Université de Montréal

Quelques théorèmes de points critiques basés sur une nouvelle notion d'enlacement

par

Laurence Boulanger

Département de mathématiques et de statistique

Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures

en vue de l'obtention du grade de

Maître ès sciences (M.Sc.)
en mathématiques

le 22 décembre 2009

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

Quelques théorèmes de points critiques basés sur une nouvelle notion d'enlacement

présenté par

Laurence Boulanger

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Christiane Rousseau

(président-rapporteur)

Marlène Frigon

(directeur de recherche)

François Lalonde

(membre du jury)

Mémoire accepté le:

8 mars 2010

RÉSUMÉ

Une nouvelle notion d'enlacement pour les paires d'ensembles $A \subset B$, $P \subset Q$ dans un espace de Hilbert de type $X = Y \oplus Y^{\perp}$ avec Y séparable, appellée τ-enlacement, est définie. Le modèle pour cette définition est la généralisation de l'enlacement homotopique et de l'enlacement au sens de Benci-Rabinowitz faite par Frigon [**7**]. En utilisant la théorie du degré développée dans [**8**], plusieurs exemples de paires τ-enlacées sont donnés. Un lemme de déformation est établi et utilisé conjointement à la notion de τ-enlacement pour prouver un théorème d'existence de point critique pour une certaine classe de fonctionnelles sur X. De plus, une caractérisation de type minimax de la valeur critique correspondante est donnée. Comme corollaire de ce théorème, des conditions sont énoncées sous lesquelles l'existence de deux points critiques distincts est garantie. Deux autres théorèmes de point critiques sont démontrés dont l'un généralise le théorème principal de [**8**].

Mots clefs

Analyse non linéaire, théorie des points critiques, théorie du degré de Kryszewski et Szulkin, enlacement.

ABSTRACT

A new notion of linking for pairs of sets $A \subset B$, $P \subset Q$ in a Hilbert space of the form $X = Y \oplus Y^{\perp}$ with Y separable, called τ-linking, is defined. The model for this definition is the generalization of homotopical linking and linking in the sense of Benci-Rabinowitz made by Frigon [**7**]. Using the degree theory developped in [**8**], many examples of τ-linking pairs are given. A deformation lemma is established and used jointly with the notion of τ-linking to prove an existence theorem for critical points of a certain class of functionals defined on X. Moreover, a characterization of a minimax nature for the corresponding critical value is given. As a corollary of this theorem, conditions are stated under which the existence of two distinct critical points is guaranteed. Two other critical point theorems are demonstrated, one of which generalizes the main theorem of [**8**].

Key words

Nonlinear analysis, critical point theory, Kryszewski and Szulkin degree theory, linking.

TABLE DES MATIÈRES

Je dédis ce mémoire à la mémoire d'Arthur Boulanger (1919-2008) et de Jeanne (Nanny) Navez (1920-2009).

REMERCIEMENTS

Je remercie Marlène Frigon, ma directrice de recherche, pour tout le temps qu'elle m'a si généreusement consacré, pour ses encouragements et ses sourires, et pour avoir été une directrice hors pair en tout point. Je remercie aussi ma bien-aimée, Jacinthe, pour tout son amour ainsi que toute la patience et la compréhension dont elle fait preuve depuis toujours.

J'aimerais aussi exprimer ma gratitude envers mes parents que j'aime, Claude et Réjeanne, pour leur appui et leurs encouragements.

INTRODUCTION

La théorie des point critiques a subi une impulsion nouvelle en 1973 avec la parution d'un article d'Ambrosetti et Rabinowitz [**1**] dans lequel figurait le désormais célèbre théorème du col de montagne.

Théorème 0.1 (Théorème du col de montagne, Ambrosetti-Rabinowitz, 1973)**.** *Soit E un espace de Banach réel et $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ une fonctionnelle satisfaisant la condition de Palais-Smale. Supposons que*

(1) il existe des constantes $\rho, \alpha > 0$ telles que $I(u) \geq \alpha$ pour tout u tel que $\|u\| = \rho$, et

(2) il existe $e \in E$ avec $\|e\| > \rho$ tel que $I(e) \leq I(0)$.

Alors, pour

$$\Gamma := \{\gamma \in C([0,1], E) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\},$$

on a que

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) \geq \alpha$$

est une valeur critique de I.

Ensuite, d'autres théorèmes du même type ont vu le jour comme le théorème du point de selle :

Théorème 0.2 (Théorème du point de selle)**.** *Soit $E = E_1 \oplus E_2$ un espace de Banach réel avec E_2 de dimension finie et $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ une fonctionnelle* *satisfaisant la condition de Palais-Smale. Donné* $\rho > 0$*, posons*

$$B_2 := \{u \in E_2 : \|u\| \leq \rho\},$$
$$S_2 := \{u \in E_2 : \|u\| = \rho\}.$$

Si

$$\inf_{E_1} I > \sup_{S_2} I,$$

alors pour

$$\mathcal{H} := \{h \in C(E, E) : h(u) = u \ \forall u \in S_2\},$$

le nombre réel

$$c := \inf_{h \in \mathcal{H}} \sup_{u \in B_2} I(h(u))$$

est une valeur critique de I*.*

Par la suite, certains mathématiciens ont remarqué que plusieurs théorèmes de point critique pouvaient être unifiés en un seul. La clef de cette unification était la notion d'enlacement (homotopique) :

Définition 0.3 (Enlacement homotopique)**.** Soit E un espace de Banach réel, S une partie fermée de E, et $M \subset E$ une sous-variété topologique avec bord. On dit que ∂M *enlace* S (homotopiquement) si

(1) $S \cap \partial M = \emptyset$;

(2) pour tout $h \in \mathcal{H} := \{h \in C(E, E) : h(u) = u \ \forall u \in \partial M\}$, on a que $h(M) \cap S \neq \emptyset$.

Théorème 0.4. *Soit* E *un espace de Banach réel,* $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ *une fonctionnelle satisfaisant la condition de Palais-Smale,* S *une partie fermée de* E*, et* $M \subset E$ *une sous-variété topologique avec bord. Supposons de plus que*

(1) ∂M *enlace* S *(homotopiquement),*

(2) $\inf_S I > \sup_{\partial M} I$*.*

Alors, pour

$$\mathcal{H} := \{h \in C(E, E) : h(u) = u \ \forall u \in \partial M\},$$

le nombre réel

$$c := \inf_{h \in \mathcal{H}} \sup_{u \in M} I(h(u))$$

est une valeur critique de I.

Par exemple, en remarquant que pour $0 < \rho < \|e\|$, $S := \{u \in E : \|u\| = \rho\}$ et $M := \{te : t \in [0,1]\}$, $\partial M = \{0, e\}$ enlace S et on retrouve le théorème du col de montagne. Le théorème du point de selle s'obtient, quant à lui, du fait que dans la notation du Théorème 0.2, S_2 enlace E_1.

En pratique, on démontre que ∂M enlace S (homotopiquement) en supposant que M se trouve dans un sous-espace E_1 de E de dimension finie. Donné $h \in \mathcal{H}$, on définit habilement une homotopie $H : [0,1] \times E_1 \to E_1$ telle que $H(1, x) = 0$ est synonyme de $h(x) \in S$. On utilise ensuite la théorie du degré topologique de Brouwer pour montrer qu'il existe effectivement un point $x \in E_1$ avec $H(1, x) = 0$. Pour des exemples concrets, voir **[10]**.

En 1979, Benci et Rabinowitz **[2]** démontrent un nouveau théorème de point critique faisant intervenir une autre notion d'enlacement :

Définition 0.5 (Enlacement au sens de Benci-Rabinowitz)**.** Soit $E = E_1 \oplus E_2$ un espace de Banach réel et $S, Q \subset E$ avec $Q \subset \tilde{E}$ un sous-espace de E. Notons ∂Q la frontière de Q dans $\tilde{E}$ et posons

$$\Sigma := \{H \in C([0,1] \times E, E) : H(0, \cdot) = \mathrm{id}_E \text{ et } P_2 H(t, u) = P_2 u - K(t, u),$$
$$\text{où } K : [0,1] \times E \to E_2 \text{ est continu et compact}\},$$

où $P_2 : E \to E_2$ est l'opérateur de projection. On dit que ∂Q *enlace* S (au sens de Benci-Rabinowitz) si pour chaque $H \in \Sigma$,

$$H(t, \partial Q) \cap S = \emptyset \quad \forall t \in [0,1] \Rightarrow H(t, Q) \cap S \neq \emptyset \quad \forall t \in [0,1].$$

En pratique, pour démontrer l'enlacement au sens de Benci-Rabinowitz, on utilise le fait que P_2H est une homotopie ayant la forme appropriée pour appliquer la théorie du degré de Leray-Schauder et on procède selon la même stratégie que pour l'enlacement homotopique avec le degré de Brouwer.

En 1999, Frigon [**7**] introduit une notion très naturelle d'enlacement qui généralise plusieurs notions existantes d'enlacements dont l'enlacement homotopique et l'enlacement au sens de Benci-Rabinowitz et donne même de nouveaux enlacements. Elle prouve ensuite un théorème de point critique analogue au Théorème 0.4 mais pour des ensembles enlacés à son sens. Elle applique ensuite ce résultat à un problème elliptique pour démontrer l'existence d'une solution. Le chapitre 2 est consacré à une exposition de la notion de l'enlacement introduite dans cet article.

Kryszewski et Szulkin [**8**] s'intéressent à la question de l'existence d'une solution non triviale du problème de Schrödinger semilinéaire

$$-\Delta u + V(x)u = f(x,u), \quad u \in X := H^1(\mathbb{R}^N). \tag{0.1}$$

Ce problème admet une formulation variationnelle car l'ensemble des solutions faibles de cette équation est en bijection avec l'ensemble des points critiques de la fonctionnelle $\varphi : X \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2 + V(x)u^2)dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u)dx,$$

où

$$F(x,u) = \int_0^u f(x,\xi)d\xi.$$

Les auteurs remarquent que la fonctionnelle φ a une géométrie "de type enlacement". Plus précisément, on a que $X = Y \oplus Z$ pour Y et Z les sous-espaces propres de l'opérateur $u \mapsto -\Delta u + V(x)u$ correspondants aux valeurs propres positives et négatives respectivement, et si $\rho > 0$ est suffisament petit et $R > 0$ suffisament grand, alors il existe $b > 0$ tel que $\varphi \geq b$ sur la sphère $S := \{w \in Z : \|w\| = \rho\}$ et $\varphi \leq 0$ sur la frontière de l'ensemble $U := \{x = y + \lambda z : \|x\| < R, \lambda > 0\}$ où $y \in Y$ et $z \in Z\backslash\{0\}$ est fixé. Kryszewski et Szulkin s'attendent donc à ce que φ ait un point critique non trivial x_c tel que $\varphi(x_c) \geq b$. Cependant, les sous-espaces Y et Z sont tout deux de dimension infinie et le gradient de la fonctionnelle

$u \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u)dx$ n'est pas compact. Ainsi, on ne sait pas montrer que ∂U enlace S ni homotopiquement, ni au sens de Benci-Rabinowitz. Et donc *a posteriori*, aucun théorème de point critique se rapportant à ces deux notions d'enlacement ne peut être invoqué pour garantir l'existence d'une solution au problème (0.1). Ils sont donc amenés à introduire une nouvelle théorie du degré qu'ils utilisent pour démontrer un théorème de point critique adapté à la fonctionnelle φ. Le chapitre 3 présente les idées développées dans cet article.

L'objectif de ce méemoire est de généraliser le théorème de point critique de Kryszewski et Szulkin afin d'élargir la classe de fonctionnelles auxquelles il s'applique.

Pour réaliser cela, nous sommes amenés au chapitre 4 à introduire une nouvelle notion d'enlacement, que l'on appelle le τ-enlacement. Notre modèle pour la définition du τ-enlacement est la notion d'enlacement introduite par Frigon dans [**7**]. Il repose sur les topologies σ et τ et sur la notion de fonctions σ-admissibles introduites par Krysewski et Szulkin [**8**]. Deux critères déterminant des conditions générales sous lesquelles deux paires d'ensembles sont τ-enlacés sont donnés. Ensuite, trois théorèmes de points critiques généralisant le théorème de Kryszewski et Szulkin sont démontrés. Finalement, un résultat de multiplicité est obtenu comme corollaire de ces théorèmes.

Chapitre 1

PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre, nous avons compilé un certain nombre de définitions, notations, et énoncés de théorèmes qui sont utilisés à un moment ou un autre de ce texte.

§1.1. Rappels de topologie et d'analyse fonctionnnelle

Dans toute cette section, X désignera un espace topologique, M un espace métrique et E un espace de Banach réel.

Définition 1.1. Soit A une partie non vide de X. Une application continue $r : X \to A$ est dite une *rétraction* de X sur A si $r|_A = \mathrm{id}_A$. S'il existe une rétraction de X sur A, l'ensemble A est appelé un *rétract* de X.

Définition 1.2. Soit $\mathcal{U} := \{U_i : i \in I\}$ un recouvrement ouvert de X. Le recouvrement $\mathcal{U}$ est dit *localement fini* si pour tout $x \in X$, il existe un voisinage de x intersectant seulement un nombre fini d'éléments de $\mathcal{U}$. Un *raffinement ouvert* du recouvrement $\mathcal{U}$ est un recouvrement ouvert $\mathcal{V} = \{V_j : j \in J\}$ tel que pour chaque $j \in J$, il existe un $i \in I$ tel que $V_j \subset U_i$.

Lemme 1.3. *Soit M un espace métrique et $\mathcal{U} := \{U_i : i \in I\}$ un recouvrement ouvert de M. Il existe un raffinement ouvert localement fini de $\mathcal{U}$.*

Lemme 1.4 (Lemme d'Urysohn, version forte)**.** *Soit M un espace métrique et A, B deux parties fermées et disjointes de M. Il existe une fonction continue $f : M \to [0,1]$ telle que $f(x) = 0$ si et seulement si $x \in A$ et $f(x) = 1$ si et seulement si $x \in B$.*

Une preuve de ce résultat se trouve dans **[4]** Chapter VII, Corollary 4.3.

Définition 1.5. Une application $f : X \to \mathbb{R}$ est dite *semi-continue supérieurement* si $f^{-1}(]-\infty, a[)$ est ouvert pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Définition 1.6. On note E' l'*espace dual* de E, soit l'espace des fonctionnelles linéaires continues sur E. La *topologie faible* sur E est la topologie engendrée par $\{\cap_{i=1}^{N} f_i^{-1}(U_i) : f_i \in E',\ U_i \subset \mathbb{R} \text{ ouvert},\ N \in \mathbb{N}\}$. On note par "$\rightharpoonup$" la convergence dans la topologie faible. Nous appellerons parfois *topologie forte* sur E la topologie induite par la norme pour la distinguer de la topologie faible.

Rappellons quelques faits de base concernant la topologie faible.

Proposition 1.7. *Soit $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. Alors,*

(1) $u_m \rightharpoonup u$ si et seulement si $f(u_m) \to f(u)$ pour tout $f \in E'$;

(2) $u_m \to u$ implique $u_m \rightharpoonup u$;

(3) $u_m \rightharpoonup u$ implique que $\{\|u_m\|\}_{m\in\mathbb{N}}$ est bornée et $\|u\| \leq \liminf_{m\to+\infty} \|u_m\|$;

(4) si $\dim E = \infty$, la topologie faible est non métrisable mais si E' est séparable, elle est métrisable sur toute partie bornée de E ;

(5) si $\dim E < \infty$, la topologie faible et la topologie forte coïncident.

Définition 1.8. Une application $f : E \to E$ est dite *faiblement séquentiellement continue* si pour toute suite $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ dans E telle que $u_m \rightharpoonup u$, on a que $f(u_m) \rightharpoonup f(u)$.

Théorème 1.9 (Théorème de représentation de Riesz)**.** *Soit H un espace de de Hilbert réel et H' son dual. L'application $\Phi : H \to H' : x \mapsto (x, \cdot)$ est un isomorphisme isométrique.*

Définition 1.10. Soit H un espace de Hilbert séparable non trivial. Posons

$$N := \begin{cases} \mathbb{N} & \text{si } \dim H = \infty, \\ \{1, \ldots, \dim H\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

On appelle *base hilbertienne* de H un ensemble $\{e_k : k \in N\}$ d'éléments de H tel que

(1) $(e_k, e_l) = \delta_{k,l}$ pour tout $k, l \in N$;

(2) l'espace vectoriel engendré par $\{e_k : k \in N\}$ est dense dans H.

Théorème 1.11. *Soit H un espace de Hilbert séparable non trivial.*

(1) H admet une base hilbertienne.

(2) Si $\{e_k : k \in N\}$ est une base hilbertienne de H, alors tout $u \in H$ s'écrit sous la forme

$$u = \sum_{k\in N} (u, e_k) e_k \quad \textit{avec} \quad \|u\|^2 = \sum_{k\in N} |(u, e_k)|^2.$$

Inversement, donnée une suite $\{\alpha_k\}_{k\in N}$ de nombres réels telle que $\sum_{k\in N} |\alpha_k|^2 < +\infty$, la série $\sum_{k\in N} \alpha_k e_k$ converge vers un élément $u \in H$ tel que

$$\|u\|^2 = \sum_{k\in N} |\alpha_k|^2 \quad \textit{et} \quad (u, e_k) = \alpha_k \ \forall k \in N.$$

On peut trouver une preuve de cet énoncé dans [**3**].

§1.2. Le degré topologique

Pour la lecture de ce mémoire, une connaissance factuelle de la théorie du degré topologique de Brouwer est requise. Le théorème fondamental est le suivant.

Théorème 1.12. *Notons $\mathcal{M}$ la classe de toutes les applications $f \in C(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$, où U est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 0$), telles que $f^{-1}(0) \cap \partial U = \emptyset$. Il existe une unique fonction $\mathcal{M} \to \mathbb{Z} : f \mapsto \deg(f, U)$ satisfaisant les axiomes suivants :*

(DT1) (Normalisation) Si $p \in U$, alors $\deg(\mathrm{id}_{\overline{U}} - p, U) = 1$.

(DT2) (Additivité) Si $f \in \mathcal{M}$ et V_1, V_2 sont deux ouverts disjoints tels que $V_1 \cup V_2 \subset U$ et $f^{-1}(0) \subset V_1 \cup V_2$, alors $\deg(f, U) = \deg(f, V_1) + \deg(f, V_2)$.

(DT3) (Invariance par homotopie) Si $h \in C([a, b] \times \overline{U}, \mathbb{R}^n)$ est telle que $0 \notin h([a, b] \times \partial U)$, alors $\deg(h(t, \cdot), U)$ est indépendant de $t \in [a, b]$.

(DT4) (Existence) Si $f \in \mathcal{M}$ et $\deg(f, U) \neq 0$, alors $0 \in f(U)$.

(DT5) (Excision) Si $V \subset U$ sont deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $f \in \mathcal{M}$ est telle que $f^{-1}(0) \subset V$, alors $\deg(f, U) = \deg(f, V)$.

(DT6) (Indépendance du système de coordonnées) Soit $f \in \mathcal{M}$ et $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un difféomorphisme. Alors, $\deg(f, U) = \deg(\phi \circ f \circ \phi^{-1}, \phi(U))$.

(DT7) (Contraction) Si $f \in \mathcal{M}$ est telle qu'il existe un sous-espace Y de $\mathbb{R}^n$ tel que $(\mathrm{id} - f)(U) \subset Y$, alors $\deg(f, U) = \deg(f|_Y, U \cap Y)$.

L'entier $\deg(f, U)$ *est appelé le* degré topologique *de f.*

La notion de degré topologique s'étend immédiatement à des applications sur n'importe quel espace de Banach de dimension finie :

Définition 1.13. Soit E un espace de Banach de dimension n. Pour $U \subset E$ un ouvert borné et $f \in C(\overline{U}, E)$ telle que $f^{-1}(0) \cap \partial U = \emptyset$, on pose

$$\deg(f, U) := \deg(\phi \circ f \circ \phi^{-1}, \phi(U))$$

où $\phi : E \to \mathbb{R}^n$ est un difféomorphisme quelconque.

Lemme 1.14. *Dans la définition précédente,* $\deg(f, U)$ *est bien défini et il vérifie les propriétés analogues à (DT1)-(DT7).*

Nous ferons également usage de la propriété suivante du degré :

Proposition 1.15. *Soit* E *un espace de Banach de dimension finie,* $U \subset E$ *un ouvert borné, et* $h \in C([a,b] \times \overline{U}, E)$ *une homotopie telle que* $0 \notin h([a,b] \times \partial U)$ *et* $\deg(h(a,\cdot)) \neq 0$*. Alors, il existe un continuum* $\mathcal{C} \subset [a,b] \times \overline{U}$ *de zéros de* h *tel que pour tout* $t \in [a,b]$*, il existe* $x \in \overline{U}$ *avec* $(t,x) \in \mathcal{C}$*.*

Pour plus de détails concernant la théorie du degré topologique on peut consulter par exemple [**5**].

§1.3. Équations différentielles ordinaires

Nous ferons usage des quelques résultats classiques suivants concernant les équations différentielles ordinaires.

Définition 1.16. Soit F un espace de Banach réel et $A \subset E$. Une application $f : E \to F$ est dite *lipschitzienne sur* A de constante $L > 0$ si pour tout $u, v \in A$, on a que $\|f(u) - f(v)\| \leq L\|u - v\|$. Si $A = E$, on dit simplement que f est *lipschitzienne.*

L'application f est dite *localement lipschitzienne en* $u \in E$ si u admet un voisinage sur lequel f est lipschitzienne. Si f est localement lipschitzienne en chaque point $u \in E$, on dit simplement que f est *localement lipschitzienne.*

Proposition 1.17. *Soit* F *un espace de Banach réel et* A *un sous-ensemble non vide de* E*. Soit aussi* $f, g : E \to F$ *et* $\alpha : E \to \mathbb{R}$ *des applications. Les énoncés suivants sont vrais :*

(1) L'application $E \to \mathbb{R} : u \mapsto \operatorname{dist}(u, A)$ *est lipschitzienne de constante 1.*

(2) Si f et g sont localement lipschitziennes en $u \in E$, alors $f+g$ l'est aussi.

(3) Si α est localement lipschitzienne en $u \in E$ et $\alpha(u) \neq 0$, alors l'application $1/\alpha$ l'est aussi.

