté $\Gamma(F, O)$. De plus, le *support* d'une section $s$ est l'ensemble fermé $\{x \in O \mid s(x) \neq 0\}$.

L'exposé 14 se termine avec la présentation de diverses constructions sur les faisceaux : sous-faisceau, faisceau quotient, homomorphisme de faisceaux, noyau d'un homomorphisme, etc. Par exemple, étant donnés deux faisceaux $F$ et $F'$ sur un espace $X$, un *homomorphisme* de faisceaux $F \to F'$ est une application continue $\varphi\colon F \to F'$ telle que, pour tout $x \in X$, $\varphi|_x\colon F_x \to F'_x$ est un homomorphisme.

Les exposés suivants mettent en place la cohomologie des faisceaux dans sa version renouvelée. Ainsi, l'exposé 15 introduit notamment la notion de famille de supports que Houzel décrit comme « [l]'innovation la plus importante de Cartan ». [Kashiwara et Schapira 1990, p. 13] Soit $X$ un espace topologique. Une *famille $\Phi$ de supports* est une famille de sous-ensembles fermés et paracompacts de $X$ telle que (1) tout sous-ensemble fermé d'un ensemble de $\Phi$ appartient à $\Phi$, (2) $\Phi$ est fermée sous l'union finie et (3) tout ensemble de $\Phi$ possède un voisinage fermé qui est dans $\Phi$.

Pour sa part, l'exposé 16 définit axiomatiquement une théorie de la cohomologie à coefficients dans un faisceau $F$ relativement à une famille de supports $\Phi$. Soit $X$ un

25. Cette description s'inspire de Mac Lane et Moerdijk [1992, p. 64].

26. Les catégories fibrées permettront de comprendre les fibres indépendamment des points. Voir Grothendieck [2003, exposé VI].

espace topologique, $\Phi$ une famille de supports et $K$ un anneau unitaire commutatif. Une telle théorie est un foncteur qui associe

(1) à tout faisceau $F$ de $K$-modules et tout entier $q$, un $K$-module $H^q(X, F)$, appelé le $q^e$ module de cohomologie de $X$ à coefficients dans $F$ relativement à $\Phi$ ;

(2) à tout homomorphisme de faisceaux $F \to F'$ et tout entier $q$, un homomorphisme de $K$-modules $H^q_\Phi(X, F) \to H^q_\Phi(X, F')$ ;

(3) à toute suite exacte de faisceaux et d'homomorphismes

$$0 \to F' \to F \to F'' \to 0$$

et tout entier $q$, un homomorphisme $H^q_\Phi(X, F'') \to H^{q+1}_\Phi(X, F')$.

L'existence de cette théorie est démontrée à l'aide des résolutions fines [27].

Dans la perspective de l'analyse du concept d'espace topologique, trois points ressortent de la théorie des faisceaux telle que reformulée dans le Séminaire Cartan de 1950–1951. Premièrement, Cartan considère un espace topologique arbitraire. À titre de rappel, chez Leray, la construction de la cohomologie à coefficients dans un faisceau exigeait que les espaces topologiques soient normaux, comme dans la note de 1946, ou encore, dans l'article de 1950, localement compacts [28]. Cartan n'impose aucune condition sur les espaces et ne manque pas de souligner le gain en généralité de son approche par rapport à celle de Leray :

> Dans le cas général, la cohomologie qu'on va définir dépend de la famille $\Phi$ ; elle dépend aussi des coefficients choisis : ceux-ci constituent, en général, un faisceau $F$ (sans graduation ni cobord) sur l'espace considéré $X$. Il s'agit donc de « coefficients locaux », non pas dans le sens (plus particulier) des coefficients locaux de Steenrod, mais tels que Leray les a introduits (...) Par contre, l'introduction systématique des familles $\Phi$ est nouvelle : Leray s'était borné au cas où $\Phi$ est la famille des compacts dans un espace localement compact. » [1950–1951, p. 16-01]

Deuxièmement, conformément à ce qu'affirme Krömer [2007, p. 113], la reformulation de la théorie des faisceaux incorpore certaines idées de la théorie des catégories, et ce même si elles ne se manifestent pas explicitement. L'aspect le plus évident est certainement l'emphase sur les morphismes entre des entités mathématiques au détriment de ces entités elles-mêmes que suggèrent la description d'une théorie de la cohomologie à coefficients dans un faisceau comme un foncteur et la considération d'homomorphismes de faisceaux.

De plus, la définition d'un faisceau en tant qu'espace étalé utilise une propriété universelle. En effet, Cartan écrit :

27. Pour le détail technique, voir Cartan [1950–1951, exposé 15 et 16], Houzel [1998, p. 109–111] ou Dieudonné [1989*b*, p. 129–132 et 141].

28. Voir Leray [1946*a*, 1950].

> Soit $F$ un faisceau sur l'espace $\mathcal{X}$. Pour chaque point $x \in \mathcal{X}$, le module $F_x$ s'identifie évidemment à la limite inductive ("direct limit") des modules $\Gamma(F, X)$ relatifs aux ouverts contenant $x$, munis des homomorphismes $\Gamma(F, Y) \to \Gamma(F, X)$ définis ci-dessus. Pour le voir, on considère l'homomorphisme évident $\Gamma(F, X) \to F_x$ (défini pour $x \in X$), qui est tel que si $x \in X \subset Y$, l'homomorphisme $\Gamma(F, Y) \to F_x$ est composé de $\Gamma(F, Y) \to \Gamma(F, X)$ et de $\Gamma(F, X) \to F_x$. [1950–1951, p. 14-02]

Ceci signifie tout simplement, pour conserver la notation de Cartan, que tout homomorphisme $\Gamma(F, Y) \to F_x$ se factorise à travers le module $\Gamma(F, X)$, c'est-à-dire que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(F,X) \arrow[r] & F_x \\
\Gamma(F,Y) \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Troisièmement, et il s'agit probablement de la première chose qui frappe dans cette reformulation de la théorie des faisceaux, la notion de faisceau se définit en termes d'ouverts. Ce changement était une conséquence de ce que Cartan envisageait également les faisceaux, c'est-à-dire la dialectique du local et du global, dans la perspective des espaces analytiques.

#### 2.3.2.2 Application des faisceaux à la théorie des espaces analytiques

Le passage du local au global n'était pas un thème inédit chez Cartan puisque ses travaux en analyse complexe l'avaient déjà conduit à considérer cette question dans les années précédant la reformulation de la théorie des faisceaux.

Premièrement, en 1944, Cartan publia « Idéaux de fonctions analytiques de $n$ variables complexes » [Cartan 1944], un article consacré aux problèmes de Cousin en théorie des fonctions analytiques à variables complexes[29]. Ces problèmes portaient sur la généralisation d'un théorème de Poincaré sur les fonctions à deux variables complexes. Cousin avait démontré que si une fonction à $n$ variables complexes définie sur un domaine est équivalente au quotient de deux fonctions holomorphes, alors cette fonction est équivalente au quotient de deux fonctions holomorphes sur tout l'espace. La généralité du résultat de Cousin était cependant limitée par certaines restrictions imposées sur le domaine de définition de la fonction[30]. Dans cet article, Cartan généralisa le domaine de définition de la fonction aux sous-ensembles ouverts de la fonction. Sa solution utilise des idéaux dits cohérents.

---

29. À la même époque, le mathématicien japonais Oka Kiyoshi travaillait également sur le sujet.
30. Pour une présentation plus détaillée des problèmes de Cousin, voir l'introduction de Cartan [1944, p. 149–152] ou Chorlay [2009].

Deuxièmement, dans l'article « Méthodes modernes en topologie algébrique » de 1945, Cartan étudia les groupes d'homologie $H_n(U, \mathbb{T})$ des ouverts $U$ d'un espace localement compact de dimension $n$ de façon à comprendre la relation entre l'homologie de l'espace et l'ouvert $U$ [31]. À propos du titre de l'article, Cartan qualifie son approche de moderne parce que, premièrement, elle ne fait aucune hypothèse de triangulabilité et, deuxièmement, elle établit un résultat topologique par des méthodes algébriques, le résultat central s'exprimant en termes d'une suite exacte longue. [Chorlay 2007, p. 752–753]

Il en ressort que, en analyse complexe, Cartan avait besoin de modules associés à des sous-ensembles ouverts. Il devint conséquemment beaucoup plus naturel de considérer un mécanisme de passage du local au global basé sur des ouverts plutôt que sur des fermés comme chez Leray. Ainsi, dans « Idéaux et modules de fonctions analytiques de variables complexes » [Cartan 1950], un article précédant la reconstruction de la théorie du Séminaire Cartan de 1950–1951, Cartan reformula sa solution des problèmes de Cousin à l'aide de la théorie de faisceaux. À cette fin, il redéfinit les faisceaux en termes d'ouverts :

**Définition 2.3.2.2** (Cartan 1950)**.** Soient $q$ et $n$ des entiers. Un *faisceau* $\mathcal{F}$ est une fonction qui, à tout ouvert $X \subset \mathbb{C}^n$, $X \neq \emptyset$, associe un module $q$-dimensionnel $\mathcal{F}_X$ tel que si $X \subset Y$, alors le module engendré par $\mathcal{F}_Y$ dans $X$ est inclus dans $\mathcal{F}_X$.

Étant donné un ouvert $A$ de $\mathbb{C}^n$, un $A$-*faisceau* est tout simplement une fonction qui associe à tout ouvert non vide $X \subset A$ un module $\mathcal{F}_X$.

Cet article contient d'ailleurs une première mouture des faisceaux cohérents. Pour paraphraser Cartan, la cohérence permet de comprendre l'organisation locale des propriétés ponctuelles. [1950, p. 30] La définition est la suivante :

> Soit $\mathcal{F}$ un $A$-faisceau (A : ensemble ouvert non vide). (...)
>
> *Définition.* — Un $A$-faisceau $\mathcal{F}$ est *cohérent* en un point $a$ de $A$ si $a$ possède un voisinage ouvert $X$ tel que non seulement $\mathcal{F}_X$ engendre $\mathcal{F}_a$ au point $a$, mais que $\mathcal{F}_X$ *engendre* $\mathcal{F}_x$ *en tout point* $x$ *suffisamment voisin de* $a$. (...) Un $A$-faisceau est dit *cohérent* (dans $A$) s'il est cohérent en tout point de $A$. [Cartan 1950, p. 36]

Cette notion de faisceau cohérent est en quelque sorte une traduction de celle de système de modules cohérents introduite dans l'article de 1944 [32].

Tel que mentionné précédemment, à partir de l'année 1951–1952, le Séminaire Cartan s'éloigna de la topologie algébrique au profit des espaces et fonctions analytiques complexes. Dans ce contexte, l'étude des faisceaux cohérents s'imposait puisque cette propriété renvoie à un mécanisme de passage du local au global : si une fonction satisfait une propriété en un point, alors elle la satisfait également en un

31. Voir Dieudonné [1989*b*, p. 126], mais aussi Houzel [1998, p. 109] pour plus de détails.
32. Cf. Cartan [1944, p. 156] ou encore J. W. Gray [1979, p. 16] qui cite les deux définitions l'une à la suite de l'autre.

voisinage de ce point. Les exposés 15 et suivants de l'année 1951–1952 du Séminaire Cartan abordèrent donc les faisceaux cohérents.

Comme dans le séminaire de l'année précédente, Cartan y définit les faisceaux en termes d'espace étalé[33]. Soit $E$ une variété analytique-complexe. Un faisceau sur $E$ s'obtient en construisant une variété analytique-complexe au-dessus de $E$. Premièrement, à tout point $x \in E$ est associé l'anneau $O_x$ des fonctions analytiques en $x$. Pour tout ouvert $U$ de $E$, $O_U$ désigne l'anneau des fonctions analytiques dans $U$. Ceci permet de considérer un espace topologique $O(E) = \bigcup_x O_x$. En effet, aux ouverts $U$ de $X$ correspondent des ouverts dans $O(E)$ qui y engendrent une topologie. Deuxièmement, l'application $p\colon O(E) \to E$ qui, à tout $f \in O(E)$, associe le point $x \in E$ tel que $f \in O_x$ est un homéomorphisme local. $O(E)$ est donc une variété analytique-complexe. Il en résulte que $\langle O(E), p, E\rangle$ est un faisceau sur $E$ puisque (1) pour tout $x \in E$, $p^{-1}(x)$ est un $\mathbb{C}$-module, (2) les lois de composition de $O(E)$ sont continues et (3) $p$ est un homéomorphisme local.

Dans cet exposé, Cartan se concentre plus précisément sur les sous-faisceaux analytiques du faisceau $O^q(E)$. Ce dernier est la somme directe de $q$ ($q \geq 1$) faisceaux isomorphes à $\langle O(E), p, E\rangle$. Sans rentrer dans les détails, un faisceau analytique est un faisceau qui induit une structure de module sur les germes :

> *Définition 1.* On dit qu'un faisceau $\mathcal{F}$ de $\mathbb{C}$-module, sur une variété analytique-complexe, est un *faisceau analytique*, si on s'est donné un homomorphisme de faisceaux $\mathcal{O}(E) \circ \mathcal{F}_x \to \mathcal{F}_x$, tel que les applications $O_x \otimes \mathcal{F}_x \to \mathcal{F}_x$ définies par cet homomorphisme définissent sur $\mathcal{F}_x$ une structure de $\mathcal{O}_x$-module. [Cartan 1951–1952, p. 15-2]

Bref, un sous-faisceau analytique de $O^q(E)$ associe à tout point $x \in E$ un sous-$O_x$-module $\mathcal{F}_x$ de $O^q_x$.

Au quatrième paragraphe, Cartan définit les sous-faisceaux cohérents de $O^q(E)$. Un sous-faisceau analytique $\mathcal{F}$ de $O^q(E)$ est *cohérent en un point* $x \in E$ s'il existe un voisinage ouvert $U$ de $x$ et un système fini d'éléments $u_i \in O^q_U$ tel que pour tout $y \in U$, le sous-module de $O^q_y$ engendré par les $u_i$ est $\mathcal{F}$. Évidemment, un faisceau est *cohérent* s'il est cohérent en tout point de $E$. Cartan fait suivre cette définition de la remarque suivante : « Un faisceau cohérent en un point $x$ l'est en tout point assez voisin de $x$, d'après la définition. » [1951–1952, p. 15-04] La cohérence permet donc d'étendre une propriété ponctuelle en une propriété locale.

L'exposé 18 généralise la notion de faisceau cohérent. Relativement à celle formulée dans l'exposé 15, la généralisation est en fait double.

> Dans 15, on a seulement considéré des faisceaux sur une variété analytique-complexe $E$ ; désormais, on envisagera aussi des faisceaux sur un sous-espace $X$ de $E$ (par exemple, sur un sous-espace compact $X$). Un tel $X$ porte une structure analytique-complexe ; d'une façon précise, on a le faisceau $O(X)$ qui associe à chaque point $x \in X$ l'anneau $O_x$ des fonctions holomorphes au point $x$ (holomorphes dans la variété ambiante $E$). D'autre part, on ne se bornera

33. Voir la définition 2.3.2.1.

> pas à considérer des sous-faisceaux de $O^q(X)$ ; la notion de faisceau analytique va être définie dans toute sa généralité. [Cartan 1951–1952, p. 18-01]

Le premier aspect relève donc du domaine de définition de la notion de faisceau. Les faisceaux ne sont plus seulement définis pour les variétés, mais aussi pour les sous-espaces d'une variété analytique-complexe. Le deuxième aspect tient à ce que la cohérence ne s'applique plus qu'aux seuls sous-faisceaux. Dans l'exposé 15, seuls les sous-faisceaux cohérents sont définis, et ceux du faisceau $O^q(E)$ qui plus est. Dans l'exposé 18, il est question de faisceaux cohérents en général.

La définition générale de la cohérence proposée par Cartan est la suivante.

**Définition 2.3.2.3** (Cartan 1951–1952)**.** Soient $E$ une variété analytique-complexe et $X$ un sous-espace de $E$. Un faisceau analytique $\mathcal{F}$ sur $X$ est *cohérent* si, pour tout $x \in X$, il existe un voisinage $U$ tel que $\mathcal{F}|_U$, la restriction de $\mathcal{F}$ à $U$, est isomorphe au faisceau quotient $O^p(U)/\mathcal{R}$ où $p$ est un entier et $\mathcal{R}$ est un sous-faisceau cohérent de $O^p(U)$.

Dans la suite de l'exposé 18 et dans l'exposé 19, Cartan exploite cette notion de cohérence pour démontrer deux théorèmes sur les variétés analytiques — les théorèmes A et B sur les variétés de Stein pour être précis — qu'il qualifie lui-même de fondamentaux[34]. Étant donnés $X$ une variété de Stein et $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent sur $X$, le théorème A affirme que, pour tout $x \in X$, l'image du module des sections $H^0(X, \mathcal{F})$ engendre $\mathcal{F}_x$ pour sa structure de $O_x$-module. Le théorème B stipule que les modules de cohomologie $H^q(X, \mathcal{F})$ sont nuls pour tout entier $q \geq 1$.

Ces deux résultats justifiaient la notion de cohérence comme moyen de comprendre le passage du local en global puisque, comme le mentionne Gray, ils entraînent une résolution partielle des problèmes de Cousin. [1979, p. 17]

En 1953 et 1954, Cartan et Jean-Pierre Serre, son ancien étudiant, poursuivirent l'étude des faisceaux analytiques cohérents, mais adoptèrent une nouvelle définition plus générale comme l'illustrent leurs exposés lors d'un colloque organisé par le Centre Belge de Recherches Mathématiques [Cartan 1953 ; Serre 1953]. Un faisceau analytique $\mathcal{F}$ sur un espace topologique $X$ est *cohérent* si tout $x \in X$ possède un voisinage ouvert $U$ tel que $\mathcal{F}|_U$ est isomorphe au conoyau d'un homomorphisme analytique $f\colon O^p|_U \to O^q|_U$. [Cartan 1953, p. 48]

Une description définitive des faisceaux cohérents ne s'imposera finalement qu'en 1955 avec le célèbre article « Faisceaux algébriques cohérents » de Serre.

### 2.3.3 Serre ou les faisceaux en géométrie algébrique abstraite

Vers le milieu des années 1940, la géométrie algébrique fut complètement renouvelée par le mathématicien français André Weil. Son livre de 1946 *Foundations of*

34. Voir le titre de la quatrième section de l'exposé 18, Cartan [1951–1952, p. 18-6].

*Algebraic Geometry* [Weil 1946] expose cette géométrie algébrique nouvelle, communément appelée géométrie algébrique abstraite en raison des variétés abstraites qui constituent son objet d'étude. En omettant la théorie des intersections, le principal changement tient à ce que, comparativement à la géométrie algébrique classique qui analysait par des méthodes algébriques des courbes inscrites dans l'espace projectif sur le corps des réels $\mathbb{R}$ ou sur le corps des complexes $\mathbb{C}$, la géométrie algébrique abstraite étudie des équations à coefficients dans un corps commutatif arbitraire [35].

Le contexte du milieu des années 1950 était donc le suivant. D'une part, en vertu des recherches de Cartan et Serre, les variétés analytiques pouvaient être étudiées algébriquement à l'aide des méthodes cohomologiques et faisceautiques. D'autre part, avec la géométrie algébrique abstraite, Weil avait mis de l'avant de nouveaux objets spatiaux : les variétés abstraites. Il semblait alors naturel d'appliquer les méthodes cohomologiques et faisceautiques à la géométrie algébrique abstraite [36].

Tel était l'objectif de Serre dans son article « Faisceaux algébriques cohérents ».

> On sait que les méthodes cohomologiques, et particulièrement la théorie des faisceaux, jouent un rôle croissant, non seulement en théorie des fonctions de plusieurs variables complexes (cf. [Cartan 1953]), mais aussi en géométrie algébrique classique (qu'il me suffise de citer les travaux récents de Kodaira–Spencer sur le théorème de Riemann–Roch). Le caractère algébrique de ces méthodes laissait penser qu'il était possible de les appliquer également à la géométrie algébrique abstraite ; le but du présent mémoire est de montrer que tel est bien le cas. [Serre 1955, p. 197]

Serre procède en deux temps. Le premier chapitre revient sur la théorie générale des faisceaux et marque un pas définitif vers une présentation achevée de celle-ci. Dans les deuxième et troisième chapitres, les variétés algébriques abstraites sont étudiées de ce point de vue.

#### 2.3.3.1 La cohomologie des faisceaux cohérents

Le premier chapitre de « Faisceaux algébriques cohérents » traite de la théorie générale des faisceaux, des faisceaux cohérents et de la cohomologie à coefficients dans un faisceau. Le contenu est fortement inspiré des exposés du Séminaire Cartan et des articles de Cartan du début des années 1950, mais la présentation est quant à elle beaucoup plus systématique.

---

35. Pour une présentation succincte de la géométrie algébrique abstraite, voir Raynaud [1999]. Il en sera également brièvement question à la section 3.1.1. Au plan historique, Lang [2005] nuance cependant certaines des affirmations de Raynaud.

36. Parallèlement aux recherches de Cartan et Serre du début des années 1950, divers mathématiciens de l'*Institute for Advanced Studies* tels Kodaira, Spencer et Hirzebruch avaient commencé à utiliser les faisceaux pour étudier les variétés analytiques. De leur point de vue, la théorie des faisceaux et la cohomologie associée constituaient un outil en vue d'une démonstration du théorème de Riemann–Roch. En ce sens, leurs travaux suggéraient déjà l'application des méthodes faisceautiques à la géométrie algébrique classique. Voir J. W. Gray [1979, p. 18–19].

**Les faisceaux cohérents** L'article s'ouvre sur une définition de la notion de faisceau de groupes abéliens qui est à toutes fins pratiques identique à celle utilisée par Cartan et Serre lors du Colloque sur les fonctions de plusieurs variables de 1953 [37].

**Définition 2.3.3.1** (Serre 1955)**.** Soit $X$ un espace topologique. Un *faisceau de groupes abéliens sur* $X$ est constitué par :

(a) Une fonction $x \to \mathcal{F}_x$ qui, à tout $x \in X$, associe un groupe abélien $\mathcal{F}_x$,

(b) Une topologie sur l'ensemble $\mathcal{F}$, somme des $\mathcal{F}_x$

telles que, étant donnée une application $\pi\colon \mathcal{F} \to X$, appelée la projection de $\mathcal{F}$ sur $X$, définie par $\pi(f) = x$ pour tout $f \in \mathcal{F}_x$ et étant donnée $\mathcal{F} + \mathcal{F}$, la partie de $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ formée des couples $(f, g)$ tels que $\pi(f) = \pi(g)$, les axiomes suivants sont satisfaits :

(I) $\pi$ est un homéomorphisme local, c'est-à-dire pour tout $f \in \mathcal{F}$, il existe un voisinage $V$ de $f$ et un voisinage $U$ de $\pi(f)$ tels que $\pi|_V$ est un homomorphisme $V \to U$.

(II) $f \to -f$ est une application continue $\mathcal{F} \to \mathcal{F}$, et $(f, g) \to f + g$ est une application continue $\mathcal{F} + \mathcal{F} \to \mathcal{F}$.

La perspective de Serre va cependant au-delà des groupes abéliens puisque, à l'instar de Cartan dans sa conférence bruxelloise, Il précise quelques pages plus loin, soit au paragraphe 6, que la notion de faisceau peut également être définie pour tout type de structure algébrique.

> La notion de faisceau définie au n° 1 est celle de faisceau de *groupes abéliens*. Il est clair qu'il existe des définitions analogues pour toute structure algébrique (on pourrait même définir les "faisceaux d'ensembles", où $\mathcal{F}_x$ ne serait muni d'aucune structure algébrique, et où l'on postulerait seulement l'axiome (I)). [Serre 1955, p. 202]

Selon le type de structure algébrique, il suffirait effectivement de modifier l'axiome (II) afin qu'il en reflète les propriétés. Serre fait néanmoins le choix de se concentrer sur des faisceaux d'anneaux et de modules.

La suite de la première section aborde d'abord les méthodes de construction de faisceaux. Serre rappelle notamment la méthode de construction d'un faisceau à l'aide du module des sections et introduit une méthode de construction par recollement des faisceaux sur les ouverts d'un espace.

Il est ensuite question des opérations algébriques standards sur les faisceaux : sous-faisceau, faisceau quotient, homomorphisme de faisceaux, noyau et conoyau d'un homomorphisme de faisceau, somme directe de faisceaux, etc. Il en ressort qu'à toute opération sur une structure algébrique d'un type donné — groupe ou module par exemple — correspond une opération sur les faisceaux de ce type de structure algébrique. « Toutes les définitions relatives aux homomorphismes de modules

37. Voir Cartan [1953, p. 41] et Serre [1953, p. 57].

peuvent se transposer de même aux faisceaux de modules. » [Serre 1955, p. 204] Dans son histoire de la géométrie algébrique, Dieudonné écrit quant à lui : « À toutes les opérations usuelles sur les groupes ou les modules correspondent des opérations sur les faisceaux. » [1974, p. 176]

Par exemple, soient $\mathcal{A}$ un faisceau d'anneaux et $\mathcal{F}$ un faisceau de $\mathcal{A}$-modules. Un *sous-faisceau* de $\mathcal{F}$ est un sous-ensemble $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$ tel que (1) pour tout $x \in X$, $\mathcal{G}_x = \mathcal{G} \cap \mathcal{F}_x$ est un sous-$\mathcal{A}_x$-module de $\mathcal{F}_x$ et (2) $\mathcal{G}$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathcal{F}$. Bref, un sous-faisceau $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$ s'obtient par l'entremise des sous-modules $\mathcal{G}_x$ de $\mathcal{F}_x$. De plus, soit $\mathcal{G}$ un sous-faisceau de $\mathcal{F}$. Pour tout $x \in X$, $\mathcal{F}_x/\mathcal{G}_x$ est le module quotient de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$. Muni de la topologie quotient de $\mathcal{F}$, $\bigcup_x \mathcal{F}_x/\mathcal{G}_x$ est un faisceau de $\mathcal{A}$-modules, le *faisceau quotient* de $\mathcal{F}$ par $\mathcal{G}$ . Toujours dans la même veine, les homomorphismes de faisceaux de $\mathcal{A}$-modules se définissent à l'aide des homomorphismes de $\mathcal{A}$-modules. En effet, soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux faisceaux de $\mathcal{A}$-modules. Un $\mathcal{A}$-*homomorphisme* de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{G}$ est une application continue $\varphi \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ telle que, pour tout $x \in X$, $\varphi_x \colon \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ est un $\mathcal{A}_x$-homomorphisme.

De la même façon, une suite exacte de $\mathcal{A}$-modules induit une suite exacte de faisceaux de $\mathcal{A}$-modules. À titre de rappel, une suite d'homomorphismes de groupes abéliens, pour prendre cet exemple de structure,

$$G_0 \stackrel{\varphi_0}{\to} G_1 \stackrel{\varphi_1}{\to} \dots \stackrel{\varphi_{n-1}}{\to} G_n \stackrel{\varphi_n}{\to} G_{n+1} \stackrel{\varphi_{n+1}}{\to} \dots$$

est *exacte* si, pour tout $\varphi_i$, $\mathrm{Im}(\varphi_i) = \ker(\varphi_{i+1})$, c'est-à-dire si l'image de chaque homomorphisme coïncide avec le noyau du suivant. Par exemple, pour un homomorphisme de faisceaux $\varphi \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, les suites

$$0 \to \ker(\varphi) \to \mathcal{F} \to \mathrm{Im}(\varphi) \to 0$$
$$0 \to \mathrm{Im}(\varphi) \to \mathcal{G} \to \mathrm{coker}(\varphi) \to 0$$

sont exactes. Les suites exactes sont particulièrement importantes dans le contexte de la cohomologie des faisceaux.

Dans la deuxième section, Serre se tourne vers les faisceaux cohérents de modules. La définition de la cohérence qu'avance « Faisceaux algébriques cohérents » utilise les notions de faisceau de type fini et de faisceau des relations. Premièrement, un faisceau est de *type fini* s'il est localement engendré par un nombre fini de ses sections. Tout faisceau de type fini $\mathcal{F}$ a la propriété que si des sections de $\mathcal{F}$ définies au-dessus d'un voisinage d'un point $x \in X$ engendrent $\mathcal{F}_x$, alors elles engendrent également $\mathcal{F}_y$ pour tout $y$ assez voisin de $x$. L'idée derrière les faisceaux de type fini est en fait sensiblement la même que pour les structures algébriques de type fini [38]. Deuxièmement, soient $\mathcal{F}$ un faisceau de $\mathcal{A}$-modules et $s_1, s_2, \dots, s_p$ des sections de

38. Cf. la définition des modules de type fini de Cartan [1950, p. 32].

$\mathcal{F}$ au-dessus d'un ouvert $U$ de $X$. Il existe alors un homomorphisme

$$\varphi \colon \mathcal{A}^p(U) \to \mathcal{F}(U)$$
$$(f_1, f_2, \ldots, f_p) \mapsto \sum_{i=1}^{p} f_i s_i(x)$$

Le *faisceau des relations* entre les sections $s_1, s_2, \ldots, s_p$ est le noyau $\mathcal{R}(s_1, s_2, \ldots, s_p)$ de l'homomorphisme $\varphi$.

La cohérence se définit alors comme suit.

**Définition 2.3.3.2** (Serre 1955)**.** Un faisceau de $\mathcal{A}$-module $\mathcal{F}$ est *cohérent* si

(1) $\mathcal{F}$ est de *type fini* ;

(2) Si $s_1, s_2, \ldots, s_p$ sont des sections de $\mathcal{F}$ au-dessus d'un ouvert $U \subset X$, le faisceau des relations entre les $s_i$ sur $U$ est de type fini.

Comparativement à la définition de Cartan[39], celle de Serre ne contient aucune référence explicite aux points de l'espace. À vrai dire, les points ne disparaissent pas totalement, mais sont relégués l'arrière-plan dans la mesure où la condition exigeant que le faisceau soit de type fini y réfère implicitement.

**Les groupes de cohomologie à valeurs dans un faisceau** La troisième section du premier chapitre développe la cohomologie des faisceaux sur le modèle de la théorie de Čech. Trois grandes étapes peuvent être distinguées.

Dans un premier temps, Serre définit le groupe des cochaînes. Soient $X$ un espace topologique, $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de $X$ et $\mathcal{F}$ un faisceau. Pour $p \in \mathbb{N}$, une $p$-chaîne de $\mathfrak{U}$ à valeurs dans $\mathcal{F}$ est une fonction qui associe à toute suite $s = (i_0, \ldots, i_p)$ d'éléments de $I$ une section $f_s = f_{i_0 \ldots i_p}$ de $\mathcal{F}$ au-dessus de $U_s = U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_p}$. Les cochaînes forment un groupe abélien $C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \prod \Gamma(U_s, \mathcal{F})$.

La deuxième étape est la construction d'un complexe de cochaînes et de ses groupes de cohomologie. Soit $S(I)$ le simplexe ayant pour sommets les éléments de l'ensemble $I$. Un simplexe de dimension $p$ de $S(I)$ est une suite $s = i_0, \ldots, i_p$ d'éléments de $I$. L'ensemble des sommets d'un tel simplexe $s$ est noté $|s|$.

Soit $K_p(I)$ le groupe libre ayant pour base l'ensemble des $p$-simplexes de $S(I)$. Un *endomorphisme simplicial* se définit comme une application $h \colon K_p(I) \to K_q(I)$ telle que (1) $h$ est un homomorphisme et (2) pour tout simplexe $s$ de $S(I)$, $h(s) = \sum_{s'} c_s^{s'}$ où $c_s^{s'} \in \mathbb{Z}$ et les $s'$ sont les simplexes de dimension $q$ tel que $|s'| \subset |s|$. Soit alors l'endomorphisme simplicial

$$\partial \colon K_{p+1}(I) \to K_p(I)$$
$$(i_0, \ldots, i_{p+1}) \mapsto \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j (i_0, \ldots, \hat{i}_j, \ldots, i_{p+1})$$

39. Cf. definition 2.3.2.3.

où $\hat{i}_j$ signifie que l'élément $i_j$ doit être omis. $\partial$ induit alors un homomorphisme $d\colon C^p(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \to C^{p+1}(\mathfrak{U},\mathcal{F})$. Puisque $\partial\partial = 0$ entraîne que $dd = 0$, $d$ est un opérateur de cobord sur $C(\mathfrak{U},\mathcal{F})$. $C(\mathfrak{U},\mathcal{F})$ est donc un complexe de cochaînes. Le $q^{\text{e}}$ groupe de cohomologie du complexe $C(\mathfrak{U},\mathcal{F})$ est $H^q(\mathfrak{U},F)$.

Finalement, les groupes de cohomologie de l'espace topologique $X$ s'obtiennent par l'entremise des groupes de cohomologie des complexes de cochaînes. La clé est ici la relation de raffinement sur les recouvrements ouverts. Soient $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ et $\mathfrak{U}' = \{U'_j\}_{j\in J}$ deux recouvrements ouverts, $\mathfrak{U}$ est *plus fin que* $\mathfrak{U}'$, noté $\mathfrak{U} \prec \mathfrak{U}'$, s'il existe une application $\tau\colon I \to J$ telle que, pour tout $i \in I$, $U_i \subset U'_{\tau i}$. La relation de raffinement relie naturellement les groupes de cohomologie des complexes de cochaînes. En effet, si $\mathfrak{U}$ est plus fin que $\mathfrak{U}'$, alors il existe pour tout $q \geq 0$ un homomorphisme canonique $H^q(\mathfrak{U}',\mathcal{F}) \to H^q(\mathfrak{U},\mathcal{F})$, noté $\sigma(\mathfrak{U},\mathfrak{U}')$. De plus, la relation de raffinement est un pré-ordre filtrant sur les recouvrements ouverts de $X$. Elle détermine également un critère d'identité : deux recouvrements $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{U}'$ sont équivalents si et seulement si $\mathfrak{U} \prec \mathfrak{U}'$ et $\mathfrak{U}' \prec \mathfrak{U}$. Ceci permet de démontrer que les groupes de cohomologie $H^q(\mathfrak{U},\mathcal{F})$ du complexe $C^q(\mathfrak{U},\mathcal{F})$ ne dépendent que de la classe d'équivalence du recouvrement $\mathfrak{U}$.

Serre définit alors le *$q^e$ groupe de cohomologie $H^q(X,\mathcal{F})$ de $X$ à valeurs dans le faisceau* $\mathcal{F}$ comme la limite inductive des groupes $H^q(\mathfrak{U},\mathcal{F})$ sur l'ensemble ordonné filtrant des classes de recouvrements de $X$ par les homomorphismes $\sigma(\mathfrak{U},\mathfrak{U}')$ [40].

**La suite exacte de cohomologie** C'est dans le contexte de la définition de la suite exacte de cohomologie associée à une suite exacte de faisceaux que la propriété de cohérence prend toute son importance.

Soit une suite exacte de faisceaux

$$0 \to \mathcal{A} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{B} \xrightarrow{\beta} \mathcal{C} \to 0$$

Pour tout recouvrement $\mathfrak{U}$ de $X$, la suite de complexes de cochaînes

$$0 \to C(\mathfrak{U},\mathcal{A}) \xrightarrow{\alpha} C(\mathfrak{U},\mathcal{B}) \xrightarrow{\beta} C(\mathfrak{U},\mathcal{C})$$

est exacte à condition que l'homomorphisme $\beta$ soit surjectif, ce qui n'est évidemment pas le cas en général.

Afin de palier à ce problème, Serre remplace le complexe $C(\mathfrak{U},\mathcal{C})$ par le sous-complexe $C_0(\mathfrak{U},\mathcal{C}) = \beta(C(\mathfrak{U},\mathcal{B}))$, c'est-à-dire l'image par $\beta$ du complexe $C(\mathfrak{U},\mathcal{B})$. Les groupes de cohomologie du complexe $C_0(\mathfrak{U},\mathcal{C})$ sont notés $H_0^q(\mathfrak{U},\mathcal{C})$. L'homomorphisme $C(\mathfrak{U},B) \to C_0(\mathfrak{U},B)$ étant évidemment surjectif, la suite exacte de complexes

$$0 \to C(\mathfrak{U},\mathcal{A}) \to C(\mathfrak{U},\mathcal{B}) \to C_0(\mathfrak{U},\mathcal{C}) \to 0$$

40. Pour tout le détail, voir Serre [1955, p. 212–215].

induit une suite exacte de cohomologie

$$\cdots \to H^q(\mathfrak{U}, \mathcal{B}) \to H_0^q(\mathfrak{U}, \mathcal{C}) \to H^{q+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{A}) \to H^{q+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{B}) \to \dots$$

Il suffit alors de définir le $q^{\mathrm{e}}$ groupe de cohomologie $H_0^q(X, \mathcal{C})$ de l'espace $X$ à valeurs dans le faisceau $\mathcal{C}$ comme la limite inductive des groupes de cohomologie $H_0^q(\mathfrak{U}, \mathcal{C})$ pour obtenir la suite exacte de cohomologie

$$\begin{aligned} 0 \to \cdots \to H^q(X, \mathcal{A}) \to H^q(X, \mathcal{B}) \to H_0^q(X, \mathcal{C}) \to \\ H^{q+1}(X, \mathcal{A}) \to H^{q+1}(X, \mathcal{B}) \to H_0^{q+1}(X, \mathcal{C}) \to \dots \end{aligned}$$

En conséquence, pour tout espace $X$ tel que les groupes de cohomologie $H_0^q(X, \mathcal{C})$ et $H^q(X, \mathcal{C})$ sont isomorphes, l'application de cette méthode permettrait d'obtenir la suite exacte de cohomologie

$$\begin{aligned} \cdots \to H^q(X, \mathcal{A}) \to H^q(X, \mathcal{B}) \to H^q(X, \mathcal{C}) \to \\ H^{q+1}(X, \mathcal{A}) \to H^{q+1}(X, \mathcal{B}) \to H^q(X, \mathcal{C}) \to \dots \end{aligned}$$

définie par la suite exacte de faisceaux $0 \to \mathcal{A} \to \mathcal{B} \to \mathcal{C} \to 0$ [41].

Au paragraphe 25, Serre démontre que, dans le cas des espaces paracompacts, l'homomorphisme canonique $H_0^q(X, \mathcal{C}) \to H^q(X, \mathcal{C})$ est bijectif. La méthode décrite ci-dessus lui permet donc d'obtenir la suite exacte de cohomologie définie par une suite de faisceaux. Il doit cependant avouer du même souffle ignorer s'il en est de même pour des espaces non séparés : « (...) j'ignore si une telle extension est possible pour des espaces non séparés (...) » [1955, p. 217]

Ceci constituait un problème de taille en vue de l'application de la théorie des faisceaux à la géométrie algébrique dans la mesure où cette dernière considérait des variétés qui, munies de la topologie de Zariski, n'étaient pas paracompactes et donc non séparées. Serre montra néanmoins comment contourner cet obstacle en se restreignant aux faisceaux cohérents.

#### 2.3.3.2 Application à la géométrie algébrique abstraite

Dans les deuxième et troisième chapitres de « Faisceaux algébriques cohérents », Serre applique la théorie des faisceaux aux variétés algébriques abstraites. Il en ressort que celles-ci sont l'équivalent pour la géométrie algébrique abstraite des variétés de Stein en analyse complexe.

> peu après, Serre eut l'idée d'étendre à ces variétés ainsi topologisées la théorie des *faisceaux cohérents*, grâce à laquelle la topologie rend dans le cas des variétés « abstraites » les mêmes services que la topologie usuelle lorsque le corps de base est $\mathbb{C}$ , notamment en ce qui concerne l'application des méthodes de la topologie algébrique. [Bourbaki 1974, p. 147]

41. Pour le détail, voir Serre [1955, p. 216–217].

Dans un premier ordre d'idées, Serre définit la notion de variété algébrique. Intuitivement, une variété algébrique sur un corps est un ensemble muni d'une topologie — appelé topologie de Zariski — et d'un certain faisceau.

Plus rigoureusement, soient $K$ un corps commutatif algébriquement clos, $r \in \mathbb{N}$ et $X = K^r$ l'espace affine de dimension $r$ sur $K$. Premièrement, la topologie de Zariski est décrite non par les ouverts de l'espace, mais par ses fermés. Un sous-ensemble est fermé relativement à la topologie de Zariski si et seulement s'il est l'ensemble des racines communes à une famille de polynômes sur $X$. Deuxièmement, soit $x = (x_1, \dots, x_r) \in X$. L'anneau local $\mathcal{O}_x$ de $x$ est le sous-anneau du corps $K[X^r]$ formé des fractions rationnelles $R = P/Q$ où $P$ et $Q$ sont des polynômes et $Q(x) \neq 0$. Plus généralement, soient $Y$ un sous-espace localement fermé de $X$ et $\mathcal{F}(Y)$ le faisceau des germes de fonctions $Y \to K$. Ce faisceau est déterminé par le système $(\mathcal{F}_U, \rho_U^{U'})$ où $\mathcal{F}_U$ est l'ensemble des fonctions $U \to K$ et $\rho_{U'}^U$ est l'opération de restriction[42]. À tout $x \in Y$ correspond une opération de restriction qui induit un homomorphisme $\varepsilon_x \colon \mathcal{F}(X)_x \to \mathcal{F}(Y)_x$. L'image de $\mathcal{O}_x$ par $\varepsilon_x$ est un sous-anneau de $\mathcal{F}(Y)_x$, noté $\mathcal{O}_{x,r}$. Les $\mathcal{O}_{x,r}$ forment un sous-faisceau $\mathcal{O}_Y$ de $\mathcal{F}(Y)$ appelé le *faisceau des anneaux locaux de* $Y$.

La définition est alors la suivante :

**Définition 2.3.3.3** (Serre 1955)**.** Une variété algébrique sur $K$ est un ensemble $X$ muni (i) de la topologie de Zariski et (ii) du faisceau $\mathcal{O}_X$ des anneaux locaux de $X$ tel que les axiomes suivants soient respectés :

(1) Il existe un recouvrement ouvert fini $\mathfrak{U}' = \{U_i'\}_{i \in I}$ de $X$ tel que tout $U_i'$ est isomorphe à un sous-espace localement fermé $U_i$ d'un espace affine muni du faisceau $O_{U_i}$ ;

(2) La diagonale $\Delta \subset X \times X$ est fermée dans $X \times X$.

Ainsi, une sous-variété d'une variété algébrique $X$ est un sous-ensemble localement fermé $Y \subset X$ muni de la topologie induite et du faisceau $\mathcal{O}_Y$ induit par $\mathcal{O}_X$.

La définition de Serre se distingue de celle formulée par Weil dans *Foundations of Algebraic Geometry* en ce qu'une variété n'est pas supposée irréductible[43]. En général, un espace $X$ est *irréductible* si pour tout sous-ensembles fermés $X_1$ et $X_2$, si $X = X_1 \cup X_2$, alors $X_1 = X$ ou $X_2 = X$. Autrement dit, $X$ ne peut être écrit comme l'union de deux sous-ensembles fermés distincts de lui-même.

Dans un deuxième ordre d'idées, Serre étudie les faisceaux algébriques cohérents. Ceux-ci sont l'équivalent, pour les variétés algébriques, des faisceaux cohérents pour les espaces topologiques dont Serre exposa la théorie dans le premier chapitre de l'article. Soit $V$ une variété algébrique dont le faisceau d'anneaux locaux est $\mathcal{O}_V$.

42. Voir Serre [1955, p. 200–201] pour une description plus détaillée des faisceaux de germes de fonctions.

43. Pour les définitions de variété algébrique et de variété abstraite de Weil, voir [1946, p. 68 et p. 166–167 respectivement].

Un *faisceau algébrique sur* $V$ est un faisceau de $\mathcal{O}_V$-modules. En particulier, un faisceau algébrique sur $V$ est *cohérent* s'il est un faisceau cohérent de $\mathcal{O}_V$-modules, c'est-à-dire s'il est de type fini et le faisceau de relations est également de type fini.

Dans un troisième ordre d'idées, la théorie des faisceaux cohérents ayant été adaptée aux variétés algébriques, Serre étudie successivement la cohomologie des variétés affines et des variétés projectives, celles-ci étant des cas particuliers de variétés algébriques.

