Université de Montréal

Variétés de drapeaux et opérateurs différentiels

par

Colin Jauffret

Département de mathématiques et de statistique

Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures

en vue de l'obtention du grade de

Maître ès sciences (M.Sc.)
en mathématiques

novembre 2009

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

Variétés de drapeaux et opérateurs différentiels

présenté par

Colin Jauffret

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

François Lalonde
(président-rapporteur)

Abraham Broer
(directeur de recherche)

Yvan Saint-Aubin
(membre du jury)

Mémoire accepté le:
25 novembre 2009

SOMMAIRE

Soit G un groupe algébrique semi-simple sur un corps de caractéristique 0. Ce mémoire discute d'un théorème d'annulation de la cohomologie supérieure du faisceau $\mathcal{D}$ des opérateurs différentiels sur une variété de drapeaux de G. On démontre que si P est un sous-groupe parabolique de G, alors $H^i(G/P, \mathcal{D}) = 0$ pour tout $i > 0$.

On donne en fait trois preuves indépendantes de ce théorème. La première preuve est de Hesselink [**He**] et n'est valide que dans le cas où le sous-groupe parabolique est un sous-groupe de Borel. Elle utilise un argument de suites spectrales et le théorème de Borel–Weil–Bott. La seconde preuve est de Kempf [**Ke**] et n'est valide que dans le cas où le radical unipotent de P agit trivialement sur son algèbre de Lie. Elle n'utilise que le théorème de Borel–Weil–Bott. Enfin, la troisième preuve est attribuée à Elkik. Elle est valide pour tout sous-groupe parabolique mais utilise le théorème de Grauert–Riemenschneider.

On présente aussi une construction détaillée du faisceau des opérateurs différentiels sur une variété.

Mots clés : Faisceau des opérateurs différentiels, variétés de drapeaux, fibré cotangent, algèbre des opérateurs différentiels, algèbre de Weyl, groupe algébrique, cohomologie des faisceaux, théorie de la représentation

SUMMARY

Let G be a semisimple algebraic group on a field of characteristic 0. This thesis discusses a vanishing theorem for the higher cohomology of the sheaf $\mathcal{D}$ of differential operators on a flag variety of G. We show that if P is a parabolic subgroup of G, then $H^i(G/P, \mathcal{D}) = 0$ for all $i > 0$.

In fact, we give three independent proofs of this theorem. The first proof, due to Hesselink [**He**], only works if the parabolic subgroup P is a Borel subgroup. It uses a spectral sequence argument as well as the Borel–Weil–Bott theorem. The second proof, due to Kempf [**Ke**], only works if the unipotent radical of P acts trivially on its Lie algebra. It only uses the Borel–Weil–Bott theorem. Finally, the third proof, due to Elkik, is valid for any parabolic subgroup. However, it uses the Grauert–Riemenschneider theorem.

We also present a detailled construction of the sheaf of differential operators on a variety.

Keywords : Sheaf of differential operators, flag variety, cotangent bundle, algebra of differential operators, Weyl algebra, algebraic groups, sheaf cohomology, representation theory

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS

D'abord, je souhaite adresser mes plus sincères remerciements à mon directeur de recherche, Abraham Broer, qui sait toujours me faire réaliser tout ce qu'il me reste à apprendre sans trop me décourager. Je le remercie pour sa très grande disponibilité. De plus, la patience dont il a fait preuve dans ses explications m'a permis d'apprendre énormément et je lui en suis reconnaissant.

Je remercie aussi Isabelle et Robin pour plusieurs discussions éclairantes, et aussi les autres discussions moins enrichissantes mathématiquement mais bien amusantes. Je souhaite en particulier remercier Isabelle dont les explications et le mémoire de maîtrise m'ont été très utiles.

Je remercie aussi les étudiants gradués du département grâce à qui l'ambiance et l'atmosphère ont été très agréables.

Enfin, je remercie du fond du cœur mon père pour son soutien indéfectible et la confiance qu'il a toujours manifestée à mon égard. Je lui dédie ce mémoire et j'espère qu'il aurait été fier de moi.

INTRODUCTION

Quoique nous nous bornerons dans ce mémoire à discuter des faisceaux des opérateurs différentiels, leur principal intérêt réside plutôt dans leurs modules. Ces modules, communément appelés $\mathcal{D}$-modules, ont d'abord été développés au début des années 1970 par entre autres M. Sato, M. Kashiwara et J. Bernstein pour construire une théorie algébrique des équations différentielles. Les $\mathcal{D}$-modules se sont cependant rapidement avérés d'une grande utilité dans plusieurs autres branches des mathématiques. De nombreuses applications existent en particulier en théorie de la représentation. En guise de motivation pour la suite, on discute brièvement de deux de ces applications : la correspondance de Riemann–Hilbert et la localisation de Beilinson–Bernstein.

Soit une équation différentielle linéaire sur $\mathbb{CP}^1$ avec des singularités régulières aux points $a_1, \ldots, a_n$, alors la monodromie de l'équation différentielle donne une représentation du groupe fondamental $\pi_1(\mathbb{CP}^1 \setminus \{a_1, \ldots, a_n\})$. La solution du 21^e problème d'Hilbert donne la réciproque : si on commence avec une représentation de $\pi_1(\mathbb{CP}^1 \setminus \{a_1, \ldots, a_n\})$, alors il existe une équation différentielle linéaire avec des singularités régulières dont la monodromie est la représentation prescrite. La correspondance de Riemann–Hilbert [**Ka**, **Me**] est une généralisation de ce théorème établie pour les variétés complexes, ou encore les variétés algébriques non singulières. Dans ce cas, les $\mathcal{D}$-modules jouent le rôle des équations différentielles.

Plus précisément, soit X une variété algébrique non singulière sur $\mathbb{C}$ et $\mathcal{D}$ son faisceau d'opérateurs différentiels. La correspondance de Riemann–Hilbert donne une équivalence de catégories entre d'une part les $\mathcal{D}$-modules holonomes à singularités régulières et d'autre part la catégorie des *faisceaux pervers*. Les faisceaux pervers sont certains objets de la catégorie dérivée bornée à cohomologie constructible des faisceaux sur X munie de la topologie complexe. Malgré cette définition un peu technique, il s'agit d'invariants topologiques naturels munis d'excellentes propriétés formelles.

Un second exemple des applications des $\mathcal{D}$-modules est la localisation de Beilinson–Bernstein [**BB**]. Un peu comme le théorème de Borel–Weil–Bott, la localisation de Beilinson–Bernstein permet de donner une construction *géométrique* de certains $\mathfrak{g}$-modules.

Plus précisément, soit G un groupe algébrique semi-simple, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie et $U(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$. Un $U(\mathfrak{g})$-module M est dit *de caractère central trivial* s'il satisfait $z \cdot m = 0$ pour tout $m \in M$ et $z \in Z(U(\mathfrak{g}))$, le centre de $U(\mathfrak{g})$. Soit aussi $B \subset G$ un sous-groupe de Borel, G/B la variété de drapeaux et $\mathcal{D}$ le faisceau des opérateurs différentiels sur G/B. La localisation de Beilinson–Bernstein affirme que le foncteur de sections globales $\Gamma(G/B, \cdot)$ est une équivalence de catégories entre d'une part les $\mathcal{D}$-modules quasi-cohérents comme $\mathcal{O}_X$-modules et d'autre part les $U(\mathfrak{g})$-modules de caractère central trivial. Le foncteur inverse est alors donné par $\mathcal{D} \otimes_{U(\mathfrak{g})} (\cdot)$.

On peut en fait généraliser ce résultat : si M est un $U(\mathfrak{g})$-module de caractère central χ, alors on peut utiliser l'homomorphisme de Harish–Chandra pour réécrire χ en terme d'un poids $\lambda \in X(T)$ dominant, où $T \subset G$ est un tore maximal. On dira alors que M est de caractère central χ_λ. On peut également se servir du poids λ pour définir une légère généralisation du faisceau des opérateurs différentiels : le faisceau $\mathcal{D}_\lambda$ des opérateurs différentiels *tordus*. Dans ce cas, la localisation de Beilinson–Bernstein affirme que le foncteur de sections globales $\Gamma(G/B, \cdot)$ donne une équivalence de catégories entre d'une part les $\mathcal{D}_\lambda$-modules quasi-cohérents comme $\mathcal{O}_X$-modules et d'autre part les $U(\mathfrak{g})$-modules de caractère central χ_λ. Encore une fois, le foncteur inverse est donné par $\mathcal{D}_\lambda \otimes_{U(\mathfrak{g})} (\cdot)$.

Cette technique est particulièrement utile à l'étude des modules de Harish–Chandra ou encore des modules de Verma. La correspondance de Riemann–Hilbert et la localisation de Beilinson–Bernstein sont toutes deux importantes dans la résolution des conjectures de Kazhdan–Lusztig [**BB**].

Une étape majeure de la preuve de la localisation de Bernstein–Beilinson est la démonstration que, pour tout $\mathcal{D}$-module quasi-cohérent comme $\mathcal{O}$-module sur une variété de drapeaux d'un groupe algébrique G semi-simple sur un corps de caractéristique 0, le foncteur de sections globales est exact. Il revient au même de dire que pour chaque $\mathcal{D}$-module quasi-cohérent $\mathcal{M}$ et sous-groupe parabolique P, on a $H^i(G/P, \mathcal{M}) = 0$ pour $i > 0$. Le principal théorème de ce mémoire peut être vu comme un cas particulier de cette propriété. On démontrera l'annulation des groupes de cohomologie supérieurs pour le faisceau des opérateurs différentiels $\mathcal{D}$ lui-même, plutôt que pour tous les $\mathcal{D}$-modules quasi-cohérents. Plus précisément, on montrera le théorème suivant.

Théorème (3.4.1)**.** Soit G un groupe algébrique semi-simple sur un corps de caractéristique 0, P un sous-groupe parabolique de G et $\mathcal{D}$ le faisceau des opérateurs différentiels sur la variété de drapeaux G/P. Alors les groupes de cohomologie supérieurs sont tous nuls c'est-à-dire que pour $i > 0$,

$$H^i(G/P, \mathcal{D}) = 0.$$

On décrit maintenant le contenu de ce mémoire.

Dans le chapitre 1, on donne une construction soignée du faisceau des opérateurs différentiels sur une variété. On commence par donner une définition plutôt abstraite et on s'affaire ensuite dans les sections suivantes à donner une description plus concrète pour des variétés progressivement plus générales. On établit aussi au passage la plupart des propriétés élémentaires de ces faisceaux.

Dans les premières sections, on considère une variété affine X où l'on peut se contenter de travailler avec l'algèbre des opérateurs différentiels plutôt qu'avec un faisceau. On définit cette algèbre comme une sous-algèbre des endomorphismes de l'anneau de coordonnées $k[X]$ en se servant de l'ordre d'un opérateur différentiel, qui est lui-même défini par récurrence avec une relation de commutation. En particulier, l'algèbre des opérateurs différentiels est non commutative et munie d'une filtration donnée par l'ordre.

Dans le cas de l'espace affine, l'algèbre des opérateurs différentiels est l'algèbre de Weyl ; une algèbre bien connue des physiciens en raison de son utilité en mécanique quantique. Il s'agit d'une algèbre non commutative, simple et noethérienne. Pour les autres variétés affines, on peut encore donner une description de l'algèbre des opérateurs différentiels à l'aide de l'algèbre de Weyl.

On considère ensuite la localisation de l'algèbre des opérateurs différentiels afin de pouvoir recoller les algèbres d'opérateurs différentiels sur des variétés affines pour former le faisceau des opérateurs différentiels sur une variété quelconque. Dans le cas où la variété est non singulière, le faisceau des opérateurs différentiels est très lié au fibré cotangent. On pourra donc par la suite travailler avec le fibré cotangent pour démontrer certaines propriétés du faisceau des opérateurs différentiels.

Le chapitre 2 est essentiellement un survol des constructions de géométrie et de groupes algébriques qui seront nécessaires par la suite. On discute en peu de pages d'un grand nombre de résultats importants. En fait, ce chapitre sert davantage à fixer les notations et donner des références détaillées à la littérature qu'à donner une exposition satisfaisante de ces notions.

Enfin, le dernier chapitre contient trois preuves indépendantes du théorème principal 3.4.1 cité ci-haut. La première preuve est de Hesselink [**He**] et ne fonctionne que dans le cas particulier où le sous-groupe parabolique P est un sous-groupe de Borel. On peut alors démontrer le résultat en utilisant des méthodes algébriques, à savoir un complexe de Koszul puis un argument de suites spectrales. On doit aussi calculer quelques groupes de cohomologie auxiliaires en se servant du théorème de Borel–Weil–Bott.

La seconde preuve est de Kempf [**Ke**] et on doit supposer que le radical unipotent V du sous-groupe parabolique $P = LV$ agit trivialement par l'adjointe sur son algèbre de Lie $\mathfrak{v}$. Cette hypothèse est notamment satisfaite lorsque G/P est un espace projectif ou plus généralement une grassmanienne. Encore une fois, la preuve est algébrique et n'utilise que le théorème de Borel–Weil–Bott.

La dernière preuve est attribuée à R. Elkik et est publiée dans [**KP**]. Elle traite du cas général où P est un sous-groupe parabolique arbitraire. Cependant, elle fait appel au théorème de Grauert–Riemenschneider. Il s'agit d'un théorème issu de la géométrie analytique qui généralise le théorème d'annulation de Kodaira.

Conventions : Sauf mention contraire, k désigne un corps commutatif algébriquement fermé et de caractéristique 0. Par *anneau*, on entend un anneau muni d'une identité et par *algèbre* on entend une algèbre associative munie d'une identité. Sauf mention contraire, on désigne par *module* un module à gauche. Il ne sera pas nécessaire de supposer que les variétés sont irréductibles.

Chapitre 1

GÉNÉRALITÉS SUR LES FAISCEAUX DES OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS

Dans le chapitre 1, on donne une construction soignée du faisceau des opérateurs différentiels sur une variété, qui sera l'objet du reste de ce mémoire. On commence par une définition abstraite de l'algèbre des opérateurs différentiels sur une variété affine et puis donner une description plus explicite des opérateurs différentiels sur des variétés progressivement plus générales. Dans le cas des variétés non singulières, on montrera à la section 1.7 que cette définition est équivalente à l'algèbre engendrée par les dérivations et les multiplications par des fonctions.

La première section donne la définition abstraite de l'algèbre des opérateurs différentiels sur les variétés affines et quelques-unes de leurs propriétés élémentaires. Les sections 2 et 3 discutent de l'algèbre des opérateurs différentiels sur l'espace affine $\mathbb{A}^n$. On la caractérise comme l'algèbre de Weyl et on établit ses propriétés, notamment qu'il s'agit d'une algèbre noethérienne. La quatrième section revient sur les variétés affines et utilise l'algèbre de Weyl pour donner une description plus explicite de l'algèbre des opérateurs différentiels. On s'intéresse aussi à la localisation de ces algèbres.

À la quatrième section, on passe au cas des variétés pas nécessairement affines et de leur faisceau d'opérateurs différentiels. La section 5 donne quelques définitions et propriétés des variétés non singulières. On se sert de ces propriétés à la section 6 pour expliquer le lien entre le faisceau d'opérateurs différentiels et le fibré cotangent des variétés non singulières.

1.1. Anneau d'opérateurs différentiels

Soit X une variété affine sur un corps k de caractéristique nulle, $\mathcal{O}_X$ son faisceau structural et $R(X) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ l'algèbre des fonctions régulières sur X. Les endomorphismes k-linéaires de $R(X)$ forment une k-algèbre, notée End $R(X)$, avec l'addition et la composition. On fait de End $R(X)$ une algèbre de Lie avec comme crochet le commutateur $[P, Q] = PQ - QP$, où $P, Q \in \text{End}\, R(X)$.

L'anneau $R(X)$ s'injecte dans End $R(X)$ en appliquant $r \in R(X)$ sur l'endomorphisme de multiplication à gauche par r défini comme $f \mapsto rf$ pour $f \in R(X)$. On pourra ainsi voir $R(X)$ comme un sous-ensemble de End $R(X)$ en identifiant $R(X)$ avec son image dans End $R(X)$.

Définition 1.1.1. Un *opérateur différentiel* sur X d'ordre 0 est un endomorphisme $P \in \text{End}\, R(X)$ tel que $[P, f] = 0$ pour tout $f \in R(X)$.

Si $n > 0$, un opérateur différentiel sur X d'ordre (au plus) n est un endomorphisme $P \in \text{End}\, R(X)$ tel que $[P, f]$ est un opérateur différentiel d'ordre $n - 1$, pour tout $f \in R(X)$. En particulier, un opérateur différentiel d'ordre n est aussi un opérateur différentiel d'ordre m si $m > n$.

Un opérateur différentiel désigne tout opérateur d'ordre fini. On notera $D(X)$ les opérateurs différentiels et $D_n(X)$ les opérateurs différentiels d'ordre n. Enfin, on convient que $D_{-1}(X) = \{0\}$.

Les prochaines propositions établissent que les opérateurs différentiels forment une algèbre filtrée par l'ordre des opérateurs. Cette filtration sera constamment utilisée par la suite. On rappelle d'abord la définition.

Définition 1.1.2. Soit R une k-algèbre. Une *filtration* de R est une suite $\{F_i\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ croissante de sous-espaces

$$\{0\} \subset F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \cdots$$

telle que

(i) $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}_+} F_i = R$,

(ii) $F_p \cdot F_q \subset F_{p+q}$ pour tout $p, q \in \mathbb{Z}_+$,

(iii) $1 \in F_0$.

Si R est une k-algèbre filtrée par $\{F_i\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$, on définit aussi une filtration d'un R-module M comme une suite $\{\Gamma_i\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ croissante de sous-espaces

$$\{0\} \subset \Gamma_0 \subset \Gamma_1 \subset \Gamma_2 \subset \cdots$$

telle que

(i) $\bigcup_{i\in\mathbb{Z}_+} \Gamma_i = M$

(ii) $F_p \cdot \Gamma_q \subset \Gamma_{p+q}$ pour tout $p, q \in \mathbb{Z}_+$.

Proposition 1.1.3. Soit P et Q des opérateurs différentiels sur X. Si P est d'ordre p et Q est d'ordre q, alors

(i) $P + Q$ est d'ordre $\max\{p, q\}$;

(ii) PQ est d'ordre $p + q$;

(iii) $[P, Q]$ est d'ordre $p + q - 1$;

DÉMONSTRATION. On démontre tous ces énoncés par récurrence sur $p + q$. On vérifie aisément les énoncés dans le cas où p ou q est nul. Sinon, soit $f \in R(X)$.

Pour (i),

$$[P + Q, f] = [P, f] + [Q, f]$$

est une somme d'opérateurs d'ordre respectif $p-1$ et $q-1$. Par l'hypothèse de récurrence, $[P + Q, f]$ est d'ordre $\max\{p - 1, q - 1\}$ et donc $P + Q$ est d'ordre $\max\{p, q\}$.

Pour (ii), on a

$$[PQ, f] = PQf - PfQ + PfQ - fPQ = P[Q, f] + [P, f]Q.$$

Par l'hypothèse de récurrence, les opérateurs à droite sont d'ordre $p + q - 1$. Il suit que $[PQ, f]$ est aussi d'ordre $p + q - 1$ et donc PQ est d'ordre $p + q$.

Pour (iii), il suit de l'identité de Jacobi que

$$[[P, Q], f] = [P, [Q, f]] - [Q, [P, f]].$$

Par l'hypothèse de récurrence, les opérateurs à droite sont d'ordre $p + q - 2$. Il suit que $[[P, Q], f]$ est d'ordre $p + q - 2$ et donc que $[P, Q]$ est d'ordre $p + q - 1$. □

Corollaire 1.1.4. L'ordre des opérateurs fait de $D(X)$ une algèbre filtrée.

DÉMONSTRATION. Le résultat suit des énoncés (i) et (ii) de la proposition 1.1.3. □

Définition 1.1.5. Étant donnée une algèbre R filtrée par $\{F_i\}$, son algèbre *graduée associée* est définie comme

$$\operatorname{Gr} R = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}_+} \operatorname{Gr}_i R = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}_+} F_i/F_{i-1}$$

où l'on convient que $F_{-1} = \{0\}$. La multiplication y est définie de telle sorte que pour $x + F_{p-1} \in \mathrm{Gr}_p\, R$ et $y + F_{q-1} \in \mathrm{Gr}_q\, R$, on ait

$$(x + F_{p-1})(y + F_{q-1}) = xy + F_{p+q-1} \in \mathrm{Gr}_{p+q}\,.$$

Pour chaque $x \in F_i$ non nul, il existe un unique $0 \leq p \leq i$ tel que $x + F_{p-1} \in \mathrm{Gr}_p\, R$ n'est pas nul. En appliquant x sur $x + F_{p-1}$ on obtient une surjection $\gamma : R \to \mathrm{Gr}\, R$. On appelle $\gamma(x)$ le *symbole principal* de x. Plus généralement, on appelle le p-symbole la surjection naturelle $\gamma_p : F_p \to F_p/F_{p-1}$.

De manière analogue, le Gr R-module gradué associé d'un R-module filtré M est défini comme

$$\mathrm{Gr}\, M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_+} \mathrm{Gr}_i\, M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_+} \Gamma_i/\Gamma_{i-1}$$

où l'on convient que $\Gamma_{-1} = \{0\}$. L'action de Gr R est définie de telle sorte que pour $x + F_{p-1} \in \mathrm{Gr}_p\, R$ et $m + \Gamma_{q-1} \in \mathrm{Gr}_q\, \Gamma$, on ait

$$(x + F_{p-1})(m + \Gamma_{q-1}) = xm + \Gamma_{p+q-1}.$$

Le symbole principal et les p-symboles sont définis sur les modules filtrés comme sur les algèbres filtrées.

Plusieurs propriétés de $D(X)$ peuvent se déduire de celles de Gr $D(X)$, algèbre dans laquelle il est parfois plus commode de travailler. Par exemple $D(X)$ n'est visiblement pas commutatif, toutefois on a le corollaire suivant.

Corollaire 1.1.6. L'algèbre graduée Gr $D(X)$ associée à $D(X)$ est commutative.

DÉMONSTRATION. Il suffit d'utiliser l'énoncé (iii) de la proposition 1.1.3. □

On termine cette section en donnant une description explicite des opérateurs d'ordre 0 et 1.

Définition 1.1.7. Soit A une k-algèbre et M un A-module à gauche. Une *dérivation* de A dans M est une application k-linéaire $\partial : A \to M$ vérifiant la *règle de Leibniz*, c'est-à-dire que pour a, b dans A, on doit avoir

$$\partial(ab) = a\partial(b) + b\partial(a).$$

On note $\mathrm{Dér}(A, M)$ les dérivations de A dans M et lorsque $A = M = R(X)$, on écrira simplement

$$\mathrm{Dér}\, R(X) = \mathrm{Dér}(R(X), R(X)).$$

Dans ce cas, Dér $R(X)$ est une sous-algèbre de Lie de End $R(X)$.

Proposition 1.1.8. Les opérateurs d'ordre 0 et 1 sont respectivement donnés par

(i) $D_0(X) = R(X)$,

(ii) $D_1(X) = R(X) \oplus \text{Dér}\, R(X)$.

DÉMONSTRATION. Les opérateurs d'ordre 0 vérifient $[P, f] = Pf - fP = 0$, c'est-à-dire qu'ils sont $R(X)$-linéaires et $\text{End}_{R(X)} R(X) = R(X)$.

Pour les opérateurs d'ordre 1, on a $R(X) + \text{Dér}\, R(X) \subset D_1(X)$ puisque pour une dérivation P, on a

$$[P, f](g) = P(fg) - fP(g) = P(f)g + fP(g) - fP(g) = P(f)g.$$

Donc $[P, f] = P(f) \in R(X) = D_0(X)$. Pour l'autre inclusion, on peut se contenter de montrer que si $P' \in D_1(X)$, alors $P = P' - P'(1)$ est une dérivation. En notant que $P(1) = 0$, on a

$$\begin{aligned} P(fg) &= fP(g) + P(fg) - fP(g) \\ &= fP(g) + [P, f](g) \\ &= fP(g) + g[P, f](1) \\ &= fP(g) + gP(f) + gP(1) \\ &= fP(g) + gP(f). \end{aligned}$$

□

1.2. OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS SUR L'ESPACE AFFINE

On s'intéresse d'abord à un exemple important, celui de l'espace affine $\mathbb{A}^n$. Les fonctions régulières y sont les polynômes en n variables $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. On écrira d'ailleurs dans cette section R plutôt que $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$.

Le principal résultat est le théorème 1.2.9 qui établit que l'algèbre des opérateurs différentiels sur $\mathbb{A}^n$ est l'algèbre de Weyl. De bonnes références sont les chapitres 1,2,3,7,8 de [**Co**] ou encore les sections §1.1 et §1.2 de [**Bj**].

Définition 1.2.1. L'*algèbre de Weyl*, notée $W(n)$, est la sous-algèbre de End R générée par R et les dérivées partielles formelles $\partial_i = \partial/\partial x_i$, où $i = 1, \ldots, n$.

Les dérivées partielles formelles sont des dérivations. Elles satisfont donc la règle de Leibniz. En particulier, quel que soit $f \in R$,

$$\partial_i(x_i f) = x_i \partial_i(f) - f\partial_i(x_i) = x_i \partial_i(f) - f,$$

c'est-à-dire qu'on a la relation $[\partial_i, x_i] = 1$. On note également les relations évidentes

$$[x_i, x_j] = 0 \quad 1 \leq i, j \leq n$$

$$[\partial_i, \partial_j] = 0 \quad 1 \leq i, j \leq n$$

$$[\partial_i, x_j] = 0 \quad 1 \leq i, j \leq n, i \neq j.$$

On verra au corollaire 1.2.5 que ces relations engendrent l'idéal de toutes les relations.

