Université de Montréal

THÉORÈMES DE POINT FIXE ET PRINCIPE VARIATIONNEL D'EKELAND

par

Caroline Dazé

Département de mathématiques et de statistique

Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures

en vue de l'obtention du grade de

Maître ès sciences (M.Sc.)
en mathématiques

février 2010

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

THÉORÈMES DE POINT FIXE ET PRINCIPE VARIATIONNEL D'EKELAND

présenté par

Caroline Dazé

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Michel Delfour

(président-rapporteur)

Marlène Frigon

(directeur de recherche)

André Giroux

(membre du jury)

Mémoire accepté le:

10 février 2010

SOMMAIRE

Le principe de contraction de Banach, qui garantit l'existence d'un point fixe d'une contraction d'un espace métrique complet à valeur dans lui-même, est certainement le plus connu des théorèmes de point fixe. Dans plusieurs situations concrètes, nous sommes cependant amenés à considérer une contraction qui n'est définie que sur un sous-ensemble de cet espace. Afin de garantir l'existence d'un point fixe, nous verrons que d'autres hypothèses sont évidemment nécessaires.

Le théorème de Caristi, qui garantit l'existence d'un point fixe d'une fonction d'un espace métrique complet à valeur dans lui-même et respectant une condition particulière sur $d(x, f(x))$, a plus tard été généralisé aux fonctions multivoques. Nous énoncerons des théorèmes de point fixe pour des fonctions multivoques définies sur un sous-ensemble d'un espace métrique grâce, entre autres, à l'introduction de notions de fonctions entrantes. Cette piste de recherche s'inscrit dans les travaux très récents de mathématiciens français et polonais.

Nous avons obtenu des généralisations aux espaces de Fréchet et aux espaces de jauge de quelques théorèmes, dont les théorèmes de Caristi et le principe variationnel d'Ekeland. Nous avons également généralisé des théorèmes de point fixe pour des fonctions qui sont définies sur un sous-ensemble d'un espace de Fréchet ou de jauge. Pour ce faire, nous avons eu recours à de nouveaux types de contractions; les contractions sur les espaces de Fréchet introduites par Cain et Nashed [**CaNa**] en 1971 et les contractions généralisées sur les espaces de jauge introduites par Frigon [**Fr**] en 2000.

Mots clés : Théorème de point fixe, théorème de Caristi, principe variationnel d'Ekeland, contraction, fonction entrante, fonction multivoque, espace de Fréchet, espace de jauge.

SUMMARY

The Banach contraction principle, which certifies that a contraction of a complete metric space into itself has a fixed point, is for sure the most famous of all fixed point theorems. However, in many case, the contraction we consider is only defined on a subset of a complete metric space. Of course, to certify that such a contraction has a fixed point, we need to add some restrictions.

The Caristi theorem, which certifies the existence of a fixed point of a function of a complete metric space into itself satisfying a particular condition on $d(x, f(x))$, was later generalized to multivalued functions. By introducing different types of inwardness assumptions, we will be able to state some fixed point theorems for multivalued functions defined on a subset of a metric space. This is related to the recent work of French and Polish mathematicians.

We were able to generalize some theorems to Fréchet spaces and gauge spaces such as the Caristi theorems and the Ekeland variational principle. We were also able to generalize some fixed point theorems for functions that are only defined on a subset of a Fréchet space or a gauge space. To do so, we used new types of contractions ; contractions on Fréchet spaces introduced by Cain and Nashed [**CaNa**] in 1971 and generalized contractions on gauge spaces introduced by Frigon [**Fr**] in 2000.

Keywords : Fixed point theorem, Caristi theorem, Ekeland variational principle, contraction, inward function, multivalued function, Fréchet space, gauge space.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier ma directrice de maîtrise, Marlène Frigon, pour tout le support qu'elle m'a apporté tout au long de la conception et la rédaction de ce mémoire. Elle a su me diriger d'une façon exemplaire. Sans ses idées et son expertise, la réalisation de ce mémoire n'aurait pas été possible.

Je remercie aussi le CRSNG et le FQRNT pour le soutien financier tout au long de ma maîtrise.

Je remercie mes parents, sans qui mon parcours académique aurait été beaucoup plus ardu. Sans oublier mon copain René qui m'a épaulé durant les moments plus difficiles. Je remercie également mes amis et ma sœur d'avoir été là.

INTRODUCTION

Le principe de contraction de Banach, qui garantit l'existence d'un point fixe d'une contraction définie sur un espace métrique complet et à valeur dans lui-même, a été énoncé par Banach en 1922. Ce principe est le plus simple des théorèmes de point fixe et il a de nombreuses applications, notamment en analyse numérique, dans la théorie des fractales et dans la théorie des équations différentielles.

En 1976, Caristi [**Ca**] a obtenu, à l'aide de l'induction transfinie, un théorème de point fixe qui, contrairement au théorème de Banach, n'exige pas que la fonction en question soit une contraction :

Théorème 0.1 (Caristi)**.** *Soient* (X, d) *un espace métrique complet et la fonction* $\phi : X \to \mathbb{R}$ *semi-continue inférieurement bornée inférieurement. Soit une fonction quelconque* $f : X \to X$ *telle que* $d(x, f(x)) \leq \phi(x) - \phi(f(x))$ *pour tout* $x \in X$*. Alors,* f *a un point fixe.*

Précédemment, en 1972, Ekeland [**Ek**] avait obtenu le principe variationnel suivant :

Théorème 0.2 (Principe variationnel d'Ekeland)**.** *Soient* (X, d) *un espace métrique complet et* $\phi : X \to (-\infty, +\infty]$ *une fonction propre semi-continue inférieurement bornée inférieurement. Pour chaque* $\epsilon > 0$ *et chaque* $u \in X$ *tel que* $\phi(u) \leq \inf_{x \in X} \phi(x) + \epsilon$*, il existe* $v \in X$ *tel que*

(1) $\phi(v) \leq \phi(u)$ *;*

(2) $d(u, v) \leq 1$ *;*

(3) $\phi(v) < \phi(x) + \epsilon d(x, v)$ *pout tout* $x \in X$ *tel que* $x \neq v$*.*

À première vue, ces théorèmes n'ont aucune relation. En effet, le principe variationnel d'Ekeland n'est même pas énoncé sous forme d'un théorème de point fixe. Pourtant, comme nous le verrons au premier chapitre, il a été montré qu'ils sont équivalents. En fait, les deux résultats découlent du lemme de Bishop-Phelps. Il est à noter que nous avons choisi de présenter la démonstration du théorème de Caristi qui utilise le lemme de Bishop-Phelps, puisqu'elle est beaucoup plus simple que celle originalement faite par Caristi.

D'autre part, plusieurs mathématiciens se sont intéressés aux contractions qui ne sont définies que sur un sous-ensemble d'un espace métrique. Afin de garantir l'existence de point fixe, des hypothèses supplémentaires sont évidemment nécessaires. Ainsi, Halpern [**Ha**] a introduit la notion de fonction entrante en 1965 dans sa thèse de doctorat. Une fonction $f : K \to E$, où K est un sous-ensemble d'un espace normé E, est dite entrante si

$$f(x) \in \{x + h(u - x) : u \in K \text{ et } h \geq 1\} \text{ pour tout } x \in K.$$

Remarquons qu'alors,

$$\|x - u\| + \|u - f(x)\| = \|x - f(x)\| .$$

Ceci suggère une généralisation aux espace métriques de la notion de fonction entrante ; une fonction $f : K \to X$, où K est un sous-ensemble d'un espace métrique X, est dite métriquement entrante si, pout tout x in K, il existe $u \in K$ tel que

$$d(x, u) + d(u, f(x)) = d(x, f(x))$$

et tel que $u = x$ si et seulement si $f(x) = x$. Grâce à ces notions de fonctions entrantes, les résultats suivants ont été obtenus : toute contraction entrante définie sur un sous-ensemble convexe fermé d'un espace de Banach et toute contraction métriquement entrante définie sur un sous-ensemble fermé d'un espace métrique complet possèdent un point fixe. Nous verrons au premier chapitre que ces deux résultats peuvent être prouvés en utilisant le théorème de Caristi.

Finalement, le principe de continuation, qui consiste à déformer, sous certaines conditions, une fonction en une autre plus simple pour laquelle nous connaissons l'existence d'un point fixe, sera abordé dans le premier chapitre puisqu'il s'avère utile pour garantir l'existence d'un point fixe d'une fonction non-définie sur tout l'espace.

Le deuxième chapitre de ce projet de recherche est dédié aux fonctions multivoques. Rappelons que le principe de contraction de Banach a été généralisé aux fonctions multivoques par Nadler [**Na**] en 1969. De plus, en 1978, Mizoguchi et Takahashi [**MiTa**] ont obtenu un version multivoque du théorème de Caristi. Ces deux mathématiciens japonais ont démontré que la version multivoque du théorème de Caristi est équivalente au principe variationnel d'Ekeland, ce dont nous ferons la preuve dans ce chapitre.

Comme dans le cas des fonctions univoques, des notions de fonctions multivoques entrantes ont été introduites dans le but de garantir l'existence d'un point fixe d'une contraction multivoque définie sur un sous-ensemble d'un espace métrique. Ces notions ont récemment été généralisées. En 2000, Lim [**Lim**] a réussi à montrer que, si une contraction multivoque à valeurs fermées définie sur un sous-ensemble fermé d'un espace de Banach est faiblement entrante, alors elle possède un point fixe. Ce théorème a ensuite été généralisé aux espaces métriques par Maciejewski [**Ma**] grâce à l'introduction d'une notion de fonction entrante basée sur un ensemble entrant généralisé qui est moins stricte que celle de fonction faiblement entrante utilisée par Lim. Encore plus tard, en 2006, Azé et Corvellec [**AzCo**] ont obtenu un théorème qui est encore plus général que celui de Maciejewski grâce à une autre condition sur l'orientation de la fonction. Il est à noter que ce dernier théorème n'exige pas que la fonction soit une contraction multivoque à valeurs fermées mais plutôt que ce soit une contraction directionnelle à graphe fermé.

Le troisième chapitre de ce mémoire est consacré aux fonctions définies sur des espaces de Fréchet ou de jauge. Des notions de contractions sur des espaces de Fréchet et sur des espaces de jauge ont été introduites dès les années 70. En effet, cette notion de contraction sur des espaces de Fréchet a été introduite par Cain et Nashed [**CaNa**] en 1971 :

Définition 0.3. *Soit* $\mathbb{E} = (\mathbb{E}, \{|\cdot|_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ *un espace de Fréchet. Nous disons qu'une fonction* $f : K \to \mathbb{E}$ *où* K *est un sous-ensemble de* $\mathbb{E}$ *est une* contraction *si pour* *tout* $n \in \mathbb{N}$ *il existe une constante* $k_n < 1$ *telle que*

$$|f(x) - f(y)|_n \leq k_n |x - y|_n \ \textit{pour tout } x, y \in X.$$

Ils ont montré qu'une telle contraction définie sur un fermé dans lui-même a un unique point fixe. Il est à remarquer que cette notion de contraction est plutôt restrictive. En effet, remarquons que, pour être une contraction sur un espace de Fréchet, f doit satisfaire la condition suivante :

$$\text{si } |x - y|_n = 0, \quad \text{alors } |f(x) - f(y)|_n = 0.$$

Par exemple, considérons l'espace produit $\mathbb{E} = \Pi_{n \in \mathbb{N}} E_n$, où $(E_n, \|\cdot\|_n)$ est un espace de Banach pour tout $n \in \mathbb{N}$. Remarquons que $\mathbb{E}$ est un espace de Fréchet muni des semi-normes definies comme suit :

$$|x|_n = \max(\|x_1\|_1, \ldots, \|x_n\|_n).$$

Soit une fonction $f = (f_1, f_2, \ldots) : K \to K$, où K est un sous-ensemble de $\mathbb{E}$, telle qu'il existe une matrice $A = (a_{ij})$ avec $a_{ij} \geq 0$ pour tout $i, j \in \mathbb{N}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f_n(x) - f_n(y)\|_n \leq a_{n1} \|x_1 - y_1\|_1 + a_{n2} \|x_2 - y_2\|_2 + \cdots .$$

Si f est une contraction sur un espace de Fréchet, alors la matrice A doit être sous forme triangulaire inférieure. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n ne dépend que des n premières variables. La notion de contraction généralisée sur des espaces de jauge, plus générale que la notion de contraction sur des espaces de Fréchet, a donc été introduite par Frigon [**Fr**], en 2000, afin de pouvoir avoir $a_{ij} > 0$ pour tout $i, j \in \mathbb{N}$. Il a été obtenu que toute contraction généralisée définie sur un espace de jauge complet à valeur dans lui-même possède un unique point fixe. En ce qui concerne les fonctions multivoques, nous verrons que la notion de contraction multivoque sur des espaces de jauge a été introduite par Frigon [**Fr2**], en 2002, ce qui a permis d'obtenir le résultat suivant : toute contraction multivoque définie sur un espace de jauge complet à valeur dans lui-même possède un point fixe.

Le quatrième et dernier chapitre de ce mémoire comporte des résultats nouveaux. Nous avons obtenu une généralisation du principe variationnel d'Ekeland ainsi que des généralisations des théorèmes univoque et multivoque de Caristi aux espaces de jauge. Pour ce faire, nous avons eu recours à $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions à valeurs réelles définies sur un espace de jauge complet et qui sont semi-continues inférieurement bornées inférieurement.

De plus, afin de traiter des contractions définies sur un sous-ensemble d'un espace de Fréchet ou de jauge, nous avons généralisé des notions de fonctions entrantes. Nous verrons qu'à partir de f, une contraction sur une espace de Fréchet, il est possible de déduire $\left\{\overline{f_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de contractions selon la définiton usuelle. Cette suite de contractions sera très utile pour pouvoir généraliser des notions de fonctions entrantes puisque nous imposerons une condition sur chaque $\overline{f_n}$ qui est maintenant une simple contraction. De même, à partir de f, une contraction généralisée sur une espace de jauge, il est possible d'obtenir une famille de contractions multivoques définies sur un espace métrique complet. C'est sur ces contractions multivoques que les conditions sur l'orientation seront imposées. Ces nouvelles notions de fonctions entrantes nous permettront d'établir des résultats de point fixe.

Chapitre 1

THÉORÈMES DE POINT FIXE POUR DES FONCTIONS UNIVOQUES SUR DES ESPACES MÉTRIQUES

Dans ce chapitre, quelques théorèmes de point fixe pour des fonctions univoques définies sur un espace métrique et à valeur dans lui-même seront énoncés et l'équivalence entre le théorème de Caristi et le principe variationnel d'Ekeland sera démontrée. De plus, nous introduirons les notions de fonctions entrantes et de fonction métriquement entrante pour pouvoir énoncer des théorèmes de point fixe pour des fonctions définies sur un sous-ensemble d'un espace métrique et à valeur dans l'espace métrique entier. Enfin, les principes de continuation seront abordés puisqu'ils sont très utiles pour pouvoir garantir l'existence d'un point fixe d'une fonction.

Dans la suite, X (respectivement X_i pour $i \in \mathbb{N}$) désignera un espace métrique complet muni d'une métrique d (respectivement d_i pour $i \in \mathbb{N}$). Par E, nous désignerons un espace de Banach muni de la norme $\|\cdot\|$. Par Y, nous désignerons un espace topologique.

1.1. Théorème de Banach, théorème de Caristi et principe variationnel d'Ekeland.

Définition 1.1.1. *Une fonction $f : X_1 \to X_2$ où X_1 et X_2 sont des espaces métriques est dite* lipschitzienne *s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $d_2(f(x), f(y)) \leq kd_1(x, y)$ pour tout $x, y \in X_1$. La plus petite valeur k satisfaisant cette propriété pour la* *fonction f est appelée la constante de Lipschitz. Si cette constante k est plus petite que* 1*, la fonction f est appelée une* contraction *avec constante de contraction k. La fonction f est dite* non-expansive *si cette constante k est plus petite ou égale à* 1*.*

Le théorème de point fixe le plus élémentaire et certainement le plus utilisé est le principe de contraction de Banach.

Théorème 1.1.2 (Principle de contraction de Banach)**.** *Soit $f : X \to X$ une contraction. Alors, f a un unique point fixe.*

La preuve est bien connue. Elle établit que toute suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ définie inductivement par $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout pour $n \in \mathbb{N}$ converge vers $z = f(z)$. En ce qui concerne l'unicité du point fixe, remarquons que toute contraction a au plus un point fixe. En effet, nous obtenons la contradiction suivante en supposant l'existence de deux points fixes distincts z_1 etz_2 pour une contraction f :

$$\begin{aligned} d(z_1, z_2) &= d(f(z_1), f(z_2)) \\ &\leq kd(z_1, z_2) \\ &< d(z_1, z_2). \end{aligned}$$

En 1976, à l'aide d'un principe d'induction transfinie, Caristi [**Ca**] a obtenu un théorème de point fixe. Avant de l'énoncer, nous aurons besoin de la définiton suivante :

Définition 1.1.3. *Une fonction $\phi : Y \to \mathbb{R}$ est dite* semi-continue inférieurement *si, pour tout $x \in Y$, $\liminf_{y \to x} \phi(y) \geq \phi(x)$ ou, de façon équivalente, si l'ensemble $\{x \in Y : \phi(x) \leq a\}$ est fermé pour tout $a \in \mathbb{R}$. Elle est* semi-continue supérieurement *si $-\phi$ est semi-continue inférieurement.*

Théorème 1.1.4 (Caristi)**.** *Soit $\phi : X \to \mathbb{R}$ une fonction semi-continue inférieurement bornée inférieurement. Soit $f : X \to X$ une fonction quelconque telle que $d(x, f(x)) \leq \phi(x) - \phi(f(x))$ pour tout $x \in X$. Alors f a un point fixe.*

Une preuve plus simple utilisant un résultat de Bishop et Phelps a par la suite été faite. Avant d'énoncer ce lemme, voici le théorème d'intersection de Cantor qui nous sera nécessaire pour faire la preuve du lemme de Bishop-Phelps.

Théorème 1.1.5 (Intersection de Cantor). *Soit* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de sous-ensembles non-vides fermés de* X *tels que* $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$ *et tels que* $\lim_{n\to\infty} diam A_n = 0$. *Alors, l'ensemble* $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ *est constitué d'un unique point.*

Lemme 1.1.6 (Bishop-Phelps). *Soient* $\phi : X \to \mathbb{R}$ *une fonction semi-continue inférieurement bornée inférieurement et* λ *une constante positive. Alors, pour tout* $x_0 \in X$, *il existe* $x^* \in X$ *tel que*

$$\lambda d(x_0, x^*) \leq \phi(x_0) - \phi(x^*)$$

et

$$\lambda d(x, x^*) > \phi(x^*) - \phi(x) \text{ pour tout } x \in X \text{ tel que } x \neq x^*.$$

Démonstration. Pour tout $z \in X$, soit $T(z) = \{y \in X : \phi(y) + \lambda d(z, y) \leq \phi(z)\}$. Puisque la fonction ϕ est semi-continue inférieurement, $T(z)$ est fermé pour tout $z \in X$.

