

Université de Montréal

LA MÉTHODE IIM POUR UNE MEMBRANE
IMMERGÉE DANS UN FLUIDE
INCOMPRESSIBLE

par

Jérôme Morin-Drouin

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en mathématiques

Orientation mathématiques appliquées

mars 2010

© Jérôme Morin-Drouin, 2010

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

**LA MÉTHODE IIM POUR UNE MEMBRANE
IMMERGÉE DANS UN FLUIDE
INCOMPRESSIBLE**

présenté par

Jérôme Morin-Drouin

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Michel Delfour

(président-rapporteur)

Robert G. Owens

(directeur de recherche)

Anne Bourlioux

(membre du jury)

Mémoire accepté le:

6 mars 2010

SOMMAIRE

La méthode IIM (Immersed Interface Method) permet d'étendre certaines méthodes numériques à des problèmes présentant des discontinuités. Elle est utilisée ici pour étudier un fluide incompressible régi par les équations de Navier-Stokes, dans lequel est immergée une membrane exerçant une force singulière. Nous utilisons une méthode de projection dans une grille de différences finies de type MAC. Une dérivation très complète des conditions de saut dans le cas où la viscosité est continue est présentée en annexe. Deux exemples numériques sont présentés : l'un sans membrane, et l'un où la membrane est immobile. Le cas général d'une membrane mobile est aussi étudié en profondeur.

Mots clés : méthode IIM, méthode de projection, fluide incompressible, équations de Navier-Stokes, force singulière, grille MAC

SUMMARY

The Immersed Interface Method allows us to extend the scope of some numerical methods to discontinuous problems. Here we use it in the case of an incompressible fluid governed by the Navier-Stokes equations, in which a membrane is immersed, inducing a singular force. We use a projection method and staggered (MAC-type) finite difference approximations. A very complete derivation for the jump conditions is presented in the Appendix, for the case where the viscosity is continuous. Two numerical examples are shown : one without a membrane, and the other where the membrane is motionless. The general case of a moving membrane is also thoroughly studied.

Key words : immersed interface method, projection method, incompressible fluid, Navier-Stokes equations, singular force, MAC grid

TABLE DES MATIÈRES

Sommaire	iii
Summary	iv
Liste des figures	viii
Liste des tableaux	xi
Introduction	1
Chapitre 1. Méthodes de projection pour les équations de Navier-Stokes	5
1.1. Présentation de la méthode.....	6
1.1.1. Équation du mouvement.....	6
1.1.2. Choix du prédicteur \mathbf{u}^*	7
1.1.3. Estimation de la pression $p^{n+\frac{1}{2}}$	7
1.2. Différences finies et grille de calcul.....	8
1.3. Conditions aux frontières.....	11
1.4. Algorithme.....	15
1.5. Résultats numériques.....	17
Chapitre 2. La méthode IIM pour une membrane fixe	20
2.1. Représentation de la membrane.....	21
2.2. Force singulière et conditions de saut.....	23
2.3. Généralisation du théorème de Taylor.....	25

2.4.	Théorème de Taylor généralisé en plusieurs dimensions	27
2.5.	Algorithme de projection modifié	30
2.6.	Interpolation d'ordre 2	32
2.7.	Résultats numériques	32
Chapitre 3. La méthode IIM pour une membrane en mouvement		36
3.1.	Déplacement de la membrane	36
3.2.	Approximation de U_k^n	37
3.3.	Version implicite de la méthode	39
3.4.	Résultats préliminaires	40
3.5.	Le moment d'intersection	43
3.6.	Correction des opérateurs temporels	46
3.6.1.	Correction de DT	48
3.6.2.	Correction de l'estimateur de $\Delta\mu u^{n+\frac{1}{2}}$	48
3.6.3.	Correction de l'extrapolation d'Adams-Bashforth	48
3.6.4.	Correction de l'estimateur de pression	49
3.7.	Algorithme corrigé dans le cas d'une membrane en mouvement	50
Conclusion		53
3.8.	Conclusion	53
Bibliographie		56
Annexe A. Les conditions de saut		A-i
A.1.	Conditions de saut pour la pression	A-ii
A.1.1.	Système de coordonnées local	A-v
A.2.	Conditions de saut pour la vitesse	A-vi

Condition de saut dans le temps.....	A-ix
A.3. Conditions de saut pour l'estimateur \mathbf{u}^*	A-ix
A.4. Conditions de saut pour ϕ^{n+1}	A-xii

LISTE DES FIGURES

0.1	À gauche, représentation en trois dimensions d'un globule rouge. À droite, le problème que nous considérons : une membrane élastique dans une boîte fermée en deux dimensions.....	1
1.1	Grille de calcul sur le domaine carré Ω dans le cas d'un schéma colocatif.	8
1.2	Une cellule dans la grille MAC. Les points de p , u et v servent à représenter les valeurs de p , u et v , respectivement.....	11
1.3	Dans une grille MAC, deux opérateurs différents peuvent être utilisés pour calculer une même valeur.....	11
1.4	Le domaine Ω est divisé en cellules MAC dont les centres correspondent aux points (i, j) entiers. Les frontières du domaine se trouvent alors sur des points non-entiers.....	13
1.5	Schéma centré (à gauche) et décentré (à droite) pour l'opérateur $\partial/\partial x$ près de la frontière gauche du domaine.....	14
2.1	On remplit une membrane élastique de fluide. On fera la distinction entre son état actuel $\mathbf{X}(s)$ (en gris) et son état de repos (en noir) sur lequel est défini le paramètre s	20
2.2	Une membrane Γ , plongée dans le domaine Ω	22
2.3	Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux. Les points de discontinuité x_i séparent le segment $[x, x + h]$ en $M + 1$ intervalles dans lesquels la fonction est continue.....	25

- 2.4 L'interface croise le segment de droite entre \mathbf{x} et $\mathbf{x} + \mathbf{h}$ en un ensemble fini de points s_1, s_2, \dots, s_M , où $\mathbf{X}(s_1)$ est le point le plus près de \mathbf{x} , suivi de $\mathbf{X}(s_2)$ et ainsi de suite. 28
- 2.5 L'opérateur Γ_u^v est composé de l'interpolation Γ_u^p , suivie de l'interpolation Γ_p^v , auxquelles on a ajouté les termes de correction appropriés. 33
- 2.6 Solutions pour la pression obtenues par notre méthode pour le problème de l'ellipse, avec $N = 24$ (à gauche), et $N = 12$ (à droite). Pour une grille aussi grossière que 12×12 , la méthode réussit à tenir compte très précisément de la discontinuité dans la solution obtenue. 35
- 3.1 On cherche la valeur de u sur les marqueurs lagrangiens \mathbf{X}_k^n à partir des valeurs de la grille \mathbf{u} . On trouve d'abord les valeurs sur les intersections de Γ^n et \mathbf{u} , puis on utilise ces valeurs pour construire la fonction $u(\mathbf{X}(s, n\Delta t), n\Delta t)$ par splines cubiques. 37
- 3.2 La membrane traverse certains points (marqués en noir) de la grille de calcul. 41
- 3.3 Aux points de \mathbf{p} traversés par la membrane, la pression est nettement sous-évaluée. Les points gris représentent la pression à l'extérieur de la membrane, et les points noirs la pression à l'intérieur. 42
- 3.4 Divergence de \mathbf{u}^* . Comme le fluide est incompressible et que $\mathbf{u}^* \approx \mathbf{u}^{n+1}$, $\nabla \cdot \mathbf{u}^*$ devrait être très proche de zéro. Ça n'est pas le cas autour des points qui ont été traversés par la membrane. 43
- 3.5 Le point (i, j) , traversé au temps T . La membrane peut en effet traverser un point de la grille. Lorsque cela se produit, pour appliquer les corrections nécessaires, il faut trouver le moment T où cet événement s'est produit. 44
- 3.6 Selon les distances entre Γ^n , Γ^{n+1} et le point traversé, on cherche à estimer correctement le moment d'intersection. 45

- 3.7 On considère un développement de Taylor dans le temps, autour du point $\mathbf{x} = (x_1, x_2, (n + 1/2)\Delta t)$, pour corriger les opérateurs temporels. 46
- A.1 Ω_ε est une bande de largeur 2ε autour de la membrane Γ A-i
- A.2 On définit un système de coordonnées local (η, ξ) dans lequel le point $\mathbf{X}(s)$ est l'origine, et dans lequel les vecteurs $\mathbf{n}(s)$ et $\boldsymbol{\tau}(s)$ coïncident avec les axes. A-v
- A.3 Une fonction qui existe à l'étape n doit être légèrement modifiée lorsqu'on veut en calculer le saut à travers la membrane $\Gamma^{n+\frac{1}{2}}$ A-xi

LISTE DES TABLEAUX

1.1	Résultats numériques obtenus pour la méthode de projection PM2....	18
1.2	Résultats numériques obtenus par Li et Lai tels que présentés dans [11], utilisant une grille de calcul normale plutôt qu'une grille MAC..	18
2.1	Conditions de saut pour \mathbf{u} et p , lorsque la viscosité μ est continue. La fonction $\kappa(s)$ représente la courbure de l'interface au point s	24
2.2	Résultats obtenus par Li et Lai [11] pour le problème de l'ellipse.....	34
2.3	Résultats obtenus avec notre méthode, pour le problème de l'ellipse ..	34

INTRODUCTION

En biologie, la mécanique des fluides regorge de problèmes dans lesquels interviennent différentes structures immergées comme des membranes élastiques. Ces problèmes, qui vont de l'étude du flux sanguin dans le coeur à la modélisation de la nage de certains organismes vivants, ont rendu nécessaire le développement de nouvelles techniques dont font partie la méthode IB (*immersed boundary*, introduite par Peskin et McQueen [12]), et la méthode IIM (*immersed interface method*, introduite par Leveque et Li [9]). C'est sur cette dernière méthode que porte ce mémoire.

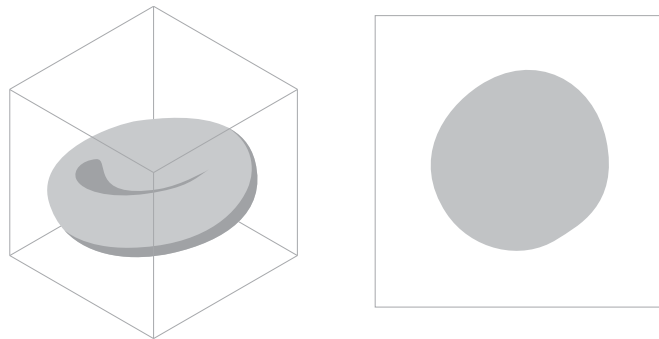


FIG. 0.1. À gauche, représentation en trois dimensions d'un globule rouge. À droite, le problème que nous considérons : une membrane élastique dans une boîte fermée en deux dimensions.

Par ce projet, nous cherchons à mieux comprendre le comportement du sang, à l'échelle d'un globule rouge. Notre modèle est une grande simplification de la réalité : nous considérerons une boîte carrée fermée en deux dimensions remplie d'un fluide incompressible (le plasma) dans lequel est plongée une membrane, elle aussi remplie de fluide incompressible (un globule rouge). Comme notre but est d'explorer de nouvelles méthodes plutôt que d'obtenir des résultats directement

utilisables, nous ne cherchons pas à modéliser parfaitement ces différents éléments. La membrane sera simplement une bande élastique sans épaisseur en forme d'ellipse, et les fluides considérés auront la même viscosité μ . La pression $p(\mathbf{x}, t)$ et la vitesse $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ de ces fluides sont décrites par les équations de Navier-Stokes ¹ :

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \nabla p = \mu\Delta\mathbf{u} + \mathbf{G} + \mathbf{F}, \quad (\text{équations du mouvement}) \quad (0.0.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (\text{incompressibilité du fluide}) \quad (0.0.2)$$

où \mathbf{G} est une force extérieure continue (par exemple : la gravité), et \mathbf{F} est la force engendrée par l'élasticité de la membrane. Cette force, par conséquent, est nulle partout sauf sur l'interface définie par la membrane : c'est une force singulière. Par conséquent, la solution au problème n'est pas nécessairement lisse ou même continue.

Imaginons, pour illustrer, que l'on place un ballon élastique rempli d'eau dans un bassin lui-aussi rempli d'eau, et que l'on attende assez longtemps pour que tout mouvement cesse. La vitesse du fluide est alors nulle partout, mais le ballon, par son élasticité, cherche à se contracter (force \mathbf{F}). La pression sera donc nettement plus élevée à l'intérieur qu'à l'extérieur du ballon : il y a une surface de discontinuité dans la solution.

Ainsi, les méthodes numériques développées pour des fonctions dérivables, comme la méthode des différences finies, ne sont plus applicables. Pour contourner ce problème, Peskin [12] a proposé d'approximer \mathbf{F} par une fonction continue dans ce qu'il a appelé la méthode IB. Cette méthode, aujourd'hui très répandue, a l'avantage d'être assez simple à mettre en œuvre. Cependant, il est impossible, avec celle-ci, d'obtenir des résultats reflétant de façon précise les discontinuités de la solution réelle. De plus, pour des problèmes de membrane fermée, la méthode IB fournit des solutions dans lesquelles le volume du fluide enfermé diminue avec le temps, ce qui est en contradiction avec le fait que celui-ci est incompressible.

Ces phénomènes sont abondamment abordés dans la littérature, et ont été étudiés par Marc Conti dans son projet de Maîtrise [4], dans lequel il commence aussi à explorer les possibilités d'utiliser la méthode IIM. Le principe de cette

¹ $D\mathbf{u}/Dt = \partial\mathbf{u}/\partial t + \mathbf{u}\nabla \cdot \mathbf{u}$ est la dérivée matérielle du fluide.

méthode est le suivant : plutôt que d'éviter ou de contourner les discontinuités du problème, nous les utilisons pour corriger le schéma numérique. En déduisant des équations de Navier-Stokes les conditions de sauts, c'est-à-dire une description précise des différentes discontinuités dans la solution du problème, nous sommes en mesure de généraliser le théorème de Taylor à des fonctions lisses par morceaux (plutôt que simplement lisses), pour ensuite corriger les schémas aux différences finies, et les utiliser pour résoudre le problème. C'est ce qui est présenté dans ce mémoire.

Ce travail se veut donc la suite de celui qui a été entrepris dans [4], où une des idées était d'utiliser les équations du schéma numérique plutôt que les équations de Navier-Stokes pour déduire des conditions de saut appropriées. Ceci simplifierait grandement les calculs et les rendrait plus facilement généralisables à des problèmes plus complexes. Les résultats obtenus à ce sujet, cependant, ne furent pas tels qu'attendu. Notre objectif était alors de continuer ce raisonnement en appliquant certaines corrections. Entre autres, nous allions l'améliorer par l'utilisation d'une grille plus élaborée pour faire les calculs.

Deux problèmes plus précis ont servi de motivation à ce projet. Le premier est celui d'une membrane fixe dans un fluide stationnaire, initialement sans mouvement ($\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}$). En imposant une force constante en direction purement normale sur une interface elliptique, on devrait obtenir une solution constante par morceaux pour la pression, comme dans l'exemple du ballon. Ce problème stationnaire nous permet de valider la méthode et d'en mesurer l'efficacité.

Le second problème est celui d'une membrane élastique qui, au repos, a la forme d'un cercle. Imaginons qu'on remplisse celle-ci de fluide, et qu'on l'étire en forme d'ellipse. En la laissant libre de se déplacer et s'étirer, on devrait la voir se déformer jusqu'à reprendre la forme d'un cercle. Comme le volume contenu à l'intérieur de la membrane doit rester le même (par incompressibilité du fluide), celui-ci peut servir mesure de comparaison avec différentes autres méthodes.

En cours de route, cependant, nous avons réalisé deux éléments importants qui expliquaient l'échec de la méthode pour plusieurs problèmes qui nous intéressent. Le premier est que certaines des hypothèses qui nous auraient permis

de déduire les conditions de saut à l'aide de notre manière alternative n'avaient pas la rigueur estimée au départ. Avant d'aborder le problème, il fallait donc comprendre en profondeur la méthode numérique que nous souhaitions modifier. Cette analyse est présentée au premier chapitre de ce mémoire. Le chapitre 2 est consacré à la présentation de la méthode IIM, dans le cas simple d'une membrane qui ne peut se déplacer. Le deuxième élément est que nous avons sous-estimé, voire même ignoré, l'impact qu'ont les discontinuités créées par le déplacement de la membrane : les discontinuités dans l'axe du temps. Cela implique des obstacles considérables dans la mise en œuvre de la méthode, qui font l'objet du chapitre 3 de ce mémoire. Comme cette méthode s'appuie sur une connaissance de certaines conditions de saut, leur calcul détaillé, partie importante de ce projet, est présentée en annexe.

Chapitre 1

MÉTHODES DE PROJECTION POUR LES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES

Le problème qui nous intéresse dans ce chapitre est l'étude d'un fluide incompressible, de viscosité μ , compris dans le domaine en deux dimensions $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$.

La grande difficulté dans la résolution numérique de ces problèmes réside dans le couplage des deux inconnus \mathbf{u} et p dans les équations de Navier-Stokes

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \nabla p = \mu\Delta\mathbf{u} + \mathbf{G}, \quad (1.0.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (1.0.4)$$

C'est dans le but de séparer ces équations, de manière à obtenir indépendamment les solutions de \mathbf{u} et de p , qu'ont été élaborées les différentes *méthodes de projection*. Avec l'aide de ces méthodes à pas fractionnaires, créées il y a plus d'une trentaine d'années par Chorin [3] et Témam [14], nous transformons le problème en une suite d'équations non-couplées à résoudre.

On calculera p à l'étape fractionnaire $n + 1/2$, puis on calculera \mathbf{u} à l'étape $n + 1$. Pour y arriver, nous aurons à établir un prédicteur \mathbf{u}^* à partir des équations du mouvement, qu'on corrigera ensuite de manière à satisfaire la contrainte d'incompressibilité.

Le nom *méthode de projection* vient de l'utilisation judicieuse qu'on y fait de la décomposition de Helmholtz : dans un domaine Ω borné, Lipschitz et simplement connexe comme celui qui nous intéresse ici, le champ de vecteurs \mathbf{u}^* peut être décomposé en la somme d'un champ irrotationnel \mathbf{u}_i^* et d'un champ solénoïdal \mathbf{u}_s^* .

Ce dernier est alors la *projection* orthogonale de \mathbf{u}^* sur l'ensemble des champs incompressibles. Autrement dit, pour obtenir le champ incompressible \mathbf{u}^{n+1} le plus proche de l'approximation \mathbf{u}^* , il suffit de poser $\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}_s^*$. En exprimant \mathbf{u}_i^* comme le gradient d'un potentiel $\Delta t \phi^{n+1}$, où Δt est le temps écoulé entre les étapes n et $n + 1$, cette décomposition s'exprime par l'équation

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^{n+1} + \Delta t \nabla \phi^{n+1}. \quad (1.0.5)$$

1.1. PRÉSENTATION DE LA MÉTHODE

Les différentes méthodes de projection se distinguent principalement par la manière avec laquelle on y évalue la pression et les conditions aux frontières pour le potentiel ϕ^{n+1} . En se référant aux noms proposés par Brown et al. dans [2], la méthode que nous avons choisi d'utiliser est PM2 (*projection method 2*). Par un choix judicieux d'estimation de la pression et de conditions aux frontières, selon [1], cette méthode devrait être d'ordre 2 pour la vitesse, et 3/2 pour la pression.

1.1.1. Équation du mouvement

Considérons l'équation du mouvement (1.0.3) à l'étape $n + 1/2$:

$$\frac{\partial \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}}{\partial t} + \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} + \nabla p^{n+\frac{1}{2}} = \mu \Delta \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{G}^{n+\frac{1}{2}}, \quad (1.1.1)$$

et voyons comment faire une approximation adéquate des différents termes y figurant.

On utilisera le schéma de Crank-Nicholson pour approximer $\partial \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} / \partial t$ et $\Delta \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}$, c'est-à-dire :

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = \frac{\partial \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}}{\partial t} + O(\Delta t^2).$$

et

$$\frac{(\Delta \mathbf{u})^{n+1} + (\Delta \mathbf{u})^n}{2} = \Delta \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} + O(\Delta t^2).$$

Finalement, $\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}$ sera approximé par une extrapolation de type Adams-Bashforth d'ordre 2 :

$$\frac{3}{2} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})^n - \frac{1}{2} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})^{n-1} = (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})^{n+\frac{1}{2}} + O(\Delta t^2).$$

Avec une précision d'ordre deux, on peut alors réécrire l'équation (1.1.1) ainsi :

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})^{n+\frac{1}{2}} + \nabla p^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\mu}{2} (\Delta \mathbf{u}^{n+1} + \Delta \mathbf{u}^n) + \mathbf{G}^{n+\frac{1}{2}}. \quad (1.1.2)$$

1.1.2. Choix du prédicteur \mathbf{u}^*

La décomposition de Helmholtz (1.0.5) nous permet de lier le champ incompressible \mathbf{u}^{n+1} à un éventuel estimateur \mathbf{u}^* par l'équation

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* - \Delta t \nabla \phi^{n+1},$$

où ϕ^{n+1} doit être choisi de manière à satisfaire $\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0$. En résumé, on a

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = \nabla \cdot \mathbf{u}^* - \Delta t \Delta \phi^{n+1} = 0,$$

ce qui implique :

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^* = \Delta t \Delta \phi^{n+1}.$$

Remplaçant \mathbf{u}^{n+1} par $(\mathbf{u}^* - \Delta t \nabla \phi^{n+1})$ dans (1.1.2), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{u}^* - \Delta t \nabla \phi^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})^{n+\frac{1}{2}} + \nabla p^{n+\frac{1}{2}} \\ = \frac{\mu}{2} (\Delta (\mathbf{u}^* - \Delta t \nabla \phi^{n+1}) + \Delta \mathbf{u}^n) + \mathbf{G}^{n+\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

qu'on peut réorganiser ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})^{n+\frac{1}{2}} + \nabla \left(p^{n+\frac{1}{2}} - \phi^{n+1} + \frac{\mu \Delta t}{2} \Delta \phi^{n+1} \right) \\ = \frac{\mu}{2} (\Delta \mathbf{u}^* + \Delta \mathbf{u}^n) + \mathbf{G}^{n+\frac{1}{2}}. \quad (1.1.3) \end{aligned}$$

1.1.3. Estimation de la pression $p^{n+\frac{1}{2}}$

Pour éviter d'avoir à résoudre \mathbf{u}^* , $p^{n+\frac{1}{2}}$ et ϕ^{n+1} simultanément, on fait intervenir $q^{n+\frac{1}{2}}$, estimateur de la pression $p^{n+\frac{1}{2}}$. La méthode PM2 propose¹

$$p^{n+\frac{1}{2}} = q^{n+\frac{1}{2}} + \phi^{n+1} - \frac{\mu \Delta t}{2} \Delta \phi^{n+1} \quad (1.1.4)$$

¹Le lecteur intéressé à comprendre plus en profondeur la justification de ce choix est invité à consulter [2].

comme relation entre ces valeurs, ce qui permet d'éliminer la présence de ϕ^{n+1} dans l'équation (1.1.3). En développant le terme $p^{n+\frac{1}{2}}$, on obtient en effet

$$\frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})^{n+\frac{1}{2}} + \nabla q^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\mu}{2} (\Delta \mathbf{u}^* + \Delta \mathbf{u}^n) + \mathbf{G}^{n+\frac{1}{2}} \quad (1.1.5)$$

comme équation à résoudre pour trouver l'estimateur \mathbf{u}^* .