Lemme 1.2.2. Les identités suivantes sont vérifiées dans $W(n)$ pour tout entier $p > 0$ et $i = 1, \ldots, n$.

(i) $[\partial_i, f] = \partial_i(f)$, pour tout $f \in R$;

(ii) $[\partial_i, x_i^p] = px_i^{p-1}$;

(iii) $[x_i, \partial_i^p] = -p\partial_i^{p-1}$.

DÉMONSTRATION. L'identité (i) est une conséquence de la règle de Leibniz. Pour n'importe quel $g \in R$, on a

$$[\partial_i, f](g) = \partial_i(fg) - f\partial_i(g) = f\partial_i(g) + g\partial_i(f) - f\partial_i(g) = \partial_i(f)g.$$

Pour (ii), il suit de l'identité (i) qu'il suffit de calculer $\partial_i(x_i^p)$. On procède par récurrence sur p. Si $p = 1$, il ne s'agit que de l'identité $[\partial_i, x_i] = 1$. Si $p > 1$,

$$\begin{aligned}\partial_i(x_i^p) &= x_i\partial_i(x_i^{p-1}) + x_i^{p-1}\partial_i(x_i)\\ &= x_i(p-1)x_i^{p-2} + x_i^{p-1}\\ &= px_i^{p-1}.\end{aligned}$$

Pour (iii), on procède par récurrence sur p. Si $p = 1$, il ne s'agit que de l'identité $[x_i, \partial_i] = -[\partial_i, x_i] = -1$. Si $p > 1$, on suppose $[x_i, \partial^{n-1}] = -(n-1)\partial_i^{n-2}$ et alors pour n'importe quel $f \in R$,

$$\begin{aligned}[x_i, \partial_i^n](f) &= x_i\partial_i^n(f) - \partial_i^n(x_i f)\\ &= x_i\partial_i^{n-1}(\partial_i f) - \partial_i^{n-1}(x_i\partial_i(f) + f\partial_i(x_i))\\ &= [x_i, \partial_i^{n-1}](\partial_i f) - \partial_i^{n-1}(f\partial_i(x_i))\\ &= -(n-1)\partial_i^{n-2}(\partial_i f) - \partial_i^{n-1}(f)\\ &= -n\partial_i^{n-1}(f).\end{aligned}$$

$\square$

Afin d'alléger les notations, on utilisera des multi-indices. C'est-à-dire qu'on pose $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ et $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ pour écrire $x^\alpha \partial^\beta$ plutôt que $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} \partial_1^{\beta_1} \partial_2^{\beta_2} \ldots \partial_n^{\beta_n}$. On adopte aussi les conventions suivantes :

(i) $|\alpha| = \sum \alpha_i$,

(ii) $\alpha! = \alpha_1!\alpha_2! \ldots \alpha_n!$,

(iii) $\alpha\beta = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_+^{2n}$.

Lemme 1.2.3. Supposons que $|\alpha| \leq |\beta|$, alors $\partial^\beta(x^\alpha) = \beta!$ si $\alpha = \beta$ et 0 sinon.

DÉMONSTRATION. Il suit de la règle de Leibniz et des identités du lemme 1.2.2 que

$$\partial^\beta(x^\alpha) = \partial_1^{\beta_1}(x_2^{\alpha_1} \partial_2^{\beta_2}(x_1^{\alpha_2} \cdots \partial_n^{\beta_n}(x_n^{\alpha_n}) \cdots)).$$

On peut évaluer cette expression en appliquant plusieurs fois $\partial_i(x_i^n) = nx_i^{n-1}$. On obtient

$$\partial_i^{\beta_i}(x_i^{\alpha_i}) = \begin{cases} \frac{\alpha_i!}{(\alpha_i - \beta_i)!} x_i^{\alpha_i - \beta_i} & \text{si } \beta_i \leq \alpha_i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $|\alpha| \leq |\beta|$ et $\alpha \neq \beta$, alors il existe un indice i tel que $\alpha_i < \beta_i$, c'est-à-dire un terme nul dans le développement de $\partial^\beta(x^\alpha)$. Sinon, $\alpha = \beta$ et le résultat suit. □

Proposition 1.2.4. Une base de $W(n)$ comme k-espace vectoriel est donnée par

$$\{x^\alpha \partial^\beta : \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n\}.$$

DÉMONSTRATION. En se servant des commutateurs du lemme 1.2.2, on peut réécrire tout élément de l'algèbre de Weyl comme une combinaison linéaire $\sum c_{\alpha\beta} x^\alpha \partial^\beta$. Il suffit donc de montrer que les $x^\alpha \partial^\beta$ sont linéairement indépendants.

Supposons qu'on a une somme $D = \sum c_{\alpha\beta} x^\alpha \partial^\beta$ avec un coefficient $c_{\gamma\delta} \neq 0$; on doit montrer que dans ce cas, $D \neq 0$. On peut supposer que $\gamma\delta$ est tel que $c_{\gamma\delta} \neq 0$ mais $c_{\alpha\beta} = 0$ pour tout α et β tel que $|\beta| \geq |\delta|$. Alors, on a par le lemme 1.2.3

$$D(x^\delta) = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta} x^\alpha \partial^\beta(x^\delta) = \sum_\alpha \sum_{\beta:|\beta| \leq |\delta|} c_{\alpha\beta} x^\alpha \partial^\beta(x^\delta) = \sum_\alpha c_{\alpha\delta} x^\alpha \delta!.$$

Ce polynôme est non nul puisque $c_{\gamma\delta}$ n'est pas nul. Il suit que D est non nul. Les $\{x^\alpha \partial^\beta\}$ sont donc linéairement indépendants. □

Corollaire 1.2.5. L'algèbre de Weyl est isomorphe à l'algèbre libre sur les $2n$ générateurs $x_1, \ldots, x_n, \partial_1, \ldots, \partial_n$ avec les relations engendrées par

(i) $[x_i, x_j] = 0$, $1 \leq i, j \leq n$;

(ii) $[\partial_i, \partial_j] = 0$, $1 \le i, j \le n$;

(iii) $[\partial_i, x_j] = \delta_{ij}$, $1 \le i, j \le n$.

Où δ_{ij} désigne le delta de Kronecker.

DÉMONSTRATION. Soit A l'algèbre libre sur les $2n$ générateurs $x_1, \dots, x_n, \partial_1, \dots, \partial_n$ et I l'idéal engendré par les relations (i), (ii) et (iii). En appliquant les générateurs x_i et δ_j sur les éléments correspondants de l'algèbre de Weyl, on obtient une surjection $A \to W(n)$ qui se factorise en une surjection $\varphi : A/I \to W(n)$. L'ensemble $\{x^\alpha \partial^\beta + I\}$, qui génère A/I, est appliqué par φ sur la base de la proposition 1.2.4. On conclut que φ est injective. □

Le prochain corollaire nous dispensera de démontrer certains résultats deux fois : une fois pour les $W(n)$-modules à gauche et une fois pour les $W(n)$-modules à droite.

Corollaire 1.2.6. L'algèbre de Weyl $W(n)$ est isomorphe à son algèbre opposée $W(n)^\circ$.

DÉMONSTRATION. L'anti-automorphisme est donné par $x_i \mapsto \partial_i$ et $\partial_i \mapsto x_i$. □

Il reste à montrer que l'algèbre de Weyl est effectivement l'algèbre des opérateurs différentiels sur $\mathbb{A}^n$. Il faudra d'abord deux lemmes.

On pose

$$C_p = \{P \in D(\mathbb{A}^n) : P = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta} x^\alpha \partial^\beta, |\beta| \le p\}.$$

Les ∂_i sont des dérivations et donc des opérateurs différentiels d'ordre 1. En écrivant $P \in C_{p+1}$ dans la base de la proposition 1.2.4, on obtient

$$C_p = C_{p+1} \cap D_p(\mathbb{A}^n).$$

On montrera au théorème 1.2.9 qu'on a en fait $C_p = D_p(\mathbb{A}^n)$.

Lemme 1.2.7. Soit $f_\alpha \in R$ pour chaque multi-indice α tel que $|\alpha| \le p$. Alors il existe $P \in C_p$ tel que $P(x^\alpha) = f_\alpha$.

DÉMONSTRATION. On procède par récurrence sur p. L'affirmation est évidente pour $p = 0$, alors supposons que $p > 0$. Il existe par l'hypothèse de récurrence un $Q \in C_{p-1}$ tel que $Q(x^\alpha) = f_\alpha$ pour $|\alpha| \le p - 1$. On pose

$$Q' = \sum_{\beta : |\beta| = p} \frac{f_\beta - Q(x^\beta)}{\beta!} \partial^\beta.$$

Il suit alors du lemme 1.2.3 que $Q'(x^\alpha) = 0$ si $|\alpha| \leq p-1$, et

$$Q'(x^\alpha) = \sum_{\beta : |\beta| = p} \frac{f_\beta - Q(x^\beta)}{\beta!} \partial^\beta (x^\alpha) = f_\alpha - Q(x^\alpha)$$

si $|\alpha| = p$.

On conclut que l'opérateur $P = Q + Q'$ a toutes les propriétés désirées. Il est d'ordre p puisque Q est d'ordre $p-1$ et Q' est d'ordre p et

$$P(x^\alpha) = Q(x^\alpha) + Q'(x^\alpha) = \begin{cases} f_\alpha + 0 & \text{si } |\alpha| < p \\ Q(x^\alpha) + (f_\alpha - Q(x^\alpha)) & \text{si } |\alpha| = p. \end{cases}$$

□

Lemme 1.2.8. Soit $P \in D_p(\mathbb{A}^n)$ et $Q \in C_p$. Si $P(x^\alpha) = Q(x^\alpha)$ pour tout α tel que $|\alpha| \leq p$, alors $P = Q$.

DÉMONSTRATION. On procède par récurrence sur p. L'affirmation est évidente si $p = 0$; alors supposons que $p > 0$. Quel que soit $i = 1, \ldots, n$ et α tel que $|\alpha| \leq p-1$, on a

$$\begin{aligned} [P, x_i](x^\alpha) &= P(x_i x^\alpha) - x_i P(x^\alpha) \\ &= Q(x_i x^\alpha) - x_i Q(x^\alpha) \\ &= [Q, x_i](x^\alpha). \end{aligned}$$

Par l'hypothèse de récurrence, $[P, x_i] = [Q, x_i]$.

Maintenant, on démontre que $P = Q$ en montrant que $P(x^\beta) = Q(x^\beta)$ quel que soit $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$. On procède par (une autre) récurrence sur $|\alpha|$. Si $|\alpha| \leq p$, l'affirmation est vraie par hypothèse. Sinon, on observe que pour n'importe quel $i = 1, \ldots, n$,

$$\begin{aligned} P(x_i x^\alpha) &= [P, x_i](x^\alpha) + x_i P(x^\alpha) \\ &= [Q, x_i](x^\alpha) + x_i P(x^\alpha) \\ &= Q(x_i x^\alpha) + x_i (P x^\alpha - Q x^\alpha) \\ &= Q(x_i x^\alpha). \end{aligned}$$

Le résultat suit par récurrence. □

Théorème 1.2.9. L'algèbre des opérateurs différentiels sur $\mathbb{A}^n$ est $W(n)$, l'algèbre de Weyl. De plus, $D_p(\mathbb{A}_n) = C_p$.

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer que $D_p(\mathbb{A}_n) \subset C_p$. Soit $P \in D_p(\mathbb{A}^n)$. Par le lemme 1.2.7, il existe un $Q \in C_p$ tel que $Q(x^\alpha) = P(x^\alpha)$ pour $|\alpha| \leq p$. Le résultat suit du lemme 1.2.8. □

Corollaire 1.2.10. Quel que soit $p \in \mathbb{Z}_+$, le R-module $D_p(X)$ est finiment engendré.

DÉMONSTRATION. Un ensemble générateur est $\{\partial^\beta : |\beta| \leq p\}$. □

1.3. PROPRIÉTÉS DE L'ALGÈBRE DE WEYL

On démontre maintenant deux propriétés de l'algèbre de Weyl : elle est simple et noethérienne. On verra au théorème 1.7.7 que les opérateurs différentiels sur une variété affine non singulière ont toujours ces propriétés.

Il est commode d'introduire une nouvelle filtration sur $W(n)$, dite la *filtration de Bernstein*

$$B_p = \{P \in W(n) : P = \sum_{\alpha,\beta} c_\alpha x^\alpha \partial^\beta : |\alpha| + |\beta| \leq p\}.$$

On convient de plus que $B_{-2} = B_{-1} = \{0\}$.

On remarque que les B_p sont tous des espaces vectoriels de dimension finie sur k, contrairement à la filtration par l'ordre, pour laquelle on a par exemple $W_0(n) = k[x_1, \ldots, x_n]$.

Proposition 1.3.1. La filtration de Bernstein est une filtration de $W(n)$. Plus précisément, pour tout $p, q \in \mathbb{Z}_+$,

(i) $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}_+} B_i = W(n)$;

(ii) $B_p + B_q \subset B_{\max\{p,q\}}$;

(iii) $B_p B_q \subset B_{p+q}$;

(iv) $[B_p, B_q] \subset B_{p+q-2}$.

DÉMONSTRATION. On se contente de montrer (iii) et (iv), le reste étant clair. On procède par récurrence sur $p + q$. Les résultats sont clairs si $p = 0$ ou $q = 0$. Soit donc $p, q > 1$ tels que $p + q = i$, et des opérateurs $P \in B_p$ et $Q \in B_q$. On peut supposer sans perte de généralité que P et Q sont de la forme $P = x^\alpha \partial^\beta$ et $Q = x^\gamma \partial^\delta$ avec $|\alpha| + |\beta| + |\gamma| + |\delta| = i$. Alors

$$\begin{aligned} PQ &= x^\alpha \partial^\beta x^\gamma \partial^\delta \\ &= x^\alpha (x^\gamma \partial^\beta + [\partial^\beta, x^\gamma]) \partial^\delta \\ &= x^{\alpha+\gamma} \partial^{\beta+\delta} + x^\alpha [\partial^\beta, x^\gamma] \partial^\delta. \end{aligned}$$

Nous allons montrer que $[\partial^\beta, x^\gamma]$ est d'ordre $|\alpha|+|\gamma|-2$. Cette affirmation impliquera (iii) puisque dans ce cas, PQ est du même ordre que $x^{\alpha+\gamma}\partial^{\beta+\delta}$ qui est d'ordre i.

On procède par récurrence sur $|\beta|$. Le résultat est clair si $|\beta| = 0$. Sinon, on peut écrire $\partial^{\beta'}\partial_i$ avec $|\beta'| = |\beta| - 1$. On a alors

$$[\partial^\beta, x^\gamma] = [\partial^{\beta'}\partial_i, x^\gamma] = \partial_i[\partial^{\beta'}, x^\gamma] + [\partial_i, x^\gamma]\partial^{\beta'}.$$

L'hypothèse de récurrence donne $[\partial^{\beta'}, x^\gamma] \in B_{|\beta|+|\gamma|-3}$ et $[\partial_i, x^\gamma] \in B_{|\gamma|-1}$. Il suit $[\partial^\beta, x^\gamma] \in B_{|\gamma|+|\beta|-2}$, ce qui termine la preuve de (iii).

Un calcul identique donne $QP = x^{\gamma+\alpha}\partial^{\delta+\beta} + x^\gamma[\partial^\delta, x^\alpha]\partial^\beta$. Il suit que

$$[P, Q] = x^\alpha[\partial^\beta, x^\gamma]\partial^\delta - x^\gamma[\partial^\delta, x^\alpha]\partial^\beta$$

On a montré que les opérateurs $[\partial^\beta, x^\gamma]$ et $[\partial^\delta, x^\alpha]$ sont respectivement d'ordre $|\beta|+|\gamma|-2$ et $|\delta| + |\alpha| - 2$. On conclut que $[P, Q]$ est d'ordre $i - 2$, ce qui termine la preuve de (iv). $\square$

Proposition 1.3.2. L'algèbre graduée associée $\mathrm{Gr}\, W(n)$ pour la filtration de Bernstein est isomorphe à l'anneau de polynômes en $2n$ variables $k[\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{\partial}_1, \dots, \bar{\partial}_n]$, où $\bar{x}_i$ et $\bar{\partial}_i$ sont respectivement les symboles principaux de x_i et de ∂_i.

Démonstration. Comme $x_1, \dots, x_n, \partial_1, \dots, \partial_n$ génèrent $W(n)$ comme algèbre, les $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{\partial}_1, \dots, \bar{\partial}_n$ doivent générer l'algèbre $\mathrm{Gr}\, W(n)$. Il suffit donc de montrer qu'il n'y a pas de relation linéaire non triviale entre les monômes de $\mathrm{Gr}\, W(n)$.

Par contradiction, supposons qu'on a une relation linéaire disons $\sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta}\bar{x}^\alpha\bar{\partial}^\beta = 0$. Soit i l'entier maximal tel que pour des multi-indices γ, δ on ait $|\gamma| + |\delta| = i$ et $c_{\gamma\delta} \neq 0$. On considère l'opérateur différentiel $P = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta}x^\alpha\partial^\beta \in B_i$ dont le symbole principal dans $\mathrm{Gr}\, W(n)$ est $\gamma(P) = \sum_{\alpha,\beta:|\alpha|+|\beta|=i} c_{\alpha\beta}\bar{x}^\alpha\bar{\partial}^\beta$. Comme il s'agit d'une composante homogène d'un polynôme nul par hypothèse, on a $\gamma(P) = 0$, c'est-à-dire $P \in B_{i-1}$. On peut donc écrire

$$P = \sum_{\alpha,\beta:|\alpha|+|\beta|<i} d_{\alpha\beta}x^\alpha\partial^\beta.$$

On devrait avoir $c_{\alpha\beta} = d_{\alpha\beta}$ pour tout α et β étant donné que les $\{x^\alpha\partial^\beta\}$ forment une base. Ce serait cependant absurde étant donné que pour le multi-indice $\gamma\delta$, on a $c_{\gamma\delta} \neq 0$ et $d_{\gamma\delta} = 0$. $\square$

L'algèbre associée graduée de $W(n)$ filtrée par l'ordre est aussi isomorphe à un anneau de polynômes en $2n$ variables, comme on pourra aisément le déduire du théorème 1.7.4.

Par le dernier théorème, on sait que $\mathrm{Gr}\, W(n)$ est noethérien. Pour en déduire que $W(n)$ est aussi noethérien, il faut une définition.

Définition 1.3.3. Soit A une algèbre filtrée par $\{F_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ et M un A-module filtré par $\{\Gamma_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$. La filtration $\{\Gamma_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ est dite *bonne* si $\mathrm{Gr}\, M$ est finiment engendré comme $\mathrm{Gr}\, A$-module.

Proposition 1.3.4. Soit A un anneau filtré par $\{F_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$. Si M est un A-module admettant une bonne filtration, alors M est finiment engendré comme A-module.

DÉMONSTRATION. Comme $\mathrm{Gr}\, M$ est finiment engendré comme $\mathrm{Gr}\, A$-module, il suit que $\mathrm{Gr}_p\, M$ est finiment engendré comme $\mathrm{Gr}_0\, A$-module pour n'importe quel p. En utilisant la suite exacte

$$0 \to \Gamma_{p-1} \to \Gamma_p \to \mathrm{Gr}_p\, M \to 0,$$

on démontre par récurrence que Γ_p est aussi finiment engendré comme $\mathrm{Gr}_0\, A$-module pour tout p.

Comme $\mathrm{Gr}\, M$ est finiment engendré, on peut choisir un nombre fini de générateurs $\{m_j\}$ de $\mathrm{Gr}\, M$ comme $\mathrm{Gr}\, A$-module. Soit p tel que tous ces générateurs soient de degré plus petit ou égal à p. Nous allons montrer que Γ_p génère M, ce qui impliquera le résultat puisque Γ_p est finiment engendré.

Supposons qu'il existe $x \in M$ qui n'est pas généré par Γ_p. On peut supposer que $x \in \Gamma_q$ avec q minimal, dans ce cas $\gamma(x) = \gamma_q(x)$. Comme $\mathrm{Gr}\, M$ est généré par les m_j, on a $\gamma_p(x) = \sum c_j m_j$ pour des $c_j \in \mathrm{Gr}\, R$. Si $\tilde{c}_j$ et $\tilde{m}_j$ sont tels que $\gamma(\tilde{c}_j) = c_j$ et $\gamma(\tilde{m}_j) = m_j$, alors on a $\gamma_p(x) - \sum \gamma(\tilde{c}_j)\gamma(\tilde{m}_j) = 0$ dans Γ_q, ce qui implique que $x - \sum \tilde{c}_j \tilde{m}_j \in \Gamma_{q-1}$. On obtient donc un élément de Γ_{q-1} qui n'est pas généré par Γ_p, ce qui contredit la minimalité de q. □

Un anneau A est *noethérien à gauche* si chaque idéal à gauche $I \subset A$ est finiment engendré comme A-module, c'est-à-dire qu'il existe un nombre fini d'éléments $a_1, \ldots, a_n \in A$ tels que $I = Aa_1 + \cdots + Aa_n$. L'anneau A est noethérien à droite s'il vérifie la condition analogue pour les idéaux à droite.

Proposition 1.3.5. L'algèbre de Weyl $W(n)$ est noethérienne à gauche (et à droite).

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer qu'il est noethérien à gauche en vertu de 1.2.6. Soit I un idéal à gauche qu'on voit comme un $W(n)$-module à gauche. La filtration de Bernstein sur $W(n)$ induit une filtration sur I donnée par $I_i = B_i \cap I$. Les inclusions

$I_i \to B_i$ se factorisent en injections $I_i/I_{i-1} \to B_i/B_{i-1}$. On obtient donc une injection $\mathrm{Gr}\, I \to \mathrm{Gr}\, W(n)$ qui nous permet de voir I comme un sous-module de $\mathrm{Gr}\, W(n)$.

On a vu à la proposition 1.3.2 que $\mathrm{Gr}\, W(n)$ est un anneau de polynômes en $2n$ variables. Un tel anneau est noethérien en vertu du théorème de la base d'Hilbert. Il suit que $\mathrm{Gr}\, I$ est finiment engendré comme $\mathrm{Gr}\, W(n)$-module, c'est-à-dire que $\{I_i\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ est une bonne filtration. Le résultat suit de la proposition 1.3.4. □

Avec considérablement plus d'efforts, on pourrait plus spécifiquement montrer que chaque idéal à gauche de $W(n)$ est généré par au plus 2 éléments. On lira à ce sujet l'article original [**St**] ou encore la section §1.7 de [**Bj**].

Proposition 1.3.6. L'algèbre de Weyl $W(n)$ est simple, c'est-à-dire que ses seuls idéaux bilatères sont $\{0\}$ et $W(n)$.

DÉMONSTRATION. Supposons que I est un idéal bilatère contenant un opérateur P non nul. Dans ce cas, $[P, Q] \in I$ pour tout $Q \in W(n)$. Si $P \in B_p$ avec $p > 0$, l'identité $[\partial_i, x_i^n] = nx^{n-1}$ ou $[x_i, \partial_i^n] = -n\partial_i^{n-1}$ permet d'obtenir un élément P' de I tel que $P' \in B_{p-1}$. Par récurrence, on conclut que I doit contenir un élément de $B_0 = k$. Cet élément est alors inversible ce qui force $I = W(n)$. □

1.4. Opérateurs différentiels sur les variétés affines

On utilise l'algèbre de Weyl pour donner une description plus explicite de l'anneau des opérateurs différentiels sur les variétés affines. On discute ensuite de la localisation de ces anneaux, qui sera un outil essentiel pour le cas des variétés pas nécessairement affines. De bonnes références pour ces constructions sont les notes [**Mi**] ou [**Be**] ainsi que les livres [**B1**] ou [**Bj**].

Dans toute cette section, X est une variété affine qu'on ne suppose pas nécessairement irréductible. Soit $\mathcal{O}_X$ son faisceau structural et $R(X) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ l'algèbre des fonctions régulières sur X.

On peut voir X comme un sous-ensemble fermé de $\mathbb{A}^n$, dans ce cas $R(X) = k[x_1, \ldots, x_n]/I(X)$ où $I(X)$ est l'idéal des polynômes qui s'annulent sur X. On notera ν la surjection naturelle $k[x_1, \ldots, x_n] \to R(X)$.

On considère la sous-algèbre

$$A = \{P \in W(n) : P(I(X)) \subset I(X)\}.$$

L'algèbre A est munie de la filtration induite $A_i = A \cap W_i(n)$, où $\{W_i(n)\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ est la filtration par l'ordre de $W(n)$.

Un opérateur $P \in A$ se factorise uniquement en un endomorphisme $\varphi(P)$ de $R(X)$ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} k[x_1, \ldots, x_n] & \xrightarrow{P} & k[x_1, \ldots, x_n] \\ \Big\downarrow \nu & & \Big\downarrow \nu \\ R(X) & \xrightarrow{\varphi(P)} & R(X). \end{array}$$

On obtient ainsi un morphisme $\varphi : A \to \operatorname{End} R(X)$. Son noyau est

$$J = \{P \in W(n) : P(k[x_1, \ldots, x_n]) \subset I(X)\}.$$

En factorisant φ on obtient un morphisme injectif $\tilde{\varphi} : A/J \to \operatorname{End} R(X)$. Nous montrerons à la proposition 1.4.3 que $\tilde{\varphi}$ est un isomorphisme de A/J sur $D(X)$.

Lemme 1.4.1. L'image de A par φ est contenue dans $D(X)$. De plus, φ respecte les filtrations, c'est-à-dire que A_p est appliqué dans $D_p(X)$.