Soit $x_0 \in X$. Choisissons d'abord $x_1 \in T(x_0)$ tel que

$$\phi(x_1) \leq 1 + \inf\left[\phi(T(x_0))\right].$$

Choisissons ensuite inductivement $x_n \in T(x_{n-1})$ tel que

$$\phi(x_n) \leq \frac{1}{n} + \inf\left[\phi(T(x_{n-1}))\right].$$

Il est clair que $T(x_0) \supset T(x_1) \supset T(x_2) \supset \cdots$. Estimons le diamètre de $T(x_n)$ pour un n donné. Soit $w \in T(x_n) \subset T(x_{n-1})$. Nous avons que

$$\phi(w) \geq \inf\left[\phi(T(x_{n-1}))\right] \geq \phi(x_n) - \frac{1}{n}.$$

Puisque $w \in T(x_n)$, nous avons que

$$\lambda d(x_n, w) \leq \phi(x_n) - \phi(w) \leq \frac{1}{n}.$$

Donc, $diam T(x_n) \leq \frac{2}{\lambda n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par le théorème d'intersection de Cantor, il existe un unique $x^* \in \bigcap_{n=0}^{\infty} T(x_n)$. Puisque $x^* \in T(x_0)$,

$$\lambda d(x_0, x^*) \leq \phi(x_0) - \phi(x^*).$$

De plus, si $\lambda d(x, x^*) \leq \phi(x^*) - \phi(x)$, alors $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} T(x_n)$, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\lambda d(x_n, x) &\leq \lambda d(x_n, x^*) + \lambda d(x^*, x)\\ &\leq \phi(x_n) - \phi(x^*) + \phi(x^*) - \phi(x)\\ &= \phi(x_n) - \phi(x),\end{aligned}$$

et par unicité $x = x^*$. $\square$

Voici une démonstration du théorème de Caristi utilisant le lemme de Bishop-Phelps.

Démonstration du théorème 1.1.4. Posons $\lambda = 1$ et choisissons $x_0 \in X$ arbitrairement. Par le Lemme 1.1.6, il existe $x^* \in X$ tel que, si $x \neq x^*$,

$$d(x, x^*) > \phi(x^*) - \phi(x).$$

Or, par hypothèse,

$$d(x^*, f(x^*)) \leq \phi(x^*) - \phi(f(x^*)).$$

De ces deux inégalités, on déduit que $x^* = f(x^*)$. $\square$

Le théorème de Banach découle du théorème de Caristi. En voici la démonstration.

Démonstration du théorème 1.1.2. Nous avons que $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$ pour un $k \in [0, 1)$. Alors, $d(f(x), f^2(x)) \leq kd(x, f(x))$. Ainsi,

$$(1 - k)d(x, f(x)) \leq d(x, f(x)) - d(f(x), f^2(x)).$$

En appliquant le théorème de Caristi avec $\phi(x) = d(x, f(x))/(1 - k)$, on déduit que f a un point fixe. $\square$

En 1972, Ekeland **[Ek]** a obtenu son fameux principe variationnel qui a conduit à de nombreuses applications notamment dans la théorie des points critiques. Il s'avère que ce principe est équivalent au théorème de point fixe de Caristi.

Théorème 1.1.7 (Principe variationnel d'Ekeland)**.** *Soit $\phi : X \to (-\infty, +\infty]$ une fonction propre semi-continue inférieurement bornée inférieurement. Pour chaque $\epsilon > 0$ et chaque $u \in X$ tel que $\phi(u) \leq \inf_{x\in X} \phi(x) + \epsilon$, il existe $v \in X$ tel que*

(1) $\phi(v) \leq \phi(u)$;

(2) $d(u, v) \leq 1$;

(3) $\phi(v) < \phi(x) + \epsilon d(x, v)$ pout tout $x \in X$ tel que $x \neq v$.

Démonstration. Soient $\epsilon > 0$ et $u \in X$ tels que $\phi(u) \leq \inf_{x\in X} \phi(x) + \epsilon$. Posons

$$X' = \{x \in X : \phi(x) + \epsilon d(u, x) \leq \phi(u)\}.$$

X' n'est pas vide puisque $u \in X'$. De plus, par la semi-continuité inférieure de ϕ, X' est fermé et est donc un espace métrique complet.

Remarquons que la fonction ϕ restreinte au domaine X' est à valeurs réelles et qu'elle est aussi semi-continue inférieurement et bornée inférieurement.

Pour tout $x \in X'$, posons

$$S(x) = \{y \in X \setminus \{x\} : \phi(y) + \epsilon d(x, y) \leq \phi(x)\}$$

et définissons

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } S(x) = \emptyset \\ y & \text{si } S(x) \neq \emptyset \text{ où } y \text{ est un élément quelconque de } S(x). \end{cases}$$

Alors, f est une fonction de X' dans X'. En effet, pour tout $x \in X'$ tel que $S(x) = \emptyset$, $f(x) = x \in X'$. D'autre part, pour tout $x \in X'$ tel que $S(x) \neq \emptyset$, $f(x) = y \in S(x)$ et alors

$$\begin{aligned} \phi(y) + \epsilon d(u, y) &\leq \phi(y) + \epsilon d(x, y) + \epsilon d(u, x) \\ &\leq \phi(x) + \epsilon d(u, x) \\ &\leq \phi(u) \end{aligned}$$

et donc $y \in X'$. Nous avons aussi que pour tout $x \in X'$, puisque $f(x) = x$ ou $f(x) \in S(x)$,

$$d(x, f(x)) \leq \frac{1}{\epsilon}\phi(x) - \frac{1}{\epsilon}\phi(f(x)).$$

Le Théorème 1.1.4 implique que f a un point fixe $v \in X'$. Il s'ensuit que $S(v) = \emptyset$ c'est-à-dire que $\phi(x) > \phi(v) - \epsilon d(x, v)$ pour tout $x \in X$ tel que $x \neq v$. De plus, puisque $v \in X'$, nous avons que

$$\phi(v) \leq \phi(u) - \epsilon d(u, v) \leq \phi(u).$$

Enfin, nous avons

$$\begin{aligned} \epsilon d(u, v) &\leq \phi(u) - \phi(v) \\ &\leq \phi(u) - \inf_{x \in X} \phi(x) \\ &\leq \epsilon \end{aligned}$$

et donc $d(u, v) \leq 1$. Ainsi, le v trouvé répond aux trois critères. □

Maintenant, voici une démonstration du théorème de Caristi grâce au principe variationnel d'Ekeland :

Démonstration du Théorème 1.1.4. Choisissons $u \in X$ tel que

$$\phi(u) \leq \inf_{x \in X} \phi(x) + 1.$$

Par le Théorème 1.1.7, il existe $v \in X$ tel que $d(x, v) > \phi(v) - \phi(x)$ pour tout $x \in X$ tel que $x \neq v$. Or, par hypothèse, $d(v, f(v)) \leq \phi(v) - \phi(f(v))$. De ces deux inégalités, nous déduisons que $f(v) = v$. □

Voici maintenant un corollaire du lemme de Bishop-Phelps sur l'existence d'une goutte supportante. Introduisons d'abord la notion de goutte.

Définition 1.1.8. *Soient E un espace de Banach, $z \in E$ et $x \in E \backslash \overline{B(z, r)}$, où r est un nombre réel positif. L'ensemble*

$$\mathcal{D}(x, \overline{B(z, r)}) = \left\{ tx + (1-t)y : t \in [0, 1]\,,\ y \in \overline{B(z, r)} \right\}$$

est appelé une goutte.

Remarque 1.1.9. *Remarquons que, si* $y \in \mathcal{D}(x, \overline{B(z,r)})$, *alors*

$$\mathcal{D}(y, \overline{B(z,r)}) \subset \mathcal{D}(x, \overline{B(z,r)}).$$

Théorème 1.1.10 (Goutte supportante)**.** *Soient* E *un espace de Banach,* K *un sous-ensemble fermé de* E, $z \in E \backslash K$ *tel que* $d(z, K) = R > 0$. *Alors, pour tout* $r < R < s$, *il existe* $x^* \in K$ *tel que* $|x^* - z| \leq s$ *et*

$$\{x^*\} = K \cap \mathcal{D}(x^*, \overline{B(z,r)}).$$

Démonstration. Soit l'ensemble non-vide $X = K \cap \overline{B(z,s)}$. Soit la fonction $\phi : X \to \mathbb{R}$ définie par

$$\phi(x) = \frac{s+r}{R-r} |x - z| .$$

Choisissons arbitrairement $x_0 \in X$. Par le Théorème 1.1.6 avec $\lambda = 1$, il existe $x^* \in X$ tel que, pour tout $x \in X \backslash \{x^*\}$

$$|x - x^*| > \phi(x^*) - \phi(x). \tag{1.1.1}$$

Montrons que $K \cap \mathcal{D}(x^*, \overline{B(z,r)}) \subset X$. Soit $x \in K \cap \mathcal{D}(x^*, \overline{B(z,r)})$. Alors $x = (1-t)x^* + t(z+y)$ pour un certain $t \in [0,1]$ et pour un certain $y \in \overline{B(0,r)}$. Donc,

$$\begin{aligned} |x - z| &= |(1-t)x^* + t(z+y) - z| \\ &\leq (1-t)\,|x^* - z| + t\,|y| \\ &\leq (1-t)s + tr \\ &\leq s, \end{aligned}$$

et ainsi $x \in K \cap \overline{B(z,s)} = X$. Donc, $K \cap \mathcal{D}(x^*, \overline{B(z,r)}) \subset X$.

Il est clair que $x^* \in K \cap \mathcal{D}(x^*, \overline{B(z,r)})$. Supposons qu'il existe

$$x \in K \cap \mathcal{D}(x^*, \overline{B(z,r)}) \backslash \{x^*\} .$$

Alors, $x = (1-t)x^* + t(z+y)$ pour un certain $t \in (0,1]$ et pour un certain $y \in \overline{B(0,r)}$. Par (1.1.1), puisque $x \in X \setminus \{x^*\}$,

$$\begin{aligned}\frac{s+r}{R-r}|x^*-z| &< \frac{s+r}{R-r}|x-z| + |x-x^*| \\ &\leq \frac{s+r}{R-r}((1-t)|x^*-z| + t|y|) + t(|x^*-z|+|y|).\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\frac{s+r}{R-r}(R-r) &\leq \frac{s+r}{R-r}(|x^*-z|-|y|) \\ &< |x^*-z|+|y| \\ &\leq s+r,\end{aligned}$$

ce qui est une contradiction. Ainsi, $\{x^*\} = K \cap \mathcal{D}(x^*, \overline{B(z,r)})$. □

1.2. Théorèmes de point fixe pour des contractions non-définies sur tout l'espace métrique

Les théorèmes de Banach et de Caristi vus à la section précédente concernent les fonctions définies sur l'espace X à valeur dans lui-même. Il est clair qu'une fonction définie seulement sur un sous-ensemble de X n'aura pas forcément un point fixe. Pour assurer cela, des conditions supplémentaires seront nécessaires.

Théorème 1.2.1. *Soient $K \subset X$ un ensemble fermé et $f : K \to X$ une contraction avec constante de contraction k. Supposons qu'il existe $x_0 \in K$ et $r > 0$ tels que*

$$\overline{B(x_0,r)} \subset K \quad \text{et} \quad d(x_0, f(x_0)) < (1-k)r, \tag{1.2.1}$$

alors f a un unique point fixe $z \in B(x_0,r)$.

La démonstration consiste à montrer que la suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ définie inductivement par $x_{n+1} = f(x_n)$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots$ converge vers un point fixe de f.

La condition (1.2.1) peut être remplacée par une condition qui, dans un espace linéaire topologique, peut être interprétée comme une restriction sur l'orientation de $f(x)$. La notion de fonction entrante a été introduite par Halpern en 1965, voir [**Ha**].

Définition 1.2.2. *Soit Y un espace linéaire topologique et $K \subset Y$. Soit $x \in K$. Nous définissons* l'ensemble entrant de x par rapport à K, *noté $I_K(x)$, ainsi*

$$I_K(x) = \{x + h(u - x) : u \in K \text{ et } h \geq 1\}.$$

Nous disons qu'une fonction $f : K \to Y$ est entrante *si $f(x) \in I_K(x)$ pour tout $x \in K$. Nous disons que f est* faiblement entrante *si $f(x) \in \overline{I_K(x)}$ pour tout $x \in K$.*

Ainsi, pour une fonction entrante $f : K \to Y$, l'image de chaque point $x \in K$ est dans l'ensemble des rayons issus de x et passant par les autres point de K.

Une définition équivalente d'application faiblement entrante peut être donnée dans le cas particulier où K est un sous-ensemble convexe d'un espace linéaire normé E, voir [**Ca**].

Proposition 1.2.3. *Soient K un sous-ensemble convexe d'un espace linéaire normé E et $f : K \to E$. Alors, f est faiblement entrante si et seulement si*

$$\lim_{h \to 0} \frac{d((1-h)x + hf(x), K)}{h} = 0 \text{ pour tout } x \in K.$$

Théorème 1.2.4. *Soient K un sous-ensemble convexe fermé de E et $f : K \to E$ une contraction faiblement entrante avec constante de contraction k. Alors f a un point fixe.*

Démonstration. Supposons que f n'a pas de point fixe. Soit $\epsilon > 0$ tel que $k < \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}$. Nous voulons construire une fonction $g : K \to K$ telle que pour tout $x \in K$

$$\lambda \|x - g(x)\| < \|x - f(x)\| - \|g(x) - f(g(x))\|, \tag{1.2.2}$$

avec $\lambda = \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon} - k$. En posant $\phi(x) = \frac{\|x - f(x)\|}{\lambda}$, il découlera du Théorème 1.1.4 que g a un point fixe. Celui-ci ne peut évidemment pas satisfaire (1.2.2) d'où la contradiction. Ainsi, nous pourrons conclure que f a un point fixe.

Reste à montrer (1.2.2). Soit $x \in K$. Par la Proposition 1.2.3, on peut choisir $h \in (0, 1)$ tel que

$$\frac{d((1-h)x + hf(x), K)}{h} < \epsilon \|x - f(x)\|.$$

Ainsi, il existe $y \in K$ tel que

$$\|(1-h)x + hf(x) - y\| < h\epsilon \|x - f(x)\| .$$

Posons $\overline{x} = (1-h)x + hf(x)$ et remarquons que $\|x - \overline{x}\| = h\|x - f(x)\|$. Nous avons

$$\begin{aligned}\|x - y\| &\leq \|x - \overline{x}\| + \|\overline{x} - y\| \\ &< \|x - \overline{x}\| + \epsilon h \|x - f(x)\| \\ &= (1+\epsilon)\|x - \overline{x}\| .\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\|y - f(y)\| &\leq \|y - \overline{x}\| + \|\overline{x} - f(x)\| + \|f(x) - f(y)\| \\ &\leq \|y - \overline{x}\| + \|\overline{x} - f(x)\| + k\|x - y\| \\ &= \|y - \overline{x}\| + (1-h)\|x - f(x)\| + k\|x - y\| \\ &\leq \epsilon\|\overline{x} - x\| + \|x - f(x)\| - \|\overline{x} - x\| + k\|x - y\| \\ &= (\epsilon - 1)\|\overline{x} - x\| + \|x - f(x)\| + k\|x - y\| \\ &< (\epsilon - 1)\frac{\|x - y\|}{1+\epsilon} + \|x - f(x)\| + k\|x - y\| \\ &= \|x - f(x)\| + \left(k - \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}\right)\|x - y\| .\end{aligned}$$

En posant $g(x) = y$, l'inégalité (1.2.2) est vérifiée. $\square$

La définition 1.2.2 repose de façon essentielle sur la structure linéaire de l'espace et ne peut donc pas être immédiatement étendue aux espaces métriques. La proposition précédente met en évidence le rôle du segment linéaire $lin\,[x, f(x)]$ où, pour $y \in E$, on pose

$$lin\,[x, y] = \{(1-h)x + hy : h \in [0,1]\} .$$

Remarquons que, si E est un espace normé, $K \subset E$ et $x \in K$, alors $f(x) \in I_K(x) \backslash \{x\}$ si et seulement si il existe $u \in lin\,[x, f(x)] \cap (K \backslash \{x\})$. De plus,

$$\begin{aligned} \|x-u\| + \|u - f(x)\| &= \|x - [(1-h)x + hf(x)]\| + \|[(1-h)x + hf(x)] - f(x)\| \\ &= h\,\|x - f(x)\| + (1-h)\,\|x - f(x)\| \\ &= \|x - f(x)\|\,. \end{aligned}$$

Dans le cadre des espaces métriques, ceci suggère l'introduction de la notion de d'application métriquement entrante.

Définition 1.2.5. *Soient X un espace métrique et K un sous-ensemble de X. Nous disons qu'une fonction $f : K \to X$ est* métriquement entrante *si pour tout $x \in K$ il existe $u \in K$ tel que*

$$d(x,u) + d(u, f(x)) = d(x, f(x))$$

et tel que $u = x$ si et seulement si $x = f(x)$. Autrement dit, la fonction f est métriquement entrante si pour tout $x \in K$

$$f(x) \in \{x\} \cup \{y \in X : \exists u \in K \backslash \{x\} \text{ tel que } d(x,u) + d(u,y) = d(x,y)\}\,.$$

Remarque 1.2.6. *Si E est un espace normé, cette définition est plus faible que la définition d'application entrante. En effet, si $x \in K$ et $y \in I_K(x) \backslash \{x\}$, alors pour tout $x \in K$ il existe $u \in K \backslash \{x\}$ et $h \geq 1$ tel que $y = x + h(u - x)$. Alors, $u = (1-c)x + cy$ où $c = \frac{1}{h} \in (0,1]$ et donc $d(x,u) + d(u,y) = d(x,y)$. D'où*

$$I_K(x) \subset \{x\} \cup \{y \in X : \exists u \in K \backslash \{x\} \text{ tel que } d(x,u) + d(u,y) = d(x,y)\}\,.$$

Donnons un exemple où l'inclusion inverse n'est pas vérifiée. Posons $\mathbb{R}^2$ muni de la norme $\|(x_1, x_2)\| = \max\{|x_1|, |x_2|\}$. Soit $K = \{(x_1, x_1) : x_1 \in [0,1]\}$. Nous avons

$$d((0,0),(1,1)) + d((1,1),(2,0)) = d((0,0),(2,0)),$$

mais $(2,0) \notin I_K(0,0) = \{(x_1, x_1) : x_1 \geq 0\}$.

