ISSN 0709-9231

CAHIER 8425

MESURE DU PROGRES TECHNIQUE : THEORIES ET METHODES*

par

Pierre Ouellette
et
Pierre Lasserre
Université de Montréal

*Cette recherche a été rendue possible grâce à une subvention du fonds F.C.A.C. pour l'aide et le soutien à la recherche.

Ce cahier est publié conjointement par le Département de science économique et par le Centre de recherche en développement économique de l'Université de Montréal.

Cette étude a été publiée grâce à une subvention du fonds F.C.A.C. pour l'aide et le soutien à la recherche.

RESUME

Ce texte constitue un survol des différentes approches destinées à mesurer le progrès technique. Nous utilisons une notation uniforme tout au long des démonstrations mathématiques et nous faisons ressortir les hypothèses qui rendent l'application des méthodes proposées envisageable et qui en limitent la portée. Les diverses approches sont regroupées d'après une classification suggérée par Diewert (1981) selon laquelle deux groupes sont à distinguer. Le premier groupe contient toutes les méthodes définissant le progrès technique comme le taux de croissance d'un indice des outputs divisé par un indice des inputs (approche de Divisia). L'autre groupe inclut toutes les méthodes définissant le progrès technique comme étant le déplacement d'une fonction représentant la technologie (production, coût, distance). Ce second groupe est subdivisé entre l'approche économétrique, la théorie des nombres indices et l'approche non paramétrique. Une liste des principaux économistes à qui l'on doit les diverses approches est fournie. Cependant ce survol est suffisamment détaillé pour être lu sans se référer aux articles originaux.

ABSTRACT

In this paper we survey the various approaches to the measure of technical progress. We adopt a homogeneous notation in order to present the major mathematical derivations involved, and we try to identify the key assumptions and limitations of each approach. We use a classification suggested by Diewert (1981) under which two major groups are distinguished. In the first group fall all methods which define technical progress as the rate of change of some output index divided by an input index (the Divisia approach). The second group includes all methods under which technical progress is measured as the shift in some function representing the technology (production, cost, distance). It is subdivided into the econometric approach, the index numbers approach (which specifies the technology), and the non-parametric approach (which never associates any functional form to the technology). While the major contributors are mentioned where appropriate, the paper is self-contained and can be read without referring to the original articles.

I - INTRODUCTION

Dans le présent texte, nous nous fixons comme but de faire un survol des différentes approches destinées à mesurer le progrès technique[1]. Notre but n'est pas d'innover mais bien de décrire ces méthodes et de faire ressortir les hypothèses qui rendent leur application envisageable et qui en limitent la portée. Pour clarifier l'exposé, nous avons opté pour un certain regroupement de ces méthodes. Ce regroupement est celui de Diewert (1981) et il s'explique comme suit. On peut, premièrement, diviser en deux groupes les diverses méthodes à partir de la définition sous-jacente du progrès technique. Dans le premier groupe, on retrouve toutes les méthodes qui définissent le progrès technique comme le taux de changement d'un indice des outputs divisé par un indice des inputs. On appelle cette méthode l'approche de Divisia (1926) du progrès technique. L'autre groupe est constitué de toutes les méthodes qui définissent le progrès technique comme étant le déplacement de la fonction de production (ou de la fonction de distance ou de la fonction de coût).

Le deuxième groupe peut lui-même être subdivisé selon la méthode que l'on utilise pour mesurer le déplacement de la fonction considérée. On peut ainsi définir trois sous-groupes. Le premier consiste à associer une forme fonctionnelle à la fonction de production (ou autres) et à estimer économétriquement les paramètres de la fonction. En incorporant une variable de temps dans la fonction, on détient, par le biais du paramètre associé au temps, une mesure du déplacement de la fonction. Pour

[1]Pour un examen des causes du progrès technique, voir la revue de la littérature de Nelson (1981).

cela, il faut faire l'hypothèse que le déplacement est constant dans le temps. Cette mesure est appelée l'approche économétrique du progrès technique.

Le deuxième sous-groupe consiste, lui-aussi, à associer une forme fonctionnelle à la fonction de production (ou autres). Mais ici, on n'aura pas à estimer les paramètres de la fonction à l'aide de méthodes économétriques. Au contraire, dans ce cas, on se servira de la théorie de la production pour définir une mesure du progrès technique qui n'utilisera que des données sur les prix et quantités des facteurs et des outputs. Cette méthode est issue de ce qu'il est convenu d'appeler la théorie des nombres indices.

Le troisième sous-groupe ne nécessite en aucun temps qu'on associe une forme fonctionnelle à la fonction de production (ou autres) et encore moins l'estimation de ses paramètres. Dans ce cas, on se sert des données dont on dispose sur les prix et les quantités des facteurs et des outputs pour définir la fonction de production (ou autres) à l'aide de la programmation linéaire. Cette méthode est appelée l'approche non paramétrique du progrès technique.

Successivement, nous décrirons ces diverses approche dans l'ordre suivant : approche économétrique (section II), indice de Divisia (section III), théorie des nombres indices (section IV) et approche non paramétrique (section V). Nous terminerons ce survol par une comparaison des diverses approches (section VI).

II - ESTIMATION ECONOMETRIQUE DU PROGRES TECHNIQUE

II.1. Fonction de production (Diewert, 1981)

Cette méthode consiste en l'estimation d'une fonction de production ayant comme argument le temps, c'est-à-dire :

(1) $$y^t = f(x^t, t) + u^t$$

où y^t est l'output au temps t;

$x^t \equiv (x_1^t, x_2^t, \ldots, x_n^t)$ est le vecteur des inputs au temps t;

u^t est l'erreur résiduelle au temps t.

Si l'on connaît x^t et y^t, il suffit de choisir une forme fonctionnelle qui répond aux diverses caractéristiques que l'on attend d'une fonction de production et d'estimer les paramètres de la forme retenue. La mesure du progrès technique sera donnée par $\partial \ell n\, y^t/\partial t$, soit le déplacement de la fonction de production dans le temps. A titre d'exemple, mentionnons la forme Cobb-Douglas et la forme translog.

a) Cobb-Douglas :

(2) $$y_t = a x_{1t}^{\alpha}\, x_{2t}^{\beta}\, e^{\lambda t}$$

(3) $$\ell n\, y_t = \ell n\, A + \alpha\, \ell n\, x_{1t} + \beta\, \ell n\, x_{2t} + \lambda t$$

Le progrès technique sera donné par

(4) $$\frac{\partial\, \ell n\, y_t}{\partial t} = \lambda$$

La forme Cobb-Douglas est homogène de degré $(\alpha + \beta)$ et est caractérisée par une élasticité de substitution constante égale à l'unité (quel que soit $(\alpha + \beta)$). On peut généraliser la forme Cobb-Douglas en relâchant la contrainte de l'élasticité de substitution unitaire en optant pour la forme C.E.S. Avec cette forme l'élasticité de substitution n'est plus unitaire mais elle demeure néanmoins constante. Pour mettre de côté cette dernière contrainte, on peut prendre la forme translog qui fournit une approximation de second ordre à une fonction de production deux fois continûment différentiable. Remarquons que la forme translog a, comme cas spécial, la forme Cobb-Douglas et peut approximer la C.E.S.

b) Translog

$$\ell n\, y^t = \ell n\, \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, \ell n\, x_i^t + \alpha_t\, t + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij}\, \ell n\, x_i^t\, \ell n\, x_j^t$$

(5)

$$+ \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ik}\, \ell n\, x_i^t\, t + \frac{1}{2} \gamma_{kk}\, t^2$$

Pour avoir une fonction homogène de degré θ, il faut poser les contraintes suivantes :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \theta; \quad \gamma_{ij} = \gamma_{ji}; \quad \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ij} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ik} = 0.$$

où θ est le degré d'homogénéité.

Le progrès technique est

$$(6) \qquad \frac{\partial \, \ell n \, y^t}{\partial t} = \alpha_t + \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ik} \, \ell n \, x_i^t + \gamma_{kk} \, t$$

II.2. Fonction de coût

Si les prix des inputs sont tous positifs, c'est-à-dire $W^t \equiv (W_1^t, W_2^t, \ldots, W_n^t) >> 0$ et si le producteur se comporte de façon concurrentielle sur le marché des inputs, alors il existe une fonction de coût duale à la fonction de production, soit[1] :

$$(7) \qquad C(y^t, W^t, t) \equiv \underset{x}{\mathrm{Min}}(W^t \cdot x : f(x^t, t) \geq y^t, x \geq 0_N)$$

A partir de la fonction de coût, on peut emprunter deux avenues. On peut soit associer une fonction quelconque à la fonction de coût, soit se servir du lemme de Shephard.

II.2.1. Fonction de coût total

Si on opte pour la première méthode, on procède comme suit : on associe une forme fonctionnelle qui répond à nos exigences et le progrès technique est donné par (Otha, 1974) :

$$(8) \qquad \varepsilon_{yt} = \varepsilon_{cy}^{-1} \, \varepsilon_{ct}$$

où $\varepsilon_{yt} = \dfrac{\partial \, \ell n \, y_t}{\partial t}$; $\varepsilon_{cy} = \dfrac{\partial \, \ell n \, C}{\partial \, \ell n \, y}$; $\varepsilon_{ct} = \dfrac{\partial \, \ell n \, C}{\partial t}$

[1]Dans tout cet article, sauf ambiguïté, les signes de transposition des vecteurs sont omis.

Dans le cas d'une forme translog, on obtient

$$\ell n\ C = \ell n\ \beta_0 + \sum_{i=1}^{n} \beta_i\ \ell n\ W_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}\ \ell n\ W_i\ \ell n\ W_j + \Omega_1\ \ell n\ y$$

$$+ \frac{1}{2}\, \Omega_2 (\ell n\ y)^2 + \phi_1 t + \frac{1}{2}\, \phi_2 t^2 + \sum_{i=1}^{n} \nu_i\ \ell n\ W_i\ \ell n\ y + \sum_{i=1}^{n} u_i\ \ell n\ W_i \cdot t \tag{9}$$

$$+ \delta\ \ell n\ y \cdot t$$

Pour avoir une fonction homogène de degré 1 dans les prix, il faut poser les contraintes suivantes (Luke Chan et Mountain, 1981) :

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1; \quad \beta_{ij} = \beta_{ji}; \quad \sum_{i=1}^{n} \beta_{ij} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} \nu_i = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} u_i = 0.$$

Sur la mesure du progrès technique, il faut noter que ε_{yt} suppose fixées les quantités d'inputs, ε_{cy}^{-1} suppose fixés les prix des inputs et ε_{ct} suppose fixés les prix des inputs et la quantité de l'output (cf. Berndt et Khaled, 1979, p. 1225). Remarquons que cette méthode n'ajoute rien à la première méthode qui utilisait une fonction de production, alors que l'existence de la fonction de coût duale exige la concurrence sur le marché des inputs.

Cependant, l'utilisation du théorème de Shephard peut rendre intéressante l'utilisation d'une fonction de coût. Pour terminer, mentionnons que le progrès technique dans le cas de la forme translog donnée par l'équation (9) est

$$\text{(10)} \qquad \varepsilon_{yt} = \frac{\varepsilon_{ct}}{\varepsilon_{cy}} = \frac{\phi_1 + \phi_2 t + \sum_{i=1}^{n} u_i \,\ell n\, W_i + \delta \,\ell n\, y}{\Omega_1 + \Omega_2 \,\ell n\, y + \sum_{i=1}^{n} \nu_i \,\ell n\, W_i + \delta \cdot t}$$

II.2.2. Lemme de Shephard

Le lemme de Shephard nous donne la relation suivante :

$$\text{(11)} \qquad x^t = \nabla_W C(W^t, y^t, t)$$

où $\nabla_W C(\ldots) \equiv [\partial C/\partial W_1 , \ \partial C/\partial W_2 , \ldots, \partial C/\partial W_n]$;

x^t est le système d'équation donnant les demandes de facteurs.

Après avoir associé une forme fonctionnelle à la fonction de coût et avoir différencié, par rapport au prix des inputs, on peut estimer les paramètres de la fonction de coût à partir du système d'équation donnant x^t. Le calcul du progrès technique se fait comme précédemment. Cette méthode nécessite toujours l'hypothèse de concurrence sur le marché des inputs, mais elle a l'avantage, au niveau de l'estimation, de laisser beaucoup plus de degrés de liberté.

Binswanger (1974), avec une fonction translog, et Berndt et Khaled (1979), avec une fonction Box-Cox généralisée, ont utilisé cette méthode. Le choix entre l'utilisation d'une fonction de coût et une fonction de production repose sur des critères purement pratiques. Ajoutons que l'approche économétrique a été utilisée récemment dans le contexte de la firme réglementée. On peut consulter Diewert (1981) et les références qu'il donne.

II.2.2. Contraintes (Nadiri et Shankerman, 1981)

a) Biais technologique

A partir de la fonction de coût, on est en mesure de tester (ou d'imposer) certaines contraintes. Ainsi, on définit le progrès technique comme étant neutre à la Hicks si le déplacement de la fonction de coût laisse les parts relatives des facteurs inchangées (à prix constants). Le biais technologique est donné par $(\partial x_i/\partial t) \cdot (1/x_i)$, (cf. Berndt et Wood, 1981), où $x_i = \partial C(\ )/\partial W_i$. Un progrès technique neutre $(\partial x_i/\partial t = 0)$ implique $\mu_i = 0$ (pour $i = 1, \ldots, n$) pour la forme translog. Si $\mu_i < 0$ (>0), le progrès technique est défini comme étant i-épargnant (i-augmentant).

b) Homothéticité $(\partial^2 C(\ )/\partial W_i\ \partial W_j = 0)$

La fonction de coût est homothétique si elle est une fonction séparable du prix des facteurs et de l'output (Shephard, 1970; Denny et Fuss, 1977). Cela implique que la combinaison optimale des facteurs est indépendante du niveau d'output. Ainsi, la forme translog de la fonction de coût requiert $\nu_i = 0$ pour i = 1, ..., n pour être homothétique. Puisque l'homogénéité dans les prix exige $\sum_{i-1}^{n} \nu_i = 0$, l'homothéticité impose (n-1) contraintes indépendantes supplémentaires.

c) Homogénéité par rapport à l'output

La fonction de coût est homogène par rapport à l'output si l'élasticité des coûts par rapport à l'output est constante. Avec une fonction translog, cette propriété exige les conditions suivantes : $\nu_i = 0$ (i = 1, ..., n); $\Omega_1 = 0$ et $\delta = 0$. Il y a n+2 contraintes dont n+1 sont indépendantes (car $\sum_{i=1}^{n} \nu_i = 0$) et n-1 sont identiques aux contraintes imposées par l'homothéticité.

d) Elasticité de substitution constante unitaire

La fonction de coût translog a des élasticités de substitution constantes et égales à l'unité si $\beta_{ij} = 0$ (i, j = 1, ..., n). Pour obtenir une technologie Cobb-Douglas, il faut imposer les contraintes suivantes :

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i = 0; \quad \beta_{ij} = 0; \quad \nu_i = 0 \text{ (i et j = 1, ..., n);}$$

$$\Omega_1 = \delta = \sum_{i=1}^{n} \nu_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i = 0$$

Si, de plus, $\mu_i = 0$ (i = 1, ..., n), le progrès technique est neutre.

e) <u>Mesure des élasticités</u> (Binswanger, 1974)

Les élasticités de substitution partielles d'Allen-Uzawa entre deux facteurs i et j sont données par :

(12) $$\sigma_{ij} = \frac{\beta_{ij}}{x_i \, x_j} + 1$$ (pour $i \neq j$), dans le cas d'une fonction translog

où x_i est la part du facteur i.

Les élasticités de prix propres, ε_{ii}, et croisés, ε_{ij}, sont données par :

(13) $$\varepsilon_{ii} = \frac{\beta_{ii}}{x_i} + x_i - 1 \quad \text{et} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{\beta_{ij}}{x_i} + x_j \qquad (i \neq j)$$

On note que $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ et $\varepsilon_{ij} = x_i \cdot \sigma_{ij}$.

III - L'INDICE DE DIVISIA DU PROGRES TECHNIQUE

On définit la productivité totale des facteurs (TFP) comme suit :

$$\text{TFP} = \frac{Y}{X} \tag{14}$$

où Y est l'indice de quantité des outputs;

X est l'indice de quantité des inputs.

Le progrès technique est donné par le taux de croissance de TFP

$$\frac{\dot{\text{TFP}}}{\text{TFP}} = \frac{\dot{Y}}{Y} - \frac{\dot{X}}{X}$$

où $\frac{\dot{Y}}{Y}$ est le taux de croissance de l'indice des outputs;

$\frac{\dot{X}}{X}$ est le taux de croissance de l'indice des inputs.

Solow (1957) a présenté une façon de calculer ces indices qui découle de la théorie de la production. Cette méthode est connue sous le nom d'indice de Divisia (1926) du progrès technique. Elle a été souvent utilisée, par la suite, à des fins empiriques (cf. Jorgenson et Griliches (1967); Christensen et Jorgenson (1969, 1970); Gollop et Jorgenson (1980)).

Dans cette section, nous dériverons, dans un premier temps, l'indice de productivité à la façon de Solow. Ensuite, nous modifierons cet indice de façon à tenir compte des rendements d'échelle, de la tarification non marginale et de la quasi-fixité de certains facteurs.

III.1. Solow et le progrès technique

Solow (1957) considère une fonction de production homogène séparable en l'output et l'input :

$$y(t) = F(x(t);\ t) \tag{16}$$

qui a les caractéristiques habituelles d'une fonction de production néoclassique. Dans cette fonction, $x(t) \equiv [x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)]$ est le vecteur des inputs au temps t.

La différentiation de cette équation par rapport au temps (indiquée par un point au-dessus des variables) nous donne :

$$\dot{y} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i(t)} \dot{x}_i(t) + \frac{\partial F}{\partial t} \tag{17}$$

$$\frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i(t)} \frac{\dot{x}_i(t)}{y(t)} + \frac{1}{y(t)} \frac{\partial F}{\partial t} \tag{18}$$

On pose

$$\frac{\dot{A}}{A} = \frac{1}{y} \frac{\partial F}{\partial t} \quad \text{, le progrès technique}^{2} \tag{19}$$

et on obtient :

[2]Cette formulation est compatible avec une représentation du progrès technique où celui-ci augmente la contribution de chaque facteur; l'évaluation de la part attribuable à chaque facteur pose certains problèmes discutés à l'annexe.