(4) Si f et α sont localement lipschitziennes en $u \in E$, alors αf l'est aussi.

Théorème 1.18 (Théorème fondamental des problèmes à valeur initiale, version globale)**.** *Soit $g : E \to E$ une application bornée et localement lipschitzienne. Alors, pour chaque $y_0 \in E$, le problème à valeur initiale*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}y(t;y_0) = g(y(t;y_0)) \\ y(t;y_0) = y_0 \end{cases}$$

admet une unique solution continûment différentiable définie sur $\mathbb{R}$. De plus, le flot, *soit l'application $\psi : \mathbb{R} \times E \to E : (t,u) \mapsto \psi(t,u) := y(t;u)$, est continu.*

Pour une preuve, on peut consulter **[12]** p.79, Corollary 3.9.

Lemme 1.19 (Inégalité de Gronwall)**.** *Si $a, b \geq 0$ et $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ continue et non négative satisfont*

$$f(t) \leq a + b\int_0^t f(s)\, ds \quad \forall t \in [0,T], \tag{1.1}$$

alors,

$$f(t) \leq ae^{bt} \quad \forall t \in [0,T].$$

Théorème 1.20 (Formule d'intégration par parties)**.** *Soit B une boule ouverte dans $\mathbb{R}^n$ et $u, v \in C^1(\overline{U})$ deux fonctions. Pour chaque $x \in \partial B$, notons $\nu(x) = (\nu_1(x), \ldots, \nu_n(x))$ le vecteur unitaire normal en x sortant de ∂B. Alors, pour chaque $1 \leq i \leq n$, on a*

$$\int_B \frac{\partial u}{\partial x_i} v\, dx = -\int_B u\frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx + \int_{\partial B} uv\nu_i\, dS.$$

§1.4. Points critiques et lemme de déformation

Dans cette section, on reproduit une version du Lemme de déformation d'Ambrosetti et Rabinowitz.

Définition 1.21. Une *fonctionnelle* sur E est une application $I : E \to \mathbb{R}$. On dit que I est *différentiable (au sens de Fréchet)* en un point $u_0 \in E$ s'il existe une application linéaire continue $L \in E'$ telle que

$$\lim_{v \to 0} \frac{|I(u_0 + v) - I(u_0) - L(v)|}{||v||} = 0.$$

Dans ce cas, l'application linéaire L est habituellement notée $I'(u_0)$ ou $DI(u_0)$. Si I est différentiable en tout point de E et si l'application $E \to E' : u \mapsto I'(u)$ est continue, on dit que I est *continûment différentiable* sur E et on note $C^1(E, \mathbb{R})$ l'ensemble de ces fonctions.

Définition 1.22. Un *point critique* d'une fonctionnelle $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ est un point $u_0 \in E$ tel que $I'(u_0) = 0$, et $c \in \mathbb{R}$ est dit une *valeur critique* de I s'il existe $u_0 \in I^{-1}(c)$ avec $I'(u_0) = 0$ (i.e. si c est l'image d'un point critique). On note

$$K_c := \{u \in E : I'(u) = 0 \text{ et } I(u) = c\}.$$

Définition 1.23. Pour $I \in C^1(E, \mathbb{R})$, on dit que I satisfait la *condition de Palais-Smale* (PS) si toute suite $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ dans E telle que $\{I(u_m)\}_{m \in \mathbb{N}}$ est bornée et $I'(u_m) \to 0$ possède une sous-suite convergente. Donné $c \in \mathbb{R}$, on dit que I satisfait la *condition de Palais-Smale au niveau* c, $(PS)_c$, si toute suite $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ dans E telle que $I(u_m) \to c$ et $I'(u_m) \to 0$ possède une sous-suite convergente.

Remarque 1.24. Une fonctionnelle $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfait (PS) si et seulement si elle satisfait $(PS)_c$ pour tout $c \in \mathbb{R}$. Notons également que pour $c \in \mathbb{R}$ quelconque, si I satisfait $(PS)_c$, alors K_c est compact.

Notation 1.25. Pour $I : E \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle sur E et $\alpha \leq \beta$ des nombres réels, on note

$$I_\alpha := \{u \in E : I(u) \geq \alpha\} = I^{-1}([\alpha, +\infty[);$$

$$I^\beta := \{u \in E : I(u) \leq \beta\} = I^{-1}(]-\infty, \beta]);$$

$$I_\alpha^\beta := \{u \in E : \alpha \leq I(u) \leq \beta\} = I^{-1}([\alpha, \beta]) = I_\alpha \cap I^\beta.$$

Théorème 1.26 (Lemme de déformation)**.** *Soit $I \in C^1(E, \mathbb{R})$. Si $c \in \mathbb{R}$ n'est pas une valeur critique de I et si I satisfait $(PS)_c$, alors donné $\bar{\epsilon} > 0$ quelconque, il existe $\epsilon \in]0, \bar{\epsilon}[$ et $\eta \in C([0,1] \times E, E)$ tel que*

(D1) $I(\eta(t,u)) \leq I(u)$ *pour tout* $(t,u) \in [0,1] \times E$ *;*

(D2) $\eta(t,u) = u$ *pour tout* $t \in [0,1]$ *et* $u \in E \backslash I_{c-\bar{\epsilon}}^{c+\bar{\epsilon}}$ *;*

(D3) $\eta(1, I^{c+\epsilon}) \subset I^{c-\epsilon}$.

Pour la preuve, voir **[9]** p.82 Theorem A.4.

Chapitre 2

ENLACEMENT GÉNÉRALISÉ

Au cours des dernières années, plusieurs notions d'enlacement sont apparues en théorie des points critiques. Pour n'en nommer que quelques-unes, mentionnons l'enlacement homotopique, l'enlacement homologique et l'enlacement au sens de Benci-Rabinowitz. En 1998, M. Frigon publie un article **[7]** dans lequel apparait une nouvelle notion d'enlacement qui unifie et généralise ces trois dernières notions d'enlacement. Dans ce chapitre nous présentons les résultats principaux de cet article.

§2.1. La notion d'enlacement

Si E est un espace de Banach et A est un sous-ensemble de E, on note

$$\mathcal{N}(A) := \{\eta \in C^0([0,1] \times E, E) : \eta(t,x) = x \ \forall (t,x) \in (E \times \{0\}) \cup (A \times [0,1])\}.$$

Définition 2.1 (Enlacement)**.** Soit E un espace de Banach et $A \subset B \subset E$, $P \subset Q \subset E$ tels que $B \cap Q \neq \emptyset$, $A \cap Q = \emptyset$, et $B \cap P = \emptyset$. Soit $\mathcal{N}_0$ un sous-ensemble non vide de $\mathcal{N}(A)$. On dit que $(B,\, A)$ *enlace* $(Q,\, P)$ *via* $\mathcal{N}_0$ si pour chaque $\eta \in \mathcal{N}_0$, l'une des affirmations suivantes est satisfaite :

(1) $\eta(1, B) \cap Q \neq \emptyset$;

(2) $\eta(]0,1[, B) \cap P \neq \emptyset$.

Si $\mathcal{N}_0 = \mathcal{N}(A)$, on dit simplement que $(B,\, A)$ *enlace* $(Q,\, P)$.

Remarque 2.2. La notion d'enlacement introduite par Frigon [**7**] concerne une classe d'espaces beaucoup plus large que les espace de Banach, mais on choisit de se restreindre à ceux-ci par souci de simplicité.

Exemple 2.3. Soit E un espace de Banach, S une partie fermée de E, et $M \subset E$ une sous-variété topologique avec bord tels que ∂M enlace S homotopiquement (voir Définition 0.3). Alors $(M, \partial M)$ enlace $(S, \emptyset)$. En effet, les conditions d'intersections sont clairement vérifiées et donné $\eta \in \mathcal{N}(\partial M)$, puisque ∂M enlace S homotopiquement, on a que $\eta(M, 1) \cap S \neq \emptyset$.

Les deux propositions suivantes donnent des conditions générales garantissant que deux paires d'ensembles sont enlacées.

Proposition 2.4. *Soit $E = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$ un espace de Banach avec $E_1 \oplus E_2$ de dimension finie. Soit F une partie fermée de $E_2 \oplus E_3$ et U une partie ouverte et bornée de $E_1 \oplus E_2$. On note $\overline{U}$ et ∂U respectivement la fermeture et la frontière de U dans $E_1 \oplus E_2$. Si $U \cap F \neq \emptyset$, $\partial U \cap F = \emptyset$, et $\partial U \cap E_2$ est un rétract de $(E_2 \oplus E_3) \backslash F$, alors $(\overline{U}, \partial U)$ enlace $(F, \emptyset)$.*

Démonstration. Soit $\hat{r} : (E_2 \oplus E_3) \backslash F \to \partial U \cap E_2$ une rétraction. Fixons $p \in U \cap F$ et définissons $r : E \to E_2$ par

$$r(x) = \begin{cases} \hat{r}(x_2 + x_2) & \text{si } x_2 + x_3 \notin F, \\ p & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $x = x_1 + x_2 + x_3$, avec $x_1 \in E_i$, $i = 1, 2, 3$. Soit $\alpha : X \to [0, 1]$ une fonction continue telle que $\alpha(x) = 0$ si et seulement si $x \in F$ et $\alpha(x) = 1$ si et seulement si $x \in \partial U$ (voir Lemme 1.4).

Pour $\eta \in \mathcal{N}(\partial U)$ quelconque, définissons $H : [-1,1] \times \overline{U} \to E_1 \oplus E_2$ par

$$H(t,x) = \begin{cases} \eta_1(t,x) + \alpha((\eta_2+\eta_3)(t,x))(r(\eta(t,x)) - p) & \text{si } t \in [0,1], \\ (t+1)(x_1 + \alpha(x_2)(r(x)-p)) - t(x-p) & \text{si } t \in [-1,0], \end{cases}$$

où $\eta(t,x) = (\eta_1+\eta_2+\eta_3)(t,x)$. Remarquons que $H(-1,\cdot) = \mathrm{id}_{\overline{U}} - p$ avec $p \in U$ et $H(1,x) = 0$ si et seulement si $\eta(1,x) \in F$. De plus, H est continue. Pour le voir, on considère les deux cas suivants :

- Soit $\{(t_n,x_n)\}$ une suite dans $[0,1] \times \overline{U}$ telle que $(t_n,x_n) \to (t,x)$. Il y a deux sous-cas :

  $\underline{(\eta_2+\eta_3)(t,x) \in F}$: Dans ce cas, $H(t,x) = \eta_1(t,x)$, et comme ∂U est borné, la continuité de η et α implique que

  $$\alpha((\eta_2+\eta_3)(t_n,x_n))(r(\eta(t_n,x_n)) - p) \to 0,$$

  d'où $H(t_n,x_n) \to \eta_1(t,x) = H(t,x)$.

  $\underline{(\eta_2+\eta_3)(t,x) \notin F}$: Dans ce cas, $r(\eta(t,x)) = \hat{r}((\eta_2+\eta_3)(t,x))$ et comme $E \backslash F$ est ouvert, par continuité de η, il existe un entier $N > 0$ tel que $n \geq N$ entraîne $(\eta_2+\eta_3)(t_n,x_n) \notin F$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} H(t_n,x_n) &= \eta_1(t_n,x_n) + \alpha((\eta_2+\eta_3)(t_n,x_n))(\hat{r}((\eta_2+\eta_3)(t_n,x_n)) - p) \\ &\to \eta_1(t,x) + \alpha((\eta_2+\eta_3)(t,x))(\hat{r}((\eta_2+\eta_3)(t,x)) - p) = H(t,x). \end{aligned}$$

- Soit $\{(t_n,x_n)\}$ une suite dans $[-1,0] \times \overline{U}$ telle que $(t_n,x_n) \to (t,x)$. Il y a deux sous-cas :

  $\underline{x_2 \in F}$: Dans ce cas, $\alpha(x_2) = 0$ donc $H(t,x) = (1+t)x_1 - t(x-p)$. Comme ∂U est borné, la continuité de α implique que

  $$\alpha((x_n)_2)(r(x_n) - p) \to 0,$$

  d'où $H(t_n,x_n) \to (1+t)x_1 - t(x-p) = H(t,x)$.

  $\underline{x_2 \notin F}$: Dans ce cas, $r(x) = \hat{r}(x_2)$ et comme $E \backslash F$ est ouvert, il existe un entier $N > 0$ tel que $n \geq N$ entraîne $(x_n)_2 \notin F$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} H(t_n,x_n) &= (1+t_n)((x_n)_1 + \alpha((x_n)_2)(\hat{r}((x_n)_2) - p)) - t_n(x_n - p) \\ &\to (1+t)(x_1 + \alpha(x_2)(\hat{r}(x_2) - p)) - t(x-p) = H(t,x). \end{aligned}$$

Par conséquent, si $0 \notin H([-1,1] \times \partial U)$, alors par les propriétés (DT1)-(DT3) du degré topologique (voir Théorème 1.12),

$$1 = \deg(\mathrm{id}_{\overline{U}} - p, U) = \deg(H(-1,\cdot), U) = \deg(H(1,\cdot), U),$$

de quoi on conclut qu'il existe $x \in U$ avec $H(1,x) = 0$, et d'où $\eta(1,U) \cap F \neq \emptyset$. Ceci montre que pour chaque $\eta \in \mathcal{N}(\partial U)$, la condition (1) de la Définition 2.1 est satisfaite.

Pour montrer que $0 \notin H([-1,1] \times \partial U)$, on procède méthodiquement. Soit $x \in \partial U$.

- Si $t = -1$, on a que $H(-1,x) = x - p \neq 0$ car $p \in F$ et $\partial U \cap F = \emptyset$.
- Si $t \in]-1,0[$, on distingue deux cas :

  $\underline{x_2 \in F}$: Dans ce cas, $x_1 \neq 0$, car sinon on aurait $x = x_2 \in \partial U \cap F$. Donc

$$\begin{aligned} H(t,x) &= (1+t)x_1 - t(x-p) \\ &= x_1 - t(x_2 - p) \neq 0. \end{aligned}$$

  $\underline{x_2 \notin F}$: Considérons les deux sous-cas suivants :

  ★ $\underline{x_1 \neq 0}$: Dans ce cas, regroupant les termes appartenant à un même E_i, on a

$$\begin{aligned} H(t,x) &= \underbrace{[(1+t)x_1 - tx_1]}_{\in E_1} + \underbrace{[(1+t)\alpha(x_2)(r(x)-p) - t(x_2-p)]}_{\in E_2} \\ &= x_1 + [(1+t)\alpha(x_2)(r(x)-p) - t(x_2-p)] \neq 0 \end{aligned}$$

  ★ $\underline{x_1 = 0}$: Dans ce cas, $x = x_2$ donc $\alpha(x_2) = 1$, et $r(x) = x_2$, d'où

$$\begin{aligned} H(t,x) &= (1+t)(x_2 - p) - t(x_2 - p) \\ &= x_2 - p \neq 0. \end{aligned}$$

- Si $t = 0$, on a que $\eta(0,x) = x$, donc $\eta_i(x,0) = x_i$, $i = 1,2,3$. Aussi, $x = x_1 + x_2$ car $\overline{U} \subset E_1 \oplus E_2$. Ainsi,

$$H(0,x) = x_1 + \alpha(x_2)(r(x) - p).$$

  Et ici, examinons les deux cas suivants :

★ $\underline{x_1 \neq 0}$: Dans ce cas, comme $r(x) \in E_2$, on a que $\alpha(x_2)(r(x) - p) \in E_2$ et donc $x_1 + \alpha(x_2)(r(x) - p) \neq 0$.

★ $\underline{x_1 = 0}$: Dans ce cas, on a $x = x_2$, donc $r(x) = x_2$ et d'où

$$H(0, x) = \alpha(x_2)(x_2 - p) \neq 0$$

puisque $x_2 = x \in \partial U$ et $\partial U \cap F = \emptyset$ donc $\alpha(x_2) \neq 0$ et $p \in F$ donc $x_2 - p \neq 0$.

- Si $t \in]0, 1]$, considérons les deux cas suivants :

★ $\underline{\eta_1(t, x) \neq 0 :}$ Dans ce cas, il suit que

$$H(t, x) = \eta_1(t, x) + \alpha((\eta_2 + \eta_3)(t, x))(r(\eta(t, x)) - p) \neq 0$$

puisque $\alpha((\eta_2 + \eta_3)(t, x))(r(\eta(t, x)) - p) \in E_2$.

★ $\underline{\eta_1(t, x) = 0 :}$ Dans ce cas, alors certainement $(\eta_2 + \eta_3)(t, x) \notin F$ car dans le cas contraire, on aurait que $\eta(t, x) \in F$. Or, $\eta(t, x) = x \in \partial U$ et $\partial U \cap F = \emptyset$, donc on aurait une contradiction. C'est donc que $\alpha((\eta_2 + \eta_3)(t, x)) \neq 0$ et

$$H(t, x) = \alpha((\eta_2 + \eta_3)(t, x))(r(\eta(t, x)) - p) \neq 0.$$

□

Exemple 2.5. Soit $E = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$ un espace de Banach avec $E_1 \oplus E_2$ de dimension finie. Soit $r > 0$ et posons

$$U := B_{E_1 \oplus E_2}(0; r).$$

Notons que E_3 est fermé puisque de codimension finie. Il est clair que $U \cap E_3 \neq \emptyset$ et $\partial U \cap E_3 = \emptyset$, et l'application $r : (E_2 \oplus E_3) \backslash E_3 \to \partial U \cap E_2$ définie par

$$r(x_2 + x_3) = \frac{r x_2}{\|x_2\|}$$

est une rétraction de $(E_2 \oplus E_3) \backslash E_3$ sur $\partial U \cap E_2$. Par conséquent, par la proposition précédente, $(\overline{U}, \partial U)$ enlace $(E_3, \emptyset)$.

Exemple 2.6. Soit $E = Y \oplus Z$ un espace de Hilbert avec Y de dimension finie et soit $z \in Z$ tel que $\|z\| = 1$. Posons $E_1 := Y$, $E_2 := \mathbb{R}\langle z\rangle$ et $E_3 := \mathbb{R}\langle z\rangle^{\perp_Z}$ de sorte que $E = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$ avec $E_1 \oplus E_2$ de dimension finie. Soit aussi $0 < r < \rho$ et

$$U := \{x = y + \lambda z : \ \|x\| < \rho, \ \lambda > 0, \ y \in Y\} \subset E_1 \oplus E_2,$$

$$Q := \{w \in Z : \ \|w\| \leq r\} \subset E_2 \oplus E_3.$$

Notons $\overline{U}$ et ∂U respectivement la fermeture et la frontière de U dans $E_1 \oplus E_2$, et ∂Q la frontière de Q dans Z :

$$\overline{U} = \{x = y + \lambda z : \ \|x\| \leq \rho, \ \lambda \geq 0, \ y \in Y\},$$

$$\partial U = \{x = y + \lambda z : \ y \in Y, \ \|x\| = \rho \text{ et } \lambda \geq 0 \text{ ou } ||x|| \leq \rho \text{ et } \lambda = 0\},$$

$$\partial Q = \{w \in Z : \ \|w\| = r\}.$$

On a que $U \cap \partial Q \neq \emptyset$ car $rz \in U \cap \partial Q$, et manifestement on a que $\partial U \cap \partial Q = \emptyset$. Aussi, $\partial U \cap E_2 = \{0, \rho z\}$ qui est un rétract de $(E_2 \oplus E_3)\backslash\partial Q = Z\backslash\partial Q$ via par exemple la rétraction $\hat{r} : Z\backslash\partial Q \to \{0, \rho z\}$ définie par

$$\hat{r}(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } \|z\| > r, \\ \rho z & \text{si } \|z\| < r. \end{cases}$$

La proposition précédente donne donc que $(\overline{U}, \partial U)$ enlace $(\partial Q, \emptyset)$.

La proposition suivante donne des exemples où (B, A) enlace (Q, P) avec $P \neq \emptyset$.

Proposition 2.7. *Soit $E = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$ un espace de Banach avec $E_1 \oplus E_2$ de dimension finie. Soit Q une partie fermée de $E_2 \oplus E_3$ et U une partie ouverte et bornée de $E_1 \oplus E_2$. On note $\overline{U}$ et ∂U respectivement la fermeture et la frontière de U dans $E_1 \oplus E_2$, et on note ∂Q la frontière de Q dans $E_2 \oplus E_3$. Si $\partial U \cap Q \neq \emptyset$, $U \cap \partial Q \neq \emptyset$, $\partial U \cap \partial Q = \emptyset$, $\partial U \cap E_2$ est un rétract de $(E_2 \oplus E_3)\backslash\partial Q$, et $(\partial U \cap E_2)\backslash Q$ est un rétract de $E_2 \oplus E_3$, alors $(\partial U, \emptyset)$ enlace $(Q, \partial Q)$.*

Démonstration. Soit $\hat{r} : (E_2 \oplus E_3) \backslash \partial Q \to \partial U \cap E_2$ et $\hat{s} : E_2 \oplus E_3 \to (\partial U \cap E_2) \backslash Q$ des rétractions telles que $\hat{r}|_{(E_2 \oplus E_3)\backslash Q} = \hat{s}|_{(E_2 \oplus E_3)\backslash Q}$.
(De telles rétractions existent car si $\hat{r}' : (E_2 \oplus E_3) \backslash \partial Q \to \partial U \cap E_2$ et $\hat{s}' : E_2 \oplus E_3 \to (\partial U \cap E_2) \backslash Q$ sont des rétractions, alors $\hat{s} := \hat{s}'$ et $\hat{r}$ défini par

$$\hat{r}(x) := \begin{cases} \hat{s}(x) & \text{si } x \in (E_2 \oplus E_3) \backslash Q, \\ \hat{r}'(x) & \text{si } x \in \overset{\circ}{Q}, \end{cases}$$

sont des rétractions ayant la propriété recherchée.)
Ensuite, soit $p \in U \cap \partial Q$ et définissons $r, s : E \to E_2$ par

$$s(x) := \hat{s}(x_2 + x_3) \quad \text{et} \quad r(x) := \begin{cases} \hat{r}(x_2 + x_3) & \text{si } x_2 + x_3 \notin \partial Q, \\ p & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $x = x_1 + x_2 + x_3$ avec $x_i \in E_i$, $i = 1, 2, 3$. Remarquons que $s(x) = r(x)$ dès que $x_2 + x_3 \notin Q$. Considérons $\alpha, \beta : E \to [0, 1]$ deux fonctions continues telles que $\alpha(x) = 0$ si et seulement si $x \in \partial Q$, $\alpha(x) = 1$ si et seulement si $x \in \partial U$ et $\beta(x) = 0$ si et seulement si $x \in Q$. Et maintenant, pour $\eta \in \mathcal{N}(\emptyset)$ quelconque, définissons $H : [-1, 1] \times \overline{U} \to E_1 \oplus E_2$ par

$$H(t,x) = \begin{cases} \eta_1(t,x) + (1-t)\alpha((\eta_2 + \eta_3)(t,x))(r(\eta(t,x)) - p) & \\ \quad +t(1 - \alpha(x)(1 - \beta(\eta(t,x))))(s(\eta(t,x)) - p) & \text{si } t \in [0,1], \\ (1+t)(x_1 + \alpha(x_2)(r(x) - p)) - t(x - p) & \text{si } t \in [-1,0], \end{cases}$$

où $\eta(t,x) = (\eta_1 + \eta_2 + \eta_3)(t,x)$. De façon similaire à la proposition précédente, on montre que H est continue et $0 \notin H(\partial U \times [-1, 0])$. Ici, il y a deux cas :

(a) Il existe $x \in \partial U$ et $t \in]0, 1[$ tel que $H(t, x) = 0$.