Théorème 1.2.7. *Soient K un sous-ensemble fermé de X et $f : K \to X$ une contraction métriquement entrante avec constante de contraction k. Alors f a un point fixe.*

Démonstration. Supposons que f n'a pas de point fixe. Par définition, il est possible de définir $g : K \to K$ comme suit : pour tout $x \in K$, $g(x) \neq x$ et $d(x, g(x)) + d(g(x), f(x)) = d(x, f(x))$. Alors,

$$\begin{aligned} d(g(x), f(g(x))) &\leq d(g(x), f(x)) + d(f(x), f(g(x))) \\ &= d(x, f(x)) - d(x, g(x)) + d(f(x), f(g(x))) \\ &\leq d(x, f(x)) + (k-1)d(x, g(x)). \end{aligned}$$

Le Théorème 1.1.4 appliqué à g avec $\phi(x) = \frac{d(x,f(x))}{1-k}$ garantit l'existence d'un point fixe de g, ce qui est une contradiction. Donc, f a un point fixe. □

1.3. Principes de continuation.

Une autre façon d'obtenir l'existence de point fixe pour une fonction non-définie sur tout l'espace s'obtient via un processus de continuation. Celui-ci consiste à déformer notre fonction en une autre plus simple pour laquelle nous connaissons l'existence d'un point fixe. Il va sans dire que cette déformation devra vérifier certaines conditions.

Théorème 1.3.1. *Soient $U \subset X$ un ensemble ouvert et Λ un espace métrique connexe muni de la métrique ρ. Soit la fonction $h : \overline{U} \times \Lambda \to X$ telle que les conditions suivantes sont satisfaites :*

(1) il existe $k \in [0, 1)$ tel que

$$d(h(x, \lambda), h(y, \lambda)) \leq kd(x, y) \text{ pour tout } x, y \in \overline{U} \text{ et } \lambda \in \Lambda;$$

(2) $h(x, \lambda) \neq x$ pour tout $x \in \partial U$ et $\lambda \in \Lambda$;

(3) pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta_\epsilon > 0$ tel que

$$d(h(x, \lambda), h(x, \mu)) < \epsilon \text{ pour tout } x \in \overline{U} \text{ et } \lambda, \mu \in \Lambda \text{ tels que } \rho(\lambda, \mu) < \delta_\epsilon.$$

S'il existe un $\lambda \in \Lambda$ tel que $h_\lambda = h(\cdot, \lambda)$ a un point fixe alors, pour tout $\lambda \in \Lambda$, h_λ a un unique point fixe.

Démonstration. Considérons l'ensemble $Q = \{\lambda \in \Lambda : h_\lambda \text{ a un point fixe }\}$ qui, par hypothèse, n'est pas vide.

Montrons que Q est un ensemble fermé de Λ. En effet, soit $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans Q telle que $\lim_{n\to\infty}\lambda_n = \lambda^*$. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_{λ_n} le point fixe de h_{λ_n}. Soit $\epsilon > 0$, pour n et m assez grands, nous avons $\rho(\lambda_n, \lambda_m) < \delta_\epsilon$ et donc

$$\begin{aligned} d(x_{\lambda_n}, x_{\lambda_m}) &= d(h_{\lambda_n}(x_{\lambda_n}), h_{\lambda_m}(x_{\lambda_m})) \\ &\leq d(h_{\lambda_n}(x_{\lambda_n}), h_{\lambda_m}(x_{\lambda_n})) + d(h_{\lambda_m}(x_{\lambda_n}), h_{\lambda_m}(x_{\lambda_m})) \\ &< \epsilon + kd(x_{\lambda_n}, x_{\lambda_m}). \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons

$$d(x_{\lambda_n}, x_{\lambda_m}) < \frac{\epsilon}{1-k},$$

ce qui montre que $\{x_{\lambda_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de X et, puisque X est complet, converge vers $x^* \in X$. Par la continuité de h,

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_{\lambda_n} = \lim_{n\to\infty} h_{\lambda_n}(x_{\lambda_n}) = h_{\lambda^*}(x^*)$$

et donc, $\lambda^* \in Q$. Nous pouvons alors conclure que l'ensemble Q est fermé.

Montrons que Q est un ensemble ouvert de Λ. Soit $\lambda^* \in Q$ et notons x_{λ^*} le point fixe de h_{λ^*}. Puisque, par hypothèse, $x_{\lambda^*} \in U$, nous pouvons trouver $r > 0$ tel que la boule ouverte $B(x_{\lambda^*}, r) = \{x \in X : d(x, x_{\lambda^*}) < r\} \subseteq U$. Choisissons $\epsilon > 0$ tel que $\epsilon < (1-k)r$. Pour tout λ dans la boule ouverte $B(\lambda^*, \delta_\epsilon) = \{\lambda \in \Lambda : \rho(\lambda, \lambda^*) < \delta_\epsilon\}$,

$$d(h_\lambda(x_{\lambda^*}), x_{\lambda^*}) = d(h_\lambda(x_{\lambda^*}), h_{\lambda^*}(x_{\lambda^*})) < \epsilon < (1-k)r.$$

Par le Théorème 1.2.1, h_λ a un point fixe. Ainsi, $B(\lambda^*, \delta_\epsilon) \subset Q$, ce qui nous permet de conclure que l'ensemble Q est ouvert.

Puisque Q est non-vide et que Λ est connexe, nous avons nécessairement que $Q = \Lambda$. □

Voici quelques corollaires du théorème précédent.

Corollaire 1.3.2 (Alternative non-linéaire)**.** *Soient $U \subset E$ un ensemble ouvert tel que $0 \in U$ et une contraction $f : \overline{U} \to E$ telle que $f(U)$ est borné. Alors un des deux énoncés suivants est vérifié :*

(1) f a un unique point fixe ;

(2) il existe $t \in (0,1)$ et $z \in \partial U$ tels que $z = tf(z)$.

Démonstration. Définissons la fonction $h : \overline{U} \times [0,1] \to E$ par $h_t(x) = h(x,t) = tf(x)$. Nous pouvons aisément voir que les conditions (1) et (3) du Théorème 1.3.1 sont respectées.

Supposons que la condition (2) du Théorème 1.3.1 est aussi respectée. Puisque 0 est un point fixe de h_0, nous pouvons conclure que $h_1 = f$ a également un point fixe et donc l'énoncé (1) est vérifié.

Si la condition (2) du Théorème 1.3.1 n'est pas respectée, il existe $z \in \partial U$ et $t \in [0,1]$ tel que $z = h_t(z) = tf(z)$. Bien entendu, $t \neq 0$, car $0 \in U$. De plus, si $t \neq 1$, l'énoncé (2) est vérifié tandis que si $t = 1$ l'énoncé (1) est vérifié. □

Corollaire 1.3.3. *Soient $U \subset E$ un ensemble ouvert tel que $0 \in U$ et une contraction $f : \overline{U} \to E$ telle que $f(U)$ est borné. Supposons que pour tout $x \in \partial U$ un des deux énoncés suivants est vérifié :*

(1) $\|f(x)\| \leq \max\{\|x\|, \|x - f(x)\|\}$ *;*

(2) $-x \in \overline{U}$ *et* $\|f(x) + f(-x)\| = 0$.

Alors, f a un unique point fixe.

Démonstration. Si f n'a pas de point fixe, le corollaire précédent garantit l'existence de $t \in (0,1)$ et $z \in \partial U$ tels que $z = tf(z)$. Nous pouvons remarquer que $z \neq 0$ et $f(z) \neq 0$ puisque $0 \in U$.

Si l'énoncé (1) est respecté, nous obtenons

$$\begin{aligned}\|f(z)\| &\leq \max\{\|tf(z)\|, \|tf(z) - f(z)\|\} \\ &= \max\{t\|f(z)\|, (1-t)\|f(z)\|\},\end{aligned}$$

et donc que

$$1 \leq \max\{t, (1-t)\},$$

ce qui est une contradiction.

Si l'énoncé (2) est respecté, nous avons $f(z) = -f(-z)$. Ainsi, puisque f est une contraction, il existe $k \in [0, 1)$ tel que nous avons

$$\begin{aligned}\frac{2}{t}\|z\| &= 2\|f(z)\| \\ &= \|f(z) + f(z)\| \\ &= \|f(z) - f(-z)\| \\ &\leq k\|z - (-z)\| \\ &= 2k\|z\|,\end{aligned}$$

ce qui est une contradiction.

Donc, dans les deux cas, f a un unique point fixe. □

Un principe de continuation a également été obtenu pour les fonctions de type Caristi par Precup [**Pr2**].

Théorème 1.3.4. *Soient $K \subset X$ un ensemble fermé. Soient la fonction $\phi : K \times [0,1] \to [0, \infty)$ ($\phi_t = \phi(\cdot, t)$) semi-continue inférieurement et la fontion $f : K \times [0,1] \to X$ ($f_t = f(\cdot, t)$) telles que les conditions suivantes sont satisfaites :*

(1) pour tout $t \in [0,1]$, l'ensemble

$$K_t = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left\{ (f_t^n)^{-1}(K) \right\}$$

est fermé ;

(2) $d(x, f_t(x)) \leq \phi_t(x) - \phi_t(f_t(x))$ pour tout $x \in K$ et tout $t \in [0,1]$;

(3) $\phi_t(x) \leq d(x, \partial K)$ pour tout $t \in [0,1]$ et pour tout $x \in K$ tel que $x = f_s(x)$ pour un quelconque $s \in [0,1]$.

Si $K_0 \neq \emptyset$, f_t a au moins un point fixe pour tout $t \in [0,1]$.

Démonstration. Par hypothèse, nous avons que K_0 est un ensemble fermé et non-vide de X et, par la définition de K_0, nous avons que $f_0(K_0) \subset K_0$. Alors, par (2), la fonction f_0 restreinte à K_0 satisfait les conditions du Théorème 1.1.4, donc il existe $x_0 \in K$ tel que $f_0(x_0) = x_0$.

Par (2) et (3), pour tout $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned} d(x_0, f_t(x_0)) &\leq \phi_t(x_0) - \phi_t(f_t(x_0)) \\ &\leq \phi_t(x_0) \\ &\leq d(x_0, \partial K), \end{aligned}$$

donc $f_t(x_0) \in K$.

Alors, par (2) et (3), pour tout $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned} d(x_0, f_t^2(x_0)) &\leq d(x_0, f_t(x_0)) + d(f_t(x_0), f_t^2(x_0)) \\ &\leq (\phi_t(x_0) - \phi_t(f_t(x_0))) + (\phi_t(f_t(x_0)) - \phi_t(f_t^2(x_0))) \\ &= \phi_t(x_0) - \phi_t(f_t^2(x_0)) \\ &\leq \phi_t(x_0) \\ &\leq d(x_0, \partial K), \end{aligned}$$

donc $f_t^2(x_0) \in K$.

Ainsi, par induction, nous obtenons que $f_t^n(x_0) \in K$ pour tout $t \in [0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc, $x_0 \in K_t$ pour tout $t \in [0,1]$ et ainsi $K_t \neq \emptyset$ pour tout $t \in [0,1]$. Pour tout $t \in [0,1]$, nous pouvons appliquer le Théorème 1.1.4 à la fonction f_t restreinte à K_t et ainsi obtenir l'existence de $x_t \in K$ tel que $f_t(x_t) = x_t$. $\square$

Chapitre 2

THÉORÈMES DE POINT FIXE POUR DES FONCTIONS MULTIVOQUES SUR DES ESPACES MÉTRIQUES.

Ce chapitre est contruit de la même manière que le chapitre précédent, mais pour des fonctions multivoques. D'abord, quelques théorèmes de point fixe pour des fonctions multivoques définies sur un espace métrique et à valeurs dans lui-même seront énoncés et l'équivalence entre le théorème de Caristi multivoque et le principe variationnel d'Ekeland sera démontrée. Par la suite, pour pouvoir énoncer des théorèmes de point fixe pour des fonction multivoques qui sont définies uniquement sur un sous-ensemble d'un espace métrique et à valeurs dans l'espace métrique entier, il faudra d'abord introduire des notions de fonctions multivoques entrantes. Puis, quelques théorèmes utilisant un principe de continuation seront énoncés.

2.1. Théorème de Nadler et théorème de Caristi multivoque.

Définition 2.1.1. *Soit X un espace métrique. Pour A et B des sous-ensembles non-vides de X, on pose*

$$D(A,B) = \max\left\{\sup_{a\in A} d(a,B), \sup_{b\in B} d(b,A)\right\} \in [0,\infty]\,.$$

Sur l'espace des sous-ensembles non-vides fermés bornés de X, D est une métrique appelée la métrique de Hausdorff*.*

Définition 2.1.2. *Une* fonction multivoque $F : Y_1 \to Y_2$ *est une application qui à chaque* $y \in Y_1$ *associe* $F(y)$ *un ensemble non-vide de* Y_2.

Définition 2.1.3. *Une fonction multivoque* $F : X_1 \to X_2$ *où* X_1 *et* X_2 *sont des espaces métriques est appelée une* contraction *s'il existe* $k \in [0, 1)$ *tel que*

$$D_2(F(x), F(y)) \leq kd_1(x, y) \text{ pour tout } x, y \in X_1.$$

Le théorème de Nadler [**Na**] est une généralisation du principe de contraction de Banach pour les contractions multivoques. Voici une preuve de ce théorème reposant sur le théorème de Caristi.

Théorème 2.1.4 (Nadler)**.** *Soit* $F : X \to X$ *une contraction multivoque à valeurs fermées avec constante de contraction* k. *Alors,* F *a un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe* $z \in X$ *tel que* $z \in F(z)$.

DÉMONSTRATION. Soit $x \in X$. Remarquons que pour tout $y \in F(x)$, nous avons

$$\begin{aligned} d(y, F(y)) &\leq D(F(x), F(y)) \\ &\leq kd(x, y). \end{aligned}$$

Soit $\epsilon > 0$ tel que $\frac{1}{1+\epsilon} > k$. Pour tout $x \in X$, il existe $y \in F(x)$ tel que

$$d(x, y) \leq (1 + \epsilon)d(x, F(x)).$$

Posons, pour tout $x \in X$, $f(x) = y$. Alors, f est une fonction de X dans X qui satisfait, pour tout $x \in X$, $f(x) \in F(x)$ et

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{1+\epsilon} - k\right] d(x, f(x)) &\leq d(x, F(x)) - kd(x, f(x)) \\ &\leq d(x, F(x)) - d(f(x), F(f(x))). \end{aligned}$$

Soit $\phi : X \to \mathbb{R}$ la fonction définie comme suit :

$$\phi(x) = \left[\frac{1}{1+\epsilon} - k\right]^{-1} d(x, F(x)).$$

La fonction ϕ est une fonction continue et bornée inférieurement.

Par le Thérorème 1.1.4, nous pouvons conclure que f a un point fixe z. Donc, $z = f(z) \in F(z)$. $\square$

Il existe une généralisation du théorème de Caristi aux fonctions multivoques, voir [**MiTa**].

Théorème 2.1.5 (Caristi multivoque)**.** *Soit $\phi : X \to (-\infty, +\infty]$ une fonction propre semi-continue inférieurement bornée inférieurement. Soit $F : X \to X$ une fonction multivoque telle que pour tout $x \in X$ il existe $y \in F(x)$ tel que*

$$d(x, y) \leq \phi(x) - \phi(y).$$

Alors F a un point fixe.

Démonstration. Pour chaque $x \in X$ posons $f(x) = y$ où y est un élément de X tel que $y \in F(x)$ et $d(x, y) \leq \phi(x) - \phi(y)$. Alors, f est une fonction de X dans X qui satisfait

$$d(x, f(x)) \leq \phi(x) - \phi(f(x)) \text{ pour tout } x \in X.$$

Puisque ϕ est une fonction propre, il existe $u \in X$ tel que $\phi(u) < +\infty$. Alors, posons

$$X' = \{x \in X : \phi(x) \leq \phi(u) - d(u, x)\}.$$

X' n'est pas vide puisque $u \in X'$. De plus, par la semi-continuité inférieure de ϕ, X' est fermé et est donc un espace métrique complet.

Remarquons que la fonction ϕ restreinte au domaine X' est à valeurs réelles et qu'elle est aussi semi-continue inférieurement et bornée inférieurement.

Montrons maintenant que X' est invariant sous f. Pour tout $x \in X'$, nous avons

$$\begin{aligned}
\phi(f(x)) &\leq \phi(x) - d(x, f(x)) \\
&\leq \phi(u) - (d(u, x) + d(x, f(x))) \\
&\leq \phi(u) - d(u, f(x)).
\end{aligned}$$

Donc, $f(x) \in X'$ pour tout $x \in X'$.

Le Théorème 1.1.4 nous permet de conclure que f a un point fixe $z \in X'$. Donc, $z = f(z) \in F(z)$. $\square$

Maintenant que nous avons énoncé ce théorème, nous pouvons démontrer un peu plus simplement le principe variationnel d'Ekeland.

Démonstration du théorème 1.1.7. Supposons qu'il existe $\epsilon > 0$ et $u \in X$ vérifiant $\phi(u) \leq \inf_{x \in X} \phi(x) + \epsilon$ tels que la conclusion du Théorème 1.1.7 soit fausse.

Définissons $\psi : X \to (-\infty, \infty]$ par

$$\psi(x) = \begin{cases} \phi(x) & \text{si } \phi(x) + \epsilon d(x,u) \leq \phi(u) \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette fonction est propre, semi-continue inférieurement et bornée inférieurement.

Définissons une fonction multivoque $F : X \to X$ par

$$F(x) = \begin{cases} \{u\} & \text{si } \psi(x) = \infty \\ X \setminus \{x\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Puisque $\psi(u) = \phi(u) < \infty$, il est clair que F est sans point fixe. Montrons que F vérifie les hypothèses du Théorème 2.1.5.

Si $\psi(x) = \infty$, $u \in F(x)$ et

$$\epsilon d(x,u) \leq \psi(x) - \phi(u) = \psi(x) - \psi(u).$$

D'autre part, si $\psi(x) < \infty$,

$$\phi(x) \leq \phi(u) \quad \text{et} \quad \epsilon d(x,u) \leq \phi(u) - \phi(x) \leq \phi(u) - \inf_{x \in X} \phi(x) \leq \epsilon.$$

Il faut donc que l'énoncé (3) du Théorème 1.1.7 soit faux. Ainsi, il existe $y \in X \setminus \{x\} = F(x)$ tel que

$$\epsilon d(x,y) \leq \phi(x) - \phi(y) = \psi(x) - \psi(y).$$

En effet,

$$\begin{aligned} \phi(y) + \epsilon d(y,u) &\leq \phi(x) - \epsilon d(x,y) + \epsilon d(y,u) \\ &\leq \phi(u) - \epsilon(d(u,x) + d(x,y)) + \epsilon d(y,u) \\ &\leq \phi(u). \end{aligned}$$

Il s'agit d'une contradiction en vertu du Théorème 2.1.5. $\square$

L'implication inverse est également vraie ; le principe variationnel d'Ekeland implique la généralisation multivoque du théorème de Caristi.