(20) $$\frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y(t)}{\partial x_i(t)} \frac{\dot{x}_i(t)}{y(t)}$$

(21) $$\frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y(t)}{\partial x_i(t)} \frac{x_i(t)}{y(t)} \frac{\dot{x}_i(t)}{x_i(t)}$$

On pose

$$E_i(t) = \frac{\partial y(t)}{\partial x_i(t)} \frac{x_i(t)}{y(t)},$$

l'élasticité de l'output par rapport au facteur x_i au temps t.

(22) $$\frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} + \sum_{i=1}^{n} E_i(t) \frac{\dot{x}_i(t)}{x_i(t)}$$

Le taux de croissance de la productivité totale des facteurs est donc :

(23) $$\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = \frac{\dot{y}(t)}{y(t)} - \sum_{i=1}^{n} E_i(t) \frac{\dot{x}_i(t)}{x_i(t)}$$

Il peut être interprété comme la différence entre le taux de croissance de l'output et la somme, pondérée sur la base des élasticités, des taux de croissance des facteurs. Si on considère un marché concurrentiel

(24) $$\frac{\partial y(t)}{\partial x_i(t)} = \frac{W_i(t)}{P(t)}$$

où $W_i(t)$ est le prix du facteur i;

$P(t)$ est le prix de l'output.

On obtient

$$E_i(t) = \frac{\partial y(t)}{\partial x_i(t)} \frac{x_i(t)}{y(t)} = \frac{W_i(t)}{P(t)} \frac{x_i(t)}{y(t)} \equiv S_i(t) \tag{25}$$

et $\sum_{i=1}^{n} S_i(t) = 1$, si les rendements sont constants. Dans ce cas, $S_i(t)$ est la part du ième facteur de production, et

$$\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = \frac{\dot{y}(t)}{y(t)} - \sum_{i=1}^{n} S_i(t) \frac{\dot{x}_i(t)}{x_i(t)} \tag{26}$$

Si on intègre cette équation sur l'intervalle de temps (0, T], on obtient :

$$\frac{A(T)}{A(0)} = \frac{y(T)/(y(0)}{\exp \int_0^T \sum_{i=1}^{n} S_i(t) \frac{\dot{x}_i(t)}{x_i(t)} dt} \tag{27}$$

Le dénominateur du terme de droite est défini comme étant l'indice de Divisia de la croissance des inputs durant la période (0, T]

$$\ln \left[\frac{X(T)}{X(0)}\right] = \int_0^T \sum_{i=1}^{n} S_i(t) \frac{\dot{x}_i(t)}{x_i(t)} dt \tag{28}$$

Mais les données ne sont pas continues. Dans ce cas discret, l'approximation suivante a été proposée quand $S_i(t)$ ne varie pas du temps 0 au temps 1 :

$$\ln \left[\frac{X(1)}{X(0)}\right] = \sum_{i=1}^{n} S_i(t) \ln \left[\frac{x_i(1)}{x_i(0)}\right] \tag{29}$$

et A(1) est donné par (avec A(0) = 1)

$$(30) \qquad A(1) = \frac{y(1)/y(0)}{\prod_{i=1}^{n} \left[\frac{x_i(1)}{x_i(0)}\right]^{S_i(1)}}$$

Törnqvist (1936) a proposé, dans le cas où $S_i(t)$ varie peu, l'approximation discrète suivante :

$$(31) \qquad S_i(1) = \frac{1}{2}\left[\frac{W_i^1\ x_i^1}{\sum_{j=1}^{n} W_j^1\ x_j^1} + \frac{W_i^0\ x_i^0}{\sum_{j=1}^{n} W_j^0\ x_j^0}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{W_i^1 \cdot x_i^1}{W^1 x^1} + \frac{W_i^0 \cdot x_i^0}{W^0 x^0}\right]$$

On obtient

$$(32) \qquad A(1) = \frac{y(1)/y(0)}{\prod_{i=1}^{n} \left[\frac{x_i(1)}{x_i(0)}\right]^{1/2[W_i^1 x_i^1/W^1 x^1 + W_i^0 x_i^0/W^0 x^0]}}$$

Jorgenson et Griliches (1967) ont généralisé cette approche au cas d'outputs multiples. Ils remplacent $\dot{y}(t)/y(t)$ par un indice de Divisia de l'output

$$(33) \qquad \frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = \sum_{\ell=1}^{m} \frac{P_\ell(t)\ y_\ell(t)}{\left[\sum_{k=1}^{m} P_k(t)\ y_k(t)\right]} \frac{\dot{y}_\ell(t)}{y_\ell(t)}$$

où $P_\ell(t)$ est le prix de l'output ℓ au temps t.

On obtient

$$(34) \qquad A(1) = \frac{\prod_{\ell=1}^{m} \left[y_\ell^1/y_\ell^1\right]^{1/2[P_\ell^1 y_\ell^1/P^1y^1 + P_\ell^0 y_\ell^0/P^0y^0]}}{\prod_{i=1}^{n} \left[x_i^1/x_i^0\right]^{1/2[W_i^1 x_i^1/W^1x^1 + W_i^0 x_i^0/W^0x^0]}}$$

Le progrès technique peut aussi être évalué à partir d'une fonction de coût. Cette approche duale à la méthode décrite ci-haut, sous l'hypothèse de concurrence, considère une fonction de coût unitaire.

$$(35) \qquad C(t) = G[W_1(t), W_2(t), \ldots, W_n(t); t]$$

En suivant le même développement que précédemment, on arrive à

$$(36) \qquad \frac{\dot{B}(t)}{B(t)} = \frac{\dot{C}(t)}{C(t)} - \sum_{i=1}^{m} U_i(t) \frac{\dot{W}_i(t)}{W_i(t)}$$

où $U_i(t) = \frac{\partial C(t)}{\partial W_i(t)} \frac{W_i(t)}{C(t)}$

On sait d'après le lemme de Shephard que

$$(37) \qquad x_i(t) = y(t) \frac{\partial C(t)}{\partial W_i(t)}$$

Donc

$$(38) \qquad U_i(t) = \frac{x_i(t)}{y(t)} \frac{W_i(t)}{C(t)}$$

représente la part du facteur i dans les coûts. Si en outre C = P et $U_i = S_i$, alors

$$(39) \qquad \frac{\dot{B}(t)}{B(t)} = \frac{\dot{C}(t)}{C(t)} - \sum_{i=1}^{n} S_i(t) \frac{\dot{W}_i(t)}{W_i(t)}$$

$$(40) \qquad = \frac{\dot{P}(t)}{P(t)} - \sum_{i=1}^{n} S_i(t) \frac{\dot{W}_i(t)}{W_i(t)}$$

Sous l'hypothèse de rendement constant, Otha (1974) a montré que $\dot{A}/A = -\dot{B}/B$. Ce résultat tient aussi dans le cas non concurrentiel. En intégrant, on obtient :

$$(41) \qquad \frac{B(T)}{B(0)} = \frac{P(T)/P(0)}{\exp \int_0^T \sum_{i=1}^{n} S_i(t) \frac{\dot{W}_i(t)}{W_i(t)} dt}$$

Pour T = 1, avec B(0) = 1, on obtient dans le cas où $S_i(t)$ ne varie pas, dans le cas discret

$$(42) \qquad B(1) = \frac{P(1)/P(0)}{\prod_{i=1}^{n} \left[\frac{W_i(1)}{W_i(0)}\right]^{S_i(1)}}$$

et dans le cas où $S_i(t)$ varie peu, on se sert de l'approximation discrète de Törnqvist

$$(43) \qquad B(1) = \frac{P(1)/P(0)}{\prod_{i=1}^{n} \left[\frac{W_i(1)}{W_i(0)}\right]^{1/2[S_i(1) + S_i(0)]}}$$

III.2. Mesure de la productivité et rendements d'échelle (Denny, Fuss et Waverman, 1981)

Pour représenter l'impact des rendements d'échelle sur la mesure de la productivité, nous nous servirons de la relation suivante :

$$(44) \qquad \frac{\partial y(t)}{\partial x_i(t)} = \frac{W_i(t)}{\partial C(t)/\partial y(t)}$$

où $W_i(t)$ est le prix de l'input i;

$\partial y(t)/\partial x_i(t)$ est la productivité marginale de l'input i;

$\partial C(t)/\partial y(t)$ est le coût marginal.

On incorpore cette relation dans l'équation suivante (sans écrire l'indice de temps, cela n'entraînant aucune confusion) :

$$(45) \qquad \frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{A}}{A} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{x_i}{y} \frac{\dot{x}_i}{x_i}$$

$$(46) \qquad = \frac{\dot{A}}{A} + \sum_{i=1}^{n} \frac{W_i}{\partial C/\partial y} \frac{x_i}{y} \frac{\dot{x}_i}{x_i}$$

$$(47) \qquad = \frac{\dot{A}}{A} + \sum_{i=1}^{n} \frac{W_i}{\partial C/\partial y \; y/C} \frac{x_i}{C} \frac{\dot{x}_i}{x_i}$$

Avec $\varepsilon_{cy} = \frac{\partial C}{\partial y} \frac{y}{C}$, l'élasticité du coût par rapport à l'output, on a :

$$(48) \qquad \frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{A}}{A} + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{cy}^{-1} \frac{W_i x_i}{C} \frac{\dot{x}_i}{x_i}$$

Avec $\frac{\dot{X}}{X} = \sum_{i=1}^{n} \frac{W_i x_i}{C} \frac{\dot{x}_i}{x_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{W_i x_i}{\left[\sum_{i=1}^{n} W_i x_i\right]} \frac{\dot{x}_i}{x_i}$, l'indice des inputs pondérés sur la base des coûts, on a :

(49) $$\frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{A}}{A} + \varepsilon_{cy}^{-1} \frac{\dot{X}}{X}$$

On obtient

(50) $$\frac{\dot{A}}{A} = \frac{\dot{y}}{y} - \varepsilon_{cy}^{-1} \frac{\dot{X}}{X}$$

Pour obtenir la mesure de $\dot{TFP}/TFP$, précédemment définie comme étant $\dot{y}/y - \dot{X}/X$, on procède comme suit :

(51) $$\frac{\dot{A}}{A} = \frac{\dot{y}}{y} - \frac{\dot{X}}{X} + \frac{\dot{X}}{X} - \varepsilon_{cy}^{-1} \frac{\dot{X}}{X}$$

(52) $$\frac{\dot{A}}{A} = \frac{\dot{TFP}}{TFP} + (1 - \varepsilon_{cy}^{-1}) \frac{\dot{X}}{X}, \quad \text{où} \quad \frac{\dot{TFP}}{TFP} = \frac{\dot{A}}{A} + (\varepsilon_{cy}^{-1} - 1) \frac{\dot{X}}{X}$$

Dans le cas de rendements constants, $\varepsilon_{cy} = 1$ et $\dot{A}/A = \dot{TFP}/TFP$, comme précédemment. Cependant, quand $\varepsilon_{cy} \neq 1$, la mesure du taux de croissance de la productivité totale des facteurs, $\dot{TFP}/TFP$, représente à la fois le déplacement de la fonction de production, $\dot{A}/A$ (représentant le progrès technique), et le déplacement sur la fonction de production, $(\varepsilon_{cy}^{-1} - 1)\ \dot{X}/X$.

Selon que l'on est en présence de rendements croissants ou décroissants, on aura $\varepsilon_{cy} < 1$ ou > 1, et $(\varepsilon_{cy}^{-1} - 1) > 0$ ou < 0. Donc, $\dot{TFP}/TFP$ surestimera ou sous-estimera le progrès technique si on ne tient pas compte des rendements d'échelle. $\dot{TFP}/TFP$ mesure à la fois un aspect statique, les rendements d'échelle et un aspect dynamique, le progrès technique.

Sous l'hypothèse que le producteur minimise ses coûts, on peut se servir de la théorie de la dualité. On représente la fonction de coût par

(53) $$C = G(W_1, W_2, \ldots, W_n, y; t)$$

où C est la fonction de coût total;

W_i est le prix de l'input i;

y est l'output.

En différenciant par rapport au temps, on obtient

(54) $$\dot{C} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial G}{\partial W_i} \dot{W}_i + \frac{\partial G}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial G}{\partial t}$$

(55) $$\frac{\dot{C}}{C} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial G}{\partial W_i} \frac{\dot{W}_i}{C} + \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\dot{y}}{C} + \frac{1}{C} \frac{\partial G}{\partial t}$$

Avec

(56) $$\frac{\dot{B}}{B} = \frac{1}{C} \frac{\partial G}{\partial t}$$

(57) $$\frac{\dot{C}}{C} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial G}{\partial W_i} \frac{\dot{W}_i}{C} + \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\dot{y}}{C} + \frac{\dot{B}}{B}$$

D'après le lemme de Shephard, on a $x_i = \frac{\partial G}{\partial W_i}$

(58) $$\frac{\dot{C}}{C} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i W_i}{C} \frac{\dot{W}_i}{W_i} + \frac{\partial G}{\partial y} \frac{y}{C} \frac{\dot{y}}{y} + \frac{\dot{B}}{B}$$

(59) $$= \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i W_i}{C} \frac{\dot{W}_i}{W_i} + \varepsilon_{cy} \frac{\dot{y}}{y} + \frac{\dot{B}}{B}$$

Le coût est $C = \sum_{i=1}^{n} W_i x_i$. Si on le différencie par rapport au temps, on obtient :

$$\text{(60)} \qquad \dot{C} = \sum_{i=1}^{n} W_i \dot{x}_i + \sum_{i=1}^{n} \dot{W}_i x_i$$

$$\text{(61)} \qquad \frac{\dot{C}}{C} = \sum_{i=1}^{n} \frac{W_i \dot{x}_i}{C} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\dot{W}_i x_i}{C}$$

$$\text{(62)} \qquad = \sum_{i=1}^{n} \frac{W_i \dot{x}_i}{C} + \sum_{i=1}^{n} \frac{W_i x_i}{C} \frac{\dot{W}_i}{W_i}$$

$$\text{(63)} \qquad \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{W_i x_i}{C} \frac{\dot{W}_i}{W_i} = \frac{\dot{C}}{C} - \sum_{i=1}^{n} \frac{W_i \dot{x}_i}{C}$$

$$\text{(64)} \qquad = \frac{\dot{C}}{C} - \sum_{i=1}^{n} \frac{W_i x_i}{C} \frac{\dot{x}_i}{x_i}$$

On incorpore ce résultat dans l'équation (59) et on obtient après substitution :

$$\text{(65)} \qquad -\frac{\dot{B}}{B} = \varepsilon_{cy} \frac{\dot{y}}{y} - \sum_{i=1}^{n} \frac{W_i x_i}{C} \frac{\dot{x}_i}{x_i}$$

Avec $\frac{\dot{X}}{X} = \sum_{i=1}^{n} \frac{W_i x_i}{C} \frac{\dot{x}_i}{x_i}$, l'indice de quantité des inputs, on a :

$$\text{(66)} \qquad -\frac{\dot{B}}{B} = \varepsilon_{cy} \frac{\dot{y}}{y} - \frac{\dot{X}}{X}$$

$$\text{(67)} \qquad = \varepsilon_{cy} \frac{\dot{y}}{y} - \frac{\dot{y}}{y} + \frac{\dot{y}}{y} - \frac{\dot{X}}{X}$$

$$(68) \qquad - \frac{\dot{B}}{B} = (\varepsilon_{cy} - 1) \frac{\dot{y}}{y} + \frac{\dot{TFP}}{TFP} \Longleftrightarrow \frac{\dot{TFP}}{TFP} = - \frac{\dot{B}}{B} + (1 - \varepsilon_{cy}) \frac{\dot{y}}{y}$$

Si on a des rendements constants, $\varepsilon_{cy} = 1 \Rightarrow \dot{TFP}/TFP = -\dot{B}/B = \dot{A}/A$. Si $\varepsilon_{cy} \neq 1$, la relation entre $\dot{A}/A$ et $-\dot{B}/B$ est la suivante (Cf. Otha, 1974) :

$$(69) \qquad - \frac{\dot{B}}{B} = \varepsilon_{cy} \frac{\dot{A}}{A} \quad \text{ou} \quad \frac{\dot{A}}{A} = -\varepsilon_{cy}^{-1} \frac{\dot{B}}{B}$$

Cette relation tient aussi dans le cas non concurrentiel.

III.3. Outputs multiples et tarification non marginale (Denny, Fuss et Waverman, 1981)

Le cas de la fonction de coût avec plusieurs outputs est similaire au cas d'output unique. La fonction de coût (sous l'hypothèse de concurrence sur le marché des inputs) s'écrit :

$$(70) \qquad C = G(W_1, W_2, \ldots, W_n, y_1, y_2, \ldots, y_m; t)$$

En suivant les mêmes développements que précédemment (Cf. équations (53) à (66)), on arrive à :

$$(71) \qquad - \frac{\dot{B}}{B} = \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_{cy_j} \frac{\dot{y}_j}{y_j} - \sum_{i=1}^{n} \frac{W_i x_i}{C} \frac{\dot{x}_i}{x_i}$$

$$(72) \qquad = \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_{cy_j} \frac{\dot{y}_j}{y_j} - \frac{\dot{X}}{X}$$

Pour relier $-\dot{B}/B$ à la mesure de la croissance de la productivité totale des facteurs nous introduisons deux mesures de l'indice de Divisia de la croissance de l'output, $\dot{Y}^c/Y^c$ et $\dot{Y}^p/Y^p$.

(73) $$\frac{\dot{Y}^p}{Y^p} = \sum_{j=1}^{m} \frac{P_j y_j}{R} \frac{\dot{y}_j}{y_j}$$

où $R = \sum_{j=1}^{m} P_j y_j$ est le revenu total;

P_j est le prix de l'output j;

$\frac{\dot{Y}^p}{Y^p}$ est la croissance de l'indice de Divisia de l'output basé sur les parts de revenus.

(74) $$\frac{\dot{Y}^c}{Y^c} = \left[\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_{cy_j}\right]^{-1} \left[\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_{cy_j} \frac{\dot{y}_j}{y_j}\right]$$

où $\varepsilon_{cy_j} = \frac{\partial C}{\partial y_j} \frac{y_j}{C}$ est l'élasticité du coût par rapport à l'output;

$\frac{\dot{Y}^c}{Y^c}$ est le taux de croissance de l'indice de Divisia de l'output basé sur les élasticités.

