

Université de Montréal

**Superintégrabilité avec séparation de variables en
coordonnées polaires et intégrales du mouvement
d'ordre supérieur à deux.**

par

Frédéric Tremblay

Département de mathématiques et de statistique

Faculté des arts et des sciences

Thèse présentée à la Faculté des études supérieures

en vue de l'obtention du grade de

Philosophiæ Doctor (Ph.D.)
en Mathématiques

octobre 2010

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Cette thèse intitulée

**Superintégrabilité avec séparation de variables en
coordonnées polaires et intégrales du mouvement
d'ordre supérieur à deux.**

présentée par

Frédéric Tremblay

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes :

Véronique Hussin

(président-rapporteur)

Pavel Winternitz

(directeur de recherche)

Jiri Patera

(membres du jury)

Willard Miller

(examineur externe)

Véronique Hussin

(représentant du doyen de la FES)

Thèse acceptée le:

Lundi 18 octobre 2010

SOMMAIRE

Dans cette thèse, nous proposons de nouveaux résultats de systèmes super-intégrables séparables en coordonnées polaires. Dans un premier temps, nous présentons une classification complète de tous les systèmes superintégrables séparables en coordonnées polaires qui admettent une intégrale du mouvement d'ordre trois. Des potentiels s'exprimant en terme de la sixième transcendante de Painlevé et de la fonction elliptique de Weierstrass sont présentés. Ensuite, nous introduisons une famille infinie de systèmes classiques et quantiques intégrables et exactement résolubles en coordonnées polaires. Cette famille s'exprime en terme d'un paramètre k . Le spectre d'énergie et les fonctions d'onde des systèmes quantiques sont présentés. Une conjecture postulant la superintégrabilité de ces systèmes est formulée et est vérifiée pour $k = 1, 2, 3, 4$. L'ordre des intégrales du mouvement proposées est $2k$ où $k \in \mathbb{N}$. La structure algébrique de la famille de systèmes quantiques est formulée en terme d'une algèbre cachée où le nombre de générateurs dépend du paramètre k . Une généralisation quasi-exactement résoluble et intégrable de la famille de potentiels est proposée. Finalement, les trajectoires classiques de la famille de systèmes sont calculées pour tous les cas rationnels $k \in \mathbb{Q}$. Celles-ci s'expriment en terme des polynômes de Chebyshev. Les courbes associées aux trajectoires sont présentées pour les premiers cas $k=1, 2, 3, 4, 1/2, 1/3$ et $3/2$ et les trajectoires bornées sont fermées et périodiques dans l'espace des phases. Ainsi, les résultats obtenus viennent renforcer la possible véracité de la conjecture.

mots clés : intégrabilité, superintégrabilité, exactement résoluble, propriété de Painlevé, transcendentes de Painlevé, séparation de variables.

SUMMARY

In this thesis, we propose new superintegrable systems separable in polar coordinates. After the introduction, in chapter 2, we present a complete classification of all separable systems in polar coordinates which admit a third order integral in addition to the second order one responsible for the separation of variables. New potentials expressed in terms of the sixth Painlevé transcendent and of the Weierstrass elliptic function are obtained. In chapter 3 we introduce an infinite family of integrable and exactly solvable classical and quantum systems separable in polar coordinates. This family is described in term of a parameter k . The energy spectrum and the wave functions of the quantum systems are obtained. A conjecture postulating the superintegrability of these systems is formulated and is verified for the first cases $k = 1, 2, 3, 4$. The order of the integrals is $2k$ where $k \in \mathbb{N}$. The algebraic structure of the family of quantum systems is formulated in term of a hidden algebra where the number of generators depends on the parameter k . A quasi-exactly solvable and integrable generalization of the family of potentials is proposed. Finally in chapter 4, the classical trajectories of the family of systems are calculated for all the rational cases $k \in \mathbb{Q}$. Those are expressed in term of Chebyshev polynomials. We plot the curves associated with the trajectories for $k = 1, 2, 3, 4, 1/2, 1/3$ and $3/2$. The bounded curves are closed and periodic in the two dimensional phase space. Those results obtained reinforce the possible veracity of the conjecture.

keywords : integrability, superintegrability, exactly solvable, Painlevé property, Painlevé transcendents, separation of variables.

TABLE DES MATIÈRES

Sommaire	v
Summary	vii
Liste des figures	xiii
Dédicace	xv
Remerciements	xvii
Introduction	3
Chapitre 1. Préléminaires : Définitions et Théorie	7
1.0.1. Mécanique Classique	7
1.0.1.1. Équations de base	7
1.0.1.2. Systèmes intégrables et superintégrables classiques	8
1.0.2. Mécanique Quantique	12
1.0.2.1. Équations de base	12
1.0.2.2. Systèmes intégrables et superintégrables quantiques	13
1.1. Étude systématique de superintégrabilité dans un espace euclidien à deux dimensions	14
1.2. Intégrabilité et superintégrabilité quadratique	15
1.3. Superintégrabilité cubique	19
1.3.1. Superintégrabilité cubique avec intégrale d'ordre un	21
1.3.2. Superintégrabilité cubique avec séparation de variables en coordonnées cartésiennes	22

Chapitre 2. Third order superintegrable systems separating in polar coordinates	27
2.1. Introduction	27
2.2. Determining equations of a third order integral of motion in polar coordinates	30
2.3. Radial term in the potential	33
2.4. Angular term $\frac{S(\theta)}{r^2}$ in the potential	39
2.4.1. Radial equations satisfied for all $R(r)$	39
2.4.2. Potential of the form $V(r, \theta) = \frac{\alpha}{r} + \frac{S(\theta)}{r^2}$ with $\alpha \neq 0$	42
2.4.3. Potential of the form $V(r, \theta) = \alpha r^2 + \frac{S(\theta)}{r^2}$ with $\alpha \neq 0$	44
2.4.4. Potential of the form $V(r, \theta) = \frac{S(\theta)}{r^2}$	45
2.5. Summary and Conclusion	51
Acknowledgments	52
Chapitre 3. An infinite family of solvable and integrable quantum systems on a plane	53
3.1. Introduction	53
3.2. Exact-solvability	55
3.3. Complete Integrability	59
3.4. Superintegrability	59
3.5. A Quasi-exactly solvable extension	64
3.6. Conclusions	65
Acknowledgments	66

Chapitre 4. Periodic orbits for an infinite family of classical superintegrable systems	67
4.1. Introduction	67
4.2. Integration of the Hamilton-Jacobi equation	69
4.2.1. The basic equations	69
4.2.2. Integration of the radial part.....	70
4.2.3. Integration of the angular part.....	71
4.3. The bounded trajectories	72
4.3.1. Equation for trajectories for integer values of k	72
4.3.2. Singular points on the trajectories for k integer	74
4.3.3. Equation for trajectories for rational values of $k = m/n$	76
4.3.4. Comments on the range of the parameters.....	77
4.4. The special case $k = 1$	77
4.5. Examples of trajectories	80
4.5.1. $k=1$	81
4.5.2. $k=2$	82
4.5.3. $k = 3$ and 4	82
4.5.4. $k = 1/2$ and $1/3$	83
4.5.5. $k = \frac{3}{2}$	83
4.6. Conclusion.....	84
Acknowledgments.....	84
Chapitre 5. Résultats récents et perspectives futures	85
5.1. Preuve de la conjecture.....	85
5.2. Nouvelle famille de systèmes superintégrables	86
5.3. Perspectives futures.....	87

5.3.1. Classification des systèmes superintégrables et séparables dans le plan avec une intégrale d'ordre trois	87
5.3.2. Nouveaux systèmes superintégrables et séparables avec intégrales d'ordre trois en 3 dimensions	88
5.3.3. Obtention de nouvelles familles infinies de systèmes superintégrables dans le plan	89
5.3.3.1. Familles rationnelles de potentiels	89
5.3.3.2. Familles non-rationnelles de potentiels	90
5.3.4. Méthode de factorisation en coordonnées polaires	91
Conclusion	93
Bibliographie	95
Annexe A. Intégrale du mouvement lorsque $k = 3$	A-i
Annexe B. Intégrale du mouvement lorsque $k = 4$	B-i

LISTE DES FIGURES

4.1	Region of bounded trajectories in (E_1, A) plane.....	80
4.2	$C = \pi$	81
4.3	$C = \frac{95\pi}{100}$	81
4.4	$C = \frac{\pi}{2}$	81
4.5	$C = \frac{\pi}{20}$	81
4.6	$C = 0$	82
4.7	Trajectories in the four sectors of the (x, y) plane for $C = \frac{\pi}{2}$	82
4.8	Trajectories for the first root.....	82
4.9	Trajectories for the second root.....	82
4.10	Trajectories for the real root for $k = 3$	83
4.11	Trajectories for the first real root in the first quadrant for $k = 4$	83
4.12	Trajectories for $k = \frac{1}{2}$	83
4.13	Trajectories for $k = \frac{1}{3}$	83
4.14	Trajectories for $k = \frac{3}{2}$	84

DÉDICACE

À Audrey et Émile

"La curiosité est inhérente à l'esprit humain. Malheureusement, les religions ne suffisent plus aujourd'hui à fournir les réponses satisfaisantes et cela se traduit par un besoin de certitudes et de vérités. Voilà ce qui rend les mathématiques si attirantes, ce qui fait que des chercheurs y consacrent leur vie. C'est le désir de vérités et de réponses sur la beauté et l'élégance des mathématiques qui anime les mathématiciens."

-Landon Clay, donateur des problèmes du millénaire

"Trouver le trou, assommer la taupe, gagner le gros toutou !"

-Daniel Boucher

REMERCIEMENTS

Je tiens d'abord à remercier mon directeur de recherche Pavel Winternitz. L'influence que vous avez eu sur ma vie ces six dernières années ne se résume pas uniquement au soutien financier, à l'encadrement académique ou aux projets de recherche que nous avons complétés. D'avoir eu la chance de vous côtoyer régulièrement lors de mes études graduées est un privilège et une chance inestimables. Je ne crois pas qu'il me sera donné dans l'avenir de rencontrer et d'être aussi proche d'une personne de votre calibre.

Ensuite je tiens à remercier le comité d'évaluation de cette thèse qui a accepté de faire la révision du travail que j'ai accompli lors de mes études doctorales.

Je me dois d'être reconnaissant envers la faculté des études supérieures pour l'attribution d'une bourse de fin d'études lors de la dernière année. De plus, je tiens à saluer tous les membres du centre de recherches mathématiques et du département du mathématiques et statistique de l'université de Montréal, en particulier Muriel Pasqualetti, Louise Letendre et Diane Coulombe. Je tiens aussi à remercier tous les membres du département de mathématiques du Collège Bois-de-Boulogne.

J'ai eu la chance de collaborer avec un chercheur d'une rigueur exceptionnelle : Alexander V. Turbiner. L'expérience que je retire de notre collaboration est d'une richesse considérable.

J'adresse à mes parents, mes beaux parents, ma belle famille, mes amis, Benoit Palmieri, Maxime Lauzon, Benoit Huard et Steven Sanche la plus sincère reconnaissance. Malgré tout, votre présence et votre appui m'ont permis de maintenir un équilibre minimal et existentiel. Je vous aime.

Enfin, mes derniers remerciements vont à Audrey Plante. Mon état perpétuel se repose selon toi. Il n'y a plus de déliée de la source, mais une source de vie qui va au delà du plus parfait bonheur. Il y a maintenant Émile, toi et moi, la somme du monde. Ta présence, un amour infini.

INTRODUCTION

Avec le développement de la physique moderne au début du 20^{ème} siècle, plusieurs études et travaux ont mis en évidence la richesse des systèmes dynamiques qui possèdent des symétries précises. Le développement et l'avancement du formalisme mathématique de la physique moderne nous permet d'étendre et d'éclaircir les propriétés intrinsèques de systèmes fondamentalement importants à l'élaboration de tous les détails théoriques des mécaniques classique et quantique et de la jonction de ces deux théories. Or, plusieurs aspects théoriques reposent essentiellement sur la caractérisation des symétries qui interviennent dans la définition de systèmes physiques.

Plus précisément, on a qu'à penser aux systèmes possédant un nombre de degrés de liberté finis associés à un potentiel harmonique ou un potentiel de Kepler-Coulomb. Ces systèmes sont présentés dans les contextes classique et quantique comme des systèmes physiques possédant des propriétés remarquables [1, 19, 42, 107]. En mécanique classique, les trajectoires bornées de ces systèmes sont fermées, périodiques et bien définies dans l'espace des phases. En mécanique quantique, le spectre d'énergie est dégénéré et exactement obtenu et les états propres (états liés) sont des fonctions de carré sommable qui s'expriment en terme de polynômes orthogonaux. Or, il advient que ces propriétés sont directement reliées à l'existence de quantités conservées qui proviennent de l'existence des symétries géométriques et dynamiques de ces systèmes [2, 3, 58].

Or, ce type de systèmes est présent dans plusieurs domaines de la physique. Depuis les années 60, plusieurs travaux ont mis de l'avant des résultats mettant

en évidence l'existence de nombreux systèmes possédant des propriétés semblables à celles de l'oscillateur harmonique et du potentiel de Coulomb. Ces résultats ont pavé la voie à l'élaboration de la théorie des systèmes intégrables et superintégrables pour des systèmes possédant un nombre fini de degrés de liberté.

Dans cette thèse, nous présentons des résultats récents obtenus dans le contexte de l'intégrabilité et de la superintégrabilité classique et quantique d'un système hamiltonien qui admet la séparation de variables en coordonnées polaires dans un espace euclidien à deux dimensions. Les résultats présentés sont sous forme de trois articles [127]-[130] ayant été publiés dans le journal *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, dont un dans la section *Fast Track Communication* [127].

Dans le premier chapitre de la thèse, nous détaillons le formalisme des systèmes intégrables et superintégrables dans les contextes classique et quantique tout en donnant de multiples références sur les résultats connus et utiles à l'élaboration des principaux résultats des chapitres suivants. Dans le chapitre 2, nous présentons une classification des systèmes superintégrables séparables en coordonnées polaires avec une constante du mouvement d'ordre trois donnant suite aux résultats obtenus en coordonnées cartésiennes [46, 48] et nous mettons en évidence l'existence de nouveaux potentiels superintégrables s'exprimant en terme de fonctions transcendentes telles la sixième transcendente de Painlevé et la fonction elliptique de Weierstrass. Dans les chapitres 3 et 4, nous proposons l'introduction d'une famille infinie de potentiels classiques et quantiques intégrables dépendant d'un paramètre réel k . La conjecture de superintégrabilité a été formulée bien que tous les résultats proposés n'ont fait que mettre très fortement en évidence une vérification possible de celle-ci. Nous présentons les intégrales du mouvement pour les cas $k = 1, 2, 3, 4$. Les intégrales pour les cas $k = 3, 4$ sont présentées dans les annexes A et B. L'ordre de l'intégrale supplémentaire est $2k$ où $k \in \mathbb{N}$. Les trajectoires classiques sont obtenues pour tous les cas rationnels dans le troisième article et sont présentées dans le chapitre 4. Celles-ci s'expriment en terme de polynômes de Chebyshev.

Le fait que dans l'espace des phases les trajectoires bornées sont périodiques pour tous les cas rationnels $k \in \mathbb{Q}$ vient améliorer l'énoncé de la conjecture proposée dans le deuxième article [127]. De cette façon, nous pouvons reformuler la conjecture pour $k \in \mathbb{Q}$. Les deux derniers articles ont motivé beaucoup de nouveaux résultats dont la preuve de superintégrabilité de la famille de systèmes. Ainsi dans la section 5, nous recensons les nouveaux résultats ayant été proposés depuis la publication des articles présentés dans cette thèse et proposons quelques perspectives futures de développement.

1

¹La numérotation des équations et des sections dans les chapitres correspondant aux articles a été adaptée aux conventions de présentation de cette thèse. Toutefois, le contenu des articles demeure inchangé et identique aux versions publiées.

Chapitre 1

PRÉLÉMINAIRES : DÉFINITIONS ET THÉORIE

L'étude des systèmes intégrables est depuis longtemps une branche très importante de la physique-mathématique. De ce point de vue, l'essence même de ces considérations repose justement dans la recherche de quantités conservées pour des systèmes dynamiques.

Afin de caractériser l'intégrabilité d'un système, nous considérons un Hamiltonien conservatif à n degrés de liberté dans un espace euclidien E_n à n dimensions de la forme :

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2}{2m} + V(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad (1.0.1)$$

où $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction scalaire raisonnablement bien définie, c'est à dire continue et dérivable continûment un certain nombre de fois dans un ouvert $D \subseteq E_n$. L'énergie du système étant représentée par (1.0.1) est conservée.

1.0.1. Mécanique Classique

1.0.1.1. Équations de base

Dans le contexte de la formulation hamiltonienne de la mécanique classique, les équations du mouvement associées à (1.0.1) sont les équations de Hamilton :

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i \quad (1.0.2)$$

où le point "·" représente la dérivée par rapport au temps.

Les solutions de ces équations sont représentées dans un espace des phases à $2n$ dimensions engendré par les coordonnées (q_1, q_2, \dots, q_n) et impulsions (p_1, p_2, \dots, p_n) généralisées.

La mécanique classique peut aussi être reformulée en terme de l'équation de Hamilton-Jacobi

$$H\left(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (1.0.3)$$

où $S = S(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t)$ est la fonction principale de Hamilton i.e. l'action classique associée au système en un temps et une position initiale fixés (soit l'intégrale indéfinie du Lagrangien du système par rapport au temps) [42]. La formulation de Hamilton-Jacobi est particulièrement utile lorsqu'on veut caractériser un système dynamique selon des quantités conservées. Ceci se justifie clairement par le fait que l'on cherche à reformuler le système selon un ensemble de quantités conservées obtenu d'une transformation des coordonnées $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ proposée par S . Dans ce cas, S est une fonction génératrice d'une transformation dite canonique qui transforme (1.0.1) en un Hamiltonien identiquement nul K

$$K = H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (1.0.4)$$

qui n'est rien d'autre que la justification de (1.0.3) [1, 42, 107].

1.0.1.2. Systèmes intégrables et superintégrables classiques

Une quantité physique X caractérisée par une fonction différentiable dans l'espace des phases $X = X(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t)$ est dite conservée, si elle demeure constante selon une variation du temps. Nous nommons ce type de quantité *intégrale ou constante du mouvement*. Formellement, on a

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dX}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial p_k}{\partial t} \frac{\partial X}{\partial p_k} + \frac{\partial q_k}{\partial t} \frac{\partial X}{\partial q_k} + \frac{\partial X}{\partial t} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial X}{\partial p_k} - \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial X}{\partial q_k} + \frac{\partial X}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.0.5)$$

Nous définissons le crochet de Poisson :

$$\{H, X\}_{CP} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial X}{\partial p_k} - \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial X}{\partial q_k}$$

Dans ce qui suit, nous considérons des fonctions qui ne dépendent pas explicitement du temps, ce qui implique que la conservation d'une intégrale du mouvement est complètement caractérisée par le crochet de Poisson

$$\frac{dX}{dt} = \{H, X\} = 0$$

Définition 1.0.1. *Un système hamiltonien à n degrés de liberté (1.0.1) est dit Liouville-intégrable s'il possède n constantes du mouvement $\{X_i(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)\}_{i=1}^n$ bien définies dans l'espace des phases, incluant le Hamiltonien :*

$$\frac{dX_i}{dt} = \{X_i, H\} = 0 \quad (1.0.6)$$

$$\{X_i, X_j\} = 0 \quad (1.0.7)$$

$$\text{rang} \frac{\partial(X_1, \dots, X_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)} = n \quad (1.0.8)$$

L'équation (1.0.7) nous indique que les constantes du mouvement sont en involution et (1.0.8) que l'ensemble $\{X_i(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)\}_{i=1}^n$ est fonctionnellement indépendant.

Les systèmes intégrables possèdent des propriétés intéressantes et rares. En fait, le caractère dynamique provenant de leur définition se détaille dans l'énoncé du théorème de Liouville [1, 107] :

Théorème (Liouville). *Soient X_1, \dots, X_n , n fonctions bien définies qui respectent (1.0.6) à (1.0.8) $\forall i, j = 1, \dots, n$ dans un espace des phases à $2n$ dimensions M . Alors :*

- (1) *L'ensemble des courbes de niveau $M_a = \{(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) \in M | X_i = c_i\}$ est une variété invariante sous le flot induit par le Hamiltonien $H = X_1$;*
- (2) *le flot induit par le Hamiltonien H détermine des trajectoires conditionnellement périodiques sur M_a ;*
- (3) *les équations (1.0.2) ou (1.0.3) peuvent être solutionnées par quadrature ;*

(4) si M_a est compacte et connexe, alors celle-ci est difféomorphe à un tore de dimension n .

Ce théorème nous affirme que tout système intégrable défini sur un espace des phases à $2n$ dimensions est intégrable par quadrature. En d'autres mots, les équations canoniques du mouvement associées à un système intégrable sont complètement réductibles à des équations algébriques qui relient les variables canoniques, (q_i, p_i) , de façon implicite ou explicite.

De ces équations, nous obtenons les trajectoires du système dans l'espace de configuration. Dans le cas des systèmes intégrables, ces trajectoires sont comprises sur un tore à n dimensions \mathbb{T}^n .

Or, il advient que dans l'étude des systèmes intégrables de dimension finie, que l'on rencontre des systèmes qui possèdent plus de constantes du mouvement que de degrés de liberté. Deux exemples fameux sont l'oscillateur harmonique $V(r) = \omega^2 r^2$ et le système associé à un potentiel dit de Kepler-Coulomb $V(r) = \frac{a}{r}$ pour $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$. Par exemple, dans un espace euclidien à deux dimensions, en plus de la troisième composante du moment angulaire $L_3 = xp_y - yp_x$, ces deux systèmes admettent comme constante du mouvement

$$X_{\text{harmonique}} = \frac{p_1^2}{2} - \frac{p_2^2}{2} - \omega^2 x^2 + \omega^2 y^2$$

$$X_{\text{Coulomb}} = L_3 p_1 - \frac{2ay}{r}$$

Ce type de système se caractérise selon la définition suivante :

Définition 1.0.2. *Un système superintégrable est un système hamiltonien (1.0.1) Liouville-intégrable qui possède plus de constantes de mouvement que de degrés de liberté. Plus spécifiquement, soient $\{X_i\}_{i=1}^n$ et $\{Y_j\}_{j=1}^k$ deux ensembles d'intégrales du mouvement. Alors, nous avons*

$$(1) \{H, X_i\} = \{H, Y_j\} = 0$$

$$(2) \{X_i(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)\}_{i=1}^n \text{ en involution ;}$$

$$(3) \{Y_j(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)\}_{j=1}^k \text{ qui ne sont pas nécessairement en involution de telle sorte que } 1 \leq k \leq n - 1 ;$$

(4) Les X_i et Y_j sont fonctionnellement indépendantes :

$$\text{rang} \frac{\partial(X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_k)}{\partial(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)} = n + k$$

Nous établissons qu'un système est dit *maximalement superintégrable* si $k = n - 1$ et *minimalement superintégrable* si $k = 1$. De cette façon, tous les systèmes superintégrables dans un espace euclidien à deux dimensions sont *maximalement superintégrables*.

Nous constatons que nous ne pouvons pas avoir plus de $2n - 1$ intégrales du mouvement fonctionnellement indépendantes bien définies dans un espace des phases à $2n$ dimensions. Par le théorème des fonctions implicites, il en résulterait que chacune des $2n$ coordonnées canoniques $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ seraient exprimables localement en termes des $2n - 1$ constantes du mouvement et du temps. En conséquence, l'espace des phases serait confiné à un ensemble de points fixes.

Comme nous l'avons déjà mis en évidence, les potentiels harmonique et de Coulomb sont des exemples de systèmes qui possèdent plus de constantes de mouvement que de degrés de liberté. Comme nous le constatons pour l'oscillateur harmonique et le système de Coulomb, ces systèmes sont *maximalement superintégrables* dans l'espace euclidien à deux dimensions $E(2, \mathbb{R})$. Or, il advient que ces systèmes sont aussi *maximalement superintégrables* en n dimensions. Il a été démontré ([4]) que ceux-ci sont les seuls systèmes invariants sous rotation pour lesquels toutes les trajectoires finies sont fermées dans l'espace de configuration.

Un troisième système superintégrable très connu est le système de Calogero-Moser-Sutherland [7]-[10],[88, 102]. Celui-ci est un système non-relativiste à une dimension qui décrit l'interaction de N particules identiques deux à deux selon une force répulsive

$$H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (p_n^2 + \omega^2 q_n^2) + g^2 \sum_{m,n=1, m \neq n}^N (q_n - q_m)^{-2} \quad (1.0.9)$$

La constante g^2 est une constante de couplage positive qui caractérise la force d'interaction entre deux corps et ω^2 est une constante non-négative qui caractérise la force d'interaction avec un potentiel harmonique. Ce système est maximalelement superintégréable [115, 144]. De plus, ce système est dit "isochrone" i.e. toutes les trajectoires associées à (1.0.9) sont périodiques et ont la même période en tout temps [12].

Plus généralement, nous avons que les systèmes superintégréables classiques ont des propriétés encore plus rares que celles des systèmes intégrables. Par exemple, les systèmes maximalelement superintégréables possèdent des trajectoires qui sont périodiques et complètement déterminées dans l'espace de configuration [104]. De plus, les concepts de superintégréabilité et d'isochronicité sont souvent reliés étant donné que les trajectoires obtenues sont périodiques [11, 12, 47]. La question se pose de savoir si tous les systèmes isochrones sont superintégréables.

Finalement, d'un point de vue algébrique, l'algèbre des intégrales du mouvement d'un système superintégréable possède d'intéressantes propriétés sous le crochet de Poisson. De fait, l'algèbre est non-abélienne et exhibe une structure d'algèbre de dimension finie ou infinie. La structure des algèbres de dimension infinie prend des formes particulières et il est parfois plus raisonnable de les considérer comme des algèbres polynomiales [25, 49, 86, 89].

1.0.2. Mécanique Quantique

1.0.2.1. Équations de base

La dynamique de tout système physique non-relativiste évoluant dans le temps dans un espace euclidien est décrite par l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(q_1, \dots, q_n, t) = H\psi(q_1, \dots, q_n, t) \quad (1.0.10)$$

où H prend la forme de (1.0.1) selon la définition de l'opérateur d'impulsion :

$$p_k = i\hbar \frac{\partial}{\partial q_k}$$

Lorsqu'on s'intéresse à des états stationnaires d'un système quantique, (1.0.10) se réduit à l'équation aux valeurs propres

$$H\psi(q_1, \dots, q_n) = E\psi(q_1, \dots, q_n) \quad (1.0.11)$$

où H correspond à (1.0.1) et se réécrit dans le formalisme quantique selon le Laplacien :

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

E est la valeur propre de H et caractérise le spectre d'énergie du système quantique.

En ce qui nous concerne, nous nous intéressons aux états liés stationnaires $\Psi(q_1, \dots, q_n)$ qui sont associés au spectre discret de l'énergie.

1.0.2.2. *Systèmes intégrables et superintégrables quantiques*

Nous sommes maintenant en mesure de définir les versions d'intégrabilité et de superintégrabilité pour des systèmes quantiques. En fait, celles-ci sont semblables à celles données aux définitions 1.0.1. et 1.0.2.

Dans le contexte de la mécanique quantique, le crochet de Poisson devient le commutateur

$$[A, B] = AB - BA$$

et les constantes du mouvement sont maintenant des opérateurs linéaires hermitiens qui commutent avec l'Hamiltonien. Cette affirmation se justifie par un résultat élémentaire d'algèbre linéaire qui stipule que *deux opérateurs linéaires hermitiens qui commutent possèdent le même ensemble de vecteurs ou de fonctions propres* [138]. En d'autres mots, deux opérateurs linéaires hermitiens qui commutent et qui se représentent matriciellement se diagonalisent simultanément.

En ce qui a trait à la notion d'indépendance entre les constantes du mouvement, en ce qui nous concerne, nous nous intéressons aux opérateurs qui sont dits algébriquement indépendants. En d'autres mots, les constantes du mouvement sont dites indépendantes si elles ne sont pas reliées algébriquement.

Le concept d'indépendance entre les opérateurs linéaires associés à des observables quantiques n'est toujours pas défini rigoureusement et formellement. Une définition précise nous permettrait d'établir une définition du concept d'intégrabilité quantique claire [18, 118, 143].

Tout comme les systèmes superintégrables classiques, les systèmes superintégrables quantiques possèdent des propriétés très intéressantes et remarquables. Il advient que tous les systèmes quantiques maximale-ment superintégrables connus sont associés à une équation de Schrödinger exactement résoluble. Une conjecture stipule que tout système superintégrable est exactement résoluble [126]. En d'autres mots, le spectre d'énergie de l'Hamiltonien est complètement déterminé algébriquement. De plus, les niveaux d'énergie proposent des dégénérescences dites accidentelles, c'est-à-dire qu'elles sont reliées à l'existence de symétries d'ordre dynamiques plutôt que géométriques [37, 87, 139]. Aussi, les algèbres d'opérateurs qui caractérisent les intégrales du mouvement possèdent des structures semblables à celles des algèbres classiques [25, 49, 86, 90, 95].

Des exemples fameux de systèmes superintégrables en mécanique quantique sont l'oscillateur harmonique, le système de Coulomb et le modèle de Calogero-Sutherland-Moser [43, 44, 85], [123]-[125].

1.1. ÉTUDE SYSTÉMATIQUE DE SUPERINTÉGRABILITÉ DANS UN ESPACE EUCLIDIEN À DEUX DIMENSIONS

Suite aux résultats obtenus concernant les potentiels harmonique et de Coulomb, les premiers travaux d'études systématiques de systèmes intégrables et superintégrables dans un espace euclidien à deux et trois dimensions ont été mis de l'avant [37, 87, 139]. Ces travaux proposent des classifications de systèmes superintégrables qui possèdent des constantes du mouvement particulières.

De fait, on a cherché à dresser l'inventaire des systèmes superintégrables associés à un hamiltonien de la forme (1.0.1) en deux dimensions qui possèdent des constantes du mouvement qui sont des polynômes dans les impulsions de

la forme :

$$X = \sum_{i+j=0}^n \{f(x, y)_{ij}, p_1^i p_2^j\} \quad (1.1.1)$$

Dans (1.1.1), $\{\cdot, \cdot\}$ est un anticommutateur. En mécanique quantique, celui-ci nous assure de l'hermiticité de la constante du mouvement. En mécanique classique celui-ci se réduit à $2f(x, y)p_1^i p_2^j$ et donc n'a pas vraiment d'influence sur la valeur de l'intégrale du mouvement.

Ces travaux ont été les instigateurs d'une vague importante de plusieurs articles et résultats qui jusqu'à maintenant nous ont permis d'identifier des exemples nouveaux de superintégrabilité en plus de nous permettre de caractériser un peu plus ces systèmes.

Dans ce qui suit, nous présentons les résultats connus en ce qui concerne la superintégrabilité dite quadratique et cubique dans un espace euclidien à deux dimensions. Respectivement, dans chacun des cas, les intégrales du mouvement sont des polynômes d'ordre deux et trois dans les impulsions.

1.2. INTÉGRABILITÉ ET SUPERINTÉGRABILITÉ QUADRATIQUE

Dans ce cas, on se positionne dans un espace euclidien à deux dimensions et on se restreint à $n = 2$ dans (1.0.1)

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + V(x, y) \quad (1.2.1)$$

où on a posé la masse $m = 1$ sans perte de généralités.

En nous basant sur [37, 87, 139], nous proposons les résultats en mécanique quantique uniquement, étant donné que les résultats en mécanique classique sont identiques.

D'abord, nous présentons le cas dans lequel (1.2.1) est intégrable i.e. qu'il possède une intégrale d'ordre deux en les impulsions. Ensuite, nous présentons les résultats dans lesquels (1.2.1) est maximalelement superintégrable i.e. la situation où (1.2.1) possède deux intégrales du mouvement d'ordre deux.

Considérons une intégrale du mouvement d'ordre deux sous sa forme la plus générale en posant $n = 2$ dans (1.1.1). Dans ce cas, les termes d'ordres pair

et impair commutent indépendamment les uns des autres avec (1.2.1) de telle sorte que nous considérons seulement les termes d'ordres pairs dans (1.1.1)

$$X = \sum_{i+j=2} \{f_{ij}(x, y), p_1^i p_2^j\} + g(x, y) \quad (1.2.2)$$

Sous commutation $[H, X] = 0$, on fixe les $f_{ij}(x, y)$ et on obtient finalement que les termes d'ordre deux de l'intégrale du mouvement sont dans l'algèbre enveloppante de l'algèbre du groupe euclidien de \mathbb{R}^2 , soit celui des rotations et translations dans le plan

$$x \rightarrow x \cos \theta - y \sin \theta + x_0 \quad (1.2.3)$$

$$y \rightarrow x \sin \theta + y \cos \theta + y_0 \quad (1.2.4)$$

de telle sorte que

$$X = aL_3^2 + b\{L_3, p_1\} + c\{L_3, p_2\} + d(p_1^2 - p_2^2) + 2ep_1p_2 + g(x, y) \quad (1.2.5)$$

De plus, de $[H, X] = 0$, on obtient des équations qui joignent $V(x, y)$ et $g(x, y)$. Or, de la compatibilité de ces équations, on obtient une équation qui caractérise complètement le potentiel :

$$\begin{aligned} &(-axy - bx + cy + e)(V_{xx} - V_{yy}) \\ &+ (a(x^2 - y^2) - 2by - 2cx - 2d)V_{xy} - 3(ay + b)V_x + 3(ax - c)V_y = 0 \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

Sous l'action de (1.2.3) et (1.2.4), on peut simplifier (1.2.5) selon 4 différentes formes standards possibles d'intégrales du deuxième ordre tout en solutionnant (1.2.6) selon les différentes possibilités. Autrement dit, sous l'action du groupe euclidien dans le plan, on distingue quatre orbites d'intégrales d'ordre deux associées à une forme précise de potentiel $V(x, y)$:

$$(1) X_c = -\frac{1}{2}(p_1^2 - p_2^2) + F(x) - G(y), \quad V(x, y) = F(x) + G(y)$$

$$(2) X_{p_0} = L_3^2 + 2S(\theta), \quad V(r, \theta) = R(r) + \frac{S(\theta)}{r^2}$$

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

$$(3) X_{pa} = \{L_3, p_2\} + \frac{G(\eta)\xi^2 - F(\xi)\eta^2}{\xi^2 + \eta^2}, \quad V(\xi, \eta) = \frac{F(\xi) + G(\eta)}{\xi^2 + \eta^2}$$

$$x = \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2), \quad y = \xi\eta$$

$$(4) X_{ell} = L_3^2 + \frac{l^2}{2}(p_1^2 - p_2^2) - l^2 \left(\frac{\cosh^2 \rho F(\sigma) + \cos 2\sigma G(\rho)}{\cos^2 \sigma - \cosh^2 \rho} \right), \quad V(\sigma, \rho) = \frac{F(\sigma) + G(\rho)}{\cos^2 \sigma - \cosh^2 \rho}$$

$$x = l \cosh \rho \cos \sigma, \quad y = l \sinh \rho \sin \sigma \text{ où } l > 0$$

Ainsi, le fait d'imposer l'existence d'une intégrale d'ordre deux, donc d'un opérateur (1.1.1) pour $n = 2$ qui commute avec (1.2.1) pousse le potentiel à prendre une forme très explicite. Essentiellement, on remarque que l'existence d'une intégrale d'ordre deux impose au potentiel de se séparer dans un des quatre systèmes de coordonnées dans le plan. Selon ces résultats, l'Hamiltonien se sépare selon un des quatre systèmes de coordonnées suivants : 1. cartésien, 2. polaire, 3. parabolique et 4. elliptique.

L'effet de l'existence d'un opérateur du deuxième ordre qui commute avec l'Hamiltonien ayant été complètement élucidé, les auteurs dans [37, 87, 139] se sont penchés sur la situation où (1.2.1) admet deux intégrales du mouvement qui prennent une des formes de 1. à 4.

Ainsi, on a montré, en solutionnant la compatibilité de (1.2.6) selon les différentes possibilités, que les seuls potentiels qui possèdent deux intégrales d'ordre deux sont séparables dans au moins deux des systèmes de coordonnées mentionnés précédemment et sont de la forme :

$$(1) V_1(x, y) = \omega^2(x^2 + y^2) + \frac{\alpha}{x^2} + \frac{\beta}{y^2}$$

$$X_{11} = L_3^2 + 2\left(\frac{\alpha}{\cos^2 \theta} + \frac{\beta}{\sin^2 \theta}\right),$$

$$X_{12} = p_1^2 - p_2^2 + \omega^2(x^2 - y^2) + \frac{2\alpha}{x^2} - \frac{2\beta}{y^2}$$

$$(2) V_2(x, y) = \omega^2(4x^2 + y^2) + \frac{\alpha}{y^2} + \beta x$$

$$X_{21} = p_1^2 - p_2^2 + \omega^2(4x^2 - y^2) - \frac{2\alpha}{y^2} + 2\beta x,$$

$$X_{22} = \{L_3, p_2\} + \frac{2\alpha x}{y^2} - 2\omega^2 x y^2 - \frac{\beta y^2}{2}$$

$$(3) V_3(r, \theta) = \frac{a}{r} + \frac{b+c \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta}$$

$$X_{31} = L_3^2 + 2 \frac{b+c \cos \theta}{\sin \theta}$$

$$X_{32} = \{L_3, p_2\} + 2a \cos \theta + 2 \frac{(\cos^2 \theta + 1) + 2b \cos \theta}{r \sin^2 \theta}$$

$$(4) \quad V_4(\xi, \eta) = \frac{2b+b\xi+c\eta}{\xi^2+\eta^2}$$

$$X_{41} = \{L_3, p_1\} + \frac{b\eta(\eta^2-\xi^2)+c\xi(\xi^2-\eta^2)-4a\eta\xi}{\xi^2+\eta^2}$$

$$X_{42} = \{L_3, p_2\} + 2\frac{a(\xi^2-\eta^2)+\eta\xi(c\xi-b\eta)}{\xi^2+\eta^2}$$

Dans chacun des cas, les potentiels se séparent dans les systèmes de coordonnées

- $V_1(x, y)$: cartésien, polaire et elliptique
- $V_2(x, y)$: cartésien et parabolique
- $V_3(x, y)$: polaire, parabolique et elliptique
- $V_4(x, y)$: deux systèmes paraboliques avec des axes mutuellement orthogonaux

Les précédents résultats sont identiques en mécanique classique et mécanique quantique.

Une étude semblable a été accomplie dans un espace euclidien à trois dimensions [33, 34, 87]. Dans ces travaux, de façon analogue au cas bidimensionnel, on obtient qu'un Hamiltonien maximalelement superintégrable, donc qui possède 5 constantes de mouvement fonctionnellement indépendantes, est multiséparable, c'est-à-dire séparable dans plus d'un système de coordonnées. Plus spécifiquement, il existe 11 systèmes de coordonnées dans lesquels le système se sépare, selon les différentes possibilités de constantes quadratiques admissibles.