(b) Pour tout $x \in \partial U$ et $t \in]0, 1[$, $H(t, x) \neq 0$.

Si (a) tient, alors $\alpha(x) = 1$, $\eta(t,x) = (\eta_2 + \eta_3)(t,x)$, et on distingue les deux sous-cas suivants :

(a1) $\underline{\eta(t,x) \in Q :}$ Dans ce cas, $\beta(\eta(t,x)) = 0$ donc l'équation $H(t,x) = 0$ devient

$$(1-t)\alpha(\eta(t,x))(r(\eta(t,x)) - p) = 0. \tag{2.1}$$

Mais remarquons que ceci implique que $\eta(t,x) \in \partial Q$ car sinon $\alpha(\eta(t,x)) \neq 0$ et $r(\eta(t,x)) \neq p$. C'est donc que $\eta(\partial U \times]0,1[) \cap \partial Q \neq \emptyset$ et la condition (2) de la Définition 2.1 est satisfaite.

(a2) $\underline{\eta(t,x) \notin Q:}$ Dans ce cas, $r(\eta(t,x)) = s(\eta(t,x))$ donc l'équation $H(t,x) = 0$ devient

$$((1-t)\alpha(\eta(t,x)) + t\beta(\eta(t,x)))(r(\eta(t,x)) - p) = 0. \tag{2.2}$$

Mais ceci est impossible car $r(\eta(t,x)) = \hat{r}(\eta(t,x)) = \hat{s}(\eta(t,x)) \in (\partial U \cap E_2)\backslash Q$, donc $r(\eta(t,x)) \neq p$ et l'équation (2.2) devient

$$(1-t)\alpha(\eta(t,x)) + t\beta(\eta(t,x)) = 0.$$

Mais pour $t \in]0,1[$ fixé, le problème

$$\begin{cases} (1-t)a + tb = 0 \\ 0 \leq a, b \leq 1 \end{cases}$$

admet l'unique solution $a = b = 0$. Donc en particulier, $\beta(\eta(t,x)) = 0$, ce qui est absurde car $\eta(t,x) \notin Q$ par hypothèse.

C'est donc que le cas (a2) ne survient jamais et la condition (2) de la Définition 2.1 est satisfaite.

Si (b) tient, on considère les deux sous-cas suivants :

(b1) Pour tout $x \in \partial U$, $H(1,x) \neq 0$.

(b2) Il existe $u \in \partial U$ tel que $H(1,x) = 0$.

Dans le cas (b1), on est dans la situation où $0 \notin H([-1,1] \times \partial U)$ donc comme $H(-1,\cdot) = \mathrm{id}_{\overline{U}} - p$ avec $p \in U$, la théorie du degré topologique garantit l'existence d'un $x \in \overline{U}$ tel que $H(1,x) = 0$. Donc que (b1) ou (b2) soit satisfaite, la conclusion est qu'il existe un $x \in \overline{U}$ tel que $H(1,x) = 0$. Ceci implique que $\eta(1,x) = (\eta_2 + \eta_3)(1,x)$ et l'équation $H(1,x) = 0$ s'écrit

$$(1 - \alpha(x)(1 - \beta(\eta(1,x))))(s(\eta(1,x)) - p) = 0.$$

Mais $s(\eta(1,x)) \neq p$ donc

$$1 - \alpha(x)(1 - \beta(\eta(1,x))) = 0.$$

Mais la seule solution au problème

$$\begin{cases} 1 - a(1-b) = 0 \\ 0 \leq a, b \leq 1 \end{cases}$$

est $a = 1$, $b = 0$, d'où $\alpha(x) = 1$, $\beta(\eta(1,x)) = 0$, ce qui est équivalent à $x \in \partial U$ et $\eta(x,1) \in Q$. Ceci montre que la condition (1) de la Définition 2.1 est satisfaite. $\square$

Exemple 2.8. Dans la notation de l'Exemple 2.6, il est clair que $\partial U \cap Q \neq \emptyset$, $U \cap \partial Q \neq \emptyset$, et $\partial U \cap \partial Q = \emptyset$. On a vu que $\partial U \cap E_2 = \{0, \rho z\}$ est un rétract de $(E_2 \oplus E_3) \backslash \partial Q = Z \backslash \partial Q$. Aussi, $(\partial U \cap E_2) \backslash Q = \{\rho z\}$ est un rétract de $E_2 \oplus E_3 = Z$ via l'application constante $w \mapsto \rho z$. Il suit de la proposition précédente que $(\partial U, \emptyset)$ enlace $(Q, \partial Q)$.

Proposition 2.9. *Soit $E = E_1 \oplus E_2$ un espace de Banach avec E_1 de dimension finie. Soit aussi U_1 une partie ouverte et bornée de E_1 contenant 0 et U_2 une partie ouverte de E_2. Si $\phi : \overline{U_1} \to E$ est une application continue telle que $\phi|_{\partial U_1} = \mathrm{id}_{\partial U_1}$ et $\phi^{-1}(E_2 \backslash U_2) = \emptyset$, alors $(\phi(\overline{U_1}), \partial U_1)$ enlace $(\overline{U_2}, \partial U_2)$.*

Démonstration. Soit $\eta \in \mathcal{N}(\partial U_1)$. Définissons une homotopie $H : [-1,1] \times \overline{U_1} \to E_1$ par

$$H(t,x) = \begin{cases} P_{E_1} \circ \eta(t, \phi(x)) & \text{si } s \in [0,1], \\ (1+t) P_{E_1}(\phi(x)) - tx & \text{si } t \in [-1,0]. \end{cases}$$

où $P_{E_1} : E \to E_1$ est l'opérateur de projection sur E_1. Notons que pour $t \in [0,1]$,

$$H(t,x) = 0 \Leftrightarrow \eta(t, \phi(x)) \in E_2.$$

Il est clair que H est continu et que $0 \notin H([-1,1], \partial U_1)$. Comme $H(-1, \cdot) = \mathrm{id}_{\overline{U_1}}$, la propriété d'invariance par homotopie du degré topologique Théorème 1.12 (DT3) donne

$$1 = \deg(\mathrm{id}_{\overline{U_1}}, U_1) = \deg(H(-1,\cdot), U_1) = \deg(H(t,\cdot), U_1) \quad \forall t \in [-1,1].$$

Donc en particulier, par la Proposition 1.15, il existe un continuum $\mathcal{C} \subset [0,1] \times \overline{U_1}$ de zéros de H tel que pour chaque $t \in [0,1]$, il existe $x \in \overline{U_1}$ tel que $(t,x) \in \mathcal{C}$. Par continuité, l'ensemble

$$\Gamma := \{\eta(t, \phi(x)) : (t,x) \in \mathcal{C}\} \subset E_2$$

est aussi un continuum. Il y a deux possibilités :

(a) Si $\eta(1, \phi(\overline{U_1})) \cap \overline{U_2} \neq \emptyset$, alors c'est que la condition (1) de la Définition 2.1 est satisfaite.

(b) Si $\eta(1, \phi(\overline{U_1})) \cap \overline{U_2} = \emptyset$, soit $x \in \overline{U_1}$ tel que $(0,x) \in \mathcal{C}$. Comme $\phi^{-1}(E_2 \backslash U_2) = \emptyset$, c'est que $\eta(0, \phi(x)) = \phi(x) \in U_2$. On conclut qu'il existe $(t,x) \in \mathcal{C}$, $t \in]0,1[$ tel que $\eta(t, \phi(x)) \in \partial U_2$ puisque sinon, on aurait que $U_2 \cap \Gamma \neq \emptyset$, $(E_2 \backslash \overline{U_2}) \cap \Gamma \neq \emptyset$ et $\Gamma \subset E_2 \backslash \partial U_2 = U_2 \cup (E_2 \backslash \overline{U_2})$, contredisant la connexité de Γ. Dans ce cas, c'est donc la condition (2) de la Définition 2.1 qui est satisfaite.

□

Exemple 2.10. Soit $E = E_1 \oplus E_2$ un espace de Banach avec E_1 de dimension finie. Notons B_1 la boule unité fermée dans E_1 et B_2 la boule unité fermée dans E_2. Avec $\phi = \mathrm{id}_{B_1} : B_1 \to E$ de la proposition précédente, on obtient que $(B_1, \partial B_1)$ enlace $(B_2, \partial B_2)$.

§2.2. Un théorème de point critique

Si E est un espace de Banach, A est un sous-ensemble de E et $f \in C^1(E, \mathbb{R})$, on note

$$\mathcal{N}_f(A) := \{\eta \in \mathcal{N}(A) : f(\eta(t,x)) \leq f(x) \ \forall (t,x) \in [0,1] \times E\}.$$

Lemme 2.11. *Soit E un espace de Banach, $f \in C^1(E, \mathbb{R})$, $A \subset X$, $\mathcal{N}_0 \subset \mathcal{N}_f(A)$ et (B,A), (Q,P) deux paires telles que (B,A) enlace (Q,P) via $\mathcal{N}_0$. Si*

$$f(x) < f(y) \quad \forall x \in B, \ \forall y \in P,$$

alors la condition (2) de la Définition 2.1 ne tient jamais.

Démonstration. En effet, si $\eta(t,x) \in P$ pour un certain $(t,x) \in]0,1[\times B$, alors on aurait $f(\eta(t,x)) \leq f(x) < f(\eta(t,x))$, ce qui est une contradiction. □

Théorème 2.12. *Soit E un espace de Banach et soit $f \in C^1(E,\mathbb{R})$. Supposons qu'il existe deux paires (B,A) et (Q,P) telles que*

(1) (B,A) enlace (Q,P) ;

(2) $f(x) < f(y)$ pour tout $x \in B$, $y \in P$;

(3) $\sup_A f < \inf_Q f$.

Soit

$$c := \inf_{\eta \in \mathcal{N}_f(A)} \sup_{x \in B} f(\eta(1,x)).$$

Si $c \in \mathbb{R}$ et si f satisfait $(PS)_c$, alors c est une valeur critique de f.

Démonstration. Supposons par contradiction que $K_c = \emptyset$. Par le Lemme 2.11, $\eta(B,1) \cap Q \neq \emptyset$ $\forall \eta \in \mathcal{N}_f(A)$, et donc $c \geq \inf_Q f$. Il suit de (3) qu'il existe $\bar{\epsilon} > 0$ tel que $A \subset f^{c-\bar{\epsilon}}$. Soit $\epsilon \in]0,\bar{\epsilon}[$ et η obtenus en vertu du Théorème 1.26. Notons que par choix de $\bar{\epsilon}$, $\eta \in \mathcal{N}_f(A)$. Soit $\eta' \in \mathcal{N}_f(A)$ tel que $\sup_{x\in B} f(\eta'(1,x)) \leq c+\epsilon$ et définissons $\theta(t,x) := \eta(t,\eta'(t,x))$. Alors $\theta \in \mathcal{N}_f(A)$ et par la propriété (D3) du Théorème 1.26 de η, il vient que

$$\sup_{x\in B} f(\theta(1,x)) \leq c - \epsilon,$$

contredisant la définition de c. □

Corollaire 2.13. *Soit E un espace de Banach et soit $f \in C^1(E,\mathbb{R})$. Supposons qu'il existe deux paires (B,A) et (Q,P) telles que*

(1) (B,A) enlace (Q,P) ;

(2) $b := \sup_B f < \inf_P f$;

(3) $\sup_A f < a := \inf_Q f$.

Si $a, b \in \mathbb{R}$ *et si* f *satisfait* $(PS)_c$ *pour tout* $c \in [a, b]$*, alors il existe* $\overline{c} \in [a, b]$ *tel que* $\overline{c}$ *est une valeur critique de* f*.*

Démonstration. Par le théorème précédent,

$$\overline{c} := \inf_{\eta \in \mathcal{N}_f(A)} \sup_{x \in B} f(\eta(1, x)).$$

est une valeur critique de f. Or, par le Lemme 2.11, $\eta(1, B) \cap Q \neq \emptyset$ pour tout $\eta \in \mathcal{N}_f(A)$, donc $\overline{c} \geq a$. Et comme $f(\eta(1, x)) \leq f(x)$ pour tout $\eta \in \mathcal{N}_f(A)$ et tout $x \in B$, on a que $\overline{c} \leq b$. □

Pour certaines paires (B, A), (Q, P), on a que (B, A) enlace $(P, \emptyset)$ et $(A, \emptyset)$ enlace (Q, P). C'est le cas par exemple des paires $(\overline{U}, \partial U)$ et $(Q, \partial Q)$ des Exemples 2.6 et 2.8.

Corollaire 2.14. *Soit* E *un espace de Banach et soit* $f \in C^1(E, \mathbb{R})$*. Supposons qu'il existe deux paires* (B, A) *et* (Q, P) *telles que*

(1) (B, A) *enlace* $(P, \emptyset)$ *;*

(2) $(A, \emptyset)$ *enlace* (Q, P) *;*

(3) $\sup_A f < \inf_P f$.

Soit

$$c := \inf_{\eta \in \mathcal{N}_f(A)} \sup_{x \in B} f(\eta(1, x)), \quad d := \inf_{\theta \in \mathcal{N}_f(\emptyset)} \sup_{x \in A} f(\theta(1, x)).$$

Si $c, d \in \mathbb{R}$ *et si* f *satisfait* $(PS)_c$ *et* $(PS)_d$*, alors* c *et* d *sont deux valeurs critiques distinctes de* f*. En particulier,* f *possède au moins deux points critiques.*

Démonstration. Par le Théorème 2.12, c et d sont des valeurs critiques de f. Montrons qu'elles sont distinctes. D'abord, comme (B, A) enlace $(P, \emptyset)$, le Lemme 2.11 garantit que $\eta(1, B) \cap P \neq \emptyset$ pour tout $\eta \in \mathcal{N}_f(A)$. Donc $c \geq \inf_P f$. Ensuite, comme $f(\theta(1, x)) \leq f(x)$ pour tout $\theta \in \mathcal{N}_f(\emptyset)$ et tout $x \in A$, on a que $d \leq \sup_A f$. D'où, en vertu de (3), $d < c$. □

Remarque 2.15. Dans le Théorème 2.12, on peut remplacer l'enlacement par l'enlacement via $\mathcal{N}_f(A)$. Et pareillement dans les deux derniers corollaires.

Remarque 2.16. Dans le Corollaire 2.14, si on suppose que $\inf_Q f > -\infty$, alors $d \in [\inf_Q f, \sup_A f] \subset \mathbb{R}$. De même, si on suppose que $\sup_f B < \infty$, on s'assurera que $c \in [\inf_P f, \sup_B f] \subset \mathbb{R}$.

Chapitre 3

LA THÉORIE DU DEGRÉ DE KRYSZEWSKI ET SZULKIN

Dans ce chapitre, on expose la théorie du degré introduite par Kryszewski et Szulkin [**8**]. Cette théorie avait pour but d'établir l'existence d'une solution non triviale à une équation de Schrödinger semi-linéaire. Pour ce faire, un théorème d'existence de point critique était établi. La présentation est inspirée principalement du livre de Willem [**11**].

§3.1. La topologie sigma

Soit $(H, (\cdot,\cdot))$ un espace de Hilbert séparable non trivial. Posons

$$N := \begin{cases} \mathbb{N} & \text{si } \dim H = \infty, \\ \{1, \ldots, \dim H\} & \text{sinon,} \end{cases}$$

et soit $\{e_k : k \in N\}$ une base hilbertienne pour H. On définit sur H la norme suivante :

$$|||u|||_\sigma := \sum_{k \in N} \frac{1}{2^k} |(u, e_k)|, \tag{3.1}$$

et on note σ la topologie qu'elle engendre.

Remarque 3.1. A priori, la topologie σ dépend du choix de la base hilbertienne. En effet, supposons que $\dim H = \infty$ et soit $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ une base hilbertienne de H. Soit aussi $\{f_k : k \in \mathbb{N}\}$ un réarrangement de $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ tel que $f_{4n} = e_{2n}$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Considérons une suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = 2^{4n} f_{4n} = 2^{4n} e_{2n}$. Alors,

$$\sum_{k\in N} \frac{1}{2^k} |(u_n, e_k)| = \frac{2^{4n}}{2^{2n}} = 2^{2n}$$

et

$$\sum_{k\in N} \frac{1}{2^k} |(u_n, f_k)| = \frac{2^{4n}}{2^{4n}} = 1.$$

Ceci montre que les normes induitent selon l'équation (3.1) par les bases hilbertiennes $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ et $\{f_k : k \in \mathbb{N}\}$ ne sont pas équivalentes.

Notation 3.2. Étant donnés $x \in H$ et $r > 0$, on note

$$B(x; r) := \{y \in H : \|x - y\| < r\},$$

$$B_\sigma(x; r) := \{y \in H : |||x - y|||_\sigma < r\},$$

où $\| \cdot \|$ est la norme de H induite par le produit scalaire $(\cdot, \cdot)$.

Voici quelques faits concernant la topologie σ dont nous nous servirons plus tard.

Proposition 3.3. *Soit H un espace de Hilbert séparable non trivial. Alors,*

(1) si $\dim H = \infty$, la topologie σ est strictement moins fine que la topologie forte ;

(2) pour toute suite $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ dans H, $u_m \rightharpoonup u$ implique que $u_m \xrightarrow{\sigma} u$;

(3) pour toute suite bornée $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ dans H, $u_m \xrightarrow{\sigma} u$ implique que $u_m \rightharpoonup u$;

(4) si $\dim H = \infty$, l'espace H muni de la norme $||| \cdot |||_\sigma$ n'est pas complet.

Démonstration. (1) Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a que

$$|||u|||_\sigma = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^k} |(u, e_k)| \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^k} \|u\| = \|u\| \quad \forall u \in H. \tag{3.2}$$

Soit U un sous-ensemble de E σ-ouvert et soit $x \in U$. Il existe $r > 0$ tel que $B_\sigma(x;r) \subset U$. Par (3.2), $B(x;r) \subset B_\sigma(x;r)$; donc U est ouvert dans la topologie forte. Montrons que la boule ouverte $B(0;1)$ n'est pas ouverte dans la topologie σ. En effet, sinon il existe $r > 0$ tel que $B_\sigma(0;r) \subset B(0;1)$. Or, $2^{k-1}re_k \in B_\sigma(0;r)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour k assez grand, $2^{k-1}re_k \notin B(0;1)$. Contradiction. Remarquons de plus qu'il existe des suites qui convergent dans la topologie σ mais qui ne sont pas fortement bornées. En effet, c'est le cas par exemple de la suite $\{u_m = (4/3)^m e_m\}_{m\in\mathbb{N}}$. On a que $\|u_m\| = (4/3)^m \longrightarrow +\infty$, et

$$\begin{aligned}
|||u_m|||_\sigma &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^k}|((4/3)^m e_m, e_k)| \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\frac{4}{3}\right)^m \frac{1}{2^k}\delta_{m,k} \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^m \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

(2) Si $\dim H < \infty$, puisque toutes les normes sur H sont équivalentes et la topologie faible coïncide avec la topologie forte, la convergence faible implique la convergence dans la topologie σ. Si $\dim H = \infty$, toute suite convergeant faiblement est fortement bornée. Soit $R > 0$ tel que $\|u_m\| \leq R$. De plus, $\|u\| \leq \liminf_{m\to+\infty} \|u_m\|$ donc $\|u\| \leq R$ aussi. Soit $\epsilon > 0$ et $K \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{R}{2^{K-1}} < \frac{\epsilon}{2}$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}
|||u_m - u|||_\sigma &= \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{2^k}|(u_m - u, e_k)| + \sum_{k=K+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}|(u_m - u, e_k)| \\
&\leq \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{2^k}|(u_m - u, e_k)| + \sum_{k=K+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}(2R) \\
&= \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{2^k}|(u_m - u, e_k)| + \frac{2R}{2^K} \\
&< \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{2^k}|(u_m - u, e_k)| + \frac{\epsilon}{2}. \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

Comme $|(u_m - u, e_k)| \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$ pour chaque $k \in \mathbb{N}$, on peut en particulier choisir $M \in \mathbb{N}$ tel que $m \geq M$ implique $|(u_m - u, e_k)| < \frac{\epsilon}{2}$ pour tout $k = 1, \ldots, K$. Il suit de (3.3) que $|||u_m - u|||_\sigma < \epsilon$ dès que $m \geq M$.

