Université de Montréal

Analyse économique de la vie politique à partir de la théorie des jeux coopératifs : Application aux parlements canadiens et québécois

par

HASSANE Garba

Département des Sciences Économiques
Faculté des Arts et des Sciences

Rapport de recherche présenté à la Faculté des Arts et des Sciences
en vue de l'obtention du grade de Maitrise
en Sciences Économiques

Décembre 2009

Résumé

Ce rapport fait état de l'analyse du pouvoir des différents partis prenante dans un processus de décision collective. Nous expliquons comment mesurer le pouvoir de décision dans un comité dans lequel les différents membres n'ont pas le même droit de vote en prenant l'exemple de la chambre des communes du parlement canadien. Nous utilisons ensuite deux méthodes (la méthode parlementaire et la méthode du cœur) pour prédire quelle coalition formera un gouvernement stable à l'issu des processus de négociations. Avec la méthode parlementaire, c'est le parti qui détient le maximum de pouvoir qui doit former un gouvernement avec ou sans les autres partis politiques. La partition qui formera le gouvernement doit satisfaire un certains nombre de critères. Contrairement à la méthode parlementaire, avec la méthode du cœur le parti qui détient le maximum de pouvoir peut se retrouver du coté de l'opposition s'il appartient à une partition dominée. Dans cette dernière partie ou nous supposons que les joueurs forment des unions a priori, c'est la valeur d'Owen qui a été utilisé pour calculer leur pouvoir de vote.

Mots clés : Indices de pouvoir, Formation de coalition, Théorie des jeux coopératifs, méthode parlementaire, méthode du cœur, jeux simples, jeux de vote pondérés

Table des matières

Introduction générale ……………………………………………1

Section I Revue de la littérature ……………………………...4

Section II Mesure du pouvoir de décision …………………...7

I. Notations et définitions préliminaires……………………7

II. Notion de poids de vote et indice pouvoir………………...10

1. Poids de vote et pouvoir de vote ……………………………...10
2. Etudes des indices de pouvoir ………………………………...14

2.1. L'indice de Shapley-Shubik ………………………………15

2.2. L'indice de Banzhaf normalisé ……………………………21

2.3. L'indice non normalisé de Banzhaf ………………………23

III. Etude des propriétés des indices de pouvoir ………….25

1. Axiomatisations des indices de pouvoir ………………………25
2. Analyse probabiliste de l'indice de Shapley-Shubik et de l'indice de Banzhaf ……………………………………………..29

IV. Indice de pouvoir et satisfaction des votants ………….33

Section III Application des indices de pouvoir au parlement canadien 41

Section IV Deux méthodes pour former un gouvernement après une élection 46

I. La méthode parlementaire 46

II. La méthode du cœur 47

III. Application au parlement canadien et au parlement québécois 48

Conclusion 56

Bibliographie 58

Remerciements

Ma reconnaissance et mes remerciements vont à tous ceux qui ont contribué de prés ou de loin à l'élaboration de ce travail et plus particulièrement a Monsieur Yves SPRUMONT pour l'aide précieuse qu'il m'a apportée dans la réalisation de ce travail et pour sa disponibilité permanente.

Je tiens également à exprimer ma gratitude envers tous les Professeurs et le personnel de la Faculté des Sciences Économiques de l'Université de Montréal pour leur encadrement continu et envers la Faculté des Études Supérieures.

Enfin, je dédie ce travail à toute ma famille, mon père Hassane et ma mère Fatouma pour leurs soutiens paternels et plus particulièrement à feu Hamidou HIMA et sa famille pour leurs soutiens moraux et financiers qui m'ont permis de faire des études universitaires.

À mes amis et à tous ceux et celles dont l'oubli du nom n'est pas celui du cœur.

Introduction générale

De nos jours, la plupart des institutions prennent leurs décisions par le biais d'un vote. Cependant, il existe des institutions et des comités dans lesquels les différents membres n'ont pas le même poids de vote. C'est le cas par exemple du conseil de sécurité de l'ONU, du conseil des ministres de l'union européenne, du FMI, des assemblées générales d'actionnaires, des assemblées parlementaires… Ceci est dû par exemple au fait que les populations des différents Etats sont de tailles différentes pour le cas de l'Union Européenne. Dans ce dernier, les poids de vote des états sont attribués en fonction de la population de chaque état membre. Dans ce genre de comité, on peut croire que le pouvoir de vote de chaque état est proportionnel à son nombre de voix. Mais cela n'est pas toujours le cas comme on pourra le constater dans la suite de notre étude. Prenons par exemple une assemblée de trois actionnaires qui ont les poids suivants : les deux grands actionnaires détiennent chacun 49% du capital et le petit actionnaire détient 2% du capital. On voit clairement que si les décisions sont prises à la majorité simples des votes (51%), alors le petit actionnaire a autant de pouvoir a priori que les deux grands actionnaires. Ce qui ne sera plus le cas avec une majorité de plus de 51% (et moins de 99%) auquel cas il perd tout pouvoir de décision.

Comment mesurer donc le pouvoir de vote d'un membre d'un comité dans des institutions comme celles citées ci-haut?

La question de la mesure du pouvoir de vote concerne toute instance de décision collective au sein de laquelle des décisions sont prises sur la base d'un vote. En effet, pour calculer le pouvoir de vote des différents membres d'une telle instance, on peut faire appel à la théorie des jeux coopératifs et plus particulièrement à ses développements relatifs aux indices de pouvoir qui concernent une classe de jeux particulière : les jeux simples que nous appellerons jeux de vote pondéré. Le vote et la politique sont des domaines intéressants pour l'application de la théorie des jeux coopératifs. Ce lien entre poids de vote et pouvoir de vote sera mis en évidence à travers la mesure du pouvoir de vote par le biais des indices de pouvoir. Ces indices de pouvoir sont susceptibles d'analyser la répartition du pouvoir de vote entre les différentes parties prenantes du processus de décision collective. Mesurer, comprendre et expliquer la notion et l'importance de la mesure du pouvoir de vote et comment former un gouvernement stable après une élection législative constituent les principaux centres d'intérêt de cette étude.

L'importance de cette étude est d'étudier le pouvoir dans un comité de négociation et de prédire quelles coalitions peuvent être formées à l'issue du processus de vote. Par exemple, la notion du pouvoir au sein des structures intercommunales semble importante pour les décisions de construction de biens publics locaux. Il semble en effet raisonnable de penser que la commune possédant le plus de pouvoir aura plus de chance d'être proche du lieu choisi pour le bien public si celui-ci est désirable (par exemple une piscine) et éloigné s'il est indésirable (une décharge publique). Au niveau des assemblées politiques on peut voir à partir du pouvoir des différents partis politiques quel gouvernement peut voir le jour et quelles coalitions peuvent former un gouvernement qui peut appartenir au cœur du jeu[1], autrement dit un gouvernement stable. Nous

[1] Le concept de jeu de vote et le concept du cœur seront définis plus tard.

essayerons ainsi d'analyser la répartition du pouvoir de vote entre les différents partis politiques aux parlements canadien et québécois et de voir quelle coalition est capable de former un gouvernement stable. Le choix de l'application au parlement canadien est important d'autant plus que les trois dernières élections canadiennes ont toutes conduit à la formation d'un gouvernement minoritaire et ont eu lieu en l'espace de quatre ans seulement.

Apres une courte réflexion sur la revue de la littérature en section I, nous présentons dans la section II quelques définitions ainsi que les principales notations que nous utiliserons dans notre étude, suivie d'une étude normative et probabiliste de quelques indices utilisés pour mesurer le pouvoir de vote. Dans la section III nous appliquons ces indices de pouvoir au parlement canadien pour calculer le pouvoir de vote des différents partis politiques. Enfin en section IV, nous présenterons deux méthodes pour former un gouvernement stable après des élections législatives. Ces deux méthodes sont la méthode parlementaire et la méthode du cœur que nous appliquerons au parlement canadien et au parlement québécois.

Section I : **Revue de la littérature**

L'étude du pouvoir dans les jeux coopératifs a donné lieu à une abondante littérature. En effet, de nombreux articles ont débattu de la manière dont on doit mesurer le pouvoir et de nombreux indices ont été proposés.

Historiquement le premier indice de pouvoir défini de manière formelle est celui de Shapley et Shubik (1954) qui fut obtenu à partir de la valeur de Shapley (1953) ; puis apparait celui de Banzhaf (1965). Depuis, on a assisté à l'apparition de plusieurs autres indices dont l'indice de Johnston (1978), l'indice de Deegan-Packel (1978), l'indice de Coleman (1986), l'indice d'Holler-Packel (1983), l'indice de Colomer-Martinez (1995), l'indice de König-Bräuniger ... Voir Andjiga, Chantreuil, et Lepelley (2003) et Laruelle et Valenciano (2005) pour une brève présentation de ces indices. Mais ce sont surtout les deux premiers indices qui ont fait couler beaucoup d'encre et ont été appliqués dans plusieurs domaines et notamment dans la politique. Plusieurs études ont été menées pour essayer de comparer ces deux indices de pouvoir. On peut citer : Strafin (1977,1994), Felsenthal et Machover (1998), Andjiga, Chantreuil et Lepelley (2003), Laruelle et Valenciano (2001). Quant à leurs applications, nous n'en discuterons brièvement que quelques unes. Ainsi, dès 1972, Junn (1972) avait utilisé l'indice de Shapley et Shubik pour montrer que la réforme du conseil de sécurité de l'ONU censée apporter plus de pouvoir aux membres non permanents du conseil, aboutit en fait à diminuer leur pouvoir de vote. Leech (2002) a utilisé les indices de pouvoir pour comparer le poids de certains Etats par rapport à leur pouvoir de décision au sein du FMI. Il remarque que les Etats Unis bien qu'ayant une contribution financière de 17%, ont considérablement plus de pouvoir de décision. C'est surtout au niveau du conseil des ministres de l'Union Européenne que les applications sont les plus nombreuses. En effet, les problèmes de repondération posés par les élargissements successifs de l'union ont suscité un nombre impressionnant d'articles et ont ravivé l'intérêt des scientifiques et des politiques pour l'analyse du pouvoir de vote. On peut citer par exemple : Larruelle et Widgrén (1998), Bobay (2001, 2004), Garrett et Tsebelis (1999), Felsenthal et Machover (2003). Laruelle et Valenciano (2005) ont utilisé l'indice de satisfaction de Rae (1969) pour calculer la probabilité de succès d'un votant avant et après un vote car selon eux ce qui compte c'est la décision finale et non la probabilité d'être pivot comme le prétendent les autres mesures du pouvoir de vote. En ce qui concerne le cas du Canada, Miller (1973) a utilisé l'indice de Shapley-Shubik pour rendre compte du mécanisme d'amendement de la constitution canadienne exigeant les deux tiers des provinces et devant totaliser au moins la majorité de la population du Canada. Kilgour (1982), Levesque et Moore (1984) ont déterminé le pouvoir des provinces canadiennes dans le cadre d'un amendement de la constitution en considérant plusieurs scénarios. Leur conclusion est que le pouvoir est reparti plus équitablement entre les provinces qu'entre les citoyens des différentes provinces canadiennes. Lluis (1993) a dans son rapport de recherche calculé le pouvoir des provinces canadiennes dans le cadre du système de vote d'un projet de loi au parlement. Son étude consiste à comparer le pouvoir des provinces avec le système prévu par la loi constitutionnelle de 1867 par rapport aux modifications proposée à Charlottetown en considérant un système de vote à double majorité à savoir au niveau du sénat et au niveau de la chambre des communes. Elle est arrivée à la conclusion que les modifications proposées à

Charlottetown diminuent le pouvoir des grandes provinces (en termes de population), en particulier l'Ontario et le Québec, et augmente le pouvoir des provinces les moins peuplées. Le but de notre étude n'est pas d'étudier le pouvoir de décision des provinces canadiennes, mais plutôt d'étudier le pouvoir des partis politiques au niveau de la chambre des communes et d'analyser les différentes méthodes de former un gouvernement majoritaire après des élections législatives, car les décisions se prennent au niveau de la chambre des communes selon l'appartenance politique et les coalitions se forment entre partis et non entre provinces car les députés votent la plupart du temps selon que leur parti approuve ou non le projet de loi en question. Pour cela, nous allons nous inspirer de l'article de Mbih, Andjiga et Badirou (2006) qui ont étudié le pouvoir de différents partis politiques dans différents parlements et analysé les différentes coalitions susceptibles d'être formées et voir quelle coalition peut former un gouvernement selon deux méthodes : la méthode parlementaire et la méthode du cœur.