Depuis, une quantité considérable de travaux ont été accomplis concernant la séparation de variables et la superintégrabilité quadratique dans un espace euclidien [24]-[26],[35, 60, 63],[69]-[76],[114, 122, 126]. On mentionne que plusieurs travaux ont été faits dans des espaces un peu plus exotiques qu'un simple espace euclidien tel que des espaces à courbure constante, non-constante et complexe [60, 61, 62, 64, 65, 66, 67, 116].

D'autres travaux ont relié la superintégrabilité et le fait qu'un système quantique soit exactement résoluble [53, 119, 126]. Tout porte à croire, de tous les cas connus de superintégrabilité de systèmes à potentiel scalaire, que la superintégrabilité implique la résolubilité d'un système superintégrable. La même situation semble se reproduire dans le cas des potentiels non-scalaire [5, 17, 30,

99, 110, 140, 142], malgré le fait que dans ces cas, l'existence d'une intégrale d'ordre deux n'induit pas la séparation de variables dans le Hamiltonien.

Dans ce qui suit, nous allons considérer des systèmes qui possèdent des intégrales du mouvement polynomiales d'ordre trois dans les impulsions. Les différences entre l'intégrabilité classique et quantique sont cette fois-ci non-négligeables. Contrairement à l'intégrabilité quadratique, l'intégrabilité dite cubique n'impose pas la séparation du Hamiltonien dans des systèmes de coordonnées précis. Par contre, comme il a été admis depuis un certain temps [52, 53, 54], il existe des systèmes quantiques qui sont intégrables, mais qui n'ont pas d'analogue classique autre que le système libre.

1.3. SUPERINTÉGRABILITÉ CUBIQUE

En 1935, Jules Drach a publié un article traitant de systèmes hamiltoniens qui possèdent des intégrales d'ordre trois [31]. Essentiellement, l'auteur propose une liste de dix potentiels classiques intégrables dans un espace euclidien complexe à deux dimensions dépendant de trois constantes arbitraires. Or, avec les maigres détails offerts par Drach, il nous est très difficile de pouvoir justifier ses résultats. D'une certaine façon, en mettant de l'avant une étude détaillée de l'intégrabilité cubique, il est parfaitement concevable de pouvoir espérer retrouver la fameuse liste des dix potentiels de Drach.

En conséquence, il a été démontré récemment, que sept des dix potentiels de Drach correspondent à des systèmes superintégrables qui possèdent deux intégrales d'ordre deux [114, 117, 131]. L'intégrale d'ordre trois est obtenue en poisson-commutant les deux constantes d'ordre deux.

La quête de systèmes qui possèdent des intégrales d'ordre supérieur à deux a proposé plusieurs exemples de systèmes intégrables et superintégrables en mécanique classique et quantique [15, 16, 27, 28, 36, 38, 46, 48, 52, 53, 54, 55, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82],[89]-[97],[109, 112, 127, 129, 130, 137].

Dans cette section, on considère (1.1.1) pour $n = 3$. Par contre, avant de considérer la forme explicite de cette intégrale du mouvement, nous prenons le temps de mettre en évidence un résultat important, qui à nos yeux caractérise

de façon précise la forme générale que doit prendre une constante du mouvement selon son ordre, i.e. selon qu'elle est polynomiale d'ordre impaire ou paire en les impulsions.

De [46], on a en mécanique quantique

Proposition. *Pour toute intégrale du mouvement de la forme (1.1.1) d'ordre n , il existe une intégrale d'ordre n avec une parité bien définie, i.e.*

$$Y = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^{n-2j} \{f_{n-2j,k}(x, y), p_1^k p_2^{n-2j-k}\}$$

pour $f(x, y)$ une fonction réelle.

Ainsi, les termes d'ordres impair et pair d'une intégrale du mouvement commutent indépendamment les uns des autres avec l'Hamiltonien. Alors, lorsqu'on considère une constante du mouvement d'ordre pair (ou impair), les termes d'ordre inférieur sont aussi d'ordre pair (ou impair). Dans le cas d'une intégrale classique, le résultat demeure valide [46].

Ainsi, en ce qui concerne une intégrale d'ordre trois, on considère donc une constante du mouvement de la forme :

$$Y = \sum_{i+j=3} \{f_{ij}(x, y), p_1^i p_2^j\} + \{g_1(x, y), p_2\} + \{g_2(x, y), p_2\} \quad (1.3.1)$$

En imposant la commutation avec l'Hamiltonien de (1.3.1), on obtient encore que les termes d'ordre supérieur, donc d'ordre trois, sont dans l'algèbre enveloppante du groupe euclidien de \mathbb{R}^2 de telle sorte que (1.3.1) se réduit à

$$X = \sum_{i+j+k=3} A_{ijk} \{L_3^i, p_1^j p_2^k\} + \{g_1(x, y), p_1\} + \{g_2(x, y), p_2\} \quad (1.3.2)$$

où $A_{ijk} \in \mathbb{R}$. De plus, nous obtenons que les fonctions g_1 , g_2 et V sont reliées :

$$g_1 V_x + g_2 V_y = \frac{\hbar^2}{4} \left(f_1 V_{xxx} + f_2 V_{xxy} + f_3 V_{xyy} + f_4 V_{yyy} + 8A_{300}(xV_y - yV_x) + (A_{210}V_x + A_{201}V_y) \right) \quad (1.3.3)$$

$$(g_1)_x = 3f_1 V_x + f_2 V_y \quad (1.3.4)$$

$$(g_2)_y = f_3 V_x + 3f_4 V_y \quad (1.3.5)$$

$$(g_1)_y + (g_2)_x = 2(f_2 V_x + f_3 V_y) \quad (1.3.6)$$

où

$$f_1(y) = -A_{300}y^3 + A_{210}y^2 - A_{120}y + A_{030}, \quad (1.3.7)$$

$$f_2(x, y) = 3A_{300}xy^2 - 2A_{210}xy + A_{201}y^2 + A_{120}x - A_{111}y + A_{021}, \quad (1.3.8)$$

$$f_3(x, y) = -3A_{300}x^2y + A_{210}x^2 - 2A_{201}xy + A_{111}x - A_{102}y + A_{012}, \quad (1.3.9)$$

$$f_4(x) = A_{300}x^3 + A_{201}x^2 + A_{102}x + A_{003} \quad (1.3.10)$$

Nous constatons la présence d'un terme associé à \hbar dans (1.3.3). Dans ce cas, ce terme met en évidence une importante différence entre les contextes classique et quantique. Les équations classiques sont simplement obtenues dans la limite $\hbar \rightarrow 0$. Cette différence avait déjà été remarquée dans [52, 53, 54].

1.3.1. Superintégrabilité cubique avec intégrale d'ordre un

Dans [46], on a complètement classifié les systèmes maximalement super-intégrables qui admettent une intégrale d'ordre trois et une autre d'ordre un. Dans ce cas, en plus d'une intégrale de la forme (1.3.2), on exige l'existence d'une constante de la forme :

$$X = aL_3 + bp_1 + cp_2$$

De la même façon que pour les intégrales d'ordre deux, on peut simplifier cette constante d'ordre un sous différentes conditions :

- (1) pour $a \neq 0$, on a $X = L_3$
- (2) sinon pour $a = 0$, on a $X = p_2$ ou p_1

ce qui caractérise les systèmes invariants sous rotations et sous translations respectivement.

Dans le cas des potentiels superintégrables invariants sous rotation dans les cas classique et quantique, les seuls systèmes qui découlent de (1.3.3) à (1.3.6) sont les potentiels harmonique et de Coulomb ce qui s'explique par le théorème de Bertrand [4].

Par contre, en ce qui concerne les potentiels invariants sous translations, donc qui possèdent p_2 comme intégrale d'ordre un, on obtient en mécanique

classique et quantique les potentiels :

$$V = \alpha x \quad \text{ou} \quad V = \frac{\alpha}{x^2}$$

Or, par la section précédente, on remarque que ces potentiels possèdent aussi des intégrales d'ordre deux. En fait les constantes d'ordre trois associées à ces systèmes sont obtenues trivialement en prenant un produit de p_2 et leur intégrale d'ordre deux. Ainsi, ces systèmes ne sont pas, d'une certaine façon, de vrais cas de superintégrabilité cubique.

Par contre, ce qui différencie le cas quantique du cas classique est qu'il existe en mécanique quantique un système supplémentaire qui ne possède pas d'analogie classique :

$$V(x) = \hbar^2 \wp(x)$$

associé à une constante du mouvement de la forme :

$$Y = \{L_3, p_1^2\} + \{\alpha - 3\hbar^2 \wp(x), p_1\} + \{-\alpha x + 2x\hbar^2 \wp(x) + \int \hbar^2 \wp(x) dx, p_2\}$$

où $\wp(x)$ est la fonction elliptique de Weierstrass qui est solution de l'équation :

$$\hbar^2 \wp(x)^2 = 4\wp(x)^3 + \alpha \wp(x)^2 + \beta \wp(x) + \gamma$$

et α , β et γ des constantes d'intégration.

Ce système est un exemple de potentiel superintégrable purement quantique.

1.3.2. Superintégrabilité cubique avec séparation de variables en coordonnées cartésiennes

Dans cette sous-section, pour donner suite aux résultats présentés dans la section précédente, nous considérons le cas où un Hamiltonien de la forme (1.2.1) admet une intégrale d'ordre trois et la séparation de variables en coordonnées cartésiennes. Ainsi le système possède une intégrale d'ordre deux de la forme

$$X = \frac{1}{2}(p_1^2 - p_2^2) + F(x) - G(y)$$

pour un potentiel séparable $V(x, y) = F(x) + G(y)$.

Étant donné la séparation de variables, (1.3.3) à (1.3.6) se simplifient grandement. Dans [48], selon toutes les possibilités, on propose toutes les solutions possibles de (1.3.3) à (1.3.6) et on établit une liste complète de tous les systèmes superintégrables classiques et quantiques séparables en coordonnées cartésiennes dans \mathbb{R}^2 qui admettent l'existence d'une constante du mouvement d'ordre trois.

Or, dans cette classification, les auteurs obtiennent de nouveaux systèmes superintégrables purement quantique i.e. qu'ils n'ont pas d'analogue classique ou qu'ils ne se réduisent pas à un unique potentiel commun ou que leur intégrale d'ordre trois n'est pas définie à partir des constantes d'ordre inférieur. Principalement, les nouveaux potentiels purement quantiques obtenus dans [48] sont :

$$(Q1) \quad V_{Q1}(x, y) = \hbar^2 \left(\frac{1}{8\alpha^4} (x^2 + y^2) + \frac{1}{(x-\alpha)^2} + \frac{1}{(x+\alpha)^2} \right)$$

$$(Q2) \quad V_{Q2}(x, y) = \hbar^2 \left(\frac{1}{8\alpha^4} (x^2 + y^2) + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{(x-\alpha)^2} + \frac{1}{(x+\alpha)^2} \right)$$

$$(Q3) \quad V_{Q3}(x, y) = \hbar^2 \left(\frac{1}{8\alpha^4} (x^2 + y^2) + \frac{1}{(y-\alpha)^2} + \frac{1}{(y+\alpha)^2} + \frac{1}{(x-\alpha)^2} + \frac{1}{(x+\alpha)^2} \right)$$

$$(Q4) \quad V_{Q4}(x, y) = \hbar^2 \left(\frac{1}{8\alpha^4} (9x^2 + y^2) + \frac{1}{(y-\alpha)^2} + \frac{1}{(y+\alpha)^2} \right)$$

$$(Q5) \quad V_{Q5}(x, y) = \hbar^2 \varphi(y) + V(x)$$

$$(Q6) \quad V_{Q6}(x, y) = \hbar^2 \varphi(x) + \hbar^2 \varphi(x)$$

$$(Q7) \quad V_{Q7}(x, y) = \hbar^2 \omega_1^2 P_1(\omega_1 x) + \hbar^2 \omega_2^2 P_1(\omega_2 y)$$

$$(Q8) \quad V_{Q8}(x, y) = a(x^2 + y^2) + \frac{\hbar}{2} b_1 P_4'(x, \frac{-8a}{\hbar^2}) + 4a P_4^2(x, \frac{-8a}{\hbar^2}) + 4ax P_4(x, \frac{-8a}{\hbar^2}) + \frac{1}{6} (-\hbar^2 K_1 + \hbar b_1)$$

$$(Q9) \quad V_{Q9}(x, y) = ay + \hbar^2 \omega^2 P_1(\omega x)$$

$$(Q10) \quad V_{Q10}(x, y) = bx + ay + (2\hbar b)^{\frac{2}{3}} P_2^2 \left(\left(\frac{2b}{\hbar^2} \right)^{\frac{1}{3}} x, 0 \right)$$

$$(Q11) \quad V_{Q11}(x, y) = ay + (2\hbar^2 b^2)^{\frac{1}{3}} (P_2'(-(4b/\hbar^2)x, \kappa) + P_2^2(-(4b/\hbar^2)x, \kappa))$$

où $P_1(x)$, $P_2(x)$ et $P_4(x)$ sont la première, la deuxième et la quatrième transcendente de Painlevé. Ces fonctions vérifient les équations :

$$\begin{aligned} P_1'' &= 6P_1^2 + x \\ P_2'' &= 2P_2^3 + xP_2 + a \\ P_4'' &= \frac{P_4'^2}{2P_4} + \frac{3}{2}P_4^3 + 4xP_4^2 + 2(x-a)P_4 + \frac{b}{P_4} \end{aligned}$$

où a, b sont les paramètres arbitraires [56].

Dans la limite classique ($\hbar \mapsto 0$), les potentiels se réduisent au potentiel libre, au potentiel harmonique ou dans le cas de $V_{Q6}(x, y)$, V_{Q8} , V_{Q9} et V_{Q11} à

$$(C1) \quad V_{C1}(x, y) = \beta_1^2 \sqrt{|x|} + \beta_2^2 \sqrt{|y|}$$

$$(C2) \quad V_{C2}(x, y) = a^2|y| + b^2\sqrt{|x|}$$

$$(C3) \quad V_{C3}(x, y) = \frac{\omega^2}{2}y^2 + V(x)$$

$$(C4) \quad V_{C4}(x, y) = a|y| + f(x)$$

où dans (C3) $V(x)$ vérifie l'équation algébrique

$$\begin{aligned} -9V^4 + 14\omega^2x^2V^3 + \left(6d - \frac{15}{2}\omega^4x^4\right)V^2 + \left(\frac{3}{2}\omega^6x^6 - 2d\omega^2x^2\right)V \\ + cx^2 - d^2 - d\frac{\omega^2}{2}x^4 - \frac{1}{16}\omega^8x^8 \end{aligned}$$

et $f(x)$ dans (C4) vérifie l'équation algébrique

$$f^3 - 2bxf^2 + b^2x^4f - d = 0$$

On remarque des différences importantes entre les systèmes classiques et quantiques. Tous les potentiels superintégrables V_{Q1} à V_{Q11} sont de nouveaux systèmes dans la littérature associée au domaine de la superintégrabilité. En ce qui concerne V_{Q8} , ce potentiel a été obtenu dans le contexte de la supersymétrie comme étant un potentiel factorisable qui possède un opérateur de charge d'ordre de trois [93]. Par contre, les potentiels s'exprimant en terme de la fonction elliptique de Weierstrass ont été obtenus dans [27] et les potentiels classiques V_{C1} à V_{C4} sont connus de [81].

Les trajectoires des quatre nouveaux potentiels classiques ont été obtenues en terme d'algèbre polynomiale d'intégrales du mouvement. Une fois de plus, ces trajectoires sont fermées dans l'espace de configuration [89, 91].

En ce qui concerne V_{Q1} à V_{Q11} , pour certains d'entre eux, on a calculé leur spectre d'énergie à l'aide de la structure d'algèbre cubique des intégrales du mouvement ce qui a démontré que ces systèmes sont exactement résolubles [90, 92, 93] ce qui apporte de nouveaux résultats pour renforcer la conjecture que tout système superintégrable est exactement résoluble.

Depuis, plusieurs nouveaux systèmes superintégrables provenant de V_{Q1} à V_{Q11} et V_{C1} à V_{C4} ont été obtenus [94]-[97]. Utilisant la séparation de variables en coordonnées cartésiennes, on utilisait les procédures de factorisation de l'Hamiltonien [57, 100] et la définition d'opérateurs de création et d'annihilation de ces systèmes afin de produire de nouveaux systèmes superintégrables avec des intégrales d'ordre trois et d'ordres supérieurs.

Dans les prochaines sections, nous présentons des résultats récents concernant la découverte de nouveaux systèmes superintégrables séparables en coordonnées polaires dans un espace euclidien à deux dimensions. Des résultats remarquables sont obtenus dans le contexte de la superintégrabilité cubique avec séparation de variables en coordonnées polaires [130] et dans la définition d'une famille de systèmes superintégrables et exactement résolubles possédant des intégrales du mouvement d'ordre supérieurs [127, 129].

Chapitre 2

THIRD ORDER SUPERINTEGRABLE SYSTEMS SEPARATING IN POLAR COORDINATES

Référence complète : F. Tremblay and P. Winternitz, Third-order superintegrable systems separating in polar coordinates, *J. Phys. A : Math. Theor.* 43, 175206 (2010).

Abstract

A complete classification is presented of quantum and classical superintegrable systems in E_2 that allow the separation of variables in polar coordinates and admit an additional integral of motion of order three in the momentum. New quantum superintegrable systems are discovered for which the potential is expressed in terms of the sixth Painlevé transcendent or in terms of the Weierstrass elliptic function.

2.1. INTRODUCTION

The purpose of this article is to obtain and classify all classical and quantum Hamiltonians H that allow the separation of variables in polar coordinates and admit a third order integral of motion Y . The system under study is characterized by three conserved quantities :

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + V(r, \theta) \quad (2.1.1)$$

$$X = L_3^2 + 2S(\theta) \quad (2.1.2)$$

$$Y = \sum_{i+j+k=3} A_{ijk} \{L_3^i, p_1^j p_2^k\} + \{g_1(x, y), p_1\} + \{g_2(x, y), p_2\} \quad (2.1.3)$$

where

$$V(r, \theta) = R(r) + \frac{S(\theta)}{r^2} \quad (2.1.4)$$

Here $R(r)$ and $S(\theta)$ are arbitrary functions and A_{ijk} are real constants. The polar coordinates are defined as usual : $x = r \cos \theta$ and $y = r \sin \theta$.

In classical mechanics p_1, p_2 are the cartesian components of linear momentum and L_3 is the two-dimensional angular momentum. In quantum mechanics we have

$$p_1 = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, \quad p_2 = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}, \quad L_3 = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (2.1.5)$$

The curly brackets, $\{\cdot, \cdot\}$, in (2.1.3) denote an anticommutator in quantum mechanics. In classical mechanics we have $\{L_3, p_1^j p_2^k\} = 2L_3^i p_1^j p_2^k$.

This study is part of a general program devoted to superintegrable systems in classical and quantum mechanics. Roughly speaking, an integrable system is superintegrable if it allows more integrals of motion than degrees of freedom. For more precise definitions and an extensive bibliography see e.g. [91, 141]. A system in n dimensions is maximally superintegrable if it allows $2n - 1$ integrals. In classical mechanics the integrals of motion must be well defined and functionally independent functions on phase space and typically at least one subset of n integrals (including the Hamiltonian) is in involution. In quantum mechanics the integrals should be well-defined linear operators in the enveloping algebra of the Heisenberg algebra with basis $\{x_i, p_i, \hbar\}$ for $i = 1, \dots, n$ and they should be algebraically independent (within the Jordan algebra generated by their anticommutators).

The majority of publications on superintegrability is devoted to the quadratic case when the integral of motion is quadratic in the momenta (see e.g. [26], [37], [74], [75], [87], [122], [126], [139]). Quadratic superintegrability for one particle in a scalar potential is related to multiseparability in the Schrödinger equation or the Hamilton-Jacobi equation, in quantum or classical mechanics, respectively.

More recently some of the interest has shifted to higher order integrability. An infinite family of superintegrable and exactly solvable systems in a Euclidean plane has been proposed [127, 129]. The potential depends on a real

number $k > 0$. It has been conjectured that this system is superintegrable in quantum mechanics for all integer values of k with one integral of order 2 and the other of order $2k$. For brevity we will call it the TTW model. The superintegrability of the TTW model has been so far confirmed for odd values of $k \geq 3$ [112]. In the classical case all bounded trajectories are periodic [129] for all integer and rational values of k and superintegrability has been proven for such values of k [78]. Both the trajectories and the higher order integral of motion can be expressed in terms of Chebyshev polynomials. The generalisation of the TTW model in a three dimensional Euclidean space has been recently proposed [77].

A systematic study of integrable systems in classical mechanics with one third order integral of motion was initiated by Drach in a remarkable paper published in 1935 [31]. He considered classical Hamiltonian mechanics in a two dimensional complex Euclidean plane and found 10 potentials allowing a third order integral. More recently it was shown that 7 of these systems are actually quadratically superintegrable and that the third order integral of motion is a Poisson commutator of two independent second order ones [114, 131]. Quadratically integrable (and superintegrable) potentials coincide in classical and quantum mechanics. This is not necessarily the case when higher order integrals are involved [52, 53].

A systematic search for quantum and classical superintegrable systems in a real Euclidean plane with one third order integral of motion and one first order or second order one was started in [46, 48]. In [48] the second order integral of motion was chosen so as to assure separation of variables in cartesian coordinates. This led to several new classical superintegrable systems but mainly to completely new quantum ones, in which the potential is expressed in terms of Painlevé transcendents. The integrals of motion generate polynomial algebras [26], [49],[86],[89], [92]-[95]. Their representation theory was used to calculate the energy spectra and a relation with supersymmetric quantum mechanics was used to calculate wave functions [92]-[95].

The existence of a third order integral of motion in quantum mechanics was investigated earlier [27] and potentials expressed in terms of the Weierstrass function were obtained.

In this article we continue with the classification of superintegrable systems and impose the conditions (2.1.1) to (2.1.4), i.e. separation of variables in polar coordinates.

The determining equations for the existence of a third order integral are presented in Section 2.2 in polar coordinates. The possible form of the radial part of the potential is established in Section 2.3 and summed up in Theorem 2.3.1. The angular part is discussed in Section 2.4. Genuinely new superintegrable potentials are obtained when the radial part of the potential vanishes. The angular parts of the potential are expressed in terms of the sixth Painlevé transcendent P_6 or in terms of the Weierstrass elliptic function. The main results are summed up as theorems in Section 2.5.

2.2. DETERMINING EQUATIONS OF A THIRD ORDER INTEGRAL OF MOTION IN POLAR COORDINATES

The quantities X and H commute in quantum mechanics and Poisson-commute in the classical case. The form of (2.1.3) assures that all terms of order 4 and 3 in the (Poisson) commutator $[H, Y] = 0$ vanish. The vanishing of lower order terms provides the following determining equations for the functions g_1, g_2 and V in (2.1.1) and (2.1.3) :

$$\begin{aligned} G_1 V_r + G_2 V_\theta = \frac{\hbar^2}{4} & \left[F_1 V_{rrr} + F_2 V_{rr\theta} + F_3 V_{r\theta\theta} + F_4 V_{\theta\theta\theta} + r F_3 V_{rr} + \left(3r F_4 \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{2}{r} F_2 \right) V_{r\theta} - \frac{2}{r} F_3 V_{\theta\theta} + (-F_3 + 2C_1 \cos \theta + 2C_2 \sin \theta) V_r \right. \\ & \left. + \left(-2F_4 + \frac{2}{r^2} F_2 + 8D_0 + \frac{(-2C_1 \sin \theta + 2C_2 \cos \theta)}{r} \right) V_\theta \right] \quad (2.2.1) \end{aligned}$$

$$(G_1)_r = 3F_1V_r + F_2V_\theta \quad (2.2.2)$$

$$\frac{(G_2)_\theta}{r^2} = F_3V_r + 3F_4V_\theta - \frac{G_1}{r^3} \quad (2.2.3)$$

$$(G_2)_r = 2(F_2V_r + F_3V_\theta) - \frac{(G_1)_\theta}{r^2} \quad (2.2.4)$$

with :

$$F_1(\theta) = A_1 \cos 3\theta + A_2 \sin 3\theta + A_3 \cos \theta + A_4 \sin \theta, \quad (2.2.5)$$

$$F_2(r, \theta) = \frac{1}{r}(-3A_1 \sin 3\theta + 3A_2 \cos 3\theta - A_3 \sin \theta + A_4 \cos \theta) \\ + B_1 \cos 2\theta + B_2 \sin 2\theta + B_0, \quad (2.2.6)$$

$$F_3(r, \theta) = \frac{1}{r^2}(-3A_1 \cos 3\theta - 3A_2 \sin 3\theta + A_3 \cos \theta + A_4 \sin \theta) \\ + \frac{1}{r}(-2B_1 \sin 2\theta + 2B_2 \cos 2\theta) \\ + C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta, \quad (2.2.7)$$

$$F_4(r, \theta) = \frac{1}{r^3}(A_1 \sin 3\theta - A_2 \cos 3\theta - A_3 \sin \theta + A_4 \cos \theta) \\ + \frac{1}{r^2}(-B_1 \cos 2\theta - B_2 \sin 2\theta + B_0) \\ + \frac{1}{r}(-C_1 \sin \theta + C_2 \cos \theta) + D_0, \quad (2.2.8)$$

and

$$G_1(r, \theta) = g_1 \cos \theta + g_2 \sin \theta, \quad G_2(r, \theta) = \frac{-g_1 \sin \theta + g_2 \cos \theta}{r}$$

The constants A_i , B_i , C_i et D_0 are related to A_{ijk} of (2.1.3) :

$$A_1 = \frac{A_{030} - A_{012}}{4}, \quad A_2 = \frac{A_{021} - A_{003}}{4}, \quad A_3 = \frac{3A_{030} + A_{012}}{4} \\ A_4 = \frac{3A_{003} + A_{021}}{4}, \quad B_1 = \frac{A_{120} - A_{102}}{2}, \quad B_2 = \frac{A_{111}}{2}, \\ B_0 = \frac{A_{120} + A_{102}}{2}, \quad C_1 = A_{210}, \quad C_2 = A_{201}, \quad D_0 = A_{300}$$

The constants A_i , B_i , C_i et D_0 are real. Relations equivalent to (2.2.1)-(2.2.4) were already obtained in [46] in cartesian coordinates.

The third order constant of motion can be written in terms of A_i , B_i , C_i and D_0 as

$$\begin{aligned}
Y = & D_0 L_3^3 + C_1 \{L_3^2, p_1\} + C_2 \{L_3^2, p_2\} + B_0 L_3 (p_1^2 + p_2^2) + B_1 \{L_3, p_1^2 - p_2^2\} \\
& + 2B_2 \{L_3, p_1 p_2\} + A_1 p_1 (p_1^2 - 3p_2^2) + A_2 p_2 (3p_1^2 - p_2^2) + (A_3 p_1 + A_4 p_2) (p_1^2 + p_2^2) \\
& + \{g_1(x, y), p_1\} + \{g_2(x, y), p_2\} \tag{2.2.9}
\end{aligned}$$

Under rotations the Hamiltonian (2.1.1) and the integral X (2.1.2) remain invariant but the third order integral Y (2.1.3) or (2.2.9) transforms into a new integral of the same form with new coefficients and new functions g_1, g_2 . The constants D_0 and B_0 are singlets under rotations and hence invariants. The expressions $\{B_1, B_2\}$, $\{A_1, A_2\}$ and $\{A_3, A_4\}$ are doublets under rotations.

The existence of the third order integral Y depends on the compatibility of (2.2.1)-(2.2.4). Equation (2.2.1) establishes the difference between the quantum and the classical cases. We obtain the classical analog of (2.2.1) by setting $\hbar \mapsto 0$.

From (2.2.2)-(2.2.4) we can deduce a compatibility condition for the potential $V(r, \theta)$, namely the third order linear differential equation :

$$\begin{aligned}
0 = & r^4 F_3 V_{rrr} + (3r^4 F_4 - 2r^2 F_2) V_{rr\theta} + (3F_1 - 2r^2 F_3) V_{r\theta\theta} + F_2 V_{\theta\theta\theta} \\
& + (2r^4 F_{3r} + 6r^3 F_3 - 2r^2 F_{2\theta} - 3r F_1) V_{rr} + (2F_{2\theta} - 4r F_3 - 2r^2 F_{3r}) V_{\theta\theta} \\
& \quad + (6r^4 F_{4r} + 18r^3 F_4 - 2r^2 (F_{2r} + F_{3\theta}) - 5r F_2 + 6F_{1\theta}) V_{r\theta} \\
& \quad + (r^4 F_{3rr} + 6r^3 F_{3r} + r^2 (6F_3 - 2F_{2r\theta}) - 4r F_{2\theta} + 3F_{1\theta\theta}) V_r \\
& \quad + (3r^4 F_{4rr} + 18r^3 F_{4r} + r^2 (18F_4 - 2F_{3r\theta}) - r (F_{2r} + 4F_{3\theta}) + F_{2\theta\theta}) V_\theta \tag{2.2.10}
\end{aligned}$$

Compatibility of (2.2.2)-(2.2.4) and (2.2.1) imposes further conditions on $V(r, \theta)$, they are however nonlinear [46].

Our aim is to find all solutions of (2.2.1)-(2.2.4) and thereby find all superintegrable classical and quantum systems that separate in polar coordinates and allow a third order integral Y . The existence of X (2.1.2) is guaranteed by the form (2.1.4) of the potential and is directly related to the separation of variables in polar coordinates.

Specifying the radial dependance of (2.2.6) to (2.2.8) :

$$F_2(r, \theta) = \frac{1}{r}F_{21}(\theta) + F_{20}(\theta) \quad (2.2.11)$$

$$F_3(r, \theta) = \frac{1}{r^2}F_{32}(\theta) + \frac{1}{r}F_{31}(\theta) + F_{30}(\theta) \quad (2.2.12)$$

$$F_4(r, \theta) = \frac{1}{r^3}F_{43}(\theta) + \frac{1}{r^2}F_{42}(\theta) + \frac{1}{r}F_{41}(\theta) + D_0 \quad (2.2.13)$$

we can deduce :

$$G_1(r, \theta) = 3F_1\left(R + \frac{1}{r^2}S\right) - \left(\frac{F_{21}}{2r^2} + \frac{F_{20}}{r}\right)\dot{S} + \beta(\theta) \quad (2.2.14)$$

where $\dot{S}(\theta) = \frac{d}{d\theta}S(\theta)$. The derivative with respect to r will be denoted by a prime so that $R'(r) = \frac{d}{dr}R(r)$.

2.3. RADIAL TERM IN THE POTENTIAL

With the separation of the potential in polar coordinates (2.1.4), (2.2.10) can be expressed as :

$$m_3R^{(3)} + m_2R'' + m_1R' + n_3S^{(3)} + n_2\ddot{S} + n_1\dot{S} + n_0S = 0 \quad (2.3.1)$$

for $m_i = m_i(r, \theta)$ and $n_i = n_i(r, \theta)$ in terms of the functions $F_i(r, \theta)$ and their derivatives. The $n_i = n_i(r, \theta)$ are linear in r : $n_i = n_{i0}(\theta) + n_{i1}(\theta)r$. In this way, by differentiating (2.3.1) two times with respect to r , we obtain a linear ordinary differential equation for $R(r)$:

$$\begin{aligned} m_3R^{(5)} + (2m_{3r} + m_2)R^{(4)} + (m_{3rr} + 2m_{2r} + m_1)R^{(3)} \\ + (m_{2rr} + 2m_{1r})R'' + m_{1rr}R' = 0 \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

In this expression, by using the form of the $F_i(r, \theta)$, the coefficients associated to the derivatives of different orders of $R(r)$ can be expressed as combinations of trigonometric functions and different powers of r . Thus, by separating (2.3.2), according to the different linearly independent trigonometric functions, we obtain six differential equations for $R(r)$ that have to vanish independently

of each other :

$$A_1(r^4R^{(5)} + 7r^3R^{(4)} - r^2R^{(3)} - 18rR'' + 18R') = 0 \quad (2.3.3)$$

$$A_2(r^4R^{(5)} + 7r^3R^{(4)} - r^2R^{(3)} - 18rR'' + 18R') = 0 \quad (2.3.4)$$

$$B_1(r^4R^{(5)} + 14r^3R^{(4)} + 48r^2R^{(3)} + 24rR'' - 24R') = 0 \quad (2.3.5)$$

$$B_2(r^4R^{(5)} + 14r^3R^{(4)} + 48r^2R^{(3)} + 24rR'' - 24R') = 0 \quad (2.3.6)$$

$$\begin{aligned} & (C_1r^6 + A_3r^4)R^{(5)} + (20C_1r^5 + 11A_3r^3)R^{(4)} + (120C_1r^4 + 27A_3r^2)R^{(3)} \\ & + (240C_1r^3 + 6A_3r)R'' + (120C_1r^2 - 6A_3r)R' = 0 \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

$$\begin{aligned} & (C_2r^6 + A_4r^4)R^{(5)} + (20C_2r^5 + 11A_4r^3)R^{(4)} + (120C_2r^4 + 27A_4r^2)R^{(3)} \\ & + (240C_2r^3 + 6A_4r)R'' + (120C_2r^2 - 6A_4r)R' = 0 \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

The solutions of these equations are :

$$(1) A_1^2 + A_2^2 \neq 0$$

$$R(r) = \frac{a_3}{r} + a_4r^2 + a_5r^4 \quad (2.3.9)$$

$$(2) B_1^2 + B_2^2 \neq 0$$

$$R(r) = \frac{a_2}{r^3} + \frac{a_3}{r} + a_4r^2 \quad (2.3.10)$$

$$(3) C_1^2 + C_2^2 \neq 0$$

$$R(r) = \frac{a_1}{r^4} + \frac{a_2}{r^3} + \frac{a_3}{r} \quad (2.3.11)$$

$$(4) A_3^2 + A_4^2 \neq 0$$

$$R(r) = \frac{a_3}{r} + a_4r^2 + a_6 \log r \quad (2.3.12)$$

$$(5) (C_1A_3) \neq 0$$

$$R(r) = \frac{a_3}{r} + \frac{a_7}{\sqrt{A_3 + C_1r^2}} + \frac{a_8}{\sqrt{A_3 + C_1r^2}} \log \left(\frac{\sqrt{A_3} + \sqrt{A_3 + C_1r^2}}{r} \right) \quad (2.3.13)$$

$$(6) (C_2 A_4) \neq 0$$

$$R(r) = \frac{a_3}{r} + \frac{a_7}{\sqrt{A_4 + C_2 r^2}} + \frac{a_8}{\sqrt{A_4 + C_2 r^2}} \log \left(\frac{\sqrt{A_4} + \sqrt{A_4 + C_2 r^2}}{r} \right) \quad (2.3.14)$$

We omit $\frac{1}{r^2}$ and the constant terms since they can be absorbed into the angular part.

Theorem 2.3.1. *A third order integral of motion for a potential of the form (2.1.4) must have the form (2.1.3) and can exist only if one of the following situations occurs :*

(i) *The constants in (2.2.9) satisfy*

$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = B_1 = B_2 = C_1 = C_2 = 0 \quad (2.3.15)$$

Then the radial equations (2.3.3) to (2.3.8) impose no restriction on $R(r)$.

(ii) $R(r) = \frac{a}{r}$ for $a \neq 0$.

(iii) $R(r) = ar^2$ for $a \neq 0$ and $C_1 = C_2 = 0$.

(iv) $R(r) = 0$.

In cases (ii) and (iv) equations (2.3.3) to (2.3.8) are satisfied identically for all values of the constants in (2.1.3) or (2.2.9).

Before proving Theorem 2.3.1. let us stress that it gives only necessary conditions for the existence of the integral Y , not sufficient ones. Those will be obtained when integrating the equations for the angular part $\frac{S(\theta)}{r^2}$.

Proof: (i) Let us start with Case (i) of the theorem. The condition (2.3.15) implies that (2.3.3) to (2.3.8) are satisfied identically for all $R(r)$. Then (2.2.5) to (2.2.8) simplify to

$$F_1 = F_3 = 0, \quad F_2 = B_0, \quad F_4 = \frac{B_0}{r^2} + D_0$$

and we can integrate (2.2.2)-(2.2.4) to obtain

$$G_1(r, \theta) = -\frac{B_0 \dot{S}}{r} + \beta(\theta) \quad (2.3.16)$$

$$G_2(r, \theta) = 2B_0 \left(R + \frac{S}{r^2} \right) - \frac{B_0}{2r^2} \ddot{S} + \frac{\dot{\beta}}{r} + \xi(\theta) \quad (2.3.17)$$

where $\beta(\theta)$ was introduced in (2.2.14) and $\xi(\theta)$ appears as an integration constant (an arbitrary function of θ). Equations (2.2.2) to (2.2.4) further imply

$$\ddot{\beta} + \beta = 0, \quad \dot{\xi} - 3D_0\dot{S} = 0, \quad B_0(S^{(3)} - 4\dot{S}) = 0 \quad (2.3.18)$$

and the integral (2.2.9) reduces to

$$Y = D_0L_3^3 + B_0L_3(p_1^2 + p_2^2) + \{g_1(x, y), p_1\} + \{g_2(x, y), p_2\} \quad (2.3.19)$$

(ii) From now on we assume that at least one of the constants A_i, B_j, C_j does not vanish. From (2.3.9)-(2.3.14) we see that the most general form of the radial term $R(r)$ is

$$\begin{aligned} R(r) = & \frac{a_1}{r^4} + \frac{a_2}{r^3} + \frac{a_3}{r} + a_4r^2 + a_5r^4 + a_6 \log r \\ & + \frac{a_7}{\sqrt{A + Cr^2}} + \frac{a_8}{\sqrt{A + Cr^2}} \log \left(\frac{\sqrt{A} + \sqrt{A + Cr^2}}{r} \right) \end{aligned} \quad (2.3.20)$$

where $(A, C) = (A_3, C_1)$ or (A_4, C_2) .

Let us show that the “exotic” terms a_1, a_2, a_5, a_6, a_7 and a_8 are actually absent, i.e. their presence is not allowed by the original determining equations (2.2.1)-(2.2.4). We proceed systematically by assuming the contrary.

(ii.1) $a_1 \neq 0$.

The function $R(r)$ must have the form (2.3.11) and the only possible nonzero constants are C_1 and C_2 (and as always B_0 and D_0).

From (2.2.5) to (2.2.8), we find

$$\begin{aligned} F_1 = 0, \quad F_2 = B_0, \quad F_3 = C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta, \\ F_4 = \frac{B_0}{r^2} + \frac{1}{r}(-C_1 \sin \theta + C_2 \cos \theta) + D_0 \end{aligned} \quad (2.3.21)$$

The r^0 term in the compatibility condition (2.2.10) is

$$a_1(C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta) = 0 \quad (2.3.22)$$

The condition $C_1^2 + C_2^2 \neq 0$ implies $a_1 = 0$.

(ii.2) $a_1 = 0, a_2 \neq 0$.

The function $R(r)$ must have the form (2.3.10) and the possible nonzero constants in Y are B_1, B_2, C_1, C_2 (in addition to B_0 and D_0).

The coefficient of r^0 in (2.2.10) is

$$a_2(B_1 \cos 2\theta + B_2 \sin 2\theta) = 0 \quad (2.3.23)$$

We can keep $a_2 \neq 0$ only if we impose $B_1 = B_2 = 0$.