(3) Si $\dim H < \infty$, la convergence σ coïncide avec la convergence forte donc on a la conclusion. Si $\dim H = \infty$, soit $R > 0$ tel que $\|u_m\| \leq R$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. On veut montrer que $f(u_m) \to f(u)$ pour tout $f \in H'$. Par le théorème de représentation de Riesz, ceci est équivalent à montrer que $(v, u_m) \to (v, u)$ pour tout $v \in H$. Posons

$$\mathcal{D} := \left\{ v = \sum_{k=1}^{K} c_k e_k : \sum_{k=1}^{+\infty} |c_k|^2 < +\infty,\ K \in \mathbb{N} \right\}.$$

Pour $v = \sum_{k=1}^{K} c_k e_k \in \mathcal{D}$ quelconque, soit $C > 0$ une borne supérieure de la suite $\{|c_k|\}_{k\in\mathbb{N}}$. On a que

$$\begin{aligned} |(v, u_m - u)| &= \left| \sum_{k=1}^{K} c_k (e_k, u_m - u) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{K} |c_k| |(e_k, u_m - u)| \\ &= \sum_{k=1}^{K} \frac{2^k}{2^k} |c_k| |(e_k, u_m - u)| \\ &\leq 2^K C \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{2^k} |(e_k, u_m - u)| \\ &\leq 2^K C |||u_m - u|||_\sigma \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Maintenant, soit $v = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e_k \in H$ quelconque et pour chaque $K \in \mathbb{N}$, posons

$$v_K := \sum_{k=1}^{K} c_k e_k.$$

Soit $\epsilon > 0$. Comme $v_K \overset{K\to\infty}{\longrightarrow} v$, il existe $K_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$||v - v_{K_0}|| < \frac{\epsilon}{2(R + ||u||)}.$$

Comme $v_{K_0} \in \mathcal{D}$, on a que $|(v_{K_0}, u_m - u)| \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$, donc il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que $|(v_{K_0}, u_m - u)| < \epsilon/2$ dès que $m \geq M$. Pour tout $m \geq M$, on a que

$$\begin{aligned}
|(v, u_m - u)| &\leq |(v - v_{K_0}, u_m - u)| + |(v_{K_0}, u_m - u)| \\
&\leq ||v - v_{K_0}||||u_m - u|| + |(v_{K_0}, u_m - u)| \\
&\leq ||v - v_{K_0}||(||u_m|| + ||u||) + |(v_{K_0}, u_m - u)| \\
&\leq ||v - v_{K_0}||(R + ||u||) + |(v_{K_0}, u_m - u)| \\
&< \epsilon.
\end{aligned}$$

(4) Il suffit de considérer la suite $\left\{u_m := \sum_{j=1}^{m} je_j\right\}_{m\in\mathbb{N}}$. Cette suite est σ-Cauchy puisque pour $p \in \mathbb{N}$ quelconque, on a que

$$|||u_{m+p} - u_m|||_\sigma = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \left| \left(\sum_{j=m+1}^{m+p} je_j, e_k \right) \right| = \sum_{k=m+1}^{m+p} \frac{k}{2^k}.$$

Or la série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{2^k}$ converge donc en particulier la suite des sommes partielles est une suite de Cauchy. C'est-à-dire que donné $\epsilon > 0$, il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que si $p \in \mathbb{N}$ et $m \geq M$, alors $\sum_{k=m+1}^{m+p} \frac{k}{2^k} < \epsilon$.

Par contre, la suite $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ ne σ-converge vers aucun élément de H car supposons que $u_m \overset{\sigma}{\longrightarrow} \overline{u} = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e_k$ (avec $c_k = (\overline{u}, e_k)$). Alors, pour chaque $j \in \mathbb{N}$, nous avons d'une part que

$$\frac{1}{2^j}|(u_m - \overline{u}, e_j)| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}|(u_m - \overline{u}, e_k)| = |||u_m - \overline{u}|||_\sigma \overset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc $(u_m - \overline{u}, e_j) \overset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et

$$\begin{aligned}
j &= \lim_{m\to+\infty} (u_m, e_j) \\
&= (\overline{u}, e_j) \\
&= c_j.
\end{aligned}$$

Mais ceci est absurde car $+\infty = \sum_{j\in\mathbb{N}} j^2 = \sum_{j\in\mathbb{N}} |c_j|^2 = \|\overline{u}\| < +\infty$. $\square$

Remarque 3.4. Comme H est un espace de Hilbert, toute partie bornée de H est métrisable pour la topologie faible. Donc, les points (2) et (3) pris ensembles peuvent se résumer en disant que sur toute partie bornée de H, les topologies σ et faible coïncident.

§3.2. Le degré de Kryszewski et Szulkin

La théorie du degré introduite par Kryszewski et Szulkin [**8**] concerne une certaine classe d'applications définies sur un ouvert d'un espace de Hilbert séparable de dimension infinie.

Dans cette section, nous en faisons une présentation dans le cas où H dénote un espace de Hilbert séparable non trivial. Celle-ci à l'avantage d'unifier la théorie pour les espaces de Hilbert séparables de dimension finie ou infinie.

Définition 3.5. Soit U un sous-ensemble ouvert et borné de H. Une application $f : \overline{U} \to H$ est dite *σ-admissible* si

(1) $\overline{U}$ est σ-fermé ;

(2) $0 \notin f(\partial U)$;

(3) f est σ-continue ;

(4) chaque point $u \in U$ a un σ-voisinage N_u tel que $(\mathrm{id} - f)(N_u \cap U)$ est contenu dans un sous-espace de H de dimension finie.

Remarque 3.6. Si $f : \overline{U} \to H$ est σ-admissible, alors $f^{-1}(0)$ est σ-compact. En effet, on a que $\{0\}$ est compact, donc σ-compact, donc σ-fermé, donc $f^{-1}(0)$ est σ-fermé. Par ailleurs $\overline{U}$ est borné donc $\overline{U} \subset \overline{B(0;R)}$ pour un certain $R > 0$. Or, $\overline{B(0;R)}$ est faiblement compact, donc σ-compact (par la Proposition 3.3 (2)), ce qui donne la conclusion.

Cette dernière remarque permet de faire la définition suivante :

Définition 3.7. Soit $f : \overline{U} \to H$ une application σ-admissible. Pour chaque $u \in f^{-1}(0)$, soit N_u un σ-voisinage de u tel que $(\mathrm{id} - f)(N_u \cap U)$ est contenu dans un sous-espace de H de dimension finie. Par σ-compacité de $f^{-1}(0)$, il existe des points $u_1, \ldots, u_m \in f^{-1}(0)$ tels que $f^{-1}(0) \subset V := \bigcup_{n=1}^{m} N_{u_n} \cap U$. L'ensemble V est ouvert et il existe un sous-espace F de H de dimension finie tel que $(\mathrm{id} - f)(V) \subset F$. Le *degré de Kryszewski et Szulkin* de f est défini comme l'entier

$$\deg_{KS}(f, U) := \deg(f|_F, V \cap F),$$

où deg désigne le degré topologique de Brouwer (voir §1.2).

Lemme 3.8. *Le degré de Kryszewski et Szulkin d'une application admissible est bien défini.*

DÉMONSTRATION. Remarquons d'abord que par construction, $f^{-1}(0) \cap \partial V = \emptyset$, $V \cap F$ est un ouvert borné de F puisque U est une ouvert borné de H, et $f|_F \in C(\overline{V} \cap F, F)$ car f est σ-continue sur $\overline{U}$ et F est de dimension finie. Ceci montre que $\deg(f|_F, V \cap F)$ est bien défini.

Ensuite, soit G un autre sous-espace de H de dimension finie tel que $(\mathrm{id} - f)(V) \subset G$. Puisque $f^{-1}(0) \subset G$, $f^{-1}(0) \subset F \cap G$ et par la propriété de contraction Théorème 1.12 (DT7) du degré topologique,

$$\deg(f|_G, V \cap G) = \deg(f|_{F \cap G}, V \cap F \cap G) = \deg(f|_F, V \cap F).$$

Ceci montre que $\deg_{KS}(f, U)$ est indépendant du choix du sous-espace G de H de dimension finie tel que $(\mathrm{id} - f)(V) \subset G$.

Ensuite, soit W un autre voisinage de $f^{-1}(0)$ tel que $(\mathrm{id} - f)(W) \subset F$ et posons $V' := V \cap W$. Alors, V' est aussi un voisinage de $f^{-1}(0)$ tel que $(\mathrm{id} - f)(V') \subset F$. Par la propriété d'excision du degré topologique Théorème 1.12 (DT6),

$$\deg(f|_F, V \cap F) = \deg(f|_F, V' \cap F) = \deg(f|_F, W \cap F).$$

Ceci montre que $\deg_{KS}(f, U)$ est indépendant du choix du voisinage V de $f^{-1}(0)$ tel que $(\mathrm{id} - f)(V)$ est inclus dans une sous-espace de H de dimension finie. $\square$

Remarque 3.9. Si $\dim H < \infty$, la topologie σ coïncide avec la topologie forte et le degré de Kryszewski et Szulkin coïncide avec le degré topologique de Brouwer.

Notation 3.10. Si $(E, \mathfrak{T})$ est un espace topologique, alors par la topologie σ sur $E \times H$, on entend la topologie produit $\mathfrak{T} \times \sigma$.

Définition 3.11. Soit U un sous-ensemble ouvert et borné de H. Une application $h : [a,b] \times \overline{U} \to H$ est dite une *homotopie σ-admissible* si

(1) $\overline{U}$ est σ-fermé ;

(2) $0 \notin h([a,b] \times \partial U)$;

(3) h est σ-continue ;

(4) chaque point $(t,u) \in [a,b] \times U$ a un σ-voisinage $N_{(t,u)}$ tel que

$$\{v - h(s,v) : \ (s,v) \in N_{(t,u)} \cap ([a,b] \times U)\}$$

est contenu dans un sous-espace de H de dimension finie.

Théorème 3.12 (Propriétés du degré de Kryszewski et Szulkin)**.** *Soit U un sous-ensemble ouvert et borné de H tel que $\overline{U}$ est σ-fermé. Le degré de Kryszewski et Szulkin vérifie les propriétés suivantes :*

(DKS1) (Normalisation) Si $p \in U$, alors $\deg_{KS}(\mathrm{id}_{\overline{U}} - p, U) = 1$.

(DKS2) (Existence) Si f est σ-admissible et si $\deg_{KS}(f,U) \neq 0$, alors $0 \in f(U)$.

(DKS3) (Invariance par homotopie) Si $h[a,b] \times \overline{U} \to H$ est une homotopie σ-admissible, alors $\deg_{KS}(h(t,\cdot),U)$ est indépendant de $t \in [a,b]$.

Démonstration. (DKS1) Clairement, l'application $\mathrm{id}_{\overline{U}} - p$ est σ-admissible, donc $\deg_{KS}(\mathrm{id}_{\overline{U}} - p, U)$ est bien défini. On a que $(\mathrm{id}_{\overline{U}} - p)^{-1}(0) = \{p\}$ et on peut prendre $N_p = H$ dans la Définition 3.7, ce qui mène à $V = H \cap U = U$, et on peut prendre $F = \mathbb{R}\langle p\rangle$ de sorte que

$$\deg_{KS}(\mathrm{id}_{\overline{U}} - p, U) = \deg((\mathrm{id}_{\overline{U}} - p)|_{\mathbb{R}\langle p\rangle}, U \cap \mathbb{R}\langle p\rangle) = 1$$

par la propriété de normalisation du degré topologique Théorème 1.12 (DT1).

(DKS2) Par définition,

$$\deg_{KS}(f, U) = \deg(f|_F, V \cap F).$$

Si $\deg_{KS}(f, U) \neq 0$, alors par la propriété d'existence du degré topologique Théorème 1.12 (DT2), $0 \in f(V \cap F) \subset f(U)$.

(DKS3) Notons $\pi_2 : [a, b] \times \overline{U} \to \overline{U} : (t, u) \mapsto u$ l'opérateur de projection sur la deuxième coordonnée. Clairement, π_2 est σ-continu.

Par le même argument qu'à la Remarque 3.6, $h^{-1}(0)$ est σ-compact. Notons $K := \pi_2(h^{-1}(0))$. Alors K est σ-compact et $K \subset U$ car par hypothèse, $0 \notin h([a, b] \times \partial U)$. Ainsi, il existe un voisinage W de $[a, b] \times U$ tel que $[a, b] \times K \subset W$ et l'ensemble

$$\{u - h(t, u) : \ (t, u) \in W\} = (\pi_2 - h)(W)$$

est contenu dans un sous-espace F de H de dimension finie. En effet, pour chaque $(t, u) \in [a, b] \times K$, soit $N_{(t,u)}$ un σ-voisinage de (t, u) donné à la Définition 3.11. Par compacité de $[a, b] \times K$, il existe des points $(t_1, u_1), \ldots, (t_m, u_m)$ tels que $[a, b] \times K \subset W := \bigcup_{i=1}^{m} N_{(t_i,u_i)} \cap ([a, b] \times U)$ et il suffit de prendre $F := F_1 + \ldots + F_m$ où F_i est un sous-espace de H de dimension finie tel que $\{u - h(t, u) : \ (t, u) \in N_{(t_i,u_i)} \cap ([a, b] \times U)\} \subset F_i$.

Mais alors, K est fortement compact car $(\pi_2 - h)([a, b] \times K) \subset F$ et par définition de K, pour chaque $v \in K$, il existe $t_v \in [a, b]$ tel que $h(t_v, v) = 0$, donc $v - 0 = v \in F$. C'est-à-dire que $K \subset F$. Mais sur F, la topolgie forte et la topologie σ coïncident, donc en particulier, K est fortement compact.

Ensuite, on affirme que pour un certain $\delta > 0$, $V := B(K; \delta) \cap U$ est tel que $[a, b] \times K \subset [a, b] \times V \subset W$. En effet, sinon il existe des suites $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans K et $\{(s_n, w_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans $[a, b] \times U$ telles que $(s_n, w_n) \notin W$ et $\|w_n - v_n\| < 1/n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par compacité, on peut supposer sans perte de généralité que $(s_n, v_n) \to (s, v) \in [a,b] \times K$, donc $(s_n, w_n) \to (s, v)$. Or $[a,b] \times K \subset W$. Contradiction.

Ainsi, pour chaque $t \in [a,b]$, V est un voisinage de $h_t^{-1}(0)$ tel que $(\mathrm{id}-h_t)(V) \subset \{u - h(t,u) : (t,u) \in W\} \subset F$. Notons que la définition d'une homotopie σ-admissible implique que pour chaque $t \in [a,b]$, l'application $h_t := h(t,\cdot) : \overline{U} \to H$ est σ-admissible. Donc $\deg_{KS}(h_t, U)$ est bien défini pour tout $t \in [a,b]$, et

$$\deg_{KS}(h_t, U) = \deg(h_t|_F, V \cap F) \quad \forall t \in [a,b].$$

Par la propriété d'invariance par homotopie du degré topologique Théorème 1.12 (DT3), $\deg(h_t|_F, V \cap F)$ est indépendant de $t \in [a,b]$. □

§3.3. Un lemme de déformation

Dans tout le reste de ce chapitre, $X = Y \oplus Z$ est un espace de Hilbert avec Y séparable non trivial et $Z = Y^\perp$. On note $P_Y : X \to Y$ et $P_Z : X \to Z$ les opérateurs de projection orthogonale sur Y et Z respectivement. Posons

$$N := \begin{cases} \mathbb{N} & \text{si } \dim Y = \infty, \\ \{1, \ldots, \dim Y\} & \text{sinon,} \end{cases}$$

et soit $\{e_k : k \in N\}$ une base hilbertienne pour Y. On définit une norme sur X par

$$|||u|||_\tau := \max\left\{ \|P_Z u\|, \sum_{k \in N} \frac{1}{2^k} |(P_Y u, e_k)| \right\}, \tag{3.4}$$

et on note τ la topologie qu'elle engendre.

Remarque 3.13. (i) Il suit de la Remarque 3.1 que la topologie τ est dépendante de la base hilbertienne définissant $|||\cdot|||_\tau$.

(ii) Dans la notation des deux sections précédentes, on peut également écrire $|||u|||_\tau = \max\{||P_Z u||, |||P_Y u|||_\sigma\}$.

(iii) La topologie τ induit la topologie forte sur Z et la topologie σ sur Y. En particulier, si $\dim Y < \infty$, la topologie τ coïncide avec la topologie forte.

La topologie τ a les propriétés suivantes qui découlent directement de la Proposition 3.3.

Proposition 3.14. *Soit $X = Y \oplus Z$ un espace de Hilbert comme ci-haut. Alors,*

(1) si $\dim Y = \infty$, la topologie τ est strictement moins fine que la topologie forte ;

(2) pour toute suite $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ dans H, on a que $P_Y u_m \rightharpoonup P_Y u$ et $P_Z u_m \longrightarrow P_Z u$ implique que $u_m \xrightarrow{\tau} u$;

(3) toute suite bornée $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ dans H telle que $u_n \xrightarrow{\tau} u$ vérifie $P_Y u_m \rightharpoonup P_Y u$ et $P_Z u_m \longrightarrow P_Z u$;

(4) si $\dim Y = \infty$, l'espace X muni de la métrique induite par la norme $|||\cdot|||_\tau$ n'est pas complet.

Rappellons que si X est un espace de Hilbert et $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$, alors le *gradient* de φ est un champ de vecteurs continu $\nabla\varphi : X \to X$, où pour chaque $u \in X$, $\nabla\varphi(u)$ est caractérisé comme l'unique élément de X tel que $(\nabla\varphi(u), v) = \varphi'(u)v$ pour tout $v \in X$ (voir Théorème 1.9).

Définition 3.15. Soit $\alpha < \beta$ des constantes. Nous dirons qu'une fonctionnelle $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$ vérifie la propriété $(KS)_\alpha^\beta$ si

(P1) φ est τ-semi-continue supérieurement ;

(P2) $\nabla\varphi$ est faiblement séquentiellement continue ;

(P3) il existe $\epsilon > 0$ tel que $||\varphi'(u)|| \geq \epsilon$ pour tout $u \in \varphi_\alpha^\beta$;

(P4) toute suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans φ_α^β telle que $u_n \xrightarrow{\tau} u \in \varphi_\alpha^\beta$ est fortement bornée.

Lemme 3.16. *Soit $\alpha < \beta$ et $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$. Si φ vérifie la propriété $(KS)_\alpha^\beta$, il existe un τ-voisinage V de φ^β et un champ de vecteurs $f : V \to X$ satisfaisant :*

(1) f est localement lipschitzienne et τ-localement lipschitzienne ;

(2) chaque point $u \in V$ a un τ-voisinage $V_u \subset V$ tel que $f(V_u)$ est contenu dans un sous-espace de X de dimension finie ;

(3) f est borné ;

(4) $(\nabla\varphi(u), f(u)) \geq 0$ pour tout $u \in V$;

(5) $(\nabla\varphi(u), f(u)) > 1$ pour tout $u \in \varphi_\alpha^\beta$.

Démonstration. Définissons un champ de vecteur $g : \varphi_\alpha^\beta \to X$ par

$$g(v) := \frac{2\nabla\varphi(v)}{\|\nabla\varphi(v)\|^2}.$$

Notons que c'est bien défini car (P3) assure que $\|\varphi'(v)\| > 0 \; \forall v \in \varphi_\alpha^\beta$. La première chose à faire est de remarquer que pour chaque $v \in \varphi_\alpha^\beta$, il existe un τ-voisinage N_v de v tel que

$$(\nabla\varphi(u), g(v)) > 1 \; \forall u \in N_v \cap \varphi_\alpha^\beta. \tag{3.5}$$

En effet, sinon pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $u_n \in B_\tau(v, \frac{1}{n}) \cap \varphi_\alpha^\beta$ tel que

$$(\nabla\varphi(u_n), g(v)) \leq 1.$$

Par (P4) et la Proposition 3.14 (3), $u_n \rightharpoonup v$. La faible séquentielle continuité de $\nabla\varphi$ implique que

$$1 \geq \lim_{n\to+\infty} (\nabla\varphi(u_n), g(v)) = (\nabla\varphi(v), g(v)) = 2.$$

Contradiction.

Ensuite, comme φ est τ-semi-continue supérieurement, l'ensemble

$$\tilde{N} := \varphi^{-1}(]-\infty, \alpha[)$$

est τ-ouvert et la famille

$$\mathcal{N} := \{N_v : v \in \varphi_\alpha^\beta\} \cup \{\tilde{N}\}$$

est un recouvrement τ-ouvert de φ^β. Posons $V := \bigcup_{v\in\varphi_\alpha^\beta} N_v \cup \tilde{N}$. Muni de la topologie induite par τ, V est un espace métrique. Par conséquent, il existe un raffinement τ-ouvert τ-localement fini $\mathcal{M} := \{M_i : \; i \in I\}$ du recouvrement $\mathcal{N}$

de V (voir Lemme 1.3).

Pour chaque $i \in I$, si $M_i \subset N_v$ pour un certain $v \in \varphi_\alpha^\beta$, on pose $w_i := g(v)$. Sinon, alors c'est que $M_i \subset \tilde{N}$ et on pose $w_i := 0$. Pour chaque $i \in I$, posons $\rho_i : V \to \mathbb{R} : u \mapsto \mathrm{dist}_\tau(u, V \backslash M_i)$. Notons que $\rho_i : V \to \mathbb{R}$ est τ-lipschitzienne et $\rho_i(u) = 0$ si $u \notin M_i$. Ensuite, pour chaque $i \in I$, définissons $\lambda_i : V \to \mathbb{R}$ par

$$\lambda_i(u) := \frac{\rho_i(u)}{\sum_{j \in I} \rho_j(u)}.$$

Notons que λ_i est τ-localement lipschitzienne, $0 \leq \lambda_i(u) \leq 1$ pour tout $u \in V$, et $\lambda_i(u) = 0$ si $u \notin M_i$. Enfin, soit $f : V \to X$ défini par

$$f(u) := \sum_{i \in I} \lambda_i(u) w_i.$$

Le fait que $\mathcal{M}$ soit τ-localement fini assure qu'en chaque point $u \in V$, la somme dans la définition de f est finie, et donc f est bien définie.

Vérifions que f satisfait les propriétés (1)-(5) :

(1) Soit $\overline{u} \in V$ quelconque. Comme $|||u - \overline{u}|||_\tau \leq \|u - \overline{u}\|$, on déduit immédiatement que les λ_i sont localement lipschitziennes en $\overline{u}$.

Maintenant, soit $W_{\overline{u}}$ un τ-voisinage de $\overline{u}$ tel que $M_{i_1}, \ldots, M_{i_k}$ sont les seuls éléments de $\mathcal{M}$ ayant une intersection non vide avec $W_{\overline{u}}$. Alors $\forall u \in W_{\overline{u}}$,

$$f(u) := \sum_{j=1}^{k} \lambda_{i_j}(u) w_{i_j},$$

et on peut supposer sans perte de généralité que les λ_{i_j} $(1 \leq j \leq k)$ sont lipschitziennes et τ-lipshitziennes sur $W_{\overline{u}}$ de constantes respectives $L_{i_1}, \ldots, L_{i_k}$. Il suit que pour tout $u, v \in W_{\overline{u}}$,

$$\|f(u) - f(v)\| \leq \left(\sum_{j=1}^{k} L_{i_j} \|w_{i_j}\| \right) \|u - v\|,$$

et

$$|||f(u) - f(v)|||_\tau \leq \left(\sum_{j=1}^{k} L_{i_j} |||w_{i_j}|||_\tau \right) |||u - v|||_\tau.$$

C'est donc que f est localement lipshitzienne et τ-localement lipschitzienne sur V.