Démonstration du théorème 2.1.5. Choisissons $u \in X$ tel que

$$\phi(u) \leq \inf_{x \in X} \phi(x) + 1.$$

Par le théorème 1.1.7, il existe $v \in X$ tel que $d(x,v) > \phi(v) - \phi(x)$ pour tout $x \in X \setminus \{v\}$. Or, par hypothèse, il existe $y \in F(v)$ tel que, $d(v,y) \leq \phi(v) - \phi(y)$. Nécessairement, $v = y \in F(v)$. □

2.2. Théorèmes de point fixe pour des contractions multivoques non-définies sur tout l'espace métrique

Les théorèmes de Nadler et de Caristi multivoque vus à la section précédente sont applicables seulement aux fonctions multivoques définies sur l'espace X à valeurs dans lui-même. Dans le cas d'une fonction multivoque définie seulement sur un sous-ensemble de X, des conditions supplémentaires seront nécessaires pour garantir l'existence d'un point fixe.

Voici une version locale du théorème de Caristi multivoque obtenue par Maciejewski [**Ma**] en 2007. Nous en présentons une nouvelle démonstration.

Théorème 2.2.1. *Soit $\phi : X \to [0,\infty)$ une fonction semi-continue inférieurement. Soit $F : B(u,r) \to X$ une fonction multivoque telle que pour tout $x \in B(u,r)$ il existe $y \in F(x)$ tel que*

$$d(x,y) \leq \phi(x) - \phi(y).$$

Si $\phi(u) < r$, alors F a un point fixe.

Démonstration. Définissons une fonction semi-continue inférieurement $\phi : X \to [0,\infty]$ par

$$\psi(x) = \begin{cases} \phi(x) & \text{si } \phi(x) + d(x,u) \leq \phi(u) \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

et définissons une fonction multivoque $G : X \to X$ par

$$G(x) = \begin{cases} F(x) & \text{si } \psi(x) < \infty \\ \{u\} & \text{si } \psi(x) = \infty. \end{cases}$$

Cette fonction est bien définie car si $\psi(x) < \infty$, $d(x,u) \le \phi(u) < r$. De plus, si $y \in F(x)$ est tel que $d(x,y) \le \phi(x) - \phi(y)$, alors $\phi(y) + d(y,u) \le \phi(u)$. Donc, $d(x,y) \le \psi(x) - \psi(y)$. Le Théorème 2.1.5 garantit l'existence d'un point fixe de G et donc d'un point fixe de F. $\square$

Il existe également une notion de fonction entrante pour les fonctions multivoques.

Définition 2.2.2. *Soit Y un espace linéaire topologique et soit K un sous-ensemble de Y. Nous disons qu'une fonction multivoque $F : K \to X$ est* entrante *si $F(x) \subset I_K(x)$ pour tout $x \in K$, où $I_K(x)$ est donné à la Définition 1.2.2. Nous disons que F est* faiblement entrante *si $F(x) \subset \overline{I_K(x)}$ pour tout $x \in K$.*

Dans le cas particulier où K est un sous-ensemble convexe d'un espace linéaire normé E et en utilisant une caractérisation de fonction entrante s'apparentant à celle de la Proposition 1.2.3, Mizoguchi et Takahashi [**MiTa**] ont obtenu la généralisation suivante du Théorème 1.2.4.

Théorème 2.2.3. *Soient K un sous-ensemble fermé et convexe de E et une contraction multivoque $F : K \to E$ à valeurs fermées telle que pour tout $x \in K$*

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{d((1-h)x + hy, K)}{h} = 0 \text{ uniformément en } y \in F(x). \tag{2.2.1}$$

Alors, F a un point fixe.

Or, il s'avère que

$$\left\{ y \in X : \lim_{h \to 0^+} \frac{d((1-h)x + hy, K)}{h} = 0 \right\} \subset \overline{I_K(x)}.$$

Ces deux ensembles sont égaux lorsque K est convexe. Il y a des exemples où l'inclusion est stricte (voir l'exemple 11.1 de [**De**]).

En 2000, Lim [**Lim**] a généralisé le théorème précédent à des ensembles K fermés quelconques. Sa démonstration repose sur l'induction transfinie.

Théorème 2.2.4. *Soient K un sous-ensemble fermé de E et une contraction multivoque $F : K \to E$ faiblement entrante à valeurs fermées. Alors, F a un point fixe.*

Il est à noter que ce théorème généralise le théorème 1.2.4 même pour les fonctions univoques puisque l'hypothèse que K soit convexe est superflue.

Nous avions remarqué au chapitre précédent que pour $K \subset E$ et $x \in K$,

$$\begin{aligned} I_K(x) \backslash \{x\} = \{ & y \in E : \exists u \in lin\,[x,y] \cap (K \backslash \{x\}) \\ & \text{donc tel que } \|x-u\| + \|u-y\| = \|x-y\| \} . \end{aligned}$$

Une autre notion a été introduite récemment par Maciejewski [**Ma**]. Elle utilise les définitions suivantes :

Définition 2.2.5. *Soit X un espace métrique. Nous définissons le segment métrique entre $x, y \in X$ par :*

$$[x,y] = \{u \in X : d(x,u) + d(u,y) = d(x,y)\},$$

et nous notons

$$(x,y] = [x,y] \setminus \{x\}.$$

Remarque 2.2.6. *Si E un espace normé et $x, y \in E$, alors $lin\,[x,y] \subset [x,y]$, voir Remarque 1.2.6.*

Définition 2.2.7. *Soient X un espace métrique, $K \subset X$ et $x \in K$. Nous définissons* l'ensemble entrant généralisé de x par rapport à K, *noté $\tilde{I}_K(x)$, par*

$$\tilde{I}_K(x) = \{x\} \cup \left\{ y \in X \backslash \{x\} : \inf_{u \in (x,y]} \frac{d(u,K)}{d(u,x)} = 0 \right\}.$$

Remarque 2.2.8. *Il est clair que*

$$\{x\} \cup \{y \in X : \exists u \in K \backslash \{x\} \text{ tel que } d(x,u) + d(u,y) = d(x,y)\} \subset \tilde{I}_K(x).$$

Remarque 2.2.9. *Si E est un espace normé, nous avons que $\overline{I_K(x)} \subset \tilde{I}_K(x)$. En effet, supposons que $y \subset \overline{I_K(x)}$. Choisissons une suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dans $I_K(x)$ telle que $x_n \to y$. Alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe N tel que pour tout $n \geq N$*

$$\|x_n - y\| < \epsilon.$$

Puisque $x_n \in I_K(x)$*, il existe* $c_n \geq 1$ *et* $u_n \in K$ *tel que* $x_n = x + c_n(u_n - x)$ *et donc* $u_n = x + h_n(x_n - x) \in K$ *où* $h_n = \frac{1}{c_n} \in (0,1]$*. Nous avons que*

$$\begin{aligned}\frac{d(x+h_n(y-x),K)}{h_n} &\leq \frac{\|(x+h_n(y-x))-(x+h_n(x_n-x))\|}{h_n} + \frac{d(x+h_n(x_n-x),K)}{h_n} \\ &= \frac{\|(x+h_n(y-x))-(x+h_n(x_n-x))\|}{h_n} \\ &= \|y-x_n\| \\ &< \epsilon.\end{aligned}$$

Alors,

$$\inf_{h\in(0,1]} \frac{d(x+h(y-x),K)}{h} = 0.$$

Ainsi, si $y \neq x$*,*

$$\begin{aligned}\inf_{u\in(x,y]} \frac{d(u,K)}{d(u,x)} &\leq \inf_{u\in lin(x,y]} \frac{d(u,K)}{d(u,x)} \\ &= \inf_{h\in(0,1]} \frac{d((1-h)x+hy,K)}{d((1-h)x+hy,x)} \\ &= \inf_{h\in(0,1]} \frac{d(x+h(y-x),K)}{h\,\|y-x\|} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Ainsi, $y \subset \tilde{I}_K(x)$ *et nous avons montré ce que nous voulions.*

Grâce à cette remarque, nous constatons que le théorème suivant obtenu récemment par Maciejewski **[Ma]** généralise le Théorème 2.2.4.

Théorème 2.2.10. *Soient* K *un sous-ensemble fermé de* X *et une contraction multivoque* $F : K \to X$ *à valeurs fermées telle que* $F(x) \subset \tilde{I}_K(x)$ *pour tout* $x \in K$*. Alors,* F *a un point fixe.*

Démonstration. Supposons que F n'a pas de point fixe. Soit k la constante de contraction de F. Choisissons α et β tels que $k < \alpha < \alpha + \beta < 1$. Le graphe de F, $Gr(F) = \{(x,y) \in K \times X : y \in F(x)\}$, peut être muni de la métrique D^* suivante :

$$D^*((x,y),(x',y')) = \max\left\{d(x,x'), \frac{1}{\alpha}d(y,y')\right\}.$$

L'espace métrique $(Gr(F), D^*)$ est complet. Nous voulons contruire une fonction $g : Gr(F) \to Gr(F)$ sans point fixe qui satisfait les hypothèses du Théorème 1.1.4.

Soit $(x, y) \in Gr(F)$. Nous avons que $y \in \tilde{I}_K(x) \setminus \{x\}$. Donc, pour $\epsilon < \frac{1-(\alpha+\beta)}{1+(\alpha+\beta)}$, il existe $u \in (x, y]$ tel que

$$\frac{d(u,K)}{d(u,x)} < \epsilon.$$

Alors, il existe $x' \in K$ tel que

$$d(u, x') < \epsilon d(u, x).$$

Nous voyons que $x' \neq x$ et nous avons

$$\begin{aligned}
(\alpha+\beta)d(x,x') + d(x',y) &\leq (\alpha+\beta)d(x,u) + (\alpha+\beta)d(u,x') + d(x',u) + d(u,y) \\
&< (\alpha+\beta)d(x,u) + ((\alpha+\beta)+1)\epsilon d(u,x) + d(u,y) \\
&< d(u,x) + d(u,y) \\
&= d(x,y).
\end{aligned}$$

De plus, $D(F(x), F(x')) < \alpha d(x, x')$. Donc, il existe $y' \in F(x')$ tel que

$$d(y, y') < \alpha d(x, x'). \tag{2.2.2}$$

Posons $g(x, y) = (x', y')$. Il est clair que g n'a pas de point fixe. Des deux inégalités précédentes, nous déduisons

$$\begin{aligned}
d(x',y') + \beta d(x,x') &\leq d(x',y) + d(y,y') + \beta d(x,x') \\
&< d(x',y) + \alpha d(x,x') + \beta d(x,x') \\
&= d(x',y) + (\alpha+\beta)d(x,x') \\
&\leq d(x,y). \qquad\qquad (2.2.3)
\end{aligned}$$

Il découle de (2.2.2) et (2.2.3) que $\beta D^*((x,y),(x'y')) \leq d(x,y) - d(x',y')$.

Le Théorème 1.1.4 appliqué à g avec $\phi : Gr(F) \to \mathbb{R}$ définie par $\phi(x,y) = \frac{d(x,y)}{\beta}$ implique que g a un point fixe ; ce qui est une contradiction, donc F a un point fixe. $\square$

Voici une version locale du théorème précédent, voir **[Ma]** :

Théorème 2.2.11. *Soient K un sous-ensemble fermé de X et une contraction multivoque à valeurs fermées $F : B_K(x_0, r) \to X$, où*

$$B_K(x_0, r) = \{x \in K : d(x, x_0) < r\},$$

telle que $F(x) \subset \tilde{I}_K(x)$ pour tout $x \in B_K(x_0, r)$ et $d(x_0, F(x_0)) < (1-k)r$ où k est la constante de contraction de F. Alors, F a un point fixe.

Démonstration. Supposons que F n'a pas de point fixe. Choisissons α et β tels que $k < \alpha < \alpha + \beta < 1$ et $d(x_0, F(x_0)) < \beta r$. L'ensemble

$$G = \{(x, y) \in K \times X : (x \in B_K(x_0, r) \text{ et } y \in F(x)) \text{ ou } (x \notin B_K(x_0, r))\}$$

peut être muni de la métrique D^* suivante :

$$D^*((x, y), (x', y')) = \max\left\{d(x, x'), \frac{1}{\alpha}d(y, y')\right\}.$$

L'espace métrique (G, D^*) est complet. Soit l'ensemble

$$G_1 = \{(x, y) \in G : x \in B_K(x_0, r)\}.$$

Puisque $d(x_0, F(x_0)) < \beta r$, il existe $y_0 \in F(x_0)$ tel que $d(x_0, y_0) < \beta r$ et ainsi $B_G((x_0, y_0), r) \subset G_1$.

Nous voulons contruire une fonction $g : B_G((x_0, y_0), r) \to G$ sans point fixe qui satisfait les hypothèses du Théorème 2.2.1.

De la même façon qu'au Théorème 2.2.10, pour tout $(x, y) \in B_G((x_0, y_0), r)$ nous pouvons trouver $x' \in K$ tel que $x' \neq x$ et

$$(\alpha + \beta)d(x, x') + d(x', y) \leq d(x, y).$$

Si $x' \in B_K(x_0, r)$, de la même façon qu'au Théorème 2.2.10, nous pouvons trouver $y' \in F(x')$ tel que

$$d(y, y') < \alpha d(x, x').$$

Si $x' \notin B_K(x_0, r)$, posons $y' = y$, ainsi l'inégalité $d(y, y') < \alpha d(x, x')$ est également satisfaite.

Posons $g(x, y) = (x', y')$. Il est clair que g n'a pas de point fixe. Comme au Théorème 2.2.10, nous déduisons que $\beta D^*((x, y), (x'y')) \leq d(x, y) - d(x', y')$.

Le Théorème 2.2.1 appliqué à g avec $\phi : G \to \mathbb{R}$ définie par $\phi(x,y) = \frac{d(x,y)}{\beta}$ implique que g a un point fixe puisque $\phi(x_0, y_0) = \frac{d(x_0,y_0)}{\beta} < r$; ce qui est une contradiction, donc F a un point fixe. $\square$

Remarque 2.2.12. *Si $K = X$, le théorème précédent devient une généralisation du Théorème 1.2.1 :*

Soit une contraction multivoque à valeurs fermées $F : B(x_0, r) \to X$ avec constante de contraction k telle que $d(x_0, F(x_0)) < (1-k)r$. Alors, F a un point fixe.

En 2006, le théorème suivant a été obtenu par Azé et Corvellec [**AzCo**]. Nous en présentons une démonstration légérement différente.

Théorème 2.2.13. *Soient K un sous-ensemble de X et une fonction multivoque à graphe fermé $F : K \to X$. Soient $k \in [0,1)$ et $\epsilon > 0$ tels que*

$$\sigma_\epsilon = \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon} - k > 0$$

et supposons que pour tout $(x,y) \in Gr(F)$ tel que $x \neq y$ il existe $u \in X$ et $z \in K$ tels que

(1) $d(x,u) + d(u,y) = d(x,y)$;

(2) $d(u,z) < \epsilon d(u,x)$;

(3) $d(y, F(z)) \leq k d(x,z)$.

Alors, F a un point fixe.

Démonstration. Supposons que $k > 0$. Supposons que F n'a pas de point fixe. Le graphe de F, $Gr(F) = \{(x,y) \in K \times X : y \in F(x)\}$, peut être muni de la métrique D^* suivante :

$$D^*((x,y),(x',y')) = \sigma_\epsilon \max\left\{d(x,x'), \frac{1}{k} d(y,y')\right\}.$$

L'espace métrique $(Gr(F), D^*)$ est complet puisque, par hypothèse, $Gr(F)$ est fermé. Nous voulons contruire une fonction $g : Gr(F) \to Gr(F)$ sans point fixe qui satisfait les hypothèses du Théorème 1.1.4.

Soit $(x,y) \in Gr(F)$. Par hypothèse, il existe $u \in X$ et $x' \in K$ tels que

(1) $d(x, u) + d(u, y) = d(x, y)$;

(2) $d(u, x') < \epsilon d(u, x)$;

(3) $d(y, F(x')) \leq kd(x, x')$.

Remarquons que $u \neq x$ et $x' \neq x$ par (2).

Alors,

$$d(x, x') \leq d(x, u) + d(u, x') < (1 + \epsilon)d(x, u).$$

De plus

$$d(y, F(x')) \leq kd(x, x') < k(1 + \epsilon)d(x, u),$$

donc, il existe $y' \in F(x')$ tel que

$$d(y, y') \leq k(1 + \epsilon)d(x, u).$$

Posons $g(x, y) = (x', y')$. Il est clair que g n'a pas de point fixe. Nous avons

$$\begin{aligned} d(x', y') &\leq d(x', u) + d(u, y) + d(y, y') \\ &= d(x', u) + d(x, y) - d(x, u) + d(y, y') \\ &< \epsilon d(x, u) + d(x, y) - d(x, u) + k(1 + \epsilon)d(x, u) \\ &= d(x, y) + (-1 + \epsilon + k(1 + \epsilon))d(x, u) \\ &= d(x, y) - \sigma_\epsilon(1 + \epsilon)d(x, u) \end{aligned}$$

et donc

$$\sigma_\epsilon(1 + \epsilon)d(x, u) < d(x, y) - d(x', y').$$

Ainsi, nous obtenons

$$\sigma_\epsilon d(x, x') < \sigma_\epsilon(1 + \epsilon)d(x, u) < d(x, y) - d(x', y').$$

et

$$\sigma_\epsilon \frac{1}{k} d(y, y') < \sigma_\epsilon \frac{1}{k} k(1 + \epsilon)d(x, u) < d(x, y) - d(x', y').$$

Donc, $D^*((x, y), (x'y')) \leq d(x, y) - d(x', y')$. Le Théorème 1.1.4 appliqué à g avec $\phi : Gr(F) \to \mathbb{R}$ définie par $\phi(x, y) = d(x, y)$ implique que g a un point fixe ; ce qui est une contradiction, donc F a un point fixe.

Si $k = 0$, considérons $k^* > 0$ tel que

$$\sigma_\epsilon^* = \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon} - k^* > 0.$$

Les hypothèses du théorème sont satisfaites avec k^*. Par ce qui précède, F a un point fixe. □

Remarque 2.2.14. *Nous pouvons constater que les hypothèses de ce théorème sont plus faibles que celles du théorème 2.2.10. En effet, soient K un sous-ensemble fermé de X et une contraction multivoque $F : K \to X$ à valeurs fermées telle que $F(x) \subset \tilde{I}_K(x)$ pour tout $x \in K$. Alors F est une fonction à graphe fermé puisque F est une contraction, K est fermé et $F(x)$ est fermé pour tout $x \in K$. Soit k la constante de contraction de F et $\epsilon > 0$ tel que*

$$\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon} - k > 0.$$

Pour tout $x \in K$ et $y \in F(x) \backslash \{x\}$, puisque $F(x) \subset \tilde{I}_K(x)$, il existe $u \in (x, y]$, tel que

$$\frac{d(u,K)}{d(u,x)} < \epsilon.$$

Donc, $d(u, K) < \epsilon d(u, x)$. D'où l'existence de $z \in K$ tel que

$$d(u, z) < \epsilon d(u, x).$$

De plus,

$$D(y, F(z)) \leq D(F(x), F(z)) \leq kd(x, z).$$

Ainsi les hypothèses du théorème 2.2.13 sont toutes satisfaites.

Voici maintenant un résultat de Daneš [**Da**] assurant l'existence d'un point fixe d'une fonction multivoque F dont les valeurs $F(x)$ intersectent une goutte de sommet x.