On peut déterminer la relation entre $\frac{\dot{Y}^c}{Y^c}$ et $\frac{\dot{Y}^p}{Y^p}$ à l'aide du raisonnement suivant : sur le marché de l'output j, la condition d'optimalité est :

(75) $$\frac{\partial C}{\partial y_j} = \frac{\partial R}{\partial y_j} \leq P_j^c \qquad (\text{si } \partial^2 C/\partial y_j^2 \geq 0)$$

où P_j^c est le prix de concurrence de l'output j.

Ainsi

$$(76) \qquad \varepsilon_{cy_j} = \frac{\partial C}{\partial y_j}\frac{y_j}{C} = \frac{\partial R}{\partial y_j}\frac{y_j}{C}$$

Donc

$$(77) \qquad \frac{\dot{Y}^c}{Y^c} = \left[\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial R}{\partial y_j}\frac{y_j}{C}\right]^{-1}\left[\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial R}{\partial y_j}\frac{y_j}{C}\frac{\dot{y}_j}{y_j}\right] = \left[\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial R}{\partial y_j}\, y_j\right]^{-1}\left[\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial R}{\partial y_j}\, y_j\, \frac{\dot{y}_j}{y_j}\right]$$

Le prix associé au revenu marginal, $\partial R/\partial y_j$, est P_j^m (= P_j^c en concurrence).

Or,

$$(78) \qquad \frac{\dot{Y}^p}{Y^p} = \left[\sum_{j=1}^{m} P_j^m\, y_j\right]^{-1}\left[\sum_{j=1}^{m} P_j^m\, y_j\, \frac{\dot{y}_j}{y_j}\right]$$

Puisque

$$(79) \qquad P_j^m \geq \frac{\partial R}{\partial y_j}, \quad \forall j = 1, \ldots, m \quad \text{alors} \quad \frac{\dot{Y}^p}{Y^p} \geq \frac{\dot{Y}^c}{Y^c}$$

avec égalité sur les marchés concurrentiels.

Rappelons la relation donnant $-\dot{B}/B$ (équation (66))

$$(80) \qquad -\frac{\dot{B}}{B} = \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_{cy_j}\frac{\dot{y}_j}{y_j} - \frac{\dot{X}}{X}$$

On a vu que $\dfrac{\dot{Y}^c}{Y^c} = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \frac{\varepsilon_{cy_j}}{\left[\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_{cy_j}\right]}\frac{\dot{y}_j}{y_j}$

$$(81) \qquad \left[\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_{cy_j}\right] \frac{\dot{Y}^c}{Y^c} = \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_{cy_j} \frac{\dot{y}_j}{y_j}$$

Donc

$$(82) \qquad -\frac{\dot{B}}{B} = \left[\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_{cy_j}\right] \frac{\dot{Y}^c}{Y^c} - \frac{\dot{X}}{X}$$

$$(83) \qquad -\frac{\dot{B}}{B} = \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_{cy_j} \frac{\dot{Y}^c}{Y^c} - \frac{\dot{Y}^c}{Y^c} + \frac{\dot{Y}^c}{Y^c} - \frac{\dot{Y}^P}{Y^P} + \frac{\dot{Y}^P}{Y^P} - \frac{\dot{X}}{X}$$

$$(84) \qquad = \left[\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_{cy_j} - 1\right] \frac{\dot{Y}^c}{Y^c} + \left[\frac{\dot{Y}^c}{Y^c} - \frac{\dot{Y}^P}{Y^P}\right] + \frac{\dot{Y}^P}{Y^P} - \frac{\dot{X}}{X}$$

Avec $\frac{\dot{TFP}}{TFP} = \frac{\dot{Y}^P}{Y^P} - \frac{\dot{X}}{X}$ et en réarrangeant, on a

$$(85) \qquad \frac{\dot{TFP}}{TFP} = -\frac{\dot{B}}{B} + \left[1 - \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_{cy_j}\right] \frac{\dot{Y}^c}{Y^c} + \left[\frac{\dot{Y}^P}{Y^P} - \frac{\dot{Y}^c}{Y^c}\right]$$

Dans le cas primal, on obtient :

$$(86) \qquad \frac{\dot{TFP}}{TFP} = \frac{\dot{A}}{A} + \left\{\left[\left(\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_{cy_j}\right)^{-1} - 1\right] \sum_{i=1}^{m} S_i \frac{\dot{x}_i}{x_i}\right\} + \left[\frac{\dot{Y}^P}{Y^P} - \frac{\dot{Y}^c}{Y^c}\right]$$

$$(87) \qquad = \frac{\dot{A}}{A} + \left[\left(\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_{cy_j}\right)^{-1} - 1\right] \frac{\dot{X}}{X} + \left[\frac{\dot{Y}^P}{Y^P} - \frac{\dot{Y}^c}{Y^c}\right]$$

Dans le cas de la tarification marginale $(\dot{Y}^P/Y^P - \dot{Y}^c/Y^c) = 0$. Dans le cas de rendements constants $\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_{cy_j} = 1$, donc $[(\sum_j \varepsilon_{cy_j})^{-1} - 1] \frac{\dot{X}}{X} = 0$ $= [1 - \sum_j \varepsilon_{cy_j}] \frac{\dot{Y}^c}{Y^c}$.

Dans le cas de rendements constants et de tarification marginale, on a

(88) $$\frac{\dot{TFP}}{TFP} = \frac{\dot{A}}{A} = -\frac{\dot{B}}{B}$$

Notons qu'il existe des cas où $\dot{Y}^P/Y^P - \dot{Y}^c/Y^c = 0$ sans qu'il y ait de tarification au coût marginal (cas de la concurrence); par exemple lorsque $P_j = \theta\ \partial C/\partial y_j$ où θ est une constante quelconque.

La mesure du taux de croissance de la productivité totale des facteurs capte donc

i) le déplacement de la courbe de coût, $-\dot{B}/B$ (ou de production, $\dot{A}/A$);

ii) le déplacement sur la courbe de coût, $(1 - \sum_j \varepsilon_{cy_j})\ \dot{Y}^c/Y^c$ (ou de production $((\sum \varepsilon_{cy_j})^{-1} - 1) \cdot \dot{X}/X$);

iii) la tarification non marginale.

III.4. Inputs quasi-fixes (Berndt et Fuss, 1981)

Tant que l'entreprise se trouve à l'équilibre de long terme, l'introduction d'inputs quasi-fixes ne modifie en rien les cas précédents. Cependant, quand l'entreprise s'écarte de cet équilibre, cela entraîne des variations dans l'utilisation de la capacité de production et dans l'utilisation des inputs quasi-fixes. Ces inputs sont fixes à court terme et ne peuvent varier dans le temps que si on encourt des coûts d'ajustement. Cette distinction entre inputs variables et quasi-fixes modifie l'analyse précédente : il faut utiliser une fonction de production, ou de coût, de court terme.

$$y = F(v_1, \ldots, v_j; f_1, \ldots, f_m; t) \tag{89}$$

où y est l'output;

v_j est l'input variable j;

f_m est l'input quasi-fixe m;

On n'a pas écrit l'indice de temps pour alléger l'écriture.

En différenciant par rapport au temps et en divisant par $\dot{y}$, on obtient :

$$\frac{\dot{y}}{y} = \sum_j \frac{\partial y}{\partial v_j} \frac{\dot{v}_j}{v_j} + \sum_m \frac{\partial y}{\partial f_m} \frac{f_m}{y} \frac{\dot{f}_m}{f_m} + \frac{1}{y} \frac{\partial y}{\partial t} \tag{90}$$

On a

$$\frac{\partial y}{\partial v_j} = \frac{W_j}{\partial C/\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial y}{\partial f_m} = \frac{Z_m}{\partial C/\partial y} \tag{91}$$

où W_j est le prix de l'input variable j;

Z_m est le prix implicite de l'input quasi fixe m (et non le prix de marché de l'input quasi fixe m) (voir section III.6 pour plus de détails sur Z_m);

$\partial C/\partial y$ est le coût marginal;

$\partial y/\partial v_j$ est le produit marginal de l'input j;

$\partial y/\partial f_m$ est le produit marginal de l'input m;

$C = \sum_j W_j v_j + \sum_m Z_m f_m$ est le coût total implicite.

En incorporant ces deux résultats dans l'équation donnant $\dot{y}/y$, on obtient :

(92) $$\frac{\dot{y}}{y} = \sum_j \frac{W_j v_j}{\partial C/\partial y\ y/C} \frac{1}{C} \frac{\dot{v}_j}{v_j} + \sum_m \frac{Z_m f_m}{\partial C/\partial y\ y/C} \frac{1}{C} \frac{\dot{f}_m}{f_m} + \frac{1}{y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

On pose $\varepsilon_{cy} = \frac{\partial C}{\partial y} \frac{y}{C}$; $\frac{\dot{A}}{A} = \frac{1}{y} \frac{\partial y}{\partial t}$, alors

(93) $$\frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{A}}{A} + \varepsilon_{cy}^{-1} \sum_j \frac{W_j v_j}{C} \frac{\dot{v}_j}{v_j} + \varepsilon_{cy}^{-1} \sum_m \frac{Z_m f_m}{C} \frac{\dot{f}_m}{f_m}$$

On pose $\frac{\dot{V}}{V} = \sum_j \frac{W_j v_j}{C} \frac{\dot{v}_j}{v_j}$; $\frac{\dot{F}}{F} = \sum_m \frac{Z_m f_m}{C} \frac{\dot{f}_m}{f_m}$

où $\frac{\dot{V}}{V}$ est l'indice de Divisia des inputs variables pondérés sur la base des coûts; $\frac{\dot{F}}{F}$ est l'indice de Divisia des inputs quasi-fixes pondérés sur la base des coûts implicites.

(94) $$\frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{A}}{A} + \varepsilon_{cy}^{-1} \frac{\dot{V}}{V} + \varepsilon_{cy}^{-1} \frac{\dot{F}}{F} \iff \frac{\dot{A}}{A} = \frac{\dot{y}}{y} - \varepsilon_{cy}^{-1} \frac{\dot{V}}{V} - \varepsilon_{cy}^{-1} \frac{\dot{F}}{F}$$

On a déjà vu que $\frac{\dot{TFP}}{TFP} = \frac{\dot{y}}{y} - \frac{\dot{V}}{V} - \frac{\dot{F}'}{F'}$ où $\frac{\dot{F}'}{F'} = \sum_m \frac{W_m f_m}{C'} \frac{\dot{f}_m}{f_m}$ est l'indice de Divisia des inputs quasi-fixes pondérés sur la base des coûts aux prix du marché tandis que $C' = \sum_j W_j v_j + \sum_m W_m f_m$ est le coût total aux prix du marché, et W_m est le prix de l'input quasi-fixe m sur le marché.

La relation entre $\dot{A}/A$ et $\dot{TFP}/TFP$ s'obtient comme suit :

(95) $$\frac{\dot{A}}{A} = \frac{\dot{y}}{y} - \varepsilon_{cy}^{-1}\,\frac{\dot{V}}{V} + \frac{\dot{V}}{V} - \frac{\dot{V}}{V} + \frac{\dot{F}'}{F'} - \frac{\dot{F}'}{F'}\,\varepsilon_{cy}^{-1}\,\frac{\dot{F}}{F}$$

(96) $$= \frac{\dot{TFP}}{TFP} + [1 - \varepsilon_{cy}^{-1}]\,\frac{\dot{V}}{V} + \frac{\dot{F}'}{F'} - \varepsilon_{cy}^{-1}\,\frac{\dot{F}}{F}$$

(97) $$= \frac{\dot{TFP}}{TFP} + [1 - \varepsilon_{cy}^{-}]\,\frac{\dot{V}}{V} + \frac{\dot{F}'}{F'} + \varepsilon_{cy}^{-1}\,\frac{\dot{F}'}{F'} - \varepsilon_{cy}^{-1}\,\frac{\dot{F}'}{F'} - \varepsilon_{cy}^{-1}\,\frac{\dot{F}}{F}$$

(98) $$= \frac{\dot{TFP}}{TFP} + [1 - \varepsilon_{cy}^{-1}]\left[\frac{\dot{V}}{V} + \frac{\dot{F}'}{F'}\right] + \varepsilon_{cy}^{-1}\left[\frac{\dot{F}'}{F'} - \frac{\dot{F}}{F}\right]$$

On obtient

(99) $$\frac{\dot{TFP}}{TFP} = \frac{\dot{A}}{A} + [\varepsilon_{cy}^{-1} - 1]\left[\frac{\dot{V}}{V} + \frac{\dot{F}'}{F'}\right] + \varepsilon_{cy}^{-1}\left[\frac{\dot{F}}{F} - \frac{\dot{F}'}{F'}\right]$$

La mesure du taux de croissance de la productivité totale des facteurs capte donc :

i) le déplacement de la fonction de production, $\dot{A}/A$;

ii) le déplacement sur la fonction de production, $[\varepsilon_{cy}^{-1} - 1]\ [\dot{V}/V + \dot{F}'/F']$;

iii) l'écart par rapport à l'équilibre de long terme.

L'approche duale à cette mesure prend comme point de départ la fonction de coût total implicite de court terme :

(100) $$C = H[W_1, \ldots, W_J;\ f_1, \ldots, f_M;\ y;\ t] + \sum_{m}^{M} Z_m\, f_m$$

En procédant comme auparavant, on obtient

$$(101)\quad \frac{\dot{C}}{C} = \sum_j \frac{\partial H}{\partial W_j}\frac{W_j}{C}\frac{\dot{W}_j}{W_j} + \sum_m \frac{H}{\partial f_m}\frac{f_m}{C}\frac{\dot{f}_m}{f_m} + \frac{\partial H}{\partial y}\frac{y}{C}\frac{\dot{y}}{y} + \frac{1}{C}\frac{\partial H}{\partial t} + \sum_m \left[\frac{Z_m f_m}{C}\frac{\dot{f}_m}{f_m} + \frac{Z_m f_m}{C}\frac{\dot{Z}_m}{Z_m}\right]$$

On a $\frac{\partial H}{\partial W_j} = v_j$; $\frac{\partial H}{\partial f_m} = -Z_m$; $\frac{\partial H}{\partial y}\frac{y}{C} = \varepsilon_{cy}$; $\frac{1}{C}\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\dot{B}}{B}$

Donc

$$(102)\quad \frac{\dot{C}}{C} = \sum_j \frac{W_j v_j}{C}\frac{\dot{W}_j}{W_j} + \sum_m - \frac{Z_m f_m}{C}\frac{\dot{f}_m}{f_m} + \varepsilon_{cy}\frac{\dot{y}}{y} + \frac{\dot{B}}{B} + \sum_m \frac{Z_m f_m}{C}\frac{\dot{f}_m}{f_m} + \sum_m \frac{Z_m f_m}{C}\frac{\dot{Z}_m}{Z_m}$$

$$(103)\quad = \frac{\dot{B}}{B} + \varepsilon_{cy}\frac{\dot{y}}{y} + \sum_j \frac{W_j v_j}{C}\frac{\dot{W}_j}{W_j} + \sum_m \frac{Z_m f_m}{C}\frac{\dot{Z}_m}{Z_m}$$

Par définition, on a

$$(104)\quad C = \sum_j W_j v_j + \sum_m Z_m f_m$$

En différenciant par rapport au temps et en divisant par C, on a :

$$(105)\quad \frac{\dot{C}}{C} = \sum_j \frac{W_j v_j}{C}\frac{\dot{W}_j}{W_j} + \sum_j \frac{W_j v_j}{C}\frac{\dot{v}_j}{v_j} + \sum_m \frac{Z_m f_m}{C}\frac{\dot{Z}_m}{Z_m} + \sum_m \frac{Z_m f_m}{C}\frac{\dot{f}_m}{f_m}$$

En égalisant les deux équations donnant $\dot{C}/C$, on obtient

$$(106)\quad - \frac{\dot{B}}{B} = \varepsilon_{cy}\frac{\dot{y}}{y} - \sum_j \frac{W_j v_j}{C}\frac{\dot{v}_j}{v_j} - \sum_m \frac{Z_m f_m}{C}\frac{\dot{f}_m}{f_m}$$

$$(197)\quad = \varepsilon_{cy}\frac{\dot{y}}{y} - \frac{\dot{V}}{V} - \frac{\dot{F}}{F}$$

On remarque que $- \frac{\dot{B}}{B} = \varepsilon_{cy}\frac{\dot{A}}{A}$.

On peut relier $-\dot{B}/B$ et $\dot{TFP}/TFP$ en procédant comme précédemment et on obtient :

(108) $$\frac{\dot{TFP}}{TFP} = -\frac{\dot{B}}{B} + [1 - \varepsilon_{cy}]\frac{\dot{y}}{y} + \frac{\dot{F}}{F} - \frac{\dot{F}'}{F'}$$

Ainsi $\dot{TFP}/TFP$ mesure :

i) le déplacement de la courbe de coût, $-\dot{B}/B$;

ii) le déplacement sur la courbe de coût, $[1 - \varepsilon_{cy}]\ \dot{y}/y$;

iii) l'écart par rapport à l'équilibre de long terme, $[\dot{F}/F - \dot{F}'/F']$.

III.5. Cas général

Dans la section III.3, on a considéré le cas d'outputs multiples et de la tarification non marginale. On peut aussi combiner à ce cas la distinction entre le court terme (certains inputs sont quasi-fixes) et le long terme (tous les inputs sont variables). Puisque les développements sont les mêmes, on se contentera de donner les principales étapes.