The coefficient of r^0 in (2.2.1) is

$$a_2 B_0 \dot{S} = 0 \quad (2.3.24)$$

For $B_0 = 0$ or $\dot{S} = 0$, the term in r^1 in (2.2.10) implies

$$a_2(C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta) = 0 \quad (2.3.25)$$

a contradiction with the assumption $C_1^2 + C_2^2 \neq 0$ (since we already have $B_1 = B_2 = 0$). Thus we have $a_2 = 0$.

(ii.3) $a_1 = a_2 = 0, a_5 \neq 0$.

The function $R(r)$ satisfies (2.3.9) and we impose $A_1^2 + A_2^2 \neq 0$. (2.2.14) and (2.2.4) give the explicit form of the functions G_1 and G_2 and from the term r^{12} in (2.2.1) we obtain

$$a_5^2(A_1 \cos 3\theta + A_2 \sin 3\theta) = 0 \quad (2.3.26)$$

a contradiction. Hence we have $a_5 = 0$.

(ii.4) $a_1 = a_2 = a_5 = 0, a_6 \neq 0$.

The function $R(r)$ must have the form (2.3.12) and we request $A_3^2 + A_4^2 \neq 0$. We obtain from (2.2.14) and (2.2.4) the functions G_1 and G_2 and (2.2.1) in this case contains an $r^4 \log r$ term with coefficient

$$a_6^2(A_3 \cos \theta + A_4 \sin \theta) = 0$$

and hence $a_6 = 0$.

(ii.5) $a_1 = a_2 = a_5 = a_6 = 0, a_8 \neq 0$.

The function $R(r)$ must have the form (2.3.13) or (2.3.14) and we request $A_3C_1 \neq 0$ or $A_4C_2 \neq 0$. Inserting G_1 and G_2 obtained from (2.2.14) and (2.2.4) in (2.2.1) we have the term $r^{12} \log^2 \left(\frac{\sqrt{A} + \sqrt{A + Cr^2}}{r} \right)$ with coefficient

$$a_8^2 AC^4 \cos \theta = 0 \quad (2.3.27)$$

Since we impose $AC \neq 0$, we find $a_8 = 0$.

(ii.6) $a_1 = a_2 = a_5 = a_6 = a_8 = 0, a_7 \neq 0$.

The radial part is

$$R(r) = \frac{a_3}{r} + \frac{a_7}{\sqrt{A + Cr^2}} \quad (2.3.28)$$

and we must request that $AC \neq 0$. From the coefficients of r^9 and r^7 in (2.2.1) we have that :

$$a_7 C^3 (B_0 \dot{S} - 2a_3 A \cos \theta) = 0 \quad (2.3.29)$$

$$a_7 AC^2 (8B_0 \dot{S} - 15a_3 A \cos \theta) = 0 \quad (2.3.30)$$

Then for any values of B_0 , we have

$$a_3 A \cos \theta = 0$$

Since $A \neq 0$ we have $a_3 = 0$. In (2.2.1) we have an r^2 term with coefficient

$$a_7 A^4 (\sin \theta \dot{S} + 2 \cos \theta S) = 0 \quad (2.3.31)$$

and hence $\dot{S} = -2 \cot \theta S$. Substituting \dot{S} into (2.2.1) we use the coefficient of r^{10} to obtain

$$\beta(\theta) = \frac{C \cos \theta}{4} (-\hbar^2 + 8S) \quad (2.3.32)$$

Then the coefficient of r^8 gives

$$a_7 AC^2 \cos \theta = 0 \quad (2.3.33)$$

Since $AC \neq 0$ it follows that $a_7 = 0$.

(iii) So far we have shown that the function $R(r)$ must have the form

$$R(r) = \frac{a_3}{r} + a_4 r^2 \quad (2.3.34)$$

To complete the proof of the theorem we must show that either α_3 or α_4 must vanish. From (2.3.9)-(2.3.14) we see that the constants in Y that can survive (in addition to D_0 and B_0) are $A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2$. From (2.2.1) we obtain the coefficient of r^8 to be

$$\alpha_4^2(A_1 \cos 3\theta + A_2 \sin 3\theta + A_3 \cos \theta + A_4 \sin \theta) = 0 \quad (2.3.35)$$

and hence for $\alpha_4 \neq 0$, we have $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 0$.

The coefficient of r^6 yields

$$\alpha_4 \beta = 0 \quad (2.3.36)$$

and hence $\beta = 0$. Taking this into account we return to (2.2.10) and find the coefficient of r^2 :

$$\alpha_3(B_1 \sin 2\theta - B_2 \cos 2\theta) = 0 \quad (2.3.37)$$

For $\alpha_3 \neq 0$ this implies $B_1 = B_2 = 0$ and we are back in the generic case where the integral is (2.3.19).

Thus either α_3 or α_4 in (2.3.34) must vanish and this completes the proof of the theorem. □

We see that a third order integral Y of (2.1.1) with at least one nonzero constant A_i, B_j, C_j with $i = 1, 2, 3, 4, j = 1, 2$ can only exist if the radial part of the potential is a harmonic oscillator $R(r) = ar^2$, a Coulomb-Kepler potential $R(r) = a/r$ or $R = 0$.

2.4. ANGULAR TERM $\frac{S(\theta)}{r^2}$ IN THE POTENTIAL

Let us return to the problem of solving the determining equations (2.2.1) to (2.2.4) and concentrate on the angular part, once the radial part is known. We shall consider each of the four cases of Theorem 2.3.1 separately.

2.4.1. Radial equations satisfied for all $R(r)$

According to Theorem 2.3.1., the constants in the third order integral Y satisfy (2.3.15) and Y itself is as in (2.3.19). In this case the functions $G_1(r, \theta)$ and $G_2(r, \theta)$ are as in (2.3.16) and (2.3.17) where $\beta(\theta), \xi(\theta)$ and $S(\theta)$ satisfy (2.3.18).

Two cases must be considered separately :

1. $B_0 \neq 0$

From (2.3.18) we obtain

$$\begin{aligned}\xi(\theta) &= 3D_0S + \xi_0 \\ \beta(\theta) &= \beta_1 \cos \theta + \beta_2 \sin \theta \\ S(\theta) &= s_1 \cos 2\theta + s_2 \sin 2\theta + s_0\end{aligned}\tag{2.4.1}$$

where $\xi_0, \beta_1, \beta_2, s_0, s_1, s_2$ are constants (we can put $s_0 = 0$).

Substituting (2.4.1) in (2.2.1) we obtain $s_1 = s_2 = 0$, and we have a purely radial potential. In the integral (2.3.19) we have $g_1 = g_2 = 0$ and the result is trivial. Namely, since L_3 is an integral, L_3^3 and L_3H are also integrals. In general this potential is not superintegrable but first order integrable.

2) $B_0 = 0, D_0 = 1$

The third equation in (2.3.18) is satisfied trivially so $S(\theta)$ in (2.4.1) is arbitrary. Putting $\beta(\theta)$ and $\xi(\theta)$ in (2.2.1) we obtain

$$\begin{aligned}(\beta_1 \cos \theta + \beta_2 \sin \theta)r^3R' &= r\left(\frac{\hbar^2}{4}S^{(3)} - 3S\dot{S} - \xi_0\dot{S}\right) \\ &+ \left((\beta_1 \sin \theta - \beta_2 \cos \theta)\dot{S} + 2(\beta_1 \cos \theta + \beta_2 \sin \theta)S\right)\end{aligned}\tag{2.4.2}$$

We distinguish two subcases :

2.a) $\beta_1 = \beta_2 = 0$

We have

$$\hbar^2S^{(3)} = 12S\dot{S} + 4\xi_0\dot{S}$$

This can be integrated to :

$$\hbar^2\dot{S}^2 = 4S^3 + 4\xi_0S^2 + bS + c\tag{2.4.3}$$

where b and c are integration constants. We can set $\xi_0 = 0$ by a suitable change of variables $S(\theta) \mapsto T(\theta) - \frac{\xi_0}{3}$ and (2.4.3) is simplified to

$$\hbar^2 \dot{T}^2 = 4T^3 - t_2 T - t_3$$

where t_2 and t_3 are constants.

The potential is expressed in terms of the Weierstrass elliptic function :

$$V(r, \theta) = R(r) + \frac{\hbar^2 \wp(\theta, t_2, t_3)}{r^2} \quad (2.4.4)$$

for an arbitrary radial part $R(r)$.

This potential has a third and a second order constant of motion of the form :

$$Y = 2L_3^3 + \{L_3, 3\hbar^2 \wp(\theta)\} \quad (2.4.5)$$

$$X = L_3^2 + 2\hbar^2 \wp(\theta) \quad (2.4.6)$$

The second order constant of motion is known as the one-dimensional Lamé operator. Y and X are algebraically related [54] :

$$\left(\frac{Y}{2}\right)^2 = 8\left(\frac{X}{2}\right)^3 - \frac{1}{4}\hbar^4 t_2 X + \frac{1}{4}\hbar^6 t_3 \quad (2.4.7)$$

This is a good example of what is called algebraic integrability [53, 54]. Since we are looking for hamiltonians with algebraically independent second and third order integrals of motion, this result is not a real superintegrable system.

The classical potential corresponding to (2.4.4) is a purely radial potential $V(r) = R(r)$. This result is directly obtained from (2.4.2) in the limit $\hbar \mapsto 0$.

$$2.b) \beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$$

Differentiating (2.4.2) two times with respect to r , we obtain :

$$\left(r^3 R'\right)'' = 0$$

and hence

$$R(r) = \frac{a}{r} + \frac{b}{r^2}$$

The $\frac{1}{r^2}$ term can be included in the angular part of the general form of the potential. So without loss of generality, we can set $b = 0$. This case will be studied in section 2.4.2 since the radial part of the potential is of the form of case (ii) of Theorem 2.3.1.

2.4.2. Potential of the form $V(r, \theta) = \frac{a}{r} + \frac{S(\theta)}{r^2}$ **with** $a \neq 0$

We consider (2.2.2) and (2.2.4) separate different powers of r and obtain equations relating $\beta(\theta)$ in (2.2.14) with the angular part $S(\theta)$ of the potential :

$$\begin{aligned} \ddot{\beta} + \beta - 2(C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta)\ddot{S} + 5(C_1 \sin \theta - C_2 \cos \theta)\dot{S} \\ + 2(C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta)S = 6a(B_1 \sin 2\theta - B_2 \cos 2\theta) \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

$$\begin{aligned} (B_1 \cos 2\theta + B_2 \sin 2\theta + B_0)S^{(3)} + 8(-B_1 \sin 2\theta + B_2 \cos 2\theta)\ddot{S} \\ + 4(-5B_1 \cos 2\theta - 5B_2 \sin 2\theta + B_0)\dot{S} + 16(B_1 \sin 2\theta - B_2 \cos 2\theta)S \\ = 3a(-15A_1 \cos 3\theta - 15A_2 \sin 3\theta + A_3 \cos \theta + A_4 \sin \theta) \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

$$\begin{aligned} (3A_1 \sin 3\theta - 3A_2 \cos 3\theta + A_3 \sin \theta - A_4 \cos \theta)S^{(3)} \\ + (36A_1 \cos 3\theta + 36A_2 \sin 3\theta + 4A_3 \cos \theta + 4A_4 \sin \theta)\ddot{S} \\ - (132A_1 \sin 3\theta - 132A_2 \cos 3\theta - 4A_3 \sin \theta + 4A_4 \cos \theta)\dot{S} \\ - (144A_1 \cos 3\theta + 144A_2 \sin 3\theta - 16A_3 \cos \theta - 16A_4 \sin \theta)S = 0 \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

Integrating (2.2.4) for G_2 we obtain the function

$$\xi(\theta) = 3D_0S(\theta) - a(C_1 \sin \theta - C_2 \cos \theta) + \xi_0$$

From (2.2.1), it follows that $S(\theta)$ and $\beta(\theta)$ verify :

$$\hbar^2(D_0 S^{(3)} + aC_1 \cos \theta + aC_2 \sin \theta) - 4\xi \dot{S} + 4a\beta = 0 \quad (2.4.11)$$

$$\begin{aligned} & \hbar^2 \left((-C_1 \sin \theta + C_2 \cos \theta) S^{(3)} - 4(C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta) \dot{S} \right. \\ & + 6(C_1 \sin \theta - C_2 \cos \theta) \dot{S} + 4(C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta) S \\ & \left. + 6a(-B_1 \sin 2\theta + B_2 \cos 2\theta) \right) = 4\dot{S}\beta - 8S\beta \\ & - 8(C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta) \dot{S}^2 + 12a(B_1 \cos 2\theta + B_2 \sin 2\theta + B_0) \dot{S} \\ & - 12a^2(A_1 \cos 3\theta + A_2 \sin 3\theta + A_3 \cos \theta + A_4 \sin \theta) \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

$$\begin{aligned} & \hbar^2 \left((B_1 \cos 2\theta + B_2 \sin 2\theta - B_0) S^{(3)} + 8(-B_1 \sin 2\theta + B_2 \cos 2\theta) \dot{S} \right. \\ & \left. - 4(5B_1 \cos 2\theta + 5B_2 \sin 2\theta + B_0) \dot{S} + 16(B_1 \sin 2\theta - B_2 \cos 2\theta) S \right) \\ & = -3a\hbar^2(5A_1 \cos 3\theta + 5A_2 \sin 3\theta + A_3 \cos \theta + A_4 \sin \theta) \\ & + 12a(3A_1 \sin 3\theta - 3A_2 \cos 3\theta + A_3 \sin \theta - A_4 \cos \theta) \dot{S} \\ & + 36a(A_1 \cos 3\theta + A_2 \sin 3\theta + A_3 \cos \theta + A_4 \sin \theta) S \\ & + 2(B_1 \cos 2\theta + B_2 \sin 2\theta + B_0) \dot{S} \ddot{S} - 12(B_1 \sin 2\theta - B_2 \cos 2\theta) \dot{S}^2 \\ & - 16(B_1 \cos 2\theta + B_2 \sin 2\theta + B_0) S \dot{S} \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

$$\begin{aligned} & \hbar^2 \left((3A_1 \sin 3\theta - 3A_2 \cos 3\theta - 3A_3 \sin \theta + 3A_4 \cos \theta) S^{(3)} \right. \\ & + (36A_1 \cos 3\theta + 36A_2 \sin 3\theta - 12A_3 \cos \theta - 12A_4 \sin \theta) \dot{S} \\ & (-132A_1 \sin 3\theta + 132A_2 \cos 3\theta - 12A_3 \sin \theta + 12A_4 \cos \theta) \dot{S} \\ & \left. (-144A_1 \cos 3\theta - 144A_2 \sin 3\theta - 48A_3 \cos \theta - 48A_4 \sin \theta) S \right) = \\ & - 72(A_1 \cos 3\theta + A_2 \sin 3\theta + A_3 \cos \theta + A_4 \sin \theta) S^2 \\ & + (-120A_1 \sin 3\theta + 120A_2 \cos 3\theta - 40A_3 \sin \theta + 40A_4 \cos \theta) S \dot{S} \\ & + (54A_1 \cos 3\theta + 54A_2 \sin 3\theta + 6A_3 \cos \theta + 6A_4 \sin \theta) \dot{S}^2 \\ & + (6A_1 \sin 3\theta - 6A_2 \cos 3\theta + 2A_3 \sin \theta - 2A_4 \cos \theta) \dot{S} \ddot{S} \end{aligned} \quad (2.4.14)$$

The principal result that follows from the compatibility of the preceding determining equations is that the only potential that satisfies (2.4.8) to (2.4.14) is

$$V(r, \theta) = \frac{a}{r} + \frac{\alpha_1 + \alpha_2 \sin \theta}{r^2 \cos^2 \theta} \quad (2.4.15)$$

or potentials that can be rotated to (2.4.15).

The potential (2.4.15) is a well known quadratically superintegrable one [37, 139] with the Coulomb potential as a special case. The third order integral is the commutator (or Poisson commutator) of the two second order ones. For more recent discussions of the potential (2.4.15) see e.g. [49, 86, 122, 126].

2.4.3. Potential of the form $V(r, \theta) = ar^2 + \frac{S(\theta)}{r^2}$ with $a \neq 0$

Here, from Theorem 2.3.1, the third order constant of motion is of the form :

$$\begin{aligned} Y = & D_0 L_3^3 + B_0 L_3 (p_1^2 + p_2^2) + B_1 \{L_3, p_1^2 - p_2^2\} + B_2 \{L_3, p_1 p_2\} \\ & + \{g_1, p_1\} + \{g_2, p_2\} \end{aligned} \quad (2.4.16)$$

As in the preceding case, we obtain from (2.2.2) to (2.2.4) that the angular part of the potential has to be a solution of :

$$\begin{aligned} & (B_1 \cos 2\theta + B_2 \sin 2\theta + B_0) S^{(3)} + 8(-B_1 \sin 2\theta + B_2 \cos 2\theta) \ddot{S} \\ & + 4(-5B_1 \cos 2\theta - 5B_2 \sin 2\theta + B_0) \dot{S} + 16(B_1 \sin 2\theta - B_2 \cos 2\theta) S = 0 \end{aligned} \quad (2.4.17)$$

for $\xi(\theta) = 3D_0 S + \xi_0$ and from (2.2.1) :

$$\hbar^2 D_0 S^{(3)} - 12D_0 S \dot{S} - 4\xi_0 \dot{S} = 0 \quad (2.4.18)$$

$$\begin{aligned} & \hbar^2 \left((B_1 \cos 2\theta + B_2 \sin 2\theta - B_0) S^{(3)} + 8(-B_1 \sin 2\theta + B_2 \cos 2\theta) \ddot{S} \right. \\ & \left. - 4(5B_1 \cos 2\theta + 5B_2 \sin 2\theta + B_0) \dot{S} + 16(B_1 \sin 2\theta - B_2 \cos 2\theta) S \right) \\ & = 2(B_1 \cos 2\theta + B_2 \sin 2\theta + B_0) \dot{S} \ddot{S} - 12(B_1 \sin 2\theta - B_2 \cos 2\theta) \dot{S}^2 \\ & - 16(B_1 \cos 2\theta + B_2 \sin 2\theta + B_0) S \dot{S} \end{aligned} \quad (2.4.19)$$

for $\beta(\theta) = 0$.

We can solve the compatibility between all those determining equations for S to obtain the following potential :

$$\begin{aligned} V(r, \theta) &= ar^2 + \frac{2(b+c) + 2(c-b)\cos 2\theta}{r^2 \sin^2 2\theta} \\ &= ar^2 + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{y^2} \end{aligned} \quad (2.4.20)$$

or potentials that can be rotated to (2.4.20).

The potential (2.4.20) is also a well known quadratically superintegrable potential having the harmonic oscillator as a special case [37, 139]. The third order integral can be obtained as a commutator of the second order ones.

2.4.4. Potential of the form $V(r, \theta) = \frac{S(\theta)}{r^2}$

From (2.2.1) to (2.2.4), we again obtain the determining equations (2.4.8) to (2.4.14) with $a = 0$. The third order constant of motion is in its most general form (2.2.9).

Solving the determining equations for $S(\theta)$ and $\beta(\theta)$ (with $a = 0$), we reobtain special cases of results derived in sections 2.4.2 and 2.4.3 (without the Coulomb or the harmonic radial parts). In addition to these known cases we obtain three additional ones. The first is

$$V(r, \theta) = \frac{\alpha}{r^2 \sin^2 3\theta} \quad (2.4.21)$$

This potential is a special case of the rational three-body Calogero system in two dimensions and is already known to be superintegrable [144].

The third order constant of motion associated to (2.4.21) is :

$$Y = p_1^3 - 3p_1p_2^2 + 2\alpha \left\{ p_1, \frac{-3x^4 + 6x^2y^2 + y^4}{y^2(-3x^2 + y^2)^2} \right\} + \alpha \left\{ p_2, \frac{16xy}{(-3x^2 + y^2)^2} \right\}$$

The potential is obtained both in classical and quantum mechanics.

The two others cases occur when the third order integral of motion takes the form

$$Y = C_1\{L_3^2, p_1\} + 2D_0L_3^3 + \{g_1, p_1\} + \{g_2, p_2\} \quad (2.4.22)$$

i.e. $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = B_0 = B_1 = B_2 = C_2 = 0$. In this case, (2.2.1) to (2.2.4) are reduced to the system for $S(\theta)$ and $\beta(\theta)$:

$$\ddot{\beta} + \beta + C_1(-2 \cos \theta \dot{S} + 5 \sin \theta \dot{S} + 2 \cos \theta S) = 0 \quad (2.4.23)$$

$$\hbar^2 D_0 S^{(3)} - 4 \xi \dot{S} = 0 \quad (2.4.24)$$

$$\hbar^2 C_1 \left(-\sin \theta S^{(3)} - 4 \cos \theta \dot{S} + 6 \sin \theta \dot{S} + 4 \cos \theta S \right) = 4 \dot{S} \dot{\beta} - 8 S \beta - 8 C_1 \cos \theta \dot{S}^2 \quad (2.4.25)$$

with $\xi(\theta) = 3D_0S + \xi_0$.

We distinguish two subcases :

4.4.a) $D_0 = 0$ and $C_1 = 1$.

In this case, we have $\xi = 0$ or $S = 0$. If we set $\xi = 0$ and $S = \dot{T}$, (2.4.23) is solved directly for β

$$\beta(\theta) = \beta_1 \cos \theta + \beta_2 \sin \theta - \sin \theta + 2 \cos \theta \dot{T} \quad (2.4.26)$$

Inserting (2.4.26) in (2.4.25) we obtain a fourth order ODE for T :

$$\begin{aligned} & \hbar^2 (\sin \theta T^{(4)} + 4 \cos \theta T^{(3)} - 6 \sin \theta \ddot{T} - 4 \cos \theta \dot{T}) - 12 \sin \theta \dot{T} \ddot{T} \\ & - 4 \cos \theta T \ddot{T} - 4(\beta_1 \sin \theta - \beta_2 \cos \theta) \ddot{T} - 16 \cos \theta \dot{T}^2 \\ & + 8 \sin \theta T \dot{T} - 8(\beta_1 \cos \theta + \beta_2 \sin \theta) \dot{T} = 0 \end{aligned} \quad (2.4.27)$$

Under the transformation $(\theta, T(\theta)) \mapsto (z, T(z))$, where $z = \tan \theta$, (2.4.27) becomes :

$$\begin{aligned} & \hbar^2 z(1+z^2)^2 T'''' + 4\hbar^2(1+z^2)(1+3z^2) T'''' + [2\hbar^2 z(13+18z^2) - 4\beta_1 z + 4\beta_2 \\ & - 4T - 12z(1+z^2)T'] T'' - 8(2+3z^2)T'^2 - 8\beta_1 T' + 4\hbar^2(1+6z^2)T' = 0 \end{aligned} \quad (2.4.28)$$

This equation can be integrated twice. The first integral is :

$$\begin{aligned} & \hbar^2 z^2(1+z^2)^2 T'''' + 2\hbar^2 z(1+z^2)(1+3z^2) T'''' - 6z^2(1+z^2)T'^2 + 2(-\hbar^2 + \hbar^2 z^2 \\ & + 3\hbar^2 z^4 - 2\beta_1 z^2 + 2\beta_2 z - 2zT)T' + 2T^2 - 4\beta_2 T = K_1 \end{aligned} \quad (2.4.29)$$

for an arbitrary constant of integration K_1 .

The second integral is :

$$\begin{aligned} \left[T'' + \frac{z(2z^2 + 1)T' - T + \beta_2}{z^2(z^2 + 1)} \right]^2 = & \frac{1}{\hbar^2 z^4 (z^2 + 1)^3} \left[4z^4 (z^2 + 1)^2 (T')^3 \right. \\ & + z^2 (z^2 + 1) [4zT + \hbar^2 (2z^2 + 1) + 4\beta_1 z^2 - 4\beta_2 z] (T')^2 - 2z(z^2 + 1) [2zT^2 \\ & - (4\beta_2 z + \hbar^2)T - (K_1 z - \beta_2 \hbar^2)] T' - [4zT^3 + (\hbar^2 (z^2 - 1) + 4\beta_1 z^2 - 12\beta_2 z) T^2 \\ & \left. - 2(K_1 z + \beta_2 (4\beta_1 + \hbar^2) z^2 - 4\beta_2^2 z - \beta_2 \hbar^2) T - (\hbar^2 K_2 z^2 - 2\beta_2 K_1 z + \beta_2^2 \hbar^2) \right] \end{aligned} \quad (2.4.30)$$

for a second arbitrary constant of integration K_2 .

The transformation $(z, T(z)) \mapsto (x, W(x))$:

$$z = \frac{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}{1-2x}, \quad T = \frac{8\hbar^2 W + (\hbar^2 + 4\beta_1)(1-2x)}{8\sqrt{x}\sqrt{1-x}} + \beta_2 \quad (2.4.31)$$

maps (2.4.28), (2.4.29) and (2.4.30) to equations contained in a series of papers by C. Cosgrove on higher order Painlevé equations. Specifically, (2.4.28) is mapped into the fourth order equation F-VII [23] (see also [22]). Equation (2.4.29) is mapped into the third order differential equation Chazy-I.a of [21] and (2.4.30) into the second order differential equation of second degree SD-I.a of [20] with parameters

$$c_1 = c_4 = c_5 = c_6 = c_8 = 0, \quad c_2 = -c_3 = 1, \quad c_7 = \frac{\hbar^2 + 8\beta_1}{16\hbar^2} \quad (2.4.32)$$

$$c_9 = \frac{\hbar^4 - 16\beta_1^2 - 16\beta_2^2 - 8K_1}{64\hbar^4} \quad (2.4.33)$$

$$c_{10} = -\frac{16\hbar^2 K_2 - 8(4\beta_1 + \hbar^2)K_1 + \hbar^2(4\beta_1 + \hbar^2)^2}{256\hbar^6} \quad (2.4.34)$$

SD-I.a is the first canonical subcase of the more general equation that Cosgrove called the "master Painlevé equation", SD-I [20]. SD-I.a is solved by the Backlund correspondence

$$\begin{aligned} W(x) = & \frac{x^2(x-1)^2}{4P_6(P_6-1)(P_6-x)} \left[P_6' - \frac{P_6(P_6-1)}{x(x-1)} \right]^2 + \frac{1}{8}(1 - \sqrt{2\gamma_1})^2(1 - 2P_6) \\ & - \frac{1}{4}\gamma_2 \left(1 - \frac{2x}{P_6} \right) - \frac{1}{4}\gamma_3 \left(1 - \frac{2(x-1)}{P_6-1} \right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{\gamma_4}{4} \right) \left(1 - \frac{2x(P_6-1)}{P_6-x} \right) \end{aligned} \quad (2.4.35)$$

and

$$W'(x) = -\frac{x(x-1)}{4P_6(P_6-1)} \left[P_6' - \sqrt{2\gamma_1} \frac{P_6(P_6-1)}{x(x-1)} \right]^2 - \frac{\gamma_2(P_6-x)}{2(x-1)P_6} - \frac{\gamma_3(P_6-x)}{2x(P_6-1)} \quad (2.4.36)$$

where $\sqrt{2\gamma_1}$ can take either sign and $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ and γ_4 are the arbitrary parameters that define the sixth Painlevé transcendent P_6 obtained from the well known second order differential equation :

$$P_6'' = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{P_6} + \frac{1}{P_6-1} + \frac{1}{P_6-x} \right] (P_6')^2 - \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{P_6-x} \right] P_6' + \frac{P_6(P_6-1)(P_6-x)}{x^2(x-1)^2} \left[\gamma_1 + \frac{\gamma_2 x}{P_6^2} + \frac{\gamma_3(x-1)}{(P_6-1)^2} + \frac{\gamma_4 x(x-1)}{(P_6-x)^2} \right] \quad (2.4.37)$$

The parameters $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ and γ_4 are related to the arbitrary constants of integration β_1, β_2, K_1 and K_2

$$-4c_7 = \gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_4 - \sqrt{2\gamma_1} + 1, \quad (2.4.38)$$

$$-4c_8 = 0 = (\gamma_2 + \gamma_3)(\gamma_1 + \gamma_4 - \sqrt{2\gamma_1}), \quad (2.4.39)$$

$$-4c_9 = (\gamma_3 - \gamma_2)(\gamma_1 - \gamma_4 - \sqrt{2\gamma_1} + 1) + \frac{1}{4}(\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 + \gamma_4 - \sqrt{2\gamma_1})^2, \quad (2.4.40)$$

$$-4c_{10} = \frac{1}{4}(\gamma_3 - \gamma_2)(\gamma_1 + \gamma_4 - \sqrt{2\gamma_1})^2 + \frac{1}{4}(\gamma_2 + \gamma_3)^2(\gamma_1 - \gamma_4 - \sqrt{2\gamma_1} + 1) \quad (2.4.41)$$

Only three parameters of (2.4.37) are arbitrary in our case. From (2.4.39), we see that one of the following relations must hold

$$\gamma_2 = -\gamma_3, \quad \gamma_4 = -\gamma_1 + \sqrt{2\gamma_1}. \quad (2.4.42)$$

From the inverse transformation $x \rightarrow z = \tan \theta$

$$x_{\pm} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{1+z^2}} = \begin{cases} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{cases} \quad (2.4.43)$$

we obtain two solutions for S . By taking the derivative of T in (2.4.31) we obtain the quantum potentials

$$V(r, \theta) = \frac{1}{r^2} \left(\hbar^2 W'(x_{\pm}) - \frac{\pm 8\hbar^2 \cos \theta W(x_{\pm}) + 4\beta_1 + \hbar^2}{4 \sin^2 \theta} \right) \quad (2.4.44)$$

In the limit $\hbar \mapsto 0$, (2.4.29) is reduced to a first order differential equation of second degree in T' :

$$3z^2(1+z^2)T'^2 + 2zTT' - T^2 + 2(\beta_1 z^2 - \beta_2 z)T' + 2\beta_2 T + \frac{K_1}{2} = 0 \quad (2.4.45)$$

(2.4.45) is a special case of the more general equation :

$$A(z)T'^2 + 2B(z)TT' + C(z)T^2 + 2D(z)T' + 2E(z)T + F(z) = 0 \quad (2.4.46)$$

A number of papers has been devoted to the integration of (2.4.46). For example in [101] a method is suggested for its integration.

Special solutions can be obtained under the condition that

$$\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = 0 \quad (2.4.47)$$

This condition implies that $\beta_1 = 0$ and $K_1 = -2\beta_2^2$ in (2.4.45). In this case (2.4.45) can be factorized

$$\left((z + z\sqrt{4+3z^2})T' - T + \beta_2 \right) \left((z - z\sqrt{4+3z^2})T' - T + \beta_2 \right) = 0 \quad (2.4.48)$$

We obtain two solutions :

$$T_1 = \beta_2 + \alpha \frac{z^{\frac{1}{3}}(5 + 3z^2 + 2\sqrt{4+3z^2})^{\frac{1}{6}}}{(2 + \sqrt{4+3z^2})^{\frac{2}{3}}} \quad (2.4.49)$$

$$T_2 = \beta_2 + \alpha \frac{(1+z^2)^{\frac{1}{3}}(2 + \sqrt{4+3z^2})^{\frac{2}{3}}}{z(5 + 3z^2 + 2\sqrt{4+3z^2})^{\frac{1}{6}}} \quad (2.4.50)$$

where α is an integration constant. The angular part of the potential is obtained by differentiating the preceding results with respect to θ and the resulting

classical potentials are

$$V = \frac{3\alpha \sec^4 \theta \left[7 + 3\sqrt{4+3\tan^2 \theta} + \cos 2\theta (1 + \sqrt{4+3\tan^2 \theta}) \right]}{r^2 \tan^{\frac{2}{3}} \theta \sqrt{4+3\tan^2 \theta} \left(2 + \sqrt{4+3\tan^2 \theta} \right)^{\frac{5}{3}} \left(5 + 3\tan^2 \theta + 2\sqrt{4+3\tan^2 \theta} \right)^{\frac{5}{6}}} \quad (2.4.51)$$

and

$$V = -\frac{\alpha \sec^{\frac{2}{3}} \theta \left[47 + 17\sqrt{4+3\tan^2 \theta} + 18\cot^2 \theta (2 + \sqrt{4+3\tan^2 \theta}) + 3\tan^2 \theta (5 + \sqrt{4+3\tan^2 \theta}) \right]}{2r^2 \sqrt{4+3\tan^2 \theta} \left(2 + \sqrt{4+3\tan^2 \theta} \right)^{\frac{1}{3}} \left(5 + 3\tan^2 \theta + 2\sqrt{4+3\tan^2 \theta} \right)^{\frac{7}{6}}} \quad (2.4.52)$$

If condition (2.4.47) is not satisfied, the general solution of (2.4.46) is related to the general solution of the equation

$$\frac{dw}{dz} = \frac{M(z)w^3 + N(z)w^2 + P(z)w}{w^2 + Q(z)} \quad (2.4.53)$$

where

$$T(z) = \frac{w^2 + mw + n}{pw} \quad (2.4.54)$$

and M, N, P and Q are complicated algebraic expressions depending on z and

$$m = \frac{2(BD - AE)}{A\sqrt{B^2 - AC}}, \quad n = \frac{-1}{A(B^2 - AC)} \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}, \quad p = \frac{2\sqrt{B^2 - AC}}{A}$$

$$4.4b) D_0 = 1 (D_0 \neq 0).$$

Equation (2.4.24) can be integrated to (2.4.3) so the angular part of the potential is expressed in terms of the Weierstrass elliptic function $S(\theta) = \hbar^2 \wp(\theta)$. The corresponding potential is

$$V(r, \theta) = \frac{\hbar^2 \wp(\theta)}{r^2} \quad (2.4.55)$$

From the compatibility of (2.4.23) and (2.4.25) we obtain

$$\beta(\theta) = \frac{-C_1}{4(\hbar^2 + \xi_0)\wp^2 + 4b\wp + 6c} \left[(b^2 + 5c(\hbar^2 - 2\xi_0)) \cos \theta - 2(3b - \hbar^4 + \hbar^2 \xi_0 + 2\xi_0^2) \cos \theta \wp^2 - 8(\hbar^2 + \xi_0) \cos \theta \wp^3 + b(\hbar^2 + \xi_0) \sin \theta \wp + (-2(9c + b(-\hbar^2 + \xi_0)) \cos \theta + (3b + 2\hbar^2(\hbar^2 + \xi_0)) \sin \theta) \wp \right] \quad (2.4.56)$$

The potential (2.4.55) thus allows two third order integrals of motion (see (2.4.22))

$$Y_1 = 2L_3^3 + \{L_3, 3\hbar^2 \wp(\theta)\}, \quad (2.4.57)$$

$$Y_2 = \{L_3^2, p_1\} + \{\beta \cos \theta + (2 \cos \theta \dot{\theta} - \dot{\beta}) \sin \theta, p_1\} \\ + \{\beta \sin \theta - (2 \cos \theta \dot{\theta} - \dot{\beta}) \cos \theta, p_2\} \quad (2.4.58)$$

where β is the expression in (2.4.56).

The integral (2.4.57) coincides with (2.4.5) for the more general potential (2.4.4). As noted above (2.4.4) is not really superintegrable because of relation (2.4.7). The potential (2.4.55) is superintegrable since Y_2 (2.4.58), the second order integral of motion X (2.4.6) and the Hamiltonian H are algebraically independent.

In the classical limit $\hbar \mapsto 0$, the system reduces to free motion.

2.5. SUMMARY AND CONCLUSION

The main results of this study can be summed up in two theorems.

Theorem 2.5.1. *In classical mechanics in the Euclidean plane precisely 4 classes of Hamiltonian systems separating in polar coordinates and allowing a third order integral of motion exist. The corresponding potentials are (2.4.15), (2.4.20), (2.4.21) and*

$$V(r, \theta) = \frac{\dot{T}(\theta)}{r^2} \quad (2.5.1)$$

where $T(z)$ satisfies equation (2.4.45) for $z = \tan \theta$. The third order integral of motion is

$$Y = \{L_3^2, p_1\} + \{\beta \cos \theta + (2 \cos \theta \ddot{\theta} - \ddot{\beta}) \sin \theta, p_1\} + \{\beta \sin \theta - (2 \cos \theta \ddot{\theta} - \ddot{\beta}) \cos \theta, p_2\} \quad (2.5.2)$$

The potential (2.4.15) and (2.4.20) are quadratically superintegrable and well-known. The third order integral is functionally dependent on the quadratic ones. The potential (2.4.21) is the three body Calogero system with no central term. Thus the genuinely new superintegrable classical potential is (2.5.1). We have not obtained the general solution of equation (2.4.45), but particular solutions led to the superintegrable potentials (2.4.51) and (2.4.52).

Theorem 2.5.2. *In quantum mechanics the superintegrable systems correspond to the three known potentials (2.4.15), (2.4.20) and (2.4.21) plus two new ones. One new one is given by (2.4.44) where W and W' are expressed in terms of the sixth Painlevé transcendent P_6 in (2.4.35) and (2.4.36). The other new one is given by the Weierstrass elliptic functions $\wp(\theta)$ in (2.4.55).*

The Painlevé transcendents were first introduced in a study of movable singularities of second order nonlinear ordinary differential equations. They play an important role in the theory of classical infinite dimensional integrable systems.

The transcendent P_6 that was obtained as a superintegrable quantum potential in this article depends on 3 free parameters (see (2.4.42)). The Painlevé transcendents P_1 , P_2 and P_4 have already appeared for potentials separable in cartesian coordinates [48]. A remarkable relation between quantum superintegrability and supersymmetry in quantum mechanics was discovered and used to solve the Schrödinger equation with potentials expressed in term of Painlevé transcendents [92]-[95].

ACKNOWLEDGMENTS

We thank Professor C. M. Cosgrove for some valuable correspondence in which he generously helped us to solve equation (2.4.28). The research of P. W. was partially supported by NSERC of Canada.

Chapitre 3

AN INFINITE FAMILY OF SOLVABLE AND INTEGRABLE QUANTUM SYSTEMS ON A PLANE

Référence complète : F. Tremblay, A. V. Turbiner and P. Winternitz, An infinite family of solvable and integrable quantum systems on a plane, *J. Phys. A : Math. Theor.* 42, 242001 (2009). (FAST TRACK COMMUNICATION)

Abstract

An infinite family of exactly-solvable and integrable potentials on a plane is introduced. It is shown that all already known rational potentials with the above properties allowing separation of variables in polar coordinates are particular cases of this family. The underlying algebraic structure of the new potentials is revealed as well as its hidden algebra. We conjecture that all members of the family are also superintegrable and demonstrate this for the first few cases. A quasi-exactly-solvable and integrable generalization of the family is found.

3.1. INTRODUCTION

Some quantum mechanical systems can be characterized by two differently defined global properties. The first has been called exact solvability and it means that all energy levels can be calculated algebraically and the corresponding wave functions can be obtained as polynomials in the appropriate variables, multiplied by some overall gauge factor. The other property is that

of integrability, namely the existence of n integrals of motion that are well defined quantum mechanical operators, commuting with the Hamiltonian and amongst each other.

A more restrictive property than integrability is superintegrability : the existence of more integrals of motion than degrees of freedom. A maximally superintegrable system has $2n - 1$ integrals of motion, including the Hamiltonian. Only subsets of n of them can commute amongst each other.