(2) Donné $u \in V$, on prend V_u un τ-voisinage de u tel que $M_{i_1}, \ldots, M_{i_k}$ sont les seuls éléments de $\mathcal{M}$ ayant une intersection non vide avec V_u. On a alors que $f(V_u) \subset \mathbb{R}\langle w_{i_1}, \ldots, w_{i_k}\rangle$.

(3) Pour chaque $u \in V$, soit $I_u := \{i \in I : \; u \in M_i\}$. Alors,

$$\|f(u)\| = \left\|\sum_{i \in I_u} \lambda_i(u) w_i\right\| \leq \sum_{i \in I_u} \lambda_i(u)\|w_i\| \leq \max_{i \in I_u} \|w_i\| \leq \sup_{v \in \varphi_\alpha^\beta} \|g(v)\|,$$

où à la seconde inégalité, on a utilisé le fait que $\sum_{i \in I_u} \lambda_i(u) = 1$. Or, $\forall v \in \varphi_\alpha^\beta$,

$$\|g(v)\| = \frac{2}{\|\nabla\varphi(v)\|} \leq \frac{2}{\epsilon},$$

d'où

$$\sup_{u \in V} \|f(u)\| \leq \frac{2}{\epsilon} < +\infty.$$

(4) Pour tout $u \in V$, on a que

$$(\nabla\varphi(u), f(u)) = \sum_{i \in I} \lambda_i(u)(\nabla\varphi(u), w_i).$$

Or, par (3.5) et la définition des w_i,

$$(\nabla\varphi(u), w_i) \begin{cases} = 0 & \text{si } w_i = 0, \\ > 1 & \text{si } w_i = g(v),\ v \in \varphi_\alpha^\beta \text{ et } u \in M_i, \end{cases}$$

d'où le résultat.

(5) Soit $u \in \varphi_\alpha^\beta$ et soit $I_u := \{i \in I : \; u \in M_i\}$, de sorte que

$$f(u) = \sum_{i \in I_u} \lambda_i(u) w_i.$$

Mais remarquons que pour chaque $i \in I_u$, $M_i \not\subset \tilde{N}$ puisque $\tilde{N} \cap \varphi_\alpha^\beta = \emptyset$. C'est donc que pour chaque $i \in I_u$, $w_i = g(v_i)$ pour un certain $v_i \in \varphi_\alpha^\beta$, et on a

$$\begin{aligned}(\nabla\varphi(u), f(u)) &= \sum_{i\in I} \lambda_i(u)(\nabla\varphi(u), g(v_i)) \\ &\geq \sum_{i\in I_u} \lambda_i(u) \min_{j\in I_u}(\nabla\varphi(u), g(v_j)) \\ &= \min_{j\in I_u}(\nabla\varphi(u), g(v_j)) \\ &> 1.\end{aligned}$$

□

Notation 3.17. Si $(E, \mathfrak{T})$ est un espace topologique, alors par la topologie τ sur $E \times X$, on entend la topologie produit $\mathfrak{T} \times \tau$.

Lemme 3.18 (Lemme de déformation)**.** *Soit $\alpha < \beta$ et $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$ une fonctionnelle ayant la propriété $(KS)_\alpha^\beta$. Alors, il existe $\eta : [0, +\infty[\times \varphi^\beta \to X$ continu satisfaisant les propriétés suivantes :*

(1) $\eta(0, x) = x$ pour tout $x \in \varphi^\beta$.

(2) Pour chaque $u \in \varphi^\beta$, l'application $[0, +\infty[\to \mathbb{R} : t \mapsto \varphi(\eta(t, u))$ est décroissante.

(3) Il existe $T > 0$ tel que $\eta(T, \varphi^\beta) \subset \varphi^\alpha$.

(4) Chaque point $(t, u) \in [0, T] \times \varphi^\beta$ a un τ-voisinage $N_{(t,u)}$ tel que l'ensemble

$$\{v - \eta(s, v) : \ (s, v) \in N_{(t,u)} \cap ([0, T] \times \varphi^\beta)\}$$

est contenu dans un sous-espace de X de dimension finie.

(5) η est τ-continu sur $[0, T] \times \varphi^\beta$.

Démonstration. Soit V le τ-voisinage de φ^β et $f : V \to X$ le champ de vecteur obtenu à la proposition précédente. Définissons un champ de vecteurs $g : X \to X$

par

$$g(x) := \begin{cases} -\chi(x)f(x) & \text{si } x \in V, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\chi : X \to [0,1]$ est une fonction localement lipschitzienne telle que $\chi|_{\varphi^\beta} \equiv 1$ et supp$\chi \subset V$. Par le lemme précédent, g est bornée et localement lipschitzienne donc pour chaque $y_0 \in X$, le problème à valeur initiale

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} y(t; y_0) = g(y(t; y_0)) \\ y(0; y_0) = y_0 \end{cases} \tag{3.6}$$

admet une unique solution continûment différentiable définie sur $\mathbb{R}$ (voir Théorème 1.18). De plus, le flot $\psi : \mathbb{R} \times X \to X : (t, y_0) \mapsto \psi(t, y_0) := y(t; y_0)$ est continu.

Remarquons que si $u \in V$, alors $\psi(t, u) \in V$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En effet, il y a deux cas :

(i) Si $u \notin$ suppχ, alors $y(t; u) \equiv u$ satisfait le problème (3.6), donc par unicité de la solution, $\psi(t, u) \equiv u$.

(ii) Si $u \in$ suppχ, supposons par l'absurde qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\psi(t_0, u) \notin$ suppχ. Or, la solution passant par $\psi(t_0, u)$ est unique et par ce qui précède, elle est constante ; ce qui entraîne $u = \psi(0, u) = \psi(t_0, u) \notin$ suppχ. Contradiction.

Définissons $\eta : [0, +\infty[\times \varphi^\beta \to X$ par $\eta(t, u) := \psi(t, u)$ Cette fonction est continue et vérifie (1). Aussi, par le Lemme 3.16, pour tout $t \in [0, +\infty[$ et tout $u \in \varphi^\beta$, on a que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\varphi(\eta(t, u)) &= \varphi'(\psi(t, u))\frac{d}{dt}\psi(t, u) \\ &= \left(\nabla\varphi(\psi(t, u)), \frac{d}{dt}\psi(t, u)\right) \\ &= -\chi(\psi(t, u))(\nabla\varphi(\psi(t, u)), f(\psi(t, u))) \leq 0. \end{aligned}$$

L'énoncé (2) est donc vérifié.

Pour montrer l'énoncé (3), posons $T := \beta - \alpha$. Soit $u \in \varphi^\beta$. S'il existe $t_0 \in [0, T]$ tel que $\varphi(\eta(t_0, u)) < \alpha$, on a simplement que $\varphi(\eta(T, u)) \leq \varphi(\eta(t_0, u)) < \alpha$ en vertu de la décroissance de $\varphi(\eta(\cdot, u))$. Sinon, $\varphi(\eta(t, u)) \in [\alpha, \beta]$ pour tout $t \in [0, T]$. Dans ce cas, le théorème fondamental du calcul intégral et le Lemme 3.16 impliquent

$$\begin{aligned} \varphi(\eta(T, u)) &= \varphi(u) + \int_0^T \frac{d}{dt}\varphi(\eta(t, u))\, dt \\ &= \varphi(u) - \int_0^T (\nabla\varphi(\eta(t, u)), f(\eta(t, u)))\, dt \\ &< \beta - \int_0^T 1\, dt \qquad (3.7) \\ &= \beta - (\beta - \alpha) \\ &= \alpha, \end{aligned}$$

ce qui est une contradiction.

Soit $(t_0, u_0) \in [0, T] \times \varphi^\beta$. Posons $K := \eta([0, T] \times \{u_0\})$ et montrons qu'il existe $r > 0$ tel que

(a) $U := B_\tau(K; r) \subset V$,

(b) f est τ-lipschitzienne sur U de constante $L > 0$,

(c) $f(U)$ est contenu dans un sous-espace W de X de dimension finie.

Pour ce faire, notons d'abord que comme η est continue, l'ensemble K est compact et donc τ-compact. Par le Lemme 3.16, pour chaque $u \in K$, il existe $\mathcal{O}_u$ un τ-voisinage de u sur lequel f est τ-lipschitzienne de constante L_u. Soit $\{\mathcal{O}_{u_1}, \ldots, \mathcal{O}_{u_N}\}$ un sous-recouvrement fini de K. Posons

$$\mathcal{O} := \bigcup_{i=1}^N \mathcal{O}_{u_i} \cap V \quad \text{et} \quad L := \sum_{i=1}^N L_{u_i}.$$

Ainsi, $K \subset \mathcal{O} \subset V$ et f est τ-lipschitzienne sur $\mathcal{O}$ de constante L. De nouveau, par le Lemme 3.16, pour chaque $u \in K$, il existe $\mathcal{V}_u$ un τ-voisinage de u tel que $f(\mathcal{V}_u)$ est contenu dans un sous-espace de W_u de X de dimension finie. Par compacité de K, il existe un nombre fini $\{\mathcal{V}_{u'_1}, \ldots, \mathcal{V}_{u'_M}\}$ des $\mathcal{V}_u$ qui recouvrent

K. Posons

$$\mathcal{V} := \bigcup_{i=1}^{M} \mathcal{V}_{u'_i} \cap V \quad \text{et} \quad W := W_{u'_1} + \ldots + W_{u'_M}$$

Alors clairement, $K \subset \mathcal{V} \subset V$ et $f(\mathcal{V}) \subset W$. Finalement, de la τ-compacité de K, on déduit l'existence d'un $r > 0$ tel que $K \subset U := B_\tau(K; r) \subset \mathcal{O} \cap \mathcal{V}$.

Maintenant, supposons que $u \in \varphi^\beta$ et $t \in [0, T]$ sont tels que $\eta(s, u) \in U$ $\forall s \in [0, t]$. Dans ce cas, pour tout $t' \in [0, t]$,

$$\begin{aligned}
\eta(t', u) - \eta(t', u_0) &= \left[\int_0^{t'} \frac{d}{ds}\eta(s, u)\, ds + u\right] - \left[\int_0^{t'} \frac{d}{ds}\eta(s, u_0)\, ds + u_0\right] \\
&= (u - u_0) - \int_0^{t'} \left(f(\eta(s, u)) - f(\eta(s, u_0))\right)\, ds,
\end{aligned}$$

et donc on a

$$\begin{aligned}
|||\eta(t', u) - \eta(t', u_0)|||_\tau &\leq |||(u - u_0)|||_\tau + \int_0^{t'} |||f(\eta(s, u)) - f(\eta(s, u_0))|||_\tau\, ds \\
&\leq |||(u - u_0)|||_\tau + L \int_0^{t'} |||\eta(s, u) - \eta(s, u_0)|||_\tau\, ds.
\end{aligned}$$

L'inégalité de Gronwall (Lemme 1.19) implique donc que pour tout $t' \in [0, t]$,

$$|||\eta(t', u) - \eta(t', u_0)|||_\tau \leq |||u - u_0|||_\tau e^{Lt'} \leq |||u - u_0|||_\tau e^{LT}. \tag{3.8}$$

On affirme que pour tout $u \in \varphi^\beta \cap B_\tau(u_0; re^{-LT})$ et $t \in [0, T[$, on a que

$$\eta(s, u) \in U \quad \forall s \in [0, t], \tag{3.9}$$

de sorte que, par ce qui précède, $|||\eta(t', u) - \eta(t', u_0)|||_\tau \leq |||u - u_0|||_\tau e^{LT} < r$ pour tout $t' \in [0, t]$. Mais comme $\eta(t', u_0) \in K$ pour tout $t' \in [0, t]$, ceci est équivalent à dire que $\eta(t', u) \in U$ pour tout $t' \in [0, t]$. Et donc $f(\eta(s, u)) \in W$ pour tout $s \in [0, t]$. On obtient alors

$$\begin{aligned}
u - \eta(t, u) &= -\int_0^t \frac{d}{ds}\eta(s, u)\, ds \\
&= \int_0^t f(\eta(s, u))\, ds \in W.
\end{aligned}$$

Ceci est valide pour tout $u \in \varphi^\beta \cap B_\tau(u_0; re^{-LT})$ vérifiant (3.9) et pour tout $t \in [0, T[$. Si c'est le cas, comme W est de dimension finie, il est fermé dans X, donc par continuité, on a en fait que $u - \eta(t, u) \in W$ pour tout $t \in [0, T]$. Donc on peut prendre $N_{(t_0, u_0)} := [0, +\infty[\times B_\tau(u_0; re^{-LT})$.

Pour démontrer l'énoncé (4), il reste à vérifier (3.9). Supposons qu'il existe $\hat{u} \in \varphi^\beta \cap \{u \in X : \ |||u - u_0|||_\tau < re^{-LT}\}$ et $\hat{t} \in]0, T[$ tels que $\eta(\hat{t}, \hat{u}) \notin U$. Ceci implique l'existence d'un $t \in]0, \hat{t}]$ tel que $\eta(t, u) \notin U$ et $\eta(s, u) \in U \ \forall s \in [0, t[$. Et donc, par l'inégalité (3.8), $|||\eta(t, u) - \eta(t, u_0)|||_\tau \leq |||u - u_0|||_\tau e^{-LT} < r$, ce qui est contradictoire car $\eta(t, u_0) \in K$.

Finalement, pour montrer la τ-continuité de η en $(t_0, u_0) \in [0, T] \times \varphi^\beta$, soit $\hat{\epsilon} > 0$, C une borne de f, et posons $\delta := \min\{re^{-LT}/2, \hat{\epsilon}/(e^{LT} + C)\}$, où L et r sont les constantes obtenues plus haut. Pour $0 < t < T$ et $u \in \varphi^\beta$ tels que $|t - t_0| < \delta$ et $|||u - u_0|||_\tau < \delta$, par (3.8), on a

$$\begin{aligned}
|||\eta(t, u) - \eta(t_0, u_0)|||_\tau &= |||\eta(t, u) - \eta(t, u_0) + \eta(t, u_0) - \eta(t_0, u_0)|||_\tau \\
&\leq |||\eta(t, u) - \eta(t, u_0)|||_\tau + \left|\left|\left| \int_{t_0}^t \frac{d}{ds}\eta(s, u_0)\, ds \right|\right|\right|_\tau \\
&\leq |||\eta(t, u) - \eta(t, u_0)|||_\tau + \int_{t_0}^t |||f(\eta(s, u_0))|||_\tau \, ds \\
&\leq |||u - u_0|||_\tau e^{LT} + \int_{t_0}^t C \, ds \\
&< e^{LT}\delta + |t - t_0| C \\
&< (e^{LT} + C)\delta \\
&\leq \hat{\epsilon}.
\end{aligned}$$

□

§3.4. Le théorème de point critique de Kryszewski et Szulkin

Comme à la section précédente, $X = Y \oplus Z$ est un espace de Hilbert avec Y séparable non trivial et $Z = Y^\perp$. On note $P_Y : X \to Y$ et $P_Z : X \to Z$ les opérateurs de projection orthogonale sur Y et Z respectivement. Posons

$$N := \begin{cases} \mathbb{N} & \text{si } \dim Y = \infty, \\ \{1, \ldots, \dim Y\} & \text{sinon,} \end{cases}$$

et soit $\{e_k : k \in N\}$ une base hilbertienne pour Y. Considérons sur X la topologie τ engendrée par la norme (3.4). Cette topologie vérifie les propriétés de la Proposition 3.14.

Tel que noté à la Remarque 3.1, la topologie σ sur un espace de Hilbert dépend *a priori* de la base hilbertienne utilisée pour définir la norme (3.1). Cependant, il y a une exeption importante.

Lemme 3.19. *Soit $X = Y \oplus Z$ un espace de Hilbert et $\{e_k : k \in N\}$ une base hilbertienne de Y comme ci-haut. Pour $Z_1 \subset Z$ un sous-espace de dimension n, la topologie τ induit sur $Y \oplus Z_1$ la topologie σ associée à la base hilbertienne $\{f_k : k \in K := \{1 \dots n\} \cup (n + N)\}$, où $\{f_1, \dots, f_n\}$ est une base orthonormale de Z_1 quelconque et où $f_{n+i} = e_i$ pour tout $i \in N$.*

Démonstration. La topologie σ sur $Y \oplus Z_1$ associée à la base hilbertienne $\{f_k : k \in K\}$ est engendrée par la norme

$$|||y + \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n|||_\sigma := \sum_{k \in K} \frac{1}{2^k} |(f_k, y + \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n)|.$$

Mais comme $(f_i, y) = 0$ pour chaque $i = 1, \dots, n$ et $(f_k, f_l) = \delta_{k,l}$, ceci se simplifie à

$$|||y + \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n|||_\sigma = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} |\lambda_k| + \sum_{k \in N} \frac{1}{2^{k+n}} |(e_k, y)|.$$

Et d'autre part,

$$|||y + \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n|||_\tau = \max \left\{ \|\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n\|, \sum_{k \in N} \frac{1}{2^k} |(e_k, y)| \right\}.$$

En utilisant l'inégalité

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i| \leq \sqrt{n} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}, \quad a_i \in \mathbb{R},$$

il est facile de voir que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^n}|||y+\lambda_1 f_1+\ldots+\lambda_n f_n|||_\tau &\le |||y+\lambda_1 f_1+\ldots+\lambda_n f_n|||_\sigma\\ &\le \left(\sqrt{n}+\frac{1}{2^n}\right)|||y+\lambda_1 f_1+\ldots+\lambda_n f_n|||_\tau.\end{aligned}$$

Ceci montre que les normes $|||\cdot|||_\sigma$ et $|||\cdot|||_\tau$ sur $Y\oplus Z_1$ sont équivalentes. □

Le théorème suivant est apparu pour la première fois dans [**8**] pour une fontionnelle bien spécifique. Par la suite, Willem [**11**] en donna une version plus générale. C'est cette version que l'on présente ici, à la différence que l'hypothèse (iii) ne figure pas dans [**11**] tout en étant utilisée.

Théorème 3.20. *Soit $X=Y\oplus Z$ un espace de Hilbert comme ci-haut. Pour $0<r<\rho$ et $z\in Z$ tel que $\|z\|=1$, posons*

$$U:=\{x=y+\lambda z:\ \|x\|<\rho,\ \lambda>0,\ y\in Y\}\subset Y\oplus\mathbb{R}\langle z\rangle,$$

$$Q:=\{w\in Z:\ \|w\|\le r\}\subset Z.$$

et notons $\overline{U}$ et ∂U respectivement la fermeture et la frontière de U dans $E:=Y\oplus\mathbb{R}\langle z\rangle$, et ∂Q la frontière de Q dans Z :

$$\overline{U}=\{x=y+\lambda z:\ \|x\|\le\rho,\ \lambda\ge 0,\ y\in Y\},$$

$$\partial U=\{x=y+\lambda z:\ y\in Y,\ \|x\|=\rho \text{ et } \lambda\ge 0 \text{ ou } ||x||\le\rho \text{ et } \lambda=0\},$$

$$\partial Q=\{w\in Z:\ \|w\|=r\}.$$

Soit aussi $\varphi\in C^1(X,\mathbb{R})$ telle que

(i) *φ est τ-semi-continue supérieurement ;*

(ii) *$\nabla\varphi$ est faiblement séquentiellement continue ;*

(iii) *pour toutes constantes $\alpha<\beta$, toute suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}\in\varphi_\alpha^\beta$ telle que $u_n\xrightarrow{\tau}u\in\varphi_\alpha^\beta$ est fortement bornée.*

(iv) *$b:=\inf_{\partial Q}\varphi>\sup_{\partial U}\varphi$;*

(v) *$d:=\sup_{\overline{U}}\varphi<+\infty$.*

Alors, il existe $c \in [b,d]$ *et une suite* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *dans* X *telle que*

$$\varphi(x_n) \to c, \quad \varphi'(x_n) \to 0.$$

Démonstration. Dans le but d'arriver à une contradiction, supposons que pour toute suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in X$ telle que $\varphi(x_n) \to c \in [b,d]$, on a que $\varphi'(x_n) \nrightarrow 0$. Dans ce cas, c'est qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$\|\varphi'(x)\| \geq \epsilon \quad \forall x \in \varphi^{-1}([b-\epsilon, d+\epsilon]).$$

En effet, le cas contraire serait que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $x \in \varphi^{-1}([b-\epsilon, d+\epsilon])$ tel que $\|\varphi'(x)\| < \epsilon$. En particulier, on aurait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in \varphi^{-1}([b-1/n, d+1/n])$ tel que $\|\varphi'(x_n)\| < 1/n$. Et comme $\varphi(x_n) \in [b-1/n, d+1/n] \subset [b-1, d+1]$ avec $[b-1, d+1]$ compact, on peut supposer sans perte de généralité que $\varphi(x_n) \to c \in [b,d]$. Mais c'est absurde car alors $\varphi'(x_n) \to 0$.

C'est donc que la fonctionnelle φ satisfait la propriété $(KS)_{b-\epsilon}^{d+\epsilon}$. Soit η le flot obtenu au Lemme 3.18. Puisque $\overline{U} \subset \varphi^{d+\epsilon}$, il existe $T > 0$ tel que

$$\eta(T, \overline{U}) \subset \varphi^{b-\epsilon}. \tag{3.10}$$

Considérons la topologie σ sur E induite par τ au sens du Lemme 3.19.

Définissons une homotopie $h : [0,T] \times \overline{U} \to Y \oplus \mathbb{R}\langle z \rangle$ par

$$h(t,x) := P_Y \circ \eta(t,u) + (\|P_Z \circ \eta(t,u)\| - r)z,$$

de sorte que

$$h(t,u) = 0 \Longleftrightarrow \eta(t,u) \in \partial Q. \tag{3.11}$$

Vérifions que l'homotopie h est σ-admissible (voir Définition 3.11).