Section II : **Mesure du pouvoir de décision**

Apres avoir défini quelques notations, nous allons essayer de voir les indices qu'on peut utiliser pour mesurer le pouvoir de vote.

I. **Notations et définitions préliminaires**.

Pour présenter les indices de pouvoir, il est nécessaire d'avoir recours à la théorie des jeux coopératifs et plus particulièrement les jeux simples introduits par Von-Neumann et Morgenstern (1944). Nous utiliserons dans notre étude les outils de la théorie des jeux coopératifs en considérant un jeu de vote dans lequel les joueurs sont les votants. Un jeu *coalitionnel* à utilité transférable, ou jeu sous forme caractéristique, est une paire (N, v) qui associe à tous sous ensemble S de N une valeur réelle $v(S)$.

$$v: 2^N \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$S \longmapsto v(S)$$

$v(S)$ représente la valeur que produisent et peuvent partager entre eux les membres de la coalition S s'ils coopèrent ensemble et sans l'aide de joueurs extérieurs à S. Nous noterons $v(\{i\})$ la valeur individuelle du joueur i.

Un jeu *simple* est un jeu *coalitionnel* dans lequel la fonction caractéristique v ne peut prendre que deux valeurs : 0 ou 1, avec $v(S) = 1$ si la coalition S est gagnante et $v(S) = 0$ si la coalition S est perdante. Nous noterons par V l'ensemble des jeux simples.

Un jeu de vote pondéré est un type particulier de jeu simple engendré par une situation de vote (q ; w_i , …, w_n). $w_i \geq 0$ est le poids de vote de l'individu i et q est la règle de décision (le quota) : c'est-à-dire, une décision ne sera prise que lorsque la somme des poids des joueurs qui votent en sa faveur atteint au moins le quota q.

On a :

$$0 \leq q \leq \sum_{i \in N} w_i \; et \; v(S) = 1 \; si \; \sum_{i \in S} w_i \geq q \; et \; v(S) = 0 \; si \; \sum_{i \in S} w_i < q$$

La coalition S est *gagnante* si et seulement si *v*(S) = 1.

Si on note par W_v l'ensemble des coalitions gagnantes dans le jeu *v*, alors on aura :

$$S \in W_v \Leftrightarrow \sum_{i \in S} w_i \geq q$$

Nous appellerons parfois une configuration de vote, l'ensemble des résultats concevable du vote : c'est-à-dire une liste de "oui" et de "non" dans un jeu de vote simple.

Prenons l'exemple d'une structure intercommunale composé de cinq communes : n = 5 et N = {1, 2, 3, 4, 5} avec comme nombre de délégués respectif : 15, 10, 5, 5, 4. Ici le nombre de délégués représente le poids de vote de chaque commune : $w_1 = 15$, $w_2 = 10$, $w_3 = 5$, $w_4 = 5$ et $w_5 = 4$. Si la règle de décision est la majorité simple, alors le seuil de décision sera :

$q = \frac{w}{2} + 1$ si *w* est pair et $q = \frac{w+1}{2}$ si *w* est impair (avec $w = \sum_{i \in N} w_i$).

Dans notre exemple, *w* est impair d'où $q = \frac{w+1}{2} = 20$. On peut donc présenter ce jeu sous la forme *v* : (20 ; 15, 10, 5, 5, 4).

Un joueur *i* est décisif dans une coalition gagnante S si son absence rend cette coalition perdante : $v(S) = 1 \; et \; v(S \backslash \{i\}) = 0$. Et on appelle coalition minimale gagnante une coalition dans laquelle tous les joueurs sont décisifs : une coalition $S \in W_v$ est dite une coalition minimale gagnante si S\$\{i\}$ est une coalition perdante pour tout $i \in S$. Un joueur qui est décisif dans toutes les coalitions gagnantes a un droit de veto. En d'autres termes, si *i* a un droit de veto, alors on a :

$$v(S) = 1 \Rightarrow i \in S$$

Un joueur *i* est un dictateur, si une coalition est gagnante si et seulement si il en fait partie.

$$v(S) = 1 \Leftrightarrow i \in S$$

Pour chaque coalition S telle que $i \in S$, $v(S) - v(S \backslash \{i\})$ est la contribution marginale du joueur *i* à la coalition S, c'est-à-dire le gain de valeur pour la coalition S lorsque le joueur *i* la quitte.

II. <u>Notion de poids de vote et indice de pouvoir</u>

1. **poids de vote et pouvoir de vote**

Dans les institutions et les organisations où les différents membres disposent de poids de vote différents on peut croire que le pouvoir de décision d'un membre est égal à son poids de vote. Ce n'est pas toujours le cas. Le pouvoir de vote d'un joueur dépend du nombre de fois ou celui-ci est décisif dans les différentes coalitions gagnantes. Prenons comme exemple, le parlement canadien après les élections de 2006 et de 2008. En 2006, les sièges étaient repartis comme suit :

1. parti conservateur : 124
2. parti libéral : 102
3. bloc québécois : 51
4. NPD : 29
5. Indépendant : 1

Comme la règle de décision est la majorité simple, on aura un jeu sous la forme v : (154 ; 124, 102, 51, 29, 1)

Dans les tableaux 1, 2 et 3 ci-dessous dans lesquels toutes les coalitions présentées sont des coalitions gagnantes, le chiffre 1 à l'intersection de la ligne figurant la coalition S et de la coalition correspondant au joueur i signifie que le joueur i est décisif dans la coalition S (S est gagnante et $S\backslash\{i\}$ est perdante) et le chiffre 0 signifie que le joueur i n'est pas décisif dans la coalition S (S est gagnante et $S\backslash\{i\}$ est également gagnante). On voit bien que le parti libéral bien qu'ayant le double du nombre de députés que le bloc Québécois, il est autant de fois décisif que le bloc.

Coalitions gagnantes S	1	2	3	4	5	Nombre de joueurs	Nbre de pivots
1, 2	1	1	0	0	0	2	2
1, 3	1	0	1	0	0	2	2
1, 2, 3	1	0	0	0	0	3	1
1, 2, 4	1	1	0	0	0	3	2
1, 2, 5	1	1	0	0	0	3	2
1, 3, 4	1	0	1	0	0	3	2
1, 3, 5	1	0	1	0	0	3	2
1, 4, 5	1	0	0	1	1	3	3
2, 3, 4	0	1	1	1	0	3	3
2, 3, 5	0	1	1	0	1	3	3
2, 3, 4, 5	0	1	1	0	0	4	2
1, 2, 3, 4	0	0	0	0	0	4	0
1, 2, 3, 5	0	0	0	0	0	4	0
1, 2, 4, 5	1	0	0	0	0	4	1
1, 3, 4, 5	1	0	0	0	0	4	1
1, 2, 3, 4, 5	0	0	0	0	0	5	0
Total	10	6	6	2	2	-	26

Tableau 1 : l'ensemble des coalitions gagnantes à la chambre des communes avec la majorité simple des voix et les joueurs décisifs dans chaque coalition (parlement élu en 2006).

Par contre, en prenant comme règle de décision la majorité des deux tiers, (voir tableau 2) les conclusions ne seront plus les mêmes. Avec cette nouvelle majorité, le nombre de coalitions gagnantes passe de 16 à 9. On voit bien que dans ce cas le joueur 1 aura un droit de veto car il intervient dans toutes les coalitions gagnantes.

Coalitions gagnantes	1	2	3	4	5	Nbre de joueurs	Nbre de pivots
1, 2	1	1	0	0	0	2	2
1, 2, 3	1	1	0	0	0	3	2
1, 2,4	1	1	0	0	0	3	2
1, 2, 5	1	1	0	0	0	3	2
1, 2, 4, 5	1	1	0	0	0	4	2
1, 2, 3, 5	1	1	0	0	0	4	2
1, 3, 4, 5	1	0	1	1	1	4	4
1, 2, 3, 4	1	1	0	0	0	4	2
1, 2, 3, 4, 5	1	0	0	0	0	5	1
Total	9	7	1	1	1	-	19

Tableau 2 : nombre de coalitions gagnantes avec la majorité des deux tiers. (2006)

En considérant le parlement actuel (celui issu des élections fédérales de 2008) qui est caractérisé par le jeu *v* : (154 ; 145, 75, 49, 36, 2) (voir le tableau 3), on voit que les indépendantistes avec deux sièges au parlement n'ont aucun pouvoir de décision. On les appelle en théorie des jeux coopératifs des joueurs nuls.

Coalitions gagnantes	1	2	3	4	5	Nombre de joueurs	Nbre de pivots
1, 2	1	1	0	0	0	2	2
1, 3	1	0	1	0	0	2	2
1, 4	1	0	0	1	0	2	2
1, 2, 3	1	0	0	0	0	3	1
1, 2, 4	1	0	0	0	0	3	1
1, 2, 5	1	1	0	0	0	3	2
1, 3, 4	1	0	0	0	0	3	1
1, 3, 5	1	0	1	0	0	3	2
1, 4, 5	1	0	0	1	0	3	2
2, 3, 4	0	1	1	1	0	3	3
2, 3, 4, 5	0	1	1	1	0	4	3
1, 2, 3, 4	0	0	0	0	0	4	0
1, 2, 3, 5	1	0	0	0	0	4	1
1, 2, 4, 5	1	0	0	0	0	4	1
1, 3, 4, 5	1	0	0	0	0	4	1
1, 2, 3, 4, 5	0	0	0	0	0	5	0
Total	12	4	4	4	0	-	24

Tableau 3 : l'ensemble des coalitions gagnantes à la chambre des communes avec la majorité simple des voix après les élections de 2008.

On peut conclure donc que le pouvoir de vote d'un électeur dépend non seulement de son poids de vote mais aussi de la règle de décision adoptée.
De ce fait quel indicateur permet de mesurer le pouvoir de vote d'un électeur ?

2. **Etude des indices de pouvoir**

Définition d'un indice de pouvoir :
Soit (N, v) un jeu simple, un indice de pouvoir du jeu (N, v) est une fonction

$$\alpha : V \to \Re^n$$
$$v \mapsto \alpha(v)$$

Où V est l'ensemble des jeux simples sur N et
$\alpha(v) = (\alpha_1(v), \alpha_2(v), \dots, \alpha_n(v))$ est un vecteur qui détermine la distribution de pouvoir de la coalition N entre ces joueurs.
$\alpha_i(v)$ est interprété comme la mesure de l'influence qu'exerce le joueur *i* sur le résultat du vote. Un indice de pouvoir mesure donc le degré d'influence d'un électeur donné sur le résultat du vote. L'indice de pouvoir du votant *i* peut être interprété également comme la probabilité que le votant *i* soit décisif.
Parmi les nombreux indices de pouvoir existant dans la littérature, nous n'utiliserons uniquement que quelques uns d'entre eux dans notre étude.

2.1. **L'indice de Shapley-Shubik**.

L'indice de Shapley- Shubik a été introduit en 1954 par Shapley et Shubik à partir du concept de la valeur de Shapley paru un an auparavant.

D' après Shapley et Shubik, le pouvoir (de vote) d'un individu, (membre d'un comité) dépend de la possibilité qui lui est offerte d'être déterminant pour le succès d'une coalition. Cet indice tient compte du raisonnement suivant : prenons un joueur afin de constituer une coalition et regardons si cette coalition est gagnante. Si ce n'est pas le cas, prenons un second joueur et regardons maintenant si la coalition des deux est gagnante, puis un troisième et ainsi de suite. Le joueur qui rejoignant le groupe fait basculer celui-ci de la situation de coalition perdante à celle de coalition gagnante est décisif. L'ordre d'apparition des joueurs dans la coalition a donc de l'importance, et en supposant que tous les ordres ont la même probabilité d'apparaitre, tous les ordres doivent être étudiés. L'indice de Shapley-Shubik est déterminé par le rapport du nombre de fois ou un votant est décisif sur le nombre total d'ordres (qui est égal à n !). Il est donné par le rapport suivant :

$$SH_i(v) = \frac{nombre\ \ d'ordres\ \ avec\ \ i\ décisif}{nombre\ \ total\ \ d'ordres}$$

Quelques calculs combinatoires montrent que :

$$SH_i(v) = \sum_{S \subseteq N} \frac{(s-1)!\,(n-s)!}{n!}\,[v(S) - v(S - \{i\})]$$

$s = |S|$ est égal au nombre de joueurs dans la coalition S.

$v(S) - v(S - \{i\}) = 1$ si *i* est pivot dans la coalition S et 0 sinon.

SH_i (v) correspond à la part de pouvoir que le joueur i puisse espérer obtenir dans le jeu.

$\frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}$ est le poids du joueur i dans la coalition S.

Prenons l'exemple suivant pour illustrer le calcul de cet indice : soit le jeu v : [3 ; 2, 1, 1, 1], N = {1, 2, 3,4,} les joueurs avec n=4.

Pour chaque permutation π de N et pour tout $i \in S \; et \; S \subseteq N,$ il ya un joueur unique (le pivot) pour qui la contribution marginale

$v(S) - v(S - \{i\}) = 1$; et elle est égale à 0 pour tout les autres joueurs.

Considérons la permutation suivante pour les joueurs : 4-2-1-3.

La contribution marginale de chaque joueur est la suivante :

0 pour le joueur 4,

0 pour le joueur 2,

1 pour le joueur 1,

0 pour le joueur 3.

Ici, le joueur 1 est le pivot de la permutation car il fait basculer la coalition d'une position perdante à une position victorieuse. En considérant toutes les permutations possibles, on remarque que le joueur 1 est pivot s'il arrive en $2^{éme}$ ou en $3^{éme}$ position. Ce qui fait au total 12 permutations sur 24 et on a

$SH_1(v) = \frac{12}{24} = 0{,}5.$

Le joueur 2 est pivot s'il arrive en $2^{éme}$ position après le joueur 1 ou s'il arrive en $3^{éme}$ position après le joueur 3 et le joueur 4. Ce qui donne les quatre permutations suivantes : 1234

1243

3421

4321

Le joueur 3 est pivot s'il arrive en $2^{éme}$ position après le joueur 1ou s'il arrive en $3^{ème}$ position après les joueurs 2 et 4. De la même manière, le joueur 4 est pivot seulement s'il arrive en $2^{éme}$ position après le joueur 1 ou s'il arrive en $3^{éme}$ position après le joueur 2 et le joueur 3.

On obtient le pouvoir suivant pour ces trois joueurs :

$$SH_2(v) = \frac{4}{24} = SH_3(\mathrm{v}) = SH_4(v).$$

En prenant l'exemple de l'intercommunalité on peut calculer le pouvoir de chaque commune à partir des tableaux suivants :

Coalitions gagnantes	1	2	3	4	5	Nombre de joueurs dans la coalition	Nbre de joueurs decisifs dans la coalition
1, 2	1	1	0	0	0	2	2
1, 3	1	0	1	0	0	2	2
1, 4	1	0	0	1	0	2	2
1, 2, 3	1	0	0	0	0	3	1
1, 2, 4	1	1	0	0	0	3	2
1, 2, 5	1	0	0	0	0	3	1
1, 3, 5	1	0	0	0	0	3	1
1, 3, 5	1	0	1	0	0	3	2
1, 4, 5	1	0	0	1	0	3	2
2, 3, 4	0	1	1	1	0	3	3
2, 3, 4, 5	0	1	1	1	0	4	3
1, 2, 3, 4	0	0	0	0	0	4	0
1, 2, 4, 5	1	0	0	0	0	4	1
1, 2, 3, 5	1	0	0	0	0	4	1
1, 3, 4, 5	1	0	1	0	0	4	2
1, 2, 3, 4, 5	0	0	0	0	0	5	0
Total	12	4	4	4	0	-	-

<u>Tableau</u> 4 : l'ensemble des coalitions gagnantes dans l'intercommunalité avec la majorité simple des voix et les communes décisives dans chaque coalition.

Coalitions gagnantes	1	2	3	4	5	Nbre de joueurs	Nbre de joueurs décisifs
1, 2, 3	1	1	1	0	0	3	3
1, 2, 4	1	1	0	1	0	3	3
1, 2, 5	1	1	0	0	1	3	3
1, 2, 3, 4	1	1	0	0	0	4	2
1, 2, 4, 5	1	1	0	0	0	4	2
1, 2, 3, 5	1	1	0	0	0	4	2
1, 3, 4, 5	1	0	1	1	1	4	4
1, 2, 3, 4, 5	1	0	0	0	0	5	1
Total	8	6	2	2	2	-	-

<u>Tableau</u> 5 : nombre de coalitions gagnantes avec la majorité des deux tiers.

L'indice de Shapley- Shubik nous donne les résultats suivant en utilisant la règle de décision à la majorité simple :

$$SH_i(v) = \frac{(2-1)!(5-2)!}{5!} \times 3 + \frac{(3-1)!(5-3)!}{5!} \times 6 + \frac{(4-1)!(5-4)!}{5!} = \frac{60}{120} = 0{,}5$$

En procédant de la même manière, on obtient:

$SH_2(v) = SH_3(v) = SH_4(v) = 20/120 = 0{,}1667$

et $SH_5(v) = 0{,}000$

Avec une majorité des deux tiers c'est à dire un quota de 26 voix sur 39, les indices de Shapley-Shubik des joueurs seront:

$SH_1(v)$ = 60/120 = 0, 5;

$SH_2(v)$ = 30/120 = 0, 25;

$SH_3(v)$ = 10/120 = 0, 0833 = $SH_4(v)$ = $SH_5(v)$.

- **la valeur de Shapley d'un jeu avec unions a priori ou valeur d'Owen**

Owen (1977) a donné une modification de la valeur de Shapley et de l'indice de Shapley-Shubik. Il prend en compte la possibilité que certains joueurs à cause de leurs affinités politiques ou économiques agissent plus souvent ensemble que d'autres. Un groupe d'individus qui décide de voter toujours ensemble forme donc une union a priori. L'approche d'Owen est donnée ci-dessous.

Une structure d'union a priori est une partition T= {T_1, T_2, …, T_m} de N. chaque T_j appartenant à T est une union a priori, c'est- à- dire un ensemble de joueurs qui sont d'accord de collaborer ensemble. Nous appelons la pair (v, T) un jeu avec unions a priori.

Soit M = {1, …, m} l'ensemble des unions a priori. Pour un joueur i, sa valeur de Shapley pour un jeu avec union a priori où sa valeur d'Owen est donnée par la formule suivante :

$$\varphi_i(v,T) = \sum_{S\subseteq M}\sum_{K\subseteq T_j} \frac{k!\,(t_j-k-1)!\,s!\,(m-s-1)!}{t_j!\,m!}[v(Q\cup K\cup\{i\}) - v(Q\cup K)]$$

où $Q = \bigcup_{r \in S} T_r$, $i \in T_j$, et k, s et t_j sont respectivement le nombre d'éléments de K, S, et T_j.

La différence avec la valeur de Shapley est que dans ce cas, seules les permutations qui prennent les membres de chaque union a priori T_j ensemble sont considérées. Ces permutations sont au nombre de m! t_1! …t_m! et sont toutes équiprobables.

Prenons comme exemple le parlement québécois de la 38ieme législature qui est caractérisé par le jeu : v : (63 ; 48, 41, 36). On obtient les permutations suivantes pour ce jeu : 123, 132, 213, 231, 312, 321. Le pouvoir des joueurs calculé à partir de l'indice de Shapley-Shubik est de : (1/3 ; 1/3 ; 1/3).

Si maintenant les joueurs 1 et 2 décident de former une union a priori, alors on n'aura plus que quatre permutations possibles : 123, 213, 312 et 321. La valeur modifiée de Shapley ou valeur d'Owen attribue le vecteur de pouvoir suivant au joueurs : (1/2 ; 1/2 ; 0).

Avec la formation de cette union a priori, on remarque que le pouvoir du joueur 3 devient nul.

2.2. **L'indice de Banzhaf normalisé**.