Une approximation d'ordre 1 sera faite pour la pression en posant

$$q^{n+\frac{1}{2}} = p^{n-\frac{1}{2}}.$$

1.2. DIFFÉRENCES FINIES ET GRILLE DE CALCUL

La méthode des différences finies a été utilisée dans ce projet. L'avantage justifiant ce choix, par rapport à des alternatives comme celle des éléments finis, est avant tout la simplicité. L'idée de base est la suivante : nous divisons le domaine Ω en cellules carrées équidistantes comme l'illustre la figure 1.1. Le point (i, j) de la grille correspond au point (ih, jh) du domaine, où h est la largeur d'une des cellules.

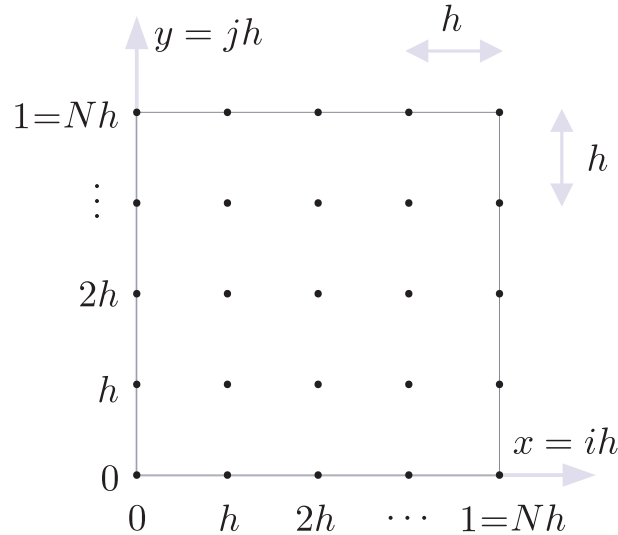


FIG. 1.1. Grille de calcul sur le domaine carré Ω dans le cas d'un schéma colocalif.

Pour une fonction $f \in C^2(\mathbb{R})$, par un développement de Taylor autour de x , on aura :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + O(h^3)$$

et

$$f(x - h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + O(h^3).$$

On en tire les opérateurs de différences finies :

$$f'(x) = \frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h} + O(h^2),$$

$$f''(x) = \frac{f(x - h) - 2f(x) + f(x + h)}{h^2} + O(h).$$

Les résultats obtenus dans [4] et [11], cependant, suggèrent que pour les problèmes qui nous intéressent ici, les résultats pourraient être améliorés par l'utilisation d'une grille de type MAC (Marker and cell), telle qu'introduite par Harlow et Welch dans [6]. En voici la motivation : les méthodes de projection qu'on souhaite utiliser nécessitent la résolution du système d'équation suivant pour trouver ϕ^{n+1} :

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0, \quad (1.2.1)$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* - \Delta t \nabla \phi^{n+1}. \quad (1.2.2)$$

La méthode la plus directe d'effectuer ces calculs serait d'utiliser un schéma colocatif (figure 1.1), c'est-à-dire qu'en chaque point (i, j) de la grille, toutes les valeurs $(p, \mathbf{u}, \mathbf{u}^*$ et $\phi^{n+1})$ sont calculées. Dans ce cas, on résoudrait (1.2.2), pour les deux composantes u^{n+1} et v^{n+1} de \mathbf{u}^{n+1} en posant :

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^* - \Delta t \frac{\phi_{i+1,j}^{n+1} - \phi_{i-1,j}^{n+1}}{2h} \quad (1.2.3)$$

et

$$v_{i,j}^{n+1} = v_{i,j}^* - \Delta t \frac{\phi_{i,j+1}^{n+1} - \phi_{i,j-1}^{n+1}}{2h}, \quad (1.2.4)$$

où $u_{i,j}^n$ est une notation alternative pour désigner $u(ih, jh, n\Delta t)$.

La discrétisation de (1.2.1), avec cette méthode, serait alors

$$\frac{u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n+1} + v_{i,j+1}^{n+1} - v_{i,j-1}^{n+1}}{2h} = 0. \quad (1.2.5)$$

En remplaçant les différentes valeurs de \mathbf{u}^{n+1} , dans (1.2.5), par celles de (1.2.3) et (1.2.4), on constate que le problème de Poisson suivant est à résoudre :

$$\frac{u_{i+1,j}^* - u_{i-1,j}^* + v_{i,j+1}^* - v_{i,j-1}^*}{2h} = \Delta t \frac{\phi_{i+2,j}^{n+1} + \phi_{i-2,j}^{n+1} + \phi_{i,j+2}^{n+1} + \phi_{i,j-2}^{n+1} - 4\phi_{i,j}^{n+1}}{(2h)^2}. \quad (1.2.6)$$

Le problème avec ce schéma vient de la forme particulière que prend l'opérateur discrétisé du membre de droite. Le point $(i + 2, j)$, par exemple, est utilisé lors du calcul de $\Delta\phi_{i,j}^{n+1}$, mais pas $(i + 1, j)$. Cela entraîne que quatre ensembles de points indépendants sont présents dans ce schéma. Inverser la matrice du laplacien discrétisé est alors équivalent à résoudre 4 problèmes indépendants. C'est ce qui risque de causer une oscillation entre les valeurs de ϕ^{n+1} obtenues dans chacun de ces quatre ensembles de points.

L'utilisation d'une grille MAC est une solution à ce problème. Pour saisir ce concept, considérons l'équation (1.2.6) dans une grille deux fois plus fine :

$$\begin{aligned} \frac{u_{i+\frac{1}{2},j}^* - u_{i-\frac{1}{2},j}^* + v_{i,j+\frac{1}{2}}^* - v_{i,j-\frac{1}{2}}^*}{h} \\ = \Delta t \frac{\phi_{i+1,j}^{n+1} + \phi_{i-1,j}^{n+1} + \phi_{i,j+1}^{n+1} + \phi_{i,j-1}^{n+1} - 4\phi_{i,j}^{n+1}}{h^2}. \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

En résolvant cette équation uniquement pour les valeurs entières i et j , le problème des ensembles de points indépendants disparaît. Par contre, on devra connaître les valeurs de u^* et u^{n+1} dans les points $(i + \frac{1}{2}, j)$ et les valeurs de v^* et v^{n+1} dans les points de la forme $(i, j + \frac{1}{2})$. Les valeurs de p et ϕ^{n+1} , elles, seront calculées dans les points de la forme (i, j) .

Dans ce cas, les équations (1.2.3) et (1.2.4) deviennent

$$u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} = u_{i+\frac{1}{2},j}^* - \Delta t \frac{\phi_{i+1,j}^{n+1} - \phi_{i,j}^{n+1}}{h} \quad (1.2.8)$$

et

$$v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} = v_{i,j+\frac{1}{2}}^* - \Delta t \frac{\phi_{i,j+1}^{n+1} - \phi_{i,j}^{n+1}}{h}, \quad (1.2.9)$$

Le schéma *MAC*, ou *non colocatif*, qu'on vient de décrire, est illustré en figure 1.2. Les trois ensembles de points où sont calculées les valeurs de u , v et p seront notés **u**, **v** et **p**, respectivement.

Comprendre dans lequel de ces ensembles sont calculées certaines valeurs dans l'algorithme risque de devenir difficile. Pour clarifier, nous utiliserons la notation $\text{DX}_{\mathbf{p}}^{\mathbf{u}}$, par exemple, pour désigner un opérateur discret DX prenant ses valeurs dans la grille **p** et portant ses résultats à la grille **u**. On a donc :

$$\text{DX}_{\mathbf{p}}^{\mathbf{u}} : \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{u}.$$

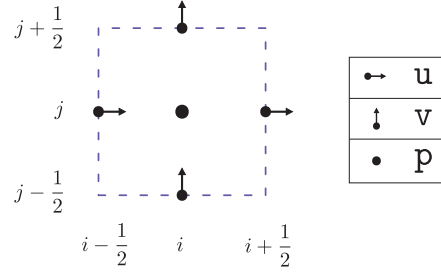


FIG. 1.2. Une cellule dans la grille MAC. Les points de p , u et v servent à représenter les valeurs de p , u et v , respectivement.

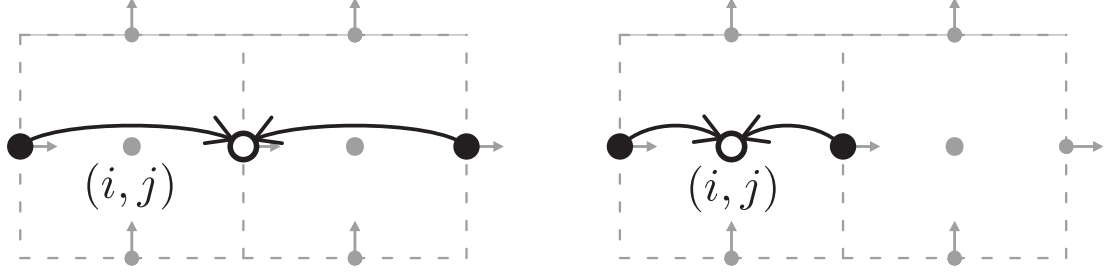


FIG. 1.3. Dans une grille MAC, deux opérateurs différents peuvent être utilisés pour calculer une même valeur.

À titre d'exemple, les deux opérateurs suivants servent à évaluer la dérivée partielle $\partial/\partial x$ de u , mais utilisent des grilles différentes (figure 1.3) :

$$(DX_u^u u)_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{u_{i+\frac{3}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j}}{2h},$$

$$(DX_u^p u)_{i,j} = \frac{u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j}}{h}$$

1.3. CONDITIONS AUX FRONTIÈRES

Ayant établi que le domaine Ω est une boîte carrée fermée, la condition de Dirichlet homogène

$$\mathbf{u}^{n+1} \Big|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}$$

s'impose naturellement. En effet, le fait que la boîte est fermée implique que la vitesse en direction normale sur la frontière est nulle, et par la condition de non-glissement, la vitesse en direction tangentielle y est aussi nulle. Les conditions aux frontières pour \mathbf{u}^* et ϕ^{n+1} restent à être déterminées avec soin.

La décomposition de Helmholtz

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^{n+1} + \Delta t \nabla \phi^{n+1},$$

entraîne

$$\mathbf{u}^* \Big|_{\partial\Omega} = \Delta t \nabla \phi^{n+1} \Big|_{\partial\Omega}.$$

Or, comme les auteurs le font remarquer dans [2], avec une approximation $q^{n+\frac{1}{2}}$ d'ordre 1 pour la pression $p^{n+\frac{1}{2}}$, comme c'est le cas avec la méthode PM2, l'estimateur \mathbf{u}^* a une précision d'ordre deux, c'est-à-dire qu'il satisfait

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^{n+1} + O(h^2),$$

ce qui justifie le choix

$$\mathbf{u}^* \Big|_{\partial\Omega} = \mathbf{u}^{n+1} \Big|_{\partial\Omega} = 0,$$

duquel on déduira

$$\nabla \phi^{n+1} \Big|_{\partial\Omega} \cdot \mathbf{n} = 0.$$

Prenons le domaine $\Omega = [0, hN] \times [0, hN]$, divisé en $N \times N$ cellules de largeur h où la pression est calculée au centre. Les frontières du domaine correspondent à des frontières de cellules MAC. Pour conserver la convention que les coordonnées (i, j) entiers correspondent au centre des cellules en même temps que le fait que le domaine est le carré $[0, 1] \times [0, 1]$, nous définissons qu'un point (i, j) de la grille correspond au point

$$\left(\left(i + \frac{1}{2} \right) h, \left(j + \frac{1}{2} \right) h \right)$$

du domaine, comme l'illustre la figure 1.4. Les points de la grille qui sont sur la frontière du domaine sont donc les points de la forme $(1/2, j)$, $(i, 1/2)$, $(N+1/2, j)$ et $(i, N+1/2)$.

L'utilisation d'une telle grille MAC entraîne que près des bords du domaine, certains opérateurs différentiels demandent une attention particulière. Par exemple, alors que pour calculer

$$\left(\frac{\partial u^*}{\partial x} \right)_{\frac{3}{2}, j},$$

on utilise simplement l'opérateur centré

$$\frac{u_{\frac{5}{2}, j}^* - u_{\frac{1}{2}, j}^*}{2h},$$

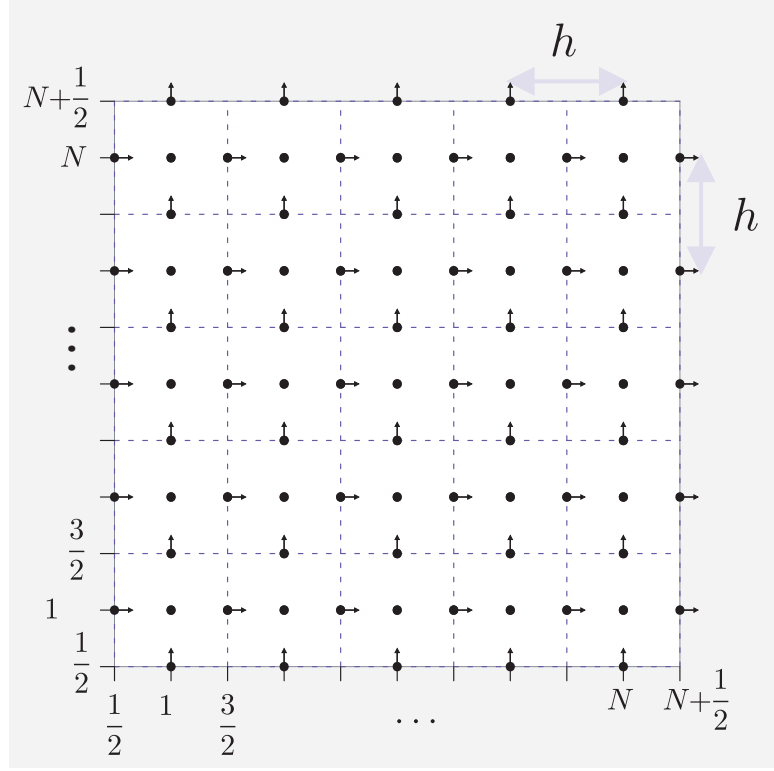


FIG. 1.4. Le domaine Ω est divisé en cellules MAC dont les centres correspondent aux points (i, j) entiers. Les frontières du domaine se trouvent alors sur des points non-entiers.

où $u_{1/2,j}^*$ est défini par les conditions frontières, il faudra utiliser un opérateur non-centré (comme le montre la figure 1.5) pour évaluer

$$\left(\frac{\partial v^*}{\partial x} \right)_{1, j + \frac{1}{2}}.$$

Voici comment sont traités ces opérateurs non-centrés près des frontières.

Pour $v \in C^2(\Omega)$ par exemple, on a :

$$v(x + h, y) = v(x, y) + h \frac{\partial}{\partial x} v(x, y) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x, y) + O(h^3)$$

et

$$v(x - \frac{h}{2}, y) = v(x, y) - \frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial x} v(x, y) + \frac{h^2}{8} \frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x, y) + O(h^3).$$

En combinant ces deux équations, on trouve que

$$\frac{v(x + h, y) + 3v(x, y) - 4v(x - \frac{h}{2}, y)}{3h} = \frac{\partial}{\partial x} v(x, y) + O(h^2)$$

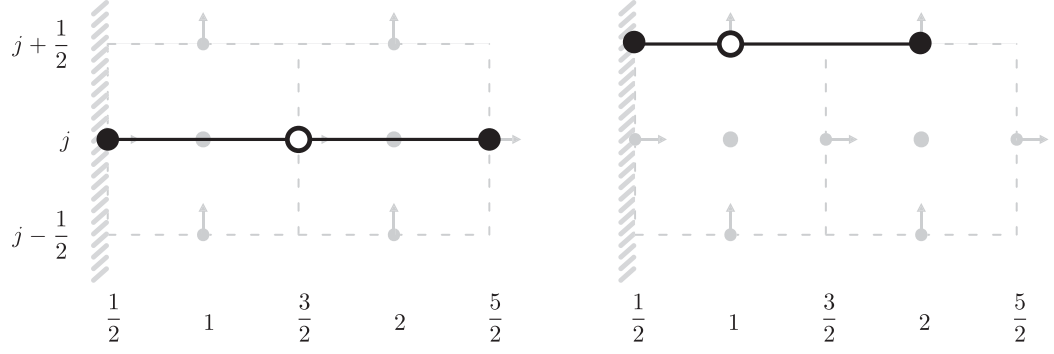


FIG. 1.5. Schéma centré (à gauche) et décentré (à droite) pour l'opérateur $\partial/\partial x$ près de la frontière gauche du domaine.

et

$$\frac{4}{3h^2} \left(v(x+h, y) + 2v(x - \frac{h}{2}, y) - 3v(x, y) \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x, y) + O(h),$$

d'où l'on tire directement ces deux opérateurs discrets

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{1, j+\frac{1}{2}} = \frac{v_{2, j+\frac{1}{2}} + 3v_{1, j+\frac{1}{2}} - 4v_{\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}}{3h} + O(h^2),$$

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)_{1, j+\frac{1}{2}} = \frac{4}{3h^2} \left(v_{2, j+\frac{1}{2}} + 2v_{\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} - 3v_{1, j+\frac{1}{2}} \right) + O(h).$$

Remarquons que les points $(1, j+1/2)$ et $(2, j+1/2)$ font bien partie de la grille v où sont connues les valeurs de v , alors que les points de la forme $(1/2, j+1/2)$ font partie de la frontière du domaine, où on connaît les valeurs des fonctions \mathbf{u}^n et \mathbf{u}^* par les conditions frontières. Les opérateurs équivalents, pour les trois autres frontières du domaine, découlent d'un raisonnement similaire.

Nous aurons aussi besoin, dans l'algorithme, d'évaluer le laplacien de ϕ^{n+1} dont on ne connaît pas directement les valeurs au bord. Pour éviter ce problème, notons d'abord que

$$\frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial x^2} = \frac{\partial \phi(x + \frac{h}{2}, y) / \partial x - \partial \phi(x - \frac{h}{2}, y) / \partial x}{h} + O(h^2).$$

Par différences finies centrées autour du point $x + h/2$, ceci peut être approximé par

$$\frac{\phi(x+h, y) - \phi(x, y)}{h^2} - \frac{1}{h} \frac{\partial \phi(x - \frac{h}{2}, y)}{\partial x} + O(h).$$

Près de la frontière gauche du domaine, ceci se traduit par l'opérateur

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi\right)_{1,j} = \frac{\phi_{2,j} - \phi_{1,j}}{h^2} - \frac{1}{h} \left(\frac{\partial}{\partial x}\phi\right)_{\frac{1}{2},j} + O(h).$$

Or les conditions de Neumann imposées font que $(\partial\phi/\partial x)_{\frac{1}{2},j} = 0$. De plus, les points de la forme $(1, j)$ et $(2, j)$ font partie de la grille \mathbf{p} où les valeurs de ϕ sont connues. Par conséquent, l'opérateur suivant pourra être utilisé au bord :

$$\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)_{1,j} = \frac{\phi_{2,j} - \phi_{1,j}}{h^2}$$

Un raisonnement similaire nous permet de déduire les opérateurs à utiliser sur les trois autres frontières du domaine.

Au sujet des conditions aux frontières pour la pression, on remarque qu'il n'est pas nécessaire de les établir. En effet, il n'est nécessaire de connaître la valeur $\nabla p^{n+\frac{1}{2}}$ que pour évaluer u^* et v^* , donc dans les points de \mathbf{u} et \mathbf{v} qui ne sont pas sur la frontière du domaine. Les opérateurs $\mathbf{DX}_\mathbf{p}^u$ et $\mathbf{DY}_\mathbf{p}^v$ utilisés pour ce calcul ne font donc intervenir aucun point de la frontière.

1.4. ALGORITHME

À l'aide des informations présentées dans ce chapitre, il est possible d'établir l'algorithme à utiliser. À l'étape $n + 1$ dans celui-ci, les valeurs

$$\mathbf{u}^k, \phi^k, p^{k-\frac{1}{2}}, (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})^{k+\frac{1}{2}}, (\nabla q)^{n+\frac{1}{2}}, (\Delta \mathbf{u})^k$$

sont connues pour tout entier $k \leq n$. On souhaite alors obtenir les valeurs de \mathbf{u}^{n+1} et $p^{n+\frac{1}{2}}$.

On trouve d'abord \mathbf{u}^* à l'aide de

$$\frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})^{n+\frac{1}{2}} + \nabla q^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\mu}{2} (\Delta \mathbf{u}^* + (\Delta \mathbf{u})^n) + \mathbf{G}^{n+\frac{1}{2}}$$

qu'on résoud numériquement par :

$$1: \quad \left(\frac{1}{\Delta t} \mathbf{I}_u^u - \frac{\mu}{2} \Delta_u^u\right) u^* = -p_x^{n-\frac{1}{2}} - (\mathbf{u} \cdot \nabla u)^{n+\frac{1}{2}} + \frac{u^n}{\Delta t} + \frac{\mu}{2} (\Delta u)^n + G_1^{n+\frac{1}{2}};$$

$$2: \quad \left(\frac{1}{\Delta t} \mathbf{I}_v^v - \frac{\mu}{2} \Delta_v^v\right) v^* = -p_y^{n-\frac{1}{2}} - (\mathbf{u} \cdot \nabla v)^{n+\frac{1}{2}} + \frac{v^n}{\Delta t} + \frac{\mu}{2} (\Delta v)^n + G_2^{n+\frac{1}{2}};$$

Ici, I_u^u et I_v^v représentent simplement des matrices identité agissant sur la grille u et sur la grille v , respectivement.