Premièrement, montrons que $\overline{U}$ est σ-fermé. Soit $\{x_n = y_n + \lambda_n z\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\overline{U}$ telle que $x_n \xrightarrow{\sigma} x = y + \lambda z$. Alors c'est que $\lambda \geq 0$ et $y_n \xrightarrow{\sigma} y \in Y$. Du reste, comme $\overline{U}$ est fortement bornée, par la Proposition 3.3, $x_n \rightharpoonup x$, et donc $\|x\| \leq \liminf_{n\to+\infty} \|x_n\| \leq \rho$; i.e. $x \in \overline{U}$.

Ensuite, observons que $0 \notin h([0,T] \times \partial U)$ puisque le cas contraire serait qu'il existe $(t,u) \in [0,T] \times \partial U$ tel que $\eta(t,u) \in \partial Q$. Mais ceci est absurde car alors par la propriété de décroissance de $\varphi(\eta(\cdot,u))$, on aurait

$$\sup_{\partial U} \varphi \geq \varphi(u) = \varphi(\eta(0,u)) \geq \varphi(\eta(t,u)) \geq \inf_{\partial Q} \varphi,$$

contredisant l'hypothèse (iv).

Pour montrer que h est σ-continue, il faut montrer que si $\{(t_n,u_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans $[0,T]\times\overline{U}$ telle que $t_n \to t$ et $u_n \xrightarrow{\sigma} u$, alors $|||h(t_n,u_n)-h(t,u)|||_\sigma \to 0$. On a que

$$\begin{aligned}
&|||h(t_n,u_n) - h(t,u)|||_\sigma \\
&\quad = |||P_Y \circ \eta(t_n,u_n) - P_Y \circ \eta(t,u) + (\|P_Z \circ \eta(t_n,u_n)\| - \|P_Z \circ \eta(t,u)\|)z|||_\sigma \\
&\quad \leq |||P_Y \circ \eta(t_n,u_n) - P_Y \circ \eta(t,u)|||_\sigma + |\|P_Z \circ \eta(t_n,u_n)\| - \|P_Z \circ \eta(t,u)\||.
\end{aligned}$$

Mais η est τ-continue sur $[0,T] \times \overline{U}$ et P_Y, P_Z sont telles que $x_n \xrightarrow{\tau} x \in X$ implique que $P_Y x_n \xrightarrow{\sigma} P_Y x$ et $P_Z x_n \to P_Z x$, d'où

$$|||P_Y \circ \eta(t_n,u_n) - P_Y \circ \eta(t,u)|||_\sigma + |\|P_Z \circ \eta(t_n,u_n)\| - \|P_Z \circ \eta(t,u)\|| \to 0.$$

Finalement, le point (3) du Lemme 3.18 garantit, pour chaque $(t,u) \in [0,T] \times U$, l'existence d'un τ-voisinage $\tilde{N}_{(t,u)}$ de (t,u) tel que l'ensemble

$$\{v - \eta(s,v) : \ (s,v) \in \tilde{N}_{(t,u)} \cap ([0,T] \times \overline{U})\}$$

est contenu dans un sous-espace de X de dimension finie. Alors clairement, $N_{(t,u)} := \tilde{N}_{(t,u)} \cap (Y \oplus \mathbb{R}\langle z \rangle)$ est un σ-voisinage de (t,u) tel que l'ensemble

$$\{v - h(s,v) : \ (s,v) \in N_{(t,u)} \cap ([0,T] \times \overline{U})\}$$

est contenu dans un sous-espace de $Y \oplus \mathbb{R}\langle z \rangle$ de dimension finie.

Pour conclure, remarquons que pour tout $u = y + \lambda z \in \overline{U}$,

$$\begin{aligned}
h(0,u) &= P_Y \circ \eta(0,u) + (\|P_Z \circ \eta(0,u)\| - r)z \\
&= P_Y u + (\|P_Z u\| - r)z \\
&= y + (\lambda - r)z \\
&= \mathrm{id}_{\overline{U}}(u) - rz.
\end{aligned}$$

Et $rz \in U$ car $\|rz\| = r \in]0, \rho[$. Il suit des propriétés de normalization et d'invariance par homotopies du degré de Kryszewski et Szulkin Théorème 3.12 (DKS1) et (DKS3) que

$$\deg_{KS}(h(T, \cdot), U) = \deg_{KS}(h(0, \cdot), U) = \deg_{KS}(\mathrm{id}_{\overline{U}} - rz, U) = 1.$$

Par la propriété d'existence Théorème 3.12 (DKS2), on conclut qu'il existe un $u \in U$ tel que $h(T, u) = 0$. Par (3.11), $\eta(T, u) \in \partial Q$ et donc $\varphi(\eta(T, u)) \geq b$, ce qui est en contradiction avec l'équation (3.10). $\square$

Remarque 3.21. En particulier, si φ satisfait $(PS)_c$, alors c est un point critique de φ. Notons cependant que dans l'article cité ci-haut, Kryszewski et Szulkin utilisent le théorème précédent pour établir l'existence d'un point critique à une fonctionnelle pour laquelle la condition $(PS)_c$ échoue pour tout $c \in \mathbb{R}$.

Chapitre 4

GÉNÉRALISATION DES RÉSULTATS DE KRYSZEWSKI ET SZULKIN

§4.1. Une nouvelle notion d'enlacement

Guidé par la définition d'enlacement introduite par Frigon [**7**], on définit une nouvelle notion d'enlacement reposant sur la topologie τ présentée au chapitre précédent.

Dans tout ce chapitre, $X = Y \oplus Z$ est un espace de Hilbert avec Y séparable non trivial et $Z = Y^{\perp}$. On note $P_Y : X \to Y$ et $P_Z : X \to Z$ les opérateurs de projection orthogonale sur Y et Z respectivement. Soit

$$N := \begin{cases} \mathbb{N} & \text{si } \dim Y = \infty, \\ \{1, \ldots, \dim Y\} & \text{sinon,} \end{cases}$$

et soit $\{e_k : k \in N\}$ une base hilbertienne de Y. Considérons sur X la topologie τ engendrée par la norme (3.4). Cette topologie vérifie les propriétés de la Proposition 3.14.

Définition 4.1. Soit $A \subseteq B \subseteq X$ tels que $B \neq \emptyset$. Une *déformation admissible* de X pour la paire (B, A) est une fonction $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ telle que

(1) $\eta(t, x) = x$ pour tout $(t, x) \in (\{0\} \times X) \cup ([0,1] \times A)$,

(2) η est τ-continue sur $[0,1] \times B$,

(3) pour chaque $(t_0, x_0) \in [0,1] \times B$, il existe un τ-voisinage $V_{(t_0,x_0)}$ de (t_0, x_0) tel que

$$\{P_Y(x - \eta(t,x)) : (t,x) \in V_{(t_0,x_0)} \cap ([0,1] \times B)\}$$

est contenu dans un sous-espace de Y de dimension finie.

L'ensemble des déformations admissibles de X pour la paire (B, A) est noté $\mathcal{N}^{\mathrm{ad}}(B, A)$.

Définition 4.2. Soit $A \subseteq B \subseteq X$ et $P \subseteq Q \subseteq X$ tels que $B \cap Q \neq \emptyset$, $A \cap Q = \emptyset$, et $B \cap P = \emptyset$. Soit $\mathcal{N}_0$ un sous-ensemble non vide de $\mathcal{N}^{\mathrm{ad}}(B, A)$. On dit que (B, A) *τ-enlace* (Q, P) *via* $\mathcal{N}_0$ si pour chaque $\eta \in \mathcal{N}_0$, l'une des affirmations suivantes est satisfaite :

(1) $\eta(1, B) \cap Q \neq \emptyset$;

(2) $\eta(]0,1[, B) \cap P \neq \emptyset$.

Si $\mathcal{N}_0 = \mathcal{N}^{\mathrm{ad}}(B, A)$, on dit simplement que (B, A) *τ-enlace* (Q, P).

Remarque 4.3. Si Y est de dimension finie, la topologie τ coïncide avec la topologie forte et la condition (3) de la Définition 4.1 est trivialement satisfaite, donc $\mathcal{N}^{\mathrm{ad}}(B, A) = \mathcal{N}(A)$, ce qui revient à dire que dans ce cas, le τ-enlacement est équivalent à l'enlacement au sens de Frigon (voir la Définition 2.1).

La proposition suivante et sa preuve suivent les mêmes idées que la Proposition 2.4 sauf que le degré de Kryszewski et Szulkin est utilisé plutôt que le degré topologique classique.

Proposition 4.4. *Soit $X = Y \oplus Z$ un espace de Hilbert comme ci-haut et supposons que $Z = Z_1 \oplus Z_2$ avec Z_1 de dimension finie. Soit U une partie ouverte et bornée de $Y \oplus Z_1$ telle que $\overline{U}$ est τ-fermé et soit F une partie fermée de Z telles que $U \cap F \neq \emptyset$, $\partial U \cap F = \emptyset$, et $\partial U \cap Z_1$ est un rétract de $Z \backslash F$. Alors, $(\overline{U}, \partial U)$ τ-enlace $(F, \emptyset)$.*

Démonstration. Soit $\hat{r} : Z \backslash F \to \partial U \cap Z_1$ une rétraction. Fixons $p \in U \cap F$ et définissons $r : X \to Z_1$ par

$$r(x) = \begin{cases} \hat{r}(z_1 + z_2) & \text{si } z_1 + z_2 \notin F, \\ p & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $x = y + z_1 + z_2$, avec $y \in Y$, $z_1 \in Z_1$ et $z_2 \in Z_2$. Soit $\alpha : Z \to [0,1]$ une fonction continue telle que $\alpha(x) = 0$ si et seulement si $x \in F$ et $\alpha(x) = 1$ si et seulement si $x \in \partial U \cap Z$.

Pour $\eta \in \mathcal{N}^{\mathrm{ad}}(\overline{U}, \partial U)$ quelconque, définissons $H : [-1,1] \times \overline{U} \to Y \oplus Z_1$ par

$$H(t,x) = \begin{cases} P_Y \circ \eta(t,x) + \alpha(P_Z \circ \eta(t,x))(r(\eta(t,x)) - p) & \text{si } t \in [0,1], \\ (t+1)(y + \alpha(z_1)(r(x) - p)) - t(x - p) & \text{si } t \in [-1,0]. \end{cases}$$

Remarquons que $H(-1, \cdot) = \mathrm{id}_{\overline{U}} - p$ avec $p \in U$ et

$$H(1,x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \eta(1,x) \in F. \tag{4.1}$$

De façon analogue à la Proposition 2.4, on montre que $0 \notin H([-1,1] \times \partial U)$. Et H est τ-continue aussi selon un argument analogue à la Proposition 2.4 puisque $\eta|_{[0,1]\times\overline{U}}$, P_Y, P_Z et $\alpha|_{Z_1}$ sont toutes τ-continues. Pour la topologie σ sur $Y \oplus Z_1$ induite par τ au sens du Lemme 3.19, $\overline{U}$ est σ-fermé et H est σ-continue. Vérifions enfin que H satisfait la propriété (4) de la Définition 3.11 d'une homotopie σ-admissible. D'abord, il est facile de voir que pour tout $(t,x) \in [-1,0] \times U$, $x - H(t,x) \in Z_1$. Donc, donné $(t_0, x_0) \in [-1, 0[\times U$, il suffit de prendre $N_{(t_0,x_0)} = [-1,0[\times (Y \oplus Z_1)$. Pour $(t_0,x_0) \in [0,1] \times U$, soit $V_{(t_0,x_0)}$ le τ-voisinage de (t_0,x_0) donné à la Définition 4.1 et posons $V'_{(t_0,x_0)} := V_{(t_0,x_0)} \cap ([-1,1] \times (Y \oplus Z_1))$. Alors, $V'_{(t_0,x_0)}$ est σ-ouvert et

$$\{P_{Y\oplus Z_1}(x - \eta(t,x)) : (t,x) \in V'_{(t_0,x_0)} \cap ([0,1] \times U)\}$$

est contenu dans $G \oplus Z_1$ avec G un sous-espace de Y de dimension finie. Mais pour chaque $(t,x) \in V'_{(t_0,x_0)} \cap ([0,1] \times U)$, on a que

$$\begin{aligned} x - H(t,x) &= P_Y x + P_{Z_1} x - P_Y(\eta(t,x)) - \alpha(P_Z(\eta(t,x))(r(\eta(t,x)) - p) \\ &= P_Y(x - \eta(t,x)) + P_{Z_1} x - \alpha(P_Z(\eta(t,x))(r(\eta(t,x)) - p) \in G \oplus Z_1. \end{aligned}$$

Donc donné $(t_0,x_0) \in [0,1] \times U$, il suffit de prendre $N_{(t_0,x_0)} = V'_{(t_0,x_0)}$.

Par le Théorème 3.12,

$$1 = \deg_{KS}(\mathrm{id}_{\overline{U}} - p, U) = \deg_{KS}(H(-1,\cdot), U) = \deg_{KS}(H(1,\cdot), U).$$

On conclut qu'il existe $x \in U$ avec $H(1,x) = 0$, et d'où, par (4.1), $\eta(1,U) \cap F \neq \emptyset$. Ceci montre que pour chaque $\eta \in \mathcal{N}^{\mathrm{ad}}(\overline{U}, \partial U)$, la condition (1) de la Définition 4.2 est satisfaite. $\square$

Exemple 4.5. Soit $X = Y \oplus Z$ un espace de Hilbert comme ci-haut et soit $r > 0$. Posons

$$B := \{y \in Y : \|y\| \leq r\},$$
$$A := \{y \in Y : \|y\| = r\}.$$

L'ensemble B est clairement τ-fermé donc par la proposition précédente avec $Z = \{0\} \oplus Z$, $U = B(0;r) \cap Y$ et $F = Z$, on a que (B, A) τ-enlace $(Z, \emptyset)$.

Exemple 4.6. Soit, $X = Y \oplus Z$ un espace de Hilbert comme ci-haut et soit $z \in Z$ tel que $\|z\| = 1$. Posons $Z_1 := \mathbb{R}\langle z \rangle$ et $Z_2 := Z_1^{\perp_Z}$ de sorte que $Z = Z_1 \oplus Z_2$ avec Z_1 de dimension finie. Soit aussi $0 < r < \rho$ et

$$U := \{x = y + \lambda z : \ \|x\| < \rho, \ \lambda > 0, \ y \in Y\} \subset Y \oplus Z_1,$$
$$Q := \{w \in Z : \ \|w\| \leq r\} \subset Z.$$

Notons $\overline{U}$ et ∂U respectivement la fermeture et la frontière de U dans $Y \oplus Z_1$, et ∂Q la frontière de Q dans Z :

$$\overline{U} = \{x = y + \lambda z : \ \|x\| \leq \rho, \ \lambda \geq 0, \ y \in Y\},$$
$$\partial U = \{x = y + \lambda z : \ y \in Y, \ \|x\| = \rho \text{ et } \lambda \geq 0 \text{ ou } \|x\| \leq \rho \text{ et } \lambda = 0\},$$
$$\partial Q = \{w \in Z : \ \|w\| = r\}.$$

On a vu dans la preuve du Théorème 3.20 que $\overline{U}$ est σ-fermé. De plus, on a que $U \cap \partial Q \neq \emptyset$, $\partial U \cap \partial Q = \emptyset$, et $\partial U \cap Z_1 = \{0, \rho z\}$ est un rétract de $Z \backslash \partial Q$ via par exemple

$$\hat{r}(w) = \begin{cases} 0 & \text{si } \|w\| < r, \\ \rho z & \text{si } \|w\| > r. \end{cases}$$

La proposition précédente donne donc que $(\overline{U}, \partial U)$ τ-enlace $(\partial Q, \emptyset)$.

La Proposition 2.7 s'adapte aussi à notre notion d'enlacement, bien que moins élégamment :

Proposition 4.7. *Soit $X = Y \oplus Z$ un espace de Hilbert comme ci-haut et supposons que $Z = Z_1 \oplus Z_2$ avec Z_1 de dimension finie. Soit U une partie ouverte et bornée de $Y \oplus Z_1$ telle que $\overline{U}$ est τ-fermé et soit $P \subset Q$ des fermés de Z tels que $\partial U \cap Q \neq \emptyset$, $U \cap P \neq \emptyset$, et $\partial U \cap P = \emptyset$. Supposons que $\partial U \cap Z_1$ est un rétract de $Z \backslash P$, et que $(\partial U \cap Z_1) \backslash Q$ est un rétract de Z. Supposons également qu'il existe $A, A' \subset \partial U$ tels que A' est τ-fermée, $A \cup A' = \partial U$ et $A \cap Q = \emptyset$. Alors, $(\partial U, A)$ τ-enlace (Q, P) via $\mathcal{N}_0$, où*

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_0 := \{\eta \in \mathcal{N}^{\mathrm{ad}}(\partial U, A) : \ & \eta \textit{ est } \tau\textit{-continue sur } [0,1] \times \overline{U} \textit{ et pour tout } (t_0, x_0) \in \\ & [0,1] \times \overline{U}, \textit{ il existe un } \sigma\textit{-voisinage} \\ & V_{(t_0,x_0)} \subset [0,1] \times (Y \oplus Z_1) \textit{ de } (t_0, x_0) \textit{ tel que} \\ & \{P_Y(x - \eta(t,x)) : (t,x) \in V_{(t_0,x_0)} \cap ([0,1] \times \overline{U})\} \\ & \textit{est contenu dans un sous-espace de } Y \textit{ de dimension} \\ & \textit{finie}\}. \end{aligned}$$

Démonstration. Soit $\hat{r} : Z \backslash P \to \partial U \cap Z_1$ et $\hat{s} : Z \to (\partial U \cap Z_1) \backslash Q$ des rétractions telles que $\hat{r}|_{Z \backslash Q} = \hat{s}|_{Z \backslash Q}$, et soit $p \in U \cap P$. Définissons $r, s : X \to Z_1$ par

$$s(x) := \hat{s}(z) \quad \text{et} \quad r(x) := \begin{cases} \hat{r}(z) & \text{si } z \notin P, \\ p & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $x = y + z$. Remarquons que $s(x) = r(x)$ dès que $z \notin Q$.

Puisque A', Q et P sont τ-fermés et que $A' \cap P = \emptyset$, il existe $\alpha, \beta : X \to [0,1]$ des fonctions τ-continues telles que $\alpha(x) = 0$ si et seulement si $x \in P$, $\alpha(x) = 1$ si et seulement si $x \in A'$ et $\beta(x) = 0$ si et seulement si $x \in Q$. Et maintenant, pour $\eta \in \mathcal{N}_0$ quelconque, définissons $H : [-1,1] \times \overline{U} \to Y \oplus Z_1$ par

$$H(t,x) = \begin{cases} P_Y \circ \eta(t,x) + (1-t)\alpha(P_Z \circ \eta(t,x))(r(\eta(t,x)) - p) & \\ \quad +t(1-\alpha(x)(1-\beta(\eta(t,x))))(s(\eta(t,x)) - p) & \text{si } t \in [0,1], \\ (1+t)(y + \alpha(z_1)(r(x) - p)) - t(x-p) & \text{si } t \in [-1,0]. \end{cases}$$

Comme à la Proposition 2.7 et puisque $\eta \in \mathcal{N}_0$, il est facile de voir que H est τ-continu et que $0 \notin H([-1,0] \times \partial U)$. Aussi, remarquons que comme $\dim(Z_1) < \infty$, pour chaque $(t_0, x_0) \in [-1,1] \times \overline{U}$, un σ-voisinage $N_{(t_0,x_0)}$ de (t_0,x_0) est tel que $\{P_{Y \oplus Z_1}(x - H(t,x)) : (t,x) \in N_{(t_0,x_0)} \cap ([-1,1] \times \overline{U})\}$ est contenu dans un sous-espace de dimension finie de $Y \oplus Z_1$ si et seulement si $N_{(t_0,x_0)}$ est un σ-voisinage de (t_0,x_0) tel que $\{P_Y(x - H(t,x)) : (t,x) \in N_{(t_0,x_0)} \cap ([-1,1] \times \overline{U})\}$ est contenu dans un sous-espace de dimension finie de Y.

Ici, il y a deux cas :

(a) Il existe $x \in \partial U$ et $t \in]0,1[$ tel que $H(t,x) = 0$.

(b) Pour tout $x \in \partial U$ et $t \in]0,1[$, $H(t,x) \neq 0$.

Si (a) tient, on distingue les deux sous-cas suivants :

(a1) $\underline{x \in A', \eta(t,x) \in Q :}$ Dans ce cas, $\beta(\eta(t,x)) = 0$ et $\alpha(x) = 1$ donc l'équation $H(t,x) = 0$ devient

$$(1-t)\alpha(\eta(t,x))(r(\eta(t,x)) - p) = 0.$$

Mais remarquons que ceci implique que $\eta(t,x) \in P$ car sinon $\alpha(\eta(t,x)) \neq 0$ et $r(\eta(t,x)) \neq p$. C'est donc que $\eta(\partial U \times]0,1[) \cap P \neq \emptyset$ et la condition (2) de la Définition 4.2 est satisfaite.

(a2) $\underline{\eta(t,x) \notin Q :}$ Dans ce cas, $r(\eta(t,x)) = s(\eta(t,x))$ donc l'équation $H(t,x) = 0$ devient

$$((1-t)\alpha(\eta(t,x)) + t(1-\alpha(x)(1-\beta(\eta(t,x)))))(r(\eta(t,x)) - p) = 0.$$

Mais ceci est impossible car $r(\eta(t,x)) \neq p$, $\alpha(\eta(t,x)) \neq 0$ et $\beta(\eta(t,x)) \neq 0$.

C'est donc que le cas (a2) ne survient jamais et la condition (2) de la Définition 4.2 est satisfaite.

Si (b) tient, on considère les deux sous-cas suivants :

(b1) Pour tout $x \in \partial U$, $H(1,x) \neq 0$.

(b2) Il existe $u \in \partial U$ tel que $H(1,x) = 0$.

Dans le cas (b1), on est dans la situation où $0 \notin H([-1,1] \times \partial U)$ et donc H est une homotopie σ-admissible (au sens du Lemme 3.19). Comme $H(-1,\cdot) = \mathrm{id}_{\overline{U}} - p$ avec $p \in U$, la théorie du degré de Kryszewski et Szulkin donne

$$1 = \deg_{KS}(\mathrm{id}_{\overline{U}} - p, U) = \deg_{KS}(H(-1,\cdot), U) = \deg_{KS}(H(1,\cdot), U),$$

d'où on conclut l'existence d'un $x \in \overline{U}$ tel que $H(1,x) = 0$. Donc que (b1) ou (b2) soit satisfaite, la conclusion est qu'il existe un $x \in \overline{U}$ tel que $H(1,x) = 0$. Ceci implique que $\eta(1,x) = P_Z \circ \eta(1,x)$ et l'équation $H(1,x) = 0$ s'écrit

$$(1 - \alpha(x)(1 - \beta(\eta(1,x))))(s(\eta(1,x)) - p) = 0.$$

Mais $s(\eta(1,x)) \neq p$ donc

$$1 - \alpha(x)(1 - \beta(\eta(1,x))) = 0.$$

Mais la seule solution au problème

$$\begin{cases} 1 - a(1-b) = 0 \\ 0 \leq a, b \leq 1 \end{cases}$$

est $a = 1$, $b = 0$, d'où $\alpha(x) = 1$, $\beta(\eta(1,x)) = 0$, ce qui est équivalent à $x \in A' \subset \partial U$ et $\eta(x,1) \in Q$. Ceci montre que la condition (1) de la Définition 4.2 est satisfaite. $\square$

Exemple 4.8. Soit, $X = Y \oplus Z$ un espace de Hilbert comme ci-haut et soit $z \in Z$ tel que $\|z\| = 1$. Posons $Z_1 := \mathbb{R}\langle z \rangle$ et $Z_2 := Z_1^{\perp_Z}$ de sorte que $Z = Z_1 \oplus Z_2$ avec

Z_1 de dimension finie. Soit aussi $0 < r < \rho$ et

$$V := \{x = y + \lambda z : \ \|y\| < \rho, \ 0 < \lambda < \rho, \ y \in Y\} \subset Y \oplus Z_1,$$

$$Q := \{w \in Z : \ \|w\| \leq r\} \subset Z.$$

Notons $\overline{V}$ et ∂V respectivement la fermeture et la frontière de V dans $Y \oplus Z_1$, et P la frontière de Q dans Z :

$$\overline{V} = \{x = y + \lambda z : \ \|y\| \leq \rho, \ 0 \leq \lambda \leq \rho, \ y \in Y\},$$

$$\partial V = \{x = y + \lambda z : \ y \in Y, \ \|y\| \leq \rho \text{ et } \lambda \in \{0, \rho\} \text{ ou } \|y\| = \rho \text{ et } \lambda \in [0,1]\},$$

$$\partial Q = \{w \in Z : \ \|w\| = r\}.$$

Posons

$$A := \{x = y + \lambda z \in \partial V : \ \|y\| = \rho \text{ et } \lambda \in [0,1]\},$$

$$A' := \{x = y + \lambda z \in \partial V : \ \|y\| \leq \rho \text{ et } \lambda \in \{0, \rho\}\}.$$

Les ensembles $\overline{V}$ et A' sont τ-fermés car leur projection sur Y est la boule fermée de rayon ρ, qui est σ-fermée. Du reste, il est clair que $A \cup A' = \partial V$, $A \cap Q = \emptyset$, $\partial V \cap Q \neq \emptyset$, $V \cap \partial Q \neq \emptyset$, et $\partial V \cap \partial Q = \emptyset$. Aussi, $\partial V \cap Z_1 = \{0, \rho z\}$ est un rétract de $Z \backslash \partial Q$ via

$$r(w) = \begin{cases} 0 & \text{si } \|w\| < r, \\ \rho z & \text{si } \|w\| > r, \end{cases}$$

et $(\partial V \cap Z_1) \backslash Q = \{\rho z\}$ est un rétract de Z via l'application constante $w \mapsto \rho z$. Il suit de la Proposition 4.7 que $(\partial V, A)$ τ-enlace $(Q, \partial Q)$ via $\mathcal{N}_0$ et il suit de la Proposition 4.4 que $(\overline{V}, \partial V)$ τ-enlace $(\partial Q, \emptyset)$.

§4.2. Le théorème de Kryszewski et Szulkin généralisé

Soit $X = Y \oplus Z$ un espace de Hilbert comme ci-haut. Rappellons que donnés $A \subseteq B \subseteq X$, on a défini à la Définition 4.1 l'ensemble des déformations admissibles $\mathcal{N}^{\mathrm{ad}}(B, A)$ comme l'ensemble des déformations $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ telles que

(1) $\eta(t, x) = x$ pour tout $(t, x) \in (\{0\} \times X) \cup ([0,1] \times A)$,

(2) η est τ-continue sur $[0,1] \times B$,

(3) pour chaque $(t_0, x_0) \in [0,1] \times B$, il existe un τ-voisinage $V_{(t_0,x_0)}$ de (t_0, x_0) tel que

$$\{P_Y(x - \eta(t,x)) : (t,x) \in V_{(t_0,x_0)} \cap ([0,1] \times B)\}$$

est contenu dans un sous-espace de Y de dimension finie.

Pour $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$, on pose

$$\mathcal{N}_\varphi^{\mathrm{ad}}(B,A) := \{\eta \in \mathcal{N}^{\mathrm{ad}}(B,A) : \ \varphi(\eta(t,x)) \leq \varphi(x) \ \forall (t,x) \in [0,1] \times X\}.$$

L'analogue du Lemme 2.11 tient toujours :

Lemme 4.9. *Soit $X = Y \oplus Z$ un espace de Hilbert comme ci-haut, $\varphi \in C^1(E, \mathbb{R})$, $A \subset X$, $\mathcal{N}_0 \subset \mathcal{N}_\varphi^{\mathrm{ad}}(B,A)$ et (B,A), (Q,P) deux paires telles que (B,A) τ-enlace (Q,P) via $\mathcal{N}_0$. Si*

$$\varphi(x) < \varphi(y) \quad \forall x \in B, \ \forall y \in P,$$

alors la condition (2) de la Définition 4.2 ne tient jamais.

Démonstration. En effet, si $\eta(t,x) \in P$ pour un certain $(t,x) \in]0,1[\times B$, alors on aurait $\varphi(\eta(t,x)) \leq \varphi(x) < \varphi(\eta(t,x))$, ce qui est une contradiction. $\square$

Nous aurons également besoin d'une version légèrement modifiée du Lemme 3.18 :

Lemme 4.10. *Soit $\alpha < \beta$ et $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$ une fonctionnelle ayant la propriété $(KS)_\alpha^\beta$ et soit A un sous-ensemble τ-fermé de φ^β disjoint de φ_α^β. Alors, il existe $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ satisfaisant les propriétés suivantes :*

(1) $\eta(t,x) = x$ pour tout $(t,x) \in (\{0\} \times X) \cup ([0,1] \times A)$.

(2) Pour chaque $x \in X$, l'application $[0,1] \to \mathbb{R} : t \mapsto \varphi(\eta(t,x))$ est décroissante.

(3) $\eta(1, \varphi^\beta) \subset \varphi^\alpha$.

(4) Chaque point $(t_0, x_0) \in [0,1] \times \varphi^\beta$ *a un* τ*-voisinage* $N_{(t_0,x_0)}$ *tel que l'ensemble*

$$\{x - \eta(t,x) : \ (t,x) \in N_{(t_0,x_0)} \cap ([0,1] \times \varphi^\beta)\}$$

est contenu dans un sous-espace de X *de dimension finie.*

(5) η *est* τ*-continu sur* $[0,1] \times \varphi^\beta$.

Démonstration. Supposons que $A \neq \emptyset$. Soit V le τ-voisinage de φ^β et $f : V \to X$ le champ de vecteurs obtenu au Lemme 3.16. Définissons $\lambda : X \to \mathbb{R}$ par

$$\lambda(x) = \frac{\operatorname{dist}_\tau(x, A)}{\operatorname{dist}_\tau(x, A) + \operatorname{dist}_\tau(x, \varphi_\alpha)}.$$

Alors $0 \leq \lambda \leq 1$, $\lambda|_A \equiv 0$, $\lambda|_{\varphi_\alpha} \equiv 1$, et λ est τ-localement lipschitzienne. Soit $h : X \to X$ un champ de vecteurs défini par

$$h(x) := \begin{cases} -\lambda(x)\chi(x)f(x) & \text{si } x \in V, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\chi : X \to [0,1]$ est une fonction localement lipschitzienne telle que $\chi|_{\varphi^\beta} \equiv 1$ et $\operatorname{supp}\chi \subset V$. Par le Lemme 3.16, h est bornée et localement lipschitzienne, donc pour chaque $y_0 \in X$, le problème à valeur initiale

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} y(t; y_0) = h(y(t; y_0)) \\ y(0; y_0) = y_0 \end{cases} \tag{4.2}$$

admet une unique solution continûment différentiable définie sur $\mathbb{R}$ (voir Théorème 1.18). De plus, le flot $\zeta : \mathbb{R} \times X \to X : (t, y_0) \mapsto \zeta(t, y_0) := y(t; y_0)$ est continu.

Par définition, ζ vérifie $\zeta(0, x) = x$ pour tout $x \in X$. Et comme $h|_A \equiv 0$, un argument d'unicité permet de conclure que $\zeta(t, x) = x$ pour tout $(t, x) \in \mathbb{R} \times A$.

Par un argument analogue au Lemme 3.18, on a que pour $u \in V$ quelconque, $\zeta(t, u) \in V$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Pour tout $x \in X$, on a par (4) du Lemme 3.16 que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\varphi(\zeta(t,x)) &= \varphi'(\zeta(t,x))\frac{d}{dt}\zeta(t,x) \\
&= \left(\nabla\varphi(\zeta(t,x)), \frac{d}{dt}\zeta(t,x)\right) \\
&= -\lambda(\zeta(t,x))\chi(\zeta(t,x))(\nabla\varphi(\zeta(t,x)), f(\zeta(t,x))) \leq 0.
\end{aligned}$$

C'est-à-dire que pour chaque $x \in X$, l'application $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto \varphi(\zeta(t,x))$ est décroissante.

Posons $T := \beta - \alpha$. Soit $x \in X$. S'il existe $t_0 \in [0,T]$ tel que $\varphi(\zeta(t_0,x)) < \alpha$, on a simplement que $\varphi(\zeta(T,x)) \leq \varphi(\zeta(t_0,x)) < \alpha$ en vertu de la décroissance de $\varphi(\zeta(\cdot,x))$. Sinon, $\varphi(\zeta(t,x)) \in [\alpha,\beta]$ pour tout $t \in [0,T]$. Dans ce cas, le théorème fondamental du calcul intégral et le Lemme 3.16 impliquent

$$\begin{aligned}
\varphi(\zeta(T,x)) &= \varphi(x) + \int_0^T \frac{d}{dt}\varphi(\zeta(t,x))\, dt \\
&= \varphi(x) - \int_0^T (\nabla\varphi(\zeta(t,x)), f(\zeta(t,x)))\, dt \\
&< \beta - \int_0^T 1\, dt \\
&= \beta - (\beta - \alpha) \\
&= \alpha,
\end{aligned}$$

ce qui est une contradiction.

Soit $(t_0, x_0) \in [0,T] \times \varphi^\beta$. Posons $K := \zeta([0,T] \times \{x_0\})$ et montrons qu'il existe $r > 0$ tel que

(a) $U := B_\tau(K; r) \subset V$,

(b) λf est τ-lipschitzienne sur U de constante $L > 0$,

(c) $f(U)$ est contenu dans un sous-espace W de X de dimension finie.

Pour ce faire, notons d'abord que comme ζ est continue, l'ensemble K est compact et donc τ-compact. Comme λf est τ-localement lipschitzienne, il existe pour chaque $x \in K$ un τ-voisinage $\mathcal{O}_x$ de u sur lequel λf est τ-lipschitzienne de constante L_u. Soit $\{\mathcal{O}_{x_1}, \ldots, \mathcal{O}_{x_N}\}$ un sous-recouvrement fini de K. Posons

$$\mathcal{O} := \bigcup_{i=1}^{N} \mathcal{O}_{x_i} \cap V \quad \text{et} \quad L := \sum_{i=1}^{N} L_{x_i}.$$

Ainsi, $K \subset \mathcal{O} \subset V$ et λf est τ-lipschitzienne sur $\mathcal{O}$ de constante L. Par le Lemme 3.16, pour chaque $x \in K$, il existe $\mathcal{V}_x$ un τ-voisinage de x tel que $f(\mathcal{V}_x)$ est contenu dans un sous-espace de W_x de X de dimension finie. Par compacité de K, il existe un nombre fini $\{\mathcal{V}_{x'_1}, \ldots, \mathcal{V}_{x'_M}\}$ des $\mathcal{V}_x$ qui recouvrent K. Posons

$$\mathcal{V} := \bigcup_{i=1}^{M} \mathcal{V}_{x'_i} \cap V \quad \text{et} \quad W := W_{x'_1} + \ldots + W_{x'_M}$$

Alors clairement, $K \subset \mathcal{V} \subset V$ et $f(\mathcal{V}) \subset W$. Finalement, de la τ-compacité de K, on déduit l'existence d'un $r > 0$ tel que $K \subset U := B_\tau(K; r) \subset \mathcal{O} \cap \mathcal{V}$.

Maintenant, supposons que $x \in \varphi^\beta$ et $t \in [0, T]$ sont tels que $\zeta(s, x) \in U$ $\forall s \in [0, t]$. Dans ce cas, pour tout $t' \in [0, T]$,

$$\begin{aligned}\zeta(t', x) - \zeta(t', x_0) &= \left[\int_0^{t'} \frac{d}{ds}\zeta(s, x)\, ds + x\right] - \left[\int_0^{t'} \frac{d}{ds}\zeta(s, x_0)\, ds + x_0\right] \\ &= (x - x_0) - \int_0^{t'} \left(\lambda(\zeta(s, x))f(\zeta(s, x)) - \lambda(\zeta(s, x_0))f(\zeta(s, x_0))\right)\, ds,\end{aligned}$$

et donc on a

$$\begin{aligned}|||\zeta(t', x) - \zeta(t', x_0)|||_\tau \leq{}& |||(x - x_0)|||_\tau + \\ & \int_0^{t'} |||\lambda(\zeta(s, x))f(\zeta(s, x)) - \lambda(\zeta(s, x_0))f(\zeta(s, x_0))|||_\tau\, ds \\ \leq{}& |||(x - x_0)|||_\tau + L\int_0^{t'} |||\zeta(s, x) - \zeta(s, x_0)|||_\tau\, ds.\end{aligned}$$

L'inégalité de Gronwall (Lemme 1.19) implique donc que pour tout $t' \in [0, T]$,

$$|||\zeta(t', x) - \zeta(t', x_0)|||_\tau \leq |||x - x_0|||_\tau e^{Lt'} \leq |||x - x_0|||_\tau e^{LT}. \tag{4.3}$$

On affirme que pour tout $x \in \varphi^\beta \cap B_\tau(x_0; re^{-LT})$ et $t \in [0, T[$, on a que

$$\zeta(s, x) \in U \quad \forall s \in [0, t], \tag{4.4}$$

de sorte que, par ce qui précède, $|||\zeta(t', x) - \zeta(t', x_0)|||_\tau \leq |||x - x_0|||_\tau e^{LT} < r$ pour tout $t' \in [0, t]$. Mais comme $\zeta(t', x_0) \in K$ pour tout $t' \in [0, t]$, ceci est équivalent à dire que $\zeta(t', x) \in U$ pour tout $t' \in [0, t]$. Et donc $f(\zeta(s, x)) \in W$ pour tout $s \in [0, t]$. On obtient alors

$$\begin{aligned} u - \zeta(t, x) &= -\int_0^t \frac{d}{ds}\zeta(s, x)\, ds \\ &= \int_0^t \lambda(\zeta(s, x)) f(\zeta(s, x))\, ds \in W. \end{aligned}$$

Ceci est valide pour tout $x \in \varphi^\beta \cap B_\tau(x_0; re^{-LT})$ vérifiant (4.4) et pour tout $t \in [0, T[$. Si c'est le cas, comme W est de dimension finie, il est fermé dans X, donc par continuité, on a en fait que $x - \zeta(t, x) \in W$ pour tout $t \in [0, T]$.

Finalement, montrons que ζ est τ-continu en $(t_0, x_0) \in [0, T] \times \varphi^\beta$. Soit $\hat{\epsilon} > 0$, C une borne de f, et posons $\delta := \min\{re^{-LT}/2, \hat{\epsilon}/(e^{LT} + C)\}$, où L et r sont les constantes obtenues plus haut. Pour $0 < t < T$ et $x \in \varphi^\beta$ tels que $|t - t_0| < \delta$ et $|||x - x_0|||_\tau < \delta$, par (4.3), on a

$$\begin{aligned} |||\zeta(t, x) - \zeta(t_0, x_0)|||_\tau &= |||\zeta(t, x) - \zeta(t, x_0) + \zeta(t, x_0) - \zeta(t_0, x_0)|||_\tau \\ &\leq |||\zeta(t, x) - \zeta(t, x_0)|||_\tau + \left|\left|\left| \int_{t_0}^t \frac{d}{ds}\zeta(s, x_0)\, ds \right|\right|\right|_\tau \\ &\leq |||\zeta(t, x) - \zeta(t, x_0)|||_\tau + \int_{t_0}^t |||f(\zeta(s, x_0))|||_\tau\, ds \\ &\leq |||x - x_0|||_\tau e^{LT} + \int_{t_0}^t C\, ds \\ &< e^{LT}\delta + |t - t_0| C \\ &< (e^{LT} + C)\delta \\ &\leq \hat{\epsilon}. \end{aligned}$$

Il suffit de définir $\eta : [0, 1] \times X \to X$ par $\eta(t, x) := \zeta(Tt, x)$. Par ce qui précède, η est continu et vérifi (1)-(5). $\square$

Le théorème suivant généralise le Théorème 3.20. On peut également le voir comme l'analogue du Théorème 2.12 pour le τ-enlacement.

On adopte la convention $\sup(\emptyset) = -\infty$ et $\inf(\emptyset) = +\infty$.

Théorème 4.11. *Soit $X = Y \oplus Z$ un espace de Hilbert comme ci-haut, $A \subseteq B \subseteq X$, $P \subseteq Q \subseteq X$, et soit $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$ tels que*

(1) φ est τ-semi-continue supérieurement et $\nabla\varphi$ est faiblement séquentiellement continue ;

(2) (B, A) τ-enlace (Q, P) via $\mathcal{N}_\varphi^{\mathrm{ad}}(B, A)$ avec A τ-fermé ;

(3) $\varphi(x) < \varphi(y)$ pour tout $x \in B$, $y \in P$;

(4) il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $\sup_A \varphi < b < \inf_Q \varphi \leq \sup_B \varphi =: d$;

(5) si $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans φ_b^d telle que $u_n \xrightarrow{\tau} u \in \varphi_b^d$, alors $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est fortement bornée.

Soit

$$c := \inf_{\eta \in \mathcal{N}_\varphi^{\mathrm{ad}}(B,A)} \sup_{x\in B} \varphi(\eta(1, x)).$$

Si $c \in \mathbb{R}$, alors il existe une suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans X telle que

$$\varphi(x_n) \to c, \quad \varphi'(x_n) \to 0.$$

En particulier, si φ satisfait $(PS)_c$, alors c est une valeur critique de φ.

Démonstration. Remarquons que le Lemme 4.9 et les conditions (2)-(4) impliquent que $c \in [\inf_Q \varphi, d]$. Supposons par contradiction que pour toute suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans X telle que $\varphi(x_n) \to c$, on a que $\varphi'(x_n) \nrightarrow 0$. Dans ce cas, par le même argument qu'à la preuve du Théorème 3.20, c'est qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $c - \epsilon > b$ et

$$\|\varphi'(x)\| \geq \epsilon \quad \forall x \in \varphi^{-1}([c - \epsilon, c + \epsilon]).$$

Les conditions (1) et (5) nous assurent que φ satisfait la propriété $(KS)_\alpha^\beta$ avec $\alpha := c - \epsilon$ et $\beta := \min\{c + \epsilon, d\}$. Notons que A est disjoint de φ_α^β. Soit η une déformation obtenue en vertu du Lemme 4.10. Par définition de c, il existe $\eta' \in \mathcal{N}_\varphi^{\mathrm{ad}}(B, A)$ tel que $\sup_{x\in B} \varphi(\eta'(1, x)) \leq \beta$. Définissons $\theta : [0, 1] \times X \to X$ par

$$\theta(t, x) := \begin{cases} \eta'(2t, x) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \eta(2t - 1, \eta'(1, x)) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Montrons que $\theta \in \mathcal{N}_\varphi^{\mathrm{ad}}(B, A)$.

(1) • Soit $(0, x) \in \{0\} \times X$. Alors, $\theta(0, x) = \eta'(0, x) = x$ puisque $\eta' \in \mathcal{N}_{\varphi}^{\mathrm{ad}}(B, A)$.

• Soit $(t, x) \in [0, \frac{1}{2}] \times A$. Alors, $\theta(t, x) = \eta'(2t, x) = x$ puisque $\eta' \in \mathcal{N}_{\varphi}^{\mathrm{ad}}(B, A)$.

• Soit $(t, x) \in [\frac{1}{2}, 1] \times A$. Alors, $\theta(t, x) = \eta(2t-1, \eta'(1, x)) = \eta(2t-1, x) = x$ puisque $\eta' \in \mathcal{N}_{\varphi}^{\mathrm{ad}}(B, A)$ et puisque η est obtenu du Lemme 4.10.

(2) • Soit $(t, x) \in [0, \frac{1}{2}] \times B$. Alors θ est τ-continu en (t, x) car η' est τ-continu en $(2t, x) \in [0, 1] \times B$.

• Soit $(t, x) \in [\frac{1}{2}, 1] \times B$. Alors θ est τ-continu en (t, x) car $\eta'(1, \cdot)$ est τ-continu en $x \in B$ et η est τ-continu sur $[0, 1] \times \varphi^{\beta}$.

(3) • Soit $(t_0, x_0) \in [0, \frac{1}{2}[\times B$. Comme $\eta' \in \mathcal{N}_{\varphi}^{\mathrm{ad}}(B, A)$, il existe I_{2t_0} un intervalle ouvert (dans $[0, 1[$) autour de $2t_0$ et U_{x_0} un τ-voisinage de x_0 tel que

$$\{P_Y(x - \eta'(t, x)) : (t, x) \in I_{2t_0} \times (U_{x_0} \cap B)\}$$

est contenu dans un sous-espace de Y de dimension finie. Comme $\theta(t, x) = \eta'(2t, x)$ pour $(t, x) \in [0, \frac{1}{2}[\times B$, on a que

$$\{P_Y(x - \theta(t, x)) : (t, x) \in \tfrac{1}{2} I_{2t_0} \times (U_{x_0} \cap B)\}$$

est contenu dans un sous-espace de Y de dimension finie.

• Soit $(t_0, x_0) \in]\frac{1}{2}, 1] \times B$. Comme η vient du Lemme 4.10, il existe J_{2t_0-1} un intervalle ouvert (dans $]0, 1]$) autour de $2t_0 - 1$ et $U_{\eta'(1, x_0)}$ un τ-voisinage de $\eta'(1, x_0)$ tel que

$$\{x - \eta(t, x) : (t, x) \in J_{2t_0-1} \times (U_{\eta'(1, x_0)} \cap \varphi^{\beta})\}$$

est contenu dans un sous-espace F_1 de X de dimension finie.

L'application $\eta'(1, \cdot) : X \to X$ étant τ-continue sur B, il existe un τ-voisinage W_{x_0} de x_0 tel que $\eta'(1, \cdot)^{-1}(U_{\eta'(1, x_0)}) \cap B = W_{x_0} \cap B$. De plus, par (3) de la Définition 4.1, on peut supposer sans perte de généralité que

$$\{x - \eta'(1, x) : x \in W_{x_0} \cap B\}$$

est contenu dans un sous-espace F_2 de X de dimension finie.

Posons $V_{(t_0,x_0)} := \frac{1}{2}(J_{2t_0-1}+1) \times W_{x_0}$. Alors, donné $(t,x) \in V_{(t_0,x_0)} \cap ([0,1] \times B) = \frac{1}{2}(J_{2t_0-1}+1) \times (W_{x_0} \cap B)$, on a que

$$\begin{aligned} P_Y(x-\theta(t,x)) &= P_Y(x-\eta(2t-1,\eta'(1,x))) \\ &= P_Y(\eta'(1,x)-\eta(2t-1,\eta'(1,x))) \\ &\quad + P_Y(x-\eta'(1,x)) \in F_1+F_2, \end{aligned}$$

un sous-espace de Y de dimension finie.

- Soit $(\frac{1}{2},x_0) \in \{\frac{1}{2}\} \times B$. Comme $\eta' \in \mathcal{N}_\varphi^{\mathrm{ad}}(B,A)$, il existe I_1 un intervalle ouvert (dans $[0,1]$) autour de 1 et U_{x_0} un τ-voisinage de x_0 tel que

$$\{P_Y(x-\eta'(t,x)) : (t,x) \in I_1 \times (U_{x_0} \cap B)\}$$

est contenu dans un sous-espace de Y de dimension finie.

Comme η vient du Lemme 4.10, il existe J_0 un intervalle ouvert (dans $[0,1]$) autour de 0 et $U_{\eta'(1,x_0)}$ un τ-voisinage de $\eta'(1,x_0)$ tel que

$$\{x-\eta(t,x) : (t,x) \in J_0 \times (U_{\eta'(1,x_0)} \cap \varphi^\beta)\}$$

est contenu dans un sous-espace de X de dimension finie. Soit aussi W_{x_0} défini comme ci-haut. Alors,

$$\{P_Y(x-\theta(t,x)) : (t,x) \in (\tfrac{1}{2}I_1 \cup \tfrac{1}{2}(J_0+1)) \times (U_{x_0} \cap W_{x_0})\}$$

est contenu dans un sous-espace de Y de dimension finie.

(4)
- Si $(t,x) \in [0,\frac{1}{2}] \times X$, alors $\varphi(\theta(t,x)) = \varphi(\eta'(2t,x)) \le \varphi(x)$ car $\eta' \in \mathcal{N}_\varphi^{\mathrm{ad}}(B,A)$.
- Si $(t,x) \in [\frac{1}{2},1] \times X$, alors en vertu du Lemme 4.10 (1), (2), $\varphi(\theta(t,x)) = \varphi(\eta(2t-1,\eta'(1,x)) \le \varphi(\eta(0,\eta'(1,x)) = \varphi(\eta'(1,x)) \le \varphi(x)$.

Mais par hypothèse, $\eta'(1,B) \subset \varphi^\beta$, donc par le Lemme 4.10 (3),

$$\sup_{x\in B} \varphi(\theta(1,x)) \le \alpha = c-\epsilon,$$

contredisant la définition de c. □

Remarque 4.12. La condition $\inf_Q \varphi \leq \sup_B \varphi$ est une conséquence immédiate de ce que $B \cap Q \neq \emptyset$.

Remarque 4.13. Une condition suffisante pour que $c \in \mathbb{R}$ est que $\sup_B \varphi < +\infty$.

Corollaire 4.14. *Soit $X = Y \oplus Z$ un espace de Hilbert comme ci-haut et soit $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$. Supposons qu'il existe deux paires (B, A) et (Q, P) telles que*

(1) φ est τ-semi-continue supérieurement et $\nabla\varphi$ est faiblement séquentiellement continue ;

(2) (B, A) τ-enlace $(P, \emptyset)$ via $\mathcal{N}_\varphi^{\mathrm{ad}}(B, A)$ et $(A, \emptyset)$ τ-enlace (Q, P) via $\mathcal{N}_\varphi^{\mathrm{ad}}(A, \emptyset)$ avec A τ-fermé ;

(3) $\sup_A \varphi < \inf_P \varphi$;

(4) il existe $a < \inf_Q \varphi$ telle que avec $d := \sup_B \varphi$, si $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans φ_a^d telle que $u_n \xrightarrow{\tau} u \in \varphi_a^d$, alors $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est fortement bornée.

Soit

$$c := \inf_{\eta\in\mathcal{N}_\varphi^{\mathrm{ad}}(B,A)} \sup_{x\in B} \varphi(\eta(1, x)), \quad d := \inf_{\theta\in\mathcal{N}_\varphi^{\mathrm{ad}}(A,\emptyset)} \sup_{x\in A} \varphi(\theta(1, x)).$$

Si $c, d \in \mathbb{R}$, alors $c \neq d$ et il existe deux suites $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans X telles que

$$\varphi(x_n) \to c, \quad \varphi'(x_n) \to 0, \quad \varphi(y_n) \to d, \quad \varphi'(y_n) \to 0.$$

Démonstration. Le Théorème 4.11 garantit l'existence des suites $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Montrons que les nombres c et d sont distincts. D'abord, comme (B, A) τ-enlace $(P, \emptyset)$, le Lemme 4.9 garantit que $\eta(1, B) \cap P \neq \emptyset$ pour tout $\eta \in \mathcal{N}_\varphi^{\mathrm{ad}}(B, A)$. Donc $c \geq \inf_P \varphi$. Ensuite, comme $\varphi(\theta(1, x)) \leq \varphi(x)$ pour tout $\theta \in \mathcal{N}_\varphi^{\mathrm{ad}}(A, \emptyset)$ et tout $x \in A$, on a que $d \leq \sup_A \varphi$. D'où, en vertu de (3), $d < c$. $\square$

Dans le cas de paires τ-enlacées (B, A) et (Q, P) où A n'est pas τ-fermé, on a les résultats suivants.

Théorème 4.15. *Soit $X = Y \oplus Z$ un espace de Hilbert comme ci-haut et soit $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$. Soit F un fermé de Z et U un ouvert borné de $Y \oplus Z_1$ tels que $\overline{U}$ est τ-fermé, $U \cap F \neq \emptyset$, $\partial U \cap F = \emptyset$ et $\partial U \cap Z_1$ est un rétract de $Z \backslash F$. Supposons que*

(1) φ est τ-semi-continue supérieurement et $\nabla\varphi$ est faiblement séquentiellement continue ;

(2) il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sup_{\partial U} \varphi < b < \inf_F \varphi \leq \sup_{\overline{U}} \varphi =: d < +\infty;$$

(3) si $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans φ_b^d telle que $u_n \xrightarrow{\tau} u \in \varphi_b^d$, alors $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est fortement bornée.

Alors, il existe $c \in [\inf_F \varphi, d]$ et une suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans X telle que

$$\varphi(u_n) \to c, \quad \varphi'(u_n) \to 0.$$

Démonstration. Si la conclusion est fausse, le même argument qu'au Théorème 3.20 nous permet d'obtenir l'existence de $\epsilon > 0$ tel que $a := \inf_F \varphi - \epsilon > b$ et

$$\|\varphi'(x)\| \geq \epsilon \quad \forall x \in \varphi_a^d.$$

Les conditions (1) et (3) nous assurent que φ satisfait $(KS)_a^d$. Soit $T > 0$ et $\hat{\eta} : [0, +\infty[\times \varphi^d \to X$ la déformation obtenue au Lemme 3.18. Définissons $\eta : [0,1] \times \overline{U} \to X$ par $\eta(t,x) = \hat{\eta}(Tt, x)$. Soit $\hat{r} : Z\backslash F \to \partial U \cap Z_1$ une rétraction. Fixons $p \in U \cap F$ et définissons $r : X \to Z_1$ par

$$r(x) = \begin{cases} \hat{r}(z_1 + z_2) & \text{si } z_1 + z_2 \notin F, \\ p & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $x = y + z_1 + z_2$, avec $y \in Y$, $z_1 \in Z_1$ et $z_2 \in Z_2$. Soit $\alpha : Z \to [0,1]$ une fonction continue telle que $\alpha(x) = 0$ si et seulement si $x \in F$ et $\alpha(x) = 1$ si et seulement si $x \in \partial U \cap Z$.

Définissons $H : [-1,1] \times \overline{U} \to Y \oplus Z_1$ par

$$H(t,x) = \begin{cases} P_Y \circ \eta(t,x) + \alpha(P_Z \circ \eta(t,x))(r(\eta(t,x)) - p) & \text{si } t \in [0,1], \\ (t+1)(y + \alpha(z_1)(r(x) - p)) - t(x-p) & \text{si } t \in [-1,0]. \end{cases}$$

Remarquons que $H(-1,\cdot) = \mathrm{id}_{\overline{U}} - p$ avec $p \in U$ et

$$H(1,x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \eta(1,x) \in F. \tag{4.5}$$

En procédant comme dans la preuve de la Proposition 4.4, on montre que les conditions (1), (3) et (4) de la Définition 3.11 sont satisfaites. Pour montrer que H est σ-admissible, il reste à vérifier que $0 \notin H([-1,1] \times \partial U)$. En procédant comme dans la preuve de la Proposition 4.4, on montre que $0 \notin H([-1,0] \times \partial U)$.

Pour montrer que $0 \notin H(]0,1] \times \partial U)$, procédons par contradiction. Supposons que pour $(t,x) \in]0,1] \times \partial U$ donné, $H(t,x) = 0$. Alors c'est que $\eta(t_0, x_0) \in F$. Donc, par (2) et les énoncés (1) et (2) du Lemme 3.18, on a

$$\varphi(\eta(t,x)) \leq \varphi(x) \leq \sup_{\partial U} \varphi < a < \inf_F \varphi \leq \varphi(\eta(t,x)),$$

ce qui est une contradiction.

Il découle du Théorème 3.12 que

$$1 = \deg_{KS}(\mathrm{id}_{\overline{U}} - p, U) = \deg_{KS}(H(-1,\cdot), U) = \deg_{KS}(H(1,\cdot), U).$$

On conclut qu'il existe $u \in U$ avec $H(1,u) = 0$. C'est donc que $\eta(1,u) \in F$. Mais notons que $\eta(1,\overline{U}) \subset \varphi^a$, donc on obtient

$$a < \inf_F \varphi \leq \varphi(\eta(1,u)) \leq a,$$

ce qui est une contradiction. □

Remarque 4.16. Notons que ce théorème est une généralisation du Théorème 3.20.

Théorème 4.17. *Soit $X = Y \oplus Z$ un espace de Hilbert comme ci-haut et soit $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$. Soit $P \subset Q$ des fermés de Z et U un ouvert borné de $Y \oplus Z_1$ tels que $\overline{U}$ est τ-fermé, $U \cap P \neq \emptyset$, $\partial U \cap P = \emptyset$, $\partial U \cap Q \neq \emptyset$, $\partial U \cap Z_1$ est un rétract* *de $Z\backslash P$ et $(\partial U \cap Z_1)\backslash Q$ est un rétract de Z. Supposons qu'il existe $A, A' \subset \partial U$ avec A' τ-fermé tels que $A \cup A' = \partial U$. Supposons également que*

(1) φ est τ-semi-continue supérieurement et $\nabla\varphi$ est faiblement séquentiellement continue ;

(2) il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sup_A \varphi < b < \inf_Q \varphi \leq \sup_{\partial U} \varphi < \inf_P \varphi \leq \sup_{\overline{U}} \varphi =: d < +\infty;$$

(3) si $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans φ_b^d telle que $u_n \xrightarrow{\tau} u \in \varphi_b^d$, alors $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est fortement bornée.

Alors, il existe $c \in [\inf_Q \varphi, d]$ et une suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans X telle que

$$\varphi(u_n) \to c, \quad \varphi'(u_n) \to 0.$$

Démonstration. Si la conclusion est fausse, le même argument qu'au Théorème 3.20 nous permet d'obtenir l'existence de $\epsilon > 0$ tel que $a := \inf_F \varphi - \epsilon > b$ et

$$\|\varphi'(x)\| \geq \epsilon \quad \forall x \in \varphi_a^d.$$

Les conditions (1) et (3) nous assurent que φ satisfait $(KS)_a^d$. Soit $T > 0$ et $\hat{\eta} : [0, +\infty[\times \varphi^d \to X$ la déformation obtenue au Lemme 3.18. Définissons $\eta : [0,1] \times \overline{U} \to X$ par $\eta(t,x) = \hat{\eta}(Tt, x)$.

Soit $\hat{r} : Z\backslash P \to \partial U \cap Z_1$ et $\hat{s} : Z \to (\partial U \cap Z_1)\backslash Q$ des rétractions telles que $\hat{r}|_{Z\backslash Q} = \hat{s}|_{Z\backslash Q}$, et soit $p \in U \cap P$. Définissons $r, s : X \to Z_1$ par

$$s(x) := \hat{s}(z) \quad \text{et} \quad r(x) := \begin{cases} \hat{r}(z) & \text{si } z \notin P, \\ p & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $x = y + z$. Remarquons que $s(x) = r(x)$ dès que $z \notin Q$.

Puisque A', Q et P sont τ-fermés et que $A' \cap P = \emptyset$, il existe $\alpha, \beta : X \to [0,1]$ des fonctions τ-continues telles que $\alpha(x) = 0$ si et seulement si $x \in P$, $\alpha(x) = 1$ si et seulement si $x \in A'$ et $\beta(x) = 0$ si et seulement si $x \in Q$. Définissons

$H : [-1,1] \times \overline{U} \to Y \oplus Z_1$ par

$$H(t,x) = \begin{cases} P_Y \circ \eta(t,x) + (1-t)\alpha(P_Z \circ \eta(t,x))(r(\eta(t,x)) - p) & \\ \quad +t(1-\alpha(x)(1-\beta(\eta(t,x))))(s(\eta(t,x)) - p) & \text{si } t \in [0,1], \\ (1+t)(y + \alpha(z_1)(r(x) - p)) - t(x-p) & \text{si } t \in [-1,0]. \end{cases}$$

En procédant comme dans la preuve de la Proposition 4.7, on montre que les conditions (1), (3) et (4) de la Définition 3.11 sont satisfaites. Pour montrer que H est σ-admissible, il reste à vérifier que $0 \notin H([-1,1] \times \partial U)$. En procédant comme dans la preuve de la Proposition 4.7, on montre que $0 \notin H([-1,0] \times \partial U)$.

Pour montrer que $0 \notin H(]0,1] \times \partial U)$, procédons par contradiction. Supposons que pour $(t,x) \in]0,1] \times \partial U$ donné, $H(t,x) = 0$ et étudions les quatres possibilitées suivantes :

(a) $\underline{\eta(t,x) \notin Q}$: Dans ce cas, $r(\eta(t,x)) = s(\eta(t,x))$ donc l'équation $H(t,x) = 0$ devient

$$((1-t)\alpha(\eta(t,x)) + t(1-\alpha(x)(1-\beta(\eta(t,x)))))(r(\eta(t,x)) - p) = 0.$$

Mais ceci est impossible car $r(\eta(t,x)) \neq p$, $\alpha(\eta(t,x)) \neq 0$ et $\beta(\eta(t,x)) \neq 0$.

(b) $\underline{x \in A, \eta(t,x) \in Q}$: Par (2) et l'énoncé (2) du Lemme 3.18, on obtiens

$$\varphi(x) \leq \sup_A \varphi < a < \inf_Q \varphi \leq \varphi(\eta(t,x)) \leq \varphi(x),$$

ce qui est un contradiction.

(c) $\underline{t \in]0,1[, x \in A', \eta(t,x) \in Q}$: Dans ce cas $\alpha(x) = 1$ et $\beta(\eta(t,x)) = 0$ donc l'équation $H(t,x) = 0$ s'écrit

$$\alpha(\eta(t,x))(r(\eta(t,x)) - p) = 0,$$

ce qui implique $\eta(t,x) \in P$. La condition (2) et l'énoncé (2) du Lemme 3.18 implique la contradiction suivante :

$$\sup_{\partial U} \varphi < \inf_P \varphi \leq \varphi(\eta(t,x)) \leq \varphi(x) \leq \sup_{\partial U} \varphi.$$

(d) $\underline{t = 1, x \in A', \eta(t,x) \in Q}$: Par (2) et l'énoncé (3) du Lemme 3.18, on obtiens

$$a < \inf_P \leq \varphi(\eta(1,x)) \leq a,$$

ce qui est absurde.

La fonction H est donc une homotopie σ-admissible.

Par la théorie du degré de Kryszewski et Szulkin, il suit que

$$1 = \deg_{KS}(\mathrm{id}_{\overline{U}} - p, U) = \deg_{KS}(H(-1, \cdot), U) = \deg_{KS}(H(1, \cdot), U),$$

d'où on conclut qu'il existe $u \in U$ tel que $H(1, u) = 0$. Cette dernière équation implique que

$$1 - \alpha(u)(1 - \beta(\eta(1, u))) = 0.$$

Ceci force $\alpha(u) = 1$, mais c'est impossible car alors $u \in \alpha^{-1}(1) \cap U = A' \cap U = \emptyset$. $\square$

Exemple 4.18. Soit $X = Y \oplus Z$ un espace de Hilbert comme ci-haut et soit V, Q, A, A' les ensembles définis dans l'Exemple 4.8. Soit aussi $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$ une fonctionnelle τ-semi-continue supérieurement telle que $\nabla\varphi$ est faiblement séquentiellement continue. Appliquant respectivement les Théorèmes 4.15 et 4.17, on obtient les conclusions suivantes.

(1) S'il existe $b_1 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sup_{\partial V} \varphi < b_1 < \inf_{\partial Q} \varphi \leq \sup_{\overline{V}} \varphi := d < +\infty$$

et si toute suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\varphi_{b_1}^d$ telle que $u_n \xrightarrow{\tau} u \in \varphi_{b_1}^d$ est fortement bornée, alors il existe $c_1 \in [\inf_{\partial Q}, d]$ et une suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\varphi(u_n) \to c_1$ et $\varphi'(u_n) \to 0$.

(2) S'il existe $b_2 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sup_{A} \varphi < b_2 < \inf_{Q} \varphi \leq \sup_{\partial V} < \sup_{\partial Q} \leq \sup_{\overline{V}} \varphi := d < +\infty$$

et si toute suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\varphi_{b_2}^d$ telle que $u_n \xrightarrow{\tau} u \in \varphi_{b_2}^d$ est fortement bornée, alors il existe $c_2 \in [\inf_{Q}, d]$ et une suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\varphi(u_n) \to c_2$ et $\varphi'(u_n) \to 0$.

CONCLUSION

Le but premier de ce travail était de dégager une notion d'enlacement et de formuler à l'aide de celle-ci une généralisation du Théorème 3.20 dû a Kryszewski et Szulkin. En général, ce but a été atteint mais il reste quelques questions. Tout d'abord, il est naturel de se demander si la Proposition 2.9 peut être adaptée au τ-enlacement. Pour cela, il faudrait voir si une propriété analogue à la Proposition 1.15 sur l'existence d'un continuum de zéros peut être établie pour le degré de Kryszewski et Szulkin. Une autre question que je n'ai pas eu le temps d'explorer concerne les modifications à apporter au Lemme 3.18 qui permettraient d'avoir $c \in [\inf_Q \varphi, \sup_{\partial U} \varphi]$ au Théorème 4.17. Ainsi, les Théorèmes 4.15 et 4.17 pourraient être combinés pour obtenir un résultat de multiplicité. Finalement, il sera intéressant de déterminer la valeur des résultats de ce mémoire en cherchant des problèmes variationnels auxquels nos théorèmes généraux peuvent être appliqués pour garantir l'existence d'un ou plusieurs points critiques.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Ambrosetti et P.H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications*, Journal of Functional Analysis **14** (1973), pp. 349-381.

[2] V. Benci et P.H. Rabinowitz, *Critial Point Theorems for Indefinite Functionals*, Inventiones Mathematicae **52** (1979), pp. 241-273.

[3] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle, Théorie et applications*, Dunod, Paris, 1999.

[4] J. Dugundji, *Topology*, Wm. C. Brown Publishers, Dubuque, 1989.

[5] J. Dugundji, A. Granas, *Fixed Point Theory*, Springer-Verlag, New York, 2003.

[6] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, Volume 19, American Mathematical Society, Providence, 1998.

[7] M. Frigon, *On a new notion of linking and application to elliptic problems at resonance*, Journal of Differential Equations **153** (1999), pp. 96-120.

[8] W. Kryszewski et A. Szulkin, *Generalized linking theorem with an application to a semilinear Schrödinger equation*, Advances in Differential Equations **3** (1998), pp. 441-472.

[9] P.H. Rabinowitz, *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*, Regional Conference Series in Mathematics, Number 65, American Mathematical Society, Providence, 1986.

[10] M. Struwe, *Variational Methods : Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems*, Fourth Edition, Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[11] M. Willem, *Minimax Theorems*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, Birkhäuser, Boston, 1996.

[12] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications, Part I*, Springer-Verlag, New York, 1985.