L'indice de Banzhaf normalisé a été introduit en 1965 par John Banzhaf(1965). Comme celui de Shapley-Shubik, il sert à mesurer le pouvoir d'un votant dans un système de vote indirect. L'indice de Banzhaf permet en effet de mesurer la capacité d'un votant à faire basculer les coalitions perdantes en coalitions gagnantes. Banzhaf considère, comme Shapley et Shubik, que la mesure du pouvoir du joueur *i* doit dépendre du nombre de fois où il est décisif. Cependant, dans le processus de Banzhaf le vote n'est pas séquentiel : les coalitions votent en bloc. L'indice de Banzhaf normalisé du joueur *i* que nous notons $\beta_i'(v)$ dans le jeu (N, *v*) s'obtient en divisant le nombre de coalitions possibles (et non le nombre de permutations possibles à la différence de l'indice de Shapley-Shubik) pour lesquelles *i* est décisif par le nombre de coalitions décisives contenant le joueur *i*. Il est donné par la formule

$$\beta_i'(v) = \frac{\sum_{S \subseteq N} [v(S) - v(S - \{i\})]}{\sum_{j \in N} \sum_{S \subseteq N} [v(S) - v(S - \{j\})]}$$

$\sum_{S \subseteq N} [v(S) - v(S - \{i\})]$ représente le nombre de coalitions gagnantes dans les quelles i est décisif.

Avec une règle de décision à la majorité simple des voix dans notre exemple à 5 communes, on aura :

$\beta'_1(v)$ =12/24 = 0,5 ;

$\beta'_2(v)$ = 4/24 = 0.1667 = $\beta'_3(v)$ = $\beta'_4(v)$,

$\beta'_5(v)$ = 0/24 = 0.

Avec un quota de 26 voix sur 39 soit une majorité des 2/3, on aura les résultats suivants :

$\beta'_1(v)$ = 8/20 = 0,4 ;

$\beta'_2(v)$ = 6/20 = 0,3 ;

$\beta'_3(v)$ = $\beta'_4(v)$ = 2/20 = $\beta'_5(v)$ = 2/20 = 0,1.

2.3. **L'indice non normalisé de Banzhaf**

L'indice de Banzhaf non normalisé appelé mesure de Banzhaf ou score de Banzhaf a été proposé en premier par Lionel Penrose en 1946 puis généralisé par Dubey et Shapley en 1979 pour combler les insuffisances de l'indice normalisé de Banzhaf.

En effet, l'indice de Banzhaf non normalisé du joueur *i* est donné par le nombre de coalitions dans lesquelles *i* est pivot, divisé par le nombre total de coalitions auxquelles *i* est susceptible d'appartenir.

Dans un jeu de vote à n joueurs, le nombre total de coalitions possibles est de 2^n et le nombre de coalitions (perdantes et gagnantes) auxquelles le joueur *i* est susceptible d'appartenir est de 2^{n-1}.

Ainsi, l'indice non normalisé de Banzhaf du joueur *i* est donné par la formule suivante :

$$\beta_i(v) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{S \subseteq N, i \in S} [v(S) - v(S - \{i\})]$$

Donc, dans notre jeu à 5 votants, on a 2^4 = 16 coalitions susceptibles de contenir le joueur *i*. Ce qui donne les pouvoirs suivants aux joueurs en utilisant cet indice de pouvoir :

- Majorité simple : $ß_1(v)$ = 12/16 = 0,75 ;

$ß_2(v) = ß_3(v) = ß_4(v) = 4/16 = 0{,}25$;

$ß_5(v) = 0$.

- Majorité des deux tiers : $ß_1(v) = 8/16 = 0{,}5$;

  $ß_2(v) = 6/16 = 0{,}375$;

  $ß_3(v) = ß_4(v) = ß_5(v) = 2/16 = 0{,}125$.

Le principal problème de cet indice est qu'il n'est pas normalisé. Autrement dit, la somme des indices est souvent différente de un :

$$\sum_{i \in N} \beta_i(v) \neq 1.$$

C'est pourquoi, d'aucuns préfèrent l'appeler score de Banzhaf ou mesure de pouvoir de Banzhaf plutôt qu'indice de Banzhaf (Felsenthal et Machover (1998)) car l'indice de pouvoir d'un votant *i* est considéré comme la probabilité que le votant *i* soit décisif ; et la somme des probabilités doit être égale à 1dans une distribution de probabilité.

On remarque que quelque soit l'indice choisi pour la mesure du pouvoir de vote, ce dernier varie non seulement en fonction du poids du votant mais aussi en fonction de la règle de vote choisie.
On peut donc conclure que le pouvoir de vote d'un électeur est relié de façon monotone mais pas proportionnelle à son poids de vote.

Puisque pour un même quota et un même poids donné, les différents indices utilisés attribuent des pouvoirs différents aux différents électeurs, le problème du choix de l'indice de pouvoir le plus approprié se trouve clairement posé.

De ce fait, comment peut-on effectuer un choix entre les différents indices de pouvoir proposés dans la littérature ?

Pour répondre à cette question, nous essaierons d'étudier les caractéristiques de ces indices de pouvoir.

III/ Etudes des propriétés des indices de pouvoir

1. Axiomatisations des indices de pouvoir

Les indices de Banzhaf et l'indice de Shapley-Shubik ont été caractérisés par un certain nombre d'axiomes. En effet, la valeur de Shapley est caractérisée par quatre axiomes. Quant à l'indice de Shapley-Shubik, il a été axiomatisé premièrement par Dubey (1975) puis par Dubey et Shapley (1979). L'indice de Banzhaf quant à lui à été d'abord axiomatisé par Owen (1978) puis par Dubey et Shapley (1979). Plusieurs auteurs ont par la suite proposé d'autres axiomes pour caractériser ces indices dont Laruelle et Valenciano (2001). Owen a donné quatre axiomes qui caractérisent la valeur d'Owen (voir Owen 1977).

Les principaux axiomes proposés sont les suivants :

1) l'axiome de l'anonymat :

Soit (N, v) un jeu simple, pour toute permutation π de N et pour tout $i \in$ N, on a :

$$\alpha_i(\pi v) = \alpha_{\pi i}(v)\ avec\ (\pi v)(S) = v(\pi(S))$$

Une permutation est une bijection $\pi: N \to N$.

Cet axiome veut dire que le pouvoir des joueurs ne dépend pas de la manière dont ils ont été étiquetés (numérotés).

2) **<u>L'axiome du joueur nul</u>** *:*

Si *i* est un joueur nul du jeu (N, *v*), c'est-à-dire si :

$$v(S \cup \{i\}) = v(S), \forall\, S\ telle\ que\ i \notin S, alors\ \alpha_i(v) = 0$$

Un joueur *i* est appelé joueur nul ou marionnette dans un jeu (N, *v*), s'il n'apporte rien dans le jeu. Il ne peut en effet changer le résultat d'aucune coalition et ne peut par conséquent transformer aucune coalition perdante en coalition gagnante et vice-versa. Son pouvoir de vote est dans ce cas nul. C'est le cas par exemple des députés indépendantistes dans le parlement actuel même s'ils décident de voter en bloc (quelque soit l'indice de pouvoir $\alpha, on\ a :\ \alpha_5(v) = 0$). C'est également le cas du Luxembourg dans l'Europe des six ou les trois grands Etats ont 4 voix chacun, les deux Etats de taille moyenne ont 2 voix chacun et 1 voix pour le Luxembourg. Les décisions sont prises avec une règle de majorité qualifiée de 12 voix sur 17, ce qui donne le jeu *v* : (12 ; 4, 4, 4, 2, 2, 1).

3) **<u>La symétrie</u>** :

Si deux joueurs *i* et *j* sont substituts dans un jeu (N, *v*), c'est-à-dire pour toute coalition $S \subset N - \{i, j\}$, si :

$v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$, alors $\alpha_i(v) = \alpha_j(v)$.

4) l’axiome du transfert ou de décomposition

Soient (N, v) et (N, w) deux jeux simples. On définit les operateurs

$(v \vee w)\ et\ (v \wedge w)\ par\ (v \vee w)(S) = max\big(v(S), w(S)\big)\ et$

$(v \wedge w)(S) = min(v(S),\ w(S))$, alors d’après l’axiome du transfert ou axiome de décomposition, on a :

$$\alpha_i(v \vee w) + \alpha_i(v \wedge w) = \alpha_i(v) + \alpha_i(w).$$

Malgré la simplicité mathématique de cet axiome, son interprétation divise encore les spécialistes de la théorie des jeux dont on peut citer entre autres Straffin (1982) et Felsenthal et Machover (1995).

5) **l’efficience** *:*

Pour tout jeu simple (N, v), on a :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(v) = 1$$

L’efficience veut dire que la somme des pouvoirs de tous les joueurs doit être égale à 1. L’efficience est un critère de normalisation.

6) **pouvoir total de l’indice de Banzhaf *:***

Pour tout jeu simple (N, v),

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{S \subseteq N} [v(S) - v(S - \{i\})]$$

C’est la somme des pouvoirs de tous les joueurs lorsqu’on utilise l’indice non normalisé de Banzhaf. Cette somme est souvent différente de 1.

Soit $\alpha : V \longrightarrow R$ un indice de pouvoir ; alors d’après Dubey et Shapley (1979) :

- L’unique indice qui vérifie les axiomes 1, 2, 3, 4 et 5 est l’indice de Shapley Shubik.
- L’unique indice satisfaisant les axiomes 1, 2, 3, 4 et 6 est l’indice non normalisé de Banzhaf.
- L’indice de Banzhaf normalisé quant à lui ne vérifie que les axiomes 1, 2,3 et 5.

On peut résumer ces résultats dans le tableau suivant :

Axiome / Indice α	Anonymat	Joueur nul	Transfert	$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(v)$	Sym
Shapley Shubik	Oui	Oui	Oui	1	Oui
Banzhaf normalisé	Oui	Oui	Non	1	Oui
Banzhaf non normalisé	Oui	Oui	Oui	$\sum_{i=1}^{n} \sum_{S \subseteq N} [V(S) - V(S - \{i\})]$	Oui

Tableau 6: tableau récapitulatif des différents axiomes et les indices qui les vérifient.

D'autres axiomes ont été proposés par les spécialistes de la théorie du vote et de la théorie des jeux coopératifs. On peut citer par exemple les travaux de Laruelle et Valenciano(2001) qui ont proposé d'autres variantes des axiomes proposés par Dubey et Shapley.

Nous remarquons en analysant le tableau 6 qu'il est difficile de choisir un indice à partir de ces axiomes. En particulier, comment choisir entre l'indice de Shapley Shubik et l'indice non normalisé de Banzhaf d'autant plus que les deux vérifient les quatre premiers axiomes, mais l'indice de Shapley est normalisé contrairement à l'indice non normalisé de Banzhaf qui vérifie l'axiome 5 ?

2. Analyse probabiliste des indices de Shapley-Shubik et de l'indice de Banzhaf

L'indice de Shapley Shubik et l'indice non normalisé de Banzhaf ont fait l'objet d'une interprétation probabiliste (voir Straffin (1977), Andjiga, Chantreuil et Lepelley (2003), Leech (1990)).

En effet, l'indice de Banzhaf non normalisé du joueur *i* peut s'interpréter comme la probabilité que le joueur *i* transforme une coalition perdante en coalition gagnante. C'est donc la probabilité que le joueur *i* soit décisif dans une coalition donnée. Cette probabilité est obtenue à partir de l'ensemble des coalitions auxquelles le joueur *i* est susceptible d'appartenir (en nombre égal à 2^{n-1}) comme nous l'avons vu précédemment.

L'indice de Shapley Shubik est quant à lui déduit de l'ensemble de toutes les coalitions de taille n avec prise en compte de l'ordre des joueurs qui les constituent. Cet indice peut cependant être analysé comme la probabilité d'être décisif comme le suggère Shapley-Shubik : « le pouvoir de vote d'un individu dépend de la possibilité qui lui est offerte d'être déterminant pour le succès d'une coalition ».
Selon Strafin, l'indice de Banzhaf est basé sur une hypothèse d'indépendance des électeurs car chaque votant vote indépendamment des autres avec une équiprobabilité :

$$p = \frac{1}{2^{n-1}}$$

Et l'indice de Shapley Shubik est basé sur une hypothèse d'homogénéité avec une probabilité d'occurrence de

$$p = \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}$$

A travers notre étude, il s'avère donc difficile de savoir quel est l'indice le mieux approprié pour calculer le pouvoir de vote d'un électeur. Si on pense que les joueurs font leurs choix de manière complètement indépendante, alors c'est l'indice de Banzhaf qu'il faut utiliser pour calculer leur pouvoir. Si, par contre, on estime qu'ils jugent les différentes propositions qui leurs sont soumises en fonction de valeurs communes, alors c'est l'indice de Shapley – Shubik qui apparaît comme le plus approprié.
Straffin (1977) fait observer que les assemblées de votants sont dans bien des cas constituées de groupes se caractérisant par un comportement de

vote qui est à la fois homogène à l'intérieur de chaque groupe et indépendant entre les groupes.

Felsenthal et Machover (1998) parlent de I-pouvoir et de P-pouvoir pour distinguer l'indice de Shapley Shubik et l'indice de Banzhaf. Ils expliquent l'I-pouvoir comme un pouvoir en tant qu'influence : c'est-à-dire la capacité d'un électeur à contrôler le résultat d'un vote. Le P-pouvoir est selon eux, le pouvoir entant que prix pour faire allusion à la valeur de Shapley ; ce pouvoir mesure, pour un joueur donné, la part relative qu'il peut espérer obtenir lorsque la coalition auquel il appartient gagne. L'I-pouvoir correspond donc à l'indice de Banzhaf et le P-pouvoir correspond à l'indice de Shapley-Shubik.

Les indices de pouvoir étudiés jusque là ne font que mesurer la probabilité a priori de peser sur une décision et paraissent indépendants de tout présupposé sur les préférences des votants, sur leurs comportement de vote, sur la plus ou moins grande chance que certains individus votent ensemble et sur l'importance des décisions. De ce fait ne pouvons pas nous interroger sur la pertinence de ces indices ?

En effet, la validité des indices de pouvoir a priori est liée à l'hypothèse implicite que toutes les coalitions sont équiprobables. Cette hypothèse n'est pas conforme à la réalité car elle ne prend pas en compte les préférences des votants. On sait que certains groupes d'individus votent plus souvent ensemble que d'autres et donc certaines coalitions de joueurs sont plus fréquentes que d'autres et par conséquent plus probables. Ceci correspond le plus souvent à la convergence ou la divergence de leurs intérêts économique et/ou politique. D’où la remise en cause de cette hypothèse d’équiprobabilité. C’est pourquoi certains auteurs comme Garret et Tsebelis (1999) vont jusqu’à condamner l’utilisation des indices de pouvoir a priori, car considèrent qu’ils ne prennent en compte que la seule information du vote et ignorent les préférences des votants et les comportements qu’elles induisent. Ces indices ne mesurent pas non plus la satisfaction des votants qui prend en compte toutes les fois où un électeur appartient à une coalition gagnante sans être nécessairement pivot.

D’autres types d’indices qui mesurent plutôt la satisfaction des votants que leur chance de peser sur les décisions existent dans la littérature des indices de pouvoirs. C’est l’objet de la prochaine partie.

IV : **Indices de pouvoir et satisfaction des votants**

Tous les indices étudiés précédemment servent à mesurer la *décisivité* des votants ; c'est-à-dire leurs probabilité d'être décisif. Ils mesurent donc le pouvoir a priori des joueurs.

Avec quel indice mesure- t- on le pouvoir de vote qui prendra en compte les préférences des votants ainsi que leur comportement de vote ?

Les indices que nous verrons dans cette section constitueront une tentative de réponse à cette question. Il s'agit notamment de l'indice de satisfaction de Rae (1969) qui a été récemment revisité dans les travaux de Laruelle et Valenciano (2005).

L'indice de satisfaction de Rae et ses extensions.

L'indice de satisfaction de Rae mesure la probabilité d'avoir du succès avant un vote.

Soit N = {1, 2, …, n} l'ensemble des électeurs (les joueurs) et *v* un jeu de vote sur N. Une configuration de vote est l'ensemble des résultats concevable du vote : c'est-à-dire une liste de "oui" et de "non". Dans un jeu de vote ou les votants ne peuvent voter que "oui" ou "non", on a 2^n configurations possibles et chaque configuration peut être représentée par l'ensemble des individus votants pour la proposition.

Soit W_v l'ensemble des configurations gagnantes dans le jeu *v*. L'indice de satisfaction de Rae pour un joueur *i* dans le jeu *v* est donné par la formule suivante :

$$Rae_i(v) = \sum_{i \in S \in W_v} \frac{1}{2^n} + \sum_{i \notin S \notin W_v} \frac{1}{2^n}$$

Rae considère donc à son tour que toutes les configurations possibles de vote sont équiprobables.

Laruelle et Valenciano (2005) donnent une formule revisitée de l'indice de Rae en donnant une formule généralisée pour des cas ou les configurations de vote ne sont pas nécessairement équiprobables. Ils considèrent que toute situation de vote se caractérise par deux ingrédients, à savoir la règle de vote d'une part et le comportement des votants d'autre part. Lorsqu'une proposition est soumise au groupe de décideur, la mise en œuvre de la règle de vote débouche sur une *configuration de vote*, c'est-à-dire sur une liste de « oui » et de « non ». Sous l'hypothèse qu'il n'y a pas d'abstention, il ya 2^n configurations possible. Pour tout $S \subset N$, la configuration S désigne le résultat du vote associé au cas où tous les éléments de S votent " oui" et les éléments n'appartenant pas à S votent "non" : $S \subset N,\ S = \{i | i\ vote\ oui\}$. le comportement des votants est quant à lui donné par une distribution de probabilité notée p définie sur l'ensemble des configurations possibles :

$$p: 2^N \longrightarrow R$$

$$S \longmapsto p(S)$$

Avec $0 \leq p(S) \leq 1 \; et \; \sum_{S \subset N} p(S) = 1$

p(S) est la probabilité que les votants dans S votent "oui" et les votants dans N\{S} votent "non".

Cette distribution p rend compte notamment des éventuelles proximités dans les préférences des votants. Le nouveau jeu est donc noté (v, p) ou v est un jeu simple et p une distribution de probabilité sur l'ensemble des configurations.

Laruelle et Valenciano calculent le succès des votants après et avant un vote. Ainsi, après un vote, le votant i a du succès si la décision finale coïncide avec son vote. Autrement dit, i a du succès si i vote « oui » et le résultat final est « oui » ou si i vote « non » et le résultat final est « non ».

On note :

$$i \; a \; du \; succès \; dans \; v \Leftrightarrow i \in S \in W_v \; ou \; i \notin S \notin W_v$$

Avant un vote le succès des votants dépend de la règle de vote et du comportement de vote des électeurs.

On a donc :

- $\sum_{S:i \in S} p(S)$: la probabilité que l'individu i vote en faveur de la proposition

- $\sum_{S:i \notin S} p(S)$: la probabilité que l'individu i vote contre la proposition

- Et $\sum_{S:S \in W_v} p(S)$: la probabilité que la proposition soit acceptée.

Alors, d'après Laruelle et Valenciano (2005), la probabilité de succès du votant i est donnée par la formule suivante :

$$\delta_i(v,p) = \sum_{i \in S \in W_v} p(S) + \sum_{i \notin S \notin W_v} p(S)$$

Si toutes les configurations de vote sont équiprobables et chaque électeur vote « oui » avec une probabilité de p* = ½ et vote « non » avec une probabilité de ½ indépendamment des autres, on aura :

$$p^*(S) = \frac{1}{2^n} \text{ , } \forall\, S \subseteq N$$

Et on retrouve la formule de l'indice de Rae.

D'où, $$Rae_i(v) = \delta_i(v,p^*) = \sum\nolimits_{i \in S \in W_v} p^*(S) + \sum\nolimits_{i \notin S \notin W_v} p^*(S)$$

La probabilité pour que le votant *i* soit décisif est donnée par la formule :

$$\sum_{i \in S \in W_v \; et \; S - \{i\} \notin W_v} p(S) + \sum_{i \notin S \notin W_v \; et S \cup \{i\} \in W_v} p(S)$$

Si on fait l'hypothèse que toutes les configurations sont équiprobable (pour p = p*), on retrouve la formule de l'indice non normalisé de Banzhaf :

$$\beta_i(v) = \sum_{i \in S \in W_v et \; S \setminus \{i\} \notin W_v} p^*\,(S) + \sum_{i \notin S \notin W_v \; et \; S \cup \{i\} \in W_v} p^*(S)$$

Dubey et Shapley dans leurs articles de 1979 ont montré une relation linéaire entre l'indice de satisfaction de Rae et l'indice non normalisé de Banzhaf.

Ainsi, pour un jeu de vote *v*, on a :

$$2Rae_i(v) = 1 + \beta_i(v) \Longrightarrow Rae_i(v) = \frac{1}{2}\left(1 + \beta_i(v)\right)$$

D'où $\quad 0{,}5 \leq Rae_i(v) \leq 1, \forall\, i \in N.$

La probabilité de succès est donc meilleure que la probabilité d'être décisif car elle est toujours comprise entre 0,5 et 1. Barry (1980) définit la probabilité de succès des votants comme la somme de leur probabilité d'être décisif et de la probabilité d'avoir de la chance :

"*Succès = decisivité + chance*".

Un individu *i* a de la chance dans une élection s'il a du succès sans être décisif. Autrement dit *i* a de la chance si :

$$i \in S \in W_v \ et\ S - \{i\} \in W_v \text{ ou } i \notin S \notin W_v \ et\ S \cup \{i\} \notin W_v.$$

Et la probabilité pour un électeur *i* appartenant à une coalition S dans N d'être chanceux dans un processus électoral est donnée par la formule :

$$\sum_{i \in S \in W_v et\ S \setminus \{i\} \in W_v} p(S) + \sum_{i \notin S \notin W_v et\ S \cup \{i\} \notin W_v} p(S)$$

A partir de l'indice de satisfaction de Rae, découlent deux autres probabilités conditionnelles de succès :

- La probabilité conditionnelle[2] de succès sachant que la personne vote en faveur de la proposition (*i* vote oui et le résultat final est oui) ; notée :

$$\delta_i^{i+}(v,p^*) = \frac{\sum_{i\in S\in W_v} p^*(S)}{\sum_{i\in S} p^*(S)}$$

- La probabilité de succès sachant que la personne vote contre la proposition : *i* vote non et la proposition a été rejetée ; notée :

$$\delta_i^{i-}(v,p^*) = \frac{\sum_{i\notin S\notin W_v} p^*(S)}{\sum_{i\notin S} p^*(S)}$$

Il existe une relation linéaire établie par Laruelle et Valenciano (2005) entre l'indice non normalisé de Banzhaf et les deux probabilités conditionnelles de succès. Notons par exemple

$\sum_{S\in W_v} p^*(S) = \lambda(v,p^*)$ la probabilité d'approbation d'une proposition, et

$1-\lambda(v,p^*)$ la probabilité de rejet de la proposition.

Alors pour un jeu de vote *v*, on a :

---

[2] La probabilité conditionnelle de A sachant B noté p(A/B) est donnée par : $p(A/B) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)}$.

$$\delta_i^{i+}(v,p^*) = \lambda(v,p^*) + \frac{1}{2}\beta_i(v)$$

et

$$\delta_i^{i-}(v,p^*) = 1 - \lambda(v,p^*) + \frac{1}{2}\beta_i(v)$$

$$\delta_i(v,p^*) = p^*\delta_i^{i+}(v,p^*) + (1-p^*)\delta_i^{i-}(v,p^*)$$

On a donc pour le cas des 5 partis politiques fédéraux :

$$p^*(S) = \frac{1}{32} \quad \text{pour tout} \quad S \subseteq N.$$

Et

$$\sum_{S\in W_v} p^*(S) = \lambda(v,p^*) = 0{,}5$$

avec une règle de vote à la majorité simple des voix (50% plus une voix) ce qui fera que la probabilité d'avoir du succès sera la même que les probabilités conditionnelles de succès :

$$\delta_i(v,p^*) = \delta_i^{i+}(v,p^*) + \delta_i^{i-}(v,p^*)$$

Cette égalité n'est pas vraie avec une majorité différente de la majorité absolue.

A noter que la probabilité d'être décisif est la même sachant que la personne vote " pour" ou "contre" la proposition. On a donc pour un jeu *v* :

$$\beta_i(v) = \beta_i^{i+}(v) = \beta_i^{i-}(v)$$

L'indice de satisfaction de Rae souffre également de l'anomalie de l'équiprobabilité des configurations de vote car on sait que dans la réalité, toutes les configurations de vote n'ont pas la même probabilité de se former. Par exemple, l'axe idéologique de certains partis politiques fait qu'ils ont plus d'intérêt en commun que d'autres et vote donc souvent ensemble plus que d'autres.

L'approche de Laruelle et Valenciano permet d'étudier le pouvoir de vote dans des situations de vote réelles, en s'appuyant sur l'observation des votes passés ou sur toutes autres données pour estimer la distribution de probabilité des différentes configurations. Dans ces conditions, la question du « meilleur » indice ne se pose pas puisque l'indice le plus approprié est celui qui utilise la distribution de probabilité qui décrit la réalité de la manière la plus pertinente.

Appliquons maintenant ces indices de pouvoir à un comité particulier comme le parlement canadien.

Section III Applications des indices de pouvoir au cas du parlement canadien

Nous utilisons les formules des indices de Shapley-Shubik et les indices de Banzhaf normalisé et non normalisé pour calculer le pouvoir des différents partis politiques canadiens (voir tableau 6, 7 et 8 ci dessous) ainsi que l'indice de Rae qui mesure la satisfaction des votants. Les résultats obtenus s'interprètent comme suit : en considérant les élections fédérales de 2006, on remarque que contrairement aux élections de 2004, les indépendantistes avec un seul député ont autant de pouvoir de décision que le NPD qui totalise 29 sièges. Durant ce même parlement, un député libéral a changé de caucus pour se trouver du côté des conservateurs, avec ce changement (résultats entre parenthèses) on remarque que le député indépendantiste devient un joueur nul car n'a plus de pouvoir de vote et n'est décisif dans aucune coalition gagnante du fait que le parti conservateur peut former une majorité avec le NPD. Avec ce changement, le NPD, le bloc et le parti libéral ont le même pouvoir de décision quelque soit l'indice de pouvoir utilisé. Cette situation est similaire à la situation actuelle (parlement élu en 2008), ou les indépendantistes avec deux sièges n'ont aucun pouvoir de vote même s'ils décident de voter en bloc. Notons cependant que ces résultats ne tiennent pas compte des changements qui ont suivi après les élections.

On remarque cependant que l'indice de Shapley-Shubik donne approximativement le même pouvoir de vote aux différents joueurs que l'indice normalisé de Banzhaf.

D'autre part, la probabilité pour un parti d'avoir le résultat qu'il souhaite (indice de Rae) est très élevée (au moins 0.50 pour le parti ayant le moins de poids). Avec la majorité simple des voix, la probabilité inconditionnelle de succès est la même que la probabilité pour une proposition d'être rejetée sachant qu'on vote pour ou contre ($\delta_i(v, p*) = \delta_i^{i+}(v, p*) = \delta_i^{i-}(v, p*)$). Cependant, avec un projet de loi nécessitant une majorité des deux tiers, on remarque que les conclusions ne seront plus les mêmes. Par exemple, pour le cas du parlement élu en 2008, avec une majorité des deux tiers des voix on aura une probabilité d'approbation de 31,25% ($\lambda(v, p^*) = 0{,}3125$), contre 50% lorsque la décision est prise avec la règle de décision à la majorité simple.

Le pouvoir de vote n'est donc pas le même que le poids de vote et ne lui est pas proportionnel. Des votants avec des poids de vote très similaires (mais pas identiques) peuvent avoir des pouvoirs de vote très différents et des votants avec des poids de vote différents peuvent avoir le même pouvoir de vote.

	Poids	Shapley-Shubik (%)	Banzhaf normalisé (%)	Banzhaf non normalisé (%)	$\delta_i(v, p^*) = \delta_i^{i+}(v, p^*) = \delta_i^{i-}(v, p^*)$
Lib	135	45	44	68,75	84,37
Cons	99	20	20	31,25	65,62
Bloc	54	20	20	31,25	65,62
NPD	19	11,67	12	18,75	59,37
Ind	1	3,33	4	6,25	53,12

<u>Tableau 7</u> : élections de 2004

	poids	Shapley-Shubik (%)	Banzhaf normalisé (%)	Banzhaf non normalisé (%)	$\delta_i(v,p^*)$ $= \delta_i^{i+}(v,p^*)$ $= \delta_i^{i-}(v,p^*)$
Cons	124 (125)	40 (50)	38,46 (50)	62,5 (75)	81,25
Lib	102 (101)	23,33 (16,67)	23,08 (16,67)	37,5 (25)	68,75
Bloc	54 (54)	23,33 (16,67)	23,08 (16,67)	37,5 (25)	68,75
NPD	29 (29)	6,67 (16,67)	7,69 (16,67)	12,5 (25)	56,25
Ind	1 (1)	6,67 (0)	7,69 (0)	12,5 (0)	56,25

Tableau 8 : élections de 2006

	Poids	Shapley-Shubik (%)	Banzhaf normalisé (%)	Banzhaf non normalisé (%)	$\delta_i(v,p^*) = \delta_i^{i+}(v,p^*) = \delta_i^{i-}(v,p^*)$
Cons	143	50	75	50	75
Lib	77	16,67	25	16,67	58,33
Bloc	49	16,67	25	16,67	58,33
NPD	37	16,67	25	16,67	58,33
Ind	2	0	0	0	50

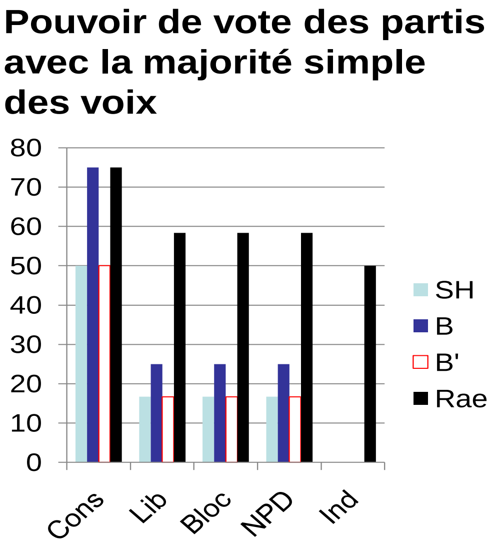
Tableau 9 : élections de 2008

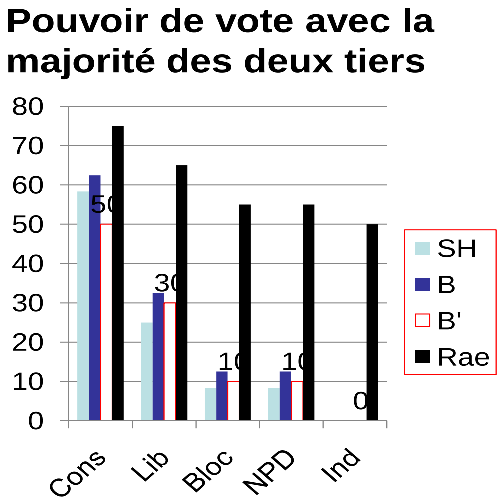
Avec une proposition de loi nécessitant une majorité des deux tiers des voix, on obtient le tableau suivant :

	Poids	$SH_i(v)$ (%)	$\beta_i(v)$ (%)	$\beta_i'(v)$ (%)	$\delta_i(v,p^*)$ %	$\delta_i^{i+}(v,p^*)$	$\delta_i^{i-}(v,p^*)$
Cons	143	58,33	62,5	50	75	56,25	93,75
Lib	77	25	32,5	30	65	46,25	83,75
Bloc	49	8,33	12,5	10	55	36,25	73,75
NPD	37	8,33	12,5	10	55	36,25	73,75
Ind	2	0	0	0	50	31,25	68,75

Tableau 10 : élections de 2008 (majorité des deux tiers)

Ces deux derniers tableaux sont résumés dans les deux graphiques suivantes :





Section IV. Deux méthodes pour former un gouvernement après une élection :

Dans nombre de pays, les élections législatives sont toujours suivies par la formation d’un gouvernement, majoritaire ou non. Dans cette section, nous allons étudier quelles coalitions peuvent former un gouvernement après une élection en utilisant comme indice de pouvoir la valeur de Shapley des jeux avec unions a priori ou valeur d’Owen (Owen 1977) à la manière de Owen- Carreras (1998) et Sosnowska (2000). Autrement dit, quels partis peuvent s’unir entre eux pour former un gouvernement "stable" étant donné un certain nombre de critères que nous énumérons ci après. Nous proposons dans notre étude, deux méthodes pour former un gouvernement (voir Andjiga, Mbih et Badirou 2006) à savoir la méthode parlementaire qui est adopté dans plusieurs pays comme le Canada et la méthode du cœur qui est une des principales solutions connues en théorie des jeux coopératifs.