L'étude des variétés affines fait ressortir qu'elles sont à la géométrie algébrique ce que les variétés de Stein sont à la géométrie analytique complexe. En particulier, Serre démontre des résultats équivalents aux théorèmes fondamentaux A et B de Cartan [44]. D'une part, reprenant le théorème A' — résultat démontré dans l'énoncé 19 du Séminaire Cartan de 1951–52 et équivalent au théorème A [45] —, l'énoncé du théorème 2 affirme que tout module $\mathcal{F}_x$ est engendré par les éléments de $\Gamma(X, \mathcal{F})$ :

> **Théorème 2.** Soit $\mathcal{F}$ un faisceau algébrique cohérent sur une variété affine $X$. Pour tout $x \in X$, le $\mathcal{O}_{x,X}$-module est engendré par les éléments de $\Gamma(X, \mathcal{F})$. [Serre 1955, p. 237]

D'autre part, à l'instar du théorème $B$, le corollaire 1 stipule que les groupes de cohomologie sont nuls, sauf pour $q = 0$ :

> **Corollaire 1.** Soit $X$ une variété affine, et $\mathcal{F}$ un faisceau algébrique cohérent sur $X$, on a $H^q(X, \mathcal{F}) = 0$ pour tout $q > 0$. [Serre 1955, p. 239]

Tout cela permet de montrer que, étant données une variété affine $X$ et une suite exacte de faisceaux algébriques sur $X$

$$0 \to \mathcal{A} \to \mathcal{B} \to \mathcal{C} \to 0$$

si $A$ est cohérent, alors l'homomorphisme $H_0^q(X, \mathcal{C}) \to H^q(X, \mathcal{C})$ est bijectif, et donc en particulier surjectif. En conséquence, la suite de cohomologie

$$\dots H^q(X, \mathcal{A}) \to H^q(X, \mathcal{B}) \to H^q(X, \mathcal{C}) \to H^{q+1}(X, \mathcal{A}) \to H^{q+1}(X, \mathcal{B}) \to \dots$$

est exacte [46].

En ce qui a trait aux variétés algébriques projectives sur lesquelles porte tout le troisième chapitre, elles donnent lieu à une généralisation de la théorie des variétés analytiques complexes projectives. En effet, Serre considère un corps algébriquement clos commutatif arbitraire au lieu de se limiter au corps des complexes comme Cartan.

---

44. Pour un rappel des théorèmes A et B, voir p. 130.
45. Voir Cartan [1951–1952, p. 19-5].
46. Pour le détail, voir Serre [1955, p. 236–240].

#### 2.3.3.3 L'état de la théorie des faisceaux après Serre

Trois points se dégagent des travaux de Serre sur la théorie des faisceaux.

Premièrement, Serre donna une présentation beaucoup plus achevée de la théorie des faisceaux et de la cohomologie à valeurs dans un faisceau. La clarification de la cohérence qu'il effectua contribua grandement à une meilleure compréhension du mécanisme de passage du local au global. Gray écrit à ce propos : « *The proper description of coherent sheaves was not settled until FAC appeared*[47]. » [1979, p. 17]

Deuxièmement, « Faisceaux algébriques cohérents » transposa la théorie des faisceaux de la géométrie analytique à la géométrie algébrique. En particulier, Serre définit une notion de faisceau cohérent sur les variétés algébriques et montra que celle-ci permettait d'obtenir une suite exacte de groupes de cohomologie à valeurs dans un faisceau.

À vrai dire, Serre réalisa rapidement qu'il y avait beaucoup plus qu'une analogie de structure entre les faisceaux algébriques cohérents et les faisceaux analytiques cohérents de même qu'entre les groupes de cohomologie auxquels ils donnent lieu. Étant donnée une variété projective sur le corps des complexes, la théorie des faisceaux permettait d'y définir une structure analytique de même qu'une structure algébrique, structures auxquelles pouvaient être associés des faisceaux cohérents. Dès 1956, Serre démontra dans un article intitulé « Géométrie algébrique et géométrie analytique » [Serre 1956] que ces théories algébriques et analytiques sont identiques[48].

> Soit $X$ une variété algébrique projective, définie sur le corps des nombres complexes. L'étude de $X$ peut être entreprise de deux points de vue : le point de vue *algébrique*, dans lequel on s'intéresse aux anneaux locaux des points de $X$, aux applications rationnelles, ou régulières, de $X$ dans d'autres variétés, et le point de vue *analytique* (parfois appelé « transcendant ») dans lequel c'est la notion de fonction holomorphe sur $X$ qui joue le principal rôle. (...)
>
> Dans de nombreuses questions, les deux points de vue conduisent à des résultats essentiellement équivalents, bien que par des méthodes très différentes. (...)
>
> Le but principal du présent mémoire est d'étendre cette équivalence aux *faisceaux cohérents* ; de façon précise, nous montrons que faisceaux algébriques cohérents et faisceaux analytiques cohérents se correspondent biunivoquement, et que la correspondance entre ces deux catégories de faisceaux laisse invariants les groupes de cohomologie (...) [Serre 1956, p. 1]

Cette correspondance fut conçue et comprise comme signifiant l'identité des cas algébrique et analytique. Par exemple, dans leurs lettres de 1955 et 1956, Serre et Grothendieck y réfèrent par l'expression « algébrique = analytique » : « Bravo pour

47. FAC est un acronyme, fréquemment utilisé dans la littérature, pour désigner l'article « Faisceaux algébriques cohérents ».

48. Ce résultat était en fait annoncé à la fin de l'introduction de « Faisceaux algébriques cohérents ». Voir Serre [1955, p. 198].

te mettre à la rédaction d'un diplodocus algébrique = analytique, il était temps ! » [Lettre de Grothendieck à Serre du 12 janvier 1956, Colmez et Serre 2001, p. 25]

L'isomorphie des faisceaux algébriques cohérents et analytiques cohérents et des groupes de cohomologie leur étant associés insuffla une grande unité à la géométrie algébrique dans la mesure où les structures algébrique et analytique n'avaient plus à être distinguées ni à être traitées en parallèle. Désormais, la caractérisation de l'espace, ou des variétés projectives pour être exact, n'était donc plus influencée par le choix de privilégier le point de vue algébrique au détriment du point de vue analytique, ou vice-versa.

> Serre fit une étude détaillée des relations entre ces structures en 1956, et montra entre autres que l'application $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^h$ met en correspondance biunivoque les faisceaux algébriques cohérents et les faisceaux analytiques cohérents, et donne un isomorphisme de groupes de cohomologie, ce qui permet d'utiliser indifféremment les méthodes algébriques ou les méthodes analytiques de Hodge–Kodaira. [Dieudonné 1974, p. 191]

Troisièmement, les travaux de Serre marquèrent l'entrée de la théorie des catégories et de ses méthodes en géométrie algébrique abstraite et, par le fait même, la rendirent indispensable en théorie des faisceaux de même qu'en cohomologie. Par exemple, dans le troisième chapitre de « Faisceaux algébriques cohérents » et dans « Géométrie algébrique et géométrie analytique », la démonstration de quelques résultats se fait à l'aide de diagrammes commutatifs [49]. La rupture était d'autant plus grande que la géométrie algébrique abstraite telle que conçue par Weil était de facture classique. Pis, Weil était notoirement réfractaire à la théorie des catégories.

De plus, toujours dans le troisième chapitre de « Faisceaux algébriques cohérents », Serre relie la cohomologie des faisceaux au foncteur Ext de l'algèbre homologique. Étant donnés un faisceau algébrique cohérent $\mathcal{F}$ sur une variété algébrique projective complexe $X$ et un entier $q$, la nullité, pour $n$ assez grand, des groupes de cohomologie $H^q(X, \mathcal{F}(-n))$ est équivalente à la nullité du foncteur $\mathrm{Ext}^{r-q}_{\mathcal{O}_x}(\mathcal{F}_x, \mathcal{O}_x)$ pour tout $x \in X$. Ici, $\mathcal{F}(n)$ est le faisceau algébrique obtenu par recollement des restrictions de $\mathcal{F}$ à des ouverts $U_i$ qui recouvrent $X$ et les $\mathrm{Ext}^{r-q}_{\mathcal{O}_x}$ sont les foncteurs dérivés du foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_x}(M, N)$ où $M$ et $N$ sont des modules gradués [50]. Par le fait même, les méthodes de l'algèbre homologique infiltrèrent la géométrie algébrique et inaugurèrent un mouvement qui aboutirait rapidement à l'identification des méthodes respectives de la cohomologie et de l'algèbre homologique.

En 1958, Grothendieck écrirait à ce sujet :

> *It is less than four years since cohomological methods (i.e. methods of homological algebra) were introduced into Algebraic Geometry in Serre's fundamental paper, and it seems already certain that they are to overflow this part of mathematics in the coming years, from the foundations up to the most advanced parts.* [Grothendieck 1960*a*, p. 103]

49. Voir, par exemple, Serre [1955, chapitre III, §3 et §4] de même que [1956, §3, paragraphe 13].
50. Pour plus de détails, voir Serre [1955, chapitre III, §2 à 5].

Cette affirmation de Grothendieck n'était évidemment pas fortuite puisqu'il venait d'entreprendre un vaste projet de reconstruction de la géométrie algébrique abstraite dont la pierre de touche serait l'intégration des méthodes de l'algèbre homologique.

## 2.4 L'image microfracturée de la topologie

Entre 1945 et 1956, les travaux de Eilenberg et Steenrod en topologie algébrique, la création de l'algèbre homologique par Cartan et Eilenberg de même que l'avènement de la théorie des faisceaux transformèrent profondément l'appréhension et, par le fait même, l'étude des espaces topologiques en topologie algébrique, mais également dans cette discipline encore jeune qu'était la géométrie algébrique abstraite. Rétrospectivement, *Foundations of Algebraic Topology*, *Homological Algebra* et la théorie des faisceaux donnèrent lieu à une image microfracturée de la topologie.

Cette image microfracturée tenait plus spécifiquement à deux changements fondamentaux qui, entre les mains de Grothendieck, se révéleraient d'une profondeur et d'une portée insoupçonnée. Le premier fut la transformation de la méthode axiomatique. Le second, l'inscription de la topologie algébrique et de la géométrie algébrique dans le cadre conceptuel de la théorie des catégories.

### 2.4.1 La méthode axiomatique

La méthode axiomatique apparut au cours de la seconde moitié du XIX$^{e}$ siècle en réponse aux problèmes qu'entraînait l'intuition en analyse. À cette époque, les mathématiciens furent effectivement confrontés à des courbes aux propriétés inattendues. Un des exemples les plus célèbres est dû au mathématicien italien Giuseppe Peano qui construisit une courbe passant par tous les points du plan. L'existence d'une telle courbe, en ce qu'elle suggérait une isomorphie entre une courbe et un plan, remettait en question certains concepts jusque-là considérés comme intuitivement clairs, à commencer par ceux de courbe, de plan et de dimension. Comment une courbe, c'est-à-dire un objet à une dimension, pouvait-elle être isomorphe au plan, c'est-à-dire à un objet bidimensionnel ? Plus fondamentalement, la découverte de telles courbes pathologiques en analyse, parfois appelés monstres, mit en évidence la nécessité d'éliminer tout recours à l'intuition en mathématique au profit d'une rigueur logique.

Afin de satisfaire ce critère de rigueur, la méthode axiomatique en vint à prescrire que toute proposition mathématique doit se déduire de certaines propositions élémentaires au moyen de règles logiques. Elle se veut en ce sens un garde-fou contre les inéluctables dérives de l'intuition.

> D'où la nécessité absolue qui s'impose désormais à tout mathématicien soucieux de probité intellectuelle de présenter ses raisonnements sous forme *axiomatique*, c'est-à-dire sous une forme où les propositions s'enchaînent *en vertu des seules*

> *règles de la logique*, en faisant volontairement abstraction de toutes les « évidences » intuitives que peuvent suggérer à l'esprit les termes qui y figurent. [Dieudonné 1962, p. 544]

Selon la conception moderne, une théorie décrit la structure d'entités mathématiques d'un certain type à l'aide d'axiomes. Étant donné un ensemble d'éléments arbitraires, les axiomes décrivent les relations existant entre ces éléments et les conditions auxquelles sont soumises ces relations. Par exemple, un groupe est une paire $\langle G, * \rangle$ où $G$ est un ensemble et $*$ est une application de $G \times G$ dans $G$ telle que les axiomes suivants soient satisfaits :

(Gr1) pour tout $x, y, z \in G$, $*(*(x, y), z) = *(x, *(y, z))$ ;

(Gr2) il existe $e \in G$ tel que pour tout $x \in G$, $*(e, x) = *(x, e) = x$ ;

(Gr3) pour tout $x \in G$, il existe $y \in G$ tel que $*(x, y) = e$.

Pour donner un autre exemple, un espace topologique se définit de manière analogue : un espace topologique est une paire $\langle X, \mathcal{O} \rangle$ où $X$ est un ensemble et $\mathcal{O}$ est un sous-ensemble de $\wp(X)$ telle que

(Top1) $\emptyset \in \mathcal{O}$ et $X \in \mathcal{O}$ ;

(Top2) l'intersection de toute collection finie d'ensembles de $\mathcal{O}$ est dans $\mathcal{O}$ ;

(Top3) l'union de toute collection d'ensembles de $\mathcal{O}$ est dans $\mathcal{O}$.

La théorie axiomatique associée regroupe l'ensemble des conséquences logiques de ces axiomes, c'est-à-dire l'ensemble des propositions qui peuvent être logiquement déduites de ces axiomes [51].

La topologie algébrique des années 1945 à 1956, mais principalement *Foundations of Algebraic Topology*, rompit avec la méthode axiomatique moderne en l'ouvrant à un horizon autre que la description de la structure d'ensembles donnés. Tel que vu à la section 2.1, Eilenberg et Steenrod y présentent une théorie des théories de l'homologie. En effet, ce qu'axiomatise *Foundations of Algebraic Topology* n'est pas une structure sur un ensemble comme dans le cas des groupes, mais plutôt un mécanisme associant une structure algébrique — des invariants homologiques — à un espace topologique. Une théorie de l'homologie est donc une connexion entre les espaces topologiques et les groupes abéliens ou, pour le dire autrement, une connexion entre la catégorie des espaces topologiques et la catégorie des groupes abéliens.

Par conséquent, la méthode axiomatique peut désormais s'appliquer à des « objets » beaucoup plus abstraits telles des relations entre des structures de types différents. En particulier, les axiomes peuvent décrire comment s'opère le passage d'un champ des mathématiques à un autre.

De plus, l'identification des ingrédients de la théorie de l'homologie, c'est-à-dire de ce qui définit intrinsèquement la théorie de l'homologie, au moyen d'axiomes

51. Cf. la description axiomatique de Bourbaki [1962].

s'accomplit en faisant abstraction des spécificités de chacune des théories particulières afin de se concentrer sur la structure, le schème commun à celles-ci.

Ce saut dans l'abstraction fait également de la méthode axiomatique un outil de clarification. Tout comme elle décrivait abstraitement les structures de groupe, de corps, etc. en mettant en évidence ce que tous les groupes, tous les corps, etc. ont en commun, la méthode axiomatique est utilisée dans *Foundations of Algebraic Topology* pour unifier un domaine des mathématiques — la théorie de l'homologie — en isolant ce que plusieurs théories ont en commun. Par conséquent, définir axiomatiquement une théorie ne signifie plus seulement énumérer les propriétés qui peuvent être déduites d'un groupe d'axiomes, mais identifier ce qui constitue l'essence même d'une théorie comme, par exemple, la théorie de l'homologie.

### 2.4.2 Le rôle de la théorie des catégories

Le développement de la topologie algébrique entre 1945 et 1956 vit également apparaître la théorie des catégories. À l'origine de la théorie des catégories se trouvent deux articles de Eilenberg et Mac Lane, « *Group Extensions and Homology* » et « *General Theory of Natural Equivalence* », publiés respectivement en 1942 et en 1945. Leur objectif était la résolution d'un problème en topologie algébrique concernant le nombre de classes d'homotopie d'une application continue $S^3 - \Sigma \to S^2$ où $\Sigma$ est un solénoïde dans la sphère tridimensionnelle. Ce problème les conduisit à considérer des isomorphismes « naturels » [52].

La théorie des catégories fut introduite afin de comprendre dans toute sa généralité ce caractère « naturel » dont disposent certains isomorphismes. À cette fin, Eilenberg et Mac Lane durent développer de nouveaux outils. Ceux-ci furent au premier chef les concepts de foncteur et de transformation naturelle. La théorie des catégories apparut donc dès ses origines comme un langage utile facilitant l'expression de certaines propriétés d'objets mathématiques ou de phénomènes rencontrés en topologie algébrique.

> *Eilenberg and Mac Lane's use of categories, functors and natural transformations certainly marks the birth of what can be called the first phase of category theory, a phase during which category theory was seen as providing the right mathematical framework to give a precise expression of certain problems which were previously only informally formulated. (. . . ) category theory was, during this period, which extends roughly from 1945 up to 1955–1957, considered a convenient language, or more generally, a convenient framework*. [Marquis 2009, p. 11]

Cette conception de la théorie des catégories en tant que langage s'expliquait notamment par l'absence de statut ontologique accordé aux catégories elles-mêmes. Chez Eilenberg et Mac Lane, les catégories sont définies par nécessité dans la mesure

52. Pour un compte-rendu des débuts de la théorie des catégories, voir Marquis [2009, chapitre 3] et Krömer [2007, §2.2 et 2.3].

où un foncteur doit avoir un domaine et un codomaine. Leur rôle se résume ainsi à pourvoir un support afin que puissent être définis le concept de foncteur et, par extension, celui de transformation naturelle. « *In itself, a category was thought to constitute neither a useful tool nor an object of study.* » [Marquis 2009, p. 43]

Cette absence de statut ontologique pour les catégories se maintiendra durant toute cette première phase de la théorie à laquelle réfère Marquis. Ainsi, il n'est explicitement question de catégories qu'à une seule occasion dans *Homological Algebra*, c'est-à-dire au début du deuxième chapitre lorsque Cartan et Eilenberg définissent le concept de foncteur. Ici encore, une catégorie n'est que le domaine et le codomaine d'un foncteur :

> *Let $\Lambda_1$, $\Lambda$ be any two rings. Suppose that for each $\Lambda_1$-module $A$ a $\Lambda$-module $T(A)$ is given and that to each $\Lambda_1$-homomorphism $\varphi\colon A \to A'$ a $\Lambda$-homomorphism $T(\varphi)\colon T(A) \to T(A')$ is given such that*
>
> (1) *if $\varphi\colon A \to A$ is the identity, then $T(\varphi)$ is the identity,*
>
> (2) $T(\varphi'\varphi) = T(\varphi')T(\varphi)$ *for $\varphi\colon A \to A'$, $\varphi'\colon A' \to A''$.*
>
> *We then say that the pair of functions $T(A)$, $T(\varphi)$ forms a covariant functor $T$ on the category of $\Lambda_1$-modules with values in the category of $\Lambda$-modules.* [Cartan et Eilenberg 1956, p. 18]

Il n'y aucune explication quant à ce qu'est une catégorie. Pis, le terme « catégorie » ne fait pas partie de l'index [53]. De plus, comme l'illustra déjà la section 2.2, les catégories n'interviennent pas dans la théorie de l'homologie et de la cohomologie formulée par Cartan et Eilenberg. Seules les propriétés des foncteurs jouent un rôle.

Le statut des catégories dans *Foundations of Algebraic Topology* exige un examen plus nuancé, mais n'est au fond guère différent. Le livre de Eilenberg et Steenrod contient un chapitre — le chapitre IV intitulé *Categories and functors* — exclusivement consacré à la présentation de la théorie des catégories. Cependant, ce chapitre arrive après la définition axiomatique des théories de l'homologie. Dans le premier chapitre, Eilenberg et Steenrod définissent la notion de catégorie admissible sans définir auparavant celle de catégorie en général. Les catégories admissibles ne servent que de support pour définir une théorie de l'homologie comme un foncteur qui associe à tout espace topologique un groupe abélien. Pour citer à nouveau Marquis,

> *Hence a category has absolutely no ontological relevance in this context. It is part of the required "preparation" of the data for the translation to take place. If a homology theory is a machine, to use Dieudonné's expression, then the categories involved are simply parts of the machine.* [2009, p. 77]

À la lumière de ces considérations, la compréhension de la théorie des catégories en tant que langage lui fit jouer à ses débuts un rôle dans l'organisation conceptuelle de la topologie et, plus précisément, de la théorie de l'homologie. En effet, de sa

53. Cf. Cartan et Eilenberg [1956, p. 389–390].

création jusqu'en 1957, la théorie des catégories fut envisagée comme un cadre technique pratique, mais ultimement dispensable, pour la topologie algébrique et l'algèbre homologique comme l'affirme Marquis : « *It is probably fair to say that category theory was in this period first and foremost a useful framework for algebraic topology and homological algebra.* » [2009, p. 67] Les espaces topologiques apparurent alors sous un jour nouveau parce qu'appréhendés par l'entremise des concepts propres à la théorie des catégories tels, pour n'en nommer que quelques-uns, ceux de foncteur, de foncteur dérivé, de transformation naturelle et de limite. Pour donner un exemple simple en ce sens, une théorie de l'homologie n'est ni plus ni moins qu'un foncteur. Ce faisant, la topologie s'éloigna de l'approche axiomatico-ensembliste inhérente aux mathématiques modernes, mais sans la remplacer explicitement.

### 2.4.3 Le concept d'espace topologique

L'image de la topologie vers 1956 est donc celle d'une discipline microfracturée. En effet, les livres *Foundations of Algebraic Topology* et *Homological Algebra* de même que la théorie des faisceaux firent en sorte que, comparativement au début des années 1940, l'étude des espaces topologiques se présentait sous un jour passablement différent.

Premièrement, la dizaine d'années au cours desquelles prirent forme la théorie axiomatique de l'homologie, l'algèbre homologique et la théorie des faisceaux vit apparaître plusieurs nouveaux concepts : modules projectif et injectif, foncteur exact, foncteur dérivé, faisceau, faisceau cohérent, cohomologie à valeurs dans un faisceau, etc. Deuxièmement, de nouvelles méthodes furent mises sur pied afin de cerner avec plus de finesse les propriétés des espaces topologiques : méthode des résolutions projectives et injectives, association directe d'un complexe de chaînes à un espace, démonstration basée sur des diagrammes commutatifs, etc. Bref, le développement de la topologie algébrique et de la géométrie algébrique abstraite entre 1945 et 1956 instaura une appréhension inédite des espaces topologiques. De ce point de vue, la théorie axiomatique de l'homologie, l'algèbre homologique et la théorie des faisceaux introduisirent en topologie des éléments rompant avec la perspective moderne, c'est-à-dire des éléments de contemporanéité.

En contrepartie, l'impact des ces ruptures fut mineur en ce qui a trait à la conceptualisation topologique de l'espace puisqu'elles ne l'altérèrent pas. En 1956, les mathématiciens travaillaient toujours sur des espaces découlant des travaux de Hausdorff. Pour les Eilenberg, Steenrod, Cartan, Leray et autres Serre, un espace topologique consistait donc toujours en un ensemble de points $X$ muni d'une topologie, c'est-à-dire une collection $\mathcal{O}(X)$ de sous-ensembles de $X$ tels que l'ensemble vide, l'ensemble $X$ lui-même, l'intersection d'un nombre fini d'ensembles de $\mathcal{O}(X)$ et l'union d'un nombre arbitraire d'ensembles de $\mathcal{O}(X)$ appartiennent à $\mathcal{O}(X)$.

Par exemple, l'axiomatisation avancée par Eilenberg et Steenrod dans *Foundations of Algebraic Topology* clarifia la notion de théorie de l'homologie, c'est-à-dire le processus d'assignation d'invariants algébriques à un espace topologique. Cette axiomatisation permit donc de mieux comprendre une certaine construction sur les espaces topologiques, mais cette avancée ne se répercuta pas sur le concept d'espace topologique lui-même.

Dans le même esprit, la théorie des faisceaux clarifia le passage du local au global dans un espace topologique. À l'instar de l'axiomatisation de Eilenberg et Steenrod, elle permit donc de mieux comprendre le concept et ses propriétés, voire d'en découvrir de nouvelles. Ainsi, Leray établit que l'homologie d'un espace peut être connue par le biais de l'homologie d'une représentation de ce même espace. Cartan mit en lumière que les notions de faisceau et de fibre sont intimement reliées. La théorie des faisceaux raffina certes l'analyse des espaces, mais elle ne chamboula pas le concept d'espace topologique lui-même.

Par ailleurs, la dichotomie entre la topologie générale et la topologie algébrique était plus exacerbée que jamais au milieu des années 1950. Symptomatique de cette division fut la section consacrée à la topologie du Congrès International des Mathématiciens de 1950. Dans son introduction, Hassler Whitney mentionne que la topologie générale a dû être laissée de côté !

> *The subject of algebraic topology and applications was chosen* (...) *because of its great growth in recent years, and the increasingly large contact with other fields of mathematics, in geometry, algebra and analysis. The subject of general topology has moved considerably into the domain of analysis. It was with great regret that the field of point set topology had to be omitted altogether.* [H. Whitney, Proceedings of International Congress of Mathematicians, 1950 cité par James 2001, p. 831]

Le principal facteur dans la radicalisation de cette dichotomie fut le développement de la théorie de l'homotopie. [Marquis 2006, p. 259 ; James 2001, p. 831] En effet, si la topologie algébrique organisée autour de l'homologie avait l'avantage d'être conceptuellement aussi claire que simple et, pour cette raison, très belle, elle avait également l'inconvénient d'être cauchemardesque au plan computationnel.

En comparaison, les CW-complexes que définit J. H. C. Whitehead au début des années 1940 laissaient poindre une simplification computationnelle et firent progressivement jouer un rôle de plus en plus important à la théorie de l'homotopie. La topologie algébrique en vint ainsi à classifier les espaces à type d'homotopie près. Dans ce contexte et par opposition à celui d'une classification à homéomorphisme près, les méthodes ensemblistes de la topologie générale s'avéraient totalement inefficaces.

> *The most significant of these ideas, perhaps, was the concept of homotopy type, the classification of spaces by homotopy equivalence. This circumvented many of the difficulties of the older classification, by homeomorphism. Homology, of course, is a homotopy invariant but many of other topological invariants, such as compactness, are not. In fact the methods of point-set topology are largely irrelevant to homotopy theory, where algebraic methods played an ever-increasing role. Later of course it turned out that homotopy theory could*

> *also be used to help solve many of the old problems of classical topology*. [James 2001, p. 832]

Compte tenu de la prédominance des méthodes algébriques, il ne restait qu'un pas à franchir avant de reléguer la topologie générale au rancart comme avait enjoint Alexander ses collègues de le faire dès 1932 :

> *The vogue for point-set theoretical analysis situs seems to be due, in large part, to the predominating influence of analysis on mathematics in general. Nowadays we tend, almost automatically, to identify physical space with the space of three variables and to interpret physical continuity in the classical function theoretical manner. But the space of three real variables is not the only possible model of physical space, nor is it a satisfactory model for dealing with certain types of problems. Whenever we attack a topological problem by analytic methods it almost invariably happens that to the intrinsic difficulties of the problem, which we can hardly hope to avoid, there are added certain extraneous difficulties in no way connected with the problem itself, but apparently associated with the particular type of machinery used in dealing with it*. [J. W. Alexander, Proceedings of International Congress of des Mathematicians, 1932 cité par James 1999, p. 564]

Bref, le concept d'espace topologique associé au modernisme mathématique était de plus en plus étudié par des méthodes qui devenaient quant à elles de moins en moins modernes. . .

En conclusion, les ruptures dans le développement de l'étude des espaces que représentent chacune des microfractures examinées dans ce chapitre — *Foundations of Algebraic Topology* de Eilenberg et Steenrod, *Homological Algebra* de Cartan et Eilenberg et la théorie des faisceaux — ne furent pas profondes au point d'altérer le concept d'espace topologique. À cet égard, il importe de préciser que, compte tenu des objectifs sous-jacents à l'axiomatisation de l'homologie en topologie algébrique, à la création de l'algèbre homologique ainsi qu'à celle de la théorie des faisceaux, cette persistance du concept d'espace topologique traditionnel ne constituait absolument pas un problème en soi.

La véritable rupture dans l'évolution du concept d'espace topologique ne survint qu'au début des années 1960 alors que Grothendieck fut confronté à l'insuffisance du concept traditionnel dans le cadre de son projet de réforme de la géométrie algébrique.

# Chapitre 3

# Grothendieck et le concept d'espace

Entre 1958 et 1970, l'essentiel du travail mathématique de Grothendieck fut consacré à une refonte de la géométrie algébrique abstraite. Un des objectifs de cette refonte était la résolution des conjectures de Weil.

Interprétées en termes cohomologiques, les conjectures de Weil exigeaient d'associer des invariants topologiques à des variétés algébriques. Grothendieck réalisa rapidement que, bien que la théorie des faisceaux en permette une étude plus fine et approfondie, les espaces topologiques traditionnels étaient intrinsèquement inadaptés à cette tâche.

> Le point de vue et le langage des faisceaux introduit par Leray nous a amené à regarder les "espaces" et "variétés" en tous genres dans une lumière nouvelle. Ils ne touchaient pas, pourtant, à la notion même d'espace, se contentant de nous faire appréhender plus finement, avec des yeux nouveaux, ces traditionnels "espaces", déjà familiers à tous. Or, il s'est avéré que cette notion d'espace est inadéquate pour rendre compte des "invariants topologiques" les plus essentiels qui expriment la "forme" des variétés algébriques "abstraites" (comme celles auxquelles s'appliquent les conjectures de Weil), voire celle des "schémas" généraux (généralisant les anciennes variétés). [Grothendieck 1985, p. P37]

Faisant siennes les innovations de *Foundations of Algebraic Topology*, de *Homological Algebra* et de la théorie des faisceaux, la solution de Grothendieck à ce problème — à la fois technique et conceptuel comme le montrera la section 3.2.1 — consista à remplacer les espaces topologiques hérités de Hausdorff par des espaces d'un type et d'une généralité inédits auxquels il donna le nom de topos.

Dans cette optique, ce n'est donc qu'avec l'avènement des topos qu'eut lieu une véritable rupture dans la conceptualisation topologique de l'espace. En effet, les topos rompent définitivement avec la conception pointilliste de l'espace propre à la topologie générale. Selon le point de vue topossique, un espace topologique n'est pas un ensemble de points et sa structure n'est pas induite par les parties de son ensemble sous-jacent. Au contraire, un espace est une totalité dont, en vertu de sa structure, peuvent être extraits des parties et des points. Ce point de vue rappelle évidemment celui à l'œuvre en topologie combinatoire et algébrique en ce qu'un espace n'est pas composé de ses points. Grothendieck le poussa cependant à son paroxysme puisque les points du topos disposent eux-mêmes d'une structure qui est déterminée par celle de l'espace. Révélateur de la rupture, un topos peut être non vide tout en ayant aucun point. Il existe donc des espaces sans point ce qui était inconcevable dans le cadre mis en place par Hausdorff,

Qui plus est, l'avènement du point de vue des topos en géométrie algébrique inaugura un changement de position normative qui peut se comprendre comme la transition des mathématiques modernes vers les mathématiques contemporaines. En effet, comme les pages suivantes le montreront, la stratégie méthodologique de Grothendieck était d'un type totalement différent par rapport à celles ayant régi l'évolution de la topologie générale, de la topologie combinatoire, mais aussi de la topologie algébrique et de la géométrie algébrique jusqu'au milieu des années 1950.

Ce troisième chapitre se divise en trois sections. Il sera dans un premier temps question de la refonte de la géométrie algébrique et de la place qu'y occupaient les conjectures de Weil. Dans un deuxième temps, les topos seront abordés. L'emphase sera mise sur l'insuffisance du concept d'espace traditionnel, la notion de topologie de Grothendieck et la généralisation de la structure de topologie à laquelle elle donne lieu, le concept d'espace transformé que représentent les topos ainsi que la réconciliation du continu et du discret qu'il incarne. Dans un troisième ordre d'idées, le nouveau concept d'espace mis de l'avant par Grothendieck sera analysé de façon à comprendre la rupture qu'il occasionna.

## 3.1 Le projet d'une refonte de la géométrie algébrique

Loin d'être une initiative isolée, la métamorphose du concept d'espace qu'entraîna le point de vue des topos s'inscrit dans le vaste projet de réforme de la géométrie algébrique qui occupa Grothendieck à partir de la fin des années 1950 et dont l'impulsion originelle provint des conjectures de Weil.

Dans une perspective épistémologique, la pierre de touche de cette réforme fut une approche axiomatico-catégorielle résolument différente de l'approche axiomatico-ensembliste privilégiée durant la première moitié du XX$^{e}$ siècle. Ce faisant, la géométrie algébrique quitta le champ de la modernité pour celui de la contemporanéité mathématique.

Évidemment, dresser un portrait exhaustif des transformations que fit subir Grothendieck à la géométrie algébrique serait une tâche colossale en raison de la quantité et de la complexité des mathématiques impliquées. Qui plus est, une telle présentation de la géométrie algébrique s'éloignerait considérablement du propos principal du présent texte. Cependant, dans la mesure où c'est cette réforme de la géométrie algébrique qui conduisit Grothendieck à définir un nouveau concept d'espace topologique, il est essentiel d'en parler, ne serait-ce que brièvement et en se limitant aux volets qui participèrent à l'apparition dudit concept.

### 3.1.1 Petite histoire des conjectures de Weil

Les conjectures de Weil ont pour origines les travaux de Gauss sur les solutions d'équations polynomiales mod $p$ et l'étude des zéros de la fonction zêta par Riemann. Cette filiation s'explique par le fait que les conjectures de Weil peuvent être considérées comme généralisant l'hypothèse de Riemann sur les corps finis [1].

D'une part, l'étude des lois de réciprocité conduisit Gauss à développer une méthode d'approximation afin de calculer des sommes de Gauss. Par cette même méthode, il parvint à compter le nombre de solutions des congruences de la forme $ax^3 - by^3 \equiv 1 \mod p$ où $p$ est un nombre premier de la forme $3n+1$. Par la suite, il réalisa que cette même méthode permettait également de trouver le nombre de solutions de congruences du type $ax^4 - by^4 \equiv 1 \pmod p$ et $y^2 \equiv ax^4 - b \pmod p$ pour un nombre premier de la forme $p = 4n+1$.

La méthode de Gauss était cependant peu adaptée à l'estimation du nombre de solutions de congruences dans des cas plus généraux. En 1827, Jacobi procéda à un renversement. Il développa une méthode générale afin de compter le nombre de solutions de congruences en prenant les sommes de Gauss comme point de départ.

En 1857, Dedekind développa la théorie arithmétique d'un anneau de polynômes $F_p[x]$ à coefficients dans le corps de congruences $F_p$. L'analogie entre l'arithmétique des polynômes et celle des entiers $\mathbb{Z}$ était désormais parfaite : aux entiers, à la divisibilité des entiers, aux rationnels et aux nombres algébriques correspondaient respectivement les polynômes en $x$, la divisibilité des polynômes, les fonctions rationnelles et les fonctions algébriques.

D'autre part, dans son article « *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegeben Grösse* » de 1859, Riemann appliqua l'analyse complexe à la théorie des nombres. Cela le conduisit à définir la fonction zêta qui porte son nom :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

où $s$ est un nombre complexe tel que $\Re(s) > 1$. La fonction zêta de Riemann a notamment la propriété de satisfaire la relation de Euler :

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{(1 - \frac{1}{p^s})}$$

1. Cet aperçu historique des conjectures de Weil s'inspire de Houzel [1994], l'introduction historique de Dieudonné dans Freitag et Kiehl [1988], N. M. Katz [1976], Osserman [2008] et Weil [1949].

Cela signifie qu'il y a une relation étroite entre les zéros de cette fonction et la distribution des nombres premiers. De plus, elle peut être prolongée en une fonction méromorphe, également notée $\zeta$, munie d'un pôle en $s = 1$ dans le plan complexe et satisfaisant l'équation fonctionnelle $\zeta(s-1) = \zeta(s)$.

C'est dans ce même texte de 1859 qu'est formulée la célèbre hypothèse de Riemann. Celle-ci affirme que les zéros de la fonction zêta sont tous sur la ligne $\Re(s) = 1/2$. En d'autres termes, $\zeta(s) \neq 0$ sur $\Re(s) > 1/2$.

En employant la théorie des idéaux, Dedekind généralisa la fonction zêta et l'hypothèse de Riemann à tout corps algébrique $K$, c'est-à-dire à toute extension finie du corps $\mathbb{Q}$ :

$$\zeta(s) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{N\mathfrak{a}}$$

où $\mathfrak{a}$ est un idéal de l'anneau $\mathfrak{O}_K$ des entiers algébriques de $K$ et $N\mathfrak{a}$ est la norme de l'idéal $\mathfrak{a}$, c'est-à-dire le nombre d'éléments dans l'anneau $\mathfrak{O}_K/\mathfrak{a}$. La relation de Euler devint alors

$$\zeta_K(s) = \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1 - \frac{1}{(N\mathfrak{p})^s}}$$

où $\mathfrak{p}$ désigne un idéal premier de $\mathfrak{O}_K$. En 1917, Erich Hecke démontra que ces fonctions zêta pouvaient être prolongées en des fonctions méromorphes et qu'elles satisfaisaient des équations fonctionnelles généralisées. De ce point de vue, la fonction originelle de Riemann correspond au cas $\mathfrak{O}_K = \mathbb{Z}$. Il n'y avait donc plus une seule fonction zêta, mais autant de fonctions zêta qu'il y a de corps de nombres.

Ces deux voies de recherche seront unifiées par Emil Artin dans sa thèse de 1924 [Artin 1965]. Artin y développe l'arithmétique des extensions quadratiques $K(\sqrt{D})$ du corps $K$ des fractions rationnelles à coefficients dans un corps fini $F_p$ en analogie avec le corps des extensions quadratiques de $\mathbb{Q}$. Dans la deuxième partie de sa thèse — qui porte le sous-titre « Partie analytique » —, Artin étudie une fonction analogue à la fonction zêta de Riemann pour les courbes définies sur les corps finis :

$$Z(s) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{N(\mathfrak{a})}$$

où la somme porte sur tous les idéaux $\mathfrak{a}$ de $K(\sqrt{D})$. En bon analogue de la fonction de Riemann généralisée par Dedekind, la fonction $Z(s)$ satisfait une relation d'Euler et peut être prolongée en une fonction méromorphe satisfaisant une équation fonctionnelle. Elle donne donc lieu à une conjecture analogue à celle de Riemann : les zéros non triviaux de la fonction $Z(s)$ sont tous situés sur la droite $\Re(s) = 1/2$. Ainsi, Artin relia la fonction zêta et les travaux de Gauss sur les congruences puisque que les zéros de la fonction $Z(s)$ permettent d'évaluer le nombre de classes d'idéaux du corps $K(\sqrt{D})$.

En 1931, Friedrich Karl Schmidt poursuivit l'étude des fonctions zêta, mais l'aborda du point de vue de la géométrie algébrique. Schmidt établit une correspondance entre les courbes algébriques et les corps de fonctions algébriques. En effet, étant donnés $k$ un corps commutatif et $K$ un corps algébriquement clos tel que $k \subset K$, une solution dans $K \times K$ d'un polynôme irréductible $P$ à coefficients dans $k$ peut être vue comme une courbe algébrique dans l'espace affine $K \times K$. Schmidt généralise ainsi la fonction zêta d'Artin à toutes les fonctions algébriques sur un corps fini $F_q$ en analogie avec la théorie de Dedekind–Weber des corps de fonctions algébriques sur $\mathbb{C}$.

Un premier pas vers la résolution de l'hypothèse de Riemann sur les corps finis fut franchi par Helmut Hasse. Au Congrès international des mathématiciens d'Oslo en 1936 [2], il montra que l'hypothèse de Riemann est équivalente à l'équation diophantienne

$$|N_1 - (q+1)| \leq 2g\sqrt{q}$$

où $N_1$ est le nombre de diviseurs premiers de degré 1, $g$ est le genre de la courbe et $q$ est le nombre d'éléments du corps des constantes et utilisa cette équivalence afin de démontrer l'hypothèse pour les courbes de genre 1 sur les corps finis, c'est-à-dire dans le cas où $g = 1$.

Hasse conclut son exposé en suggérant qu'une théorie des correspondances adaptée aux corps finis permettrait d'obtenir une démonstration pour une courbe de genre $g$ arbitraire. Sa suggestion était des plus pertinentes puisqu'elle conduisit Weil à une résolution générale du problème.

Quelque quatre ans plus tard, soit en 1940, Weil annonça une preuve de l'hypothèse de Riemann pour les courbes de genre arbitraire sur un corps fini [Weil 1940], mais réalisa rapidement que certaines des étapes envisagées étaient superflues et que la seule théorie des correspondances due au mathématicien italien Francesco Severi suffisait. En 1941, il décrivit dans les *Proceedings of the National Academy of Science of the United States of America* une deuxième démonstration en ce sens [Weil 1941].

Comme l'illustre le recours à la théorie des correspondances, la démonstration décrite par Weil repose sur la transposition des méthodes analytiques de la géométrie algébrique classique sur les variétés complexes aux variétés sur les corps finis. Malheureusement, la géométrie algébrique de l'époque n'encadrait pas le traitement des variétés algébriques sur les corps finis. Autrement dit, la géométrie algébrique de 1940 ne permettait tout simplement pas de construire la démonstration envisagée par Weil.

La solution privilégiée par Weil pour combler cette lacune fut aussi simple qu'ambitieuse : réformer la géométrie algébrique de manière à ce qu'elle constitue un cadre propice à la démonstration annoncée.

> *It should be observed that Severi's treatment, although undoubtedly containing all the essential elements for the solution of the problems it purports to solve,*

2. La bibliographie de N. M. Katz 1976 situe ce congrès en 1930.

> *is meant to cover only the classical case where the field of constants is that of complex numbers, and doubts may be raised as to its applicability to more general cases, especially to characteristic $p \neq 0$. A rewriting of the whole theory, covering such cases, is therefore a necessary preliminary to the applications we have in view*. [Weil 1941, p. 345, n. 2]

Il s'inspira à cette fin de la topologie algébrique et exposa cette nouvelle géométrie algébrique, appelée géométrie algébrique abstraite, dans son livre *Foundations of Algebraic Geometry*, publié en 1946 [Weil 1946].

Dans un premier temps, Weil traite les variétés algébriques dans un espace affine. Une *variété $V$ dans l'espace à $n$ dimensions* est une classe d'équivalence sur les paires $(k, P)$ où $k$ est un corps et $P$ un point de l'espace tel que $k(P)$ est une extension régulière de $k$. Une telle variété $V$ est dite définie sur $k$ ou encore comme ayant $K$ pour corps de définition et $P$ est un point générique de $V$ sur $k$. Weil développe également la théorie des intersections des variétés algébriques dans un espace affine. Il s'agit d'une théorie locale[3].

Il est dans un deuxième temps question de la théorie des variétés abstraites. À l'instar d'une variété topologique qui se définit par recollement de voisinages, une variété abstraite se construit à partir de plusieurs variétés algébriques dans l'espace affine.

> *Modern topology usually defines manifolds by means of overlapping neighborhoods, of homeomorphisms between parts of these neighborhoods, and by identification of corresponding points in these homeomorphisms. A similar procedure can be followed in algebraic geometry* (...) [Weil 1946, p. 166]

Soient $V_\alpha$ $(1 \leq \alpha \leq h)$ des variétés, pour tout $\alpha$, $\mathcal{F}_\alpha$ la frontière de $V_\alpha$ et $T_{\beta\alpha}$ la collection des correspondances birationnelles cohérentes entre $V_\alpha$ et $V_\beta$. Une *variété abstraite* dont les représentants sont les $V_\alpha$ est un triplet $\langle V_\alpha, \mathcal{F}_\alpha, T_{\beta\alpha}\rangle$ satisfaisant la condition suivante : pour tout $\alpha$ et $\beta$, si $P_\alpha$ est un point de $V_\alpha - F_\alpha$ et $P_\beta$ est un point de $V_\beta - F_\beta$ tels que $(P_\alpha, P_\beta)$ est dans $T_{\beta\alpha}$, alors $P_\alpha$ et $P_\beta$ sont des points en correspondance régulière sous $T_{\beta\alpha}$[4].

Weil développe ensuite le calcul des cycles qui peut être vu comme une transposition de la théorie des intersections aux variétés abstraites. À quelques exceptions près, les variétés abstraites possèdent les mêmes propriétés que les variétés algébriques dans un espace affine. En ce sens, le calcul des cycles constitue une extension du langage géométrique, qui est incidemment le titre du chapitre IV consacré aux variétés algébriques dans un espace affine. De plus, le calcul des cycles peut également être vu comme l'analogue de la théorie de l'homologie sur les variétés topologiques.

---

3. Pour plus de détails à propos du critère d'équivalence à la base de la notion de variété algébrique ou sur la théorie des intersections, voir Weil [1946, chapitre IV et VI respectivement].

4. Pour plus de détails, notamment en ce qui a trait aux correspondances cohérentes, voir Weil [1946, chapitre VII].

> *An algebraic calculus of cycles can then be developed, closely analogous to the algebra of homology-classes by modern topologists: the main difference between the two is that, while the latter deals with classes, the former operates with the cycles themselves* (...) [Weil 1946, p. xii]

Il y a donc une dynamique du type local–global entre les variétés algébriques et les variétés abstraites. Les variétés abstraites sont le pendant global, ou « in the large » pour reprendre l'expression de Weil [1946, p. 197], des variétés algébriques dans un espace affine.