Any one-dimensional system is integrable and also maximally superintegrable by definition. In this article we concentrate on the two-dimensional case where the situation is quite different. A two-dimensional system is integrable if it allows two integrals of motion and maximally superintegrable if it allows three. Some time ago, it was conjectured that all maximally superintegrable systems for $n = 2$ are exactly solvable [126]. Here we will show that several exactly-solvable systems are in fact maximally superintegrable. Though they seem very different, they are particular cases of a parametric family of Hamiltonians.

Let us consider the following Hamiltonian in \mathbb{R}^2 written in polar coordinates

$$H_k(r, \varphi; \omega, \alpha, \beta) = -\partial_r^2 - \frac{1}{r}\partial_r - \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 + \omega^2 r^2 + \frac{\alpha k^2}{r^2 \cos^2 k\varphi} + \frac{\beta k^2}{r^2 \sin^2 k\varphi} \quad (3.1.1)$$

where $\alpha, \beta > -\frac{1}{4k^2}$, ω and $k \neq 0$ are parameters. For $k = 1$ this system was introduced in [37, 139] and has been called the Smorodinsky-Winternitz system [35]. For $k = 2$ the Hamiltonian (3.1.1) corresponds to the so-called rational BC_2 model [105, 135]. For $k = 3$ it describes the Wolfes model [145] (it is the rational G_2 model in the Hamiltonian reduction method nomenclature [105, 135]); if $\alpha = 0$ it reduces to the Calogero model [8]. The configuration space of (3.1.1) is given by the sector $\frac{\pi}{2k} \geq \varphi \geq 0$, $r \in [0, \infty)$ which is the Weyl chamber for BC_2 if $k = 2$ and G_2 if $k = 3$, respectively.

There is an interesting feature of the Hamiltonian (3.1.1) connecting different values of k , namely,

$$H_{2\ell}(r, \varphi; \omega, 0, \beta) = H_{\ell}(r, \varphi; \omega, \beta, \beta), \quad (3.1.2)$$

$$H_{2\ell}(r, \varphi; \omega, \alpha, 0) = H_{\ell}(r, \varphi - \frac{\pi}{4\ell}; \omega, \alpha, \alpha). \quad (3.1.3)$$

The Hamiltonian (3.1.1) to our knowledge includes *all* published superintegrable systems in a Euclidian plane E_2 that allow the separation of variables in polar coordinates.

3.2. EXACT-SOLVABILITY

It is well-known that the model (3.1.1) for $k = 1, 2, 3$ is exactly-solvable (the energies and eigenfunctions can be found explicitly). For $\alpha = 0$ and k integer the exact solvability of the Hamiltonian (3.1.1) was mentioned in [83]. It can be immediately checked by a direct calculation that the ground state of (3.1.1) is given by

$$\Psi_0 = r^{(a+b)k} \cos^a k\varphi \sin^b k\varphi e^{-\frac{\omega r^2}{2}}, \quad E_0 = 2\omega[(a+b)k+1], \quad (3.2.1)$$

where $\alpha = a(a-1)$ and $\beta = b(b-1)$. If we make a gauge rotation of the Hamiltonian (3.1.1),

$$h_k = \Psi_0^{-1}(H_k - E_0)\Psi_0, \quad (3.2.2)$$

we obtain the operator

$$h_k = -\partial_r^2 + (2\omega r - \frac{2k(a+b)+1}{r})\partial_r - \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 - \frac{2k}{r^2}(-a \tan k\varphi + b \cot k\varphi)\partial_\varphi, \quad (3.2.3)$$

for which the lowest eigenfunction is a constant with zero eigenvalue.

The original eigenfunctions $\Psi(r, \varphi)$ of the Hamiltonian (3.1.1) are related to those of the transformed Hamiltonian h_k as follows $\Psi(r, \varphi) = \Psi_0(r, \varphi)\Xi(r, \varphi)$. Let us solve the original problem (3.1.1) in a traditional way by a separation of variables in h_k . Thus we assume $\Xi(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ and write

$$h_k = h_r + \frac{1}{r^2}h_\varphi. \quad (3.2.4)$$

The operator h_φ written in the new coordinate $z = \sin^2 k\varphi$ reads

$$h_\varphi = 4k^2 z(z-1)\partial_z^2 + 4k^2[(a+b+1)z - b - \frac{1}{2}]\partial_z. \quad (3.2.5)$$

The eigenvalue problem $h_\varphi\Phi = \Lambda_n\Phi$ where Λ_n is the separation constant has polynomial eigenfunctions

$$\Phi_n(z) = P_n^{(a-1/2, b-1/2)}(2z-1), \quad \Lambda_n = 4k^2 n(n+a+b), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.2.6)$$

where $P_n^{(a-1/2, b-1/2)}(2z-1)$ is a Jacobi polynomial. Now the eigenvalue problem for the operator

$$h_k = -\partial_r^2 + (2\omega r - \frac{2ak + 2bk + 1}{r})\partial_r + \frac{\Lambda_n}{r^2}, \quad (3.2.7)$$

appears. Let us perform a further gauge rotation of h_r ,

$$\tilde{h}_k = r^{-\gamma} h_k r^\gamma = -\partial_r^2 + (2\omega r - \frac{2ak + 2bk + 2\gamma + 1}{r})\partial_r + \frac{\Lambda_n - 2(a+b)k\gamma - \gamma^2}{r^2} + 2\omega\gamma. \quad (3.2.8)$$

We absorb the term $2\omega\gamma$ in the energy and choose $\gamma = 2kn$ so as to remove the $1/r^2$ term,

$$\gamma^2 + 2(a+b)k\gamma - \Lambda_n = 0.$$

The resulting radial operator in the $t = r^2$ variable

$$\tilde{h}_r = -4t\partial_t^2 + 4[\omega t - k(2n+a+b) - 1]\partial_t, \quad (3.2.9)$$

has the eigenstates

$$R_N(t) = L_N^{(k(2n+a+b))}(\omega t), \quad E_N = 4\omega N, \quad (3.2.10)$$

where $L_N^{(k(2n+a+b))}(\omega t)$ is a Laguerre polynomial. Finally, the eigenstates of (3.1.1) are

$$\Psi_{N,n} = r^{2nk} R_N(r^2) P_n^{(a-1/2, b-1/2)}(2\sin^2 k\varphi - 1) \Psi_0, \quad E_{N,n} = 2\omega[2N + (2n+a+b)k + 1]. \quad (3.2.11)$$

All formulas remain valid for any real $k \neq 0$. In particular, both $R_N(r^2)$ and $P_n^{(\alpha, \beta)}(z)$ remain polynomials. The eigenvalues are linear in the quantum numbers N, n . For integer (and rational) k there is a degeneracy of states, which is

determined by the number of solutions of the equation

$$N + kn = \text{integer} .$$

Varying k we can change degeneracy leaving the spectra linear in the quantum numbers N, n .

If k in (3.1.1) takes integer values we have a Lie-algebraic interpretation of the problem (3.1.1). In order to reveal it let us make the following change of variables,

$$t = r^2, \quad u = r^{2k} \sin^2 k\varphi . \quad (3.2.12)$$

The resulting gauge-transformed Hamiltonian (3.2.3) in these coordinates takes an algebraic form :

$$\begin{aligned} h_k = & -4t\partial_t^2 - 8ku\partial_{tu}^2 - 4k^2t^{k-1}u\partial_u^2 \\ & +4[\omega t - (a + b)k - 1]\partial_t + [4\omega ku - 2k^2(2b + 1)t^{k-1}]\partial_u . \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

It coincides with already known expressions for the Hamiltonian for $k = 1, 2, 3$ in appropriate variables (see [126, 135]). What is its underlying hidden algebra if any ?

The Hamiltonian h_k preserves the space of polynomials

$$\mathcal{P}_{\mathcal{N}}^{(s)} = (t^p u^q | 0 \leq (p + sq) \leq \mathcal{N}), \quad \mathcal{N} = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.2.14)$$

for $s \geq k-1$ and any integer \mathcal{N} . Hence, it has infinitely many finite-dimensional invariant subspaces $\mathcal{P}_{\mathcal{N}}^{(s)}$. These spaces can be ordered forming an *infinite flag*,

$$\mathcal{P}_0^{(s)} \subset \mathcal{P}_1^{(s)} \subset \mathcal{P}_2^{(s)} \dots \mathcal{P}_{\mathcal{N}}^{(s)} \dots \quad (3.2.15)$$

for fixed s . We call this flag $\mathcal{P}^{(s)}$. The space $\mathcal{P}_{\mathcal{N}}^{(s)}$ is a finite-dimensional irreducible representation space of the infinite-dimensional finitely-generated Lie algebra $\mathfrak{g}^{(s)} \supset \mathfrak{gl}(2, \mathbf{R}) \times \mathbf{R}^{s+1} \oplus \mathbb{T}_s$ of monomials in $(s + 6)$ -generating operators. These generating operators are [39, 40] (see also [134] and [41]),

$$\begin{aligned} J^1 &= \partial_t, \\ J_{\mathcal{N}}^2 &= t\partial_t - \frac{\mathcal{N}}{3}, \quad J_{\mathcal{N}}^3 = su\partial_u - \frac{\mathcal{N}}{3}, \\ J_{\mathcal{N}}^4 &= t^2\partial_t + stu\partial_u - \mathcal{N}t, \end{aligned}$$

$$R_i = t^i \partial_u, \quad i = 0, 1, \dots, s, \quad (3.2.16)$$

and

$$T_s = u \partial_t^s, \quad (3.2.17)$$

(see [135]). The generator $J_{\mathcal{N}}^3$ is the central generator of the $\mathfrak{gl}(2, \mathbf{R})$ -algebra. The generators (3.2.16) of the non-semi-simple Lie algebra $\mathfrak{gl}(2) \ltimes \mathbf{R}^{s+1}$ are vector fields on line bundles over a s -Hirzebruch surface [41]. The meaning of the generator (3.2.17) for $s > 1$ is unclear.

For $s = 1$ the algebra $\mathfrak{g}^{(1)}$ coincides with the algebra $\mathfrak{sl}(3)$. It has the space (3.2.14) for $s = 1$ as an invariant subspace and acts irreducibly there. It is important to note that the space $\mathcal{P}_{\mathcal{N}}^{(s)}$ is a finite-dimensional (reducible) representation space of the finite-dimensional non-semisimple Lie algebra $\mathfrak{gl}(2, \mathbf{R}) \ltimes \mathbf{R}^{s+1}$ (see [135]),

$$\tilde{\mathcal{P}}_{\mathcal{N},p}^{(s)} = \langle t^{n_1} u^{n_2} | 0 \leq (n_1 + s n_2) \leq \mathcal{N} \quad \text{and} \quad 0 \leq n_2 \leq p \rangle \quad (3.2.18)$$

For fixed s and p these spaces form the flag $\tilde{\mathcal{P}}_p^{(s)}$. Each such a flag for $s \geq k - 1$ is preserved by the Hamiltonian h_k . This gives information about the structure of the eigenfunctions. In particular, it implies the existence of a family of eigenfunctions which depend on the variable t only.

It can be immediately checked that h_k for fixed integer k preserves the flag $\mathcal{P}^{(s)}$ for $s = k - 1$, $s = k$, or $s > k$ assuming the hidden algebras $\mathfrak{g}^{(k-1)}$, $\mathfrak{g}^{(k)}$, $\mathfrak{g}^{(s)}$, respectively. It is worth mentioning that the first case $s = k - 1$ supports the already known hidden algebras of the trigonometric BC_2 for $k = 2$ and G_2 for $k = 3$ models, respectively, contrary to the second or third case. However, later on we will see that the case $s = k - 1$ is excluded (see Section 3.3).

The fact that s can take any values $s \geq k - 1$ reflects a degeneracy of eigenstates of the original problem (3.1.1). For particular cases $k = 2, 3$ it was already mentioned in the paper [135]. This degeneracy is removed by the algebraic form of the integrals of motion (see below). Hence, for any integer k the algebraic Hamiltonian (3.2.13) can be rewritten in terms of the generators (3.2.16) (without the operator $J_{\mathcal{N}}^4$) (see Theorem 4.3 from [134]) :

$$h_k = -4J^2J^1 - 8J^3J^1 - 4kR_{k-1}J^3$$

$$+4\omega J^2 - 4[(a+b)k-1]J^1 + 4\omega J^3 - 2k^2(2b+1)R_{k-1}. \quad (3.2.19)$$

where $J^i \equiv J_0^i$.

3.3. COMPLETE INTEGRABILITY.

It is obvious that

$$\mathcal{X}_k(\alpha, \beta) = -L_3^2 + \frac{\alpha k^2}{\cos^2 k\varphi} + \frac{\beta k^2}{\sin^2 k\varphi}, \quad (3.3.1)$$

where $L_3 = \partial_\varphi$ is the 2D angular momentum, is an integral of motion [37, 139]. Its existence is directly related to the separation of variables in polar coordinates in the Schroedinger equation for (3.1.1). Therefore the Hamiltonian (3.1.1) defines a completely-integrable system for any real $k \neq 0$ which is also exactly-solvable.

After a gauge rotation $x_k = \Psi_0^{-1}(\mathcal{X}_k - c_k)\Psi_0$ this integral takes the algebraic form

$$x_k = -4k^2 u(t^k - u)\partial_u^2 - 4k^2[(b + \frac{1}{2})t^k - (a + b + 1)u]\partial_u, \quad (3.3.2)$$

where $c_k = k^2(a+b)^2$ is the lowest eigenvalue of the integral \mathcal{X}_k . It can be easily checked that x_k has infinitely-many finite-dimensional invariant subspaces : it preserves the flag $\mathcal{P}^{(s)}$ for any $s \geq k$. The integral x_k can be rewritten in the generators (3.2.16) as

$$x_k = -4kJ^3R_k + 4J^3J^3 - 4k^2(b + \frac{1}{2})R_k + 4k(a+b)J^3. \quad (3.3.3)$$

The presence of the generator R_k excludes the algebra (3.2.16)-(3.2.17) for $s = k - 1$ as hidden algebra (see the discussion above). It indicates that the hidden algebra of (3.3.1) is $g^{(s)}$ for $s \geq k$. Hence, the hidden algebra of the quantum system (3.1.1) with the integral (3.3.1) is $g^{(s)}$ with $s \geq k$.

3.4. SUPERINTEGRABILITY.

The next question is the existence of an additional integral of motion \mathcal{Y}_{2k} (presumably of order $2k$) for all integer values of k . If such an integral exists then the system (3.1.1) is (maximally) superintegrable. For $k = 1$, the Smorodin-

sky-Winternitz system this integral \mathcal{Y}_2 was found long ago (see [37, 139] and [126]). It turned to be a second order differential operator. For $k = 2$ and $\omega = 0$, which is the case of the so-called singular rational BC_2 model, the integral \mathcal{Y}_4 was found by Olshanetsky-Perelomov in the representation theory approach [105]. This integral is a fourth order differential operator. For $k = 3$ and $\omega = \alpha = 0$ (the so-called singular Calogero model) the corresponding integral is a third order differential operator [105]. For $\alpha \neq 0$ (the so-called singular Wolfes model) it was mentioned in [105] that it has to be of the sixth order. For the general Wolfes model $\omega \neq 0$ (the rational G_2 model in the Hamiltonian reduction method nomenclature) C.Quesne [111] found this integral explicitly in the Dunkl operator formalism. The integral \mathcal{Y}_6 is a sixth order differential operator.

If the integral \mathcal{Y}_{2k} exists it should have the same eigenfunctions as H_k . Hence by a gauge rotation and change of variables (3.2.12) we can obtain an operator y_{2k}

$$y_{2k} = \Psi_0^{-1}(\mathcal{Y}_{2k} - C_{2k})\Psi_0|_{t,u}, \quad (3.4.1)$$

such that y_{2k} is a differential operator of some order in t and u with polynomial coefficients; C_{2k} is the lowest eigenvalue of the integral \mathcal{Y}_{2k} . The described algebraic form y_{2k} would be a consequence of the fact that both h_k (3.2.13) and y_{2k} should preserve the same flag of polynomials.

For the case $k = 1$ the integral \mathcal{Y}_2 was found in [139]. In Cartesian coordinates \mathcal{Y}_2 is of 2nd order and it can be written as

$$\mathcal{Y}_2 = \partial_x^2 - \omega^2 x^2 - \frac{\alpha}{x^2}, \quad (3.4.2)$$

The algebraic form of the integral was calculated in [126]. In the coordinates (3.2.12) the integral (3.4.2) is

$$\frac{y_2}{4} = (t - u)\partial_t^2 + [\omega(u - t) + \alpha + \frac{1}{2}]\partial_t, \quad (3.4.3)$$

where the constant $C_2 = -\omega(2\alpha + 1)$. The integral y_2 (3.4.3) contains the term $u\partial_t$ which is present in the algebra $g^{(1)}$, see (3.2.17). It indicates unambiguously that for the case $k = 1$ the hidden algebra should correspond to $s = 1$. Hence, there is no ambiguity for the $k = 1$ case. The hidden algebra is fixed and it is

$\mathfrak{g}^{(1)} \equiv \mathfrak{sl}(3)$ which is generated by $\mathfrak{gl}(2) \times \mathbb{R}^2 \oplus T_1 \subset \mathfrak{gl}(3)$. The Lie algebraic form of y_2 is the following

$$\frac{y_2}{4} = J^2 J^1 - T_1 J^1 + \omega T_1 - \omega J^2 + \left(a + \frac{1}{2}\right) J^1. \quad (3.4.4)$$

We stress that the generator T_1 (see (3.2.17)) appears explicitly in (3.4.4).

For the case $k = 2$ (the rational BC_2 model) we find the higher integral \mathcal{Y}_4 explicitly,

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_4 = & (\partial_x^2 - \omega^2 x^2 - \partial_y^2 + \omega^2 y^2)^2 + \left\{ \partial_x^2, \frac{(x^2 - y^2)\beta}{x^2 y^2} - \frac{4(x^2 + y^2)\alpha}{(x^2 - y^2)^2} \right\} \\ & + \left\{ \partial_x \partial_y, -\frac{16xy\alpha}{(x^2 - y^2)^2} \right\} + \left\{ \partial_y^2, -\frac{(x^2 - y^2)\beta}{x^2 y^2} - \frac{4(x^2 + y^2)\alpha}{(x^2 - y^2)^2} \right\} \\ & + \frac{16\alpha^2}{(x^2 - y^2)^2} + \frac{(x^2 - y^2)^2 \beta^2}{x^4 y^4} + \frac{8\alpha\beta}{x^2 y^2} - \frac{2(x^4 + y^4)\beta\omega^2}{x^2 y^2}, \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

where $\{, \}$ denotes an anticommutator. Making the gauge rotation $\Psi_0^{-1}(\mathcal{Y}_4 - C_4)\Psi_0$ and the change of variables (3.2.12), we arrive at the algebraic form of the integral

$$\begin{aligned} \frac{y_4}{16} = & (t^2 - u)\partial_t^4 - 8(t^2 - u)u\partial_t^2\partial_u^2 + 16(t^2 - u)u^2\partial_u^4 - 2[\omega t^2 - (2a + 1)t - \omega u]\partial_t^3 \\ & - 4[(2b + 1)t^2 - 2(a + b + 1)u]\partial_t^2\partial_u + 8u[\omega t^2 - (2a + 1)t - \omega u]\partial_t\partial_u^2 \\ & + 16u[(2b + 3)t^2 - 2(a + b + 2)u]\partial_u^3 + 16[\omega^2 t^2 - 3(2a + 1)\omega t - \omega^2 u \\ & + (2a + 1)(2a + 2b + 1)]\partial_t^2 - 4[(2b + 1)\omega t^2 - (2a + 1)(2b + 1)t \\ & - 2(a + b + 1)\omega u]\partial_t\partial_u + 4[(2b + 1)(2b + 3)t^2 + (2a + 1)\omega t u \\ & - 2(2a^2 + 6ab + 2b^2 + 8a + 7b + 5)u]\partial_u^2 \\ & + \omega(2a + 1)(\omega t - 2a - 2b - 1)\partial_t + 2(2a + 1)(2b + 1)(\omega t - 2a - 2b - 1)\partial_u \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

where $C_4 = 4\omega^2[2a(a + 1) - b(b - 1)]$. The two terms $t^2\partial_u$ and $u\partial_t^2$ in y_4 imply $s = 2$. Hence, the hidden algebra for $k = 2$ is $\mathfrak{g}^{(2)}$. The Lie-algebraic form of y_4

is the following

$$\begin{aligned}
\frac{y_4}{16} = & J^2 J^2 J^1 J^1 - J^1 J^1 T_2 + 2J^1 J^1 J^3 J^3 + 4J^3 J^3 R_2 R_0 - 4J^2 J^2 J^3 R_0 - 2J^3 J^3 J^3 R_0 \\
& - 2\omega J^2 J^2 J^1 - 2\omega J^3 J^3 J^1 + 2(2a + 1)J^2 J^1 J^1 - 4(2b + 1)J^2 J^2 R_0 \\
& + 4\omega J^3 R_2 J^1 - 4(2a + 1)J^3 R_1 J^1 + 8(2b + 3)J^3 R_1 R_1 - 8(a + b + 2)J^3 J^3 R_0 \\
& + (2a + 1)(2a + 2b + 1)J^1 J^1 - 3\omega(2a + 1)J^2 J^1 + \omega^2 J^2 J^2 + 4\omega(a + b + 1)J^3 J^1 \\
& - 4\omega(2b + 1)R_2 J^1 + 64(2a + 1)(2b + 1)J^2 R_0 + 2\omega(2a + 1)J^3 R_1 \\
& - 4(2a^2 + 6ab + 2b^2 + 8a + 7b + 5)J^3 R_0 \\
& + 4(2b + 1)(2b + 3)R_2 R_0 + 2\omega T_2 J^1 + 8(a + b + 1)T_2 R_0 \\
& - (2a + 1)(2a + 2b + 1)J^1 + \omega^2(2a + 1)J^2 \\
& + 2\omega(2a + 1)(2b + 1)R_1 - 2(2a + 1)(2b + 1)(2a + 2b + 1)R_0 - \omega^2 T_2 . \quad (3.4.7)
\end{aligned}$$

The generator T_2 (see (3.2.17)) again appears explicitly in (3.4.7).

For the case $k = 3$ (the rational G_2 model) we find the higher integral \mathcal{Y}_6 explicitly by a straightforward (brute force) calculation. It is of 6th order (see [128], App. A). Its lowest eigenvalue is

$$C_6 = 4\omega^3(3a + 3b + 1)(5a^2 + 36ab - 27b^2 + a + 45b + 4) . \quad (3.4.8)$$

Making the gauge rotation $\Psi_0^{-1}(\mathcal{Y}_6 - C_6)\Psi_0$ and the change of variables (3.2.12) we arrive at the algebraic form of the integral y_6 (see [128], App. A). The two elements $R_3 = t^3 \partial_u$ and $T_3 = u \partial_t^3$ are present in y_6 and unambiguously point to $s = 3$. Hence, the hidden algebra of the model at $k = 3$ is $\mathfrak{g}^{(3)}$.

For the case $k = 4$ we again find the higher integral \mathcal{Y}_8 explicitly by a brute force calculation as an eight order differential operator (see [128], App. B). Making the gauge rotation $\Psi_0^{-1}(\mathcal{Y}_8 - C_8)\Psi_0$ and the change of variables with

$$\begin{aligned}
C_8 = & 4\omega^4[3200a^4 + 512a^3(31b + 10) + 16a^2(206b + 159)(2b - 3) \\
& + 16a(310b^3 - 187b^2 - 443b + 105) + 1133b^4 + 150b^3 - 176b^2 + 493b + 4] , \quad (3.4.9)
\end{aligned}$$

we arrive at the algebraic form of the integral, y_8 (see [128], App. B). The elements $R_4 = t^4 \partial_u$ and $T_4 = u \partial_t^4$ in y_8 imply $s = 4$. The hidden algebra of the model for $k = 4$ is $\mathfrak{g}^{(4)}$ which contains the generator T_4 .

We were unable to prove the existence of the higher order integrals \mathcal{Y}_{2k} for integer k with $k > 4$ due to the fast growing complexity of the brute force calculations. However, we feel justified in formulating the following conjecture.

Conjecture. *An integral of motion \mathcal{Y}_{2k} of the order $2k$ exists for the Hamiltonian (3.1.1) for all positive integer values of k . In Cartesian coordinates \mathcal{Y}_{2k} is a differential operator of the order $2k$ with rational coefficients. The gauge transformation (3.4.1) together with the change of variables (3.2.12) transforms \mathcal{Y}_{2k} into the algebraic operator y_{2k} that has polynomial coefficients. The integral y_{2k} is an element of the order $2k$ in the enveloping algebra of the hidden algebra $g^{(k)}$. In particular, y_{2k} contains the terms $4^k[(J^1)^k - T_k](J^1)^k$ which fix $k = s$ in the hidden algebra (3.2.16), (3.2.17). In the limit $\omega = \alpha = 0$, the operator $\mathcal{Y}_{2k}(0, 0, \beta)$ is reduced to the square of an operator of order k .*

Our conjecture is based on the fact that the gauge rotated Hamiltonian h_k (3.2.2) preserves the flag of polynomials (3.2.14), as do all the elements of the underlying hidden algebra $g^{(k)}$ (3.2.16), (3.2.17). All aspects of this Conjecture have been confirmed for $k = 1, 2, 3$ and 4 for general ω, α, β as well as for $k = 1, \dots, 6, 8$ for $\omega = \alpha = 0, \beta \neq 0$. The consideration of $k > 4$ for general ω, α, β requires a different approach, other than the brute force one. A proof of the conjecture could be based on a direct analysis of the commutation relations of the hidden algebra (3.2.16)-(3.2.17).

Any operator preserving this flag must lie in the enveloping algebra of $g^{(k)}$ for given k . The gauge rotated integrals y_{2k} must hence have an algebraic form for all k , as exemplified by $k = 1, 2, 3$ and 4 .

The form of the integrals \mathcal{Y}_{2k} is not unique since we can modify it by adding polynomials in the Hamiltonian (3.1.1) and integral \mathcal{X}_k (3.3.1). Our convention is to require that the highest order terms in \mathcal{Y}_{2k} should have the form

$$[\text{Re}(\partial_1 + i\partial_2)^k]^2. \quad (3.4.10)$$

The lower order terms in \mathcal{Y}_{2k} could be further simplified by linear combinations with lower order polynomials in (3.1.1) and (3.3.1). We also require that \mathcal{Y}_{2k} be a hermitian operator and this implies that it will contain only even powers of the derivatives $(\partial_1^m \partial_2^n, m + n = 0, 2, 4, \dots, 2k)$.

3.5. A QUASI-EXACTLY SOLVABLE EXTENSION.

Some years ago a new class of the Schroedinger equations was discovered for which a finite number of eigenstates can be calculated by purely algebraic means. They were called *quasi-exactly-solvable* [132, 133]. These problems occupy an intermediate place between exactly-solvable problems and non-solvable ones. A large body of articles dedicated to these problems was published during the last 20 years. The articles have ranged from various branches of physics to pure mathematics.

Surprisingly, there exists a quasi-exactly solvable generalization of the Hamiltonian (3.1.1)

$$\begin{aligned} H_{k, \mathcal{N}}^{(\text{qes})}(r, \varphi; \omega, \alpha, \beta) &= -\partial_r^2 - \frac{1}{r} \partial_r - \frac{1}{r^2} \partial_\varphi^2 + \lambda^2 r^6 + 2\lambda \omega r^4 \\ &+ [\omega^2 - 2\lambda(2\mathcal{N} + 2 + k(a + b))] r^2 \\ &+ \frac{\alpha k^2}{r^2 \cos^2 k\varphi} + \frac{\beta k^2}{r^2 \sin^2 k\varphi}, \end{aligned} \quad (3.5.1)$$

(cf. [132, 133, 136]), where $\dim \mathcal{P}_{\mathcal{N}}^{(k)} \approx \frac{\mathcal{N}^2}{2k} + 1$ eigenstates can be found explicitly (algebraically). These algebraic eigenfunctions have the form of a polynomial $p(t, u)$ from the space $\mathcal{P}_{\mathcal{N}}^{(k)}$ (3.2.14) multiplied by a factor $\Psi_0^{(\text{qes})}$:

$$\Psi_0^{(\text{qes})} = r^{(a+b)k} \cos^a k\varphi \sin^b k\varphi e^{-\frac{\omega r^2}{2} - \frac{\lambda r^4}{4}}, \quad (3.5.2)$$

namely,

$$\Psi_{\text{alg}}^{(\text{qes})} = p(t, u) \Psi_0^{(\text{qes})}. \quad (3.5.3)$$

Hence, the number of algebraic states is equal to the dimension of the space $\mathcal{P}_{\mathcal{N}}^{(k)}$.

The gauge-rotated Hamiltonian (3.5.1),

$$h_{k, \mathcal{N}}^{(\text{qes})} = -(\Psi_0^{(\text{qes})})^{-1} (H_{k, \mathcal{N}}^{(\text{qes})} - E_0) \Psi_0^{(\text{qes})},$$

where E_0 is some parameter, in the variables (3.2.12) has the algebraic form :

$$\begin{aligned} h_{k, \mathcal{N}}^{(\text{qes})} &= 4t \partial_t^2 + 8ku \partial_{tu}^2 + 4k^2 t^{k-1} u \partial_u^2 \\ &+ 4[\lambda t^2 - \omega t + (a+b)k + 1] \partial_t + [4\lambda kt u - 4\omega k u + 2k^2(2b+1)t^{k-1}] \partial_u - 4\lambda \mathcal{N} t. \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

It is easy to check that (3.5.4) preserves the space $\mathcal{P}_{\mathcal{N}}^{(k)}$ (3.2.14). Hence, it can be rewritten in generators of the algebra (3.2.16), $\mathfrak{gl}(2) \times \mathbb{R}^{k+1}$ [134] and indeed we have

$$\begin{aligned} h_{k,\mathcal{N}}^{(\text{qes})}/4 &= (J_{\mathcal{N}}^2 + 2J_{\mathcal{N}}^3)J^1 + kJ_{\mathcal{N}}^3R_{k-1} \\ &+ [(a+b)k + 1 + \mathcal{N}]J^1 - \omega(J_{\mathcal{N}}^2 + J_{\mathcal{N}}^3) - \lambda J_{\mathcal{N}}^4 + \frac{k}{6}[2\mathcal{N} + 3k(2b+1)]R_{k-1}. \end{aligned} \quad (3.5.5)$$

Evidently, the QES problem is completely-integrable : \mathcal{X}_k (see (3.3.1)) commutes with (3.5.1). The algebraic form of \mathcal{X}_k after a gauge rotation with (3.5.2) in variables (t, u) remains the same (3.3.2). The Lie-algebraic form (3.3.3) is slightly modified

$$x_k = -4kJ_{\mathcal{N}}^3R_k + 4J_{\mathcal{N}}^3J_{\mathcal{N}}^3 - 4k[k(b + \frac{1}{2}) + \frac{\mathcal{N}}{3}]R_k + 4[k(a+b) + \frac{2\mathcal{N}}{3}]J_{\mathcal{N}}^3 + \frac{4\mathcal{N}^2}{9}. \quad (3.5.6)$$

The question of the existence of a second integral and thus of the superintegrability of the Hamiltonian (3.5.1) remains open.

3.6. CONCLUSIONS.

We have restricted to the case of a Schroedinger equation in a two dimensional Euclidean space E_2 and to the Hamiltonians allowing separation of variables in polar coordinates. The feature underlying the exact solvability, the complete integrability and the conjecture of maximal superintegrability is the existence of a hidden Lie algebra of differential operators. All elements of the hidden algebra and hence also of its enveloping algebra preserve an infinite flag of finite dimensional subspaces of the space of wave functions.

The Hamiltonians and the integrals of motion of the entire family (3.1.1) considered in this article are also elements of the enveloping algebra of $\mathfrak{g}^{(k)}$. The family contains *all* currently known superintegrable systems in E_2 that are separable in polar coordinates. It would be important to clarify whether the Hamiltonian (3.1.1) can be obtained by a Hamiltonian reduction procedure. This is the case for $k = 1, 2, 3$.

The first problem that remains open is to prove our conjecture, namely that the Hamiltonian (3.1.1) is superintegrable for all integers values of k . Another important question is that of the classical limit of the system with Hamiltonian

(3.1.1). For $k = 1, 2$ and 3 these systems are all superintegrable. Chanu et al. [15] have considered the classical case for $\omega = \alpha = 0$ and $k = 2n + 1$ and have conjectured that it is superintegrable for all integer n . We think that the classical limit of (3.1.1) is actually superintegrable for all values of ω, α and k . We plan to verify this conjecture directly by calculating the trajectories for the classical systems. If the systems are (maximally) superintegrable then all bounded trajectories must be closed and the motion must be periodic [104].

The direct construction of the higher order integrals \mathcal{Y}_{2k} for $k \geq 5$ seems intractable. More promising approaches would either involve an efficient use of the hidden algebra $\mathfrak{g}^{(k)}$ or possibly the use of Dunkl operators [32] as suggested for the Calogero model in [108] and for the Wolfes model in [111].

The close relation between exact solvability and maximal superintegrability has also been exemplified in n dimensions [119, 120, 36]. A very complete review of quantum completely-integrable systems in n dimensions was recently given by Oshima [106]. For some cases these systems are known to be exactly-solvable. It would be of great interest to investigate their possible (maximal) superintegrability.

ACKNOWLEDGMENTS

A.V.T. wants to express his deep gratitude to S.P.Novikov for useful discussions. A.V.T. thanks the CRM, University of Montreal, Canada where this work was started and IHES, Bures-sur-Yvette, France where it was completed for their kind hospitality extended to him. The research of A.V.T. is supported in part by DGAPA grant IN121106 (Mexico). A.V.T. thanks the University Program FENOMECA (UNAM, Mexico) for partial support. The research of P.W. was partially supported by a research grant from NSERC of Canada.

Chapitre 4

PERIODIC ORBITS FOR AN INFINITE FAMILY OF CLASSICAL SUPERINTEGRABLE SYSTEMS

Référence complète : F. Tremblay, A. V. Turbiner and P. Winternitz, Periodic orbits for an infinite family of classical superintegrable systems, *J. Phys. A : Math. Theor.* 43, 015202 (2010).

Abstract

We show that all bounded trajectories in the two dimensional classical system with the potential $V(r, \varphi) = \omega^2 r^2 + \frac{\alpha k^2}{r^2 \cos^2 k\varphi} + \frac{\beta k^2}{r^2 \sin^2 k\varphi}$ are closed for all integer and rational values of k . The period is $T = \frac{\pi}{2\omega}$ and does not depend on k . This agrees with our earlier conjecture suggesting that the quantum version of this system is superintegrable.

4.1. INTRODUCTION

A recent article was devoted to an infinite family of quantum systems on a plane described by the Hamiltonian :

$$H_k = -\partial_r^2 - \frac{1}{r}\partial_r - \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 + \omega^2 r^2 + \frac{\alpha k^2}{r^2 \cos^2 k\varphi} + \frac{\beta k^2}{r^2 \sin^2 k\varphi}, \quad (4.1.1)$$

where k is an arbitrary real number and (r, φ) are polar coordinates [127]. These systems were shown to be exactly solvable and integrable for all values of k . Integrability is assured by the existence of a second order integral of motion

$$X_k = L_3^2 + \frac{\alpha k^2}{\cos^2 k\varphi} + \frac{\beta k^2}{\sin^2 k\varphi}, \quad L_3 = -i\partial_\varphi \quad (4.1.2)$$

where L_3 is the two-dimensional angular momentum.

The existence of the integral X_k implies the separation of variables in polar coordinates in the Schrodinger equation in quantum mechanics and also in the Hamilton-Jacobi equation in classical mechanics.

Superintegrability in a two-dimensional system means that one further integral of motion exists. Let us call it Y_k .

It was conjectured in our previous article [127] that the system (4.1.1) is superintegrable for all integer values of k and that the additional integral of motion is of order $2k$. This conjecture was proven for $k = 1, 2, 3$ and 4 . If $\alpha = 0$ or $\beta = 0$, it was proven for $k = 1$ to 6 and 8 . For $k = 1, 2$ and 3 , the system (4.1.1) reduces to known superintegrable systems. For $k = 1$, this is one of the 4 systems found in [37, 139], for $k = 2$ it was found in [105] and for $k = 3$ in [145].

In all cases ($k = 1, 2, 3$ and 4) the quantum Hamiltonian and the other quantum integrals of motion lie in the enveloping algebra of an underlying hidden Lie algebra [135] and this is presumably true for all integer values of k [127].

The purpose of this article is to analyze the corresponding classical system with Hamiltonian :

$$H_k = p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} + \omega^2 r^2 + \frac{\alpha k^2}{r^2 \cos^2 k\varphi} + \frac{\beta k^2}{r^2 \sin^2 k\varphi}, \quad (4.1.3)$$

We show that all bounded trajectories for this system are closed and that the motion is periodic for all integer and rational values of k .

We recall that in general, in an n -dimensional space, maximal superintegrability means that the classical Hamiltonian allows $2n - 1$ functionally independent integrals of motion (including the Hamiltonian) that are well defined functions on phase space. In classical mechanics maximal superintegrability implies that all bounded trajectories are closed and the motion is periodic [104]. The corresponding statement in quantum mechanics is that the existence of a non-abelian algebra of integrals of motion implies that the energy levels of the system are degenerate. In the two dimensional case that means that the energy depends on one quantum number, the wave function on two. This is indeed

the case for the Hamiltonian (4.1.1) for all integer values of k and is part of the justification of our conjecture [127].

In Section 4.2 we integrate the Hamilton-Jacobi equation for arbitrary values of k in polar coordinates, restricting to the case of bounded trajectories. In Section 4.3 we obtain an explicit expression for the bounded trajectories in terms of Chebyshev polynomials and show that they are all closed for integer and rational values of k . The period in time is $T = \frac{\pi}{2\omega}$. For integer k with $k \geq 2$, up to $k - 1$ singular points can occur on the trajectories in with the tangent vector is not defined. The special case $k = 1$ is discussed in detail in Section 4.4. This is the only case in which the Hamilton-Jacobi equation separates in a second coordinate system, namely in cartesian coordinates. Section 4.5 is devoted to examples of trajectories illustrating all features presented in the earlier sections.