I. La méthode parlementaire

Avec la méthode parlementaire, c’est le parti qui obtient le plus grand nombre de sièges qui forme le gouvernement même s’il n’a pas la majorité absolue des sièges (50% plus un siège). Si le gouvernement en place ne possède pas la majorité absolue des sièges au parlement alors il est dit gouvernement minoritaire. Pour faire passer ses projets de loi, il doit former coalition avec d’autres partis politiques. Pour que ce gouvernement soit "stable", le parti qui détient la majorité des sièges doit choisir une partition qui satisfait les quatre critères suivants :

- ***Critère 1*** : le parti qui a le plus grand nombre de sièges noté dorénavant parti 1 par souci de simplicité, doit choisir une partition qui contient une coalition gagnante dont il est membre.
- ***Critère 2*** : le parti 1 doit choisir une partition dans laquelle il détient le maximum de pouvoir.
- ***Critère 3*** : le pouvoir du parti 1 et de ses partenaires doit être indépendant de la configuration des partis de l'opposition. Autrement dit, le pouvoir du parti 1 et de ses partenaires doit être le même, que les partis de l'opposition soient unis ou divisés.
- ***Critère 4*** : étant donné les critères 1 2, et 3 le parti 1 doit choisir une partition qui contient possiblement moins de joueurs décisifs.

II. La méthode du cœur

Après l'évaluation du pouvoir de chaque parti dans les différentes partitions possible en utilisant la valeur d'Owen étant donné les différentes unions a priori, on détermine l'ensemble des coalitions gagnantes, sur laquelle nous définissons la relation de dominance d'une partition (ANdjiga , Mbih et Badirou 2006) de la manière suivante : soient P_1 et P_2 deux partitions, on dit que la partition P_1 domine la partition P_2 s'il existe une coalition gagnante dans P_1 telle que chaque parti dans cette coalition, a un pouvoir de vote dans P_1 supérieur à son pouvoir de décision dans P_2.

Le cœur du jeu est défini comme l'ensemble des partitions non dominées.

III. Applications au parlement canadien et au parlement québécois

Dans cette partie, nous allons analyser les résultats des différentes élections législatives canadiennes et québécoises en déterminant les gouvernements qui auraient pu être formés en considérant la méthode du cœur et la méthode parlementaire comme décrites précédemment à partir des différentes partitions possibles.

1. Le cas du parlement Canadien

- ***Les élections fédérales de 2006***

Nous allons déterminer le pouvoir des différents partis politiques selon les différentes unions a priori possibles en considérant uniquement les partitions contenant une coalition gagnante.

Partitions	Pouvoir de Owen-Shapley
{12,3,4,5}	(58,33 ; 41,66 ; 0 ; 0 ; 0)
{12,34,5}	(0,50 ; 0,50 ; 0 ; 0 ; 0)
{12,3,45}	(66,66 ; 33,33 ; 0 ; 0 ; 0)
{12,35,4}	(0,50 ; 0,50 ; 0 ; 0 ; 0)
{12,345}	(0,50 ; 0,50 ; 0 ; 0 ; 0)
{13,2,4,5}	(58,33 ;0 ; 41,67 ; 0 ; 0)
{13,24,5}	(0,50 ; 0 ; 0,50 ; 0 ; 0)
{13,2,45}	(66,66 ; 0 ; 33,33 ; 0 ; 0)
{13,25,4}	(0,50 ; 0 ; 0,50 ; 0 ; 0)
{13,245}	(0,50 ; 0 ; 0,50 ; 0 ; 0)

{123,4,5}	(55,56 ; 22,22 ; 22,22 ; 0 ; 0)
{123,45}	(66,66 ; 16,66 ; 16,66 ; 0 ; 0)
{124,3,5}	(55,55 ; 38,88 ; 0 ; 5,55 ; 0)
{124,35}	(0,50 ; 0,50 ; 0 ; 0 ; 0)
{125,3,4}	(55,55 ; 38,88 ; 0 ; 0 ; 5,55)
{125,34}	(50 ; 50 ; 0 ; 0 ; 0)
{134,2,5}	(55,55 ; 0 ; 38,88 ; 5,55 ; 0)
{134,25}	(0,50 ; 0,50 ; 0 ; 0 ; 0)
{135,2,4}	(55,55 ; 0 ; 38,88 ; 0 ; 5,55)
{135,24}	(50 ;0 ; 50 ; 0 ; 0)
{145,2,3}	(55,55 ; 0 ; 0 ; 22,22 ; 22,22)
{145,23}	(33,33 ; 0 ; 0 ; 33,33 ; 33,33)
{234,1,5}	(0 ; 38,88 ; 38,88 ; 22,22 ; 0)
{234,15}	(0 ; 33,33 ; 33,33 ; 33,33 ;0)
{235,1,4}	(0 ; 38,88 ; 38,88 ; 0 ; 22,22)
{235,14}	(0 ; 33,33 ; 33,33 ; 0 ; 33,33)
{1,2345}	(0 ; 41,67 ; 41,67 ; 8,33 ; 8,33)
{1234,5}	(41,66 ; 25 ; 25 ; 8,33 ; 0)
{1235,4}	(41,66 ; 25 ; 25 ; 0 ; 8,33)
{1245,3}	(58,33; 25 ; 0 ; 8,33 ; 8,33)
{1345,2}	(58,33 ; 0 ; 25 ; 8,33 ; 8,33)
{12345}	(40 ; 23,33 ; 23,33 ; 6,67 ; 6,67)

Tableau 11

Les deux méthodes donnent les résultats regroupés dans le tableau suivant :

Critère 2	Critère 3	Critère 4	Méthode parlementaire	Cœur
{12,3,45} {13,2,45} {123,45}	-	{12,3,45} {13,2,45}	-	-

Tableau 12

Ici la méthode parlementaire ne propose aucune solution car les partitions {12,3,45}, {13,2,45} et {123,45} ne respectent pas le critère 3 (voir tableau 10). En effet, le pouvoir de la coalition formée par le joueur 1 et ses partenaires varie selon que les membres de l'opposition sont unis ou divisés. On remarque également que le cœur du jeu est vide car il n'existe pas de coalition qui ne soit dominée par une autre coalition.

- ***Les élections fédérales de 2008***

  La chambre des communes du parlement canadien après les élections de 2008 est décrit par le jeu v : (154 ; 145, 75, 49, 36, 2). L'ensemble des coalitions gagnantes est donné dans le tableau 3. On peut donc calculer le pouvoir des différents partis en considérant les différentes unions a priori à partir de la valeur de Shapley - Owen. Les résultats sont résumés dans le tableau 13 ci-dessous.

Unions a priori	Valeur Owen
{12,3,4,5}	(66,66 ; 33,33 ; 0 ; 0 ; 0)
{12,34,5}	(0,50 ; 0,50 ; 0 ; 0 ; 0)
{12,3,45}	(66,66 ; 33,33 ; 0 ; 0 ; 0)
{12,34,5}	(66,66 ; 33,33 ; 0 ; 0 ; 0)
{12,345}	(0,50 ; 0,50 ; 0 ; 0 ; 0)
{13,2,4,5}	(66,66 ; 0 ; 33,33 ; 0 ; 0)
{13,24,5}	(0,50 ; 0 ; 0,50 ; 0 ; 0)
{13,2,45}	(66,66 ; 0 ; 33,33; 0 ; 0)
{13,24,5}	(66,66 ; 0 ; 33,33 ; 0 ; 0)
{13,245}	(0,50 ;0 ; 0,50 ; 0 ; 0)
{14,2,3,5}	(66,66 ; 0 ; 0 ; 33,33 ; 0)
{14,2,35}	(66,66 ; 0 ; 0 ;33,33 ; 0)
{14,23,5}	(0,50 ;0 ;0 ; 0,50 ; 0)
{14,25,3}	(66,66 ; 0 ; 0 ;33,33 ; 0)
{14,235}	(50 ;0 ;0 ; 50 ; 0)
{123,4,5}	(66,66 ; 16,66 ; 16,66 ; 0 ; 0)
{123,45}	(66,66 ; 16,66 ; 16,66 ; 0 ; 0)
{124,3,5}	(66,66 ; 16,66 ; 0 ; 16,66 ; 0)
{124,35}	(66,66 ; 16,66 ; 0 ; 16,66 ; 0)
{125,3,4}	(66,66 ; 33,33 ; 0 ; 0 ; 0)
{125,34}	(0,50 ; 0,50 ; 0 ; 0 ; 0)
{134,2,5}	(66,66 ; 0 ; 16,66 ; 16,66 ; 0)
{134,25}	(66,66 ;0 ; 16,66 ; 16,66 ; 0)
{135,2,4}	(66,66 ; 0 ; 33,33 ; 0 ; 0)
{135,24}	(0,50 ;0 ; 0,50 ; 0 ; 0)

{145,2,3}	(66,66 ; 0 ; 0 ; 33,33 ; 0)
{145,23}	(50 ;0 ;0 ; 50 ; 0)
{234,1,5}	(0 ; 33,33 ; 33,33 ; 33,33 ; 0)
{234,15}	(0 ; 33,33 ; 33,33 ; 33,33 ; 0)
{2345,1}	(0 ; 33,33 ; 33,33 ; 33,33 ; 0)
{1234,5}	(50 ; 16,66 ; 16,66 ; 16 ,66 ; 0)
{1235,4}	66,66 ; 16,66 ; 16,66 ; 0 ; 0)
{1245,3}	(66,66 ; 16,66 ; 0 ; 16,66 ; 0)
{1345,2}	(66,66 ; 0 ; 16,66 ; 16,66 ; 0)
{12345}	(50 ; 16,66 ; 16,66 ; 16 ,66 ; 0)

Tableau 13

La méthode parlementaire et la méthode du cœur nous donnent les résultats suivants résumés dans le tableau 14 suivant.

Critère 2	Critère 3	Critère 4	Méthode parlementaire	Cœur
{12,3,4,5}	{123,4,5}	{123,4,5}	{123,4,5}	{12,3,4,5}
{12,3,45}	{123,45}	{123,45}	{123,45}	{12,3,45}
{12,34,5}	{124,3,5}	{124,3,5}	{124,3,5}	{12,34,5}
{13,2,4,5}	{124,35}	{124,35}	{124,35}	{13,2,4,5}
{13,2,45}	{134,2,5}	{134,2,5}	{134,2,5}	{13,2,45}
{13,24,5}	{134,25}	{134,25}	{134,25}	{13,24,5}
{14,2,3,5}	{1235,4}			{14,2,3,5}
{14,2,35}	{1245,3}			{14,2,35}
{14,25,3}	{1345,2}			{14,25,3}
{123,4,5}				{123,4,5}
{123,45}				{123,45}
{124,3,5}				{124,3,5}
{124,35}				{124,35}
{125,3,4}				{125,3,4}
{134,2,5}				{134,2,5}
{134,25}				{134,25}
{135,2,4}				{135,2,4}
{145,2,3}				{145,2,3}
{1235,4}				
{1245,3}				
{1345,2}				

Tableau 14

Dans ce cas présent, la méthode parlementaire conduit au pouvoir les coalitions 123, 124 où 134. Autrement dit, le parti conservateur doit former coalition avec soit les libéraux et le bloc québécois, ou avec les libéraux et le NPD ou bien avec le Bloc Québécois et le NPD; les autres partis étant réunis ou séparés du coté de l'opposition. Dans ce jeu, la méthode parlementaire choisit des partitions qui appartiennent tous au cœur du jeu.