Dans le contexte de la géométrie algébrique abstraite telle que développée dans *Foundations of Algebraic Geometry*, la solution esquissée par Weil en 1941 pouvait être développée rigoureusement. Ainsi, en 1948, il fit finalement paraître une démonstration complète de l'hypothèse de Riemann pour les courbes algébriques définies sur les corps finis [Weil 1948].

Or, cet accomplissement soulevait une question mathématique naturelle : dans la mesure où les courbes peuvent être vues comme des variétés de dimension 1, les variétés algébriques de dimensions supérieures sur des corps finis possèdent-elles des propriétés similaires ?

Cette question conduisit Weil à formuler les célèbres conjectures qui portent son nom dans un article de 1949 intitulé « *Numbers of Solutions of Equations in Finite Fields* » [Weil 1949]. Il y considère une variété algébrique $V$ de dimension $n$ sur un corps fini $k$ à $q$ éléments définie par une équation de la forme

$$a_0 x_0^{n_0} + a_1 x_1^{n_1} + \cdots + a_r x_r^{n_r} = 0$$

Il pose $N_m$ le nombre de solutions de cette équation dans l'extension $k_m$ de $k$. La fonction zêta d'une telle variété est la série

$$Z_V(t) = \exp \sum_{m=1}^{\infty} N_m \frac{t^m}{m}$$

Les conjectures de Weil postulent que la fonction zêta d'une telle variété possède les propriétés suivantes :

1. la fonction $Z(t)$ est une fonction rationnelle ;
2. la fonction $Z(t)$ satisfait une équation fonctionnelle :

   $$Z\left(\frac{1}{q^n t}\right) = q^{n\chi/2} t^{\chi} Z(t)$$

   où $\chi$ est la caractéristique de Euler–Poincaré de la variété $V$ ;
3. il existe des polynômes $P_0, P_1, \ldots, P_n$ à coefficients entiers tels que

   $$Z(t) = \frac{P_1(t)P_3(t)\ldots P_{2n-1}(t)}{P_0(t)P_2(t)\ldots P_{2n}(t)}$$

où $P_0(t) = 1 - t$, $P_{2n}(t) = 1 - q^n t$ et tels que, pour $1 \leq h \leq 2n-1$

$$P_h(t) = \prod_{i=1}^{B_h}(1 - \alpha_{h_i} t)$$

où les $\alpha_{h_1}$ sont des entiers algébriques tels que $|\alpha_{h_1}| = q^{h/2}$ ;

4. si les nombres de Betti de la variété $V$ sont définis comme étant les degrés $B_h$ des polynômes $P_h(t)$, alors la caractéristique de Euler–Poincaré est

$$\chi = \sum_{h=0}^{2n}(-1)^h B_h$$

De plus, si $\overline{V}$ est une variété sans point singulier sur un corps $K$ de nombres algébriques, alors les nombres de Betti des variétés $V_{\mathfrak{p}}$ obtenues par réduction modulo un idéal premier $\mathfrak{p}$ de $K$ sont égaux aux nombres de Betti, au sens topologique, de $\overline{V}$, sauf peut-être pour un nombre fini de $\mathfrak{p}$.

Les trois premières conjectures s'inscrivent dans la continuité de la fonction zêta de Riemann. À titre de rappel, la fonction zêta de Riemann et celles qu'elle inspira sont des fonctions rationnelles et peuvent être représentées par des équations fonctionnelles. De plus, l'hypothèse de Riemann stipule que les zéros de la fonction zêta sont sur la droite $\Re(s) = 1/2$. Similairement, la fonction zêta définie par Weil est une fonction rationnelle et peut être exprimée à l'aide d'une équation fonctionnelle. La troisième conjecture — $|\alpha_{h_i}| = q^{h/2}$ — est quant à elle l'analogue de l'hypothèse de Riemann : elle stipule la position des zéros de la fonction zêta.

En ce sens, les conjectures de Weil poussent plus loin les liens entre la théorie des nombres et la géométrie algébrique que suggérait déjà l'hypothèse de Riemann et dont était pleinement conscient Weil : « (...) *the Riemann hypothesis expresses truly number-theoretical properties of algebraic number field.* » [1974, p. 103]

Par ailleurs, la quatrième conjecture de Weil relie l'étude des variétés algébriques et la topologie algébrique. Les nombres de Betti d'une variété algébrique, soient les degrés des polynômes $P_h(t)$, correspondent à la dimension des groupes d'homologie d'une variété au sens topologique. Comme le dit Katz, la forme de la fonction zêta est déterminée par la structure cohomologique de la variété : « *The moral is that the topology of the complex point of* $\mathbb{X}$, *expressed through the classical cohomology groups* $H^i(\mathbb{X}, \mathbb{C})$, *determines the form of the zeta function of* $X$, *i.e. determines the diophantine shape of* $X$ [5]. » [1976, p. 281] Les propriétés géométriques des variétés algébriques sont donc liées à leur structure topologique.

5. Katz utilise une notation différente de Weil : $X$ et $\mathbb{X}$ correspondent respectivement à $V$ et $\overline{V}$.

### 3.1.2 Les conjectures de Weil à travers le prisme cohomologique

Au Congrès international des mathématiciens de 1954, Weil [1956] suggéra un argument heuristique susceptible de démontrer les conjectures. L'idée est d'interpréter l'hypothèse de Riemann généralisée comme portant sur les points fixes de l'endomorphisme de Frobenius, lequel associe à tout élément sa $p^{\text{e}}$ puissance.

Soit $V$ une variété sur un corps $k$ à $q$ éléments. Pour tout entier $v$, il existe une correspondance

$$\begin{aligned} I_v \colon V &\to V \\ (x_1, \ldots, x_N) &\mapsto (x_1^{q_v}, \ldots, x_N^{q_v}) \end{aligned}$$

Alors, les points fixes de $I_v$ sont précisément ces points dont les coordonnées sont dans l'extension $k_v$ de degré $v$ de $k$. Weil désigne par $N_v$ le nombre de ces points. Dans le cas classique d'une variété compacte sans point singulier, le nombre de points fixes d'une telle correspondance est donné par la formule de Lefschetz :

$$N_v = \sum_{h=0}^{2n} (-1)^h \sum_{i=1}^{B_h} (\alpha_{hi})^v$$

où $n$ est la dimension de $V$, $B_h$ le nombre de Betti de dimension $h$ et les $\alpha_{hi}$ $(1 \leq i \leq B_h)$ sont les racines de l'endomorphisme sur le groupe de Betti $B_h$. Weil émet donc l'hypothèse que le nombre de points fixes d'une correspondance $I_v$ soit donné par une formule de Lefschetz :

> *This makes it plausible that in the case described above the number $N_v$ of fixed points of the correspondence $I_v$ is given by a formula of this type.*
>
> *Not only has this be found to be so in all cases where $N_v$ could actually be computed, but it turns out that the $\alpha_{hi}$ are of absolute value $q^{h/2}$ in all such cases. For $n = 1$ the latter is precisely the Riemann hypothesis; if true in general, it is therefore the generalization we have been looking for*. [1956, p. 556]

Rapidement, l'argument heuristique fut interprété en termes cohomologiques. En effet, toute théorie de la cohomologie donne lieu à une formule de point fixe de Lefschetz. Donc, en développant une théorie cohomologique appropriée — notion qui devait en soi être clarifiée —, il deviendrait possible de démontrer les conjectures [6].

6. Il semble que cette interprétation soit due à Weil lui-même. Dieudonné [1989*a*, p. 304] écrit : (...) *define, for algebraic varieties over fields of* arbitrary *characteristic, cohomology groups with coefficients in a field of* characteristic *0, with the properties staked out by A. Weil in order to prove his famous conjectures*. De plus, Krömer rapporte que Weil expliquait les conjectures en termes cohomologiques [2007, p. 180]. Par ailleurs, Serre joua assurément un grand rôle dans la prédominance de cette interprétation. C'est notamment en de tels termes qu'il expliqua les conjectures à Grothendieck vers 1955 comme rappelle ce dernier dans *Récoltes et semailles*. Voir la prochaine citation, p. 158. Indépendamment de cette question de paternité, qui demeure secondaire, il ne fait aucun doute que Serre et Grothendieck furent parmi les rares, si ce n'est les seuls, à croire qu'une telle théorie était possible : « Personne n'avait la moindre idée comment définir une telle cohomologie, et je ne suis pas sûr que personne d'autre que Serre et moi, pas même Weil si ça se trouve, avait seulement l'intime conviction que ça devait exister. » [Grothendieck 1985, p. 840]

Interprétée en termes cohomologique, la théorie recherchée associerait à toute variété $V$ de dimension $n$ sur un corps fini $k$ une suite d'espaces vectoriels $H^i(V)$ à coefficients dans un corps $K$ de caractéristique 0 de manière à satisfaire les propriétés suivantes :

(1) Dualité de Poincaré :
   (a) $H^i(V) = 0$ sauf si $0 \leq i \leq 2n$ ;
   (b) il y a un isomorphisme naturel $H^{2n}(V) \approx K$ ;
   (c) $H^i(V) \times H^{2n-i}(V) \to H^{2n}(V)$ est une dualité parfaite.

(2) Formule de Künneth : pour toutes variétés $V_1$ et $V_2$ sans point multiple, il existe un isomorphisme naturel

$$H^*(V_1) \otimes_K H^*(V_2) \approx H^*(V_1 \times V_2)$$

(3) Classe de cohomologie d'un cycle : étant donné $C^i(V)$ le groupe des cycles algébriques de dimension $i$, il existe un homomorphisme $\gamma_V \colon C^i(V) \to H^{2i}(V)$ qui satisfait les propriétés suivantes :
   (a) fonctorialité : si $f \colon X \to Y$ est un morphisme, alors $f^*\gamma_V = \gamma_V f^*$ et $f_*\gamma_V = \gamma_V f_*$ ;
   (b) multiplication : $\gamma_{V\times V}(c_1 \times c_2) = \gamma_V(c_1) \times \gamma_V(c_2)$ où $c_1$ et $c_2$ sont des cycles algébriques ;
   (c) non-trivialité : pour tout point ou 0-cycle $c$, $\gamma_c \colon C^*(c) \to H^*(c)$ est l'inclusion $\mathbb{Z} \to k$.

(4) Théorèmes de Lefschetz : le nombre de points fixes d'un morphisme $f \colon V \to V$ est donné par la formule de Lefschetz $N = \sum_{i=0}^{2n}(-1)^i \operatorname{Tr}(f^i)$ [7].

L'argument heuristique esquissé par Weil dans son allocution de 1954 mena donc à une appréhension nouvelle, c'est-à-dire cohomologique, des conjectures et, par le fait même, transforma le problème que celles-ci représentaient. En effet, l'objectif n'était plus tant de démontrer que la fonction zêta possède telle et telle propriétés, mais plutôt de développer une théorie cohomologique adaptée aux variétés sur des corps finis. L'appréhension cohomologique des conjectures de Weil proposait donc de s'attaquer à un problème duquel elles se déduiraient.

Sous l'influence de Serre, Grothendieck adopta ce point de vue et baptisa une telle théorie une cohomologie de Weil. Il relate dans *Récoltes et semailles* qu'il fut initié aux conjectures de Weil par Serre qui les lui présenta en de tels termes : « C'est en termes cohomologiques, en tous cas, que Serre m'a expliqué les conjectures de Weil,

7. Tout porte à croire que Grothendieck est responsable de ces conditions. Dans sa conférence d'Édimbourg de 1958 [Grothendieck 1960*a*], Grothendieck mentionne la dualité et la formule de Künneth à titre d'exemples. Cela suggère qu'il avait déjà à tout le moins une certaine idée des conditions requises. Étrangement, la définition définitive d'une cohomologie de Weil semble être celle de Kleiman [1968] et date de 1967.

vers les années 1955 — et ce n'est qu'en ces termes qu'elles étaient susceptibles de m'"accrocher" en effet. » [1985, p. 840] La conférence de Grothendieck au Congrès international des mathématiciens de 1958 à Édimbourg confirme qu'il aborda les conjectures de Weil de cette manière :

> *The need of a theory of cohomology for 'abstract' algebraic varieties was first emphasized by Weil, in order to be able to give a precise meaning to his celebrated conjectures in Diophantine Geometry. Therefore, the initial aim was to find the* 'Weil cohomology' of an algebraic variety*, which should have as coefficients something 'at least as good' as a field of* characteristic 0*, and have such formal properties (e.g. duality, Künneth formula) as to yield the analogue of Lefschetz's 'fixed-point formula'*. [1960*a*, p. 103]

Entre-temps, Serre avait déjà considéré quelques candidates au titre de cohomologie de Weil.

La première théorie qu'il envisagea fut la cohomologie des faisceaux, originellement développée par Cartan et lui-même et qu'il avait transposée à la géométrie algébrique dans son article « Faisceaux algébriques cohérents » dont il fut déjà question à la section 2.3.3. Il s'agissait d'une candidate naturelle dans la mesure où elle s'appliquait aux variétés définies sur des corps algébriques fermés de caractéristique $p$, soient précisément les objets au centre des conjectures de Weil.

Dès le départ, Serre était pleinement conscient que la cohomologie à valeurs dans un faisceau ne pourrait pas être la cohomologie de Weil puisque, dans le cas d'une variété définie sur un corps de base de caractéristique $p > 0$, les groupes obtenus ne permettent que de définir une formule de Lefschetz modulo $p$ et donc de compter le nombre de points $N_v \bmod p$. [N. M. Katz 1976, p. 283] Il espérait cependant à tout le moins que la cohomologie faisceautique puisse définir les nombres de Betti des variétés algébriques. Il suggère en effet dans « Faisceaux algébriques cohérents » que les nombres de Betti d'une variété algébrique sur un corps fini, c'est-à-dire ceux requis par les conjectures de Weil, soient donnés par ceux d'une variété projective :

> Dans le cas général, on pourrait prendre la formule précédente [8] pour *définition* des nombres de Betti d'une variété projective sans singularités (...) Il conviendrait d'étudier leurs propriétés et notamment de voir s'ils coïncident avec ceux qui interviennent dans les conjectures de Weil relatives aux variétés sur les corps finis. Signalons seulement ici qu'ils vérifient la "dualité de Poincaré" $B_n = B_{2m-n}$ lorsque $V$ est irréductible et de dimension $m$. [1955, p. 233]

Malheureusement, la cohomologie à valeur dans un faisceau se révéla également inadéquate à cet égard [9].

Par la suite, Serre considéra une autre candidate susceptible de jouer le rôle de cohomologie de Weil : la cohomologie à valeurs dans des faisceaux de vecteurs de Witt.

8. $B_n = \sum_{p+q=n} h^{p,q}$ avec $h^{p,q} = \dim H^q(V, \omega^p)$ où $V$ est une variété sans singularités et $\omega^p$ est un certain faisceau.

9. Voir Serre [1958, p. 24] pour une explication succincte.

Soit $p$ un nombre premier et $A$ un anneau de caractéristique $p$. Un vecteur de Witt est un système $\alpha = (a_0, \dots, a_{n-1})$ où $a_i \in A$. Ces vecteurs forment un anneau : l'anneau des vecteurs de Witt de longueur $n$ à coefficients dans $A$, noté $W_n(A)$. Serre introduit trois opérations sur ces anneaux : l'endomorphisme de Frobenius, l'opération de décalage et l'opération de restriction. Par exemple, cette dernière est définie comme suit :

$$\begin{aligned} R\colon W_{n+1}(A) &\to W_n(A) \\ (a_0, \dots, a_n) &\mapsto (a_0, \dots, a_{n-1}) \end{aligned}$$

Les opérations de décalage et de restriction sont des homomorphismes d'anneaux.

Serre définit alors l'anneau $W(A)$ des vecteurs de Witt de longueur infinie comme la limite projective des $W_n(A)$ reliés par les homomorphismes $R$. Cet anneau a l'importante propriété d'être de caractéristique 0.

Il ne reste alors plus qu'à construire la cohomologie à valeurs dans un faisceau de vecteurs de Witt. Soient $V$ une variété algébrique définie sur un corps algébriquement clos $k$ de caractéristique $p$ et $\mathcal{O}$ le faisceau des anneaux locaux de $V$. Pour tout $x \in \mathcal{O}$, l'anneau $\mathcal{O}_x$ est de caractéristique $p$. Ainsi, pour $n \geq 1$, Serre considère un anneau de vecteurs de Witt $W_n(\mathcal{O}_x)$. Ces anneaux $W_n(\mathcal{O}_x)$ forment un faisceau d'anneaux $\mathcal{W}_n$. La théorie de la cohomologie des faisceaux permet donc de définir les groupes de cohomologie $H^q(V, \mathcal{W}_n)$, $q \geq 0$, de la variété $V$ à valeurs dans $\mathcal{W}_n$ [10].

Dans la perspective des conjectures de Weil, les groupes de cohomologie à valeurs dans des faisceaux de vecteurs de Witt représentent un pas en avant comparativement à la cohomologie des faisceaux puisque les groupes de cohomologie du type de Witt sont de caractéristique 0. Ils peuvent donc induire une formule de Lefschetz adéquate. En contrepartie, les groupes $H^q(V, \mathcal{W}_n)$ ne sont pas nécessairement des modules de type fini [11]. La cohomologie à valeurs dans un faisceau de vecteurs de Witt ne peut donc être la cohomologie de Weil.

Aux yeux de Grothendieck, il devint alors évident que la construction de la cohomologie de Weil devait être envisagée autrement comme il l'annonça dans l'introduction de son allocution à Édimbourg en 1958 : « (...) *it seems certain now that the Weil cohomology has to be defined by a completely different approach.* » [1960*a*, p. 103] Son idée était d'aborder les conjectures de Weil par le biais de l'algèbre homologique. Cela exigeait toutefois une refonte de la géométrie algébrique abstraite.

### 3.1.3 Le renouvellement catégoriel de la géométrie algébrique

Au Congrès International des mathématiciens de 1958, Grothendieck annonça son projet d'une refonte de la géométrie algébrique. Ce faisant, il mit en branle un vaste chantier qui l'occuperait jusqu'à son départ de l'Institut des Hautes Études Scientifiques en septembre 1970.

10. Pour une présentation détaillée, voir Serre [1958, §1].
11. Voir Serre [1958, p. 31–34].

> Dans la conférence qu'il prononça au Congrès International d'Edimbourg en 1958, il mentionne pour la première fois le grand dessein qui va être au centre de ses préoccupations durant dix ans : définir pour les variétés algébriques sur un corps de caractéristique $p > 0$ des groupes de cohomologie à coefficients dans un corps *de caractéristique* 0, ayant les propriétés énumérées par Weil en vue de démontrer ses fameuses conjectures. Sans dévoiler encore les détails de la méthode qu'il envisageait pour y parvenir, Grothendieck conçoit qu'il lui faut pour cela procéder à une *refonte de toute la Géométrie algébrique* — semblable à celle que Weil avait lui-même dû faire dans ses "Foundations" en vue d'établir ses conjectures pour le cas particulier des courbes. Il en esquisse les traits principaux, qu'il allait développer dans les milliers de pages d'articles et de Séminaires que l'on connaît. [Dieudonné 1990, p. 6]

Les proportions titanesques que prirent ce chantier et auxquelles fait allusion Dieudonné font partie du folklore mathématique : plus de douze années de travail, une équipe de collaborateurs et d'étudiants et, bien sûr, les plusieurs milliers de pages que représentent les quatre volumes d'*Éléments de géométrie algébrique* — sur les douze prévus ! —, les sept volumes du *Séminaire de géométrie algébrique*, les articles, etc.

Une des principales motivations de ce chantier était naturellement la démonstration des conjectures de Weil, mais, nonobstant leur complexité et la fascination qu'elles pouvaient exercer, la portée du projet n'en était pas moins beaucoup plus vaste. En effet, la pierre de touche de la refonte envisagée par Grothendieck était la pleine intégration des méthodes de l'algèbre homologique à la géométrie algébrique.

Dans cette optique, la méthode de Grothendieck pour solutionner les conjectures de Weil consiste à les inscrire dans un cadre théorique où s'intègrent l'algèbre homologique et la géométrie algébrique. Conformément à son postulat méthodologique fondamental, elles se résoudront en vertu de leur inscription dans un tel cadre.

#### 3.1.3.1 La méthode de la mer qui monte

Dans *Récoltes et semailles*, Grothendieck oppose deux méthodes de résolution d'un problème mathématique et, afin de bien faire comprendre ce qui les distingue l'une de l'autre, développe une analogie entre la résolution d'un problème et l'ouverture d'une noix. Plus généralement, ces deux méthodes renvoient à deux façons de faire des mathématiques et à deux conceptions diamétralement opposées du travail du mathématicien.

La première méthode consiste à démontrer directement le problème, c'est-à-dire à l'attaquer de front. Par exemple, pour démontrer qu'un objet satisfait une propriété donnée, le mathématicien pourra se référer à la définition de ladite propriété et tenter de la déduire à partir de celles déjà connues de l'objet en question.

> Prenons par exemple la tâche de démontrer un théorème qui reste hypothétique (à quoi pour certains semblerait se réduire le travail mathématique). Je vois deux approches extrêmes pour s'y prendre. L'une est celle du marteau et

> du burin, quand le problème posé est vu comme une grosse noix, dure et lisse, dont il s'agit d'atteindre l'intérieur, la chair nourricière protégée par la coque. Le principe est simple : on pose le tranchant du burin contre la coque, et on tape fort. Au besoin, on recommence en plusieurs endroits différents jusqu'à ce que la coque se casse — et on est content. [Grothendieck 1985, p. 552]

Attaquer un problème de front revient à utiliser la force pour casser la coque d'une noix, pour venir à bout de sa résistance naturelle. La force requise est donc directement proportionnelle à la dureté de la noix. Par analogie, le mathématicien empoigne les outils à sa disposition et, tout en cherchant le bon angle d'attaque, les emploie successivement jusqu'à ce que le problème cède. Une certaine virtuosité technique, c'est-à-dire une capacité de faire des raisonnements complexes et élaborés ou encore d'attaquer des problèmes d'un angle inusité, est ici un immense atout.

La seconde méthode, élément essentiel de la contemporanéité qui se dégagea des recherches de Grothendieck, consiste à inscrire le problème dans un cadre théorique qui rendra triviale sa résolution. Pour reprendre la métaphore de Grothendieck, au lieu de vaincre la résistance de la noix par la force, il suffit de la placer dans un milieu ambiant qui fera disparaître la résistance naturelle de sa coque.

> Je pourrais illustrer la deuxième approche, en gardant l'image de la noix qu'il s'agit d'ouvrir. La première parabole qui m'est venue à l'esprit tantôt, c'est qu'on plonge la noix dans un liquide émollient, de l'eau simplement pourquoi pas, de temps en temps on frotte pour qu'elle pénètre mieux, pour le reste on laisse faire le temps. La coque s'assouplit au fil des semaines et des mois — quand le temps est mûr, une pression de la main suffit, la coque s'ouvre comme celle d'un avocat mûr à point ! [Grothendieck 1985, p. 553]

Grothendieck lui donne le nom de méthode de la mer qui monte.

> L'image qui m'était venue il y a quelques semaines était différente encore, la chose inconnue qu'il s'agit de connaître m'apparaissait comme quelque étendue de terre ou de marnes compactes, réticente à se laisser pénétrer. On peut s'y mettre avec des pioches ou des barres à mines ou même des marteaux-piqueurs : c'est la première approche, celle du "burin" (avec ou sans marteau). L'autre est celle de la **mer** [12]. La mer s'avance insensiblement et sans bruit, rien ne semble se casser rien ne bouge l'eau est si loin on l'entend à peine... Pourtant elle finit par entourer la substance rétive, celle-ci peu à peu devient une presqu'île, puis une île, puis un îlot, qui finit par être submergé à son tour, comme s'il s'était finalement dissous dans l'océan s'étendant à perte de vue... [1985, p. 553]

Au lieu de s'y attaquer directement, cette méthode laisse la mer submerger le problème de manière à ce qu'il disparaisse, c'est-à-dire qu'il ne représente plus aucune difficulté, qu'il devienne totalement trivial.

Pour Grothendieck, laisser la mer monter signifie construire une théorie autour du problème. L'idée est de construire un échafaudage conceptuel qui rende évidente la réponse au problème. Autrement dit, le problème est circonscrit conceptuellement

12. Grothendieck fait grand usage du gras dans *Récoltes et semailles.*

de manière à ce qu'il tombe de lui-même, à ce qu'il ne soit plus un problème en quelque sorte ; il devient une conséquence triviale du système dans lequel il s'inscrit désormais. Cartier décrit ce mode de résolution par submersion comme suit :

> La méthode favorite de Grothendieck s'apparente à celle de Josué à la conquête de Jericho. Il faut emporter la place, mais en construisant un système de sapes autour du problème : à un moment donné, sans qu'on ait vraiment à livrer bataille, tout tombe. [2000, p. 17]

Chaque étape menant à la résolution définitive d'un problème est pour ainsi dire triviale en ce qu'elle apparaît parfaitement naturelle, en ce qu'elle semble aller de soi à la lumière de la théorie élaborée.

Or, cette succession d'étapes évidentes ne signifie pas que la méthode de la mer qui monte conduit inexorablement à des résultats banals. Le propre de cette méthode est précisément de rendre simples des problèmes *a fortiori* extrêmement difficiles au plan technique ou conceptuel, c'est-à-dire des problèmes dont la résolution, pour faire allusion à la métaphore de la noix, exigerait énormément de force brute. Deligne écrit à ce sujet :

> Je me rappelle mon effarement, en 1965–1966 après l'exposé de Grothendieck [*SGA* 5] prouvant le théorème de changement de base pour $Rf_!$ : dévissages, dévissages, rien ne semble se passer et pourtant à la fin de l'exposé un théorème clairement non trivial était là. [Deligne 1998, p. 12]

En construisant une théorie autour du problème, cette méthode tire au clair les ramifications conceptuelles qui lui sont sous-jacentes. Pour utiliser une image, la difficulté se dissout dans la théorie.

Du point de vue de Grothendieck, le succès de cette méthode de résolution de problèmes est indissociable du caractère hautement abstrait et général de ses théories. En effet, c'est précisément cette incessante montée en abstraction qui permet de tirer au clair une situation mathématique en dégageant ce qu'elle a de plus logiquement et conceptuellement fondamental. La méthode de Grothendieck se caractérise en ce sens par un mécanisme de simplification par abstraction. À cet égard, le fait que Grothendieck se place dans un cadre catégoriel révèle que, à ses yeux, l'approche axiomatico-ensembliste associée aux mathématiques modernes serait inadéquate pour implanter ce mécanisme [13].

Par exemple, dans la seconde moitié des années 1960, la refonte de la géométrie algébrique était bien entamée et s'avérait déjà extrêmement fructueuse puisque, des conjectures de Weil, il ne restait que l'hypothèse de Riemann généralisée à démontrer [14]. Malgré de tels succès, Grothendieck n'en attaqua pas moins le problème restant qu'indirectement. S'inspirant d'une idée de Serre, il formula une nouvelle série

13. Curieusement, Grothendieck ne se prononça jamais sur ce qui le conduisit à avoir systématiquement recours à la théorie des catégories à partir du milieu des années 1950.

14. La résolution des conjectures de Weil sera abordée sous son angle historique à la section 3.2.4.4.

de conjectures, appelées conjectures standards, qui impliquaient celles de Weil [15]. Dans une lettre à Weil dont un extrait fut publié sous le titre « Analogues kählériens de certaines conjectures de Weil » [Serre 1960], Serre indiquait que certains procédés de la théorie de Hodge permettaient d'obtenir des résultats analogues aux conjectures pour les variétés de dimensions arbitraires. Par exemple, Serre y formule un théorème analogue à l'hypothèse de Riemann :

> Théorème 1. Soit $V$ une variété projective irréductible, non singulière, définie sur le corps $C$ des nombres complexes, et soit $f : V \to V$ un morphisme de $V$ dans elle-même. Supposons qu'il existe un entier $q > 0$ et une section hyperplane $E$ de $V$ tels que le diviseur $f^{-1}(E)$ soit algébriquement équivalent à $q \cdot E$. Alors, pour tout entier $r \geq 0$, les valeurs propres de l'endomorphisme $f_r^*$ de $H^r(V, C)$ défini par $f$ ont pour valeur absolue $q^{r/2}$. [1960, p. 392]

Il suffit de remplacer le corps des complexes par un corps fini $F_q$ et $f$ par l'endomorphisme de Frobenius.

Grothendieck interpréta cette idée comme suggérant de transposer la théorie de Hodge pour les variétés sur le corps des complexes à la géométrie algébrique abstraite.

> J'avais d'ailleurs dégagé, vers l'année 1968, une version plus forte et surtout, plus "géométrique" des conjectures de Weil. Celles-ci restaient "entachées" (si on peut dire !) d'un aspect "arithmétique" apparemment irréductible, alors que pourtant l'esprit même de ces conjectures est d'exprimer et de saisir "l'arithmétique" (ou le "discret") par la médiation du "géométrique" (ou du "continu"). En ce sens, la version des conjectures que j'avais dégagée me paraît plus "fidèle" que celle de Weil lui-même à la "philosophie de Weil" — à cette philosophie non écrite et rarement dite, qui a été peut-être **la** principale motivation tacite dans l'extraordinaire essor de la géométrie au cours des quatre décennies écoulées. Ma reformulation a consisté, pour l'essentiel, à dégager une sorte de "quintessence" de ce qui devait rester valable, dans le cadre des variétés algébriques dites "abstraites", de la "classique" théorie de Hodge, valable pour les variétés algébriques "ordinaires". J'ai appelé "**conjectures standard**" [*sic*] (pour les cycles algébriques) cette nouvelle version, entièrement géométrique, des fameuses conjectures. [Grothendieck 1985, p. P44]

Le passage de l'hypothèse de Riemann aux conjectures standards est donc un moyen de tirer au clair ce qui, conceptuellement, est réellement à l'œuvre dans la première [16].

Pour Grothendieck, deux conceptions du travail mathématique découlent de la distinction entre ces deux méthodes. Le travail mathématique peut d'abord être vu comme se réduisant à la résolution de problèmes et à la démonstration de théorèmes. Dans ce cas, Grothendieck voit le mathématicien comme s'inscrivant dans une tradition qu'il parfait et perpétue. La méthode de la mer qui monte, c'est-à-dire

15. Toujours à la section 3.2.4.4, les conjectures standards seront présentées de manière plus détaillée.

16. Les conjectures standards étaient également reliées à la théorie des motifs. Il en sera brièvement question à la section 3.2.4.

la construction de théories qui auront pour conséquence la résolution de problèmes donnés, débouche sur une autre façon de faire des mathématiques. Le mathématicien est dans ce cas un bâtisseur [17]. Grothendieck se voit évidemment comme appartenant à cette seconde catégorie de mathématiciens.

À la lumière de ces considérations, Grothendieck aborde la résolution des conjectures de Weil comme se résumant à la construction de la théorie qui les rendra évidentes. Il est même tentant, au risque d'un jeu de mots douteux, de parler de la maison-mer des conjectures de Weil. Tel que mentionné auparavant, ceci signifiait réformer la géométrie algébrique abstraite de manière à ce qu'elle incorpore les méthodes de l'algèbre homologique.

#### 3.1.3.2 Un renouvellement de l'algèbre homologique

En 1957, Grothendieck publia un article intitulé « Sur quelques points d'algèbre homologique » dans le *Tohoku Journal of Mathematics* [Grothendieck 1957] dans lequel il réorganisa l'algèbre homologique au grand complet sur la base du langage fonctoriel [18]. L'algèbre homologique à sa disposition et qu'il avait pour objectif d'intégrer à la géométrie algébrique n'était donc plus celui de Cartan et Eilenberg.

L'objectif fondamental de « Sur quelques points d'algèbre homologique » est simple : unifier l'homologie des espaces et l'homologie des structures algébriques :

> Ce travail a son origine dans l'analogie formelle entre la théorie de la cohomologie d'un espace à coéfficients [*sic*] dans un faisceau et la théorie des foncteurs dérivés de foncteurs de modules pour trouver un cadre commun permettant d'englober ces théories et d'autres. [Grothendieck 1957, p. 119]

Tel que vu à la fin de la section 2.2.4, seule la cohomologie de structures algébriques telles les groupes, les algèbres de Lie et les algèbres associatives pouvaient être décrites en termes de foncteurs dérivés. La cohomologie faisceautique d'un espace ne pouvait donc être comprise selon le modèle mis de l'avant dans *Homological Algebra*. Réciproquement, la théorie des faisceaux ne pouvait être utilisée pour rendre compte des invariants cohomologiques de structures algébriques.

L'analogie formelle, pour reprendre l'expression de Grothendieck, était pourtant on ne peut plus évidente.

---

17. Grothendieck [1985, p. P11–P15] développe à ce sujet une analogie entre les théories mathématiques et les maisons. Certains s'installent dans des maisons dont ils héritent, d'autres les bâtissent.

18. Il y a une similitude frappante entre le titre de l'article de Grothendieck — « Sur quelques points d'algèbre homologique » — et celui de la thèse de Fréchet — « Sur quelques points d'analyse fonctionnelle ». Pourquoi ? Grothendieck n'en souffle mot. Peut-être voyait-il une ressemblance méthodologique entre l'introduction, par Fréchet, des espaces abstraits pour développer les fondements du calcul fonctionnel et celle des catégories abéliennes par l'entremise desquelles il clarifiait la théorie de l'homologie ? Comparativement aux catégories des ensembles, des groupes, des espaces topologiques, etc. utilisées jusqu'alors, les catégories abéliennes sont effectivement des catégories abstraites.

D'une part, étant donné un espace topologique $X$, une théorie de la cohomologie est un foncteur de la catégorie des faisceaux sur $X$ vers la catégorie des groupes abéliens. À tout faisceau $\mathcal{F}$ sur $X$ et à tout morphisme de faisceaux $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$, ce foncteur associe respectivement des groupes abéliens $H^q F$ et des homomorphismes de groupes $H^q f\colon H^q\mathcal{F} \to H^q\mathcal{F}'$. Ce foncteur a notamment la propriété que, pour $q > 0$, $H^q\mathcal{F} = 0$ pour tout faisceau fin [19].

D'autre part, étant donné, par exemple, un groupe $G$, une théorie cohomologique est un foncteur de la catégorie des $G$-modules vers la catégorie des groupes abéliens. Ce foncteur associe à tout module $M$ des groupes abéliens $H^q M$ et, à tout morphisme de modules $f\colon M \to M'$, des homomorphismes $H^q f\colon H^q M \to H^q M'$. Les propriétés de ces groupes de cohomologie sont les mêmes que celles des groupes associés à un espace topologique, à l'exception près qu'ils s'annulent pour les modules injectifs : pour $q > 0$, $H^q M = 0$ pour tout module injectif $M$ [20].

En résumé, la cohomologie des espaces topologiques était basée sur la méthode des résolutions fines alors que la cohomologie des structures algébriques était plutôt basée sur celle des résolutions injectives.

L'unification de ces deux types de théories qu'accomplit Grothendieck dans « Sur quelques poins d'algèbre homologique » repose sur une idée toute simple : remplacer la catégorie des modules par une catégorie plus générale.

> Je me suis aperçu qu'en formulant la théorie des foncteurs dérivés pour des catégories plus générales que les modules, on obtient à peu de frais en même temps la cohomologie des espaces à coefficients dans un faisceau : on prend la catégorie des faisceaux sur l'espace donné $X$, on y considère le foncteur $\Gamma_\Phi(F)$, à valeurs dans les groupes abéliens, et on prend les foncteurs dérivés. L'existence résulte d'un critère général, les faisceaux fins joueront le rôle des modules « injectifs ». On obtient aussi les suites spectrales fondamentales comme cas particuliers de délectables et utiles suites spectrales générales. [Lettre de Grothendieck à Serre du 26 février 1955, Colmez et Serre 2001, p. 13]

Ces catégories « plus générales que les modules » ne sont évidemment nulles autres que les catégories abéliennes. En utilisant les catégories abéliennes, Grothendieck est en mesure de décrire les groupes de cohomologie à valeurs dans un faisceau d'un espace topologique en termes de foncteurs dérivés.

La démarche de Grothendieck peut être divisée en trois étapes, chacune correspondant à l'un des trois premiers chapitres de l'article « Sur quelques points d'algèbre homologique ».

Dans le premier chapitre, Grothendieck introduit le formalisme catégoriel qui permettra de généraliser la méthode des foncteurs dérivés sur les catégories de modules,

19. Intuitivement, un faisceau fin est muni d'une partition de l'unité. Pour une définition formelle, voir Cartan [1950–1951, exposé 15, p. 15–01].

20. Cette présentation de l'analogie reprend celle de McLarty [2007, p. 306–307].

c'est-à-dire le langage des flèches sur les catégories : catégorie duale, monomorphisme, épimorphisme, isomorphisme, produit, coproduit, noyau, conoyau, etc. [21]

Il définit également deux types de catégories, à savoir les catégories additives et les catégories abéliennes [22]. Une catégorie $\mathcal{C}$ est *additive* si

AD 1) pour tout couple d'objets $X$, $Y$ de $\mathcal{C}$, $\mathrm{Hom}(X,Y)$ est doté d'une structure de groupe abélien telle que la composition de morphismes soit une opération bilinéaire ;

AD 2) pour toute paire d'objets $X$, $Y$ de $\mathcal{C}$, la somme $A+B$ et le produit $A \times B$ existent dans $\mathcal{C}$ ;

AD 3) il existe un objet nul 0 dans $\mathcal{C}$.

Une catégorie *abélienne* est une catégorie additive telle que

AB 1) tout morphisme admet un noyau et un conoyau ;

AB 2) pour tout morphisme $u$ dans $\mathcal{C}$, le morphisme canonique $\overline{u}\colon \mathrm{CoIm}(u) \to \mathrm{Im}(u)$ est un isomorphisme.

Une catégorie abélienne peut également satisfaire certaines propriétés supplémentaires AB 3 à AB 6 ou encore leurs propriétés duales AB 3* à AB 6* [23].

Comme le souligne Marquis [2009, p. 96–100], ces axiomes définissent la structure respective des catégories additives et abéliennes par l'entremise des propriétés de leurs morphismes. Autrement dit, une catégorie de type additif ou abélien dispose de propriétés additionnelles qui sont entièrement déterminées par ses morphismes. En fait, leurs structures respectives reflètent l'organisation d'un domaine des mathématiques. Elles constituent autant de contextes, voire de cadres, à l'intérieur desquels certaines mathématiques peuvent être faites :

> (...) *an additive category encodes basic properties and constructions about an area of mathematics and its categorical structure encodes the structure of a type of mathematical objects. This means that within an additive category, certain concepts can be defined, others can be constructed and certain results can be demonstrated, and by purely categorical means. These facts result from the additive structure of the category itself*. [Marquis 2009, p. 97]

Les catégories abéliennes sont donc le contexte dans lequel se place Grothendieck pour généraliser la cohomologie faisceautique d'un espace topologique de manière à ce qu'elle puisse être décrite en termes de foncteurs dérivés.

Le deuxième chapitre transpose l'algèbre homologique des catégories de modules — c'est-à-dire l'algèbre homologique tel que présenté par Cartan et Eilenberg — aux

21. La définition du langage des flèches est fondamentale du point de vue de l'histoire de la théorie des catégories. Voir Krömer [2007, §3.3] et Marquis [2009, §4.2].

22. Historiquement, la définition par Grothendieck des catégories abéliennes s'inscrit dans la continuité des recherches de Mac Lane, Buchsbaum et Heller. Voir Marquis [2009, §4.2].

23. Voir Grothendieck [1985, p. 128–129] pour ces propriétés, la plus importante étant sans aucun doute AB5*.

catégories abéliennes. Plus précisément, Grothendieck définit les foncteurs dérivés de foncteurs additifs $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ entre des catégories abéliennes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. La transposition est directe à ce détail près qu'il faut ajouter une condition stipulant que, selon que le foncteur soit covariant ou contravariant, tout objet $A$ de $\mathcal{C}$ est isomorphe à un sous-objet d'un objet injectif ou encore à un objet quotient d'un module projectif [24].

La cohomologie à coefficients dans un faisceau d'un espace topologique est l'objet du troisième chapitre. Sans rentrer dans les détails, la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur un espace topologique est une catégorie abélienne. De plus, cette catégorie possède suffisamment d'objets injectifs. Par conséquent, l'algèbre homologique ou, pour être plus précis, la méthode des foncteurs dérivés renouvelée fournit les groupes de cohomologie de l'espace considéré.

En terminant, en plus de l'unification de la cohomologie des espaces topologiques et des structures algébriques, le passage vers les catégories abéliennes a également comme conséquence d'adapter la cohomologie des faisceaux à des espaces parfaitement généraux. En effet, la méthode des résolutions fines de Cartan et Serre ne fonctionnait que pour des espaces paracompacts ou encore séparés. La méthode des résolutions injectives exposée par Grothendieck permet d'outrepasser cette restriction puisqu'elle s'applique également aux espaces non séparés.

Pour le projet de refonte de Grothendieck, la levée de cette restriction était importante : le formalisme et les méthodes catégoriels développés dans « Sur quelques points d'algèbre homologique » pourraient être appliqués en géométrique algébrique.

#### 3.1.3.3 Les schémas

La pierre de touche de la refonte de la géométrie algébrique est la théorie des schémas. Comme l'exprime clairement Grothendieck dans sa conférence de 1958 à Édimbourg, ce sont les schémas, et non pas les variétés algébriques, qui constituent le contexte naturel pour faire de la géométrie algébrique : « *First, I would like, however, to emphasize one point common to* (...) *the standard techniques of Algebraic Geometry. Namely, that the natural range of the notions dealt with, and the methods used, are not really algebraic varieties.* » [1960*a*, p. 105] Ainsi, Grothendieck voyait la notion de schéma comme une métamorphose de la notion traditionnelle de variété algébrique. Il écrira à ce propos dans *Récoltes et semailles* que « [les schémas] représentent une métamorphose de l'ancienne notion de "variété algébrique" (...) » [1985, p. P23, n. 27] et, quelques pages plus loin, que « [l]a notion de schéma constitue un vaste élargissement de la notion de "variété algébrique", et à ce titre elle a renouvelé de fond en comble la géométrie algébrique léguée par mes devanciers » [1985, p. P40]

Une des principales motivations du point de vue des schémas fut le projet, envisagé par Weil [1950] qui en identifiait l'origine dans les travaux de Kronecker, d'une géométrie algébrique arithmétique, c'est-à-dire d'une géométrie algébrique au-dessus

24. Voir Grothendieck [1957, §2.3].

des entiers [25]. Au cours des années 1950, il devint effectivement évident aux yeux des géomètres parisiens que même les variétés algébriques abstraites définies dans *Foundations of Algebraic Geometry* seraient inadéquates pour ce projet. Ceux-ci cherchèrent alors à se doter d'un concept d'espace algébrique plus général.

Jusqu'à ce que Grothendieck ne définisse les schémas avec toute la généralité nécessaire, deux approches, malheureusement imparfaites, avaient été mises de l'avant.

La première se trouve dans l'article « Faisceaux algébriques cohérents » de Serre. De ce point de vue, toute variété est munie d'un anneau de coordonnées et d'un faisceau d'anneaux. En gros, l'idée est de travailler sur des faisceaux et ainsi de recoller des variétés affines de manière à obtenir une variété algébrique. Cette approche n'était toutefois pas satisfaisante parce qu'une variété doit irrémédiablement être définie sur un corps algébriquement clos ce qui a pour conséquence de restreindre le choix de l'anneau de coordonnées.

La seconde est due à Claude Chevalley, Nagata Masayoshi et Pierre Cartier. Dans un exposé de décembre 1955 au Séminaire Cartan [Cartan 1955–1956, exposé 5], Chevalley exposa ce qui est aujourd'hui connu comme les schémas de Chevalley–Nagata [26]. Soient un corps $K$ et un sur-corps $K'$ de type fini sur $K$. Chevalley appelle algèbre affine une sous-algèbre de $K'$ de type fini. Un schéma affine dans $K'$ se définit en considérant l'ensemble des anneaux locaux des idéaux premiers d'une algèbre affine $A$. Un schéma s'obtient en collant des schémas affines. Pour Chevalley, le schéma n'est pas l'ensemble des points de la variété, mais celui de ses sous-variétés irréductibles [27]. En ce sens, le schéma est le squelette de la variété.

L'année suivante, c'est-à-dire en novembre 1956, Cartier donna deux exposés sur les variétés algébriques au Séminaire Chevalley [Chevalley 1956–58, exposés 1 et 2]. Comparativement à Chevalley, il y définit une notion de schéma plus générale puisqu'elle s'applique, non pas à un corps, mais à une semi-algèbre commutative. Pour retrouver un schéma au sens de Chevalley–Nagata, il suffit de remplacer la semi-algèbre par un corps [28]. Son premier exposé contenait également une idée que reprendrait Grothendieck, soit la notion de spectre. Soit $K$ un corps, $K'$ une extension algébriquement close de $K$ et $A$ une algèbre de type fini sur $K$. Cartier définit le *spectre* $\Omega_A$ de $A$ comme l'ensemble des homomorphismes $A \to K$ [29]. Malgré tout, cette seconde approche avait quant à elle l'inconvénient de ne s'appliquer qu'aux variétés irréductibles.