On doit ensuite résoudre ensuite le problème de Poisson suivant pour trouver ϕ^{n+1} :

$$\Delta t \Delta \phi^{n+1} = \nabla \cdot \mathbf{u}^*.$$

Cela se fait en deux étapes :

$$3: \quad (\nabla \cdot \mathbf{u}^*) = DX_u^p u^* + DY_v^p v^*;$$

$$4: \quad \Delta_p^p \phi^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} (\nabla \cdot \mathbf{u}^*);$$

Dans le cadre de ce projet, nous nous contentons de résoudre numériquement cette équation en utilisant la fonction *mldivide* de Matlab. Ce problème admet cependant une infinité de solutions. En effet, pour toute constante k , si ϕ^{n+1} est une solution, alors $\phi^{n+1} + k$ l'est aussi. Pour obtenir une solution unique, nous exigerons que la somme des valeurs du vecteur solution soit 0 en remplaçant une des lignes du système par l'équation liée à cette nouvelle contrainte.

Une fois ce problème résolu, on effectue la projection $\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* + \Delta t \nabla \phi^{n+1}$ par les deux étapes suivantes.

$$5: \quad u^{n+1} = u^* - \Delta t DX_p^u \phi^{n+1};$$

$$6: \quad v^{n+1} = v^* - \Delta t DY_p^v \phi^{n+1};$$

La pression est ensuite donnée par

$$7: \quad p^{n+\frac{1}{2}} = p^{n-\frac{1}{2}} + \phi^{n+1} - \frac{\mu}{2} \nabla \cdot \mathbf{u}^*;$$

La pression et la vitesse du fluide sont maintenant connues. Avant de terminer l'itération, il reste à trouver les valeurs nécessaires à l'étape suivante.

$$8: \quad \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^{n+\frac{1}{2}} = \text{DX}_p^u p^{n+\frac{1}{2}};$$

$$9: \quad \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)^{n+\frac{1}{2}} = \text{DY}_p^v p^{n+\frac{1}{2}};$$

$$10: \quad (\Delta u)^{n+1} = \Delta_u^u u^{n+1};$$

$$11: \quad (\Delta v)^{n+1} = \Delta_v^v v^{n+1};$$

$$12: \quad \begin{aligned} (\mathbf{u} \cdot \nabla u)^{n+\frac{3}{2}} &= \frac{3}{2} (u^{n+1} \text{DX}_u^u u^{n+1} + \text{I}_u^v v^{n+1} \text{DY}_u^u u^{n+1}) \\ &\quad - \frac{1}{2} (u^n \text{DX}_u^u u^n + \text{I}_u^v v^n \text{DY}_u^u u^n); \end{aligned}$$

$$13: \quad \begin{aligned} (\mathbf{u} \cdot \nabla v)^{n+\frac{3}{2}} &= \frac{3}{2} (\text{I}_v^u u^{n+1} \text{DX}_v^v v^{n+1} + v^{n+1} \text{DY}_v^v v^{n+1}) \\ &\quad - \frac{1}{2} (\text{I}_v^u u^n \text{DX}_v^v v^n + v^n \text{DY}_v^v v^n); \end{aligned}$$

où I_u^v et I_v^u sont simplement des interpolations bilinéaires permettant de passer d'une grille à l'autre. On aura par exemple :

$$(\text{I}_v^u u)_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i-\frac{1}{2},j} + u_{i+\frac{1}{2},j+1} + u_{i-\frac{1}{2},j+1}}{4}$$

1.5. RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Pour tester cet algorithme, nous avons répliqué l'exemple 1 proposé par Li et Lai dans [11]. La solution du problème est donnée par :

$$u(x, y, t) = -\sin^2(\pi x) \sin(2\pi y) \cos t,$$

$$v(x, y, t) = \sin^2(\pi y) \sin(2\pi x) \cos t,$$

$$p(x, y, t) = \mu \Delta \phi - \frac{\partial \phi}{\partial t},$$

où la fonction ϕ est définie ainsi :

$$\phi = ((x - x^2) \sin(\pi x)(y - y^2) \sin(\pi y)) \cos t.$$

N	$\ E(\mathbf{u})\ _\infty$	ordre	$\ E(p)\ _\infty$	ordre
16	1.67×10^{-02}	–	1.66×10^{-02}	–
32	4.04×10^{-03}	2.04	8.33×10^{-03}	1.00
64	9.94×10^{-04}	2.03	3.65×10^{-03}	1.19
128	2.46×10^{-04}	2.01	1.37×10^{-03}	1.41
256	6.12×10^{-05}	2.01	4.62×10^{-04}	1.57
384	2.72×10^{-05}	2.00	2.36×10^{-04}	1.66

TAB. 1.1. Résultats numériques obtenus pour la méthode de projection PM2.

N	$\ E(\mathbf{u})\ _\infty$	ordre	$\ E(p)\ _\infty$	ordre
32	0.0608	–	3.2871×10^{-02}	–
64	0.0269	1.6955	9.2432×10^{-03}	1.8303
128	0.0109	1.8925	3.2825×10^{-03}	1.4936
256	0.0045	1.9580	1.1341×10^{-04}	1.5333

TAB. 1.2. Résultats numériques obtenus par Li et Lai tels que présentés dans [11], utilisant une grille de calcul normale plutôt qu'une grille MAC

La force \mathbf{G} imposée est déduite des équations de Navier-Stokes. L'analyse de l'erreur est faite au temps $t = 10$ sur l'ensemble du domaine, en utilisant $\mu = 1$ comme viscosité. Les calculs ont été faits sur une grille de $N \times N$ cellules, avec un pas de temps $\Delta t = h = 1/N$

L'erreur a été calculée ici en norme ∞ , c'est-à-dire qu'on considère le maximum de l'erreur sur l'ensemble du domaine. L'ordre de convergence, pour la k -ième ligne du tableau 1.1, est obtenue en comparant avec les résultats de la ligne précédente par la formule

$$ordre_k = \frac{\log(E_{k-1}/E_k)}{\log(N_k/N_{k-1})}.$$

Le tableau 1.2 présente les résultats obtenus par Li et Lai dans [11] pour le même problème. La différence principale entre notre méthode et la leur est l'utilisation d'une grille de calcul de type MAC.

Nos résultats confirment les prédictions de performance pour la méthode choisie. L'ordre 2 est atteint pour la vitesse. Pour la pression, on peut consulter [1] pour constater que l'ordre de convergence attendu est de 1.5. Bien que les résultats que nous obtenons varient trop pour confirmer cette théorie avec précision, ils sont assez bons pour nous faire conclure que notre méthode fonctionne correctement. Une discussion détaillée de la question des ordres de convergence pour différentes méthodes de projection, incluant celle qui est utilisée ici, est présentée dans [2].

Chapitre 2

LA MÉTHODE IIM POUR UNE MEMBRANE FIXE

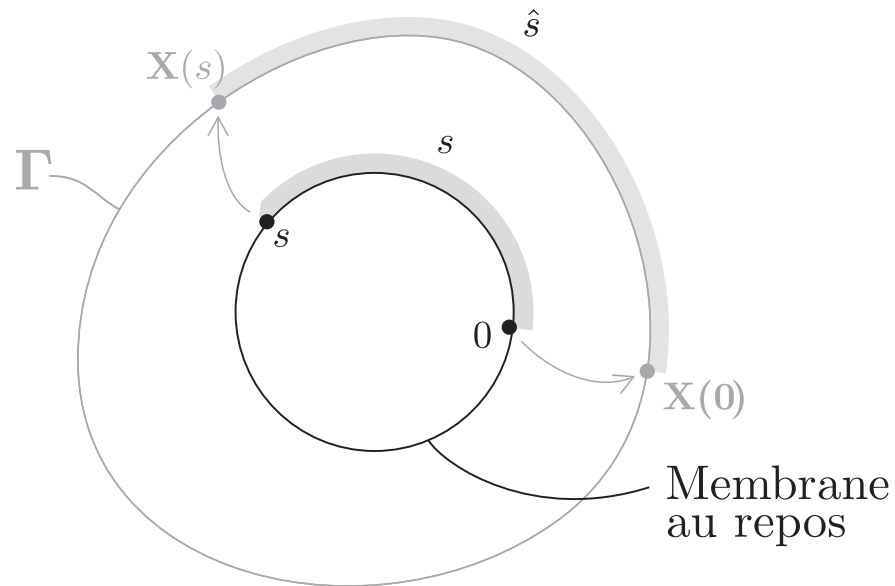


FIG. 2.1. On remplit une membrane élastique de fluide. On fera la distinction entre son état actuel $\mathbf{X}(s)$ (en gris) et son état de repos (en noir) sur lequel est défini le paramètre s .

On plonge maintenant une membrane Γ dans le domaine Ω . Cette membrane est imperméable et sans épaisseur. Elle exercera une force singulière \mathbf{F} sur le fluide, et c'est cette force qui est à l'origine des discontinuités qui motivent ce travail. Cette membrane pourrait représenter, par exemple, une cellule plongée dans le fluide, ou l'interface entre deux fluides distincts comme une goutte d'huile dans l'eau.

À l'intérieur de ce chapitre, nous imposons que la membrane, et la force qui lui est associée, restent fixes. Comme la membrane est imperméable, ceci implique que $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ sur Γ . Voilà une restriction bien sévère à la quantité de problèmes qu'on peut étudier. Cette restriction, qui sera levée au chapitre suivant, est nécessaire à un explication accessible du principe de la méthode IIM.

2.1. REPRÉSENTATION DE LA MEMBRANE

Imaginons qu'on vide la membrane de son fluide. Elle se dégonfle alors jusqu'à atteindre un état de repos. Notons L la longueur de cette membrane au repos. En choisissant un point d'origine quelconque sur celle-ci, on définit une variable s qui mesure la distance entre chaque point et cette origine. Cette longueur est calculée dans le sens anti-horaire (figure 2.1).

La membrane Γ dans son état normal, c'est-à-dire gonflée de fluide, sera paramétrisée par une fonction $\mathbf{X}(s) : [0, L] \rightarrow \Omega$ qui associe à chaque point $s \in \Gamma$ une position $\mathbf{X} \in \Omega$. La membrane est probablement étirée ou contractée par rapport à son état de repos. Soit $\hat{s}(s)$, mesurant la distance, le long de l'interface, entre $\mathbf{X}(s)$ et $\mathbf{X}(0)$. Alors $\mathbf{X}(\hat{s})$ est une paramétrisation qui respecte la longueur d'arc, et on peut mesurer l'étirement de la membrane par

$$\frac{d\hat{s}}{ds} = \left\| \frac{d\mathbf{X}}{ds} \right\|.$$

La notation $(')$, dans ce mémoire, est réservée aux dérivées le long de l'interface, tenant compte de la déformation par rapport à l'état de repos. Pour une fonction quelconque $g(s) : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, on aura :

$$\frac{dg}{d\hat{s}} = g' = \frac{dg}{ds} \left/ \left\| \frac{d\mathbf{X}}{ds} \right\| \right.$$

On définira les vecteurs tangent $\boldsymbol{\tau}$ et normal \mathbf{n} à l'interface en posant

$$\boldsymbol{\tau}(s) = \mathbf{X}'(s) = R\mathbf{n}(s),$$

où R est une rotation de $\pi/2$ dans le sens anti-horaire (voir figure 2.2).

Dans ce projet, toutes les fonctions définies sur Γ , comme \mathbf{X} par exemple, sont représentées par des marqueurs lagrangiens définis par un ensemble fini de points

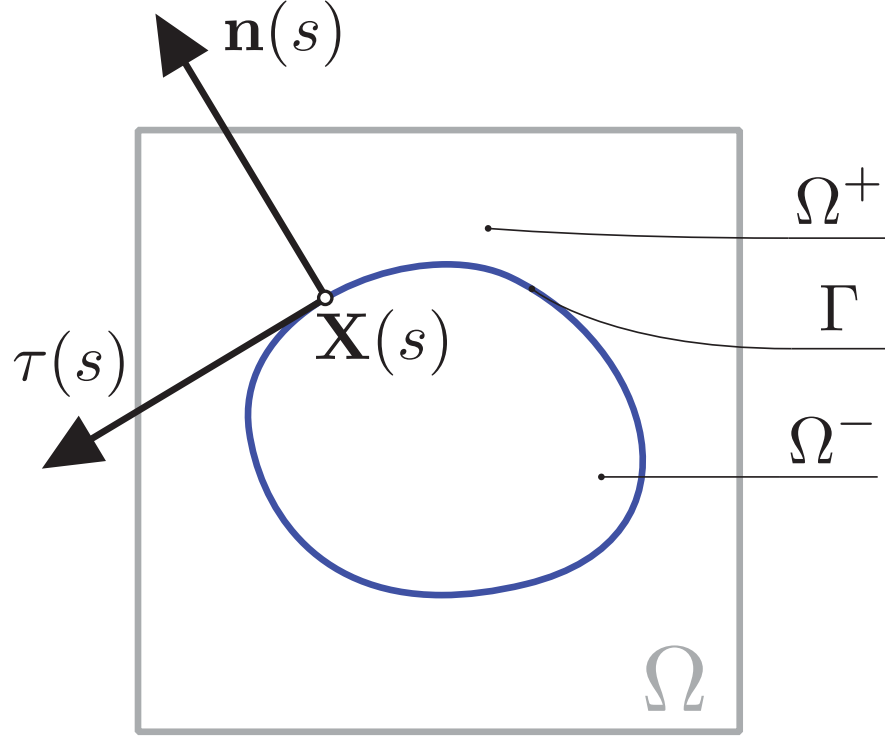


FIG. 2.2. Une membrane Γ , plongée dans le domaine Ω .

s_1, s_2, \dots, s_p . Pour une fonction g , par exemple, on garde en mémoire uniquement les marqueurs

$$g_k := g(s_k), \text{ pour } k = 1, \dots, p.$$

La fonction est alors représentée par des splines cubiques périodiques, c'est-à-dire par une fonction $\tilde{g}(s) \in C^2(\Gamma)$ périodique (de période L) définie comme :

$$\tilde{g}(s) = \begin{cases} \tilde{g}_0(s), & \text{si } s \in [s_0, s_1], \\ \tilde{g}_1(s), & \text{si } s \in [s_1, s_2], \\ \dots & \\ \tilde{g}_{p-1}(s), & \text{si } s \in [s_{p-1}, s_p], \\ \tilde{g}_p(s), & \text{si } s \in [s_p, s_0]. \end{cases} \quad (2.1.1)$$

où pour tout $j = 0, \dots, p$, \tilde{g}_j est un polynôme cubique et $\tilde{g}(s_j) = g(s_j)$.

Ces fonctions ont l'avantage d'être très facilement différentiables. La dérivée d/ds est en effet obtenue en dérivant directement chaque polynôme \tilde{g}_j de la spline. dg/ds est alors représentée par une fonction $C^1(\Gamma)$ formée de p segments de polynômes de degré 2.

2.2. FORCE SINGULIÈRE ET CONDITIONS DE SAUT

Soit \hat{L} la longueur de la membrane Γ dans son état normal. Alors, cette membrane exerce une force singulière $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ qu'on décrira par

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \int_0^{\hat{L}} \mathbf{f}(\hat{s}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(\hat{s})) d\hat{s},$$

pour une fonction \mathbf{f} à choisir selon les propriétés physiques de la membrane ou la nature des tests numériques que nous souhaitons effectuer. Dans le cas d'une membrane élastique hookienne, par exemple, si on définit la tension comme

$$T(s) = T_0 \left(\left\| \frac{d\mathbf{X}(s)}{ds} \right\| - 1 \right),$$

pour un facteur T_0 constant, alors la force \mathbf{f} s'exprime comme

$$\mathbf{f} = \frac{d(T(s)\boldsymbol{\tau}(s))}{ds} \Big/ \left\| \frac{d\mathbf{X}(s)}{ds} \right\|,$$

ou, plus simplement, en utilisant la notation $(\cdot)'$ introduite plus tôt,

$$\mathbf{f} = (T(s)\boldsymbol{\tau}(s))'.$$

Avec l'introduction de cette nouvelle force, l'équation du mouvement devient :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p = \mu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{G} + \mathbf{F}, \quad (2.2.1)$$

où $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ partout sauf sur l'interface.

Le domaine se divise ainsi en deux parties : Ω^+ , l'ensemble des points à l'extérieur de la membrane, et Ω^- , l'ensemble des points à l'intérieur de celle-ci. Les seuls points où il peut y avoir une discontinuité dans \mathbf{u} , p ou n'importe laquelle de leurs dérivées partielles sont donc les points de Γ . On dira ainsi que la solution est lisse *par morceaux*, c'est-à-dire :

$$\mathbf{u}, p \in C^\infty(\Omega \setminus \Gamma).$$

La résolution d'un tel problème en utilisant des opérateurs de différences finies d'ordre 2 sans corrections exigerait que la force \mathbf{G} soit au moins deux fois dérivable. Comme nous n'introduisons de termes corrections qu'autour de l'interface, cette exigence est encore présente à l'extérieur et à l'intérieur de l'interface. On devra donc avoir $\mathbf{G} \in C^2(\Omega \setminus \Gamma)$.

$[\mu \mathbf{u}]$	$= 0$
$[\mu \mathbf{u}_\tau]$	$= 0$
$[\mu \mathbf{u}_n]$	$= -(\mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\tau}) \boldsymbol{\tau}$
$[\mu \mathbf{u}_{\tau\tau}]$	$= \kappa(\mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\tau}) \boldsymbol{\tau}$
$[\mu \mathbf{u}_{n\tau}]$	$= -((\mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\tau}) \boldsymbol{\tau})'$
$[\mu \mathbf{u}_{nn}]$	$= -\kappa(\mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\tau}) \boldsymbol{\tau} + (\mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\tau})' \mathbf{n} + (\mathbf{f} \cdot \mathbf{n})' \boldsymbol{\tau} - [\mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\tau}] \boldsymbol{\tau}$
$[p]$	$= \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}$
$[p_\tau]$	$= (\mathbf{f} \cdot \mathbf{n})'$
$[p_n]$	$= [\mathbf{G} \cdot \mathbf{n}] + (\mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\tau})'$
$[\mathbf{u}^*]$	$= [\mathbf{u}]$
$[\mathbf{u}_\tau^*]$	$= [\mathbf{u}_\tau]$
$[\mathbf{u}_n^*]$	$= [\mathbf{u}_n]$
$[\mathbf{u}_{\tau\tau}^*]$	$= [\mathbf{u}_{\tau\tau}]$
$[\mathbf{u}_{n\tau}^*]$	$= [\mathbf{u}_{n\tau}]$
$[\mu \mathbf{u}_{nn}^*]$	$= [\mu \mathbf{u}_{nn}] - \frac{2}{\mu} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\tau}) \boldsymbol{\tau}$

TAB. 2.1. Conditions de saut pour \mathbf{u} et p , lorsque la viscosité μ est continue. La fonction $\kappa(s)$ représente la courbure de l'interface au point s .

À travers l'interface, des sauts peuvent donc survenir. La condition de saut pour une fonction $g \in C(\Omega \setminus \Gamma)$ est définie comme la différence entre les limites extérieures et intérieures de g par rapport à l'interface, c'est-à-dire :

$$[g](s) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (g(\mathbf{X}(s) + \varepsilon \mathbf{n}(s)) - g(\mathbf{X}(s) - \varepsilon \mathbf{n}(s))). \quad (2.2.2)$$

Les conditions de saut présentées dans le tableau 2.1 peuvent être obtenues à partir des équations de Navier-Stokes. L'appendice 1 de ce mémoire est consacré à ce sujet. À partir de la manière dont on définit les variables \mathbf{u}^* et ϕ^{n+1} , on sera aussi en mesure de montrer que les conditions de saut de la fonction ϕ^{n+1} sont nuls jusqu'à l'ordre 2, c'est-à-dire que $\phi^{n+1} \in C^2[\Omega]$. On pourra aussi approximer les sauts de la fonction \mathbf{u}^* , aussi présentées dans le tableau 2.1.

Dans ce chapitre, ce sont les sauts des dérivées partielles dans les directions purement horizontales et verticales qui seront utilisées, plutôt que dans les directions normales et tangentes. Celles-ci se déduisent facilement en utilisant par exemple :

$$[u_x] = [u_n] n_x + [u_\tau] \tau_x$$

et

$$[u_{xx}] = [u_{nn}] n_x^2 + 2 [u_{n\tau}] \tau_x n_x + [u_{\tau\tau}] \tau_x^2,$$

où n_x et τ_x sont les composantes horizontales des vecteurs normal et tangent, respectivement.

Une fois cette information connue, il nous est possible de modifier les opérateurs aux différences finies pour les rendre valides dans le cas lisse par morceaux. C'est là le principe de la méthode IIM.

2.3. GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE TAYLOR

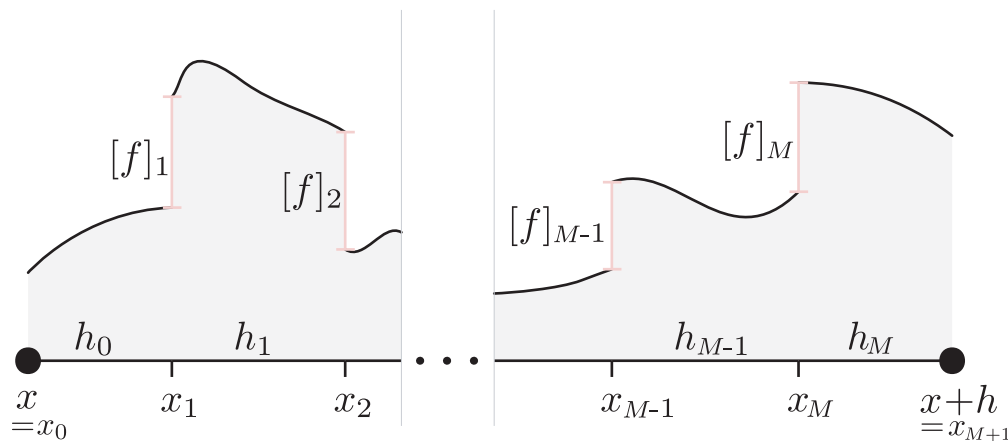


FIG. 2.3. Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux. Les points de discontinuité x_i séparent le segment $[x, x + h]$ en $M + 1$ intervalles dans lesquels la fonction est continue.

Le théorème de Taylor est à la base de la méthode des différences finies : pour une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, N -fois dérivable, on a :

$$f(x + h) = \sum_{n=0}^N \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) + O(h^{N+1}).$$

Prenons maintenant une fonction $f : [x, x + h] \rightarrow \mathbb{R}$, N -fois dérivable *par morceaux*, dans le sens que f est N -fois dérivable partout sauf sur un ensemble fini de points $x_1 < x_2 < \dots < x_M$ dits *points de discontinuité*. Comme l'illustre la figure 2.3, le segment est divisé en $M + 1$ intervalles de longueur $h_m = x_{m+1} - x_m$ ($m = 0, \dots, M$).