DÉMONSTRATION. On procède par récurrence sur p, l'ordre de la filtration. Si $p = 0$, il suffit de noter que pour $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$, on a $\varphi(f) = \nu(f)$. Si $p > 0$, soit $P \in A_p$. Quel que soit $\tilde{f} \in R(X)$, il existe $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ tel que $\nu(f) = \tilde{f}$. Dans ce cas,

$$[\varphi(P), \tilde{f}] = [\varphi(P), \varphi(f)] = \varphi([P, f]).$$

Par l'hypothèse de récurrence, $\varphi([P, f])$ est d'ordre $p - 1$, et donc $\varphi(P)$ est d'ordre p. □

L'algèbre A/J est aussi munie d'une filtration induite par celle de $W(n)$. Elle est donnée par

$$(A/J)_i = A_i/(A_i \cap J) = (W_i(n) \cap A)/(W_i(n) \cap J).$$

Il suit du dernier lemme que $\tilde{\varphi}$ respecte aussi cette filtration.

Lemme 1.4.2. Soit $P \in D_p(X)$ et $Q \in W_p(n)$. Si $P(\nu(x^\alpha)) = \nu(Q(x^\alpha))$ pour tout α tel que $|\alpha| \le p$, alors $P\nu = \nu Q$.

DÉMONSTRATION. Il s'agit d'une légère généralisation du lemme 1.2.8 et la même preuve fonctionne. □

Proposition 1.4.3. L'application $\tilde{\varphi} : A/J \to D(X)$ est un isomorphisme d'algèbres filtrées.

DÉMONSTRATION. Il ne nous reste qu'à démontrer la surjectivité de φ. Soit P un opérateur différentiel dans $D_p(X)$. On peut choisir des polynômes $f_\alpha \in k[x_1, \ldots, x_n]$ tels que $P(\nu(x^\alpha)) = \nu(f_\alpha)$ pour tout $|\alpha| \leq p$. Par le lemme 1.2.7, il existe un opérateur $Q \in W(n)$ d'ordre p tel que $Q(x^\alpha) = f_\alpha$ pour tout $|\alpha| \leq p$, ce qui implique $P(\nu(x^\alpha)) = \nu(Q(x^\alpha))$. Par le lemme 1.4.2, on conclut $P\nu = \nu Q$. On conclut $\varphi(Q) = P$. $\square$

Corollaire 1.4.4. Soit X une variété affine. Alors $D_p(X)$ est un $R(X)$-module à gauche (et à droite) finiment engendré.

DÉMONSTRATION. On peut voir X comme un fermé de $\mathbb{A}^n$, dans quel cas on a $R(X) = k[x_1, \ldots, x_n]/I(X)$. On sait que $W(n)$ est noethérien, alors $A \cap W_p(n)$ est finiment engendré comme $k[x_1, \ldots, x_n]$-module. Il suit que le $k[x_1, \ldots, x_n]/I(X)$-module

$$A \cap W_p(n)/I(X) \cap W_p(n)$$

est aussi finiment engendré. Mais par la proposition 1.4.3, il s'agit du $R(X)$-module $D_p(X)$. $\square$

Pour chaque $f \in R(X)$, on peut définir l'ouvert affine

$$X_f = \{x \in X : f(x) \neq 0\}.$$

Alors on a $R(X_f) \simeq R(X)_f$, la localisation de $R(X)$ par l'ensemble multiplicativement fermé $\{f^i : i \in \mathbb{Z}_+\}$. Dans le reste de la section, on démontre que l'on a aussi $D(X_f) \simeq D(X)_f$; ce sera le théorème 1.4.9.

La première étape est de construire un morphisme $\rho : D(X) \to D(X_f)$. Ce sera fait à l'aide du lemme suivant pour $X = \mathbb{A}^n$ et à l'aide du lemme 1.4.7 dans le cas général.

Lemme 1.4.5. Soit $P \in D_p(\mathbb{A}^n)$, et $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$. Il existe un unique opérateur $Q \in D_p(\mathbb{A}^n_f)$ tel que le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd} k[x_1, \ldots, x_n] \arrow[r, "P"] \arrow[d] & k[x_1, \ldots, x_n] \arrow[d] \\ k[x_1, \ldots, x_n]_f \arrow[r, "Q"] & k[x_1, \ldots, x_n]_f \end{tikzcd}$$

Les flèches verticales désignent l'application naturelle $g \mapsto g/1$.

DÉMONSTRATION. Les dérivées partielles formelles ∂_i s'étendent uniquement à des dérivations du corps des fonctions rationnelles $k(x_1, \ldots, x_n)$. Cela résulte de la règle de Leibniz qui force les ∂_i à vérifier la règle du quotient

$$\partial_i\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{q\partial_i(p) - p\partial_i(q)}{q^2}$$

pour $p, q \in k[x_1, \ldots, x_n]$.

En particulier, on a

$$\partial_i\left(\frac{g}{f^m}\right) = \frac{\partial_i(g)f - mg\partial_i(f)}{f^{m+1}}.$$

Il suit que P s'étend uniquement à un opérateur différentiel de $k(x_1, \ldots, x_n)$ qui applique $k[x_1 \ldots, x_n]_f$ dans lui-même. Par la propriété universelle de la localisation, l'extension de P induit un unique endomorphisme Q de $k[x_1, \ldots, x_n]_f$ qui fait commuter le diagramme de l'énoncé. Il reste à montrer que Q est un opérateur différentiel d'ordre p, ce qu'on peut faire avec le même argument qu'au lemme 1.4.1. $\square$

Lemme 1.4.6. Soit $P \in D_p(X_f)$ tel que $P(g/1) = 0$ pour tout g dans l'image de $R(X)$ dans $R(X_f)$. Alors $P = 0$.

DÉMONSTRATION. D'abord si $f \in R(X)$ est nilpotent, alors $R(X_f) = 0$ et il n'y a rien à prouver. Sinon, on procède par récurrence sur l'ordre de P. Si $p = 0$, le résultat est clair alors supposons que $p > 0$. Pour n'importe quel $g \in R(X)$, on a dans $D(X_f)$,

$$[P, f](g) = P(fg) - fP(g) = 0 - 0.$$

Comme $[P, f]$ est d'ordre $p - 1$, il suit de l'hypothèse de récurrence que $[P, f] = 0$. On conclut que P commute avec f.

Pour chaque $h \in R(X_f)$, on peut trouver des entiers i et j tels que $f^i h = p$ et $f^j P(h) = q$ où p et q sont dans l'image de $R(X)$. On a alors

$$f^i P(h) = P(f^i h) = P(p) = 0,$$

et donc

$$\frac{f^i}{1}\frac{q}{f^j} = \frac{0}{1}.$$

Il suit que pour un entier k, on a $f^k q = 0$ dans $R(X)$. Comme f n'est pas nilpotent, on conclut $P(h) = 0$ pour tout h, et donc $P = 0$. $\square$

Lemme 1.4.7. Soit $P \in D_p(X)$, et $f \in R(X)$. Alors il existe un unique opérateur $Q \in D_p(X_f)$ tel que le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} R(X) & \xrightarrow{P} & R(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ R(X)_f & \xrightarrow{Q} & R(X)_f \end{array}$$

Les flèches verticales désignent l'application naturelle $g \mapsto g/1$.

DÉMONSTRATION. En supposant que X est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{A}^n$, on peut choisir un polynôme $\tilde{f}$ tel que $\nu(\tilde{f}) = f$, où ν est la surjection naturelle

$$\nu : k[x_1, \ldots, x_n] \to k[x_1, \ldots, x_n]/I(X) = R(X).$$

On a alors $\mathbb{A}^n_{\tilde{f}} \cap X = X_f$. Il suit de la proposition 1.4.3 qu'il existe un opérateur $\tilde{P} \in W_p(n)$ tel que $\varphi(\tilde{P}) = P$ et $\tilde{P}(I) \subset I$. Par le lemme 1.4.5, $\tilde{P}$ s'étend à un opérateur d'ordre p de $\mathbb{A}^n_{\tilde{f}}$, disons $\tilde{Q}$.

Nous allons montrer que $\tilde{Q}$ induit un endomorphisme Q de $k[x_1, \ldots, x_n]_{\tilde{f}}/I(X)_{\tilde{f}} = R(X)_f$. Il suffit pour cela de montrer que $\tilde{Q}(I(X)_{\tilde{f}}) \subset I(X)_{\tilde{f}}$, ce qu'on fait par récurrence sur l'ordre p de $\tilde{Q}$. Si $p = 0$, l'affirmation est claire ; alors supposons que $p > 0$. L'hypothèse de récurrence donne pour tout $g \in I(X)$,

$$\left[\tilde{Q}, \frac{1}{\tilde{f}}\right]\left(\frac{g}{\tilde{f}^m}\right) = \tilde{Q}\left(\frac{g}{\tilde{f}^{m+1}}\right) - \frac{1}{\tilde{f}} \cdot \tilde{Q}\left(\frac{g}{\tilde{f}^m}\right) \in I(X)_{\tilde{f}}.$$

On peut alors procéder à une (autre) récurrence sur m pour montrer que $\tilde{Q}(g/\tilde{f}^m) \in I(X)_{\tilde{f}}$ quel que soit m.

Par le même argument qu'au lemme 1.4.1, Q est un opérateur différentiel d'ordre p de $R(X)_f$. De par sa construction, Q fait commuter le diagramme. En vertu du lemme 1.4.6, Q est unique avec cette propriété. □

On conclut qu'il existe un morphisme d'algèbre filtrée $\rho : D(X) \to D(X_f)$ associant à un opérateur $P \in D_p(X)$ l'unique $Q \in D_p(X_f)$ faisant commuter le diagramme du lemme précédent.

Lemme 1.4.8. Soit f et f' dans $R(X)$ tels que X_f et $X_{f'}$ soient disjoints. Alors $D(X_{f+f'}) = D(X_f) \oplus D(X_{f'})$.

DÉMONSTRATION. Soit $\chi, \chi' \in R(X_{f+f'})$ les fonctions caractéristiques de respectivement X_f et $X_{f'}$, c'est-à-dire

$$\chi(x) = \frac{f}{f+f'}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in X_f \\ 0 & \text{si } x \in X_{f'} \end{cases}$$

$$\chi'(x) = \frac{f'}{f+f'}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in X_{f'} \\ 0 & \text{si } x \in X_f \end{cases}$$

Les fonctions χ et χ' vérifient les identités suivantes :

(i) $\chi^2 = \chi, \chi'^2 = \chi'$;

(ii) $\chi\chi' = \chi'\chi = 0$;

(iii) $\chi + \chi' = 1$.

Soit $P \in D(X_{f+f'})$, nous montrerons par récurrence sur l'ordre p de P que $[P, \chi] = [P, \chi'] = 0$. L'affirmation est claire pour $p = 0$, alors supposons que $p > 0$. Comme $[P, \chi]$ est d'ordre $p-1$, il suit de l'hypothèse de récurrence que

$$[[P, \chi], \chi'] = [P, \chi]\chi' - \chi'[P, \chi] = -\chi P\chi' - \chi' P\chi = 0.$$

En multipliant à gauche par χ, on obtient $\chi P\chi' = 0$. En multipliant plutôt par χ', on obtient $\chi' P\chi = 0$. Il suit les identités suivantes :

$$P\chi = (\chi + \chi')P\chi = \chi P\chi$$

$$\chi P = \chi P(\chi + \chi') = \chi P\chi.$$

On conclut comme désiré que $[P, \chi] = 0$, et un argument similaire donne $[P, \chi'] = 0$.

Maintenant, on a $R(X_{f+f'}) = R(X_f) \oplus R(X_{f'})$ et donc P agit sur $g \in R(X_f) \subset R(X_{f+f'})$. Comme $\chi = 1$ sur X_f, on a $P(g) = P(\chi g) = \chi P(g)$. Il suit que $P(R(X_f)) \subset R(X_f)$. Pour la même raison, on a aussi $P(R(X_{f'})) \subset R(X_{f'})$. On conclut que P induit des opérateurs différentiels P_f et $P_{f'}$ sur respectivement X_f et $X_{f'}$ tels que $P = P_f + P_{f'}$. □

Théorème 1.4.9. Soit $D(X)_f = D(X)$ la localisation de $D(X)$ comme $R(X)$-module. L'application $\rho : D(X) \to D(X_f)$ du lemme 1.4.7 induit un isomorphisme $\tilde{\rho} : D(X)_f \to D(X_f)$.

DÉMONSTRATION. On sait que $D(X_f)$ est un $R(X_f)$-module, c'est-à-dire un $R(X)_f$-module. Comme $\rho : D(X) \to D(X_f)$ est un morphisme de $R(X)$-module, la propriété universelle de la localisation donne le morphisme de $R(X)_f$-module $\tilde{\rho} : D(X)_f \to D(X_f)$ de l'énoncé. Il reste à montrer qu'il s'agit d'un isomorphisme.

Dans un premier temps, on suppose que X_f est dense dans X. Dans ce cas, l'inclusion $X_f \to X$ est un morphisme dominant et donc l'application naturelle $r : R(X) \to R(X_f)$ est injective.

On commence par montrer que $\tilde{\rho}$ est injectif. Supposons que

$$\tilde{\rho}\left(\frac{P}{f^m}\right) = \frac{\rho(P)}{f^m} = 0.$$

Par la construction de ρ, on a $r \circ P = \rho(P) \circ r$. On peut donc trouver pour n'importe quel $g \in R(X)$, un entier i tel que

$$\frac{f^i P(g)}{1} = \frac{f^i}{1}\rho(P)\left(\frac{g}{1}\right) = 0.$$

Par l'injectivité de r, il suit alors $f^i P(g) = 0$ et donc $P(g) = 0$. Comme g est arbitraire, $P = 0$ et on a l'injectivité.

Pour la surjectivité, on peut se contenter de montrer que pour chaque $P \in D(X_f)$, il existe un $i \in \mathbb{Z}_+$ tel que $(f^i P)(R(X)) \subset R(X)$. Dans ce cas, on peut voir $f^i P$ comme un opérateur sur $R(X)$ et on a

$$\tilde{\rho}\left(\frac{f^i P}{f^i}\right) = \frac{\rho(f^i P)}{f^i} = P.$$

On procède par récurrence sur p, l'ordre de P. Si $p = 0$, l'affirmation est évidente alors supposons que $p > 0$. Soit $g_1, \ldots, g_n$ des générateurs de $R(X)$ comme k-algèbre. Par l'hypothèse de récurrence, il existe $i \in \mathbb{Z}_+$ tel que $f^i[P, g_j](R(X)) \subset R(X)$ pour tout $j = 1, \ldots, n$. En particulier, on doit avoir $f^i P(1) \in R(X)$. Maintenant on montre que $f^i P(g^\alpha) \subset R(X)$ à l'aide d'une deuxième récurrence, cette fois sur $|\alpha|$. Si on suppose que pour $f^i P(g^\alpha) \subset R(X)$, alors on a

$$f^i P(g_i g^\alpha) = f^i[P, g_i](g^\alpha) + f^i g_i P(g^\alpha).$$

Il suit de l'hypothèse de récurrence sur p que $f^i[P, g_i](g^\alpha) \in R(X)$ et il suit de l'hypothèse de récurrence sur $|\alpha|$ que $f^i g_i P(g^\alpha) \in R(X)$. Ce qui termine la démonstration de la surjectivité.

Maitenant, supposons que X_f n'est pas dense dans X. Dans ce cas, il existe $f_1 \in R(X)$ tel que X_f et X_{f_1} sont disjoints, et donc $X_{f+f_1} = X_f \cup X_{f_1}$. En répétant cet argument un nombre fini de fois, on construit $f' = f_1 + \cdots + f_k$ tel que $X_{f+f'} = X_f \cup X_{f'}$ est dense dans X. La première partie de la preuve donne alors un isomorphisme $D(X)_{f+f'} \to D(X_{f+f'})$. Par le lemme 1.4.8, on obtient le résultat. $\square$

1.5. Opérateurs différentiels sur les variétés

Sans l'hypothèse que X est une variété affine, la définition des opérateurs différentiels de la section 1.1 peut donner une algèbre triviale. Par exemple, sur la droite projective, $\mathbb{CP}^1$, les seules fonctions régulières sont les fonctions constantes. On aurait donc $D(\mathbb{CP}^1) = \mathbb{C}$.

On évite cet inconvénient en définissant un faisceau d'opérateurs différentiels sur X. L'algèbre des opérateurs différentiels sur X sera alors définie comme les sections globales de ce faisceau.

On suppose pour l'instant que X est variété affine. Alors les ouverts affine $X_f = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$ forment une base $\mathfrak{B}$ de la topologie de X.

Étant donné un $R(X)$-module M, on peut lui associer un $\mathcal{O}_X$-module qu'on notera $\widetilde{M}$. Ses sections sont données sur la base $\mathfrak{B}$ par $\widetilde{M}(X_f) = M_f$ et le morphisme de restrictions pour $X_f \subset X_g$ est le morphisme canonique $M_g \to M_f$ obtenu en agrandissant la partie multiplicative servant à la localisation. Un faisceau construit de cette manière est quasi-cohérent. Il est de plus cohérent si le module M est finiment engendré. On verra la section 1.1.3 de [**EGA1**] pour plus de détails.

Définition 1.5.1. Le *faisceau des opérateurs différentiels* noté $\mathcal{D}_X$ sur une variété affine X est le $\mathcal{O}_X$-module associé au $R(X)$-module $D(X)$.

Le théorème 1.4.9 donne immédiatement le corollaire suivant.

Corollaire 1.5.2. Le faisceau $\mathcal{D}_X$ est tel que pour chaque ouvert affine $U \subset X$, on a $\mathcal{D}_X(U) = D(U)$.

Démonstration. Si $U = X_f$ pour un $f \in R(X)$, il s'agit du théorème. Sinon, soit $f \in R(X)$ tel que $X_f \subset U$. Alors on a $U_{f|_U} = X_f$, et donc

$$\mathcal{D}_U(U_{f|_U}) = D(U_{f|_U}) = D(X_f) = \mathcal{D}_X(X_f).$$

Comme les X_f forment une base de la topologie de X, les X_f tels que $X_f \subset U$ forment une base de la topologie de U. On conclut que $\mathcal{D}_X|_U$ et $\mathcal{D}_U$ sont deux faisceaux sur U égaux sur une base de la topologie. Ils sont donc égaux partout. □

On peut enfin supposer que X est une variété pas nécessairement affine. Soit $\{U_i\}_{i\in I}$ un recouvrement de X par des ouverts affines et $\mathcal{F}_i$ un faisceau sur U_i, pour chaque $i \in I$. On aimerait pouvoir recoller les faisceaux $\mathcal{F}_i$ en un faisceau $\mathcal{F}$ sur X tel que $\mathcal{F}|_{U_i} = \mathcal{F}_i$. Il nous faut pour cela des isomorphismes $\varphi_{ij} : \mathcal{F}_i(U_i \cap U_j) \to \mathcal{F}_j(U_i \cap U_j)$, pour tous les indices $i, j \in I$ qui vérifient la condition de recollement $\varphi_{jk} \circ \varphi_{ij} = \varphi_{ik}$ pour tous les indices $i, j, k \in I$.

Définition 1.5.3. Soit X une variété et $\{U_i\}$ un recouvrement de X par des ouverts affines. Le *faisceau des opérateurs différentiels* de X est le faisceau $\mathcal{D}(X)$ obtenu en recollant les faisceaux $\mathcal{D}_{U_i}$ à l'aide des isomorphismes identités

$$\varphi_{ij} : \mathcal{D}_{U_i}(U_i \cap U_j) = D(U_i \cap U_j) \xrightarrow{\text{id}} D(U_i \cap U_j) = \mathcal{D}_{U_j}(U_i \cap U_j).$$

Notre première préoccupation sera de transférer la filtration par l'ordre des opérateurs différentiels sur le faisceau $\mathcal{D}_X$.

Définition 1.5.4. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de k-algèbres. Une *filtration* de $\mathcal{F}$ est une suite $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ croissante de sous-faisceaux d'espaces vectoriels $0 \subset \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \cdots$ telle que

(i) $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{F}_i = \mathcal{F}$

(ii) $\mathcal{F}_p \cdot \mathcal{F}_q \subset F_{p+q}$ pour tout $p, q \in \mathbb{Z}_+$.

Définition 1.5.5. Soit U un ouvert dans X et $P \in \mathcal{D}_X(U)$. L'opérateur P est d'ordre p s'il existe un ouvert affine $V \subset U$ tel que $\rho_{UV}(P)$ est d'ordre p au sens de la définition 1.1.1.

On construit avec cette définition le sous-faisceau $F_p\mathcal{D}_X$ des opérateurs différentiels d'ordre p, et donc une suite croissante de sous-faisceaux d'espaces vectoriels $\{F_i\mathcal{D}_X\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$.

Proposition 1.5.6. La suite croissante de sous-faisceaux $\{F_p\mathcal{D}_X\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ est une filtration de $\mathcal{D}_X$.

DÉMONSTRATION. On se contentera de montrer que $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}_+} F_i\mathcal{D}_X = \mathcal{D}_X$, le reste étant clair.

Soit $P \in \mathcal{D}_X(U)$, on doit montrer que P est d'ordre fini. Soit $\{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement de X par des ouverts affines. Soit un entier p tel que pour tout $i \in I$, $\rho_{UU_i}(P) \in D_p(U_i)$.

Soit maintenant $V \subset U$ un ouvert affine quelconque et $Q = \rho_{UV}(P)$. Quelles que soient les fonctions $f_0, \ldots, f_1 \in R(V)$, l'opérateur

$$R = [\ldots[[Q, f_0], f_1], \ldots, f_p]$$

est nul sur $V \cap U_i$. Il suit que $R = 0$, et donc que $\rho(UV)(P)$ est d'ordre p. Comme V était arbitraire, on conclut que P est d'ordre p. □

Avec cette définition, on a $F_p\mathcal{D}_X(U) = D_p(U)$. On peut alors définir le faisceau associé gradué $\operatorname{Gr}\mathcal{D}_X$ comme

$$\operatorname{Gr}\mathcal{D}_X = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}_+} \operatorname{Gr}_i \mathcal{D}_X = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}_+} F_i\mathcal{D}_X/F_{i-1}\mathcal{D}_X$$

où l'on convient que $\mathcal{F}_{-1} = \{0\}$. Il s'agit d'un faisceau de k-algèbre grâce au produit discuté à la définition 1.1.5.

Corollaire 1.5.7. Soit X une variété.

(i) Le faisceau $\mathcal{D}(X)$ est un $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent ;

(ii) Le faisceau $\mathcal{D}_p(X)$ est un $\mathcal{O}_X$-module cohérent, pour tout $p \in \mathbb{Z}_+$;

(iii) Le faisceau $\operatorname{Gr}_p \mathcal{D}(X)$ est un $\mathcal{O}_X$-module cohérent, pour tout $p \in \mathbb{Z}_+$.

DÉMONSTRATION. Pour (i), il suffit de couvrir X par des ouverts affines $\{U_i\}$ et de noter que $\mathcal{D}_X|_{U_i}$ est le $\mathcal{O}_U$-module associé au $R(U)$-module $D(U)$.

Maintenant, (ii) suit du corollaire 1.4.4 et (iii) suit de (ii). □

1.6. Variétés non singulières

Nous considérerons à l'avenir des variétés non singulières. Cette hypothèse garantit aux opérateurs différentiels des propriétés commodes qui ne sont pas vérifiées en général. Par exemple, l'anneau des opérateurs différentiels $D(X)$ pour X le cône cubique c'est-à-dire la variété affine des zéros de $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ dans $\mathbb{C}^3$ n'est pas noethérien [**BGG**]. Nous verrons cependant au corollaire 1.7.7 que $D(X)$ est noethérien lorsque X est non singulière. Sous cette hypothèse, on peut aussi donner une description plus commode de $\mathcal{D}(X)$ (corollaire 1.7.5) et de $\operatorname{Gr}\mathcal{D}(X)$ (théorème 1.7.4). Étant donné que les variétés de drapeaux sont non singulières, on pourra utiliser ces résultats dans les chapitres suivants. Dans cette section, on donne quelques définitions et propriétés des variétés non singulières. Comme il s'agit essentiellement de fixer les notations, la plupart des démonstrations sont omises.

Définition 1.6.1. Soit X une variété. Un point $x \in X$ est *non singulier* si $\mathcal{O}_{X,x}$ est un anneau régulier local. Une variété X est *non singulière* si tous ses points le sont.

Un anneau *régulier local* est un anneau local noethérien A avec idéal maximal m tel que la dimension de m/m^2 comme A/m-espace vectoriel est la dimension de Krull de A.

1.6.1. Faisceau des différentielles et faisceau tangent

On rappelle maintenant quelques définitions sur le faisceau des différentielles et le faisceau tangent. On regardera la section §4.4.16 de [**EGA4**] ou encore la section §II.8 de [**Ha**] pour plus de détails.

Définition 1.6.2. Soit A une k-algèbre. Le *module de différentielles de A* est un module Ω_A et une dérivation $d : A \to \Omega_A$ vérifiant la propriété universelle suivante : pour chaque dérivation $d' : A \to M$ dans un A-module M, il existe un unique morphisme de A-module $\varphi : \Omega_A \to M$ tel que le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "d"] \arrow[dr, "d'"'] & \Omega_A \arrow[d, "\varphi"] \\ & M \end{tikzcd}$$

Le *faisceau des différentielles*, noté Ω_X, est un faisceau tel que sur chaque ouvert affine $U \subset X$, on a $\Omega_X|_U = \widetilde{\Omega}_{R(U)}$. On peut définir ce faisceau sur toute variété, mais lorsque X est non singulière, on a le théorème suivant.

Théorème 1.6.3. Une variété X est non singulière de dimension n si et seulement si Ω_X est un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang n.

DÉMONSTRATION. Théorème II.8.15 de [**Ha**]. □

Il existe une équivalence de catégories entre les faisceaux localement libres de rang fini et les fibrés vectoriels sur une variété (§III.2 de [**Mu**]). On commence par rappeler la définition des fibrés vectoriels.