Le cas du Québec

Pour le Québec, nous allons considérer les parlements de la 38° et de la 39° législature. Cependant, ce cas n'est pas aussi intéressant du fait du nombre restreint de partis (3 pour le premier et 4 pour le deuxième).

- ***Le parlement de la 38° législature***

  Ce parlement est décrit par le jeu *v* : (63 ; 48, 41, 36). En utilisant la valeur d'Owen aux différentes partitions possibles, on obtient les résultats suivants :

Partitions	Valeur d'Owen
{12,3}	(50 ; 50 ; 0)
{13,2}	(50 ; 0 ; 50)
{1,23}	(0 ; 50 ; 50)
{123}	(33,33 ; 33,33 ; 33,33)

Tableau 15

Dans ce jeu, tous les joueurs ont le même pouvoir de vote. Les coalitions gagnantes sont : 12, 13, 23 et 123. Cependant, en considérant les quatre critères cités ci haut, seules les partitions {12, 3} et {13,2} peuvent former un gouvernement. Quant à la méthode du cœur, en plus des partitions {12, 3} et {13,2}, on peut également avoir la partition {1, 23}. Dans ce dernier cas, c'est la coalition 23 qui forme le gouvernement.

- ***Le parlement de la 39° législature***

  Depuis le 29 juin 2009 le nombre de députés de l'assemblée nationale québécoise est reparti comme suit :
- Parti Liberal du Québec : 67
- Parti québécois : 50
- Action Démocratique du Québec : 6
- Québec solidaire : 1
- Siege vacant : 1

  Ce parlement est caractérisé par le jeu v : (63 ; 67, 50, 6, 1). Dans ce parlement le parti libéral détient la majorité absolue des sièges et peut donc faire passer ses projets de loi sans l'aide des autres joueurs. Le parti libéral peut donc former seul un gouvernement stable selon la méthode parlementaire et la méthode du cœur. Cette situation correspond à la configuration actuelle du parlement québécois.

Conclusion

La théorie des jeux coopératifs permet grâce aux indices de pouvoir de modéliser les processus de décision collectifs dans une assemblée ou un comité et plus généralement dans toute structure usant du vote pour prendre des décisions et dans laquelle les différents participants au vote peuvent avoir des poids de vote différents. Ainsi, de nombreux indices de pouvoir existent dans la littérature dont l'indice de Shapley-Shubik, et l'indice de Banzhaf.

Comme les indices les plus utilisés dans la littérature des indices de pouvoir servent à mesurer la probabilité d'être décisif dans une élection et ne prennent donc pas compte la satisfaction des votants ni leurs préférences, on pourrait s'intéresser à d'autres indices de pouvoir qui prennent en compte la satisfaction des votants ainsi que leurs comportement de vote. Les résultats obtenus nous montrent que le pouvoir de vote n'est pas le même que le poids de vote et il n'est pas non plus proportionnel à ce dernier. Il dépend par ailleurs de la règle de vote et du comportement des votants.

Ces indices nous permettent de choisir une partition optimale pour la formation d'un gouvernement à travers les deux méthodes citées ci haut. Notons que la méthode parlementaire donne avantage au parti détenant le maximum de pouvoir de former un gouvernement, alors qu'avec la méthode du cœur il peut se trouver du coté de l'opposition s'il appartient à une partition dominée. Mais il arrive souvent qu'aucune de ces deux méthodes ne propose de solution, étant donné les difficultés à satisfaire les quatre critères énumérés ci- haut et la vacuité du cœur dans certaines situations. Ces méthodes ne garantissent donc pas l'existence d'une solution ; mais si une telle solution existe elle garantirait une stabilité politique.

La valeur d'Owen utilisée pour calculer le pouvoir des joueurs dans les jeux avec union a priori suggère que les partis qui forment une union a priori ont des intérêts communs et partagent le plus souvent les mêmes idées. Ce qui est rarement le cas et prouve les difficultés à avoir un gouvernement de coalition. Ceci reflète la réalité du système parlementaire canadien étant donné l'absence d'un axe idéologique. Ce qui explique les nombreuses élections législatives car les gouvernements minoritaires arrivent rarement au terme de leur mandat.

Bibliographie

1- Andjiga Mbih et Badirou, 2006, On The Evaluation of Power in Parliaments and Government Formation, *working paper*.

2- Andjiga, Chantreuil, et Lepelley, 2003, la mesure du pouvoir de vote, *Mathématiques et Sciences Humaines* 163, 11-145.

3- Banzhaf, 1965, weighted voting doesn't work: A Mathematical Analysis, *Rutgers Law Review* 19, pp. 317-343.

4- Barry 1980; is it better to be powerful or lucky? Part 1; *political studies* 28 (2): pp 183-194.

5- Barry 1980; is it better to be powerful or lucky? Part 2; *political*

6- Barthélémy et Martin, 2007 ; critères pour une meilleure répartition des sièges au sein des structures intercommunales. Une application au cas du Val d'Oise. *Revue Economique* n°2 vol 58 pp 399-425.

7- Bisson, Bonnet et Lepelley, 2004 ; la détermination du nombre des délégués au sein des structures intercommunales : une application de l'indice de pouvoir de Banzhaf, *Revue d'Economie Régionale et Urbaine* n°2 (2004).

8- Bobay, 2001 ; la reforme du conseil de l'Union Européenne à partir de la théorie des jeux. *Revue Française d'Economie* vol 16.

9- Bobay, 2004 ; constitution européenne : redistribution du pouvoir des Etats au conseil de l'UE. *Economie et Prévision* n°163 vol 2

10- Coleman, 1986; Individual Interest and Collective Action, Cambridge University press.

11- Deegan et Pachel, 1978; A New Index of Power for n- Person Games. *International Journal of Game Theory* 7, pp. 113- 123.

12- Dubey et Shapley, 1979; mathematical properties of the Banzhaf power index. *Mathematics of Operations Research* 4, pp 99-131.

13- Feix, Leppeley, Merlin et Rouet 2007, décision et pouvoir dans les structures fédérales, les mathématiques des élections indirectes.

14- Felsenthal et M. Machover, 2005; voting power measurement: a story of misreinvention. *Social Choice and Welfare* 25 pp 485-506.

15- Felsenthal et Machover, 1995; Postulates and Paradoxes of Relative Voting Power- A Critical Reappraial, *Theory and Decision* 38 pp. 195-229.

16- Felsenthal et Machover, 1998; the measurement of voting power: theory and practice, problems and paradoxes. *Edward Elgar*.

17- Felsenthal et Machover, 2001; the treaty of Nice and qualified majority voting. *Social Choice and Welfare* 18 pp 431-464.

18- Garrett et Tsebelis, 1999, why resist the temptation to apply power indices to European Union? *Journal of Theoretical Politics* 11, 291-308.

19- Gelman, Katz et Bafumi 2004, standard voting power indexes do not work. *British Journal of political sciences* volume 34, pp 657-674.

20- Holler et Packel, 1983; Power, Luck and the Right Index, *Journal of Economics* 43, PP. 21-29.

21- Junn 1972, la politique de l'amendement des articles 23 et 27 de la charte des Nations Unies. Analyse mathématique. *Mathématiques et Sciences Humaines* tome 40 pp 19-23.

22- Kilgour, 1982; A Formal Analysis of the Amending Formula of Canada's Constitution Act, *Canadian Journal of Political Science* 16, 771-777.

23- König et Bräuninger, 1998, the Inclusiveness of European Decision Rules, *Journal of Theoretical politics* 10, 125-142.

24- Laruelle et Widgrén, 1998, is the allocation of voting power among the EU states fair? *Public Choice* 94, PP. 317-339.

25- Laruelle et Valenciano, 2001; Shapley-Shubik and Banzhaf indices revisited, *Mathematics of operations Research* 26, pp. 89-104.

26- Laruelle et Valenciano, 2005, a critical reappraisal of some voting power paradoxes. *Public Choice* 125: 17-41.

27- Laruelle et Valenciano, 2005; assessing success and decisiveness in voting situations, *Social Choice and Welfare* 24, pp. 171-197.

28- Laruelle, Martinez et Valenciano, 2006; success versus decisiveness: conceptual discussion and case study, *Journal of Theoretical Politics* 18 (2): 185-205.

29- Leech, 1990, power indices and probabilistic voting assumptions. *Public Choice* 66, pp 293-299

30- Levesque et Moore, 1984; Citizen and Provincial Power Under Alternative Amending Formulae: An Extension of Kilgour Analysis, *Canadian Journal of Political Science,* vol. 17, N_o. 1, pp. 157-166.

31- Lluis, 1993; Etude de la Valeur de Shapley et son Application au Calcul du Pouvoir des Provinces Canadiennes dans le vote d'un projet de loi au parlement, *Mémoire de Maitrise ES Science (M.Sc.) Université de Montréal.*

32- Maaser et Napel 2006, equal representation in two tier voting systems. *Social Choice and Welfare.*

33- Miller, 1973; a Shapley Value Analysis of the Proposed Canadian Constitutional Amendment Scheme. *Canadian Journal of Political Sciences,* Vol. 6, pp 140-143.

34- Owen et Carreras, 1988; Evaluations of the Catalonian Parliament 1980- 1984, *Mathematical Social Sciences*, 15(1), pp 87-88.

35- Owen, 1978, characterization of the Banzhaf-Coleman index; *SIAM Journal of Applied Mathematics* 5, PP 315-327

36- Owen, 1977; Values of games with a priori unions. In R Henn, O. Moeschlin. (Eds), *Mathematical Economics and Game Theory* (pp 76-78). Berlin: Spring- Verlag.

37- Pajala, Meskanen et Kause, 2002, voting power web site, http://powerslave.Val.utu.fi.

38- Penrose, 1946; The Elementary Statistics of Majority voting, *Journal of the Royal Statistical Society*, 109, pp. 53-57.

39- Rae, 1969, decisions rules and individual values in constitutional choice, *American Political Science Review* 63, pp. 40-56.

40- Shapley , 1953, a value for n-person games, in H. W. Kuhn and A. W. Tucker, contributions to the theory of games II, *Annals of Mathematics Studies* 58, pp. 307-317.

41- Shapley et Shubik, 1954, a method for evaluating the distribution of power in a committee system, *American Political Science Review* 48, PP 787-792.

42- Sosnowska, 2000; Some remarks on game theoretical approach to prediction of formation of parliamentary coalitions. The case of Polish elections of 1997. *Annals of Operations Research* 97 (2000) 3- 14

43- Straffin, 1977, homogeneity, independence and power indices, *Public Choice* 30, PP. 107-118.

44- Straffin, 1982; Power Indices in Politics, in S. J. Brams, W. F. Lucas P. D. Straffin (eds), *Political and Related Models*, Springer, New York, pp. 256-321.

studies 28 (3): pp 338-352.

45- Von-Neumann et Morgenstern, 1944; Theory of Games and Economic Behaviour, *Princeton University Press 1953*.