(109) $$-\frac{\dot{B}}{B} = \sum_{\ell} \varepsilon_{cy_{\ell}} \frac{\dot{y}_{\ell}}{y_{\ell}} - \frac{\dot{V}}{V} - \frac{\dot{F}}{F}$$

(110) $$= [(\sum_{\ell} \varepsilon_{cy_{\ell}})]\frac{\dot{Y}^c}{Y^c} - \frac{\dot{V}}{V} - \frac{\dot{F}}{F}$$

(111) $$= \left[[(\sum_{\ell} \varepsilon_{cy_{\ell}})]\frac{\dot{Y}^c}{Y^c} - \frac{\dot{Y}^c}{Y^c}\right] + \left[\frac{\dot{Y}^c}{Y^c} - \frac{\dot{Y}^P}{Y^P}\right] + \left[\frac{\dot{Y}^P}{Y^P} - \frac{\dot{V}}{V} - \frac{\dot{F}'}{F'}\right] + \left[\frac{\dot{F}'}{F'} - \frac{\dot{F}}{F}\right]$$

(112) $$\frac{\dot{TFP}}{TFP} = -\frac{\dot{B}}{B} + [1 - (\sum_{\ell} \varepsilon_{cy_{\ell}})]\frac{\dot{Y}^c}{Y^c} + \left[\frac{\dot{Y}^P}{Y^P} - \frac{\dot{Y}^c}{Y^c}\right] + \left[\frac{\dot{F}}{F} - \frac{\dot{F}'}{F'}\right]$$

Dans le cas primal, on a :

$$(113)\quad \frac{\dot{TFP}}{TFP} = \frac{\dot{A}}{A} + [(\sum_{\ell} \varepsilon_{cy_\ell})^{-1} - 1]\left[\frac{\dot{V}}{V} + \frac{\dot{F}'}{F'}\right] + \left[\frac{\dot{Y}^P}{Y^P} - \frac{\dot{Y}^c}{Y^c}\right] + [\sum_{\ell} \varepsilon_{cy_\ell}]^{-1}\left[\frac{\dot{F}}{F} - \frac{\dot{F}'}{F'}\right]$$

$\dot{TFP}/TFP$ mesure :

i) le déplacement de la fonction de coût, $-\dot{B}/B$, ou de production, $\dot{A}/A$;

ii) le déplacement de la fonction de coût, $\left\{-[(\sum_{\ell} \varepsilon_{cy_\ell}) - 1] \frac{\dot{Y}^c}{Y^c}\right\}$, ou de production, $\left\{[(\sum_{\ell} \varepsilon_{cy_\ell})^{-1} - 1] [\dot{V}/V + \dot{F}'/F']\right\}$;

iii) la tarification non marginale $[\dot{Y}^P/Y^P - \dot{Y}^c/Y^c]$;

iv) l'écart par rapport à l'équilibre de long terme $[\dot{F}/F - \dot{F}'/F']$ pour la fonction de coût et $(\sum_{\ell} \varepsilon_{cy_\ell})^{-1} [\dot{F}/F - \dot{F}'/F']$ pour la fonction de production.

III.6. Capacité et prix implicite (Berndt et Fuss, 1981)

On définit le taux d'utilisation de la capacité de production d'une firme comme étant :

$$(114)\qquad u \equiv y/y^0$$

où u est le taux d'utilisation;

y est la production;

y^0 est la capacité de production.

Si $u < 1$ (> 1), alors $y <$ ($>$) y^0 et la firme est à gauche (à droite) du minimum de la courbe de coût moyen à court terme.

Si on définit les rendements d'échelle à court terme comme le ratio de la variation en pourcentage de l'output et de la variation en pourcentage de chaque input variable en fixant tous les inputs quasi-fixes, alors quand $u < 1$, la firme bénéfiera de rendements croissants, et quand $u > 1$, la firme sera dans une zone de rendements décroissants.

Considérons qu'il n'y a qu'un seul input quasi-fixe, de prix W_k; définissons $q_k \equiv Z/W_k$, le ratio du prix implicite des services de l'input quasi-fixe et du prix de marché des services de cet input. Si $u > 1$, la firme se trouve dans une zone où le coût moyen s'accroît avec la production (dû aux rendements décroissants). La firme abaisserait son coût moyen pour la période en augmentant d'une unité son stock de capital. Cependant il n'est pas certain qu'elle investisse, soit qu'elle s'attende à un renversement de situation, soit qu'une contrainte l'empêche de le faire. Dans ce dernier cas, la valeur implicite du capital, c'est-à-dire sa valeur pour la firme, sera supérieure au prix du marché du capital. On aura $q_k > 1$.

Lorsque les prix anticipés sont constants, si $u < 1$, alors $q_k < 1$ car la firme n'a aucun intérêt à accroître son stock de capital; quand $u = 1$ alors $q_k = 1$.

Berndt et Fuss (1981) utilisent le q de Tobin pour mesurer q_k. Le q de Tobin reflète le prix de rachat du capital (en bourse) et non le coût d'utilisation du capital pour une période. Cependant Tobin-Brainard (1976) remarquent que lorsque le flux de revenu est constant, q_k peut être défini comme le ratio de l'efficacité marginale du capital et du taux d'escompte de la firme. Dans ce cas, $Z = q \cdot W_k$.

IV - THEORIE DES NOMBRES-INDICES ET PROGRES TECHNIQUE

Contrairement à l'approche précédente qui définit dès le début le progrès technique et qui se sert de la théorie de la production, par la suite, pour préciser sa mesure de la productivité totale des facteurs, la théorie des nombres-indices a, comme point de départ, la théorie de la production. Pour elle, la mesure du progrès technique est le résultat.

Selon les hypothèses faites sur la fonction de production, ou sur la fonction de coût, on peut définir (ou justifier) diverses formulations du progrès technique. Dans la littérature, les diverses hypothèses retenues sont, en général, la séparabilité additive de la fonction de production entre les inputs et les outputs, la constance des rendements d'échelle et la neutralité du progrès technique.

Dans ce chapitre, nous appliquerons la théorie des nombres-indices à trois formulations possibles de la technologie d'une firme, soit la fonction de production, la fonction de coût et la fonction de distance.

Avant de passer à l'étude des différents indices proposés, nous définirons certaine expressions souvent utilisées dans la théorie des nombres-indices. Puis, nous énoncerons et prouverons ce qu'il est convenu d'appeler l'identité quadratique.

IV.1. Quelques définitions

Définition 1 : Forme flexible (Diewert, 1976)

Une forme fonctionnelle est dite flexible si elle fournit une approximation du second ordre à une fonction quelconque, linéairement homogène, deux fois différentiable.

Définition 2 : Nombre-indice exact et superlatif (Diewert, 1976)

Un nombre-indice est dit superlatif s'il est consistant avec une forme fonctionnelle flexible. Si la fonction est quadratique, alors la forme fonctionnelle est exacte et le nombre-indice est aussi exact.

Définition 3 : Identité quadratique (Diewert, 1976)

Si on considère une fonction quadratique que l'on peut écrire sous forme matricielle :

(115) $$f(z^t) = a_0 + a^T z^t + \frac{1}{2} z^{tT} A z^t$$

où T est l'opérateur de transposition;

t est le temps.

Alors, pour $t = 0$ et $t = 1$, on a l'identité suivante :

$$(116)\, f(z^1)-f(z^0) \equiv a_0 + a^T z^1 + \frac{1}{2} z^{1T} Az^1 - a_0 - a^T z^0 - \frac{1}{2} z^{0T} az^0$$

$$(117) \qquad = a^T [z^1 - z^0] + \frac{1}{2} z^{1T} A[z^1 - z^0] + \frac{1}{2} z^{0T} A[z^1 - z^0]$$

$$(118) \qquad = \frac{1}{2} [a + Az^1 + a + Az^0]^T [z^1 - z^0]$$

$$(119) \quad f(z^1) - f(z^0) = \frac{1}{2} [\nabla f(z^1) + \nabla f(z^0)]^T [z^1 - z^0]$$

L'équation (119) est l'identité quadratique. L'égalité tient pour une fonction de degré deux. Pour des fonctions de degré supérieur à deux, il s'agit d'une approximation. Ce résultat servira lors de démonstrations ultérieures.

IV.2. Mesure du progrès technique et fonction de production (Diewert, 1976)

Selon les hypothèses que l'on fait sur les fonctions de production, la théorie des nombres-indices donnera des mesures différentes, éventuellement, du progrès technique. Il n'est pas question ici de faire une liste exhaustive de ces mesures. Nous ne croyons pas que cela soit très utile, à supposer que cela soit possible, le but de ce travail tenant plus du survol que du répertoire. Nous illustrerons donc, à l'aide d'un cas simple comment mesurer le progrès technique à l'aide de la théorie des nombres-indices dans le cas de la fonction de production. L'ensemble des possibilités de production s'écrit, s'il est séparable de façon additive entre ses inputs et ses outputs :

(120) $$F(y^t, x^t) = h(x^t) - g(y^t) = 0$$

où $h(x^t)$ est la fonction de production;

$g(y^t)$ est la fonction donnant les besoins en facteurs pour assurer la production des y.

On a P le vecteur des prix des outputs, tous positifs ($P >> 0$);

W le vecteur des prix des inputs, tous positifs ($W >> 0$).

On fait l'hypothèse que x^0 et y^0 sont les solutions, au temps 0, du problème de maximisation du profit suivant :

(121) $$\underset{y,x}{\text{Max}} \left\{P^{0^T} \cdot y - W^{0^T} \cdot x : g(y) = h(x)\right\} = (x^0, y^0)$$

S'il y a progrès technique entre les périodes 0 et 1 et que ce progrès a pour conséquence un déplacement parallèle des courbes isoquantes de la fonction de production, alors on a $g(y) = (1 + \tau)\ h(x)$. Si $\tau > 0$ (< 0), il y a progrès technique (régression technique). On fait l'hypothèse que x^1 et y^1 sont les solutions, au temps 1, du problème :

(122) $$\underset{x,y}{\text{Max}} \left\{P^{1^T} \cdot y - W^{1^T} \cdot x : g(y) = (1 + \tau)\ h(x)\right\}$$

On a donc

(123) $$g(y^1) = (1 + \tau)\ h(x^1)$$

et $$g(y^0) = h(x^0)$$

Le progrès technique est donné par

(124) $$(1 + \tau) = \frac{g(y^1)/g(y^0)}{h(x^1)/h(x^0)}$$

et il est obtenu une fois que l'on connaît $g(y^1)/g(y^0)$ et $h(x^1)/h(x^0)$, c'est-à-dire que l'on connaît l'indice de quantités des outputs et des inputs.

IV.2.1. Indice de quantité des outputs (Diewert, 1976)

On associe à $g(y^t)$ une fonction translog

(125) $$\ell n\ g(y^t) = a_0 + \sum_{m=1}^{M} a_m\ \ell n\ y_m^t + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{M} \sum_{k=1}^{M} C_{jk}\ \ell n\ y_j^t\ \ell n\ y_k^t$$

où $\sum_{m=1}^{M} a_m = 1$; $C_{jk} = C_{kj}$; $\sum_{k=1}^{M} C_{jk} = 0$; pour $j = 1, \ldots, M$

de façon à avoir une fonction linéairement homogène.

Si y^t est la solution de

(126) $$\underset{y}{\text{Min}} \left\{ g(y^t) ;\ P^{tT}\ y = Y^t\ ,\ Y^t,\ y \geq 0_M \right\}$$

On a, comme condition de premier ordre

(127) $$\nabla g(y) = \lambda P$$

Puisque $g(y)$ est linéairement homogène, on a, par le théorème d'Euler :

(128) $$y^T \nabla g(y) = g(y)$$

donc

(129) $$\frac{\nabla g(y)}{g(y)} = \frac{p}{p^T y}$$

D'autre part, on a l'identité quadratique

(130) $$f(z^1) - f(z^0) = \frac{1}{2} [\nabla f(z^1) + \nabla f(z^0)]^T (z^1 - z^0)$$

On relie cette identité avec la fonction translog de g(y) en faisant les transformations de variables suivantes :

(131) $$f(z^t) = \ell n\ g(y^t)$$

(132) $$z_m^t = \ell n\ y_m^t$$

(133) $$\frac{\partial f(z^t)}{\partial z_m} = \frac{\partial\ \ell n\ g(y^t)}{\partial\ \ell n\ y_m^t}$$

(134) $$= \frac{\partial g(y^t)}{\partial y_m} \frac{y_m^t}{g(y^t)}$$

et

(135) $$\nabla f(z^t) = \hat{y} \frac{\nabla g(y)}{g(y^t)}$$

où $\hat{y}$ est la matrice diagonale formée des éléments de y.

L'identité quadratique devient :

$$(136)\quad \ln g(y^1) - \ln g(y^0) = \frac{1}{2}\left[\hat{y}^1 \frac{\nabla g(y^1)}{g(y^1)} - \hat{y}^0 \frac{\nabla g(y^0)}{g(y^0)}\right] \cdot [\ln y^1 - \ln y^0]$$

On incorpore l'équation (129) dans cette identité

$$(137)\quad \ln g(y^1) - \ln g(y^0) = \frac{1}{2}\left[\frac{\hat{y}^1 p^1}{y^{1^T} p^1} + \frac{\hat{y}^0 p^0}{y^{0^T} p^0}\right] [\ln y^1 - \ln y^0]$$

$$(138)\quad \ln \frac{g(y^1)}{g(y^0)} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{M} \left[\frac{y_m^1 p_m^1}{\sum_m y_m^1 p_m^1} + \frac{y_m^0 p_m^0}{\sum_m y_m^0 p_m^0}\right] \ln \left[\frac{y_m^1}{y_m^0}\right]$$

$$(139)\quad \frac{g(y^1)}{g(y^0)} = \prod_{m=1}^{M} \left[\frac{y_m^1}{y_m^0}\right]^{1/2[y_m^1 p_m^1/\sum_m y_m^1 p_m^1 + y_m^0 p_m^0/\sum_m y_m^0 p_m^0]} = \prod_{m=1}^{M} \left[\frac{y_m^1}{y_m^0}\right]^{1/2[S_m^1 + S_m^0]}$$

où S_m^1 (S_m^0) représente la part de l'output m dans les revenus associés à y^1 (y^0).

IV.2.2. Indice de quantité des inputs (Diewert, 1976)

La démarche pour estimer $h(x^1)/h(x^0)$ est en tout point identique à celle de $g(y^1)/g(y^0)$. On commence par associer une fonction translog à $h(x^t)$ qui respecte les mêmes contraintes quant aux paramètres de façon à avoir une fonction linéairement homogène.

x^t est la solution $\max_x \left\{h(x) : W^t x^t = X^t,\ x \gg 0_N\right\}$. Les conditions de premier ordre et l'homogénéité de degré un nous donnent :

(140) $$\frac{W^t}{W^t x^t} = \frac{\nabla h(x^t)}{x^t \; \nabla h(x^t)} = \frac{\nabla h(x^t)}{h(x^t)}$$

En se servant de l'identité quadratique, on a :

(141) $$\ell n \; \frac{h(x^1)}{h(x^0)} = \frac{1}{2} \left[\frac{\hat{x}^1 W^1}{W^{1^T} x^1} + \frac{\hat{x}^0 W^0}{W^{0^T} x^0}\right] \ell n \left[\frac{x^1}{x^0}\right] = \frac{1}{2} \; [R^1 + R^0] \; \ell n \left[\frac{x^1}{x^0}\right]$$

Finalement

(142) $$\frac{h(x^1)}{h(x^0)} = \prod_{n=1}^{N} \left[\frac{x_N^1}{x_N^0}\right]^{1/2[R_n^1 + R_n^0]}$$

où R_n^1 (R_n^0) représente la part de l'input n dans les coûts associés à x^1 (x^0).

IV.2.3. Progrès technique

Dans le cas où $F(y^t, x^t)$ est additivement séparable entre inputs et outputs, où $h(x^t)$ et $g(y^t)$ sont des fonctions translog linéairement homogènes, où le producteur maximise ses profits, et où le progrès technique est neutre, alors le progrès technique que nous avions défini comme étant

(143) $$(1 + \tau) = \frac{g(y^1)/g(y^0)}{h(x^1)/h(x^0)}$$

peut s'écrire

$$(144) \qquad (1+\tau) = \frac{\sum_{m=1}^{M} [y_m^1/y_m^0]^{1/2[S_m^1 + S_m^0]}}{\sum_{n=1}^{N} [x_n^1/x_n^0]^{1/2[R_n^1 + R_n^0]}}$$

Cette formule fut utilisée par Griliches et Jorgenson (1972) pour mesurer le progrès technique. La théorie des nombres-indices n'a servi qu'à préciser quelles contraintes on pouvait imposer à l'ensemble des possibilités de production pour que cette mesure soit justifiable.

Il faut noter cependant que ces conditions sont suffisantes mais non nécessaires. Caves et Christensen (1980) ont obtenu le même résultat avec un ensemble de possibilités de production non séparable. Plus tard, Caves, Christensen et Diewert (1982) ont aussi obtenu le même résultat en se servant des indices de Malmquist. Nous reprendrons, d'ailleurs, plus tard, le cas des indices de Malmquist.

IV.3. Mesure du progrès technique et fonction de coût (Diewert, 1981)

IV.3.1. Quelques propriétés de la fonction de coût (Diewert, 1981, pp. 21-23)

La fonction de coût que nous considérerons est la suivante :

$$(145) \qquad C(W, y, k, t) \equiv \min_{x} \{W^T \cdot x : (y, x, k) \in S^t\}$$

où $W \equiv (W_1, \ldots, W_J) \gg 0$ est le vecteur positif des prix des facteurs variables;

$x \equiv (x_1, \ldots, x_J) \geq 0$ est le vecteur non négatif des facteurs variables;

$k \equiv (k_1, \ldots, k_N) \geq 0$ est le vecteur non négatif des facteurs fixes dont les prix sont $r \equiv (r_1, \ldots, r_N) >> 0$;

$y \equiv (y_1, \ldots, y_I) \geq 0$ est le vecteur non négatif des outputs dont les prix sont $P \equiv (P_1, \ldots, P_I)$;

S^t est l'ensemble des possibilités de production au temps t.

- Si S^t est un sous-ensemble fermé non vide de l'orthant non négatif dans un espace euclidien de dimension (I + J + N), alors C est une fonction non négative, concave et linéairement homogène en W pour y, k et t fixés.

- Si S^t a la propriété de "libre disposition", alors C sera non décroissant en W pour y, k et t fixés, non croissant en k pour W, y et t fixés.

- Si S^t est un ensemble convexe, alors C sera une fonction convexe en y et k pour W et t fixés.

- Si S^t est un cône (c'est-à-dire rendements d'échelle constants), alors C sera linéairement homogène en y et k pour W et t fixés.

- Si S^t a toutes les propriétés mentionnées auparavant, alors la fonction de coût variable C(W, y, k, t) définit complètement S^t (Gorman (1968); Diewert (1973); Lau (1976); et McFadden (1978)).