Définition 1.6.4. Soit X une variété. Un *fibré vectoriel* de *rang n* sur X est une variété Y et un morphisme de variétés $p : Y \mapsto X$ appelé la *projection* vérifiant les propriétés suivantes.

(i) Pour chaque point $x \in X$, la fibre $p^{-1}(x)$ est un k-espace vectoriel de dimension de n.

(ii) La variété X est munie d'un recouvrement ouvert $\{U_i\}_{i \in I}$ appelé un *recouvrement trivialisant* tel que pour chaque i, il existe un isomorphisme $\varphi_i : p^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{A}^n$ qui commute avec la projection.

(iii) Pour toute intersection non vide $U_i \cap U_j$ avec $i, j \in I$, il existe un morphisme de variétés $M_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathrm{GL}(k^n)$ tel que l'application $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ est donnée par

$$\begin{aligned} \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : (U_i \cap U_j) \times k^n &\to (U_i \cap U_j) \times k^n \\ (x, y) &\mapsto (x, M_{ij}(x)y) \end{aligned}$$

Il suit du théorème précédent que si X est une variété non singulière, alors le faisceau des différentielles est localement libre. Le fibré vectoriel correspondant est appelé le *fibré cotangent*, noté $\pi : T^*X \to X$. Il s'agit d'une variété non singulière de dimension $2 \dim X$.

La fibre au point $x \in X$, notée $T_x^* X$ est l'espace cotangent au point x. Si on note m_x l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$, alors $T_x^* X$ est isomorphe au k-espace m_x/m_x^2.

Étant donné $f \in \mathcal{O}_{X,x}$, on a $f - f(x) \in m_x$. La *différentielle* de f à x est l'image de $f - f(x)$ dans $T_x^* X$, on la note df.

Définition 1.6.5. Le *faisceau tangent*, noté $\mathcal{T}_X$ est défini comme $\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X, \mathcal{O}_X)$, c'est-à-dire comme le dual du faisceau des différentielles.

Si X est non singulière de dimension n, alors $\mathcal{T}_X$ est aussi un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang n. Pour n'importe quel ouvert affine $U \subset X$, le faisceau $\mathcal{T}_X|_U$ est le faisceau associé au $R(U)$ module $(\Omega_U)^*$. On vérifie facilement en utilisant la propriété universelle de Ω_A que $(\Omega_A)^*$ est canoniquement isomorphe à l'algèbre des dérivations Dér A. Ainsi, sur chaque ouvert affine U, on a $\mathcal{T}_X|_U = \widetilde{\text{Dér}\, R(U)}$.

On obtient en particulier une version de la proposition 1.1.8 pour les faisceaux.

Corollaire 1.6.6. Soit X une variété algébrique non singulière. Alors

(i) $F_0\mathcal{D}_X = \mathcal{O}_X$;

(ii) $F_1\mathcal{D}_X = \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{T}_x$.

Comme avec le faisceau des différentielles, on peut utiliser le faisceau tangent pour définir un fibré vectoriel sur X. Ce fibré est appelé le *fibré tangent*, noté $p : TX \to X$. Il s'agit d'une variété non singulière de dimension $2 \dim X$. La fibre au point $x \in X$, notée $T_x X$ est l'espace tangent au point x. Si on note m_x l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$, alors $T_x X$ est isomorphe au k-espace $(m_x/m_x^2)^*$. Cet espace est aussi l'espace des *dérivations à* x, c'est-à-dire des applications linéaires $D : \mathcal{O}_{X,x} \to k$ vérifiant $D(fg) = f(x)D(g) + g(x)D(f)$. Une telle dérivation s'annule sur m_x^2 et défini donc une application de $(m_x/m_x^2)^*$. Inversement, si $\varphi \in (m_x/m_x^2)^*$, alors on peut vérifier que $f \mapsto \varphi(df)$ est une dérivation à x.

Une dérivation $D \in \text{Dér}(R(X))$ définit une dérivation à x pour tout $x \in X$ et donc application linéaire $T_x^* X \to k$. Si $\omega = df \in T_x^X$ pour $f : \mathcal{O}_{X,x} \to k$, cette application est donnée par $(x, \omega) \mapsto D(f)(x)$

1.6.2. Système de coordonnées locales

Proposition 1.6.7. Soit X une variété non singulière de dimension n. Pour chaque $x \in X$, il existe un voisinage affine U de x, des fonctions régulières $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{O}_X(U)$ et des dérivations $\partial_1, \ldots, \partial_n \in \mathcal{T}_X(U)$ vérifiant pour $1 \leq i, j \leq n$

(i) $[\partial_i, \partial_j] = 0$;

(ii) $\partial_i(x_j) = \delta_{ij}$;

(iii) $\mathcal{T}_X(U) = \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_X(U)\partial_i$.

(iv) $x_1, \ldots, x_n$ génèrent l'idéal maximal $m_x \subset \mathcal{O}_{X,x}$.

Démonstration. Comme $\mathcal{O}_{X,x}$ est régulier et local, l'idéal m_x est généré par n fonctions $x_1, \ldots, x_n \in m_x$. Alors $dx_1, \ldots, dx_n$ est une base du $\mathcal{O}_{X,x}$-module $\Omega_{X,x}$ puisqu'il s'agit du k-espace vectoriel m_x/m_x^2. On peut donc choisir U où $dx_1, \ldots, dx_n$ génèrent $\Omega_X(U)$ comme $\mathcal{O}_X(U)$-module libre. On a alors la base duale $\partial_i, \ldots, \partial_n \in \mathcal{T}_X(U)$ qui satisfait $\partial_i(x_j) = \delta_{ij}$. Enfin, il faut montrer que les ∂_i commutent entre eux. On peut écrire $[\partial_i, \partial_j] = \sum_{k=1}^n g_{ij}^k \partial_k$. On a alors $\sum_{k=1}^n g_{ij}^k \partial_k(x_l) = g_{ij}^l$ et donc

$$g_{ij}^k = [\partial_i, \partial_j](x_k) = \partial_i \partial_j(x_k) - \partial_j \partial_i(x_k) = 0.$$

Ce qui implique $[\partial_i, \partial_j] = 0$. On regardera dans l'annexe A.5 de [**HTT**] pour plus de détails. □

Définition 1.6.8. On appelle un ensemble de $x_1, \ldots, x_n, \partial_1 \ldots, \partial_n$ comme dans la proposition un système de *coordonnées locales*.

Remarquons que ces coordonnées locales ne sont pas des coordonnées locales au sens de la géométrie différentielle : l'application $U \to \mathbb{A}^n$ obtenue des coordonnées locales par $x \mapsto (x_1(x), \ldots, x_n(x))$ n'est bien sûr pas un isomorphisme de U sur $\mathbb{A}^n$. Cependant, cette application est un morphisme *étale* (théorème III.6.1 de [**Mu**]). Un tel morphisme induit des isomorphismes des espaces tangents, ce qui nous sera suffisant.

1.7. Fibré cotangent

Dans cette section, on démontrera que si X est une variété non singulière, alors l'associé gradué $\text{Gr}\,\mathcal{D}_X$ est isomorphe à $\pi_* \mathcal{O}_{T^*X}$. Ce résultat nous sera utile étant donné que la cohomologie de ce dernier faisceau est connue. Nous suivons essentiellement la démonstration de [**Mi**].

Soit X une variété non singulière et $U \subset X$ un ouvert affine. On peut supposer que U est assez petit pour admettre un système de coordonnées locales $x_1, \ldots, x_n, \partial_1, \ldots, \partial_n$.

Soit $P \in D_p(U)$, alors pour chaque entier q tel que $1 \leq q \leq p$, on définit un morphisme

$$\begin{aligned} \sigma_q(P) : R(U) &\to D_{p-q}(U) \\ f &\mapsto \frac{1}{q!} \cdot \underbrace{[[\ldots[[P, f]f], \ldots, f], f]}_{q \text{ crochets}}. \end{aligned}$$

Lemme 1.7.1. Soit $P \in D_p(U)$ où $p > 0$. Alors $\sigma_p(P)$ est une dérivation de $R(U)$.

DÉMONSTRATION. On démontre par récurrence que pour $q = 1, \ldots, p$, l'application composée

$$R(U) \xrightarrow{\sigma_q(P)} D_{p-q}(U) \xrightarrow{\nu} \mathrm{Gr}_{p-q}\, D(U),$$

où ν est la surjection sur le quotient, est un élément de $\mathrm{Dér}(R(U), \mathrm{Gr}_{p-q}\, D(U))$. Dans le cas de $q = p$, la surjection $\nu : D_0(U) \to \mathrm{Gr}_0\, D(U)$ n'est que l'identité. On pourra donc conclure que $\sigma_p(P)$ est une dérivation de $\mathrm{Gr}_0\, D(U) \simeq R(U)$.

D'abord si $q = 1$, on a l'identité

$$\sigma_1(P)(fg) = f\sigma_1(P)(g) + g\sigma_1(P)(f) + [[P, g], f].$$

Le dernier terme, $[[P, g], f]$, est un opérateurs différentiel d'ordre $p - 2$. Il est donc nul dans $\mathrm{Gr}_{p-1}\, D(U)$. Il suit que l'identité de Leibniz est vérifiée dans $\mathrm{Gr}_{p-1}\, D(U)$ et donc on a comme désiré que $\nu \circ \sigma_1(P) \in \mathrm{Dér}(R(U), \mathrm{Gr}_{p-1}\, D(U))$.

Si $q > 1$, alors on sait par l'hypothèse de récurrence que

$$\nu \circ \sigma_{q-1}(P) \in \mathrm{Dér}(R(U), \mathrm{Gr}_{p-q+1}\, D(U)).$$

Il existe donc un $Q \in D_{p-q}(U)$ tel que

$$\sigma_{q-1}(P)(fg) = f\sigma_{q-1}(P)(g) + g\sigma_{q-1}(P)(f) + Q.$$

Pour montrer que $\sigma_q(P)$ vérifie l'identité de Leibniz, on considère la différence

$$\begin{aligned}
&\sigma_q(P)(fg) - (f\sigma_q(P)(g) - g\sigma_q(P)(f)) \\
&\qquad = \frac{1}{q}[\sigma_{q-1}(P)(fg), fg] - f\frac{1}{q}[\sigma_{q-1}(P)(g), g] - g\frac{1}{q}[\sigma_{q-1}(P)(f), f] \\
&\qquad = \frac{1}{q}[\sigma_{q-1}(P)(fg) - \sigma_{q-1}(P)(g) - \sigma_{q-1}(P)(f), fg] \\
&\qquad = \frac{1}{q}[Q, fg].
\end{aligned}$$

Le dernier terme, $\frac{1}{q}[Q, fg]$, est un opérateur différentiel d'ordre $p-q-1$, il est donc nul dans $\mathrm{Gr}_{p-q}\, D(U)$. Il suit que l'identité de Leibniz est vérifiée dans Gr_{p-q} et donc on a comme désiré que $\nu \circ \sigma_q(P) \in \mathrm{Dér}(R(U), \mathrm{Gr}_{p-q}\, D(U))$. □

Supposons que $P \in D_p(U)$. Comme $\sigma_p(P)$ est une dérivation de $R(U)$, elle définit une application linéaire $\sigma'_p(P) : T^*U \to k$. Dans le système de coordonnées locales, si on dit que $(x, \xi_1, \ldots, \xi_n) \mapsto (x, \sum \xi_i dx_i(x))$ est un isomorphisme $U \times k^n \to T^*U$, alors cette application s'écrit

$$(x, \xi_1, \ldots, \xi_n) \mapsto \sigma_p(P)\left(\sum \xi_i x_i\right)(x).$$

Il s'agit d'une fonction régulière sur $U \times k^n$ et on conclut que $\sigma'_p(P)$ est une fonction régulière sur T^*U. Sur une fibre $T^*_x X$, il s'agit en fait d'un polynôme homogène de degré p dans les ξ_i.

On notera $\pi_*\mathcal{O}_{T^*X}$ l'image directe de $\mathcal{O}_{T^*X}$ par $\pi : T^*X \to X$. Sur les fibres $T^*_x X$, les fonctions régulières sont des polynômes. La graduation obtenues sur les fibres par les polynômes homogènes passe à $\pi_*\mathcal{O}_{T^*X}$ qui devient un faisceau gradué.

En utilisant les applications σ'_p, on définit une famille de morphismes de faisceaux $F_p\mathcal{D}_X \to \pi_*\mathcal{O}_{T^*X}$. On a noté que $\sigma_p(P)$ est nulle si P est d'ordre $p-1$, il suit donc que ce morphisme se factorise en un morphisme $\mathrm{Gr}_p\, \mathcal{D}_X \to \pi_*\mathcal{O}_{T^*X}$. Finalement, on peut regrouper ces morphismes pour en obtenir un $\sigma : \mathrm{Gr}\, \mathcal{D}_X \to \pi_*\mathcal{O}_{T^*X}$.

Nous montrerons au théorème 1.7.4 que σ est un isomorphisme. Nous aurons d'abord besoin de deux lemmes.

Lemme 1.7.2. Soit $U \subset X$ un ouvert , $P \in F_p\mathcal{D}_X(U)$ et $Q \in F_q\mathcal{D}_X(U)$. Alors

$$\sigma_{p+q}(PQ) = \sigma_p(P)\sigma_q(Q).$$

DÉMONSTRATION. Avec un argument de récurrence qui n'est pas sans rappeler le théorème du binôme, on peut montrer que

$$\sigma_m(PQ) = \sum_{i=0}^{m} \sigma_i(P)\sigma_{m-i}(Q).$$

On a donc

$$\sigma_{p+q}(PQ)(f) = \sum_{i=0}^{p+q} \sigma_i(P)\sigma_{p+q-i}(Q).$$

Or, $\sigma_i(P)$ est nul pour $i = p+1, \ldots, p+q$ et $\sigma_{p+q-i}(Q)$ est nul pour $i = 0, \ldots, p-1$. On conclut que le seul terme non nul est celui où $i = p$ et donc

$$\sigma_{p+q}(PQ) = \sigma_p(P)\sigma_q(Q).$$

□

Il suit que σ est un morphisme de $\mathcal{O}_X$-algèbres graduées.

Lemme 1.7.3. Soit $P \in F_p\mathcal{D}_X(U)$. Alors $\sigma_p(P) = 0$ si et seulement si P est d'ordre $p-1$.

DÉMONSTRATION. Il est clair que si P est d'ordre $p-1$, alors $\sigma_p(P) = 0$. On démontre la réciproque. Soit $f, g \in \mathcal{O}_X(U)$ et $\lambda \in k$. On peut vérifier par récurrence l'identité

$$\begin{aligned}\sigma_m(P)(f+\lambda g) &= \sum_{i=0}^{m} \lambda^i \sigma_i(\sigma_{m-i}(P)(f))(g) \\ &= \sum_{i=0}^{m} \lambda^i [\ldots[[\ldots[P, \underbrace{f]\ldots, f]}_{m-i \text{ fois } f}, \underbrace{g]\ldots, g]}_{i \text{ fois } g}\end{aligned}$$

Maintenant on procède par récurrence sur l'ordre de p. L'affirmation est claire si $p = 0$, alors on peut supposer que $p > 0$. Si on suppose que $\sigma_p(P) = 0$, on a en particulier que $\sigma_m(P)(f + \lambda g)$ est nul pour $\lambda \in k$ arbitraire. Mais dans ce cas, il suit de l'identité que $\sigma_i(\sigma_{p-i}(P)(f))(g) = 0$ pour tout i. En particulier, quel que soit $f \in \mathcal{O}_X(U)$,

$$\sigma_{p-1}([P, f])(g) = p\sigma_{p-1}(\sigma_1(P)(f))(g) = 0.$$

Par l'hypothèse de récurrence, on conclut que $[P, f]$ est d'ordre $p-2$ et donc que P est d'ordre $p-1$. □

Théorème 1.7.4. L'application $\sigma : \mathrm{Gr}\, D \to \pi_*\mathcal{O}_{T^*X}$ est un isomorphisme de $\mathcal{O}_X$-algèbres graduées.

DÉMONSTRATION. Il suit du lemme 1.7.2 que σ est un morphisme de faisceaux gradués et du lemme 1.7.3 que σ est injectif. Il reste à montrer la surjectivité. Étant donné que $\pi_*\mathcal{O}_{T^*X}$ est généré par les composantes homogènes de degré 0 et 1, on peut se contenter de montrer que σ_0 et σ_1 sont surjectifs.

Avec le corollaire 1.6.6, on a $\mathrm{Gr}_0\,\mathcal{D}_X = \mathcal{O}_X$ et σ n'est alors que l'identité sur $\mathrm{Gr}_0\,\mathcal{D}_X$.

Encore par 1.6.6, $\mathrm{Gr}_1\,\mathcal{D}_X = \mathcal{T}_X$. D'autre part, $\pi_*\mathcal{O}_{T^*X}$ s'identifie avec l'algèbre symétrique $S\mathcal{T}_X$ dont la première composante homogène est aussi $\mathcal{T}_X$. Pour $x \in X$ et U un voisinage ouvert affine, si $P \in \mathcal{T}_X(U) = \mathrm{Dér}(R(U))$, alors pour $f \in R(X)$,

$$\sigma_1'(P)(x, df) = [P, f](x) = P(f)(x).$$

On conclut que $\sigma_1'(P)$ est un isomorphisme sur la première composante homogène de $\pi_*\mathcal{O}_{T^*X}$. □

Corollaire 1.7.5. Soit X une variété non singulière et U un ouvert affine admettant un système de coordonnées locales $x_1, \ldots, x_n, \partial_1, \ldots, \partial_n$.

(i) $F_p\mathcal{D}_X(U)$ est généré comme $\mathcal{O}_X(U)$-module libre par $\{\partial^\alpha : |\alpha| \leq p\}$

(ii) $\mathcal{D}_X(U)$ est généré comme $\mathcal{O}_X(U)$-module libre par $\{\partial^\alpha : |\alpha| \in \mathbb{Z}_+^n\}$

En particulier, $\mathcal{D}_X$ est localement libre.

DÉMONSTRATION. Soit $\xi_i = \sigma(\partial_i)$. Alors $\pi_*\mathcal{O}_{T^*X}(U)$ est un $\mathcal{O}_X(U)$-module libre généré par $\{\xi^\alpha : |\alpha| \in \mathbb{Z}_+^n\}$. Le résultat suit. □

Corollaire 1.7.6. Soit X une variété affine non singulière. Alors $\mathrm{Gr}\,D(X)$ est finiment engendré.

DÉMONSTRATION. Comme π est un morphisme affine,

$$\mathrm{Gr}\,D(X) = \Gamma(X, \mathrm{Gr}\,\mathcal{D}_X) = \Gamma(X, \pi_*\mathcal{O}_{T^*X}) = \Gamma(T^*X, \mathcal{O}_{T^*X}) = R(T^*X)$$

qui est finiment engendré. □

Corollaire 1.7.7. Soit X une variété affine non singulière. Alors $D(X)$ est une anneau noethérien.

DÉMONSTRATION. Le corollaire précédent établit que $D(X)$ admet une bonne filtration. On n'a plus qu'à utiliser le même argument qu'à la proposition 1.3.5 □

Chapitre 2

GÉNÉRALITÉS SUR LES GROUPES ALGÉBRIQUES

Dans ce chapitre, on énonce les résultats généraux dont nous aurons besoin pour discuter de la cohomologie du faisceau des opérateurs différentiels sur une variété de drapeaux. Les preuves seront omises mais on donne des références précises pour tous les résultats importants. On donne également ici des références plus générales pour chacune des sections.

Les deux premières sections portent sur l'algèbre homologique, notamment le complexe de Koszul [**Se**, IV.A] et les suites spectrales d'un double complexe [**BT**, 14] [**Mc**, 2.4].

La section 2.3 définit la cohomologie des faisceaux avec les foncteurs dérivés à droite [**Ha**, III.1]. On énonce aussi quelques résultats utiles, notamment le théorème de Grauert–Riemenschneider. On définit aussi la cohomologie de Čech [**Ha**, III.4].

La section 2.4 porte sur les systèmes de racines abstraits [**H1**, 9,10,13] qui serviront ensuite à décrire la structure des groupes algébriques.

Les sections 2.5, 2.6 et 2.7 discutent directement des groupes algébriques [**B2**,**H2**,**Sp**]. On décrit en particulier leur algèbre de Lie, leurs représentations et les sous-groupes paraboliques. On définit aussi les variétés de drapeaux qui seront considérées au chapitre suivant.

La section 2.8 discute de certains fibrés vectoriels sur les variétés de drapeaux [**J**, I.5] [**AC**]. On énonce en particulier le théorème de Borel–Weil–Bott.

2.1. Complexe de Koszul

Soit $x_1, \ldots, x_r$ des éléments d'un anneau commutatif A. On considère le A-module libre A^r généré par $e_1, \ldots, e_r$. Dans ce cas la p-ième puissance extérieure $\bigwedge^p A^r$ est un

A-module libre généré par

$$\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} : 1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq r\}.$$

Pour tout $p > 0$, soit l'application A-linéaire

$$d_p : \bigwedge^p A^r \to \bigwedge^{p-1} A^r$$

donnée sur les générateurs de $\bigwedge^p A^r$ par

$$d_p(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}) = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} x_{i_k} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge \hat{e}_{i_k} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}.$$

Ici, $\hat{e}_{i_k}$ désigne l'omission du terme e_{i_k} dans le produit extérieur.

Les applications d vérifient $d \circ d = 0$, c'est-à-dire que nous avons construit un complexe

$$\cdots \longrightarrow \bigwedge^p A^r \xrightarrow{d_p} \bigwedge^{p-1} A^r \longrightarrow \cdots \longrightarrow \bigwedge^2 A^r \longrightarrow A^r \longrightarrow A \longrightarrow 0.$$

Ce complexe s'appelle le *complexe de Koszul*, noté $K_\bullet(x_1, \ldots, x_r)$.

Si M est un A-module, on construit un complexe similaire en prenant le produit tensoriel de chaque terme $\bigwedge^p A^r$ avec M pour obtenir $\bigwedge^p A^r \otimes_A M$. On définit alors pour $p > 0$ l'application A-linéaire

$$d_p : \bigwedge^p A^r \otimes M \to \bigwedge^{p-1} A^r \otimes M$$

donnée sur les générateurs de $\bigwedge^p A^r$ par

$$d_p(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} \otimes m) = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge \hat{e}_{i_k} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} \otimes x_{i_k} \cdot m.$$

On a encore $d \circ d = 0$, et donc nous avons un autre complexe

$$\cdots \longrightarrow \bigwedge^p A^r \otimes M \xrightarrow{d_p} \bigwedge^{p-1} A^r \otimes M \longrightarrow \cdots \longrightarrow A^r \otimes M \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

On l'appelle aussi le *complexe de Koszul*, noté $K_\bullet(x_1, \ldots, x_r; M)$.

Le théorème suivant décrit les modules d'homologie

$$H_p(K(x_1, \ldots, x_r; M)) = \frac{\ker d_p : \bigwedge^p A^r \otimes M \to \bigwedge^{p-1} A^r \otimes M}{\operatorname{im} d_{p+1} : \bigwedge^{p+1} A^r \otimes M \to \bigwedge^p A^r \otimes M}.$$

Proposition 2.1.1. Si x_i n'est pas un diviseur de zéro dans $M/(0, x_1, \ldots, x_{i-1})M$ pour tout $i = 1, \ldots, r$, alors

(i) $H_0(K(x_1, \ldots, x_r; M)) = M/(x_1, \ldots, x_r)M$;

(ii) $H_p(K(x_1, \ldots, x_r; M)) = 0$, pour $p > 0$.

DÉMONSTRATION. Proposition IV.A.2 dans [**Se**]. □

Nous utiliserons surtout le complexe de Koszul dans le cas particulier suivant. Soit une suite exacte d'espaces vectoriels de dimension finie

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow V \longrightarrow W \longrightarrow 0.$$

Soit SU et SV les algèbres symétriques de U et V respectivement. L'application $U \to V$ permet de voir SV comme un SU-module. On fixe une base $\{u_1, \ldots, u_r\}$ de U et alors les $u_i \in U$ s'identifient avec des éléments homogènes de degré 1 dans SU.

Avec les notations du paragraphe précédent, on construit le complexe de Koszul $K_\bullet(u_1, \ldots, u_r; SV)$ avec SU comme anneau et SV comme SU-module. Le p-ième terme de ce complexe est

$$\bigwedge^p (SU)^r \otimes_{SU} SV \simeq \bigwedge^p U \otimes_{SU} SV.$$

Maintenant on arrive à la particularité importante de cet exemple : la graduation de SV nous permet de graduer le complexe de Koszul. On définit la graduation en posant que les éléments de $\bigwedge^p U \otimes S^q V$ sont homogènes de degré $p + q$.

Sur ces éléments, la différentielle est donnée par

$$d_p^q(u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_p} \otimes s) = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} u_{i_1} \wedge \cdots \wedge \hat{u}_{i_k} \wedge \cdots u_{i_p} \otimes u_{i_k} \cdot s.$$

Étant donné que s est homogène de degré q et que chaque u_i est homogène de degré 1, on a que $u_{i_k} \cdot s$ est homogène de degré $q + 1$. Il s'agit donc d'une application

$$d_p^q : \bigwedge^p U \otimes S^q V \to \bigwedge^{p-1} U \otimes S^{q+1} V.$$

Il suit que le complexe de Koszul se sépare en complexes $K_\bullet^q(u_1, \ldots, u_r; SV)$ donnés pour $q \geq 0$ par

$$\cdots \longrightarrow \bigwedge^p U \otimes S^{q-p} V \longrightarrow \bigwedge^{p-1} U \otimes S^{q-p+1} V \longrightarrow \cdots$$
$$\cdots \longrightarrow \bigwedge^2 U \otimes S^{q-2} V \longrightarrow U \otimes S^{q-1} V \longrightarrow S^q V \longrightarrow 0.$$

Enfin, les hypothèses de la proposition 2.1.1 sont vérifiées de telle sorte que le seul module d'homologie non nul est

$$H_0(K(u_1, \ldots, u_r; SV)) \simeq SW.$$

En fait, on a plus précisément que pour chaque complexe $K^q_\bullet(u_1, \ldots, u_r; SV)$, le seul module d'homologie non nul est

$$H_0(K^q(u_1, \ldots, u_r; SV)) \simeq S^q W.$$

2.2. Suites spectrales d'un double complexe

Définition 2.2.1. Un *double complexe* est une famille de groupes abéliens $\{C^{p,q}\}_{p,q\in\mathbb{Z}}$ munie pour chaque paire d'entiers (p, q) de deux morphismes

$$d^I : C^{p,q} \to C^{p+1,q}$$
$$d^{II} : C^{p,q} \to C^{p,q+1}$$

vérifiant

(i) $d^I \circ d^I = 0$;

(ii) $d^{II} \circ d^{II} = 0$;

(iii) $d^I \circ d^{II} + d^{II} \circ d^I = 0$.