4.2. INTEGRATION OF THE HAMILTON-JACOBI EQUATION

4.2.1. The basic equations

The Hamilton-Jacobi equation for the considered system in polar coordinates has the form

$$H_k = \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 + \omega^2 r^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\alpha k^2}{\cos^2 k\varphi} + \frac{\beta k^2}{\sin^2 k\varphi} \right) = E \quad (4.2.1)$$

We set the integral of motion (4.1.2) equal to a constant A . Since coordinates in (4.2.1) separate we look for a solution in which the classical action has the form

$$S(r, \varphi, t) = S_1(r) + S_2(\varphi) - Et \quad (4.2.2)$$

and obtain

$$r^2 \left(\frac{\partial S_1}{\partial r} \right)^2 + \omega^2 r^4 - Er^2 = -A \quad (4.2.3)$$

$$X_k = \left(\frac{\partial S_2}{\partial \varphi} \right)^2 + \frac{\alpha k^2}{\cos^2 k\varphi} + \frac{\beta k^2}{\sin^2 k\varphi} = A \quad (4.2.4)$$

Since we are interested in the trajectories we do not need to solve for S_1 and S_2 , though that is obviously possible. Instead we follow the usual procedure

[42] and calculate the derivatives of S with respect to E and A . We have

$$S_1 = \int \frac{\sqrt{-A + Er^2 - \omega^2 r^4}}{r} dr \quad (4.2.5)$$

$$S_2 = \int \frac{\sqrt{A \cos^2 k\varphi \sin^2 k\varphi - \alpha k^2 \sin^2 k\varphi - \beta k^2 \cos^2 k\varphi}}{\cos k\varphi \sin k\varphi} d\varphi \quad (4.2.6)$$

and hence

$$\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{\partial S_1}{\partial E} - t = \delta_1 \quad (4.2.7)$$

$$\frac{\partial S}{\partial A} = \frac{\partial S_1}{\partial A} + \frac{\partial S_2}{\partial A} = \delta_2 \quad (4.2.8)$$

where δ_1 and δ_2 are constants.

4.2.2. Integration of the radial part

From (4.2.5) and (4.2.7) we have

$$t + \delta_1 = \frac{1}{2} \int \frac{r dr}{\sqrt{-A + Er^2 - \omega^2 r^4}} \quad (4.2.9)$$

The roots of the denominator are

$$(r_{1,2})^2 = \frac{1}{2\omega^2} (E \pm \sqrt{E^2 - 4\omega^2 A}) \quad (4.2.10)$$

Bounded motion $r_1 \leq r \leq r_2$ is obtained for

$$E^2 - 4\omega^2 A \geq 0 \quad \text{and} \quad A \geq 0 \quad (4.2.11)$$

Performing the integration in (4.2.9) we obtain

$$r^2 = \frac{1}{2\omega^2} \left(E + \sqrt{E^2 - 4\omega^2 A} \sin [4\omega(t + \delta_1)] \right) \quad (4.2.12)$$

Thus for $\omega > 0$, r^2 is indeed bounded and periodic with period $T = \frac{\pi}{2\omega}$ for all values of α and β as long as (4.2.11) is satisfied.

For $\omega = 0$ the integral (4.2.9) must be evaluated differently and we obtain

$$r^2 = \frac{A + 4E^2(t + \delta_1)^2}{E} \quad (4.2.13)$$

We see that the trajectories for $\omega = 0$ are not bounded, independently of the values of alpha and beta.

The limiting case $A = 0$ corresponds to the harmonic oscillator for which all trajectories are bounded and periodic. In the other limiting case $E^2 - 4\omega^2 A = 0$

the integral (4.2.9) is not defined. Directly from (4.2.3) we obtain $\frac{\partial S_1}{\partial r} = 0$, $r = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{E}{2}}$ i.e. the trajectories are circles.

4.2.3. Integration of the angular part

From (4.2.5) and (4.2.6) we obtain

$$\frac{\partial S_1}{\partial A} = -\frac{1}{2} \int \frac{dr}{r\sqrt{-A + Er^2 - \omega^2 r^4}} \quad (4.2.14)$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial A} = \frac{1}{2} \int \frac{\sin k\varphi \cos k\varphi d\varphi}{\sqrt{A \cos^2 k\varphi \sin^2 k\varphi - \alpha k^2 \sin^2 k\varphi - \beta k^2 \cos^2 k\varphi}} \quad (4.2.15)$$

The integrals are readily evaluated to give

$$\frac{\partial S_1}{\partial A} = -\frac{1}{4\sqrt{A}} \arcsin \left[\frac{-2A + Er^2}{r^2 \sqrt{E^2 - 4\omega^2 A}} \right] \quad (4.2.16)$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial A} = -\frac{1}{4k\sqrt{A}} \arcsin \left[\frac{-2A \sin^2 k\varphi + A - (\alpha - \beta)k^2}{\sqrt{(A - \alpha k^2 + \beta k^2)^2 - 4k^2 \beta A}} \right] \quad (4.2.17)$$

In addition to (4.2.11) we require

$$(A - \alpha k^2 + \beta k^2)^2 - 4k^2 \beta A > 0 \quad \text{and} \quad \beta > 0 \quad (4.2.18)$$

A more symmetric way of writing this condition is

$$[A - (\alpha + \beta)k^2]^2 - 4\alpha\beta k^2 \geq 0 \quad (4.2.19)$$

From the form of the Hamiltonian (4.1.3) we expect the trajectories to be restricted to sectors

$$\frac{n\pi}{2k} < \varphi < \frac{(n+1)\pi}{2k}, \quad n \in \mathbb{R} \quad (4.2.20)$$

The integral (4.2.15) was evaluated using the substitution $z = \sin^2 k\varphi$. The denominator in the integral vanishes for the values

$$z_{1,2} = \frac{(A - \alpha k^2 + \beta k^2) \mp \sqrt{(A - \alpha k^2 + \beta k^2)^2 - 4A\beta k^2}}{2A} \quad (4.2.21)$$

Condition (4.2.18) is necessary to assure $z_1 < z < z_2$ which is equivalent to (4.2.19). A final condition is $0 \leq z_{1,2} \leq 1$ which implies

$$A + k^2(\beta - \alpha) \geq 0 \quad \text{and} \quad \alpha > 0 \quad (4.2.22)$$

4.3. THE BOUNDED TRAJECTORIES

4.3.1. Equation for trajectories for integer values of k

So far we have established that bounded trajectories for the Hamiltonian (4.1.3) are obtained if the constants of the system satisfy

$$\begin{aligned} A > 0, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad \omega > 0, \quad A > k^2|\beta - \alpha|, \\ [A - (\alpha + \beta)k^2]^2 - 4\alpha\beta k^2 > 0, \quad E^2 - 4\omega^2 A > 0 \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

Now let us obtain an equation for the trajectories. From (4.2.8), (4.2.16) and (4.2.17) we have

$$k \arcsin R + \arcsin U_k = -4k\sqrt{A}\delta_2 \quad (4.3.2)$$

where we have introduced

$$R = \frac{-2A + Er^2}{r^2\sqrt{E^2 - 4\omega^2 A}} \quad \text{and} \quad U_k = \frac{-2A \sin^2 k\varphi + A - (\alpha - \beta)k^2}{\sqrt{[A - (\alpha + \beta)k^2]^2 - 4\alpha\beta k^2}} \quad (4.3.3)$$

for r^2 and $z = \sin^2 k\varphi$ in the intervals

$$\frac{1}{2\omega^2}(E - \sqrt{E^2 - 4\omega^2 A}) \leq r^2 \leq \frac{1}{2\omega^2}(E + \sqrt{E^2 - 4\omega^2 A}) \quad (4.3.4)$$

$$z_1 \leq z \leq z_2 \quad (4.3.5)$$

where $z_{1,2}$ are as in (4.2.21).

We have

$$-1 \leq R \leq 1, \quad -1 \leq U_k \leq 1 \quad (4.3.6)$$

Once R is known as a function of φ we obtain $r(\varphi)$ as

$$r(\varphi) = \sqrt{\frac{2A}{E - R\sqrt{E^2 - 4\omega^2 A}}}$$

We rewrite (4.3.2) as

$$k \arccos R = -\arccos U_k + C \quad (4.3.7)$$

with

$$C = \frac{(k+1)\pi}{2} + 4k\sqrt{A}\delta_2, \quad 0 \leq C \leq 2\pi \quad (4.3.8)$$

Equation (4.3.7) can be converted into an algebraic equation for R in term of $\sin^2 k\varphi$. We use the well-known formula [45] for the Chebyshev polynomials

$$T_k(x) = \cos(k \arccos x) = \frac{(x + i\sqrt{1-x^2})^k + (x - i\sqrt{1-x^2})^k}{2} \quad (4.3.9)$$

for $k \geq 1$ and obtain

$$T_k(R) = \frac{(R + i\sqrt{1-R^2})^k + (R - i\sqrt{1-R^2})^k}{2} = U_k \cos C \pm \sqrt{1-U_k^2} \sin C \quad (4.3.10)$$

We see that we can restrict the values of C to $0 \leq C \leq \pi$ since the interval $\pi \leq C \leq 2\pi$ will give the same trajectories.

Let us write (4.3.10) as a polynomial equation with real coefficients for R (and thus for r^2). We do this separately for even and odd values of k and obtain

$k = 2m :$

$$T_{2m} = \sum_{l=0}^m \binom{2m}{2l} \sum_{j=0}^l (-1)^j \binom{l}{j} R^{2(m-j)} = U_{2m} \cos C \pm \sqrt{1-U_{2m}^2} \sin C$$

$k = 2m + 1 :$

$$T_{2m+1} = \sum_{l=0}^m \binom{2m+1}{2l} \sum_{j=0}^l (-1)^j \binom{l}{j} R^{2(m-j)+1} = U_{2m+1} \cos C \pm \sqrt{1-U_{2m+1}^2} \sin C \quad (4.3.11)$$

The crucial point is that (4.3.11) does not contain any multivalued functions. It follows that $R(\varphi)$ and ultimately $r(\varphi)$ is a periodic function with the same period τ as $\sin^2 k\varphi$ namely $\tau = \frac{\pi}{k}$ and

$$r(\varphi) = r\left(\varphi + \frac{\pi}{k}\right) \quad (4.3.12)$$

Hence all bounded trajectories are closed and the motion is periodic.

We stress that $\tau = \frac{\pi}{k}$ is the period of r as a function of φ . Both r and φ are periodic in time t with the same period, namely $T = \frac{\pi}{2\omega}$ (see (4.2.12)) and this period does not depend on k and coincides with that of the harmonic oscillator.

Alternative (and equivalent) equations for the trajectories can be obtained. If we solve (4.3.10) for U_k we obtain

$$U_k(\varphi) = T_k(R) \cos C \pm \sqrt{1 - T_k(R)^2} \sin C \quad (4.3.13)$$

Since we have $|U_k| \leq 1$ we can define η_k by putting

$$\cos(\eta_k \pm C) = U_k \quad (4.3.14)$$

and rewrite (4.3.10) as

$$T_k(R) = \cos \eta_k \quad (4.3.15)$$

In section 4.5 we shall plot the bounded trajectories for low values of k . The equation for the trajectories then simplify and we have

$$k = 1: \quad R = U_1 \cos C \pm \sqrt{1 - U_1^2} \sin C \quad (4.3.16)$$

$$k = 2: \quad 2R^2 - 1 = U_2 \cos C \pm \sqrt{1 - U_2^2} \sin C \quad (4.3.17)$$

$$k = 3: \quad 4R^3 - 3R = U_3 \cos C \pm \sqrt{1 - U_3^2} \sin C \quad (4.3.18)$$

$$k = 4: \quad 8R^4 - 8R^2 + 1 = U_4 \cos C \pm \sqrt{1 - U_4^2} \sin C \quad (4.3.19)$$

The trajectories are always closed curves within the sectors (4.2.20). They can never actually reach the boundaries of the sectors, unless we have $\alpha = 0$ or $\beta = 0$ (or both). The trajectories degenerate into line segments for $U_k^2 = 1$ (see (4.3.10)). The length of the segment is determined by the limits (4.3.4) and (4.3.5) which must be imposed.

4.3.2. Singular points on the trajectories for k integer

Let us consider a curve given in polar coordinates. Singular points on the curve are those where the derivative $\frac{dr}{d\varphi}$ is not defined. They satisfy the over-determined system of equations :

$$F(r, \varphi) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \varphi} = 0 \quad (4.3.20)$$

In our case the equation of the curve is

$$F_k(r, \varphi) = T_k(R) - U_k \cos C \mp \sqrt{1 - U_k^2} = 0 \quad (4.3.21)$$

and the derivatives satisfy

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_{2m}}{\partial r} &= \frac{\partial T_{2m}}{\partial R} \frac{dR}{dr} \\ &= 2 \sum_{l=0}^m \binom{2m}{2l} \sum_{j=0}^l (-1)^j \binom{l}{j} (m-j) R^{2(m-j)-1} \frac{dR}{dr} \\ \frac{\partial F_{2m+1}}{\partial r} &= \frac{\partial T_{2m+1}}{\partial R} \frac{dR}{dr}\end{aligned}\tag{4.3.22}$$

$$\begin{aligned}&= \sum_{l=0}^m \binom{2m+1}{2l} \sum_{j=0}^l (-1)^j \binom{l}{j} [2(m-j) + 1] R^{2(m-j)} \frac{dR}{dr} \\ \frac{\partial F_k}{\partial \varphi} &= \frac{\cos C \sqrt{1 - U_k^2} \pm U_k \sin C}{\sqrt{1 - U_k^2}} \frac{dU_k}{d\varphi}\end{aligned}\tag{4.3.23}$$

From equation (4.3.3) we see that $\frac{dR}{dr}$ vanishes only for $r \rightarrow \infty$ and $\frac{dU_k}{d\varphi}$ only for $\varphi = \frac{n\pi}{2k}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. These values correspond to points that do not lie on a trajectory.

The singular points satisfy $U_k = \pm \cos C$ that is

$$\sin^2 k\varphi = \frac{A + k^2(\beta - \alpha) \pm \sqrt{(A + k^2(\beta - \alpha))^2 - 4A\beta k^2} \cos C}{2A}\tag{4.3.24}$$

and one of equations (4.3.23) for k even or odd respectively.

From (4.3.23) we see that $\frac{\partial F_k}{\partial r}$ is a polynomial of order $k - 1$ and will hence have $k - 1$ zeros, all of them real. These zeros are actually singular points if the corresponding values of r and φ lie on the trajectories (see (4.3.21)). This in turn depends on the constants A , C and E i.e. on the initial conditions (for ω , α and β given). The statement thus is : the number n_0 of singular points on the trajectories satisfies

$$0 \leq n_0 \leq k - 1\tag{4.3.25}$$

For small values of k these formulas give :

for $k = 1$:

$$\frac{\partial F_1}{\partial r} = \frac{dR}{dr} \neq 0 \quad r_1 \leq r \leq r_2$$

There are no singular points.

For $k = 2$:

$$\frac{\partial F_2}{\partial r} = 4R \frac{dR}{dr} = 0$$

The possible singular point corresponds to $r = \sqrt{\frac{2A}{E}}$.

For $k = 3$:

$$\frac{\partial F_3}{\partial r} = 3(4R^2 - 1) \frac{dR}{dr} = 0$$

The two possible singular points are $R = \pm \frac{1}{2}$ i.e.

$$r^2 = \frac{4A}{2E \pm \sqrt{E^2 - 4\omega^2 A}}$$

For $k = 4$:

$$\frac{\partial F_3}{\partial r} = 16R(2R^2 - 1) \frac{dR}{dr} = 0$$

The three possible singular points are $R_1 = 0$ and $R_{2,3} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ i.e.

$$r = \sqrt{\frac{2A}{E}}, \quad r^2 = \frac{2\sqrt{2}A}{\sqrt{2}E \mp \sqrt{E^2 - 4\omega^2 A}}$$

4.3.3. Equation for trajectories for rational values of $k = m/n$

In the last subsection, we obtained the equation for the trajectories for integer values of k . We have established that those trajectories for the Hamiltonian (4.1.3) are bounded if the constants of the system satisfy conditions (4.3.1). Now let us obtain the trajectories when k is rational.

Here we set $k = m/n$ for m, n integers. The bounded trajectories in this case are obtained under the same conditions on the constants of the system as those specified in the preceding subsection (4.3.1).

Equation (4.3.7) becomes

$$m \arccos R = n \arccos U_k + \tilde{C} \quad (4.3.26)$$

Using identity (4.3.9) we obtain

$$T_m(R) = T_n(U_k) \cos \tilde{C} \pm \sqrt{1 - T_n(U_k)^2} \sin \tilde{C} \quad (4.3.27)$$

Following the same arguments as in subsection 4.3.1, we see that $R(\varphi)$ and $r(\varphi)$ are periodic functions of the angle φ of period $\tau = \frac{\pi}{k} = \frac{n\pi}{m}$. Again all bounded trajectories are closed and the motion is periodic.

In Section 4.5 we will present the trajectories for the rational values $k = 1/2, 1/3, 3/2$.

4.3.4. Comments on the range of the parameters

The trajectories given by (4.3.10) or (4.3.11) (see also (4.3.16)-(4.3.19)) and (4.3.27) depend on three quantities E , A and C . E and A are values of the energy H_k (4.2.1) and the integral of motion X_k (4.2.4). The third integral Y_k , responsible for superintegrability has so far not figured explicitly and is related to the constant C . The quantities A and E are restricted by relations (4.3.1) in order for the trajectories to be bounded. We allow C to take values $0 \leq C \leq \pi$. The trajectories could also be calculated differently, using all three integrals of motion and just one of the Newton equations of motion. This may impose further conditions on the parameters involved. We discuss this in detail for $k = 1$ in section 4.4.

4.4. THE SPECIAL CASE $k = 1$

The bounded trajectories for $k = 1$ are given by (4.3.16) with $R(r)$ and $U_1(\varphi)$ defined in (4.3.3). The case $k = 1$ differs from that of all other values of k by the fact that the additional integral of motion Y_k for $k = 1$ is second order in the momenta and hence also leads to the separation of variables in the Hamilton-Jacobi equation. Explicitly we have [37, 139]

$$Y_1 = E_1 = P_1^2 + \omega^2 x^2 + \frac{\alpha}{x^2} \quad (4.4.1)$$

so Y_1 is the energy related to motion in the x direction (equally well we could have put $Y_1 = E_2 = E - E_1$ or $Y_1 = E_1 - E_2$ where E_2 is the energy related to motion in y direction). The Hamilton-Jacobi equation in this case is multiseparable. Namely it separates in polar coordinates (for any k) and cartesian ones (for $k = 1$). For $k = 1$ it also separates in elliptic coordinates with an arbitrary focal distance of $0 < f < \infty$.

The equations of motion were solved in cartesian coordinates [37, 139] and the solution corresponding to bounded trajectories in the notations of the present article are

$$x^2 = \frac{E_1}{2\omega^2} + \frac{1}{2\omega^2} \sqrt{E_1^2 - 4\alpha\omega^2} \sin[4\omega(t + C_1)] \quad (4.4.2)$$

$$y^2 = \frac{E_2}{2\omega^2} + \frac{1}{2\omega^2} \sqrt{E_2^2 - 4\beta\omega^2} \sin[4\omega(t + C_2)] \quad (4.4.3)$$

Above we have $E_1 + E_2 = E$ and C_1, C_2 are integration constants. From (4.4.2) and (4.4.3) we see that the trajectories are bounded and closed. They lie inside a rectangle

$$\frac{E_1 - \sqrt{E_1^2 - 4\alpha\omega^2}}{2\omega^2} \leq x^2 \leq \frac{E_1 + \sqrt{E_1^2 - 4\alpha\omega^2}}{2\omega^2} \quad (4.4.4)$$

$$\frac{E_2 - \sqrt{E_2^2 - 4\beta\omega^2}}{2\omega^2} \leq y^2 \leq \frac{E_2 + \sqrt{E_2^2 - 4\beta\omega^2}}{2\omega^2} \quad (4.4.5)$$

We see that

$$2\omega\sqrt{\alpha} \leq E_1 \leq E - 2\omega\sqrt{\beta} \quad (4.4.6)$$

Eliminating t from (4.4.2) and (4.4.3) we obtain an equation for the trajectories, namely

$$y^2 = \frac{E_2}{2\omega^2} + \frac{\sqrt{E_2^2 - 4\beta\omega^2}}{2\omega^2 \sqrt{E_1^2 - 4\alpha\omega^2}} \left[\cos S(-E_1 + 2\omega^2 x^2) \pm 2\omega \sin S \sqrt{-\alpha + E_1 x^2 - \omega^2 x^4} \right] \quad (4.4.7)$$

for $0 \leq S = C_1 - C_2 \leq \pi$.

This equation is a fourth order polynomial equation involving the coordinates x and y . Viewing x as a parameter for the curve we note that it must satisfy (4.4.5). The curve (4.4.7) has four branches, each lying entirely within one quadrant of the (x, y) plane. For $\alpha > 0$ and $\beta > 0$ it can never reach the coordinate axes (see (4.4.4) and (4.4.5)).

In the limiting cases when $\sin S = 0$ the closed curve (4.4.7) collapses into a segment of a quadric. For $S = 0$ this is a segment of a hyperbola and for $S = \pi$ a segment of an ellipse (always inside the rectangle (4.4.4) and (4.4.5)).

The trajectory (4.3.16) in polar coordinates can be made more explicit namely

$$r^2 = \frac{2A}{E - \sqrt{E^2 - 4\omega^2 A} \left(U \cos C \pm \sqrt{1 - U^2} \sin C \right)} \quad (4.4.8)$$

Again this is a fourth order polynomial curve (in r and $\sin \varphi$) that degenerates into a segment of a quadric for $\sin C = 0$. Considering $z = \sin^2 \varphi$ as a parameter of the curve we must restrict to the interval (4.3.4).

The trajectories given by (4.4.7) and (4.4.8) must coincide. This gives a relationship between cartesian constants $\{E_1, E, S\}$ and the polar constants $\{A, E, C\}$. We calculate $r(t)$ and $\varphi(t)$ from (4.4.2) and (4.4.3) and compare $r(t)$ from (4.2.12) and $\varphi(t)$ from (4.3.16). For given total energy E (and α, β, ω) we obtain

$$A = \frac{E_1 E_2 + 2(\alpha + \beta)\omega^2 - \sqrt{(E_1^2 - 4\alpha\omega^2)(E_2^2 - 4\beta\omega^2)} \cos S}{2\omega^2} \quad (4.4.9)$$

and

$$\cos C = \frac{A(2E_1 - E) - E(\alpha - \beta)}{\sqrt{(A^2 + (\alpha - \beta)^2 - 2A(\alpha + \beta))(E^2 - 4\omega^2 A)}} \quad (4.4.10)$$

The condition $|\cos C| \leq 1$ is not necessarily automatically satisfied by the right hand side of (4.4.10) and imposes further conditions. First of all, the denominator in (4.4.10) must be the square root of a positive number which implies

$$A \geq (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 \quad (4.4.11)$$

Secondly, the equation $\cos^2 C = 1$ is a quadratic polynomial in A and E_1

$$\omega^2 A^2 + A(E_1^2 - E_1 E - 2(\alpha + \beta)\omega^2) + E^2 \alpha + E_1 E(-\alpha + \beta) + (\alpha - \beta)^2 \omega^2 = 0 \quad (4.4.12)$$

An example of the corresponding curve in the (E_1, A) plane is given on Fig. 4.1. We have chosen $E = 20$, $\omega = 2$, $\alpha = 3$ and $\beta = 2$. The curve $\cos^2 C = 1$ lies inside the rectangle

$$\begin{aligned} (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 &\leq A \leq \frac{E}{4\omega^2} \\ 2\omega\sqrt{\alpha} &\leq E_1 \leq E - 2\alpha\sqrt{\omega} \end{aligned}$$

We have $0 < \cos C < 1$ in region I, $-1 < \cos C < 0$ in II, $\cos C < -1$ III and IV, $\cos C > 1$ in V and VI.

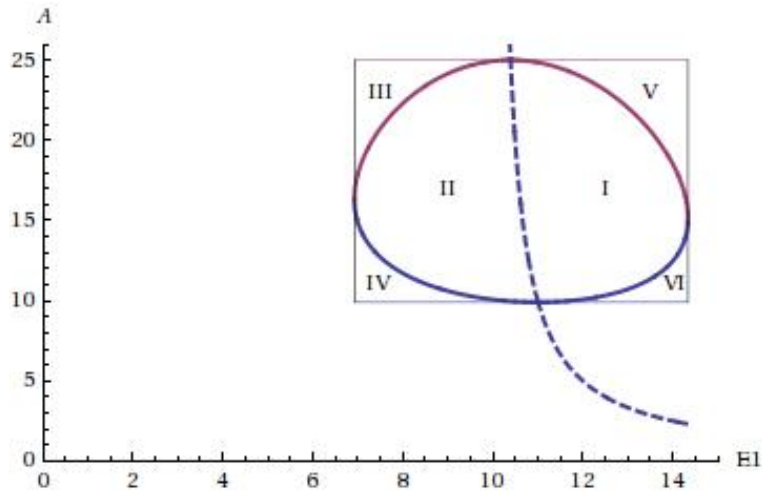


FIG. 4.1. Region of bounded trajectories in (E_1, A) plane

The dashed curve represents $\cos C = 0$. At the intersection points of this curve and (4.4.12), we have $\cos C = \frac{0}{0}$.

4.5. EXAMPLES OF TRAJECTORIES

In this section we present curves showing trajectories for specific choices of parameters ω , α and β and the integrals of motion E , A and C . We choose $k = 1, 2, 3, 4, 1/2, 1/3, 3/2$.

From all of the figures we see that the trajectories do indeed lie within the sectors (4.2.20) and never reach the sector boundaries. From formulas in Sections 4.2 and 4.3 and from the figures we see that we can actually restrict to one sector only e.g. the one with $n = 0$ in (4.2.20). The trajectories in all other sectors are obtained by reflections in the sector boundaries.

The figures illustrate all features discussed in the previous sections. For $k = 1$, the trajectories have no singular points. The dependance on the constant C is quite spectacular. For all values of C the trajectories are fourth order curves. For $C = \frac{\pi}{2}$ they resemble ellipses. For $C = 0$ or $C = \pi$ the trajectories flatten out and finally degenerate into line segments (see Fig. 4.2-4.7). This happens for all values of k . For $k = 2$, (4.3.17) has two real roots. For each of them we present the trajectories in all 8 sectors for just one value of C (see Fig. 4.8 and 4.9). We see that the chosen trajectories have one singular point. For $k = 3$, (4.3.18) has

three roots but only one is real. A typical set of trajectories is on Fig. 4.10. For $k = 4$, (4.3.19) has 4 real roots. We choose just one of them and present the trajectories in the first quadrant of the (x, y) plane (see Fig. 4.11).

Trajectories for rational values of k , namely $k = 1/2, 1/3, 3/2$ are given on Fig. 4.12, 4.13 and 4.14 respectively. They somewhat resemble Lissajous curves for an anisotropic oscillator. The symmetry with respect to reflection in the boundaries is obvious in Fig. 4.7-4.11.

4.5.1. $k=1$

We set $E = 20$, $A = 12$, $\omega = 2$, $\alpha = 3$ and $\beta = 2$. The trajectories are given on Fig. 4.2 to 4.7.

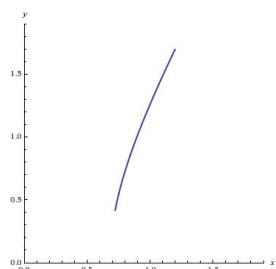


FIG. 4.2. $C = \pi$

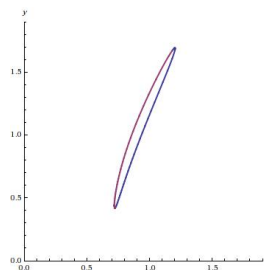


FIG. 4.3. $C = \frac{95\pi}{100}$

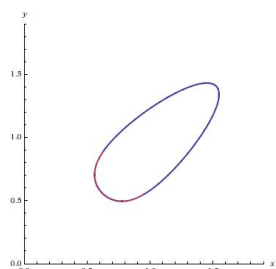


FIG. 4.4. $C = \frac{\pi}{2}$

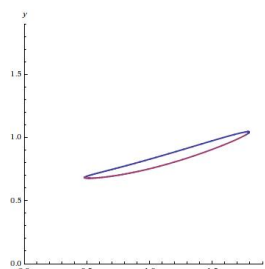
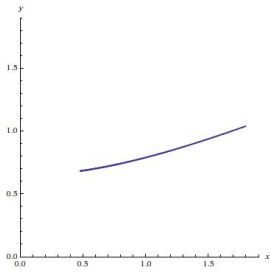
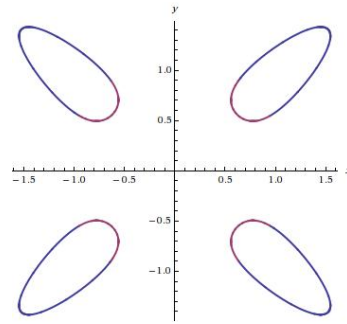


FIG. 4.5. $C = \frac{\pi}{20}$

FIG. 4.6. $C = 0$ FIG. 4.7. Trajectories in the four sectors of the (x, y) plane for $C = \frac{\pi}{2}$.

4.5.2. $k=2$

We set $E = 50$, $A = 60$, $\omega = 2$, $\alpha = 3$ and $\beta = 2$. The trajectories in the eight sectors for $C = \frac{\pi}{2}$ are shown on Fig. 4.8 and 4.9.

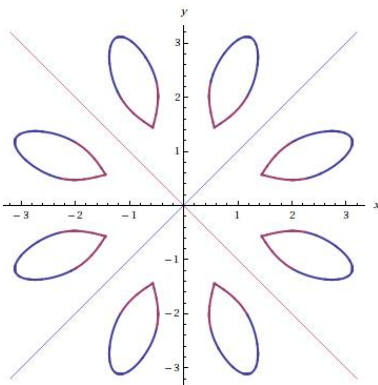


FIG. 4.8. Trajectories for the first root

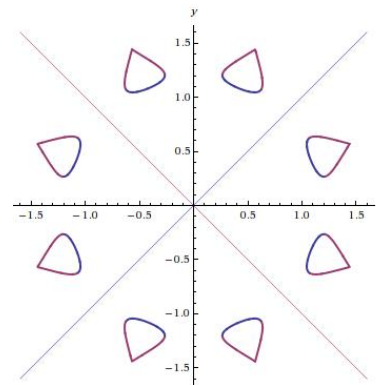


FIG. 4.9. Trajectories for the second root

4.5.3. $k = 3$ and 4

For $k = 3$ we set $E = 50$, $A = 100$, $\omega = 2$, $\alpha = 3$ and $\beta = 2$ and for $k = 4$, $E = 16$, $A = 15$, $\omega = 2$, $\alpha = \frac{1}{4}$ and $\beta = \frac{1}{8}$. The trajectories are shown on Fig. 4.10 and 4.11.

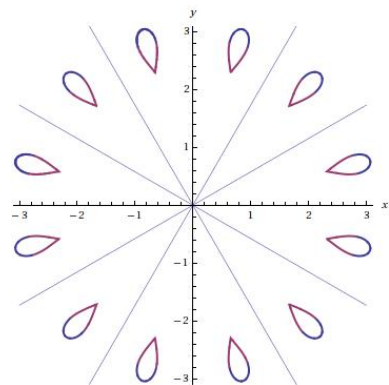


FIG. 4.10. Trajectories for the real root for $k = 3$

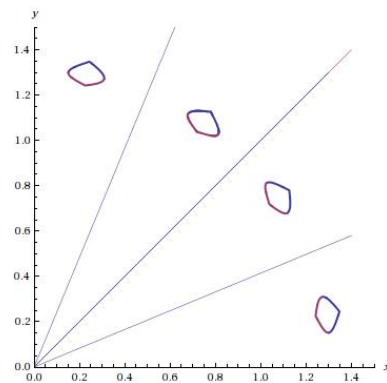


FIG. 4.11. Trajectories for the first real root in the first quadrant for $k = 4$

4.5.4. $k = 1/2$ and $1/3$

In (4.3.28), we set $E = 20$, $A = 24$, $\omega = 2$, $\alpha = 3$ and $\beta = 2$. So for $C = \frac{\pi}{2}$, the trajectories are given on Fig. 4.12 and 4.13. There are no singular points.

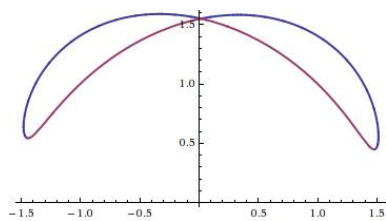


FIG. 4.12. Trajectories for $k = \frac{1}{2}$

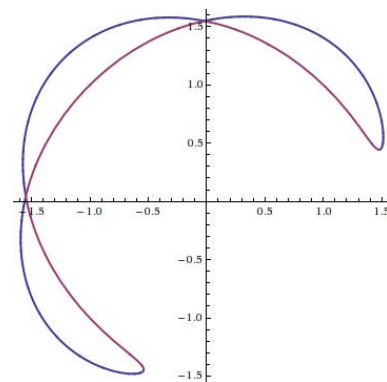


FIG. 4.13. Trajectories for $k = \frac{1}{3}$

4.5.5. $k = \frac{3}{2}$

From (4.3.28), we set $E = 15$, $A = 10$, $\omega = 2$, $\alpha = \frac{1}{4}$ and $\beta = \frac{1}{8}$. We obtain three roots for r^2 . Two of them are complex conjugate to each other. The trajectories are corresponding to the real root are for $C = \frac{\pi}{2}$ are shown on Fig. 4.14. We observe two singular points.

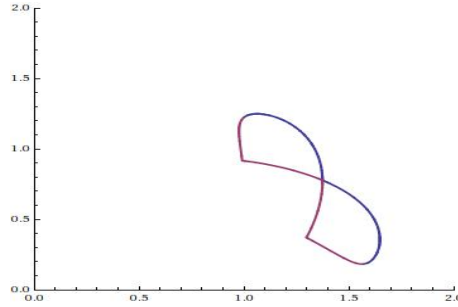


FIG. 4.14. Trajectories for $k = \frac{3}{2}$

4.6. CONCLUSION

The present article, together with our previous one [127], provides a very strong indication that the Hamiltonian (4.1.3) is superintegrable for all integer values of k in classical and in quantum mechanics. In classical mechanics, the results of section 4.3.3 show that this is also true for rational values of k . Indeed we have shown in [127] that the system (4.1.1) is exactly solvable for all values of k thus supporting a previous conjecture [126] that all superintegrable systems are exactly solvable. A spectacular result is that the period $T = \frac{\pi}{2\omega}$ is not only independent of k but is the same as for the pure harmonic oscillator.

We mention that the Hamiltonian (4.1.3) can be interpreted as representing a three body system on a line, once the motion of the center-of-mass is factored out. The same classical system was studied in [15] for $\omega = 0$ and $\alpha = 0$. In this case the trajectories are never bounded (see (4.3.1)) and the motion cannot be periodic. A third integral of motion can still exist and the authors suggest a possible form of the additional integral [15].

A rigorous proof of superintegrability requires the explicit construction of the third integral of motion for all integer and rational values of k and possibly even for any $k > 0$, $k \in \mathbb{R}$. This is left for a future study.

ACKNOWLEDGMENTS

The research of A.V.T. is supported in part by DGAPA grant ININ115709 (Mexico). The research of P.W. was partially supported by a research grant from NSERC of Canada. We thank Benoit Huard for useful discussions.

Chapitre 5

RÉSULTATS RÉCENTS ET PERSPECTIVES FUTURES

5.1. PREUVE DE LA CONJECTURE

La publication des articles présentés dans les chapitres 3 et 4 a suscité beaucoup d'attention. La présentation de la conjecture de superintégrabilité propose un problème qui demeure sans réponse. Dans l'article du chapitre 3, nous mentionnons que la méthode employée pour produire les intégrales dans les cas $k = 1, 2, 3, 4$ devient inutilisable pour les cas $k \geq 5$ étant donné la lourdeur des calculs (voir Annexe A et Annexe B). À l'exception de la forme des termes d'ordre supérieur (ordre $2k$) dans les intégrales du mouvement, les termes d'ordre inférieur ne présentent aucune présence de récurrences ou de répétitions nous permettant de généraliser à une intégrale du mouvement pour le cas général de la famille de système lorsque k est arbitraire. Ainsi, de nouvelles méthodes plus systématiques doivent être développées afin de démontrer la conjecture [127].

D'abord, la conjecture a été démontrée pour des valeurs de k impaires [112]. L'approche utilisée dans ce travail est basée sur une généralisation du formalisme d'opérateurs d'échange ou opérateurs de Dunkl en coordonnées polaires. Ce formalisme ayant été adapté au potentiel de Calogero (cas où $k = 3$ dans les coordonnées du centre de masse) [111] propose une représentation du système selon une réalisation des éléments du groupe diédral D_{2k} en terme d'opérateurs agissant sur le plan selon les coordonnées polaires. Les calculs se

résumant aux cas impairs et laissant la preuve de la conjecture toujours ouverte pour les cas pairs. Par la suite, le même auteur a présenté une extension supersymétrique de la famille de systèmes qui généralise une fois de plus les résultats connus pour le modèle de Calogero [113]. Ces nouveaux résultats ne peuvent qu'apporter encore plus d'intérêts mathématiques et physiques à notre famille de systèmes.

Par la suite, des travaux ont détaillé une preuve complète de la conjecture en mécanique classique [78] et en mécanique quantique [79]. En mécanique classique la preuve se construit selon le fait que la séparation de variables dans l'Hamiltonien nous permet de générer une base canonique de constantes du mouvement incluant l'Hamiltonien qui respecte une forme précise d'algèbre [68]. En mécanique quantique, les auteurs contruisent une forme canonique d'intégrale du mouvement qui commute avec le hamiltonien

$$Y_{2k}(H_k, X_k, r, \varphi) = \sum_{i,j} (A^{i,j}(r, \varphi) \partial_{r,\varphi} + B^{i,j}(r, \varphi) \partial_r + C^{i,j}(r, \varphi) \partial_\varphi + D^{i,j}(r, \varphi)) H_k^i X_k^j$$

où H_k et X_k sont définis selon (3.1.1) et (3.3.1). Miraculeusement les auteurs ont pu montrer la conjecture $\forall k \in \mathbb{Q}$. Dans [79], les auteurs mentionnent que l'intégrale classique s'obtient de façon semblable selon l'expression précédente et le crochet de Poisson.

5.2. NOUVELLE FAMILLE DE SYSTÈMES SUPERINTÉGRABLES

La famille de systèmes superintégrables proposée dans les chapitres 3 et 4 contient le potentiel de Smorodinsky-Winternitz ($k = 1$ dans (3.1.1)) :

$$V(x, y) = \omega^2(x^2 + y^2) + \frac{\alpha}{x^2} + \frac{\beta}{y^2}$$

Comme on l'a vu dans l'introduction du présent travail, ce potentiel appartient à une classe de potentiels multi-séparables dans un espace euclidien à deux dimensions (voir section 1.2). Or, il a été montré dans [126] que les quatre potentiels de la section 1.2 sont algébriquement reliés selon l'algèbre cachée présentée dans le chapitre trois. En fait, chacun de ces systèmes sont reliés l'un à l'autre selon différents systèmes de coordonnées [126]. Indépendamment de

ce travail, dans [109] on considère la famille de systèmes intégrables et exactement résolubles

$$H = -\partial_r^2 - \frac{1}{r}\partial_r - \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 - \frac{Q}{r} + \frac{\alpha k^2}{4r^2 \cos^2 \frac{k}{2}\varphi} + \frac{\beta k^2}{4r^2 \sin^2 \frac{k}{2}\varphi}, \quad (5.2.1)$$

Les familles (3.1.1) et (5.2.1) sont vues comme des déformations du potentiel harmonique et de Coulomb. Remarquons que (5.2.1), tout comme (3.1.1), contient un potentiel de la famille de la section 1.2 en $k=1$ tel que

$$\begin{aligned} V(r, \varphi) &= -\frac{Q}{r} + \frac{\alpha}{4r^2 \cos^2 \frac{1}{2}\varphi} + \frac{\beta}{4r^2 \sin^2 \frac{1}{2}\varphi} \\ &= -\frac{Q}{r} + \frac{\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{(\beta-\alpha)}{2} \cos \varphi}{r^2 \sin^2 \varphi} \end{aligned}$$

Le résultat remarquable de [109] est que l'on démontre que les familles (3.1.1) et (5.2.1) sont reliées entre elles. En fait (3.1.1) se transforme en (5.2.1) (et vice versa) selon une transformée de Stäckel [6, 51]. De cette façon, la super-intégrabilité de (5.2.1) est directement vérifiée. Dans ce cas, il serait intéressant de vérifier si les deux derniers potentiels multi-séparables de la section 1.2 appartiennent à des familles de systèmes superintégrables du même genre et dans le cas où la généralisation est possible de vérifier si ces familles sont reliées à (3.1.1) et (5.2.1) comme dans [109, 126].

5.3. PERSPECTIVES FUTURES

Dans ce qui suit, nous proposons quelques avenues possibles pour des travaux futurs qui permettraient de mettre en évidence des résultats importants dans le contexte de la superintégrabilité dans un espace euclidien.

5.3.1. Classification des systèmes superintégrables et séparables dans le plan avec une intégrale d'ordre trois

Dans l'article présenté dans le chapitre deux, nous poursuivons la classification des systèmes superintégrables et séparables dans le plan avec une intégrale d'ordre trois. Le travail accompli nous a permis de produire une liste complète de tous les systèmes qui sont séparables dans les coordonnées polaires donnant suite à la classification produite en coordonnées cartésiennes[48].

L'étape suivante serait de s'intéresser aux systèmes qui possèdent des intégrales du mouvement d'ordre trois qui sont séparables en coordonnées paraboliques et elliptiques. En comparant avec les résultats obtenus dans [48, 130], de telles classifications nous permettraient possiblement de générer de nouveaux potentiels superintégrables s'exprimant selon des fonctions transcendentes telles les transcendentes de Painlevé et la fonction elliptique de Weierstrass. Une classification a été amorcée récemment en coordonnées paraboliques.

Afin de caractériser complètement les systèmes superintégrables séparables en coordonnées polaires avec une intégrale du mouvement d'ordre trois, on se doit de calculer les trajectoires classiques des nouveaux systèmes classiques et d'obtenir le spectre d'énergie et les fonctions d'ondes des nouveaux systèmes quantiques. Ceci peut s'accomplir en appliquant le formalisme présenté dans [89]-[93]. En ce qui concerne le potentiel s'exprimant en terme de la sixième transcendente de Painlevé, les calculs devront se faire selon les différentes formes rationnelles admissibles par P_6 [50] afin de bien expliciter le caractère de ce potentiel dans le but d'obtenir des résultats généraux.

5.3.2. Nouveaux systèmes superintégrables et séparables avec intégrales d'ordre trois en 3 dimensions

Dans [87], on a montré qu'un système hamiltonien qui possède une intégrale du mouvement polynomiale d'ordre 2 dans un espace euclidien à 3 dimensions est séparable dans 11 systèmes de coordonnées. Dans ce sens, de récents travaux ont été mis de l'avant afin de mettre en relation les résultats obtenus dans [48] et [130].

Or, les coordonnées polaires peuvent être obtenues selon une projection des coordonnées cylindriques en 3 dimensions dans le plan. Donc, en considérant un hamiltonien quantique séparable en coordonnées cylindriques de la forme

$$H = -\partial_r^2 - \frac{1}{r}\partial_r - \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 + f(r) + \frac{1}{r^2}g(\varphi) + h(z)$$

où (r, φ) sont les coordonnées polaires standards et z la troisième composante spatiale, il serait probablement possible de construire un système où $f(r) = 0$, $g(\varphi)$ prend la forme de (2.4.44) et $h(z)$ prend la forme de la partie non-triviale

d'un des potentiels (Q1) à (Q11) présentés dans la section 1.3.2 et obtenus dans [48]. L'Hamiltonien possède nécessairement deux intégrales du mouvement d'ordre deux

$$X_1 = L_3^2 - 2g(\varphi)$$

$$X_2 = p_3^2 - 2h(z)$$

Il ne resterait plus qu'à obtenir les intégrales d'ordre trois

$$\sum_{i+j+k=3} \{a_{ijk}(x, y, z), p_x^i p_y^j p_z^k\} + \{b(x, y, z), p_x\} + \{c(x, y, z), p_y\} + \{d(x, y, z), p_z\}$$

associées à $g(\varphi)$ et $h(z)$. Une intégrale d'ordre trois serait de la forme (2.5.2) pour $\dot{T} = V$ dans (2.4.44) et l'autre serait à déterminer mais possiblement d'une forme semblable aux formes obtenues dans [48].

Il serait aussi intéressant de vérifier si d'autres cas sont possibles, autres que (Q1) à (Q11). De plus une étude semblable serait envisageable en coordonnées sphériques pour un Hamiltonien de la forme

$$H = -\frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r) + \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \partial_\varphi (\sin \varphi \partial_\varphi) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \partial_\theta^2 + f(r) + \frac{g(\varphi)}{r^2} + \frac{h(\theta)}{r^2 \sin^2 \varphi}$$

où (r, φ, θ) sont les coordonnées sphériques.

Ces travaux nous permettraient d'obtenir de nouveaux systèmes super-intégrables plus généraux.

5.3.3. Obtention de nouvelles familles infinies de systèmes superintégrables dans le plan

5.3.3.1. Familles rationnelles de potentiels

Comme nous l'avons mentionné dans la section 5.2, il serait intéressant de vérifier si les deux potentiels multi-séparables restant de la section 1.2 appartiennent à des familles plus générales de systèmes superintégrables dans le plan. Si tel est le cas, l'application du formalisme de Stackël nous informerait de l'équivalence entre les systèmes et nous permettrait de confirmer la super-intégrabilité de nouvelles classes de systèmes séparables dans le plan euclidien.

À l'opposé, l'application d'une transformée de Stackël précise sur (3.1.1) et/ou (5.2.1) pourrait sans doute nous permettre d'obtenir de nouvelles familles de systèmes superintégrables dans le plan. Suivant les démarches de [126], il serait intéressant de caractériser ces systèmes selon l'algèbre cachée présentée dans [134] et le chapitre trois de cette thèse. Cette représentation de ces systèmes nous permet d'élaborer un langage dans lequel les systèmes superintégrables sont intimement reliés.

Le modèle *rationnel* de Calogero appartient à la famille (3.1.1) lorsqu'on se positionne dans les coordonnées du centre de masse pour $k = 3$ et $\alpha = 0$ (3 particules sur une droite). Il a été démontré que la version hyperbolique du modèle de Calogero

$$H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N p_n^2 + a^2 g^2 \sum_{m,n=1, m \neq n}^N \frac{1}{\sinh^2 a(q_n - q_m)} \quad (5.3.1)$$

pour $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ est maximalelement superintégrable [44]. La généralisation de ce système à une famille de systèmes plus généraux devrait être mise en oeuvre.

5.3.3.2. Familles non-rationnelles de potentiels

Dans l'article présenté dans le chapitre trois de cette thèse, nous mentionnons que la famille de systèmes que nous proposons contient tous les potentiels superintégrables séparables en coordonnées polaires publiés à ce jour. Or, comme l'article présenté dans le chapitre deux n'était pas encore publié, cette affirmation s'est avérée vraie jusqu'à la publication de [130]. Ainsi, maintenant, nous savons qu'il existe d'autres systèmes quantiques séparables en coordonnées polaires qui n'appartiennent pas à cette famille comme les potentiels s'exprimant en terme de la sixième transcendante de Painlevé et de la fonction elliptique de Weierstrass.

Tous les potentiels s'exprimant en terme des transcendents de Painlevé et de la fonction elliptique de Weierstrass reflètent un contenu riche en mécanique quantique. Il serait très intéressant de comprendre et de justifier leur provenance et de pouvoir les associer à un ensemble de potentiels superintégrables

étant solution d'équations différentielles qui possèdent la propriété de Painlevé. Naturellement, cet ensemble de potentiels serait purement quantique. Il serait remarquable de pouvoir générer des familles de systèmes encore plus générales que (3.1.1) et (5.2.1) qui inclut les potentiels obtenus dans [48, 130] de façon à pouvoir peut-être les relier entre elles comme (3.1.1) et (5.2.1).

Des avenues possibles pour ces problèmes résident peut-être à l'intérieur de la structure algébrique de l'algèbre des intégrales du mouvement [13, 14, 29, 84], [94]-[97] ou de l'application de la méthode de réduction hamiltonienne [120, 121] ou dans la méthode de factorisation de systèmes séparables [57, 92, 93, 94, 98, 100, 103].

5.3.4. Méthode de factorisation en coordonnées polaires

La méthode de factorisation d'un Hamiltonien est bien connue dans le contexte de la supersymétrie. Récemment, on a appliqué ce formalisme dans le contexte de la superintégrabilité afin de mettre en évidence d'intéressantes relations entre des systèmes qui admettent une réalisation supersymétrique et des systèmes superintégrables [92]-[97]. Utilisant la séparabilité de l'Hamiltonien quantique en coordonnées cartésiennes, il est possible de construire une factorisation de l'opérateur différentiel pour en générer des opérateurs de création et annihilation. Selon la définition de ces opérateurs, la construction des intégrales du mouvement est directe. Or, à la suite des articles [127, 129], nous nous sommes appliqués à tenter de reproduire ce formalisme sur la famille de systèmes superintégrables séparables en coordonnées polaires. Malheureusement, le formalisme ne s'adapte pas aussi bien dans le contexte des coordonnées polaires pour des raisons qui nous échappent. Nous avons trouvé très peu de références sur le sujet en coordonnées polaires. Par contre, selon [98, 103] nous tentons de produire une preuve simple reposant sur la définition des opérateurs de création et annihilation que l'on peut obtenir de la factorisation de notre famille d'Hamiltoniens qui s'accomplit selon les résultats que l'on trouve dans [59, 98]. Le travail est amorcé et nous espérons pouvoir démontrer la superintégrabilité de (3.1.1) de façon simple tout en mettant en relation une

fois de plus les contextes des systèmes superintégrables séparables et la supersymétrie, sachant que (3.1.1) admet une formulation supersymétrique [113].

CONCLUSION

Cette thèse est constituée principalement de trois articles publiés dans la revue *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*. Ceux-ci proposent de nouveaux résultats dans le domaine de la superintégrabilité dans un espace euclidien à deux dimensions.

Dans [127], la définition de la famille infinie de systèmes superintégrables séparables en coordonnées polaires a mis en évidence une fois de plus l'intime relation qui existe entre les concepts de résolubilité et de superintégrabilité en mécanique quantique. La conjecture proposée dans [127] a suscité énormément d'intérêts. Plusieurs travaux ont suivi la publication de [127, 129] et ont proposé des résultats qui mettent en évidence la richesse et les propriétés remarquables des systèmes superintégrables. Les résultats proposent de nouvelles indications sur la structure algébrique des systèmes superintégrables et indiquent de multiples voies et des directions de recherche qui peuvent permettre de mieux caractériser la théorie des systèmes superintégrables en mécanique classique et quantique.

La continuité de ce travail en mécanique classique [129], nous a permis d'établir une forte indication de la véracité de la conjecture proposée dans [127] par l'obtention des trajectoires classiques de la famille d'Hamiltoniens associés. Toutes les trajectoires bornées sont périodiques dans l'espace de phase. En fait, il a été démontré que tout système superintégrable classique possède des trajectoires bornées qui sont périodiques. Nos résultats ont démontré la réciproque de ce résultat ce qui a apporté beaucoup de crédibilité à la conjecture de superintégrabilité. Selon nos travaux, la preuve de superintégrabilité

de (3.1.1) a été proposée peu de temps après la publication de [127, 129] et plusieurs autres résultats concomitants ont été obtenus démontrant la richesse du problème que nous avons proposé.

De plus, dans [130], nous proposons de nouveaux résultats de potentiels superintégrables séparables en coordonnées polaires qui n'appartiennent pas à (3.1.1). Une fois de plus, les potentiels quantiques s'avèrent d'une richesse surprenante par leur expression en terme de fonctions transcendantes non-triviales ce qui permet de mettre encore plus en évidence les différences majeures qui existent entre les contextes classique et quantique.

Très peu de travaux existent sur la superintégrabilité avec des intégrales du mouvement d'ordre supérieur ou égal à 3. Par nos travaux, nous proposons de nombreuses raisons qui poussent à éclaircir encore plus les résultats obtenus dernièrement. Malgré les multiples développements et résultats des dix dernières années dans le domaine de la superintégrabilité, de nombreuses questions demeurent sans réponse. La relation entre les systèmes exactement résolubles et les systèmes superintégrables, la provenance des systèmes superintégrables et les relations qui semblent subsister entre eux, l'utilité du formalisme supersymétrique et la caractérisation des systèmes susperintégrables en terme d'algèbres polynomiales, la définition de familles de systèmes superintégrables demeurent tous des sujets qui doivent être encore plus étudiés et analysés afin de mettre en évidence l'implication de l'existence de symétries dans la définition d'un système physique.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] V. I. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*, Springer-Verlag, New York, 1978.
- [2] G. A. Baker Jr., Degeneracy of the n -dimensional, isotropic, harmonic oscillator, *Phys. Rev.* 103, 1119–1120 (1956).
- [3] M. Bander and C. Itzykson, Group theory and the hydrogen atom (I), *Rev. mod. phys.* 38, 330–345 (1966).
- [4] J. Bertrand, Théorème relatif au mouvement d'un point attiré vers un centre fixe, *C.R. Acad. Sci.* 77, 849-853 (1873).
- [5] Josée Bérubé and Pavel Winternitz, Integrable and superintegrable quantum systems in a magnetic field, *J. Math. Phys.* 45, 1959 (2004).
- [6] C. P. Boyer, E. G. Kalnins and W. Miller, Stäckel-equivalent integrable Hamiltonian systems, *SIAM J. Math. Anal.* 17, 778–797 (1986).
- [7] F. Calogero and C. Marchioro, Exact solution of a one-dimensional three-body scattering problem with two-body and/or three-body inverse-square potential, *J. Math. Phys.* 15, 1425-1430 (1974).
- [8] F. Calogero, Solution of a three-body problem in one dimension, *J. Math. Phys.* 10, 2191-2196 (1969).
- [9] F. Calogero, Ground state of a one-dimensional N -body problem, *J. Math. Phys.* 10, 2197-2200 (1969).
- [10] F. Calogero, Solution of the one-dimensional N -body problem with quadratic and/or inversely quadratic pair potentials, *J. Math. Phys.* 12, 419-436 (1971).
- [11] F. Calogero, Partially superintegrable (indeed isochronous) systems are not rare, in *New trends in integrability and partial solvability, Volume 2002*, AMS

- 'Contemporary Mathematics' series, A.B. Shabat, A. González-López, M. Mañas, and L. Martínez Alonso, pp. 49-77, Springer (2004).
- [12] F. Calogero, *Isochronous systems*, Oxford University Press, Oxford, 2008.
- [13] J. A. Calzada, J. Negro and M. A. Del Olmo, Dynamical symmetries for superintegrable quantum systems, *Physics of Atomic Nuclei* 70, 496-504 (2007).
- [14] J. A. Calzada, J. Negro and M. A. Del Olmo, Interwining symmetry algebra of quantum superintegrable systems, *SIGMA* 5, 039 (2009).
- [15] C. Chanu, Luca Degiovanni and Giovanni Rastelli, Superintegrable three-body systems on the line, *J. Math. Phys.* 49, 112901 (2008).
- [16] C. Chanu, Luca Degiovanni and Giovanni Rastelli, Polynomial constants of motion for Calogero-type systems in three dimensions, *arXiv :1002.2735v1* (2010).
- [17] F. Charest, C. Hudon and P. Winternitz, Quasiseparation of variables in the Schrödinger equation with a magnetic field, *J. Math. Phys.* 48, 012105 (2007).
- [18] J. Clemente-Gallardo and G. Marmo, Towards a definition of quantum integrability, *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* 6, 129-172 (2009).
- [19] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu and F. Laloë, *Mécanique quantique*, Hermann Éditeurs des sciences et des arts (seconde édition), 1998.
- [20] C. M. Cosgrove and G. Scoufis, Painlevé classification of a class of differential equations of the second order and second degree, *Stud. Appl. Math.* 88, 25-87 (1993).
- [21] C. M. Cosgrove, Chazy Classes IX-XI of third-order differential equations, *Stud. Appl. Math.* 104, 171-228 (2000).
- [22] C. M. Cosgrove, Higher-order Painlevé equations in the polynomial class I. Bureau symbol P 2, *Stud. Appl. Math.* 104, 1-65 (2000).
- [23] C. M. Cosgrove, Higher-order Painlevé equations in the polynomial class II. Bureau symbol P 1, *Stud. Appl. Math.* 116, 321-413 (2006).
- [24] C. Daskaloyannis, Quadratic Poisson algebras of two dimensional classical superintegrable systems and quadratic associative algebras of quantum superintegrable systems, *J. Math. Phys.* 41, 110 (2001).

- [25] C. Daskaloyannis, Quadratic Poisson algebras of two-dimensional classical superintegrable systems and quadratic associative algebras of quantum superintegrable systems, *J. Math. Phys.* 42, 1100-1119 (2001).
- [26] C. Daskaloyannis and K. Ypsilantis, Unified treatment and classification of superintegrable systems with integrals quadratic in momenta on a two dimensional manifold, *J. Math. Phys.* 47, 042904 (2006).
- [27] S. Datta Majumdar and M. J. Englefield, Third-order constants of motion in quantum mechanics, *Int. J. Theo. phys* 16, 829-835 (1977).
- [28] S. Datta Majumdar, A tensorial theory of the higher-order constants of motion in quantum mechanics, *J. Phys. A : Math. Theor* 13, 855-865 (1980).
- [29] B. Demircioglu, S. Kuru, M. Önder and A. Verçin, Two families of superintegrable systems and isospectral potentials in two dimensions, *J. Math. Phys.* 43, 2133 (2002).
- [30] B. Dorizzi, B. Grammaticos, A. Ramani and P. Winternitz, Integrable hamiltonian with velocity-dependant potentials, *J. Math. Phys.* 26, 3070-3079 (1985).
- [31] J. Drach, Sur l'intégration logique des équations de la dynamique à deux variables : Forces conservatives. Intégrales cubiques. Mouvements dans le plan., *C. R. Acad. Sci.* 200, 22-26 (1935).
- [32] C. Dunkl, Differential-difference operators associated to reflection groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* 311, 167-183 (1989).
- [33] N. W. Evans, Superintegrability in classical mechanics, *Phys. Rev. A* 41, 5666-5676 (1990).
- [34] N. W. Evans, Superintegrability of the Winternitz system, *Phys. Lett. A* 147, 483-486 (1990).
- [35] N. W. Evans, Group theory of the Smorodinsky-Winternitz system, *J. Math. Phys.* 32, 3369 (1991).
- [36] N. W. Evans and P. E. Verrier, Superintegrability of the caged anisotropic oscillator, *J. Math. Phys.* 49, 092902 (2008).
- [37] I. Fris, V. Mandrosov, Ya. A. Smorodinsky, M. Uhler and P. Winternitz, On higher symmetries in quantum mechanics, *Phys. Lett.* 16, 354-356 (1965).

- [38] A. S. Fokas and P.A. Lagerstrom, Quadratic and cubic invariants in classical mechanics, *J. Math. Anal. Appl.* 74, 325-341 (1980).
- [39] A. González-Lopéz, N. Kamran and P. J. Olver, Quasi-Exactly-Solvable Lie Algebras of the first order differential operators in Two Complex Variables , *J.Phys. A* 24, 3995-4008 (1991).
- [40] A. González-Lopéz, J. Hurtubise, N. Kamran and P. J. Olver, Lie algebras of differential operators in two complex variables, *American J. Math.* 114, 1163-1185 (1992).
- [41] A. González-Lopéz, J. Hurtubise, N. Kamran and P. J. Olver, Quantification de la cohomologie des algèbres de Lie de champs de vecteurs et fibrés en droites sur des surfaces complexes compactes, *C. R. Acad. Sci. (Paris), Série I* 316, 1307-1312 (1993).
- [42] H. Goldstein, C. P. Poole and J. L. Safko, *Classical Mechanics*, Addison Wesley (3rd Edition), 2001.
- [43] C. Gonera, A note on superintegrability of the quantum Calogero model, *Phys. Lett. A* 237, 365-368 (1998).
- [44] C. Gonera, On the superintegrability of Calogero-Moser-Sutherland model, *J. Phys. A : Math. Theor.* 31, 4465-4472 (1998).
- [45] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*, Academic Press (7th edition), 1980.
- [46] S. Gravel and P. Winternitz, Superintegrable systems with third-order integrals in classical and quantum mechanics, *J. Math. Phys.* 43, 5902-5912 (2002).
- [47] S. Gravel, Superintegrability, isochronicity and quantum harmonic behavior, *arXiv :math-ph/0310004* (2003).
- [48] S. Gravel, Hamiltonians separable in cartesian coordinates and third-order integrals of motion, *J. Math. Phys.* 45, 1003-1019 (2004).
- [49] Ya. I. Granovskii, I. M. Lutzenko and A. S. Zhedanov, Mutual integrability, quadratic algebras, and dynamical symmetry, *Ann. Phys.* 217, 1-20 (1992).
- [50] V. I. Gromak, I. Laine and S. Shimomura, *Painlevé differential equations in the complex plane*, Walter de Gruyter, 2002.

- [51] J. Hietarinta, B. Grammaticos, B. Dorizzi, and A. Ramani., Coupling-constant metamorphosis and duality between integrable Hamiltonian systems, *Phys. Rev. Lett.* 53, 1707–1710 (1984).
- [52] J. Hietarinta and B. Grammaticos, On the \hbar^2 correction terms in quantum integrability, *J. Phys. A : Math. Theor.* 22, 1315-1322 (1989) .
- [53] J. Hietarinta, Solvability in quantum mechanics and classically superflous invariants, *J. Phys. A : Math. Theor.* 22, L143-L147 (1989).
- [54] J. Hietarinta, Pure quantum integrability, *Phys. Lett. A* 246, 97-104 (1998).
- [55] C.R. Holt, Construction of new integrable Hamiltonians in two degrees of freedom, *J. Math. Phys.* 23 , 1037-1046 (1982).
- [56] E. L. Ince, *Ordinary differential equations*, Dover, New York, 1956.
- [57] L. Infeld and T. E. Hull, The Factorization Method, *Rev. Mod. Phys.* 23, 21–68 (1951).
- [58] J. M. Jauch and E. L. Hill, On the problem of degeneracy in quantum mechanics, *Phys. Rev* 57, 641–645 (1940).
- [59] G. Junker, *Supersymmetric Methods in Quantum and Statistical Physics*, Springer-Verlag (1996).
- [60] E. G. Kalnins, W. Miller Jr. and G. S. Pogosyan, Superintegrability and associated polynomial solutions : Euclidean space and the sphere in two dimensions, *J. Math. Phys.* 37, 6439-6467 (1996).
- [61] E. G. Kalnins, W. Miller Jr. and G. S. Pogosyan, Superintegrability on the two-dimensionnal hyperboloïd, *J. Math. Phys.* 38, 5416-5433 (1997).
- [62] E. G. Kalnins, W. Miller Jr., G. S. Pogosyan and Ye. M. Hakobyan, Superintegrability on the two-dimensionnal hyperboloïd II, *J. Math. Phys.* 40, 2291-2306 (1999).
- [63] E. G. Kalnins, G. C. Williams and W. Miller Jr., Superintegrability in three-dimensional Euclidean space, *J. Math. Phys.* 40, 708-725 (1999).
- [64] E. G. Kalnins, W. Miller Jr. and G. S. Pogosyan, Completeness of multiseparable superintegrability in $E_{2,C}$, *J. Phys. A : Math. Theor.* 33, 4105-4120 (2000).
- [65] E. G. Kalnins, W. Miller Jr. and G. S. Pogosyan, Completeness of multiseparable superintegrability on the complex 2-sphere, *J. Phys. A : Math. Theor.* 33, 6791-6806 (2000).

- [66] E. G. Kalnins, W. Miller Jr. and G. S. Pogosyan, Completeness of multiseparable superintegrability in two-dimensional constant-curvature spaces, *J. Phys. A : Math. Theor.* 34, 4705-4720 (2001).
- [67] E. G. Kalnins, J. M. Kress and P. Winternitz, Superintegrability in a two-dimensional space of nonconstant curvature, *J. Math. Phys.* 43, 970-983 (2002).
- [68] E. G. Kalnins, J. M. Kress, W. Miller Jr. and G. S. Pogosyan, Complete sets of invariants for dynamical systems that admit a separation of variables, *J. Math. Phys.* 43, 3592-3609 (2002).
- [69] E. G. Kalnins, J. M. Kress and W. Miller Jr., Second order superintegrable systems in conformally flat spaces. I. Two-dimensional classical structure theory, *J. Math. Phys.* 46, 053509-1-053509-28 (2005).
- [70] E. G. Kalnins, J. M. Kress and W. Miller Jr., Second order superintegrable systems in conformally flat spaces. II. The classical two-dimensional Stackel transform, *J. Math. Phys.* 46, 053510-1-053510-15 (2005).
- [71] E. G. Kalnins, J. M. Kress and W. Miller Jr., Second order superintegrable systems in conformally flat spaces. III. 3D classical structure theory, *J. Math. Phys.* 46, 103507, (2005).
- [72] E. G. Kalnins, J. M. Kress and W. Miller Jr., Second order superintegrable systems in conformally flat spaces. IV. The classical 3D Stackel transform and 3D classification theory, *J. Math. Phys.* 47, 043514, (2006).
- [73] E. G. Kalnins, J. M. Kress and W. Miller Jr., Second order superintegrable systems in conformally flat spaces. V. 2D and 3D quantum systems, *J. Math. Phys.* 47, 093501 (2006).
- [74] E.G. Kalnins, W. Miller Jr and S. Post, Models for quadratic algebras associated with second order superintegrable systems in 2D, *Sigma* 4, 008 (2008).
- [75] E.G. Kalnins, J. Kress, W. Miller Jr and S. Post, Structure theory for second order 2D superintegrable systems with 1 parameter potential, *Sigma* 5, 008 (2009).
- [76] E. G. Kalnins, W. Miller Jr. and S. Post, Coupling constant metamorphosis and Nth-order symmetries in classical and quantum mechanics, *J. Phys. A : Math. Theor.* 43, 035202 (2010).

- [77] E. G. Kalnins, J. M. Kress and W. Miller Jr., Families of classical subgroup separable superintegrable systems, *J. Phys. A : Math. Theor.* 43, 092001 (2010).
- [78] E. G. Kalnins, W. Miller Jr. and G. S. Pogosyan, Superintegrability and higher order constants for classical and quantum systems, arXiv :0912.2278v1 (2010).
- [79] E. G. Kalnins, J. M. Kress and W. Miller Jr., Superintegrability and higher order integrals for quantum systems, *J. Phys. A : Math. Theor.* 43, 265205 (2010).
- [80] E. G. Kalnins, J. M. Kress and W. Miller Jr., Tools for verifying classical and quantum superintegrability, arXiv :1006.0864v1 (2010).
- [81] M. Karlovini and K. Rosquist, A unified treatment of cubic invariants at fixed and arbitrary energy, *J. Math. Phys.* 41, 370 (2000).
- [82] M. Karlovini and K. Rosquist, A unified treatment of quartic invariants at fixed and arbitrary energy, *J. Math. Phys.* 43, 4041 (2002).
- [83] A. Khare and R. K. Bhaduri, Exactly-solvable non-central potentials in two and three dimension, *American J.Phys.* 62, 1008-1014 (1994).
- [84] S. Kuru, A. Tegmen and A. Verçin, Interwined isospectral potentials in an arbitrary dimension, *J. Math. Phys.* 42, 3344-3360 (2001).
- [85] V. B. Kuznetsov, Hidden symmetry of the quantum Calogero-Moser system, *Phys. Lett. A* 218, 212-220 (1996).
- [86] P. Letourneau and L. Vinet, Superintegrable systems : Polynomial algebras and quasi-exactly solvable Hamiltonians, *Ann. Phys.* 243, 144 (1995).
- [87] A. A. Makarov, Ya. A. Smorodinsky, Kh. Valiev and P. Winternitz, A systematic search for nonrelativistic systems with dynamical symmetries, *Nuovo cimento* A52, 1061-1084 (1967).
- [88] C. Marchioro, Solution of a three-body scattering problem in one-dimension, *J. Math. Phys.* 11, 2193-2196 (1970).
- [89] I. Marquette, P.Winternitz, Polynomial poisson algebras for classical superintegrable systems with a third order integral of motion, *J. Math. Phys.* 48, 012902-012918 (2007).

- [90] I. Marquette, Polynomial associative algebras for quantum superintegrable systems with a third order integral of motion, symmetries and Overdetermined Systems of Partial Differential Equations, *The IMA Volumes in Mathematics and its Applications*, Springer, Vol. 144, 461, (2008).
- [91] I. Marquette and P. Winternitz, Superintegrable systems with a third order integrals of motion, *J. Phys. A : Math. Theor.* 41 (2008).
- [92] I. Marquette, Superintegrability with third order integrals of motion, cubic algebras and supersymmetric quantum mechanics I : Rational function potentials, *J. Math. Phys.* 50, 012101 (2009).
- [93] I. Marquette, Superintegrability with third order integrals of motion, cubic algebras and supersymmetric quantum mechanics II : Painleve transcendent potentials, *J. Math. Phys.* 50, 0952020 (2009).
- [94] I. Marquette, Supersymmetry as a method of obtaining new superintegrable systems with higher order integrals of motion, *J. Math. Phys.* 50, 122102 (2009).
- [95] I. Marquette, Superintegrability and higher order polynomial algebras, *J. Phys. A : Math. Theor.* 43, 135205 (2010).
- [96] I. Marquette, Generalized MICZ-Kepler system, duality, polynomial and deformed oscillator algebras, arXiv :1004.4579 (2010).
- [97] I. Marquette, Construction of classical superintegrable systems with higher integrals of motion from ladder operators, arxiv :1002.3118 (2010).
- [98] D.Martinez and R.D. Mota, SUSY QM, symmetries and spectrum generating algebras for two-dimensional systems, *Ann. Phys.* 323, 1024-1035 (2008).
- [99] E. McSween and P. Winternitz, Integrable and superintegrable hamiltonian systems in magnetic fields, *J. Math. Phys.* 41, 2957-2967 (2000).
- [100] B. Mielnik, Factorization method and new potentials with the oscillator spectrum, *J. Math. Phys.* 25, 3387-3389 (1984).
- [101] D. S. Mitrinović, Transformation et intégration d'une équation différentielle du premier ordre, *Publications mathématiques de l'université Belgrade*, 5, 10-22 (1936).
- [102] J. Moser, Three integrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformations, *Adv. Math.* 16, 197-220 (1975).

- [103] R.D.Mota, V.D.Granados, A.Queijeiro and J.Garcia, Constants of motion, ladder operators and supersymmetry of the two-dimensional isotropic harmonic oscillator, *J.Phys.A : Math. Gen.* 35, 2979-2984 (2002).
- [104] N. N. Nekhoroshev, Action-angle variables and their generalization, *Trans. Moscow. Math. Soc.* 26, 180-198 (1972).
- [105] M. A. Olshanetsky and A. M. Perelomov, Quantum integrable systems related to Lie algebras, *Phys. Repts.* 94, 313 (1983).
- [106] T. Oshima, Completely integrable systems associated with classical root systems, *SIGMA* 3, 061 (2007).
- [107] A. M. Perelomov, *Integrable systems of classical mechanics and Lie algebras vol.I*, Birkhäuser, Basel, 1990.
- [108] A. P. Polychronakos, Exchange operator formalism for integrable systems of particles, *Phys. Rev. Lett.* 69, 703 - 705 (1992).
- [109] S. Post and Pavel Winternitz, An infinite family of superintegrable deformations of the Coulomb potential, *J. Phys. A : Math. Theor.* 43, 222001 (2010).
- [110] G. Pucacco and K. Rosquist, Integrable hamiltonians systems with vector potentials, *J. Math. Phys.* 46, 012701- (2010).
- [111] C. Quesne, Exchange operators and extended Heisenberg algebra for the three-body Calogero-Marchioro-Wolfes problem, *Mod.Phys.Lett.* A10, 1323-1330 (1995).
- [112] C. Quesne, Superintegrability of the Tremblay-Turbiner-Winternitz quantum Hamiltonians on a plane for odd k , *J. Phys. A : Math. Theor.* 43, 082001 (2010).
- [113] C. Quesne, $\mathcal{N}=2$ supersymmetric extension of the Tremblay-Turbiner-Winternitz Hamiltonians on a plane, *J. Phys. A : Math. Theor.* 43, 305202 (2010).
- [114] M. F. Rañada, Superintegrable $n = 2$ systems, quadratic constants of motion, and potentials of Drach, *J. Math. Phys.* 38, 4165-4178 (1997).
- [115] M. F. Rañada, Superintegrability of the Calogero–Moser system : Constants of motion, master symmetries, and time-dependent symmetries, *J. Math. Phys.* 40, 236-248 (1998).

- [116] M. F. Rañada and M. Santander, Superintegrable systems on the two-dimensional sphere S^2 and the hyperbolic plane H^2 , *J. Math. Phys.* 40, 5026-5097 (1999).
- [117] M. F. Rañada and M. Santander, Complex euclidean superintegrable potentials, potentials of Drach and potential of Holt, *Phys. Lett. A* 278, 271-279 (2001).
- [118] M. Robnik, A note concerning quantum integrability, *J. Phys. A : Math. Theor.* 19, 841-847 (1986).
- [119] M. A. Rodriguez and P. Winternitz, Quantum superintegrability and exact solvability in n dimensions, *J. Math. Phys.* 43, 1309-1322 (2002).
- [120] M.A.Rodriguez, P. Tempesta and P. Winternitz, Reduction of superintegrable systems : The anisotropic harmonic oscillator, *Phys. Rev. E* 78, 046608 (2008).
- [121] M.A.Rodriguez, P. Tempesta and P. Winternitz, Symmetry reduction and superintegrable Hamiltonian systems, *J. Phys. : Conference Series* 175, 012013 (2009).
- [122] M. B. Sheftel, P. Tempesta and P. Winternitz, Superintegrable systems in quantum mechanics and classical Lie theory, *J. Math. Phys.* 42, 659-673 (2001).
- [123] B. Sutherland, Quantum many-body problem in one-dimension :Ground state, *J. Math. Phys.* 12, 246-250 (1970).
- [124] B. Sutherland, Exact results for a quantum many-body problem in one dimension. I, *Phys. Rev. A* 4, 2019-2021 (1971).
- [125] B. Sutherland, Exact results for a quantum many-body problem in one dimension II, *Phys. Rev. A* 5 , 1372-1376 (1972).
- [126] P. Tempesta, A. V. Turbiner and P. Winternitz, Exact solvability of superintegrable systems, *J. Math. Phys.* 42, 4248-1257 (2001).
- [127] F. Tremblay, A. V. Turbiner and P. Winternitz, An infinite family of solvable and integrable quantum systems on a plane, *J. Phys. A : Math. Theor.* 42, 242001 (2009).
- [128] F. Tremblay, A. V. Turbiner and P. Winternitz, An infinite family of solvable and integrable quantum systems on a plane, *arxiv :0904.0738* (2009).

- [129] F. Tremblay, A. V. Turbiner and P. Winternitz, Periodic orbits for an infinite family of classical superintegrable systems, *J. Phys. A : Math. Theor.* 43, 015202 (2010).
- [130] F. Tremblay and P. Winternitz, Third-order superintegrable systems separating in polar coordinates, *J. Phys. A : Math. Theor.* 43, 175206 (2010).
- [131] A. V. Tsiganov, The Drach superintegrable systems, *J. Phys. A : Math. Theor.* 33, 7307-7422 (2000).
- [132] A. V. Turbiner and A. G. Ushveridze, Spectral Singularities and the Quasi-Exactly-Solvable Problem", *Phys.Lett.* 126A, 181-183 (1987).
- [133] A. V. Turbiner, Quasi-Exactly-Solvable Problems and the $SL(2, R)$ Group, *Comm.Math.Phys.* 118, 467-474 (1988).
- [134] A. V. Turbiner, Lie-algebras and Linear Operators with Invariant Subspaces, in *Lie Algebras, Cohomologies and New Findings in Quantum Mechanics*, AMS 'Contemporary Mathematics' series, N. Kamran and P. Olver (eds.), AMS, vol. 160, pp. 263-310 (1994).
- [135] A. Turbiner, Hidden Algebra of Three-Body Integrable Systems, *Mod.Phys.Lett.* A13, 1473-1483 (1998).
- [136] A. V. Turbiner, Quasi-Exactly Solvable Hamiltonians related to root spaces, *J.Nonlin.Math.Phys.* 12, 660-675 (2005) Supplement 1 *Special Issue in Honour of Francesco Calogero on the Occasion of His 70th Birthday*.
- [137] P. E. Verrier and N. W. Evans, A new superintegrable Hamiltonian, *J. Math. Phys.* 49, 022902 (2008).
- [138] J. Von. Neumann, *Mathematical foundation of quantum mechanics*, Princeton University Press, New Jersey, 1955.
- [139] P. Winternitz, Ya. A. Smorodinsky, M. Uhlir and I. Fris, Symmetry groups in classical and quantum mechanics, *Soviet Journal of nuclear physics* 4, 625-635 (1967).
- [140] P. Winternitz and I. Yurdusen, Integrable and superintegrable systems with spin, *J. Math. Phys.* 47, 103509 (2006).
- [141] P. Winternitz, Superintegrability with second and third order integral of motion, *Rus. J. Nucl. Phys.* 72(5), 875-882 (2009).

- [142] P. Winternitz and I. Yurdusen, Integrable and superintegrable systems with spin in three-dimensional Euclidean space, *J. Phys. A : Math. Theor.* 42, 385203 (2009).
- [143] S. Weigert, The problem of quantum integrability, *Physica D* 56, 107-119, (1992).
- [144] S. Wojciechowski, Superintegrability of the Calogero-Moser systems, *Phys. Lett.* 95A, 279-281 (1983).
- [145] J. Wolfes, On the three-body linear problem with three-body interaction, *J.Math. Phys.* 15, 1420-1424 (1974).

Annexe A

INTÉGRALE DU MOUVEMENT LORSQUE $K = 3$

Dans cet annexe, nous présentons l'intégrale du mouvement pour l'Hamiltonien (3.1.1) lorsque $k = 3$. Ensuite, nous présentons la forme Lie-algébrique de cette intégrale.

