

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL  
DÉPARTEMENT SCIENCES ÉCONOMIQUES

RAPPORT DE RECHERCHE POUR L'OBTENTION  
DE MAÎTRISE EN ÉCONOMIE FINANCIÈRE

PAR: Farah HADJ ALI

ENCADRÉ PAR: Professeur Marc HENRY

ÉTUDE COMPARATIVE DU MODÈLE GARCH(1,1) UNIVARIÉ  
ET DE LA SIMULATION HISTORIQUE DANS LES PRÉVISIONS  
DE « VALUE AT RISK » ET « EXPECTED SHORTFALL »

MONTRÉAL, LE 21 MARS 2010

# **ÉTUDE COMPARATIVE DU MODÈLE GARCH(1,1) UNIVARIÉ ET DE LA SIMULATION HISTORIQUE DANS LES PRÉVISIONS DE « VALUE AT RISK » & « EXPECTED SHORTFALL »**

HADJ ALI, Farah

## **SOMMAIRE**

Pour n'importe quel investisseur, il est primordial d'évaluer le risque et la perte potentielle qu'il pourrait encourir suite à une position d'investissement bien déterminée. Plusieurs mesures s'offrent à lui. Chacune a ses avantages comme elle a ses inconvénients. Il doit savoir alors laquelle est la plus fiable et la plus pertinente afin de réduire le plus possible le risque de son placement. Pour cela, le choix de la méthode de prévision de ces mesures est un facteur déterminant. La présente étude s'articule autour de deux mesures de risque: la Value at Risk (VaR) et l'Expected Shortfall (ES) qui seront estimées par deux méthodes: le modèle GARCH(1,1) univarié et la simulation historique.

Le but de ce travail est de répondre à ce problème: étant donnée une position d'investissement connue, quelle méthode choisir pour la prévision de la VaR et ES; la méthode paramétrique basée sur le modèle GARCH(1,1) ou la méthode non paramétrique par la simulation historique?

Pour répondre à cette question, une étude empirique est menée sur l'actif NASDAQ100 pendant la période s'étalant du 1<sup>er</sup> janvier 1988 au 31 Décembre 2008. Le modèle GARCH(1,1) univarié a été utilisé dans deux cas: en présence d'une distribution Normale et d'une distribution Student. Les volatilités estimées des deux modèles ont été utilisées pour calculer la VaR et l'ES. Une taille de fenêtre de l'échantillon de log-rendements de l'actif a été fixée pour la méthode de simulation historique. Après avoir calculé les VaR et ES par les deux méthodes, un backtesting a été effectué afin de déterminer la bonne méthode à prévoir le risque du marché par la VaR et ES.

Selon les résultats aboutis, les volatilités de l'indice NASDAQ100 sont bien estimées dans le modèle GARCH(1,1) aussi bien avec la loi Normale qu'avec Student. Ce résultat a été vérifié par l'approche de Pagan et Schwert (1990). Le calcul de la VaR et ES est alors effectué pour

les deux modèles. Avec une taille de fenêtre de 1/6 de celle de notre échantillon d'étude, la simulation historique de la VaR et ES a été établie.

Reste à identifier laquelle des deux méthodes est appropriée. Deux tests de backtesting sont effectués pour la VaR. Un test sur l'hypothèse de couverture non conditionnelle et un test sur l'hypothèse d'indépendance. Un autre test pour l'ES qui consiste à une régression de l'écart entre les rendements observés et les valeurs d'ES de la même période.

Les tests de la VaR ont validés les deux modèles de GARCH(1,1) et ont rejeté la simulation historique dans la prévision de la VaR. Par contre, le résultat du backtesting d'ES a validé la simulation historique et a rejeté le modèle GARCH(1,1) dans la prévision de l'ES.

## TABLE DES MATIÈRES

	Page
INTRODUCTION .....	1
CHAPITRE 1 ANALYSE THÉORIQUE .....	5
1.1 Aperçu général sur les mesures de risque .....	5
1.1.1 Type du risque.....	5
1.1.2 Aperçu historique sur les mesures de risque d'un portefeuille du marché .....	8
1.2 La méthode Value at Risk (VaR).....	11
1.2.1 Définition .....	11
1.2.2 Méthodes de calcul de la VaR .....	13
1.2.3 Propriétés de la VaR .....	16
1.3 Méthodes de mesure de risque cohérentes.....	18
1.3.1 Définition .....	18
1.3.2 Propriétés des mesures de risque cohérentes .....	18
1.3.3 Expected Shortfall (ES): Définition et méthodes de calcul .....	19
CHAPITRE 2 ÉTUDE EMPIRIQUE .....	22
2.1 VaR et ES : Études empiriques antérieures .....	22
2.2 Description des données .....	24
2.3 Calcul de la VaR et ES.....	28
2.3.1 Méthode paramétrique : le modèle GARCH(1,1) univarié.....	30
2.3.1.1 Présentation du modèle GARCH (1,1) univarié .....	30
2.3.1.2 Calcul de VaR et ES .....	32
2.3.2 Méthode non paramétrique : la simulation historique .....	34
2.3.2.1 Présentation de la méthode .....	34
2.3.2.2 Calcul de la VaR et ES.....	34
2.4 Résultats empiriques.....	35
2.4.1 Estimation du modèle GARCH(1,1).....	35
2.4.1.1 Paramètres initiaux du modèle.....	36
2.4.1.2 Le modèle GARCH(1,1) univarié avec $\varepsilon \sim N(0,1)$ .....	36
2.4.1.3 Le modèle GARCH(1,1) univarié avec $\varepsilon \sim t(\nu)$ .....	37
2.4.2 Calcul des VaR et ES.....	38
2.4.2.1 Test de validation des volatilités estimées .....	39
2.4.2.2 Résultats.....	40
2.4.3 Le Backtesting .....	44
2.4.3.1 Tests des prévisions de la VaR .....	45
2.4.3.2 Test de prévision d'ES.....	51
CONCLUSION	55
BIBLIOGRAPHIE.....	57

## LISTE DES FIGURES

	Page
FIGURE 1.	EXEMPLE DE VAR À 5% D'UNE DISTRIBUTION DE PERTE ET PROFIT NORMALE ..... 13
FIGURE 2.	EXEMPLE D'ES À 5% D'UNE DISTRIBUTION DE PERTE ET PROFIT NORMALE ..... 21
FIGURE 3.	VALEUR DE L'INDICE SUR LA PÉRIODE DU 1 <sup>ER</sup> JANVIER 1998 AU 31 DÉCEMBRE 2008 ..... 26
FIGURE 4.	LES LOG-RENDEMENTS DE L'INDICE NASDAQ100 ..... 27
FIGURE 5.	CARACTÉRISTIQUES DE LA DISTRIBUTION DE L'INDICE ..... 28
FIGURE 6.	CALCUL DE LA VAR ET ES PAR LE MODELE GARCH(1,1) UNIVARIE..... 33
FIGURE 7.	CALCUL DE LA VAR ET ES PAR LA SIMULATION HISTORIQUE ..... 35
FIGURE 8.	RESULTATS DE LA REGRESSION DES VOLATILITES DU MODELE AVEC LOI NORMALE..... 39
FIGURE 9.	RESULTATS DE LA REGRESSION DU MODELE AVEC LOI STUDENT ..... 39
FIGURE 10.	RESULTATS DE CALCUL DE LA VAR ET ES A 5% PAR LE MODELE GARCH(1,1) AVEC $\varepsilon \sim N(0,1)$ ..... 41
FIGURE 11.	RESULTATS DE CALCUL DE LA VAR ET ES A 5% PAR LE MODELE GARCH(1,1) AVEC $\varepsilon \sim t(12)$ ..... 42
FIGURE 12.	RÉSULTATS DE CALCUL DE LA VAR ET ES À 5% PAR LA SIMULATION HISTORIQUE ..... 44
FIGURE 13.	VIOLATIONS DE LA VAR5% DU MODELE GARCH (1,1) AVEC $\varepsilon \sim N(0,1)$ ..... 46
FIGURE 14.	VIOLATIONS DE LA VAR5% DU MODELE GARCH (1,1) AVEC $\varepsilon \sim t(12)$ ..... 47
FIGURE 15.	VIOLATIONS DE LA VAR 5% DE LA SIMULATION HISTORIQUE..... 48

## INTRODUCTION

La libéralisation des marchés financiers, l'extension considérable des mouvements de capitaux et l'apparition continue de nouveaux produits financiers ont contribué à rendre le paysage financier de plus en plus incertain et instable. Cette situation a provoqué une volatilité importante au niveau des prix et a conduit parfois à des mouvements de prix extrêmes.

Ces dernières décennies ont été marquées par plusieurs crises financières qui ont entravé de graves problèmes économiques non seulement à l'échelle nationale mais aussi à l'échelle mondiale. La crise récente des suprimés (subprime mortgage meltdown), qui a été déclenchée par une crise de marché des prêts hypothécaires à risque aux États Unis, est un exemple. Elle a conduit à une récession économique nationale puis proliféré pour devenir une crise financière mondiale à partir de l'été 2007. Autre exemple est la quasi-faillite du Hudge Fund «Long term Capital Management» qui a entraîné de graves problèmes dans le système bancaire international conduisant à d'importantes perturbations financières mondiales en 1998.

Suite à ce genre d'événements, les autorités sont intervenues à plusieurs reprises afin d'instaurer une réglementation plus rigoureuse aux institutions financières. Elles leur exigeaient de développer des mesures de risque internes plus efficaces dans le but de détecter les défaillances et les ajuster pour éviter les grandes pertes, les faillites et même les crises mondiales.

La notion de mesure de risque n'est pas nouvelle dans la théorie financière. En effet, elle est liée au concept de probabilité apparu au dix-septième siècle par les jeux du hasard. Mais cette approche est mise en évidence par l'apparition de la théorie de Markowitz dans les années cinquante, puis d'autres mesures ont été développées tel que la notion de Beta, le modèle CAPM et le modèle APT.

Néanmoins, toutes ces mesures classiques ont montré leurs limites dans ce nouvel environnement financier très turbulent.

La prolifération des crises financières et la limite des approches de mesure de risque antérieures ont amené les chercheurs et praticiens à développer de nouvelles mesures de risque de marché compatibles avec ce nouveau contexte. D'où l'initiation de la banque JP Morgan par la fameuse méthode Valeur à risque (Value At Risk) par le système Riskmetrics. Il est devenu accessible librement sur internet à partir d'Octobre 1994. Ce système était développé suite à la décision du directeur de la banque JP Morgan. Ce dernier exigeait un rapport journalier sur le risque et les pertes potentielles encourus par la banque dans les prochaines vingt-quatre heures.

Suite au succès de cette méthode, conçue comme une simple mesure de risque interne, la VaR est devenue une approche utilisée par toutes les banques. Elle leur permettait d'évaluer le risque global conformément aux accords de Bâle sur le capital des banques. Elle reflète la perte maximale d'une position d'investissement sur une période bien déterminée et qui ne sera dépassée qu'avec une probabilité fixée auparavant.

Outre le Riskmetrics, d'autres méthodes ont été développées pour estimer la VaR. Trois principales catégories de méthodes sont apparues: méthodes paramétriques (la famille du modèle économétrique GARCH), méthodes semi-paramétriques (CAViaR, théorie des extrêmes) et les méthodes non paramétriques (tel que la simulation historique et la simulation Monte Carlo).

Malgré le grand succès de la VaR, la philosophie de la méthode est souvent mal comprise et donc mal interprétée. Elle est devenue sujet de plusieurs critiques notamment au sujet de ses propriétés. Il s'est avéré qu'elle contredit la notion de la diversification dans la théorie financière puisqu'elle ne vérifie pas la propriété de la « sous additivité » à l'échelle d'un portefeuille agrégé.

L'origine de cette critique est les travaux d'Artzner et al (1997,1999) qui ont montré que la VaR n'est pas une mesure de risque cohérente. D'où l'apparition d'autres mesures dont les propriétés sont plus avantageuses que la VaR.

Notre travail s'accroche sur les deux mesures de risque: la VaR et la VaR conditionnelle (ou appelée Expected Shortfall). Elles sont les plus connues sur le marché financier; largement utilisées par les gestionnaires grâce à leur simplicité, leur moindre coût ainsi qu'à la diversité de leurs méthodes de calcul. Parmi ces méthodes, nous citons la simulation historique qui est la méthode la plus appliquée. Mais ce succès est-il fondé sur des résultats pertinents qu'elle fournit ou simplement à sa facilité et sa rapidité de calcul? Une étude comparant cette méthode non paramétrique et une autre méthode paramétrique par le modèle GARCH(1,1) univarié est établie. Le but est de déterminer la méthode qui procure une meilleure prévision de risque du marché par la VaR et la ES.

Afin de répondre à cette question, la démarche suivie par cette étude s'articulera sur trois chapitres:

- Le premier chapitre sera consacré à une analyse théorique qui comportera trois sections. La première section présentera un aperçu général sur les mesures de risques sur le marché financier. La deuxième section portera sur la notion de la VaR et ses propriétés. Par la suite une autre section sur les mesures de risques cohérentes, en particulier celle de notre étude qui est l'ES sera développée.
- Le deuxième chapitre présentera une analyse empirique dont le but est de résoudre notre problématique. Elle débutera par une revue de littérature des travaux antérieurs portant sur le même sujet. Ensuite, une description des données de notre étude. Une troisième section explicitera les deux méthodes de calcul de la VaR et ES soit le modèle GARCH(1,1) univarié et la simulation historique. Elle sera achevée par les résultats empiriques du calcul de la VaR et ES. Ces résultats seront utilisés dans le backtesting qui permettra d'évaluer les deux méthodes dans la prévision.



- Le présent rapport s'achèvera par un chapitre dédié à la discussion des résultats de cette recherche, les conclusions tirées et les éventuelles études futures des aspects non abordés par cette étude.

## **CHAPITRE 1**

### **ANALYSE THÉORIQUE**

La présente étude traite un concept important de la finance qui est le risque. Dans ce chapitre, une revue de littérature sur la notion de risque sera présentée. Ensuite, les deux méthodes adaptées dans notre recherche, la VaR et ES, seront détaillées.

#### **1.1 Aperçu général sur les mesures de risque**

Il n'existe pas une définition bien précise du risque, bien que Mc Neil, Frey et Embrechts (2005)<sup>1</sup> le définit comme « chaque événement ou action qui pourrait affecter la capacité d'une organisation à atteindre ses objectifs et exécuter ses stratégies ».

Le risque reste un concept difficile à comprendre.

##### **1.1.1 Type du risque**

Il existe plusieurs types de risque. Le type de risque qui nous intéresse présentement est le risque financier. Ce dernier est lié à quatre ingrédients essentiels: événements, décisions, conséquences et incertitude.

---

<sup>1</sup> Source : McNeil, Frey, Embrechts, Quantitative Risk Management, 2005

Plusieurs catégories de risque sont présentées tel que<sup>2</sup>:

- Le risque du marché:

C'est la possibilité de fluctuations du prix du placement en raison des facteurs externes, indépendamment de ses caractéristiques.

Parmi ces facteurs on trouve la conjoncture économique générale (exemple: récession économique, hausse des prix de matières premières), événements politiques ou sociaux (Guerre civile, coup d'état..), ou tout simplement l'évolution des préférences des consommateurs et leur utilité.

Tel est le cas de la récession économique récente des États-Unis. En effet, la dépréciation du dollar américain a incité les investisseurs à retirer leur argent des marchés boursiers puisque la valeur boursière a diminué et investir ainsi dans des actifs moins risqués tel que l'or. Les indices boursiers ont subi une chute contrairement au marché de l'or, qui a connu une hausse de prix.

Le risque du marché reflète alors la volatilité du prix de l'actif financier ; plus le prix est volatile plus l'actif est risqué.

- Le risque financier:

Il est lié à la structure financière de l'entreprise, c'est à dire sa capacité à honorer ses endettements et ainsi assurer sa survie. Il fait référence au poids des dettes de l'entreprise

---

<sup>2</sup> Source : Jacquillart et Solnik, 'Marchés financiers, Gestion de portefeuille et des risques', Paris, 2002

par rapport à ses capitaux propres. Pour évaluer ce risque, plusieurs indicateurs sont calculés pour déterminer son état financier.

Ainsi, plus les dettes utilisées sont importantes, moins elle est capable de faire face au service des emprunts, plus la probabilité de faillite est élevée. Ce qui engendre des pertes pour ses créanciers, soit ses actionnaires ou détenteurs d'obligations.

- Le risque d'inflation:

L'évolution de l'indice des prix dans une économie affecte considérablement les investissements. Cette évolution peut être dans les deux sens: une hausse des prix (inflation) au contrairement une baisse (déflation).

En général, les placements qui évoluent dans le même sens que le niveau des prix sont plus rémunérés dans les périodes d'inflation tel que les actions des fabricants de biens durables. Quant aux investissements qui procurent des rendements fixes sont plus vulnérables surtout en période d'inflation, tel que les obligations à taux fixes.

- Le risque du taux d'intérêt:

La valeur de certains placements est affectée par la variation du taux d'intérêt. Généralement, la variation de la valeur de l'investissement varie en sens inverse à la variation du taux d'intérêt.

Il existe des placements qui sont affectés plus que d'autres, tel que les obligations à taux fixe ou les SICAV, bien qu'ils soient des placements à long terme.

- Le risque de liquidité:

Un actif financier est dit liquide s'il est échangé sur le marché financier régulièrement, à des intervalles de temps courts sans avoir un impact important sur son prix (hausse importante lors d'un ordre d'achat ou baisse importante lors d'une vente). Plus un actif est liquide, plus il est susceptible de se vendre facilement à un prix raisonnable.

Généralement, les actions de grandes sociétés et des sociétés opérant dans des secteurs prometteurs sont plus liquides que celles des petites entreprises ou des sociétés opérant dans des secteurs en déclin.

Chaque instrument de placement sur le marché financier est assujéti à un certain risque. Cependant, l'investisseur doit en prendre compte et évaluer son impact sur son investissement. Pour cela, il doit bien déterminer quelle est la source du risque qui pourrait induire sa position et le traiter rigoureusement.

Notre étude concerne un seul type de risque: le risque du marché. Un aperçu historique sur ses différentes mesures sera détaillé dans la section suivante.

### **1.1.2 Aperçu historique<sup>3</sup> sur les mesures de risque d'un portefeuille du marché**

La volatilité importante du marché financier a mis l'accent sur l'importance de la gestion du risque.

Les mesures de risque du marché ont bien évolué depuis le développement de la théorie de diversification de Markowitz. Ce dernier a avancé en 1959 « une méthode de solution

---

<sup>3</sup> Source : Jacquillart et Solnik, 'Marchés financiers, Gestion de portefeuille et des risques', Paris, 2002

générale du problème de la structure des portefeuilles qui incorpore le traitement quantifié du risque<sup>4</sup> »

Elle repose sur deux critères essentiels: la moyenne pour la rentabilité espérée du portefeuille et la variance comme une mesure du risque, d'où son appellation théorie de la 'moyenne-variance'. Selon ce critère, on a abouti à un ensemble de portefeuilles qui offrent le rendement le plus élevé (moyenne) pour chaque niveau de risque (variance) donné et le risque le plus faible pour chaque niveau de rendement donné. Cet ensemble de portefeuilles constitue la frontière efficiente.

Dans cet ensemble, on ne peut pas espérer d'augmenter le rendement du portefeuille sans augmenter le risque en contre partie. D'où ce critère de moyenne-variance est insuffisant. Cependant, Markowitz intègre la fonction d'utilité; chaque investisseur choisit le portefeuille qui maximise sa fonction d'utilité. Ainsi son portefeuille efficient sera la tangence entre sa fonction d'utilité et la frontière efficiente.

De nombreuses critiques ont été adressées à ce modèle d'optimisation tel que sa sensibilité aux critères adoptés moyenne-variance. Ce qui a incité à développer d'autres modèles: les modèles à facteurs qui s'intéressent aux facteurs influençant sur les fluctuations des cours des actifs. Il y a deux types de facteurs: des facteurs communs qui affectent l'ensemble de marché (risque systématique) et d'autres qui sont spécifiques à chaque actif (risque spécifique). Le modèle le plus connu est le modèle de marché, développé par Sharpe (1964) et qui s'est basé sur les travaux de Markowitz. Bien que ce modèle ait contribué à enrichir la théorie de gestion de risque des portefeuilles, il a présenté certains inconvénients en pratique. Ce qui a poussé Sharpe à développer un autre modèle: le modèle d'équilibre des actifs financiers MEDAF (ou CAPM) qui lui a valu le prix Nobel. Comme tout autre modèle

---

<sup>4</sup> Jacuillart , Solnik 2002, marché financier gestion de portefeuille et des risques

économique (tel que le modèle Keynésien de la consommation), Le MEDAF repose sous certaines hypothèses. Il propose de déterminer les prix des actifs financiers qui permettent d'ajuster l'offre et la demande sur le marché et ainsi instaurer l'équilibre général du marché.

Au milieu des années soixante-dix, Ross a présenté un autre modèle APT (Arbitrage Pricing Theory). C'est un modèle à facteurs où Ross stipule qu'avec un nombre peu élevé d'actifs et un nombre moins élevé de facteurs, on peut construire un portefeuille où le risque diversifiable de chaque composante de ce portefeuille est négligeable. Et dans un marché efficient en absence d'arbitrage, son rendement espéré est alors la combinaison linéaire des primes de risques des facteurs.

Toutefois, l'évolution du marché financier et l'apparition continue de nouveaux aspects des actifs financiers ont manifesté les limites de ces approches de mesure de risque; elles ne permettent pas d'évaluer le risque de type asymétrique (tel que associé aux options) puisque les critères bêta et l'écart type sont insuffisants. D'autres mesures se sont développées. D'où l'apparition de la mesure de risque « Valeur à Risque » ou en anglais « Value at Risk ».

Selon Dowd<sup>5</sup>, à la fin des années soixante-dix, la majorité des institutions financières ont commencé à développer des modèles internes de mesure de risque agrégé afin de les appliquer dans leur gestion mais aussi à le commercialiser pour d'autres institutions financières incapables de les développer par elles même.

---

<sup>5</sup> Source :Dowd,'Beyond Value at Risk', Angleterre, 1998

Le système le plus connu était alors le « Riskmetrics » développé par la banque JP Morgan. Il était en exclusivité pour la banque JP Morgan mais à partir de 1994, il est devenu accessible par internet.

Cette nécessité d'évaluer le risque interne des institutions financières a encouragé à développer d'autres mesures de la VaR plus précises que le système Riskmetrics.

Dans la section suivante, nous présenterons l'approche VaR et les différentes méthodes de son estimation ainsi que ces principales avantages et limites.

## **1.2 La méthode Value at Risk (VaR)**

La VaR est une approche moderne qui est développée pour répondre au besoin des institutions financières d'une mesure de risque interne dans le cadre de Risk Management.

### **1.2.1 Définition**

Selon Linsmeier et Pearson (1996) « la VaR est une mesure statistique synthétique de la perte maximale qui peut être attendue sur une position dans des conditions de marché « normales ». C'est une méthode qui permet de communiquer le risque agrégé de perte possible d'un portefeuille en un simple chiffre à des non spécialistes ».

Par définition, la VaR est le niveau de perte maximal qui ne sera dépassé qu'à une probabilité bien déterminée sur une période de temps. Statistiquement, elle est le  $(1-\alpha)$  quantile de la loi de distribution de perte et profit du portefeuille considéré.

Le calcul de la VaR requiert alors de spécifier à priori:

- La distribution de perte et profit du portefeuille: elle représente la distribution des rendements du portefeuille sur une période bien déterminée. Elle peut suivre



différente loi (Normal, Student...) selon les critères du portefeuille. En plus, elle peut être conditionnelle ou inconditionnelle.

- Le niveau de probabilité  $\alpha$ , qui est le seuil critique: généralement il est de 5% ou 1%. Plus le seuil est petit, plus la probabilité de dépasser le niveau de la VaR sera réduit.
- La période de temps  $t$ : la période de détention du portefeuille qui est généralement de 1 jour ou 10 jours. Les autorités réglementaires fixent la période aux institutions financières pour gérer l'exposition au risque d'une façon dynamique. Plus la période est longue, plus on est exposé au risque.

Analytiquement, la VaR est tel que:

$$\Pr\left(\frac{r - E(r)}{\sigma_r} < VaR(\alpha)\right) = \alpha$$

Pour calculer la VaR à T jours, l'espérance de la rentabilité ainsi que l'écart type doivent être ajustés:

$$E(r_T) = T \cdot E(r_1)$$

$$\sigma_T = \sqrt{T} \cdot \sigma_1$$

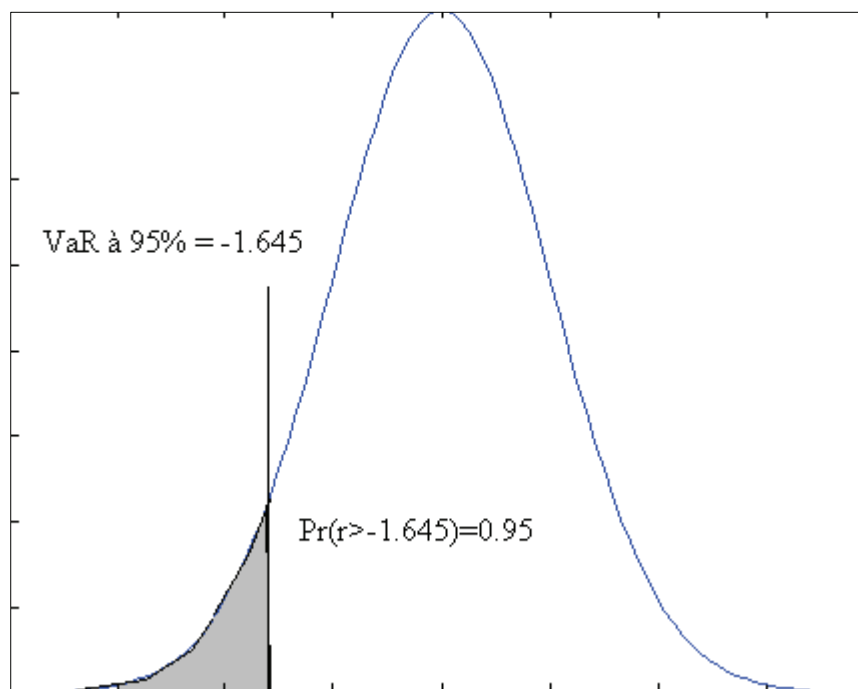


Figure 1. Exemple de VaR à 5% d'une distribution de perte et profit normale

### 1.2.2 Méthodes de calcul de la VaR

Il existe trois familles de méthodes pour calculer la VaR:

- Méthodes paramétriques
- Méthodes semi-paramétriques
- Méthodes non paramétriques

**i. Méthodes paramétriques:**

Le calcul de la VaR se fait d'une manière analytique qui est pratiquement aisée. Néanmoins, il se repose sur certaines conditions qui sont parfois contraignantes. Parmi ces méthodes on trouve le système Riskmetrics et les modèles économétriques connus qui sont les modèles GARCH univariés ou multivariés. Selon l'article d'Engle (2001), le grand challenge de l'économétrie était d'arriver à prévoir la moyenne et la variance futures des rendements avec seulement un ensemble de données qui est la série des informations passées. Plusieurs méthodes ont été développées pour la prévision de la moyenne des rendements mais pas pour la variance conditionnelle. Jusqu'à l'apparition du modèle ARCH (Autoregressive Conditional Heteroscedasticity) par Engle en 1982 et le modèle GARCH par Bellerslev en 1986.

Le modèle GARCH permet ainsi de prévoir la variance conditionnelle de la distribution de perte et profit, ce qui permet ensuite d'estimer la VaR. Pour le modèle GARCH, il existe deux types: GARCH multivarié et univarié (détaillé dans la partie empirique) sur lesquels sont fondés d'autres modèles tel que: EGARCH, IGARCH et qui sont d'autres outils pour le calcul de la VaR.

**ii. Méthodes semi-paramétriques:**

Parmi les méthodes semi-paramétriques, il existe l'ensemble des méthodes qui relèvent de la théorie des extrêmes. Cette dernière s'intéresse à la distribution suivie par ces extrêmes sous certaines hypothèses. Deux principales branches sont révélées par cette théorie: théorie de valeurs extrêmes généralisées et la loi de Pareto généralisée.

Outre la théorie des extrêmes, on trouve l'approche par régression sur quantile: CA VaR (Conditional Autoregressive Value at Risk) développée par Engle et Manganelli (2004). Au lieu de modéliser une distribution de perte et profit du portefeuille et en déduire ainsi un quantile qui sera la VaR, cette approche s'intéresse à modéliser le quantile lui-même. Elle doit respecter les caractéristiques de la série des rendements du portefeuille étudié tel

que l'autocorrélation des volatilités et donc l'autocorrélation des distributions, car le calcul de la VaR en dépend puisqu'il tient compte de l'écart type de la distribution.

### iii. Méthodes non paramétriques

Ce sont des méthodes qui se basent non pas sur des calculs analytiques pour déterminer la VaR mais à partir des simulations.

La méthode simulation Monte Carlo suppose que les facteurs de risque du marché suivent des lois connues dont les paramètres sont estimés à partir de leurs séries historiques ou ils sont connus auparavant. Une fois que la distribution jointe de ces facteurs est déterminée, une génération de nombres aléatoires est mise en œuvre. La distribution jointe et la série des nombres aléatoires permettent de simuler le prix du portefeuille et donc sa valorisation. En générant un grand nombre de simulations (en répétant chaque fois le même processus), cette méthode permet de construire une distribution qui converge vers la vraie distribution de la valeur du portefeuille. Le niveau de la VaR sera alors le quantile de cette distribution.

L'approche de variance-covariance requiert de spécifier un critère important: la nature de la distribution de perte et profit des actifs financiers. L'hypothèse la plus utilisée et la plus simple est de supposer qu'elle est Normale. Dans ce cas, il est facile de déterminer l'écart type du portefeuille qui est une fonction linéaire des volatilités individuelles des actifs composant le portefeuille et leurs covariances.

Ainsi, en connaissant la matrice variance-covariance des actifs, leurs poids respectifs dans le portefeuille ainsi que le niveau de confiance, il sera simple de prévoir la VaR.

Néanmoins, cette approche est une simplification de la réalité. Il existe des portefeuilles non linéaires tel est le cas des portefeuilles qui incorporent des options, ou des titres à revenus fixes, ou d'autres actifs dont le risque n'est pas normal. La matrice de variance-covariance sera difficile à calculer.

Il existe des méthodes pour ajuster la non-normalité du risque associé aux actifs et la non linéarité des portefeuilles afin d'explicitier le calcul de la VaR. Parmi ces méthodes on trouve: la méthode delta-normale, et la méthode delta-gamma.

Il existe aussi une autre méthode non paramétrique qui est la simulation historique. Elle sera détaillée dans la partie empirique de notre travail.

### 1.2.3 Propriétés de la VaR

Les sections précédentes explicitent la notion de la VaR ainsi que les différentes méthodes pour la calculer. Cette section explicite les propriétés de la VaR.

Comme toute approche dans la théorie de portefeuille, la méthode VaR a contribué au développement des mesures de risque du marché. En effet:

- Elle offre une mesure qui est valide à différentes positions d'investissement et en présence de différents facteurs de risque. Ce qui permet aux institutions financières de mieux gérer le risque de leurs placements dans divers actifs avec différentes manières qui n'existent pas auparavant.
- Les mesures de risque traditionnelles ne tiennent pas compte de l'envergure de la perte encourue par l'investisseur. L'écart type du rendement d'un actif, par exemple, reflète seulement la déviation absolue possible par rapport à la moyenne. Il n'indique même pas le sens de la déviation vers la hausse ou la baisse. Quant au facteur bêta ( $\beta$ ), il reflète le degré d'interaction de l'actif avec le marché. Par contre la VaR procure une estimation en valeur de la perte maximale d'une position.

Malgré ses nombreux avantages, la VaR reflète certains inconvénients:

- La non sous-additivité: la VaR a été largement critiquée au niveau de ses propriétés agrégées. Selon les études d'Artzner et al (1997,1999), elle est constatée comme une mesure de risque non cohérente puisqu'elle n'obéit pas à un critère très important: la sous-additivité.

La non sous-additivité signifie que si on a deux portefeuilles  $F_{L_1}$  et  $F_{L_2}$ , et la distribution du portefeuille agrégé  $L=L_1+L_2$  est  $F_L$ , alors on n'obtient pas nécessairement  $VaR(\alpha)_L \leq VaR(\alpha)_{L_1} + VaR(\alpha)_{L_2}$ . Ce qui contredit la théorie de la diversification qui stipule que l'agrégation de différents actifs dans un portefeuille permet de réduire le risque. Ce qui signifie aussi que la décentralisation du Risk Management est difficile puisque l'addition des VaR de différents portefeuilles ne reflète pas le risque global encouru par l'entreprise.

- Liquidité du marché:  
La liquidité du marché est une source de risque pour l'investisseur qu'il doit en tenir compte. Selon Lawrence et Robinson (1995), la mesure de VaR doit inclure le coût de liquidité en cas de perte prévue. En réalité, cette mesure néglige cet aspect.
- Choix des paramètres de la VaR:  
Dans la section précédente au niveau de la définition de la VaR, on a spécifié les critères qu'elle requiert. Parmi elles, on a noté l'horizon de temps du calcul. Il peut être influencé par plusieurs facteurs: liquidité du marché, contraintes légales ou contractuelles. Cependant, il est difficile de choisir l'horizon approprié pour l'estimation de la VaR. Quant au niveau de confiance, il est aussi difficile de choisir le plus approprié. La VaR peut être calculée à différents niveaux de confiance simultanément afin de comparer les résultats fournis. De plus, le choix de la distribution de perte et profit de l'actif. Si elle est mal déterminée, la VaR sera biaisée.

Suite aux limites de la VaR, d'autres mesures sont apparues. D'où les mesures de risque cohérentes développées par Artzner et al. La section suivante traitera ces mesures.

### 1.3 Méthodes de mesure de risque cohérentes

Cette section développera les mesures de risques cohérentes et leurs propriétés. Elle s'intéressera spécialement à la mesure de risque appelée Expected Shortfall (ES).

#### 1.3.1 Définition

Après avoir échoué par son critère de non sous-additivité, il s'est avéré que la mesure de risque VaR comprend certaines lacunes et qu'elle n'est pas une mesure exacte qui reflète le risque d'un portefeuille, d'où le développement par Artzner, Delbaen, Eber et Heath de développer d'autres mesures de risque dites « mesure de risque cohérente » à la fin des années quatre-vingt dix. C'est une mesure de risque d'un portefeuille à une période déterminée. Elle est similaire à la VaR de point de vue conceptuel mais elle diffère au niveau du calcul.

#### 1.3.2 Propriétés des mesures de risque cohérentes

Selon Szegö (2002), mesurer le risque d'un actif correspond à établir une fonctionnelle  $\rho: X \rightarrow R$  où  $X$  est la variable aléatoire (exemple: le rendement de l'actif) et  $R$  est un réel non négatif. Cette valeur de risque permet alors de comparer les différents actifs. Certaines conditions sont considérées pour cette fonctionnelle.

- Homogénéité positive: cette propriété stipule que  $\rho(\lambda x) = \lambda \rho(x)$  pour toute variable aléatoire  $x$  et tout réel positif  $\lambda$ . C'est-à-dire que la hausse de la taille d'un portefeuille  $x$  par une quantité positive  $\lambda$  ne fait que multiplier le risque de ce portefeuille par ce facteur  $\lambda$ .

- Sous additivité: c'est la propriété que la VaR ne respecte pas. Elle montre que pour toute variable aléatoire  $x$  et  $y$ ,  $\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y)$ , c'est à dire que le risque agrégé d'un portefeuille doit être moins élevé que la somme du risque individuel des actifs composant ce portefeuille. Ce qui prouve qu'une fonction homogène positive  $\rho$  est convexe si et seulement si elle est sous additive.
- Monotonie: cette propriété montre que si  $x \leq y$  alors  $\rho(x) \leq \rho(y)$  pour toute variable aléatoire  $x$  et  $y$ . Ce critère montre que plus la perte d'un portefeuille est faible, son risque sera nécessairement moins élevé. C'est-à-dire que si le portefeuille  $x$  a une perte moins grande que le portefeuille  $y$ , alors ce dernier est plus risqué.
- Invariance transitionnelle: si  $x \leq y$  implique que  $\rho(x + \alpha r_0) = \rho(x) - \alpha$ , pour chaque variable aléatoire  $x$ , pour chaque réel  $\alpha$  et pour chaque actif sans risque  $r_0$ . Cette propriété explique que si on ajoute à un portefeuille risqué une quantité  $\alpha$  d'actif sans risque, alors le risque du portefeuille se réduit par  $\alpha$ .

Une mesure de risque qui respecte ces quatre propriétés est appelée une mesure de risque cohérente au sens d'Artzner et al. Il existe plusieurs mesures de risque cohérentes qui seront énumérées dans la section suivante.

### 1.3.3 Expected Shortfall (ES): Définition et méthodes de calcul

Parmi les mesures de risque cohérentes développés: Expected regret (ER), Expected shortfall (ES) appelée aussi tail conditional expectation (TCE), worst conditional expectation (WCE) et spectral risk measures. Cette section s'intéressera à une seule méthode qui est l'expected shortfall (ES), sujet de notre recherche.

La valeur de la VaR reflète le montant de la perte que l'investisseur ne pourrait pas dépasser à une certaine probabilité et sur un horizon de temps bien déterminé. Cette approximation ne tient pas compte des événements extrêmes qui pourraient se produire et qui pourraient



engendrer des pertes plus graves. Ce qui amène l'investisseur à prendre des décisions biaisées sur la base de la VaR en sous-estimant les pertes.

Néanmoins, l'ES évite cette lacune de la VaR. En effet, elle prend en compte des événements extrêmes qui pourraient se produire. Elle est définie comme la moyenne des pertes du portefeuille qui sont au delà du niveau de la VaR.

Comme dans le cas de la VaR, l'ES dispose de différentes méthodes de calcul.

Pour les méthodes paramétriques, certains auteurs tel que Giot et Laurent (2003), Bali et Theodossiou (2007) proposent l'estimation d'ES comme étant la moyenne des rendements observés du portefeuille étudié qui sont au delà du niveau de la VaR. Cette dernière est calculée à partir de l'une des méthodes paramétriques décrites au dessus.

Analytiquement, elle est calculée comme suit:

$$ES(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} F^{-1}(p) dp$$

$$ES(\alpha) = E(r \mid r \leq VaR(\alpha))$$

Où  $F$  est la fonction de répartition des pertes  
 $\alpha$  est le taux de couverture de la VaR

Acerbi et Tasche (2002) proposent une méthode non paramétrique qui est la simulation historique. Elle demeure la plus répandue et la plus facile.

L'ES est calculé à partir d'une série de rendements historiques du portefeuille en considération. En effet, si la distribution de ce portefeuille est connue, alors l'ES est la moyenne des  $100\alpha\%$  rendements les plus petits.

$$ES(\alpha) = \frac{\sum_{i=1}^N r_i}{N}$$

avec  $N$  est le rang de la  $100\alpha\%$  rendement de la distribution

Cette méthode est généralement utilisée lorsque la distribution de l'innovation suit une loi Normale ou Student (détaillée dans la partie empirique).

Il existe une autre méthode non paramétrique pour le calcul d'ES qui est la simulation Monte Carlo. Le processus adapté est le même qu'avec le calcul de la VaR sauf que l'évaluation de l'ES est la moyenne des rendements au delà du niveau de la VaR.

Par exemple, pour l'évaluation de la VaR à 1% et en présence d'un échantillon de 1000 rendements de la distribution des pertes et profits, la VaR est estimée comme étant le 10<sup>ème</sup> plus petit rendement de la distribution. L'ES est alors la moyenne des rendements qui sont au dessous du niveau de la VaR, c'est-à-dire, la moyenne des dix derniers rendements classés par ordre décroissant.

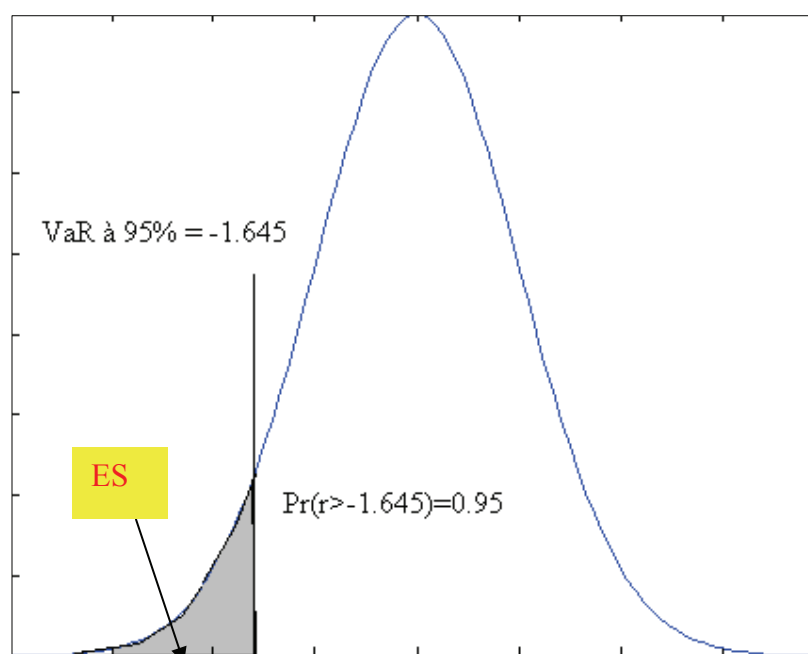


Figure 2. Exemple d'ES à 5% d'une distribution de perte et profit Normale

Après avoir présenté la VaR et ES et leurs méthodes de calcul, une étude comparative entre la simulation historique et le modèle GARCH(1,1) sera illustrée par une étude empirique, sujet de la partie suivante de notre travail.

## CHAPITRE 2

### ÉTUDE EMPIRIQUE

L'étude empirique consiste à effectuer une analyse comparative entre deux méthodes de calcul de la VaR et ES afin de conclure laquelle est la plus pertinente pour prévoir ces deux mesures de risque.

#### 2.1 VaR et ES: Études empiriques antérieures

- YAMAI et YOSHIBA (2002) ont démontré que les deux mesures VaR et ES n'entraînent pas de problème de risque de perte extrême si la distribution des pertes et profits du portefeuille étudié est Normale. Par contre, si la distribution n'est pas Normale, seule la VaR est exposée à ce problème.

Les auteurs ont illustrés ce problème de risque extrême par deux exemples: un portefeuille de crédit concentré est un portefeuille de devises dont les taux sont en fluctuation extrême. Car les deux cas disposent des propriétés des queues épaisses de la distribution et une possibilité de grande perte.

Ils ont constaté que pour le cas du premier portefeuille, en maximisant l'utilité de l'investisseur sous la contrainte de la VaR, la décision optimale serait de réduire la part du portefeuille diversifié dans le portefeuille global afin de réduire la perte maximale au niveau de confiance choisi. En plus, d'investir plus dans les crédits concentrés dont la probabilité de défaut est au delà de l'intervalle de confiance de la VaR (puisque cette dernière ne dépend pas de tout ce qui la dépasse) et qui procure un rendement le plus élevé.

Sous la contrainte d'ES, l'investisseur choisirait de réallouer son portefeuille au profit de l'actif sans risque afin de réduire le risque de son portefeuille globale, car l'ES tient compte des pertes extrêmes au delà de la VaR. Si la part de crédit dans le portefeuille globale s'accroît, le risque croît aussi, cela affectera le niveau d'ES.

Pour apprécier la différence entre la VaR et ES, YAMAI et YOSHIBA ont étudié l'erreur d'estimation des deux mesures. La méthode adaptée est la simulation Monte Carlo. La distribution des rendements du portefeuille est supposée une loi de Pareto généralisée.

En fixant les paramètres de cette distribution, la simulation est effectuée. Elle est répétée chaque fois que l'indice de la distribution  $\varepsilon$  (qui reflète l'épaisseur des queues de la distribution) change afin d'obtenir la VaR et ES à un niveau de confiance déterminé. Plusieurs itérations sont produites pour obtenir une série de VaR et ES pour chaque distribution. L'erreur d'estimation de la VaR et ES est alors déterminée par l'écart type relative de chacune (c'est-à-dire le rapport de l'écart type et la moyenne de la VaR et ES de chaque cas de distribution).

D'après ces calculs, les deux auteurs ont constaté que l'erreur d'estimation de la VaR est proche de 0. Tandis que l'erreur d'estimation d'ES devient de plus en plus large au fur que l'indice  $\varepsilon$  s'accroît. Ce résultat est expliqué par le fait que plus les queues de la distribution sont épaisses, plus la probabilité de perte est grande. L'estimation d'ES est alors affectée par ce problème puisqu'elle tient compte de ces queues. Tandis que la VaR qui néglige l'effet des queues épaisses. Son estimation ne sera pas affectée. L'erreur d'estimation demeure faible.

En plus, plus le nombre d'itération de la simulation augmente, plus l'erreur d'estimation d'ES se réduit.

Ils ont conclu alors que bien que chaque mesure a ses avantages et ses inconvénients, il existe une complémentarité entre elles. La solution pour aboutir à une mesure standard à tous les cas est de trouver une combinaison entre les deux mesures.

- ANGELIDIS ET DEGIANNAKIS ont étudié la performance de différents modèles de la famille ARCH pour la prévision de la VaR et ES. Leur recherche comporte sur différents actifs de différents marchés à savoir l'indice S&P500 (marché boursier), l'or (marché de matière première), le taux Dollar Américain contre Livre Sterling (marché de change), sur des positions courtes et longues. Ils ont estimé la VaR et ES à deux taux de couverture 5% et 1% par 11 modèles ARCH: GARCH, EGARCH, TARCH, APARCH, IGARCH, FIGARCH, FIGARCHC, FIEGARCH, FIAPARCH, FIAPARCHC, HYGARCH. Chaque modèle suppose quatre hypothèses de distribution: Normale, Student, skewed-

Student et GED (General Error Distribution). À travers un backtesting, ils ont évalué ces différents modèles et ont sélectionné pour chaque marché lequel est le plus approprié dans la prévision de la VaR et ES. Ils ont employé les deux tests de couverture non conditionnelle de KUPIEC de CHRISTOFFERSEN. Ils ont utilisé aussi le test SPA (Superior Predictive Ability) de HANSEN. Ce dernier a permis de vérifier les résultats des prévisions de la VaR par la minimisation des pertes au delà de son niveau. Ainsi, il a déterminé aussi le modèle le plus approprié à la prévision d'ES.

Ils ont constaté alors que le modèle FIEGARCH avec une distribution Normale est le plus approprié pour l'indice S&P500, les deux modèles GARCH et IGARCH avec une distribution GED pour l'Or, et le modèle EGARCH avec une distribution Normale pour le taux de change. Néanmoins, il existe un point commun entre les modèles. Ils ont constaté aussi que pour les modèles dont la distribution est Student ou Skewned-Student, la VaR est surestimée. Cela est dû à la négligence du concept de l'asymétrie que tous les autres modèles en prennent compte par l'intégration fractionnaire.

## **2.2 Description des données**

Comme pour toute autre étude empirique, la base de données est un élément essentiel sur laquelle repose l'étude.

La base de données de notre étude empirique est la série journalière des log-rendements de l'indice NASDAQ100 de la période s'étalant du le 1<sup>er</sup> Janvier 1988 au 31 Décembre 2008. Elle est obtenue à partir du site [www.yahoofinance.com](http://www.yahoofinance.com).

Pourquoi a-t-on choisi cet actif financier?

L'indice NASDAQ100 est un agrégat économique qui regroupe les cent premières entreprises, en capitalisation boursière, cotées sur le marché des actions NASDAQ.

Ce dernier est le deuxième plus important marché des actions américaines en termes de volume d'échange. Il est aussi le plus grand marché électronique d'actions au monde<sup>6</sup>.

Aussi, l'indice NASDAQ100 regroupe des entreprises non financières qui opèrent la plupart dans les secteurs de technologie (exemple: Yahoo), télécommunication, biotechnologie et du commerce en détail ou en gros. Il est alors assez volatile étant donné que la valeur des actions de ces entreprises est plus volatile que celles des entreprises de l'économie traditionnelle.

Pourquoi a-t-on choisi cette période?

L'objectif de notre étude empirique est de comparer deux méthodes de mesures de risque du marché la VaR et l'ES. Puisque chaque méthode procure une prévision de la perte d'une position bien déterminée, on essaiera de déterminer laquelle est la plus appropriée, c'est à dire laquelle prévoit mieux la vraie valeur de la perte à travers la VaR et ES. C'est pourquoi on a choisi cette période pour notre étude. C'est une période à forte volatilité. Par exemple, au cours de la période étudiée, le rendement de l'indice a enregistré deux variations remarquables: une hausse qui a dépassé 17% et une baisse de -11%.

Le log-rendement de l'indice est calculé comme suit:

$$r_t = \log(p_t) - \log(p_{t-1})$$

---

<sup>6</sup> D'après l'encyclopédie Wikipédia.

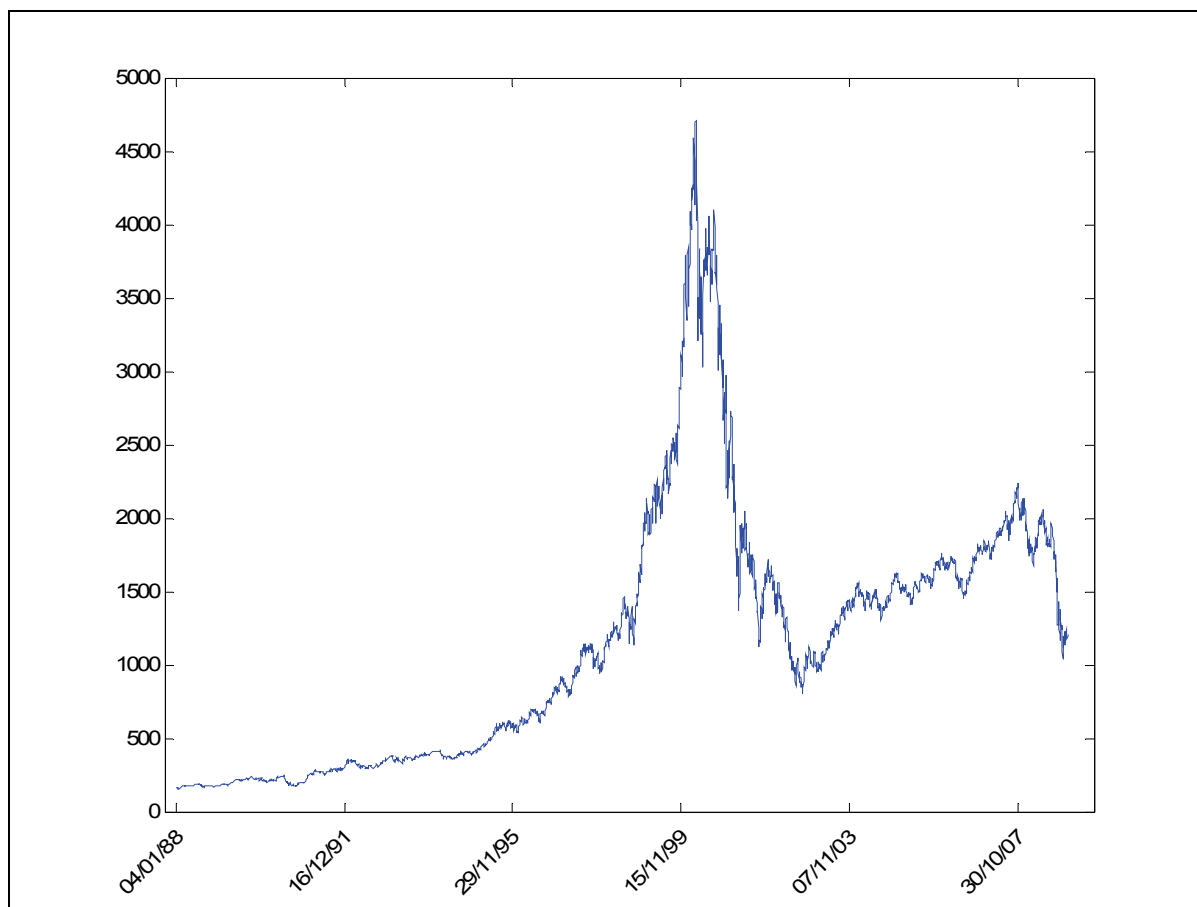


Figure 3. Valeur de l'indice sur la période du 1<sup>er</sup> Janvier 1998 au 31 Décembre 2008

La figure 3 présente le niveau de l'indice sur la période étudiée. On constate qu'il est caractérisé par une tendance croissante pour atteindre un pic au milieu de la période puis une chute remarquable afin de varier une autre fois jusqu'à la fin de la période étudiée.

Quant à la figure 4 représente ses log-rendements. On constate une fluctuation importante au cours de cette période.

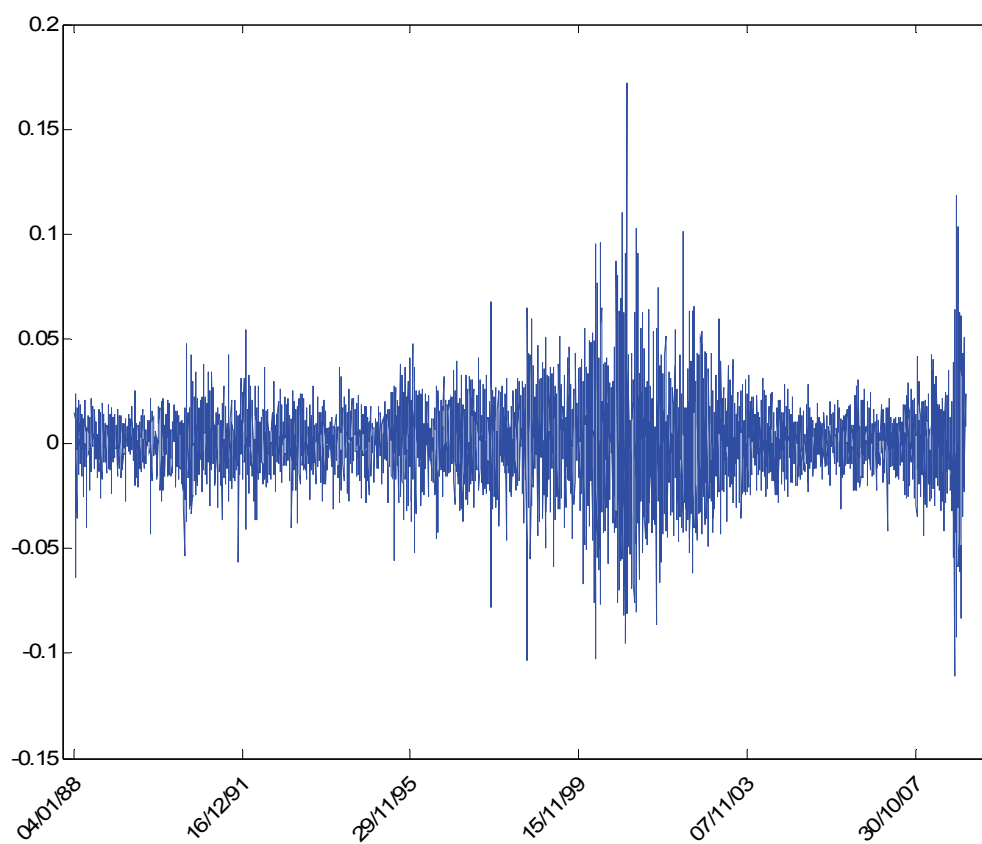


Figure 4. Les log-Rendements de l'indice NASDAQ100



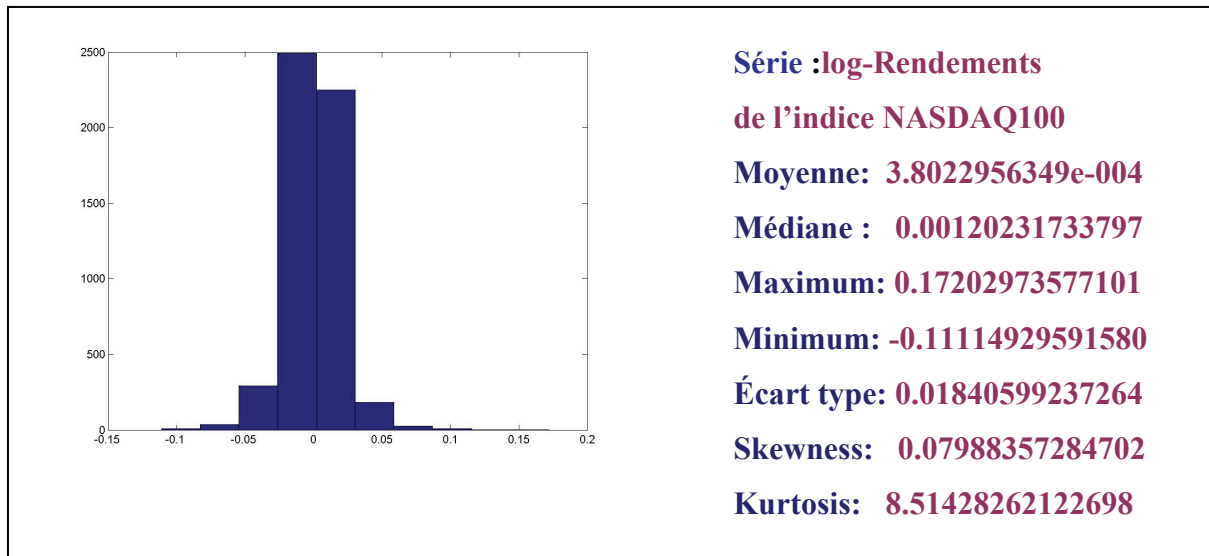


Figure 5. Caractéristiques de la distribution de l'indice

Les calculs ainsi que l'histogramme ont été établis par le logiciel MATLAB. D'après ces résultats, on constate que la skewness est positive (0.07988357284702). Ce qui veut dire que la densité de la distribution des log-rendements de l'indice s'étale vers la droite. Elle présente une asymétrie positive.

De plus, le kurtosis est supérieur à 3. Alors la distribution est leptocurtique. Elle présente des queues plus épaisses que la loi Normale.

### 2.3 Calcul de la VaR et ES

Afin de calculer la VaR et ES par le modèle GARCH(1,1) univarié et la simulation historique, nous avons besoins de diviser notre série historique de log-rendements de notre actif sur deux échantillons.

Avec:

T: est la taille de la série des observations de notre étude.

N: est la taille de l'échantillon utilisé dans le calcul de la VaR et ES.

Notre série de données est utilisée comme suit:

- 75% des données ((T-N) premières observations) sont destinées à estimer les paramètres du modèle GARCH(1,1) univarié.
- 25% des données (N dernières observations) sont utilisées pour le calcul de la VaR et ES par le modèle GARCH et la simulation historique et effectuer ensuite le backtesting.

Cette section décrit les deux méthodes de calcul de la VaR et ES qui seront utiles à évaluer chaque méthode dans la prévision de ces deux mesures de risque.

### 2.3.1 Méthode paramétrique: le modèle GARCH(1,1) univarié

Pour la prévision des deux mesures de risque, la méthode paramétrique choisie est le modèle GARCH(1,1) univarié qui sera expliqué dans cette section.

#### 2.3.1.1 Présentation du modèle GARCH (1,1) univarié

Les modèles économétriques antérieurs ont traité seulement l'estimation de la moyenne des rendements. Jusqu'au développement du modèle ARCH(p) par Engle en 1982 qui traite la notion de la volatilité. Pour capter la longue mémoire des volatilités de certaines séries financières, ce modèle requiert une large fenêtre  $p$  (nombre de retard) pour atteindre de meilleurs résultats.

Bollerslev (1986) a formulé de ce modèle un autre dont la structure de retards est plus flexible appelé GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity).

Quelques hypothèses sont attribuées à ce modèle.

- Distribution conditionnelle des rendements

Pour établir l'estimation de la VaR, il faut disposer de la distribution des pertes et profits du portefeuille en considération. Dans notre cas, la distribution de l'indice NASDAQ100. Il existe deux types de distribution: conditionnelle ou inconditionnelle.

Étant donné que le rendement de l'indice est aléatoire, il peut changer d'une date à l'autre, alors sa densité non conditionnelle (qui ne dépend pas de l'ensemble d'information disponible) peut être différente d'une date à l'autre. C'est ici alors que réside la difficulté du calcul de la VaR. Pour contourner cette contrainte, on a recours à établir une densité conditionnelle. Cette dernière signifie qu'elle est déterminée à partir de l'ensemble d'information (noté  $\Omega_t$ ) détenu à la date actuelle  $t$ . Parmi les données incluses dans cet ensemble, les rendements passés de l'actif ( $\Omega_t = \{r_t, r_{t-1}, \dots\}$ ).

Cette densité est notée comme suit:

$$f(n \setminus \Omega_t)$$

- Rendements identiquement distribués

Même si la densité est conditionnelle, cela ne veut pas dire qu'elle est constante dans le temps. Ce qui rend l'estimation de la VaR difficile car la variation est difficile à détecter. Pour simplifier le travail, on suppose que cette densité est invariante:

$$f(n \setminus \Omega_t) = f(r \setminus \Omega_t)$$

Cette hypothèse revient à supposer que les rendements sont identiquement distribués. Par conséquent, l'expression de la VaR devient:

$$\begin{aligned} VaR_t(\alpha) &= F_r^{-1}(\alpha \setminus \Omega_t) \\ \Pr(r_t \leq VaR_t(\alpha)) &= \alpha \end{aligned}$$

Un processus  $\{r_t\}$  suit un processus GARCH (p,q) s'il existe un terme d'erreur  $\{\varepsilon_t\}$  tel que:

$$\begin{aligned} r_t &= \sigma_{t-1} \varepsilon_t \\ \sigma_t^2 &= \omega + \sum_{i=1}^q \beta_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \alpha_j r_{t-j+1}^2 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} r_t &: \text{log-rendement à } t \\ \sigma_t^2 &: \text{variance conditionnelle à } t \end{aligned}$$

Pour que le modèle soit correct, qui reflète une variance conditionnelle positive, les paramètres doivent satisfaire à ces conditions:

$$\begin{aligned}
&\omega > 0 \\
&\alpha_j \geq 0, \quad j=1, \dots, p \\
&\beta_i \geq 0, \quad i=1, \dots, q \\
&\text{et} \quad \alpha_j + \beta_j < 1
\end{aligned}$$

Le modèle utilisé pour notre étude est le modèle GARCH(1,1)

$$\begin{aligned}
r_t &= \sigma_{t-1} \varepsilon_t \\
\sigma_t^2 &= \omega + \beta \sigma_{t-1}^2 + \alpha r_t^2 \\
&\text{avec} \\
&\omega > 0, \quad \alpha \geq 0, \quad \beta \geq 0, \quad \alpha + \beta < 1
\end{aligned}$$

On note par:  $\theta = (\omega, \alpha, \beta)$ , le vecteur des paramètres.

### Remarque

Le modèle contient un terme d'erreur  $\varepsilon_t$  qui spécifiera la nature de la distribution des log-rendements. Il peut suivre différentes lois. Il peut être une loi Normale comme il peut suivre une loi de Student pour capturer les queues épaisses de la distribution.

#### 2.3.1.2 Calcul de VaR et ES

Après avoir estimé les paramètres du modèle, calculé les variances conditionnelles, le calcul de la VaR et ES sera alors facile à effectuer.

À chaque date de notre échantillon, pour un taux de couverture  $\alpha$  et pour un horizon d'une journée, la valeur de la VaR est tel que:

$$\begin{aligned}
Pr(r_{t+1} < VaR_{t+1}(\alpha)) &= \alpha, \quad t = (T - N) \dots T \\
Pr(\hat{\sigma}_t \varepsilon_{t+1} < VaR_{t+1}(\alpha)) &= \alpha \\
Pr\left(\varepsilon_{t+1} < \frac{VaR_{t+1}(\alpha)}{\hat{\sigma}_t}\right) &= \alpha \\
\text{avec } \frac{VaR_{t+1}(\alpha)}{\hat{\sigma}_t} &\text{ est } (1 - \alpha) \text{ quantile de la loi de distribution des rendements}
\end{aligned}$$

Alors

$$q = \frac{VaR_{t+1}(\alpha)}{\hat{\sigma}_t}$$

$$VaR_{t+1}(\alpha) = q * \hat{\sigma}_t$$

Quant à l'ES on sait qu'elle est la moyenne des pertes extrêmes qui sont au delà du niveau de la VaR. Alors, elle est calculée comme suit

$$ES_{t+1} = E(r \setminus r \setminus VaR_{t+1}(\alpha))$$

$$= \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha F^{-1}(p) dp$$

avec  $F$  est la répartition de la loi de distribution des rendements

La figure suivante présente la démarche.

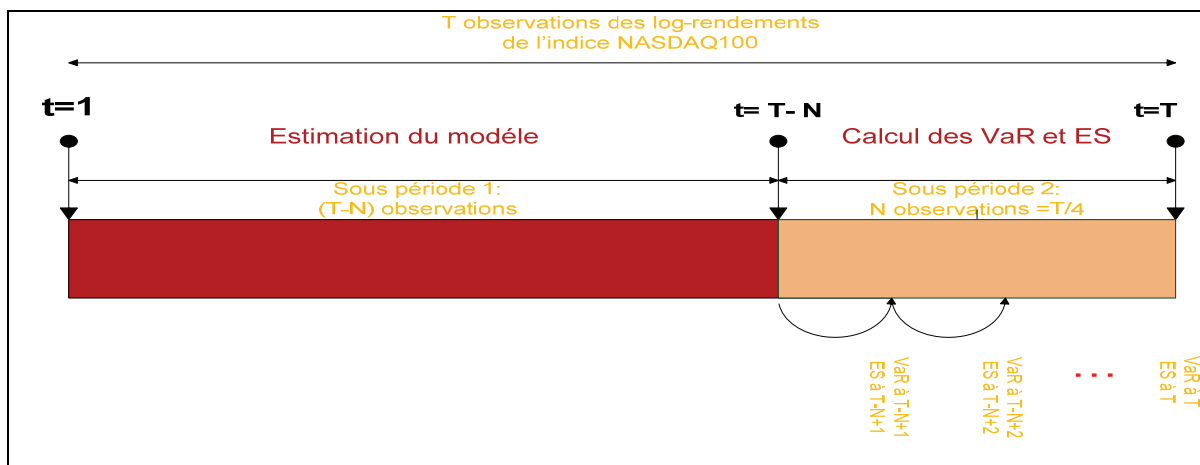


Figure 6. Calcul de la VaR et ES par le modèle GARCH(1,1) univarié

## 2.3.2 Méthode non paramétrique: la simulation historique

La simulation historique est choisie comme méthode non paramétrique pour la prévision. Elle sera décrite à cette section.

### 2.3.2.1 Présentation de la méthode

La simulation historique (Historical Simulation HS) est une méthode fréquemment utilisée grâce à sa simplicité. Elle est basée essentiellement sur la série des rendements passés du portefeuille. Comme toute autre méthode de calcul, elle repose sur des hypothèses:

- La distribution non conditionnelle des rendements passés est identique: quelque soit la date  $t$  du rendement  $r_t$ , la distribution reste la même et son quantile est identique aussi.
- Les rendements passés du portefeuille sont indépendamment distribués.

D'après sa définition, la VaR sera alors le niveau  $\alpha\%$  plus forte perte de cette distribution et l'ES la moyenne des pertes qui sont au delà du niveau de la VaR.

### 2.3.2.2 Calcul de la VaR et ES

La période de calcul est la même que celle choisie pour le modèle GARCH(1,1) univarié, c'est-à-dire, l'échantillon des  $N$  dernières observations de la série des log-rendements étudiés. Deux paramètres doivent être fixés pour la simulation historique: la taille de la fenêtre  $T_e$  et le taux de couverture de la VaR et ES  $\alpha$ .

À chaque date de la période de calcul  $t$ , on prend  $T_e$  observations passées des log-rendements qui seront classés par ordre décroissant. La  $VaR_{t+1}$  est associée à l'observation  $T_e(1-\alpha)$  de cette série. L' $ES_{t+1}$  sera la moyenne des log-rendements au delà du niveau de la VaR. Cette opération est répétée jusqu'à la fin de l'échantillon. La démarche est décrite à la figure suivante

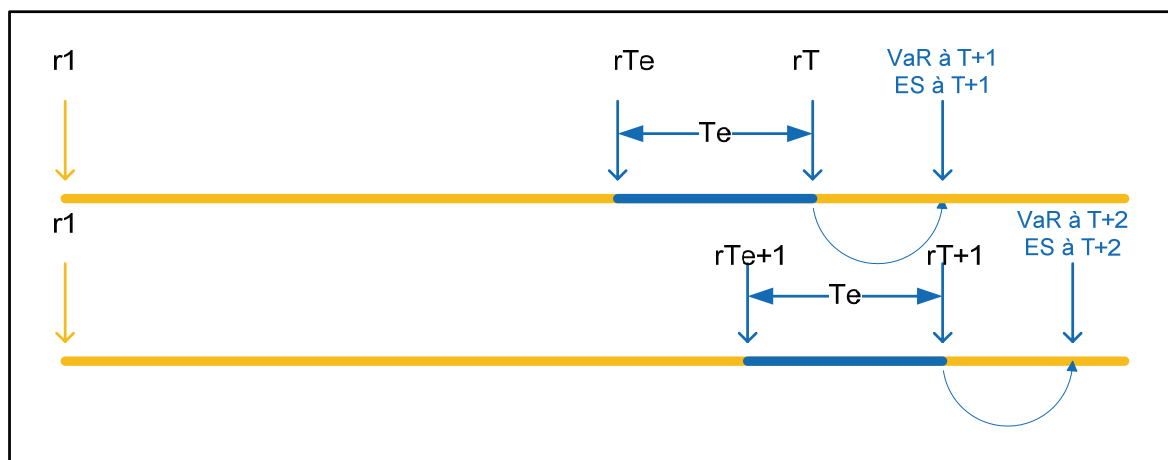


Figure 7. Calcul de la VaR et ES par la simulation historique

## 2.4 Résultats empiriques

Pour effectuer tous les calculs nécessaires à cette étude, on a recours au logiciel MATLAB. Tous les résultats fournis sont des sorties de calcul par ce logiciel. Une partie du code MATLAB réalisé repose sur les travaux d'Eric Jondeau et Michael Rockinger<sup>7</sup>.

Cette section présentera les calculs de l'estimation du modèle économétrique, ainsi que les calculs des deux mesures VaR et ES par le modèle GARCH(1,1) univarié et la simulation historique. Elle sera achevée par une interprétation des résultats.

### 2.4.1 Estimation du modèle GARCH(1,1)

Le modèle utilisé dans cette étude ainsi que la méthode adaptée pour l'estimation de ses paramètres ont été présentés précédemment. C'est le modèle GARCH(1,1) univarié dans les deux cas: en présence d'une loi Normale et d'une loi Student.

<sup>7</sup> <http://www.hec.unil.ch/matlabcodes/>



### 2.4.1.1 Paramètres initiaux du modèle

Afin d'estimer le modèle GARCH(1,1), les coefficients initiaux doivent être fixés  $\theta_0 = (\omega_0; \alpha_0; \beta_0)$  en respectant les conditions initiales.

D'après les travaux de Vishal Soni, ces coefficients sont comme suit

$$\omega_0 = \frac{\sum_{t=1}^T r_t^2}{T};$$

$$\alpha_0 = 0.05;$$

$$\beta_0 = 0.85;$$

$$\sigma_0^2 = \frac{\omega_0}{1 - \alpha_0 - \beta_0};$$

Pour le cas d'une loi Student, un autre coefficient est fixé : le degré de liberté de la loi  $\nu=4$  proposé par Éric Jondeau et Michael Rockinger. Leur code MATLAB est utilisé afin d'estimer le modèle. La méthode adaptée pour cette estimation est le maximum de vraisemblance.

### 2.4.1.2 Le modèle GARCH(1,1) univarié avec $\varepsilon \sim N(0,1)$

Selon les résultats fournis par Matlab, les paramètres estimés de ce modèle sont présentés dans le tableau suivant.

Tableau I. L'estimation des paramètres en cas d'une loi Normale

```

*****
Number of observations:    3971.0000
Value of likelihood       10830.9440
Number of parameters      4.0000
*****

```

parameter	beta	stderr	t-student	p-value
alpha	0.0552	0.0047	11.56	0.0000
beta	0.9399	0.0052	179.21	0.0000
omega	0.0000	0.0000	5.47	0.0000

D'après le test de Student:

$$\begin{cases} H_0 : \beta = 0 \\ H_1 : \beta \neq 0 \end{cases}$$

La statistique du test est:  $t = \frac{\hat{\beta}}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}}$  avec  $\Pr(|t| < |q| \mid H_0 \text{ est vraie}) = \alpha/2$

Avec  $q$  est le  $(1 - \alpha/2)$  quantile de la loi Normale (0,1).

La règle de décision: on rejette  $H_0$  si  $|t| > |q|$ .

Pour notre cas:

$$\alpha = 5\%$$

$$q = -1.96$$

Les valeurs des estimations des paramètres satisfont aux conditions initiales du modèle.

Les p-value des paramètres sont nulles, ce qui signifie que tous les coefficients sont statistiquement significatifs et donc les variables explicatives sont pertinentes.

Le modèle estimé s'écrit comme suit

$$\hat{\sigma}_t^2 = \underset{5.47^*}{0.0000016} + \underset{179.21^*}{0.94} \hat{\sigma}_{t-1}^2 + \underset{11.56^*}{0.055} r_t^2$$

\* : représente les statistiques du test.

#### 2.4.1.3 Le modèle GARCH(1,1) univarié avec $\varepsilon \sim t(\nu)$

Selon les résultats fournis par Matlab, les paramètres estimés de ce modèle sont présentés dans le tableau suivant.

Tableau II. L'estimation des paramètres en cas d'une loi Student

*****				
Number of observations:	3971.0000			
Value of likelihood	10839.2143			
Number of parameters	4.0000			
*****				
parameter	beta	stderr	t-student	p-value
omega	0.0000	0.0000	99.9809	0.0000
alpha	0.0647	0.0015	19.1091	0.0000
beta	0.9175	0.0020	331.7480	0.0000
nu	11.5180	2.8137	4.0932	0.0000

Toutes les valeurs de t-Student des paramètres sont supérieures à 1.96, ce qui signifie que tous les coefficients sont statistiquement significatifs et donc les variables explicatives sont pertinentes.

Le modèle estimé s'écrit comme suit

$$\hat{\sigma}_t^2 = \underset{99.9809^*}{0.0000016} + \underset{331.748^*}{0.9175} \hat{\sigma}_{t-1}^2 + \underset{19.1091^*}{0.065} r_t^2$$

\* : représente les t-student des coefficients.

En plus,  $\hat{\nu} = 11.518 \approx 12$  est significatif ce qui veut dire que la distribution des log-rendements de l'indice suit une loi Student de 12 degré de liberté.

#### 2.4.2 Calcul des VaR et ES

Une fois que le modèle GARCH(1,1) est défini, les volatilités sont alors faciles à estimer. Ce qui permet d'estimer les VaR et ES sur notre échantillon. La section suivante explicitera la performance des volatilités estimées ainsi que les résultats empiriques des VaR et ES et leur interprétation.

### 2.4.2.1 Test de validation des volatilités estimées

Les volatilités estimées doivent être vérifiées afin de s'assurer de la validation des VaR et ES. Selon Dockner et Scheicher (1999), la méthode adaptée est l'approche de Pagan et Schwert (1990). Elle consiste à une régression de la volatilité réalisée, exprimée par le carré des rendements, sur la volatilité estimée sur une période bien déterminée. Une bonne estimation de la volatilité signifie des valeurs de  $\hat{\sigma}^2$  proches des volatilités réalisées.

La régression est représentée par:

$$r_t^2 = \alpha + \beta \hat{\sigma}_t^2 + \varepsilon_t$$

Analytiquement, le résultat de cette régression doit fournir un coefficient  $\alpha=0$  et  $\beta$  proche de 1.

Cette régression est établie selon nos données par le logiciel STATA. Les résultats fournis sont comme suit.

Source	SS	df	MS			
Model	.000157572	1	.000157572	Number of obs = 1324		
Residual	.000636442	1322	4.8142e-07	F( 1, 1322) = 327.30		
Total	.000794014	1323	6.0016e-07	Prob > F = 0.0000		
				R-squared = 0.1984		
				Adj R-squared = 0.1978		
				Root MSE = .00069		

r2	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
sigma2	1.003995	.0554952	18.09	0.000	.8951264	1.112863
_cons	-2.42e-07	.0000229	-0.01	0.992	-.0000452	.0000447

Figure 8. Résultats de la régression des volatilités du modèle avec loi Normale

Source	SS	df	MS			
Model	.000162935	1	.000162935	Number of obs = 1324		
Residual	.000631079	1322	4.7737e-07	F( 1, 1322) = 341.32		
Total	.000794014	1323	6.0016e-07	Prob > F = 0.0000		
				R-squared = 0.2052		
				Adj R-squared = 0.2046		
				Root MSE = .00069		

r2	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
sigma2	1.128037	.061058	18.47	0.000	1.008256	1.247818
_cons	8.60e-06	.0000224	0.38	0.702	-.0000354	.0000526

Figure 9. Résultats de la régression du modèle avec loi Student

Le premier tableau représente les données de volatilités obtenu par le modèle GARCH(1,1) en présence d'une loi Normale. Alors que le deuxième tableau correspond au modèle avec distribution Student.

Deux remarques peuvent être tirées pour les deux régressions:

- Le coefficient  $\alpha$  est non significatif puisque le t-Student correspondant est inférieur à 1.96.
- Le coefficient  $\beta$  est significatif puisque son t-Student est supérieur à 1.96. En plus, sa valeur est proche de 1 (1.003 pour le premier modèle et 1.12 pour le deuxième).

Par conséquent, les résultats sont conformes à l'approche de Pagan et Schwert (1990): Les volatilités estimées sont très proches des volatilités réalisées et donc l'estimation est performante. Les calculs de la VaR et l'ES par les modèles GARCH(1,1) (en cas d'une loi normal et d'une loi Student) sont alors simple à effectuer.

### 2.4.2.2 Résultats

Cette section fournira les résultats empiriques de notre étude, à savoir les résultats du modèle GARCH(1,1) et la simulation historique.

- Résultats du modèle GARCH(1,1)

Les paramètres du modèle sont estimés une seule fois à partir de notre premier échantillon. Ils sont alors les mêmes pour toutes les estimations de la volatilité.

Les VaR et ES sont présentées pour un taux de couverture  $\alpha = 5\%$ .

Pour le modèle GARCH(1,1) avec loi Normale, la VaR et ES de chaque jour de notre échantillon est :

$$VaR_{t+1}(5\%) = q * \hat{\sigma}_t \quad \forall t = (T - N)..T$$

avec  $q$  est le  $(1-\alpha)$  quantile de la loi  $N(0,1)$   
et

$$ES_{t+1}(5\%) = \frac{1}{0.05} \int_0^{0.05} F^{-1}(p) dp$$

avec  $F$  est la répartition de la loi  $N(0,1)$

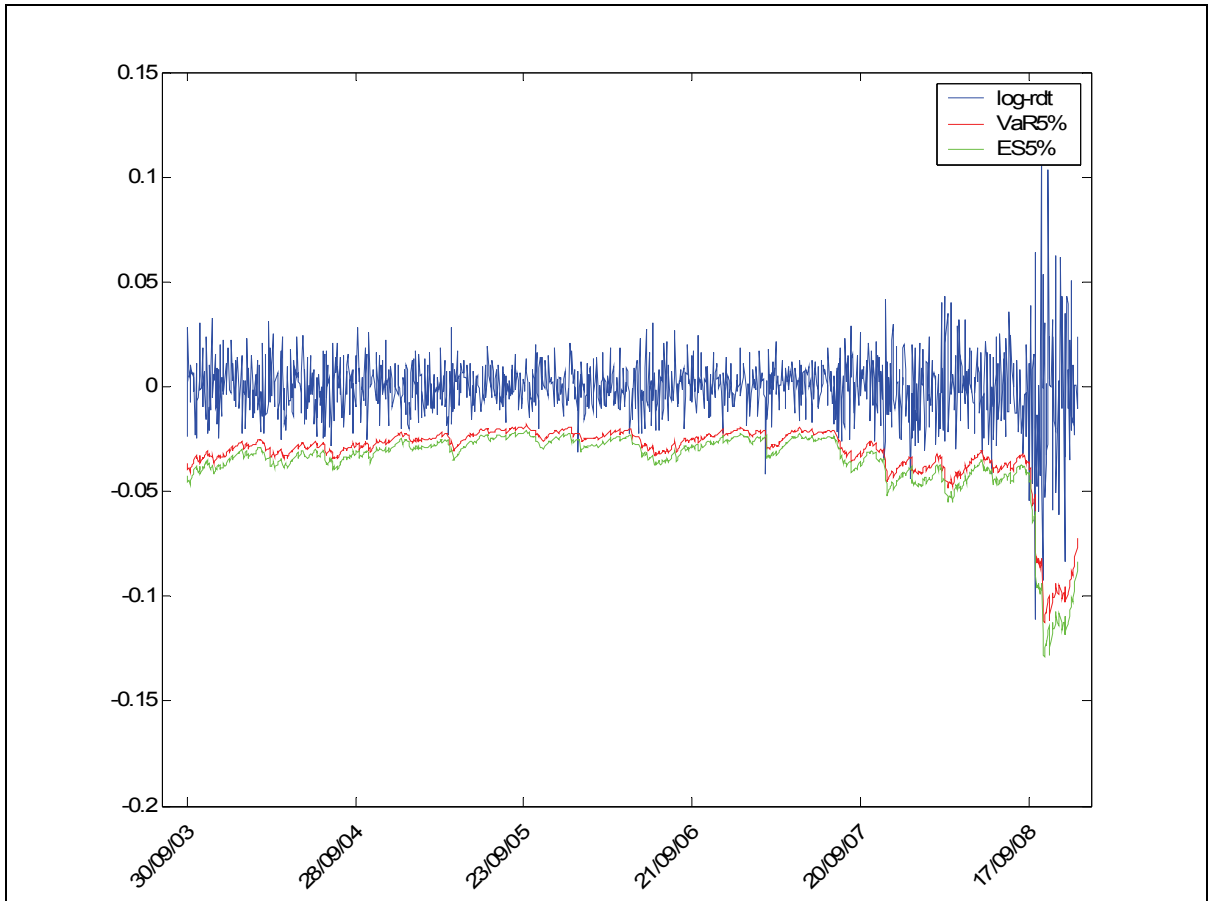


Figure 10. Résultats de calcul de la VaR et ES à 5%  
par le modèle GARCH(1,1) avec  $\varepsilon \sim N(0,1)$

Pour le modèle GARCH(1,1) avec loi Student, les deux mesures de risque sont calculées comme suit :

$$VaR_{t+1}(5\%) = q * \hat{\sigma}_t \quad \forall t = (T - N)..T$$

avec  $q$  est le  $(1-\alpha)$  quantile de la loi  $t(12)$   
et

$$ES_{t+1}(5\%) = \frac{1}{0.05} \int_0^{0.05} F^{-1}(p) dp$$

avec  $F$  est la répartition de la loi  $t(12)$

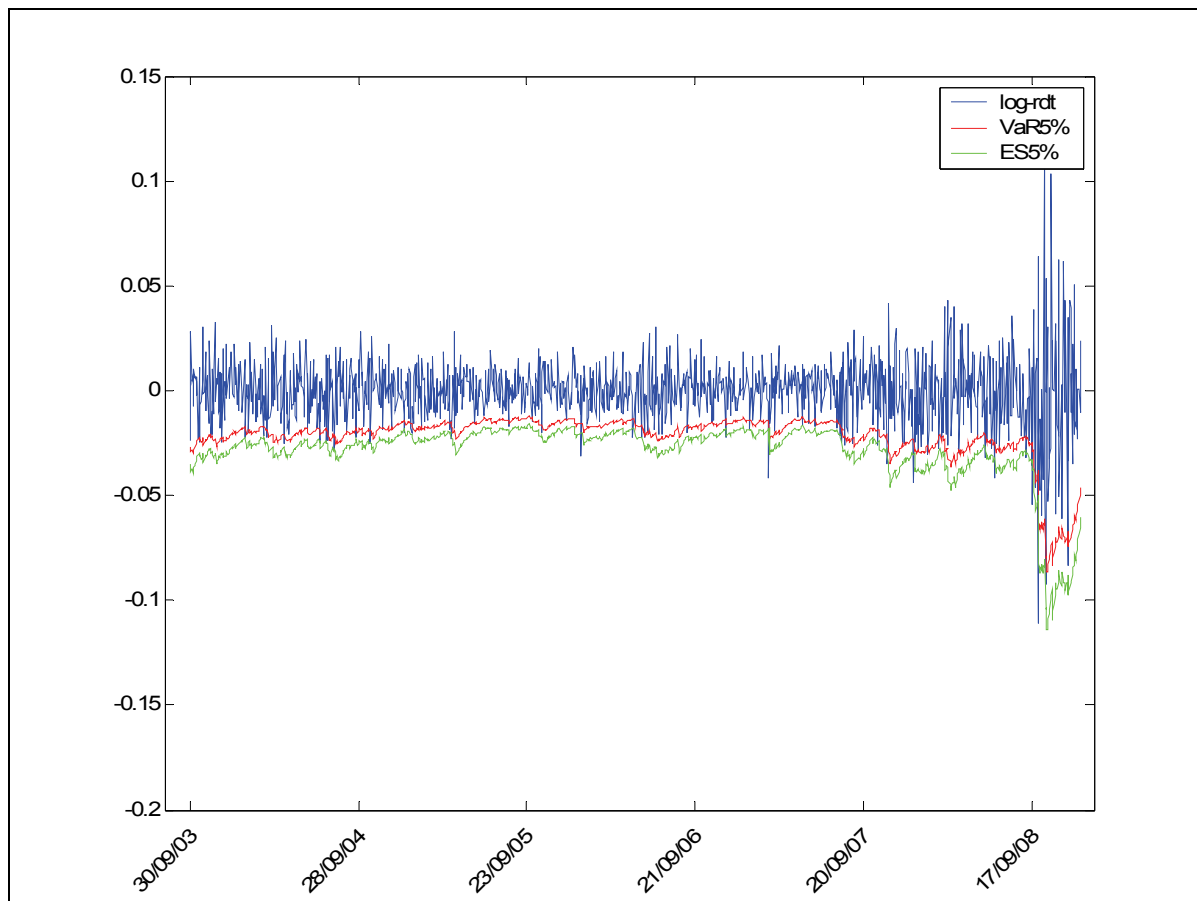


Figure 11. Résultats de calcul de la VaR et ES à 5%  
par le modèle GARCH(1,1) avec  $\varepsilon \sim t(12)$

D'après les résultats trouvés, nous constatons une variabilité de la série des VaR et ES à un taux de couverture de 5%. Ce qui démontre à priori qu'elles tiennent compte de l'information disponible, élément essentiel dans la mesure de risque sur le marché financier.

Pour les deux modèles, la distribution de VaR et ES semble la même avec un petit décalage. Analytiquement, l'ES est 1.25 fois plus supérieur que la VaR pour le modèle GARCH(1,1) avec la loi Normale. Pour le modèle avec  $\varepsilon \sim t(12)$ , l'ES est 1.31 plus élevé que la VaR. Si un investisseur détient cet actif, il doit ajuster son capital à la valeur de la VaR afin de se couvrir d'une perte importante. Mais il est préférable de détenir un réserve de plus afin de

faire face à une éventuelle sous estimation de la perte réelle par la VaR. C'est la valeur de l'ES. Elle est 25% plus élevée que la VaR pour le premier modèle et 31% pour le deuxième. Ce qui implique que le choix du modèle est primordial afin de gérer le risque du portefeuille.

- Résultats de la simulation historique

Pour la simulation historique, le choix de la taille de la fenêtre est important pour la prévision de la VaR et ES. Plus la taille de la fenêtre est petite, plus l'estimation des deux mesures sera volatile car elle sera plus sensible à n'importe quel évènement survenu. De plus, plus la taille de la fenêtre est large plus la VaR et ES deviennent non conditionnelle car l'introduction d'une nouvelle information sera négligée. Cependant, nous avons fixé la fenêtre à  $\frac{1}{6}$  de la taille de notre échantillon et le taux de couverture pour la VaR et ES demeure le même,  $\alpha = 5\%$ .

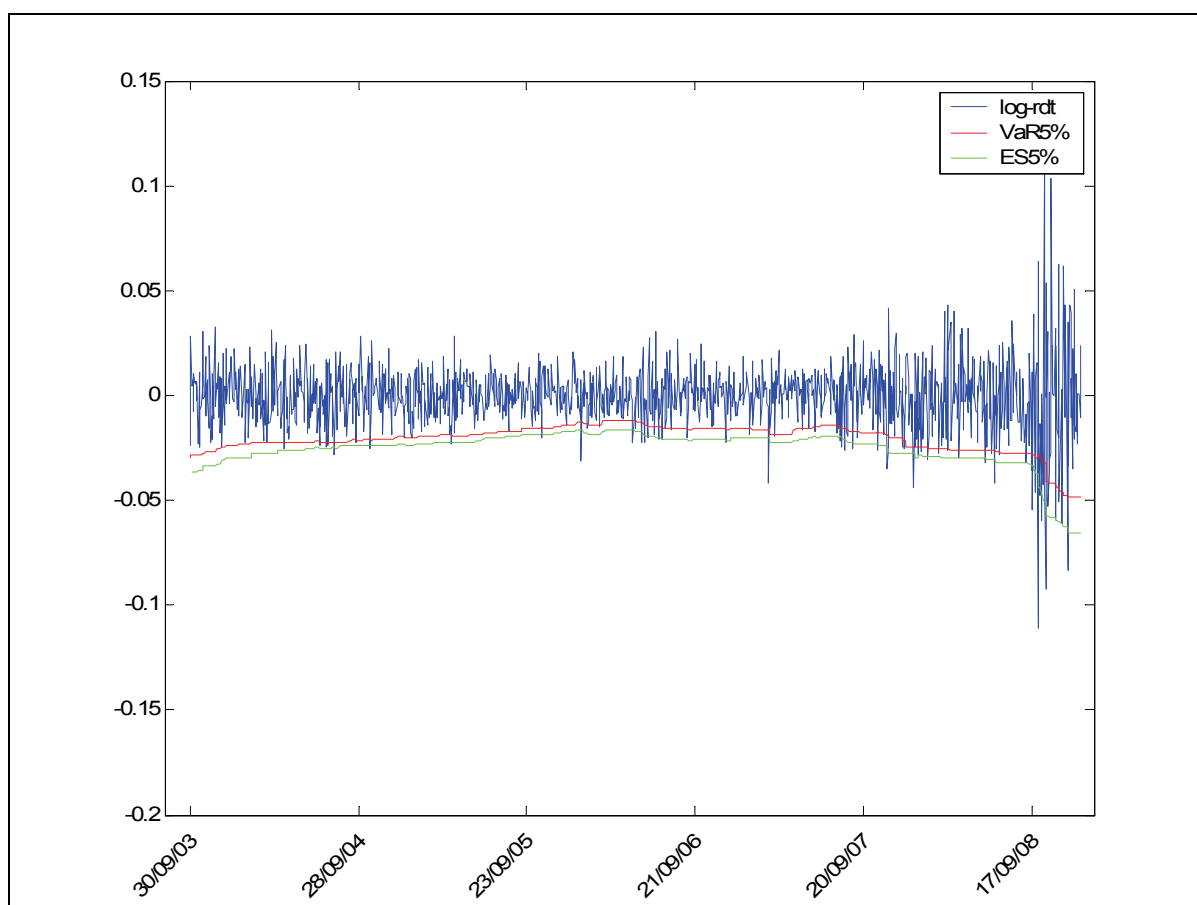




Figure 12. Résultats de calcul de la VaR et ES à 5% par la simulation historique

Contrairement aux VaR et ES par le modèle GARCH, la simulation historique a donnée deux séries de valeurs pratiquement constantes dans le temps.

Malgré la variation des rendements de l'indice, la VaR et ES demeurent presque invariantes. Ce qui reflète leur indépendance aux changements encourues sur le marché financier. Il est peu probable, voir impossible que les facteurs qui affectent la valeur de l'actif demeurent inchangés. Surtout que notre actif est l'indice NASDAQ100, qui reflète la dynamique du marché boursier NASDAQ. Il regroupe les 100 premières actions les plus importantes en volumes d'échange.

Néanmoins, rien ne peut être conclu par une simple observation d'une série de données. Des tests sont mis en œuvre afin de comparer les deux méthodes de calcul et déterminer laquelle est la plus appropriée. C'est l'objet de la partie suivante.

### 2.4.3 Le Backtesting

Le modèle GARCH(1,1) univarié avec  $\varepsilon \sim N(0,1)$ , le modèle GARCH(1,1) avec  $\varepsilon \sim t(12)$  et la simulation historique ont abouti à des séries de la VaR et ES de différentes caractéristiques. Pour en choisir une, il faut déterminer laquelle des méthodes est la plus appropriée pour prévoir les deux mesures de risques. Pour cela, on a recours au backtesting.

La méthode backtesting consiste à un test de comparaison entre les différents modèles utilisés pour la prévision de la variable à travers un critère bien déterminé. Ce dernier consiste généralement à évaluer l'écart entre la valeur réalisée de la variable et celle prédite par différentes mesures tel que MAE (Mean Absolute Error) et MSE (Mean Squared Error). Étant donné que les valeurs de VaR et ES ex-post ne sont pas observables, le backtesting sera basée sur leurs valeurs ex-ante et les rendements réalisés de l'actif étudié. Dans ce cas, l'évaluation des différentes méthodes de prévision sera fondée sur divers tests statistiques tel que les tests de couverture non conditionnelle, les tests d'indépendance et les tests de couverture conditionnelle.

Dans notre cas, un test de couverture non conditionnelle, un test d'indépendance seront établis sur la VaR et un autre test basé sur une régression qui évaluera les résultats d'ES.

### 2.4.3.1 Tests des prévisions de la VaR

Deux tests sont proposée pour évaluer les deux méthodes de prévisions de la VaR ; test de couverture non conditionnelle et test d'indépendance.

- Test de couverture non conditionnelle

Le concept de violation (hit ou exception) stipule que la perte observée de l'actif financier dépasse la valeur de la VaR de cet actif. Elle est associée à la fonction suivante:

$$I_t = \begin{cases} 1 & \text{si } R_t < VaR_t \quad \text{avec probabilité } p \\ 0 & \text{sinon} \quad \text{avec probabilité } 1-p \end{cases}$$

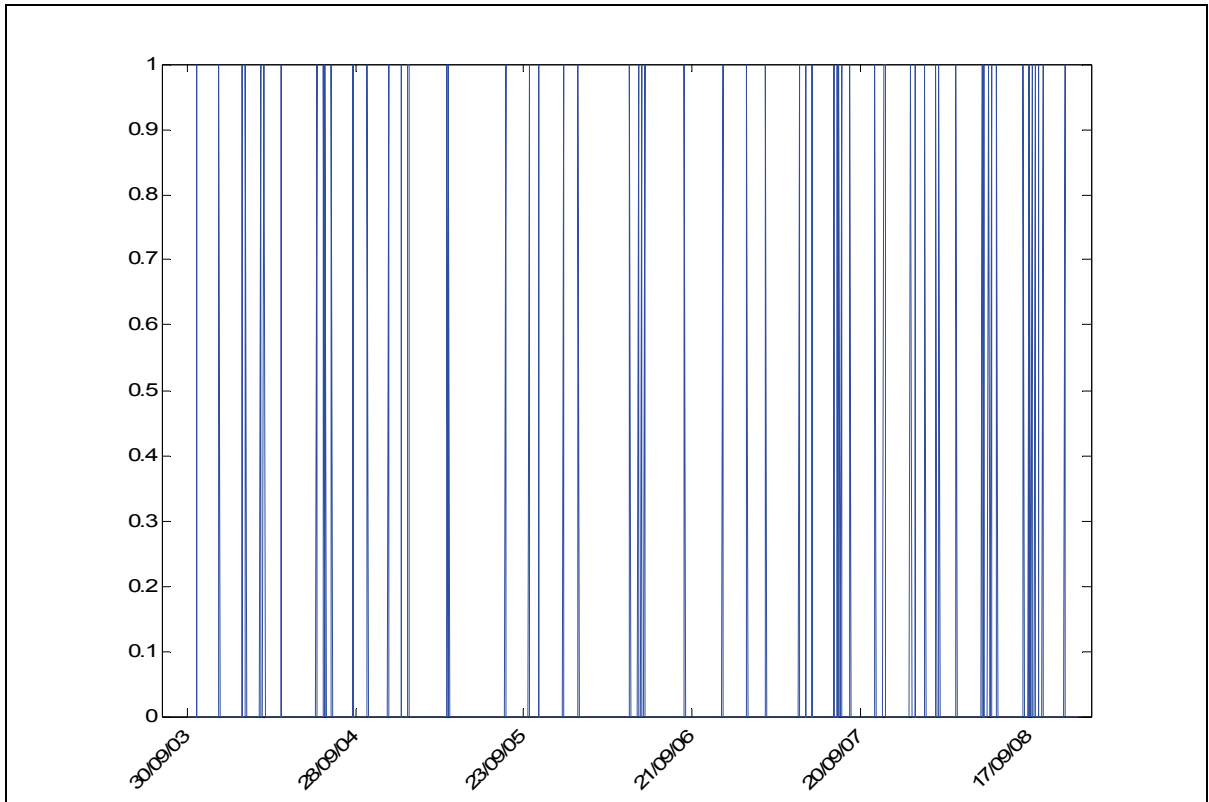


Figure 13. Violations de la VaR5% du modèle GARCH (1,1) avec  $\varepsilon \sim N(0,1)$

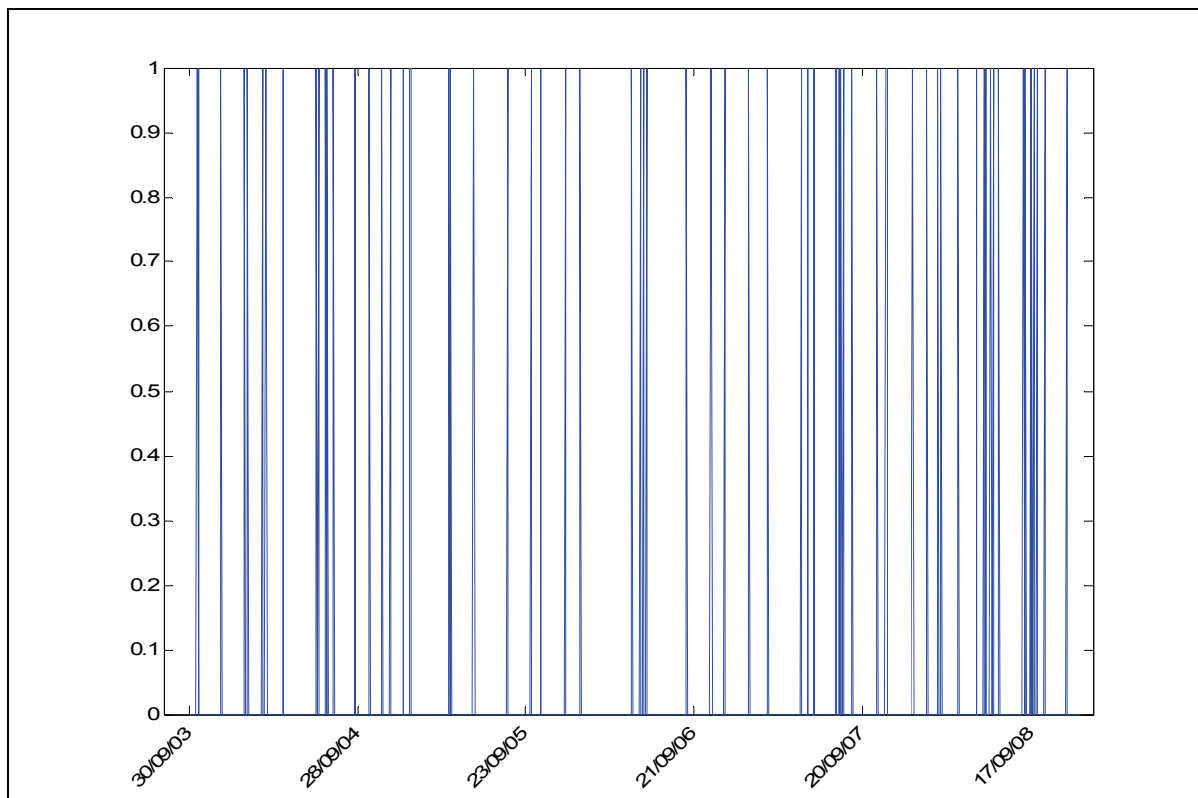


Figure 14. Violations de la VaR5% du modèle GARCH (1,1) avec  $\varepsilon \sim t(12)$

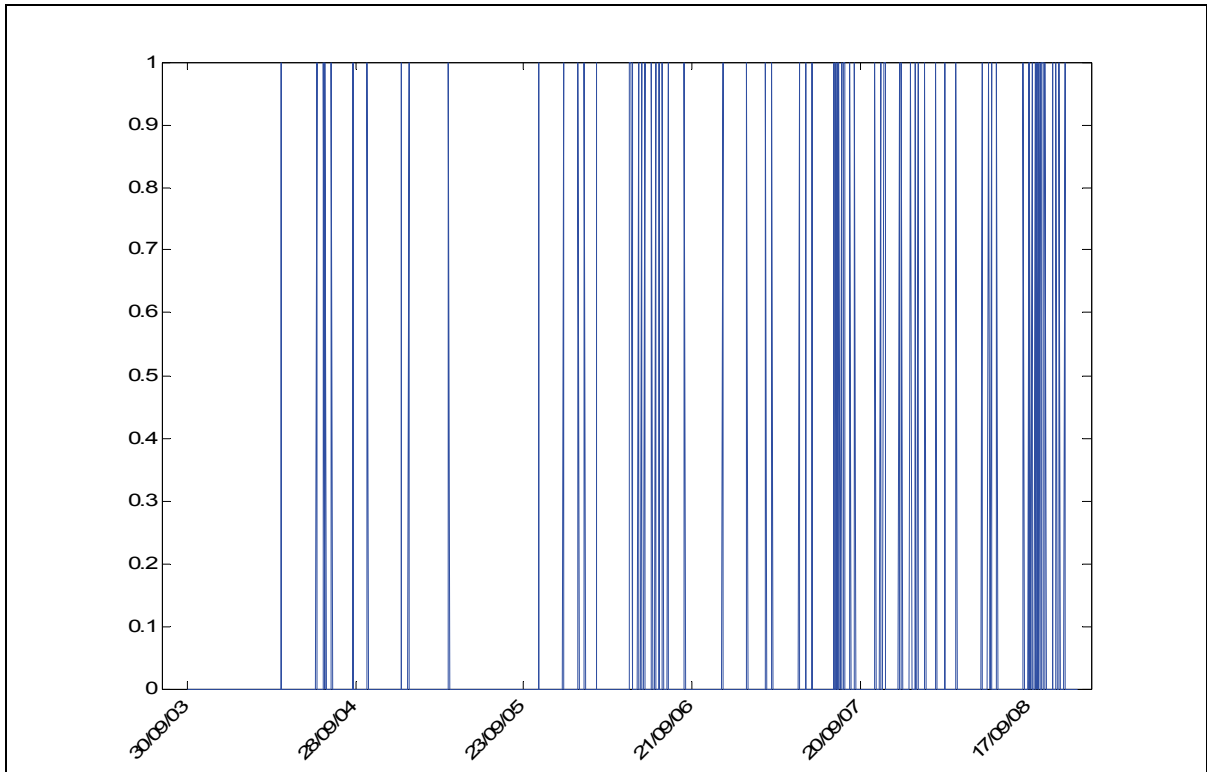


Figure 15. Violations de la VaR 5% de la simulation historique

Le test de couverture non conditionnelle proposé par Kupiec (1995) consiste à tester l'hypothèse que la probabilité réelle de la perte, excédant la valeur de la VaR ex-ante, doit être égale au taux de couverture  $\alpha$  fixé auparavant. Analytiquement, il est équivalent à tester l'hypothèse nulle suivante:

$$H_0 : E(I_t) = \alpha$$

puisque  $I_t \sim \text{Bernoulli}(p)$

alors  $E(I_t) = 1 * Pr(I_t = 1) + 0 * Pr(I_t = 0) = Pr(I_t = 1) = p$

D'où  $H_0 : p = \alpha$

Sous  $H_0$ , la statistique du ratio de vraisemblance est:

$$LR_{UC}(VaR) = -2 \ln \left[ (1 - \alpha)^{N - N_1} \alpha^{N_1} \right] + 2 \ln \left[ (1 - \hat{p})^{N - N_1} \hat{p}^{N_1} \right] \sim \chi^2_{(1)}$$

$$\text{Avec } \hat{p} = \sum_{t=1}^N \frac{I_t}{N} = \frac{N_1}{N}$$

$N_1$  est le nombre de violations de la VaR

(La probabilité de la perte  $p$  est estimée au taux de violation de la VaR).

Pour une valeur critique de 5%, on rejette l'hypothèse nulle si la valeur de la statistique excède  $(1-\alpha)$  quantile de la loi  $\chi^2(1)$  à 5%. Dans ce cas, le modèle n'est pas approprié pour la prévision de la VaR.

Tableau III. Test Kupiec sur la VaR

	Statistique du ratio de vraisemblance $LR_{UC}(VaR)$			$\chi^2_{(1)}$
Test Kupiec	GARCH (1,1) $\varepsilon \sim N(0,1)$	GARCH (1,1) $\varepsilon \sim t(12)$	HS	3.8415
	0.023	0.358	4.168	

On constate que le nombre de violations de la VaR du modèle GARCH(1,1)  $\varepsilon \sim N(0,1)$  (65 violations) est inférieur au modèle avec  $\varepsilon \sim t(12)$  (71 violations) qui est inférieur au celui de la simulation historique (82 violations). De plus, d'après les résultats du tableau ci-dessus, la valeur de la statistique des deux modèles GARCH est inférieur à 3.84 ce qui implique que l'hypothèse nulle du test n'est pas rejetée. Les modèles GARCH(1,1) de notre étude sont alors appropriés pour la prévision de la VaR.

Quant à la simulation historique, la valeur de la statistique est supérieure à 3.84. L'hypothèse nulle du test est rejetée. La méthode n'est pas valide pour la prévision de la VaR.

- Test d'indépendance

Il consiste à tester l'hypothèse de l'indépendance des violations de la VaR à différentes périodes pour un même taux de couverture. Si cette hypothèse est vérifiée, cela veut dire que la séquence de violations sont indépendantes. C'est une propriété importante à l'investisseur

qui reflète l'efficacité de la mesure de risque. Cette dernière tient en compte toute information nécessaire sur le marché et sans retard.

Ce test est illustré par test de Box-Ljung dont l'hypothèse nulle est:

$$H_0 : \rho(1) = \rho(2) = \dots = \rho(m)$$

avec  $\rho(k)$  est l'autocorrélation des violations d'ordre k

Sous l'hypothèse nulle, la statistique du test est:

$$LR_{IND} = N(N+2) \sum_{k=1}^m \frac{\rho^2(k)}{N-k} \sim \chi_{(m)}^2$$

avec N la taille de l'échantillon

Berkowitz, Christofferson et Pelletier (2007) ont trouvé que l'ordre optimale des corrélations est de  $m = 5$ .

Tableau IV. Test d'indépendance

	Statistique du ratio de vraisemblance $LR_{IND}(VaR)$			$\chi_{(5)}^2$
	GARCH (1,1) $\varepsilon \sim N(0,1)$	GARCH (1,1) $\varepsilon \sim t(12)$	HS	
Test d'indépendance	6.79	6.468	37.568	11.075

La valeur de la statistique du test des modèles GARCH est inférieure à la statistique de la loi  $\chi_{(5)}^2$ . L'hypothèse nulle est acceptée. Alors, l'hypothèse d'indépendance est validée.

Contrairement à la méthode HS, l'hypothèse nulle est rejetée.

Par conséquent, d'après les deux tests de prévisions de la VaR, les deux modèles GARCH(1,1) sont retenus. Ils sont alors plus appropriés à prévoir la VaR que la simulation historique. De plus, d'après les figures de la violation de la VaR, on constate que leur distribution sur la période étudié est presque régulière pour le modèle GARCH. Bien que pour la simulation historique, il y a une concentration des violations surtout à la fin de la

période. Cette dernière couvre les années 2007 et 2008 qui ont été marquées par la crise financière américaine et donc une importante volatilité de l'indice. Les prévisions du modèle GARCH(1,1) a mieux pris cette considération que la simulation historique puisque les violations de la VaR sont moindres

### 2.4.3.2 Test de prévision d'ES

Christoffersen suggère un backtesting des ES qui consiste à établir une régression des écarts entre l'ES ex-ante et le log-rendement réalisé à la date où il existe une violation de la VaR, sur un ensemble de variables explicatives. Ces dernières relèvent de l'information dont l'investisseur dispose à cette date pour la prévision de l'ES de sa position.

Analytiquement l'expression de la régression est présentée comme suit:

$$r_t - ES_t = \beta_0 + \beta_1 r_{t-1} + \beta_2 \sigma_{t-1}^2 + \varepsilon_t$$

avec

$\sigma_{t-1}^2$  est la variance des log-rendements passés

Trois régressions sont réalisées pour les deux séries d'ES des deux méthodes de prévision. Pour les ES du modèle GARCH(1,1), les résultats sont représentés ci-dessous.

Tableau V. Résultats de la régression des ES du modèle GARCH(1,1)  $\varepsilon \sim N(0,1)$

Source	SS	df	MS			
Model	.000222194	2	.000111097	Number of obs =	64	
Residual	.016063959	61	.000263344	F( 2, 61) =	0.42	
Total	.016286154	63	.00025851	Prob > F =	0.6577	
				R-squared =	0.0136	
				Adj R-squared =	-0.0187	
				Root MSE =	.01623	

ecart	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
rt1	.1598424	.1754536	0.91	0.366	-.1909988	.5106836
sigma2	.2888115	10.31456	0.03	0.978	-20.33643	20.91405
_cons	.0269061	.0028144	9.56	0.000	.0212783	.0325339



Tableau VI. Résultats de la régression des ES du modèle GARCH(1,1)  $\varepsilon \sim t(12)$ 

Source	SS	df	MS			
Model	.000344374	2	.000172187	Number of obs =	70	
Residual	.018047437	67	.000269365	F( 2, 67) =	0.64	
				Prob > F =	0.5309	
				R-squared =	0.0187	
				Adj R-squared =	-0.0106	
Total	.01839181	69	.000266548	Root MSE =	.01641	

ecart	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
r1	.149612	.1801412	0.83	0.409	-.2099513	.5091753
sigma2	5.891865	9.075453	0.65	0.518	-12.22282	24.00654
_cons	.0268841	.0024966	10.77	0.000	.0219009	.0318674

On constate alors que:

- Pour les deux modèles, le coefficient  $\beta_0$  est significatif puisque le t-Student correspondant est supérieur à 1.96. ce qui signifie que la régression n'est pas biaisée.
- Les coefficients  $\beta_1$  et  $\beta_2$  sont non significatifs (puisque la t-Student respective est inférieure à 1.96). Ce qui indique que les deux variables correspondantes ne sont pas pertinentes. Le rendement et la volatilité passées de l'indice n'expliquent pas l'écart entre la valeur réelle de la perte et l'ES. Même avec un test Fisher pour l'hypothèse de nullité conjointe des deux coefficients, on constate que la statistique de l'hypothèse nulle est inférieure à celle de la loi Fisher. L'hypothèse nulle est acceptée. Par conséquent, les deux variables ne sont pas explicatives conjointement.

L'échec de la régression revient alors à des données d'ES qui sont biaisées. Dans ce cas, les prévisions de l'ES sur la période étudiée ne sont pas justes. Ce qui met en cause la méthode de calcul: le modèle GARCH(1,1).

Une deuxième régression est mise en œuvre afin d'effectuer un backtesting sur l'ES de la simulation historique.

Tableau VII. Résultats de la régression des ES de la simulation historique

Source	SS	df	MS			
Model	.013820983	2	.006910492	Number of obs =	81	
Residual	.013303503	78	.000170558	F( 2, 78) =	40.52	
Total	.027124487	80	.000339056	Prob > F =	0.0000	
				R-squared =	0.5095	
				Adj R-squared =	0.4970	
				Root MSE =	.01306	

ecart	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
v1						
L1.	.1643723	.1166126	1.41	0.163	-.0677856	.3965302
v3	77.96577	8.818333	8.84	0.000	60.40982	95.52172
_cons	.0131625	.0022623	5.82	0.000	.0086585	.0176664

D'après les résultats, on constate que:

- La constante de la régression  $\beta_0$  est significative puisque son t-Student est supérieur à 1.96. Ce qui permet de dire que le modèle n'est pas biaisé.
- $\beta_2$  est significatif, son t-Student est supérieur à 1.96. La variable significative  $\sigma^2$  est pertinente. Plus l'indice est volatile, plus l'écart est large.
- Seul le coefficient  $\beta_1$  est non significatif puisque son t-Student est inférieur à 1.96. la variable correspondante n'est pas une variable explicative. Le log-rendement passé de l'indice n'explique pas l'écart entre le log-rendement observé et l'ES prévu à la même date.
- Par contre, si on effectue un test Fisher, on constate que la statistique de l'hypothèse nulle est supérieure à celle de la loi Fisher  $F(2, 78)$ . L'hypothèse nulle est rejetée. Par conséquent, les deux variables sont explicatives conjointement.

```
. test (L1.v1=0)(v3=0)
```

```
( 1)  L.v1 = 0
( 2)  v3 = 0
```

```
F( 2, 78) = 40.52
Prob > F = 0.0000
```

D'après les résultats aboutis, le backtesting a validé la méthode de simulation historique pour la prévision de l'ES. Contrairement au modèle GARCH(1,1) qui a été rejeté.

Par conséquent, le résultat est partagé entre les deux mesures de risque. Chacune a sa propre méthode de prévision correspondant à notre portefeuille. Pour la VaR c'est la méthode du modèle GARCH(1,1) qui a été validé. Alors que pour l'ES, c'est la méthode simulation historique qui est la plus appropriée.

## CONCLUSION

La présente étude a permis de comparer deux méthodes largement utilisées sur le marché financier dans la prévision de deux mesures de risque: la VaR et ES. Ces deux méthodes sont le modèle GARCH(1,1) univarié et la simulation historique. Ce travail s'appuie sur les données de l'indice NASDAQ100 sur une période s'étalant du 1<sup>er</sup> Janvier 1988 au 31 Décembre 2008. Un taux de couverture de 5% a été utilisé pour la prévision de la VaR et ES.

Les étapes suivies tout au long de cette étude sont comme suit. D'abord, le modèle GARCH(1,1) univarié a été étudié. Il a été utilisé dans deux cas: en présence d'une loi Normale et en présence d'une loi Student du terme d'erreur. Ensuite, la méthode simulation historique a été explicitée. La VaR et ES ont été calculées alors par les deux méthodes. Finalement, un backtesting a été utilisé pour évaluer les deux méthodes de notre étude dans la prévision de la VaR et ES.

Après une estimation des paramètres du modèle GARCH(1,1) univarié, nous avons remarqué que ce dernier est valide en présence d'une loi Normale. Il est aussi valide en cas d'une loi Student de douze degré de liberté. Les volatilités estimées par les deux modèles ont été validées par le test de Dackner et Scheicher (1999). La VaR et ES à un taux de couverture de 5% ont été alors calculés par les deux modèles GARCH(1,1) et la simulation historique. Plusieurs violations des deux mesures ont été détectées. Un backtesting a été effectué pour évaluer les deux méthodes. L'étude a montré que le choix de la méthode de prévision dépend de la mesure de risque, soit la VaR ou l'ES. En effet, les résultats empiriques stipulent que si la mesure choisie est la VaR, alors la méthode de prévision appropriée serait le modèle GARCH(1,1). L'étude a ensuite montré que le modèle Student s'applique mieux aux caractéristiques de notre échantillon. D'une part, la distribution de l'indice est leptocurtique. Elle présente des queues plus épaisses que la loi Normale. Donc le choix d'une distribution Student est plus approprié. D'autre part, la méthode utilisée pour l'estimation des paramètres du modèle est le maximum de vraisemblance. Le modèle choisi serait celui dont la vraisemblance est la plus élevée. Dans notre cas, c'est le modèle avec loi Student.

Quant à la prévision de l'ES, le backtesting a validé la simulation historique et a rejeté le modèle GARCH.

Étant donné le grand nombre de méthodes de prévision de mesure de risque utilisé sur le marché financier, le présent travail s'est limité aux deux méthodes GARCH(1,1) et la simulation historique. De futurs travaux peuvent être envisagés pour évaluer d'autres méthodes de prévision telles que les méthodes semi paramétriques.

## BIBLIOGRAPHIE

### - *Livres*

DOWD, "Beyond Value at Risk", Edition Jhon Wiley & sons Ltd, Angleterre, 1998.

DOWD, "Measuring Market Risk", Edition Jhon Wiley & sons Ltd, 1<sup>ère</sup> édition.

JAQUILLART ET SOLNIK, "Marchés Financiers, Gestion De Portefeuille Et Des Risques », Edition Dunod, Paris, 2002.

JONDEAU, POON ET ROCKINGER, "Financial Modeling Under Non-Gaussian Distribution", Edition Springer, 2007.

MC NEIL, FREY ET EMBRECHTS, "Quantitative Risk Management", Edition springer, 2005.

### - *Articles*

ANGELIDOS, T. ET DAGIANNAKIS, S., "*Backtesting VaR models: An Expected Shortfall Approach*".

ARTZNER, P., DELBAEN, F., EBER, J-M ET HEATH, D., "*Coherent Measures of Risk*", Mathematical Finance, Vol 9, No 3, Juillet 1999, 203-228.

ARTZNER, P., DELBAEN, F., EBER, J-M. ET HEATH, D., "*A Characterization of Measures of Risk*", Cornell University Operations Research and Industrial Engineering, Février 1997.

BERKOWITZ, J., CHRISTOFFERSON, P., ET PELLETIER, D., "*Evaluating Value-at-Risk Models with Desk-Level Data*", North Carolina State University, 2007.

CHRISTOFFERSON, P., "*Evaluating Interval Forecasts*", International Economic Review, Vol 39, 1998, 841-862

CHRISTOFFERSEN, P., "*Backtesting*", Juin 2008.

COTTER, “*Varying The VaR For Unconditional And Conditional Environments*”, Journal of International Money & Finance, Vol 26, 2007, 1338-1354.

DA VEIGA, CHAN ET Mc ALEER, “*Evaluating the impact of market reforms on Value-at-Risk forecasts of Chinese A and B shares*”.

ENGLE, “*GARCH 101: The Use of ARCH\GARCH Models in Applied Econometrics*”, Journal of Economic Perspective, Vol 15, No 4, Automne 2001, 157-168.

ENGLE, R.F. ET MANGANELLI, S., “*CAViaR : Conditional Autoregressive Value at Risk by Regression Quantiles*”, Journal of Business and Economic Statistics, 2004, Vol 22, 367-381.

FILHO ET YAHO, “*Estimation of Value-at-Risk And Expected Shortfall Based On Nonlinear Models of Return Dynamics and Extreme Value Theory*”, Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics, Vol 10, 2006, Article 4.

KUPIEC, P., “*Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models*”, Journal of Derivatives, 1995, Vol 3, 73-84.

LINSMEIER, T.J. ET PEARSON, N.D., “*Risk Measurement: An Introduction to Value at Risk*”, University of Illinois at Urbana-Champaign, juillet 1996

McNEIL ET FREY “*Estimation Of Tail-Related Risk Measures For Heteroscedastic Time Serie: An Extreme Value Approach*”, Juin 1999.

NIETO M.R. ET RUIZ E., “*Measuring Financial Risk: Comparison of Alternative Procedures to Estimate VaR and ES*”.

POLASEK, W. ET POJARLIEV, M., “*VaR Evaluations Based on Volatility Forecasts of GARCH Models*”.

SONI, V., “*A comparison of Value at Risk Methods for Portfolios Consisting of Interest Rate Swaps in Tthe Indian Market Under the GARCH Framewrk*”, November 2005.

SZEGO, “*Measures of Risk*”, Journal of Banking & Finance, Vol 26, 2002, 1253-1272.

YAHO ET LI, “*Model Risk In VaR Estimation: An Empirical Study*”, International Journal Of Information Technology & Decision Making, Vol 5, No 3, 2006, 503-512.

YAMAI ET YOSHIBA, “*Value at Risk Versus Expected Shortfall: A Practical Perspective*”, Journal of Banking & Finance, Vol 29, 2005, 997-1015.

- *Internet*

Value at Risk

<http://www.gloriamundi.org>

Mastère économétrie et statistiques appliquées (ESA), Université d'Orléans  
[www.univ-orleans.fr/deg/masters/ESA/](http://www.univ-orleans.fr/deg/masters/ESA/)

Informations générales

[www.wikipédia.com](http://www.wikipédia.com)

- *Notes*

Notes de cours de Christophe Hurlin, Septembre 2008