- Si C est différentiable par rapport au vecteur W, alors on a (lemme de Shephard) :

(146) $$x^t = \nabla_W C(W^t, k^t, y^t, t)$$

- Si C est différentiable par rapport aux vecteurs y et k, on a (Diewert (1974), (1981)) :

(147) $$p^t = \nabla_y C(W^t, k^t, y^t, t)$$

(148) $$r^t = -\nabla_k C(W^t, k^t, y^t, t)$$

IV.3.2. Progrès technique (Diewert, 1981)

Dans tout ce qui suit, on fait l'hypothèse que k^t varie librement durant la période t.

On associe à C( ) une fonction de coût variable translog :

(149) $$\begin{aligned} \ln C(W^t, y^t, k^t, t) \equiv\ & \alpha_0 + \sum_{j=1}^{J} \alpha_j \ln W_j^t + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{J} \alpha_{jn} \ln W_j^t \ln W_k^t \\ & + \sum_{i=1}^{I} \beta_i \ln y_i^t + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{I} \sum_{h=1}^{I} \beta_{ih} \ln y_i^t \ln y_h^t \\ & + \sum_{n=1}^{N} \gamma_n \ln k_n^t + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{M} \gamma_{nm} \ln k_n^t \ln k_m^t \\ & + \delta_0 t + \frac{1}{2} \delta_{00} t^2 + \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \varepsilon_{ij} \ln y_i^t \ln w_j^t \\ & + \sum_{i=1}^{I} \sum_{n=1}^{N} \gamma_{in} \ln y_i^t \ln k_n^t \\ & + \sum_{j=1}^{I} \sum_{n=1}^{N} \phi_{jn} \ln W_j^t \ln k_n^t + \sum_{i=1}^{I} \rho_i \ln y_i^t \cdot t \\ & + \sum_{j=1}^{J} \psi_j \ln W_j^t \cdot t + \sum_{n=1}^{N} \xi_n \ln k_n^t \cdot t \end{aligned}$$

où $\alpha_{jn} = \alpha_{kj}$, $\beta_{in} = \beta_{ni}$, $\gamma_{nm} = \gamma_{mn}$

avec $\sum_{j=1}^{J} \alpha_j = 1$, $\sum_{k=1}^{J} \alpha_{jk} = 0$ pour j = 1 à J, $\sum_{i=1}^{I} \varepsilon_{ij} = 0$ pour j = 1 à J,

$\sum_{n=1}^{N} \phi_{jn} = 0$ pour j = 1 à J, $\sum_{j=1}^{J} \psi_j = 0$.

En procédant comme dans la section (IV.2.) et en se servant de l'identité quadratique, on obtient en faisant l'hypothèse que le progrès technique survient durant les périodes t et t* :

$$
\begin{aligned}
(150)\quad & \ell n\, C(W^t, y^t, k^t, t) - \ell n\, C(W^{t^*}, y^{t^*}, k^{t^*}, t^*) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{J} \left[W_j^t \frac{\partial\, \ell n\, C(W^t, y^t, k^t, t)}{\partial W_j} + W_j^{t^*} \frac{\partial\, \ell n\, C(W^{t^*}, y^{t^*}, k^{t^*}, t^*)}{\partial W_j} \right] \ell n \frac{W_j^t}{W_j^{t^*}} \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{I} \left[y_i^t \frac{\partial\, \ell n\, C(W^t, y^t, k^t, t)}{\partial y_i} + y_i^{t^*} \frac{\partial\, \ell n\, C(W^{t^*}, y^{t^*}, k^{t^*}, t^*)}{\partial y_i} \right] \ell n \frac{y_i^t}{y_i^{t^*}} \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \left[k_n^t \frac{\partial\, \ell n\, C(W^t, y^t, k^t, t)}{\partial k_n} + k_n^{t^*} \frac{\partial\, \ell n\, C(W^{t^*}, y^{t^*}, k^{t^*}, t^*)}{\partial k_n} \right] \ell n \frac{k_n^t}{k_n^{t^*}} \\
&+ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial\, \ell n\, C(W^t, y^t, k^t, t)}{\partial_t} + \frac{\partial\, \ell n\, C(W^{t^*}, y^{t^*}, k^{t^*}, t^*)}{\partial_t} \right] [t - t^*]
\end{aligned}
$$

Si on définit le progrès technique comme étant $\tau^t \equiv \partial\, \ell n\, C(W^t, y^t, k^t, t)/\partial t$, c'est-à-dire la variation en pourcentage dans la fonction de coût qui ne peut être expliquée par des variations dans les quantités d'outputs ou de facteurs ou par des variations dans les quantités d'outputs ou de facteurs ou par des variations dans les prix des facteurs, alors, advenant un progrès technique, on aura $\tau^t < 0$. Si le progrès technique intervient durant les périodes $t = 1$ et $t^* = 0$ alors, compte tenu de (146), (147) et (148), (150) devient :

(151) $\ell n\ C(W^1, y^1, k^1, 1) - \ell n\ C(W^0, y^0, k^0, 0)$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{J} [W_i^1 x_i^1 + W_i^0 x_0^0]\ \ell n \frac{W_j^1}{W_j^0} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{I} [y_i^1 P_i^1 + y_i^0 P_i^0]\ \ell n \frac{y_i^1}{y_i^0}$$

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} [k_n^1 r_n^1 + k_n^0 r_n^0]\ \ell n \frac{k_n^1}{k_n^0} - \frac{1}{2} [\tau^1 + \tau^0]$$

Si on incorpore l'identité $W^{tT} \cdot x^t = C(W^t, y^t, k^t, t)$, on obtient après quelques réarrangements évidents :

(152) $$e^{[\tau^1+\tau^0]/2} = \frac{\left[\frac{W^{1^T} x^1}{W^{0^T} x^0}\right] \prod_{n=1}^{N} \left[\frac{k_n^1}{k_n^0}\right]^{1/2[r_n^1 k_n^1 / r^1 k^1 + r_n^0 k_n^0 / r^0 k^0]}}{\prod_{j=1}^{J} \left[\frac{W_j^1}{W_j^0}\right]^{1/2[W_j^1 x_j^1 / W^{1^T} x^1 + W_j^0 x_j^0 / W^{0^T} x^0]} \prod_{i=1}^{I} \left[\frac{y_i^1}{y_i^0}\right]^{1/2[P_i^1 y_i^1 / P^{1^T} y^1 + P_i^0 y_i^0 / P^{0^T}}}$$

Le terme $\left[\frac{W^{1^T} x^1}{W^{0^T} x^0}\right] \Big/ \prod_{j=1}^{J} \left[\frac{W_j^1}{W_j^0}\right]^{1/2[\cdot]}$ est l'indice implicite de Törnquist des quantités des inputs variables (Cf. Diewert (1976)). Ainsi, la mesure du progrès technique est égale à l'indice implicite des quantités de facteurs variables multiplié par un indice de quantité des facteurs fixes, divisé par un indice de quantité des outputs.

Si le côté droit de l'équation est inférieur à un, c'est-à-dire si l'output croît plus rapidement que les facteurs alors $\frac{1}{2}(\tau^1 + \tau^0) < 0$ et il y a progrès technique. Remarquons également que si les facteurs fixes ne varient pas de $t = 0$ à $t = 1$, alors

$$k_n^1 = k_n^0 \quad \text{et} \quad \prod_{n=1}^{N} \left[\frac{k_n^1}{k_n^0}\right]^{1/2[\cdot]} = 1 \tag{153}$$

et l'indice obtenu est le rapport de l'indice implicite de quantité des facteurs variables sur l'indice de quantité des outputs.

IV.4. Mesure du progrès technique et indices de Malmquist (Caves, Christensen et Diewert, 1982) : utilisation d'une fonction de distance

On peut envisager le progrès technique sous deux angles. On peut considérer le progrès technique comme étant le changement dans le maximum d'outputs que l'on obtient avec un certain niveau d'inputs, ou alors on peut considérer le progrès technique comme étant le changement dans le minimum d'inputs que l'on utilise pour obtenir un certain niveau d'outputs. Selon que l'on utilise une notion ou l'autre, on obtiendra l'indice de progrès technique basé sur l'output dans le premier cas ou l'indice de progrès technique basé sur l'input dans le second. Les deux indices diffèrent par un facteur qui reflète les rendements d'échelle (Caves, Christensen et Swanson, 1981).

IV.4.1. Rendements d'échelle

On considère un accroissement proportionnel de tous les inputs, x^t, par un facteur λ. On a $u^t(y^t, x^t, \lambda)$, le facteur de proportionnalité par lequel les outputs, y^t, doivent être augmentés pour demeurer sur la frontière de production; $u^t(\ )$ est la solution de

$$\lambda\ x_1^t = g^t(u^t\ \ y^t,\ \lambda\ \tilde{x}^t) \tag{154}$$

où g^t est la fonction de besoin du facteur x_1 et $\tilde{x}^t = (x_2^t,\ x_3^t,\ \ldots,\ x_N^t)$.

Le degré des rendements d'échelle est donné par $\partial u^t(\ )/\partial\lambda = \varepsilon^t$:

si $\varepsilon^t > 1$ alors les rendements d'échelle seront croissants;
si $\varepsilon^t = 1$ alors les rendements d'échelle seront constants;
si $\varepsilon^t < 1$ alors les rendements d'échelle seront décroissants.

Si on définit la fonction de distance des outputs comme étant

$$d^t(y^t,\ x^t) \equiv \min_{\delta} \left\{\delta\ :\ g^t(y^t/\delta,\ \tilde{x}^t) = x_1^t\right\} \tag{155}$$

alors u^t est l'inverse de la fonction de distance de l'output évaluée à (y^t, x^t, λ). Donc

$$\varepsilon^t = \frac{\partial u(y^t,\ x^t,\ \lambda)}{\partial\lambda} = \nabla_\lambda\ d(y^t,\ \lambda\ x^t)^{-1} \tag{156}$$

Pour trouver ε^t, on commence par prendre la différentielle totale de $g(uy^t,\ \lambda\ \tilde{x}^t) = \lambda\ x_1^t$; dans le cas d'un output et de deux inputs

$$ug_y dy + yg_y\ du + \lambda\ g_{\tilde{x}}\ d\tilde{x} + \tilde{x}g_{\tilde{x}}\ d\lambda = \lambda\ dx_1 + x_1\ d\lambda \tag{157}$$

Pour obtenir $\partial u/\partial\lambda$, on pose $dy = dx_1 = d\tilde{x} = 0$. On obtient

(158) $$yg_y \, du + \tilde{x} g_{\tilde{x}} \, d\lambda = x_1 \, d\lambda$$

qu'on réécrit sous la forme

(159) $$yg_y \, du = [x_1 - \tilde{x} g_{\tilde{x}}] \, d\lambda \equiv x^T \, g_x \, d\lambda$$

d'où

(160) $$\frac{du}{d\lambda} = \frac{x^T g_x}{y^T g_y}$$

Dans le cas de plusieurs outputs et de plusieurs inputs, on a (en omettant les signes indiquant la transposition des vecteurs)

(161) $$\frac{du}{d\lambda} = \frac{x \cdot \nabla_x \, g(x, y)}{y \cdot \nabla_y \, g(x, y)}$$

Pour relier les rendements d'échelle à la fonction de distance, on différencie totalement $g(y/\delta, \lambda \tilde{x}) = \lambda x_1$ et on pose $dy = d\lambda = 0$ et $\lambda = 1$. Il s'ensuit :

(162) $$\nabla_x \, d(x, y) = - \frac{\nabla_x \, g(x, y)}{y \, \nabla_y \, g(x, y)} = \frac{1}{y \cdot \nabla_y \, g(\tilde{x}, y)} \begin{bmatrix} -1 \\ \nabla_{\tilde{x}} \, g(\tilde{x}, y) \end{bmatrix}$$

Les rendements d'échelle sont donc

(163) $$\varepsilon = - x \cdot \nabla_x \, d(x, y)$$

IV.4.2. Indice de progrès technique basé sur l'output

On définit l'indice de progrès technique basé sur l'output au temps t = 0 comme étant

$$(164) \quad m^0(x^1, x^0, y^1, y^0) \equiv d^0(y^1, x^1)/d^0(y^0, x^0) = d^0(y^1, x^1)$$

$$(165) \quad \equiv \min_{\delta} \left\{\delta : g^0(y^1/\delta, \tilde{x}^1) \le x_1^1\right\}$$

Ainsi m^0 est le plus petit facteur de déflation de l'output tel que le vecteur d'output déflaté au temps 1, y^1/m^0, et le vecteur d'input, x^1, soient sur la frontière de production du temps 0. Si la productivité est plus grande au temps 1 qu'au temps 0, alors $m^0 > 1$.

Avec le temps t = 1 comme période de base, on a

$$(166) \quad m^1(x^1, x^0, y^1, y^0) \equiv 1/d^1(x^0, y^0)$$

$$(167) \quad \equiv 1/\min_{\delta} \left\{\delta : g^1(y^0/\delta, \tilde{x}^0) \le x_1^0\right\}$$

$$(168) \quad \equiv \max_{\rho} \left\{\rho : g^1(\rho\, y^0, \tilde{x}^0) \le x_1^0\right\}$$

m^1 est le plus grand facteur d'inflation de l'output tel que le vecteur d'output augmenté au temps 0, $m^1\, y^0$, et le vecteur d'input, x^0, soient sur la frontière de production au temps t. Si la productivité est plus grande au temps 1 qu'au temps 0, alors $m^1 > 1$.

(158) $$yg_y\ du + \tilde{x}g_{\tilde{x}}\ d\lambda = x_1\ d\lambda$$

qu'on réécrit sous la forme

(159) $$yg_y\ du = [x_1 - \tilde{x}g_{\tilde{x}}]\ d\lambda \equiv x^T\ g_x\ d\lambda$$

d'où

(160) $$\frac{du}{d\lambda} = \frac{x^T g_x}{y^T g_y}$$

Dans le cas de plusieurs outputs et de plusieurs inputs, on a (en omettant les signes indiquant la transposition des vecteurs)

(161) $$\frac{du}{d\lambda} = \frac{x \cdot \nabla_x\ g(x, y)}{y \cdot \nabla_y\ g(x, y)}$$

Pour relier les rendements d'échelle à la fonction de distance, on différencie totalement $g(y/\delta, \lambda\tilde{x}) = \lambda x_1$ et on pose $dy = d\lambda = 0$ et $\lambda = 1$. Il s'ensuit :

(162) $$\nabla_x\ d(x, y) = - \frac{\nabla_x\ g(x, y)}{y\ \nabla_y\ g(x, y)} = \frac{1}{y \cdot \nabla_y\ g(\tilde{x}, y)} \begin{bmatrix} -1 \\ \nabla_{\tilde{x}}\ g(\tilde{x}, y) \end{bmatrix}$$

Les rendements d'échelle sont donc

(163) $$\varepsilon = - x \cdot \nabla_x\ d(x, y)$$

IV.4.2. Indice de progrès technique basé sur l'output

On définit l'indice de progrès technique basé sur l'output au temps t = 0 comme étant

$$(164) \qquad m^0(x^1, x^0, y^1, y^0) \equiv d^0(y^1, x^1)/d^0(y^0, x^0) = d^0(y^1, x^1)$$

$$(165) \qquad \equiv \min_{\delta} \left\{\delta : g^0(y^1/\delta, \tilde{x}^1) \leq x_1^1\right\}$$

Ainsi m^0 est le plus petit facteur de déflation de l'output tel que le vecteur d'output déflaté au temps 1, y^1/m^0, et le vecteur d'input, x^1, soient sur la frontière de production du temps 0. Si la productivité est plus grande au temps 1 qu'au temps 0, alors $m^0 > 1$.

Avec le temps t = 1 comme période de base, on a

$$(166) \qquad m^1(x^1, x^0, y^1, y^0) \equiv 1/d^1(x^0, y^0)$$

$$(167) \qquad \equiv 1/\min_{\delta} \left\{\delta : g^1(y^0/\delta, \tilde{x}^0) \leq x_1^0\right\}$$

$$(168) \qquad \equiv \max_{\rho} \left\{\rho : g^1(\rho\, y^0, \tilde{x}^0) \leq x_1^0\right\}$$

m^1 est le plus grand facteur d'inflation de l'output tel que le vecteur d'output augmenté au temps 0, $m^1\, y^0$, et le vecteur d'input, x^0, soient sur la frontière de production au temps t. Si la productivité est plus grande au temps 1 qu'au temps 0, alors $m^1 > 1$.

A moins de connaître $g^1(\ )$ ou $g^0(\ )$, on ne peut estimer ni $m^0(\ )$, ni $m^1(\ )$. Cependant, en associant une forme fonctionnelle et en faisant certaines hypothèses sur le comportement du producteur, il est possible de calculer la moyenne géométrique des deux indices m^1 et m^0 uniquement à partir d'observations sur les quantités et sur les prix.

L'indice du progrès technique est donc

(169) $\ell n\ m(x^1, x^0, y^1, y^0) = \frac{1}{2}\ \ell n\ m^0(x^1, x^0, y^1, y^0) + \frac{1}{2}\ \ell n\ m^1(x^1, x^0, y^1, y^0)$

D'après (164) et (165), on a

(170) $\ell n\ m(x^1, x^0, y^1, y^0) = \frac{1}{2}\left[\ell n\ \frac{d^0(y^1, x^1)}{d^0(y^0, x^0)} + \ell n\ \frac{d^1(y^1, x^1)}{d^1(y^0, x^0)}\right]$

(171) $= \frac{1}{2}\ [\ell n\ d^0(y^1, x^1) - \ell n\ d^0(y^0, x^0)] + \frac{1}{2}\ [\ell n\ d^1(y^1, x^1) - \ell n\ d^1(y^0, x^0)]$

En appliquant l'identité quadratique, on obtient :

(172) $\ell n\ m(x^1, x^0, y^1, y^0) = \frac{1}{2}\ [\nabla_{\ell ny}\ \ell n\ d^0(y^0, x^0)$

$+ \nabla_{\ell ny}\ \ell n\ d^1(y^1, x^1)]\ [\ell n\ y^1 - \ell n\ y^0] + \frac{1}{2}\ [\nabla_{\ell nx}\ \ell n\ d^0(y^0, x^0)$

$+ \nabla_{\ell nx}\ \ell n\ d^1(y^1, x^1)]\ [\ell n\ x^1 - \ell n\ x^0]$

Ce résultat s'applique si les fonctions de distance au temps 1 et au temps 0 sont des translogs et qu'elles ont des coefficients de second ordre identiques (cf. Caves, Christensen et Diewert, 1982, p. 1404).

Pour préciser l'équation (172), il faut faire certaines hypothèses sur le comportement du producteur. Il faut supposer que le producteur maximise ses revenus pour un niveau d'inputs donné, qu'il minimise ses coûts pour un niveau d'outputs donné, et qu'il maximise ses profits.

La maximisation des profits s'écrit :

$$\text{(173)} \qquad \underset{y}{\text{Max}} \left\{ P \cdot y : g(y, \tilde{x}) \leqq x_1 \right\}$$

Les conditions de premier ordre sont données par :

$$\text{(174)} \qquad P = \lambda \cdot \nabla_y \, g(y, \tilde{x})$$

En pré-multipliant (174) par y et en isolant λ, on a (toujours en omettant les signes de transposition) :

$$\text{(175)} \qquad \lambda = \frac{P \cdot y}{y \cdot \nabla_y \, g(y, \tilde{x})}$$

On incorpore (175) dans (174) et on obtient, après réarrangement :

$$\text{(176)} \qquad \frac{P}{P \cdot y} = \frac{\nabla_y \, g(y, \tilde{x})}{y \cdot \nabla_y \, g(y, \tilde{x})} = \nabla_y \, d(y, x)$$

La relation $\nabla_y \, g(y, x)/y \cdot \nabla_y \, g(y, x) = \nabla_y \, d(y, x)$ s'obtient en différenciant totalement $g(y/\delta, x) - x_1 = 0$ et en posant $dx = 0$.

L'hypothèse de minimisation des coûts s'écrit

$$(177)\quad \underset{x}{\mathrm{Min}}\left\{W \cdot x : g(y, \tilde{x}) \leqq x_1\right\} = \underset{x}{\mathrm{Min}}\left\{\tilde{W} \cdot \tilde{x} + W_1 x_1 : g(y, \tilde{x}) \leqq x_1\right\}$$

$$(178)\quad = \underset{x}{\mathrm{Min}}\left\{\tilde{W} \cdot \tilde{x} + W_1\, g(y, \tilde{x})\right\}$$

Les conditions de premier ordre sont :

$$(179)\quad \tilde{W} + W_1\, \nabla_{\tilde{x}}\, g(y, \tilde{x}) = 0$$

On multiplie les deux membres de gauche par $\tilde{x}$

$$(180)\quad \tilde{W} \cdot \tilde{x} = -\, W_1 \cdot \tilde{x} \cdot \nabla_{\tilde{x}}\, g(y, \tilde{x})$$

On ajoute $W_1\, x_1$

$$(181)\quad \tilde{W} \cdot \tilde{x} + W_1\, x_1 = W_1\, x_1 - W_1 \cdot \tilde{x} \cdot \nabla_{\tilde{x}}\, g(y, \tilde{x}) = W \cdot x$$

Donc :

$$(182)\quad \frac{\tilde{W}}{W \cdot x} = \frac{-W_1\, \nabla_{\tilde{x}}\, g(y, \tilde{x})}{W_1 x_1 - W_1 \cdot \tilde{x} \cdot \nabla_{\tilde{x}}\, g(y, \tilde{x})} = \frac{-\nabla_{\tilde{x}}\, g(y, \tilde{x})}{x_1 - \tilde{x} \cdot \nabla_{\tilde{x}}\, g(y, \tilde{x})}$$

$$(183)\quad \frac{W_1}{W \cdot x} + \frac{\tilde{W}}{W \cdot x} = \frac{W_1}{W_1 x_1 - W_1 \cdot \tilde{x} \cdot \nabla_{\tilde{x}}\, g(y, \tilde{x})} - \frac{\nabla_{\tilde{x}}\, g(y, \tilde{x})}{x_1 - \tilde{x}\, \nabla_{\tilde{x}}\, g(y, \tilde{x})}$$

$$(184)\quad \frac{1}{W \cdot x}\begin{bmatrix} W_1 \\ \tilde{W} \end{bmatrix} = \frac{1}{x_1 - \tilde{x}\, \nabla_{\tilde{x}}\, g(y, \tilde{x})}\begin{bmatrix} 1 \\ -\nabla_{\tilde{x}}\, g(y, \tilde{x}) \end{bmatrix}$$

$$(185)\quad \frac{1}{W \cdot x}\begin{bmatrix} W_1 \\ \tilde{W} \end{bmatrix} = \frac{[y \cdot \nabla_y\, g(y, \tilde{x})]\begin{bmatrix} 1 \\ -\nabla_{\tilde{x}}\, g(y, \tilde{x}) \end{bmatrix}}{[x - \tilde{x}\, \nabla_{\tilde{x}}\, g(y, \tilde{x})]\ [y \cdot \nabla_y\, g(y, \tilde{x})]}$$

En se servant des équations (160), (161) et (163), on a :

(186) $$\frac{1}{W \cdot x}\begin{bmatrix} W_1 \\ \tilde{W} \end{bmatrix} = -\varepsilon^{-1} \cdot \nabla_x \, d(y, x)$$

d'où

(187) $$\nabla_x \, d(y, x) = \frac{-\varepsilon}{W \cdot x}\begin{bmatrix} W_1 \\ \tilde{W} \end{bmatrix}$$

Les implications des deux hypothèses faites plus haut sont données par les équations (176) et (187). On les incorpore dans la mesure du progrès technique comme suit. On a :

(188) $$\nabla_{\ell ny} \, \ell n \, d^t(y^t \cdot x^t) = \nabla_y \, d^t(y^t \cdot x^t) \frac{y^t}{d^t(y^t, x^t)}$$

Comme, par définition, $d^t(y^t, x^t) = 1$, on obtient :

(189) $$\nabla_{\ell ny} \, \ell n \, d^t(y^t \cdot x^t) = \nabla_y \, d^t(y^t, x^t) \, y^t$$

(190) $$= \frac{Py}{P \cdot y} \quad \text{en vertu de (176).}$$

On a aussi :

(191) $$\nabla_{\ell nx} \, \ell n \, d^t(y^t, x^t) = \nabla_x \, d^t(y^t, x^t) \frac{x^t}{d^t(y^t, x^t)} = \nabla_x \, d^t(y^t, x^t) \cdot x^t$$

(192) $$= \frac{-Wx}{W \cdot x} \varepsilon \quad \text{en vertu de (187).}$$

On incorpore les équations (190) et (192) dans la mesure du progrès technique donné par l'équation (172)

$$(193) \qquad \ell n\ m(x^1, x^0, y^1, y^0) = \frac{1}{2} \sum_i \left[\frac{P_i^0 y_i^0}{\sum_j P_j^0 y_j^0} + \frac{P_i^1 y_i^1}{\sum_j P_j^1\ y_j^1} \right] \left[\ell n\ y_i^1 - \ell n\ y_i^0 \right]$$

$$- \frac{1}{2} \sum_n \left[\frac{W_n^0 x_n^0\ \varepsilon^0}{\sum_m W_m^0 x_m^0} + \frac{W_n^1 x_n^1\ \varepsilon^1}{\sum_m W_n^1 x_n^1} \right] \left[\ell n\ x_n^1 - \ell n\ x_n^0 \right]$$

$$(194) \qquad = \frac{1}{2} \sum_i \left[\frac{P_i^0 y_i^0}{\sum_j P_j^0 y_j^0} + \frac{P_i^1 y_i^1}{\sum_j P_j^1 y_j^1} \right] \left[\ell n\ y_i^1 - \ell n\ y_i^0 \right]$$

$$- \frac{1}{2} \sum_n \left[\frac{W_n^0 x_n^0}{\sum_m W_m^0 x_m^0} + \frac{W_n^1 x_n^1}{\sum_m W_m^1 x_m^1} \right] \left[\ell n\ x_n^1 - \ell n\ x_n^0 \right]$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_n \left[\frac{W_n^0 x_n^0}{\sum_m W_m^0 x_m^0} (1 - \varepsilon^0) + \frac{W_n^1 x_n^1}{\sum_m W_m^1 x_m^1} (1 - \varepsilon^1) \right] \left[\ell n_x^1 - \ell n_x^0 \right]$$

En mettant l'équation (194) sous forme exponentielle, on obtient l'indice du progrès technique qui est le rapport de l'indice de l'output de Törnqvist sur l'indice des inputs de Törnqvist, ce rapport étant multiplié par un facteur d'échelle qui est l'indice des inputs de Törnqvist multiplié par un coefficient égale à 1 moins les rendements d'échelle.

Rendements d'échelle

Si on a des rendements d'échelle constants, alors $\varepsilon = 1$ et l'indice du progrès technique se résume aux deux premières lignes de (194), soit le rapport de l'indice des outputs sur l'indice des inputs.

Si on a des rendements décroissants, alors $\varepsilon < 1$ et on peut estimer ε en faisant l'hypothèse de maximisation des profits qui s'écrit

$$(195) \quad \max_{y, x_1, \tilde{x}} (P \cdot y - \tilde{W} \cdot \tilde{x} - W_1 x_1 : g(\tilde{x}, y) < x_1) = \max_{y, \tilde{x}} (P \cdot y - \tilde{W} \cdot \tilde{x} - W \cdot g(y,$$

Les conditions de premier ordre nous donnent

$$(196) \qquad P = W_1 \cdot \nabla_y \, g(y, \tilde{x})$$

Avec l'hypothèse de maximisation du revenu, on avait

$$(197) \qquad P = \lambda \cdot \nabla_y \, g(y, \tilde{x})$$

Donc

$$(198) \qquad W_1 = \lambda$$

De plus, en se servant à nouveau des hypothèses de maximisation du revenu et de minimisation des coûts (Cf. (174), (181)), on a

$$(199) \qquad \frac{P \cdot y}{W \cdot x} = \frac{\lambda}{W_1} \varepsilon^{-1}$$

Donc, avec $\lambda = W$, on obtient

$$\varepsilon^{-1} = \frac{P \cdot y}{W \cdot x} \tag{200}$$

et la mesure du progrès technique peut s'obtenir à partir d'informations sur les prix et les quantités.

Si on a des rendements croissants, alors $\varepsilon > 1$ et il n'y a pas de solution à la maximisation du profit. On ne peut utiliser les coûts et revenus observés pour calculer ε. Pour obtenir l'indice du progrès technique, il faut connaître ε.

IV.4.3. Indice du progrès technique basé sur l'input

Dans le cas de l'indice du progrès technique basé sur l'input, la fonction de distance est

$$D^t(y^t, x^t) = \underset{\delta}{\text{Max}} \left\{\delta : F^t(\tilde{y}, x/\delta) > y_1\right\} \tag{201}$$

L'indice de progrès technique basé sur l'input au temps $t = 1$ est

$$M^1(x^1, x^0, y^1, y^0) = \frac{D^1(y^0, x^0)}{D^1(y^1, x^1)} = D^1(y^0, x^0) \tag{202}$$

$$= \underset{\delta}{\text{Max}} \left\{\delta : F^1(\tilde{y}^0, x^0/\delta) > y_1^0\right\} \tag{203}$$

Au temps $t = 0$, on a

$$(204)\quad M^0(x^1,\ x^0,\ y^1,\ y^0) = \frac{D^0(y^0,\ x^0)}{D^0(y^1,\ x^1)} = \frac{1}{D^0(y^1,\ x^1)}$$

$$(205)\qquad = 1/\underset{\delta}{\mathrm{Max}}\left\{\delta\ :\ F^1(\tilde{y}^1,\ x^1/\delta) > y_1^1\right\}$$

$$(206)\qquad = \underset{\rho}{\mathrm{Min}}\left\{\rho\ :\ F^0(\tilde{y}^1, \rho x^1) > y_1^1\right\}$$

Si la productivité est plus grande au temps t = 1 qu'au temps t = 0, alors M^0 et M^1 sont supérieurs à un. Pour les mêmes raisons que précédemment, on définit l'indice du progrès technique comme la moyenne géométrique de M^0 et M^1.

$$(207)\quad \ell n\ M(x^1,\ x^0,\ y^1,\ y^0) = \frac{1}{2}\,\ell n\ M^1(x^1,\ x^0,\ y^1,\ y^0) + \frac{1}{2}\,\ell n\ M^0(x^1,\ x^0,\ y^1,\ y^0)$$

Avec des développements similaires au cas de l'indice basé sur l'output, on arrive à

$$(208)\quad \ell n\ M(x^1,\ x^0,\ y^1,\ y^0) = \frac{1}{2}\sum_i \left[\frac{P_i^0 y_i^0}{\sum_j P_j^0 y_j^0} + \frac{P_i^1 y_i^1}{\sum_j P_j^1 y_j^1}\right]\left[\ell n\ y_i^1 - \ell n\ y_i^0\right]$$

$$- \frac{1}{2}\sum_n \left[\frac{W_n^0 x_n^0}{\sum_m W_m^0 x_m^0} + \frac{W_n^1 x_n^1}{\sum_m W_m^1 x_m^1}\right]\left[\ell n\ x_n^1 - \ell n\ x_n^0\right]$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_i \left[\frac{P_i^0 y_i^0}{\sum_j P_j^0 y_j^0}(\varepsilon - 1) + \frac{P_i^1 y_i^1}{\sum_j P_j^1 y_j^1}(\varepsilon - 1)\right]\left[\ell n\ y_i^1 - \ell n\ y_i^0\right]$$

Pour y arriver, on commence par définir les rendements d'échelle $\varepsilon = \partial\mu/\partial\lambda$. On obtient ε en différenciant totalement $F(\mu\tilde{y}, \lambda x) > \mu y_1$ et en posant $dy_1 = dy = dx = 0$. On obtient :

$$(209) \qquad \varepsilon = [y \cdot \nabla_y D(x, y)]^{-1}$$

Ensuite, on définit l'indice de progrès technique comme suit :

$$(210) \quad \ell n\, M(x^0, x^1, y^0, y^1) = \frac{1}{2} \ell n\, M^0(x^0, x^1, y^0, y^1) + \frac{1}{2} \ell n\, M^1(x^0, x^1, y^0, y^1)$$

En appliquant l'identité quadratique et en faisant l'hypothèse que les deux fonctions de distance ont les mêmes coefficients de second ordre, on obtient :

$$(211) \quad \ell n\, M(x^0, x^1, y^0, y^1) = \frac{1}{2} \left[\nabla_y D^1(x^1, y^1) \cdot y^1 + \nabla_y D^0(x^0, y^0) \cdot y^0\right]$$

$$\left[\ell n\, y^0 - \ell n\, y^1\right] + \frac{1}{2} \left[\nabla_x D^1(x^1, y^1) \cdot x^1 + \nabla_x D^0(x^0, y^0) \cdot x^0\right]\left[\ell n\, x^0 - \ell n\, x^1\right]$$

En faisant l'hypothèse de maximisation du revenu

$$(212) \quad \underset{y}{\text{Max}} \left\{P_1 y_1 + \tilde{P} \cdot \tilde{y} : F(\tilde{y}, x) > y_1\right\} = \underset{y}{\text{Max}} \left\{P_1\, F(\tilde{y}, x) + \tilde{P} \cdot \tilde{y}\right\}$$

on obtient :

$$(213) \qquad \nabla_y D(y, x) = \frac{-\varepsilon^{-1}}{P \cdot y} \begin{bmatrix} P_1 \\ \tilde{P} \end{bmatrix}$$

En faisant l'hypothèse de minimisation des coûts

$$(214) \qquad \underset{x}{\mathrm{Min}}\left\{W \cdot x : F(\tilde{y}, x) > y_1\right\}$$

on obtient

$$(215) \qquad \nabla_x D(y, x) = \frac{W}{W \cdot x}$$

En incorporant les équations (213) et (215) dans l'équation (211), on obtient, après quelques réarrangements :

$$(216) \quad \ell n\, M(x^0, x^1, y^0, y^1) = \frac{1}{2}\left\{\sum_i \left[\frac{P_i^0 y_i^0}{\sum_j P_j^0 y_j^0} + \frac{P_i^1 y_i^1}{\sum_j P_j^1 y_j^1}\right]\left[\ell n\, y_i^1 - \ell n\, y_i^0\right]\right\}$$

$$- \frac{1}{2}\left\{\sum_n \left[\frac{W_n^0 x_n^0}{\sum_m W_m^0 x_m^0} + \frac{W_n^1 x_n^1}{\sum_m W_m^1 x_m^1}\right]\left[\ell n\, x_n^1 - \ell n\, x_n^0\right]\right\}$$

$$- \frac{1}{2}\left\{\sum_i \left[\frac{P_i^0 y_i^0}{\sum_j P_j y_j}\left((\varepsilon^0)^{-1} - 1\right) + \frac{P_i^1 y_i^1}{\sum_j P_j y_j}\left((\varepsilon^1)^{-1} - 1\right)\right]\left[\ell n\, y_i^1 - \ell n\, y_i^0\right]\right\}$$

<u>Rendements à l'échelle</u>

Si $\varepsilon = 1$, l'indice de progrès technique est le rapport de l'indice de Törnquist sur l'indice des inputs de Törnquist.

Si $\varepsilon < 1$, l'hypothèse de maximisation du profit nous donne $\varepsilon^{-1} = P \cdot y/W \cdot x$ et l'indice du progrès technique se calcule à partir des quantités et prix observés.

Si $\varepsilon > 1$, pour calculer l'indice du progrès technique il faut connaître ε.

Pour terminer, mentionnons que les indices basés sur l'output et sur l'input, représentés par les équations (194) et (216) sont identiques sauf en ce qui a trait aux termes représentant les rendements à l'échelle. Si on a des rendements constants, ces termes deviennent nuls et les deux indices seront égaux. Sinon, ils différeront (Cf. Caves, Christensen et Diewert, 1982, p. 1408).

V - APPROCHE NON PARAMETRIQUE DE LA MESURE DU PROGRES TECHNIQUE

Dans cette section, nous développerons ce qu'il est convenu d'appeler l'approche non paramétrique de la mesure du progrès technique. Cette appellation vient du fait qu'en aucun temps nous n'aurons à associer à la fonction de production une forme fonctionnelle quelconque et encore moins à l'estimer, pas plus que nous n'aurons à formuler quelques hypothèses que ce soit sur la neutralité du progrès technique. Cette approche a été développée initialement par Farrell (1957), puis a été reprise par Afriat (1972), Diewert et Parkan (1979), et Diewert (1981), entre autres.

Cette mesure a en commun avec l'estimation économétrique du progrès technique et les théories des nombres indices que le progrès technique est perçu comme étant le déplacement de la fonction de production ou de la fonction de coût. Cette définition étant donnée, il nous reste à définir la fonction de production ou de coût.

V.1. Fonction de production

V.1.1. Cas de l'output unique (Diewert et Parkan, 1979)

On a $x^t \equiv (x_1^t, x_2^t, \ldots, x_J^t) > 0_J$, le vecteur non négatif des inputs au temps t, et $y^t > 0$, la quantité d'output que la firme produit à partir du vecteur des inputs x^t. On a de plus, une série de T observations sur les inputs et l'output, $\{x_1^j, x_2^j, \ldots, x_y^j; y^j\}$ pour $j = 1, \ldots, T$. A partir de ces T observations, on définit l'ensemble convexe de "libre disposition" des inputs comme étant (Afriat, 1972; p. 572) :

$$(217) \quad S(x^1, x^2, \ldots, x^t) \equiv \left\{x : x \geqq \sum_{j=1}^{t} \lambda^j x^j,\ \lambda^j \geqq 0;\ \sum_{j=1}^{J} \lambda^j = 1\right\}$$

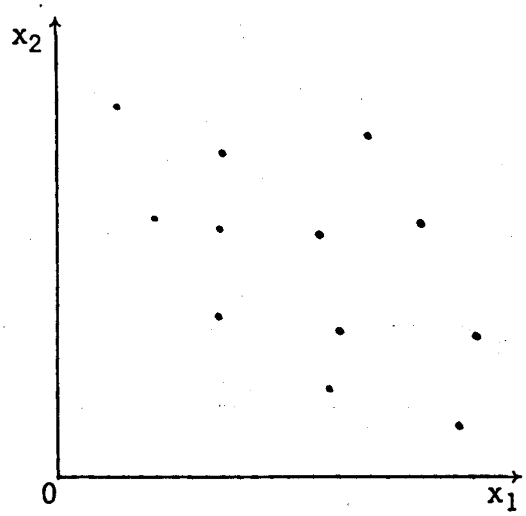
et, pour chaque x ε S(x), on définit une fonction de production continue, non décroissante et concave, f(x), (Afriat, 1972, p. 571) :

$$(218) \quad f^t(x) = \underset{\lambda^1, \ldots, \lambda^t}{\mathrm{Max}} \left\{ \sum_{j=1}^{t} \lambda^t y^j : \sum_{j=1}^{t} \lambda^j x^j \leqq x\ ;\ \sum_{j=1}^{J} \lambda^j = 1\ ;\ \lambda^1, \ldots, \lambda^J \geqq 0 \right\}$$

avec t = 1, ..., T

$$(219) \quad = \underset{\lambda^1, \ldots, \lambda^t}{\mathrm{Max}} \left\{ \sum_{j=1}^{t} \lambda^t y^j : x \in S(x) \right\}^{3} \qquad \text{avec } t = 1, \ldots, T$$

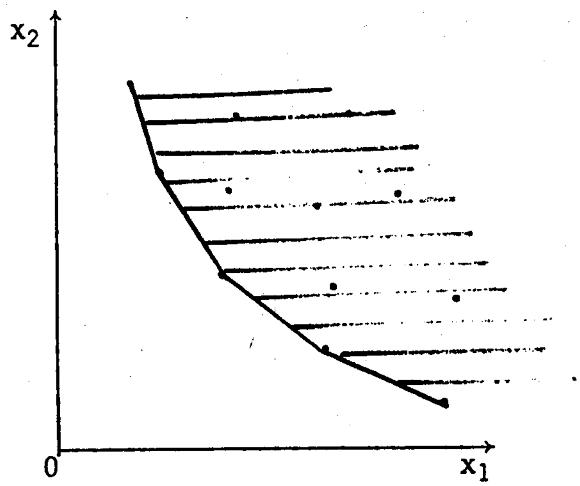
Pour chaque t et x, il y a un programme linéaire représenté par l'équation (219). On peut illustrer graphiquement l'ensemble $S(x^1, \ldots, x^J)$ dans le cas où x^j est composé de deux facteurs, c'est-à-dire $x^j = (x_1^j, x_2^j)$. Dans Dans ce cas, on peut représenter, par un graphique, les J observations :



[3]Pour une fonction de production continue, non décroissante mais pas nécessairement concave, on aurait :

$$f^t(x) = \underset{y^t}{\mathrm{Max}} \left\{ y^t : x^t \in S(x) \right\} \quad \text{(cf. Afriat, 1972, p. 570).}$$

A partir de l'équation (217), on voit que, pour un niveau de production constant $\overline{y}$, $S(x^1, \ldots, x^J)$ est formé de tous les points de l'espace hachuré du graphique suivant dont la frontière constitue une approximation intérieure de l'isoquante $y = \overline{y}$.



L'équation (217) ne fait que rassembler l'ensemble des combinaisons de facteurs qui permettent les divers niveaux de production observés. Notons que ceci est fait à partir de données existantes et que c'est l'hypothèse de convexité de $S(x^1, \ldots, x^J)$ qui permet de passer de données discrètes à un ensemble continu. Mais, par définition, $S(x^1, \ldots, x^J)$ n'est qu'une approximation intérieure du véritable ensemble de libre disposition des inputs.

S'il n'y a pas de régression technique, alors $f^t(x) \geqq f^t(x)$ pour $x \geqq 0_J$, si $t > r$. Une mesure du progrès technique sera donnée par :

(220) $$\frac{f^t(x^{t-1})}{f^{t-1}(x^{t-1})}$$

Mais cette mesure n'est valide que si les variables observées sont consistantes avec le progrès technique. Diewert et Parkan (1979) ont développé des tests non statistiques qui permettent de vérifier cette consistance.

Test 1 : Diewert et Parkan (1979)

Si $y^t = f^t(x^t)$ pour $t = 1, 2, \ldots, T$, alors les variables observées, $((x^t, y^t)$ pour $t = 1, \ldots, T)$, sont consistantes avec l'hypothèse d'efficacité et avec l'hypothèse de non-régression technique pour la famille de fonction de production, $f^t(x^t)$ pour $t = 1, \ldots, T$, où $f^t(x^t)$ est une fonction continue, non décroissante et concave sur le domaine $S(x^1, \ldots, x^t)$.

Si $y^t < f^t(x^t)$ pour quelque t que ce soit, alors les données ne sont pas consistantes.

Test 2 : Diewert et Parkan (1979)

Si on fait l'hypothèse que la fonction de production est linéairement homogène, alors il suffit de laisser tomber la contrainte $\sum_{j=1}^{t} \lambda^t = 1$ des équations (217) et (218) dans le test 1.

Les tests peuvent être interprétés comme suit. L'équation (217) forme un espace convexe pour les t premières observations des variables (x^t, y^t). Les tests vérifient si les données se situent ou non sur la frontière de l'ensemble. Puisqu'il n'y a pas de régression technique, par hypothèse, alors chacune des t premières observations doivent être sur la frontière de la période t, $S^t = \{(x^t, y^t) : y \geqq 0, x \in S(x^1, \ldots, x^t)$, $y \leqq f^t(x)\}$, et si l'hypothèse d'efficacité s'applique, alors $y^t = f^t(x^t)$.

Ces tests génèrent une séquence de fonctions de production et, quand les données passent le (ou les) test(s) avec succès, les fonctions de production correspondantes servent à mesurer les déplacements de la fonction de production dans le temps.

V.1.2. Cas d'outputs multiples (Diewert et Parkan, 1979)

La généralisation du cas d'output unique au cas d'outputs multiples est assez simple. Essentiellement, la différence se situe au niveau de la fonction de production qui s'écrit $y_1 \equiv f(-\hat{y}, x)$ au lieu de $y \equiv f(x)$, avec $\hat{y} \equiv (y_2, y_3, \ldots, y_M) \geqq 0_{M-1}$. On retient les hypothèses de la section précédente, soit que la fonction de production est continue, non décroissante et concave ou linéairement homogène.

Il faut noter que $f(-\hat{y}, x)$ peut ne pas être définie pour tout $\hat{y} \geqq 0_{M-1}$ et $x \geqq 0_N$. Si les composantes de $\hat{y}$ sont très grandes relativement à x, il peut être impossible de produire y. A l'instar de Diewert et Parkan (1979), nous restreindrons le domaine de $f(-\hat{y}, x)$ en excluant les points $(\hat{y}, x)$ non réalisables.

On modifie la notation de la fonction de production de sorte que $y_1 = f(-\hat{y}, x)$ devienne $z_0 = f(z_1, \ldots, z_K) = f(z)$.

Les équations (217) et (218) deviennent :

$$(221)\quad S(z^1, \ldots, z^J) = \left\{ z : z \geqq \sum_{j=1}^{J} \lambda^j z^j \;,\; \sum_{j=1}^{J} \lambda^j = 1 \;,\; \lambda^j \geqq 0 \text{ pour } j = 1, \ldots, J \right\}$$

$$(222)\quad f^J(z) = \left\{ \sum_{j=1}^{J} \lambda^j z^j : \sum_{j=1}^{J} \lambda^j z^j \leqq z \;,\; \sum_{j=1}^{J} \lambda^j = 1 \;,\; \lambda^j \geqq 0 \text{ pour } j = 1, \ldots, J \right\}$$

Les tests sont les mêmes sauf que l'on utilise les équations (221) et (222) au lieu des équations (217) et (218). La mesure du progrès technique sera :

$$(223)\qquad \frac{f^t(z^{t-1})}{f^{t-1}(z^{t-1})}$$

V.2. La fonction du coût (Diewert, 1981)

Dans cette section, nous appliquerons l'approche non paramétrique dans le cas où le producteur minimise ses coûts.

On dispose d'un ensemble de données (W^t, x^t, y^t, k^t) où $W^t \gg 0_J$ est le vecteur positif des prix des facteurs variables; $x^t > 0_J$ est le vecteur non négatif des facteurs variables; $y^t \geqq 0_I$ est le vecteur non négatif des outputs; $k^t \geqq 0$ est le vecteur non négatif des facteurs quasi fixes, avec $t = 1, 2, \ldots, T$. On fait l'hypothèse que l'ensemble des possibilités de production, S^t, est un ensemble fermé non vide. Si $(y^t, x^t, k^t) \in S^t$, alors $y^t \geqq 0_I$, $x^t \geqq 0_J$, $k^t \geqq 0_N$.

Pour $y \geqq 0_J$ et $k^t \geqq 0_N$, on définit l'ensemble des possibilités de production des facteurs variables comme étant

$$L^t(y, k) \equiv \left\{x : (y, x, k) \in S^t\right\} \tag{224}$$

Si $m \leqq t \Rightarrow S^m \subset S^t$, alors on dira que S^t satisfait l'hypothèse de non régression technique.

Puisque nous avons fait l'hypothèse que le producteur minimisait ses coûts, nous avons :

$$w^t \cdot x^t = \underset{x}{\mathrm{Max}} \left\{W^t \cdot x : (y^t, x, k^t) \in S^t\right\} \tag{225}$$

$$= C(W^t, y^t, k^t, t) \tag{226}$$

$$= \underset{x}{\mathrm{Min}} \left\{w^t \cdot x : x \in L^t(y^t, k^t)\right\} \tag{227}$$

Dans ce qui suit, nous énoncerons trois tests qui nous permettrons de vérifier si les données sont consistantes avec une fonction de coût variable. Les trois tests ne diffèrent que par les hypothèses que l'on formulera sur l'ensemble des possibilités de production.

Pour commencer, on définit un ensemble d'indices pour chaque période t. Dans cet ensemble, on retrouve toutes les observations

$m (m \leqq t)$ qui satisfont l'hypothèse de libre disposition. On dit qu'il y a libre disposition si :

$$(y^1, x^1, k^1) \varepsilon S^t \quad \text{avec} \quad 0_I \leqq y^2 \leqq y^1 \ ; \quad x^2 \geqq x^1 \ ; \quad \text{et} \quad k^2 \geqq k^1$$

$$\text{alors} \quad (y^2, x^2, k^2) \varepsilon S^t$$

Pour $t = 1, \ldots, T$, on définit l'ensemble d'indice

$$(228) \qquad M_t = \left\{ m : m \text{ est un entier }, \ 1 \leqq m \leqq t \ , \ k^m \leqq k^t \ \text{ et } \ y^m \geqq y^t \right\}$$

On définit une approximation intérieure de la fonction de coût variable à l'aide du programme linéaire suivant :

$$(229) \qquad C^{t*} = \underset{\lambda_m}{\mathrm{Min}} \left\{ \sum_{m \varepsilon M_t} \lambda_m W^t x^m : \lambda_m \geqq 0, \sum_{m \varepsilon M_t} \lambda_m = 1 \right\}$$

On a $C^{t*} \leqq W^t \cdot x^t$ puisque $t \varepsilon M_t$.

Test 3 : Diewert (1981), cas général

Si $C^{t*} = W^t \cdot x^t$, pour $t = 1, \ldots, T$, alors les données (W^t, x^t, y^t, k^t) sont consistantes avec le comportement de minimisation des coûts variables pour la famille de possibilités de production, S^t, qui satisfont l'hypothèse de non régression technique, où S^t est un ensemble fermé non vide qui a la propriété de libre disposition, et tel que $L^t(y^t, k^t)$ est un ensemble convexe. De plus, cas ce cas, on peut définir une approximation intérieure de $L^t(y^t, k^t)$ comme suit :

$$(230) \qquad L^t(y^t, k^t) \equiv \left\{ x : x \geqq \sum_{m \varepsilon M_t} \lambda_m x^m , \quad \lambda_m \geqq 0 , \quad \sum_{m \varepsilon M_t} \lambda_m = 1 \right\}$$

Si $C^{t*} < W^t \cdot x^t$, les données ne sont pas consistantes. Notons que ce test est valide pour des rendements croissants, c'est-à-dire que S^t n'a pas été défini comme étant convexe.

Si on fait l'hypothèse que S^t est convexe (on exclut les rendements croissants), alors on définit l'approximation intérieure de la fonction de coût variable comme suit :

$$(231) \quad C^{t**} = \underset{\lambda, \ldots, \lambda_t}{\text{Min}} \left\{ \sum_{m=1}^{t} \lambda_m W^t \cdot x^m : \sum_{m=1}^{t} \lambda_m y^m \geqq y^t , \right.$$

$$\left. \sum_{m=1}^{t} \lambda_m k^m \leqq k^t , \quad \lambda_m > 0 \ \sum_{m=1}^{t} \lambda_m = 1 \right\}$$

Notons que, dans ce cas (rendements croissants exclus), l'ensemble M^t, donné par l'équation (228), est constitué de tous les indices t. On a aussi $C^{t**} \leqq W^t \cdot x^t$.

<u>Test 4 : Diewert (1981), rendements non croissants</u>

Si $C^{t**} = W^t \cdot x^t$, pour $t = 1, \ldots, T$, alors les données sont consistantes avec le comportement de minimisation des coûts variables pour la famille des possibilités de production, S^t, qui satisfont l'hypothèse de non régression technique, où S^t est un ensemble convexe non vide qui a la propriété de libre disposition. Dans ce cas, on définit l'approximation intérieure de S^t par

$$(232) \quad S^t \equiv \left\{ (y, x, k) : x \geqq \sum_{m=1}^{t} \lambda_m x^m , \quad k \leqq \sum_{m=1}^{t} \lambda_m k^m , \right.$$

$$\left. 0_I \leqq y \leqq \sum_{m=1}^{t} \lambda_m y^m , \quad \lambda_m \geqq 0 , \quad \sum_{m=1}^{t} \lambda_m = 1 \right\}$$

Si $C^{t**} < W^t \cdot x^t$, alors les données ne sont pas consistantes.

Test 5 : Diewert (1981), rendements constants

Si on ajoute l'hypothèse de rendements constants (S^t est un cône, c'est-à-dire si $z \in S^t$ et $\lambda \geqq 0$, alors $\lambda z \in S^t$), alors le test 5 (Diewert, 1981) est exactement le test 4, sauf que l'on enlève la contrainte $\sum_{m=1}^{t} \lambda_m = 1$ de (231) et (232).

Si les tests 4 ou 5 sont positifs, alors S^t peut servir à définir le progrès technique défini comme étant le déplacement de l'ensemble des possibilités de production. Plus précisément, il s'agit du plus grand facteur $\tau_t \geqq 1$ par lequel l'output de la période précédente, y^{t-1}, peut être multiplié, étant donné que le producteur utilise la technologie de la période t, S^t, et les inputs variables et fixes de la période t-1, soit x^{t-1} et k^{t-1}. Cela est obtenu à l'aide du programme linéaire suivant :

$$(233) \quad \tilde{\tau}_t = \underset{\tau_t, \lambda_1, \ldots, \lambda_t}{\mathrm{Max}} \left\{ \tau_t : \tau_t \, y^{t-1} \leqq \sum_{m=1}^{t} \lambda_m y^m , \quad \sum_{m=1}^{t} \lambda_m x^m \leqq x^{t-1} \right.$$

$$\left. \sum_{m=1}^{t} \lambda_m k^m \leqq k^{t-1} , \quad \sum_{m=1}^{t} \lambda_m = 1 , \quad \lambda_m \geqq 0 \right\} \geqq 1$$

VI - COMPARAISON DES DIVERSES METHODES

VI.1. Méthode économétrique

Cette approche a l'avantage de la simplicité. Mais c'est sûrement son seul avantage et la question est de savoir si cet unique avantage compense tous les inconvénients que comporte l'estimation économétrique et les hypothèses que sous-entend cette approche. L'application d'une méthode économétrique comporte tous les problèmes que l'on peut imaginer à propos d'une estimation : problèmes de spécification, erreurs sur les variables, autocorrélation, hétéroscédasticité, multicollinéarité, etc. De plus, il faut faire l'hypothèse que le progrès technique, tel que définit par cette méthode, évolue à un taux constant. Tous ces inconvénients expliquent, sans doute, pourquoi très peu d'économistes s'intéressant au progrès technique se servent de cette approche.

Bien que le problème d'erreurs sur les variables se retrouve aussi dans les autres méthodes, il n'y est pas aggravé par des problèmes d'estimation. C'est cependant surtout la possibilité d'un taux de progrès technique variable d'une année à l'autre qui les rend préférables.

VI.2. Méthode Divisia

C'est l'approche Divisia qui a connu l'évolution théorique la plus intense au cours des dernières années. Elle a permis notamment de tenir compte des situations non concurrentielles, des situations de déséquilibre à court terme et de rendements d'échelle non constants. On peut reprocher à cette méthode de n'être strictement valide que lorsque les données sont fournies sous forme continue. Puisque ce n'est pas le cas et qu'elles ne sont disponibles que sous une forme discrète, on doit se contenter d'une approximation de l'indice de Divisia. Selon la méthode utilisée, il peut y avoir plus d'une estimation de l'indice. Cependant, cette critique nous semble d'autant plus mineure que l'approximation de Törnqvist a reçu de la théorie des nombres indices une justification sous des conditions très générales et pour divers types de fonction (production, coût, distance). Enfin, cette approche n'a pas l'inconvénient d'imposer une forme fonctionnelle à la technologie à la différence de l'estimation économétrique ou de la théorie des nombres indices. Rappelons enfin que l'indice de Divisia du progrès technique peut varier dans le temps, à l'inverse du taux estimé par des méthodes économétriques.

VI.3. Théorie des nombres indices

Avec cette méthode, on obtient une mesure du progrès technique sans avoir à effectuer d'estimation tout en tenant compte d'un nombre élevé de variables, deux avantages importants par rapport à l'estimation économétrique. De plus, cette méthode s'accommode d'un progrès technique variable.

Par rapport à la méthode Divisia, elle a l'avantage de fournir un indice exact à partir de données discrètes. Cependant l'exactitude exige le postulat d'une forme fonctionnelle spécifique pour la technologie, encore qu'il s'agisse d'une forme flexible.

VI.4. Méthode non paramétrique

La méthode non paramétrique est prometteuse en ce sens qu'elle s'accommode de données discrètes et qu'elle n'impose aucune restriction sur la technologie. Elle comporte cependant une approximation en ce sens que les combinaisons d'inputs et d'outputs admissibles y sont définies à partir de combinaisons linéaires, souvent convexes, des informations disponibles et forment donc un sous-ensemble des vraies possibilités de production. L'approximation est d'autant plus précise que le nombre d'observations est élevé et, à cet égard, la méthode non paramétrique rejoint un peu la méthode économétrique en ce qu'elle dépend du nombre d'observations pour ses possibilités d'application empirique. L'autre inconvénient majeur possible de la méthode est son incapacité, en son état actuel d'élaboration, de s'accommoder des situations de régression technologique. Bien que ces inconvénients ne soient pas négligeables, nous pensons que le peu d'applications empiriques qu'elle a suscité jusqu'à maintenant s'explique pour beaucoup par le fait qu'il s'agit d'un développement théorique récent, techniquement assez difficile, et encore peu connu.

BIBLIOGRAPHIE

Afriat, S.N. (1972), "Efficiency Estimation of Production Functions", Int. Econ. Review, 13, pp. 568-598.

Berndt, E.R. and M.A. Fuss (1981), "Productivity Measurement Using Capital Asset Valuation to Adjust for Variations in Utilizations", mimeo, University of Toronto, Toronto, Canada.

Berndt, E.R. and M.S. Khaled (1979), "Parametric Productivity Measurement and Choice Among Flexible Functional Forms", J.P.E., 87 (December), pp. 1220-1245.

Berndt, E.R. and D.O. Wood (1982), "The Specification and Measurement of Technical Change in U.S. Manufacturing", Advances in the Economics of Energy and Resources, Vol. 4, pp. 199-221.

Binswanger, H.P. (1974), "The Measurement of Technical Change Biases with Many Factors of Production", A.E.R., 64 (December), pp. 964-976.

Caves, D.W. and L.R. Christensen (1980), "Multilateral Comparisons of Output, Input and Productivity Using Superlative Index Numbers", S.S.R.I., Paper no 8008 (July), University of Wisconsin, Madison, Wisconsin.

Caves, D.W., L.R. Christensen and W.E. Diewert (1982), "The Economic Theory of Index Numbers and the Measurement of Input, Output and Productivity", Econometrica, 50 (6), (November), pp. 1393-1414.

Caves, D.W., L.R. Christensen and J.A. Swanson (1981), "Productivity Growth, Scale Economies and Capacity Utilization in U.S. Rail Roads, 1955-1974", A.E.R., 71 (5), (December), pp. 994-1002.

Christensen, L.R. and D.W. Jorgenson (1969), "The Measurement of U.S. Real Capital Input, 1929-1967", Review Income and Wealth, Series 15, 14 (December), No. 4, pp. 293-320.

Christensen, L.R. and D.W. Jorgenson (1970), "U.S. Real Product and Real Factor Input, 1929-1967", Review of Income and Wealth, Series 16 (March), pp. 19-50.

Denny, M., M. Fuss and L. Waverman (1981), "The Measurement and Interpretation of Total Factor Productivity in Regulated Industries, with an Application to Canadian Telecommunication", in J.G. Cowing and R.E. Stevenson, Productivity Measurement in Regulated Industries, Academic Press, New York, 1981.

Diamond, P., D. McFadden and M. Rodriguez (1978), "Measurement of the Elasticity of Factor Substitution and Bias Technical Change", in M. Fuss and D. McFadden Eds., Production Economics : A Dual Approach to Theory and Application, Vol. 2, Amsterdam, North Holland.

Diewert, W.E. (1974), "Application of Duality Theory", 106-171, in Frontiers of Quantitative Economics, Vol. II, M.D. Intriligator and D.A. Kendrick (Eds.), Amsterdam : North-Holland.

Diewert, W.E. (1976), "Exact and Superlative Index Numbers", Journal of Econometrics, 4 (2), (May), pp. 115-146.

Diewert, W.E. (1980), "Capital and the Theory of Productivity Measurement", A.E.R., Papers and Proceedings, 70 (2), (May), pp. 260-267.

Diewert, W.E. (1981), "The Theory of Total Factor Productivity Measurement in Regulated Industries", in T.G. Cowing and R.E. Stevenson, Productivity Measurement in Regulated Industries, Academic Press, New York.

Diewert, W.E. and C. Parkan (1979), "Linear Programming Test of Regularity Conditions for Production Functions", Discussion Paper 7901, Department of Economics, University of British Columbia, Vancouver (January).

Divisia, F. (1926), "L'indice monétaire et la théorie de la monnaie", Paris, Société anonyme du Recueil Sirey.

Farrell, M.J. (1957), "The Measurement of Productive Efficiency", Journal of Royal Statistical Society, Serie A, 120, pp. 253-281.

Gollop, F.M. and D.W. Jorgenson (1980), "United States Productivity Growth by Industry, 1947-1973", in J.W. Kendrick and B.N. Vaccara, Eds., New Developments in Productivity Measurement and Analysis, Studies in Income and Wealth, N.B.E.R., University of Chicago Press, Chicago, Illinois.

Jorgenson, D.W. and Z. Griliches (1967), "The Explanation of Productivity Change", R.E. Stud., 34 (July), pp. 249-283.

Luke Chan, M.W. and D.C. Mountain (1981), "Economics of Scale and the Törnqvist Discrete Measure of Productivity Growth : A Study of the Canadian Agricultural Sector", QSEP Research Report No. 12, McMaster University, Hamilton, Canada.

Nadiri, M.J. and M.A. Shenkerman (1971), "The Structure of Production, Technological Change, and the Rate of Growth of Total Factor Productivity in the U.S. Bell System", in T.G. Cowing and R.E. Stevenson, Eds., Productivity Measurement in Regulated Industries, Academic Press, New York, 1981.

Nelson, R.R. (1981), "Research on Productivity Growth and Productivity Differences Dead Ends and New Departures", Journal of Economic Literature, 19 (September), pp. 1029-1064.

Otha, M. (1974), "A Note on the Duality Between Production and Cost Functions : Rate of Return to Scale and Rate of Technical Progress", Economic Stud. Quarterly, 25 (December), pp. 63-65.

Sato, R. (1970), "The Estimation of Biased Technical Progress and the Production Function", I.E.R., (11), pp. 179-208.

Sato, R. (1980), "The Impact of Technical Progress on the Holotheticity of Production Function", R.E. Stud., (47), pp. 767-776.

Sato, R. and P. Calem (1983), "Lie Group Methods and the Theory of Estimating Total Productivity", in A. Dogramaci Ed., Developments in Econometrics Analysis of Productivity, Boston : Kluwer, Nijhoff Publication.

Solow, R.M. (1957), "Technical Change and the Aggregate Production Function", R.E. Stat., 39 (August), pp. 312-320.

Star, S. and R.E. Hall (1976), "An Approximate Divisia Index of Total Factor Productivity", Econometrica, 44 (2), (March), pp. 257-264.

Tobin, J. and W.C. Brainard (1976), "Asset Markets and the Cost of Capital", Yale University, Cowles Foundation for Research in Economics, Discussion Paper No. 427, March, 26 1976. Also published in Bela Balassa and Richard Nelson, Eds., Economic Progress, Private Values and Public Policy, Amsterdam, North Holland, 1977.

Törnqvist, L. (1936), "The Bank of Finland's Consumption Price Index", Bank of Finland Monthly Bulletin, No. 10, pp. 1-8.

ANNEXE

Progrès technique non neutre et théorème d'impossibilité

Dans le chapitre III portant sur l'indice de Divisia du progrès technique, on a considéré le cas du progrès technique neutre à la Hicks. Dans cette annexe, nous considérerons le cas du progrès non neutre et nous montrerons, en nous servant de l'article de Sato et Calem (1983), comment contourner le théorème d'impossibilité de Diamond, McFadden et Rodriguez (1978).

Lorsque le progrès technique n'est pas neutre, il est intéressant de le représenter comme "augmentant" la contribution de chaque facteur d'une proportion pouvant varier d'un facteur à l'autre. S'il y a deux facteurs, on représente alors la fonction de production par l'équation suivante, dont on cherche à connaître les termes $A(t)$ et $B(t)$:

$$(A.1) \qquad Y(t) = F[A(t)\,K(t)\ ,\ \ B(t)\,L(t)]$$

où Y est la production;

K et L sont les quantités de facteurs;

A et B sont les indices de progrès technique affectant K et L.

On fait l'hypothèse que la fonction de production est linéairement homogène et que les marchés des biens et des facteurs sont concurrentiels. En différenciant (A.1) par rapport au temps, on obtient, après quelques transformations, la relation suivante (Sato, 1970) :

(A.2) $$\frac{\dot{Y}}{Y} = \alpha \frac{\dot{K}}{K} + \beta \frac{\dot{L}}{L} + \left[\alpha \frac{\dot{A}}{A} + \beta \frac{\dot{B}}{B}\right]$$

où $\alpha = \frac{\partial F}{\partial K} \cdot \frac{K}{Y}$ et $\beta = \frac{\partial F}{\partial L} \cdot \frac{L}{Y}$ avec $\alpha + \beta = 1$.

(On remarque que si A(t) = B(t), alors on obtient la mesure de Solow donnée par l'équation (26)).

On ne peut se servir de l'équation (A.2) pour estimer $\dot{A}/A$ et $\dot{B}/B$ à moins de définir une autre équation indépendante. A cette fin, on définit, à l'instar de Sato (1970), l'élasticité de substitution entre AK et BL comme suit :

(A.3) $$\sigma = \frac{d(AK/BL)/(AK/BL)}{d\left(\frac{\partial F/\partial BL}{\partial F/\partial AK}\right) \Big/ \left(\frac{\partial F/\partial BL}{\partial F/\partial AK}\right)}$$

On a $W = \frac{\partial F}{\partial BL}$ et $r = \frac{\partial F}{\partial AK}$

où $W = B \frac{\partial F}{\partial L}$ et $r = A \frac{\partial F}{\partial K}$

donc

(A.4) $$\sigma = \frac{d(AK/BL)}{(AK/BL)} \cdot \frac{1}{d(AW/Br)/(AW/Br)} = \frac{\dot{A}/A + \dot{K}/K - \dot{B}/B - \dot{L}/L}{\dot{W}/W + \dot{A}/A - \dot{r}/r - \dot{B}/B}$$

D'autre part, puisque la fonction de production est linéairement homogène, on a d'après le théorème d'Euler :

(A.5) $$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{W}L + W\dot{L} + \dot{r}K + r\dot{k}}{Y}$$

En égalant (A.2) et (A.5), on obtient :

$$\alpha \frac{\dot{A}}{A} + \beta \frac{\dot{B}}{B} - \frac{\dot{W}L}{Y} - \frac{\dot{r}K}{Y} = 0 \tag{A.6}$$

Après quelques substitutions et en se servant de (A.4), on obtient :

$$\frac{\dot{W}}{W} = \frac{\dot{B}}{B} - \frac{\alpha}{\sigma}\left[\frac{\dot{B}}{B} - \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{L}}{L} - \frac{\dot{K}}{K}\right] \tag{A.7}$$

$$\frac{\dot{r}}{r} = \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\beta}{\sigma}\left[\frac{\dot{B}}{B} - \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{L}}{L} - \frac{\dot{K}}{K}\right] \tag{A.8}$$

(A.2), (A.7) et (A.8) forment un système de trois équations avec trois inconnues, $\dot{A}/A$, $\dot{B}/B$ et σ. On doit isoler $\dot{A}/A$ et $\dot{B}/B$.

On pose $x = L/K$, $y = Y/K$ et $z = Y/L$

donc $\frac{\dot{x}}{x} = \frac{\dot{L}}{L} - \frac{\dot{K}}{K}$, $\frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{Y}}{Y} - \frac{\dot{K}}{K}$, et $\frac{\dot{z}}{z} = \frac{\dot{Y}}{Y} - \frac{\dot{L}}{L}$

Les équations (A.7) et (A.8) deviennent, après quelques transformations et en se servant de (A.2) :

$$\frac{\dot{B}}{B} = \frac{\sigma\, \dot{W}/W - \dot{z}/z}{\sigma - 1} \tag{A.9}$$

$$\frac{\dot{A}}{A} = \frac{\sigma\, \dot{r}/r - \dot{y}/y}{\sigma - 1} \tag{A.10}$$

Les équations (A.2), (A.9) et (A.10) forment un système de trois équations et trois inconnues. Cependant, les trois équations ne sont pas indépendantes comme le montre le déterminant du Jacobien :

$$(A.11)\qquad J = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \sigma-1 & 0 & \dot{A}/A - \dot{r}/r \\ 0 & \sigma-1 & \dot{B}/B - \dot{W}/W \end{vmatrix}$$

$$(A.12)\qquad = (1-\sigma)\left[\alpha \frac{\dot{A}}{A} + \beta \frac{\dot{B}}{B} - \alpha \frac{\dot{r}}{r} - \beta \frac{\dot{W}}{W}\right]$$

En se servant de (A.7) et de (A.8), on a :

$$(A.13)\qquad J = (1 - \sigma)\ [0]$$

$$(A.14)\qquad J = 0$$

Puisque les trois équations ne sont pas indépendantes, on ne peut calculer $\dot{A}/A$ et $\dot{B}/B$ à moins de connaître, a priori, σ. Cela constitue l' "Impossibility Theorem" de Diamond, McFadden et Rodriguez (1978). Remarquons que, même si l'on connaît a priori σ, le problème n'est pas nécessairement résolu, car notre système d'équations se résumant maintenant à (A.9) et (A.10), on ne peut trouver $\dot{A}/A$ et $\dot{B}/B$ si $\sigma = 1$, c'est-à-dire si on a une technologie Cobb-Douglas.

Dans le cas d'inputs multiples, la fonction de production devient :

$$(A.15)\qquad Y = F[A_1(t)\ X_1(t),\ A_2(t)\ X_2(t),\ \ldots,\ A_n(t)\ X_n(t)]$$

L'équation (A.2) devient :

$$\text{(A.16)} \qquad \frac{\dot{Y}}{Y} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left[\frac{\dot{A}_i}{A_i} + \frac{\dot{X}_i}{X_i} \right]$$

L'élasticité de substitution devient :

$$\text{(A.17)} \qquad \sigma_{ij} = \frac{\partial[(A_i\ X_i)/(A_j\ X_j)]}{\partial(F_j/F_i)} \cdot \frac{(F_j/F_i)}{[A_i\ X_i/A_j\ X_j]}$$

$$= \frac{\dot{A}_i/A_i - \dot{A}_j/A_j + \dot{X}_i/X_i - \dot{X}_j/X_j}{\dot{A}_i/A_i - \dot{A}_j/A_j + \dot{W}_j/W_j - \dot{W}_i/W_i}$$

Le taux de croissance de rémunération des facteurs devient :

$$\text{(A.18)} \qquad \frac{\dot{W}_i}{W_i} = \frac{\dot{A}_i}{A_i} - \sum_{j \neq i} \frac{\alpha_j}{\sigma_{ij}} \left[\frac{\dot{A}_i}{A_i} - \frac{\dot{A}_j}{A_j} + \frac{\dot{X}_i}{X_i} - \frac{\dot{X}_j}{X_j} \right] \qquad i = 1, \ldots, n-1$$

(A.16) et (A.18) constituent un système de n équations indépendantes contenant $(n^2 + n)/2$ variables, soit n $\dot{A}_i/A_i$ et $(n^2 - n)/2$ σ_{ij}. Pour estimer les $\dot{A}_i/A_i$, il faut donc connaître les σ_{ij}.

Sato (1970) présente une méthode pour estimer $\dot{A}_i/A_i$. Il calcule, en premier, les valeurs moyennes de $\dot{A}_i/A_i$. Ensuite, il se sert de ces moyennes pour estimer des fonctions de production CES et CEDD (pour Constant Elasticity of Derived Demand). Ces fonctions de production fournissent des mesures des σ_{ij} qui permettent à leur tour d'estimer les $\dot{A}_i/A_i$.

Par ailleurs, sous certaines conditions (Sato, 1980; Sato et Calem, 1983), la théorie des groupes de Lie permet de définir la mesure du progrès technique sans égard à la forme de la fonction de production. Cela permet de contourner le théorème d'impossibilité.