L'intégrale d'ordre six est est

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_6 = & (\partial_x^2 - \omega^2 x^2)^3 - 6(\partial_x^2 - \omega^2 x^2)^2(\partial_y^2 - \omega^2 y^2) + 9(\partial_x^2 - \omega^2 x^2)(\partial_y^2 - \omega^2 y^2)^2 \\ & + \left\{ \partial_x^4, -\frac{9(-3x^4 + 6y^2x^2 + y^4)\beta}{y^2(y^2 - 3x^2)^2} - \frac{27(x^2 + y^2)^2\alpha}{2x^2(x^2 - 3y^2)^2} \right\} + \left\{ \partial_x^3\partial_y - \frac{72xy\beta}{(y^2 - 3x^2)^2} \right. \\ & \left. - \frac{216xy\alpha}{(x^2 - 3y^2)^2} \right\} + \left\{ \partial_x^2\partial_y^2, \frac{27(-3x^4 + 6x^2y^2 + y^4)\beta}{(y^3 - 3x^2y)^2} - \frac{54(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)\alpha}{(x^3 - 3xy^2)^2} \right. \\ & \left. + 6y^2\omega^2 \right\} + \left\{ \partial_x\partial_y^3, \frac{216xy\beta}{(y^2 - 3x^2)^2} + \frac{72xy\alpha}{(x^2 - 3y^2)^2} - 12xy\omega^2 \right\} + \left\{ \partial_y^4, -\frac{9\alpha}{2x^2} \right. \\ & \left. + 6x^2\omega^2 \right\} + \left\{ \partial_x^2, \frac{18(3x^8 + 44y^2x^6 + 42y^4x^4 - 36y^6x^2 + 27y^8)\alpha}{x^4(x^2 - 3y^2)^4} \right. \\ & \left. + \frac{81(3x^4 - 6y^2x^2 - y^4)^2\beta^2}{2y^4(3x^2 - y^2)^4} + \frac{81(3x^8 - 52y^2x^6 + 18y^4x^4 + 12y^6x^2 + 3y^8)\alpha^2}{2x^4(x^2 - 3y^2)^4} \right. \\ & \left. + \frac{2(2x^6 + 15y^2x^4 + 18y^4x^2 - 27y^6)\alpha\omega^2}{x^2(x^2 - 3y^2)^2} - \frac{54x^2(x - y)(x + y)(x^2 - 7y^2)\beta\omega^2}{y^2(3x^2 - y^2)^2} \right. \\ & \left. + \frac{162(x - y)(x + y)(3x^6 - 19y^2x^4 - 7y^4x^2 - y^6)\alpha\beta}{x^2y^2(x^2 - 3y^2)^2(3x^2 - y^2)^2} - 6y^4\omega^4 \right\} \\ & + \left\{ \partial_x\partial_y, -\frac{1152xy(x^2 + 3y^2)\alpha}{(x^2 - 3y^2)^4} - \frac{648x(3x^4 - 6y^2x^2 - y^4)\beta^2}{y(y^2 - 3x^2)^4} \right. \\ & \left. - \frac{648y(x^4 + 6y^2x^2 - 3y^4)\alpha^2}{x(x^2 - 3y^2)^4} - \frac{648(x - y)(x + y)(x^4 + 10y^2x^2 + y^4)\alpha\beta}{xy(3x^4 - 10y^2x^2 + 3y^4)^2} \right\} \end{aligned}$$

A-ii

$$\begin{aligned}
& + \frac{108x(x-y)(x+y)(x^2+y^2)\beta\omega^2}{y(y^2-3x^2)^2} + \frac{216xy(x^2+y^2)\alpha\omega^2}{(x^2-3y^2)^2} + 12xy^3\omega^4 \Big\} \\
& + \left\{ \partial_y^2, \frac{81(x^8-6y^4x^4+24y^6x^2-3y^8)\alpha^2}{x^4(x^2-3y^2)^4} + \frac{144(x^4+18y^2x^2+9y^4)\alpha}{(x^2-3y^2)^4} + \frac{2592x^2y^2\beta^2}{(3x^2-y^2)^4} \right. \\
& - \frac{(23x^6+159y^2x^4+45y^4x^2-27y^6)\alpha\omega^2}{x^2(x^2-3y^2)^2} + \frac{81(x^8-6y^4x^4+56y^6x^2-3y^8)\alpha\beta}{x^2y^2(x^2-3y^2)^2(3x^2-y^2)^2} \\
& \left. - \frac{27(x^6-11y^2x^4+19y^4x^2-y^6)\beta\omega^2}{y^2(3x^2-y^2)^2} + 2\omega^2 - 6x^2y^2\omega^4 \right\} \\
& - \frac{180(43x^{12}+1914y^2x^{10}+5805y^4x^8+972y^6x^6+405y^8x^4-486y^{10}x^2+243y^{12})\alpha}{x^6(x^2-3y^2)^6} \\
& + \frac{1296\beta^2}{(y^3-3x^2y)^2} + \frac{1296(x^6+21y^2x^4-9y^4x^2+3y^6)\alpha\beta}{x^2y^2(x^2-3y^2)^2(3x^2-y^2)^2} - \frac{729\alpha^3(x^2+y^2)^6}{x^6(x^2-3y^2)^6} \\
& - \frac{324(5x^{12}+30y^2x^{10}+399y^4x^8-332y^6x^6+291y^8x^4-18y^{10}x^2+9y^{12})\alpha^2}{x^6(x^2-3y^2)^6} \\
& - \frac{1458\alpha^2\beta(x^2+y^2)^6}{x^4y^2(x^2-3y^2)^4(3x^2-y^2)^2} - \frac{729\alpha\beta^2(x^2+y^2)^6}{x^2y^4(x^2-3y^2)^2(3x^2-y^2)^4} + \frac{72(x^2+y^2)^2\alpha\omega^2}{(x^3-3xy^2)^2} \\
& + \frac{243(x^2+y^2)^2(x^6-24y^2x^4+21y^4x^2-2y^6)\beta^2\omega^2}{9x^4(x^2-3y^2)^4} + \frac{414(x^2+y^2)^2\alpha\beta\omega^2}{y^2(3x^2-y^2)^2} \\
& + \frac{9(x^2+y^2)^2(19x^6+372y^2x^4-153y^4x^2+54y^6)\alpha^2\omega^2}{x^4(x^2-3y^2)^4} + \frac{180(x^2+y^2)^2\beta\omega^2}{y^2(3x^2-y^2)^2} \\
& + \frac{54(x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x^2-4yx+y^2)(x^2+4yx+y^2)\beta\omega^4}{y^2(3x^2-y^2)^2} \\
& + \frac{(x^2+y^2)(19x^6+129y^2x^4+9y^4x^2+27y^6)\alpha\omega^4}{x^2(x^2-3y^2)^2} - 4y^2\omega^4
\end{aligned}$$

La forme Lie-algebrique $y_6 = \Psi_0^{-1}(\mathcal{Y}_6 - C_6)\Psi_0$ après le changement de variables $t = r^2$ and $u = r^6 \sin^2 3\varphi$ est

$$\begin{aligned}
y_6 = & 64(t^3-u)\partial_t^6 - 3456(t^3-u)tu\partial_t^4\partial_u^2 - 6912(t^3-u)u^2\partial_t^3\partial_u^3 + 46656(t^3-u)t^2u^2\partial_t^2\partial_u^4 \\
& + 186624(t^3-u)tu^3\partial_t\partial_u^5 + 186624(t^3-u)u^4\partial_u^6 \\
& + 96[-2\omega t^3 + (6a+3)t^2 + 2u\omega]\partial_t^5 + 1728[(-2b-1)t^3 + 2(a+b+1)u]t\partial_t^4\partial_u \\
& - 1728[-4\omega t^4 + (12a+6b+19)t^3 + 4u\omega t - 2(3a+3b+8)u]u\partial_t^3\partial_u^2 - 5184[-9(2b+3)t^5 \\
& - 2u\omega t^3 + 3(8a+6b+13)ut^2 + 2u^2\omega]u\partial_t^2\partial_u^3 + 23328[-2\omega t^4 + (6a+20b+57)t^3 \\
& + 2u\omega t - 4(5a+5b+16)u]tu^2\partial_t\partial_u^4 + 46656[-2\omega t^4 + (6a+12b+47)t^3 + 2u\omega t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 2(6a + 6b + 25)u] u^3 \partial_u^5 + 48[4\omega^2 t^3 - 15(2a\omega + \omega)t^2 + 6(2a + 1)(3a + 3b + 2)t \\
& - 4u\omega^2] \partial_t^4 + 864[4(2b\omega + \omega)t^4 + (-2b - 1)(12a + 2b + 13)t^3 - 8(a + b + 1)u\omega t \\
& + 2(4a^2 + (6b + 9)a + 2b^2 + 11b + 7)u] \partial_t^3 \partial_u - 432[-27(4b^2 + 8b + 3)t^5 \\
& + 8u\omega^2 t^4 - 6(12a + 6b + 19)u\omega t^3 + 9(16a^2 + 16(3b + 5)a + 12b^2 + 48b + 45)ut^2 \\
& - 8u^2 \omega^2 t + 12(3a + 3b + 8)u^2 \omega] \partial_t^2 \partial_u^2 - 7776[6(2b + 3)\omega t^4 - 3(2b + 3)(6a \\
& + 8b + 27)t^3 - 2(8a + 6b + 13)u\omega t + 2(24a^2 + 2(30b + 71)a + 24b^2 + 138b \\
& + 173)u] tu \partial_t \partial_u^3 + 3888[4\omega^2 t^5 - 3(6a + 20b + 57)\omega t^4 + 6(4a^2 + (30b + 83)a \\
& + 26b^2 + 179b + 288)t^3 - 4u\omega^2 t^2 + 12(5a + 5b + 16)u\omega t - 12(13a^2 + (30b + 97)a \\
& + 13b^2 + 97b + 169)u] u^2 \partial_u^4 + [-64t^3 \omega^3 + 32t(-108\omega a^2 - 108b\omega a - 126\omega a \\
& - 54b\omega - 36\omega) + 32t^2(36a\omega^2 + 18\omega^2) + 32(54a^3 + 108ba^2 + 81a^2 + 54b^2 a \\
& + 108ba + 39a + 2u\omega^3 + 27b^2 + 27b + 6)] \partial_t^3 + [-1728(2b + 1)\omega^2 t^4 \\
& + 1296(2b + 1)(12a + 2b + 13)\omega t^3 - 7776(2a + 1)(2b + 1)(2a + 2b + 3)t^2 \\
& + 3456(a + b + 1)u\omega^2 t - 2592(4a^2 + (6b + 9)a + 2b^2 + 11b + 7)u\omega] \partial_t^2 \partial_u \\
& + [-11664(4b^2 + 8b + 3)\omega t^5 + 5832(6a + 4b + 17)(4b^2 + 8b + 3)t^4
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
C_6 = & 4\omega^3(15a^3 + (123b + 8)a^2 + (27b^2 + 174b + 13)a - 81b^3 \\
& + 108b^2 + 57b + 4)
\end{aligned}$$

est la plus petite valeur propre de \mathcal{Y}_6 .

Annexe B

INTÉGRALE DU MOUVEMENT LORSQUE $k = 4$

Dans cet annexe, nous présentons l'intégrale du mouvement pour l'Hamiltonien (3.1.1) lorsque $k = 4$. Ensuite, nous présentons la forme Lie-algébrique de cette intégrale.

L'intégrale d'ordre huit est

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Y}_8 = & \left((\partial_x^2 - \omega^2 x^2)^2 - 6(\partial_x^2 - \omega^2 x^2)(\partial_y^2 - \omega^2 y^2) + (\partial_y^2 - \omega^2 y^2)^2 \right)^2 \\
 & + \left\{ \partial_x^6, -\frac{32(x^2 + y^2)^3 \alpha}{(x^4 - 6x^2 y^2 + y^4)^2} + \frac{2(3x^6 - 11y^2 x^4 + y^4 x^2 - y^6) \beta}{x^2 y^2 (x^2 - y^2)^2} \right\} \\
 & + \left\{ \partial_x^5 \partial_y, -\frac{64xy\beta}{(x^2 - y^2)^2} - \frac{256xy(5x^4 - 2x^2 y^2 + y^4) \alpha}{(x^4 - 6x^2 y^2 + y^4)^2} \right\} + \left\{ \partial_x^4 \partial_y^2, \right. \\
 & - \frac{32(11x^6 + 81x^4 y^2 - 63x^2 y^4 - 5y^6)}{(x^4 - 6x^2 y^2 + y^4)^2} - \frac{2(19x^6 - 67y^2 x^4 + 17y^4 x^2 - 9y^6) \beta}{x^2 y^2 (x^2 - y^2)^2} \\
 & \left. + 32\omega^2 y^2 \right\} + \left\{ \partial_x^3 \partial_y^3, \frac{512xy(3x^4 - 2x^2 y^2 + 3y^4) \alpha}{(x^4 - 6x^2 y^2 + y^4)^2} + \frac{384xy\beta}{(x^2 - y^2)^2} - 64\omega^2 xy \right\} \\
 & + \left\{ \partial_x^2 \partial_y^4, \frac{32(5x^6 + 63x^4 y^2 - 81x^2 y^4 - 11y^6) \alpha}{(x^4 - 6x^2 y^2 + y^4)^2} + 32\omega^2 x^2 \right. \\
 & \left. + \frac{2(9x^6 - 17y^2 x^4 + 67y^4 x^2 - 19y^6) \beta}{x^2 y^2 (x^2 - y^2)^2} \right\} + \left\{ \partial_x \partial_y^5, -\frac{256xy(x^4 - 2x^2 y^2 + 5y^4) \alpha}{(x^4 - 6x^2 y^2 + y^4)^2} \right. \\
 & \left. - \frac{64xy\beta}{(x^2 - y^2)^2} \right\} + \left\{ \partial_y^6, -\frac{2(x^6 - y^2 x^4 + 11y^4 x^2 - 3y^6) \beta}{x^2 y^2 (x^2 - y^2)^2} - \frac{32(x^2 + y^2)^3 \alpha}{(x^4 - 6x^2 y^2 + y^4)^2} \right\} \\
 & + \left\{ \partial_x^4, \frac{384(x^2 + y^2)^2 (3x^8 + 92y^2 x^6 - 142y^4 x^4 + 92y^6 x^2 + 3y^8) \alpha}{(x^4 - 6y^2 x^2 + y^4)^4} \right. \\
 & \left. - \frac{24(3x^8 + 28y^2 x^6 - 2y^4 x^4 + 4y^6 x^2 - y^8) \beta}{(x^3 - xy^2)^4} \right\}
 \end{aligned}$$

B-ii

$$\begin{aligned}
& + \frac{256(x^8 - 10y^2x^6 + 37y^4x^4 - 16y^6x^2)\alpha\omega^2}{(x^4 - 6y^2x^2 + y^4)^2} \\
& + \frac{256(3x^{12} - 182y^2x^{10} + 205y^4x^8 - 52y^6x^6 + 77y^8x^4 + 10y^{10}x^2 + 3y^{12})\alpha^2}{(x^4 - 6y^2x^2 + y^4)^4} \\
& + \frac{32(11x^{12} - 158y^2x^{10} + 221y^4x^8 - 68y^6x^6 + 53y^8x^4 + 2y^{10}x^2 + 3y^{12})\alpha\beta}{x^2y^2(x^6 - 7y^2x^4 + 7y^4x^2 - y^6)^2} \\
& + \frac{(19x^{12} - 134y^2x^{10} + 237y^4x^8 - 84y^6x^6 + 29y^8x^4 - 6y^{10}x^2 + 3y^{12})\beta^2}{x^4y^4(x^2 - y^2)^4} \\
& - \left. \frac{2(9x^8 - 50y^2x^6 + 98y^4x^4 - 18y^6x^2 + 9y^8)\beta\omega^2}{x^2y^2(x^2 - y^2)^2} \right\} \\
& + \left\{ \partial_x^3 \partial_y, \frac{6144x(7y^{11} + 37x^2y^9 - 34x^4y^7 + 34x^6y^5 - 37x^8y^3 - 7x^{10}y)\alpha}{(x^4 - 6y^2x^2 + y^4)^4} - \frac{768xy(x^2 + y^2)\beta}{(x^2 - y^2)^4} \right. \\
& - \frac{8192x(-y^{11} - 5x^2y^9 + 10x^4y^7 - 30x^6y^5 + 23x^8y^3 + 3x^{10}y)\alpha^2}{(x^4 - 6y^2x^2 + y^4)^4} + \frac{64xy(x^2 - 3y^2)\beta\omega^2}{(x^2 - y^2)^2} \\
& - \frac{128(3x^6 - 11y^2x^4 + y^4x^2 - y^6)\beta^2}{xy(x^2 - y^2)^4} + \frac{512x(-y^7 - x^2y^5 + 5x^4y^3 + 5x^6y)\alpha\omega^2}{(x^4 - 6y^2x^2 + y^4)^2} \\
& \left. - \frac{512(3x^{10} + 35y^2x^8 - 74y^4x^6 + 14y^6x^4 - 9y^8x^2 - y^{10})\alpha\beta}{xy(x^6 - 7y^2x^4 + 7y^4x^2 - y^6)^2} - 64\omega^4xy^3 \right\} \\
& + \left\{ \partial_x^2 \partial_y^2, \frac{768(x^2 + y^2)^2(3x^8 + 92y^2x^6 - 142y^4x^4 + 92y^6x^2 + 3y^8)\alpha}{(x^4 - 6y^2x^2 + y^4)^4} \right. \\
& - \frac{72(x^{12} - 4y^2x^{10} - y^4x^8 - 56y^6x^6 - y^8x^4 - 4y^{10}x^2 + y^{12})\beta}{x^4y^4(x^2 - y^2)^4} \\
& - \frac{512(x^{12} + 14y^2x^{10} + 303y^4x^8 - 956y^6x^6 + 303y^8x^4 + 14y^{10}x^2 + y^{12})\alpha^2}{(x^4 - 6y^2x^2 + y^4)^4} \\
& - \frac{2(9x^{12} - 34y^2x^{10} + 39y^4x^8 - 1372y^6x^6 + 39y^8x^4 - 34y^{10}x^2 + 9y^{12})\beta^2}{x^4y^4(x^2 - y^2)^4} \\
& - \frac{64(5x^{12} - 10y^2x^{10} + 171y^4x^8 - 1164y^6x^6 + 171y^8x^4 - 10y^{10}x^2 + 5y^{12})\alpha\beta}{x^2y^2(x^6 - 7y^2x^4 + 7y^4x^2 - y^6)^2} \\
& + \frac{4(3x^8 - 14y^2x^6 - 218y^4x^4 - 14y^6x^2 + 3y^8)\beta\omega^2}{x^2y^2(x^2 - y^2)^2} + 64\omega^2 + 128x^2y^2\omega^4 \\
& \left. + \frac{512(x^8 - 15x^6y^2 - 32x^4y^4 - 15x^2y^2 + y^8)\alpha\omega^2}{(x^4 - 6y^2x^2 + y^4)^2} \right\} \\
& + \left\{ \partial_x \partial_y^3, \frac{6144(7yx^{11} + 37y^3x^9 - 34y^5x^7 + 34y^7x^5 - 37y^9x^3 - 7y^{11}x)\alpha}{(x^4 - 6y^2x^2 + y^4)^4} \right. \\
& - \frac{768xy(x^2 + y^2)\beta}{(x^2 - y^2)^4} + \frac{8192xy(x^{10} + 5y^2x^8 - 10y^4x^6 + 30y^6x^4 - 23y^8x^2 - 3y^{10})\alpha^2}{(x^4 - 6y^2x^2 + y^4)^4} \\
& \left. - \frac{768xy(x^2 + y^2)\beta}{(x^2 - y^2)^4} + \frac{8192xy(x^{10} + 5y^2x^8 - 10y^4x^6 + 30y^6x^4 - 23y^8x^2 - 3y^{10})\alpha^2}{(x^4 - 6y^2x^2 + y^4)^4} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{128(x^6 - y^2x^4 + 11y^4x^2 - 3y^6)\beta^2}{xy(x^2 - y^2)^4} - \frac{512xy(x^6 + x^4y^2 - 5x^2y^4 - 5y^6)\alpha\omega^2}{(x^4 - 6y^2x^2 + y^4)^2} \\
& + \frac{512(x^{10} + 9y^2x^8 - 14y^4x^6 + 74y^6x^4 - 35y^8x^2 - 3y^{10})\alpha\beta}{xy(x^6 - 7y^2x^4 + 7y^4x^2 - y^6)^2} - \frac{64y(x^2 + y^2)\beta\omega^2}{x(x^2 - y^2)} \\
& - 64\omega^4x^3y \left. \right\} + \left\{ \partial_y^4, \frac{384(x^2 + y^2)^2(3x^8 + 92y^2x^6 - 142y^4x^4 + 92y^6x^2 + 3y^8)\alpha}{(x^4 - 6y^2x^2 + y^4)^4} \right. \\
& + \frac{24(x^8 - 4y^2x^6 + 2y^4x^4 - 28y^6x^2 - 3y^8)\beta}{(y^3 - x^2y)^4} \\
& - \frac{256y^2(16x^6 - 37y^2x^4 + 10y^4x^2 - y^6)\alpha\omega^2}{(x^4 - 6y^2x^2 + y^4)^2} \\
& + \frac{256(3x^{12} + 10y^2x^{10} + 77y^4x^8 - 52y^6x^6 + 205y^8x^4 - 182y^{10}x^2 + 3y^{12})\alpha^2}{(x^4 - 6y^2x^2 + y^4)^4} \\
& + \frac{32(3x^{12} + 2y^2x^{10} + 53y^4x^8 - 68y^6x^6 + 221y^8x^4 - 158y^{10}x^2 + 11y^{12})\alpha\beta}{x^2y^2(x^6 - 7y^2x^4 + 7y^4x^2 - y^6)^2} \\
& + \frac{(3x^{12} - 6y^2x^{10} + 29y^4x^8 - 84y^6x^6 + 237y^8x^4 - 134y^{10}x^2 + 19y^{12})\beta^2}{x^4y^4(x^2 - y^2)^4} \\
& - \left. \frac{2(9x^8 - 18y^2x^6 + 98y^4x^4 - 50y^6x^2 + 9y^8)\beta\omega^2}{x^2y^2(x^2 - y^2)^2} \right\} \\
& + \left\{ \partial_x^2, -\frac{15360(17x^{18} + 1467y^2x^{16} + 7140y^4x^{14} - 4932y^6x^{12} + 318y^8x^{10} + 666y^{10}x^8)\alpha}{(x^4 - 6y^2x^2 + y^4)^6} \right. \\
& - \frac{15360(-1068y^{12}x^6 + 1260y^{14}x^4 + 249y^{16}x^2 + 3y^{18})\alpha}{(x^4 - 6y^2x^2 + y^4)^6} \\
& - \frac{120(165y^8x^{10} + 333y^{10}x^8 - 87y^{12}x^6 + 75y^{14}x^4 - 30y^{16}x^2 + 5y^{18})\beta}{x^6y^6(x^2 - y^2)^6} \\
& + \frac{120(3x^{18} - 18y^2x^{16} + 45y^4x^{14} - 81y^6x^{12})\beta}{x^6y^6(x^2 - y^2)^6} \\
& - \frac{2048x^2(31x^{16} + 264y^2x^{14} - 7380y^4x^{12})\alpha^2}{(x^4 - 6y^2x^2 + y^4)^6} \\
& - \frac{2048x^2(-17256y^6x^{10} + 26538y^8x^8 - 16392y^{10}x^6 + 8628y^{12}x^4 - 1560y^{14}x^2)\alpha^2}{(x^4 - 6y^2x^2 + y^4)^6} \\
& + \frac{620544x^2y^{16}\alpha^2}{(x^4 - 6y^2x^2 + y^4)^6} - \frac{128(33x^{20} - 714y^2x^{18} + 7551y^4x^{16} - 17856y^6x^{14})\alpha\beta}{y^2(x^3 - xy^2)^4(x^4 - 6y^2x^2 + y^4)^3} \\
& - \frac{128(21866y^8x^{12} - 19604y^{10}x^{10} + 7470y^{12}x^8)\alpha\beta}{y^2(x^3 - xy^2)^4(x^4 - 6y^2x^2 + y^4)^3}
\end{aligned}$$

B-iv

$$\begin{aligned}
& - \frac{128(-2160y^{14}x^6 + 453y^{16}x^4 - 114y^{18}x^2 + 3y^{20})\alpha\beta}{y^2(x^3 - xy^2)^4(x^4 - 6y^2x^2 + y^4)^3} + \frac{8(3x^{18} - 18y^2x^{16} + 354y^4x^{14})\beta^2}{x^6y^6(x^2 - y^2)^6} \\
& + \frac{8(-1281y^6x^{12} + 1242y^8x^{10} - 1551y^{10}x^8 + 282y^{12}x^6 - 87y^{14}x^4 + 39y^{16}x^2 - 7y^{18})\beta^2}{x^6y^6(x^2 - y^2)^6} \\
& - \frac{8192(x^2 + y^2)^4(x^{10} + 45y^2x^8 - 46y^4x^6 + 34y^6x^4 - 3y^8x^2 + y^{10})\alpha^3}{(x^4 - 6y^2x^2 + y^4)^6} \\
& + \frac{2(x^2 + y^2)^4(3x^{10} - 29y^2x^8 + 70y^4x^6 - 18y^6x^4 + 7y^8x^2 - y^{10})\beta^3}{x^6y^6(x^2 - y^2)^6} \\
& + \frac{512(x^2 + y^2)^4(x^{10} - 119y^2x^8 + 162y^4x^6 - 86y^6x^4 + 13y^8x^2 - 3y^{10})\alpha^2\beta}{x^2y^2(x^2 - y^2)^2(x^4 - 6y^2x^2 + y^4)^4} \\
& + \frac{32(x^2 + y^2)^4(5x^{10} - 103y^2x^8 + 186y^4x^6 - 70y^6x^4 + 17y^8x^2 - 3y^{10})\alpha\beta^2}{x^4y^4(x^2 - y^2)^4(x^4 - 6y^2x^2 + y^4)^2} \\
& - \frac{256(4x^{14} + 9y^2x^{12} - 1030y^4x^{10} + 775y^6x^8 - 512y^8x^6 + 167y^{10}x^4 - 3y^{14})\alpha\omega^2}{(x^4 - 6y^2x^2 + y^4)^4} \\
& + \frac{8(13x^{12} + 16y^2x^{10} + 367y^4x^8 + 112y^6x^6 + 91y^8x^4 - 32y^{10}x^2 + 9y^{12})\beta\omega^2}{x^4y^2(x^2 - y^2)^4} \\
& - \frac{512(x^2 + y^2)^2(13x^{10} - 315y^2x^8 + 506y^4x^6 + 354y^6x^4 - 215y^8x^2 + 9y^{10})\alpha^2\omega^2}{(x^4 - 6y^2x^2 + y^4)^4} \\
& - \frac{2(x^2 + y^2)^2(3x^{10} - 25y^2x^8 + 26y^4x^6 - 142y^6x^4 + 51y^8x^2 - 9y^{10})\beta^2\omega^2}{x^4y^4(x^2 - y^2)^4} \\
& - \frac{128(x^2 + y^2)^2(37x^8 - 25y^2x^6 + 55y^4x^4 - 7y^6x^2 + 4y^8)\alpha\beta\omega^2}{(x^7 - 7y^2x^5 + 7y^4x^3 - y^6x)^2} \\
& - 96x^2\omega^4 - \frac{32(13x^{10} - 156y^2x^8 + 630y^4x^6 + 76y^6x^4 + 5y^8x^2 + 24y^{10})\alpha\omega^4}{(x^4 - 6y^2x^2 + y^4)^2} \\
& + \left. \frac{2(9x^{10} - 99y^2x^8 + 171y^4x^6 - 212y^6x^4 - 10y^8x^2 - 19y^{10})\beta\omega^4}{x^2y^2(x^2 - y^2)^2} + 32x^2y^4\omega^6 \right\} \\
& + \left\{ \partial_x \partial_y, - \frac{61440x(51y^{17} + 936x^2y^{15} + 756x^4y^{13} - 1512x^6y^{11} + 1330x^8y^9)\alpha}{(x^4 - 6y^2x^2 + y^4)^6} \right. \\
& - \frac{61440x(-1512x^{10}y^7 + 756x^{12}y^5 + 936x^{14}y^3 + 51x^{16}y)\alpha}{(x^4 - 6y^2x^2 + y^4)^6} + \frac{30720xy(3x^4 + 10y^2x^2 + 3y^4)\beta}{(x^2 - y^2)^6} \\
& - \frac{4096x(39y^{17} + 888x^2y^{15} + 3396x^4y^{13} - 18360x^6y^{11} + 36010x^8y^9 - 18360x^{10}y^7)\alpha^2}{(x^4 - 6y^2x^2 + y^4)^6} \\
& - \frac{4096x(3396x^{12}y^5 + 888x^{14}y^3 + 39x^{16}y)\alpha^2}{(x^4 - 6y^2x^2 + y^4)^6} + \frac{16(9x^{12} + 258y^2x^{10} - 585y^4x^8 + 3196y^6x^6)\beta^2}{x^3y^3(x^2 - y^2)^6} \\
& \left. + \frac{16(-585y^8x^4 + 258y^{10}x^2 + 9y^{12})\beta^2}{x^3y^3(x^2 - y^2)^6} - \frac{65536xy(x^2 - y^2)^2(x^2 + y^2)^4(x^4 + 10y^2x^2 + y^4)\alpha^3}{(x^4 - 6y^2x^2 + y^4)^6} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{256(7x^{20} + 104y^2x^{18} + 243y^4x^{16} - 3792y^6x^{14} + 18438y^8x^{12} - 33072y^{10}x^{10})\alpha\beta}{x^3y^3(x^2 - y^2)^4(x^4 - 6y^2x^2 + y^4)^3} \\
& + \frac{256(18438y^{12}x^8 - 3792y^{14}x^6 + 243y^{16}x^4 + 104y^{18}x^2 + 7y^{20})\alpha\beta}{x^3y^3(x^2 - y^2)^4(x^4 - 6y^2x^2 + y^4)^3} \\
& - \frac{64(x^2 + y^2)^4(x^4 - 6y^2x^2 + y^4)\beta^3}{x^3y^3(x^2 - y^2)^6} - \frac{256(x^2 + y^2)^4(x^8 + 16y^2x^6 - 66y^4x^4)\alpha\beta^2}{x^3y^3(x^2 - y^2)^4(x^4 - 6y^2x^2 + y^4)^2} \\
& - \frac{256(x^2 + y^2)^4(16y^6x^2 + y^8)\alpha\beta^2}{x^3y^3(x^2 - y^2)^4(x^4 - 6y^2x^2 + y^4)^2} - \frac{8192(x^2 + y^2)^4(x^8 + 10y^2x^6 - 30y^4x^4)\alpha^2\beta}{xy(x^2 - y^2)^2(x^4 - 6y^2x^2 + y^4)^4} \\
& - \frac{8192(10y^6x^2 + y^8)}{xy(x^2 - y^2)^2(x^4 - 6y^2x^2 + y^4)^4} \\
& - \frac{1536xy(5y^{12} + 158x^2y^{10} + 395x^4y^8 - 540x^6y^6 + 395x^8y^4 + 158x^{10}y^2 + 5x^{12})\alpha\omega^2}{(x^4 - 6y^2x^2 + y^4)^4} \\
& + \frac{48(x^{12} - 4y^2x^{10} - 17y^4x^8 - 152y^6x^6 - 17y^8x^4 - 4y^{10}x^2 + y^{12})\beta\omega^2}{x^3y^3(x^2 - y^2)^4} \\
& + \frac{8192xy(x^2 + y^2)^2(x^8 + 6y^2x^6 - 22y^4x^4 + 6y^6x^2 + y^8)\alpha^2\omega^2}{(x^4 - 6y^2x^2 + y^4)^4} \\
& + \frac{64(x^2 + y^2)^2(x^4 - 14y^2x^2 + y^4)\beta^2\omega^2}{xy(x^2 - y^2)^4} \\
& - \frac{64xy(y^8 - 220x^2y^6 + 262x^4y^4 - 220x^6y^2 + x^8)\alpha\omega^4}{(x^4 - 6y^2x^2 + y^4)^2} \\
& + \frac{512(x^2 + y^2)^2(x^8 + 8y^2x^6 - 50y^4x^4 + 8y^6x^2 + y^8)\alpha\beta\omega^2}{xy(x^6 - 7y^2x^4 + 7y^4x^2 - y^6)^2} - 64xy\omega^4 - 64x^3y^3\omega^6 \\
& + \left. \frac{4(16x^8 - 13y^2x^6 + 442y^4x^4 - 13y^6x^2 + 16y^8)\beta\omega^4}{xy(x^2 - y^2)^2} \right\} \\
& + \left\{ \partial_y^2, - \frac{15360(3x^{18} + 249y^2x^{16} + 1260y^4x^{14} - 1068y^6x^{12} + 666y^8x^{10} + 318y^{10}x^8)\alpha}{(x^4 - 6y^2x^2 + y^4)^6} \right. \\
& - \frac{15360(-4932y^{12}x^6 + 7140y^{14}x^4 + 1467y^{16}x^2 + 17y^{18})\alpha}{(x^4 - 6y^2x^2 + y^4)^6} - \frac{120(5x^{18} - 30y^2x^{16})\beta}{x^6y^6(x^2 - y^2)^6} \\
& - \frac{120(-87y^6x^{12} + 333y^8x^{10} + 165y^{10}x^8 + 81y^{12}x^6 - 45y^{14}x^4 + 18y^{16}x^2 - 3y^{18})\beta}{x^6y^6(x^2 - y^2)^6} \\
& - \frac{9000\beta y^4x^{14}}{x^6y^6(x^2 - y^2)^6} - \frac{2048y^2(303x^{16} - 1560y^2x^{14} + 8628y^4x^{12} - 16392y^6x^{10})\alpha^2}{(x^4 - 6y^2x^2 + y^4)^6} \\
& - \frac{2048y^2(26538y^8x^8 - 17256y^{10}x^6)\alpha^2}{(x^4 - 6y^2x^2 + y^4)^6} - \frac{2048y^2(7380y^{12}x^4 + 264y^{14}x^2 + 31y^{16})\alpha^2}{(x^4 - 6y^2x^2 + y^4)^6} \\
& \left. - \frac{8(7x^{18} - 39y^2x^{16} + 87y^4x^{14} - 282y^6x^{12})\beta^2}{x^6y^6(x^2 - y^2)^6} \right\}
\end{aligned}$$

B-vi

$$\begin{aligned}
& - \frac{8(1551y^8x^{10} - 1242y^{10}x^8 + 1281y^{12}x^6 - 354y^{14}x^4 + 18y^{16}x^2 - 3y^{18})\beta^2}{x^6y^6(x^2 - y^2)^6} \\
& - \frac{128(3x^{20} - 114y^2x^{18} + 453y^4x^{16} - 2160y^6x^{14} + 7470y^8x^{12} - 19604y^{10}x^{10})\alpha\beta}{x^2y^4(x^2 - y^2)^4(x^4 - 6y^2x^2 + y^4)^3} \\
& - \frac{128(21866y^{12}x^8 - 17856y^{14}x^6 + 7551y^{16}x^4 - 714y^{18}x^2 + 33y^{20})\alpha\beta}{x^2y^4(x^2 - y^2)^4(x^4 - 6y^2x^2 + y^4)^3} \\
& - \frac{8192(x^2 + y^2)^4(x^{10} - 3y^2x^8 + 34y^4x^6 - 46y^6x^4 + 45y^8x^2 + y^{10})\alpha^3}{(x^4 - 6y^2x^2 + y^4)^6} \\
& - \frac{2(x^2 + y^2)^4(x^{10} - 7y^2x^8 + 18y^4x^6 - 70y^6x^4 + 29y^8x^2 - 3y^{10})\beta^3}{x^6y^6(x^2 - y^2)^6} \\
& - \frac{512(x^2 + y^2)^4(3x^{10} - 13y^2x^8 + 86y^4x^6 - 162y^6x^4 + 119y^8x^2 - y^{10})\alpha^2\beta}{x^2y^2(x^2 - y^2)^2(x^4 - 6y^2x^2 + y^4)^4} \\
& - \frac{32(x^2 + y^2)^4(3x^{10} - 17y^2x^8 + 70y^4x^6 - 186y^6x^4 + 103y^8x^2 - 5y^{10})\alpha\beta^2}{x^4y^4(x^2 - y^2)^4(x^4 - 6y^2x^2 + y^4)^2} \\
& + \frac{256(23x^{14} + 606y^2x^{12} - 167y^4x^{10} + 512y^6x^8 - 775y^8x^6 + 1030y^{10}x^4 - 9x^2y^{12} - 4y^{14})\alpha\omega^2}{(x^4 - 6y^2x^2 + y^4)^4} \\
& + \frac{8(9x^{12} - 32y^2x^{10} + 91y^4x^8 + 112y^6x^6 + 367y^8x^4 + 16y^{10}x^2 + 13y^{12})\beta\omega^2}{x^2y^4(x^2 - y^2)^4} \\
& - \frac{512(x^2 + y^2)^2(9x^{10} - 215y^2x^8 + 354y^4x^6 + 506y^6x^4 - 315y^8x^2 + 13y^{10})\alpha^2\omega^2}{(x^4 - 6y^2x^2 + y^4)^4} \\
& + \frac{2(x^2 + y^2)^2(9x^{10} - 51y^2x^8 + 142y^4x^6 - 26y^6x^4 + 25y^8x^2 - 3y^{10})\beta^2\omega^2}{x^4y^4(x^2 - y^2)^4} \\
& + \frac{128(x^2 + y^2)^2(41x^8 - 53y^2x^6 - 133y^4x^4 - 85y^6x^2 - 4y^8)\alpha\beta\omega^2}{(y^7 - 7x^2y^5 + 7x^4y^3 - x^6y)^2} \\
& - \frac{32(24x^{10} + 5y^2x^8 + 76y^4x^6 + 630y^6x^4 - 156y^8x^2 + 13y^{10})\alpha\omega^4}{(x^4 - 6y^2x^2 + y^4)^2} \\
& - \left. \frac{2(19x^{10} + 10y^2x^8 + 212y^4x^6 - 171y^6x^4 + 99y^8x^2 - 9y^{10})\beta\omega^4}{x^2(x - y)^2y^2(x + y)^2} - 96y^2\omega^4 + 32x^4y^2\omega^6 \right\} \\
& + \frac{10080(x^{24} - 8y^2x^{22} + 28y^4x^{20} - 56y^6x^{18} + 103y^8x^{16} + 832y^{10}x^{14} + 2296y^{12}x^{12})\beta}{x^8y^8(x^2 - y^2)^8} \\
& + \frac{10080(832y^{14}x^{10} + 103y^{16}x^8 - 56y^{18}x^6 + 28y^{20}x^4 - 8y^{22}x^2 + y^{24})\beta}{x^8y^8(x^2 - y^2)^8} \\
& + \frac{768(5x^{32} - 165y^2x^{30} + 2490y^4x^{28} - 16359y^6x^{26} + 74944y^8x^{24} - 219501y^{10}x^{22})\alpha\beta}{x^6(x - y)^6y^6(x + y)^6(x^2 - 2yx - y^2)^4(x^2 + 2yx - y^2)^4} \\
& + \frac{256(x^2 + y^2)^4(x^{16} - 31y^2x^{14} + 190y^4x^{12} - 865y^6x^{10} + 1666y^8x^8 - 865y^{10}x^6 + y^{12})\alpha\beta^2}{x^6y^6(x^2 - y^2)^6(x^4 - 6y^2x^2 + y^4)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{256(190y^{12}x^4 - 31y^{14}x^2 + y^{16})\alpha\beta^2}{x^6y^6(x^2 - y^2)^6(x^4 - 6y^2x^2 + y^4)^2} - \frac{6144(x^2 + y^2)^2(47x^{16} + 4184y^2x^{14})\alpha\omega^2}{(x^2 - 2yx - y^2)^6(x^2 + 2yx - y^2)^6} \\
& - \frac{6144(17892y^4x^{12} - 37016y^6x^{10} + 41818y^8x^8 - 37016y^{10}x^6 + 17892y^{12}x^4)\alpha\omega^2}{(x^2 - 2yx - y^2)^6(x^2 + 2yx - y^2)^6} \\
& - \frac{6144(4184y^{14}x^2 + 47y^{16})\alpha\omega^2}{(x^2 - 2yx - y^2)^6(x^2 + 2yx - y^2)^6} - \frac{48(x^2 + y^2)^2(15x^{16} - 121y^2x^{14} + 458y^4x^{12})\beta\omega^2}{x^6(x - y)^6y^6(x + y)^6} \\
& + \frac{768(584486y^{12}x^{20} - 1582599y^{14}x^{18} + 2641078y^{16}x^{16} - 1582599y^{18}x^{14})\alpha\beta}{x^6(x - y)^6y^6(x + y)^6(x^2 - 2yx - y^2)^4(x^2 + 2yx - y^2)^4} \\
& + \frac{768(2490x^4y^{28} - 16359x^6y^{26} + 74944x^8y^{24} - 219501x^{10}y^{22} + 584486x^{12}y^{20})\alpha\beta}{x^6(x - y)^6y^6(x + y)^6(x^2 - 2yx - y^2)^4(x^2 + 2yx - y^2)^4} \\
& + \frac{768(5y^{32} - 165x^2y^{30})\alpha\beta}{x^6(x - y)^6y^6(x + y)^6(x^2 - 2yx - y^2)^4(x^2 + 2yx - y^2)^4} \\
& - \frac{65536(x^2 + y^2)^4(x^8 - 76y^2x^6 + 166y^4x^4 - 76y^6x^2 + y^8)\alpha^3}{(x^4 - 6y^2x^2 + y^4)^6} \\
& + \frac{24576(61x^{16} + 1608y^2x^{14} + 11372y^4x^{12} - 27400y^6x^{10} + 44334y^8x^8 - 27400y^{10}x^6)\alpha^2}{(x^4 - 6y^2x^2 + y^4)^6} \\
& + \frac{24576(11372y^{12}x^4 + 1608y^{14}x^2 + 61y^{16})\alpha^2}{(x^4 - 6y^2x^2 + y^4)^6} + \frac{12(87x^{24} - 676y^2x^{22} + 2246y^4x^{20})\beta^2}{x^8y^8(x^2 - y^2)^8} \\
& + \frac{12(-6932y^6x^{18} + 24281y^8x^{16} + 37304y^{10}x^{14} + 243732y^{12}x^{12} + 37304y^{14}x^{10})\beta^2}{x^8y^8(x^2 - y^2)^8} \\
& + \frac{12(+24281y^{16}x^8 - 6932y^{18}x^6 + 2246y^{20}x^4 - 676y^{22}x^2 + 87y^{24})\beta^2}{x^8y^8(x^2 - y^2)^8} \\
& + \frac{16(x^2 + y^2)^4(x^{16} - 11y^2x^{14} + 70y^4x^{12} - 245y^6x^{10} + 626y^8x^8 - 245y^{10}x^6 + 70y^{12}x^4)\beta^3}{x^8y^8(x^2 - y^2)^8} \\
& + \frac{16(-11y^{14}x^2 + y^{16})\beta^3}{x^8y^8(x^2 - y^2)^8} - \frac{12288(x^2 + y^2)^4(7x^8 - 52y^2x^6 + 202y^4x^4 - 52y^6x^2 + 7y^8)\alpha^2\beta}{x^2y^2(x^2 - y^2)^2(x^4 - 6y^2x^2 + y^4)^4} \\
& + \frac{65536(x^2 + y^2)^8\alpha^4}{(x^4 - 6y^2x^2 + y^4)^6} + \frac{16384(x^2 + y^2)^8\alpha^3\beta}{x^2y^2(x^2 - y^2)^2(x^4 - 6y^2x^2 + y^4)^4} \\
& - \frac{48(-999y^6x^{10} + 5134y^8x^8 - 999y^{10}x^6 + 458y^{12}x^4 - 121y^{14}x^2 + 15y^{16})\beta\omega^2}{x^6(x - y)^6y^6(x + y)^6} \\
& + \frac{1536(x^2 + y^2)^8\alpha^2\beta^2}{x^4y^4(x^2 - y^2)^4(x^4 - 6y^2x^2 + y^4)^2} + \frac{147456x^2(x - y)^2y^2(x + y)^2\alpha\omega^4}{(x^2 - 2yx - y^2)^2(x^2 + 2yx - y^2)^2} \\
& + \frac{64(x^2 + y^2)^8\alpha\beta^3}{x^6y^6(x^2 - y^2)^6} + \frac{512(x^2 + y^2)^2(39x^8 + 92y^2x^6 + 362y^4x^4 + 92y^6x^2 + 39y^8)\alpha\beta\omega^2}{x^2y^2(x^6 - 7y^2x^4 + 7y^4x^2 - y^6)^2}
\end{aligned}$$

B-viii

$$\begin{aligned}
& + \frac{(x^2 + y^2)^8 (x^4 - 6y^2x^2 + y^4)^2 \beta^4}{x^8 y^8 (x^2 - y^2)^8} - \frac{16 (x^2 + y^2)^2 (3x^{16} - 23y^2x^{14} + 54y^4x^{12}) \beta^2 \omega^2}{x^6 (x - y)^6 y^6 (x + y)^6} \\
& - \frac{16(-41y^6x^{10} + 782y^8x^8 - 41y^{10}x^6 + 54y^{12}x^4 - 23y^{14}x^2 + 3y^{16})\beta^2\omega^2}{x^6(x-y)^6y^6(x+y)^6} \\
& - \frac{4096 (x^2 + y^2)^2 (x^{16} + 568y^2x^{14} + 124y^4x^{12} + 3592y^6x^{10} - 8314y^8x^8) \alpha^2 \omega^2}{(x^2 - 2yx - y^2)^6 (x^2 + 2yx - y^2)^6} \\
& - \frac{4096(x^2 + y^2)^2(3592y^{10}x^6 + 124y^{12}x^4 + 568y^{14}x^2 + y^{16})\alpha^2\omega^2}{(x^2 - 2yx - y^2)^6 (x^2 + 2yx - y^2)^6} \\
& + \frac{432 (x^8 - 2y^2x^6 + 18y^4x^4 - 2y^6x^2 + y^8) \beta \omega^4}{x^2(x - y)^2 y^2 (x + y)^2} - \frac{2304 (x^2 + y^2)^6 \alpha \beta^2 \omega^2}{x^2 y^2 (x^6 - 7y^2x^4 + 7y^4x^2 - y^6)^2} \\
& + \frac{3072 (x^2 + y^2)^6 (3x^8 - 58y^2x^6 + 158y^4x^4 - 58y^6x^2 + 3y^8) \alpha^2 \beta \omega^2}{x^2 y^2 (x^2 - y^2)^2 (x^4 - 6y^2x^2 + y^4)^4} \\
& + \frac{32768 (x^2 + y^2)^6 (3x^8 - 52y^2x^6 + 146y^4x^4 - 52y^6x^2 + 3y^8) \alpha^3 \omega^2}{(x^4 - 6y^2x^2 + y^4)^6} \\
& - \frac{4 (x^2 + y^2)^6 (3x^8 - 34y^2x^6 + 110y^4x^4 - 34y^6x^2 + 3y^8) \beta^3 \omega^2}{x^6 y^6 (x^2 - y^2)^6} \\
& + \frac{8192x^2y^2 (x^2 - y^2)^2 (45x^8 - 284y^2x^6 + 1198y^4x^4 - 284y^6x^2 + 45y^8) \alpha^2 \omega^4}{(x^4 - 6y^2x^2 + y^4)^4} \\
& + \frac{38 (x^{16} + 2y^2x^{14} - 18y^4x^{12} + 198y^6x^{10} - 110y^8x^8 + 198y^{10}x^6 - 18y^{12}x^4 + 2y^{14}x^2 + y^{16}) \beta^2 \omega^4}{x^4 y^4 (x^2 - y^2)^4} \\
& - \frac{4 (x^2 + y^2)^2 (3x^8 - 34y^2x^6 + 110y^4x^4 - 34y^6x^2 + 3y^8) \beta \omega^6}{x^2 y^2 (x^2 - y^2)^2} \\
& + \frac{512 (3x^{16} - 42y^2x^{14} + 686y^4x^{12} - 2702y^6x^{10} + 4878y^8x^8 - 2702y^{10}x^6 + 686y^{12}x^4) \alpha \beta \omega^2}{x^2 y^2 (x^6 - 7y^2x^4 + 7y^4x^2 - y^6)^2} \\
& + \frac{512(-42y^{14}x^2 + 3y^{16})\alpha\beta\omega^2}{x^2 y^2 (x^6 - 7y^2x^4 + 7y^4x^2 - y^6)^2} + 128x^2y^2\omega^6 \\
& + \frac{128 (x^2 + y^2)^2 (3x^8 - 52y^2x^6 + 146y^4x^4 - 52y^6x^2 + 3y^8) \alpha \omega^6}{(x^4 - 6y^2x^2 + y^4)^2} .
\end{aligned}$$

La forme Lie-algebrique $y_8 = \Psi_0^{-1}(\mathcal{Y}_8 - C_8)\Psi_0$ après le changement de variables $t = r^2$ and $u = r^8 \sin^2 4\varphi$ est

$$y_8 = 256(t^4 - u)\partial_t^8 - 49152(t^4 - u)t^2u \partial_t^6 \partial_u^2 - 262144(t^4 - u)tu^2 \partial_t^5 \partial_u^3$$

$$\begin{aligned}
& + 131072(19t^8 - 23t^4u + 4u^2)u^2\partial_t^4\partial_u^4 + 25165824(t^4 - u)t^3u^3\partial_t^3\partial_u^5 \\
& - 4194304(3t^8 - 31t^4u + 28u^2)t^2u^3\partial_t^2\partial_u^6 - 67108864(t^8 - 5t^4u + 4u^2)tu^4\partial_t\partial_u^7 \\
& + 16777216(t^4 - 4u)^2(t^4 - u)u^4\partial_u^8 \\
& + 1024[-\omega t^4 + (4a + 2)t^3 + u\omega]\partial_t^7 + 24576[(-2b - 1)t^4 + 2(a + b + 1)u]t^2\partial_t^6\partial_u \\
& + 49152[3\omega t^5 - 4(3a + 2b + 6)t^4 - 3u\omega t + 2(4a + 4b + 11)u]tu\partial_t^5\partial_u^2 \\
& + 131072[19(2b + 3)t^8 + 5u\omega t^5 - (58a + 46b + 111)ut^4 - 5u^2\omega t \\
& + (8a + 8b + 29)u^2]u\partial_t^4\partial_u^3 + 262144[-19\omega t^8 + (76a + 240b + 714)t^7 \\
& + 23u\omega t^4 - 4(64a + 60b + 201)ut^3 - 4u^2\omega]u^2\partial_t^3\partial_u^4 \\
& - 6291456[3(2b + 5)t^8 + 6u\omega t^5 - 2(15a + 31b + 122)ut^4 - 6u^2\omega t \\
& + 2(28a + 28b + 121)u^2]t^2u^2\partial_t^2\partial_u^5 \\
& - 4194304[-3\omega t^9 + 4(3a + 14b + 55)t^8 + 31u\omega t^5 - 2(84a + 140b + 681)ut^4 \\
& - 28u^2\omega t + 56(4a + 4b + 21)u^2]tu^3\partial_t\partial_u^6 \\
& + 33554432[(2b + 7)t^{12} + u\omega t^9 - 3(2a + 6b + 29)ut^8 - 5u^2\omega t^5 + (32a + 48b \\
& + 273)u^2t^4 + 4u^3\omega t - 4(8a + 8b + 49)u^3]u^3\partial_u^7 \\
& + 512[3\omega^2t^4 - 14(2a\omega + \omega)t^3 + 6(2a + 1)(4a + 4b + 3)t^2 - 3u\omega^2]\partial_t^6 \\
& + 8192[9(2b\omega + \omega)t^5 - 4(2b + 1)(9a + 2(b + 6))t^4 - 18(a + b + 1)u\omega t \\
& + 4(8a^2 + (12b + 19)a + 4b^2 + 23b + 15u)]t\partial_t^5\partial_u \\
& + 8192[76(4b^2 + 8b + 3)t^8 - 18\omega^2t^6u + 60(3a + 2b + 6)\omega t^5u \\
& - (448a^2 + 4(348b + 635)a + 3(128b^2 + 576b + 631))ut^4 + 18\omega^2t^2u^2 \\
& - 30(4a + 4b + 11)\omega tu^2 + (112a^2 + 8(24b + 61)a + 80b^2 + 520b + 723)u^2]\partial_t^4\partial_u^2 \\
& - 131072[38(2b + 3)\omega t^8 - 4(2b + 3)(38a + 48b + 177)t^7 + 3\omega^2t^5u - 2(58a + 46b \\
& + 111)\omega t^4u + 8(52a^2 + 2(64b + 163)a + 48b^2 + 294b + 387)ut^3 - 3\omega^2tu^2 \\
& + 2(8a + 8b + 29)\omega u^2]u\partial_t^3\partial_u^3
\end{aligned}$$

B-x

$$\begin{aligned} & - 131072[72(4b^2 + 16b + 15)t^8 - 27\omega^2 t^6 u + 6(38a + 120b + 357)\omega t^5 u - 4(124a^2 \\ & + 25(36b + 101)a + 800b^2 + 5590b + 9156)ut^4 + 27\omega^2 t^2 u^2 - 12(64a + 60b \\ & + 201)\omega t u^2 + 2(1456a^2 + 32(105b + 358)a + 1456b^2 + 11384b + 20673)u^2]t^2 u \partial_t^2 \partial_u^4 \\ & + 2097152[9(2b + 5)\omega t^9 \\ & - 36(2b + 5)(a + 2b + 9)t^8 + 9\omega^2 t^6 u - 6(15a + 31b + 122)\omega t^5 u + 2(112a^2 + 2(252b + 961)a \\ & + 376b^2 + 3290b + 6939)ut^4 - 9\omega^2 t^2 u^2 + 6(28a + 28b + 121)\omega t u^2 - 2(304a^2 + 8(84b + 361)a \\ & + 304b^2 + 2888b + 6609)u^2]t u^2 \partial_t \partial_u^5 \\ & + 2097152[12(4b^2 + 24b + 35)t^{12} + 4(3a + 14b + 55)\omega t^9 u - (32a^2 + 4(84b + 313)a + 448b^2 \\ & + 3920b + 8313\omega)ut^8 + 12\omega^2 t^6 u^2 - 2(84a + 140b + 681)\omega t^5 u^2 + (496a^2 + 8(224b + 1051)a \\ & + 1232b^2 + 12712b + 32223)u^2 t^4 - 12\omega^2 t^2 u^3 + 56(4a + 4b + 21)\omega t u^3 - 4(208a^2 \\ & + 8(56b + 289)a + 208b^2 + 2312b + 6321)u^3]u^2 \partial_u^6 \\ & + 1024[-\omega^3 t^4 + 9(2a + 1)\omega^2 t^3 - 9(2a + 1)(4a + 4b + 3)\omega t^2 + 4(2a + 1)(8a^2 \\ & + 2(8b + 5)a + 8b^2 + 10b + 3)t + \omega^3 u] \partial_t^5 \\ & + 4096[-18(2b + 1)\omega^2 t^6 \\ & + 20(2b + 1)(9a + 2(b + 6))\omega t^5 + (-2b - 1)(448a^2 + 4(116b + 287)a + 16b^2 + 320b + 609)t^4 \\ & + 36(a + b + 1)\omega^2 \\ & + 36(a + b + 1)\omega^2 t^2 u - 20(8a^2 + (12b + 19)a + 4b^2 + 23b + 15)\omega t u + 2(48a^3 + 16(7b + 11)a^2 \\ & + (80b^2 + 312b + 247)a + 16b^3 + 136b^2 + 319b + 159)u] \partial_t^4 \partial_u \\ & - 16384[76(4b^2 + 8b + 3)\omega t^8 - 8(38a + 24b + 117)(4b^2 + 8b + 3)t^7 - 3u\omega^3 t^6 + 18(4a + 2b \\ & + 7)u\omega^2 t^5 - (448a^2 + 4(348b + 635)a + 3(128b^2 + 576b + 631))u\omega t^4 + 2(416a^3 \\ & + 16(156b + 251)a^2 + 2(1232b^2 + 5056b + 4813)a + 384b^3 + 3568b^2 + 7856b + 5037)ut^3 \\ & + 3u^2 \omega^3 t^2 - 36(a + b + 3)u^2 \omega^2 t + (112a^2 + 8(24b + 61)a + 80b^2 + 520b + 723)\omega u^2] \partial_t^3 \partial_u^2 \\ & - 65536[24(8b^3 + 36b^2 + 46b + 15)t^{10} - 54(2b + 3)u\omega^2 t^8 + 12(2b + 3)(38a + 48b \\ & + 177)u\omega t^7 - 8(2b + 3)(124a^2 + 5(72b + 235)a + 4(45b^2 + 346b + 629))ut^6 + u^2 \omega^3 t^5 \\ & + 9(16a + 12b + 27)u^2 \omega^2 t^4 - 24(52a^2 + 2(64b + 163)a + 48b^2 + 294b + 387)u^2 \omega t^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 4(672a^3 + 8(364b + 901)a^2 + 4(728b^2 + 4160b + 5701)a + 672b^3 + 7136b^2 + 22378b \\
& + 21351)u^2t^2 - u^3\omega^3t - 9u^3\omega^2] \partial_t^2 \partial_u^3 \\
& + 262144u(36(4b^2 + 16b + 15)\omega t^{10} - 16(9a + 10b + 53)(4b^2 + 16b + 15)t^9 - 4u\omega^3t^8 \\
& + 9(6a + 20b + 59)u\omega^2t^7 - 2(124a^2 + 25(36b + 101)a + 800b^2 \\
& + 5590b + 9156)u\omega t^6 + 4(96a^3 + 4(280b + 757)a^2 + (2176b^2 + 14524b + 22919)a \\
& + 960b^3 + 11152b^2 + 41048b + 47997)ut^5 + 2u^2\omega^3t^4 - 18(10a + 10b + 33)u^2\omega^2t^3 \\
& + (1456a^2 + 32(105b + 358)a + 1456b^2 + 11384b + 20673)u^2\omega t^2 - 2(1600a^3 \\
& + 16(380b + 1271)a^2 + (6080b^2 + 44960b + 81732)a + 1600b^3 + 20336b^2 \\
& + 81684b + 104727)u^2t + 2u^3\omega^3] \partial_t \partial_u^4 + 1048576[8(8b^3 + 60b^2 + 142b + 105)t^{12} \\
& + 36(2b + 5)(a + 2b + 9)u\omega t^9 - 3(2b + 5)(32a^2 + 4(36b + 145)a + 112b^2 \\
& + 1040b + 2349)ut^8 - 3u^2\omega^3t^7 + 9(4a + 8b + 33)u^2\omega^2t^6 - 2(112a^2 \\
& + 2(252b + 961)a + 376b^2 + 3290b + 6939)u^2\omega t^5 + 2(208a^3 + 496(3b + 11)a^2 \\
& + (2416b^2 + 20120b + 40965)a + 3(336b^3 + 4648b^2 + 20939b + 30720))u^2t^4 \\
& + 3u^3\omega^3t^3 - 9(8a + 8b + 35)u^3\omega^2t^2 + 2(304a^2 + 8(84b + 361)a + 304b^2 \\
& + 2888b + 6609)u^3\omega t - 2(704a^3 + 16(156b + 655)a^2 + 12(208b^2 + 1880b + 4241)a \\
& + 704b^3 + 10480b^2 + 50892b + 80847)u^3] \partial_u^5 + [256t^4\omega^4 - 256u\omega^4 \\
& - 5120(2a + 1)t^3\omega^3 + 128(664a^2 + 64(9b + 11)a - b^2 + 289b + 227)t^2\omega^2 \\
& - 10240(2a + 1)(8a^2 + 2(8b + 5)a + 8b^2 + 10b + 3)t\omega + 1024(2a + 1)(32a^3 \\
& + 48(2b + 1)a^2 + (96b^2 + 96b + 22)a + 32b^3 + 48b^2 + 22b + 3)] \partial_t^4 \\
& - 2048[-12(2b + 1)\omega^3t^6 + 24(2b + 1)(12a + 2b + 15)\omega^2t^5 - 4(2b + 1)(448a^2 \\
& + 4(116b + 287)a + 16b^2 + 320b + 609)\omega t^4 + 8(2a + 1)(2b + 1)(208a^2 \\
& + 16(26b + 41)a + 208b^2 + 656b + 501)t^3 + 24(a + b + 1)u\omega^3t^2 - (280a^2 \\
& + 8(36b + 55)a + 95b^2 + 625b + 407)u\omega^2t + 8(48a^3 + 16(7b + 11)a^2 \\
& + (80b^2 + 312b + 247)a + 16b^3 + 136b^2 + 319b + 159)u\omega] \partial_t^3 \partial_u
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 4096[216(4b^2 + 8b + 3)\omega^2t^8 - 48(38a + 24b + 117)(4b^2 + 8b + 3)\omega t^7 + 32(4b^2 + 8b + 3)(124a^2 \\
& + 5(36b + 145)a + 56b^2 + 478b + 1026)t^6 + 12(6a - 2b + 3)u\omega^3t^5 - (1064a^2 + 8(432b + 785)a \\
& + 865b^2 + 3671b + 3931)u\omega^2t^4 + 12(416a^3 + 16(156b + 251)a^2 + 2(1232b^2 + 5056b + 4813)a \\
& + 384b^3 + 3568b^2 + 7856b + 5037)u\omega t^3 - 4(1792a^4 + 32(504b + 761)a^3 + 16(1792b^2 + 6836b \\
& + 6163)a^2 + 2(8064b^3 + 54544b^2 + 113888b + 75225)a + 1792b^4 + 24064b^3 + 95776b^2 + 142320b \\
& + 70173)ut^2 + 12(2a + 2b + 1)u^2\omega^3t + 2(88a^2 + 20a - b^2 + 109b + 254)u^2\omega^2] \partial_t^2 \partial_u^2 \\
& - 32768[-48(8b^3 + 36b^2 + 46b + 15)\omega t^{10} + 64(3a + 2b + 13)(8b^3 + 36b^2 + 46b + 15)t^9 \\
& + 32(2b + 3)u\omega^3t^8 - 72(2b + 3)(6a + 8b + 29)u\omega^2t^7 + 16(2b + 3)(124a^2 + 5(72b + 235)a \\
& + 4(45b^2 + 346b + 629))u\omega t^6 - 2u(4608b^4 + 61568b^3 + 288064b^2 + 557184b + u\omega^4 \\
& + 1536a^3(2b + 3) + 64a^2(224b^2 + 1010b + 1011) + 16a(992b^3 + 8480b^2 + 22186b + 17547) \\
& + 372096)t^5 - 2(28a + 16b + 21)u^2\omega^3t^4 + (1064a^2 + 8(360b + 911)a + 1153b^2 + 6911b \\
& + 8953)u^2\omega^2t^3 - 8(672a^3 + 8(364b + 901)a^2 + 4(728b^2 + 4160b + 5701)a + 672b^3 + 7136b^2 \\
& + 22378b + 21351)u^2\omega t^2 + 2u^2(4096a^4 + 256(100b + 239)a^3 + 256(168b^2 + 913b + 1227)a^2 \\
& + 32(800b^3 + 7304b^2 + 21682b + 20973)a + 4096b^4 + u\omega^4 + 61184b^3 + 313728b^2 + 669264b \\
& + 506232)t - 2(16a + 16b + 49)u^3\omega^3] \partial_t \partial_u^3 \\
& + 32768[32(16b^4 + 128b^3 + 344b^2 + 352b + 105)t^{12} + 64(9a + 10b + 53)(4b^2 + 16b + 15)u\omega t^9 \\
& + 8u^2\omega^4t^8 + 8(-960b^4 - 13440b^3 - 65784b^2 - 131136b - 192a^2(4b^2 + 16b + 15) - 24a(80b^3 \\
& + 676b^2 + 1724b + 1335) - 89190)ut^8 - 8(8a + 30b + 87)u^2\omega^3t^7 + (472a^2 + 80(36b + 103)a \\
& + 2495b^2 + 18385b + 31043)u^2\omega^2t^6 - 16(96a^3 + 4(280b + 757)a^2 + (2176b^2 + 14524b + 22919)a \\
& + 960b^3 + 11152b^2 + 41048b + 47997)u^2\omega t^5 - 10u^3\omega^4t^4 + 2(1024a^4 + 128(130b + 339)a^3 \\
& + 16(3216b^2 + 20344b + 30887)a^2 + 8(6240b^3 + 67568b^2 + 236602b + 266769)a + 14080b^4 \\
& + 227200b^3 + 1332928b^2 + 3363192b + 3077145)u^2t^4 + 16(13a + 15b + 48)u^3\omega^3t^3 \\
& - 48(52a^2 + (120b + 413)a + 52b^2 + 413b + 756)u^3\omega^2t^2 + 8(1600a^3 + 16(380b + 1271)a^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (6080b^2 + 44960b + 81732)a + 1600b^3 + 20336b^2 + 81684b + 104727)u^3\omega t \\
& + 2u^4\omega^4 - 2(10496a^4 + 256(220b + 713)a^3 + 32(2864b^2 + 20216b + 35941)a^2 \\
& + 16(3520b^3 + 40432b^2 + 154588b + 196185)a + 10496b^4 + 182528b^3 \\
& + 1150112b^2 + 3138864b + 3138489)u^3] \partial_u^4 + [1024(2a + 1)t^3\omega^4 - 256(184a^2 \\
& + 8(12b + 13)a - b^2 + 49b + 47)t^2\omega^3 + 512(368a^3 + 56(10b + 7)a^2 + 2(95b^2 \\
& + 201b + 99)a - 2b^3 + 97b^2 + 143b + 47)t\omega^2 - 2048(2a + 1)(32a^3 \\
& + 48(2b + 1)a^2 + (96b^2 + 96b + 22)a + 32b^3 + 48b^2 + 22b + 3)\omega] \partial_t^3 \\
& - 1024[-8(18a - 2b + 15)(2b + 1)\omega^3t^5 + 2(2b + 1)(1064a^2 + 8(144b + 353)a \\
& + b^2 + 647b + 1339)\omega^2t^4 - 24(2a + 1)(2b + 1)(208a^2 + 16(26b + 41)a + 208b^2 \\
& + 656b + 501)\omega t^3 + 8(2a + 1)(2b + 1)(896a^3 + 16(168b + 229)a^2 + 16(168b^2 \\
& + 458b + 291)a + 896b^3 + 3664b^2 + 4656b + 1809)t^2 + (200a^2 - 8(12b + 25)a \\
& + 7(-5b^2 + 5b + 3))u\omega^3t - (704a^3 + 8(88b + 105)a^2 - 8(b^2 - 21b - 7)a - 8b^3 \\
& + 285b^2 + 1323b + 661)u\omega^2] \partial_t^2 \partial_u + 4096[-64(4b^2 + 8b + 3)\omega^3t^8 + 144(6a + 4b \\
& + 19)(4b^2 + 8b + 3)\omega^2t^7 - 32(4b^2 + 8b + 3)(124a^2 + 5(36b + 145)a + 56b^2 \\
& + 478b + 1026)\omega t^6 + 4(2b + 3)(1024b^4 + 12544b^3 + 52096b^2 + 81504b + 3u\omega^4 \\
& + 1536a^3(2b + 1) + 64a^2(112b^2 + 450b + 197) + 16a(320b^3 + 2488b^2 + 5402b \\
& + 2119) + 29232)t^5 + (168a^2 + 48(14b + 25)a + 97b^2 + 215b + 145)u\omega^3t^4 \\
& - 4(488a^3 + 8(399b + 640)a^2 + (3457b^2 + 14087b + 13335)a + 579b^3 + 5186b^2 \\
& + 11158b + 6992)u\omega^2t^3 + 4(1792a^4 + 32(504b + 761)a^3 + 16(1792b^2 + 6836b \\
& + 6163)a^2 + 2(8064b^3 + 54544b^2 + 113888b + 75225)a + 1792b^4 + 24064b^3 \\
& + 95776b^2 + 142320b + 70173)u\omega t^2 - 8u(1024a^5 + 768(16b \\
& + 23)a^4 + 128(248b^2 + 886b + 765)a^3 + 128(248b^3 + 1496b^2 + 2945b \\
& + 1891)a^2 + (12288b^4 + 113408b^3 + 376768b^2 + 532416b + 3u\omega^4 + 271632)a \\
& + 1024b^5 + 17664b^4 + 3bu\omega^4 + 6u\omega^4 + 97728b^3 + 240560b^2 + 268272b + 109332)t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2(24a^2 + 12(16b + 39)a + 81b^2 + 411b + 469)u^2\omega^3] \partial_t \partial_u^2 \\
& - 16384 [- 64(3a + 2b + 13)(8b^3 + 36b^2 + 46b + 15)\omega t^9 + 16(2b + 3)(64b^4 + 896b^3 + 4196b^2 \\
& + 6892b - u\omega^4 + 32a^2(4b^2 + 12b + 5) + 4a(48b^3 + 388b^2 + 792b + 305) + 2505)t^8 \\
& + 32(2b + 3)(4a + 6b + 21)u\omega^3 t^7 - 2(2b + 3)(472a^2 + 16(72b + 245)a + 575b^2 + 4705b \\
& + 8843)u\omega^2 t^6 + 32(2b + 3)(96a^3 + 4(112b + 337)a^2 + (496b^2 + 3496b + 5849)a + 4(36b^3 \\
& + 427b^2 + 1610b + 1938))u\omega t^5 + 2u(-6144b^5 - 104960b^4 - 686912b^3 - 2143328b^2 + 4(5u\omega^4 \\
& - 793449)b + 39u\omega^4 - 2048a^4(2b + 3) - 1024a^3(26b^2 + 111b + 108) - 32a^2(1472b^3 + 11648b^2 \\
& + 28814b + 21981) - 4a(7680b^4 + 92544b^3 + 401504b^2 + 733984b - 3u\omega^4 + 471048) \\
& - 1771830)t^4 - (232a^2 + 8(104b + 259)a + 385b^2 + 2207b + 2761)u^2\omega^3 t^3 + 3(768a^3 + 8(416b \\
& + 1029)a^2 + 32(104b^2 + 602b + 831)a + 768b^3 + 8321b^2 + 26335b + 25213)u^2\omega^2 t^2 - 16(512a^4 \\
& + 32(100b + 239)a^3 + 32(168b^2 + 913b + 1227)a^2 + 4(800b^3 + 7304b^2 + 21682b + 20973)a \\
& + 512b^4 + 7648b^3 + 39216b^2 + 83658b + 63279)u^2\omega t + 2u^2(5120a^5 + 1024(41b + 94)a^4 \\
& + 128(784b^2 + 4040b + 5255)a^3 + 64(1568b^3 + 13152b^2 + 37202b + 35213)a^2 + 4(10496b^4 \\
& + 129280b^3 + 595232b^2 + 1209232b - u\omega^4 + 911949)a + 5120b^5 + 96256b^4 - 11u\omega^4 + 672640b^3 \\
& + 2253440b^2 - 4b(u\omega^4 - 911745) + 2284416)] \partial_u^3 \\
& + [128(88a^2 - 16a - b^2 + b + 11)t^2\omega^4 - 256(464a^3 + 8(50b + 7)a^2 - 2(35b^2 + 117b + 23)a \\
& - 6b^3 - 29b^2 + 29b + 21)t\omega^3 + 256(704a^4 + 16(88b + 25)a^3 + 8(87b^2 + 35b + 10)a^2 - 2(8b^3 \\
& + 59b^2 - 43b - 25)a - 8b^4 + 2b^3 + 93b^2 + 67b + 11)\omega^2] \partial_t^2 \\
& - 1024 [- 8(4b^2 + 8b + 3)\omega^4 t^5 - 2(2b + 1)(168a^2 + 16(14b + 33)a - 31b^2 + 7b + 121)\omega^3 t^4 \\
& + 8(2b + 1)(488a^3 + 8(133b + 241)a^2 + (577b^2 + 2391b + 2271)a + b^3 + 289b^2 + 887b \\
& + 653)\omega^2 t^3 - 8(2a + 1)(2b + 1)(896a^3 + 16(168b + 229)a^2 + 16(168b^2 + 458b + 291)a \\
& + 896b^3 + 3664b^2 + 4656b + 1809)\omega t^2 + (16384(2b + 1)a^5 + 4096(32b^2 + 58b + 21)a^4 \\
& + 2048(96b^3 + 308b^2 + 292b + 81)a^3 + 8(16384b^4 + 78848b^3 + 128000b^2 + 82944b - 3u\omega^4 \\
& + 18304)a^2 + 8(4096b^5 + 29696b^4 + 74752b^3 + 82944b^2 + 4(3u\omega^4 + 10304)b + 21u\omega^4 + 7488)a
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 16384b^5 + 86016b^4 + 73u\omega^4 + 165888b^3 + 11b^2(3u\omega^4 + 13312) \\
& + 3b(37u\omega^4 + 19968) + 9216)t + (320a^3 - 8(24b + 71)a^2 - 24(27b^2 + 97b + 80)a \\
& - 136b^3 - 803b^2 - 1229b - 611)u\omega^3] \partial_t \partial_u \\
& + 256[256(4b^2 + 8b + 3)\omega^4 t^8 - 256(8a + 6b + 27)(4b^2 + 8b + 3)\omega^3 t^7 \\
& + 32(4b^2 + 8b + 3)(472a^2 + 16(36b + 155)a + 191b^2 + 1681b + 3683)\omega^2 t^6 \\
& - 512(4b^2 + 8b + 3)(96a^3 + 4(56b + 197)a^2 + (160b^2 + 1164b + 2119)a + 32b^3 \\
& + 376b^2 + 1440b + 1827)\omega t^5 + (65536b^6 + 1081344b^5 \\
& + 6905856b^4 + 21886976b^3 + (35698944 - 1443u\omega^4)b^2 + (27362304 - 4125u\omega^4)b \\
& - 3184u\omega^4 + 65536a^4(4b^2 + 8b + 3) + 8192a^3(104b^3 + 524b^2 + 710b + 237) \\
& + 16a^2(61440b^4 + 505856b^3 + 1417984b^2 + 1499136b - 19u\omega^4 + 454464) \\
& + 16a(28672b^5 + 337920b^4 + 1498368b^3 + 3033728b^2 - 48(3u\omega^4 - 55636)b \\
& - 197u\omega^4 + 743904) + 7093440)t^4 + 32(72a^3 + 24(29b + 46)a^2 \\
& + (993b^2 + 3975b + 3709)a + 195b^3 + 1618b^2 + 3302b + 1955)u\omega^3 t^3 - 24(1024a^4 \\
& + 96(96b + 143)a^3 + 8(2048b^2 + 7804b + 7051)a^2 + 4(2304b^3 + 15873b^2 + 33471b \\
& + 22213)a + 1024b^4 + 14092b^3 + 56707b^2 + 84429b + 41523)u\omega^2 t^2 + 256(256a^5 \\
& + 192(16b + 23)a^4 + 32(248b^2 + 886b + 765)a^3 + 32(248b^3 + 1496b^2 \\
& + 2945b + 1891)a^2 + 4(768b^4 + 7088b^3 + 23548b^2 + 33276b + 16977)a + 256b^5 \\
& + 4416b^4 + 24432b^3 + 60140b^2 + 67068b + 27333)u\omega t \\
& + u(-65536a^6 - 32768(30b + 41)a^5 - 24576(136b^2 + 452b + 373)a^4 - 2048(2368b^3 \\
& + 12992b^2 + 24036b + 14839)a^3 - 16(208896b^4 + 1662976b^3 + 5007360b^2 \\
& + 6692864b - 47u\omega^4 + 3328016)a^2 - 16(61440b^5 + 694272b^4 + 3076608b^3 \\
& + 6692480b^2 + (7104112 - 48u\omega^4)b - 61u\omega^4 + 2932896)a - 65536b^6 - 1343488b^5 \\
& - 9166848b^4 + 411b^2 u\omega^4 + 1317b u\omega^4 + 1544u\omega^4 \\
& - 30384128b^3 - 53208320b^2 - 46851456b - 16147584)] \partial_u^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + [256(112a^3 + 8(6b - 7)a^2 - 2(33b^2 + 87b + 29)a - 2b^3 - 31b^2 - 17b - 1)t\omega^4 \\
& - 256(4a + 4b + 1)(112a^3 + 8(6b - 7)a^2 - 2(33b^2 + 87b + 29)a - 2b^3 - 31b^2 - 17b - 1)\omega^3] \partial_t \\
& + [-128(2b + 1)(304a^2 + 16(48b + 53)a + 163b^2 + 413b + 496)t^4\omega^4 + 256(496a^3 \\
& + 16(47b + 27)a^2 + (411b^2 + 181b - 56)a + 155b^3 + 318b^2 + 399b + 246)u\omega^4 \\
& + 4096(2b + 1)(72a^3 + 8(29b + 51)a^2 + (161b^2 + 663b + 613)a + b^3 + 81b^2 + 231b + 152)t^3\omega^3 \\
& - 3072(2b + 1)(1024a^4 + 96(32b + 47)a^3 + 8(384b^2 + 1236b + 943)a^2 + 4(256b^3 + 1473b^2 \\
& + 2495b + 1237)a + 516b^3 + 2175b^2 + 2737b + 1047)t^2\omega^2 + 262144(2a + 1)(2b + 1)(16a^4 \\
& + (64b + 76)a^3 + 4(24b^2 + 57b + 31)a^2 + (64b^3 + 228b^2 + 248b + 81)a + 16b^4 + 76b^3 + 124b^2 \\
& + 81b + 18)t\omega - 256(32768(2b + 1)a^6 + 16384(20b^2 + 32b + 11)a^5 + 4096(160b^3 + 440b^2 \\
& + 366b + 93)a^4 + 655360b^4a^3 + 2621440b^3a^3 + 3596288b^2a^3 + 2000896ba^3 + 388096a^3 \\
& + 327680b^5a^2 + 1802240b^4a^2 + 3596288b^3a^2 + 3239936b^2a^2 + 1329408ba^2 + 201856a^2 \\
& + 65536b^6a + 524288b^5a + 1499136b^4a + 2000896b^3a + 1329408b^2a + 423296ba + 51072a \\
& + 32768b^6 + 180224b^5 + 380928b^4 + 388096b^3 + 201856b^2 + 51072b + 4896)] \partial_u
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
C_8 = & 4\omega^4(3200a^4 + 512(31b + 10)a^3 + 16(412b^2 - 300b - 477)a^2 + 16(310b^3 - 187b^2 \\
& - 443b + 105)a + 1133b^4 + 150b^3 - 176b^2 + 493b + 4)
\end{aligned}$$

est la plus petite valeur propre de \mathcal{Y}_8 .