On illustre un double complexe à l'aide d'un diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\cdots \arrow[r] & C^{p,q+2} \arrow[u] \arrow[r] & C^{p+1,q+2} \arrow[u] \arrow[r] & C^{p+2,q+2} \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C^{p,q+1} \arrow[u] \arrow[r] & C^{p+1,q+1} \arrow[u, "d^{II}"] \arrow[r, "d^I"] & C^{p+2,q+1} \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C^{p,q} \arrow[u] \arrow[r] & C^{p+1,q} \arrow[u] \arrow[r] & C^{p+2,q} \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \\
 & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Un tel diagramme n'est pas commutatif ; on a plutôt la propriété (iii) de la définition qu'on appelle l'*anticommutativité*. Dans le cas où un tel diagramme commute, c'est-à-dire où $d^I \circ d^{II} = d^{II} \circ d^I$, on peut se ramener à un double complexe en remplaçant la différentielle d^{II} par $(-1)^q d^{II}$.

Étant donné qu'on a deux différentielles, on peut prendre la cohomologie de deux façons : par rapport à d^I et par rapport à d^{II}. Commençons par la cohomologie par rapport à d^{II}, c'est-à-dire qu'on considère les groupes $H^q_{II}(C^p)$ donnés par

$$H^q_{II}(C^p) = \frac{\ker d^{II} : C^{p,q} \to C^{p,q+1}}{\operatorname{im} d^{II} : C^{p,q-1} \to C^{p,q}}.$$

L'autre différentielle, d^I, induit des morphismes $\bar{d}^I$ sur les groupes de cohomologie :

$$\bar{d}^I : H^q_{II}(C^p) \to H^q_{II}(C^{p+1}).$$

Les morphismes induits $\bar{d}^I$ vérifient aussi $\bar{d}^I \circ \bar{d}^I = 0$. On peut donc encore prendre la cohomologie, cette fois par rapport à $\bar{d}^I$. On obtient les groupes $H^q_I H^p_{II}(C)$ donnés par

$$H^q_I H^p_{II}(C) = \frac{\ker \bar{d}^{II} : H^{p,q}_{II}(C) \to H^{p+1,q}_{II}(C)}{\operatorname{im} \bar{d}^I : H^{p,q-1}_{II}(C) \to H^{p,q}_{II}(C)}.$$

De façon parfaitement analogue, on aurait pu d'abord considérer la cohomologie par rapport aux morphismes d^I et ensuite la cohomologie par rapport aux morphismes $\bar{d}^{II}$ induits par d^{II}. On aurait obtenu des groupes $H^p_{II} H^q_I(C)$.

Le prochain théorème permet de lier $H^p_{II} H^q_I(C)$ et $H^q_I H^p_{II}(C)$. Nous aurons besoin d'une autre construction.

Définition 2.2.2. Étant donné le double complexe $\{C^{p,q}\}_{p,q\in\mathbb{Z}}$, on construit le *complexe total* $T^\bullet$ en posant, pour $k \in \mathbb{Z}$,

$$T^k = \bigoplus_{p+q=k} C^{p,q}.$$

La différentielle est donnée par $d = d^I + d^{II}$.

Le complexe total est un complexe puisque l'anticommutativité de d^I et de d^{II} implique $d \circ d = 0$. On peut maintenant énoncer le théorème.

Théorème 2.2.3. Soit $\{C^{p,q}\}_{p,q\in\mathbb{Z}}$ un double complexe. Il existe deux suites spectrales, ${}^I E^{\bullet,\bullet}_\bullet$ et ${}^{II} E^{\bullet,\bullet}_\bullet$, telles que

$$ {}^I E^{p,q}_2 = H^q_I H^p_{II}(C)$$
$$ {}^{II} E^{p,q}_2 = H^p_{II} H^q_I(C).$$

Si $C^{p,q} = 0$ pour $p, q < 0$, alors les deux suites spectrales convergent vers $H^{p+q}(T)$, où $T^\bullet$ est le complexe total.

DÉMONSTRATION. Théorème 14.14 de [**BT**]. □

On pourra relâcher les hypothèses du théorème et conclure que les suites spectrales convergent dès qu'il existe un entier r tel que $C^{p,q} = 0$ pour $p, q < r$.

2.3. Cohomologie des faisceaux

Soit X une variété. Dans cette section, un faisceau désigne un faisceau de groupes abéliens sur X.

Définition 2.3.1. Un faisceau $\mathcal{I}$ est *injectif* si $\mathrm{Hom}(\cdot, \mathcal{I})$ est un foncteur exact. Une *résolution injective* d'un faisceau $\mathcal{F}$ est une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{I}^0 \xrightarrow{d^0} \mathcal{I}^1 \longrightarrow \mathcal{I}^2 \longrightarrow \cdots$$

telle que $\mathcal{I}^p$ est un faisceau injectif pour chaque $p \geq 0$.

La catégorie des faisceaux compte *assez d'injectifs*, ce qui signifie que chaque faisceau $\mathcal{F}$ admet une résolution injective. Nous utilisons maintenant ces résolutions pour définir les *foncteurs dérivés à droite*.

Soit F est un foncteur exact à gauche sur les faisceaux et $\mathcal{F}$ un faisceau. On commence par choisir une résolution injective de $\mathcal{F}$,

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{I}^0 \xrightarrow{d^0} \mathcal{I}^1 \longrightarrow \mathcal{I}^2 \longrightarrow \cdots$$

puis on applique le foncteur F à la suite exacte

$$0 \longrightarrow F(\mathcal{F}) \longrightarrow F(\mathcal{I}^0) \xrightarrow{F(d^0)} F(\mathcal{I}^1) \longrightarrow F(\mathcal{I}^2) \longrightarrow \cdots$$

et enfin on enlève le terme $F(\mathcal{F})$

$$0 \longrightarrow F(\mathcal{I}^0) \xrightarrow{F(d^0)} F(\mathcal{I}^1) \longrightarrow F(\mathcal{I}^2) \longrightarrow \cdots .$$

Le résultat n'est pas une suite exacte en général, cependant il s'agit d'un complexe. Si on suppose que F est un foncteur vers la catégorie des groupes abéliens ou encore des faisceaux, on peut considérer la cohomologie de ce complexe.

Définition 2.3.2. Le i-ème foncteur dérivé à droite de F, noté $R^i F$, est le i-ème foncteur de cohomologie appliqué au complexe construit ci-haut.

On a pour les objets

$$R^i F(\mathcal{F}) = \frac{\ker F(d^i) : F(\mathcal{I}^i) \to F(\mathcal{I}^{i+1})}{\mathrm{im}\, F(d^{i-1}) : F(\mathcal{I}^{i-1}) \to F(\mathcal{I}^i)}.$$

Cette construction ne dépend pas du choix de la résolution injective de $\mathcal{F}$. Pour ce qui est des morphismes, supposons que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont des faisceaux et que $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ est un morphisme. Soit $\mathcal{I}^\bullet$ et $\mathcal{J}^\bullet$ des résolutions injectives de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ respectivement. On peut construire des morphismes $\varphi_p : \mathcal{I}^p \to \mathcal{J}^p$ tels que le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathcal{I}^0 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_0"'] & \mathcal{I}^1 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_1"'] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] & \mathcal{J}^0 \arrow[r] & \mathcal{J}^1 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

On peut alors définir $R^i F(\varphi)$ comme l'application induite sur la cohomologie

$$RF^i(\varphi) = \bar{\varphi}_i : H^i(\mathcal{I}) \to H^i(\mathcal{J}).$$

Ces applications ne dépendent ni du choix des résolutions injectives ni des applications φ_i construites. Avec ces définitions, les foncteurs dérivés à droite sont effectivement des foncteurs [**Ha**, III.1.1A].

Les foncteurs dérivés à droite sont de plus des δ-foncteurs, ce qui signifie notamment qu'étant donné une suite exacte courte de faisceaux

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0,$$

il existe des morphismes pour $i \geq 0$

$$\delta^i : R^i F(\mathcal{F}'') \to R^{i+1} F(\mathcal{F}')$$

tels que la suite suivante est exacte :

$$0 \longrightarrow R^0 F(\mathcal{F}') \longrightarrow R^0 F(\mathcal{F}) \longrightarrow R^0 F(\mathcal{F}'') \xrightarrow{\delta^0} R^1 F(\mathcal{F}') \longrightarrow \cdots$$
$$\cdots \longrightarrow R^i F(\mathcal{F}) \longrightarrow R^i F(\mathcal{F}'') \xrightarrow{\delta^i} R^{i+1} F(\mathcal{F}') \longrightarrow R^{i+1} F(\mathcal{F}) \longrightarrow \cdots .$$

Cette suite exacte est appelée *suite exacte longue*.

Maintenant qu'on a discuté des foncteurs dérivés à droite, la cohomologie d'un faisceau se définit facilement.

Définition 2.3.3. Soit X une variété. Le i-ème foncteur de cohomologie est le i-ème foncteur dérivé à droite du foncteur de sections globales

$$H^i(X, \cdot) = R^i \Gamma(X, \cdot).$$

En particulier, si $\mathcal{F}$ est un faisceau, alors le i-ème groupe de cohomologie $H^i(X, \mathcal{F})$ est $R^i \Gamma(X, \mathcal{F})$.

On utilisera aussi fréquemment les foncteurs dérivés à droite d'un autre foncteur.

Définition 2.3.4. Soit X et Y des variétés, $f : X \to Y$ un morphisme et $f_*(\cdot)$ le foncteur d'image directe par f. Le i-ème foncteur d'image directe supérieure $R^i f_*(\cdot)$ est le i-ème foncteur dérivé à droite du foncteur $f_*(\cdot)$.

Les propriétés générales des foncteurs dérivés à droite donnent déjà des propriétés importantes de la cohomologie des faisceaux, comme l'existence des suites exactes longues. Pour le reste de cette section, on discute de quelques autres résultats utiles concernant les images directes et la cohomologie des faisceaux.

2.3.1. Formule de projection

Théorème 2.3.5. Soit X et Y des variétés, $f : X \to Y$ un morphisme, $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module et $\mathcal{E}$ un $\mathcal{O}_Y$-module localement libre de rang fini. Il existe un isomorphisme naturel

$$R^i f_*(\mathcal{F} \otimes f^*\mathcal{E}) \simeq R^i f_*(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{E}.$$

DÉMONSTRATION. Proposition 0.12.2.3 de [**EGA3**]. □

2.3.2. Suite spectrale de Leray

Théorème 2.3.6. Soit X et Y des variétés, $f : X \to Y$ un morphisme et $\mathcal{F}$ un faisceau de groupes abéliens sur X. Il existe une suite spectrale $E_\bullet^{\bullet,\bullet}$ telle que

$$E_2^{p,q} = H^p(Y, R^q f_*\mathcal{F})$$

qui converge vers

$$H^{p+q}(X, \mathcal{F}).$$

DÉMONSTRATION. Section 5.8.6 de [**W**]. □

2.3.3. Théorème de Grauert–Riemenschneider

Soit X une variété non singulière. On a déjà discuté du faisceau des différentielles Ω_X à la section 1.6.1. Maintenant, on définit le *faisceau canonique* comme

$$\omega_X = \bigwedge^n \Omega_X$$

où n est la dimension de X.

On donne un cas particulier de la formulation de Kempf du théorème de Grauert–Riemenschneider.

Théorème 2.3.7. Soit X une variété non singulière et Y une variété. Si $f : X \to Y$ est un morphisme propre, surjectif et dont les fibres sont génériquement finies, alors pour tout $i > 0$,

$$R^i f_*\omega_X = 0.$$

DÉMONSTRATION. Théorème 4 de [**Ke**]. □

2.3.4. Cohomologie de Čech

Il est souvent plus commode pour les calculs de travailler avec la cohomologie de Čech plutôt qu'avec la cohomologie des faisceaux. Sous certaines hypothèses, ces deux constructions sont les mêmes.

Soit X une variété et $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X, où I est un ensemble d'indices bien ordonné. Si $\mathcal{F}$ est un faisceau, alors on définit pour chaque $p \geq 0$ le groupe abélien

$$C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \prod_{i_1 < \cdots < i_p} \mathcal{F}(U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_p}).$$

On peut voir un élément ω de $C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ comme une fonction qui assigne à chaque intersection $U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_p}$ de p ouverts une section, disons $\omega_{i_1,\ldots,i_p}$, de $\mathcal{F}(U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_p})$. On construit pour $p \geq 0$ un morphisme

$$d^p : C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to C^{p+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$$

en définissant la section de $d^p\omega$ dans $\mathcal{F}(U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_{p+1}})$ comme

$$d\omega_{i_1,\ldots,i_{p+1}} = \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k \omega_{i_1,\ldots,\hat{i}_k,\ldots,i_{p+1}}|_{U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_{p+1}}}.$$

Ces morphismes font de $C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ un complexe qu'on appelle le *complexe de Čech*. La *cohomologie de Čech* $\check{H}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ est la cohomologie de ce complexe

$$\check{H}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \frac{\ker d^p : C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to C^{p+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})}{\operatorname{im} d^{p-1} : C^{p-1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})}.$$

En général, la cohomologie de Čech diffère de la cohomologie des faisceaux. Par contre, on a le théorème suivant.

Théorème 2.3.8. Soit X une variété, $\mathfrak{U}$ un recouvrement par des ouverts affines et $\mathcal{F}$ un faisceau quasi-cohérent. On a des isomorphismes naturels pour $p \geq 0$

$$\check{H}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \simeq H^p(X, \mathcal{F}).$$

DÉMONSTRATION. Théorème III.4.5 de [**Ha**]. □

2.4. SYSTÈME DE RACINES ET POIDS

Un *espace euclidien* E est un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'une forme $(\cdot, \cdot)$ bilinéaire, symétrique et définie positive. Il sera commode pour la suite de définir une autre forme $\langle\cdot,\cdot\rangle$ donnée pour α et β dans E par

$$\langle\beta,\alpha\rangle = 2\frac{(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}.$$

Cette forme n'est pas symétrique et n'est linéaire que dans la première variable.

Étant donné un vecteur $\alpha \in E$, la *réflexion* τ_α est l'unique transformation linéaire qui applique α sur $-\alpha$ et fixe l'hyperplan $\{\beta \in E : (\beta,\alpha) = 0\}$ des vecteurs orthogonaux à α.

Définition 2.4.1. Un *système de racines* dans un espace euclidien E est un sous-ensemble Φ de E vérifiant les propriétés suivantes :

(i) Φ est fini, génère E comme espace vectoriel et ne contient pas 0 ;

(ii) Si $\alpha \in \Phi$, alors $\pm\alpha$ sont les seuls multiples entiers de α dans Φ ;

(iii) Si $\alpha \in \Phi$, la réflexion τ_α laisse Φ stable ;

(iv) Si α et β sont dans Φ, alors $\langle\alpha,\beta\rangle$ est un entier.

Les éléments $\alpha \in \Phi$ d'un système de racines sont appelés *racines*.

Définition 2.4.2. Une *base* d'un système de racines Φ est un sous-ensemble $\Delta \subset \Phi$ vérifiant

(i) Δ est une base de E comme espace vectoriel ;

(ii) Chaque racine $\alpha \in \Phi$ se décompose comme une somme finie

$$\alpha = \sum_{\alpha\in\Delta} c_\alpha \alpha$$

où les c_α sont des entiers qui sont soit tous positifs ou nuls, soit tous négatifs ou nuls.

Les racines $\alpha \in \Delta$ qui font partie d'une base sont appelées *racines simples*.

On peut donner une description de toutes les bases d'un système de racine Φ. Si α est une racine, on considère l'hyperplan P_α orthogonal à α. L'espace $E - \bigcup_{\alpha\in\Phi} P_\alpha$ est partitionné en un nombre fini de composantes connexes qu'on appelle *chambres de Weyl*. Pour chaque chambre de Weyl C, nous allons construire une base $\Delta(C)$ de Φ. On commence par choisir un vecteur $v \in C$, alors l'hyperplan P_v sépare les racines en deux sous-ensembles $\Phi^+ = \{\alpha \in \Phi : (v,\alpha) > 0\}$ et $-\Phi^+$. La base $\Delta(C)$ est donnée par les racines α telles que

(i) $\alpha \in \Phi^+$;

(ii) Il n'existe pas de racines $\beta_1, \beta_2 \in \Phi^+$ telles que $\alpha = \beta_1 + \beta_2$.

La base $\Delta(C)$ ne dépend pas du choix du vecteur $v \in C$, seulement de la chambre de Weyl. Toutes les bases de Φ sont de la forme $\Delta(C)$ pour une chambre de Weyl C.

Dans le paragraphe précédent, les racines de Φ^+ sont appelées les racines *positives* par rapport à la base $\Delta(C)$. Si Φ^+ sont les racines positives, alors $-\Phi^+$ sont appelées les racines *négatives*. On peut donner une autre caractérisation des racines positives.

Définition 2.4.3. Les racines *positives* de Φ par rapport à une base Δ sont les racines $\alpha = \sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha \alpha$ où les entiers c_α sont tous positifs ou nuls.

On peut se servir d'une base pour donner un ordre partiel au système de racines Φ : si $\alpha, \beta \in \Phi$, on définit $\alpha \leq \beta$ si $\beta - \alpha$ est une racine positive ou si $\alpha = \beta$.

2.4.1. Poids

Pour le reste de cette section, on fixe un système de racines Φ dans un espace euclidien E muni d'une base Δ.

Définition 2.4.4. Un *poids* est un vecteur $\lambda \in E$ tel que $\langle \lambda, \alpha \rangle$ est un entier pour toutes les racines $\alpha \in \Phi$.

L'ensemble des poids Λ est un réseau dans E, c'est-à-dire qu'il s'agit d'un $\mathbb{Z}$-module généré par une base de E. Il contient comme sous-réseau le réseau généré par les racines.

Définition 2.4.5. Un poids λ est *dominant* par rapport à Δ si $\langle \lambda, \alpha \rangle$ est un entier positif ou nul pour tout $\alpha \in \Delta$. On note Λ^+ l'ensemble des poids dominants. Si C est une chambre de Weyl et $\Delta = \Delta(C)$, on peut caractériser les poids dominants comme ceux qui sont dans l'adhérence de C.

On peut se servir d'une base pour donner un ordre partiel aux poids Λ : si $\lambda, \mu \in \Lambda$, on définit $\lambda \leq \mu$ si $\mu - \lambda$ est dominant.

Définition 2.4.6. Un poids $\lambda \in \Lambda$ est *régulier* s'il est dans un chambre de Weyl, c'est-à-dire si $\langle \lambda, \alpha \rangle \neq 0$ pour toutes les racines $\alpha \in \Phi$. Si λ n'est pas régulier, alors il est dit *singulier*.

2.4.2. Groupe de Weyl

Définition 2.4.7. Le groupe de Weyl W de Φ est le sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$ qui est engendré par les réflexions τ_α pour $\alpha \in \Phi$:

$$W = \langle \tau_\alpha : \alpha \in \Phi \rangle.$$

Comme $W \subset \mathrm{GL}(E)$, le groupe de Weyl agit sur l'espace euclidien E. Le système de racines Φ est stable sous cette action, le groupe de Weyl agit donc aussi sur les racines.

Similairement, le groupe de Weyl agit sur les poids Λ. L'action de W sur Λ est telle que pour chaque poids λ, il existe un $w \in W$ telle que $w \cdot \lambda$ est dominant [**H1**, 13.2.A]. La forme $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est invariante sous l'action du groupe de Weyl, c'est-à-dire que pour tout poids $\lambda, \mu \in \Lambda$ et $w \in W$, on a $\langle w \cdot \lambda, w \cdot \mu\rangle = \langle \lambda, \mu\rangle$.

Les réflexions τ_α pour les racines simples $\alpha \in \Delta$ forment un autre ensemble générateur pour le groupe de Weyl. On peut donc donner la définition suivante.

Définition 2.4.8. La *longueur* de $w \in W$ par rapport à Δ, notée $l(w)$, est l'entier n minimal tel que w s'écrit comme un produit $w = \tau_{\alpha_1} \cdots \tau_{\alpha_n}$ où chaque $\alpha_i \in \Delta$ est une racine simple.

La longueur de $w \in W$ est aussi le nombre de racines positives α telles que $w \cdot \alpha$ est une racine négative, c'est-à-dire la cardinalité de $\{w \cdot \Phi^+ \cap -\Phi^+\}$ [**H1**, 10.3.A]. En particulier, si α est une racine simple, alors la réflexion τ_α applique α sur $-\alpha$ et permute les autres racines positives. Il existe de plus un unique élément w_0 qui applique toutes les racines positives dans les racines négatives, et donc qui est de longueur maximale.

On utilisera fréquemment un poids particulier : la demi-somme des racines positives

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Phi^+} \alpha.$$

Pour n'importe quelle racine simple $\alpha \in \Delta$, on a $\tau_\alpha \cdot \rho = \rho - \alpha$ étant donné que τ_α permute $\Phi^+ \setminus \{\alpha\}$. Par l'invariance de $\langle\cdot,\cdot\rangle$, on a

$$\langle \rho, \alpha\rangle = \langle \tau_\alpha \cdot \rho, \tau_\alpha \cdot \alpha\rangle = \langle \rho - \alpha, -\alpha\rangle = -\langle \rho, \alpha\rangle + 2.$$

et il suit que $\langle \rho, \alpha\rangle = 1$ pour toutes les racines simples. En particulier, ρ est un poids dominant. Il est aussi régulier.

2.5. Groupes algébriques

Un *groupe algébrique* est une variété algébrique G munie d'une structure de groupe telle que les deux applications

$$\begin{aligned} G \times G &\to G & \qquad G &\to G \\ (g,h) &\mapsto gh & \qquad g &\mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

sont des morphismes de variétés.

Un groupe algébrique est *linéaire* si sa variété sous-jacente est affine. Un exemple important est $\mathrm{GL}(n,k)$, le groupe multiplicatif des matrices $n \times n$ inversibles à coefficients dans le corps k. Il s'agit d'un exemple important notamment parce qu'un groupe algébrique est linéaire si et seulement si il est isomorphe à un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(n,k)$ [**B2**, 1.10].

À l'avenir, il sera sous-entendu que tous les groupes algébriques considérés sont linéaires.

2.5.1. Algèbre de Lie

Soit un groupe algébrique G et $k[G]$ les fonctions régulières sur G. La *translation à gauche par* g est l'endomorphisme de $k[G]$ donné par $\lambda_g f(h) = f(g^{-1}h)$, pour $f \in k[G]$ et $g, h \in G$. L'*algèbre de Lie de* G, notée $\mathfrak{g}$, est l'algèbre de Lie des dérivations de $k[G]$ (cf. définition 1.1.7) invariantes par translation à gauche

$$\mathfrak{g} = \{d \in \text{Dér}\, k[G] : d\lambda_g = \lambda_g d \text{ pour tout } g \in G\}.$$

En composant les dérivations avec l'évaluation à l'identité, on obtient un isomorphisme d'espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ vers l'espace tangent à l'identité $T_1 G$. Cet isomorphisme permet de transporter la structure d'algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ vers $T_1 G$ [**H2**, 9.1]. On obtient ainsi une description souvent plus commode de $\mathfrak{g}$.

Un morphisme de variété $\varphi : G \to G'$ détermine, pour chaque $g \in G$, une application linéaire des espaces tangents $d\varphi_g : T_g G \to T_{\varphi(g)} G'$. En particulier, si on considère les espaces tangents $T_1 G$ et $T_1 G'$ identifiés avec les algèbres de Lie $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'$, on a une application linéaire

$$d\varphi_1 : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'.$$

Cette application est appelée la *différentielle* de φ, qu'on notera simplement $d\varphi$. Si φ est un morphisme de groupes algébriques, alors $d\varphi$ est un morphisme d'algèbres de Lie.

2.5.2. Groupes réductifs et semi-simples

Une application x dans $\mathrm{GL}(n,k)$ est *semi-simple* si elle est diagonalisable, c'est-à-dire si k^n admet une base de vecteurs propres de x. Une application linéaire x dans $\mathrm{GL}(n,k)$ est *unipotente* s'il existe un entier positif p tel que $a^p = 1$.

On aimerait étendre les définitions des éléments semi-simples et unipotents à un groupe algébrique arbitraire G. On peut pour cela simplement fixer un isomorphisme φ vers un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(n,k)$ et définir que $g \in G$ est semi-simple (resp. unipotent) si $\varphi(g)$ est semi-simple (resp. unipotent). Cette définition ne dépend pas de l'isomorphisme φ choisi [**Sp**, 2.4.9].

Dans un groupe algébrique G, il existe un unique sous-groupe fermé, connexe, normal, résoluble et maximal pour l'inclusion ; on appelle ce sous-groupe le *radical* de G, noté $R(G)$ [**H2**, 19.5]. Le *radical unipotent*, noté $R_u(G)$ est le sous-groupe de G des éléments unipotents de $R(G)$.

Définition 2.5.1. Un groupe algébrique connexe G est *réductif* si $R_u(G) = \{1\}$. Le groupe G est de plus *semi-simple* si $R(G) = \{1\}$.

Les groupes que nous considérerons au chapitre suivant seront tous semi-simples. On peut cependant se passer de cette hypothèse pour la plupart des résultats qui suivent et on ne supposera pas inutilement que les groupes sont semi-simples.

2.6. Représentations des groupes algébriques réductifs

Soit G un groupe algébrique connexe.

Définition 2.6.1. Soit V un espace vectoriel. Une *représentation* de G est un morphisme de groupes algébriques

$$\rho : G \to \mathrm{GL}(V).$$

Dans ce cas, on dira aussi que V est un G-module étant donné que G agit sur V par $g \cdot v = \rho(g)(v)$, où $v \in V$.

2.6.1. Poids d'une représentation

Définition 2.6.2. Un *tore* est un groupe algébrique isomorphe à la somme directe d'un nombre fini de groupes multiplicatifs $k^\times$.

Pour un groupe algébrique G, un *tore maximal* est un sous-groupe fermé de G qui est isomorphe à un tore et qui est de dimension maximale. Les tores maximaux de G sont tous conjugués [**H2**, 21.3.A].

Soit T un tore maximal de G. Un caractère de T est un morphisme de groupe algébrique $\chi : T \to k^\times$. Si χ et ψ sont deux caractères de T, on peut les multiplier pour obtenir un autre caractère $t \mapsto \chi(t)\psi(t)$, où $t \in T$. Avec cette opération, l'ensemble des caractère devient un groupe abélien, noté $X(T)$. Il est plus conventionnel de noter l'opération dans $X(T)$ comme une addition, on aura donc pour $t \in T$,

$$(\chi + \psi)(t) = \chi(t)\psi(t).$$

Soit V un G-module de dimension finie. On obtient une action de T sur V en restreignant celle de G. Cette action de T est diagonalisable. On peut donc séparer V en se servant des caractères de T : si $\lambda \in X(T)$, on définit le sous-espace de V

$$V_\lambda = \{v \in V : \lambda(t)v = t \cdot v \text{ pour tout } t \in T\}$$

et alors

$$V = \bigoplus_{\lambda \in X(T)} V_\lambda.$$

Les $\lambda \in X(T)$ non nuls tels que $V_\lambda \neq 0$ sont appelés les *poids* de V.

2.6.2. Système de racines

On suppose pour le reste de cette section que le groupe G est réductif. Le système de racines de G sera construit à l'aide des poids d'une représentation particulière, la *représentation adjointe*.

Le groupe G agit sur lui-même par conjugaison, c'est-à-dire que pour un $g \in G$ donné, on a un morphisme de groupe algébrique

$$\begin{aligned} G &\to G \\ h &\mapsto ghg^{-1}. \end{aligned}$$

La différentielle de ce morphisme est une application de $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ que l'on note Ad_g. On obtient ainsi la représentation adjointe :

$$\begin{aligned} G &\to \mathrm{GL}(\mathfrak{g}) \\ g &\to \mathrm{Ad}_g\,. \end{aligned}$$

Les poids de la représentation adjointe sont appelés les *racines* de G par rapport à T. On note $\Phi(G, T)$, ou simplement Φ, l'ensemble des racines de G par rapport à T. On obtient une décomposition de l'algèbre de Lie de G

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha \right)$$

où $\mathfrak{t}$ est l'algèbre de Lie de T et chaque $\mathfrak{g}_\alpha$ est de dimension 1.

Théorème 2.6.3. Soit G un groupe algébrique réductif, $T \subset G$ un tore maximal et $\Phi(G, T)$ les racines de G par rapport à T.

(i) L'ensemble des racines $\Phi(G, T)$ est un système de racines dans l'espace euclidien $E = \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} X(T)$ au sens de la définition 2.4.1 ;

(ii) Le groupe de Weyl W de la définition 2.4.7 est isomorphe au quotient du normalisateur de T par T, c'est-à-dire $W \simeq N(T)/T$;

(iii) L'ensemble des caractères $X(T)$ est un réseau de E tel que $\Lambda_r \subset X(T) \subset \Lambda$, où Λ_r est le réseau généré par les racines et Λ le réseau des poids de Φ.

DÉMONSTRATION. Théorème 27.1 de [**H2**]. □

On peut aussi utiliser les racines pour construire des sous-groupes de G. Plus précisément, il correspond à chaque racine $\alpha \in \Phi$ un unique sous-groupe U_α de G connexe, T-stable et dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{g}_\alpha$. [**B2**, 13.18]. Le groupe U_α est isomorphe au groupe additif k et en particulier il est de dimension 1. De plus, si $n \in N(T)$ représente un élément w du groupe de Weyl, alors on a $wU_\alpha w^{-1} = U_{w\cdot\alpha}$.

2.6.3. Représentations irréductibles des groupes réductifs

On suppose encore dans cette section que le groupe G est réductif.

Si V est un G-module, un sous-espace $W \subset V$ est dit *G-stable* si $G \cdot W \subset W$. Un G-module V de dimension finie est *irréductible* si ses seuls sous-espaces G-stables sont 0 et V.

Ces G-modules sont importants puisque tout G-module de dimension finie peut s'écrire comme une somme directe de G-modules irréductibles [**H2**, 14.3].

Soit T un tore maximal, Φ le système de racines de G par rapport à T et Δ une base de Φ. On obtient en particulier un ordre partiel sur les caractères $X(T)$. Si V est un G-module irréductible, alors il existe un poids $\lambda \in X(T)$ de V qui est maximal pour l'ordre partiel, on l'appelle le *plus haut poids* de V. Un G-module irréductible V est complètement caractérisé à isomorphisme près par son plus haut poids [**H2**, 31.3]. Si λ est le plus haut poids d'un G-module irréductible V, alors λ est un poids dominant. Réciproquement, pour chaque caractère dominant $\lambda \in X(T)^+$, il existe un G-module irréductible de plus haut poids λ. On pourra construire explicitement ces G-modules à l'aide du théorème de Borel–Weil–Bott à la section 2.8.3.

L'action de W permute les poids d'un G-module irréductible. [**H2**, 31.3]

Définition 2.6.4. Soit V un G-module irréductible et Π l'ensemble des poids de V. Le *caractère* de V est

$$\chi(V) = \sum_{\mu\in\Pi} \dim V_\mu e^\mu$$

où l'exponentielle n'est qu'une expression formelle.

On se servira de la *formule de caractère de Weyl* pour décrire les poids d'un G-module irréductible.

Théorème 2.6.5. Soit V le G-module irréductible de plus haut poids $\lambda \in X(T)^+$. Alors

$$\chi(V) = \frac{\sum_{w \in W} (-1)^{l(w)} e^{w \cdot (\lambda + \rho)}}{\sum_{w \in W} (-1)^{l(w)} e^{w \cdot \rho}}.$$

Le dénominateur de cette expression est le *dénominateur de Weyl*, on a l'égalité

$$\sum_{w \in W} (-1)^{l(w)} e^{w \cdot \rho} = e^{\rho} \prod_{\alpha \in \Phi^+} (1 - e^{-\alpha}).$$

DÉMONSTRATION. Section 24.3 de [**H1**] et section 13.4 de [**Ka**]. □

2.7. Sous-groupes de Borel et sous-groupes paraboliques

Soit G un groupe algébrique connexe.

Définition 2.7.1. Un *sous-groupe de Borel* est un sous-groupe $B \subset G$ fermé, connexe, résoluble et maximal pour l'inclusion.

Définition 2.7.2. Un *sous-groupe parabolique* est un sous-groupe fermé $P \subset G$ tel que G/P est une variété complète. La variété G/P est appelée *variété de drapeaux*.

La principale particularité des sous-groupes de Borel est qu'il s'agit des plus petits sous-groupes paraboliques. Plus précisément, un sous-groupe est parabolique si et seulement si il contient un sous-groupe de Borel [**B2**, 11.2]. Les variétés de drapeaux G/P seront notre principal objet d'étude au chapitre suivant.

Théorème 2.7.3. Soit G un groupe algébrique connexe et B un sous-groupe de Borel.

(i) Tous les sous-groupes de Borel sont conjugués à B ;

(ii) Le sous-groupe B est son propre normalisateur, $N_G(B) = B$.

DÉMONSTRATION. Théorèmes 11.1 et 11.16 de [**B2**]. □

Le théorème permet de donner une autre description de la variété de drapeaux G/B. Comme les sous-groupes de Borel sont tous conjugués, G agit transitivement par conjugaison sur l'ensemble $\mathcal{B}$ de tous les sous-groupes de Borel. Le stabilisateur d'un sous-groupe $B \in \mathcal{B}$ est son normalisateur, et donc seulement B. Il suit que si on choisit un sous-groupe de Borel $B \in \mathcal{B}$, on peut identifier $\mathcal{B}$ avec la variété G/B par l'application $gBg^{-1} \in \mathcal{B} \mapsto gB$. On donne ainsi à $\mathcal{B}$ une structure de variété qui ne dépend pas du sous-groupe de Borel B choisi [**B2**, 11.18].

2.7.1. Racines positives

Nous supposons pour le reste de cette section que G est un groupe réductif. On peut décomposer un sous-groupe de Borel $B \subset G$ comme un produit semi-direct $B = T \ltimes U$, où T est un tore maximal de G et U est le radical unipotent de B [**H2**, 19.3]. On a une décomposition analogue des algèbres de Lie : $\mathfrak{b} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{u}$, où $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{t}$ et $\mathfrak{u}$ sont respectivement les algèbres de Lie de B, T et U. Dans ce cas, il existe une base Δ du système de racines Φ de G telle que $\mathfrak{u}$ se décompose en la sommes des $\mathfrak{g}_\alpha$ pour les racines α positives :

$$\mathfrak{u} = \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Conséquemment, le choix d'un sous-groupe de Borel $B \in \mathcal{B}$ revient à choisir une base Δ de Φ [**H2**, 27.4].

On discute d'abord d'une application de cette base aux représentations irréductibles d'un groupe réductif G (cf. 2.6.3). Soit B un sous-groupe de Borel. N'importe quel G-module de dimension finie V contient un sous-espace de dimension 1 qui est stable sous l'action de B [**H2**, 31.3]. Un élément non nul v de cette droite est appelé un *vecteur maximal*. Il s'agit d'un vecteur non nul de V qui est dans un sous-espace V_λ pour un certain poids λ de V. Dans ce cas, le poids λ est un poids dominant par rapport à la base de Φ déterminée par B. De plus, le G-module V' généré par le vecteur maximal v est en fait le G-module irréductible de plus haut poids λ.

Le choix d'un sous-groupe B, et donc d'une base de Φ, détermine un unique élément w_0 de longueur maximale dans le groupe de Weyl $W = N(T)/T$. Soit $\dot{w}_0$ un représentant de w_0 dans $N(T)$. Le sous-groupe $B^- = \dot{w}_0 B \dot{w}_0^{-1}$ est appelé le sous-groupe de Borel *opposé* à B. Il s'agit de l'unique sous-groupe de Borel tel que $B \cap B^- = T$. Si on écrit $B^- = TU^-$, alors l'algèbre de Lie de U^-, disons $\mathfrak{u}^-$, se décompose comme la somme de $\mathfrak{g}_\alpha$ pour les racines α négatives :

$$\mathfrak{u}^- = \bigoplus_{\alpha \in -\Phi^+} \mathfrak{g}_\alpha.$$

2.7.2. Décomposition de Bruhat

Soit $B = TU$ un sous-groupe de Borel, w un élément du groupe de Weyl $W = N(T)/T$ et $\dot{w} \in N(T)$ un représentant de w. Les translatés $\dot{w}B$ et les translatés doubles $B\dot{w}B$ ne dépendent que de w et pas du choix du représentant $\dot{w}$. On pourra donc noter ces translatés comme wB et BwB.

Théorème 2.7.4. Soit G un groupe réductif, $B \subset G$ un sous-groupe de Borel et W le groupe de Weyl. Alors G se décompose comme une union disjointe

$$G = \dot{\bigcup_{w \in W}} BwB.$$

DÉMONSTRATION. Théorème 28.3 de [**H2**] □

La décomposition d'un élément $g \in G$ comme $g = bwb'$ avec $b, b' \in B$ et $w \in W$ n'est pas unique. On décrira cependant à la section 2.7.3 un raffinement de la décomposition de Bruhat qui permet d'obtenir une décomposition unique.

2.7.3. Sous-groupes paraboliques

Soit B un sous-groupe de Borel et Δ la base des racines qu'il détermine. Un sous-groupe parabolique qui contient B est dit *standard* par rapport à B. On peut décrire tous les sous-groupes paraboliques standards à l'aide du système de racines. Soit $\theta \subset \Delta$ un sous-ensemble de racines simples et W_θ le sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$ engendré par les réflexions τ_α, où $\alpha \in \theta$. On obtient alors un sous-groupe parabolique standard P_θ en posant $P_\theta = \bigcup_{w \in W_\theta} BwB$ [**H2**, 30.1]. On a en fait une bijection entre les sous-groupes paraboliques standards et les sous-ensembles $\theta \subset \Delta$.

Chaque translaté $wW_\theta \in W/W_\theta$ contient un unique représentant de longueur minimale, on l'appelle un *représentant distingué*. Un élément $w \in W$ est un représentant distingué pour le translaté wW_θ si et seulement si il satisfait $w \cdot \theta \subset \Phi^+$ [**C1**, 2.3.3].

Ces constructions permettent une donner une variation de la décomposition de Bruhat.

Théorème 2.7.5. Soit G un groupe réductif, $B \subset G$ un sous-groupe de Borel, $P = P_\theta$ un sous-groupe parabolique standard et D un système de représentants distingués pour W/W_θ. On pose aussi $U_d = U \cap dU^- d^{-1}$. Alors on a

$$G = \dot{\bigcup_{d \in D}} U_d dP.$$

et chaque $g \in G$ s'écrit uniquement comme $g = udp$ avec $u \in U_d$, $d \in D$ et $p \in P$.

DÉMONSTRATION. Théorème 5.2.1 de [**C1**]. □

2.7.4. Décomposition de Levi

Chaque sous-groupe parabolique P admet une *décomposition de Levi*, c'est-à-dire qu'il s'écrit comme un produit semi-direct $P = L \ltimes V$, où V est le radical unipotent de P et L est un sous-groupe réductif qui contient T [**H2**, 30.2].

On a une décomposition analogue des algèbres de Lie : $\mathfrak{p} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{v}$ où $\mathfrak{p}, \mathfrak{l}$ et $\mathfrak{v}$ sont respectivement les algèbres de Lie de P, L et V. Si P est un sous-groupe parabolique standard $P = P_\theta$, on note Ψ les racines de Φ qui sont une combinaison $\mathbb{Z}$-linéaire des racines de θ. On peut alors décomposer $\mathfrak{l}$ et $\mathfrak{v}$:

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{t} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Psi} \mathfrak{g}_\alpha \right)$$
$$\mathfrak{v} = \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+ \setminus \Psi} \mathfrak{g}_\alpha .$$

Similairement, on peut se servir des groupes définis à la section 2.6.2 pour écrire L et V comme des produits semi-directs [**B2**, 14.5] :

$$T \cdot \prod_{\alpha \in \Psi} U_\alpha \simeq L$$
$$\prod_{\alpha \in \Phi^+ \setminus \Psi} U_\alpha \simeq V.$$

2.7.5. Exemple

On considère le groupe algébrique $\mathrm{GL}(n, k)$. Il s'agit d'un groupe réductif, ce qu'on peut démontrer en notant que son action sur k^n est irréductible [**Sp**, 2.4.15].

Par le théorème de Lie–Kolchin [**B2**, 10.5] tout sous-groupe connexe et résoluble est formé après un changement de base approprié de matrices triangulaires supérieures. Il suit qu'on peut prendre comme sous-groupe de Borel, disons B, toutes les matrices triangulaires supérieures inversibles. On note que B contient le tore maximal, disons T, formé de toutes les matrices diagonales dans $\mathrm{GL}(n, k)$.

Ce tore maximal nous permettra de décrire les racines de $\mathrm{GL}(n, k)$. Soit $t \in T$ la matrice diagonale

$$t = \begin{pmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_n \end{pmatrix}$$

et χ_i le caractère de T donné par

$$\chi_i : \begin{pmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_n \end{pmatrix} \mapsto t_i .$$

Soit aussi E_{ij} la matrice dont toutes les entrées sont nulles à l'exception de l'entrée de la ligne i et de la colonne j qui est 1.

Si $i \neq j$, l'action adjointe de t sur E_{ij} est simplement

$$\mathrm{Ad}_t\, E_{ij} = \frac{t_j}{t_i} E_{ij} = (\chi_j - \chi_i) E_{ij}.$$

On peut donc conclure que les racines de $\mathrm{GL}(n,k)$ sont données par $\chi_j - \chi_i$, où $j \neq i$, et que l'espace $\mathfrak{g}_{\chi_j - \chi_i}$ est engendré par la matrice E_{ij}. On voit de plus que le groupe $U_{\chi_j - \chi_i}$ discuté à la section 2.6.2 est donné par $I + kE_{ij}$, où I est la matrice identité.

Une racine $\chi_j - \chi_i$ est positive par rapport à la base déterminée par B si $U_{\chi_j - \chi_i} \subset B$, ce qui se produit si et seulement si E_{ij} est triangulaire supérieure. On conclut que les racines positives sont les $\chi_j - \chi_i$ avec $i < j$. On peut écrire n'importe quelle telle racine comme

$$\chi_j - \chi_i = (\chi_j - \chi_{j-1}) + (\chi_{j-1} - \chi_{j-2}) + \cdots + (\chi_{i+1} - \chi_i).$$

et donc les racines $\chi_{i+1} - \chi_i$, où $i = 1, \ldots, n-1$, sont les racines simples.

Étant donné un sous-ensemble de racines simples, on peut désormais aisément construire le sous-groupe parabolique standard associé ainsi que sa décomposition de Levi. Par exemple, on considère le groupe $\mathrm{GL}(7,\mathbb{C})$ et le sous-groupe parabolique standard déterminé par le sous-ensemble de racines simples $\{\chi_3 - \chi_2, \chi_4 - \chi_3, \chi_5 - \chi_4\}$. On a alors

$$\begin{aligned}
\chi_4 - \chi_2 &= (\chi_4 - \chi_3) + (\chi_3 - \chi_2) \\
\chi_5 - \chi_3 &= (\chi_5 - \chi_4) + (\chi_4 - \chi_3) \\
\chi_5 - \chi_2 &= (\chi_5 - \chi_4) + (\chi_4 - \chi_3) + (\chi_3 - \chi_2).
\end{aligned}$$

Il suit que les racines qui sont une combinaison $\mathbb{Z}$-linéaires de ces racines simples sont

$$\{\pm(\chi_3 - \chi_2), \pm(\chi_4 - \chi_3), \pm(\chi_5 - \chi_4), \pm(\chi_4 - \chi_2), \pm(\chi_5 - \chi_3), \pm(\chi_5 - \chi_2)\}.$$

En utilisant les décompositions en produit semi-direct de la section 2.7.4, on conclut que le sous-groupe parabolique standard associé à cet ensemble de racines simples est donné par les matrices inversibles de la forme

$$P = \begin{pmatrix} \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ 0 & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ 0 & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ 0 & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ 0 & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \star \end{pmatrix},$$

le facteur de Levi est donné par les matrices inversibles de la forme

$$L = \begin{pmatrix} \star & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \star & \star & \star & \star & 0 & 0 \\ 0 & \star & \star & \star & \star & 0 & 0 \\ 0 & \star & \star & \star & \star & 0 & 0 \\ 0 & \star & \star & \star & \star & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \star & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \star \end{pmatrix}$$

et le radical unipotent est donné par les matrices inversibles de la forme

$$V = \begin{pmatrix} 1 & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \star & \star \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.8. Fibrés vectoriels G-équivariants

Pour toute cette section, on suppose que G est un groupe algébrique réductif. Soit $P \subset G$ un sous-groupe parabolique. Nous utiliserons un P-module V de dimension finie pour construire un fibré vectoriel sur G/P (cf. définition 1.6.4) et son faisceau de sections.

On commence par considérer l'espace $G \times V$ sur lequel on définit la relation d'équivalence

$$(gp, v) \sim (g, p \cdot v) \text{ pour tout } g \in G, p \in P \text{ et } v \in V.$$

On note $G \times^P V$ l'espace des classes d'équivalence muni de la topologie quotient. La projection

$$p : G \times^P V \to G/P$$
$$(g, v) \mapsto gP$$

fait de $G \times^P V$ un fibré vectoriel sur G/P [**J**, I.5.16].

Les ouverts de la décomposition de Bruhat (cf. théorème 2.7.5) forment un recouvrement trivialisant pour $G \times^P V$, c'est-à-dire que pour chaque $d \in D$, on a $p^{-1}(U_d dP) \simeq U_d dP \times V$.

De plus, G agit sur le fibré $G \times^P V$ par $g(h, v) = (gh, v)$ ([**AC**, Chapitre 3], [**J**, I.5]).

Définition 2.8.1. Un fibré vectoriel $p : X \to G/P$ est G-*équivariant* s'il est muni d'une action de G vérifiant

(i) $g \cdot X_{hP} = X_{ghP}$, pour tout $g, h \in G$;

(ii) l'application $X_{hP} \to X_{ghP}$ donnée par l'action de g est un isomorphisme linéaire.

Les fibrés vectoriels $G \times^P V$ construits à partir de P-modules sont G-équivariants. Réciproquement, si $p : X \to G/P$ est un fibré vectoriel G-équivariant, on obtient un P-module en considérant l'action de P sur la fibre de l'identité X_{1P}.

2.8.1. Faisceau des sections

Étant donné un fibré vectoriel $p : G \times^P V \to G/P$, on peut construire un $\mathcal{O}_{G/P}$-module localement libre de rang fini, noté $\mathcal{L}(V)$, en considérant les sections de $G \times^P V$. Plus précisément, si $U \subset G/P$ est un ouvert, alors on pose

$$\mathcal{L}(V)(U) = \{s \in \mathrm{Hom}(U, G \times^P V) : p \circ s = \mathrm{id}_U\}.$$

On obtient ainsi un foncteur $\mathcal{L}$ des P-modules de dimension finie vers les $\mathcal{O}_{G/P}$-modules localement libres de rang fini. On écrira aussi $\mathcal{L}_P$ plutôt que $\mathcal{L}$ s'il y a risque de confusion sur le sous-groupe parabolique considéré.

Le foncteur $\mathcal{L}$ est exact et commute avec le dual, le produit tensoriel, la somme directe et les algèbres symétriques et extérieures [**J**, I.5]. On a de plus une action de G sur les sections globales de $\mathcal{L}(V)$ donnée par $g \cdot s(hB) = s(g^{-1}hB)$, pour $s \in H^0(G/P, \mathcal{L}(V))$ et $g, h \in G$.

Enfin, il suit de [**EGA2**, 2.1.7.9] que pour un fibré vectoriel $p : G \times^P V \to G/B$, on a $p_*\mathcal{O}_{G\times^P V} = \mathcal{L}(SV^*)$.

2.8.2. Formule de projection

Supposons que V est un G-module, alors V est aussi un P-module par restriction et on peut construire le fibré $G \times^P V$. On a alors un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} G \times^P V \arrow[r] \arrow[d] & G \times^G V = V \arrow[d] \\ G/P \arrow[r, "f"] & G/G = \operatorname{Spec} k \end{tikzcd}$$

Supposons que $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_{G/P}$-module quasi-cohérent, alors on peut se servir du morphisme f et de la formule de projection (théorème 2.3.5) pour conclure que

$$H^q(G/P, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_P(V)) = H^q(G/P, \mathcal{F}) \otimes V.$$

2.8.3. Théorème de Borel–Weil–Bott

Soit $P = LV$ un sous-groupe parabolique de G et sa décomposition de Levi. Soit aussi $\lambda \in X(T)$ un poids dominant par rapport au système de racines de L. On peut considérer comme à la section 2.6 le L-module irréductible de plus haut poids λ qu'on note $V_{L,\lambda}$. On peut faire de $V_{L,\lambda}$ un P-module où l'action de V est triviale. On notera $V_{P,\lambda}$ ce P-module et $\mathcal{L}_{P,\lambda}$ son faisceau de sections. On écrira aussi simplement $\mathcal{L}_\lambda$ lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion à propos du sous-groupe parabolique considéré.

Dans le cas où P est un sous-groupe de Borel, les modules irréductibles de $L = T$ sont simplement les caractères de T. En particulier, ils sont sont tous de dimension 1.

Le théorème de Borel–Weil–Bott décrit complétement les groupes de cohomologie $H^i(G/P, \mathcal{L}^*_{P,\lambda})$.

Théorème 2.8.2. Soit G un groupe algébrique réductif, P un sous-groupe parabolique, T un tore maximal de P, λ un poids de $X(T)$ et ρ la demi-somme des racines positives.

(i) Si $\lambda + \rho$ est singulier, alors pour tout $i \geq 0$,

$$H^i(G/P, \mathcal{L}^*_{P,\lambda}) = 0.$$

(ii) Si $\lambda + \rho$ est régulier, alors il existe un unique w dans le groupe de Weyl tel que $\mu = w \cdot (\lambda + \rho) - \rho$ est dominant par rapport aux racines de G. Soit V^G_μ le G-module irréductible de plus haut poids μ, alors

$$H^i(G/P, \mathcal{L}^*_{P,\lambda}) = \begin{cases} V^*_{G,\mu} & \text{si } i = l(w) \\ 0 & \text{si } i \neq l(w). \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Théorème 2 de [**D**] ou [**AC**]. □

2.8.4. Fibré cotangent d'une variété de drapeaux

On a déjà discuté du fibré cotangent des variétés non singulières à la section 1.6. On s'intéresse maintenant spécifiquement au fibré cotangent d'une variété de drapeaux.

D'abord, G agit sur G/P par multiplication à gauche. On a donc pour chaque $g \in G$ un morphisme

$$g : G/P \to G/P$$
$$hP \mapsto ghP$$

En considérant la différentielle, on obtient une action de G sur le fibré tangent

$$G \times T_{hP}(G/P) \to T_{ghP}(G/P)$$
$$g \cdot (hP, x) \mapsto dg_{hP}(x).$$

Cette action fait de $T(G/P)$ un fibré G-équivariant. La fibre à l'identité est $T_e(G/P) = \mathfrak{g}/\mathfrak{p}$, il s'agit d'un P-module tel que $T(G/P) = G \times^P (\mathfrak{g}/\mathfrak{p})$. L'action de P sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ est l'adjointe : $p \cdot (x + \mathfrak{p}) = \mathrm{Ad}_p(x) + \mathfrak{p}$.

En considérant les applications duales, on obtient une action de G sur $T^*(G/P)$:

$$G \times T^*_{hP}(G/P) \to T^*_{g^{-1}hP}(G/P)$$
$$g \cdot (hP, x) \mapsto dg^*_{g^{-1}hP}(x).$$

Le fibré cotangent est aussi G-équivariant avec cette action et on a $T(G/P) = G \times^P (\mathfrak{g}/\mathfrak{p})^*$ [**CG**, 1.4.3]. L'action de P sur $(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})^*$ est la coadjointe : $p \cdot (x + \mathfrak{p}) = \mathrm{Ad}^*_p(x) + \mathfrak{p}$.

Définition 2.8.3. Soit X une variété non singulière. Une *forme symplectique* est une 2-forme $\omega \in \bigwedge^2 \Omega_X$ non-dégénérée et fermée c'est-à-dire une forme vérifiant

(i) si $x \in X$, $v \in T_x X$ et $\omega(v, w) = 0$ pour tout $w \in T_x X$, alors $v = 0$;

(ii) $d\omega = 0$, où d est la dérivée extérieure.

Le fibré cotangent $T^*(G/P)$ d'une variété non singulière est naturellement muni d'une forme symplectique ω [**CG**, 1.1.3]. Conséquemment, la forme

$$\underbrace{\omega \wedge \cdots \wedge \omega}_{\dim G/P \text{ termes}} \in \bigwedge^{2 \dim G/P} \Omega_{T^*(G/P)} = \omega_{T^*(G/P)}$$

est une section jamais nulle du fibré canonique. L'existence d'une telle section sur un fibré vectoriel de rang 1 implique que le fibré est trivial. On conclut en particulier que $\omega_{T^*(G/P)} = \mathcal{O}_{T^*(G/P)}$.

Chapitre 3

FAISCEAU DES OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS SUR UNE VARIÉTÉ DE DRAPEAUX

Dans ce chapitre, on démontre le principal théorème de ce mémoire, à savoir un théorème d'annulation de la cohomologie supérieure du faisceau des opérateurs différentiels sur une variété de drapeaux. Plus précisément, on démontre que si G est un groupe algébrique semi-simple, P un sous-groupe parabolique de G et $\mathcal{D}$ le faisceau des opérateurs différentiels de G/P, alors on a $H^i(G/P, \mathcal{D}) = 0$ pour $i > 0$.

On montrera d'abord un théorème analogue pour l'associé gradué de $\mathcal{D}$, à savoir que $H^i(G/P, \operatorname{Gr}\mathcal{D}) = 0$ pour $i > 0$. En vertu de l'identification de $\operatorname{Gr}\mathcal{D}$ avec $\pi_*\mathcal{O}_{T^*(G/P)}$ du théorème 1.7.4, on pourra travailler avec le fibré cotangent $\pi : T^*(G/P) \to G/P$ et montrer que $H^i(G/P, \pi_*\mathcal{O}_{T^*(G/P)}) = 0$ pour $i > 0$.

On donne en fait trois preuves indépendantes de ce théorème. La preuve de la section 3.1 est de Hesselink [**He**] et ne fonctionne que dans le cas particulier où le sous-groupe parabolique P est un sous-groupe de Borel. La preuve de la section 3.2 est de Kempf [**Ke**] et on doit supposer que le radical unipotent V du sous-groupe parabolique $P = LV$ agit trivialement par l'adjointe sur son algèbre de Lie $\mathfrak{v}$. On peut aisément vérifier que cette hypothèse est satisfaite lorsque G/P est un espace projectif ou plus généralement une grassmanienne. Enfin, la preuve de la section 3.3 est attribuée à R. Elkik et est publiée dans [**KP**]. Elle traite du cas général où P est un sous-groupe parabolique arbitraire en faisant appel au théorème de Grauert–Riemenschneider.

Dans la dernière section, on conclut finalement que $H^i(G/P, \mathcal{D}) = 0$ pour $i > 0$.

3.1. PREMIÈRE PREUVE

Soit G un groupe algébrique semi-simple, $B = TU$ un sous-groupe de Borel et $\mathfrak{g}, \mathfrak{b}, \mathfrak{t}, \mathfrak{u}$ les algèbres de Lie correspondant respectivement à G, B, T et U. Soit Φ le système de racines de G et Δ la base de Φ telle que les racines positives soient celles de $\mathfrak{u}$.

Le fibré cotangent $T^*(G/B)$ s'identifie avec $G \times^B (\mathfrak{g}/\mathfrak{b})^*$ (cf. section 2.8.4). On peut de plus identifier $(\mathfrak{g}/\mathfrak{b})^*$ avec $\mathfrak{u}$, où B agit sur $\mathfrak{u}$ par l'action adjointe. On a alors

$$T^*(G/B) \simeq G \times^B \mathfrak{u}$$

$$\pi_* \mathcal{O}_{T^*(G/B)} \simeq \mathcal{L}(S\mathfrak{u}^*).$$

Nous montrerons au théorème 3.1.8 que pour $i > 0$,

$$H^i(G/B, \mathcal{L}(S\mathfrak{u}^*)) = H^i(G/B, \pi_* \mathcal{O}_{T^*(G/B)}) = 0.$$

Dans la preuve, on utilisera le complexe de Koszul (cf. 2.1) associé à la suite exacte

$$0 \longrightarrow (\mathfrak{g}/\mathfrak{u})^* \simeq \mathfrak{b} \longrightarrow \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{u}^* \longrightarrow 0.$$

On construira un double complexe en considérant un complexe de Čech pour chacun des termes $\bigwedge^q \mathfrak{b} \otimes S^r \mathfrak{g}^*$ du complexe de Koszul. Nous utiliserons ensuite un argument de suites spectrales.

Nous aurons en particulier besoin de connaître la cohomologie des termes du complexe de Koszul c'est-à-dire de calculer $H^p(G/B, \mathcal{L}(\bigwedge^q \mathfrak{b} \otimes S^r \mathfrak{g}^*))$. La principale difficulté est en fait de calculer $H^p(G/B, \mathcal{L}(\bigwedge^q \mathfrak{b}))$. Nous rassemblons ces calculs dans la sous-section 3.1.1.

3.1.1. Lemme sur la cohomologie de $\mathcal{L}\left(\bigwedge^q \mathfrak{b}\right)$

Soit $x_\alpha \in \mathfrak{u}$ un vecteur qui génère $\mathfrak{g}_\alpha$. Comme $\mathfrak{u}$ est la somme directe des $\mathfrak{g}_\alpha$ pour $\alpha \in \Phi^+$, l'ensemble $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \Phi^+}$ est une base de $\mathfrak{u}$. On peut construire une base de $\bigwedge^s \mathfrak{u}$:

$$\Lambda = \left\{ \bigwedge_{\alpha \in \theta} x_\alpha : \theta \subset \Phi^+ \text{ et } |\theta| = s \right\}$$

où $|\cdot|$ désigne la cardinalité. On peut faire de $\bigwedge^s \mathfrak{u}$ un B-module avec l'action donnée sur la base Λ par

$$B \times \bigwedge^s \mathfrak{u} \to \bigwedge^s \mathfrak{u}$$

$$g \cdot (x_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge x_{\alpha_s}) \mapsto g \cdot x_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge g \cdot x_{\alpha_s}$$

Pour chacun des vecteurs $\bigwedge_{\alpha\in\theta} x_\alpha \in \Lambda$, on obtient un poids de $\bigwedge^s \mathfrak{u}$:

$$\begin{aligned} t\cdot(x_{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge x_{\alpha_s}) &= t\cdot x_{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge t\cdot x_{\alpha_s} \\ &= \alpha_1(t)x_{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\alpha_s(t)x_{\alpha_s} \\ &= (\alpha_1+\cdots+\alpha_s)(t)(x_{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge x_{\alpha_s}). \end{aligned}$$

Comme Λ est une base de $\bigwedge^s \mathfrak{u}$, on obtient tous les poids de cette manière. On conclut que l'ensemble des poids de $\bigwedge^s \mathfrak{u}$ est

$$\left\{\sum_{\alpha\in\theta}\alpha : \theta\subset\Phi^+ \text{ et } |\theta| = s\right\}.$$

Similairement, on a $\mathfrak{b} = \mathfrak{t}\oplus\mathfrak{u}$ et donc si on choisit une base $T = \{t_1,\ldots,t_n\}$ de $\mathfrak{t}$, on obtient une base de $\bigwedge^s \mathfrak{b}$:

$$\left\{\left(\bigwedge_{\alpha\in\theta} x_\alpha\right)\wedge\left(\bigwedge_{t\in\Gamma} t\right) : \theta\subset\Phi^+, \Gamma\subset T \text{ et } |\theta|+|\Gamma| = s\right\}.$$

Les poids de $\mathfrak{t}$ sont tous nuls et il suit que les poids de $\bigwedge^s \mathfrak{b}$ sont

$$\left\{\sum_{\alpha\in\theta}\alpha : \theta\subset\Phi^+, \Gamma\subset T \text{ et } |\theta|+|\Gamma| = s\right\}.$$

Avant de continuer, on fixe quelques notations. Si $\theta\subset\Phi$, on écrit $\langle\theta\rangle$ pour la somme des racines de θ, c'est-à-dire $\langle\theta\rangle = \sum_{\alpha\in\theta}\alpha$. Si $w\in W$, on écrit $\theta(w)$ pour $w\cdot\Phi^+\cap -\Phi^+$, l'ensemble des racines positives qui sont appliquées par w dans les racines négatives. On a en particulier $|\theta(w)| = l(w)$ (cf. section 2.4.2).

Lemme 3.1.1. Le groupe de Weyl permute les poids de la forme $\rho - \langle\theta\rangle$, où $\theta\subset\Phi^+$.

DÉMONSTRATION. Étant donné que W permute les poids d'un G-module irréductible, il suffira de montrer que les poids $\rho-\langle\theta\rangle$ pour $\theta\subset\Phi^+$ sont précisément les poids du G-module irréductible V de plus haut poids ρ. On utilise pour cela la formule de caractère de Weyl (théorème 2.6.5). On aura aussi besoin d'une légère variante du dénominateur de Weyl

$$\sum_{w\in W}(-1)^{l(w)}e^{w\cdot 2\rho} = e^{2\rho}\prod_{\alpha\in\Phi^+}(1-e^{-2\alpha}).$$

On a alors

$$\begin{aligned}\chi(V) &= \frac{\sum_{w\in W}(-1)^{l(w)}e^{w\cdot(\rho+\rho)}}{\sum_{w\in W}(-1)^{l(w)}e^{w\cdot\rho}}\\ &= \frac{e^{2\rho}\prod_{\alpha\in\Phi^+}(1-e^{-2\alpha})}{e^{\rho}\prod_{\alpha\in\Phi^+}(1-e^{-\alpha})}\\ &= e^{\rho}\prod_{\alpha\in\Phi^+}\left(1+e^{-\alpha}\right).\end{aligned}$$

En développant le dernier produit comme une somme, on obtient comme désiré

$$\chi(V) = \sum_{\theta\subset\Phi^+} e^{\rho-\langle\theta\rangle}.$$

$\square$

Lemme 3.1.2. Un poids $\rho - \langle\theta\rangle$, où $\theta \subset \Phi^+$, est régulier si et seulement si il est dans la W-orbite de ρ.

DÉMONSTRATION. D'un côté, on sait que ρ et toute son orbite sont des poids réguliers. Réciproquement, supposons que $\rho-\langle\theta\rangle$ est régulier. Alors il existe un w tel que $w\cdot(\rho-\langle\theta\rangle)$ est régulier et dominant. Comme W permute les poids de la forme $\rho - \langle\theta\rangle$, on peut écrire $w\cdot(\rho-\langle\theta\rangle) = \rho - \langle\theta'\rangle$ pour un $\theta' \subset \Phi^+$. Nous allons montrer que $\langle\theta'\rangle = 0$, ce qui établira le résultat.

Pour toute racine positive $\alpha \in \Phi^+$, on a

$$0 < \langle\rho - \langle\theta'\rangle, \alpha\rangle = 1 - \langle\langle\theta'\rangle, \alpha\rangle.$$

Il suit que $(\langle\theta'\rangle, \alpha) \leq 0$. On peut écrire $\langle\theta'\rangle = \sum_{\alpha\in\Phi^+} k_\alpha\alpha$ où k_α est 0 ou 1 et en particulier $k_\alpha \geq 0$. Maintenant on a

$$(\langle\theta'\rangle, \langle\theta'\rangle) = \sum_{\alpha\in\Phi^+} k_\alpha(\langle\theta'\rangle, \alpha) \leq 0.$$

Il suit que $(\langle\theta'\rangle, \langle\theta'\rangle) = 0$ et donc que $\langle\theta'\rangle = 0$. $\square$

Lemme 3.1.3. Soit $w \in W$. Si $w \neq 1$, alors on peut écrire $w = w'\tau_\alpha$ avec $\alpha \in \Delta$ et $l(w') = l(w) - 1$. Dans ce cas, on a $\theta(w) = \tau_\alpha \cdot \theta(w') \cup \{\alpha\}$.

DÉMONSTRATION. Pour l'inclusion $\theta(w) \supset \tau_\alpha \cdot \theta(w') \cup \{\alpha\}$, il suffit de montrer que si $\beta \in \tau_\alpha \cdot \theta(w') \cup \{\alpha\}$, alors β est une racine positive et $w\cdot\beta$ est une racine négative. Nous considérerons séparément deux cas : soit $\beta = \alpha$ ou encore $\beta \in \tau_\alpha \cdot \theta(w')$.

Commençons par le cas $\beta = \alpha$. On a déjà que $\alpha \in \Delta$, et en particulier que α est positive. Maintenant, si $w'\cdot\alpha$ était une racine négative, on pourrait construire une décomposition de w en réflexions simples de longueur $l(w') - 1$ (cf. [**H1**, 10.2.C]). Il n'existe cependant pas de telle décomposition puisque $l(w) = l(w') + 1$. Il suit que $w' \cdot \alpha$ est positive et donc $w \cdot \alpha = w'\tau_\alpha \cdot \alpha = -w' \cdot \alpha$ est une racine négative.

Supposons maintenant que $\beta \in \tau_\alpha \cdot \theta(w')$, c'est-à-dire qu'il existe un $\beta' \in \theta(w')$ tel que $\beta = \tau_\alpha \cdot \beta'$. Comme β' est une racine positive et que τ_α permute les racines de $\Phi^+ \setminus \{\alpha\}$, on a que β est une racine positive. Il reste à montrer que $w \cdot \beta$ est négative. Par hypothèse, $w' \cdot \beta'$ est une racine négative et on a

$$w \cdot \beta = w\tau_\alpha \cdot \beta' = w'\tau_\alpha\tau_\alpha \cdot \beta' = w' \cdot \beta'.$$

On a démontré que $\tau_\alpha \cdot \theta(w') \cup \{\alpha\} \subset \theta(w)$. Ce sont respectivement des ensembles de cardinalité $l(w') + 1$ et $l(w)$. Comme $l(w') + 1 = l(w')$, on conclut que ce sont des ensembles de même cardinalité et donc $\theta(w) = \tau_\alpha \cdot \theta(w') \cup \{\alpha\}$. □

Lemme 3.1.4. Si $\theta \subset \Phi^+$ est tel que $\langle\theta\rangle = \langle\theta(w)\rangle$, alors $\theta = \theta(w)$.

DÉMONSTRATION. On démontre le lemme par récurrence sur la longueur de $w \in W$. Si $l(w) = 0$, alors $w = 1$ et le résultat suit. Si $l(w) > 0$, on peut écrire $w = w'\tau_\alpha$ avec $\alpha \in \Delta$ et $l(w') = l(w) - 1$. Soit $\theta \subset \Phi^+$ tel que $\langle\theta\rangle = \langle\theta(w)\rangle$. Il suit alors du lemme 3.1.3 que $\theta(w) = \tau_\alpha \cdot \theta(w') \cup \{\alpha\}$ et en particulier que

$$\langle\theta(w)\rangle = \tau_\alpha \cdot \langle\theta(w')\rangle + \alpha. \tag{$*$}$$

On montre que α est dans θ. Si ce n'est pas le cas, $\theta' = \{\alpha\} \cup \tau_\alpha \cdot \theta$ est un sous-ensemble des racines positives. En utilisant $(*)$, on obtient

$$\begin{aligned}\langle\theta'\rangle &= \alpha + \tau_\alpha \cdot \langle\theta\rangle \\ &= \alpha + \tau_\alpha \cdot \langle\theta(w)\rangle \\ &= \alpha + \tau_\alpha \cdot (\tau_\alpha \cdot \langle\theta(w')\rangle + \alpha) \\ &= \langle\theta(w')\rangle.\end{aligned}$$

Par l'hypothèse de récurrence, on a $\theta(w') = \theta'$, ce qui est absurde puisque α est dans θ' mais n'est pas dans $\theta(w')$. On conclut que $\alpha \in \theta$.

Pour terminer la preuve, on pose $\theta'' = \tau_\alpha \cdot (\theta \setminus \{\alpha\})$. En utilisant $(*)$, on obtient

$$\begin{aligned}\langle\theta''\rangle &= \tau_\alpha \cdot (\langle\theta\rangle - \alpha) \\ &= \tau_\alpha \cdot (\langle\theta(w)\rangle - \alpha) \\ &= \tau_\alpha\tau_\alpha \cdot \langle\theta(w')\rangle \\ &= \langle\theta(w')\rangle.\end{aligned}$$

Par l'hypothèse de récurrence, on conclut que $\theta'' = \theta(w')$. Finalement, on a comme désiré

$$\theta(w) = \tau_\alpha \cdot \theta(w') \cup \{\alpha\} = \tau_\alpha \cdot (\tau_\alpha \cdot (\theta \setminus \{\alpha\})) \cup \{\alpha\} = \theta.$$

□

Théorème 3.1.5. Soit $\theta \subset \Phi^+$. Le poids $\rho - \langle\theta\rangle$ est régulier si et seulement si $\theta = \theta(w)$ pour un $w \in W$. Dans ce cas, $\rho - \langle\theta(w)\rangle = w \cdot \rho$.

DÉMONSTRATION. Par le lemme 3.1.2, les poids réguliers sont $w \cdot \rho = \rho - \langle\theta(w)\rangle$. Par le lemme 3.1.4, on a $\rho - \langle\theta\rangle = \rho - \langle\theta(w)\rangle$ pour $\theta \subset \Phi^+$ si et seulement si $\theta = \theta(w)$.

L'argument qu'on vient de donner est essentiellement celui de [**Ma**], une autre preuve est donnée dans [**Ko**] (et [**C2**]). □

Lemme 3.1.6. Soit $\theta \subset \Phi^+$. Alors

(i) S'il existe $w \in W$ tel que $\theta = \theta(w)$, alors

$$H^i(G/B, \mathcal{L}_{\langle\theta\rangle}) = \begin{cases} k & \text{si } i = l(w) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(ii) S'il n'existe pas de $w \in W$ tel que $\theta = \theta(w)$, alors pour tout $i \geq 0$,

$$H^i(G/B, \mathcal{L}_{\langle\theta\rangle}) = 0.$$

DÉMONSTRATION. Il suffit d'appliquer le théorème de Borel–Weil–Bott (théorème 2.8.2). □

Lemme 3.1.7. Pour tout $p > q$,

$$H^p\left(G/B, \mathcal{L}\left(\bigwedge^q \mathfrak{b}\right)\right) = 0.$$

DÉMONSTRATION. Il existe donc une filtration de $\mathcal{L}\left(\bigwedge^q \mathfrak{b}\right)$

$$0 = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_m = \mathcal{L}\left(\bigwedge^q \mathfrak{b}\right)$$

telle que pour tout $i = 1, \ldots, m$, on a $\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i-1} \simeq \mathcal{L}_{\lambda_i}$ où $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$ sont les poids de $\bigwedge^q \mathfrak{b}$ dans un certain ordre.

On démontre par récurrence sur i que $H^p(G/B, \mathcal{F}_i) = 0$ pour $p > q$. Si $i = 1$, alors $\mathcal{F}_1 = \mathcal{L}_{\lambda_1}$ et le résultat suit du lemme 3.1.6.

Si $i > 1$, on considère la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_i \longrightarrow \mathcal{F}_{i+1} \longrightarrow \mathcal{L}_{\lambda_i} \longrightarrow 0.$$

On obtient une suite exacte longue en cohomologie

$$\cdots \longrightarrow H^p(G/B, \mathcal{F}_i) \longrightarrow H^p(G/B, \mathcal{F}_{i+1}) \longrightarrow H^p(G/B, \mathcal{L}_{\lambda_i}) \longrightarrow \cdots .$$

Quel que soit λ_i, il suit du corollaire 3.1.6 que $H^p(G/B, \mathcal{L}_{\lambda_i}) = 0$ pour $p > q$. Par l'hypothèse de récurrence, on a de plus que $H^p(G/B, \mathcal{F}_i) = 0$ pour $p > q$. La suite exacte devient donc pour $p > q$

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow H^p(G/B, \mathcal{F}_{i+1}) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots .$$

On conclut comme désiré que $H^p(G/B, \mathcal{F}_{i+1}) \simeq 0$ pour $p > q$. □

Remarque. L'argument du lemme 3.1.7 peut être adapté pour montrer que la cohomologie de $\mathcal{L}\left(\bigwedge^q \mathfrak{u}\right)$ est diagonale c'est-à-dire $H^p\left(G/B, \bigwedge^q \mathfrak{u}\right) = 0$ pour $p \neq q$. En fait, une induction un peu plus méticuleuse démontre que si on note n_r le nombre d'éléments dans le groupe de Weyl de longueur r, alors on a

$$H^p\left(G/B, \mathcal{L}\left(\bigwedge^q \mathfrak{u}\right)\right) = \begin{cases} k^{n_r} & \text{si } p = q \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si on travaille sur $\mathbb{C}$, on peut se servir de ce résultat pour calculer la cohomologie complexe de G/B. Comme $\Omega^q_{G/B} \simeq \bigwedge^q \mathfrak{u}$, il suit de la décomposition de Hodge [**GH**, 0.7] que

$$H^{2r}(G/B, \mathbb{C}) \simeq \bigoplus_{p+q=2r} H^p\left(G/B, \mathcal{L}\left(\bigwedge^q \mathfrak{u}\right)\right) = k^{n_r}$$

et que

$$H^{2r+1}(G/B, \mathbb{C}) = 0.$$

3.1.2. Démonstration du théorème

Nous sommes maintenant prêts à démontrer le principal théorème de cette section.

Théorème 3.1.8. Pour $p > 0$,

$$H^p(G/B, \mathcal{L}(S\mathfrak{u}^*)) = 0.$$

DÉMONSTRATION. On a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathfrak{u} \longrightarrow \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{u} \simeq \mathfrak{b}^* \longrightarrow 0$$

et en dualisant la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathfrak{b} \longrightarrow \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{u}^* \longrightarrow 0.$$

On considère le complexe de Koszul (cf. 2.1) associé

$$\cdots \longrightarrow \bigwedge^{p-r} \mathfrak{b} \otimes S^p \mathfrak{g}^* \longrightarrow \bigwedge^{p-r-1} \mathfrak{b} \otimes S^{p+1} \mathfrak{g}^* \longrightarrow \cdots \longrightarrow S^r \mathfrak{g}^* \longrightarrow 0.$$

Soit $\mathfrak{U}$ un recouvrement de G/B par des ouverts affines. Pour chaque terme du complexe de Koszul $\bigwedge^{p-r} \mathfrak{b} \otimes S^p \mathfrak{g}^*$, on considère le complexe de Čech

$$C^{p,\bullet} = C^\bullet\left(\mathfrak{U}, \mathcal{L}\left(\bigwedge^{p-r} \mathfrak{b} \otimes S^q \mathfrak{g}^*\right)\right).$$

Les différentielles du complexe de Koszul induisent des différentielles

$$d^I : C^q\left(\mathfrak{U}, \mathcal{L}\left(\bigwedge^{p-r} \mathfrak{b} \otimes S^p \mathfrak{g}^*\right)\right) \to C^q\left(\mathfrak{U}, \mathcal{L}\left(\bigwedge^{p-r-1} \mathfrak{b} \otimes S^{p+1} \mathfrak{g}^*\right)\right).$$

Les différentielles des complexes de Čech, disons $\check{d}$, commutent avec les d^I. Il suit que l'on obtient un double complexe en définissant d^{II} comme $-1^q \check{d}$.

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\
\cdots \arrow[r] & C^{p,q+2} \arrow[u] \arrow[r] & C^{p+1,q+2} \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & C^{r,q+2} \arrow[u] \arrow[r] & 0 \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C^{p,q+1} \arrow[u] \arrow[r] & C^{p+1,q+1} \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & C^{r,q+1} \arrow[u] \arrow[r] & 0 \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C^{p,q} \arrow[u, "d^{II}"] \arrow[r, "d^I"] & C^{p+1,q} \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & C^{r,q} \arrow[u] \arrow[r] & 0 \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \\
 & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

On considère les suites spectrales du double complexe. Pour ${}^I E_2^{\bullet,\bullet}$, on considère d'abord la cohomologie par rapport à d^{II}. Comme chaque colonne est un complexe de Čech (à un signe près), on a

$$H_{II}^q(C^p) = \check{H}^q\left(\mathfrak{U}, \mathcal{L}\left(\bigwedge^{p-r} \mathfrak{b} \otimes S^p \mathfrak{g}^*\right)\right).$$

Comme $\mathfrak{U}$ est un recouvrement par des ouverts affines et que les faisceaux sont tous quasi-cohérents, la cohomologie de Čech est la même que la cohomologie des faisceaux (théorème 2.3.8) c'est-à-dire

$$H_{II}^q(C^p) = H^q\left(\mathfrak{U}, \mathcal{L}\left(\bigwedge^{p-r} \mathfrak{b} \otimes S^p \mathfrak{g}^*\right)\right).$$

Enfin, comme $S^p\mathfrak{g}^*$ est un G-module, la formule de projection (section 2.8.2) donne

$$H^q_{II}(C^p) = H^q\left(\mathfrak{U}, \mathcal{L}\left(\bigwedge^{p-r}\mathfrak{b}\right)\right) \otimes S^p\mathfrak{g}^*.$$

En vertu du lemme 3.1.7, on a que $H^q_{II}(C^p) = 0$ si $q > p - r$. On en déduit que ${}^{I}E_2^{p,q}$ et donc ${}^{I}E_\infty^{p,q}$ sont nuls pour $q > p - r$. On conclut que ${}^{I}E_\infty^{\bullet,\bullet}$ est triangulaire, c'est-à-dire de la forme suivante :

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\cdots \arrow[r] & {}^{I}E_\infty^{r-3,3} \arrow[r] \arrow[u] & 0 \arrow[r] \arrow[u] & 0 \arrow[r] \arrow[u] & 0 \arrow[r] \arrow[u] & 0 \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & {}^{I}E_\infty^{r-3,2} \arrow[r] \arrow[u] & {}^{I}E_\infty^{r-2,2} \arrow[r] \arrow[u] & 0 \arrow[r] \arrow[u] & 0 \arrow[r] \arrow[u] & 0 \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & {}^{I}E_\infty^{r-3,1} \arrow[r] \arrow[u] & {}^{I}E_\infty^{r-2,1} \arrow[r] \arrow[u] & {}^{I}E_\infty^{r-1,1} \arrow[r] \arrow[u] & 0 \arrow[r] \arrow[u] & 0 \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & {}^{I}E_\infty^{r-3,0} \arrow[r] \arrow[u] & {}^{I}E_\infty^{r-2,0} \arrow[r] \arrow[u] & {}^{I}E_\infty^{r-1,0} \arrow[r] \arrow[u] & {}^{I}E_\infty^{r,0} \arrow[r] \arrow[u] & 0 \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \\
 & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

On considère maintenant ${}^{II}E_2^{\bullet,\bullet}$. Étant donné que $U \in \mathfrak{U}$ est un ouvert affine et que les faisceaux sont quasi-cohérents, les foncteurs de sections $\Gamma(U, \cdot)$ sont exacts. On peut conséquemment se servir de la proposition 2.1.1 concernant les complexes de Koszul pour calculer la cohomologie par rapport à d^I. On obtient que le seul groupe de cohomologie $H^p_I(C^q)$ non nul est

$$H^r_I(C^q) = C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{L}(S^r\mathfrak{u}^*)).$$

Le complexe $H^r_I(C^\bullet)$ est alors le complexe de Čech $C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{L}(S^r\mathfrak{u}^*))$ (à un signe près). Étant donné que $\mathfrak{U}$ est un recouvrement par des ouverts affines et que le faisceau $\mathcal{L}(S^r\mathfrak{u}^*)$ est quasi-cohérent, on a l'égalité entre la cohomologie de Čech et la cohomologie des faisceaux. On obtient donc le terme ${}^{II}E_2^{p,q}$ de la suite spectrale. Visiblement, il s'agit aussi du terme ${}^{II}E_\infty^{p,q}$.

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[u] & H^2(G/B, \mathcal{L}(S^r\mathfrak{u}^*)) \arrow[r] \arrow[u] & 0 \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[u] & H^1(G/B, \mathcal{L}(S^r\mathfrak{u}^*)) \arrow[r] \arrow[u] & 0 \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[u] & H^0(G/B, \mathcal{L}(S^r\mathfrak{u}^*)) \arrow[r] \arrow[u] & 0 \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \\
 & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Comme le double complexe est tel que $C^{p,q} = 0$ pour $p < r - \dim \mathfrak{b}$ et $q < 0$, le théorème 2.2.3 donne que ${}^{I}E_\bullet^{\bullet,\bullet}$ et ${}^{II}E_\bullet^{\bullet,\bullet}$ convergent toute deux vers $H^\bullet(T)$, où T est le complexe total. En comparant les suites spectrales et en notant que ${}^{I}E_\infty^{\bullet,\bullet}$ est triangulaire, on conclut que $H^p(G/B, \mathcal{L}(S^r\mathfrak{u}^*)) = 0$ pour tout $p > 0$.

Enfin, comme la somme directe commute avec $\mathcal{L}$ et la cohomologie, on a pour $p > 0$,

$$H^p(G/B, \mathcal{L}(S\mathfrak{u}^*)) = \bigoplus_{r \geq 0} H^p(G/B, \mathcal{L}(S^r\mathfrak{u}^*)) = 0.$$

□

Corollaire 3.1.9. Pour $p > 0$,

$$H^p(G/B, \pi_*\mathcal{O}_{T^*(G/B)}) = 0.$$

DÉMONSTRATION. Comme $\pi_*\mathcal{O}_{T^*(G/B)} \simeq \mathcal{L}(S\mathfrak{u}^*)$, ce n'est que le théorème 3.1.8.

□

3.2. DEUXIÈME PREUVE

Soit G un groupe algébrique semi-simple et P un sous-groupe parabolique de G. Soit aussi $P = LV$ la décomposition de Levi de P. On peut supposer que P est un sous-groupe parabolique standard pour un sous-groupe de Borel $B = TU$. On écrira $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{v}$ pour les algèbres de Lie de G et V respectivement. Soit Φ les racines de G et Δ la base de Φ telle que les racines positives soient celles de $\mathfrak{u}$.

Théorème 3.2.1. Soit $P = LV$ tel que V agit trivialement sur $\mathfrak{v}$. Alors pour $i > 0$,

$$H^p(G/P, \mathcal{L}(S\mathfrak{v}^*)) = 0.$$

DÉMONSTRATION. Si V agit trivialement sur $\mathfrak{v}$, alors il suit que V agit aussi trivialement sur le P-module $S^q\mathfrak{v}$. Dans ce cas, P agit comme L qui est un groupe réductif. On peut donc décomposer $S^q\mathfrak{v}$ comme une somme directe de P-modules irréductibles de la forme $V_{P,\lambda}$ (cf. section 2.8.3) :

$$S^q\mathfrak{v} = \bigoplus_{i=1}^{n} V_{P,\lambda_i}.$$

Comme chaque poids λ_i est un plus haut poids pour un certain L-module irréductible, les poids λ_i sont tous dominants par rapport au système de racines de L. Nous montrons maintenant qu'ils sont aussi dominants par rapport au système de racines de G.

Étant donné qu'on a une inclusion $\mathfrak{v} \subset \mathfrak{g}$, il existe un morphisme surjectif $k[\mathfrak{g}] \twoheadrightarrow k[\mathfrak{v}]$. Cette application est en fait un morphisme de B-modules. En identifiant $k[\mathfrak{g}]$ avec $S\mathfrak{g}^*$ et $k[\mathfrak{v}]$ avec $S\mathfrak{v}^*$ et en ne considérant que les éléments homogènes de degré q, on obtient une morphisme surjectif de B-modules

$$S^q\mathfrak{g}^* \twoheadrightarrow S^q\mathfrak{v}^*.$$

En dualisant, on obtient aussi un morphisme injectif de B-modules

$$j : S^q\mathfrak{v} \hookrightarrow S^q\mathfrak{g}.$$

Le P-module V_{P,λ_i} contient notamment un sous-espace de dimension 1 stable sous l'action de B (cf. section 2.7.1), et donc un vecteur maximal de poids λ_i. Cette droite B-stable est appliquée par j sur une droite B-stable dans $S^q\mathfrak{g}$. Il suit donc que $S^q\mathfrak{g}$ contient aussi un vecteur maximal de poids λ_i. Étant donné que $S^q\mathfrak{g}$ est un G-module, on conclut que λ_i doit aussi être dominant par rapport au système de racines de G (cf. section 2.7.1).

Étant donné que λ_i est dominant par rapport au système de racines de G, il suit du théorème de Borel–Weil–Bott que $H^p(G/P, \mathcal{L}(V^*_{P,\lambda_i}))$ ne peut être non nul que si $p = 0$. En particulier, on a pour $p > 0$

$$H^p(G/P, \mathcal{L}(V^*_{P,\lambda_i})) = 0.$$

Comme la somme directe commute avec la cohomologie, on a pour $p > 0$

$$H^p\left(G/P, \mathcal{L}(S^q\mathfrak{v}^*)\right) = H^p\left(G/P, \bigoplus_{i=1}^{n}(V^*_{P,\lambda_i})\right) = \bigoplus_{i=1}^{n} H^p(G/P, \mathcal{L}(V^*_{P,\lambda_i})) = 0.$$

Enfin, en utilisant encore une fois que la somme directe et $\mathcal{L}$ commutent avec la cohomologie

$$H^p(G/P, \mathcal{L}(S\mathfrak{u}^*)) = \bigoplus_{r \geq 0} H^p(G/P, \mathcal{L}(S^r\mathfrak{u}^*)) = 0.$$

□

3.3. Troisième preuve

Soit G un groupe algébrique semi-simple et P un sous-groupe parabolique de G. Soit aussi $P = LV$ la décomposition de Levi de P. On peut supposer que P est un sous-groupe parabolique standard pour un sous-groupe de Borel $B = TU$. On écrira $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{t}$ et $\mathfrak{u}$ les algèbres de Lie correspondant respectivement à G, P, L, V, B et U. Soit Φ les racines de G et Δ la base de Φ telle que les racines positives soient celles de $\mathfrak{u}$. Soit $\theta \subset \Phi^+$ tel que $P = P_\theta$, Ψ les racines qui sont une combinaison $\mathbb{Z}$-linéaire des racines de θ. Soit W_θ le sous-groupe du groupe de Weyl engendré par les racines de θ et enfin, soit D un système de représentants distingués de W/W_θ.

Si $w \in N(T)$ représente un élément du groupe de Weyl, on écrira pour alléger les notations V^w plutôt que $w^{-1}Vw$, ${}^wV$ plutôt que wVw^{-1} et V_w plutôt que $V \cap {}^wV^-$.

Pour montrer que $H^i(G/P, \pi_*\mathcal{O}_{T^*(G/P)}) = 0$ pour $i > 0$, nous utiliserons le théorème de Grauert–Riemenschneider avec le morphisme de variétés

$$\begin{aligned} f : T^*(G/P) = G \times^P \mathfrak{v} &\to \mathfrak{g} \\ (g, x) &\mapsto \mathrm{Ad}_g(x). \end{aligned}$$

Il faudra en particulier montrer que f est projectif (lemme 3.3.3) et que ses fibres sont génériquement finies (lemme 3.3.2).

Lemme 3.3.1. Soit $d \in D$. Alors $\dim(V \cap V^d) \leq \dim V - l(d)$.

Démonstration. On a

$$V = \prod_{\alpha \in \Phi^+ \setminus \Psi} U_\alpha$$

$$V^d = \prod_{d \cdot \alpha \in \Phi^+ \setminus \Psi} U_\alpha.$$

Il suit que

$$V \cap V^d = \prod_{\alpha \in S} U_\alpha$$

où

$$S = \{\alpha \in \Phi^+ \setminus \Psi \text{ et } d \cdot \alpha \in \Phi^+ \setminus \Psi\}.$$

On pourra donc se contenter de montrer que $|S| \leq \dim V - l(d)$.

On peut séparer l'ensemble des $\dim V$ racines de V comme une union disjointe

$$\{\alpha \in \Phi^+ \setminus \Psi\} = \{\alpha \in \Phi^+ \setminus \Psi \text{ et } d \cdot \alpha \in -\Phi^+\} \,\dot{\cup}\, \{\alpha \in \Phi^+ \setminus \Psi \text{ et } d \cdot \alpha \in \Phi^+\}.$$

Appelons respectivement ces ensembles A et B.

Étant donné que d est un représentant distingué, les racines positives α telles que $d \cdot \alpha \in -\Phi^+$ ne sont pas dans Ψ. On a donc

$$A = \{\alpha \in \Phi^+ \text{ et } d \cdot \alpha \in -\Phi^+\} = \theta(d)$$

et la cardinalité de A est $l(d)$. L'ensemble B est donc de cardinalité $\dim V - l(d)$ et il contient proprement S. On conclut $|S| \leq \dim V - l(d)$, comme désiré. $\square$

Lemme 3.3.2. Il existe un ouvert dense $\mathfrak{v}_D \subset \mathfrak{v}$ tel que, pour tout $z \in \mathfrak{v}_D$, la fibre $f^{-1}(z)$ est finie.

DÉMONSTRATION. La décomposition de Bruhat (cf. théorème 2.7.5) donne une décomposition de G/P et donc une décomposition du fibré $\pi : G \times^P \mathfrak{v} \to G/P$:

$$\begin{array}{ccc} G \times^P \mathfrak{v} & = & \dot{\bigcup}_{d \in D} \pi^{-1}(U_d dP/P) \\ \Big\downarrow \pi & & \\ G/P & = & \dot{\bigcup}_{d \in D} U_d dP/P \end{array}$$

Le recouvrement ouvert donné par les $U_d dP/P$ est trivialisant pour le fibré $G \times^P \mathfrak{v}$, alors on a $\pi^{-1}(U_d dP/P) \simeq U_d d \times \mathfrak{v}$. Pour chaque $d \in D$, on considère la restriction du morphisme f sur $U_d d \times \mathfrak{v}$:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_d : U_d d \times \mathfrak{v} &\to \mathfrak{g} \\ (ud, y) &\mapsto \mathrm{Ad}_{ud}(y) \end{aligned}$$

Comme il n'y a qu'un nombre fini de $d \in D$, on pourra se contenter de montrer qu'il existe un ouvert dense $\mathfrak{v}_D \subset \mathfrak{v}$ tel que pour tout $z \in \mathfrak{v}_D$ et $d \in D$, la fibre $\tilde{f}_d^{-1}(z)$ est finie.

Soit $z \in \mathfrak{v}$ et $(ud, y) \in \tilde{f}_d^{-1}(z)$, alors on a $\mathrm{Ad}_{ud}(y) = z$ et donc $y = \mathrm{Ad}_{d^{-1}u^{-1}}(z)$. Comme $\mathrm{Ad}_{U_d} \mathfrak{v} \subset \mathfrak{v}$, on conclut que $y \in \mathfrak{v} \cap \mathrm{Ad}_{d^{-1}} \mathfrak{v}$.

On pourra conséquemment se contenter de montrer qu'il existe un ouvert dense $\mathfrak{v}_D \subset \mathfrak{v}$ tel que pour tout $z \in \mathfrak{v}_D$ et $d \in D$, la fibre $f_d^{-1}(z)$ est finie, où f_d est le morphisme suivant :

$$f_d : U_d \times (\mathfrak{v} \cap \mathrm{Ad}_{d^{-1}} \mathfrak{v}) \to \mathfrak{v}$$
$$(u, x) \mapsto \mathrm{Ad}_u(x).$$

On commence par choisir un $d \in D$ et à considérer seulement f_d. Si f_d est dominant, alors il existe un ouvert dense, disons $\mathfrak{v}_d$, où pour chaque $z \in \mathfrak{v}_d$, on a

$$\dim f_d^{-1}(z) = \dim(U_d \times (\mathfrak{v} \cap \mathrm{Ad}_{d^{-1}} \mathfrak{v})) - \dim \mathfrak{v}.$$

Comme $V^d = {}^{d^{-1}}V$, il découle du lemme 3.3.1 que $\dim(\mathfrak{v} \cap \mathrm{Ad}_{d^{-1}} \mathfrak{v}) \leq \dim \mathfrak{v} - l(d)$. On a donc pour tout $z \in \mathfrak{v}_d$,

$$\begin{aligned} \dim f_d^{-1}(z) &= \dim U_d + \dim(\mathfrak{v} \cap \mathrm{Ad}_{d^{-1}} \mathfrak{v})) - \dim \mathfrak{v} \\ &\leq \dim U_d + \dim \mathfrak{v} - l(d) - \dim \mathfrak{v} \end{aligned}$$

Comme $\dim U_d = l(d)$, on conclut que $\dim f_d^{-1}(z) \leq 0$ et donc que $\dim f_d^{-1}(z) = 0$. Il suit que $f_d^{-1}(z)$ est finie.

Si f_d n'est pas dominant, alors on pose $\mathfrak{v}_d = \mathfrak{v} \setminus \overline{\mathrm{im}\, f_d}$. Comme dans le cas précédent, $\mathfrak{v}_d$ est un ouvert dense tel que pour tout $z \in \mathfrak{v}_d$, la fibre $f_d^{-1}(z)$ est finie (ou plus précisément vide).

Posons maintenant

$$\mathfrak{v}_D = \bigcap_{d \in D} \mathfrak{v}_d.$$

Comme $\mathfrak{v}$ est irréductible, il s'agit aussi d'un ouvert dense. De plus, on a comme désiré que pour tout $z \in \mathfrak{v}_D$ et $d \in D$, la fibre de $f_d^{-1}(z)$ est finie.

L'argument qu'on vient de donner est celui de [**C1**, 5.2.3]. □

Lemme 3.3.3. Le morphisme f est projectif, et en particulier propre.

DÉMONSTRATION. On a un isomorphisme

$$G \times^P \mathfrak{g} \to G/P \times \mathfrak{g}$$
$$(g, x) \mapsto (gP, g \cdot x).$$

On peut conséquemment factoriser f

$$\begin{tikzcd} G \times^P \mathfrak{v} \arrow[r, hook] \arrow[drrr, "f"'] & G \times^P \mathfrak{g} \arrow[r] & G/P \times \mathfrak{g} \arrow[r, hook] & \mathbb{P}^N \times \mathfrak{g} \arrow[d] \\ & & & \mathfrak{g}. \end{tikzcd}$$

Il suit que f est un morphisme projectif. $\square$

Théorème 3.3.4. Pour $p > 0$,

$$H^p(G/P, \pi_* \mathcal{O}_{T^*(G/P)}) = 0.$$

DÉMONSTRATION. Le morphisme de variétés

$$f : T^*(G/P) \simeq G \times^P \mathfrak{v} \to \operatorname{im} f \subset \mathfrak{g}$$
$$(g, x) \mapsto \mathrm{Ad}_g(x)$$

est surjectif sur son image im f, projectif (lemme 3.3.3) et ses fibres sont génériquement finies (lemme 3.3.2). Il suit du théorème de Grauert–Riemenschneider (théorème 2.3.7) que $R^i f_* \omega_{T^*(G/P)}$ pour $i > 0$. Comme $\omega_{T^*(G/P)} = \mathcal{O}_{T^*(G/P)}$ (cf. section 2.8.4), on a pour $i > 0$,

$$R^i f_* \mathcal{O}_{T^*(G/P)} = 0.$$

Comme im f est l'image d'un morphisme propre, il s'agit d'un fermé. Comme $\mathfrak{g}$ est affine, on conclut que im f est aussi affine. Il suit que $R^q f_* \mathcal{O}_{T^*(G/P)}$ est un faisceau quasi-cohérent pour tout $q \geq 0$, on a pour $p > 0$,

$$H^p(\operatorname{im} f, R^q f_* \mathcal{O}_{T^*(G/P)}) = 0.$$

Il suit que la suite spectrale de Leray (théorème 2.3.6) est dégénérée $E_2^{\bullet,\bullet} = E_\infty^{\bullet,\bullet}$ et on conclut pour $i > 0$

$$H^i(T^*(G/P), \mathcal{O}_{T^*(G/P)}) = H^0(\operatorname{im} f, R^i f_* \mathcal{O}_{T^*(G/P)}) = 0.$$

Maintenant on considère la projection $\pi : T^*(G/P) \to G/P$. Il s'agit d'un morphisme affine et donc pour $q > 0$,

$$H^p(G/P, R^q \pi_* \mathcal{O}_{T^*(G/P)}) = 0.$$

Encore une fois, il suit que la suite spectrale de Leray est dégénérée $E_2^{\bullet,\bullet} = E_\infty^{\bullet,\bullet}$. On conclut que pour $i \geq 0$,

$$H^i(G/P, \pi_* \mathcal{O}_{T^*(G/P)}) = H^i(T^*(G/P), \mathcal{O}_{T^*(G/P)}.$$

En particulier, pour $i > 0$, on a

$$H^i(G/P, \pi_* \mathcal{O}_{T^*(G/P)}) = 0.$$

□

3.4. Théorème principal

On a démontré dans les sections 3.1 et 3.3 que $H^i(G/P, \operatorname{Gr} \mathcal{D}_{G/P}) = 0$ pour $i > 0$. Dans cette section, on obtient la même conclusion pour $\mathcal{D}_{G/P}$ plutôt que pour son associé gradué.

Théorème 3.4.1. Soit G un groupe algébrique semi-simple et $P \subset G$ un sous-groupe parabolique. Alors pour $i > 0$,

$$H^i(G/P, \mathcal{D}_{G/P}) = 0.$$

Démonstration. On démontre le théorème par récurrence sur p, l'ordre de la filtration $\{F_p \mathcal{D}_{G/P}\}_{p \in \mathbb{Z}^+}$. On a déjà que pour $i > 0$,

$$H^i(G/P, F_0 \mathcal{D}_{G/P}) = H^i(G/P, \operatorname{Gr}_0 \mathcal{D}_{G/P}) = 0.$$

Supposons que $H^i(G/P, F_p \mathcal{D}_{G/P}) = 0$ pour $i > 0$ et $p > 0$. On considère la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow F_p \mathcal{D}_{G/P} \longrightarrow F_{p+1} \mathcal{D}_{G/P} \longrightarrow \operatorname{Gr}_{p+1} \mathcal{D}_{G/P} \longrightarrow 0.$$

On a déjà montré que $H^i(G/P, \operatorname{Gr}_{p+1} \mathcal{D}_{G/P}) = 0$ pour $i > 0$ et par l'hypothèse de récurrence, on a aussi $H^i(G/P, F_p \mathcal{D}_{G/P}) = 0$ pour $i > 0$. Il suit que pour $i > 0$, la suite exacte longue obtenue en cohomologie est de la forme

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow H^i(G/P, F_{p+1} \mathcal{D}_{G/P}) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots.$$

On conclut que $H^i(G/P, F_{p+1} \mathcal{D}_{G/P}) = 0$ pour $i > 0$. Par récurrence, on a montré que pour tout $i > 0$ et $p > 0$,

$$H^i(G/P, F_p \mathcal{D}_{G/P}) = 0.$$

Maintenant, on peut faire de la filtration $\{F_p\mathcal{D}G/P\}_{p\in\mathbb{Z}^+}$ un système inductif en prenant simplement l'inclusion comme morphisme $F_p\mathcal{D}G/P \to F_q\mathcal{D}G/P$ lorsque $p \leq q$. On a alors

$$\varinjlim F_p\mathcal{D}G/P = \bigcup_{p\in\mathbb{Z}^+} F_p\mathcal{D}G/P = \mathcal{D}_{G/P}.$$

Comme les limites inductives commutent avec la cohomologie (cf. [**Ha**, III.2.9]), on conclut pour $i > 0$,

$$H^i(G/P, \mathcal{D}_{G/P}) = H^i(G/P, \varinjlim F_p\mathcal{D}G/P) = \varinjlim H^i(G/P, F_p\mathcal{D}G/P) = 0.$$

$\square$

BIBLIOGRAPHIE

[AC] I. Ascah-Coallier, *Le Théorème de Borel–Weil–Bott*, mémoire de maîtrise, Université de Montréal, Montréal, 2008.

[BB] A. Beilinson et J. Bernstein. *Localisation de $\mathfrak{g}$-modules*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série 1, Mathématique **291** (1981), no. 1, 15–18.

[BGG] I. N. Bernstein, I. M. Gel'fand et S. I. Gel'fand, *Differential operators on a cubic cone*, Russian Mathematical Surveys **27** (1972), no. 1, 169–174.

[Be] J. Bernstein, *Algebraic Theory of D-modules*, manuscrit non publié. http://www.math.uchicago.edu/~arinkin/langlands/Bernstein/Bernstein-dmod.pdf

[Bj] J.-E. Björk, *Rings of Differential Operators*, North-Holland Mathematical Library, vol. 21, North-Holland Publishing, Amsterdam, 1979.

[B1] A. Borel, *Algebraic D-modules*, Perspectives in Mathematics, vol. 2, Academic Press, Boston, 1987.

[B2] A. Borel, *Linear Algebraic Groups*, 2e ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 126, Springer-Verlag, New York, 1991.

[BT] R. Bott et L. W. Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 82, Springer-Verlag, New York, 1982.

[C1] R. W. Carter, *Finie Groups of Lie Type*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons, Chichester, 1993.

[C2] P. Cartier. *Remarks on "Lie Algebra Cohomology and the Generalized Borel–Weil theorem", By B. Kostant*, Annals of Mathematics. Second Series **74** (1961), 388–390.

[CG] N. Chriss et V. Ginzburg, *Representation Theory and Complex Geometry*, