/639

ISSN 0709-9231

CAHIER 8041

SECOND RANG ET DESEQUILIBRE

par

Camille Bronsard

et

Edouard Wagneur*/**

*Les auteurs remercient les participants au "Workshops on the Economics and Econometrics of Desequilibrium" de février 1980 à l'Université de Toulouse ainsi que ceux du Colloque d'économie politique de l'Université Laval d'octobre 1980 pour de chaleureuses discussions qu'ils ont eues avec eux.

Cette recherche a bénéficié de l'aide financière du programme FCAC et du programme d'échanges France-Québec ainsi que du Centre de Recherche de mathématiques appliquées (CRMA).

**Département de sciences économiques et CRMA respectivement.

Ce cahier est publié conjointement par le Département de science économique et le Centre de Recherche en Développement Economique de l'Université de Montréal.

RESUME

Second rang et déséquilibre : on étend la méthode du second rang au cas du déséquilibre.

ABSTRACT

Second best and disequilibrium : in this paper, the second best methodology is extended to disequilibrium.

L'objet de cet article est d'étendre la méthode du second rang au cas du déséquilibre et d'établir les relations de dualité entre certaines variétés d'optima avec rationnements et les variétés équivalentes d'optima sans rationnement. C'est là une étape nécessaire pour étudier la nature des équilibres avec rigidité de prix et avec divers schémas de rationnement, la nature de l'équilibre temporaire, celle de la taxation optimale en présence de déséquilibre et, plus généralement, l'optimation de l'équilibre temporaire avec rationnements quantitatifs.

Pour y arriver, nous commençons d'abord par rappeler les principaux résultats néo-classiques. Cette section débouche naturellement sur la théorie des optima de second rang. Après avoir rappelé le modèle de Boiteux, nous en donnons deux variantes. Ces trois modèles serviront, dans la section 3, à comprendre en profondeur la nature d'un optimum de second rang avec rationnements.

A cette section 1 sur l'instrumentation néo-classique fait naturellement pendant une section 2 sur l'instrumentation "néo-keynésienne". Nous donnons alors les principaux résultats de la théorie du consommateur avec rationnement et de la théorie du producteur sous R.Q. (rationnements quantitatifs). Ceci est intéressant en soi puisqu'on y trouve les restrictions a priori qui peuvent être utilisées dans l'économétrie du déséquilibre. Mais c'est aussi le point de départ pour une nouvelle élaboration théorique, celle des optima de second rang avec déséquilibre. Ceci est fait à la fin de la section 2. A ce stade on dispose d'une méthode pour étudier la taxation optimale en présence de déséquilibre, la rigidité des prix, les schémas de rationnements et ainsi de suite. Cette méthode est ainsi faite que le déséquilibre n'est pas une contrainte a priori : il ne devient "opératoire" qu'en présence de contraintes excluant le premier rang.

Cela dit, un problème s'impose, celui de l'identification du déséquilibre. Même si, face à une contrainte donnée, le déséquilibre peut être optimal, cela ne permet nullement de se prononcer sur la "valeur normative" de cet état économique. Encore faut-il connaître une économie (néo-classique) fictive qui en donne l'équivalent. C'est l'objet de la section 3 où nous établissons l'équivalence entre une extension du modèle de Boiteux (extension faite dans la section 1) et un modèle de déséquilibre optimal.

En conclusion, nous nous interrogeons sur la nature de la politique économique et soulignons la relativité des notions usuelles : le plein emploi n'est pas toujours désirable, la lutte contre l'inflation peut conduire à la catastrophe - si ces objectifs sont poursuivis sans une identification (ou une optimation préalable) du déséquilibre.

SECTION 1 : L'instrumentation néo-classique

1. Le consommateur

Les préférences $\precsim$ du consommateur sont représentables par une fonction d'utilité u, définie sur une partie ouverte de R^n (l'espace des biens et services dont x est un point), différentiellement strictement croissante et différentiellement strictement quasi-concave. Symboliquement, on pourra écrire

$$(1.1) \qquad (\precsim, \ \overset{0}{X} \subset R^n) \Rightarrow u \in C^2 \ , \ u_x > 0 \ , \ \zeta' U \zeta < 0 \ \text{ pour}$$
$$\zeta \neq 0 \ , \ \zeta' u_x = 0 \ .$$

Les composantes positives de x sont des inputs pour le consommateur. Les composantes négatives des outputs (par cette convention les diverses prestations de travail font partie de la théorie sans que celle-ci perde sa symétrie puisqu'un travail étant mesuré négativement, son utilité marginale peut être positive).

Soit $p \in R^n_+$ un vecteur de prix et m un niveau de revenu ou de richesse tel que $\overset{0}{X} \cap \{x/p'x \leq m\} \neq \emptyset$. Alors, l'équilibre du consommateur est unique. Il se caractérise par les égalités.

$$(1.2) \qquad u_x = \lambda p \ , \quad \lambda \in R_+ \quad ; \quad p'x = m \ .$$

On en tire la fonction de demande néo-classique ξ, c'est-à-dire les relations

$$(1.3) \qquad x = \xi(p, m) \quad ; \quad p'\xi(p, m) \equiv m$$

où le symbole $\equiv$ veut dire que l'égalité se vérifie sur tout le domaine de définition de ξ.

La différentielle de (1.3) peut se noter

$$(1.4) \qquad dx = X\, dp + x_m\, dm \quad , \quad p'dx + x'dp \equiv dm$$

et implique

$$(1.5) \qquad dx = [X + x_m x']\, dp + x_m\, p'dx$$

que l'on peut noter

$$(1.6) \qquad dx = K\, dp + k\, p'dx \ .$$

Les coefficients de cette différentielle satisfont :

(1.7) $K \equiv K'$ (symétrie ou intégrabilité)

(1.8) $Kp \equiv 0$ (homogénéité)

(1.9) $\zeta' K \zeta < 0$ pour tout $\zeta \neq \theta p$, $\theta \in R$ (négativité)

(1.10) $p'k \equiv 1$.

Ces propriétés définissent une <u>structure locale de Slutsky</u>. Inversement, toute fonction de demande ainsi caractérisée est issue d'un consommateur $(u, \overset{0}{X})$.

La propriété (1.8) implique l'homogénéité de degré zéro (par rapport à p et m) des fonctions de demande. A priori, une fonction de demande ne possède donc pas d'inverse. Toutefois, on peut y ajouter une relation supplémentaire définissant l'unité de compte de l'économie et alors le système ainsi complété est un difféomorphisme. On peut même montrer qu'il s'agit d'un difféomorphisme global. Soit

$$(1.11) \qquad x = \xi(p, m) \ , \quad s = w'p$$

le système complété. Le système inverse peut s'écrire

$$(1.12) \qquad p = \phi(x, s) \qquad m = x'\phi(x, s)$$

Enfin, on peut construire la différentielle

$$(1.13) \qquad dp = H\, dx + \gamma\, p'dx + \frac{w'dp}{w'p}\, p$$

dont les coefficients satisfont aux propriétés :

$$(1.14) \qquad H \equiv H' \qquad \text{(symétrie ou intégrabilité)}$$

$$(1.15) \qquad Hw \equiv 0 \qquad \text{(additivité)}$$

$$(1.16) \qquad \zeta'H\zeta < 0 \ \text{ pour tout } \zeta \neq \theta w \ , \ \ \theta \in R \qquad \text{(négativité)}$$

$$(1.17) \qquad w'\gamma \equiv 0 \qquad \text{(additivité).}$$

La dualité manifeste entre (1.7) - (1.10) et (1.14) - (1.17) provient de ce que la matrice de Slutsky K et la matrice d'Antonelli H sont inverses g-réflexives l'une de l'autre :

$$(1.18) \qquad KHK \equiv K \ , \qquad \Longleftrightarrow KH \equiv I - wp'/s \ ,$$

$$(1.19) \qquad HKH \equiv H \ , \qquad \Longleftrightarrow HK = I - pw'/s \ .$$

Ceci complète l'essentiel du formulaire néo-classique pour ce qui a trait au consommateur.

2. Le producteur

En procédant d'une manière analogue, on a :

(2.1) $y = \eta(q) \qquad (y \in R^n \ , \ \ q \in R^n_+)$

une fonction d'offre et

(2.2) $dy = Y \, dq$

sa différentielle. On caractérise par

(2.3) $Y \equiv Y'$

(2.4) $Yq \equiv 0$

(2.5) $\zeta' Y \zeta > 0 \quad$ pour $\quad \zeta \neq \theta q \ , \ \ \theta \in R$.

Les caractérisations primales sont de la forme (1.14) - (1.16).

3. Le producteur public

Soit

(3.1) $z = \kappa(r) \qquad (z \in R^n \ , \ \ r \in R^n_+)$

une fonction d'offre et

(3.2) $dz = Z \, dr$

sa différentielle. On a :

$$(3.3) \qquad Z \equiv Z'$$

$$(3.4) \qquad Zr \equiv 0$$

$$(3.5) \qquad \text{rang } Z = n - 1$$

et, par (3.5), les rendements croissants à l'échelle sont admissibles (en ce sens que l'on peut avoir $\zeta' Z \zeta < 0$). Les caractérisations primales sont de la forme (1.14) - (1.15).

4. L'équilibre

Soit une économie définie par un vecteur de ressources initiales ω, par ℓ consommateurs repérés par un indice i, ℓ' producteurs privés repérés par un indice j, ℓ'' producteurs publics repérés par un indice h. Les actions de ces agents sont compatibles si

$$(4.1) \qquad \sum_i \xi^i(p^i, m^i) = \sum_j \eta^j (q^j) + \sum_h \kappa^h(r^h) + \omega \quad .$$

On a alors un <u>équilibre économique</u>. C'est un équilibre <u>par rapport à un système de prix</u>, s'il existe un système de prix p tel que

$$(4.2) \qquad p = p^i = q^j = r^h \quad \text{pour tout } i, j, h \ .$$

C'est un <u>équilibre walrassien</u> si, de plus,

$$(4.3) \qquad m^i \equiv \theta^i \, [p'y + p'z] + p'\omega^i, \; i = 1, 2, \ldots, \ell \quad \text{avec} \quad \sum_i \theta^i \equiv 1.$$

Par (1.3) et en convenant d'écrire sans indice la somme sur l'indice supérieur ($x = \sum_i x^i$), on a alors la loi de Walras

$$(4.4) \qquad p'x \equiv p'y + p'z + p'\omega$$

On voit ici comment la définition de cette loi par (4.4) peut être arbitraire : en (4.3) nous avons admis que l'Etat était propriété privée!

5. Optima de premier et de second rang

Considérons une économie astreinte (i) à réaliser la compatibilité des actions de ses agents au moyen d'un équilibre comportant au plus deux systèmes de prix, l'un pour le secteur privé et l'autre pour le secteur public; (ii) à réaliser un surplus ou déficit budgétaire public de grandeur β w'p (β étant un multiple de l'unité de compte). Demandons-nous quels sont les rapports qui prévalent entre p et r si l'économie réalise un optimum de Pareto. Pour cela, considérons le problème

$$(5.1) \quad \text{Min } L = u^1(\xi^1(p, m^1)) - \sum_{i=1}^{\ell} \alpha^i[\overline{u}^i - u^i(\xi^i(p, m^i))]$$

$$- \pi'[\sum_i \xi^i(p, m^i) - \sum_j \eta^i(p) - \sum_h \kappa^h(r) - \omega]$$

$$- \psi\,[p' \sum_h \kappa^h(r) - \beta\, w'p]$$

où α^i, π et ψ sont des multiplicateurs de Lagrange.

Pour le rendre un peu plus élégant, on peut définir la fonction d'utilité indirecte

$$(5.2) \qquad v^i(p, m^i) \equiv u^i(\xi^i(p, m^i))$$

dont les dérivées sont

$$(5.3) \qquad [v_p^i]' \equiv [u_{x^i}^i]' X^i , \quad [v_{m^i}^i] \equiv [u_{x^i}^i]' x_{m^i}^i \equiv [u_{x^i}^i]' k^i ,$$

entraînant les identités de Roy :

$$(5.4) \qquad v_p^i + v_{m^i}^i x^i \equiv 0$$

par (1.8).

On peut ensuite se débarasser symboliquement des constantes. On peut enfin remplacer $\sum_i \xi^i(p, m^i)$ par sa valeur x et procéder de même pour y et z. On a alors :

$$(5.5) \qquad \text{Min } L = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha^i v^i(p, m^i) - \pi'[x - y - z] - \psi [p'z - \beta w'p] .$$

En dérivant par rapport à p, m^i et r, on a

$$(5.6) \qquad \sum_i \alpha^i [v_p^i]' - \pi'[X - Y] - \psi[z' - \beta w'] = 0$$

$$(5.7) \qquad \alpha^i v_{m^i}^i - \pi' k^i = 0$$

$$(5.8) \qquad [\pi' - \psi p'] Z = 0$$

Postmultiplions (5.7) par $[x^i]'$, sommons sur i, faisons la somme avec (5.6) en tenant compte de (5.4) et, enfin, transposons. On a :

$$(5.9) \qquad - [K - Y] \pi = \psi[z - \beta w] .$$

Considérons (5.8). L'espace nul de Z est engendré par θr, $\theta \in R$. On a :

(5.10)
$$\pi = \psi p + \theta^* r \quad .$$

Substituant en (5.9), on a :

(5.10)
$$- [K - Y]\, r = \psi/\theta^* \, [z - \beta\, w]$$

par (1.8) et (2.4) où q = p. Pour la même raison, on peut écrire le résultat de Boiteux :

(5.11)
$$[K - Y]\, [p - r] = \psi^* \, [z - \beta\, w]$$

si l'on convient d'exprimer p et r dans la même unité de compte ($w'p = w'r$) et en posant $\psi^* = \psi/\theta^*$. Alors, si $\psi^* = 0$, $p = r$. On a un optimum de Pareto de premier rang et cet optimum est un équilibre par rapport à un système de prix.

D'une manière générale, on aura un optimum de second rang. Pour l'exprimer sous une forme simple, remarquons que [K - Y] se comporte comme K. Soit G son inverse g-réflexive. On a $G\, [K - Y] = I - p\, w'/s$ et, en conséquence, $G\, [K - Y][p - r] = p - r$ (puisque $w'p = w'r$ par convention. Si on prémultiplie (5.11) par G, on a donc

(5.12)
$$r = p - \psi^* \, G\, z$$

(puisque $G\, w \equiv 0$). Cette relation exprime que le vecteur r des productivités marginales et des coûts marginaux physiques du secteur public doit être égal à la recette marginale de compromis qu'il peut retirer de sa clientèle. Autrement dit, pour réaliser la contrainte $p'z = \alpha\, w'p$ le secteur public utilise son pouvoir de monopole mais "juste ce qu'il faut" (et cela est donné par ψ^*) pour réaliser cette contrainte.

Variante I :

Supposons maintenant que le secteur public puisse discriminer par les prix entre les ménages et les entreprises privées. La contrainte financière peut alors s'écrire

(5.13) $$p'x - q'y = \beta_1\, w'p - \beta_2\, w'q \quad .$$

En procédant comme précédemment, on aura :

(5.14) $$K\,[p - r] = \psi^*[x - \beta_1\, w]$$

(5.15) $$Y\,[q - r\,] = \psi^*[y - \beta_2\, w]$$

(5.16) $$r = p - \psi^*\, K^-\, x = q - \psi^*\, Y^-\, y$$

où K^- et Y^- sont les inverses g-réflexibes de K et Y. Par (5.16) les recettes marginales de compromis sont égales entre elles, comme on pouvait s'y attendre. La frontière de Pareto de la variante I domine celle de Boiteux puisque (5.11) résulte d'un cas très particulier de (5.14) et (5.15). En voici une interprétation intuitive : utilisant un pouvoir de monopole plus efficace pour réaliser la contrainte financière, la perte sociale due à cette dernière est mieux étalée, moins grande.

<u>Variante II</u> :

Le problème

$$(5.17) \quad \text{Min } L = \sum_i \alpha^i \, v^i(p_1, p_2^i, m^i)$$

$$- \pi' \, [\sum_i \xi^i(p_1, p_2^i, m^i) - \sum_j \eta^j(q_1^j, q_2) - \sum_h \kappa^h(r)]$$

$$- \psi \, [p_1' z_1 + q_2' z_2 - \beta_1 w_1' p_1 - \beta_2 w_2' q_2]$$

permet pour sa part de discriminer entre les consommateurs pour le deuxième groupe et entre les producteurs privés pour le premier groupe. A l'optimum, on aura :

$$(5.18) \qquad - \pi' K_1 = \psi[z_1 - \beta_1 w_1]'$$

$$(5.19) \qquad \pi' K_2^i = 0 \ , \quad i = 1, 2, \ldots, \ell$$

$$\pi' Y_1^j = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, \ell'$$

$$(5.21) \qquad \pi' Y_2 = \psi[z_2 - \beta \; w_2]'$$

$$(5.22) \qquad [\pi' - \psi[p_1', q_2]] \; Z = 0 \; .$$

Dans ces relations $K_1 = \begin{bmatrix} K_{11} \\ K_{21} \end{bmatrix}$ et cette convention s'étend à K_2^i, Y_1^j et Y_2.

Nous analyserons les implications de ces optima dans la section 3. Notons qu'ici encore la frontière de Pareto domine celle de Boiteux En effet, supposons le cas particulier où

$p_2^i = q_2 = p_2$ pour tout i, $q_1^i = p_1$ pour tout j. Alors (5.18) - (5.22) conduit à (5.11).

SECTION 2 : L'instrumentation "néo-keynésienne"

1. Le consommateur

La définition du consommateur, les hypothèses sur l'utilité restent néo-classiques. Simplement, le contexte institutionnel est changé. Le consommateur a non seulement une contrainte budgétaire mais aussi des contraintes de rationnement

$$(1.1) \qquad \underline{x} \leq x \leq \overline{x}$$

Partitionnons x en $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ et soit $x_2 = \overline{x}_2$ les composantes de x pour lesquelles (1.1) est opératoire à l'optimum du consommateur. La borne $\overline{x}_2$ est alors un paramètre institutionnel au même titre que les prix l'étaient précédemment. C'est un "signal". Simplement, il est en quantité plutôt qu'en prix. En conséquence, la fonction de demande néo-keynésienne est de la forme

$$(1.2) \qquad x_1 = \overline{\xi}_1(p, m, x_2) \quad , \quad x_2 = \overline{x}_2 \quad .$$

Elle sera continûment dérivable par rapport à tous ses arguments si les rations sont stables dans le voisinage de $\overline{x}_2$, c'est-à-dire si $dx_2 = d\overline{x}_2$, Quittes à reprendre cette discussion, nous le supposerons pour l'instant. Considérons la différentielle de (1.2). On peut écrire :

$$(1.3) \qquad dx_1 = X_{11}\ dp_1 + X_{12}\ dp_2 + \frac{\partial x_1}{\partial x_2} dx_2 + \overline{k}_1\ dm$$

$$= [X_{11} + \overline{k}_1 [x_1]']dp_1 + [X_{12} + \overline{k}_1 [x_2]']\ dp_2 + \frac{\partial x_1}{\partial x_2} dx_2 + \overline{k}_1\ p'dx$$

$$= S_{11}\ dp_1 + S_{12}\ dp_2 + R_{12}\ dx_2 + \overline{k}_1\ p'dx$$

$$= S_1\ dp + R_{12}\ dx_2 + \overline{k}_1\ p'dx \quad .$$

On prouve, par les techniques usuelles de statique comparative, que

$$(1.4) \qquad S_{11} \equiv S'_{11}$$

$$(1.5) \qquad S_{11} p_1 \equiv 0$$

$$(1.6) \qquad \zeta'_1 S_{11} \zeta_1 < 0 \quad \text{pour} \quad \zeta_1 \neq \theta p_1 \ , \ \theta \in R$$

$$(1.7) \qquad p'_1 \overline{k}_1 \equiv 1$$

$$(1.8) \qquad S_{12} \equiv 0$$

$$(1.9) \qquad p'_1 R_{12} \equiv -p'_2$$

La matrice R_{12} est une matrice d'effets de débordement (des marchés "2" sur les marchés "1"). Les matrices S_{11} et S_{12} représentent des effets de substitution contraints. Le vecteur $\overline{k}_1$ est un vecteur d'effet-revenu contraint. Par (1.4) - (1.7) on a donc une structure locale de Slutsky pour les biens non rationnés.

La méthode classique qui permet de caractériser (1.3) par (1.4) - (1.9) a toutefois le défaut de ne pas établir de liens avec l'équilibre néo-classique fictif qui est "derrière" (1.2). Or, celui-ci existe puisque, par construction, la fonction de demande néo-classique est un difféomorphisme global. On peut toujours trouver un système de prix $\tilde{p}$ et un revenu $\tilde{m}$ tels que

$$(1.10) \qquad \xi_1(\tilde{p}, \tilde{m}) \equiv \overline{\xi}_1(p, m, \overline{x}_2), \ \xi_2(\tilde{p}, \tilde{m}) \equiv \overline{x}_2 \ .$$

Dès lors, il existe une matrice de Slutsky fictive $\tilde{K}$ et vecteur d'effet-revenu fictif $\tilde{k}$ défini en $(\tilde{p}, \tilde{m})$. On démontre que

$$(1.11) \qquad S_{11} \equiv \tilde{K}_{11} - \tilde{K}_{12}\tilde{K}_{22}^{-1}\tilde{K}_{21}$$

$$(1.12) \qquad R_{12} \equiv \tilde{K}_{12}\tilde{K}_{22}^{-1} + \overline{k}_1[\tilde{p}_2 - p_2]' \quad ,$$

$$(1.13) \qquad \overline{k}_1 \equiv \tilde{k}_1 - \tilde{K}_{12}\tilde{K}_{22}^{-1}\tilde{k}_2 \quad .$$

Ces trois relations seront essentielles pour étudier la nature des équilibres avec rationnements. L'écart $[\tilde{p}_2 - p_2]$ est proportionnel aux multiplicateurs de Lagrange affectant (1.1), c'est-à-dire $x_2 = \overline{x}_2$.

Considérons encore (1.3) pour vérifier la nature de l'effet de substitution et de l'effet de débordement. Les conditions de premier ordre sont

$$(1.14) \qquad u_{x_1} = \lambda p_1 \qquad\qquad u_{x_2} = \lambda p_2 + \nu_2 = \lambda[p_2 + \nu_2^*] \quad .$$

Donc, en substituant les fonctions de demande en (1.14), on est conduit à

(1.15) $$du^* \equiv \lambda[p'dx + \nu_2^* \, dx_2] \;.$$

En posant $\frac{u_x}{\lambda} \equiv \tilde{p}$, on a

(1.16) $$\nu_2^* \equiv \tilde{p}_2 - p_2$$

c'est-à-dire un péage fictif. La relation (1.15) peut s'écrire

(1.17) $$\frac{du^*}{\lambda} \equiv p'dx + [\tilde{p}_2 - p_2]' \, dx_2 \quad .$$

Il suffit donc d'ajouter et de retrancher $\overline{k}_1[\tilde{p}_2 - p_2]' \, dx_2$ à (1.3) pour se ramener à la forme

(1.18) $$dx_1 = S_{11} \, dp_1 + [R_{12} - \overline{k}_1[\tilde{p}_2 - p_2]'] \, dx_2 + \overline{k}_1 \frac{du}{\lambda} \quad .$$

où l'on tient compte de $S_{12} \equiv 0$.

On a

(1.19) $$\left(\frac{\partial x_1}{\partial p_1}\right)_{du^*=0,\ dx_2=0} = S_{11}$$

et on peut définir la matrice

(1.20) $$\tilde{R}_{12} \equiv R_{12} - \overline{k}_1[\tilde{p}_2 - p_2] = \left(\frac{\partial x_1}{\partial x_2}\right)_{du^*=0,\ dp_1=0}$$

des effets de débordement compensés. Par (1.12),

(1.21) $$\tilde{R}_{12} \equiv \tilde{K}_{12}\tilde{K}_{22}^{-1} \quad .$$

On a

(1.22) $$p_1'\tilde{R}_{12} \equiv -\tilde{p}_2' \quad .$$

Enfin, on peut encore écrire (1.3) sous la forme

$$(1.23) \qquad dx_1 = S_{11}dp_1 + [R_{12} + \bar{k}_1p_1'] \; dx_2 + \bar{k}_1p_1' \; dx_1 \quad .$$

Posons

$$(1.24) \qquad \bar{R}_{12} = R_{12} + \bar{k}_1p_2' \quad .$$

On a

$$(1.25) \qquad \bar{R}_{12} = \left[\frac{\partial x_1}{\partial x_2}\right]_{p_1'dx_1=0,\; dp_1=0}$$

$$(1.26) \qquad p_1'\bar{R}_{12} \equiv 0$$

$$(1.27) \qquad \bar{R}_{12} \equiv \tilde{R}_{12} + \bar{k}_1\tilde{p}_2 \quad ,$$

cette dernière relation découlant de (1.20). En (1.20), le débordement est compensé au premier ordre en terme de niveau de vie. En (1.25), le débordement est compensé en terme de dépenses réelles sur les biens x_1.

2. Le producteur privé

Soit $y_1 = \bar{y}_1$ les rations en bien "1" du producteur. On a la fonction d'offre

$$(2.1) \qquad y_2 = \bar{\eta}_2 \; (q, \, y_1) \quad , \qquad y_1 = \bar{y}_1$$

et sa différentielle

$$(2.2) \qquad dy_2 = T_{22} \; dq_2 + \tilde{V}_{21} \; dy_1$$

(2.3) $\quad T_{22} \equiv T'_{22}$

(2.4) $\quad T_{22}q_2 \equiv 0$

(2.5) $\quad \zeta'_2 \, T_{22}\zeta_2 > 0 \quad \text{pour} \quad \zeta_2 \neq \theta q_2 \;, \quad \theta \in R$

(2.6) $\quad q'_2\tilde{V}_{21} \equiv -\tilde{q}'_1$

(2.7) $\quad T_{22} \equiv [\tilde{Y}_{22} - \tilde{Y}_{21}\tilde{Y}_{11}^{-1}\tilde{Y}_{12}]$

(2.8) $\quad \tilde{V}_{21} \equiv \tilde{Y}_{21}\tilde{Y}_{11}^{-1}$

3. Le producteur public

On admettra, ici, qu'un producteur public ne saurait être rationné. Cette hypothèse, simple convention, facilitera le passage d'un optimum avec rationnement à son équivalent fictif. On conserve donc (1.3.1) à (1.3.6).

4. L'équilibre

Les actions des agents sont compatibles si

(4.1) $\quad \sum_i \overline{\xi}_1^i \, (p^i, m^i, x_2^i) = y_1 + z_1 + \omega_1$

(4.3) $\quad x_2 = \sum_j \overline{\eta}_2^j \, (q^j, y_1^j) + z_2 + \omega_2$

On constate aussitôt qu'un équilibre est possible même en cas de non-flexibilité des prix - il suffit d'une action compensatrice sur les x_2^i et les y_1^j. On a alors un équilibre avec rationnements. C'est un

K-équilibre si on a un seul système de prix, si on laisse les marchés déterminer y_1 et x_2 et si les producteurs sont du côté long des marchés pour les biens "1", du côté court pour les biens "2". On peut toujours se ramener à ce schéma par une spécification convenable de l'économie mais il serait maladroit de le faire a priori - tout comme il serait maladroit de supposer a priori un seul système de prix en (1.4.1).

5. Optima de premier et de second rang

Considérons une économie astreinte (i) à réaliser la compatibilité des actions de ses agents au moyen d'un équilibre comportant a) au plus deux systèmes de prix, l'un pour le secteur public et l'autre pour le secteur privé, b) un schéma de rationnement des agents privés; (ii) à réaliser un surplus ou déficit budgétaire public de grandeur $\beta w'p$.

Comment se caractérise l'optimum d'une pareille économie et quels sont ses liens avec l'optimum de Boiteux?

Pour étudier cette question, considérons d'abord la fonction d'utilité indirecte

(5.1) $$v(p, m, x_2) \equiv u(\overline{\xi}_1(p, m, x_2), x_2)$$

On a

(5.2) $$v'_p \equiv u'_{x_1} \, \partial x_1/\partial p$$

(5.3) $$v'_m \equiv u'_{x_1} \, \overline{k}_1$$

(5.4) $$v'_{x_2} \equiv u'_{x_1} R_{12} + u'_{x_2}$$

L'opération (5.2) + (5.3) x' conduit à

$$(5.5) \qquad v_p + v_m x \equiv 0$$

à cause des propriétés (1.4), (1.5) et (1.8). On conserve donc les identités de Roy.

Considérons maintenant l'opération (5.4) - (5.3) $[\tilde{p}_2 - p_2]'$. On a

$$v'_{x_2} - v_m [\tilde{p}_2 - p_2]' \equiv u'_{x_1} [R_{12} - \bar{k}_1 [\tilde{p}_2 - p_2]'] + u'_{x_2}$$
$$\equiv u'_{x_1} \tilde{R}_{12} + u'_{x_2} \equiv \lambda [\tilde{p}'_1 \tilde{R}_{12} + \tilde{p}_2] \quad .$$

Par (1.22), on déduit aussitôt

$$(5.6) \qquad v_{x_2} - v_m [\tilde{p}_2 - p_2] \equiv 0 \ ,$$

une identité "duale" par rapport à (5.5).

Ces résultats en main, nous pouvons généraliser (1.5.5) au cas du rationnement. On a

$$(5.7) \quad \text{Min } L = \sum_i \alpha^i \, v^i(p, m^i, x_2^i) - \pi'_1 [\sum_i \bar{\xi}^i_1(p, m^i, x_2^i) - y_1 - \sum_h \kappa_1^h(r)]$$
$$- \pi_2 [x_2 - \sum_j \eta_2^j(p, y_1^j) - \sum_h \kappa_2^h(r)$$
$$- \psi [p'z - \beta_1 w'_1 p_1 - \beta_2 w'_2 p_2]$$

Considérons, à l'optimum, les dérivées par rapport à p, m^i, x_2^i, y_1^j, r. On a

$$(5.8) \quad \sum_i \alpha^i [v_p^i]' - \pi'_1 \, \partial\bar{\xi}_1/\partial p + \pi'[T_{21}, \ T_{22}] - \psi[z'_1 - \beta_1 w'_1 \, , \ \ z'_2 - \beta_2 w'_2]$$

(5.9) $\alpha^i \; v^i_{m^i} - \pi_1' \, \overline{k}_1^i = 0 \; ,$ $\qquad i = 1, 2, \ldots, \ell$

(5.10) $\alpha^i \begin{bmatrix} v^i_{x^i_2} \end{bmatrix}' - \pi_1' \, R^i_{12} - \pi_2' = 0 \; ,$ $\qquad i = 1, 2, \ldots, \ell$

(5.11) $\pi_1' + \pi_2' \, \tilde{v}^j_{21} = 0 \; ,$ $\qquad j = 1, 2, \ldots, \ell'$

(5.12) $[\pi' - \psi p'] \; Z = 0 \; .$

L'opération (5.8) + $\sum_i \alpha^i \; v^i_{m^i}[x^i]'$ conduit à

(5.13) $-\pi_1'[S_{11}, \; S_{12}] + \pi_2'[T_{21}, \; T_{22}] = \psi[z_1' - \beta_1 w_1' \; , \;\; z_2' - \beta_2 w_2']$

où S_{12} et T_{21} sont identiquement nulles. On a donc, en transposant

(5.14) $$\begin{bmatrix} S_{11} & 0 \\ 0 & -T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\pi_1 \\ -\pi_2 \end{bmatrix} = \psi \begin{bmatrix} z_1 - \beta_1 w_1 \\ z_2 - \beta_1 w_1 \end{bmatrix} \; .$$

Comme précédemment, (5.12) impliquent que

(5.15) $$\pi = \psi p + \theta^* r$$

de sorte que (5.14) se ramène à

(5.16) $S_{11}[p_1 - r_1] = \psi^*[z_1 - \beta_1 w_1] \; , \quad T_{22}[p_2 - r_2] = -\psi^*[z_2 - \beta_2 w_2]$

qui est l'analogue de (1.5.11) pour le cas de rationnement envisagé ici. Avant d'interpréter le passage de (1.5.11) à (2.5.16) considérons (5.10) et (5.11). En fait, l'opération (5.10) - (5.9) $[\tilde{p}^i_2 - p_2]'$, nous permet d'écrire par (5.6), que

(5.17) $\pi_1' \tilde{R}^i_{12} + \pi_2' = 0$, $i = 1, 2, \ldots, \ell$

une forme analogue à (5.11). Par (5.15) et (1.22)

(5.18) $r_1' \tilde{R}^i_{12} + r_2' = \psi^*[\tilde{p}^i_2 - p_2]'$, $i = 1, 2, \ldots, \ell$

De même, (5.11) et (2.7) conduisent à

(5.19) $r_1' + r_2' \tilde{V}^j_{21} = \psi^*[q^j_1 - p_1]'$ $j = 1, 2, \ldots, \ell'$

Considérons maintenant (5.16), (5.18) et (5.19) <u>dans l'hypothèse de premier rang</u>, c'est-à-dire dans le cas où $\psi = 0$. Alors, par (5.16) et pour une normalisation convenable, $p = r$. Par (5.18), on a d'abord $p_1' \tilde{R}^i_{12} + p_2' = 0$. Ceci implique $\tilde{p}^i_2 = p_2$ et, dès lors les contraintes de rationnement ne sont pas opératoires dans le secteur de la consommation (du fait que $p = q$). De même, par (5.19), dans le secteur de la production privée.

<u>Dans le cas du second rang</u>, on a deux politiques de tarification en (5.16), l'une envers le secteur de la consommation, l'autre envers le secteur de la production privée. Chacune d'elle peut s'interpréter comme en (1.5.12) : l'Etat utilise un pouvoir de monopole de degré ψ^* par rapport à chacune de ses deux clientèles. (En (1.5.12), c'était par rapport à la clientèle agrégée). Les schémas de rationnement se caractérisent par (5.18) et (5.19). Posons $r_1' \tilde{R}^i_{12} = -[\tilde{r}^i_2]$, $r_2' \tilde{V}^j_{21} = -[\tilde{r}^j_1]'$. On aura $\tilde{r}^i_2 - r_2 = [-\psi^*] [\tilde{p}^i_2 - p_2]$, $\tilde{r}^j_1 - r_1 = -\psi^* [\tilde{q}^j_1 - p_1]$: pour chaque agent privé, l'Etat s'applique à lui-même un péage fictif proportionnel à celui supporté par l'agent.

Autrement dit, le coût marginal social de relâcher une contrainte de rationnement n'est pas r_2 ou r_1 mais doit être corrigé pour chaque agent privé.

A ce stade, les sections (1) et (2) sont complètes en ce sens que cette section-ci est bien correspondante à la sous-section (5) de la section (1). On peut cependant aller beaucoup plus loin et montrer que les problèmes (1.5.17) et (2.5.7) sont équivalents, autrement dit que chacune des caractérisations des optima traduit l'autre dans un contexte institutionnel différent. Ceci mérite une section à part n'appartenant en propre ni au problème (2.5.7), ni au problème (1.5.17). On peut cependant considérer que la section suivante prolonge notre étude de (2.5.16), (2.5.18) et (2.5.19).

SECTION 3 : Derrière le "déséquilibre"

On a vu, en (2.1.8) qu'il n'y avait pas d'effet de substitution "par les prix" entre biens non-rationnés et bien rationnés. Il y a là un "trou" par lequel la politique économique peut se glisser. C'est le sens de (2.5.16). Nous avons, pour les biens non-rationnés, une situation analogue à (1.5.14) et (1.5.15) : le secteur public peut discriminer entre ses deux clientèles (en dépit de l'existence d'un seul système de prix p pour cette clientèle). Dès lors (2.5.16) correspond bien à ce qu'on pouvait espérer d'une extension de la méthode du second rang au cas du déséquilibre.

Les relations (2.5.18) et (2.5.19) n'ont pas a priori cette facilité de liaison. Pour les étudier plus en profondeur, considérons-les simultanément avec (2.5.16) et (1.5.18) - (1.5.22).

La relation (1.5.19) conduit à

$$\pi_1' \, K_{12}^i \, [K_{22}^i]^{-1} + \pi_2' = 0 \,, \quad i = 1, 2, \ldots, \ell \tag{3.1}$$

Pour chaque consommateur i, on peut substituer (3.1) en (1.5.18). On obtient

$$-\pi_1'[K_{11} - \sum_i K_{12}^i \, [K_{22}^i]^{-1} \, K_{21}^i] = \psi[z_1 - \beta_1 w_1]' \,. \tag{3.2}$$

De la même manière (1.5.20) et (1.5.21) conduisent à

$$\pi_1' + \pi_2' \, Y_{21}^j \, [Y_{11}^j]^{-1} = 0 \tag{3.3}$$

$$\pi_2' \, [Y_{22} - \sum_j Y_{21}^j \, [Y_{11}^j]^{-1} \, Y_{12}^j = \psi[z_2 - \beta_2 w_2]' \tag{3.4}$$

Dans toutes ces relations, on a, par (5.23) :

(3.5) $\qquad \pi_1 = \theta^* r_1 + \psi p_1, \qquad \pi_2 = \theta^* r_2 + \psi p_2$.

Considérons maintenant l'optimum caractérisé par (3.1) - (3.5) comme celui d'une économie fictive. On veut l'implanter au moyen d'un équilibre avec rationnements. Pour être équivalent à l'optimum fictif, l'optimum avec rationnement devra toujours satisfaire (3.1) - (3.5). Par (1.1.11), (1.1.21), (1.2.8) et (1.2.9), ceci veut dire que l'on devra avoir

(3.6) $\qquad \pi_1' \tilde{R}_{12}^i + \pi_2' = 0 , \qquad i = 1, 2, \ldots, \ell$

(3.7) $\qquad -\pi_1' S_{11} = \psi[z_1 - \beta_1 w_1]'$

(3.8) $\qquad \pi_1' + \pi_2' \tilde{V}_{21}^j = 0 , \qquad j = 1, 2, \ldots, \ell'$

(3.9) $\qquad \pi_2' T_{22} = \psi[z_2 - \beta_2 w_2]'$.

Ces relations ne sont rien d'autre que (2.5.17), (2.5.14) et (2.5.11). Inversement, ces dernières relations se ramènent à (3.6) - (3.9).

Ainsi, l'optimum sous rationnement de la section précédente a pour "valeur normative" l'optimum de la Variante II de la section 1. Les schémas de rationnement caractérisés par (3.6) et (3.8) se substituent à une politique de prix personnalisés.

CONCLUSION

D'un côté, les modèles présentés ici sont extrêmement rudimentaires. En particulier, les schémas de rationnements décrits par (3.3.6) et (3.3.8) donnent toute latitude quant aux rationnements. Ceci est "naïf" mais n'avait pour autre but que d'illustrer une méthode.

De l'autre côté, leur enseignement reste extrêmement puissant. La raison en est qu'ils donnent une technique pour identifier le déséquilibre. Considérons, en effet, (2.4.1) et (2.4.2). A priori, un équilibre avec R.Q. peut être n'importe quoi, y compris un "first best" (les rationnements et les prix rigides peuvent être tels que les TMS = TMT). A priori, on ne peut donc se prononcer sur aucune politique économique. Le chômage qui est involontaire à un "faux" système de prix peut devenir volontaire pour un "vrai" système de prix. Mais ajoutons les spécifications (2.5.16), (2.5.18) et (2.5.19) (où l'on peut rester observable en transformant $\tilde{R}^i_{12}$ en R^i_{12}), c'est-à-dire étudions le déséquilibre, optimisons-le. Alors, par la section 3, on peut le situer sur le plan normatif et, en conséquence, disposer d'un référentiel pour la politique économique.

Même cette procédure pourra sembler naïve puisqu'on n'y considère que ce que l'on pourrait appeler la variété des optima de Boiteux. Mais il s'agissait d'un exemple et cette variété peut s'étendre. Il n'est pas question en effet de comparer point à point. Il faut se donner une instrumentation permettant d'étudier les variétés les plus significatives et les plus vastes.

Notes historiques

[1]Les exposés classiques sur l'instrumentation néo-classique sont de Hicks (1939), Samuelson (1947), Malinvaud (1971) et Boiteux (1956, 1971). La dérivation de la classe des matrices d'Antonelli est de Salvas-Bronsard et al. (1977). Elle apparaît comme "concept primitif" dans Bronsard et Leblanc (1980). L'interprétation du modèle de Boiteux comme un équilibre de monopole de compromis et la variante I sont de Bronsard (1971).

[2]Le principe de la théorie du consommateur avec R.Q. est une extension faite par Drèze (1977) de la théorie de Tobin-Houthakker (1950-1951). Diverses extensions et utilisations économétriques ont été faites par Bronsard et Salvas-Bronsard (1979), Neary et Roberts (1980), Bronsard et Salvas-Bronsard (1980).

Le principe des équilibres avec R.Q. est de Drèze (1975). On trouvera une présentation d'ensemble et une bibliographie remarquables sur l'équilibre temporaire dans Grandmont (1980).

[3]L'optimation du déséquilibre sous R.Q. nous semble une méthode nouvelle mais elle a pu être suggérée à l'un des auteurs par Drèze, lors d'une conversation au CORE en 1977. La dualité entre ce déséquilibre optimum et la variante II de la section 1 est à notre connaissance nouvelle.

Bibliographie

BRONSARD, C. (1971), Théorie du second best et dualité microéconomique, Vander, Louvain.

BRONSARD, C., SALVAS-BRONSARD, L. (1979), "Sur l'estimation d'un système complet de demande sous rationnements quantitatifs", Actualité Economique, pp. 286-302.

BRONSARD, C., SALVAS-BRONSARD, L. (1980), "Sur les différentes formes structurelles engendrées par la théorie de la demande et leur utilisation en économétrie : systèmes direct, réciproque, mixte et système avec rationnement quantitatif", Annales de l'INSEE, à venir.

BRONSARD, C., LEBLANC, D. (1980), "Théorie génerale du consommateur et applications", in Pseudo-inverses et applications, Cahier no 3, Groupe de mathématiques économiques.

BOITEUX, M. (1956), "Sur la gestion des monopoles publics astreints à l'équilibre budgétaire", Econométrica, 24, 1, pp. 22-40. Traduction 1971 : "On the Management of Public Monopolics Subject to Budgetary Constraints", Journal of Economic Theory, pp. 219-240.

DREZE, J.H. (1975), "Existence of Exchange Equilibrium under Price Rigidities", International Economic Review, 2, pp. 301-320.

DREZE, J.H. (1977), "Demand Theory under Quantity Rationing : A Note", miméo, C.O.R.E.

GRANDMONT, J.M. (1980), "Temporary Equilibrium" in Handbood of Mathematical Economics, Arrow and Intriligator ed., North-Holland, Amsterdam.

HICKS, J. (1939), Value and Capital, Oxford : Clarendon Press. Traduction française, Valeur et capital, Paris : Dunod, 1968.

NEARY, J.P., ROBERTS, K.W.S. (1980), "The Theory of Household Behaviour under Rationing", European Economic Review, 13, pp. 1-18.

SALVAS-BRONSARD, L, LEBLANC, D., BRONSARD, C. (1977), "Estimating Demand Equation, the Converse Approach", European Economic Review, 9, pp. 301-321.

SAMUELSON, P.A. (1947), Foundations of Economics Analysis, Harvard University Press, Cambridge, Mass.

TOBIN, J., HOUTHAKKER, H.S. (1950-51), "The Effects of Rationing of Demand Elasticities", Review of Economic Studies, pp. 140-153.