Théorème 2.2.15. *Soient K un sous-ensemble fermé d'un espace de Banach E et $z \in E \backslash K$ tel que $d(z, K) = R > 0$. Soit $F : K \to K$ une fonction multivoque telle qu'il existe $r < R$ tel que*

$$F(x) \cap D(x, \overline{B(z,r)}) \neq \emptyset \text{ pour tout } x \in K.$$

Alors, pour tout $x \in K$, F a un point fixe dans $K \cap D(x, \overline{B(z, r)})$.

Démonstration. Soit $x \in K$. Posons, $s = d(x,z)$ et $A = K \cap D(x, \overline{B(z,r)})$, où r tel que mentionné dans l'énoncé du théorème. Par le Théorème 1.1.10, il existe

$$x^* \in A \cap \overline{B(z,s)}.$$

tel que

$$\{x^*\} = A \cap D(x^*, \overline{B(z,r)}).$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} A \cap \overline{B(z,s)} &= K \cap D(x, \overline{B(z,r)}) \cap \overline{B(z,s)} \\ &= K \cap D(x, \overline{B(z,r)}. \end{aligned}$$

Donc, $x^* \in D(x, \overline{B(z,r)})$, ce qui implique que $D(x^*, \overline{B(z,r)}) \subset D(x, \overline{B(z,r)})$. Ainsi,

$$\begin{aligned} A \cap D(x^*, \overline{B(z,r)}) &= K \cap D(x, \overline{B(z,r)}) \cap D(x^*, \overline{B(z,r)}) \\ &= K \cap D(x^*, \overline{B(z,r)}). \end{aligned}$$

Nous avons donc montré que

$$\{x^*\} = K \cap D(x^*, \overline{B(z,r)}).$$

Puisque, par hypothèse, $F(x^*) \cap K \cap D(x^*, \overline{B(z,r)}) \neq \emptyset$, if faut nécessairement que $x^* \in F(x^*)$. $\square$

2.3. Principes de continuation.

Comme pour les fonctions univoques, le principe de continuation est utile pour obtenir l'existence de point fixe pour une fonction multivoque non-définie sur tout l'espace. La déformation que nous ferons subir à notre fonction pour en obtenir une autre plus simple dont l'existence d'un point fixe est connue devra respecter certaines conditions pour pouvoir garantir l'existence d'un point fixe de notre fonction.

Voici un principe de continuation obtenu par Maciejewski [**Ma**] :

Théorème 2.3.1. *Soient $K \subset X$ un ensemble fermé et $U \subset K$ un ensemble ouvert de K. Soit une fonction multivoque $H : \overline{U} \times [0,1] \to X$ à valeurs fermées telle que les conditions suivantes sont satisfaites :*

(1) il existe $k < 1$ tel que $D(H(x,t), H(y,t)) \leq kd(x,y)$ pour tout $x, y \in \overline{U}$ et pour tout $t \in [0,1]$;

(2) $D(H(x,t), H(x,s)) \leq |\phi(t) - \phi(s)|$, où $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue croissante, pour tout $x \in \overline{U}$ et pour tout $t, s \in [0,1]$;

(3) $x \notin H(x,t)$ pour tout $x \in \partial_K U$ et pour tout $t \in [0,1]$;

(4) $H(x,t) \subset \tilde{I}_K(x)$ pour tout $x \in \overline{U}$ et pour tout $t \in [0,1]$.

Supposons que $H(\cdot, 0)$ a un point fixe. Alors $H(\cdot, 1)$ a également un point fixe.

Démonstration. Considérons l'ensemble

$$Q = \left\{(x,t) \in \overline{U} \times [0,1] : x \in H(x,t)\right\}.$$

Cet ensemble n'est pas vide, puisque $H(\cdot, 0)$ a un point fixe. Nous définissons sur Q l'ordre partiel suivant :

$$(x,t) \leq (y,s) \text{ si et seulement si } t \leq s \text{ et } d(x,y) \leq \frac{2(\phi(s) - \phi(t))}{1-k}.$$

Soit P un sous-ensemble de Q totalement ordonné. Posons $t^* = \sup\{t : (x,t) \in P\}$. Soit $\{(x_n, t_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans P telle que $(x_n, t_n) \leq (x_{n+1}, t_{n+1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t_n \to t^*$. Nous avons

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{2(\phi(t_m) - \phi(t_n))}{1-k} \text{ pour tout } m > n.$$

Alors, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, donc converge vers $x^* \in K$. La continuité de H implique que $x^* \in H(x^*, t^*)$ et donc $(x^*, t^*) \in Q$. Il est clair que (x^*, t^*) est un majorant de P.

Par le lemme de Zorn, Q contient un élément maximal (x_0, t_0). Nous avons que $x_0 \in H(x_0, t_0)$. Montrons que $t_0 = 1$ pour ainsi montrer que $H(\cdot, 1)$ a un point fixe. Supposons que $t_0 \neq 1$. La condition (3) implique que $x_0 \in U$. Alors, il existe $r_0 > 0$ tel que $B_K(x_0, r_0) \subset U$. De plus, il existe $t_1 \in (t_0, 1]$ et $r \leq r_0$ tels que $2(\phi(t_1) - \phi(t_0)) = (1-k)r$. Ainsi

$$\begin{aligned} d(x_0, H(x_0, t_1)) &\leq d(x_0, H(x_0, t_0)) + D(H(x_0, t_0), H(x_0, t_1)) \\ &\leq \phi(t_1) - \phi(t_0) \\ &< (1-k)r. \end{aligned}$$

La fonction $H(\cdot, t_1)$ restreinte à $B_K(x_0, r)$ satisfaits les conditions du théorème 2.2.11 et donc il existe un point fixe $x_1 \in B_K(x_0, r)$ de $H(\cdot, t_1)$. Ainsi $(x_1, t_1) \in Q$. Nous avons que

$$t_0 < t_1 \text{ et } d(x_0, x_1) \leq r = \frac{2(\phi(t_1) - \phi(t_0))}{1-k}.$$

Donc, $(x_0, t_0) < (x_1, t_1)$, ce qui est une contradiction au fait que (x_0, t_0) est maximal dans Q. Donc, $t_0 = 1$ et $H(\cdot, 1)$ a un point fixe. □

Si $K = X$, le théorème précédent devient le résultat obtenu par Frigon et Granas [**FrGr**].

Théorème 2.3.2. *Soit $U \subset X$ un ensemble ouvert. Soit une fonction multivoque $H : \overline{U} \times [0,1] \to X$ à valeurs fermées telle que les conditions suivantes sont satisfaites :*

(1) il existe $k < 1$ tel que $D(H(x,t), H(y,t)) \leq kd(x,y)$ pour tout $x, y \in \overline{U}$ et pour tout $t \in [0,1]$;

(2) $D(H(x,t), H(x,s)) \leq |\phi(t) - \phi(s)|$, où $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue croissante, pour tout $x \in \overline{U}$ et pour tout $t, s \in [0,1]$;

(3) $x \notin H(x,t)$ pour tout $x \in \partial U$ et pour tout $t \in [0,1]$.

Suposons que $H(\cdot, 0)$ a un point fixe. Alors $H(\cdot, 1)$ a également un point fixe.

Voici un corollaire du théorème précédent.

Corollaire 2.3.3 (Alternative non-linéaire)**.** *Soient $U \subset E$ un ensemble ouvert tel que $0 \in U$ et une contraction multivoque $F : \overline{U} \to E$ à valeurs fermées bornées telle que $F(U)$ est borné. Alors un des deux énoncés suivants est vérifié :*

(1) F a un point fixe ;

(2) il existe $t \in (0,1)$ et $z \in \partial U$ tels que $z \in tF(z)$.

Chapitre 3

THÉORÈMES DE POINT FIXES POUR DES FONCTIONS SUR DES ESPACES DE FRÉCHET OU SUR DES ESPACES DE JAUGE

Dans ce chapitre, nous travaillerons dorénavant sur des espaces de Fréchet et des espaces de jauge. Ainsi, trois nouvelles notions de contractions seront introduites. Tout d'abord, la notion de contraction sur un espace de Fréchet sera introduite, puis les notions de contractions généralisées et de contraction admissible sur un espace de jauge. Grâce à ces trois définitions, nous obtiendrons deux généralisations du théorème de Banach et une autre du théorème de Nadler. Enfin, des principes de continuation seront énoncés.

3.1. Théorèmes de point fixe pour des contractions sur des espaces de Fréchet

Dans cette section, $\mathbb{E} = (\mathbb{E}, \{|\cdot|_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ désignera un espace de Fréchet dont la topologie est engendrée par la famille de semi-normes $\{|\cdot|_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Définition 3.1.1. *Soit K un sous-ensemble de $\mathbb{E}$. Nous dirons que K est borné si pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe M_n tel que $|x|_n \leq M_n$ pour tout $x \in K$.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la relation d'équivalence $\sim_n$ est définie comme suit :

$$x \sim_n y \text{ si et seulement si } |x - y|_n = 0.$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'espace quotient, noté $E^n = (E/\sim_n, |\cdot|_n)$, est un espace métrique et la complétion de E^n par rapport à $|\cdot|_n$, notée $\mathbb{E}^n = (\mathbb{E}^n, |\cdot|_n)$, est un espace de Banach.

Soit K un sous-ensemble de $\mathbb{E}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous noterons

$$K^n = \{[x]_n : x \in K\} \subset E^n \text{ où } [x]_n \text{ est la classe d'équivalence de } x \text{ dans } E^n.$$

Aussi, $\overline{K^n}$, $int_n(K^n)$ et $\partial_n(K^n)$ représenteront respectivement la fermeture, l'intérieur et la frontière de K^n par rapport à $|\cdot|_n$ dans $\mathbb{E}^n$.

Si

$$|x|_1 \leq |x|_2 \leq |x|_3 \leq \dots \text{ pour tout } x \in \mathbb{E}, \tag{3.1.1}$$

remarquons que $|\cdot|_n$ induit une semi-norme sur $\mathbb{E}^m$ pour tout $m > n$.

Définition 3.1.2. *Une fonction $f : K \to \mathbb{E}$ où K est un sous-ensemble de $\mathbb{E}$ est une* contraction *si pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe une constante $k_n < 1$ telle que*

$$|f(x) - f(y)|_n \leq k_n |x - y|_n \text{ pour tout } x, y \in X.$$

Remarque 3.1.3. *Remarquons que $f : K \to \mathbb{E}$ peut être une contraction au sens la définition 3.1.2 sans être un contraction au sens de la définition 1.1.1 lorsque $\mathbb{E}$ est muni de la métrique usuelle*

$$d(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{|x - y|_n}{2^n(1 + |x - y|_n)}.$$

Voici une généralisation du théorème de Banach, voir **[CaNa]** :

Théorème 3.1.4. *Soient K un sous-ensemble fermé de $\mathbb{E}$ et $f : K \to K$ une contraction. Alors, f a un unique point fixe.*

Démonstration. Soit $x_0 \in K$. Définissons par induction $x_i = f(x_{i-1})$ pour $i \in \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$, en procédant comme dans la preuve classique du théorème de point fixe de Banach, on montre que la suite $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy par rapport à $|\cdot|_n$.

Ainsi, puisque K est fermé, il est complet. Donc, il existe $x \in K$ tel que $x_i \to x$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous avons

$$\begin{aligned} |x - f(x)|_n &\leq |x - x_i|_n + |x_i - f(x)|_n \\ &= |x - x_i|_n + |f(x_{i-1}) - f(x)|_n \\ &\leq |x - x_i|_n + k_n |x_{i-1} - x|_n . \end{aligned}$$

Ainsi, puisque $lim_{i\to\infty} |x - x_i|_n = 0$, nous pouvons conclure que $|x - f(x)|_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc que $x = f(x)$.

L'unicité du point fixe découle directement du fait que f est une contraction.

□

Voici un principe de continuation qui a été obtenu dans **[FrGr2]** :

Théorème 3.1.5. *Soit U un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{E}$ et soit une famille $\{f_t : \overline{U} \to \mathbb{E}\}_{t\in[0,1]}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$*

(1) il existe $k_n < 1$ tel que $|f_t(x) - f_t(y)|_n \leq k_n |x - y|_n$ pour tout $t \in [0, 1]$ et pour tout $x, y \in K$;

(2) il existe $M_n > 0$ tel que $|f_t(x) - f_s(x)|_n \leq M_n |t - s|_n$ pour tout $x \in K$ et pour tout $t, s \in [0, 1]$;

(3) $f_t(x) \neq x$ pour tout $x \in \partial U$ et pour tout $t \in [0, 1]$.

S'il existe $t \in [0, 1]$ tel que f_t a un point fixe, alors f_t a un unique point fixe pour tout $t \in [0, 1]$.

Remarque 3.1.6. *En pratique, nous sommes plutôt amenés à considérer des familles $\{f_t : K \to \mathbb{E}\}_{t\in[0,1]}$ où K est un sous-ensemble fermé borné de $\mathbb{E}$. Or, en général, nous aurons alors $intK = \emptyset$, donc les hypothèses du théorème précédent ne pourront pas être satisfaites. En effet, il suffit de penser à l'espace de Fréchet $\mathbb{E} = C([0, \infty))$ avec la topologie uniforme sur les compacts. Dans ce cas-ci, tout borné de $\mathbb{E}$ est d'intérieur vide. Nous verrons à la section suivante, un principe de continuation pour une famille $\{f_t : K \to \mathbb{E}\}_{t\in[0,1]}$ où K est un fermé de $\mathbb{E}$ pouvant être d'intérieur vide.*

3.2. Théorèmes de point fixe pour des contractions généralisées sur des espaces de jauge.

Dans cette section, nous considérons des espaces plus généraux que les espaces de Fréchet. $\mathbb{E} = (\mathbb{E}, \{d_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$ désignera un espace de jauge complet dont la topologie est engendrée par la famille de pseudo-métriques $\{d_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ où Λ est un ensemble partiellement ordonné filtrant à droite, voir [**Du**] pour plus de détails.

Pour tout $\alpha \in \Lambda$, la relation d'équivalence $\sim_\alpha$ est définie comme suit :

$$x \sim_\alpha y \text{ si et seulement si } d_\alpha(x, y) = 0.$$

Alors, pour tout $\alpha \in \Lambda$, l'espace quotient, noté $E^\alpha = (E/\sim_\alpha, d_\alpha)$, est un espace métrique et la complétion de E^α par rapport à d_α, notée $\mathbb{E}^\alpha = (\mathbb{E}^\alpha, d_\alpha)$, est un espace métrique complet. Pour tout $\alpha \in \Lambda$, nous pouvons définir la fonction continue $\mu_\alpha : \mathbb{E} \to \mathbb{E}^\alpha$, où $\mu_\alpha(x)$ est la classe d'équivalence de x.

Soit K un sous-ensemble de $\mathbb{E}$. Pour tout $\alpha \in \Lambda$, nous noterons

$$K^\alpha = \{\mu_\alpha(x) : x \in K\} \subset E^\alpha.$$

Aussi, $\overline{K^\alpha}$, $int_\alpha(K^\alpha)$ et $\partial_\alpha(K^\alpha)$ représenteront respectivement la fermeture, l'intérieur et la frontière de K^α par rapport à d_α dans $\mathbb{E}^\alpha$.

Si

$$d_\alpha(x, y) \le d_\beta(x, y) \text{ pour tout } x, y \in \mathbb{E} \text{ et pour tout } \alpha \le \beta, \tag{3.2.1}$$

remarquons que d_α induit une pseudo-métrique sur $\mathbb{E}^\beta$ pour tout $\beta > \alpha$. Nous pouvons donc définir, pour tout $\alpha, \beta \in \Lambda$ tels que $\beta > \alpha$, la fonction continue $\mu_{\alpha\beta} : \mathbb{E}^\beta \to \mathbb{E}^\alpha$, analoguement à ce qui a été fait précédemment.

Définition 3.2.1. *Soit $K \subset \mathbb{E}$. Le* α-diamètre *de K est*

$$diam_\alpha(K) = \sup\{d_\alpha(x, y) : x, y \in K\}.$$

Définition 3.2.2. *La* pseudo-métrique généralisée de Hausdorff induite par d_α *est notée D_α et est définie par*

$$D_\alpha(A, B) = \max\left\{\sup_{a\in A} d_\alpha(a, B), \sup_{b\in B} d_\alpha(b, A)\right\} \in [0, \infty],$$

où A et B sont des sous-ensembles non-vides de $\mathbb{E}$.

Définition 3.2.3. *Soit K un sous-ensemble de $\mathbb{E}$, où $\mathbb{E}$ est une espace de jauge. Nous dirons que K est* borné *si pour tout $\alpha \in \Lambda$, $D_\alpha(\{0\}, K) < \infty$.*

Remarque 3.2.4. *Soit $f : K \to \mathbb{E}$. Comme à la section précédente, nous pouvons dire que f est une contraction si, pour tout $\alpha \in \Lambda$, il existe $k_\alpha \in [0, 1)$ tel que*

$$d_\alpha(f(x), f(y)) \leq k_\alpha d_\alpha(x, y) \text{ pour tout } x, y \in K.$$

Cette définition est assez restrictive. En effet, il suffit de penser au cas où $\mathbb{E} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ avec $d_n(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$ et $f : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est une contraction. Alors, en écrivant $f = (f_1, f_2, \ldots)$, nous constatons qu'il faut que

$$f_n(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots) = f_n(x_1, \ldots, x_n, \hat{x}_{n+1}, \ldots)$$

c'est à dite que f_n ne dépend en fait que des n premières variables. Afin de considérer des cas plus généraux, **[Fr]** *a introduit une notion de contraction généralisée.*

Soit $f : K \to \mathbb{E}$ où K est un sous-ensemble de $\mathbb{E}$. Pour tout $\alpha \in \Lambda$, nous définissons la fonction multivoque $F^\alpha : K^\alpha \to \mathbb{E}^\alpha$ comme suit

$$F^\alpha(\mu_\alpha(x)) = \overline{\mu_\alpha \circ f(\{x\}_\alpha)},$$

où $\{x\}_\alpha = \{y \in K : d_\alpha(x, y) = 0\}$. Si F^α est une contraction, nous pouvons la prolonger et ainsi obtenir

$$\mathbb{F}^\alpha : \overline{K^\alpha} \to \mathbb{E}^\alpha,$$

une contraction multivoque à valeurs fermées.

Définition 3.2.5. *Une fonction $f : K \to \mathbb{E}$ où K est un sous-ensemble de $\mathbb{E}$ est une* contraction généralisée *si*

(1) pour tout $\alpha \in \Lambda$, il existe $k_\alpha < 1$ tel que

$$D_\alpha(f(\{x\}_\alpha), f(\{x\}_\alpha)) \leq k_\alpha d_\alpha(x, y) \text{ pour tout } x, y \in K;$$

(2) pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout $\alpha \in \Lambda$, il existe $\beta > \alpha$ tel que

$$diam_\beta(f(\{x\}_\beta)) < (1 - k_\beta)\epsilon \text{ pour tout } x \in K.$$

Nous disons que f est une contraction généralisée avec constantes $\{k_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$.

Remarque 3.2.6. *Une fonction* $f : K \to \mathbb{E}$ *où* $\mathbb{E}$ *est un espace de Fréchet qui est une contraction au sens de la Définition 3.1.2 est une contraction au sens généralisé. En effet, pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et pour tout* $x, y \in K$*, nous avons que*

$$D_n(f(\{x\}_n), f(\{y\}_n)) = |f(x) - f(y)|_n \leq k_n |x - y|_n .$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$ *et pour tout* $x \in K$*,* $diam_n(f(\{x\}_n)) = 0$*.*

Nous aurons besoin du lemme suivant, voir **[Fr]** pour la démonstration.

Lemme 3.2.7. *Soit* K *un sous-ensemble fermé de* $\mathbb{E}$ *et supposons que la condition* (3.2.1) *est satisfaite. Pour toute suite* $\{z^\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ *telle que* $z^\alpha \in \overline{K^\alpha}$ *et telle que pour tout* $\alpha \in \Lambda$*,* $\left\{\mu_{\alpha\beta}(z^\beta)\right\}_{\beta\geq\alpha}$ *est suite de Cauchy dans* $\overline{K^\alpha}$*, il existe* $x \in K$ *tel que* $\left\{\mu_{\alpha\beta}(z^\beta)\right\}_{\beta\geq\alpha}$ *converge vers* $\mu_\alpha(x) \in K^\alpha$ *pour tout* $\alpha \in \Lambda$*.*

Voici une généralisation du théorème de Banach obtenue par M. Frigon en 2000, voir **[Fr]** :

Théorème 3.2.8. *Soient* $\mathbb{E}$ *un espace de jauge vérifiant* (3.2.1) *et* $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ *une contraction généralisée. Alors,* f *a un unique point fixe.*

Démonstration. Puisque f est une contraction généralisée, la fonction

$$\mathbb{F}^\alpha : \mathbb{E}^\alpha \to \mathbb{E}^\alpha,$$

telle que définie précédemment, est une contraction multivoque à valeurs fermées pour tout $\alpha \in \Lambda$. Par le théorème de Nadler (Théorème 2.1.4), $\mathbb{F}^\alpha$ a un point fixe $z^\alpha \in \mathbb{E}^\alpha$. Évidemment, pour tout $\beta > \alpha$, $u_{\alpha\beta}(z^\beta) \in \mathbb{F}^\alpha(u_{\alpha\beta}(z^\beta))$.

Soient $\epsilon > 0$ et $\gamma \in \Lambda$. Puisque f est une contraction généralisée, il existe $\alpha > \gamma$ tel que

$$diam_\alpha(\mathbb{F}^\alpha(z)) < (1 - k_\alpha)\epsilon \text{ pour tout } z \in \mathbb{E}^\alpha.$$

Alors, pour tout $\lambda, \beta \geq \alpha$,

$$\begin{aligned} d_\alpha(\mu_{\alpha\lambda}(z^\lambda), \mu_{\alpha\beta}(z^\beta)) &\leq D_\alpha(\mathbb{F}^\alpha(\mu_{\alpha\lambda}(z^\lambda)), \mathbb{F}^\alpha(\mu_{\alpha\beta}(z^\beta))) + diam_\alpha(\mathbb{F}^\alpha(\mu_{\alpha\lambda}(z^\lambda))) \\ &< k_\alpha d_\alpha(\mu_{\alpha\lambda}(z^\lambda), \mu_{\alpha\beta}(z^\beta)) + (1 - k_\alpha)\epsilon. \end{aligned}$$

D'où,

$$d_\gamma(\mu_{\gamma\lambda}(z^\lambda), \mu_{\gamma\beta}(z^\beta)) \leq d_\alpha(\mu_{\alpha\lambda}(z^\lambda), \mu_{\alpha\beta}(z^\beta)) < \epsilon.$$

Donc, pour tout $\gamma \in \Lambda$, $\{\mu_{\gamma\alpha}(z^\alpha)\}_{\alpha\geq\gamma}$ est suite de Cauchy dans $\mathbb{E}^\gamma$ et, par le Lemme 3.2.7, il existe $x \in \mathbb{E}$ tel que $\{\mu_{\gamma\alpha}(z^\alpha)\}_{\alpha\geq\gamma}$ converge vers $\mu_\gamma(x) \in E^\gamma$ pour tout $\gamma \in \Lambda$.

Montrons que $x = f(x)$. Soit $\gamma \in \Lambda$. Pour $\epsilon > 0$, prenons $\beta \geq \alpha \geq \gamma$ tels que $diam_\alpha(\mathbb{F}^\alpha(\mu_\alpha(x))) < \epsilon/2$ et $d_\alpha(\mu_\alpha(x), \mu_{\alpha\beta}(z^\beta)) < \epsilon/4$. Nous avons que

$$\begin{aligned}
d_\gamma(x, f(x)) &\leq d_\alpha(x, f(x)) \\
&\leq d_\alpha(\mu_\alpha(x), \mu_{\alpha\beta}(z^\beta)) + D_\alpha(\mathbb{F}^\alpha(\mu_{\alpha\beta}(z^\beta)), \mathbb{F}^\alpha(\mu_\alpha(x))) + diam_\alpha(\mathbb{F}^\alpha(\mu_\alpha(x))) \\
&\leq (1 + k_\alpha)d_\alpha(\mu_\alpha(x), \mu_{\alpha\beta}(z^\beta)) + \frac{\epsilon}{2} \\
&\leq \epsilon.
\end{aligned}$$

Donc, pour tout $\gamma \in \Lambda$, $d_\gamma(x, f(x)) = 0$ et ainsi x est un point fixe de f.

En ce qui concerne l'unicité, remarquons que toute contraction généralisée a au plus un point fixe. Supposons que x_1 et x_2 sont deux point fixes de f. Alors, pour tout $\alpha \in \Lambda$, $\mu_\alpha(x_1) \in \mathbb{F}^\alpha(\mu_\alpha(x_1))$ et $\mu_\alpha(x_2) \in \mathbb{F}^\alpha(\mu_\alpha(x_2))$.

Soient $\epsilon > 0$ et $\gamma \in \Lambda$. Puisque f est une contraction généralisée, il existe $\alpha > \gamma$ tel que

$$diam_\alpha(\mathbb{F}^\alpha(z)) < (1 - k_\alpha)\epsilon \text{ pour tout } z \in \mathbb{E}^\alpha.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
d_\alpha(\mu_\alpha(x_1), \mu_\alpha(x_2)) &\leq D_\alpha(\mathbb{F}^\alpha(\mu_\alpha(x_1)), \mathbb{F}^\alpha(\mu_\alpha(x_2))) + diam_\alpha(\mathbb{F}^\alpha(\mu_\alpha(x_1))) \\
&< k_\alpha d_\alpha(\mu_\alpha(x_1), \mu_\alpha(x_2)) + (1 - k_\alpha)\epsilon.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
d_\gamma(x_1, x_2) &= d_\gamma(\mu_\gamma(x_1), \mu_\gamma(x_2)) \\
&\leq d_\alpha(\mu_\alpha(x_1), \mu_\alpha(x_2)) \\
&< \epsilon.
\end{aligned}$$

Donc, pour tout $\gamma \in \Lambda$, $d_\gamma(x_1, x_2) = 0$ et ainsi $d(x_1, x_2) = 0$ et $x_1 = x_2$. $\square$

Voici un principe de continuation s'appliquant à des contractions généralisées pouvant être définies sur un fermé d'intérieur vide obtenu dans [**Fr**] :

Théorème 3.2.9. *Soit K un sous-ensemble fermé de $\mathbb{E}$, un espace de jauge complet vérifiant* (3.2.1)*, et soit une famille $\{f_t : K \to \mathbb{E}\}_{t\in[0,1]}$ telle que*

(1) il existe $\{k_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ telle que $k_\alpha < 1$ pour tout $\alpha \in \Lambda$ et telle que pour tout $t \in [0,1]$, f_t est une contraction généralisée avec constantes $\{k_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$;

(2) pour tout $\alpha \in \Lambda$, il existe $M_\alpha \geq 0$ tel que pour tout $x \in K$ et pour tout $t, s \in [0,1]$

$$D_\alpha(f_t(\{x\}_\alpha), f_s(\{x\}_\alpha)) \leq M_\alpha |t-s| ;$$

(3) $z \notin \mathbb{F}_t^\alpha(z)$ pour tout $z \in \partial_\alpha K^\alpha$, pour tout $t \in [0,1]$ et pour tout $\alpha \in \Lambda$.

S'il existe $t \in [0,1]$ tel que f_t a un point fixe, alors f_t a un unique point fixe pour tout $t \in [0,1]$.

Démonstration. Pour $\alpha \in \Lambda$, soit $\mathbb{F}_t^\alpha : \overline{K^\alpha} \to \mathbb{E}^\alpha$ la fonction obtenue à partir de f_t. Pour tout $\alpha \in \Lambda$, $\{\mathbb{F}_t^\alpha\}_{t\in[0,1]}$ est une famille de contractions multivoques. S'il existe $t \in [0,1]$ tel que f_t a un point fixe, pour ce même t et pour tout $\alpha \in \Lambda$, $\mathbb{F}_t^\alpha$ a aussi un point fixe et, par hypothèse, ce point fixe est dans $int_\alpha(K^\alpha)$. Le Théorème 2.3.2 implique que pour tout $\alpha \in \Lambda$ et pour tout $t \in [0,1]$, il existe $z_t^\alpha \in \overline{K^\alpha}$ tel que $z_t^\alpha \in \mathbb{F}_t^\alpha(z_t^\alpha)$.

Comme au Théorème 3.2.8, il est possible de montrer que, pour tout $t \in [0,1]$, $\{z_t^\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ converge au sens du Lemme 3.2.7 vers $x_t \in K$ tel que $f(x_t) = x_t$. $\square$

Voici un corollaire du théorème précédent.

Corollaire 3.2.10 (Alternative non-linéaire)**.** *Soient K un sous-ensemble fermé de $\mathbb{E}$, un espace linéaire de jauge complet qui satisfait l'équation* (3.2.1)*, tel que $0 \in K$ et $f : K \to \mathbb{E}$ une contraction généralisée telle que $f(K)$ est borné. Alors un des deux énoncés suivants est vrai :*

(1) f a un unique point fixe ;

(2) il existe $t \in [0,1)$, $\alpha \in \Lambda$ et $z \in \partial_\alpha K^\alpha$ tels que $z \in t\mathbb{F}^\alpha(z)$.

Démonstration. Pour tout $t \in [0,1]$, définissons la fonction $f_t : K \to \mathbb{E}$ par $f_t(x) = tf(x)$. Nous pouvons aisément voir que les conditions (1) et (2) du théorème précédent sont respectées.

Supposons $z \notin \mathbb{F}_t^\alpha(z)$ pour tout $z \in \partial_\alpha K^\alpha$, pour tout $t \in [0,1]$ et pour tout $\alpha \in \Lambda$. Puisque 0 est un point fixe de f_0, nous pouvons conclure, par le Théorème 3.2.9, que $f_1 = f$ a également un point fixe et donc l'énoncé (1) est vérifié.

Sinon, il existe $t \in [0,1]$, $\alpha \in \Lambda$ et $z \in \partial_\alpha K^\alpha$ tels que $z \in t\mathbb{F}^\alpha(z)$. Si $t \neq 1$, l'énoncé (2) est vérifié tandis que si $t = 1$, nous pouvons montrer que soit l'énoncé (1) ou soit l'énoncé (2) est vérifié. □

3.3. Théorèmes de point fixe pour des contractions admissibles sur des espaces de jauge.

Dans cette section, nous voulons considérer des fonctions multivoques $F : K \to \mathbb{E}$ où K est un fermé de $\mathbb{E}$ un espace de jauge complet, muni d'une famille de pseudo-métriques $\{d_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. Contrairement à la section précédente, l'ensemble Λ n'a pas à être ordonné et filtrant et la condition (3.2.1) n'a pas à être satisfaite.

Définition 3.3.1. *Soient $x \in \mathbb{E}$ et $\{r_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \in (0,\infty)^\Lambda$. La* pseudo-boule centrée en x de rayon $\{r_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ *est définie comme suit :*

$$\overline{B(x, \{r_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})} = \{y \in \mathbb{E} : d_\alpha(x,y) \leq r_\alpha \text{ pour tout } \alpha \in \Lambda\}.$$

Définition 3.3.2. *Soient $K \subset \mathbb{E}$, $\{k_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \in [0,1)^\Lambda$ et $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \in [0,\infty)^\Lambda$. Nous notons*

$$K_{k,M} = \left\{ x \in K : \overline{B(x, \{r_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})} \not\subset K \quad \forall r \in (0,\infty)^\Lambda \text{ tel que } \inf_{\alpha\in\Lambda} \frac{r_\alpha(1-k_\alpha)}{M_\alpha} > 0 \right\}.$$

Remarque 3.3.3. *Si $K = \overline{U}$ où U est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{E}$ alors, pour tout $\{k_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \in [0,1)^\Lambda$ et $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \in [0,\infty)^\Lambda$, $K_{k,M} = \partial U$.*

Définition 3.3.4. *Une fonction multivoque à valeurs fermées $F : K \to \mathbb{E}$ où K est un sous-ensemble de $\mathbb{E}$ est une* contraction admissible *si*

(1) pour tout $\alpha \in \Lambda$, il existe $k_\alpha < 1$ tel que

$$D_\alpha(F(x), F(y)) \leq k_\alpha d_\alpha(x,y) \text{ pour tout } x, y \in K;$$

(2) pour tout $x \in K$ et pour tout $\{\epsilon_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \in (0,\infty)^\Lambda$, il existe $y \in F(x)$ tel que

$$d_\alpha(x,y) \leq d_\alpha(x,F(x)) + \epsilon_\alpha \text{ pour tout } \alpha \in \Lambda.$$

Nous disons que F est une contraction admissible avec constantes $\{k_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$.

Remarque 3.3.5. *Si $\Lambda = \mathbb{N}$, remarquons que $F : K \to \mathbb{E}$ peut être une contraction au sens la définition 3.3.4 sans être un contraction au sens de la définition 2.1.3 lorsque $\mathbb{E}$ est muni de la métrique usuelle*

$$d(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{|x-y|_n}{2^n(1+|x-y|_n)}.$$

Voici un théorème de point fixe local et une généralisation du théorème de point fixe de Nadler obtenus dans [**Fr2**].

Théorème 3.3.6. *Soient $x_0 \in \mathbb{E}$, $\{r_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \in (0,\infty)^\Lambda$ et $F : \overline{B(x_0,\{r_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})} \to \mathbb{E}$ une contraction admissible avec constantes $\{k_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \in (0,1)^\Lambda$ telles que*

$$d_\alpha(x_0,F(x_0)) < (1-k_\alpha)r_\alpha \text{ pour tout } \alpha \in \Lambda.$$

Alors, F a un point fixe.

Démonstration. La condition (2) de la définition précédente nous permet de choisir $x_1 \in F(x_0)$ tel que

$$d_\alpha(x_0,x_1) < (1-k_\alpha)r_\alpha \text{ pour tout } \alpha \in \Lambda.$$

De même, nous pouvons choisir $x_2 \in F(x_1)$ tel que pour tout $\alpha \in \Lambda$

$$\begin{aligned} d_\alpha(x_1,x_2) &< d_\alpha(x_1,F(x_1)) + k_\alpha((1-k_\alpha)r_\alpha - d_\alpha(x_0,x_1)) \\ &\leq D_\alpha(F(x_0),F(x_1)) + k_\alpha((1-k_\alpha)r_\alpha - d_\alpha(x_0,x_1)) \\ &\leq k_\alpha d_\alpha(x_0,x_1) + k_\alpha((1-k_\alpha)r_\alpha - d_\alpha(x_0,x_1)) \\ &= k_\alpha(1-k_\alpha)r_\alpha. \end{aligned}$$

Ainsi, nous construisons inductivement une suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$d_\alpha(x_n,x_{n+1}) < k_\alpha^n(1-k_\alpha)r_\alpha \text{ pour tout } \alpha \in \Lambda.$$

Alors, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy par rapport à d_α pour tout $\alpha \in \Lambda$ et elle converge donc vers $x \in \overline{B(x_0, \{r_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})}$ puisque $\overline{B(x_0, \{r_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})}$ est un sous-ensemble fermé d'un espace complet. La continuité de la fonction multivoque F implique que $x \in F(x)$. $\square$

Théorème 3.3.7. *Soit $F : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ une contraction admissible. Alors, F a un point fixe.*

Démonstration. Soit $\{k_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \in (0,1)^\Lambda$ des constantes de contraction de F. Choisissons $x_0 \in \mathbb{E}$ et pour tout $\alpha \in \Lambda$ choisissons $r_\alpha > 0$ tel que $d_\alpha(x_0, F(x_0)) < (1-k_\alpha)r_\alpha$. Nous pouvons donc appliquer le théorème précédent et conclure que F a un point fixe $x \in \overline{B(x_0, \{r_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})}$. $\square$

Voici un principe de continuation pour les contractions multivoques admissibles.

Théorème 3.3.8. *Soit K un sous-ensemble fermé de $\mathbb{E}$ et soit une fonction multivoque $H : K \times [0,1] \to \mathbb{E}$ telle que*

(1) il existe $\{k_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ telle que $k_\alpha < 1$ pour tout $\alpha \in \Lambda$ et telle que pour tout $t \in [0,1]$, $H(\cdot, t)$ est une contraction admissible avec constantes $\{k_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$;

(2) pour tout $\alpha \in \Lambda$, il existe $M_\alpha \geq 0$ tel que pour tout $x \in K$ et pour tout $t, s \in [0,1]$

$$D_\alpha(H(x,t), H(x,s))_\alpha \leq M_\alpha \left|t-s\right|.$$

(3) $x \notin H(x,t)$ pour tout $t \in [0,1]$ et pour tout $x \in K_{k,M}$.

Alors, $H(\cdot, 1)$ a un point fixe si et seulement si $H(\cdot, 0)$ en a un.

Démonstration. Supposons que $H(\cdot, 0)$ a un point fixe. Considérons l'ensemble

$$Q = \{(x,t) \in K \times [0,1] : x \in H(x,t)\}.$$

Cet ensemble n'est pas vide, puisque $H(\cdot, 0)$ a un point fixe. Nous définissons sur Q l'ordre partiel suivant :

$(x,t) \leq (y,s)$ si et seulement si $t \leq s$ et $d_\alpha(x,y) \leq \dfrac{2M_\alpha(s-t)}{1-k_\alpha}$ pour tout $\alpha \in \Lambda$.

Soit P un sous-ensemble de Q totalement ordonné. Posons

$$t^* = \sup \{t : (x,t) \in P\}.$$

Soit $\{(x_n, t_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans P telle que $(x_n, t_n) \leq (x_{n+1}, t_{n+1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t_n \to t^*$. Nous avons

$$d_\alpha(x_n, x_m) \leq \frac{2M_\alpha(t_m - t_n)}{1 - k_\alpha} \text{ pour tout } m > n \text{ et pour tout } \alpha \in \Lambda.$$

Alors, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy par rapport à d_α pour tout $\alpha \in \Lambda$, donc converge vers $x^* \in K$. La continuité de H implique $x^* \in H(x^*, t^*)$ et donc $(x^*, t^*) \in Q$. Il est clair que (x^*, t^*) est un majorant de P.

Par le lemme de Zorn, Q contient un élément maximal (x_0, t_0). Nous avons que $x_0 \in H(x_0, t_0)$. Montrons que $t_0 = 1$ pour ainsi montrer que $H(\cdot, 1)$ a un point fixe. Si, $t_0 \neq 1$, puisque $x_0 \notin K_{k,M}$, il existe $\{r_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \in (0,\infty)^\Lambda$ et $t_1 \in (t_0, 1]$ tels que

$$\overline{B(x_0, r)} \subset K \text{ et } r_\alpha = \frac{2M_\alpha(t_1 - t_0)}{1 - k_\alpha} \text{ pour tout } \alpha \in \Lambda.$$

De plus, pour tout $\alpha \in \Lambda$,

$$\begin{aligned} d_\alpha(x_0, H(x_0, t_1)) &\leq d_\alpha(x_0, H(x_0, t_0)) + D_\alpha(H(x_0, t_0), H(x_0, t_1)) \\ &\leq M_\alpha(t_1 - t_0) \\ &< (1 - k_\alpha) r_\alpha. \end{aligned}$$

Par le Théorème 3.3.6, il existe un point fixe $x_1 \in \overline{B(x_0, \{r_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})}$ de $H(\cdot, t_1)$. Donc, $(x_1, t_1) \in Q$ et $(x_0, t_0) < (x_1, t_1)$, ce qui est une contradiction au fait que (x_0, t_0) est maximal dans Q. Donc, $t_0 = 1$ et $H(\cdot, 1)$ a un point fixe. $\square$

Chapitre 4

RÉSULTATS DANS LES ESPACES DE FRÉCHET ET DE JAUGE POUR LES FONCTIONS DE TYPE CARISTI ET LES FONCTIONS ENTRANTES

Ce chapitre comporte essentiellement des généralisations de plusieurs théorèmes qui ont été énoncés dans les deux premiers chapitres. D'abord le principe variationnel d'Ekeland et les théorèmes univoque et multivoque de Caristi seront généralisés aux espaces de jauge tandis que le théorème de point fixe de Daneš sera généralisé aux espaces de Fréchet. Ensuite, nous considérerons les contractions et les contractions généralisées définies sur un sous-ensemble d'un espace de Fréchet ou de jauge à valeur dans l'espace entier. Des notions de fonctions entrantes seront donc généralisées.

Dans la suite, $\mathbb{X}$ représentera un espace de jauge tandis que $\mathbb{E}$ représentera un espace de Fréchet.

4.1. Généralisation des théorèmes de Caristi et du principe variationnel d'Ekeland dans des espaces de jauge.

Voici une généralisation du lemme de Bishop-Phelps (Lemme 1.1.6) aux espaces jauge complets dont la topologie est engendrée par une famille dénombrable de pseudo-métriques. Ceci sera utile pour obtenir, par la suite, une généralisation du principe variationnel d'Ekeland (Théorème 1.1.7), du théorème de point fixe de

Daneš et des versions univoque et multivoque du théorème de Caristi (Théorèmes 1.1.4 et 2.1.5).

Lemme 4.1.1. *Soit* $(\mathbb{X}, \{d_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ *un espace de jauge complet tel que* $d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq d_3(x,y) \leq \cdots$ *pour tout* $x, y \in \mathbb{X}$*. Pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, soient* λ_n *un constante positive et* $\phi_n : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ *une fonction semi-continue inférieurement bornée inférieurement. Alors, pour tout* $x_0 \in \mathbb{X}$*, il existe* $x^* \in \mathbb{X}$ *tel que*

(1) $\lambda_n d_n(x_0, x^*) \leq \phi_n(x_0) - \phi_n(x^*)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$

(2) pour tout $x \in X$ *tel que* $x \neq x^*$*, il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$\lambda_n d_n(x, x^*) > \phi_n(x^*) - \phi_n(x).$$

Démonstration. Pour tout $x \in \mathbb{X}$, soit

$$T(x) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{y \in \mathbb{X} : \phi_n(y) + \lambda_n d_n(x,y) \leq \phi_n(x)\}.$$

Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, ϕ_n est semi-continue inférieurement, l'ensemble

$$\{y \in \mathbb{X} : \phi_n(y) + \lambda_n d_n(x,y) \leq \phi_n(x)\}$$

est fermé pour tout $x \in \mathbb{X}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il est donc clair que $T(x)$ est fermé pour tout $x \in \mathbb{X}$ et non-vide puisque $x \in T(x)$.

Soit $x_0 \in \mathbb{X}$. Choisissons d'abord $x_1 \in T(x_0)$ tel que

$$\phi_1(x_1) \leq \lambda_1 + \inf\left[\phi_1(T(x_0))\right].$$

Choisissons ensuite inductivement $x_n \in T(x_{n-1})$ tel que

$$\phi_n(x_n) \leq \frac{\lambda_n}{n} + \inf\left[\phi_n(T(x_{n-1}))\right].$$

Il est clair que $T(x_0) \supset T(x_1) \supset T(x_2) \supset \cdots$.

Remarquons que pour $x \in T(x_n)$

$$\phi_n(x) + \lambda_n d_n(x, x_n) \leq \phi_n(x_n) \leq \frac{\lambda_n}{n} + \inf\left[\phi_n(T(x_{n-1}))\right] \leq \frac{\lambda_n}{n} + \phi_n(x).$$

Donc,

$$d_n(x, x_n) \leq \frac{1}{n} \text{ pour tout } x \in T(x_n). \tag{4.1.1}$$

Ainsi, pour $k < n < l$,

$$d_k(x_l, x_n) \leq d_n(x_l, x_n) \leq \frac{1}{n},$$

donc, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy et converge donc vers $x^* \in \mathbb{X}$. Remarquons que $x^* \in T(x_n)$ pour $n = 0, 1, 2 \cdots$. Puisque $x^* \in T(x_0)$,

$$\lambda_n d_n(x_0, x^*) \leq \phi_n(x_0) - \phi_n(x^*) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Supposons qu'il existe $x \neq x^*$ tel que $\phi_n(x) + \lambda_n d_n(x, x^*) \leq \phi_n(x^*)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\phi_n(x) + \lambda_n d_n(x, x_k) &\leq \phi_n(x) + \lambda_n d_n(x, x^*) + \lambda_n d_n(x^*, x_k) \\
&\leq \phi_n(x^*) + \lambda_n d_n(x^*, x_k) \\
&\leq \phi_n(x_k),
\end{aligned}$$

donc $x \in T(x_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Par (4.1.1), pour $k \leq n$,

$$d_k(x, x^*) \leq d_n(x, x^*) \leq d_n(x, x_n) + d_n(x_n, x^*) \leq \frac{2}{n}.$$

Nous obtenons que $x = x^*$, ce qui est une contradiction. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{X}$ tel que $x \neq x^*$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda_n d_n(x, x^*) > \phi_n(x^*) - \phi_n(x)$. □

Voici un corollaire du théorème précédent, mais introduisons d'abord la notion de *pseudo-goutte* dans un espace de Fréchet.

Définition 4.1.2. *Soient* $(\mathbb{E}, \{|\cdot|_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ *un espace de Fréchet. Soient* $z \in \mathbb{E}$ *et* $x \in \mathbb{E}\backslash\overline{B(z, \{r\}_{n\in\mathbb{N}})}$ *où* $\{r\}_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de nombres positifs et la pseudo-boule* $\overline{B(x, \{r\}_{n\in\mathbb{N}})}$ *est telle que décrite à la Définition 3.3.1. L'ensemble*

$$\mathcal{D}(x, \overline{B(z, \{r\}_{n\in\mathbb{N}})}) = \left\{tx + (1-t)y : t \in [0,1]\,,\ y \in \overline{B(z, \{r\}_{n\in\mathbb{N}})}\right\}$$

est appelé une pseudo-goutte*.*

Corollaire 4.1.3. *Soit* $(\mathbb{E}, \{|\cdot|_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ *un espace de Fréchet tel que* $|x|_1 \leq |x|_2 \leq |x|_3 \leq \cdots$ *pour tout* $x \in \mathbb{E}$. *Soient* K *un sous-ensemble fermé de* $\mathbb{E}$, $z \in \mathbb{E}\backslash K$ *tel que* $d_n(z, K) = R_n > 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $x \in K$ *tel que* $|x - z|_n = s_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Alors, pour toute suite* $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que* $r_n < R_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *il existe* $x^* \in K$ *tel que* $|x^* - z|_n \leq s_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et*

$$\{x^*\} = K \cap \mathcal{D}(x^*, \overline{B(z, \{r\}_{n\in\mathbb{N}})}).$$

Démonstration. Soit l'ensemble non-vide $X = K \cap \overline{B(z,\{s\}_{n\in\mathbb{N}})}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit la fonction $\phi_n : X \to \mathbb{R}$ définie par

$$\phi_n(x) = \frac{s_n + r_n}{R_n - r_n} \left|x - z\right|_n .$$

Choisissons $x_0 \in X$. Par le théorème précédent, il existe $x^* \in X$ tel que, pour tout $x \in X \setminus \{x^*\}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\left|x - x^*\right|_n > \phi_n(x^*) - \phi_n(x). \tag{4.1.2}$$

Il est facile de montrer que $x^* \in K \cap \mathcal{D}(x^*, \overline{B(z,\{r\}_{n\in\mathbb{N}})}) \subset X$. Supposons qu'il existe $x \in K \cap \mathcal{D}(x^*, \overline{B(z,\{r\}_{n\in\mathbb{N}})}) \setminus \{x^*\}$. Alors, $x = (1-t)x^* + t(z+y)$ pour un certain $t \in (0,1]$ et pour un certain $y \in \overline{B(0,\{r\}_{n\in\mathbb{N}})}$. Par (4.1.2), puisque $x \in X \setminus \{x^*\}$,

$$\begin{aligned}
\frac{s_n + r_n}{R_n - r_n} \left|x^* - z\right|_n &< \frac{s_n + r_n}{R_n - r_n} \left|x - z\right|_n + \left|x - x^*\right|_n \\
&\leq \frac{s_n + r_n}{R_n - r_n}((1-t)\left|x^* - z\right|_n + t\left|y\right|_n) + t(\left|x^* - z\right|_n + \left|y\right|_n).
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\frac{s_n + r_n}{R_n - r_n}(R_n - r_n) &\leq \frac{s_n + r_n}{R_n - r_n}(\left|x^* - z\right|_n - \left|y\right|_n) \\
&< \left|x^* - z\right|_n + \left|y\right|_n \\
&\leq s_n + r_n,
\end{aligned}$$

ce qui est une contradiction. Ainsi,$\{x^*\} = K \cap \mathcal{D}(x^*, \overline{B(z,\{r\}_{n\in\mathbb{N}})})$. □

Ce corollaire nous permet d'obtenir une généralisation aux espaces de Fréchet du théorème de point fixe de Daneš (Théorème 2.2.15).

Théorème 4.1.4. *Soit* $(\mathbb{E}, \{|\cdot|_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ *un espace de Fréchet tel que* $|x|_1 \leq |x|_2 \leq |x|_3 \leq \cdots$ *pour tout* $x \in \mathbb{E}$. *Soient* K *un sous-ensemble fermé de* $\mathbb{E}$ *et* $z \in \mathbb{E}\setminus K$ *tel que* $d_n(z,K) = R_n > 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Soit* $F : K \to K$ *une fonction multivoque telle qu'il existe une suite quelconque de nombres positifs* $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que* $r_n < R_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et telle que*

$$F(x) \cap K \cap \mathcal{D}(x, \overline{B(z,\{r\}_{n\in\mathbb{N}})}) \neq \emptyset \text{ pour tout } x \in K.$$

Alors, pour tout $x \in K$, F a un point fixe dans $K \cap \mathcal{D}(x, \overline{B(z, \{r\}_{n\in\mathbb{N}})})$.

Démonstration. Soit $x \in K$. Posons $s_n = d_n(x, z)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

$$A = K \cap \mathcal{D}(x, \overline{B(z, \{r\}_{n\in\mathbb{N}})}).$$

Par le Corollaire 4.1.3, il existe $x^* \in A \cap \overline{B(z, \{s\}_{n\in\mathbb{N}})}$ tel que

$$\{x^*\} = A \cap \mathcal{D}(x^*, \overline{B(z, \{r\}_{n\in\mathbb{N}})}).$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} A \cap \overline{B(z, \{s\}_{n\in\mathbb{N}})} &= K \cap \mathcal{D}(x, \overline{B(z, \{r\}_{n\in\mathbb{N}})}) \cap \overline{B(z, \{s\}_{n\in\mathbb{N}})} \\ &= K \cap \mathcal{D}(x, \overline{B(z, \{r\}_{n\in\mathbb{N}})}. \end{aligned}$$

Donc, $x^* \in \mathcal{D}(x, \overline{B(z, \{r\}_{n\in\mathbb{N}})})$. Ainsi,

$$\begin{aligned} A \cap \mathcal{D}(x^*, \overline{B(z, \{r\}_{n\in\mathbb{N}})}) &= K \cap \mathcal{D}(x, \overline{B(z, \{r\}_{n\in\mathbb{N}})}) \cap \mathcal{D}(x^*, \overline{B(z, \{r\}_{n\in\mathbb{N}})}) \\ &= K \cap \mathcal{D}(x^*, \overline{B(z, \{r\}_{n\in\mathbb{N}})}). \end{aligned}$$

Nous avons donc montré que

$$\{x^*\} = K \cap \mathcal{D}(x^*, \overline{B(z, \{r\}_{n\in\mathbb{N}})}).$$

Puisque, par hypothèse, $F(x^*) \cap K \cap \mathcal{D}(x^*, \overline{B(z, \{r\}_{n\in\mathbb{N}})}) \neq \emptyset$, if faut nécessairement que $x^* \in F(x^*)$. $\square$

Le Lemme 4.1.1 nous permet d'obtenir une généralisation du principe variationnel d'Ekeland (Théorème 1.1.7) aux espaces de jauge complets dont la topologie est engendrée par une famille dénombrable de pseudo-métriques.

Théorème 4.1.5. *Soit $(\mathbb{X}, \{d_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ un espace de jauge complet tel que $d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq d_3(x,y) \leq \cdots$ pour tout $x, y \in \mathbb{X}$. Soit $\phi_n : \mathbb{X} \to (-\infty, \infty]$ une fonction propre semi-continue inférieurement bornée inférieurement, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour toutes suites de nombres positifs $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{\delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et pour tout $x_0 \in \mathbb{X}$ tels que $\phi_n(x_0) \leq \inf_{x\in\mathbb{X}} \phi_n(x) + \lambda_n\delta_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x^* \in \mathbb{X}$ tel que*

(1) $\phi_n(x^*) \leq \phi_n(x_0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;

(2) $d_n(x_0, x^*) \leq \delta_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;

(3) pour tout $x \in \mathbb{X} \setminus \{x^*\}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\phi_n(x^*) < \phi_n(x) + \lambda_n d_n(x, x^*)$.

Démonstration. Considérons l'espace de Fréchet

$$Y = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{y \in \mathbb{X} : \phi_n(y) \leq \phi_n(x_0)\}.$$

Le Lemme 4.1.1 appliqué à la suite de fonctions $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ restreintes à Y garantit l'existence de $x^* \in Y$ tel que

$$\phi_n(x^*) + \lambda_n d_n(x_0, x^*) \leq \phi_n(x_0) \tag{4.1.3}$$

et tel que, pour tout $x \in Y \setminus \{x^*\}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\phi_n(x^*) < \phi_n(x) + \lambda_n d_n(x, x^*). \tag{4.1.4}$$

De (4.1.3), nous déduisons que la condition (1) est satisfaite. Nous déduisons également que

$$\begin{aligned} \lambda_n d_n(x_0, x^*) &\leq \phi_n(x_0) - \phi_n(x^*) \\ &\leq \inf_{x \in \mathbb{E}} \phi_n(x) + \lambda_n \delta_n - \phi_n(x^*) \\ &\leq \lambda_n \delta_n, \end{aligned}$$

donc que la condition (2) est satisfaite. Par (4.1.4), il ne reste qu'à montrer que la condition (3) est également satisfaite pour tout $x \in \mathbb{X} \setminus Y$. Soit $x \in \mathbb{X} \setminus Y$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\phi_n(x^*) \leq \phi_n(x_0) < \phi_n(x) < \phi_n(x) + \lambda d_n(x, x^*),$$

ce qui conclut la démonstration. □

Grâce au Lemme 4.1.1, nous pouvons obtenir une généralisation du théorème de Caristi (Théorème 1.1.4) aux espaces de jauge complets dont la topologie est engendrée par une famille dénombrable de pseudo-métriques. Une telle généralisation peut également être obtenue pour la version multivoque du théorème de Caristi (Théorème 2.1.5).

Théorème 4.1.6. *Soit* $(\mathbb{X}, \{d_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ *un espace de jauge complet tel que* $d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq d_3(x,y) \leq \cdots$ *pour tout* $x, y \in \mathbb{X}$. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *soit* $\phi_n : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ *une fonction semi-continue inférieurement bornée inférieurement. Soit* $f : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ *une fonction quelconque telle que* $d_n(x, f(x)) \leq \phi_n(x) - \phi_n(f(x))$ *pour tout* $x \in \mathbb{X}$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Alors* f *a un point fixe.*

Démonstration. Posons $\lambda_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et choisissons $x_0 \in \mathbb{X}$ arbitrairement. Par le Lemme 4.1.1, il existe $x^* \in \mathbb{X}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{X}$ tel que $x \neq x^*$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$d_n(x, x^*) > \phi_n(x^*) - \phi_n(x).$$

Or, par hypothèse,

$$d_n(x^*, f(x^*) \leq \phi_n(x^*) - \phi_n(f(x^*)) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

De ces deux inégalités, nous déduisons que $x^* = f(x^*)$. $\square$

De façon similaire, nous montrons le théorème suivant.

Théorème 4.1.7. *Soit* $(\mathbb{X}, \{d_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ *un espace de jauge complet tel que* $d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq d_3(x,y) \leq \cdots$ *pour tout* $x, y \in \mathbb{X}$. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *soit* $\phi_n : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ *une fonction semi-continue inférieurement bornée inférieurement. Soit* $F : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ *une fonction multivoque telle que, pour tout* $x \in \mathbb{X}$, *il existe* $y \in F(x)$ *tel que*

$$d_n(x, y) \leq \phi_n(x) - \phi_n(y) \textit{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Alors F *a un point fixe.*

4.2. Résultats pour des contractions définies sur des espaces de Fréchet ou de jauge.

Dans cette section, nous considérons des contractions définies sur un sous-ensemble fermé d'un espace de Fréchet ou de jauge à valeur dans l'espace de Fréchet ou de jauge entier. Pour garantir l'existence d'un point fixe pour ces contractions, il faudra généraliser les notions de fonctions entrantes introduites à la section 1.2.

Remarquons d'abord qu'une contraction engendre une famille de contractions $\{\overline{f_\alpha}\}_{\alpha\in\Lambda}$.

Remarque 4.2.1. *Soient* $(\mathbb{X}, \{d_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$ *un espace de jauge,* K *un sous-ensemble fermé de* $\mathbb{X}$ *et* $f : K \to \mathbb{X}$ *une contraction sur un espace de jauge. Pour tout* $\alpha \in \Lambda$*, nous définissons la fonction univoque* $f_\alpha : K^\alpha \to X^\alpha$ *comme suit*

$$f_\alpha(\mu_\alpha(x)) = \mu_\alpha \circ f(x).$$

Pour tout $\alpha \in \Lambda$*,* f_α *est une contraction au sens de la Définition 1.1.1, donc nous pouvons la prolonger pour obtenir la fonction* $\overline{f_\alpha} : \overline{K^\alpha} \to \mathbb{X}^\alpha$ *qui est également une contraction au sens de la Définition 1.1.1.*

Voici une généralisation du Théorème 1.2.4 aux contractions définies sur un sous-ensemble d'un espace de Fréchet.

Théorème 4.2.2. *Soient* $(\mathbb{E}, \{|\cdot|_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ *un espace de Fréchet tel que* $|x|_1 \leq |x|_2 \leq |x|_3 \leq \cdots$ *pour tout* $x \in \mathbb{E}$*,* K *un sous-ensemble fermé convexe de* $\mathbb{E}$ *et* $f : K \to \mathbb{E}$ *une contraction sur un espace de Fréchet. Supposons que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et pour tout* $x \in \overline{K^n}$*,*

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{d_n((1-h)x + h\overline{f_n}(x), \overline{K^n})}{h} = 0,$$

où la fonction univoque $\overline{f_n} : \overline{K^n} \to \mathbb{E}^n$ *est telle que définie à la remarque précédente. Alors* f *a un point fixe.*

Démonstration. Par la Proposition 1.2.3, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la contraction $\overline{f_n} : \overline{K^n} \to \mathbb{E}^n$ est faiblement entrante. Donc, par le Théorème 1.2.4, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overline{f_n}$ a un point fixe $z^n \in \overline{K^n}$.

Pour tout $l, m \geq n$, nous avons que

$$\begin{aligned}
|z^l - z^m|_n &\leq |z^l - \overline{f_l}(z^l)|_n + |\overline{f_l}(z^l) - \overline{f_m}(z^m)|_n + |\overline{f_m}(z^m) - z^m|_n \\
&\leq |z^l - \overline{f_l}(z^l)|_l + |\overline{f_l}(z^l) - \overline{f_m}(z^m)|_n + |\overline{f_m}(z^m) - z^m|_m \\
&= |\overline{f_l}(z^l) - \overline{f_m}(z^m)|_n \\
&\leq k_n|z^l - z^m|_n \\
&< |z^l - z^m|_n.
\end{aligned}$$

Nous déduisons que

$$|z^l - z^m|_n = 0 \text{ pour tout } l, m \geq n \ .$$

Par le Lemme 3.2.7, il existe $x \in K$ tel que $x = f(x)$. $\square$

Il possible d'obtenir l'existence d'un point fixe pour une contraction f dans un espace de jauge complet telle que les contractions associées $\overline{f_\alpha}$ sont métriquement entrantes.

Théorème 4.2.3. *Soient* $(\mathbb{X}, \{d_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$ *un espace de jauge complet, où* Λ *est un ensemble partiellement ordonné filtrant à droite, tel que* $d_\alpha(x,y) \leq d_\beta(x,y)$ *pour tout* $x, y \in \mathbb{X}$ *et pour tout* $\alpha \leq \beta$. K *un sous-ensemble fermé de* $\mathbb{X}$ *et* $f : K \to \mathbb{X}$ *une contraction sur un espace de jauge. Supposons que, pour tout* $\alpha \in \Lambda$, *pour tout* $x \in \overline{K^\alpha}$,

$$\overline{f_\alpha}(x) \in \{x\} \cup \{y \in \mathbb{X}^\alpha : \exists z \in \overline{K^\alpha} \setminus \{x\} \ \textit{ tel que } d_\alpha(x,z) + d_\alpha(z,y) = d_\alpha(x,y)\},$$

où la fonction univoque $\overline{f_\alpha} : \overline{K^\alpha} \to \mathbb{E}^\alpha$ *est telle que définie à la Remarque 4.2.1. Alors* f *a un point fixe.*

Le résultat précédent concerne un contraction $f : K \to \mathbb{X}$. Le fait qu'il s'agisse d'une contraction nous assure l'existence des contractions $\overline{f_\alpha} : \overline{K^\alpha} \to X^\alpha$. Ainsi, nous avons imposé des conditions sur $\overline{K^\alpha}$. Dans les résultats qui suivent, la condition est imposée sur les éléments de K et non sur les éléments de tous les $\overline{K_\alpha}$. Pour ce faire, une restriction additionnelle devra être imposée. En effet, nous exigerons que l'espace de jauge soit engendré par une famille dénombrable de pseudo-métriques. Cette restriction n'a pas été nécessaire dans le théorème précédent. Notons que les résultats de cette section sont indépendants de ceux qui suivent.

Voici maintenant un théorème de point fixe pour une fonction multivoque qui n'est pas nécessairement contractante et qui satisfait une condition généralisant la notion de fonction métriquement entrante.

Théorème 4.2.4. *Soit* $(\mathbb{X}, \{d_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ *un espace de jauge complet tel que* $d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq d_3(x,y) \leq \cdots$ *pour tout* $x, y \in \mathbb{X}$. *Soit* K *un sous-ensemble fermé de* $\mathbb{X}$. *Soit* $F : K \to \mathbb{X}$ *une fonction multivoque à graphe fermé. Supposons qu'il* *existe une suite non-décroissante* $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *avec* $0 < k_n < 1$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et une suite* $\{\theta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *avec* $k_n < \theta_n \leq 1$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *telles que pour tout* $x \in K$

$$\begin{aligned} F(x) \subset \{x\} \cup \{y \in \mathbb{X} : \exists (u,v) \in Gr(F) \text{ tel que } u \neq x \text{ et} \\ d_n(y,v) \leq k_n d_n(x,u) \leq \theta_n d_n(x,u) + d_n(u,y) \leq d_n(x,y) \forall n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

Alors, F *a un point fixe.*

Démonstration. Le graphe de F, $Gr(F) = \{(x,y) \in K \times \mathbb{X} : y \in F(x)\}$, peut être muni des peudo-métriques $\hat{d}_n$ suivantes

$$\hat{d}_n((x,y),(\hat{x},\hat{y})) = k_n d_n(x,\hat{x}) + d_n(y,\hat{y}).$$

L'espace $(Gr(F), \left\{\hat{d}_n\right\}_{n\in\mathbb{N}})$ est un espace de jauge complet puisque, par hypothèse, $Gr(F)$ est fermé. De plus, puisque la suite $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est non-décroissante, nous avons, pour tout $(x,y),(\hat{x},\hat{y}) \in Gr(F)$,

$$\hat{d}_1((x,y),(\hat{x},\hat{y})) \leq \hat{d}_2((x,y),(\hat{x},\hat{y})) \leq \hat{d}_3((x,y),(\hat{x},\hat{y})) \leq \cdots .$$

Nous pouvons appliquer le Lemme 4.1.1 avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\lambda_n = (\theta_n - k_n)/2k_n \text{ et } \phi_n = d_n(x,y).$$

Ainsi, nous obtenons $(x^*,y^*) \in Gr(F)$ tel que, pour tout $(x,y) \in Gr(F) \setminus \{(x^*,y^*)\}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$d_n(x^*,y^*) < d_n(x,y) + \lambda_n \hat{d}_n((x,y),(x^*,y^*)).$$

Si $x^* \neq y^*$, il existe, par hypothèse, $(x,y) \in Gr(F)$ tel que $x \neq x^*$ et

$$d_n(y,y^*) \leq k_n d_n(x,x^*) \leq \theta_n d_n(x,x^*) + d_n(x,y^*) \leq d_n(x^*,y^*).$$

Donc,

$$\begin{aligned}
d_n(x,y)+\lambda_n\hat{d}_n((x,y),(x^*,y^*)) &\leq d_n(x,y^*)+d_n(y^*,y)+\lambda_n(k_nd_n(x,x^*)+d_n(y,y^*)) \\
&= d_n(x,y^*)+\lambda_nk_nd_n(x,x^*)+(1+\lambda_n)d_n(y,y^*) \\
&\leq d_n(x,y^*)+k_n(1+2\lambda_n)d_n(x,x^*) \\
&= d_n(x,y^*)+\theta_nd_n(x,x^*) \\
&\leq d_n(x^*,y^*),
\end{aligned}$$

ce qui est une contradiction. Donc, $x^*=y^*$ et F a un point fixe. □

Voici deux corollaires grantissant l'existence d'un point fixe d'une contraction $f:K\to\mathbb{X}$.

Corollaire 4.2.5. *Soient* $(\mathbb{X},\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ *un espace de jauge complet tel que* $d_1(x,y)\leq d_2(x,y)\leq d_3(x,y)\leq\cdots$ *pour tout* $x,y\in\mathbb{X}$ *et* K *un sous-ensemble fermé de* $\mathbb{X}$. *Soit* $f:K\to\mathbb{X}$ *une contraction avec constantes de contractions* $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. *Supposons qu'il existe une suite* $\{\theta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *avec* $\theta_n\in(\max\{k_1,\dots k_n\},1]$ *pour tout* $n\in\mathbb{N}$ *telle que pour tout* $x\in K$

$$f(x)\subset\{x\}\cup\{y\in\mathbb{X}:\exists u\in K\setminus\{x\}\ \text{ tel que } \theta_nd_n(x,u)+d_n(u,y)\leq d_n(x,y)\forall n\in\mathbb{N}\}.$$

Alors, f a un point fixe.

Démonstration. Il suffit de poser $c_n=\max\{k_1,\dots k_n\}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et appliquer le théorème précédent. □

Corollaire 4.2.6. *Soient* $(\mathbb{E},\{|\cdot|_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ *un espace de Fréchet tel que* $|x|_1\leq|x|_2\leq|x|_3\leq\cdots$ *pour tout* $x\in\mathbb{E}$ *et* K *un sous-ensemble fermé de* $\mathbb{E}$. *Soit* $f:K\to\mathbb{E}$ *une contraction sur un espace de Fréchet telle que*

$$f(x)\subset\{x+\lambda(u-x):u\in K,\lambda\geq 1\}.$$

Alors, f a un point fixe.

Démonstration. Soit $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des constantes de contraction de f que nous pouvons assumer non-décroissante sans perte de généralité. Posons $\theta_n=1$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si $x \neq f(x)$, alors il existe $u \in K\setminus\{x\}$ et $\lambda \geq 1$ tels que $f(x) = x + \lambda(u - x)$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|x - u|_n + |u - f(x)|_n = \lambda|x - u|_n = |x - f(x)|_n.$$

Par le corollaire précédent, nous pouvons conclure que f a un point fixe. □

4.3. Résultats pour des contractions généralisées sur des espaces de jauge.

Dans cette section, nous allons maintenant considérer des contractions généralisées définies sur un sous-ensemble fermé d'un espace de jauge à valeur dans l'espace de jauge entier. Pour garantir l'existence d'un point fixe pour ces contractions, ce sera maintenant les notions de fonctions multivoques entrantes introduites à la section 2.2 qu'il faudra généraliser.

Voici une généralisation du Thérorème 2.2.4 aux contrations généralisées définies sur un sous-ensemble d'un espace localement convexe complet, plus précisément un espace de jauge complet, $(\mathbb{E}, \{d_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$, où Λ est un ensemble filtrant, muni d'une structure vectorielle et dont les pseudo-métriques d_α sont définies à partir de semi-normes $|\cdot|_\alpha$ (i.e. $d_\alpha(x, y) = |x - y|_\alpha$ pour tout $\alpha \in \Lambda$ et pour tout $x, y \in \mathbb{E}$).

Théorème 4.3.1. *Soit* $(\mathbb{E}, \{d_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$ *un espace localement convexe complet, où* Λ *est un ensemble partiellement ordonné filtrant à droite, tel que* $d_\alpha(x, y) \leq d_\beta(x, y)$ *pour tout* $x, y \in \mathbb{E}$ *et pour tout* $\alpha \leq \beta$*. Soient* K *un sous-ensemble fermé de* $\mathbb{E}$ *et* $f : K \to \mathbb{E}$ *une contraction généralisée. Supposons que, pour tout* $\alpha \in \Lambda$*, pour tout* $x \in \overline{K^\alpha}$*,*

$$\mathbb{F}^\alpha(x) \subset \left\{ y \in \mathbb{E}^\alpha : \lim_{h\to 0^+} \frac{d_\alpha((1-h)x + hy, \overline{K^\alpha})}{h} = 0 \right\},$$

où la fonction multivoque $\mathbb{F}^\alpha : \overline{K^\alpha} \to \mathbb{E}^\alpha$ *est telle que définie à la section 3.2. Alors* f *a un point fixe.*

Démonstration. Pour tout $\alpha \in \Lambda$, la fonction multivoque à valeurs fermées $\mathbb{F}^\alpha : \overline{K^\alpha} \to \mathbb{E}^\alpha$ est un contraction multivoque au sens de la définition usuelle

(Définition 2.1.3) et est faiblement entrante. Donc, par le Théorème 2.2.4, pour tout $\alpha \in \Lambda$, $\mathbb{F}^\alpha$ a un point fixe $z^\alpha \in \overline{K^\alpha}$.

Nous pouvons montrer, exactement comme dans le démonstration du Théorème 3.2.8, que pour tout $\alpha \in \Lambda$, $\left\{\mu_{\alpha\beta}(z^\beta)\right\}_{\beta\geq\alpha}$ est suite de Cauchy dans $\overline{K^\alpha}$. Donc, par le Lemme 3.2.7, il existe $x \in K$ tel que $\left\{\mu_{\alpha\beta}(z^\beta)\right\}_{\beta\geq\alpha}$ converge vers $\mu_\alpha(x) \in K^\alpha$ pour tout $\alpha \in \Lambda$.

Nous pouvons également montrer, exactement comme dans la démonstration du Théorème 3.2.8, que $x = f(x)$, donc que x est un point fixe de f. $\square$

De façon analogue, il également possible d'obtenir une généralisation du Théorème 2.2.10 aux contractions généralisées définies sur un sous-ensemble d'un espace de jauge.

Théorème 4.3.2. *Soit* $(\mathbb{X}, \{d_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$ *un espace de jauge complet, où* Λ *est un ensemble partiellement ordonné filtrant à droite, tel que* $d_\alpha(x,y) \leq d_\beta(x,y)$ *pour tout* $x, y \in \mathbb{X}$ *et pour tout* $\alpha \leq \beta$ *. Soient* K *un sous-ensemble fermé de* $\mathbb{X}$ *et* $f : K \to \mathbb{X}$ *une contraction généralisée. Supposons que, pour tout* $\alpha \in \Lambda$*, pour tout* $x \in \overline{K^\alpha}$*,*

$$\mathbb{F}^\alpha(x) \subset \{x\} \cup \left\{ y \in \mathbb{X}^\alpha \setminus \{x\} : \inf_{u\in(x,y]_\alpha} \frac{d_\alpha(u, \overline{K^\alpha})}{d_\alpha(u,x)} = 0 \right\},$$

où la fonction multivoque $\mathbb{F}^\alpha : \overline{K^\alpha} \to \mathbb{X}^\alpha$ *est telle que définie à la section 3.2 et*

$$(x,y]_\alpha = \{u \in \mathbb{X}^\alpha \setminus \{x\} : d_\alpha(x,u) + d_\alpha(u,y) = d_\alpha(x,y)\}.$$

Alors f *a un point fixe.*

BIBLIOGRAPHIE

[AzCo] D. Azé, J.-N. Corvellec, *A variation method in fixed point results with inwardness conditions*, Proc. Amer. Math. Soc. **134** (2006), 3577-3583.

[CaNa] G. L. Cain Jr., M. Z. Nashed, *Fixed points ans stability for a sum of two operators in locally convex spaces*, Pacific J. Math. **39** (1971), 581-592.

[Ca] J. Caristi, *Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions*, Trans. Amer. Math. Soc. **215** (1976), 241-251.

[Da] J. Daneš, *A geometric theorem useful in nonlinear functional analysis*, Boll. Un. Mat. Ital. **6** (1972), 369-375.

[De] K. Deimling, *Multivalued Differential Equations*, de Gruyter, Berlin/New York, 1992.

[Du] J. Dugundji, *Topology*, Wm. C. Brown Publ., Dubuque, 1989.

[Ek] I. Ekeland, *Nonconvex minimization problems*, Bull. Amer. Math. Soc. **1** (1979), 443-474.

[FrGr] M. Frigon, A. Granas, *Résultats de type Leray-Schauder pour des contractions multivoques*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **4** (1994), 197-208.

[FrGr2] M. Frigon, A. Granas, *Résultats de type Leray-Schauder pour des contractions sur des espaces de Fréchet*, Ann. Sci. Math. Québec **22** (1998), 161-168.

[Fr] M. Frigon, *Fixed point results for generalized contractions in gauge spaces and applications*, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), 2957-2965.

[Fr2] M. Frigon, *Fixed point results for multivalued contractions on gauge spaces*, SIMAA **4** (2002), 175-181.

[GrDu] A. Granas, J. Dugundji, *Fixed point theory*, Springer, New York, 1994.

[Ha] B. R. Halpern, *Fixed point theorems for outward maps*, Thèse de Doctorat, Univ. of California, Los Angeles, 1965.

[Lim] T.-C. Lim, *A fixed point theorem for weakly inward multivalued contractions*, J. Math. Anal. Appl. **247** (2000), 323-327.

[Ma] M. Maciejewski, *Inward contractions on metric spaces*, J. Math. Anal. Appl. **330** (2007), 1207-1219.

[MiTa] N. Mizoguchi, W. Takahashi, *Fixed point theorems for multivalued mappings on complete metric spaces*, J. Math. Anal. Appl. **141** (1989), 177-188.

[Na] S. B. Nadler, Jr., *Multi-valued contraction mappings*, Pacific J. Math **30** (1969), 475-488.

[Pr] R. Precup, *Continuation results for mappings of contractive type*, Seminar on Fixed Point Theory Cluj-Napoca **2** (2001), 23-40.

[Pr2] R. Precup, *Continuation theorems for mappings of Caristi type*, Studia Univ. Babeş-Bolyai Math. **41** (1996), 101-106.

[Ud] A. Uderzo, *Fixed points for directional multi-valued $k(\cdot)$-contractions*, J. Global Optim. **31** (2005), 455-469.