25. Une autre motivation fut la question des points génériques. Voir McLarty [2007] pour une présentation plus complète.

26. Contrairement à ce que la juxtaposition des deux noms pourrait laisser croire, il ne s'agissait pas d'un travail commun. Nagata généralisa la définition de Chevalley. Voir Fantechi et al. [2005, p. 248–249] et Dieudonné [1989*a*, p. 305].

27. Cartier [2008, p. 8] souligne que le cas des courbes où une sous-variété irréductible est soit un point, soit la courbe elle-même masque l'importance de la distinction.

28. Voir Chevalley [1956–58, p. 2-16–2-17].

29. Pour plus de détails, voir Chevalley [1956–58, exposé 1, §4].

Peu de temps après, Grothendieck parvint à donner une définition du concept de schéma qui évitait les limites inhérentes aux approches de Serre et de Chevalley–Nagata–Cartier et qui était susceptible de constituer la généralisation recherchée du concept de variété algébrique. Comparativement à ses contemporains, l'originalité de Grothendieck fut de ne pas rechercher la bonne restriction, c'est-à-dire la ou les conditions à imposer aux anneaux. Alors que Serre, par exemple, croyait que les anneaux devaient au moins être noethériens [McLarty 2007, p. 317], Grothendieck examina la solution la plus élémentaire imaginable et réalisa que la bonne « restriction » était tout simplement de n'en poser aucune ! La généralité nécessaire s'obtenait de la manière la plus simple possible : il suffisait de considérer des anneaux arbitraires [30].

Soit $A$ un anneau commutatif. Le *spectre* $\mathrm{Spec}(A)$ de $A$ se définit comme l'ensemble des idéaux premiers de $A$. Cet ensemble $\mathrm{Spec}(A)$ a la propriété d'être un espace annelé. Par définition, un *espace annelé* est une paire $\langle X, O_X\rangle$ où $X$ est un espace topologique et $O_X$ est un certain faisceau d'anneaux nommé faisceau structural. Or, la topologie de Zariski — que Grothendieck nomme parfois la topologie spectrale — se définit naturellement sur $\mathrm{Spec}(A)$ et un faisceau d'anneaux $O_{\mathrm{Spec}(A)}$ peut être associé à $\mathrm{Spec}(A)$.

Un *schéma affine* se définit alors comme un espace annelé isomorphe à l'espace annelé $\langle \mathrm{Spec}(A), O_{\mathrm{Spec}(A)}\rangle$ associé à un anneau $A$ donné. Les schémas affines forment une catégorie. Les morphismes de cette catégorie se définissent comme suit : étant donnés deux schémas affines $\langle X, O_X\rangle$ et $\langle Y, O_Y\rangle$, un *morphisme de schémas affines* est un morphisme d'espaces annelés $\langle \psi, \theta\rangle \colon \langle X, O_X\rangle \to \langle Y, O_Y\rangle$ — c'est-à-dire une paire $\langle \psi, \theta\rangle$ où $\psi$ est une application continue $X \to Y$ et $\theta \colon \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ est un morphisme de faisceaux d'anneaux — tel que pour tout $x \in X$, $\theta_x \colon O_{Y,\psi(x)} \to O_{X,x}$ est un homomorphisme local.

À l'instar des variétés algébriques qui s'obtenaient des variétés affines, les schémas se définissent à partir des schémas affines par recollement. Un *schéma* est un espace annelé $\langle X, O_X\rangle$ tel que tout point de $X$ possède un voisinage ouvert affine. Cette condition signifie que pour tout $x \in X$, il existe un voisinage $V$ de $x$ tel que l'espace annelé $\langle V, O_X|_V\rangle$ est un schéma affine [31]. L'idée est que le schéma admet un recouvrement par des schémas affines. Les schémas forment également une catégorie dont les morphismes sont donnés par les morphismes d'espaces annelés sous-jacents.

Soit maintenant $S$ un schéma. Un schéma $X$ et un morphisme de schémas affines $\phi \colon X \to S$ constituent un *schéma au-dessus de* $S$ ou $S$*-schéma*. Relativement aux

30. L'aperçu des schémas qui suit s'inspire principalement des esquisses de la théorie que publia Grothendieck à la fin des années 1950, c'est-à-dire la conférence de 1958 au Congrès international des mathématiciens [1960*a*] et la conférence de 1959 dans le cadre du Séminaire Bourbaki [1959], mais aussi du premier tome des *Éléments de géométrie algébrique* [1960*b*]. Une différence notable est que, dans ces trois textes, Grothendieck parle de préschéma et non de schéma. Un schéma y est défini comme un préschéma séparé.

31. La référence aux points semble ici inévitable en raison du caractère local des espaces annelés.

$S$-schémas, $S$ joue le rôle d'un corps de base. Pour cette raison, $S$ est appelé le schéma de base du $S$-schéma $X$. $\phi$ est le morphisme structurel de $X$. Sans surprise, les $S$-schémas forment une catégorie. Les morphismes de $S$-schémas sont les triangles au-dessus de $S$ : étant donnés deux $S$-schémas $X$ et $Y$, un morphisme de schémas $u\colon X \to Y$ est un *morphisme de schémas au-dessus de* $S$, aussi appelé $S$-*morphisme*, si le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "\phi_X"'] & & Y \arrow[dl, "\phi_Y"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

commute. Cette catégorie a notamment la propriété de posséder une notion de produit : à toute paire d'objets $X$ et $Y$ — c'est-à-dire à toute paire de $S$-schémas — correspond un $S$-schéma $X \times_S Y$.

L'étude de Grothendieck se concentre principalement sur les schémas séparés, noethériens et de type fini parce que, comme il écrit dans sa conférence au Séminaire Bourbaki, ces $S$-schémas sont ceux qui se prêtent à une étude géométrique. [1959, p. 182-02]

Un morphisme de schémas $f\colon X \to S$ est *séparé* si la diagonale de $X \times_S X$ est fermée [32]. Dans ce cas, le schéma $X$ est dit séparé au-dessus de $S$. Un schéma $X$ est *séparé* s'il est séparé au-dessus de $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$.

Pour leurs parts, les conditions d'être noethérien et de type fini réfèrent à la taille du schéma. Ce sont des conditions de finitude. Un schéma $\langle X, O_X\rangle$ est *noethérien* s'il est l'union finie d'ouverts affines $V_\alpha$ tels que l'anneau de chacun des schémas $\langle V_\alpha, O_X|_{V_\alpha}\rangle$ est noethérien. En gros, un tel schéma peut être recouvert par des schémas affines d'anneaux noethériens.

Un morphisme de schémas $f\colon X \to S$ est de *type fini* si $S$ est l'union d'une famille $\{V_\alpha\}$ d'ouverts affines tels que, pour tout $\alpha$, $f^{-1}(V_\alpha)$ est l'union finie d'ouverts affines $U_{\alpha i}$ tels que les anneaux $A(U_{\alpha i})$ sont des algèbres de type fini sur $A(V_\alpha)$. Dans ce cas, le schéma $X$ est dit de type fini sur $S$.

Si elles s'appliquent aux schémas, les propriétés de séparation et de type fini sont d'abord et avant tout des propriétés des morphismes de la catégorie des $S$-schémas comme l'illustrent les définitions ci-dessus.

Dans *Récoltes et semailles*, Grothendieck décrira le concept de schéma en utilisant l'image d'un éventail :

> La notion de schéma est la plus naturelle, la plus "évidente" imaginable, pour englober en une notion unique la série infinie de notions de "variété" (algébrique) qu'on maniait précédemment (une telle notion pour **chaque** nombre premier...) De plus, un seul et même "schéma" (ou "variété" nouveau style) donne naissance, pour chaque nombre premier $p$, à une "variété (algébrique)

32. Pour la définition exacte de la diagonale, voir [Grothendieck 1960*b*, §5.3].

> de caractéristique $p$" bien déterminée. La collection de ces différentes variétés des différentes caractéristiques peut alors être visualisée comme une sorte d'"éventail (infini) de variétés" (une pour chaque caractéristique). Le "schéma" est cet éventail magique, qui relie entre eux, comme autant de "branches" différentes, ses "avatars" ou "incarnations" de toutes les caractéristiques possibles. Par là-même, il fournit un efficace "principe de passage" pour relier entre elles des "variétés", ressortissant de géométries qui jusque là [*sic*] étaient apparues comme plus ou moins isolées, coupées les unes des autres. A présent, elles se trouvent englobées dans une "géométrie" commune et reliées par elle. [1985, p. P31]

Le point essentiel est ici que, selon la définition de Grothendieck, un schéma est indépendant de la caractéristique de l'anneau. Tel que mentionné ci-dessus, Grothendieck définit la notion de schéma pour un anneau arbitraire. En n'imposant aucune condition sur les anneaux, il fait apparaître une homogénéité sur les variétés algébriques. Il n'est plus nécessaire de tenir compte de conditions additionnelles découlant de la caractéristique de l'anneau considéré. Bref, le point de vue des schémas permet de traiter toutes les variétés algébriques simultanément et uniformément.

La théorie des schémas permit à Grothendieck d'étendre les méthodes de l'algèbre commutative et de la cohomologie des faisceaux aux schémas. Pour ce, il introduisit une notion de cohérence plus générale sur les faisceaux : la quasi-cohérence. L'idée est la suivante : un faisceau de modules $\mathcal{F}$ sur un schéma $X$ est *quasi-cohérent* si, pour tout ouvert affine $U$ de $X$, $\mathcal{F}$ est quasi-cohérent sur $U$ [33]. En particulier, si $X$ est un schéma noethérien, alors $\mathcal{F}$ est cohérent si et seulement si $\mathcal{F}$ est quasi-cohérent et $M$ est de type fini. Il retrouve ainsi la définition donnée par Serre dans « Faisceaux algébriques cohérents ».

#### 3.1.3.4 Les catégories en géométrie algébrique

Comme le souligne Marquis, le processus ayant conduit au dégagement de la notion de catégorie abélienne conféra un statut inédit aux catégories. [2009, p. 100–101] Contrairement à *Foundations of Algebraic Geometry* et *Homological Algebra* qui envisageaient les catégories comme des objets nécessaires pour définir les foncteurs et les transformations naturelles, et pour cette même raison secondaires, les catégories abéliennes sont pour Grothendieck le lieu mathématique où s'incarne l'algèbre homologique. En effet, c'est la structure de catégorie abélienne, c'est-à-dire les propriétés des morphismes entre les objets d'une telle catégorie, qui détermine et à travers laquelle peuvent être connues les propriétés des objets étudiés en algèbre homologique.

Or, Grothendieck n'envisage pas seulement les catégories abéliennes de cette façon, mais bien toutes les catégories. Celles-ci passent de l'arrière-plan à l'avant-plan en ce qu'elles deviennent des objets mathématiques en bonne et due forme.

33. Pour une présentation exhaustive, voir Grothendieck [1960*b*, chapitre 0, §5].

En tant qu'objets mathématiques, leur rôle ne se limitent plus à fournir un substrat aux foncteurs et aux transformations naturelles.

Ce nouveau statut des catégories sous-tend la réorganisation de la géométrie algébrique sur la base des schémas. Non seulement est-il désormais possible de traiter les catégories indépendamment des foncteurs, il est impératif de le faire. En effet, le meilleur moyen de connaître les objets de la géométrie algébrique est de les considérer à travers les catégories appropriées. Comme l'écrit Marquis à propos des catégories abéliennes, les propriétés des objets intervenant en algèbre homologique trouvent leur expression optimale dans les catégories qu'ils forment : « (...) *the global structure of a category was taken to be epistemologically significant in itself, as providing the essential information about the objects of the category*. » [2009, p. 101] Par extension, la catégorie des schémas affines, des schémas ou encore des $S$-schémas permet de connaître ces objets fondamentaux de la géométrie algébrique.

Par ricochet, c'est le rôle de la théorie des catégories elle-même qui change. Comparativement à la position moderniste, elle ne consiste plus en un langage utile pour organiser et présenter certaines idées mathématiques, mais se trouve à fournir les concepts et les méthodes à l'aide desquels la géométrie algébrique — et plus tard d'autres domaines des mathématiques — doit impérativement être comprise.

Sur le plan de la pratique mathématique, redéployer la géométrie algébrique sur la base de la théorie des schémas se révéla une approche fructueuse. Premièrement, Grothendieck récupéra les résultats constituant la géométrie algébrique classique, mais aussi de la géométrie algébrique abstraite de Weil. Qui plus est, la théorie des schémas raffina la compréhension de la géométrie algébrique. Dieudonné écrira à ce propos que « (...) le point de vue des schémas donne toujours l'impression d'être celui qui convient exactement à la question, que toutes les présentations antérieures ne font qu'obscurcir ou déformer. » [1990, p. 9] Bref, le point de vue schématique clarifia la géométrie algébrique dans sa forme pré-grothendieckienne. Deuxièmement, Grothendieck fut en mesure de résoudre des problèmes en caractéristique $p$ que les méthodes précédentes ne permettaient pas d'approcher [34].

#### 3.1.3.5 Les conjectures de Weil comme inspiration et test de la théorie

Au début de la section 3.1.3, les conjectures de Weil furent présentées comme l'une des principales motivations de la réforme de la géométrie algébrique entreprise par Grothendieck. Historiquement, il ne fait aucun doute que les conjectures de Weil furent au centre de ses recherches et qu'elles constituèrent la bougie d'allumage du chantier. En contrepartie, la refonte de la géométrie algébrique ne saurait être réduite à leur résolution. D'une part, la finalité du projet allait bien au-delà de la résolution des conjectures de Weil. D'autre part, Grothendieck voyait dans les conjectures beaucoup plus qu'un problème à résoudre.

34. Pour un aperçu plus détaillé des avancées rendues possibles par la théorie des schémas, voir Dieudonné [1974, chapitre VIII, §3].

Interprétées en termes cohomologiques, les conjectures de Weil suggèrent l'application d'invariants topologiques — les groupes de cohomologie — à des variétés algébriques. La construction d'une cohomologie de Weil se distingue en ce sens de la construction des théories habituelles de l'homologie et de la cohomologie. En effet, le propre des groupes de cohomologie était de décrire les propriétés des espaces topologiques, c'est-à-dire d'une structure spatiale résolument continue. À l'opposé, une cohomologie de Weil devra plutôt définir de tels groupes sur une structure spatiale discrète. Aux yeux de Grothendieck, les conjectures de Weil laissent poindre la possibilité d'une réconciliation du continu et du discret en mathématiques. Conceptuellement, elles fissurent la dichotomie traditionnelle entre le continu et le discret.

Du coup, Grothendieck les appréhende comme une ouverture sur un vaste territoire inexploré où s'accomplirait la synthèse du continu et du discret. Le projet de refonte de la géométrie algébrique doit alors être vu comme une tentative de cartographier ce territoire.

> On peut considérer que la géométrie nouvelle est avant toute autre chose, une synthèse entre ces deux mondes, jusque là [*sic*] mitoyens et étroitement solidaires, mais pourtant séparés : le **monde** « **arithmétique** », dans lequel vivent les (soi-disants) « espaces » sans principe de continuité, et le **monde de la grandeur continue**, où vivent les « espaces » au sens propre du terme, accessibles aux moyens de l'analyste et (pour cette raison même) acceptés par lui comme dignes de gîter dans la cité mathématique. **Dans la vision nouvelle, ces deux mondes jadis séparés, n'en forment plus qu'un seul**. [Grothendieck 1985, P30]

Les conjectures de Weil se trouvent donc à jouer un rôle bien spécifique dans cette vision de la géométrie algébrique et, plus généralement, des mathématiques qu'elles inspirent. Pour reprendre la métaphore d'un territoire inexploré, les conjectures de Weil constituent le seul point de repère à la disposition de Grothendieck. La construction de la géométrie algébrique exige en conséquence de perpétuels allers-retours vers les conjectures de Weil de manière à tester la solidité de la théorie dans son ensemble. Elles peuvent alors être vues comme un garde-fou visant à empêcher que la théorie entière ne dérape. Tant que la théorie en construction permet d'avancer dans la démonstration des conjectures, elle demeure susceptible de réaliser la vision unificatrice. Comme l'écrit Cartier, « Mais pour Grothendieck, les conjectures de Weil ne sont pas tant intéressantes en elles-mêmes que comme test de la solidité de ses conceptions générales. » [2000, p. 17]

De par le postulat méthodologique fondamental et la méthode de la mer qui monte adoptés par Grothendieck, la résolution des conjectures de Weil devient en quelque sorte un sous-produit du succès de la refonte catégorielle de la géométrie algébrique. Si la théorie est bien construite, c'est-à-dire si elle accomplit une synthèse du continu et du discret comme il se doit, alors les conjectures de Weil s'en déduiront trivialement. En d'autres termes, la définition d'invariants continus sur des structures discrètes se fera naturellement.

## 3.2 Un nouveau concept d'espace topologique

À la lumière de cet objectif d'une synthèse du continu et du discret, le renouvellement de la notion de variété algébrique, et par conséquent de la géométrie algébrique, qu'occasionnaient les schémas était néanmoins insuffisant. En effet, la portée des schémas est restreinte à la sphère du discret. Les géométries que relie un schéma sont irrémédiablement discrètes et donc dépourvues de tout principe de continuité. Le pont recherché entre les structures continues et discrètes ne pouvait donc provenir de la théorie des schémas. Par conséquent, Grothendieck associa plutôt le succès de son projet de refonte à un renouvellement du concept d'espace topologique.

En 1963–64, le Séminaire de géométrie algébrique, animé depuis l'automne 1960 par Grothendieck, fut entièrement consacré à cette tâche. Grothendieck mit de l'avant un nouveau concept d'espace auquel il donna le nom de topos — du grec τόπος, lieu. Par rapport aux espaces topologiques hérités de Hausdorff, les topos avaient l'avantage de ne pas souffrir des mêmes limites intrinsèques de telle sorte qu'une théorie cohomologique adaptée aux schémas s'y définissait naturellement.

### 3.2.1 L'insuffisance du concept d'espace topologique traditionnel

Tel que vu à la section précédente, la construction d'une cohomologie de Weil postulait l'application d'invariants continus — les groupes de cohomologie — à des structures spatiales discrètes — les variétés algébriques ou, plus généralement, les schémas. Selon Grothendieck, cette tâche exigeait un nouveau concept d'espace topologique puisque la compréhension topologique traditionnelle était incapable de fournir un tel pont entre les schémas et la topologie.

> Ce qui manquait, visiblement, était quelque principe nouveau, qui permette de relier ces objets géométriques (ou "variétés", ou "schémas") aux "espaces" (topologiques) habituels, ou "bon teint" ; ceux, disons, dont les "points" apparaissent comme nettement **séparés** les uns des autres (...)
>
> C'était l'apparition d'un tel "principe nouveau" décidément, et rien de moins, qui pouvait faire se consommer ses "épousailles du nombre et de la grandeur" ou de la "géométrie du discontinu" avec celle du "continu", dont un premier pressentiment se dégageait des conjectures de Weil. [1985, p. P34]

L'insuffisance du concept d'espace topologique hérité de Hausdorff était technique, mais également conceptuelle.

#### 3.2.1.1 Des limites techniques

À la fin des années 1950, la topologie de Zariski apparaissait comme la structure la plus prometteuse en vue de la construction de la cohomologie de Weil.

Premièrement, la topologie de Zariski est inhérente aux variétés algébriques classiques comme sa définition le laisse clairement voir. Soient $A_k^n$ un espace affine sur un corps $k$. La topologie de Zariski est définie par ses sous-ensembles fermés qui sont les ensembles algébriques affines, c'est-à-dire les sous-ensembles de $A_k^n$ de la forme

$$V(I) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in A_k^n \mid f(x_1, \ldots, x_n) = 0 \text{ pour tout } f \in I\}$$

pour $I$ un idéal de l'anneau de polynômes $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Un fermé de la topologie de Zariski peut donc être vu comme l'ensemble des solutions communes à un ensemble de polynômes à coefficients dans $k$. Soit maintenant $V \subset A_k^n$ une variété algébrique. La topologie de Zariski sur $V$ est tout simplement la topologie induite par $A_k^n$.

La topologie de Zariski était donc la plus adaptée à l'étude des objets mathématiques intervenant en géométrie algébrique : fonctions rationnelles, fonctions algébriques, etc. Krömer écrit à ce propos : « (...) *Zariski topology was considered as the obvious and intuitive tool.* » [2007, p. 173] Auparavant, la géométrie algébrique avait d'ailleurs toujours eu recours à la topologie de Zariski. Par exemple, les tentatives de Serre de définir la cohomologie de Weil, c'est-à-dire la cohomologie à valeurs dans un faisceau et la cohomologie à valeurs dans un vecteur de Witt, reposaient sur celle-ci.

Deuxièmement, la topologie de Zariski se généralise naturellement aux spectres. Soit $A$ un anneau. À titre de rappel, le spectre $\mathrm{Spec}(A)$ de $A$ est l'ensemble de ses idéaux premiers $\mathfrak{p}$. La topologie de Zariski se définit sur $\mathrm{Spec}(A)$ en prenant comme fermés les sous-ensembles de $\mathrm{Spec}(A)$ de la forme

$$V(I) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid I \subset \mathfrak{p}\}$$

où $I$ est un idéal de $A$. Un schéma affine étant défini comme un espace annelé isomorphe à un espace annelé $\langle \mathrm{Spec}\, A, O_{\mathrm{Spec}\, A} \rangle$, cette définition s'applique évidemment aux schémas affines et par conséquent aux schémas.

Comme le mentionne Grothendieck dans *Récoltes et semailles*, la topologie de Zariski présentait l'avantage d'introduire une certaine forme de continuité sur les schémas.

> Les nouvelles idées introduites par Zariski et Serre restituaient dans une certaine mesure, pour [les géométries en caractéristique $p$], une "dimension" de continuité, héritée aussitôt par la "géométrie schématique" qui venait d'apparaître, aux fins de les unir. [1985, P34]

Il ajoute cependant aussitôt que cette notion de continuité introduite par la topologie de Zariski demeurait trop faible compte tenu de ses objectifs :

> Mais pour ce qui est des "fantastiques conjectures" (de Weil), on était très loin du compte. Ces "topologies de Zariski" étaient, de ce point de vue, à tel point grossières, que c'était quasiment si on en était resté encore au stade des "agrégats discrets", alors que dans les espaces-sans-foi-ni-loi introduits par Zariski, les points ont la fâcheuse tendance à s'agglutiner les uns aux autres... [1985, P34]

En termes moins imagés, le principal problème de la topologie de Zaraski était de ne pas avoir assez d'ouverts, c'est-à-dire de ne pas être séparée par rapport aux points. Par définition, un espace topologique $X$ est séparé, ou T2 ou encore Hausdorff, si pour tout $x, y \in X$, il existe des ouverts $U$ et $V$ disjoints tels que $x \in U$ et $y \in V$. Dans un espace dont la topologie n'est pas séparée, les points ne sont pas topologiquement distincts.

Dans la pratique, la topologie de Zariski compliquait notamment l'étude des espaces fibrés et de leur recollement comme l'exprimera clairement Giraud lors d'un exposé de 1963 dans le cadre du Séminaire Bourbaki : « On sait que, sur une variété algébrique, la topologie de Zariski est trop grossière pour l'étude des fibrés, en ce sens que certains, qui devraient l'être pour qu'on puisse les étudier commodément, ne sont pas localement triviaux. » [1963, p. 256-1]

Pour cette raison, la grossièreté de la topologie de Zariski constituait un obstacle à l'application de la théorie de la descente aux schémas. Sans rentrer dans les détails, la théorie générale de la descente a pour cadre les catégories fibrées et peut être vue comme une généralisation du recollement d'objets géométriques sur un espace : « La notion de "descente" fournit le cadre général pour tous les procédés de "recollement" d'objets, et par conséquent de "recollement" de catégories. » [Artin, Grothendieck et Verdier 1972, exposé VI, p. 1] L'idée de base est de construire localement des homomorphismes de faisceaux quasi-cohérents et de les recoller et aussi de construire ces faisceaux localement et de les recoller. Pour cela, il faut cependant une topologie contenant beaucoup plus d'ouverts que la topologie de Zariski [35].

Dans la perspective des conjectures de Weil, l'insuffisance de la topologie de Zariski tenait donc à ce qu'elle rendait impossible la définition de la formule de Lefschetz recherchée et donc de compter les points fixes dans un espace en étant muni. Cela signifiait que même la topologie la plus adaptée aux variétés algébriques ne permettait pas de saisir les invariants topologiques à l'œuvre en géométrie algébrique schématique, c'est-à-dire les groupes de cohomologie associés à une variété algébrique, voire à un schéma.

#### 3.2.1.2 La généralité maximale du concept d'espace topologique traditionnel

Les limites techniques inhérentes à la topologie de Zariski cachaient un problème beaucoup plus fondamental qui relevait de la conceptualisation topologique de l'espace elle-même — par opposition à une topologie particulière — et qui rendait compte de son irrémédiable incapacité à exprimer la structure cohomologique des espaces « discrets », c'est-à-dire des schémas. En effet, les espaces topologiques hérités de Hausdorff ne disposaient pas de la finesse, voire de la souplesse requise pour définir des groupes de cohomologie sur un schéma. La structure de topologie

35. Pour une présentation exhaustive de la théorie de la descente, voir Grothendieck [1962, 2003] Grothendieck [1962] ou encore Fantechi et al. [2005, 1$^{e}$ partie].

traditionnelle était tout simplement trop grossière. Pour utiliser une image, les invariants cohomologiques des variétés algébriques passaient entre les mailles du filet topologique !

Conceptuellement, ce manque de finesse constituait un obstacle de taille. Dans le cadre de la théorie des ensembles, un espace se conçoit comme un ensemble sur lequel est définie une certaine structure spatiale. Par exemple, un espace métrique est un ensemble $E$ muni d'une distance $d$, c'est-à-dire une fonction $d\colon E \times E \to \mathbb{R}$ respectant les conditions que sont la symétrie, la séparation et l'inégalité triangulaire. Ce modèle s'applique évidemment à l'espace topologique qui est un ensemble $E$ muni d'une collection de sous-ensembles $O(E)$ satisfaisant certaines conditions. Or, de toutes les structures spatiales qui peuvent être associées à un ensemble, la structure topologique est la plus souple.

> Notion protiforme d'ailleurs s'il en fut, aux cents [*sic*] et mille visages, selon le type de structures qu'on incorpore à ces espaces, depuis les plus riches de toutes (telles les vénérables structures "euclidiennes", ou les structures "affines" et "projectives", ou encore les structures "algébriques" des "variétés" de même nom qui les généralisent et qui assouplissent) jusqu'aux plus dépouillées : celles où tout élément d'information "quantitatif" quel qu'il soit semble disparu sans retour, et où ne subsistent plus que la quintessence qualitative de la notion de "**proximité**" ou de celle de "**limite**", et la version la plus élusive de la **forme** (dite "topologique"). La plus dépouillée de toutes parmi ces notions, celle qui jusqu'à présent, au cours du demi-siècle écoulé, avait tenu lieu d'une sorte de vaste giron conceptuel commun pour englober toutes les autres, était celle **d'espace topologique**. [Grothendieck 1985, p. P34]

La compréhension topologique de l'espace apparaît alors comme la plus générale à la disposition des mathématiciens puisque, dans la foulée du Programme d'Erlangen de Klein, il est fréquent de considérer la structure d'un espace et la généralité de celui-ci comme reliées par une relation de proportionnalité inverse. En effet, l'originalité de Klein fut de relier la théorie des groupes à la géométrie en montrant que chaque théorie géométrique peut être complètement identifiée à un groupe de transformations de l'espace. L'idée est que les propriétés invariantes sous de telles transformations sont celles qui caractérisent de manière essentielle une théorie géométrique donnée et réciproquement. Par exemple, la géométrie métrique est caractérisée par les transformations métriques, c'est-à-dire celles qui laissent invariantes les distances.

Par conséquent, le critère d'identité pour les théories géométriques est donné par le critère d'identité sur les groupes. Comme l'écrit Nagel, deux géométries sont identiques si leurs groupes de transformations sont isomorphes : « *two geometries* (...) *are* structurally identical *if their respective groups of transformations are abstractly the same.* » [1979, p. 245] En vertu de ce critère d'identité, la relation de sous-groupe se reflète à son tour en géométrie. Soient $T_1$ et $T_2$ deux géométries dont les groupes de transformations sont respectivement $G_1$ et $G_2$. Si $G_1$ est un sous-groupe de $G_2$, alors la géométrie $T_1$ est une sous-géométrie de $T_2$. Par exemple, les transformations métriques préservent les transformations continues. Par conséquent, la géométrie métrique est une sous-géométrie de la topologie. Selon Klein, plus la structure du groupe de transformations est riche, moins la géométrie possède de propriétés invariantes et donc moins elle est générale. Réciproquement, plus la structure est dépouillée, plus la théorie est générale.

Du point de vue du Programme d'Erlangen, le dépouillement maximal de la structure d'espace topologique se traduit par une généralité maximale. Sans se réclamer explicitement de Klein, Grothendieck arrive à la même conclusion : « La première de ces notions, celle d'espace, nous était apparue comme une notion en quelque sorte "maximale" — une notion si générale déjà, qu'on imagine mal comment en trouver encore une extension qui reste "raisonnable". » [1985, p. P39]

Cette généralité maximale confrontait cependant Grothendieck à une difficulté conceptuelle de taille : même le concept d'espace le plus général à sa disposition ne l'était pas assez pour ses besoins. La définition d'invariants aptes à saisir la structure cohomologique des schémas passerait en conséquence par un renouvellement du concept d'espace topologique de manière à transcender son apparente généralité maximale.

### 3.2.2 Les topologies de Grothendieck

La solution de Grothendieck au problème de la généralité maximale des espaces topologiques repose sur une transformation de la notion d'ouvert. Selon la conception traditionnelle, les ouverts d'un espace sont une famille de sous-ensembles qui contient l'ensemble vide de même que l'ensemble sous-jacent à l'espace et qui est fermée sous l'intersection finie et l'union. Les ouverts sont donc des sous-ensembles de l'espace ou, pour être parfaitement rigoureux, des sous-ensembles de l'ensemble sous-jacent. Les ouverts ne sont donc pas caractérisés isolément, mais en vertu des relations qu'ils entretiennent avec d'autres sous-ensembles, relations que décrit la structure de topologie.

Tel que vu à la section 3.2.1, ces ouverts ne donnaient malheureusement pas lieu à une notion de localisation assez précise pour la cohomologie des schémas. Ainsi, la topologie de Zariski — puisque c'est cette topologie qui était utilisée en géométrie algébrique — n'avait pas assez d'ouverts. Au lieu d'ajouter des ouverts, Grothendieck cherche plutôt à considérer des ouverts d'un autre type.

La bougie d'allumage fut l'exposé de Serre du 21 avril 1958 dans le cadre du Séminaire Chevalley [Chevalley 1958, exposé 1] au cours duquel Serre introduisit la notion d'espace fibré localement isotrivial de manière à généraliser les espaces fibrés localement triviaux et ainsi éviter les difficultés inhérentes à ces derniers [36]. [Illusie 2008, p. 1]

36. À propos des limites des espaces fibrés localement triviaux, voir l'introduction de Serre dans Chevalley [1958, exposé 1].

Serre commence par étudier les revêtements non ramifiés. Soit $\pi\colon Y \to X$ un morphisme entre deux variétés algébriques [37]. $Y$ est un *revêtement* de $X$ s'il existe un recouvrement ouvert affine $\{X_i\}$ de $X$ tel que (1) les $Y_i = \pi^{-1}(X_i)$ sont des ouverts affines de $Y$ et (2) si $A_i$ (respectivement $B_i$) désigne l'anneau de coordonnées de $X_i$ (respectivement $Y_i$), l'anneau $B_i$ est un $A_i$-module de type fini. Un revêtement $\pi\colon Y \to X$ est *non ramifié en un point* $y \in Y$ tel que $x = \pi(y)$ si l'homomorphisme $\hat{\pi}\colon \hat{\mathcal{O}}_x \to \hat{\mathcal{O}}_y$ entre les complétés des faisceaux d'anneaux locaux est un isomorphisme. Un revêtement $\pi\colon Y \to X$ est *non ramifié en un point* $x \in X$ s'il est non ramifié en tous les points $y \in Y$ tel que $\pi(y) = x$. Finalement, un revêtement est *non ramifié* s'il est non ramifié en tout point [38]. Serre relie également les revêtements non ramifiés à la topologie en définissant un *ouvert* comme étant l'ensemble des points $x \in X$ au-dessus desquels $Y$ est non ramifié.

Il est ensuite question des systèmes fibrés. Soient $G$ un groupe et $P$ une variété algébrique. $G$ *opère à droite* sur $P$ s'il existe un morphisme $\cdot\colon P \times G \to P$ tel que (1) pour tout $x \in P$, $x \cdot 1 = x$ et (2) pour tout $x \in P$, $g_1 \in G$ et $g_2 \in G$, $x \cdot g_1 g_2 = (x \cdot g_1) \cdot g_2$. Soient $X$ une variété algébrique, $P$ une variété algébrique telle que $G$ opère à droite sur $P$ et $\pi\colon P \to X$ un morphisme de variétés. Un système $(G, P, X)$ est un *système fibré* si, pour tout $x \in P$, $\pi(x \cdot g) = \pi(x)$.

Serre peut alors définir la notion de système fibré localement isotrivial. Soient $X$ une variété algébrique, $G$ un groupe et $(G, P, X)$ un système fibré :

- $(G, P, X)$ est *trivial* s'il est isomorphe à $X \times G$ muni de l'opération $(x, g_1) \cdot g_2 = (x, g_1 g_2)$ et de la projection canonique $X \times G \to X$.
- $(G, P, X)$ est *isotrivial* s'il existe un revêtement non ramifié $f\colon X' \to X$ tel que l'image réciproque de $P$ par $f$ soit un système trivial.
- $(G, P, X)$ est *localement trivial* si tout $x$ possède un voisinage $U$ tel que $P$ est trivial au-dessus de $U$.
- $(G, P, X)$ est *localement isotrivial* s'il existe un voisinage $U$ tel que $P$ est isotrivial au-dessus de $U$.

En utilisant de tels revêtements non ramifiés, Serre parvient à définir des groupes d'homologie de dimension un qui se comportent comme la cohomologie de Weil [39]. L'histoire veut que Grothendieck y ait vu immédiatement comment définir la bonne notion de localisation et, par le biais de celle-ci, comment obtenir les groupes de dimensions supérieures [McLarty 2007, p. 321 ; Illusie 2008, p. 1–2] En effet, selon Grothendieck, Serre venait de montrer que les conjectures de Weil faisaient appel à la cohomologie des revêtements localement isotriviaux ou, entre ses mains, des revêtements étales. [McLarty 2007, p. 321]

---

37. Serre utilise plutôt le terme « espace algébrique ». Voir Chevalley [1958, exposé 1, p. 1-01].
38. Il n'est pas nécessaire de savoir ce qu'est un ouvert affine ou un complété de faisceau. Pour des définitions, voir respectivement Chevalley [1956–58, exposé 1, §5] et Cartan [1950, chapitre II].
39. Voir Chevalley [1958, §2 et 3].

En contrepartie, les résultats relatifs aux fibrés localement isotriviaux de Serre s'appliquaient mal aux schémas comme il le souligne dans l'introduction : « Il serait plus intéressant de se placer dans le cadre général des schémas de Grothendieck ; pour la théorie des revêtements, c'est facile ; par contre dès qu'on aborde les espaces fibrés proprement dits, on se heurte à des difficultés sérieuses (...) » [Chevalley 1958, p. 1-01]

Il ne restait, en quelque sorte, qu'à définir la notion de localisation entraperçue.

#### 3.2.2.1 Une généralisation du treillis des ouverts

En topologie, la distinction entre le global et le local peut être informellement décrite comme renvoyant à celle entre un espace et ses parties. Un phénomène topologique est dit global lorsqu'il est relatif à l'espace lui-même, mais local lorsqu'il est spécifique à un voisinage d'un point, voire à un ouvert, bref à une partie de l'espace. Le processus de localisation exige donc de pouvoir se restreindre à des ouverts de plus en plus petits de manière à bien circonscrire un phénomène donné.

Traditionnellement, la notion de localisation à l'œuvre dans les espaces topologiques est fournie par des recouvrements ouverts. Étant donnés un espace topologique $X$ et un ouvert $U$ de cet espace, un *recouvrement* de $U$ est une collection d'ouverts $\{V_i\}$ tel que $U \subseteq \bigcup V_i$. Intuitivement, un tel recouvrement permet de déterminer dans lequel des $V_i$ le phénomène topologique étudié se « déroule ». Pour être encore plus précis, il suffit de considérer un recouvrement du $V_i$ en question et ainsi de suite.

Formellement, une notion de localisation sur un espace topologique correspond à tout recouvrement choisi parmi une famille de recouvrements $\{V_i\}_{i\in I}$ d'un ouvert $U$ soumise aux conditions suivantes :

(L1) pour tout recouvrement $\{V_i\}_{i\in I}$ de $U$, si $W_j$ $(j \in J)$ est un ouvert tel que $W_j \subset V_i$, alors, $\{W_j\}_{j\in J}$ est un recouvrement de $V_i$ ;

(L2) pour tout recouvrement $\{V_i\}_{i\in I}$ de $U$, si, pour tout $V_i$, $\{W_j\}_{j\in J}$ est un recouvrement de $V_i$, alors $\bigcup_i \bigcup_j W_j$ est un recouvrement de $U$ ;

(L3) pour tout ouvert $U$, la collection de tous les ouverts $V_i \subset U$ recouvre $U$ [40].

La première condition est une condition de stabilité qui affirme que, étant donné un recouvrement de $U$ par des ouverts $V_i$, chaque $V_i$ est lui-même recouvert par des ouverts $W_j \subset V_i$. La deuxième met en évidence le caractère local d'un recouvrement en stipulant que si $U$ est recouvert par des ouverts $V_i$ et que chaque $V_i$ est lui-même recouvert par des ouverts $W_j$, alors l'union des recouvrements $W_j$ recouvre $U$. La dernière condition affirme que tous les ouverts inclus dans $U$ doivent le recouvrir.

L'idée de Grothendieck est de remplacer les recouvrements traditionnels par des recouvrements adaptés aux catégories : ce seront les topologies de Grothendieck.

40. Cette caractérisation est celle donnée par Marquis [2009, p. 250].

Ce passage s'accomplit en fait de manière naturelle puisque, en termes algébriques, la structure topologique correspond à celle d'un treillis. Par définition, un *treillis* est un ensemble $X$ muni d'une relation d'ordre $\leq$ tel que, pour tout $x, y \in X$, il existe un supremum $\sup(x, y)$ et un infimum $\inf(x, y)$. Soit $X$ un espace topologique. Pour tous ouverts $U_1$ et $U_2$ de $X$, l'intersection $U_1 \cap U_2$ et l'union $U_1 \cup U_2$ existent et sont respectivement un infimum et un supremum. Le treillis des ouverts d'un espace $X$ est noté $\mathcal{O}(X)$.

> [*Ideas from category theory*] *led Grothendieck to define sheaves in a general context, replacing the partially ordered collection of open subsets of a space by objects of a category* $\mathbf{C}$ *in which suitable families of maps* $U_i \to X$ *(for* $i \in I$*) form "covers" of objects* $X$ *in* $\mathbf{C}$. [Mac Lane et Moerdijk 1992, p. 2]

En effet, le treillis des ouverts $\mathcal{O}(X)$ peut être interprété comme une catégorie $\mathrm{Ouv}(X)$ dont les objets et les morphismes $U_1 \to U_2$ correspondent respectivement aux ouverts et aux inclusions $U_1 \subseteq U_2$.

Historiquement, les topologies de Grothendieck furent d'abord définies en termes de familles couvrantes à l'automne 1961 alors que Grothendieck effectuait une visite à Harvard. Au printemps 1962, Michael Artin anima un séminaire consacré à cette nouvelle notion. Dans un exposé de mai 1963 dans le cadre du Séminaire Bourbaki, Giraud introduisit la notion de crible et donna une nouvelle définition des topologies de Grothendieck qui s'imposa [41].

Dans le Séminaire de géométrie algébrique [Artin, Grothendieck et Verdier 1972, exposé 1, §4], les cribles sont définis à l'aide des sous-catégories. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories. $\mathcal{D}$ est une *sous-catégorie* de $\mathcal{C}$ si (1) tout objet de $\mathcal{D}$ est un objet de $\mathcal{C}$ et (2) tout morphisme $D_1 \to D_2$ de $\mathcal{D}$ est également un morphisme de $\mathcal{C}$. En particulier, une sous-catégorie $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}$ est *pleine* si tout morphisme de $\mathcal{C}$ est un morphisme dans $\mathcal{D}$. En d'autres termes, les seuls morphismes de $\mathcal{C}$ sont ceux de $\mathcal{D}$. Intuitivement, un crible est une collection de morphismes ayant un codomaine commun. De ce point de vue, un crible sur un objet d'une catégorie peut être vu comme un recouvrement de cet objet.

**Définition 3.2.2.1** (Artin, Grothendieck et Verdier 1972)**.** Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Un *crible* de $\mathcal{C}$ est une sous-catégorie pleine $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}$ telle que pour tout objet $C$ de $\mathcal{C}$ et pour tout objet $D$ de $\mathcal{D}$, s'il existe un morphisme $C \to D$, alors $C$ est également un objet de $\mathcal{D}$.

Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et $X$ un objet de $\mathcal{C}$. Un *crible sur* $X$ est un crible de la catégorie $\mathcal{C}/X$. À titre de rappel, les objets de cette catégorie sont des couples $(C, f)$ où $C$ est un objet de $\mathcal{C}$ et $f$ un morphisme $C \to X$. Étant donnés deux objets $(C_1, f_1)$ et $(C_2, f_2)$, un morphisme $(C_1, f_1) \to (C_2, f_2)$ de la catégorie $\mathcal{C}/X$ est un morphisme $g\colon C_1 \to C_2$ tel que $f_1 = f_2 \circ g$, c'est-à-dire tel que le triangle suivant

41. Voir Giraud [1963] et Demazure et Grothendieck [1970, exposé IV].

soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} C_1 \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "f_1"'] & & C_2 \arrow[dl, "f_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Diverses opérations peuvent être définies sur les cribles. L'une des plus importantes est certainement le changement de base qui fait appel au produit fibré. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie, $X$ un objet de $\mathcal{C}$, $R$ un crible sur $X$ et $f\colon Y \to X$ un morphisme de $\mathcal{C}$. Le produit $R \times_X Y$ est un crible sur $Y$ appelé *crible déduit de R par changement de base*[42].

Les cribles permettent de définir une topologie directement sur une catégorie.

**Définition 3.2.2.2** (Artin, Grothendieck et Verdier 1972)**.** Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Une *topologie de Grothendieck* sur $\mathcal{C}$ est une fonction $J$ qui, à tout objet $X$ de $\mathcal{C}$, associe un ensemble de cribles $J(X)$ sur $X$ tel que

(T1) (stabilité par changement de base) pour tout objet $X$ de $\mathcal{C}$, crible $R \in J(X)$ et morphisme $f\colon Y \to X$ où $Y$ est un objet de $\mathcal{C}$, $R \times_X Y$ est un crible sur $Y$ et $R \times_X Y \in J(Y)$ ;

(T2) (caractère local) soient $R_1$ et $R_2$ deux cribles sur $X$ tel que $R_1 \in J(X)$. Si, pour tout objet $Y$ de $\mathcal{C}$ et pour tout morphisme $Y \to R_1$, le crible $R_2 \times_X Y$ sur $Y$ est tel que $R_2 \times_X Y \in J(X)$, alors $R_2 \in J(X)$ ;

(T3) pour tout objet $X$ de $\mathcal{C}$, $X \in J(X)$.

Les cribles appartenant à l'ensemble $J(X)$ sont appelés *cribles couvrant X*. Ceux-ci sont les analogues catégoriques des ouverts d'un espace topologique. Tout comme la structure propre aux ouverts d'un espace topologique fournissait la notion de localisation sur cet ensemble, la structure inhérente aux cribles couvrants munit une catégorie d'une notion de localisation. À cet égard, les conditions T1, T2 et T3 qui définissent une topologie de Grothendieck sont clairement une transposition aux catégories de celles qui déterminent la notion de localisation sur un ensemble dans le contexte des espaces topologiques traditionnels. De plus, étant donnés une catégorie $\mathcal{C}$ et $X$ un objet de $\mathcal{C}$, l'ensemble $J(X)$ des cribles couvrants sur $X$ possède une structure de treillis.

Bref, une topologie de Grothendieck donne une notion de localisation en bonne et due forme sur une catégorie en ce sens que, comme le mentionne Marquis, elle indique comment décomposer un objet $X$ d'une catégorie en ses parties et passer de l'un à l'autre : « *Thus, a localisation system is a collection of ways of decomposing an object X, ways of moving from the object X to its parts.* » [2009, p. 251]

42. Voir Artin, Grothendieck et Verdier [1972, exposé I, p. 21–22] pour une présentation plus complète des opérations.

Étant donnée une catégorie sur laquelle plusieurs topologies de Grothendieck peuvent être définies, la notion de site permet de rendre compte de la différence entre deux topologies $J_1$ et $J_2$ sur une même catégorie $\mathcal{C}$.

**Définition 3.2.2.3** (Artin, Grothendieck et Verdier 1972)**.** Un *site* est une paire $(\mathcal{C}, J)$ où $\mathcal{C}$ est une catégorie et $J$ est une topologie de Grothendieck.

Étant donnée une catégorie $\mathcal{C}$, les différents sites $(\mathcal{C}, J)$ renvoient à autant de notions de localisation différentes sur $\mathcal{C}$. Les sites fournissent donc une généralisation catégorielle de la notion de localisation intrinsèque aux espaces topologiques. Pour donner une indication simple à cet effet, tout espace topologique est un site. Soit $X$ un espace topologique et $\mathrm{Ouv}(X)$ la catégorie des ouverts de $X$. Soit $U$ un objet de la catégorie $\mathrm{Ouv}(X)$. Un crible $S$ sur $U$ est une famille d'ouverts $\{V_i\}_{i\in I}$ de $U$ tel que, pour tout $i, j \in I$, si $V_i \in S$ et $V_j \subseteq V_i$, alors $V_j \in S$. Pour définir une topologie de Grothendieck sur la catégorie $\mathrm{Ouv}(X)$, il suffit de poser qu'un tel crible $R$ sur $U$ est couvrant si et seulement si $U \subset \bigcup_{V_i \in S} V_i$.

La généralisation de la notion de localisation que constituent les sites et les topologies de Grothendieck fait complètement disparaître les points. Grothendieck ne travaille en effet qu'avec le treillis des ouverts. Ceci suggère que ce qui importe vraiment pour définir une localisation sur un espace, ce ne sont pas les points de son ensemble sous-jacent, mais bien la structure de treillis que forment ses ouverts.

#### 3.2.2.2 La catégorie des faisceaux sur un site

Dans la perspective commune de la topologie et de la géométrie algébrique, les sites présentent un intérêt considérable dans la mesure où il est possible d'y définir des faisceaux et, par conséquent, d'y construire des théories cohomologiques.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Un *préfaisceau d'ensembles* sur $\mathcal{C}$ est un foncteur contravariant $F\colon C^o \to \mathbf{Ens}$[43]. Les préfaisceaux forment une catégorie dénotée $\hat{\mathcal{C}} = \mathbf{Ens}^{\mathcal{C}^o}$. $\mathbf{Ens}^{\mathcal{C}^o}$ est une catégorie de foncteurs dont les objets sont les foncteurs contravariants $C^o \to \mathbf{Ens}$ et les morphismes sont les transformations naturelles $F_1 \to F_2$ entre préfaisceaux.

Soit $(\mathcal{C}, J)$ un site. Un *faisceau* est un préfaisceau $F$ tel que, pour tout objet $X$ de $\mathcal{C}$ et pour tout crible $R$ couvrant de $X$, l'application

$$\mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(X, F) \to \mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(R, F)$$

est une bijection[44]. Les faisceaux forment une sous-catégorie pleine de la catégorie des préfaisceaux $\mathbf{Ens}^{\mathcal{C}^o}$, notée $\mathrm{Sh}(\mathcal{C}, J)$. Un morphisme $F_1 \to F_2$ de $\mathrm{Sh}(\mathcal{C}, J)$ est la transformation naturelle entre les faisceaux correspondants.

43. Une telle construction exige certaines précautions fondationnelles. Strictement parlant, Grothendieck introduit des univers et considère des catégories définies dans un tel univers. Voir Artin, Grothendieck et Verdier [1972, exposé 1]. Pour un traitement plus large des fondements de la théorie des catégories, voir Marquis [2009].

44. Pour des définitions équivalentes, voir Mac Lane et Moerdijk [1992, p. 121–122].

À la lumière de cette définition, le *Séminaire de géométrie algébrique* projette un éclairage inédit sur les faisceaux. Premièrement, comparativement à celles de Leray, Cartan et Serre, la caractérisation des faisceaux en tant que foncteurs, c'est-à-dire en termes catégoriels, proposée par Grothendieck est indépendante de toute référence, même implicite, aux points de l'espace.

Deuxièmement, Leray et Cartan considéraient des faisceaux de modules. Serre définissait quant à lui dans « Faisceaux algébriques cohérents » des faisceaux de groupes et montrait ensuite que cette définition s'étendait naturellement aux faisceaux d'anneaux et de modules. Néanmoins, il était toujours question de faisceaux d'un certain type. Chez Grothendieck, et cet aspect était déjà présent dans « Sur quelques points d'algèbre homologique » [45], la notion de faisceau est totalement générale au sens où ce ne sont pas des faisceaux de modules ou de groupes qui sont définis, mais des faisceaux tout simplement. À cet égard, en généralisant les faisceaux à valeurs dans un ensemble par des faisceaux à valeurs dans une catégorie, c'est-à-dire des faisceaux associés à des préfaisceaux $\mathcal{C}^o \to \mathcal{D}$, il est possible de définir des faisceaux pour toute structure algébrique définie par limites projectives finies [46].

Troisièmement, chez Leray, Cartan et Serre, un faisceau se construisait sur un espace topologique. Pour Grothendieck, la notion de faisceau est en comparaison inextricablement liée à celle de préfaisceau, ce qui fait en sorte qu'elle ne se définit pas sur un espace topologique, mais plutôt sur une catégorie.

Ces différences tiennent à ce que les faisceaux de Grothendieck et ceux de Leray, Cartan et Serre sont des entités mathématiques de types différents. Selon ces derniers, un faisceau consistait en une fonction d'un espace topologique vers une structure algébrique en vertu de laquelle celle-ci est munie d'une topologie. Dans le *Séminaire de géométrie algébrique*, un faisceau est plutôt une application ou, plus précisément, un foncteur d'une catégorie dans la catégorie des ensembles. Selon cette appréhension des faisceaux, il est alors parfaitement naturel, pour ne pas dire inévitable, de considérer explicitement la catégorie qu'ils forment puisqu'il s'agit d'une catégorie de foncteurs.

La considération de la catégorie $\mathrm{Sh}(\mathcal{C}, J)$ des faisceaux sur un site $(\mathcal{C}, J)$ constitue un moment charnière de l'évolution du concept d'espace topologique. En effet, un faisceau dépend par définition d'un crible couvrant, c'est-à-dire d'un crible appartenant à une topologie de Grothendieck. Tout faisceau hérite en conséquence d'une notion de localisation, à savoir celle présente sur le site $(\mathcal{C}, J)$ sous-jacent. Dans *Récoltes et semailles*, Grothendieck explique cette caractéristique en comparant un faisceau à un outil d'arpentage :

> L'idée novatrice essentielle était celle de **faisceau** (...) C'était comme si le bon vieux "mètre cohomologique" standard dont on disposait jusqu'à présent pour "arpenter" un espace, s'était soudain vu multiplier en une multitude inimaginablement grande de nouveaux "mètres" de toutes les tailles, formes et substances

45. Cf. Grothendieck [1957, §3.1].
46. Pour le détail technique, voir Artin, Grothendieck et Verdier [1972, exposé II, §6].

> imaginables, chacun intimement adapté à l'espace en question, et donc chacun nous livre à son sujet des informations d'une précision parfaite, et qu'il est le seul à pouvoir nous donner. [1985, p. P37]

De plus, la catégorie des faisceaux sur un site est propice aux constructions topologiques standards, à commencer par les théories cohomologiques. La catégorie des préfaisceaux, et par conséquent celle des faisceaux, dispose effectivement de toutes les propriétés d'exactitude que doit posséder un espace. En gros, ceci signifie que les limites projectives et injectives existent dans ces catégories [47]. Ces propriétés d'exactitude étant satisfaites, les groupes de cohomologie d'un faisceau se définissent à l'aide des foncteurs dérivés selon le modèle de « Sur quelques points d'algèbre homologique » [48].

La catégorie des faisceaux $\mathrm{Sh}(\mathcal{C}, J)$ sur un site $(\mathcal{C}, J)$ peut donc être vue comme un espace généralisé dans la mesure où elle retient ce qui est essentiel dans la structure d'un espace topologique.

> Considérons l'ensemble de **tous** les faisceaux sur un espace (topologique) donné ou, si on veut, cet arsenal prodigieux formé de tous ces "mètres" servant à l'arpenter. Nous considérons cet "ensemble" ou "arsenal" comme muni de sa structure la plus évidente, laquelle apparaît, si on peut dire, "à vue de nez" ; à savoir, une structure de "catégories". (...) C'est cette sorte de "superstructure d'arpentage", appelée "catégorie des faisceaux" (sur l'espace envisagé), qui sera dorénavant considérée comme incarnant ce qui est le plus essentiel à l'espace. [Grothendieck 1985, p. P38]

L'idée est qu'un espace topologique compris comme treillis de ses ouverts n'est rien d'autre qu'un faisceau sur l'ensemble sous-jacent. Bref, un faisceau est une façon de décomposer cet ensemble en ses parties, mais d'une manière contrôlée, c'est-à-dire de manière à y induire une notion de localisation. La considération de la catégorie des faisceaux met alors à la disposition de Grothendieck toutes les décompositions équivalentes de l'ensemble, c'est-à-dire toutes les notions de localisation équivalentes. En ce sens, la structure de catégorie dont sont équipés les faisceaux régit les relations entre toutes les décompositions et permet de comparer ces diverses notions de localisations et leurs propriétés.

De ce point de vue, le treillis des ouverts correspond à une représentation particulière de la décomposition de l'ensemble en ses parties. Parce qu'elle permet de considérer simultanément une décomposition donnée et tous ses différents avatars, la catégorie des faisceaux permet également de faire abstraction des spécificités et complications propres à celle-ci. C'est cette idée qu'encodera de manière définitive le concept de topos.

La catégorie des faisceaux sur un espace topologique illustre parfaitement le fait que la catégorie des faisceaux sur un espace incarne ce qui lui est le plus essentiel [49].

47. Voir Artin, Grothendieck et Verdier [1972, exposé I, §3 et exposé II, §4].
48. Pour le détail, voir Giraud [1963, §1].
49. La présentation qui suit s'inspire de Mac Lane et Moerdijk [1992].

Soit $X$ un espace topologique et $\mathrm{Ouv}(X)$ la catégorie des ouverts de $X$. Un préfaisceau sur $X$ est tout simplement un préfaisceau sur la catégorie $\mathrm{Ouv}(X)$, c'est-à-dire un foncteur $\mathrm{Ouv}(X)^o \to \mathbf{Ens}$. Les préfaisceaux sur $X$ forment une catégorie. La catégorie des faisceaux sur $X$ est la sous-catégorie pleine habituelle, notée $\mathrm{Sh}(X)$. Cette catégorie $\mathrm{Sh}(X)$ permet de retrouver la structure de l'espace $X$, c'est-à-dire le treillis des ouverts. En effet, le treillis $\mathcal{O}(X)$ est isomorphe à l'ensemble des sous-objets de l'objet terminal de la catégorie $\mathrm{Sh}(X)$. L'espace, par le biais du treillis des ouverts, est donc toujours là, mais il n'est plus qu'une représentation de la notion de localisation parmi toutes celles possibles.

Pour bien comprendre l'exemple ci-dessus, un *objet terminal* dans une catégorie $\mathcal{C}$ est un objet 1 tel que, pour tout $X$, il existe un unique morphisme $X \to 1$. Dans la catégorie des ensembles **Ens**, tout singleton est un objet terminal. Pour cette raison, l'objet terminal $1_{\mathbf{Ens}}$ de cette catégorie s'appelle l'ensemble à un point et est noté $\{*\}$. L'objet terminal $1_{\mathrm{Sh}(X)}$ de la catégorie des faisceaux sur $X$ est le foncteur $\mathrm{Ouv}(X) \to \mathbf{Ens}$ qui associe $\{*\}$ à tout ouvert de $X$.

Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et $X$ un objet de $\mathcal{C}$. Un *sous-objet* de $X$ est une classe d'équivalence de monomorphismes à valeurs dans $X$. Par définition, deux monomorphismes $f\colon C_1 \to X$ et $g\colon C_2 \to X$ dans $\mathcal{C}$ sont équivalents s'il existe un isomorphisme $h\colon C_1 \xrightarrow{\sim} C_2$ tel que $f = g \circ h$. La collection des sous-objets de $X$ se note $\mathrm{Sub}_{\mathcal{C}}(X)$ et est d'ailleurs munie d'un ordre partiel. Soient $[f]$ et $[g]$ les classes d'équivalence associées aux monomorphismes $f\colon C_1 \to X$ et $g\colon C_2 \to X$. $[f] \leq [g]$ s'il existe un morphisme $h\colon C_1 \to C_2$ tel que $f = g \circ h$. Dans la catégorie des ensembles **Ens**, un sous-objet d'un objet $X$ est tout simplement un sous-ensemble de $X$. Dans la catégorie $\mathrm{Sh}(X)$ des faisceaux sur un espace $X$, un sous-objet d'un faisceau $F$ correspond à un sous-faisceau de $F$, c'est-à-dire un sous-foncteur qui est lui-même un faisceau.

Ainsi, l'affirmation ci-dessus stipule que les ouverts de l'espace $X$ sont les sous-faisceaux du faisceau $F\colon\ \mathrm{Ouv}(X)^o \to \mathbf{Ens}$ tel que, pour tout ouvert $U$, $F(U) = \{*\}$. Ceci signifie que la structure de l'espace topologique $X$ est en fait déterminée par la catégorie des faisceaux sur $X$. Bref, il est légitime de faire totalement abstraction de $X$ et de ne se préoccuper que de la catégorie $\mathrm{Sh}(X)$.

À la lumière de ces considérations, la catégorie des faisceaux sur un site peut certes être vue comme un espace, mais, pour Grothendieck, il ne s'agissait toutefois que d'une généralisation intermédiaire. Le concept d'espace qu'il voulait réellement mettre de l'avant allait encore plus loin que la catégorie $\mathrm{Sh}(\mathcal{C}, J)$.

### 3.2.3 Les topos comme espaces

Selon Grothendieck, ce ne sont pas les sites, mais plutôt les topos qui fournissent la généralisation définitive du concept traditionnel d'espace topologique. Cette transition des sites vers les topos a pour origine une constatation toute simple :

toutes les notions importantes liées au site s'expriment directement en termes du topos associé.

> Il apparaît que toutes les notions vraiment importantes liées à un site (par exemple ses invariants cohomologiques (...), divers autres invariants "topologiques", tels ses invariants d'homotopie (...) et les notions étudiées dans le livre de J. GIRAUD sur la cohomologie non commutative) s'expriment en fait directement en termes du topos associé. [Artin, Grothendieck et Verdier 1972, exposé IV, p. 1]

En vertu de l'emphase sur les topos au détriment des sites, cette généralisation s'accompagne d'une transformation du concept d'espace. Avant d'aborder ces deux aspects, il faut cependant préciser ce qu'est un topos.

#### 3.2.3.1 Des sites aux topos

Dans le *Séminaire de géométrie algébrique*, Grothendieck définit un topos comme une catégorie équivalente à une catégorie de faisceaux sur un site.

Avant d'aller plus loin, il convient de rappeler que les notions d'équivalence et d'isomorphisme ne sont pas coextensives dans les catégories. Un *isomorphisme* de catégories est un foncteur $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ qui possède un inverse, c'est-à-dire pour lequel il existe un foncteur $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tel que $G \circ F = 1_{\mathcal{C}}$ et $F \circ G = 1_{\mathcal{D}}$. En comparaison, deux catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont équivalentes s'il existe des foncteurs $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tels que $G \circ F \simeq 1_{\mathcal{C}}$ et $F \circ G \simeq 1_{\mathcal{D}}$ sont des isomorphismes naturels, c'est-à-dire des transformations naturelles isomorphes.

La définition formelle va alors comme suit :

**Définition 3.2.3.1** (Artin, Grothendieck et Verdier 1972)**.** Un *topos* est une catégorie $\mathcal{E}$ telle qu'il existe un site $(\mathcal{C}, J)$ tel que $\mathcal{E}$ est équivalente à la catégorie $\mathrm{Sh}(\mathcal{C}, J)$ des faisceaux d'ensembles sur ce site.

À la lumière de cette définition, une façon naturelle de définir un topos consiste à explicitement munir une catégorie d'une notion de localisation c'est-à-dire d'une topologie de Grothendieck, et de construire sur ce site une catégorie de faisceaux. La catégorie résultante pourra évidemment être considérée comme un topos, appelé le topos associé.

L'équivalence catégorielle qui sous-tend la définition fait cependant en sorte que le concept de topos se détache de cette construction explicite ou, pour être plus précis, de la notion de site. Il suffit qu'une catégorie soit équivalente à une catégorie de faisceaux sur un site, quel qu'il soit, pour qu'elle soit un topos. En d'autres termes, il n'est pas nécessaire de préciser explicitement la notion de localisation sur la catégorie $\mathcal{E}$, celle-ci lui étant attribuée implicitement en vertu de l'équivalence.

La définition de Grothendieck caractérise les topos d'une manière fondamentalement différente par rapport aux définitions axiomatiques habituelles. Le propre de ces dernières est de caractériser un type d'entités mathématiques en stipulant les propriétés communes aux objets de ce type. Celle de Grothendieck avance en comparaison un critère d'identité entre catégories au lieu de spécifier les caractéristiques que doit satisfaire une catégorie donnée pour être considérée comme un topos. Elle détermine certes un type d'entités mathématiques, mais de manière extrinsèque par opposition à intrinsèque.

En fait, le concept de topos est défini par un processus d'abstraction sur les catégories de faisceaux sur un site. [Marquis 2009, p. 253] La définition de Grothendieck fait en sorte qu'un même topos $\mathcal{E}$ peut être équivalent à des catégories de faisceaux sur des sites différents. Il pourrait ainsi exister des sites $(\mathcal{C}_1, J_1)$ et $(\mathcal{C}_2, J_2)$ tels que $\mathcal{E} \simeq \mathrm{Sh}(\mathcal{C}_1, J_1)$ et $\mathcal{E} \simeq \mathrm{Sh}(\mathcal{C}_2, J_2)$. Le topos $\mathcal{E}$ de même que les topos associés $\mathrm{Sh}(\mathcal{C}_1, J_1)$ et $\mathrm{Sh}(\mathcal{C}_2, J_2)$ seraient alors « identiques » de telle sorte que le choix d'un site ou d'un autre se résumerait à une question de convenance. Qui plus est, rien n'exige que les sites eux-mêmes soient isomorphes, ni même qu'ils soient équivalents. Des sites $(\mathcal{C}_1, J_1)$ et $(\mathcal{C}_2, J_2)$ complètement distincts peuvent donner lieu à des topos équivalents. Par conséquent, Grothendieck considère comme équivalents toute paire de sites dont les topos associés le sont, c'est-à-dire s'il existe une équivalence de catégories entre leurs catégories de faisceaux respectives $\mathrm{Sh}(\mathcal{C}_1, J_1)$ et $\mathrm{Sh}(\mathcal{C}_2, J_2)$.

Pour cette raison, le concept de topos relègue celui de site à l'arrière-plan. Krömer affirme à ce propos que « *the topos is more important than the site in Grothendieck's eyes.* » [2007, p. 175] Bref, la notion de site devient une notion auxiliaire comme l'écrit Grothendieck dans la préface de SGA 4 :

> Notre principe directeur a été de développer un langage et des notations qui soient ceux qui servent déjà effectivement dans les diverses applications, de sorte à ne pas perdre contact avec le contenu "géométrique" (ou "topologique") des divers foncteurs qu'on est amené à considérer entre sites. Pour ceci, les notions de topos et de morphismes de topos semblent être le fil conducteur indispensable, et il convient de leur donner la place centrale, la notion de site devenant une notion technique auxiliaire. [Artin, Grothendieck et Verdier 1972, p. vi]

À la lumière de ces considérations, ce sont donc les topos et non les sites qui doivent être considérés comme des espaces généralisés.

#### 3.2.3.2 Une généralisation du concept d'espace topologique

Dans sa compréhension traditionnelle, le concept d'espace topologique remplit deux rôles interdépendants. Premièrement, il fournit une notion de localisation, c'est-à-dire une topologie sur un ensemble. Deuxièmement, il détermine la définition de la continuité. En effet, une fonction $f\colon X \to Y$ entre deux espaces topologiques $X$ et $Y$ est continue si, pour tout ouvert $V$ de $Y$, $f^{-1}(V)$ est un ouvert de $X$.

Tel que vu à la section 3.2.2, le concept de site, et par extension celui de topos[50], généralise la notion de localisation inhérente aux espaces topologiques traditionnels.

Il en est de même pour la continuité : aux fonctions continues entre espaces topologiques, Grothendieck fait correspondre les morphismes de topos. Soient $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ deux topos. Un *morphisme de topos* de $\mathcal{E}_1$ dans $\mathcal{E}_2$ est un triplet $u = (u_*, u^*, \phi)$ où $u_* \colon \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ est un foncteur, $u^* \colon \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_1$ est un foncteur exact à gauche et $\phi\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_1}(u_*(X_2), X_1) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_2}(X_2, u_*(X_1))$ est l'isomorphisme d'adjonction où $X_1$ et $X_2$ sont respectivement des objets de $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$. $u_*$ s'appelle le foncteur image directe pour $u$, $u^*$ le foncteur image inverse pour $u$ et $\phi$ l'isomorphisme d'adjonction pour $u$.

Les morphismes de topos sont aujourd'hui connus sous le nom de morphismes géométriques. La définition contemporaine de ces morphismes est d'ailleurs plus simple que celle de Grothendieck. Un *morphisme géométrique* $\mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ est une paire de foncteurs $f_* \colon \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ et $f^* \colon \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_1$ tels que $f^*$ est un adjoint à gauche de $f_*$ et $f_*$ est exact à gauche.

Ainsi, à l'instar d'une fonction continue qui est une relation entre deux espaces, un morphisme de topos relie deux espaces généralisés. S'il n'est certes pas évident, sur la seule base de la définition, que la notion de morphisme de topos généralise celle de fonction continue, il suffit de constater que toute fonction continue peut aisément s'interpréter comme une paire d'adjoints entre topos et donc comme un morphisme de topos pour s'en convaincre. Soit $f \colon X \to Y$ une fonction continue entre deux espaces topologiques. À $X$ et $Y$ correspondent les topos associés à leurs catégories de faisceaux respectives $\mathrm{Sh}(X)$ et $\mathrm{Sh}(Y)$. Une telle fonction continue induit des foncteurs $f_* \colon \mathrm{Sh}(X) \to \mathrm{Sh}(Y)$ et $f^* \colon \mathrm{Sh}(Y) \to \mathrm{Sh}(X)$ entre les catégories $\mathrm{Sh}(X)$ et $\mathrm{Sh}(Y)$.

Premièrement, soit $F$ un faisceau sur $X$, c'est-à-dire un foncteur $\mathcal{O}(X)^o \to \mathbf{Ens}$. Pour obtenir un faisceau sur $Y$, il suffit de poser $f_*(F)(V) = F \circ f^{-1}(V)$ pour tout $V \in \mathcal{O}(Y)$. La fonction $f$ étant continue, $f^{-1}(V)$ est un ouvert de $X$ auquel il suffit d'appliquer le faisceau $F$. Visuellement,

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{O}(X)^o \arrow[dd, "F"'] & & & \mathcal{O}(Y)^o \arrow[dd, dashed, "f_*(F)"] \arrow[dr, "f^{-1}"] & \\
& {} \arrow[r, mapsto, "f_*"] & {} & & \mathcal{O}(X)^o \arrow[dl, "F"] \\
\mathbf{Ens} & & & \mathbf{Ens} &
\end{tikzcd}
$$

Deuxièmement, le foncteur $f^*$ se décrit en passant par la catégorie des espaces étales. Sans rentrer dans les détails, étant donné un espace topologique $X$, un *espace*

50. En effet, tout topos peut être associé à une catégorie de faisceaux sur un site. Voir la section 3.2.3.3.

*étale sur* $X$ est un espace $E$ tel qu'il existe un homéomorphisme local $p\colon E \to X$, ce qui signifie que pour tout $e \in E$, il existe un ouvert $V$ contenant $e$ tel que $p(V) \in \mathcal{O}(X)$ et $p|_V$ est un homéomorphisme $V \to p(V)$. Les espaces étales sur $X$ forment une catégorie $\mathbf{Etale}(X)$ qui est une sous-catégorie pleine de $\mathbf{Top}/X$. [51]

Il existe une équivalence de catégories entre la catégorie des faisceaux et la catégorie des espaces étales sur cet espace. Dans le cas présent, il y a donc des équivalences $\mathrm{Sh}(X) \rightleftarrows \mathbf{Etale}(X)$ et $\mathrm{Sh}(Y) \rightleftarrows \mathbf{Etale}(Y)$. Soient $G$ un faisceau sur $Y$ et $p\colon \Lambda G \to Y$ l'espace étale correspondant à $G$. $f^*(p)$ est l'espace étale sur $X$ défini par le produit fibré

$$\begin{tikzcd} f^*(\Lambda G) \arrow[r] \arrow[d] & \Lambda G \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

L'équivalence $\mathrm{Sh}(X) \rightleftarrows \mathbf{Etale}(X)$ donne le faisceau sur $X$ recherché [52].

Finalement, les foncteurs $f^*$ et $f_*$ sont des adjoints, c'est-à-dire qu'il existe un isomorphisme $\mathrm{Sh}(X)(f^*G, F) \simeq \mathrm{Sh}(Y)(G, f_*F)$ [53]. Ces foncteurs sont donc des morphismes de topos au sens de Grothendieck.

À vrai dire, le parallèle entre les espaces topologiques traditionnels et les topos ne s'arrête pas là. Tout comme les fonctions continues sont essentielles pour définir un critère d'identité sur les premiers, les morphismes de topos fournissent un critère d'équivalence sur les seconds.

Intuitivement, deux espaces topologiques sont « identiques » s'ils possèdent les mêmes notions de localisation et de continuité. Formellement, deux espaces topologiques sont *homéomorphes* s'il existe une fonction $f\colon X \to Y$ bijective et continue telle que $f^{-1}$ existe et soit continue. En d'autres termes, les homéomorphismes entre espaces topologiques sont les isomorphismes de la catégorie **Top** dont les objets sont les espaces topologiques et les morphismes les fonctions continues. L'homéomorphie étant une relation d'équivalence sur les espaces topologiques, elle induit une classification de ceux-ci.

Dans le cadre de la théorie des topos, les homéomorphismes sont remplacés par des équivalences catégoriques, c'est-à-dire par des équivalences entre topos. Deux topos $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ sont *équivalents* s'il existe des morphismes de topos $u\colon \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ et $v\colon \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_1$ tels que $v \circ u \simeq 1_{\mathcal{E}_1}$ et $u \circ v \simeq 1_{\mathcal{E}_2}$.

51. Pour une présentation plus détaillée des espaces étales et de la catégorie qu'ils forment, voir Mac Lane et Moerdijk [1992, §2.6].

52. Pour une description rigoureuse du foncteur $f^*$, voir Mac Lane et Moerdijk [1992, §2.9] ou encore Artin, Grothendieck et Verdier [1972, exposé 4, §4].

53. Pour une démonstration, voir Mac Lane et Moerdijk [1992, p. 101].

Comme précédemment, la généralisation tient à que ce le critère d'identité traditionnel s'interprète naturellement en termes du critère topossique. Une fonction continue $f\colon X \to Y$ est un homéomorphisme si et seulement si le morphisme de topos correspondant $\mathrm{Sh}(X) \to \mathrm{Sh}(Y)$ est une équivalence de topos [54]. Comme le dit Grothendieck, « [c]'est la notion d'équivalence de topos qui remplace ici la notion traditionnelle d'homéomorphie entre deux espaces topologiques. » [Artin, Grothendieck et Verdier 1972, exposé IV, p. 34]

À la lumière de ces considérations, un topos est donc bel et bien un espace généralisé. Pour citer Marquis,

> *a topology is essentially a structure which allows mathematicians to define things locally and study things locally, things which are transformed continuously into one another. A topological structure is a structure whose essence is to make sense of (1) local phenomena and (2) continuity. A topos is a generalized space more or less because it provides the means to express and study local phenomena and continuity. It possesses an intrinsic concept of localisation and naturally extends the notion of continuity*. [2009, p. 249]

De plus, de nombreuses notions par le biais desquelles sont caractérisés les espaces topologiques — connexité, sous-espace, plongement et faisceau pour n'en nommer que quelques-unes — ont leurs équivalents dans le contexte topossique : connexité, sous-topos, plongement, faisceau de topos, etc.

En ce qu'ils constituent des espaces généralisés, le point de vue des topos permet de considérer des notions de localisation sur des objets fort différents des ensembles de points de la topologie générale. Par exemple, la catégorie des ensembles **Ens** est un topos.

Pour donner un autre exemple plus substantiel, des catégories de faisceaux peuvent être construites sur des sites qui sont eux-mêmes des catégories d'espaces. Soit, par exemple, **Top** la catégorie des espaces topologiques. À titre de rappel, un objet de **Top** est un espace topologique et un morphisme de **Top** est une fonction continue $f\colon X \to Y$ entre deux espaces. En utilisant certaines familles surjectives de morphismes $u_i\colon X_i \to X$, une topologie de Grothendieck $J$ peut être définie sur **Top** [55]. $(\mathbf{Top}, J)$ est donc un site.

Soit maintenant $X$ un objet de **Top** et $\mathbf{Top}/X$ la « slice category » correspondante. Cette catégorie est également un site puisqu'elle est munie d'une topologie $J'$, la topologie induite par le foncteur $\mathbf{Top}/X \to \mathbf{Top}$. Le site $(\mathbf{Top}/X, J')$ s'appelle le gros site associé à $X$. Au prix de quelques précautions fondationnelles, la

54. Pour être parfaitement rigoureux, il faut aussi que les espaces $X$ et $Y$ soient sobres ce qui, dans la pratique, est habituellement le cas. Par définition, un espace est *sobre* si toute partie fermée irréductible a un point générique. À ce sujet, voir Garner [2009] selon qui, en raison de cette condition de sobriété, le concept de topos généralise celui de locale et non d'espace topologique, la généralisation de ce dernier étant plutôt donné par le concept d'ionad.

55. Ces morphismes sont en fait des immersions ouvertes. Voir Artin, Grothendieck et Verdier [1972, exposé IV, p. 18].

catégorie des faisceaux $\mathrm{Sh}(\mathbf{Top}/X, J')$ peut être légitimement construite. Le topos $\mathrm{TOP}(X) \simeq \mathrm{Sh}(\mathbf{Top}/X, J')$ ainsi obtenu s'appelle le gros topos de $X$.

Prise en elle-même, la possibilité de telles constructions, même si elles étaient dépourvues d'applications, présenterait déjà un intérêt conceptuel considérable puisque, en tant qu'espace, un topos tel $\mathrm{TOP}(X)$ est fort différent d'un ensemble de points muni d'une topologie.

Or, le gros topos d'un espace topologique $X$ est une construction importante en topologie et en géométrie algébrique. Son intérêt n'est donc pas purement théorique et ne réside pas dans sa simple possibilité. Pour ne donner qu'une indication sommaire à cet égard, soit $F\colon \mathbf{Top}/X \to \mathrm{TOP}(X)$ le foncteur canonique qui associe à tout espace $X' \to X$ un faisceau. Ce foncteur est pleinement fidèle. Le foncteur étant plein, pour toute paire d'objets $X'$, $X''$ de $\mathbf{Top}/X$ et pour tout morphisme de faisceaux $F(X') \to F(X'')$ dans $\mathrm{TOP}(X)$, il existe un morphisme $X' \to X''$ dans $\mathbf{Top}/X$. De plus, $F$ étant fidèle, pour toute paire d'objets $X'$, $X''$ et pour toute paire de morphismes $f_1, f_2\colon X' \to X''$ de $\mathbf{Top}/X$, $Ff_1 = Ff_2$ implique que $f_1 = f_2$.

Il en découle que la connaissance de tout objet de la catégorie $\mathbf{Top}/X$, c'est-à-dire de tout espace $X'$ au-dessus de $X$, se résume à celle de l'objet correspondant dans le gros topos $\mathrm{TOP}(X)$, c'est-à-dire à celle du faisceau qu'il définit. Les gros topos permettent donc de généraliser la théorie des faisceaux aux espaces topologiques sur un autre, mais aussi, plus généralement, aux catégories d'espaces.

> (...) la notion de faisceau sur (le gros site de) $X$ peut être considéré [*sic*] comme une *généralisation* de celle d'espace topologique au-dessus de $X$, à l'aide de laquelle toutes les constructions de la théorie des faisceaux prennent un sens pour les espaces topologiques sur $X$. [Artin, Grothendieck et Verdier 1972, exposé IV, p. 19]

Les généralisations des notions de localisation et de continuité suggéraient une appréhension des topos en tant qu'espaces généralisés. Or, le concept de topos est bien plus qu'une généralisation du concept d'espace topologique, il en est une transformation.

#### 3.2.3.3 Une transformation du concept d'espace topologique

Tel que vu à la section 3.2.3.1, la définition du concept de topos repose sur une équivalence catégorielle et est donc extrinsèque. Cette caractérisation extrinsèque n'exclut cependant pas toute caractérisation intrinsèque. En fait, le critère d'identité sur lequel se base la définition — l'équivalence avec une catégorie de faisceaux sur un site — suggère qu'un topos se distingue d'une catégorie arbitraire par le respect des propriétés communes aux catégories de la forme $\mathrm{Sh}(\mathcal{C}, J)$.

Une telle caractérisation intrinsèque des topos est donnée par le théorème de Giraud. Celui-ci isole des conditions suffisantes et purement catégorielles pour qu'une catégorie arbitraire soit un topos.

**Théorème** (Artin, Grothendieck et Verdier 1972)**.** Une catégorie $\mathcal{E}$ est un topos si les conditions suivantes sont satisfaites :

(1) Tous les petits coproduits existent dans $\mathcal{E}$ et sont disjoints et stables sous le produit fibré ;

(2) Tout épimorphisme de $\mathcal{E}$ est un coégalisateur ;

(3) Toute relation d'équivalence $R \rightrightarrows X$ dans $\mathcal{E}$ est un produit fibré et possède un quotient ;

(4) Tout diagramme exact $R \rightrightarrows X \to Q$ est stablement exact ;

(5) $\mathcal{E}$ est généré par un petit ensemble de ses objets [56].

Un topos se caractérise donc principalement par des propriétés d'exactitude (1, 2, 3, 4), mais aussi de taille (1, 5) et d'existence (5). Ces conditions garantissent que la catégorie $\mathcal{E}$ représente, en vertu de sa structure, l'existence et la taille d'une collection de morphismes de même que les propriétés de celles-ci. [Marquis 2009, p. 253]

À titre d'exemple, la cinquième condition stipule qu'il existe un petit ensemble $\{X_i\}_{i \in I}$ d'objets de $\mathcal{E}$ tel que si, pour toute paire de morphismes $u, v \colon E \to E'$ de $\mathcal{E}$, l'égalité $u \circ w = v \circ w$ où $w$ est un morphisme $w \colon C_i \to E$ entraîne que $u = v$. Intuitivement, cet ensemble de générateurs détecte les monomorphismes non triviaux.

Pour donner un autre exemple, un morphisme $f \colon X \to Y$ est par définition un *épimorphisme* de $\mathcal{E}$ si pour toute paire de morphismes $g_1, g_2 \colon Y \to Z$, l'égalité $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ implique $g_1 = g_2$. Toujours par définition, étant donnés deux morphismes $f, g \colon X \to Y$ de $\mathcal{E}$, un *coégalisateur* est une paire $\langle Q, q \rangle$ où $Q$ est un objet de $\mathcal{E}$ et $q$ un morphisme $Y \to Q$ tel que (1) $q \circ f = q \circ g$ et (2) pour tout morphisme $h \colon Y \to Z$ tel que $h \circ f = h \circ g$, il existe un unique morphisme $h' \colon Q \to Z$ tel que $h = h'q$. En termes de diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "h"'] & Q \arrow[d, dashed, "h'"] \\ & & Z \end{tikzcd}$$

Il s'agit d'une propriété universelle puisque tout morphisme $Y \to Z$ se factorise à travers le morphisme $q \colon Y \to Q$. La deuxième condition stipule donc que, dans un topos, tout épimorphisme incarne une propriété universelle.

56. Cet énoncé du théorème de Giraud est tiré de Mac Lane et Moerdijk [1992] et diffère considérablement de celui de Artin, Grothendieck et Verdier [1972, exposé IV, p. 5]. Dans sa forme originale, le théorème de Giraud définit un topos dans un univers en termes de foncteurs représentables et se limite conséquemment aux faisceaux d'ensembles. En fait, Grothendieck adoptait plus souvent qu'autrement le point de vue des foncteurs représentables.

Le théorème de Giraud confirme donc qu'il n'est pas nécessaire que la notion de localisation à l'œuvre sur une catégorie soit explicite pour que celle-ci soit un espace. Il suffit que celle-ci satisfasse certaines propriétés d'exactitude pour être un topos. Bref, ces conditions garantissent l'existence d'une équivalence avec une certaine catégorie de faisceaux sur un site. Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que la satisfaction de ces propriétés d'exactitude rend possible la construction d'un site sur la catégorie en question, ce qui est d'ailleurs la stratégie derrière la démonstration du théorème.

Soit $\mathcal{E}$ une catégorie vérifiant les propriétés d'exactitude du théorème de Giraud. Par hypothèse, $\mathcal{E}$ possède une famille génératrice. Soit $\mathcal{C}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}$ dont les objets sont les éléments de la famille génératrice de $\mathcal{E}$. Il existe donc une inclusion $I\colon \mathcal{C} \to \mathcal{E}$. Cette inclusion a la particularité de déterminer une adjonction

$$\mathbf{Ens}^{\mathcal{C}^o} \rightleftarrows \mathcal{E}$$

basée sur les foncteurs $- \otimes_{\mathcal{C}} I\colon \mathbf{Ens}^{\mathcal{C}^o} \to \mathcal{E}$ et $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{E}}(I, -)\colon \mathcal{E} \to \mathbf{Ens}^{\mathcal{C}^o}$ où $P \otimes_{\mathcal{C}} I$ est un produit tensoriel avec $P$ un foncteur et $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{E}}(I, E)(C) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(I(C), E)$ [57].

L'intérêt de cette adjonction tient à ce qu'elle permet de montrer que $\mathcal{E}$ est équivalente à une catégorie de faisceaux sur $\mathcal{C}$.

Soit $C$ un objet de $\mathcal{C}$. Un crible $R$ au-dessus de $C$ est couvrant si les morphismes $g\colon D \to C$ forment une famille épimorphique dans $\mathcal{E}$ [58]. Comme d'habitude, ces cribles couvrants définissent une topologie de Grothendieck $J$ de telle sorte que $(\mathcal{C}, J)$ est un site. Pour tout objet $E$ de $\mathcal{E}$, le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(-, E)\colon \mathcal{C}^o \to \mathbf{Ens}$ est un faisceau sur le site $(\mathcal{C}, J)$. Conséquemment, l'adjonction $\mathbf{Ens}^{\mathcal{C}^o} \rightleftarrows \mathcal{E}$ se restreint à une adjonction $\mathrm{Sh}(\mathcal{C}, J) \rightleftarrows \mathcal{E}$. Il suffit alors de montrer que certains morphismes appelés l'unité et la counité de cette adjonction sont des isomorphismes pour obtenir une équivalence de catégories $\mathrm{Sh}(\mathcal{C}, J) \simeq \mathcal{E}$, ce qui démontre que la catégorie $\mathcal{E}$ est équivalente à une catégorie de faisceaux et qu'elle est donc un topos [59].

En vertu du théorème de Giraud, le caractère spatial d'une catégorie n'est donc pas lié à la construction d'un site, mais plutôt à la satisfaction de propriétés d'exactitude. Ce caractère topologique s'incarne plutôt dans des propriétés d'exactitude, de taille et d'existence. Bref, une catégorie peut être un espace en bonne et due forme même si elle n'a, *a fortiori*, aucun caractère topologique, voire spatial. Le théorème de Giraud confirme du coup la préséance des topos sur les sites.

Il en résulte une transformation radicale du concept d'espace topologique.

Premièrement, les topos renversent la relation dialectique entre un espace et ses points en vigueur dans le cadre traditionnel. D'après la conception pointilliste, la structure d'espace topologique dépend des points et des sous-ensembles de l'ensemble

57. Pour une description détaillée de l'adjonction, voir Mac Lane et Moerdijk [1992, p. 353–360].

58. Par définition, une famille de morphismes $f_i\colon X_i \to Y$ dans une catégorie $\mathcal{C}$ est *épimorphique* si, pour tout objet $C$ de $\mathcal{C}$ , l'application $\mathrm{Hom}(Y, C) \to \prod \mathrm{Hom}(X_i, C)$ est injective.

59. Pour une démonstration détaillée, voir Mac Lane et Moerdijk [1992, p. 580–589].

sous-jacent. Les points, envisagés comme des atomes, sont antérieurs à l'espace dans la mesure où c'est leur organisation qui donne lieu à une topologie sur l'ensemble, qui permet de définir une telle structure sur l'ensemble. Les topos rompent avec cette conception selon laquelle un espace est un ensemble de points puisqu'ils ne sont pas déterminés par leurs parties.

Soit $\mathcal{E}$ un topos. Un *point* de $\mathcal{E}$ est un morphisme de topos $\mathbf{Ens} \to \mathcal{E}$ [60]. Par exemple, soit $X$ un espace topologique. Pour tout $x \in X$, le singleton $\{x\}$ peut être considéré comme un espace topologique. Puisqu'elle est une fonction continue, l'inclusion $i_x\colon \{x\} \to X$ détermine un morphisme de topos $x\colon \mathrm{Sh}(\{x\}) \to \mathrm{Sh}(X)$. Dans la mesure où $\mathrm{Sh}(\{x\})$ est catégoriquement équivalent à $\mathbf{Ens}$ [61], ce morphisme de topos est un point $p_x\colon \mathbf{Ens} \to \mathrm{Sh}(X)$ de $\mathrm{Sh}(X)$. Tout point de l'espace topologique $x$ renvoie à un point du topos $\mathrm{Sh}(X)$ associé à cet espace.

De plus, étant donné un point $p\colon \mathbf{Ens} \to \mathcal{E}$ de $\mathcal{E}$, la *fibre* de $\mathcal{E}$ en $p$ est l'ensemble $F_p = p^*(F)$ où $p^*\colon \mathcal{E} \to \mathbf{Ens}$ est le foncteur image inverse associé à $p$ et $F$ est un objet de $\mathcal{E}$. Les fibres d'un espace sont donc intimement liées à ses points.

À vrai dire, Grothendieck pousse l'idée selon laquelle un espace est une totalité qui détermine ses parties et ses points à son paroxysme : les points d'un espace ont eux-mêmes une structure !

De plus, comme l'illustre l'exemple qui suit, tout en étant non vides, certains topos n'ont pas de point. Soit $A$ une algèbre de Heyting complète. Par définition, $A$ est un treillis $\langle A, \leq\rangle$ distributif borné tel que, pour tout $x$ et $y$, il existe une exponentielle $x \Rightarrow y$ définie comme suit : $z \leq x \Rightarrow y$ si et seulement si $z \wedge x \leq y$. À l'instar de tout treillis, $A$ est une catégorie. Les objets de cette catégorie sont les éléments de l'ensemble sous-jacent et, étant donnés deux objets $x$ et $y$, il existe un morphisme $x \to y$ si et seulement si $x \leq y$.

Soit $a$ un objet de $A$. Un crible sur $a$ est un sous-ensemble d'objets $b \leq a$ de $A$ tel que pour tout $c$, si $c \leq a$, alors $c \in S$. Pour définir une topologie de Grothendieck $J$ sur $A$, il suffit de dire qu'un crible $S$ couvre $a$ si $a = \sup\{S\}$. $(A, J)$ est donc un site et la catégorie des faisceaux $\mathrm{Sh}(A, J)$ sur ce site est un topos. Le topos $\mathrm{Sh}(A, J)$ a la particularité que ses points sont en correspondance biunivoque avec les atomes de l'algèbre $A$, c'est-à-dire les points $a$ pour lesquels il n'existe aucun $b$ tel que $0 \leq b \leq a$. Par conséquent, si $B$ ne possède aucun atome, le topos $\mathrm{Sh}(A, J)$ sera non vide tout en étant dépourvu de points [62].

60. Cette définition est tirée de Mac Lane et Moerdijk [1992, p. 378]. La définition d'Artin, Grothendieck et Verdier [1972, exposé 4, §6] est légèrement plus compliquée en ce qu'elle fait appel au topos ponctuel. Par abus de langage, Grothendieck appelle topos ponctuel tout topos équivalent à la catégorie des ensembles **Ens**. Un point d'un topos $\mathcal{E}$ est alors un morphisme de topos $\mathcal{P} \to \mathcal{E}$ où $\mathcal{P}$ est le topos ponctuel.

61. Voir Artin, Grothendieck et Verdier [1972, exposé 4, §2.1 et 2.2].

62. Cet exemple est tiré de Mac Lane et Moerdijk [1992] et semble dû à Barr [1974]. La possibilité de topos sans point conduisit à l'étude de la topologie sans point — *pointless topology* en anglais. Voir Johnstone [1983]. Pour un autre exemple plus « topologique », c'est-à-dire celui d'un espace compact muni d'une mesure, voir Artin, Grothendieck et Verdier [1972, exposé 4, p. 99].

Soient $\mathcal{E}$ un topos et $p$ un point de $\mathcal{E}$. Un *voisinage* de $p$ est un couple $(X, u)$ où $X$ est un objet de $\mathcal{E}$ et $u \in X_p$, la fibre de $\mathcal{E}$ en $p$. Autrement dit, les objets du topos qui appartiennent à la fibre de $\mathcal{E}$ en $p$, c'est-à-dire ceux qui sont envoyés sur $X$ par $p$, forment le voisinage du point $p$.

Soit $\mathcal{E}$ un topos. Un *ouvert* de $\mathcal{E}$ est un sous-objet de l'objet terminal $1_{\mathcal{E}}$ de $\mathcal{E}$. Par exemple, soit $X$ un espace topologique et $\mathrm{Sh}(X)$ le topos associé. Tel qu'indiqué précédemment, le treillis $\mathrm{Ouv}(X)$ des ouverts de l'espace $X$ est isomorphe à l'ensemble des sous-objets de l'objet terminal de la catégorie $\mathrm{Sh}(X)$. Il est alors évident que les ouverts du topos $\mathrm{Sh}(X)$ correspondent aux ouverts de l'espace $X$. Pour donner un autre exemple, étant donné $X$ un espace topologique sobre non discret, le gros topos $\mathrm{TOP}(X)$ a des ouverts qui ne proviennent pas de ceux de $X$.

Les ouverts d'un espace sont intrinsèquement liés aux relations de nature locale sur la catégorie sous-jacente. Une relation est *de nature locale* si elle est stable par changement de base et stable par descente. Soient $(\mathcal{C}, J)$ un site, $X$ un objet de $\mathcal{C}$ et $T$ une relation en $X$. La relation $T$ est *stable par changement de base* si la sous-catégorie pleine $\mathcal{R}$ de $\mathcal{C}$ donnée par les objets $X$ de $\mathcal{C}$ tel que $T(X)$ est vérifiée est un crible. Ceci veut dire que, pour tout morphisme $Y \to X$ dans $\mathcal{C}$, $T(X)$ implique $T(Y)$. La relation $T$ est *stable par descente* si pour tout crible couvrant $\{X_i \colon X_i \to X\}_{i \in I}$ au-dessus d'un objet $X$ de $\mathcal{C}$, il suffit que la relation $T(X_i)$ soit satisfaite pour tout $i \in I$ pour que $T(X)$ le soit également. Grothendieck montre effectivement qu'une relation de nature locale en un objet $X$ de $\mathcal{C}$ correspond à un sous-objet de l'objet terminal du topos associé $\mathrm{Sh}(C, J)$. Les ouverts d'un topos sont donc liés à la notion de localisation sur celui-ci [63].

De plus, les ouverts d'un topos $\mathcal{E}$ forment un treillis. Premièrement, pour tout objet $X$ de $\mathcal{E}$ , la collection $\mathrm{Sub}_{\mathcal{E}}(X)$ est partiellement ordonnée [64]. En particulier, la collection $\mathrm{Sub}_{\mathcal{E}}(1_{\mathcal{E}})$ des sous-objets de l'objet terminal de $\mathcal{E}$, c'est-à-dire les ouverts de $\mathcal{E}$, est partiellement ordonnée. Deuxièmement, étant donnés deux ouverts $U$ et $V$ de $\mathcal{E}$, $U$ et $V$ sont par définition deux classes d'équivalence de monomorphismes de codomaine $1_{\mathcal{E}}$. Pour obtenir les bornes supérieure et inférieure recherchées, il suffit de poser $\sup\{U, V\} = U \cup V$ et $\inf\{U, V\} = U \cap V$.

La collection des ouverts de $\mathcal{E}$, c'est-à-dire la collection $\mathrm{Sub}_{\mathcal{E}}(1_{\mathcal{E}})$, admet également des éléments minimal et maximal. Ceux-ci sont respectivement l'objet initial $0_{\mathcal{E}}$ et l'objet terminal $1_{\mathcal{E}}$. Le treillis des ouverts d'un topos est donc borné. À vrai dire, ces ouverts permettraient également de définir une topologie sur la collection des sous-objets de $1_{\mathcal{E}}$ [65]. À l'instar de ses points, les ouverts d'un topos sont donc complètement déterminés par le topos lui-même.

Deuxièmement, la conception de la topologie à laquelle donnent lieu les topos fait en sorte que des situations allant bien au-delà des espaces topologiques traditionnels

63. Voir Artin, Grothendieck et Verdier [1972, exposé IV, p. 122–123].
64. Voir p. 186 pour un rappel de la définition de l'ordre partiel sur les sous-objets d'une catégorie.
65. Voir Artin, Grothendieck et Verdier [1972, , exposé 4, §8.4.2].

peuvent être qualifiées de spatiales. L'extension du concept d'espace est donc beaucoup plus large du point de vue des topos que du point de vue des espaces topologiques traditionnels.

> On peut donc dire que la notion de topos, dérivé naturel du *point de vue faisceautique* en Topologie, constitue à son tour un élargissement substantiel de la notion d'espace topologique, englobant un grand nombre de situations qui autrefois n'étaient pas considérées comme relevant de l'intuition topologique. [Artin, Grothendieck et Verdier 1972, exposé IV, p. 3]

Pour reprendre l'expression de Grothendieck, l'intuition topologique telle qu'elle s'incarne dans les topos a une portée beaucoup plus vaste qu'en topologie générale ou algébrique. Ainsi, de nombreux objets mathématiques qui ne pouvaient être appréhendés dans une perspective spatiale, c'est-à-dire auxquels l'intuition topologique traditionnelle ne s'appliquait pas, s'avèrent être des espaces, c'est-à-dire des topos.

Par exemple, soient $X$ un ensemble et $G$ un groupe. Une *action à gauche* de $G$ sur $X$ est une application $\alpha\colon G \times X \to X$ telle que

(1) pour tout $x \in X$, $\alpha(1_G, x) = x$ ;

(2) pour tout $x, \in X$ et $g, h \in G$, $\alpha(\alpha(g, x), h) = \alpha(gh, x)$.

Une action à droite se définit symétriquement. Un *G-ensemble* $X(G)$ est un ensemble $X$ sur lequel opère un groupe $G$. Un *G-faisceau* $F$ sur $X(G)$ est un faisceau $F$ sur $X$ tel que $G$ opère de manière compatible avec les opérations de $F$ sur $X$ [66]. Soient $F$, $F'$ deux $G$-faisceaux. Un *G-homomorphisme* $F \to F'$ est un homomorphisme de faisceaux compatible avec l'action de $G$ sur $X$. Les $G$-faisceaux munis des $G$-homomorphismes forment une catégorie. Le théorème de Giraud permet de vérifier que la catégorie des $G$-faisceaux sur $X$ est un topos, noté $\mathrm{Top}(X, G)$.

Selon Grothendieck, les changements dans la conceptualisation de l'espace qu'entraînaient les topos portaient la promesse d'une transformation de l'étude des espaces. En effet, le concept de topos englobe des espaces d'un type aussi inédit qu'inimaginable dans le cadre théorique traditionnel. Du point de vue topossique, des objets mathématiques aussi variés qu'un espace topologique classique, la catégorie des ensembles, une algèbre de Heyting complète ou encore le topos d'un espace à opérateurs sont autant d'espaces auquel se transpose naturellement l'intuition topologique.

> La notion de schéma constitue un vaste élargissement de la notion de "variété algébrique", et à ce titre elle a renouvelé de fond en comble la géométrie algébrique léguée par mes devanciers. Celle de topos constitue une extension insoupçonnée, pour mieux dire, **une métamorphose de la notion d'espace**. Par là, elle porte la promesse d'un renouvellement semblable de la topologie, et au delà [*sic*] de celle-ci, de la géométrie. [Grothendieck 1985, p. P40]

Selon Grothendieck, en tant que discipline, il était impératif que la topologie prenne pour objets d'étude les topos : « Comme le terme de "topos" lui-même est censé

66. Pour plus d'information à propos des $G$-faisceaux, voir Grothendieck [1957, chapitre V].

le suggérer, il semble raisonnable et légitime aux auteurs du présent Séminaire de considérer que l'objet de la Topologie est l'étude des *topos* (et non des seuls espaces topologiques). » [Artin, Grothendieck et Verdier 1972, p. 3] En raison des exigences de la géométrie algébrique abstraite, la discipline mathématique dédiée à l'analyse des espaces ne pouvait se restreindre aux seuls espaces topologiques. Ce faisant, les mathématiques se trouveraient confinées à un topos.

À la lumière du postulat méthodologique fondamental de Grothendieck et des problèmes auxquels il était confronté, il devenait non seulement pertinent, mais nécessaire de se placer dans d'autres topos. Telle fut la clé de leur résolution, à commencer par les conjectures de Weil.

### 3.2.4 La clé des conjectures de Weil

La théorie des topos fournit de multiples contextes mathématiques. En fait, chaque topos constitue un contexte ou, en termes plus imagés, un milieu à l'intérieur duquel peuvent être développées certaines parties des mathématiques. Étant donné un problème mathématique, elle permet donc de l'inscrire dans son cadre naturel, c'est-à-dire dans le topos propice à sa résolution.

Le problème que posent les conjectures de Weil se résume alors à la construction du topos qui donnera lieu à une cohomologie de Weil pour les schémas sur les corps finis. Dans cette optique, le « bon » topos sera celui dont la cohomologie intrinsèque à sa catégorie de faisceaux possédera toutes les propriétés propres à la cohomologie de Weil. McLarty décrit ce rôle du topos comme suit :

> *The way to understand a mathematical problem is to express it in the mathematical world natural to it—that is, in the topos natural to it. Each topos has a natural cohomology, simply taking the category of Abelian groups in that topos as the category of sheaves. The cohomology of that topos may solve the problem. In outline:*
>
> (1) *Find the natural world for the problem (for example, the étale topos of an arithmetic scheme).*
>
> (2) *Express the problem cohomologically (state Weil's conjectures as a Lefschetz fixed point theorem).*
>
> (3) *The cohomology of that world may solve your problem, like a ripe avocado bursts in your hands.* [2007, p. 312]

Tel que mentionné à la section 3.2.2, Grothendieck vit dans les revêtements localement isotriviaux de Serre l'idée manquante en vue de la définition d'une cohomologie adaptée aux schémas. Dans le *Séminaire de géométrie algébrique*, les revêtements localement isotriviaux deviendront les revêtements étales qui seront caractérisés à l'aide des invariants cohomologiques étales. Pour obtenir la cohomologie étale, il suffisait donc de construire le topos dans lequel elle s'incarnerait naturellement : le topos étale d'un schéma. Bref, il suffisait de laisser monter et agir la mer.

#### 3.2.4.1 Le topos étale d'un schéma et la cohomologie étale

Étant donné un schéma, le topos étale de ce schéma se construit en spécifiant une topologie de Grothendieck. Cette topologie n'est cependant pas construite directement sur le schéma en question, mais bien sur une catégorie de schémas.

Soit (Sch) la catégorie des schémas. Les objets de (Sch) sont évidemment les schémas et ses morphismes les morphismes d'espaces annelés. Par définition, un morphisme de schémas $f\colon X \to Y$ est dit *étale* si

(1) $f$ est plat. Ceci signifie que l'homomorphisme local $O_{X,f(y)} \to O_{Y,y}$ est plat pour tout $y \in Y$, c'est-à-dire que le foncteur des $O_X$-modules à valeurs dans les $O_Y$-modules est exact ;

(2) $f$ est non ramifié, c'est-à-dire que $f$ est de type fini et $O_x/\mathfrak{m}_y O_x$ est une extension finie séparable de $k(y)$ où $\mathfrak{m}_y$ est l'idéal maximal[67].

La topologie étale sur la catégorie des schémas se définit via une prétopologie. Une *prétopologie* sur une catégorie $\mathcal{C}$ est une application qui associe à tout objet $X$ de $\mathcal{C}$ un ensemble $\mathrm{Cov}(X)$ de familles de morphismes de codomaine $X$ telles que

PT 0) si $f\colon Y \to X$ est un morphisme appartenant à une famille de $\mathrm{Cov}(X)$, alors pour tout morphisme $Z \to X$, le produit fibré $Z \times_X Y$ est représentable ;

PT 1) stabilité par changement de base : pour toute famille $(X_\alpha \to X)_{\alpha\in\Lambda}$ appartenant à $\mathrm{Cov}(X)$ et tout morphisme $Y \to X$ où $Y$ est un objet de $\mathcal{C}$, la famille $(X_\alpha \times_X Y \to Y)_{\alpha\in\Lambda}$ appartient à $\mathrm{Cov}(Y)$ ;

PT 2) stabilité par composition : si la famille $(X_\alpha \to X)_{\alpha\in\Lambda}$ appartient à $\mathrm{Cov}(X)$ et si, pour tout $\alpha \in \Lambda$, la famille $(X_{\beta_\alpha} \to X_\alpha)_{\beta_\alpha \in B_\alpha}$ appartient à $\mathrm{Cov}(X_\alpha)$, alors la famille $(X_\gamma \to X)_{\gamma\in\coprod_{\alpha\in A} B_\alpha}$ où $X_\gamma \to X$ est le morphisme obtenu par la composition $X_{\beta_\alpha} \to X_\alpha \to X$ appartient à $\mathrm{Cov}(X)$.

PT 3) la famille $(id_X\colon X \to X)$ appartient à $\mathrm{Cov}(X)$.

La *topologie étale* sur (Sch) est la topologie engendrée par la prétopologie selon laquelle, pour tout schéma $X$, $\mathrm{Cov}(X)$ est l'ensemble des familles $(u_i\colon U_i \to X)_{i\in I}$ telles que les morphismes $u_i$ sont étales et $X = \bigcup_i u_i(U_i)$[68]. Une telle famille est un recouvrement étale de $X$.

Le topos étale est le topos associé au site obtenu en munissant de la topologie étale une catégorie ayant les morphismes étales pour objets. Soit $X$ un objet de (Sch) et (Sch) $/X$ la « slice category » qu'il induit. Les objets de (Sch) $/X$ sont les morphismes de schémas $X' \to X$. Étant donnés deux objets $f\colon X' \to X$ et $g\colon X'' \to X$ de (Sch) $/X$, un morphisme $f \to g$ de (Sch) $/X$ est un morphisme

67. Cette définition est celle de Grothendieck [2003, exposé I]. La définition énoncée dans Artin, Grothendieck et Verdier [1972, exposé VII] est plus compliquée bien qu'elle soit évidemment équivalente.

68. Artin, Grothendieck et Verdier [1972, exposé II, §1] parlent brièvement des prétopologies et des topologies qu'elles peuvent engendrer.

$h\colon X' \to X''$ tel que $f = g \circ h$. La catégorie $\mathrm{Et}/X$ est la sous-catégorie de $(\mathrm{Sch})/X$ obtenue en se restreignant aux morphismes étales. Bref, les objets de $\mathrm{Et}/X$ sont les morphismes de schémas $X' \to X$ qui ont la particularité d'être étales.

En vertu du foncteur d'oubli $(\mathrm{Sch})/X \to (\mathrm{Sch})$ et du foncteur d'inclusion $\mathrm{Et}/X \to (\mathrm{Sch})/X$, la catégorie $\mathrm{Et}/X$ est munie de la topologie induite par la topologie étale sur (Sch). Munie de cette topologie, la catégorie $\mathrm{Et}/X$ est un site, le site étale de $X$, noté $X_{\mathrm{et}}$.

Pour obtenir le topos étale du schéma $X$, il suffit de considérer les faisceaux sur le site étale. Un *préfaisceau sur* $X_{\mathrm{et}}$, aussi appelé *préfaisceau étale*, est un foncteur contravariant $F\colon X_{\mathrm{et}}^{o} \to \mathbf{Ens}$. En particulier, un préfaisceau abélien est un préfaisceau qui associe respectivement aux objets et morphismes de $X_{\mathrm{et}}$ des groupes abéliens et des homomorphismes de groupes.

Un *faisceau sur* $X_{\mathrm{et}}$ est alors un préfaisceau $F\colon X_{\mathrm{et}}^{o} \to \mathbf{Ens}$ tel que

$$F(U) \to \prod_{i\in I} F(U_i) \rightrightarrows \prod_{(i,j)\in I\times I} F(U_i \times_U U_j)$$

est exact pour tout morphisme étale $U \to X$ et recouvrement étale $(u_i\colon U_i \to U)_{i\in I}$. Un faisceau abélien sur $X_{\mathrm{et}}$ est évidemment un préfaisceau abélien qui satisfait cette condition.

Comme d'habitude, les faisceaux sur le site $X_{\mathrm{et}}$ forment une catégorie $\mathrm{Sh}(X_{\mathrm{et}})$. Il s'agit en fait d'une sous-catégorie de la catégorie des préfaisceaux. Le topos associé à la catégorie de faisceaux $\mathrm{Sh}(X_{\mathrm{et}})$ se nomme le *topos étale* de $X$ et est noté $\widetilde{X_{\mathrm{et}}}$.

Pour obtenir les groupes de cohomologie étale, il ne reste plus qu'à appliquer les méthodes homologiques développées dans « Sur quelques points d'algèbre homologique ». Tel que vu à la section 3.1.3.2, Grothendieck y définit une théorie de la cohomologie comme un foncteur d'une catégorie abélienne possédant suffisamment d'injectifs vers la catégorie des groupes abéliens. Or, la catégorie des faisceaux abéliens $\mathrm{Sh}(X_{\mathrm{et}})$ sur le site $X_{\mathrm{et}}$ est effectivement une catégorie abélienne ayant suffisamment d'injectifs. Il suffit alors de considérer les foncteurs dérivés du foncteur

$$\begin{aligned} \Gamma\colon\ \mathrm{Sh}(X_{\mathrm{et}}) &\to \mathbf{AbGrp} \\ F &\mapsto \Gamma(X, F) \end{aligned}$$

où $\Gamma(X, F)$ est le groupe des sections globales. Ce foncteur est exact à gauche, mais il n'est pas, en général, exact à droite.

Soit

$$0 \to F \to G^0 \to G^1 \to G^2 \to \dots$$

une résolution injective de $F$. Alors,

$$0 \to \Gamma(X, F) \to \Gamma(X, G^0) \to \Gamma(X, G^1) \to \Gamma(X, G^2) \to \dots$$

est un complexe. Les groupes de cohomologie étale $H^q(X, F)$ sont donnés par les foncteurs dérivés à droite du foncteur $\Gamma$, c'est-à-dire $H^q(X, F) = R^q\Gamma(X, F)$.

De plus, ces groupes de cohomologie ont toutes les propriétés voulues :

(1) $H^0(X, F) = \Gamma(X, F)$ ;

(2) si $F$ est injectif, alors $H^q(X, F) = 0$ pour tout $q > 0$ ;

(3) toute suite exacte courte $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$ induit une suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \to H^0(X_{\mathrm{et}}, F\prime) \to H^0(X_{\mathrm{et}}, F) \to H^0(X_{\mathrm{et}}, F'') \to \\ H^1(X_{\mathrm{et}}, F') \to \cdots \to H^q(X_{\mathrm{et}}, F') \to H^q(X_{\mathrm{et}}, F) \to \\ H^q(X_{\mathrm{et}}, F'') \to H^{q+1}(X_{\mathrm{et}}, F') \to H^{q+1}(X_{\mathrm{et}}, F) \to \dots \end{aligned}$$

Par exemple, pour tout entier $\alpha$, il existe un faisceau $\mathbb{Z}/\alpha\mathbb{Z}$ de telle sorte que des groupes de cohomologie $H^q(X, \mathbb{Z}/\alpha\mathbb{Z})$ peuvent être considérés. En particulier, les groupes de cohomologie $H^q(X, \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z})$ où $l$ est un nombre premier différent de la caractéristique du corps de base présentent un intérêt particulier dans la perspective des conjectures de Weil.

Comme l'illustre la construction de la cohomologie étale, la compréhension toposique de l'espace faisait en sorte que les méthodes de la cohomologie des faisceaux s'appliquaient naturellement et fructueusement aux schémas. Il demeurait néanmoins une limite technique : la cohomologie étale possédait les « bonnes » propriétés en autant que soient utilisés des faisceaux de torsion premiers relativement à la caractéristique du schéma.

> [La topologie étale], par sa description, est fort proche des variétés topologiques habituelles, et on verra que la plupart des résultats classiques concernant la cohomologie des espaces topologiques ordinaires (suites spectrales variées, théorèmes de finitude, Künneth, dualité, théorème de Lefschetz) peuvent se formuler et se démontrer dans le nouveau contexte, à condition de se borner le cas échéant aux faisceaux de torsion *premiers aux caractéristiques résiduelles* des schémas envisagés. [Artin, Grothendieck et Verdier 1972, p. XI]

Par conséquent, les groupes de cohomologie étale sont des groupes de torsion. Ceci signifiait que la cohomologie étale ne possédait les propriétés d'une cohomologie de Weil que pour un corps de caractéristique $p > 0$. La cohomologie étale, tout importante était-elle, ne pouvait donc conduire directement à la résolution des conjectures de Weil puisque celles-ci portaient sur un groupe de caractéristique 0.

#### 3.2.4.2 La cohomologie $l$-adique

Une autre théorie cohomologique était donc requise pour les corps de caractéristique 0. La réponse de Grothendieck fut la cohomologie $l$-adique.

Les groupes de cohomologie $l$-adique se construisent par approximation à partir des groupes de cohomologie étale. L'idée est de considérer des systèmes projectifs de faisceaux de torsion de manière à prendre la limite projective des groupes de cohomologie étale.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Un *système projectif* dans $\mathcal{C}$ est une catégorie d'index $I$, une famille $(X_i)_{i\in I}$ d'objets de $\mathcal{C}$ et une famille de morphismes $(f_{ij}\colon X_j \to X_i)_{i\to j}$ telles que :

(1) $f_{ii}$ est l'identité $X_i \to X_i$ ;

(2) pour $i \to j$ et $j \to k$, $f_{ik}\colon X_k \to A_i$ est $f_{ij} \circ f_{jk}$.

Un *cône projectif* d'un système projectif $(X_i)_{i\in I}$ est un objet $X$ muni de projections $\pi_i\colon X \to X_i$ telles que $\pi_i = f_{ij} \circ \pi_j$.

La *limite projective* du système projectif est un cône projectif $\varprojlim X_i$ qui est universel, c'est-à-dire que pour tout cône projectif $(X, \eta_i)$, il existe un unique morphisme $\phi\colon X \to \varprojlim X_i$ tel que $\pi_i = \eta_i \circ \phi$ [69].

Soient $F_q$ un corps fini algébriquement clos de caractéristique $p$, $X$ un schéma sur $F_q$ et $l \neq p$ un nombre premier. Un faisceau $l$-adique sur $X$ est un système projectif $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de faisceaux sur $X_{\text{et}}$ tel que l'homomorphisme $F_{n+1} \to F_n$ soit isomorphe au morphisme canonique $F_{n+1} \to F_n \otimes \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}$. D'après cette définition, chaque faisceau $F_n$, c'est-à-dire chaque objet du système projectif $(F_n)$, est un $\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}$-module.

Grothendieck commence par construire des groupes de cohomologie à valeurs dans $\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}$. Pour ce, il considère le système projectif de faisceaux étales sur $X$

$$\mathbb{Z}/l\mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{Z}/l^2\mathbb{Z} \leftarrow \cdots \leftarrow \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z} \leftarrow \dots$$

Ce système projectif induit un système projectif de groupes de cohomologie étale

$$H^q(X, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) \leftarrow H^q(X, \mathbb{Z}/l^2\mathbb{Z}) \leftarrow \dots H^q(X, \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}) \leftarrow \dots$$

Pour obtenir les groupes de cohomologie $l$-adique, il suffit de prendre la limite projective de ce système projectif :

$$H^q(X, \mathbb{Z}_l) = \varprojlim H^q(X, \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z})$$

Il est capital de prendre la limite $\varprojlim H^q(X, \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z})$ des groupes de cohomologie étale et non pas le groupe de cohomologie $H^q(X, \lim(\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}))$ à valeurs dans la limite des faisceaux $\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}$. Autrement dit, il faut travailler dans le système projectif. Cette nuance tient à ce que la cohomologie ne commute pas aux limites, c'est-à-dire que, bien qu'il existe un morphisme $H^q(X, \varprojlim F_n) \to \varprojlim H^q(X, F_n)$, celui-ci n'est pas en général un isomorphisme. Les groupes de cohomologie $H^q(X, \varprojlim F_n)$ ne sont pas les bons [70].

Les groupes de cohomologie $l$-adiques à coefficients dans $\mathbb{Q}_i$ s'obtiennent en prenant le produit tensoriel :

$$H^q(X, \mathbb{Q}_l) = H^q(X, \mathbb{Z}_l) \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l$$

69. Une limite projective n'est donc rien d'autre qu'un cas particulier de limite. Voir Mac Lane [1998, p. 68].

70. Pour un exemple simple, voir Freitag et Kiehl [1988, p. 118].

Ces groupes sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{Q}_l$ et sont sans torsion [71].

Cela dit, tout importante soit-elle au plan technique pour la résolution des conjectures de Weil — il s'agit après tout de la cohomologie recherchée —, la cohomologie $l$-adique occupe, au plan conceptuel, une place secondaire pour Grothendieck. Dans *Récoltes et semailles*, Grothendieck n'hésite pas à décrire le passage de la cohomologie étale à la cohomologie $l$-adique comme un détail technique.

> [La partie "passage à la limite"] reflète une complication technique particulière au contexte de la cohomologie étale (le distinguant des contextes transcendants), savoir que les théorèmes principaux sur la cohomologie étale concernent en premier lieu les coefficients **de torsion** (premiers aux caractéristiques résiduelles), et que pour avoir une théorie qui corresponde à des anneaux de coefficients de caractéristique nulle (comme il le faut pour les conjectures de Weil), il faut passer à la limite sur des anneaux de coefficients $\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}$ pour obtenir des résultats "$l$-adiques". [Grothendieck 1985, p. 372]

Dans la perspective des conjectures de Weil, la cohomologie $l$-adique n'était effectivement nécessaire, comme le rappelle Grothendieck, que pour répondre à l'exigence de travailler avec des anneaux de caractéristique nulle. La véritable innovation conceptuelle fut l'introduction des revêtements étales et le concept d'espace auquel ils donnaient lieu.

De plus, du point de vue de l'étude cohomologique des espaces, la cohomologie $l$-adique servit d'inspiration à la théorie des motifs et apparaît donc comme une étape intermédiaire en vue d'une théorie unifiée de la cohomologie des variétés algébriques. En effet, la cohomologie $l$-adique met à la disposition du mathématicien une pléthore de théories, c'est-à-dire une pour chaque nombre premier $l$ différent de la caractéristique $p$ du corps de base. Ces multiples théories $l$-adiques relèvent d'un modèle commun, c'est-à-dire celui d'une description abstraite de la cohomologie $l$-adique. Une telle description abstraite de la cohomologie $l$-adique se base sur un système projectif $(F_n)$ arbitraire et ne réfère pas aux propriétés qui dépendent du choix du nombre premier $l$. La cohomologie $l$-adique indiquait donc que plusieurs théories pouvaient être traitées uniformément.

Sans rentrer dans les détails, avec la théorie des motifs, Grothendieck désirait pousser plus loin cette idée d'un traitement uniforme des théories cohomologiques associées aux variétés algébriques de caractéristiques $p > 0$. À la fin des années 1960, celles-ci pouvaient être classifiées comme suit. Premièrement, la cohomologie $l$-adique fournissait des méthodes pour gérer tous les cas où $l$ est différent de $p$. Deuxièmement, la cohomologie cristalline, définie par Grothendieck en 1966, permettait de traiter le cas où $l = p$. En ce sens, la cohomologie cristalline bouchait le trou laissé ouvert par la cohomologie $l$-adique. Finalement, les cohomologies de Betti, de Hodge et de de Rham, la première ayant été définie par Betti au XIXᵉ siècle

71. Pour une présentation détaillée de la cohomologie $l$-adique, voir, par exemple, Freitag et Kiehl [1988], Grothendieck [1964], N. M. Katz [1994] ou encore Illusie [1977, exposé VI].

et les deux autres par Serre et Grothendieck respectivement dans les années 1950, permettaient quant à elles de traiter le cas où $p$ est infini.

Fidèle à la pensée mathématique de Grothendieck, la théorie des motifs avait pour objectif d'identifier la forme commune à toutes ces théories de manière à ce qu'elles deviennent des cas particuliers d'une théorie où s'incarnerait la structure cohomologique de la variété étudiée dans toute sa généralité. Grothendieck appelle cette structure postulée le motif de la variété. Le motif d'une variété est donc conçu comme son invariant le plus fondamental. Tous les autres invariants cohomologiques deviendraient alors autant de facettes du motif de la variété.

> C'est pour parvenir à exprimer cette intuition de "parenté" entre théories cohomologiques différentes, que j'ai dégagé la notion de "**motif**" associé à une variété algébrique. Par ce terme, j'entends suggérer qu'il s'agit du "motif commun" (ou de la "**raison** commune") sous-jacent à cette multitude d'invariants cohomologiques différents associés à la variété, à l'aide de la multitude des toutes les [*sic*] théories cohomologiques possibles a priori. Ces différentes théories cohomologiques seraient comme autant de développements thématiques différents, chacun dans le "tempo", dans la "clef" et dans le "mode" ("majeur" ou "mineur") qui lui est propre, d'un même "motif de base" (appelé "théorie cohomologique **motivique**"), lequel serait en même temps la plus fondamentale, ou la plus "fine" [*sic*] de toutes ces "'incarnations" thématiques différentes (c'est-à-dire, de toutes ces théories cohomologiques possibles). Ainsi, le motif associé à une variété algébrique constituerait l'invariant cohomologique "ultime", "par excellence", dont tous les autres (associés aux différentes théories cohomologiques possibles) se déduiraient (...) Toutes les propriétés essentielles de "**la** cohomologie" de la variété se "liraient" (ou s'"entendraient") déjà sur le motif correspondant, de sorte que les propriétés et structures familières sur les invariants cohomologiques particularisés ($l$-adique [*sic*] ou cristallins, par exemple), seraient simplement le fidèle reflet des propriétés et structures **internes au motif**. [Grothendieck 1985, p. P46]

Pour terminer cette brève incartade du côté des motifs, il importe de souligner que Grothendieck ne fit qu'esquisser ses idées sur les motifs durant sa carrière de mathématicien [72].

#### 3.2.4.3 Les topos comme lieu de réconciliation du continu et du discret

Interprétées en termes cohomologiques, les conjectures de Weil supposaient l'association de groupes de cohomologie à une variété algébrique sur un corps fini. Leur résolution exigeait donc la présence d'une structure topologique, c'est-à-dire foncièrement continue, sur une variété, à savoir un objet géométrique discret. Tel que vu à la section 3.2.1, aux yeux de Grothendieck, le défi technique que représentait la construction de tels groupes dans le contexte de la géométrie algébrique était soustendu par une difficulté conceptuelle. Comme l'illustrait la topologie de Zariski, à la

72. Pour des indications supplémentaires sur la théorie des motifs, voir Cartier [2000, 2001], Deligne [1994, 1998], Mazur [2004] ou encore Grothendieck [1985, §2.16 et §14].

structure traditionnelle de topologie manquait la généralité nécessaire — c'est-à-dire qu'elle était trop grossière — pour parfaitement saisir les invariants cohomologiques des variétés algébriques.

Avec les topos, la stratégie de Grothendieck consista plutôt à se donner un concept d'espace où cohabitent naturellement le continu et le discret.

Premièrement, au plan strictement mathématique, le concept de topos permet de définir les invariants cohomologiques des espaces discrets que sont les schémas. Étant donné un schéma $X$, le processus suit la séquence conceptuelle suivante :

$$\begin{array}{c}
\text{schéma } X \\
\Big\downarrow \\
\text{catégorie } \mathrm{Sh}\,/X \text{ des schémas} \\
\Big\downarrow \\
\text{site étale } X_{\mathrm{et}} \\
\Big\downarrow \\
\text{catégorie des faisceaux } \mathrm{Sh}(X_{\mathrm{et}}) \text{ sur } X_{\mathrm{et}} \\
\Big\downarrow \\
\text{groupes de cohomologie étale de } X
\end{array}$$

Le topos — le topos associé à la catégorie $\mathrm{Sh}(X_{\mathrm{et}})$ pour être exact — agit donc comme une plaque tournante entre le discret et le continu tels qu'ils se présentent respectivement sous la forme des groupes de cohomologie et des schémas.

Le tournant catégoriel que fit prendre Grothendieck à la géométrie algébrique est donc une condition nécessaire à la construction des groupes de cohomologie étale. En effet, l'originalité de Grothendieck est de ne pas travailler directement sur le schéma $X$, mais plutôt de travailler au-dessus de $X$, c'est-à-dire sur la catégorie $(\mathrm{Sch})\,/X$ des schémas au-dessus de $X$ ou, pour être parfaitement exact, la sous-catégorie $\mathrm{Et}\,/X$ des morphismes étales à valeurs dans $X$. La structure topologique susceptible de mettre à jour la cohomologie du schéma $X$ n'est pas définie directement sur celui-ci, mais plutôt sur une catégorie de schémas, à savoir la sous-catégorie $\mathrm{Et}\,/X$. Il ne reste plus qu'à démontrer que le topos associé aux faisceaux sur $\mathrm{Et}\,/X$ est une catégorie abélienne pour obtenir les groupes de cohomologie du schéma $X$.

Cela dit, les épousailles du continu et du discret — pour reprendre l'expression de Grothendieck, voir la citation ci-dessous — qu'accomplissent les topos sont conceptuellement beaucoup plus riches que la rencontre qu'occasionne la cohomologie étale.

Deuxièmement, traditionnellement, la continuité s'incarnait dans le concept d'espace topologique puisque ce dernier lui conférait une signification mathématique rigoureuse. En tant qu'espaces transformés, les topos sont également d'une nature foncièrement topologique dans la mesure où, comme l'expliqua la section 3.2.3.2, le formalisme des topologies de Grothendieck, site, catégorie de faisceaux et autres morphismes de topos fait en sorte qu'ils disposent de notions de localisation et de continuité généralisées. En ce sens, le concept de topos saisit bel et bien ce qui est essentiel à l'intuition topologique classique.

Dans le contexte de la géométrie algébrique, la construction du topos étale $\widetilde{X_{\text{et}}}$ d'un schéma $X$ y transfère donc une intuition topologique, c'est-à-dire que le topos $\widetilde{X_{\text{et}}}$ pourvoit $X$ d'une notion de localisation, mais surtout d'une notion de continuité. Le topos étale est alors un espace dont les propriétés relèvent à la fois du continu et du discret. Autrement dit, le topos étale brise la dichotomie traditionnelle entre les espaces continus et les espaces discrets.

> Pour les "épousailles" attendues, "du nombre et de la grandeur", c'était comme un lit décidément étriqué, où l'un seulement des futurs conjoints (à savoir l'épousée) pouvait à la rigueur trouver à se nicher tant bien que mal, mais jamais les deux à la fois ! Le "principe nouveau" qui restait à trouver, pour consommer les épousailles promises par des fées propices, ce n'était autre aussi que ce "lit" spacieux qui manquait aux futurs époux, sans que personne jusque là [*sic*] s'en soit seulement aperçu...
>
> Ce "lit à deux places" est apparu (comme par un coup de baguette magique...) avec l'idée de **topos**. Cette idée englobe dans une intuition topologique commune, aussi bien les traditionnels espaces (topologiques), incarnant le monde de la grandeur continue, que les (soi-disant) "espaces" (ou "variétés") des géomètres algébristes abstraits impénitents, ainsi que d'innombrables autres types de structures, qui jusque là [*sic*] avaient semblé rivées irrémédiablement au "monde arithmétique" des agrégats "discontinus" ou "discrets". [Grothendieck 1985, P38]

Finalement, les topos permettent de travailler à invariance près dans un contexte discret. Bien avant l'avènement des topos, il était parfaitement usuel de travailler à invariance près dans des contextes continus. Par exemple, en géométrie, le Programme d'Erlangen de Klein avait établi que toute théorie est entièrement déterminée par un groupe de transformations. Il en résulte deux critères d'identité comme l'explique Marquis [2009, p. 32]. Tel que vu à la section 3.2.1.2, le premier critère stipule que deux théories sont équivalentes si leurs groupes de transformations sont isomorphes. Le second critère est quant à lui qualifié d'interne par Marquis. Étant donné un espace, tout groupe de transformations caractérise une théorie géométrique par l'entremise de ses propriétés. Celles-ci sont celles qui sont invariantes sous les transformations de l'espace. Par exemple, les transformations topologiques sont les homéomorphismes entre espaces. Une propriété est donc topologique si et seulement si elle est invariante sous les homéomorphismes. Deux théories équivalentes, c'est-à-dire ayant des groupes de transformations isomorphes, ont donc les mêmes propriétés. En ce sens, le groupe de transformations identifie ce qui est commun à toute classe de théories équivalentes et, par extension, encode ce qui est vraiment essentiel dans une théorie géométrique donnée, c'est-à-dire ce qui la caractérise intrinsèquement et qui ne varie pas d'une présentation à l'autre.

> *The* group of transformations captures the geometrical content*. It is clear that for Klein, the group of transformations contains the whole geometric structure all at once. The choice of specific geometric "elements"* (...) *will determine the order of presentation of the theorems, but not the content of the theory itself. It could be said that the group of transformations encodes the* objective *content of the theory whereas any specific choice of element as a token of the geometric type yield* [*sic*] *a presentation of the theory, a presentation which contains an arbitrary component*. [Marquis 2009, p. 23]

En termes informels, deux théories sont équivalentes si elles renvoient au même contenu objectif [73].

À l'opposé, les considérations de ce genre étaient étrangères aux mathématiques discrètes, à commencer par la topologie combinatoire. En effet, règle générale, les objets des mathématiques discrètes sont instables sous les transformations de telle sorte que les résultats obtenus dépendent de la présentation privilégiée. Par exemple, le problème des ponts de Königsberg portait sur la possibilité de définir un trajet passant par chacun des sept ponts une et une seule fois de manière à revenir à son point de départ. La solution dépendait donc de la position relative de points dans l'espace et des arêtes entre ceux-ci. Bref, de tels problèmes reviennent à l'étude de configurations dans l'espace. Or, étant donnée une configuration, celles obtenues par changement d'origine ne sont pas nécessairement équivalentes.

Dans la mesure où les morphismes de topos munissent la théorie des topos d'une notion d'invariance, il est naturel d'y travailler à invariance près, c'est-à-dire en faisant abstraction des particularités propres à une présentation donnée. Tel qu'expliqué à la section 3.2.3.2, deux topos $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont équivalents s'il existe des morphismes de topos $u\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ et $v\colon \mathcal{E}' \to \mathcal{E}$ tel que $v \circ u = 1_{\mathcal{E}}$ et $u \circ v = 1_{\mathcal{E}'}$. Des topos équivalents ont donc une structure et des propriétés similaires : toute propriété vérifiée dans l'un le sera également dans n'importe quel autre équivalent. Les propriétés communes à une classe de topos équivalents sont donc invariantes sous les transformations de l'espace que sont les équivalences de topos. Ces propriétés forment le contenu objectif du topos, voire son essence en termes plus philosophiques. Par conséquent, tout topos appartenant à une telle classe d'équivalence peut être vu comme une présentation particulière de ce contenu objectif. Les propriétés invariantes sous les équivalences de topos ne dépendent pas du choix de la présentation. À l'opposé, une propriété qui n'est pas invariante sous une équivalence de topos est spécifique à un topos donné, c'est-à-dire qu'elle est indissociable d'une présentation donnée.

Par le fait même, en étendant l'intuition topologique au-delà des espaces traditionnels, le point de vue topossique permet également de travailler à invariance près dans des contextes où il n'est pas coutume de le faire. En particulier, des topos

73. Pour un traitement approfondi de cette idée d'invariance en géométrie, voir [Marquis 2009].

peuvent être construits dans des contextes où aucune notion de continuité n'est à l'œuvre, soient-ils ensemblistes ou logiques par exemple. Par conséquent, du point de vue topossique, il est parfaitement naturel de travailler à invariance près dans un contexte discret et donc d'identifier les propriétés essentielles, c'est-à-dire le contenu objectif, d'une théorie relevant du discret.

#### 3.2.4.4 La résolution des conjectures de Weil

Selon la stratégie échafaudée par Grothendieck, la définition du concept de topos et des cohomologies étale et $l$-adique mettait à sa disposition les outils mathématiques essentiels — tant au plan conceptuel que technique — à la résolution des conjectures de Weil. Pour reprendre la métaphore de la noix utilisée pour illustrer la méthode de la mer qui monte, les différents ingrédients que devait contenir la solution dans laquelle la laisser tremper étaient identifiés. Il ne restait en principe qu'à y plonger la noix.

> La chose cruciale ici, dans l'optique des conjectures de Weil, c'est que la nouvelle notion est assez vaste en effet, pour nous permettre d'associer à tout "schéma" un tel "espace généralisé" ou "topos" (appelé le "topos étale" au schéma envisagé). Certains "invariants cohomologiques" de ce topos (tout ce qu'il y a de "bébêtes" !) semblaient alors avoir une bonne chance de fournir "ce dont on avait besoin" pour donner tout leur sens à ces conjectures, et (qui sait !) de fournir peut-être les moyens de les démontrer. [Grothendieck 1985, p. P41]

La partie du travail consistant à démontrer chacune des quatre conjectures pouvait alors commencer.

Historiquement, la résolution des conjectures de Weil ne se déroula cependant pas exactement comme l'avait envisagé Grothendieck. Tout d'abord, en 1959, soit bien avant que Grothendieck eut défini les topos, Bernard Dwork démontra la rationalité de la fonction zêta [74]. Compte tenu que Serre et Grothendieck ne voyaient pas comment aborder les conjectures de Weil autrement que par la stratégie cohomologique qu'ils avaient élaborée, il s'agissait d'un résultat totalement inattendu et des plus étonnants. Premièrement, à cette époque, la refonte de la géométrie algébrique entreprise par Grothendieck était loin d'être assez avancée pour s'attaquer à la résolution à proprement parler des conjectures. Deuxièmement, la démonstration de Dwork était indépendante de toute considération d'ordre cohomologique et employait plutôt les fonctions analytiques $p$-adiques. Serre annonça d'ailleurs la nouvelle à Grothendieck avec un scepticisme certain :

> D'abord une nouvelle étonnante : Dwork a téléphoné avant-hier soir à Tate qu'il avait démontré la rationalité des fonctions zêta (dans le cas le plus général : singularités arbitraires). Il n'a pas dit comment il faisait (c'est Karin [75] qui a reçu le coup de téléphone, pas Tate), mais j'avais déjà vu un manuscrit de lui où

74. Voir Dwork [1960].
75. Karin Tate, l'épouse de John Tate et fille d'Emil Artin.

> il démontrait un résultat nettement moins fort : sa méthode consiste à supposer que la variété est une hypersurface dans l'espace affine (...) ; dans ce cas, il fait un calcul avec « sommes de Gauss » analogue à celui fait par Weil pour une équation $\sum a_i x_i^{n_i} = b$. Bien entendu, Weil lui-même avait essayé d'étendre sa méthode et ne s'en était pas sorti ; Delsarte aussi s'en était occupé ; il est donc étonnant que Dwork ait pu le faire. Attendons la confirmation ! [Lettre de Serre à Grothendieck du 15 novembre 1959, Colmez et Serre 2001, p. 102]

Les premiers succès de l'approche cohomologique survinrent, selon ce qu'affirme Grothendieck [1964, p. 279–4, n. 1], en avril 1963 lorsqu'il démontra la conjecture relative aux nombres de Betti et la partie de la troisième conjecture affirmant que pour tout schéma propre et lisse $X$ sur un corps fini $F_q$, la fonction zêta peut s'écrire sous la forme

$$Z_X(t) = \frac{P_1(t)P_3(t)\dots P_{2n-1}(t)}{P_0(t)P_2(t)\dots P_{2n}(t)}$$

En 1964, Grothendieck donna un exposé au Séminaire Bourbaki [Grothendieck 1964] au cours duquel il démontra la rationalité de toute une classe de fonctions : les fonctions $L$. La fonction zêta étant un cas particulier de fonction $L$, il obtenait du même coup la rationalité de celle-ci.

D'après Schneps [2007, p. 24], la deuxième conjecture, c'est-à-dire celle affirmant que la fonction zêta satisfait une équation fonctionnelle, fut démontrée avant la fin de 1966 et du séminaire SGA 5. Kleiman [1994, p. 9] la situe plutôt en 1963.

À partir de ce moment, il ne restait donc qu'à compléter la démonstration de la troisième conjecture, c'est-à-dire établir que les coefficients des polynômes $P_i(t)$ sont des entiers algébriques et que $|P_i(t)| = q^{1/2}$. Après quelques essais infructueux [76], Grothendieck abandonna l'idée d'une démonstration directe. Il formula ainsi des conjectures relatives à la cohomologie $l$-adique encore plus générales — les fameuses conjectures standards dont il fut brièvement question à la fin de la section 3.1.3.1 — dont la démonstration entraînerait celle des conjectures de Weil.

Il fut pour la première fois question des conjectures standards dans une lettre de Grothendieck à Serre du 27 août 1965 [77]. Étrangement, cette première formulation s'abstenait de toute référence cohomologique. Quelques années plus tard, soit en 1968, Grothendieck présenta ces deux conjectures de manière plus officielle dans le cadre d'un colloque à Bombay en janvier 1968 [Grothendieck 1969]. D'après ce que rapporte Kleiman [1994, p. 3], Grothendieck lui avait parallèlement demandé d'écrire un article sur le sujet qui fut publié à la fin de 1968 [Kleiman 1968].

La première conjecture est la conjecture du type Lefschetz et s'énonce comme suit [78] :

---

76. Grothendieck et Serre discutent de quelques-unes de ces tentatives dans certaines lettres qu'ils s'échangèrent en 1963 et 1964. Voir Colmez et Serre [2001].

77. Voir Colmez et Serre [2001, p. 232–235]. Comme le rappellent Grothendieck [1969, p. 193] et Kleiman [1968, p. 361], le mathématicien italien Enrico Bombieri formula des conjectures similaires à la même époque.

78. Grothendieck [1969, p. 195] commence par donner une version faible de cette conjecture.

**Conjecture de type Lefschetz.** Soit $X$ une variété projective et lisse sur un corps de base $k$ algébriquement clos de dimension $n$ et de caractéristique arbitraire. Soit $\xi \in H^2(X)$ la classe de cohomologie d'une section hyperplane $Y$. Alors, il existe un homomorphisme

$$\cup\xi^{n-i} \colon H^i(X) \to H^{2n-i}(X) \quad (i \leq n)$$

Pour $i = 2j$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} H^{2j}(X) \arrow[r, "\xi^{n-2j}"] & H^{2n-2j}(X) \\ C^j(X) \arrow[u, "\gamma_X"] \arrow[r] & C^{n-j}(X) \arrow[u, "\gamma_X"'] \end{tikzcd}$$

où $C^i(X)$ est la classe de cohomologie des sous-variétés de dimension $i$. Donc,

1. Cet homomorphisme est un isomorphisme ;
2. Si $i = 2j$, cet homomorphisme induit un isomorphisme $C^j(X) \to C^{n-j}(X)$.

L'objectif de cette première conjecture est de permettre de montrer que les polynômes $P_i(t)$ ont des coefficients entiers et indépendants de $l$, où, comme l'exige la cohomologie $l$-adique, $l$ est un nombre premier différent de la caractéristique du corps $k$.

Grothendieck appelle la seconde « conjecture du type Hodge » parce qu'elle découle du théorème de l'indice de Hodge en caractéristique 0.

**Conjecture de type Hodge.** Pour tout $i \leq n$, soit $P^i(X)$ le noyau de l'homomorphisme $\xi^{n-i+1} \colon H^i(X) \to H^{2n-i+2}(X)$. Alors, la forme bilinéaire à valeurs dans $\mathbb{Q}$ sur $P^{2j} \cap C^j(X)$

$$(x, y) \mapsto (-1)^j K(x, y, \xi^{n-2j})$$

où $K$ est l'isomorphisme $H^{2n}(X) \simeq \mathbb{Q}_l$ est définie positive.

Conjointement, les conjectures de type Lefschetz et de type Hodge devaient permettre d'établir l'hypothèse de Riemann, c'est-à-dire que $|P_i(t)| = q^{1/2}$. En conséquence, la démonstration des conjectures standards compléterait notamment la résolution des conjectures de Weil.

#### 3.2.4.5 La réception de la géométrie arithmétique topossique

La suite de l'histoire est passablement, pour ne pas dire tristement, célèbre : en novembre 1969, Grothendieck découvre que l'Institut des Hautes Études Scientifiques est partiellement subventionné — quelque 5% du budget — par des fonds militaires. Au printemps 1970 [79], il quitte l'institut, justifiant son geste par le refus

79. Sa démission devint en fait effective le 1e octobre. Voir notamment la remarque à cet effet dans l'introduction de Grothendieck [2003, p. xii].

du directeur Léon Motchane de renoncer audit financement [80]. Durant l'été 1970, il fonde Survivre, un groupe écologiste plus tard connu sous le nom Survivre et Vivre, et milite activement. Sans pour autant cesser toute activité mathématique, le temps qu'il y consacre est désormais fonction d'autres activités qu'il juge plus importantes.

En 1973, Pierre Deligne, que Grothendieck n'hésita pas à décrire comme « le plus brillant de mes élèves "cohomologistes" » [1985, p. P44], parvint à démontrer l'hypothèse de Riemann et mit donc un point final à la résolution des conjectures de Weil. Sa preuve ne respecte cependant pas la stratégie échafaudée par Grothendieck dans la mesure où elle contourne les conjectures standards. En effet, Deligne n'obtient pas l'hypothèse de Riemann comme une simple conséquence de ces dernières, mais l'attaque directement en sélectionnant avec doigté dans le coffre à outils cohomologique de Grothendieck ceux dont il a besoin, un des plus importants étant la notion de monodromie [81].

La possibilité de résoudre l'hypothèse de Riemann selon un telle approche étant à l'époque considérée vouée à l'échec, le résultat de Deligne fut des plus surprenants comme l'écrit Katz :

> *Much to everyone's surprise at the time of Deligne's proof, Deligne managed to* avoid *the [standard] conjectures altogether, except to* deduce *one of them, the "hard" Lefschetz theorem giving the existence of "primitive decomposition" of cohomology of a projective non-singular variety, a result previously only known over $\mathbb{C}$, and there by Hodge's theory of harmonic integrals. The rest of the "standard conjectures" remain open. In fact, the generally accepted dogma that the Riemann Hypothesis could not be proven (cf. [Dieudonné 1974, p. 224] for example) before these conjectures had been proven probably had the effect of delaying for a few years the proof of the Riemann Hypothesis.* [1976, p. 284]

Aux yeux de Grothendieck, la démonstration de Deligne confirmait l'abandon du vaste chantier mis en branle à la fin des années 1950, mais surtout de la vision des mathématiques qui avait animé son élaboration. Il réagit particulièrement mal à la publication de SGA 4 1/2 [Deligne 1977] où Deligne colligea les différents résultats nécessaires à la compréhension et à l'acceptation de sa preuve. SGA 4 1/2 peut en fait être vu comme un travail de fondements, non pas dans ce style organisé et systématique si caractéristique de l'œuvre de Grothendieck, mais totalement subordonné à la démonstration de l'hypothèse de Riemann.

Comme l'illustre la résolution par Deligne de l'hypothèse de Riemann, le départ de Grothendieck ouvrit la porte à une expression franche et ouverte de la résistance au point de vue des topos et à ses bienfaits. En effet, les succès de Deligne suggéraient qu'il était peut-être après tout possible d'obtenir des résultats significatifs en géométrie algébrique sans adopter la stratégie méthodologique de Grothendieck. Ceci

80. Pour une analyse des motifs ayant conduit Grothendieck à quitter son poste, mais aussi la vie scientifique, voir Scharlau [2008].

81. Pour la démonstration, voir Deligne [1974], N. M. Katz [1976] ou encore Freitag et Kiehl [1988].

eut notamment pour conséquence qu'aucun de ses étudiants ou collaborateurs ne reprit les rênes du chantier laissé inachevé, ce que Grothendieck déplore longuement dans *Récoltes et semailles*[82].

Dans son manuel *Undergraduate Algebraic Geometry* [Reid 1988], Miles Reid présente quelques remarques sur l'histoire de la géométrie algébrique. Ses commentaires sur Grothendieck traduisent bien cette résistance, mais aussi la cassure sociologique qu'occasionna le point de vue des topos.

> (...) *the Grothendieck personality cult had serious side effects: many people who had devoted a large part of their lives to mastering Weil foundations suffered rejection and humiliation, and to my knowledge only one or two have adapted to the new language; a whole generation of students (mainly French) got themselves brainwashed into the foolish belief that a problem that can't be dressed up in high-powered abstract formalism is unworthy of study, and were thus excluded from the mathematician's natural development of starting with a small problem he or she can handle and exploring outwards from there. (I actually know of a thesis on the arithmetic of cubic surfaces that was initially not considered because 'the natural context for the construction is over a general local Noetherian ringed topos'. This is not a joke.) Many students of the time could not think of any higher ambition than* étudier les EGAs [*sic*]. *The study of category theory for its own sake (surely one of the most sterile of all intellectual pursuits) also dates from this time; Grothendieck himself can't necessarily be blamed for this, since his own use of categories was very successful in solving problems*. [Reid 1988, p. 115]

Bien qu'il n'utilise pas ce langage, Reid exprime clairement l'opposition entre une approche moderniste de la géométrie algébrique et une autre, due à Grothendieck, contemporaine. De plus, tout en en reconnaissant les mérites, Reid lui-même ne semble pas être le plus fervent partisan de l'approche axiomatico-catégorielle.

Il ne faudrait toutefois pas en conclure que l'approche de Grothendieck disparut en même temps que le mathématicien et que la position normative qu'il mit de l'avant est aujourd'hui caduque, voire morte et enterrée. D'une part, certains des résultats les plus importants des 35 dernières années utilisent de manière implicite les travaux de Grothendieck. Par exemple, McLarty [à paraître] montre le rôle des univers de Grothendieck dans la démonstration de Wiles du théorème de Fermat[83]. De plus, Cartier [2008] mentionne l'impact grandissant des idées de Grothendieck en physique mathématique.

82. Dans leur correspondance, Serre rappelle à Grothendieck que lui seul avait une vision d'ensemble du programme, apportant ainsi une nuance importante : « — Non continuation [*sic*] de ton œuvre par tes anciens élèves. Tu as raison : ils n'ont pas continué. Cela n'est guère surprenant : c'était toi qui avais une vision d'ensemble du programme, pas eux (sauf Deligne, bien sûr). Ils ont préféré faire autre chose. Je vois mal pourquoi tu le leur reprocherais. » [Lettre de Serre à Grothendieck du 23 juillet 1985, Colmez et Serre 2001, p. 244]

83. Pour les univers de Grothendieck que la présente thèse laisse volontairement en retrait, voir Grothendieck [2003, exposé VI, §1], mais surtout Artin, Grothendieck et Verdier [1972, exposé 1, §0, 1, et 11].

D'autre part, après une période de résistance probablement inévitable sociologiquement, elle est aujourd'hui au cœur des travaux d'au moins deux des plus importants mathématiciens : Vladimir Voevodsky et Jacob Lurie.

Premièrement, Voevodsky est reconnu pour sa synthèse de la théorie de l'homotopie et de la géométrie algébrique de même que pour ses contributions à la cohomologie des motifs. Or, ses recherches rappellent celles de Grothendieck non seulement par leurs thèmes, mais aussi par l'appréhension de la théorie des catégories sur laquelle elles se basent. À l'instar de Grothendieck, Voevodsky n'étudie pas la théorie des catégories en elle-même, mais plutôt pour le bénéfice de la géométrie algébrique. En effet, Voevodsky s'affaire activement à développer de nouveaux outils catégoriels en termes desquels il campe la géométrie algébrique. Ses recherches sont donc animées par la conviction que la construction de la géométrie algébrique passe par celle de la théorie des catégories. Il n'hésite d'ailleurs pas à clamer l'importance cruciale de cette dernière : « *I think that at the heart of 20th century mathematics lies one particular notion and that is the notion of a category.* » [2002] Bref, la géométrie algébrique ne doit pas seulement utiliser les notions de catégories, de foncteurs, de limites, etc. pour exprimer certaines idées, mais plutôt se placer dans un cadre théorique et conceptuel intrinsèquement catégoriel.

Deuxièmement, depuis quelques années, Lurie développe la géométrie algébrique dérivée. Brièvement, la géométrie algébrique dérivée peut être décrite comme une refonte de la géométrie algébrique de Grothendieck sur la base des catégories d'ordres supérieurs, aussi appelées $\infty$-catégories. Une grande partie du travail de Lurie est notamment consacrée aux fondements de la théorie des $\infty$-catégories [84].

La pierre de touche de la géométrie algébrique dérivée n'est rien d'autre que le concept de topos d'ordre supérieur, c'est-à-dire celui de $\infty$-topos [85]. La théorie de Grothendieck n'est alors que celle des $\infty$-topos pour $n = 0$ [86]. La conception qu'a Lurie des topos découle directement de Grothendieck. Par exemple, il énonce même un théorème de Giraud pour les catégories d'ordres supérieurs.

> *Our main result is an analogue of Giraud's theorem, which asserts the equivalence of "extrinsic" and "intrinsic" approaches to the subject (Theorem 6.1.0.6). Roughly speaking, an $\infty$-topos is an $\infty$-category which "looks like" the $\infty$-category of all homotopy types. We will show that this intuition is justified in the sense that it is possible to reconstruct a large portion of classical homotopy theory inside an arbitrary $\infty$-topos. In other words, an $\infty$-topos is a world in which one can "do" homotopy theory (much as an ordinary topos can be regarded as a world in which one can "do" other types of mathematics).* [Lurie 2009, p. xi]

84. Voir les premiers chapitres de Lurie [2009] ou encore sa thèse de doctorat qui semble en révision permanente sur son site : `http://www.math.harvard.edu/~lurie`.

85. Pour éviter toute confusion, il importe de préciser que le concept de $\infty$-topos est l'analogue en dimension supérieure de celui de topos de Grothendieck et non de topos élémentaire.

86. Pour un aperçu, voir la préface de Lurie [2009].

Tout comme les topos ont permis à Grothendieck de mieux comprendre les invariants cohomologiques des espaces, les $\infty$-topos permettent de mieux comprendre leurs invariants homotopiques. Dans la mesure où ces derniers sont plus fondamentaux que les premiers, les recherches de Lurie peuvent être vues comme approfondissant celles de Grothendieck.

## 3.3 Des espaces topologiques aux topos : une rupture catégorielle

L'introduction des topos marque une rupture franche et définitive dans l'évolution du concept d'espace topologique. En tant qu'objet spatial, un topos est effectivement fort différent d'un espace topologique. L'aspect le plus évident tient à ce qu'un topos est une catégorie satisfaisant des propriétés d'exactitude et non pas un ensemble de points muni d'une structure. De plus, un espace n'est pas déterminé pas ses parties et ses points. Au contraire, la structure du topos détermine celle de ses points. La géométrie algébrique de Grothendieck reposait par conséquent sur une conceptualisation topologique de l'espace radicalement différente de celle en vigueur en topologie algébrique et en géométrie algébrique au cours des années 1940 et 1950.

Dans une perspective épistémologique, la réforme de la géométrie algébrique accomplie par Grothendieck incarne de manière paradigmatique la transition d'une position normative moderne à une position contemporaine en mathématiques. À l'approche axiomatico-ensembliste se substitua une approche axiomatico-catégorielle.

De plus, l'avènement du point de vue des topos n'en était pas moins tributaire des innovations techniques et conceptuelles associées à *Foundations of Algebraic Topology*, *Homological Algebra* et la théorie des faisceaux. En effet, Grothendieck se les appropria et, par son utilisation de la théorie des catégories, leur fit révéler leur plein potentiel. En ce sens, la transition des espaces topologiques aux topos s'accomplit selon une dynamique de rupture et de continuité.

### 3.3.1 De microfractures à rupture

Tel qu'expliqué au chapitre 2, les livres *Foundations of Algebraic Topology* de Eilenberg et Steenrod et *Homological Algebra* de Cartan et Eilenberg de même que la théorie des faisceaux constituèrent autant de ruptures dans le développement de la topologie algébrique dans la mesure où les nouveaux concepts et les nouvelles méthodes qu'ils introduisirent permirent d'envisager d'une manière inédite l'association d'invariants topologiques à un espace. Par exemple, Eilenberg et Steenrod définissent une théorie de l'homologie comme un foncteur de la catégorie des espaces topologiques vers la catégorie des groupes abéliens.

L'impact de ces ruptures sur la conceptualisation de l'espace fut cependant négligeable puisque les travaux de Eilenberg et Steenrod en théorie de l'homologie, de

Cartan et Eilenberg en algèbre homologique ainsi que ceux de Leray, Cartan et Serre sur les faisceaux présupposaient toujours un espace topologique au sens traditionnel, c'est-à-dire un ensemble dont certains sous-ensembles appelés ouverts forment un treillis. Sous l'effet de ces microfractures, la topologie algébrique et la géométrie algébrique devinrent certes le lieu d'une étude plus fine et d'une caractérisation enrichie des espaces topologiques, mais le concept sur lequel elles se basaient demeura inaltéré. Du point de vue de l'évolution du concept d'espace topologique, la fracture ne fut que partielle.

Il fallut attendre les topos pour que se manifeste une rupture au chapitre même de la conceptualisation de l'espace. Celle-ci n'aurait toutefois pu survenir sans les transformations que subit la théorie de l'homologie sous l'influence de Eilenberg et Steenrod de même que l'avènement de l'algèbre homologique et de la théorie des faisceaux ; ces transformations étaient un préalable nécessaire en ce qu'elles ouvrirent des brèches que Grothendieck approfondit.

Premièrement, *Foundations of Algebraic Topology* mit de l'avant une description axiomatique de la théorie de l'homologie et de la cohomologie. Tel qu'expliqué à la section 2.1.2, Eilenberg et Steenrod donnèrent une nouvelle portée à la méthode axiomatique en l'appliquant, non pas à des objets, mais à des théories. Leurs axiomes isolaient ce que toutes les théories de l'homologie avaient en commun, c'est-à-dire le motif essentiel à l'œuvre dans toute théorie de l'homologie. Cette description axiomatique permettait de comprendre toute théorie de l'homologie comme un foncteur d'une catégorie donnée vers la catégorie des groupes abéliens. *Foundations of Algebraic Topology* révéla ainsi le potentiel de clarification de la méthode axiomatique.

Deuxièmement, dans *Homological Algebra*, Cartan et Eilenberg parvinrent à associer des invariants homologiques à des structures algébriques de type arbitraire grâce à la notion de foncteur dérivé et la à méthode des résolutions projectives ou injectives. Par cette méthode, ils unifièrent l'homologie des structures algébriques et mirent en évidence les liens entre celle-ci et l'homologie des espaces topologiques.

Finalement, l'importance de la théorie des faisceaux tient à trois aspects. Les premier et deuxième aspects sont respectivement le concept de faisceau lui-même et la cohomologie des faisceaux. Le dernier aspect remonte à l'article « Faisceaux algébriques cohérents » de Serre puisqu'il s'agit de l'application de la théorie des faisceaux à la géométrie algébrique. En particulier, une des grandes contributions de Serre fut d'établir que les faisceaux permettaient de définir l'homologie ou la cohomologie de variétés algébriques abstraites.

Non seulement Grothendieck assimila-t-il ces microfractures, mais le recours aux concepts et méthodes de théorie des catégories lui permit de les approfondir de manière à ce qu'elles révèlent leur plein impact sur la conceptualisation des espaces topologiques.

Premièrement, les catégories abéliennes unifient l'homologie des espaces topologiques et l'homologie des structures algébriques. Dans la foulée des travaux, d'une part, de Eilenberg et Steenrod et, d'autre part, de Cartan et Eilenberg, l'homologie des espaces topologiques et l'homologie des structures algébriques consistaient en deux théories distinctes et, par conséquent, se calculaient selon deux méthodes de calculs irréconciliables. Le passage des catégories de modules considérées à l'origine par Cartan et Eilenberg aux catégories abéliennes permet de modifier légèrement la méthode des résolutions projectives et injectives de manière à ce qu'elle s'applique aux espaces topologiques et donc de définir les groupes d'homologie de ces derniers comme des foncteurs dérivés.

Deuxièmement, les catégories abéliennes sont définies axiomatiquement. L'unification des théories de l'homologie spécifiques aux espaces topologiques et aux structures algébriques reprend donc le point de vue axiomatique mis de l'avant par *Foundations of Algebraic Topology* puisque c'est à l'aide d'axiomes que Eilenberg et Steenrod avaient isolé ce qui était commun aux multiples théories de l'homologie utilisées en topologie algébrique. En décrivant axiomatiquement les catégories abéliennes, Grothendieck se trouve à appliquer un procédé similaire, mais pour l'homologie des espaces topologiques et l'homologie des structures algébriques cette fois-ci.

En ce sens, les axiomes des catégories abéliennes synthétisent l'information relative non seulement à une structure mathématique, mais aussi à un secteur des mathématiques, c'est-à-dire la théorie de l'homologie et de la cohomologie. « *As with additive categories, Abelian categories encode fundamental aspects of a mathematical domain. Various concepts can be defined and constructed and various theorems can be proved in Abelian categories.* » [Marquis 2009, p. 100] Les propriétés d'exactitude qu'expriment les axiomes garantissent que les objets et morphismes de la catégorie étudiée se comportent correctement au plan homologique.

Troisièmement, Grothendieck transforme complètement la notion de faisceaux. Tout d'abord, il introduit une distinction entre un préfaisceau et un faisceau. Un préfaisceau d'ensembles sur une catégorie $\mathcal{C}$ est tout simplement un foncteur contravariant $C^o \to \mathbf{Ens}$ de la catégorie duale vers la catégorie des ensembles. Un faisceau est alors un préfaisceau satisfaisant une certaine condition garantissant que le recollement des objets permettra de passer du local au global. Ceci fait en sorte qu'un faisceau est un foncteur et non une structure algébrique munie d'une topologie comme à l'origine.

Toujours sur le thème des faisceaux, les travaux de Leray, Cartan et Serre montraient qu'un espace topologique pouvait être étudié par l'entremise des faisceaux sur celui-ci. Par exemple, chez Leray, étant donnée une représentation $X \to X'$, la cohomologie de $X'$ est donnée par celle de $X$. Cette idée est une des clés du renouvellement du concept d'espace. D'une part, Grothendieck montre que la catégorie des faisceaux sur un espace encode toutes les propriétés importantes de l'espace et peut donc s'y substituer. D'autre part, les topologies de Grothendieck sur une catégorie généralisent les topologies comprises comme treillis des sous-ensembles ouverts d'un ensemble. Une topologie de Grothendieck introduit une notion de localisation sur une catégorie. La construction d'une catégorie de faisceaux sur un espace se généralise alors aisément à tout site, c'est-à-dire à toute catégorie munie d'une topologie de

Grothendieck. Puisqu'un topos se définit comme une catégorie dont la structure est identique à celle d'une catégorie de faisceaux sur un site, les faisceaux transmettent évidemment de l'information à propos de ces espaces transformés.

### 3.3.2 Une utilisation novatrice des catégories

Il ressort des considérations précédentes que l'utilisation singulière que fit Grothendieck de la théorie des catégories fut fondamentale dans la refonte de la géométrie algébrique et, plus spécifiquement, dans la transformation du concept d'espace topologique associée au point de vue des topos.

Dans la perspective du modernisme mathématique, les catégories étaient considérées comme des objets utiles, mais en bout de ligne secondaires, pour ne pas dire dispensables. Dans leurs travaux ayant conduit à la théorie des catégories, Eilenberg et Mac Lane avaient en quelque sorte été contraints de les introduire afin de définir rigoureusement les foncteurs et les transformations naturelles, ceux-ci devant avoir un domaine et un codomaine ou, pour le dire plus familièrement, ne pouvant être définis dans le vide. Dans cette optique, les catégories jouaient un rôle purement fondationnel. Pour sa part, la théorie des catégories était considérée comme fournissant un langage simplifiant l'expression de certaines idées mathématiques de telle sorte que son intérêt relevait de l'organisation et de la présentation des mathématiques.

L'utilisation de la théorie des catégories était donc sous-tendue par la conviction plus ou moins latente que l'appareil catégorique regroupait des objets pratiques, mais ultimement et théoriquement non essentiels. Pour citer à nouveau Marquis : « *It is probably fair to say that category theory was in this period first and foremost a useful framework for algebraic topology and homological algebra.* » [2009, p. 67]

En conséquence, *Foundations of Algebraic Topology*, *Homological Algebra* et la théorie des faisceaux avaient recours à la théorie des catégories en ce qu'elle facilitait l'expression de problèmes et des solutions de ces derniers, de propriétés abstraites ou encore de relations entre certains objets. En extrapolant, cette croyance selon laquelle les catégories sont des objets secondaires et la théorie les régissant un langage utile présupposait que les propositions exprimées en termes catégoriques auraient tout aussi bien pu l'être dans le langage standard des mathématiques de l'époque, soit celui de la théorie des ensembles. De la même façon, les démonstrations employant des concepts catégoriques auraient pu être rédigées indépendamment de toute référence catégorique. La formulation aurait certainement été plus compliquée, mais la théorie étudiée n'en aurait pas été moins riche.

C'est Grothendieck qui, dans son article « Sur quelques points d'algèbre homologique » dont il fut question à la section 3.1.3.2, mit de l'avant une appréhension nouvelle des catégories. Selon celle-ci, la théorie des catégories constitue beaucoup plus qu'un langage pratique pour exprimer et organiser certaines situations mathématiques. Loin d'être accessoires, les objets qu'elle fait intervenir — catégories, morphismes, foncteurs, etc. — sont indispensables. Le moment clé est la démonstration que les catégories abéliennes ont suffisamment d'injectifs puisqu'elle repose exclusivement sur les catégories et leurs propriétés [87].

À cet égard, de nombreux concepts reposent sur des constructions catégorielles ou encore fonctorielles comme l'illustrent les exemples suivants. Premièrement, un topos est carrément une catégorie. Deuxièmement, contrairement à Leray, Cartan et Serre pour qui un faisceau consistait en une fonction attribuant une topologie à une structure algébrique, Grothendieck redéfinit la notion relativement à une catégorie : un faisceau est un foncteur contravariant $\mathcal{C}^o \to \mathbf{Ens}$ à valeurs dans la catégorie des ensembles. Troisièmement, un morphisme de topos $\mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ est une paire de foncteurs $u_* \colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ et $u^* \colon \mathcal{E}' \to \mathcal{E}$ déterminant une adjonction entre les topos $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$.

En conséquence, la théorie des catégories fournit un cadre théorique privilégié et naturel pour la compréhension des mathématiques de telle sorte qu'il devenait impératif d'y inscrire la refonte de la géométrie algébrique. Le cadre catégoriel permet de comprendre des concepts ou encore des propriétés mathématiques sous leur forme la plus abstraite et donc sous leur jour conceptuel le plus simple.

Par exemple, l'approche catégorielle de Grothendieck lui permit d'établir que la structure de treillis des ouverts par laquelle le concept d'espace topologique était traditionnellement caractérisé est en fait un cas particulier d'une structure spatiale beaucoup plus générale et fondamentale. Étant donné un espace $X$, au treillis de ses sous-ensembles ouverts $\mathcal{O}(X)$, Grothendieck substitue la catégorie des faisceaux $\mathrm{Sh}(X)$ sur $X$. Parce qu'elle préserve toutes les propriétés de l'espace, il est justifié de faire abstraction de l'espace de départ et de se concentrer uniquement sur la catégorie $\mathrm{Sh}(X)$. Il en résulte que ce n'est pas le treillis des ouverts de cet espace, ni les faisceaux sur cet espace, mais bien la catégorie des faisceaux sur celui-ci qui révèle ce qui caractérise vraiment les espaces topologiques.

Du coup, la transition des treillis d'ouverts vers les catégories de faisceaux ouvre la voie à une transformation du concept d'espace topologique. La construction d'une catégorie de faisceaux n'est absolument pas limitée aux espaces topologiques, mais s'étend à n'importe quel site, c'est-à-dire à toute catégorie munie d'une topologie de Grothendieck. Or, le théorème de Giraud identifie les propriétés qui garantissent qu'une catégorie arbitraire se comporte comme une catégorie de faisceaux sur un site. En d'autres termes, ce théorème identifie les propriétés propres aux espaces. En ce sens, la structure qui caractérise de manière essentielle les espaces topologiques ne peut être saisie que dans le cadre théorique catégoriel.

Pour donner un autre exemple, dans la mesure où les topos induisent des notions de continuité et d'équivalence sur les espaces généralisés, la géométrie algébrique dispose d'une compréhension fonctorielle de la continuité et de l'équivalence entre espaces. Encore une fois, ceci illustre que ces phénomènes ne sont compris en toute généralité qu'à l'aide de la théorie des catégories.

87. Voir Grothendieck [1957], §1.10.

Par conséquent, toute tentative de masquer la machinerie catégorique employée dans le renouvellement de la géométrie algébrique et du concept d'espace en la traduisant dans un autre langage serait vaine : certains des plus importants concepts sur lesquels se base la géométrie algébrique sont foncièrement catégoriels et ne peuvent être présentés autrement. Pis, une telle traduction présenterait un intérêt discutable puisqu'elle ne s'accomplirait qu'au prix d'une perte de généralité et de clarté.

Plus fondamentalement, la théorie des catégories devient un outil de clarification conceptuelle entre les mains de Grothendieck. Deux aspects doivent être distingués.

Premièrement, il y a chez Grothendieck une conviction que la catégorie que forment les objets d'un certain type est plus importante que les objets eux-mêmes. Cette préséance des catégories sur leurs objets tient à ce que les propriétés de ces derniers se reflètent dans la catégorie qu'ils forment et dans la structure de celle-ci. En termes légèrement imagés, ces propriétés apparaissent plus clairement au niveau de la catégorie qu'à celui des objets eux-mêmes.

Par exemple, bien que les faisceaux sur un espace topologique permettent de l'analyser plus finement, leur plein potentiel ne se révèle qu'à travers la considération de la catégorie des faisceaux sur cet espace. En effet, c'est la structure de cette catégorie qui permet de saisir dans toute sa généralité la structure topologique de l'espace de départ. Dans le même esprit, la stratégie de Grothendieck pour définir la cohomologie étale repose sur l'association d'un topos à tout schéma. Pour un schéma $X$ donné, ceci ne peut toutefois pas être fait directement. En considérant la catégorie des morphismes étales à valeur dans $X$ — une sous-catégorie particulière de la catégorie des schémas s'il est besoin de le rappeler —, la construction du topos associé à $X$ devient soudainement parfaitement naturelle.

Bien qu'elle réfère aux motifs et ne soit donc qu'indirectement reliée au concept d'espace topologique, la citation suivante de Deligne exprime clairement le parti pris de Grothendieck selon lequel les objets mathématiques doivent être étudiés par le biais des catégories qu'ils forment : « On reconnaît la patte du Maître dans l'idée que le problème n'est pas de définir ce qu'est un motif : le problème est de définir la catégorie des motifs, et de dégager les structures qu'elle porte. » [1998, p. 17]

Par conséquent, l'étude d'objets mathématiques, voire d'un secteur des mathématiques, est ramenée à celle du formalisme des catégories d'un certain type, c'est-à-dire des catégories qui, en vertu de leur structure, rendent compte des propriétés des objets en question. Par formalisme, il faut ici comprendre certaines opérations de base — souvent incarnées par des foncteurs — et leurs propriétés fondamentales. Le plus célèbre des formalismes développés par Grothendieck est probablement le formalisme des six opérations développé pour la cohomologie des espaces [88].

Deuxièmement, cette préséance des catégories débouche sur un mécanisme de simplification par abstraction. L'intuition clé de Grothendieck est, qu'étant donnés

88. Voir Deligne [1998] pour un bref aperçu du formalisme des six opérations. Grothendieck [1985] fait aussi quelques remarques éparses à ce sujet.

des concepts irréductibles, une abstraction est susceptible de faire apparaître des similarités et donc de les subsumer sous un concept unique. La simplification qui en découle est bien sûr technique, mais surtout conceptuelle.

Par exemple, « Sur quelques points d'algèbre homologique » utilise les catégories abéliennes pour unifier la cohomologie des espaces topologiques et des structures algébriques. Tel que vu à la section 3.1.3.2, le passage des catégories de modules aux catégories abéliennes permet de dégager une méthode englobant à la fois celle des résolutions fines, employée en cohomologie des espaces, et celle des résolutions injectives, employée pour sa part en cohomologie des structures algébriques. De cette méthode — qui n'est rien d'autre que la méthode des résolutions injectives appliquée aux catégories abéliennes — se déduit une théorie de la cohomologie abstraite. Les groupes de cohomologie obtenus à l'aide des méthodes des résolutions fines et des résolutions injectives deviennent des cas particuliers des groupes de cohomologie définis comme foncteurs dérivées relativement à une catégorie abélienne. Du coup, les restrictions nécessaires et complications inhérentes à l'application des méthodes des résolutions fines et des résolutions injectives disparaissent. Au plan conceptuel, l'appréhension de la cohomologie par le biais des catégories abéliennes permet l'identification des foncteurs réellement à l'œuvre, c'est-à-dire ceux sur lesquels il faut se concentrer. « *Grothendieck's axioms also simplified homological algebra by focusing on just the relevant features.* » [McLarty 2007, p. 310]

Ce mécanisme de simplification par abstraction est également à l'œuvre dans la définition du concept de topos. Le passage de la catégorie des ouverts $\mathrm{Ouv}(X)$ d'un espace topologique à la catégorie des faisceaux $\mathrm{Sh}(X)$ sur ce même espace clarifie la notion de structure topologique, c'est-à-dire qu'elle saisit ce en quoi elle consiste essentiellement. Cette clarification sert par la suite de tremplin en vue d'une transformation du concept d'espace topologique puisque, moyennant l'introduction de la notion de topologie de Grothendieck, la construction d'une catégorie de faisceaux s'applique aux catégories. Un topos est alors tout simplement une catégorie équivalente à une catégorie de faisceaux sur un site.

De plus, la simplification qui accompagne cette abstraction du concept d'espace se manifeste notamment dans la démonstration de propositions et la résolution de problèmes de nature spatiale. En géométrie algébrique par exemple, la pleine généralité qui caractérise le point de vue des topos fait disparaître les difficultés techniques inhérentes au cadre des variétés et des espaces topologiques. Ces difficultés se révèlent spécifiques au cadre conceptuel par l'entremise duquel les résultats ou problèmes en question étaient à l'origine appréhendés. Ainsi, étant donné un résultat en géométrie algébrique — classique ou abstraite au sens de Weil —, les méthodes topossiques permettent de distinguer ce qui est relatif aux concepts qu'il met en relation et ce qui dépend du cadre théorique dans lequel il était originellement inscrit. L'application des méthodes topossiques, directement ou après adaptation au contexte du problème, permet donc d'aller directement à l'essentiel du problème et de faire fi des singularités techniques spécifiques à toute présentation ou cas particulier.

Par exemple, Weil avait démontré les conjectures qui portent son nom pour certaines variétés telles les grassmanniennes [Freitag et Kiehl 1988, p. xvi], les surfaces cubiques ou la variété définie par l'intersection de deux formes quadratiques $F = 0$ et $G = 0$ [Houzel 1994, p. 411]. Dans ce dernier cas, Weil avait ramené le problème au décompte des points d'une courbe $y^2 = \varphi(x, 1)$ où $\varphi(u, v) = \det(uF + vG)$ [89]. La démonstration était ingénieuse, mais elle ne rendait pas vraiment compte des invariants topologiques des variétés algébriques.

En comparaison, l'approche de Grothendieck montre explicitement comment définir, pour toute variété de dimension $n$, les invariants topologiques postulés par les conjectures. Il suffit de construire le topos associé à la variété étudiée ; celui-ci formant une catégorie abélienne, ses groupes de cohomologie se définissent trivialement. Cette approche s'applique donc notamment aux variétés que sont les surfaces cubiques, les grassmanniennes et l'intersection de deux formes quadratiques. Pour reprendre l'exemple d'une variété définie par l'intersection de deux formes quadratiques $F$ et $G$, la méthode catégorielle de Grothendieck montre que ce sont les propriétés d'exactitude du topos associé à celle-ci qui sont essentielles pour caractériser ses invariants topologiques. Que le décompte des points de cette variété puisse être ramené à celui d'une courbe hyperelliptique apparaît alors comme une curiosité qui n'en dit que bien peu sur les relations entre les concepts de variété algébrique sur un corps fini et d'invariants topologiques.

Aux yeux de Grothendieck, la théorie des catégories constitue en conséquence le cadre conceptuel privilégié pour comprendre les mathématiques puisqu'il confère aux concepts leur généralité maximale, mais surtout naturelle. C'est sans contredit cet aspect de l'approche de Grothendieck qui conduit Krömer à écrire :

> *There is an important pattern in Grothendieck's work that can be subsumed under the maxim "enlarge the perspective, take into account things originally left aside!" (the larger framework is most often the right framework). This applies in the following situations of conceptual development:*
>
> - *the passage from module categories to abelian categories;*
> - *the passage from polynomial rings over fields to arbitrary commutative rings;*
> - *the passage from the traditional sheaf definition to the concept of site;*
> - *the passage from derived functors to derived categories.*
>
> *I suspect this list is by no means exhaustive. The maxim can be described as a denial of the alleged primitivity of the concepts originally taken for primitive—thus modifying the foundation of the respective discipline, theory, method.* [2007, p. 189]

Ce faisant, la théorie des catégories se trouve à présenter les concepts mathématiques sous leur forme la plus abstraite et donc la plus claire, d'où la pertinence de travailler dans le cadre qu'elle détermine.

89. Pour le détail, voir Weil [1954].

# Conclusion

Il ressort de cette analyse de l'évolution du concept d'espace topologique que la transition des espaces hérités de Hausdorff aux topos s'accomplit selon une dynamique de rupture et de continuité. D'un point de vue épistémologique, cette transition est symptomatique d'un changement de position normative correspondant à la transformation des mathématiques modernes en mathématiques contemporaines.

Tout d'abord, tel que souligné au premier chapitre, une double compréhension du concept d'espace topologique caractérisa son évolution dans la foulée des *Mannigfaltigkeiten* de Riemann, laquelle fut à l'origine d'un double développement de la topologie selon l'approche axiomatico-ensembliste sous-jacente au modernisme.

D'une part, la topologie générale adopta une conception pointilliste des *Mannigfaltigkeiten*. Selon celle-ci, un espace est composé de points qui s'apparentent à des atomes en ce qu'ils ne disposent d'aucune structure. Au début des années 1930, un espace topologique en vint donc à être compris comme un ensemble de points muni d'une structure, appelée topologie, déterminée par certains de ses sous-ensembles.

Le chemin ayant forgé cette conception peut être subdivisé en quatre grandes étapes. Premièrement, le problème de l'unicité de la représentation de fonctions à l'aide de séries trigonométriques conduisit Cantor à étudier les propriétés des ensembles de points. En particulier, son étude de la topologie de la droite réelle mit en évidence la relation entre la structure topologique d'un ensemble et la continuité des fonctions définies sur celui-ci. Deuxièmement, la fin du XIX^e^ siècle et le début du XX^e^ siècle virent quelques tentatives d'étendre la théorie des ensembles de Cantor par delà les ensembles de points. Fréchet formulera finalement un concept d'ensemble abstrait, c'est-à-dire indépendant de la nature des éléments. Troisièmement, les recherches sur le concept d'espace topologique prirent par la suite la forme de tentatives d'axiomatisation. Parmi celles-ci, la plus importante est certainement celle de Hausdorff puisqu'elle permit de traiter les espaces abstraits avec une généralité et une flexibilité inégalée. Il ne restait alors plus qu'à modifier les axiomes de Hausdorff afin de conférer aux espaces topologiques leur pleine généralité, tâche à laquelle s'attaquèrent Vietoris, Kuratowski, Tietze et Alexandroff.

D'autre part, la topologie combinatoire — et par la suite de la topologie algébrique — interpréta les *Mannigfaltigkeiten* comme des objets géométriques. De ce point de vue, un espace est une totalité pouvant être représentée par un assemblage de blocs géométriques élémentaires. À l'origine, la tradition combinatoire se concentra ainsi principalement sur les surfaces et les polyèdres de même que sur leurs classifications par le biais d'une notion encore floue de transformation topologique ou d'invariants topologiques numériques.

Cela dit, la topologie combinatoire ne se détacha définitivement de la géométrie qu'à la fin du XIX$^{e}$ siècle lorsque Poincaré formula une théorie des variétés. En plus d'en faire les objets de la discipline, il définit de nombreuses notions qui rendirent possible une analyse strictement topologique des variétés : homologie, groupe fondamental, coefficients de torsion, triangulation, etc. Malheureusement, la théorie de Poincaré manquait de rigueur. Ses successeurs se trouvèrent donc confrontés à la tâche d'en combler les lacunes. Ceci donna lieu à trois grandes approches où les méthodes combinatoires furent appliquées et adaptées aux complexes cellulaires, aux complexes simpliciaux et, finalement, aux espaces arbitraires.

Dans la seconde moitié des années 1920, la topologie combinatoire prit un tournant algébrique lorsque Noether, Vietoris et Hopf, pour ne nommer que ceux-là, proposèrent de remplacer les invariants numériques par des invariants algébriques. Dorénavant, les espaces ne seront plus caractérisés à l'aide de leurs nombres de Betti et de leurs coefficients de torsion, mais plutôt de leurs groupes d'homologie et d'homotopie. Ce faisant, une appréhension abstraite et axiomatique des espaces topologiques prit forme ce qui eut pour conséquence de commencer à faire rentrer la topologie algébrique dans le giron du modernisme.

Par la suite, soit environ de 1945 à 1957, la topologie algébrique, et dans une certaine mesure la géométrie algébrique, subit de profondes transformations. Premièrement, à la lumière des multiples théories de l'homologie en vigueur à l'époque, Eilenberg et Steenrod simplifièrent ce domaine des mathématiques en axiomatisant la notion même de théorie de l'homologie dans leur livre *Foundations of Algebraic Topology*. Cette approche eut deux conséquences fondamentales. Premièrement, une théorie de l'homologie devint un foncteur de la catégorie des espaces topologiques vers la catégorie des groupes abéliens. Deuxièmement, Eilenberg et Steenrod élargirent le champ d'application de la méthode axiomatique en l'appliquant, non pas à des objets mathématiques comme des groupes ou des corps, mais à des théories. Ils formulèrent donc une théorie des théories de l'homologie et, ce faisant, mirent en évidence la pertinence de la méthode axiomatique pour clarifier conceptuellement un domaine des mathématiques. Par ailleurs, l'axiomatisation de la théorie de l'homologie compléta son intégration au modernisme, mais, en raison de la transformation de la méthode axiomatique qu'elle représentait, marqua une première fissure dans la position normative sous-jacente.

Deuxièmement, dès le début des années 1940, quelques mathématiciens s'étaient intéressés à l'homologie des structures algébriques de groupe, d'algèbre de Lie et d'algèbre associative. Dans leur livre *Homological Algebra*, Cartan et Eilenberg montrèrent comment unifier ces résultats à l'aide de la méthode des résolutions injectives ou projectives et en décrivant les groupes d'homologie d'une structure algébrique arbitraire comme des foncteurs dérivés.

Troisièmement, principalement développée par Leray, Cartan et Serre, la théorie des faisceaux mit à la disposition des mathématiciens deux nouveaux outils pour analyser les espaces : la notion de faisceau et la cohomologie à valeurs dans un faisceau. En particulier, la théorie des faisceaux permit de mieux comprendre le passage du local au global dans un espace topologique. En effet, d'après la condition de cohérence, toute propriété vraie en un point l'est également en tout autre point suffisamment proche.

Comme l'expliqua le deuxième chapitre, ces transformations exacerbèrent la dichotomie entre la topologie générale et la topologie algébrique. Si le concept d'espace sous-jacent à la topologie générale s'était imposé, les méthodes employées pour étudier ces espaces n'avaient plus rien à voir avec celles y étant associées en raison de leur totale inefficacité en topologie algébrique. Ces transformations peuvent donc être vues comme des microfractures dans le modernisme puisqu'elles introduisirent des éléments méthodologiques qui deviendraient typiques de la contemporanéité mathématique, mais sans parvenir à transcender la position normative moderniste. En conséquence, tout importantes furent-elles pour l'étude des espaces topologiques, elles n'en modifièrent aucunement la conceptualisation. Que ce soit dans *Foundations of Algebraic Topology*, *Homological Algebra* ou en théorie des faisceaux, un espace topologique consistait toujours en un ensemble de points muni d'une structure déterminée par ses sous-ensembles ouverts.

Grothendieck était parfaitement conscient de cette absence de rupture complète dans l'évolution du concept d'espace topologique. Dans *Récoltes et semailles*, il n'hésite pas à affirmer que cette dernière se caractérise par sa parfaite continuité depuis la conceptualisation euclidienne.

> Jusqu'à l'apparition du point de vue des topos, vers la fin des années cinquante, l'évolution de la notion d'espace m'apparaît comme une évolution essentiellement "**continue**". Elle paraît se poursuivre sans heurts ni sauts, à partir de la théorisation euclidienne de l'espace qui nous entoure, et de la géométrie léguée par les grecs [*sic*], s'attachant à l'étude de certaines "figures" (droites, plans, cercles, triangles, etc.) vivant dans cet espace. Certes, des changements profonds ont eu lieu dans la façon dont le mathématicien ou le "philosophe de la nature" concevait "l'espace". Mais ces changements me semblent tous dans la nature d'une "continuité" essentielle — ils n'ont jamais placé le mathématicien, attaché (comme tout un chacun) aux images mentales familières, devant un **dépaysement** soudain. C'étaient comme les changements, profonds peut-être mais progressifs, qui se font au fil des ans dans un être que nous aurions connu déjà enfant, et dont nous aurions suivi l'évolution depuis ses premiers pas jusqu'à son âge adulte et sa pleine maturité. Des changements imperceptibles en certaines longues périodes de calme plat, et tumultueux peut-être en d'autres. Mais même dans les périodes de croissance ou de mûrissement les plus intenses, et alors même que nous l'aurions perdu de vue pendant des mois, voire

> des années, à aucun moment il ne pouvait pourtant y avoir le moindre doute, la moindre hésitation : c'est bien lui encore, un être bien connu et familier, que nous retrouvions, fut-ce avec des traits changés. [1985, p. P54]

Bien que l'affirmation de Grothendieck soit considérablement plus forte, elle réaffirme l'idée que la véritable fracture ne survint qu'avec le point de vue des topos.

La nécessité d'un nouveau concept d'espace topologique se manifesta dans le cadre de la réforme de la géométrie algébrique qu'entrepris Grothendieck à la fin des années 1950 en réponse aux conjectures de Weil. Ces dernières postulaient l'association d'invariants cohomologiques à des variétés algébriques, tâche pour laquelle le concept traditionnel se révéla carrément inadéquat tant au plan technique que conceptuel. Grothendieck poursuit :

> Je crois pouvoir dire, d'ailleurs, que vers le milieu de ce siècle, cet être familier avait déjà beaucoup vieilli — tel un homme qui se serait finalement épuisé et usé, dépassé par un afflux de tâches nouvelles auxquelles il n'était nullement préparé. Peut-être même était-il déjà mort de sa belle mort, sans que personne ne se soucie d'en prendre note et d'en faire le constat. "Tout le monde" faisait bien mine encore de s'affairer dans la maison d'un vivant, que c'en était quasiment comme s'il était encore bel et bien vivant en effet.
>
> Or doncques [90], jugez de l'effet fâcheux, pour les habitués de la maison, quand à la place du vénérable vieillard figé, droit et raide dans son fauteuil, on voit s'ébattre soudain un gamin vigoureux, pas plus haut que trois pommes, et qui prétend en passant, sans rire et comme chose qui irait de soi, que Monsieur Espace (et vous pouvez même désormais laisser tomber le "Monsieur", à votre aise...) c'est **lui** ! Si encore il avait l'air au moins d'avoir les traits de famille, un enfant naturel peut-être qui sait...mais pas du tout ! À vue de nez, rien qui rappelle le vieux Père Espace qu'on avait si bien connu (ou cru connaître...), et dont on était bien sûr, en tous cas (et c'était bien là la moindre des choses...) qu'il était éternel...
>
> C'est **ça**, la fameuse "mutation de la notion d'espace". C'est **ça** que j'ai du "voir", comme chose d'évidence, dès les débuts des années soixante au moins (...) la notion traditionnelle d'"espace", tout comme celle étroitement apparentée de "variété" (en tous genres, et notamment celle de "variété algébrique"), avait pris, vers le moment où je suis venu dans les parages, un tel coup de vieux déjà, que c'était bien comme si elles étaient mortes...Et je pourrais dire que c'est avec l'apparition coup sur coup du point de vue des schémas (et de sa progéniture, plus dix mille pages de fondements à la clef), puis de celui des topos, qu'une situation de crise-qui-ne-dit-pas-son-nom s'est trouvée finalement dénouée. [1985, p. P55]

La clé de cette métamorphose fut de constater que la catégorie des faisceaux sur un espace encode parfaitement la structure topologique de celui-ci. En effet, en définissant le concept de topologie de Grothendieck qui généralise aux catégories la notion de localisation intrinsèque aux topologies classiques, Grothendieck fut en mesure de transposer naturellement la construction d'une catégorie de faisceaux à

90. Graphie vieillie de l'adverbe « donc ».

tout site, c'est-à-dire à toute catégorie munie d'une telle topologie de Grothendieck. Un topos se définit alors comme toute catégorie équivalente à une catégorie de faisceaux sur un site ou, de manière équivalente, comme une catégorie satisfaisant certaines propriétés d'exactitude.

En tant qu'espace, un topos est fondamentalement différent puisque, en renversant la relation dialectique l'unissant à ses points, il rompt avec la conception pointilliste. Contrairement à un espace topologique qui est compris comme un ensemble de points sur lequel ses parties définissent une structure et qui est donc déterminé par ceux-ci, les points et les ouverts d'un topos sont déterminés par celui-ci. Pis, les points d'un topos disposent même d'une structure.

De plus, le point de vue des topos élargit l'horizon de la topologie. L'intuition topologique n'est plus restreinte aux seuls ensembles munis d'une topologie puisque de nombreux objets qui y semblaient totalement étrangers s'avèrent être des topos. Le topos des $G$-faisceaux illustre cet élargissement. Il en est ainsi parce que la structure qui caractérise réellement la conceptualisation topologique de l'espace est celle que déterminent les propriétés d'exactitude identifiées par le théorème de Giraud.

Il ressort également de cette analyse que la transformation topossique du concept d'espace topologique fut rendue possible par l'utilisation novatrice de la théorie des catégories que fit Grothendieck. Comparativement à ses prédécesseurs qui la considéraient comme un langage utile pour l'expression et l'organisation d'idées mathématiques, Grothendieck voit dans la théorie des catégories un outil de clarification conceptuelle. Les catégories deviennent du coup des objets indispensables et primitifs. En conséquence, le cadre conceptuel de la théorie des catégories permit à Grothendieck de revenir sur les microfractures associées à *Foundations of Algebraic Topology*, *Homological Algebra* et à la théorie des faisceaux et de leur faire exprimer leur pleine richesse. De plus, conformément à son postulat méthodologique fondamental, Grothendieck solutionne un problème mathématique en l'insérant dans son contexte naturel, c'est-à-dire dans un cadre théorique le rendant trivial. Dans la mesure où la théorie des catégories met à jour les ramifications conceptuelles fondamentales, ces contextes naturels sont catégoriels. Par son utilisation des catégories, Grothendieck mit de l'avant une position normative qu'il convient d'associer à la contemporanéité mathématique.

En terminant, la réconciliation du continu et du discret inhérente aux topos suggère un élément de continuité avec les *Mannigfaltigkeiten* de Riemann. Tel que mentionné dans l'introduction, Riemann considérait une *Mannigfaltigkeit* comme continue ou discrète selon que la transition entre les déterminations du concept auquel elle est associée soit continue ou discrète. Il en résultait une certaine unité dans la compréhension de l'espace que la double interprétation par les traditions ensembliste et combinatoire fit disparaître. Dans la mesure où le point de vue des topos réintroduit une unité dans la conceptualisation topologique de l'espace, il serait intéressant d'examiner la conception riemannienne de l'espace à la lumière des travaux de Grothendieck.

# Bibliographie

Alexander, J. W. (1915). « A Proof of the Invariance of Certain Constants of Analysis Situs », *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 16, n° 2, p. 148–154.

— (1926). « Combinatorial Analysis Situs », *Transactions of the American Mathematical Society*, 3$^e$ série, vol. 28, n° 2, p. 301–329.

Alexandroff, Pavel S. (1925). « Zur Begründung der $n$-dimensionalen mengentheoretischen Topologie », *Mathematische Annalen*, vol. 94, p. 296–308.

— (1928). « Untersuchungen über Gestalt und Lage Abgeschlosserer Mengen beliebiger Dimension », *Annals of Mathematics*, 2$^e$ série, vol. 30, p. 101–187.

— (1984). *Einführung in die Mengenlehre und in die allgemeine Topologie*, trad. du russe par M. Peschel, W. Richter et H. Antelmann, Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, coll. Hochschulbücher für Mathematik, n° 85, 336 p.

Alexandroff, Pavel S. et Heinz Hopf (1935). *Topologie*, tome I, Berlin, Springer Verlag, coll. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, n° XLV, xiv+635 p.

Artin, Emil (1965). « Quadratische Körper im Gebiete der höheren Kongruezen », *in Collected Papers*, sous la dir. de Serge Lang et John T. Tate, New York, Springer-Verlag, p. 1–94.

Artin, Michael, Alexandre Grothendieck et Jean-Louis Verdier, dir. (1972). *Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 1963–1964 : Théorie des topos et cohomologie étale des schémas (SGA 4)*, tome 1 (Théorie des topos), Berlin, Springer-Verlag, coll. Lecture Notes in Mathematics, n° 269, xix+525 p.

Barr, Michael (1974). « Toposes Without Points », *Journal of Pure and Applied Algebra*, vol. 5, p. 265–280.

Basbois, Nicolas (2009). « La naissance de la cohomologie des groupes », thèse de doctorat, Nice, Université de Nice Sophia Antipolis, vi + 301 p., URL : `http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/43/02/04/PDF/these.pdf` (consulté le 15 nov. 2009).

Boi, Luciano (1995). *Le problème mathématique de l'espace : Une quête de l'intelligible*, Berlin, Springer, xxiv + 526 p.

Borel, Émile (1903*a*). « Contribution à l'analyse arithmétique du continu », *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 3$^e$ série, vol. IX, n° IV, p. 329–375.

Borel, Émile (1903*b*). « Quelques remarques sur les ensembles de droites ou de plans », *Bulletin de la Société Mathématique de France*, vol. XXI, p. 272–275.

Bourbaki, Nicolas (1962). « L'architecture des mathématiques », *in Les Grands Courants de la pensée mathématique*, sous la dir. de F. Le Lionnais, nouvelle édition augmentée, Paris, Librairie scientifique et technique Albert Blanchard, coll. L'Humanisme scientifique de demain, p. 35–47.

— (1971). *Topologie générale : Chapitres 1 à 4*, tome 1, nouvelle édition, Paris, Diffusion C.C.L.S., coll. Éléments de mathématiques, xv+354 p.

— (1974). *Éléments d'histoire des mathématiques*, nouvelle édition revue, corrigée et augmentée, Paris, Hermann, coll. Histoire de la Pensée, n° IV, 376 p.

Breitenberger, E. (1999). « Johann Benedikt Listing », *in History of Topology*, sous la dir. de I. M. James, Amsterdam, North-Holland, p. 909–924.

Brouwer, L. E. J. (1911). « Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten », *Mathematische Annalen*, vol. 71, n° 1, p. 97–115.

— (1975). « Continuous One–One Transformations of Surfaces in Themselves », *in Collected Works*, sous la dir. de Hans Freudenthal, tome 2, Amsterdam, North-Holland, p. 527–538.

Cantor, Georg (1966*a*). « Über einen die trigonometrischen Reihen betreffenden Lehrsatz », *in Gesammelte Abhandlungen : Mathematischen und Philosophische Inhalts*, sous la dir. de Ernst Zermelo et Abraham Fraenkel, Hildesheim, Georg Olms Verlagsbuchhandlung, p. 71–79.

— (1966*b*). « Beweis, dass eine für jeden reellen Wert von $x$ durch eine trigonometrische Reihe gegebene Funktion $f(x)$ sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen läßt », *in Gesammelte Abhandlungen : Mathematischen und Philosophische Inhalts*, sous la dir. de Ernst Zermelo et Abraham Fraenkel, Hildesheim, Georg Olms Verlagsbuchhandlung, p. 80–83.

— (1966*c*). « Notiz zu dem Aufsatze : Beweis, dass eine für jeden Reellen Wert von $x$ durch eine trigonometrische Reihe gegebene Funktion $f(x)$ sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen läßt », *in Gesammelte Abhandlungen : Mathematischen und Philosophische Inhalts*, sous la dir. de Ernst Zermelo et Abraham Fraenkel, Hildesheim, Georg Olms Verlagsbuchhandlung, p. 84–86.

— (1966*d*). « Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen », *in Gesammelte Abhandlungen : Mathematischen und Philosophische Inhalts*, sous la dir. de Ernst Zermelo et Abraham Fraenkel, Hildesheim, Georg Olms Verlagsbuchhandlung, p. 92–102.

— (1966*e*). « Ein Betrag zur Mannigfaltigkeitslehre », *in Gesammelte Abhandlungen : Mathematischen und Philosophische Inhalts*, sous la dir. de Ernst Zermelo et Abraham Fraenkel, Hildesheim, Georg Olms Verlagsbuchhandlung, p. 119–133.

— (1966*f*). « Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten Nr. 1 », *in Gesammelte Abhandlungen : Mathematischen und Philosophische Inhalts*, sous la dir. de Ernst Zermelo et Abraham Fraenkel, Hildesheim, Georg Olms Verlagsbuchhandlung, p. 139–145.

Cantor, Georg (1966*g*). « Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten Nr. 2 », *in Gesammelte Abhandlungen : Mathematischen und Philosophische Inhalts*, sous la dir. de Ernst Zermelo et Abraham Fraenkel, Hildesheim, Georg Olms Verlagsbuchhandlung, p. 145–148.

— (1966*h*). « Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten Nr. 3 », *in Gesammelte Abhandlungen : Mathematischen und Philosophische Inhalts*, sous la dir. de Ernst Zermelo et Abraham Fraenkel, Hildesheim, Georg Olms Verlagsbuchhandlung, p. 149–157.

Cartan, Henri (1944). « Idéaux de fonctions analytiques de $n$ variables complexes », *Annales scientifiques de l'É.N.S.* 3e série, vol. 61, p. 149–197.

— (1949). « Sur la notion de carapace en topologie algébrique », *in Topologie algébrique : Paris 26 juin – 2 juillet 1947*, Paris, Gauthier-Villars, coll. Colloques internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique, no XII, p. 1–2.

— (1950). « Idéaux et modules de fonctions analytiques de variables complexes », *Bulletin de la Société Mathématique de France*, vol. 78, p. 29–64.

— dir. (1950–1951). *Séminaire Henri Cartan 1950/51 : Cohomologie des groupes, suite spectrale, faisceaux*, tome 3, 2e édition multigraphiée, revue et corrigée, E.N.S.

— dir. (1951–1952). *Séminaire Henri Cartan 1951/52 : Fonctions analytiques de plusieurs variables complexes*, tome 4, E.N.S.

— (1953). « Variétés analytiques complexes et cohomologie », *in Colloque sur les fonctions de plusieurs variables*, tenu à Bruxelles du 11 au 14 mars 1953, Centre Belge de Recherches Mathématiques, Louvain, Librairie universitaire, p. 41–55.

— dir. (1955–1956). *Séminaire Henri Cartan 1955/56 : Géométrie algébrique*, tome 8, E.N.S.

Cartan, Henri et Samuel Eilenberg (1956). *Homological Algebra*, Princeton, Princeton University Press, xv+390 p.

Cartier, Pierre (2000). « Un pays dont on ne connaîtrait que le nom (Grothendieck et les "motifs") », *Prépublications de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, coll. Notes sur l'histoire et la philosophie des mathématiques, no IV, p. 2–34, URL : `http://inc.web.ihes.fr/prepub/PREPRINTS/M00/M00-75.pdf` (consulté le 26 sept. 2006).

— (2001). « A Mad Day's Work : From Grothendieck to Connes and Kontsevich — The Evolution of Concepts of Space and Symmetry », trad. du français par Roger Cooke, *Bulletin of the American Mathematical Society*, nouvelle série, vol. 38, no 4, p. 389–408.

— (2008). « Notion de spectre », *Prépublications de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, p. 1–11, URL : `http://inc.web.ihes.fr/prepub/PREPRINTS/2008/M/M-08-61.pdf` (consulté le 2 jan. 2010).

Chevalley, Claude, dir. (1956–58). *Séminaire Claude Chevalley 1956/58 : Classification des groupes de Lie algébriques*, tome 1, E.N.S.

Chevalley, Claude, dir. (1958). *Séminaire Claude Chevalley 1958 : Anneaux de Chow et applications*, tome 3, E.N.S.

Chorlay, Renaud (2007). « L'émergence du couple local/global dans les théories géométriques, de Bernard Riemann à la théorie des faisceaux 1851–1953 », thèse de doctorat, Paris, Université Paris 7 — Denis Diderot, 803 p.

— (2009). « From Problems to Structures : the Cousin Problems and the Emergence of the Sheaf Concept », *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 64, n° 1, p. 1–73.

Colmez, Pierre et Jean-Pierre Serre, dir. (2001). *Correspondance Grothendieck-Serre*, Paris, Société Mathématique de France, coll. Documents Mathématiques, n° 2, xii+288 p.

Cooke, Roger (1993). « Uniqueness of Trigonometric Series and Descriptive Set Theory, 1870–1985 », *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 45, n° 4, p. 281–334.

Crilly, Tony (1999). « The Emergence of Topological Dimension Theory », *in History of Topology*, sous la dir. de I. M. James, Amsterdam, North-Holland, p. 1–24.

Dauben, Joseph Warren (1979). *Georg Cantor : His Mathematics and Philosophy of the Infinite*, Princeton, Princeton University Press, 404 p.

Dehn, Max et Pool Heegaard (1907). « Analysis Situs », *in Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften*, sous la dir. de W. Fr. Meyer et H. Mohrmann, tome III, Leipzig, Teubner, p. 153–220.

Deligne, Pierre (1974). « La Conjecture de Weil : I », *Publications mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, vol. 43, p. 273–307.

— (1977). *Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie SGA 4 1/2 : Cohomologie étale*, avec la collaboration J. F. Boulot, A. Grothendieck, L. Illusie et J. L. Verdier, Berlin, Springer-Verlag, coll. Lecture Notes in Mathematics, n° 569, iv+312 p.

— (1994). « À quoi servent les motifs ? », *in Motives*, sous la dir. de Uwe Jannsen, Steven Kleiman et Jean-Pierre Serre, tome 1, Providence, American Mathematical Society, coll. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, n° 55, p. 143–161.

— (1998). « Quelques idées maîtresses de l'œuvre de A. Grothendieck », *in Matériaux pour l'histoire des mathématiques au XXe siècle (Nice, 1996)*, Paris, Société Mathématique de France, coll. Séminaire & Congrès, n° 3, p. 11–19.

Demazure, Michel et Alexandre Grothendieck, dir. (1970). *Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 1962–1964 : Schémas en groupe (SGA 3)*, tome 1 (Propriétés générales des schémas en groupes), Berlin, Springer-Verlag, coll. Lecture Notes in Mathematics, n° 151, xv+564 p.

Dieudonné, Jean (1962). « Les méthodes axiomatiques modernes et les fondements des mathématiques », *in Les Grands Courants de la pensée mathémaique*, sous la dir. de F. Le Lionnais, nouvelle édition augmentée, Paris, Librairie scientifique et technique Albert Blanchard, coll. L'Humanisme scientifique de demain, p. 543–555.

Dieudonné, Jean (1974). *Cours de géométrie algébrique*, tome 1, Paris, Presses Universitaires de France, coll. SUP, 234 p.

— (1984). « Emmy Noether and Algebraic Topology », *Journal of Pure and Applied Algebra*, vol. 31, n° 1-3, p. 5–6.

— dir. (1986). *Abrégé d'histoire des mathématiques 1700–1900*, 2e édition, Paris, Hermann, viii+517 p.

— (1989*a*). « A. Grothendieck's Early Work (1950-1960) », *K-Theory*, vol. 3, p. 299–306.

— (1989*b*). *A History of Algebraic and Differential Topology 1900–1960*, Boston, Birkhäuser, xxii+648 p.

— (1990). « De l'analyse fonctionnelle aux fondements de la géométrie algébrique », *in The Grothendieck Festschrift*, sous la dir. de P. Cartier et al., tome 1, Boston, Birkhäuser, coll. Progress in Mathematics, n° 86, p. 1–14.

— (1994). « Une brève histoire de la topologie », *in Development of mathematics 1900–1950*, sous la dir. de Jean-Paul Pier, Basel, Birkhäuser, p. 35–155.

Dwork, Bernard (1960). « On the Rationality of the Zeta Function of an Algebraic Variety », *American Journal of Mathematics*, vol. 82, n° 3, p. 631–648.

Dyck, Walther von (1888). « Beiträge zur Analysis Situs : I. Aufsatz, Ein- und zweidimensionale Mannigfaltigkeiten », *Mathematische Annalen*, vol. 32, n° 4, p. 457–512.

— (1890). « Beiträge zur Analysis Situs : II. Aufsatz, Mannigfaltigkeiten von $n$ Dimensionen », *Mathematische Annalen*, vol. 37, n° 2, p. 273–316.

Eilenberg, Samuel (1944). « Singular Homology Theory », *Annals of Mathematics*, 2e série, vol. 45, n° 3, p. 407–447.

Eilenberg, Samuel et Saunders Mac Lane (1943). « Relations Between Homology and Homotopy Groups », *Proceedings of the National Academy of Science of the United States of America*, vol. 29, p. 155–158.

— (1945). « Relations Between Homology and Homotopy Groups of a Space », *Annals of Mathematics*, 2e série, vol. 46, n° 3, p. 480–509.

Eilenberg, Samuel et Norman Steenrod (1952). *Foundations of Algebraic Topology*, Princeton, Princeton University Press, xv+328 p.

Engelking, Ryszard (1998). « Kazimierz Kuratowski (1896–1980) — His Life and Work in Topology », *in Handbook of the History of General Topology*, sous la dir. de C. E. Aull et R. Lowen, tome 2, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, coll. History of Topology, p. 431–452.

Epple, M. et al. (2002). « Zum Begriff des topologischen Raumes », *in Felix Hausdorff — Gesammelte Werke : Grundzüge der Mengenlehre*, sous la dir. de E. Brieskorn et al., tome II, Berlin, Springer-Verlag, p. 675–744.

Euclide (1978). *Les éléments*, trad. du grec par George J. Kayas, tome I, Paris, Éditions du Centre National de la Recherche Scientifique, xxxii+258 p.

Fantechi, Barbara et al. (2005). *Fundamental Algebraic Geometry : Grothendieck's FGA explained*, Princeton, American Mathematical Society, coll. Mathematical Surveys and Monographs, n° 123, 339 p.

Ferreirós, José (1999). *Labyrinth of Thought : A History of Set Theory and its Role in Modern Mathematics*, Basel, Birkhäuser Verlag, coll. Science Networks Historical Studies, n° 23, xxii+440 p.

— (2006). « Riemann's Habilitationsvortrag at the Crossroads of Mathematics, Physics, and Philosophy », *in The Architecture of Modern Mathematics : Essays in History and Philosophy*, sous la dir. de J. Ferreirós et J. J. Gray, Oxford, Oxford University Press, p. 67–96.

Fréchet, Maurice (1904). « Généralisation d'un théorème de Weierstrass », *Comptes rendus des séances hebdomadaires de l'Académie des sciences*, vol. 139, p. 848–850.

— (1905*a*). « Sur les fonctions limites et les opérations fonctionnelles », *Comptes rendus des séances hebdomadaires de l'Académie des sciences*, vol. 140, p. 27–29.

— (1905*b*). « Sur les fonctions d'une infinité de variables », *Comptes rendus des séances hebdomadaires de l'Académie des sciences*, vol. 140, p. 567–568.

— (1905*c*). « La notion d'écart dans le calcul fonctionnel », *Comptes rendus des séances hebdomadaires de l'Académie des sciences*, vol. 140, p. 772–774.

— (1905*d*). « Sur l'écart entre deux courbes et sur les courbes limites », *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 30, p. 435–449.

— (1905*e*). « Les ensembles de courbes continues », *Comptes rendus des séances hebdomadaires de l'Académie des sciences*, vol. 141, p. 873–875.

— (1906). « Sur quelques points du calcul fonctionel », *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, vol. 22, p. 1–74.

Freitag, Eberhard et Reinhardt Kiehl (1988). *Etale Cohomologie and the Weil Conjecture*, Berlin, Springer-Verlag, coll. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, n° 13, 317 p.

Garner, Richard (2009). « Ionads : A Generalised Notion of Topological Space », URL : `http://arxiv.org/abs/0912.1415` (consulté le 15 déc. 2009).

Giraud, Jean (1963). « Analysis situs », *in Séminaire Bourbaki, 15e année, 1962/63, fascicule 3*, Paris, Secrétariat mathématique, n° 256, p. 256–01–256–11.

Gray, Jeremy (2006). « Modern Mathematics as a Cultural Phenomenon », *in The Architecture of Modern Mathematics : Essays in History and Philosophy*, sous la dir. de J. Ferreirós et J. J. Gray, Oxford, Oxford University Press, p. 371–396.

— (2008). *Plato's Ghost : The Modernist Transformation of Mathematics*, Princeton, Princeton University Press, 526 p.

Gray, John W. (1979). « Fragments of the History of Sheaf Theory », *in Applications of Sheaves : Proceedings of the Research Symposium on Application of Sheaf Theory to Logic, Algebra and Analysis, Durham, July 9–21, 1977*, sous la dir. de M. P. Fourman, C. J. Mulvey et D. S. Scott, Berlin, Springer-Verlag, coll. Lecture Notes in Mathematics, n° 753, p. 1–79.

Grothendieck, Alexandre (1957). « Sur quelques points d'algèbre homologique », *The Tohoku Mathematical Journal*, 2e série, vol. 9, p. 119–221.

— (1959). « Géométrie formelle et géométrie algébrique », *in Séminaire Bourbaki, 11e année, 1958/59, fascicule 3*, Paris, Secrétariat mathématique, n° 182, p. 182–01–182–28.

— (1962). « Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique I. Généralités. Descente par morphismes fidèlement plats », *in Fondements de la géométrie algébrique*, Paris, Secrétariat mathématique, p. 190–01–190–29.

— (1960*a*). « The Cohomology Theory of Abstract Algebraic Varieties », *in Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 14–21 August 1958, Edimburgh*, Cambridge, Cambridge University Press, p. 103–118.

— (1960*b*). *Éléments de géométrie algébrique : I. Le langage des schémas*, rédigés avec la collaboration de Jean Dieudonné, Bures-sur-Yvette, Institut des Hautes Études Scientifiques, coll. Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques, n° 4, 228 p.

— (1964). « Formule de Lefschetz et rationalité des fonctions $L$ », *in Séminaire Bourbaki, 17e année, 1964/1965*, Paris, Secrétariat mathématique, n° 279, p. 279–1–279–15.

— (1969). « Standard conjectures on algebraic cycles », *in Algebraic Geometry : Papers Presented at the Bombay Colloquium, 1968*, London, Oxford University Press, p. 193–199.

— dir. (2003). *Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 1960–1961 : Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1)*, augmenté de deux exposés de Mme M. Raynaud, édition recomposée et annotée du volume 224 des Lecture Notes in Mathematics publié en 1971 par Springer-Verlag, Paris, Société Mathématique de France, coll. Documents Mathématiques, n° 3, xviii+327 p.

— (1985). *Récoltes et semailles : Réflexions et témoignage sur un passé de mathématicien*, Montpellier, Université des Sciences et Technologies du Languedoc, 127+1252 p.

Hadamard, Jacques (1898). « Sur certaines applications possibles de la théorie des ensembles », *in Verhandlungen des Ersten Internationalen Mathematik-Kongresses*, Leipzig, B. G. Teubner, p. 201–202.

Hausdorff, Felix (1949). *Grundzüge der Mengenlehre*, New York, Chelsea Publishing Company, viii+476 p.

Heegaard, P. (1916). « Sur l'« Analysis Situs » », *Bulletin de la Société Mathématique de France*, vol. 44, p. 161–242.

Hochschild, G. (1957). « Review of *Homological Algebra* », *Mathematical Reviews*, vol. 17, p. 1040e.

Houzel, Christian (1994). « La préhistoire des conjectures de Weil », *in Development of Mathematics 1900–1950*, sous la dir. de Jean-Paul Pier, Basel, Birkhäuser, p. 385–414.

Houzel, Christian (1998). « Histoire de la théorie des faisceaux », *in Matériaux pour l'histoire des mathématiques au XXe siècle (Nice, 1996)*, Paris, Société Mathématique de France, coll. Séminaire & Congrès, n° 3, p. 101–119.

Illusie, Luc, dir. (1977). *Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 1965–66 : Cohomologie l-adique et fonctions L (SGA 5)*, dirigé par A. Grothendieck avec la collaboration I. Bucur, C. Houzel, L. Illusie, J.-P. Jouanolou et J.-P. Serre, Berlin, Springer-Verlag, coll. Lecture Notes in Mathematics, n° 589, xii+484 p.

— (2008). *Grothendieck et la cohomologie étale*, URL : `http://www.math.u-psud.fr/~illusie/Grothendieck_etale.pdf` (consulté le 20 juil. 2009).

James, I. M. (1999). « From Combinatorial Topology to Algebraic Topology », *in History of Topology*, sous la dir. de I. M. James, Amsterdam, North-Holland, p. 561–573.

— (2001). « Combinatorial Topology versus Point-set Topology », *in Handbook of the History of General Topology*, sous la dir. de C. E. Aull et R. Lowen, tome 3, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, coll. History of Topology, p. 809–834.

Johnstone, Peter T. (1983). « The Point of Pointless Topology », *Bulletin of the American Mathematical Society*, nouvelle série, vol. 8, n° 1, p. 41–53.

— (2001). « Elements of the History of Locale Theory », *in Handbook of the History of General Topology*, sous la dir. de C. E. Aull et R. Lowen, tome 3, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, p. 835–851.

Jordan, Camille (1866). « Sur la déformation des surfaces », *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 2e série, vol. 11, p. 105–109.

Kashiwara, Masaki et Pierre Schapira (1990). *Sheaves on Manifolds*, with a Short History « Les débuts de la théorie des faisceaux » by Christian Houzel, Berlin, Springer-Verlag, coll. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, n° 292, x+512 p.

Katz, Nicholas M. (1976). « An Overview of Deligne's Proof of the Riemann Hypothesis for Varieties over Finite Fields », *in Mathematical Developments Arising from Hilbert Problems*, sous la dir. de Felix E. Browder, Providence, American Mathematical Society, coll. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, n° XXVIII, p. 275–305.

— (1994). « Review of $l$-adic Cohomology », *in Motives*, sous la dir. de Uwe Jannsen, Steven Kleiman et Jean-Pierre Serre, tome 1, Providence, American Mathematical Society, coll. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, n° 55, p. 21–30.

Katz, Victor J. (1999). « Differential Forms », *in History of Topology*, sous la dir. de I. M. James, Amsterdam, North-Holland, p. 111–122.

Kleiman, Steven L. (1968). « Algebraic Cycles and the Weil conjectures », *in Dix Exposés sur la cohomologie*, Amsterdam/Paris, North-Holland Publishing Company/Masson & cie, éditeur, coll. Advanced Studies in Pure Mathematics, n° 3, p. 359–386.

— (1994). « The Standard Conjectures », *in Motives*, sous la dir. de Uwe Jannsen, Steven Kleiman et Jean-Pierre Serre, tome 1, Providence, American Mathematical Society, coll. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, n° 55, p. 3–20.

Klein, Felix (1893). « A Comparative Review of Recent Researches in Geometry », trad. de l'anglais par Dr. M. W. Haskell, *Bulletin of the New York Mathematical Society*, vol. 2, p. 215–249.

Koetsier, Teun et Jan van Mill (1999). « By Their Fruits ye Shall Know Them : Some Remarks on the Interaction of General Topology with Other Areas of Mathematics », *in History of Topology*, sous la dir. de I. M. James, Amsterdam, North-Holland, p. 199–239.

Koszul, Jean-Louis (1947). « Sur les opérateurs de dérivation dans un anneau », *Comptes rendus des séances hebdomadaires de l'Académie des sciences*, vol. 225, p. 217–219.

Krömer, Ralf (2007). *Tool and Object : A History and Philosophy of Category Theory*, Basel, Birkhäuser, coll. Science Networks Historical Studies, n° 32, xxvi+367 p.

Kuratowski, Kazimierz (1922). « Sur l'opération $\overline{A}$ de l'Analysis Situs », *Fundamenta Mathematica*, vol. 3, p. 182–199.

Lang, Serge (2005). « On the AMS *Notices* Publication of Krieger's Translation of Weil's 1940 Letter », *Notices of the American Mathematical Society*, vol. 52, n° 6, p. 612–622.

Lefschetz, Solomon (1942). *Algebraic Topology*, New York, American Mathematical Society, coll. American Mathematical Society Colloquium Publications, n° XXVII, 393 p.

— (1956). *Topology*, 2e édition, New York, Chelsea Publishing Company, 413 p.

Leray, Jean (1945*a*). « Sur la forme des espaces topologiques et sur les points fixes des représentations », *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 9e série, vol. 24, p. 95–167.

— (1945*b*). « Sur la position d'un ensemble fermé de points d'un espace topologique », *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 9e série, vol. 24, p. 169–199.

— (1945*c*). « Sur les équations et les transformations », *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 9e série, vol. 24, p. 201–248.

— (1946*a*). « L'anneau d'homologie d'une représentation », *Comptes rendus des séances hebdomadaires de l'Académie des sciences*, vol. 222, p. 1366–1368.

— (1946*b*). « Structure de l'anneau d'homologie d'une représentation », *Comptes rendus des séances hebdomadaires de l'Académie des sciences*, vol. 222, p. 1419–1422.

— (1946*c*). « Sur l'anneau d'homologie de l'espace homogène, quotient d'un groupe clos par un sous-groupe abélien, connexe, maximum », *Comptes rendus des séances hebdomadaires de l'Académie des sciences*, vol. 223, p. 412–415.

— (1949). « L'homologie filtrée », *in Topologie algébrique : Paris 26 juin – 2 juillet 1947*, Paris, Gauthier-Villars, coll. Colloques internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique, n° XII, p. 61–82.

Leray, Jean (1950). « L'anneau spectral et l'anneau filtré d'homologie d'un espace localement compact et d'une application continue », *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 9e série, vol. 29, p. 1–139.

Lurie, Jacob (2009). *Higher Topos Theory*, Princeton et Oxford, Princeton University Press, coll. Annals of Mathematics Studies, no 170, xv+925 p.

Mac Lane, Saunders (1956). « Review of *Homological Algebra* », *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 62, no 6, p. 615–624.

— (1977). « Origins of the Cohomology of Groups », *L'Enseignement mathématique*, vol. XXIV, no 1–2, p. 1–29.

— (1986). « Topology Becomes Algebraic with Vietoris and Noether », *Journal of Pure and Applied Algebra*, vol. 39, no 3, p. 305–307.

— (1998). *Categories for the Working Mathematician*, 2e édition, New York, Springer-Verlag, coll. Graduate Texts in Mathematics, no 5, xii+314 p.

Mac Lane, Saunders et Ieke Moerdijk (1992). *Sheaves in Geometry and Logic : A First Introduction to Topos Theory*, New York, Springer, coll. Universitext, xii+629 p.

Manheim, Jerome H. (1964). *The Genesis of Point Set Topology*, Oxford, Pergamon Press, coll. The Commonwealth and International Library of Science, Technology, Engineering and Library Studies, Mathematical Division, no 16, xiii+166 p.

Marquis, Jean-Pierre (2006). « A Path to the Epistemology of Mathematics : Homotopy Theory », *in The Architecture of Modern Mathematics : Essays in History and Philosophy*, sous la dir. de J. Ferreirós et J. J. Gray, Oxford, Oxford University Press, p. 239–260.

— (2009). *From a Geometrical Point of View : A Study of the History and Philosophy of Category Theory*, Springer, coll. Logic, Epistemology, and the Unity of Science, no 14, x+309 p.

Mazur, Barry (2004). « What Is … a Motive ? », *Notices of the American Mathematical Society*, vol. 51, no 10, p. 1214–1216.

McLarty, Colin (2006). « Emmy Noether's 'Set Theoretic' Topology : From Dedekind to the Rise of Functors », *in The Architecture of Modern Mathematics : Essays in History and Philosophy*, sous la dir. de J. Ferreirós et J. J. Gray, Oxford, Oxford University Press, p. 187–208.

— (2007). « The Rising Sea : Grothendieck on Simplicity and Generality », *in Episodes in the History of Modern Algebra*, sous la dir. de Jeremy Gray et Karen Parshall, American Mathematical Society – London Mathematical Society, coll. History of Mathematics, no 32, p. 301–326.

— (à paraître). « What Does It Take to Prove Fermat's Last Theorem ? Grothendieck and the Logic of Number Theory », *Bulletin of Symbolic Logic*.

Moore, Gregory H. (2007). « The Evolution of the Concept of Homeomorphism », *Historia Mathematica*, vol. 34, p. 333–343.

Nagel, Ernest (1979). « The Formation of Modern Conceptions of Formal Logic in the Development of Geometry », *in Teleology Revisited and Other Essays in* *the Philosophy and History of Science*, New York, Columbia University Press, coll. The John Dewey Essays in Philosophy, n° 3, p. 195–259.

Noether, Emmy (1926). « Ableitung der Elementarteilertheorie aus der Gruppentheorie », *in Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigun*, tome 34.2, Leipzig, Teubner, p. 104.

Osserman, Brian (2008). « The Weil Conjectures », *in The Princeton Companion to Mathematics*, sous la dir. de Timothy Gowers, June Barrow-Green et Imre Leader, Princeton, Princeton University Press, p. 729–732.

Poincaré, Henri (1953*a*). « Sur l'Analysis Situs », *in Œuvres de Henri Poincaré*, tome VI, Paris, Gauthier-Villars, Éditeur, p. 189–192.

— (1953*b*). « Analysis Situs », *in Œuvres de Henri Poincaré*, tome VI, Paris, Gauthier-Villars, Éditeur, p. 193–288.

— (1953*c*). « Complément à l'Analysis Situs », *in Œuvres de Henri Poincaré*, tome VI, Paris, Gauthier-Villars, Éditeur, p. 290–337.

— (1953*d*). « Second complément à l'Analysis Situs », *in Œuvres de Henri Poincaré*, tome VI, Paris, Gauthier-Villars, Éditeur, p. 338–370.

— (1915). « Analyse des travaux scientifiques de Henri Poincaré faite par lui-même », *Acta Mathematica*, vol. 38, p. 3–135.

Pont, Jean-Claude (1974). *La topologie algébrique des origines à Poincaré*, Paris, Presses Universitaires de France, coll. Bibliothèque de Philosophie Contemporaine, x+197 p.

Raynaud, Michel (1999). « André Weil and the Foundations of Algebraic Geometry », *Notices of the American Mathematical Society*, vol. 46, n° 8, p. 864–867.

Reid, Miles (1988). *Undergraduate Algebraic Topology*, Cambridge, Cambridge University Press, coll. London Mathematical Society Student Texts, n° 12, 140 p.

Riesz, Frigyes (1960*a*). « Die Genesis des Raumbegriffs », *in Œuvres complètes*, sous la dir. de Ákos Császár, tome 1, Paris, Gauthier-Villars, p. 110–154.

— (1960*b*). « Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre », *in Œuvres complètes*, sous la dir. de Ákos Császár, tome 1, Paris, Gauthier-Villars, p. 155–161.

Sarkaria, K. S. (1999). « The Topological Work of Poincaré », *in History of Topology*, sous la dir. de I. M. James, Amsterdam, North-Holland, p. 123–167.

Scharlau, Winfried (2008). « Who Is Alexander Grothendieck ? », *Notices of the American Mathematical Society*, vol. 55, n° 8, p. 930–941.

Schneps, Leila (2007). *A Review of The Grothendieck–Serre Correspondence*, URL : `http://www.math.jussieu.fr/~leila/corr.pdf` (consulté le 1er sept. 2009).

Scholz, Erhard (1999). « The Concept of Manifold, 1850–1950 », *in History of Topology*, sous la dir. de I. M. James, Amsterdam, North-Holland, p. 25–64.

Serre, Jean-Pierre (1953). « Quelques problèmes globaux relatifs aux variétés de Stein », *in Colloque sur les fonctions de plusieurs variables*, tenu à Bruxelles du 11 au 14 mars 1953, Centre Belge de Recherches Mathématiques, Louvain, Librairie universitaire, p. 57–68.

Serre, Jean-Pierre (1955). « Faisceaux algébriques cohérents », *Annals of Mathematics*, 2e série, vol. 61, no 2, p. 197–278.

— (1956). « Géométrie algébrique et géométrie analytique », *Annales de l'institut Fourier*, vol. 6, p. 1–42.

— (1958). « Sur la topologie des variétés algébriques en caractéristique $p$ », *in Symposium internacional de topología algebraica (México, 1956)*, Mexico, Universidad Nacional Autónoma de México, p. 24–53.

— (1960). « Analogues kählériens de certaines conjectures de Weil », *Annals of Mathematics*, 2e série, vol. 71, no 2, p. 392–394.

Shore, S. D. (1998). « From Developments to Developable Spaces : The Evolution of a Topological Idea », *in Handbook of the History of General Topology*, tome 2, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, coll. History of Topology, p. 467–540.

Taylor, Angus E. (1982). « A study of Maurice Fréchet. I. His early work on point set theory and the theory of functionals », *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 27, no 3, p. 233–295.

Tietze, Heinrich (1908). « Über die topologischen Invarienten mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten », *Monatshefte für Mathematik und Physik*, vol. 19, p. 1–118.

— (1923). « Beiträge zur allegemeinen Topologie I : Axiome für verschiedene Fassungen des Umgebungsbegriffs », *Mathematische Annalen*, vol. 88, p. 290–312.

Vanden Eynde, Ria (1999). « Development of the Concept of Homotopy », *in History of Topology*, sous la dir. de I. M. James, Amsterdam, North-Holland, p. 65–102.

Vietoris, Leopold (1921). « Stetige Mengen », *Monatshefte für Mathematik und Physik*, vol. 31, no 1, p. 173–204.

— (1927). « Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und eine Klasse on zusammenhangstreuen Abbildungen », *Mathematische Annalen*, vol. 97, p. 454–472.

Voevodsky, Vladimir (2002). *An Intuitive Introduction to Motivic Homotopy Theory*, Clay Mathematics Institute Annual Meeting, Cambridge, MA, URL : `http://claymath.org/video` (consulté le 29 mar. 2010).

Weibel, Charles A. (1999). « History of Homological Algebra », *in History of Topology*, sous la dir. de I. M. James, Amsterdam, North-Holland, p. 797–836.

Weil, André (1940). « Sur les fonctions algébriques à corps de constantes fini », *Comptes rendus des séances hebdomadaires de l'Académie des sciences*, vol. 210, p. 592–594.

— (1941). « On the Riemann Hypothesis in Function-field », *Proceedings of the National Academy of Science of the United States of America*, vol. 27, p. 345–47.

— (1946). *Foundations of Algebraic Geometry*, New York City, American Mathematical Society, coll. American Mathematical Society Colloquium Publications, no XXIX, 288 p.

— (1948). *Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent*, Paris, Hermann, coll. Actualités scientifiques et industrielles, no 1041, iv+85 p.

Weil, André (1949). « Number of Solutions of Equations in Finite Fields », *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. VI, nº 55, p. 497–508.

— (1950). « Number Theory and Algebraic Geometry », *in Proceedings of the International Mathematics Congress (Cambridge, 1950)*, tome II, Princeton, American Mathematical Society, p. 90–100.

— (1954). « Footnote to A Recent Paper », *American Journal of Mathematics*, vol. 76, p. 347–350.

— (1956). « Abstract versus Classical Algebraic Geometry », *in Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 1954, Amsterdam*, tome III, Groningen, Erven P. Noordhoff N.V., p. 550–558.

— (1974). « Two Lectures on Number Theory, Past and Present », *L'Enseignement Mathématique. Revue Internationale*, 2ᵉ série, vol. 20, p. 87–110.

Wilder, R. L. (1978). « Evolution of the Topological Concept of "Connected" », *The American Mathematical Monthly*, vol. 85, nº 9, p. 720–726.

— (1980). « Correction and Addendum to "Evolution of the Topological Concept of 'Connected'" », *The American Mathematical Monthly*, vol. 87, nº 1, p. 31–32.