En appliquant le théorème de Taylor sur l'intervalle $(x_M, x + h)$, on trouve que

$$f(x + h) = \sum_{n=0}^N \frac{h_M^n}{n!} f^{(n)}(x_M^+) + O(h^{N+1}).$$

Posons alors

$$[f]_M := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (f(x_M + \varepsilon) - f(x_M - \varepsilon)).$$

Il s'agit du saut *de gauche à droite* de la fonction f au point x_M . Avec cette définition, on peut écrire :

$$f(x + h) = \sum_{n=0}^N \frac{h_M^n}{n!} (f^{(n)}(x_M^-) + [f^{(n)}]_M) + O(h^{N+1}),$$

ou encore :

$$f(x + h) = \sum_{n=0}^N \frac{h_M^n}{n!} f^{(n)}(x_M^-) + \sum_{n=0}^N \frac{h_M^n}{n!} [f^{(n)}]_M + O(h^{N+1}).$$

En développant chacun des termes de la forme $f^{(n)}(x_M^-)$ par le théorème de Taylor appliqué sur l'intervalle (x_{M-1}, x_M) , on aura

$$f(x + h) = \sum_{n=0}^N \frac{h_M^n}{n!} \left(\sum_{k=n}^N \frac{h_{M-1}^{k-n}}{(k-n)!} f^{(k)}(x_{M-1}^+) \right) + \sum_{n=0}^N \frac{h_M^n}{n!} [f^{(n)}]_M + O(h^{N+1}).$$

On peut réorganiser la première somme de cette équation en regroupant les différents termes selon le degré de la dérivée considérée. On peut alors voir que

$$\sum_{n=0}^N \frac{h_M^n}{n!} \left(\sum_{k=n}^N \frac{h_{M-1}^{k-n}}{(k-n)!} f^{(k)}(x_{M-1}^+) \right) = \sum_{n=0}^N f^{(n)}(x_{M-1}^+) \left(\sum_{k=0}^n \frac{h_M^k}{k!} \frac{h_{M-1}^{n-k}}{(n-k)!} \right).$$

En multipliant par $n!/n!$ à l'intérieur de cette somme, on peut mettre en évidence un développement binomial :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N f^{(n)}(x_{M-1}^+) & \left(\sum_{k=0}^n \frac{h_M^k}{k!} \frac{h_{M-1}^{n-k}}{(n-k)!} \right) \\ & = \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(x_{M-1}^+)}{n!} \left(\sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!k!} h_M^k h_{M-1}^{n-k} \right) \\ & = \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(x_{M-1}^+)}{n!} (h_M + h_{M-1})^n . \end{aligned}$$

On a donc montré que

$$f(x+h) = \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(x_{M-1}^+)}{n!} (h_M + h_{M-1})^n + \sum_{n=0}^N \frac{h_M^n}{n!} [f^{(n)}]_M + O(h^{N+1}).$$

En utilisant les sauts, on peut passer à gauche de la discontinuité x_{M-1} . On obtient dans ce cas :

$$f(x+h) = \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(x_{M-1}^-)}{n!} (h_M + h_{M-1})^n + \sum_{n=0}^N \frac{(x+h-x_{M-1})^n}{n!} [f^{(n)}]_{M-1} + \sum_{n=0}^N \frac{h_M^n}{n!} [f^{(n)}]_M +$$

et en général, ce raisonnement peut être répété sur chacun des $M+1$ segments. En rappelant que $h = \sum_{m=0}^M h_m$, on trouve alors la forme généralisée du théorème de Taylor en une dimension :

$$f(x+h) = \sum_{n=0}^N \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) + \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N \frac{(x+h-x_m)^n}{n!} [f^{(n)}]_m + O(h^{N+1}).$$

On remarque que cette expression est la même que dans le cas N -fois dérivable si ce n'est de l'ajout du deuxième terme dans le membre de droite, qu'on appellera *terme de correction*.

2.4. THÉORÈME DE TAYLOR GÉNÉRALISÉ EN PLUSIEURS DIMENSIONS

Dans le théorème de Taylor généralisé en une dimension, on a défini le saut comme une limite de gauche à droite en un point. Cette définition n'est pas tout à fait en accord avec la définition des conditions de saut (2.2.2). Voyons ici comment passer au cas multidimensionnel.

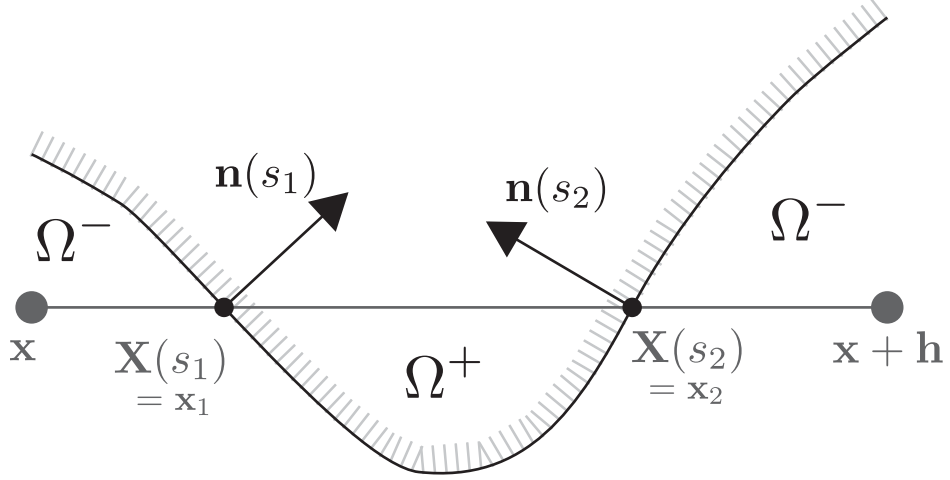


FIG. 2.4. L'interface croise le segment de droite entre \mathbf{x} et $\mathbf{x} + \mathbf{h}$ en un ensemble fini de points s_1, s_2, \dots, s_M , où $\mathbf{X}(s_1)$ est le point le plus près de \mathbf{x} , suivi de $\mathbf{X}(s_2)$ et ainsi de suite.

Intéressons-nous à une fonction $g \in C^2(\Omega \setminus \Gamma)$. Comme l'illustre la figure 2.4, on suppose que les points d'intersection entre l'interface Γ et le segment de droite $(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{h})$ sont les points $\mathbf{X}(s_1), \dots, \mathbf{X}(s_M)$.

Supposons que \mathbf{x} soit à l'intérieur de l'interface. Alors le saut $[f](s_1)$ a le même sens qu'avant (passer de l'intérieur à l'extérieur équivaut à passer de gauche à droite). Le saut suivant, $[f](s_2)$, par contre, sera défini inversement (lorsqu'on passe de gauche à droite, on passe de l'extérieur à l'intérieur). On aura donc une alternance des sauts par rapport à ce qu'on obtenait avec la définition du saut en une dimension. On peut ainsi écrire :

$$g(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = \sum_{n=0}^N \frac{\|\mathbf{h}\|^n}{n!} g^{(n)}(\mathbf{x}) + \sum_{m=1}^M (-1)^{m-1} \sum_{n=0}^N \frac{\|\mathbf{x} + \mathbf{h} - \mathbf{x}_m\|^n}{n!} [g^{(n)}](s_m) + O(\|\mathbf{h}\|^{N+1})$$

où $g^{(n)}$ représente la n -ième dérivée dans la direction unitaire de \mathbf{h} . L'alternance des sauts est exprimée par le terme $(-1)^{m-1}$.

Par contre, si on a \mathbf{x} à l'extérieur de l'interface, le sens des sauts est inversé. Définissons la variable $\sigma(\mathbf{x})$ comme

$$\sigma(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^+, \\ -1 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^-. \end{cases}$$

Alors on peut écrire plus généralement :

$$g(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = \sum_{n=0}^N \frac{\|\mathbf{h}\|^n}{n!} g^{(n)}(\mathbf{x}) + \sigma(\mathbf{x}) \sum_{m=1}^M (-1)^m \sum_{n=0}^N \frac{\|\mathbf{x} + \mathbf{h} - \mathbf{x}_m\|^n}{n!} [g^{(n)}] (s_m) + O(\|\mathbf{h}\|^{N+1}). \quad (2.4.1)$$

Voilà la généralisation du théorème de Taylor adapté au problème de la membrane immergée, en plusieurs dimensions.

Introduisons la notation suivante pour pouvoir traiter le terme de correction plus aisément :

$$C_g^N(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = \sigma(\mathbf{x}) \sum_{m=1}^M (-1)^m \sum_{n=0}^N \frac{\|\mathbf{h}_m\|^n}{n!} [g^{(n)}] (s_m). \quad (2.4.2)$$

On parle ici du terme de correction d'ordre N , pour la fonction g , sur le segment $[\mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{h}]$. Mentionnons tout de suite que si l'interface ne croise pas ce segment, ce terme est tout simplement nul. En posant $h = \|\mathbf{h}\|$, on peut écrire :

$$g(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = \sum_{n=0}^N \frac{h^n}{n!} g^{(n)}(\mathbf{x}) + C_g^N(\mathbf{x}, \mathbf{h}) + O(h^{N+1}) \quad (2.4.3)$$

et

$$g(\mathbf{x} - \mathbf{h}) = \sum_{n=0}^N \frac{(-h)^n}{n!} g^{(n)}(\mathbf{x}) + C_g^N(\mathbf{x}, -\mathbf{h}) + O(h^{N+1}). \quad (2.4.4)$$

Similairement au cas continu, on en tire les opérateurs aux différences finies corrigés suivants :

$$\frac{g(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - g(\mathbf{x} - \mathbf{h})}{2h} = g'(\mathbf{x}) + \frac{1}{2h} (C_g^2(\mathbf{x}, \mathbf{h}) - C_g^2(\mathbf{x}, -\mathbf{h})) + O(h^2),$$

$$\frac{g(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - 2g(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x} - \mathbf{h})}{h^2} = g''(\mathbf{x}) + \frac{1}{h^2} (C_g^2(\mathbf{x}, \mathbf{h}) + C_g^2(\mathbf{x}, -\mathbf{h})) + O(h).$$

À titre d'exemple, en gardant les mêmes notations qu'au chapitre précédent pour les opérateurs de différences finies dans des cellules MAC de largeur h , on a

$$(DX_u^1 u)_{i+\frac{1}{2},j} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2},j} + \frac{1}{2h} (C_u^2(\mathbf{x}, \mathbf{h}_x) + C_u^2(\mathbf{x}, -\mathbf{h}_x)) + O(h^2), \quad (2.4.5)$$

où $\mathbf{h}_x = (h, 0)^T$.

Le terme

$$\frac{1}{2h} (C_u^2(\mathbf{x}, \mathbf{h}_x) + C_u^2(\mathbf{x}, -\mathbf{h}_x))$$

est le *terme de correction* associé à DX_u^u . Pour simplifier les équations, on utilisera la notation $\mathcal{C}\{\text{DX}_u^u\}$ pour le désigner. On peut donc réécrire (2.4.5) :

$$\text{DX}_u^u = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathcal{C}\{\text{DX}_u^u\} + O(h^2).$$

De manière similaire, pour le laplacien, on trouvera :

$$\mathcal{C}\{\Delta_u^u\} = \frac{1}{h^2} (C_u^2(\mathbf{x}, \mathbf{h}_x) + C_u^2(\mathbf{x}, -\mathbf{h}_x) + C_u^2(\mathbf{x}, \mathbf{h}_y) + C_u^2(\mathbf{x}, -\mathbf{h}_y))$$

Le terme de correction pour l'opérateur DY_u^u se trouve de la même manière. On remarque aussi que la grille de calcul concernée ne change rien au terme de correction associé : $\mathcal{C}\{\text{DX}_u^u u^n\}$, par exemple, est similaire à $\mathcal{C}\{\text{DX}_v^v v^n\}$. Par contre, les opérateurs entre deux grilles différentes devront être traités sur des intervalles deux fois plus petits, c'est-à-dire :

$$\mathcal{C}\{\text{DX}_u^p u\} = \frac{1}{h} \left(C_u^2 \left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{h}_x}{2} \right) - C_u^2 \left(\mathbf{x}, \frac{-\mathbf{h}_x}{2} \right) \right)$$

Un coup d'œil au tableau 2.1 nous indique que pour la pression, seules les conditions de saut jusqu'à l'ordre 1 sont connues. On appliquera donc seulement les termes de correction d'ordre 1 lorsqu'on traite la valeur p . Par exemple :

$$\mathcal{C}\{\text{DX}_p^u p^{n+\frac{1}{2}}\} = \frac{1}{h} \left(C_p^1 \left(x, \frac{\mathbf{h}_x}{2} \right) - C_p^1 \left(x, \frac{-\mathbf{h}_x}{2} \right) \right).$$

2.5. ALGORITHME DE PROJECTION MODIFIÉ

Dans le cas d'une membrane fixe, la méthode IIM est assez simple : il suffit d'ajouter les termes de correction partout où, dans l'algorithme, on utilise un opérateur différentiel discrétisé spatial. Les opérateurs temporels ne nécessitent aucune attention particulière, car comme la membrane est fixe, $\partial^k \mathbf{u} / \partial t^k$ et $\partial^k p / \partial t^k$ existent et sont continues pour tout entier k .

Avant de démarrer les calculs, on utilise $\mathbf{X}(s)$ pour déduire tous les termes de correction $\mathcal{C}\{\cdot\}$ nécessaires. À part ces corrections, l'algorithme présenté ici est identique à celui du chapitre précédent.

Encore une fois, au début de l'étape $n + 1$, les valeurs

$$\mathbf{u}^k, \phi^k, p^{k-\frac{1}{2}}, (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})^{k+\frac{1}{2}}, (\nabla q)^{n+\frac{1}{2}}, (\Delta \mathbf{u})^k$$

sont connues pour tout entier $k \leq n$, et on souhaite obtenir les valeurs de \mathbf{u}^{n+1} et $p^{n+\frac{1}{2}}$.

$$1: \quad \left(\frac{1}{\Delta t} \mathbb{I}_u^u - \frac{\mu}{2} \Delta_u^u \right) u^* = -p_x^{n-\frac{1}{2}} - (\mathbf{u} \cdot \nabla u)^{n+\frac{1}{2}} + \frac{u^n}{\Delta t} \\ + \frac{\mu}{2} (\Delta u)^n + G_1^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\mu}{2} \mathcal{C}\{\Delta_u^u u^*\};$$

$$2: \quad \left(\frac{1}{\Delta t} \mathbb{I}_v^v - \frac{\mu}{2} \Delta_v^v \right) v^* = -p_y^{n-\frac{1}{2}} - (\mathbf{u} \cdot \nabla v)^{n+\frac{1}{2}} + \frac{v^n}{\Delta t} \\ + \frac{\mu}{2} (\Delta v)^n + G_2^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\mu}{2} \mathcal{C}\{\Delta_v^v v^*\};$$

$$3: \quad (\nabla \cdot \mathbf{u}^*) = \text{DX}_u^p u^* - \mathcal{C}\{\text{DX}_u^p u^*\} + \text{DY}_v^p v^* - \mathcal{C}\{\text{DY}_v^p v^*\};$$

$$4: \quad \Delta_p^p \phi^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} (\nabla \cdot \mathbf{u}^*) + \mathcal{C}\{\Delta_p^p \phi^{n+1}\};$$

$$5: \quad u^{n+1} = u^* - \Delta t (\text{DX}_p^u \phi^{n+1} - \mathcal{C}\{\text{DX}_p^u \phi^{n+1}\});$$

$$6: \quad v^{n+1} = v^* - \Delta t (\text{DY}_p^v \phi^{n+1} - \mathcal{C}\{\text{DY}_p^v \phi^{n+1}\});$$

$$7: \quad p^{n+\frac{1}{2}} = p^{n-\frac{1}{2}} + \phi^{n+1} - \frac{\mu}{2} (\nabla \cdot \mathbf{u}^*);$$

$$8: \quad p_x^{n+\frac{1}{2}} = \text{DX}_p^u p^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{C}\{\text{DX}_p^u p^{n+\frac{1}{2}}\};$$

$$9: \quad p_y^{n+\frac{1}{2}} = \text{DY}_p^v p^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{C}\{\text{DY}_p^v p^{n+\frac{1}{2}}\};$$

$$10: \quad (\Delta u)^{n+1} = \Delta_u^u u^{n+1} - \mathcal{C}\{\Delta_u^u u^{n+1}\};$$

$$11: \quad (\Delta v)^{n+1} = \Delta_v^v v^{n+1} - \mathcal{C}\{\Delta_v^v v^{n+1}\};$$

$$\begin{aligned}
12: \quad (\mathbf{u} \cdot \nabla u)^{n+\frac{3}{2}} &= \frac{3}{2} u^{n+1} (\mathrm{DX}_u^u u^{n+1} - \mathcal{C}\{\mathrm{DX}_u^u u^{n+1}\}) \\
&+ \frac{3}{2} \Gamma_u^v v^{n+1} (\mathrm{DY}_u^u u^{n+1} - \mathcal{C}\{\mathrm{DY}_u^u u^{n+1}\}) \\
&- \frac{1}{2} (u^n (\mathrm{DX}_u^u u^n - \mathcal{C}\{\mathrm{DX}_u^u u^n\}) + \Gamma_u^v v^n (\mathrm{DY}_u^u u^n - \mathcal{C}\{\mathrm{DY}_u^u u^n\})); \\
13: \quad (\mathbf{u} \cdot \nabla v)^{n+\frac{3}{2}} &= \frac{3}{2} \Gamma_v^u u^{n+1} (\mathrm{DX}_v^v v^{n+1} - \mathcal{C}\{\mathrm{DX}_v^v v^{n+1}\}) + \frac{3}{2} v^{n+1} (\mathrm{DY}_v^v v^{n+1} - \mathcal{C}\{\mathrm{DY}_v^v v^{n+1}\}) \\
&- \frac{1}{2} (\Gamma_v^u u^n (\mathrm{DX}_v^v v^n - \mathcal{C}\{\mathrm{DX}_v^v v^n\}) + v^n (\mathrm{DY}_v^v v^n - \mathcal{C}\{\mathrm{DY}_v^v v^n\}));
\end{aligned}$$

2.6. INTERPOLATION D'ORDRE 2

Comme le fluide considéré est visqueux, la condition de non-glissement entraîne que \mathbf{u} est continue. Par conséquent, les opérateurs Γ_u^v et Γ_v^u dans l'algorithme présenté ici sont des interpolations d'ordre 1 aux points irréguliers, même en n'y appliquant aucune correction autour de l'interface.

On peut cependant obtenir un opérateur d'ordre 2 en utilisant correctement les conditions de sauts. En utilisant (2.4.3) et (2.4.4), c'est-à-dire un développement de Taylor pour une fonction $g \in C^2(\Omega \setminus \Gamma)$, jusqu'à l'ordre 2, on peut déduire l'opérateur d'interpolation :

$$\frac{g(\mathbf{x} + \mathbf{h}/2) + g(\mathbf{x} - \mathbf{h}/2)}{2} = g(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} (C_g^1(\mathbf{x}, \mathbf{h}/2) + C_g^1(\mathbf{x}, -\mathbf{h}/2)) + O(h^2). \tag{2.6.1}$$

Avec ce résultat, on peut maintenant trouver le terme de correction pour un opérateur d'interpolation comme Γ_u^p ou Γ_p^v , donnant la valeur en un point situé à mi-chemin entre deux points donnés. En combinant ces deux opérateurs, comme l'illustre la figure 2.5, on peut définir un interpolateur Γ_u^v d'ordre 2. Le même raisonnement nous permet de définir Γ_v^u comme combinaison de Γ_v^p et de Γ_p^u .

2.7. RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Le problème que nous avons choisi pour tester la méthode correspond à l'exemple 2 proposé dans [11]. Le domaine $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ est rempli d'un fluide

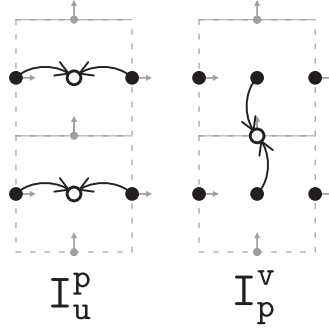


FIG. 2.5. L'opérateur I_u^v est composé de l'interpolation I_u^p , suivie de l'interpolation I_p^v , auxquelles on a ajouté les termes de correction appropriés.

de viscosité $\mu = 0.1$. L'interface considérée est d'équation

$$\frac{(x - 0.5)^2}{0.35^2} + \frac{(y - 0.5)^2}{0.25^2} = 1.$$

Celle-ci exerce une force singulière constante en direction purement normale, c'est-à-dire :

$$\mathbf{f}(s) = -10\mathbf{n}(s).$$

Aucune autre force autre que \mathbf{F} n'agit sur le problème. Autrement dit, $\mathbf{G} = \mathbf{0}$.

Comme aucune force n'est appliquée ailleurs que sur l'interface, et que le fluide est immobile sur Γ (selon les hypothèses posées pour ce chapitre), la solution de ce problème pour la vitesse sera $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Dans ce cas, les équations du mouvement se simplifient à la forme :

$$\nabla p = \mathbf{F}.$$

Le gradient de p doit donc être nul partout ailleurs que sur l'interface, ce qui nous assure que la pression sera constante par morceaux. Se référant au tableau 2.1, on a $[p] = \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}$, où on a imposé la force $\mathbf{f} \cdot \mathbf{n} = -10$.

Ainsi, le passage de l'intérieur à l'extérieur de la membrane implique un saut de hauteur -10 . C'est donc dire que pour une constante C , la pression, est donnée par

$$p = \begin{cases} C & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^+, \\ C + 10 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^-. \end{cases}$$

N	$\ E(\mathbf{u})\ _\infty$	ordre	$\ E(p)\ _\infty$	ordre
32	1.6412×10^{-04}		9.9058×10^{-03}	
64	3.9857×10^{-05}	2.0418	1.1533×10^{-03}	3.1026
128	9.8987×10^{-06}	2.0095	1.5946×10^{-04}	2.8544
256	1.2367×10^{-06}	2.0008	2.4832×10^{-05}	2.6830

TAB. 2.2. Résultats obtenus par Li et Lai [11] pour le problème de l'ellipse

N	12	32	64
$\ E(u)\ _\infty$	$1,29 \times 10^{-15}$	$9,24 \times 10^{-16}$	$2,13 \times 10^{-16}$
$\ E(v)\ _\infty$	$1,34 \times 10^{-15}$	$9,22 \times 10^{-16}$	$4,09 \times 10^{-16}$
$\ E(p)\ _\infty$	$1,78 \times 10^{-15}$	$1,78 \times 10^{-15}$	$1,78 \times 10^{-15}$

TAB. 2.3. Résultats obtenus avec notre méthode, pour le problème de l'ellipse

Pour une grille de $N \times N$ cellules, donc pour des cellules de largeur $h = 1/N$, le pas de temps utilisé est $\Delta t = h$. Les résultats obtenus par Li et Lai dans [11], obtenus aussi avec la méthode IIM, sont résumés dans le tableau 2.2.

À la différence des ceux-ci, nous avons utilisé une série de marqueurs lagrangiens pour représenter l'interface, plutôt que d'utiliser une fonction level-set, et surtout, nous avons utilisé une grille MAC plutôt qu'une grille de différences finies standard. Les résultats que nous avons obtenus sont très encourageants et sont présentés dans le tableau 2.3.

En fait, les résultats sont si précis, que même pour une grille aussi grossière que 12×12 , nous obtenons des résultats approchant les limites du calcul en double précision, c'est pourquoi nous avons omis de présenter les ordres de convergence ici. Les résultats obtenus pour la pression sont portés en graphique à la figure 2.6.

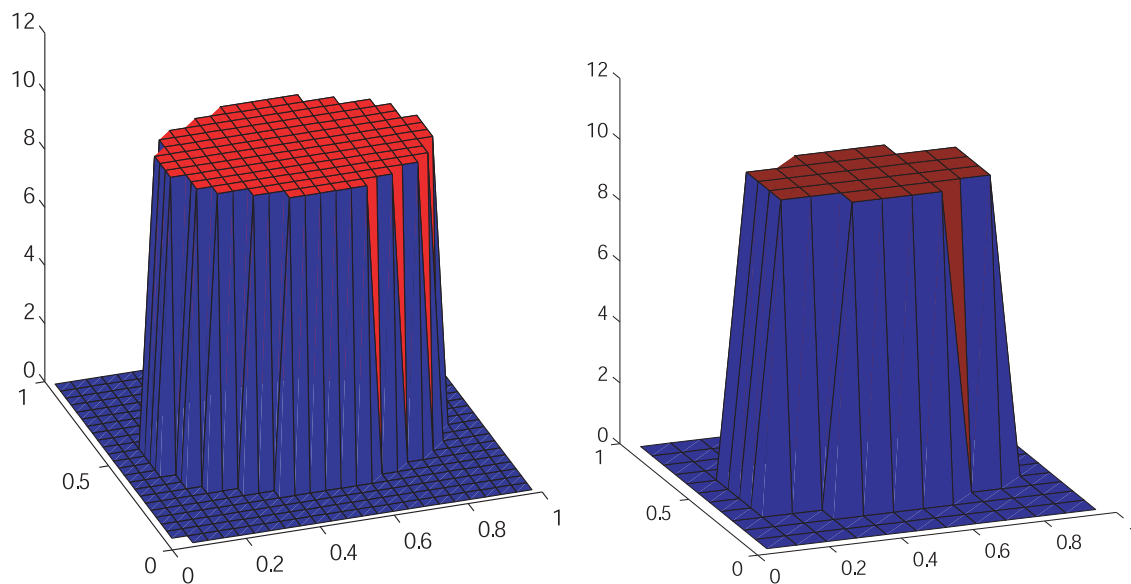


FIG. 2.6. Solutions pour la pression obtenues par notre méthode pour le problème de l'ellipse, avec $N = 24$ (à gauche), et $N = 12$ (à droite). Pour une grille aussi grossière que 12×12 , la méthode réussit à tenir compte très précisément de la discontinuité dans la solution obtenue.

Chapitre 3

LA MÉTHODE IIM POUR UNE MEMBRANE EN MOUVEMENT

Dans ce chapitre, on s'intéresse au cas plus général où la membrane est libre de se déplacer, se contracter et s'étirer. La force singulière $\mathbf{f}(s, t)$, et la position de la membrane $\mathbf{X}(s, t)$ peuvent donc varier dans le temps.

Après avoir établi une manière adéquate de suivre le déplacement de la membrane, nous présentons les difficultés que ce déplacement entraîne, et les différentes techniques qu'il faut combiner pour implémenter la méthode IIM dans ce cas.

3.1. DÉPLACEMENT DE LA MEMBRANE

On peut voir que la membrane se déplacera avec le fluide ambiant, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial \mathbf{X}(s, t)}{\partial t} = \mathbf{u}(\mathbf{X}(s, t), t). \quad (3.1.1)$$

En effet, l'imperméabilité de Γ fait que le fluide ne peut la traverser, donc (3.1.1) est vrai en direction normale, et comme la membrane est sans épaisseur et le fluide visqueux, la condition de non-glissement implique que (3.1.1) est vraie en direction tangentielle.

Par conséquent, la position de la membrane au temps $t_0 + \Delta t$ par rapport à t_0 est donnée par

$$\mathbf{X}(s, t_0 + \Delta t) = \mathbf{X}(s, t_0) + \int_0^{\Delta t} \mathbf{u}(\mathbf{X}(s, t_0 + t), t_0 + t) dt.$$

L'intégrale, dans cette expression, peut être estimée par une méthode de trapèze :

$$\int_0^{\Delta t} \mathbf{u}(\mathbf{X}(s, t_0+t), t_0+t) dt \approx \Delta t \left(\frac{\mathbf{u}(\mathbf{X}(s, t_0), t_0) + \mathbf{u}(\mathbf{X}(s, t_0 + \Delta t), t_0 + \Delta t)}{2} \right). \quad (3.1.2)$$

Nous utilisons la même technique que dans le cas fixe pour modéliser la membrane à chacune des étapes de l'algorithme. Γ^n est donc représentée par des splines cubiques définies par une série de marqueurs lagrangiens $\mathbf{X}_k^n = \mathbf{X}(s_k, n\Delta t)$ pour des valeurs s_1, \dots, s_k fixes. La vitesse de déplacement de chacun de ces marqueurs est alors donnée par $\mathbf{U}_k^n = \mathbf{u}(\mathbf{X}_k^n, n\Delta t)$, ce qui nous permet d'écrire l'équation (3.1.2) sous la forme :

$$\mathbf{X}_k^{n+1} = \mathbf{X}_k^n + \Delta t \frac{\mathbf{U}_k^n + \mathbf{U}_k^{n+1}}{2}. \quad (3.1.3)$$

Supposant que \mathbf{U}_k^{n+1} est connue, on peut alors trouver explicitement \mathbf{X}_k^{n+1} . En réalité, cependant, ces deux valeurs sont interdépendantes. Après avoir présenté une manière de calculer \mathbf{U}_k^{n+1} à partir des valeurs connues de \mathbf{u}^{n+1} , on proposera donc une méthode implicite pour résoudre (3.1.3).

3.2. APPROXIMATION DE \mathbf{U}_k^n

Il est nécessaire d'obtenir une bonne approximation des valeurs \mathbf{U}_k^n pour déplacer la membrane correctement. On cherchera à estimer celles-ci à partir des valeurs de \mathbf{u} connues dans les grilles \mathbf{u} et \mathbf{v} . Comme \mathbf{u} est continue, on pourrait obtenir une approximation d'ordre 1 pour cette fonction en utilisant une interpolation bilinéaire. Pour une plus grande précision, nous utiliserons plutôt une approximation d'ordre 2, qu'on obtiendra par la méthode que voici.

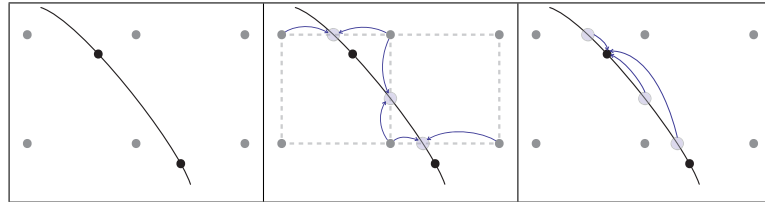


FIG. 3.1. On cherche la valeur de u sur les marqueurs lagrangiens \mathbf{X}_k^n à partir des valeurs de la grille \mathbf{u} . On trouve d'abord les valeurs sur les intersections de Γ^n et \mathbf{u} , puis on utilise ces valeurs pour construire la fonction $u(\mathbf{X}(s, n\Delta t), n\Delta t)$ par splines cubiques.

Premièrement, on utilise les conditions de saut pour trouver les valeurs de u sur les intersections entre la membrane Γ et la grille u . Supposons, par exemple, que l'interface passe par un point $\mathbf{x}_0 = (x_0, jh)$ avec j entier. Il s'agit d'une intersection entre une ligne horizontale de la grille u et l'interface Γ^n . Prenons alors les deux points de la grille u les plus près de \mathbf{x}_0 , c'est-à-dire $\mathbf{x}_1 = (x_0 - \alpha, jh)$ et $\mathbf{x}_2 = (x_0 + \beta, jh)$, où $\alpha, \beta > 0$.

Le théorème de Taylor nous permet d'écrire :

$$u(\mathbf{x}_1) = u(\mathbf{x}_0) - \alpha u_x(\mathbf{x}_0^-) + O(h^2),$$

où $u(\mathbf{x}_0)$ est bien défini, rappelons-le, car u est continue. En utilisant le terme de correction C_1 d'ordre 1 approprié, on peut aussi écrire :

$$u(\mathbf{x}_1) = u(\mathbf{x}_0) - \alpha u_x(\mathbf{x}_0^+) + C_1 + O(h^2).$$

Nous allons travailler avec la moyenne de ces deux équations, c'est-à-dire

$$u(\mathbf{x}_1) = u(\mathbf{x}_0) - \frac{\alpha}{2} (u_x(\mathbf{x}_0^+) + u_x(\mathbf{x}_0^-)) + \frac{C_1}{2} + O(h^2). \quad (3.2.1)$$

De la même manière, pour $u(\mathbf{x}_2)$, on aura

$$u(\mathbf{x}_2) = u(\mathbf{x}_0) + \frac{\beta}{2} (u_x(\mathbf{x}_0^+) + u_x(\mathbf{x}_0^-)) + \frac{C_2}{2} + O(h^2), \quad (3.2.2)$$

Sous forme matricielle, réécrivons (3.2.1) et (3.2.2) :

$$\begin{pmatrix} u(\mathbf{x}_1) \\ u(\mathbf{x}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(\mathbf{x}_0) \\ (u_x(\mathbf{x}_0^+) + u_x(\mathbf{x}_0^-))/2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + O(h^2).$$

Mais cette équation peut être réorganisée pour mettre en évidence $u(\mathbf{x}_0)$:

$$\begin{pmatrix} u(\mathbf{x}_0) \\ (u_x(\mathbf{x}_0^+) + u_x(\mathbf{x}_0^-))/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix}^{-1} \left(\begin{pmatrix} u(\mathbf{x}_1) \\ u(\mathbf{x}_2) \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \right) + O(h^2).$$

Finalement, en utilisant le fait que

$$\begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\beta + \alpha} \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

on peut conclure que

$$u(\mathbf{x}_0) = \frac{\beta(u(\mathbf{x}_1) - C_1/2) + \alpha(u(\mathbf{x}_2) - C_2/2)}{\alpha + \beta} + O(h^2).$$

On est en mesure, grâce à cette formule, d'obtenir une approximation de la valeur de u sur chaque point d'intersection entre l'interface Γ et la grille de calcul \mathbf{u} . Comme $u(\mathbf{X}(s, t), t)$ est une fonction lisse, on utilisera ces valeurs pour approximer la fonction $u(\mathbf{X}(s, n\Delta t), n\Delta t)$. Ceci se fera en utilisant la technique des splines cubiques, comme on le fait déjà fait pour modéliser la membrane Γ à l'aide des marqueurs lagrangiens. La figure 3.2 illustre cette manière de procéder.

En appliquant ce raisonnement pour u et v , on peut obtenir une fonction

$$U^n(s) = \mathbf{u}(\mathbf{X}(s, n\Delta t), n\Delta t) + O(h^2),$$

de laquelle on tire les marqueurs U_k^n cherchés :

$$U_k^n = \mathbf{U}^n(s_k) = \mathbf{u}(\mathbf{X}(s_k, n\Delta t), n\Delta t) + O(h^2).$$

3.3. VERSION IMPLICITE DE LA MÉTHODE

Même si on peut ainsi déplacer la membrane de manière adéquate, un problème se pose : les termes de correction spatiaux calculés dans l'algorithme du chapitre 2 concernent les sauts à travers la membrane Γ^{n+1} qui n'est pas connue au début de l'étape n . Dans le but d'évaluer ces sauts, on se basera sur une approximation Γ_0^{n+1} de Γ^{n+1} , qu'on obtiendra en utilisant

$$\mathbf{X}^{n+1} = \mathbf{X}^n + \Delta t \mathbf{U}^n + O(\Delta t^2).$$

Cette équation provient d'un développement de Taylor d'ordre 2 dans le temps. On définira donc Γ_0^{n+1} en posant

$$\mathbf{X}_0^{n+1} = \mathbf{X}^n + \Delta t \mathbf{U}^n.$$

Pour s'assurer que les conditions de saut sont déduites d'une membrane assez proche de la membrane Γ^{n+1} , on utilisera une boucle dans laquelle on se base sur Γ_i^{n+1} pour déterminer une nouvelle approximation Γ_{i+1}^{n+1} . On considérera cette estimation satisfaisante dès que Γ_i^{n+1} et Γ_{i+1}^{n+1} seront suffisamment proches, c'est-à-dire lorsque les deux critères suivants seront satisfaits :

- (1) $\|\mathbf{X}_{i+1}^{n+1} - \mathbf{X}_i^{n+1}\| < \varepsilon$, pour un certain seuil de tolérance ε , et
- (2) Aucun point de la grille de calcul n'est compris entre Γ_i^{n+1} et Γ_{i+1}^{n+1} (les points à l'intérieur de Γ_i^{n+1} sont les mêmes que pour Γ_{i+1}^{n+1}).

Cette méthode implicite est détaillée dans l’algorithme 1.

Algorithme 1 Version implicite pour le cas d’une membrane mobile.

- 1: $i \leftarrow 0$;
 - 2: Trouver Γ_0^{n+1} , une première approximation de Γ^{n+1} , en utilisant $\mathbf{X}^{n+1} = \mathbf{X}^n + \Delta t \mathbf{U}^n$;
 - 3: **répéter**
 - 4: Trouver les termes de correction $\mathbf{C}\{\}$ associés à Γ_i^{n+1} ;
 - 5: Exécuter les étapes 1 à 6 de la méthode pour obtenir \mathbf{u}^{n+1} ;
 - 6: Évaluer \mathbf{U}^{n+1} à partir des valeurs de \mathbf{u}^{n+1} connues;
 - 7: Obtenir Γ_{i+1}^{n+1} en déplaçant la membrane Γ^n grâce à (3.1.3)
 - 8: $i \leftarrow i + 1$;
 - 9: **jusqu’à ce que** Γ_i^{n+1} et Γ_{i-1}^{n+1} soient assez proches;
 - 10: Exécuter les étapes 7 à 13 de la méthode de projection, pour trouver les autres valeurs. ;
-

3.4. RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

En gardant les mêmes idées qu’au chapitre 2, mais appliquant l’algorithme purement implicite proposé ici, nous avons testé cette méthode avec le problème suivant : on plonge une membrane d’équation

$$\frac{(x - 0.5)^2}{a^2} + \frac{(y - 0.5)^2}{b^2} = 1,$$

dans un fluide immobile ($\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = 0$). On choisira $a = .35 + \varepsilon$, $b = .25 + \varepsilon$, où ε est une très petite valeur choisie de manière à ce que la membrane initiale ne croise pas directement des points de la grille au début de l’algorithme (cela nuirait à ce que nous voulons montrer dans l’exemple qui suit). La membrane exerce une force purement normale, proportionnelle à sa courbure, c’est-à-dire :

$$\mathbf{f}(s, t) = \beta \kappa(s, t) \mathbf{n}(s, t),$$

pour β constante.

Voici un exemple tiré d'un test que nous avons lancé, utilisant l'algorithme implicite présenté ici, et gardant la même méthode de projection que dans le cas d'une membrane fixe. Avec un pas de temps $\Delta t = 1/32$, dans une grille MAC de 16×16 cellules, on laisse la membrane libre de se déplacer. Après quelques itérations, la membrane croise une première fois certains points de la grille, marqués par des points noirs sur la figure 3.2.

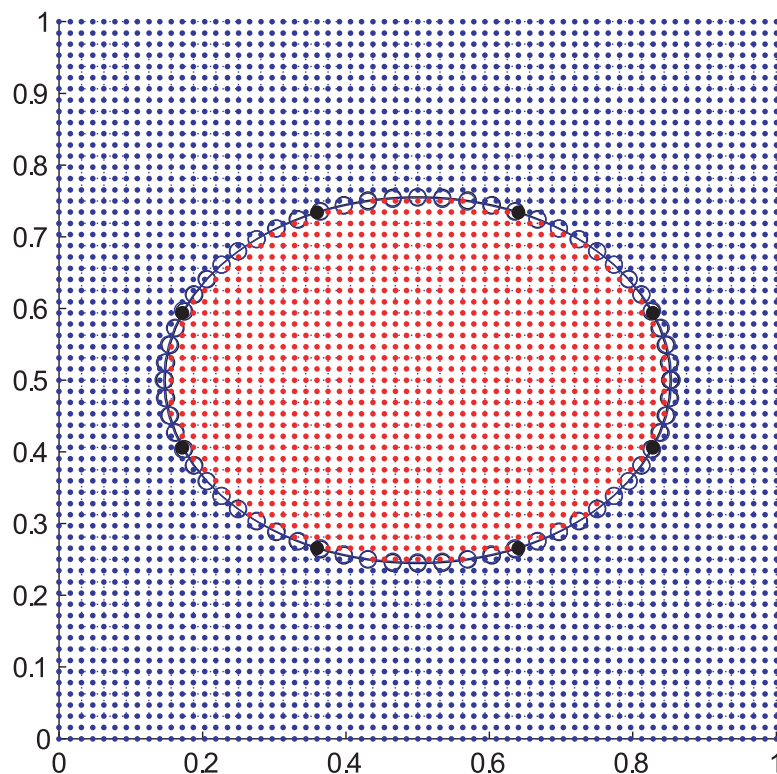


FIG. 3.2. La membrane traverse certains points (marqués en noir) de la grille de calcul.

Notons d'abord que dans l'exemple choisi ici, parmi les 8 points traversés par la membrane, les 2 points en haut, et les 2 points en bas font partie de la grille p , où la pression est calculée. Le résultat que nous obtenons pour la pression, à la fin de cette étape, est présenté en figure 3.3.

Ce qu'on constate, c'est que même si les 4 points traversés sont maintenant à l'intérieur de la membrane, la pression a été calculée comme s'ils étaient toujours à l'extérieur. Pour comprendre cela, rappelons que la pression est évaluée avec

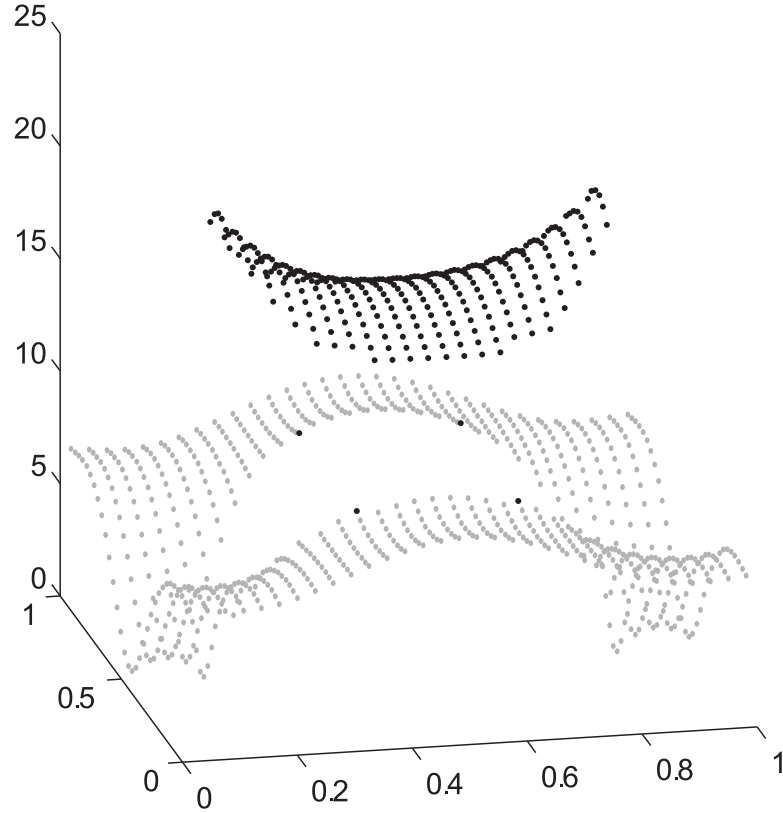


FIG. 3.3. Aux points de p traversés par la membrane, la pression est nettement sous-évaluée. Les points gris représentent la pression à l'extérieur de la membrane, et les points noirs la pression à l'intérieur.

l'équation :

$$p^{n+\frac{1}{2}} = p^{n-\frac{1}{2}} + \phi^{n+1} - \frac{\mu}{2} \nabla \cdot \mathbf{u}^*.$$

Or, à partir des conditions de saut présentées dans l'annexe 1, on peut montrer que $[\nabla \cdot \mathbf{u}^*] = O(\Delta t)$, et que ϕ^{n+1} est une fonction continue. Par conséquent, les points où surviennent les sauts de p ne peuvent se déplacer, d'une étape à l'autre. Ils resteront à l'emplacement de la membrane initiale, comme on le constate sur la figure 3.3.

Penchons-nous maintenant sur les 4 autres points traversés par la membrane : ils font partie de la grille v . La pression n'y est donc pas calculée, mais v^* , l'est. Comme on le constate sur la figure 3.4, la divergence $\nabla \cdot \mathbf{u}^*$ calculée à cette étape se trouve grandement déformée autour des 4 points traversés par l'interface.

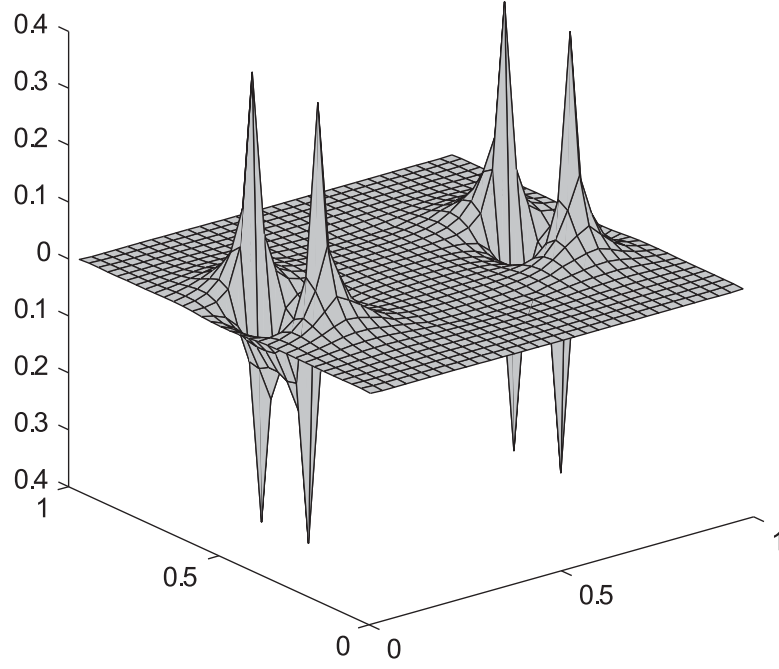


FIG. 3.4. Divergence de \mathbf{u}^* . Comme le fluide est incompressible et que $\mathbf{u}^* \approx \mathbf{u}^{n+1}$, $\nabla \cdot \mathbf{u}^*$ devrait être très proche de zéro. Ça n'est pas le cas autour des points qui ont été traversés par la membrane.

De tels phénomènes introduisent des erreurs d'ordre 0 dans les solutions du problème, rendant la méthode inutilisable. Ces erreurs sont engendrées par le fait que lorsque la membrane traverse un point de la grille, elle crée une discontinuité temporelle en ce point, alors que nous n'avons appliqué que des corrections spatiales avec la méthode IIM. Nous présenterons donc ici une manière de traiter les discontinuités temporelles.

3.5. LE MOMENT D'INTERSECTION

On a vu que les problèmes surviennent lorsqu'un point, dans l'une des trois grilles \mathbf{u} , \mathbf{v} ou \mathbf{p} , est traversé par la membrane dans un intervalle de temps où sont effectués certains calculs. Par exemple, pour évaluer $\partial \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} / \partial t$, on utilise l'approximation

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = \frac{\partial \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}}{\partial t} + O(\Delta t^2),$$

qui n'est vraie que dans le cas où \mathbf{u} , $\partial \mathbf{u} / \partial t$ et $\partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2$ sont continues dans le segment $[n\Delta t, (n+1)\Delta t]$.

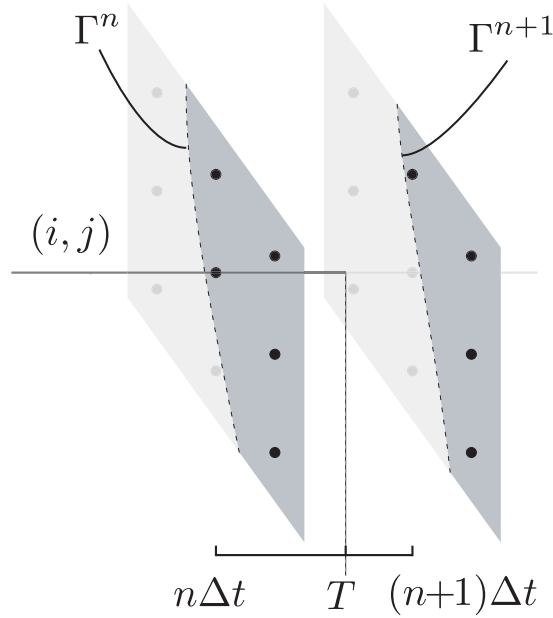


FIG. 3.5. Le point (i, j) , traversé au temps T . La membrane peut en effet traverser un point de la grille. Lorsque cela se produit, pour appliquer les corrections nécessaires, il faut trouver le moment T où cet événement s'est produit.

Pour corriger de tels opérateurs, on peut utiliser la même stratégie que pour les discontinuités dans l'espace, présentées au chapitre 2. Il suffit d'en répéter le raisonnement, dans l'axe du temps. Si on veut y arriver, il nous faudra connaître les points de discontinuité temporels t_1, t_2, \dots, t_m , c'est-à-dire les *moments d'intersection*. Ce sont les points d'intersection entre la membrane en mouvement et la grille de calcul, dans le temps. Malheureusement, en modélisant la membrane par des splines cubiques successives, aucun lien n'est fait entre les membranes aux différentes étapes, ce qui nous empêche d'évaluer ces points comme on le faisait avec les points d'intersection dans l'espace.

Ainsi, nous devons travailler avec l'hypothèse qu'en chaque intervalle de temps de longueur Δt , un point de la grille de calcul est traversé au plus une fois par la membrane. On en déduit qu'un point x , dans un intervalle de temps $[n\Delta t, (n+1)\Delta t]$, a été traversé si et seulement si x est passé de Ω^- à Ω^+ , ou de Ω^+ à Ω^- .

À l'étape $n+1$ de l'algorithme, pour un point (i, j) de la grille de calcul traversé par la membrane, soit T l'unique moment d'intersection (voir figure 3.5). Pour que les opérateurs temporels que nous allons corriger soient au moins d'ordre $O(\Delta t)$, il nous faut obtenir une approximation d'ordre $O(\Delta t)$ pour T . Bien que n'importe quelle valeur dans $[n\Delta t, (n+1)\Delta t]$ satisfasse cette condition, nous choisirons une manière plus adéquate de faire cette estimation.

La figure 3.6 illustre cette méthode. Supposons que la membrane a traversé le point (i, j) de la gauche vers la droite. Alors on peut trouver une intersection entre Γ^n et la grille de calcul, à une distance de d_x^0 du point traversé, et une intersection entre Γ^{n+1} et la grille de calcul à une distance de d_x^1 du point traversé. Dans le cas où la vitesse \mathbf{u} est restée constante et purement horizontale durant ce trajet, le moment d'intersection peut être calculé ainsi :

$$T = \Delta t \left(n + \frac{d_x^0}{d_x^0 + d_x^1} \right).$$

Dans le cas général, on utilisera quand même cette approximation, dont la précision sera d'ordre $O(\Delta t)$. Si le point n'a pas été traversé horizontalement, alors on utilisera le même raisonnement sur un axe vertical :

$$T = \Delta t \left(n + \frac{d_y^0}{d_y^0 + d_y^1} \right) + O(\Delta t).$$

On combinera ces deux méthodes lorsque cela sera possible :

$$T = \Delta t \left(n + \frac{d_x^0/2}{d_x^0 + d_x^1} + \frac{d_y^0/2}{d_y^0 + d_y^1} \right) + O(\Delta t).$$

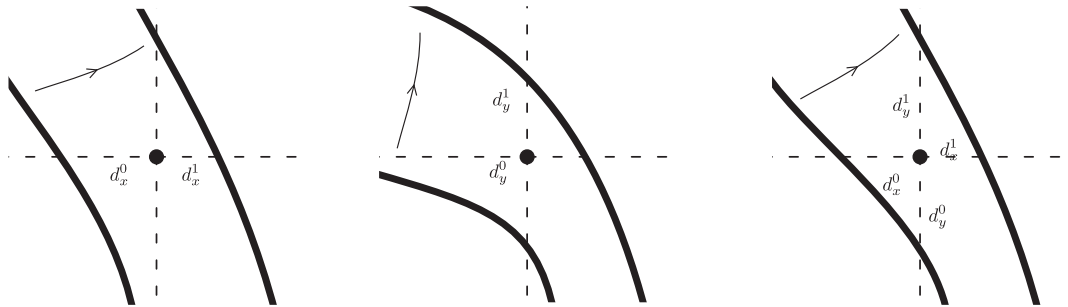


FIG. 3.6. Selon les distances entre Γ^n , Γ^{n+1} et le point traversé, on cherche à estimer correctement le moment d'intersection.

3.6. CORRECTION DES OPÉRATEURS TEMPORELS

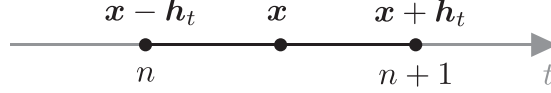


FIG. 3.7. On considère un développement de Taylor dans le temps, autour du point $\mathbf{x} = (x_1, x_2, (n + 1/2)\Delta t)$, pour corriger les opérateurs temporels.

Pour conserver la même précision que dans le cas d'une membrane fixe, nous allons chercher à apporter les termes de correction suffisants pour que les opérateurs corrigés soient $O(\Delta t)$ aux points traversés par l'interface. Pour y arriver, nous il nous suffit d'étendre les résultats du chapitre 2 aux trois dimensions : (x, y, t) . Pour $\mathbf{x} = (x_1, x_2, (n + 1/2)\Delta t)$ et $\mathbf{h}_t = (0, 0, \Delta t/2)$, le théorème de Taylor généralisé, pour une fonction $g \in C^2[\Omega \setminus \Gamma]$ nous permet d'en faire un développement d'ordre 1 :

$$g(\mathbf{x} + \mathbf{h}_t) = g(\mathbf{x}) + C_g^0(\mathbf{x}, \mathbf{h}_t) + O(\Delta t), \quad (3.6.1)$$

$$g(\mathbf{x} - \mathbf{h}_t) = g(\mathbf{x}) + C_g^0(\mathbf{x}, -\mathbf{h}_t) + O(\Delta t). \quad (3.6.2)$$

Comme nous supposons que la membrane traverse un point de la grille une fois par intervalle de temps $[n\Delta t, (n + 1)\Delta t]$, on peut exprimer les termes de correction de la forme C^0 en utilisant les conditions de saut. On trouve que :

$$C_g^0(\mathbf{x}, \mathbf{h}_t) = \begin{cases} -\sigma(\mathbf{x} - \mathbf{h}_t)[g] & \text{si le point est traversé dans } [(n + \frac{1}{2})\Delta t, (n + 1)\Delta t], \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.6.3)$$

et

$$C_g^0(\mathbf{x}, -\mathbf{h}_t) = \begin{cases} \sigma(\mathbf{x} - \mathbf{h}_t)[g] & \text{si le point est traversé dans } [n\Delta t, (n + \frac{1}{2})\Delta t], \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.6.4)$$

Pour la suite, il sera plus simple d'écrire $[g]_T^+$ pour désigner $C_g^0(\mathbf{x}, \mathbf{h}_t)$ et $[g]_T^-$ pour désigner $C_g^0(\mathbf{x}, -\mathbf{h}_t)$. On a donc

$$g(\mathbf{x} + \mathbf{h}_t) = g(\mathbf{x}) + [g]_T^+ + O(\Delta t), \quad (3.6.5)$$

$$g(\mathbf{x} - \mathbf{h}_t) = g(\mathbf{x}) + [g]_T^- + O(\Delta t). \quad (3.6.6)$$

On utilisera aussi le développement à l'ordre 2 :

$$g(\mathbf{x} + \mathbf{h}_t) = g(\mathbf{x}) + \frac{\Delta t}{2} g_t(\mathbf{x}) + C_g^1(\mathbf{x}, \mathbf{h}_t) + O(\Delta t^2), \quad (3.6.7)$$

$$g(\mathbf{x} - \mathbf{h}_t) = g(\mathbf{x}) - \frac{\Delta t}{2} g_t(\mathbf{x}) + C_g^1(\mathbf{x}, -\mathbf{h}_t) + O(\Delta t^2). \quad (3.6.8)$$

La manière dont on avait défini les termes de correction en (2.4.2) reste en vigueur ici, c'est-à-dire qu'on a

$$C_g^1(\mathbf{x}, \mathbf{h}_t) = \begin{cases} -\sigma(\mathbf{x}) ([g] + \|\mathbf{h}_t\| [g']) & \text{si } T \in [(n + \frac{1}{2})\Delta t, (n + 1)\Delta t), \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$C_g^1(\mathbf{x}, -\mathbf{h}_t) = \begin{cases} -\sigma(\mathbf{x}) ([g] - \|\mathbf{h}_t\| [g']) & \text{si } T \in [n\Delta t, (n + \frac{1}{2})\Delta t), \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Dans le cas qui nous occupe, précisons qu'on a

$$\|\mathbf{h}_t\| = \begin{cases} (n + 1)\Delta t - T & \text{si } T \in [n\Delta t, (n + \frac{1}{2})\Delta t), \\ T - n\Delta t & \text{sinon} \end{cases},$$

et

$$\sigma(\mathbf{x}) = \begin{cases} \sigma(\mathbf{x} - \mathbf{h}_t) & \text{si } T \in [n\Delta t, (n + \frac{1}{2})\Delta t), \\ -\sigma(\mathbf{x} - \mathbf{h}_t) & \text{sinon} \end{cases}.$$

On conclut donc que

$$C_g^1(\mathbf{x}, \mathbf{h}_t) = \begin{cases} -\sigma(\mathbf{x} - \mathbf{h}_t) ([g] + ((n + 1)\Delta t - T) [g_t]) & \text{si } T \in [(n + \frac{1}{2})\Delta t, (n + 1)\Delta t), \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$C_g^1(\mathbf{x}, -\mathbf{h}_t) = \begin{cases} \sigma(\mathbf{x} - \mathbf{h}_t) ([g] + (T - n\Delta t) [g_t]) & \text{si } T \in [(n + \frac{1}{2})\Delta t, (n + 1)\Delta t), \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

À l'aide de ces résultats, il sera possible d'appliquer les corrections nécessaires à chaque opérateur agissant dans le temps.

3.6.1. Correction de DT

L'opérateur de différences finies associé à $\partial/\partial t$, que nous noterons DT, devra désormais inclure un terme de correction. On aura alors :

$$\text{DT}_u^u u^{n+\frac{1}{2}} = \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = \frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial t} + \mathcal{C}\{\text{DT}_u^u u^{n+\frac{1}{2}}\} + O(\Delta t).$$

Ce terme de correction se déduit directement de (3.6.7) et (3.6.8) :

$$\mathcal{C}\{\text{DT}_u^u u^{n+\frac{1}{2}}\} = \frac{1}{\Delta t} (C_u^1(\mathbf{x}, \mathbf{h}_t) - C_u^1(\mathbf{x}, -\mathbf{h}_t)).$$

Et $\mathcal{C}\{\text{DT}_v^v v^{n+\frac{1}{2}}\}$ est obtenu de la même manière.

Pour le calcul de ces valeurs, on aura besoin de la condition de saut pour \mathbf{u}_t , dont le calcul est présenté dans l'annexe 1 :

$$[\mathbf{u}_t] = -(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) [\mathbf{u}_n].$$

3.6.2. Correction de l'estimateur de $\Delta \mu \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}$.

En appliquant (3.6.5) et (3.6.6) à l'estimation de $\Delta \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}$, on conclut que

$$\frac{\mu}{2} (\Delta \mathbf{u}^{n+1} + \Delta \mathbf{u}^n) = \mu \Delta \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\mu}{2} ([\Delta \mathbf{u}]_T^+ + [\Delta \mathbf{u}]_T^-) + O(\Delta t).$$

3.6.3. Correction de l'extrapolation d'Adams-Bashforth

En utilisant judicieusement les conditions de sauts, il est possible d'obtenir des termes de correction qui nous permettraient de conserver une extrapolation d'ordre 2, comme dans le cas d'une membrane fixe. Nous nous contentons cependant ici de proposer un opérateur d'ordre 1 aux points traversés par la membrane, et d'ordre 2 ailleurs, comme c'est le cas pour les autres estimations proposées.

Supposons que la membrane ne traverse aucun point entre les étapes n et $n + 1/2$. Alors on peut obtenir une estimation très simple de $(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})^{n+\frac{1}{2}}$ en posant :

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})^{n+\frac{1}{2}} = (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})^n + O(\Delta t).$$

Aux points qui ne sont pas non plus traversés entre les étapes $n - 1$ et n , on peut évidemment utiliser la même approximation d'ordre 2 que dans les chapitres

précédents. Par conséquent, on utilisera :

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})^{n+\frac{1}{2}} = \begin{cases} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})^n \text{ aux points traversés dans } [n-1, n], \\ \frac{3}{2}(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})^n - \frac{1}{2}(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})^{n-1} \text{ ailleurs.} \end{cases}$$

Pour étendre cette approximation aux points traversés par la membrane entre les étapes n et $n + 1/2$, il nous faut ajouter un terme de correction C qu'on peut obtenir directement de (3.6.6). On trouvera :

$$C = -[\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}]_T^- = -\mathbf{u} \cdot [\nabla \mathbf{u}]_T^-.$$

3.6.4. Correction de l'estimateur de pression

Dans le cas d'une membrane fixe, nous avons utilisé le fait que

$$p^{n+\frac{1}{2}} = p^{n-\frac{1}{2}} + O(\Delta t). \quad (3.6.9)$$

Cependant, en un point (x_1, x_2) traversé par la membrane entre les étapes $n - 1/2$ et $n + 1/2$, cette approximation n'est plus valide. Nous allons appliquer le même raisonnement que dans le reste de cette section, en considérant l'intervalle $[(n - 1/2)\Delta t, (n + 1/2)\Delta t]$ au lieu de $[n\Delta t, (n + 1)\Delta t]$.

Soit $\bar{T} \in [(n - 1/2)\Delta t, (n + 1/2)\Delta t]$, le moment où le point est traversé dans cet intervalle. En utilisant $\bar{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, n\Delta t)$, on posera

$$[p]_{\bar{T}}^+ = C_g^0(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{h}_t)$$

et

$$[p]_{\bar{T}}^- = C_g^0(\bar{\mathbf{x}}, -\mathbf{h}_t).$$

Alors, le même raisonnement qu'en (3.6.5) peut être utilisé pour obtenir la version corrigée de (3.6.9) :

$$p^{n+\frac{1}{2}} = p^{n-\frac{1}{2}} + ([p]_{\bar{T}}^+ - [p]_{\bar{T}}^-) + O(\Delta t). \quad (3.6.10)$$

La formule corrigée à utiliser dans l'algorithme n'est donc plus

$$p^{n+\frac{1}{2}} = p^{n-\frac{1}{2}} + \phi^{n+1} - \frac{\mu}{2}(\nabla \cdot \mathbf{u}^*),$$

mais bien

$$p^{n+\frac{1}{2}} = p^{n-\frac{1}{2}} + ([p]_{\bar{T}}^+ - [p]_{\bar{T}}^-) + \phi^{n+1} - \frac{\mu}{2}(\nabla \cdot \mathbf{u}^*).$$

3.7. ALGORITHME CORRIGÉ DANS LE CAS D'UNE MEMBRANE EN MOUVEMENT

Pour résoudre le problème dans le cas d'une membrane libre de se déplacer, on utilisera l'algorithme implicite 1, combiné avec la méthode de projection PM2 à laquelle on a appliqué les termes de correction spatiaux et temporels appropriés.

Au début de l'étape $n+1$ de l'algorithme, les valeurs $\mathbf{u}^k, \phi^k, \Delta \mathbf{u}^k$ sont connues pour tout entier $k \leq n$, ainsi que la valeur intermédiaire $(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})^{n+\frac{1}{2}}$.

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{1}{\Delta t} \mathbb{I}_u^u - \frac{\mu}{2} \Delta_u^u \right) u^* = -p_x^{n-\frac{1}{2}} - (\mathbf{u} \cdot \nabla u)^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{u} \cdot [\nabla u]_T^- \\
 1: & \quad + \frac{u^n}{\Delta t} + \frac{\mu}{2} (\Delta u)^n + G_1^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\mu}{2} \mathbb{C}\{\Delta_u^u u^*\} + \mathbb{C}\{\text{DT}_u^u u^n\} \\
 & \quad - \frac{\mu}{2} ([\Delta u]_T^+ + [\Delta u]_T^-); \\
 & \left(\frac{1}{\Delta t} \mathbb{I}_v^v - \frac{\mu}{2} \Delta_v^v \right) v^* = -p_y^{n-\frac{1}{2}} - (\mathbf{u} \cdot \nabla v)^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{u} \cdot [\nabla v]_T^- \\
 2: & \quad + \frac{v^n}{\Delta t} + \frac{\mu}{2} (\Delta v)^n + G_2^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\mu}{2} \mathbb{C}\{\Delta_v^v v^*\} + \mathbb{C}\{\text{DT}_v^v v^n\} \\
 & \quad - \frac{\mu}{2} ([\Delta v]_T^+ + [\Delta v]_T^-); \\
 3: & \quad (\nabla \cdot \mathbf{u}^*) = \text{DX}_u^p u^* - \mathbb{C}\{\text{DX}_u^p u^*\} + \text{DY}_v^p v^* - \mathbb{C}\{\text{DY}_v^p v^*\}; \\
 4: & \quad \Delta_p^p \phi^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} (\nabla \cdot \mathbf{u}^*) + \mathbb{C}\{\Delta_p^p \phi^{n+1}\}; \\
 5: & \quad u^{n+1} = u^* - \Delta t (\text{DX}_p^u \phi^{n+1} - \mathbb{C}\{\text{DX}_p^u \phi^{n+1}\}); \\
 6: & \quad v^{n+1} = v^* - \Delta t (\text{DY}_p^v \phi^{n+1} - \mathbb{C}\{\text{DY}_p^v \phi^{n+1}\}); \\
 7: & \quad p^{n+\frac{1}{2}} = p^{n-\frac{1}{2}} + ([p]_T^+ - [p]_T^-) + \phi^{n+1} - \frac{\mu}{2} (\nabla \cdot \mathbf{u}^*); \\
 8: & \quad p_x^{n+\frac{1}{2}} = \text{DX}_p^u p^{n+\frac{1}{2}} - \mathbb{C}\{\text{DX}_p^u p^{n+\frac{1}{2}}\}; \\
 9: & \quad p_y^{n+\frac{1}{2}} = \text{DY}_p^v p^{n+\frac{1}{2}} - \mathbb{C}\{\text{DY}_p^v p^{n+\frac{1}{2}}\};
 \end{aligned}$$

$$10: \quad (\Delta u)^{n+1} = \Delta_u^u u^{n+1} - \mathcal{C}\{\Delta_u^u u^{n+1}\};$$

$$11: \quad (\Delta v)^{n+1} = \Delta_v^v v^{n+1} - \mathcal{C}\{\Delta_v^v v^{n+1}\};$$

Aux points de la grille de calcul qui ne sont pas traversés par l'interface entre les étapes n et $n + 1$, on pose :

$$12: \quad \begin{aligned} (\mathbf{u} \cdot \nabla u)^{n+\frac{3}{2}} &= \frac{3}{2} u^{n+1} (\mathrm{DX}_u^u u^{n+1} - \mathcal{C}\{\mathrm{DX}_u^u u^{n+1}\}) \\ &+ \frac{3}{2} \Gamma_u^v v^{n+1} (\mathrm{DY}_u^u u^{n+1} - \mathcal{C}\{\mathrm{DY}_u^u u^{n+1}\}) \\ &- \frac{1}{2} (u^n (\mathrm{DX}_u^u u^n - \mathcal{C}\{\mathrm{DX}_u^u u^n\}) + \Gamma_u^v v^n (\mathrm{DY}_u^u u^n - \mathcal{C}\{\mathrm{DY}_u^u u^n\})); \end{aligned}$$

$$13: \quad \begin{aligned} (\mathbf{u} \cdot \nabla v)^{n+\frac{3}{2}} &= \frac{3}{2} \Gamma_v^u u^{n+1} (\mathrm{DX}_v^v v^{n+1} - \mathcal{C}\{\mathrm{DX}_v^v v^{n+1}\}) \\ &+ \frac{3}{2} v^{n+1} (\mathrm{DY}_v^v v^{n+1} - \mathcal{C}\{\mathrm{DY}_v^v v^{n+1}\}) \\ &- \frac{1}{2} (\Gamma_v^u u^n (\mathrm{DX}_v^v v^n - \mathcal{C}\{\mathrm{DX}_v^v v^n\}) + v^n (\mathrm{DY}_v^v v^n - \mathcal{C}\{\mathrm{DY}_v^v v^n\})); \end{aligned}$$

Aux points de la grille de calcul qui ont été traversés par l'interface entre les étapes n et $n + 1$, on pose plutôt :

$$12: \quad (\mathbf{u} \cdot \nabla u)^{n+\frac{3}{2}} = u^{n+1} (\mathrm{DX}_u^u u^{n+1} - \mathcal{C}\{\mathrm{DX}_u^u u^{n+1}\}) + \Gamma_u^v v^{n+1} (\mathrm{DY}_u^u u^{n+1} - \mathcal{C}\{\mathrm{DY}_u^u u^{n+1}\});$$

$$13: \quad (\mathbf{u} \cdot \nabla v)^{n+\frac{3}{2}} = \Gamma_v^u u^{n+1} (\mathrm{DX}_v^v v^{n+1} - \mathcal{C}\{\mathrm{DX}_v^v v^{n+1}\}) + v^{n+1} (\mathrm{DY}_v^v v^{n+1} - \mathcal{C}\{\mathrm{DY}_v^v v^{n+1}\});$$

Nous sommes confiants d'avoir présenté ici une méthode qui fonctionnera pour le cas général d'une membrane en mouvement. Cependant, quelques erreurs de programmation, liées au calcul des termes de correction aux points traversés par la membrane (termes de correction temporels) n'ont pas pu être corrigés avant le dépôt de ce mémoire. Pour cette raison, il nous est impossible de présenter des résultats numériques concluants. La rédaction et la correction de ce chapitre par

plusieurs lecteurs nous a permis d'identifier les possibles erreurs du programme. Sur cette base, nous travaillons présentement sur les simulations numériques associées au problème.

CONCLUSION

3.8. CONCLUSION

Le problème considéré dans ce projet : une membrane élastique dans un fluide visqueux, et la méthode générale utilisée : l'*Immersed Interface Method*, ont été étudiés et ont fait l'objet de nombreuses publications. Plusieurs défis restaient cependant à relever au moment de commencer ces travaux. Faciliter la résolution du problème dans le cas où la viscosité n'est pas la même à l'extérieur et à l'intérieur de la membrane, explorer les avantages offerts par l'utilisation d'une grille MAC, et adapter la méthode IIM à d'autres méthodes de projection que PM2, étaient les principales motivations de ce projet.

S'inscrivant dans la suite du travail de Marc Conti, nous allons atteindre ces objectifs en déduisant les conditions de sauts non pas à partir des équations de Navier-Stokes (comme nous le faisons pour \mathbf{u} et p dans l'annexe), mais à partir des équations du schéma numérique utilisé (d'une manière semblable à ce que nous faisons pour \mathbf{u}^* et ϕ^{n+1}).

Nous avons jugé que cette stratégie n'était pas valable au fur et à mesure que nous étions contraints à imposer des hypothèses de plus en plus difficiles à justifier pour continuer dans cette voie. Il devenait alors plus simple et plus rigoureux d'utiliser l'approche classique, c'est-à-dire de déduire les conditions de saut des équations de Navier-Stokes, ce qui a été fait ici.

Cette idée reste néanmoins un des éléments les plus pertinents dans ce mémoire. En effet, de tous les articles et ouvrages consultés sur le sujet, aucun n'offre d'explication claire au choix des conditions de saut pour les valeurs \mathbf{u}^* et ϕ^{n+1} , qui pourtant sont nécessaires pour faire fonctionner la méthode IIM. En utilisant les

équations du schéma numérique, nous offrons cette explication dans la deuxième moitié de l'annexe 1.

Un autre élément qui distingue ce mémoire des diverses publications sur le sujet est la place importante qui est attribuée à la correction des opérateurs temporels. En effet, même si plusieurs auteurs ont réussi à faire fonctionner la méthode avec une membrane en déplacement, nous n'en avons pas trouvé qui expliquent avec clarté comment faire les corrections dans le temps.

D'ailleurs, nous avons nous-mêmes été induits en erreur par ce manque de précision. Croyant que nous pouvions ignorer la petite quantité de points traversés par une membrane en déplacement, nous avons conçu un programme d'une complexité considérable sans même penser à ce détail. Il devenait donc difficile de faire demi-tour, et de refaire plusieurs parties du programme pour y intégrer les corrections temporelles. Le temps requis pour un travail de maîtrise ne nous a donc pas permis d'en arriver à des résultats numériques concluants pour le chapitre 3.

Le lecteur intéressé à des résultats numériques pour un problème semblable est invité à se référer à [13], article dans lequel est résolu le problème de la membrane en déplacement dans une grille MAC, et dans le cas où la viscosité est différente à l'intérieur et à l'extérieur de la membrane. Celui qui voudrait implanter ou adapter cette méthode pour résoudre un problème similaire trouvera dans cet article une bonne idée de ce qui peut être fait, mais nous croyons que ce mémoire serait un outil très pertinent pour comprendre et concevoir le programme associé. S'il devait y avoir suite à ce projet, concevoir ce programme en y intégrant les corrections temporelles appropriées, en s'appuyant sur les raisonnements et informations présentées dans ce mémoire, serait la première étape.

Nous croyons être sur la bonne voie pour apporter une contribution pertinente et originale au domaine. En particulier, on imagine que la méthode IIM devrait pouvoir être appliquée à de nombreux problèmes et méthodes, or il semble que ce soit toujours la méthode de projection PM2 qui soit utilisée pour les équations de Navier-Stokes avec fluides incompressibles. Ce qui justifie cela, c'est qu'avec cette méthode, on peut approximer facilement les conditions de saut pour \mathbf{u}^* et ϕ^{n+1} ,

sans fournir d'arguments comme ceux de l'annexe 1. En répétant notre raisonnement, trouver les conditions de sauts pour une autre méthode de projection devrait être assez direct. En général, le même genre de raisonnement pourrait être utilisé à de nombreuses méthodes à pas fractionnaires, et appliqué à de nombreux problèmes.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] D.L.Brown, Accuracy of the Projection Methods for the Incompressible Navier-Stokes Equations, in *Numerical Simulations of Incompressible Flows*, World Scientific, 2003, pp. 101-107
- [2] D.L. Brown, R. Cortez et M.L. Minion, Accurate Projection Methods for the Incompressible Navier-Stokes Equations, *Journal of Computational Physics* **168**, 464-499 (2001)
- [3] A.J. Chorin, Numerical solution of the Navier-Stokes equations, *Math. Comput.* **22**, no. **104**, 745-762 (1968)
- [4] M. Conti, Une nouvelle implémentation de la méthode IIM pour les équations de Navier-Stokes avec la présence d'une force singulière, Mémoire de maîtrise, Département de mathématiques et de statistiques, *Université de Montréal*, 2008
- [5] J.L. Guermond, P. Mineev et J. Shen, An overview of projection methods for incompressible flows, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **195**, 6011-6045 (2006)
- [6] F.H. Harlow et J.E. Welch, Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface, *Phys. Fluids* **8**, 2182-2190 (1965)
- [7] D.V. Le, B.C. Khoo et J. Peraire, An immersed interface method for viscous incompressible flows involving rigid and flexible boundaries, *J. comp. phys.* **220**, 109-138 (2006)
- [8] L. Lee et R.J. Leveque, An Immersed Interface Method for Incompressible Navier-Stokes Equations, *SIAM J. Sci. Comput.* **25**, no. **3**, 832-856 (2003)
- [9] R.J. LeVeque et Z. Li, Immersed Interface Methods for Stokes Flow with Elastic Boundaries or Surface Tension, *SIAM J. Sci. Comput.* **3**, 709-735 (1997)
- [10] Z. Li et K. Ito, The Immersed Interface Method, *SIAM* , 2006 (332 p.)
- [11] Z. Li et M.C. Lai, The Immersed Interface Method for the Navier-Stokes Equations with Singular Forces, *J. Comp. Phys.* **171**, 822-842 (2001)

- [12] C.S. Peskin et D.M. McQueen, Modeling prosthetic heart valves for numerical analysis of blood flow in the heart, *J. Comput. Phys.* **37**, 113-132 (1980)
- [13] Z. Tan, D.V. Le, Z. Li, K.M. Lim et B.C. Khoo, An immersed interface method for solving incompressible viscous flows with piecewise constant viscosity across a moving elastic membrane, *J. comp. phys.* **227**, 9955-9983 (2008)
- [14] R. Temam, Sur l'approximation de la solution des équations de Navier-Stokes par la méthode des pas fractionnaires, *Archive for Rational Mechanics and Analysis* **32 no. 2**, 135-153 (1969)
- [15] C. Tu et C.S. Peskin, Stability and Instability in the Computation of Flows with Moving Immersed Boundaries : A Comparison of three Methods, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* **13 no.6**, 1361-1376 (1992)
- [16] R. Tyson, R.E. Jordan and J. Hebert, Modelling anguilliform swimming at intermediate Reynolds number : A review and a novel extension of immersed boundary method applications, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **197**, 2105-2118 (2008)

Annexe A

LES CONDITIONS DE SAUT

Dans cet annexe, on présente les dérivations des conditions de saut telles que présentées dans le tableau 2.1. Des preuves similaires peuvent être trouvées, pour les fonctions p et \mathbf{u} , dans [9], entre autres. Cependant, la preuve présentée ici pour les sauts de \mathbf{u}^* et ϕ^{n+1} est originale, les auteurs des ouvrages en bibliographie se contentant généralement de supposer que $\phi^{n+1} \in C^2(\Omega)$, et que les sauts de \mathbf{u}^* sont similaires à ceux de \mathbf{u}^{n+1} .

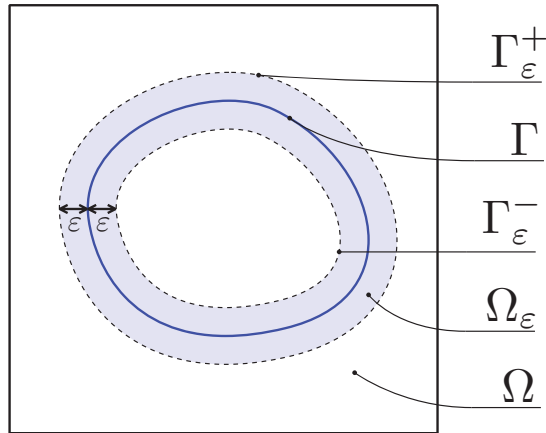


FIG. A.1. Ω_ϵ est une bande de largeur 2ϵ autour de la membrane Γ .

Les preuves présentées ici reposent en grande partie sur l'idée que voici. Comme illustré sur la figure A.1, on considère Ω_ϵ , une bande de largeur 2ϵ autour de Γ . $\partial\Omega_\epsilon$, la frontière de Ω_ϵ , est alors composée de Γ_ϵ^+ à l'extérieur, et de Γ_ϵ^- à l'intérieur. De cette manière, en rappelant la définition du saut d'une fonction g ,

c'est-à-dire

$$[g](s) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (g(\mathbf{X}(s) + \varepsilon \mathbf{n}(s)) - g(\mathbf{X}(s) - \varepsilon \mathbf{n}(s))),$$

on remarque que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} g(\mathbf{X}(s)) d\hat{s} = \int_\Gamma [g](s) d\hat{s},$$

où \hat{s} représente la distance entre $\mathbf{X}(s)$ et $\mathbf{X}(0)$, mesurée le long de la membrane actuelle alors que s est la distance entre ces points sur la membrane au repos.

En multipliant certaines équations par une fonction test $\varphi \in C^2(\Omega)$, et en y appliquant ce raisonnement, nous serons en mesure de déduire plusieurs sauts importants.

A.1. CONDITIONS DE SAUT POUR LA PRESSION

Appliquons l'opérateur de divergence à l'équation du mouvement (1.0.3) :

$$\nabla \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \Delta p = \nabla \cdot \mu \Delta \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{G} + \nabla \cdot \mathbf{F}. \quad (\text{A.1.1})$$

Comme μ est une constante, l'incompressibilité du fluide nous assure que

$$\nabla \cdot \mu \Delta \mathbf{u} = \mu \Delta (\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0.$$

En multipliant l'équation (A.1.1) par une fonction test $\varphi \in C^2(\Omega)$, et en considérant la limite de l'intégrale sur Ω_ε , on obtient :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\nabla \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \Delta p - \nabla \cdot \mathbf{F} - \nabla \cdot \mathbf{G} \right) \varphi d\mathbf{x} = 0. \quad (\text{A.1.2})$$

Nous allons maintenant étudier chacun des termes de cette équation. Pour commencer, notons que

$$\begin{aligned} \varphi \Delta p &= \nabla \cdot (\varphi \nabla p) - \nabla p \cdot \nabla \varphi \\ &= \nabla \cdot (\varphi \nabla p) - \nabla \cdot (p \nabla \varphi) + p \Delta \varphi. \end{aligned}$$

Cela entraîne que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Omega_\varepsilon} \varphi \Delta p d\mathbf{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Omega_\varepsilon} (\nabla \cdot (\varphi \nabla p - p \nabla \varphi) + p \Delta \varphi) d\mathbf{x}. \quad (\text{A.1.3})$$

Comme $p\Delta\varphi$ est borné, on a $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Omega_\varepsilon} p\Delta\varphi dV = 0$, ce qui nous permet d'éliminer le second terme du membre de droite. Il suffit alors d'appliquer le théorème de la divergence sur le premier terme pour montrer que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Omega_\varepsilon} \varphi \Delta p d\mathbf{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} (\varphi \nabla p - p \nabla \varphi) \cdot \mathbf{n} d\hat{s}. \quad (\text{A.1.4})$$

En utilisant la définition du saut, on peut réexprimer ceci comme :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Omega_\varepsilon} \varphi \Delta p d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} [p_{\mathbf{n}}] \varphi - [p] \varphi_{\mathbf{n}} d\hat{s}.$$

Étudions maintenant le terme lié à \mathbf{G} . On note que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Omega_\varepsilon} (\nabla \cdot \mathbf{G}) \varphi d\mathbf{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Omega_\varepsilon} (\nabla \cdot (\varphi \mathbf{G}) - \mathbf{G} \cdot \nabla \varphi) d\mathbf{x}. \quad (\text{A.1.5})$$

Le fait que $\varphi \in C^2(\Omega)$ assure que $\mathbf{G} \cdot \nabla \varphi$ est bornée. On a donc

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Omega_\varepsilon} \mathbf{G} \cdot \nabla \varphi d\mathbf{x} = 0.$$

Cela nous permet d'éliminer le terme $\mathbf{G} \cdot \nabla \varphi$ de (A.1.5). En appliquant le théorème de la divergence sur l'autre terme, on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Omega_\varepsilon} (\nabla \cdot \varphi \mathbf{G}) d\mathbf{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Omega_\varepsilon} \varphi \mathbf{G} \cdot \mathbf{n} d\hat{s}.$$

En exprimant cela en utilisant les sauts, on obtient

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Omega_\varepsilon} (\nabla \cdot \mathbf{G}) \varphi d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} \varphi [\mathbf{G} \cdot \mathbf{n}] d\hat{s}.$$

Comme la membrane est imperméable, aucun saut ne peut survenir en suivant une trajectoire de fluide. C'est donc dire que la dérivée matérielle $D\mathbf{u}/Dt$ n'a pas de sauts et ainsi, est bornée. Le terme lié à cette dérivée matérielle peut donc être traité de la même manière que le terme lié à \mathbf{G} . On obtient donc :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Omega_\varepsilon} \varphi \nabla \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Dt} d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} \varphi \left[\frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot \mathbf{n} \right] d\hat{s}.$$

Mais comme nous venons de l'expliquer, le saut de la dérivée matérielle est nul.

On a donc

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Omega_\varepsilon} \varphi \nabla \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Dt} d\mathbf{x} = 0.$$

Pour étudier le terme lié à la force \mathbf{F} , écrivons d'abord

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \varphi \nabla \cdot \mathbf{F} d\mathbf{x} = \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla \cdot (\varphi \mathbf{F}) d\mathbf{x} - \int_{\Omega_\varepsilon} \mathbf{F} \cdot \nabla \varphi d\mathbf{x}.$$

Le théorème de la divergence, appliqué au premier terme du membre de droite, entraîne

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla \cdot (\varphi \mathbf{F}) d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \varphi \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\hat{s}.$$

Or, pour tout $\varepsilon > 0$, ceci vaut 0 car la fonction \mathbf{F} est nulle partout ailleurs que sur Γ .

Le second terme, lui, peut être décomposé ainsi :

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \mathbf{F} \cdot \nabla \varphi d\mathbf{x} = \int_{\Omega_\varepsilon} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) \varphi_n d\mathbf{x} + \int_{\Omega_\varepsilon} (\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau}) \varphi_\tau d\mathbf{x}.$$

En utilisant la définition de \mathbf{F} , c'est-à-dire

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \mathbf{f}(\hat{s}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(\hat{s})) d\hat{s},$$

on est en mesure d'écrire

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) \varphi_n d\mathbf{x} &= \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\int_{\Gamma} \mathbf{f}(s) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(s)) d\hat{s} \right) \cdot \mathbf{n} \varphi_n d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Gamma} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}) \varphi_n d\hat{s}. \end{aligned}$$

De la même manière, on peut voir que

$$\int_{\Omega_\varepsilon} (\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau}) \varphi_\tau d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} (\mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\tau}) \varphi_\tau d\hat{s},$$

ou encore

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\tau}) \varphi' d\hat{s}, \tag{A.1.6}$$

où (\prime) représente la dérivée le long de l'interface, c'est-à-dire

$$\varphi'(s) = \frac{d\varphi(\mathbf{X}(s))}{d\hat{s}} \bigg/ \left\| \frac{d\mathbf{X}(s)}{d\hat{s}} \right\|.$$

Ainsi, on pourra intégrer (A.1.6) par parties. Comme la courbe d'intégration Γ est fermée, on trouve :

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\tau}) \varphi' d\hat{s} = - \int_{\Gamma} (\mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\tau})' \varphi d\hat{s}.$$

On est alors en mesure de conclure que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Omega_\varepsilon} \varphi \nabla \cdot \mathbf{F} d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} ((\mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\tau})' \varphi - (\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}) \varphi_n) d\hat{s} \tag{A.1.7}$$

Maintenant, en réécrivant (A.1.2) à l'aide des expressions obtenues pour chacun des termes y figurant, on obtient :

$$\int_{\Gamma} (([p_n] - [\mathbf{G} \cdot \mathbf{n}] - (\mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\tau})') \varphi + (\mathbf{f} \cdot \mathbf{n} - [p]) \varphi_n) d\hat{s} = 0. \quad (\text{A.1.8})$$

Mais la fonction test $\varphi(\mathbf{x}) \in C^2(\Omega)$ est arbitraire. Ceci implique que les fonctions $\varphi(\mathbf{X}(s))$ et $\varphi_n(\mathbf{X}(s))$, dans $C^2(\Gamma)$, peuvent être choisies arbitrairement et indépendamment. On peut donc conclure que :

$$[p_n] = [\mathbf{G} \cdot \mathbf{n}] + (\mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\tau})', \quad (\text{A.1.9})$$

et

$$[p] = \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}. \quad (\text{A.1.10})$$

A.1.1. Système de coordonnées local

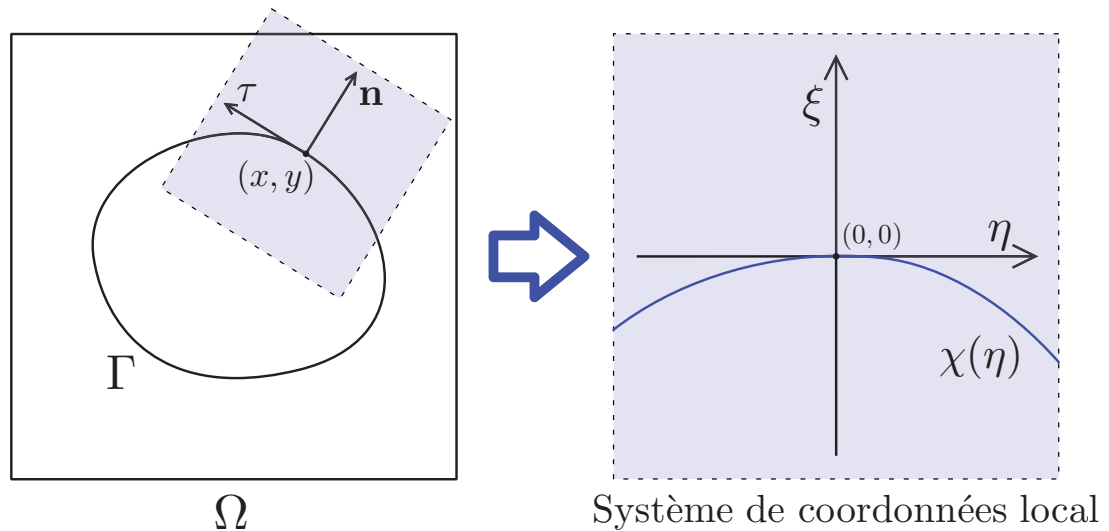


FIG. A.2. On définit un système de coordonnées local (η, ξ) dans lequel le point $\mathbf{X}(s)$ est l'origine, et dans lequel les vecteurs $\mathbf{n}(s)$ et $\boldsymbol{\tau}(s)$ coïncident avec les axes.

Plaçons-nous maintenant dans un système de coordonnées local qui nous permettra d'aller plus loin dans le calcul des conditions de saut. Autour de n'importe quel point s sur l'interface, on peut définir un système de coordonnées dans lequel $\mathbf{X}(s)$ est l'origine, et dans lequel les axes (η, ξ) correspondent aux vecteurs $\boldsymbol{\tau}(s)$ et $\mathbf{n}(s)$, respectivement.

Au voisinage de l'origine, dans ce système, il est alors possible d'exprimer Γ comme une fonction qu'on notera $\chi(\eta)$. En dérivant une fonction, $p(\mathbf{x})$ par exemple, le long de l'interface, on aura

$$\frac{dp}{d\eta} = \frac{\partial p}{\partial \eta} + \chi'(\eta) \frac{\partial p}{\partial \xi}, \text{ et}$$

$$\frac{d^2 p}{d\eta^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial \eta^2} + \chi''(\eta) \frac{\partial p}{\partial \xi} + 2\chi'(\eta) \frac{\partial^2 p}{\partial \eta \partial \xi} + (\chi'(\eta))^2 \frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2}.$$

Or, on a défini le système de coordonnées de façon à avoir $\chi(0) = \chi'(0) = 0$. Par conséquent, au voisinage de $\eta = 0$, les dérivations se simplifient grandement. En posant $\kappa = \chi''(0)$, la courbure de l'interface, on aura :

$$\left. \frac{dp}{d\eta} \right|_{\eta=0} = \left. \frac{\partial p}{\partial \eta} \right|_{\eta=0},$$

$$\left. \frac{d^2 p}{d\eta^2} \right|_{\eta=0} = \left. \frac{\partial^2 p}{\partial \eta^2} \right|_{\eta=0} + \kappa \left. \frac{\partial p}{\partial \xi} \right|_{\eta=0}.$$

En appliquant la première de ces dérivations sur la conditions de saut (A.1.10), on trouvera :

$$[p]' = (\mathbf{f} \cdot \mathbf{n})' = [p_\eta].$$

Les conditions de saut pour p , dans ce système de coordonnées, se résument alors ainsi :

$$[p] = \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}, \tag{A.1.11}$$

$$[p_\xi] = [\mathbf{G} \cdot \mathbf{n}] + (f \cdot \boldsymbol{\tau})', \tag{A.1.12}$$

$$[p_\eta] = (\mathbf{f} \cdot \mathbf{n})'. \tag{A.1.13}$$

A.2. CONDITIONS DE SAUT POUR LA VITESSE

Pour obtenir les conditions de saut pour \mathbf{u} , on procède de manière similaire. En multipliant directement l'équation du mouvement par une fonction test $\varphi \in C^2(\Omega)$, et en considérant la limite de l'intégrale sur Ω_ε , on obtient :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \nabla p - \mu \Delta \mathbf{u} - \mathbf{F} - \mathbf{G} \right) \varphi d\mathbf{x} = 0. \tag{A.2.1}$$

Comme $D\mathbf{u}/Dt$ représente une dérivée le long des trajectoires, il s'agit d'une fonction bornée. Par conséquent :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \varphi d\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

De même, comme \mathbf{G} est bornée, on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Omega_\varepsilon} \mathbf{G} \varphi d\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Écrivons maintenant $(\nabla p) \varphi = \nabla(p\varphi) - p\nabla\varphi$. Alors :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Omega_\varepsilon} (\nabla p) \varphi d\mathbf{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla(p\varphi) d\mathbf{x} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Omega_\varepsilon} p\nabla\varphi d\mathbf{x}.$$

Comme p et $\nabla\varphi$ sont bornées, le second terme du membre de droite est $\mathbf{0}$. On applique le théorème de la divergence sur le premier terme pour conclure

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Omega_\varepsilon} (\nabla p) \varphi d\mathbf{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla(p\varphi) d\mathbf{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} p\varphi \mathbf{n} d\hat{s} = \int_{\Gamma} [p] \mathbf{n} \varphi d\hat{s}.$$

Pour le terme associé à $\varphi\Delta\mathbf{u}$, on procède comme on l'a fait précédemment pour $\varphi\Delta p$. On trouve

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Omega_\varepsilon} \varphi\Delta\mathbf{u} d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} [\mathbf{u}_n] \varphi - [\mathbf{u}] \varphi_n d\hat{s}.$$

Finalement, comme $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(s)) \mathbf{f}(s) d\hat{s}$, on a :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Omega_\varepsilon} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \varphi d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} \mathbf{f}(s) \varphi d\hat{s}.$$

De (A.2.1), on conclut alors que pour toute fonction $\varphi \in C^2(\Omega)$,

$$\int_{\Gamma} (([p] \mathbf{n} - [\mu\mathbf{u}_n] - \mathbf{f}(s)) \varphi + [\mu\mathbf{u}] \varphi_n) d\hat{s} = \mathbf{0}, \quad (\text{A.2.2})$$

ce qui entraîne que

$$[\mu\mathbf{u}] = \mathbf{0}, \text{ et} \quad (\text{A.2.3})$$

$$[p] \mathbf{n} - [\mu\mathbf{u}_n] - \mathbf{f} = \mathbf{0}. \quad (\text{A.2.4})$$

En utilisant le fait que $[p] = \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}$, on peut réécrire cette dernière équation comme

$$-[\mu\mathbf{u}_n] = \mathbf{f} - (\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n},$$

ou encore, dans le système de coordonnées (ξ, η) :

$$[\mu\mathbf{u}_\xi] = -(\mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\tau}) \boldsymbol{\tau}. \quad (\text{A.2.5})$$

En considérant la dérivée de ce saut, on aura

$$[\mu \mathbf{u}_\xi]' = -((\mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\tau})' \boldsymbol{\tau})' = [\mu \mathbf{u}_{\xi\eta}].$$

Si on remarque que $\boldsymbol{\tau}' = \kappa \mathbf{n}$, on pourra développer ce saut de la manière suivante :

$$[\mu \mathbf{u}_{\xi\eta}] = -(\mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\tau})' \boldsymbol{\tau} - \kappa (\mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\tau}) \mathbf{n}. \quad (\text{A.2.6})$$

De la même manière, en dérivant le saut $[\mu \mathbf{u}] = 0$, on peut trouver

$$[\mu \mathbf{u}]' = \mathbf{0} = [\mu \mathbf{u}_\eta]$$

et

$$[\mu \mathbf{u}]'' = \mathbf{0} = [\mu \mathbf{u}_{\eta\eta}] + \kappa [\mu \mathbf{u}_\xi].$$

Mais en utilisant $[\mu \mathbf{u}_\xi] = -(\mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\tau}) \boldsymbol{\tau}$, on peut exprimer cette dernière équation comme la condition de saut

$$[\mu \mathbf{u}_{\eta\eta}] = \kappa (\mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\tau}) \boldsymbol{\tau}.$$

Il nous reste maintenant à trouver $[\mu \mathbf{u}_{\xi\xi}]$. Pour y arriver, considérons directement le saut dans l'équation du mouvement :

$$\left[\frac{D\mathbf{u}}{Dt} \right] + [\nabla p] = [\mu \Delta \mathbf{u}] + [\mathbf{F}] + [\mathbf{G}]. \quad (\text{A.2.7})$$

Notons que $[\mathbf{F}] = 0$ car la fonction \mathbf{F} vaut 0 partout ailleurs que sur la membrane. De plus, on a déjà expliqué que tous les sauts de la dérivée matérielle $D\mathbf{u}/Dt$ sont nuls. Comme c'est au saut $[\mu \mathbf{u}_{\xi\xi}]$ que l'on s'intéresse, présentons l'équation sous cette forme :

$$[\mu \mathbf{u}_{\xi\xi}] = -[\mu \mathbf{u}_{\eta\eta}] + [\nabla p] - [\mathbf{G}]. \quad (\text{A.2.8})$$

En développant cette expression selon les sauts déjà obtenus, on trouvera

$$[\mu \mathbf{u}_{\xi\xi}] = -\kappa (\mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\tau}) \boldsymbol{\tau} + (\mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\tau})' \mathbf{n} + (\mathbf{f} \cdot \mathbf{n})' \boldsymbol{\tau} - [\mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\tau}] \boldsymbol{\tau}. \quad (\text{A.2.9})$$

Condition de saut dans le temps

Dans le cas où la membrane se déplace, nous aurons besoin du saut $[\mathbf{u}_t]$ pour faire une correction de premier ordre pour certaines approximations temporelles. Pour trouver cette valeur, on utilise le fait que $[\mathbf{u}] = \mathbf{0}$. En dérivant le long des trajectoires de fluide de chaque côté de cette égalité, on trouve :

$$\frac{D}{Dt} [\mathbf{u}] = 0 = [\mathbf{u}_t] + \mathbf{u} \cdot [\nabla \mathbf{u}],$$

où $\mathbf{u} \cdot [\nabla \mathbf{u}] = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) [\mathbf{u}_\xi]$, car $[\mathbf{u}_\eta] = 0$. On a donc

$$[\mathbf{u}_t] = -(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) [\mathbf{u}_\xi]. \quad (\text{A.2.10})$$

A.3. CONDITIONS DE SAUT POUR L'ESTIMATEUR \mathbf{u}^*

Dans la littérature publiée sur le sujet, on utilise les mêmes conditions de saut pour \mathbf{u}^* que pour \mathbf{u}^{n+1} étant donné que par des choix appropriés dans la méthode, cet estimateur sera d'ordre 2 en précision. Nous allons montrer ici que ce choix peut être partiellement justifié en utilisant les équations des schémas numériques utilisés, mais qu'une précision supplémentaire peut être obtenue pour le saut $[\mathbf{u}_{\xi\xi}^*]$.

Plaçons-nous à l'étape $n + 1/2$. Par la définition de \mathbf{u}^* dans la méthode de projection PM2, l'équation (1.1.5) établit que :

$$\frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \left(\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \nabla \right) \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} + \nabla p^{n-\frac{1}{2}} = \frac{\mu}{2} (\Delta \mathbf{u}^n + \Delta \mathbf{u}^*) + \mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{G}^{n+\frac{1}{2}}. \quad (\text{A.3.1})$$

Si on appliquait exactement le même raisonnement que lors de la dérivation des conditions de saut pour la vitesse \mathbf{u} , qui conduisaient à (A.2.3) et (A.2.4), on obtiendrait :

$$\left[p^{n-\frac{1}{2}} \right] \mathbf{n} - \frac{1}{2} [\mu \mathbf{u}_\xi^n] - \frac{1}{2} [\mu \mathbf{u}_\xi^*] - \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (\text{A.3.2})$$

et

$$\frac{1}{2} [\mu \mathbf{u}^*] + \frac{1}{2} [\mu \mathbf{u}^n] = \mathbf{0}. \quad (\text{A.3.3})$$

Pour y arriver, cependant, il faudrait d'abord définir à quel moment ce calcul est fait. Dans l'expression (A.3.2), par exemple, des sauts pour les fonctions $p^{n-\frac{1}{2}}$, \mathbf{u}^n et \mathbf{u}^* se côtoient, mais ces sauts sont situés respectivement sur $\Gamma^{n-\frac{1}{2}}$, Γ^n et

Γ^{n+1} . Si la membrane se déplace, évaluer le saut de $p^{n-\frac{1}{2}}$ sur la membrane Γ^{n+1} , par exemple, n'a pas de sens.

Pour justifier ce raisonnement, nous rappelons que l'expression (A.3.1) n'est pas une équation physique, mais plutôt un schéma numérique dans lequel la fonction $p^{n-\frac{1}{2}}$, $\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}$ et \mathbf{u}^n sont des estimateurs utilisés dans le but de calculer la valeur \mathbf{u}^{n+1} . Par exemple, si

$$p(\mathbf{x}, (n - 1/2)\Delta t) = \begin{cases} p_+(\mathbf{x}, (n - \frac{1}{2})\Delta t) \text{ à l'extérieur de } \Gamma^{n-\frac{1}{2}}, \\ p_-(\mathbf{x}, (n - \frac{1}{2})\Delta t) \text{ à l'intérieur de } \Gamma^{n-\frac{1}{2}}, \end{cases}$$

avec $p_+, p_- \in C^\infty(\Omega)$, l'estimateur noté $p^{n-\frac{1}{2}}$ utilisé à l'étape n de l'algorithme, comme l'illustre la figure A.3, est défini comme

$$p^{n-\frac{1}{2}} = \begin{cases} p_+(\mathbf{x}, (n - \frac{1}{2})\Delta t) \text{ à l'extérieur de } \Gamma^{n+1}, \\ p_-(\mathbf{x}, (n - \frac{1}{2})\Delta t) \text{ à l'intérieur de } \Gamma^{n+1}. \end{cases}$$

Ne connaissant pas la valeur exacte de $[p^{n-\frac{1}{2}}]$ à travers Γ^{n+1} , on devra utiliser l'approximation

$$[p^{n-\frac{1}{2}}] = [p^{n+1}] + O(\Delta t).$$

Dans ce cas, les expressions (A.3.2) et (A.3.3) ont du sens. Comme tous les sauts seront approximés grâce aux valeurs de l'étape $n + 1$, on peut omettre les indices de temps dans le raisonnement qui suit. \mathbf{f}^{n+1} , par exemple, sera noté \mathbf{f} .

En développant (A.3.2) et (A.3.3) à l'aide des sauts déjà connus, on trouvera que :

$$[\mu \mathbf{u}_\xi^*] = -(\mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\tau})\boldsymbol{\tau}, \quad (\text{A.3.4})$$

$$[\mu \mathbf{u}^*] = \mathbf{0}. \quad (\text{A.3.5})$$

et on remarquera que ces sauts sont les mêmes que pour $[\mu \mathbf{u}_\xi]$ et $[\mu \mathbf{u}]$.

En dérivant (A.3.4) et (A.3.5) le long de l'interface, on obtient :

$$\begin{aligned} [\mu \mathbf{u}^*]' &= 0 = [\mu \mathbf{u}_\eta^*], \\ [\mu \mathbf{u}^*]'' &= 0 = [\mu \mathbf{u}_{\eta\eta}^*] + \kappa [\mu \mathbf{u}_\xi^*], \\ [\mu \mathbf{u}_\xi^*]' &= ((-\mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\tau})\boldsymbol{\tau})' = [\mu \mathbf{u}_{\xi\eta}^*]. \end{aligned}$$

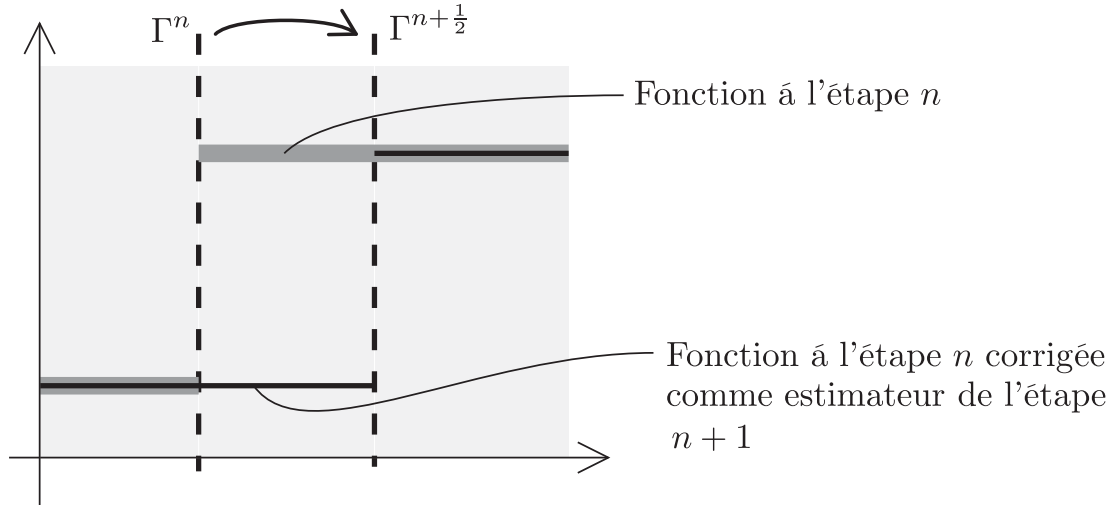


FIG. A.3. Une fonction qui existe à l'étape n doit être légèrement modifiée lorsqu'on veut en calculer le saut à travers la membrane $\Gamma^{n+\frac{1}{2}}$.

Réécrivant ces équations sous la forme de conditions de saut, on aura :

$$[\mu \mathbf{u}_\eta^*] = 0, \quad (\text{A.3.6})$$

$$[\mu \mathbf{u}_{\eta\eta}^*] = \kappa(\mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\tau})\boldsymbol{\tau}, \quad (\text{A.3.7})$$

$$[\mu \mathbf{u}_{\xi\eta}^*] = ((-\mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\tau})\boldsymbol{\tau})'. \quad (\text{A.3.8})$$

Pour trouver $[\mathbf{u}_{\xi\xi}^*]$, finalement, on considère le saut dans l'équation (1.1.2) :

$$\left[\frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} \right] + \mathbf{u} \cdot [\nabla \mathbf{u}] + [\nabla p] = \left[\frac{\mu}{2} (\Delta \mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}^*) \right] + [\mathbf{F}] + [\mathbf{G}]. \quad (\text{A.3.9})$$

Cette équation peut être grandement simplifiée en notant d'abord que

$$\left[\frac{\mathbf{u}^* + \mathbf{u}}{\Delta t} \right] = \mathbf{0}$$

car ces fonctions sont continues, et

$$[\mathbf{F}] = \mathbf{0},$$

car la force \mathbf{F} n'agit que sur l'interface. Notons aussi que

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot [\nabla \mathbf{u}] &= (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}) [\mathbf{u}_\eta] + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) [\mathbf{u}_\xi] \\ &= (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) [\mathbf{u}_\xi] \end{aligned}$$

car $[\mathbf{u}_\eta] = 0$. On peut alors réorganiser l'équation (A.3.9) pour mettre le terme $[\mu \mathbf{u}_{\xi\xi}^*]$ en évidence :

$$[\mu \mathbf{u}_{\xi\xi}^*] = -[\mu \mathbf{u}_{\eta\eta}^*] - [\mu \mathbf{u}_{\eta\eta}] - [\mu \mathbf{u}_{\xi\xi}] + 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})[\mathbf{u}_\mathbf{n}] + 2[\nabla p] - 2[\mathbf{G}]. \quad (\text{A.3.10})$$

Mais on a déjà montré en (A.2.8) que

$$[\mu \mathbf{u}_{\xi\xi}] = -[\mu \mathbf{u}_{\eta\eta}] + [\nabla p] - [\mathbf{G}],$$

ce qui nous permet d'écrire

$$[\mu \mathbf{u}_{\xi\xi}^*] = -[\nabla p] + [\mathbf{G}] - [\mu \mathbf{u}_{\eta\eta}^*] + 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})[\mathbf{u}_\xi] + 2[\nabla p] - 2[\mathbf{G}], \quad (\text{A.3.11})$$

ou plus simplement, en rappelant que $[\mu \mathbf{u}_{\eta\eta}^*] = \kappa(\mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\tau})\boldsymbol{\tau}$ et que $[\mu \mathbf{u}_\xi] = -(\mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\tau})\boldsymbol{\tau}$,

$$[\mu \mathbf{u}_{\xi\xi}^*] = \left(-2 \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}}{\mu} - \kappa \right) (\mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\tau})\boldsymbol{\tau} + [\nabla p] - [\mathbf{G}]. \quad (\text{A.3.12})$$

Dans ce cas, on remarque que

$$[\mu \mathbf{u}_{\xi\xi}^*] = [\mu \mathbf{u}_{\xi\xi}] - \frac{1}{\mu} (2\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\tau})\boldsymbol{\tau}.$$

Dans ce cas, le saut de \mathbf{u}^* ne correspond donc pas au saut de \mathbf{u}^{n+1} .

A.4. CONDITIONS DE SAUT POUR ϕ^{n+1}

On considère habituellement $\phi^{n+1} \in C^2(\Omega)$, c'est-à-dire que ses conditions de saut sont nulles jusqu'aux dérivées partielles d'ordre 2. Notre survol de la littérature ne nous a pas convaincu de la rigueur de cette hypothèse. Comme pour \mathbf{u}^* , on pourra utiliser la définition de ϕ^{n+1} dans le schéma numérique pour en déduire les sauts. En effet, ϕ^{n+1} est défini en (1.1.4) de manière à avoir

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^{n+1} + \Delta t \nabla \phi^{n+1}. \quad (\text{A.4.1})$$

En prenant le saut dans cette équation, on a

$$[\mathbf{u}^*] = [\mathbf{u}] + \Delta t [\nabla \phi^{n+1}].$$

Or, $[\mathbf{u}^*] = [\mathbf{u}] = 0$, donc

$$[\phi_\xi^{n+1}] = 0, \quad (\text{A.4.2})$$

et

$$[\phi_\eta^{n+1}] = 0.. \quad (\text{A.4.3})$$

En dérivant ces deux équations le long de l'interface, on trouve :

$$[\phi_{\xi\eta}^{n+1}] = 0 \quad (\text{A.4.4})$$

$$[\phi_{\eta\eta}^{n+1}] = 0. \quad (\text{A.4.5})$$

Si on considère la divergence, puis le saut, dans (A.4.1), on obtient

$$[\nabla \cdot \mathbf{u}^*] = [\nabla \cdot \mathbf{u}] + \Delta t [\Delta \phi^{n+1}],$$

or $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ et $[\mathbf{u}_\eta^*] = 0$, donc

$$\Delta t [\Delta \phi^{n+1}] = [\mathbf{u}_\xi^*] \cdot \mathbf{n}.$$

Comme on a montré plus tôt que $[\phi_{\eta\eta}^{n+1}] = 0$, on en déduit que

$$[\phi_{\xi\xi}^{n+1}] = \frac{1}{\Delta t} [\mathbf{u}_\xi^*] \cdot \mathbf{n}.$$

Mais on a déjà montré que le saut $[\mathbf{u}_\xi^*]$ est en direction purement tangentielle, donc $[\mathbf{u}_\xi^*] \cdot \mathbf{n} = 0$. Par conséquent, on a

$$[\phi_{\xi\xi}^{n+1}] = 0.$$

Prenons maintenant le saut dans l'équation (1.1.4) :

$$[p] = [p] + [\phi^{n+1}] - \frac{\Delta t}{2} \mu [\Delta \phi^{n+1}].$$

En remplaçant les différents termes de cette équation avec les conditions de saut déjà trouvées, on aura :

$$[\phi^{n+1}] = \frac{1}{2} [\mu \mathbf{u}_\xi^*] \cdot \mathbf{n} = 0.$$

Considérer que $\phi^{n+1} \in C^2(\Omega)$ est donc une approximation bien fondée.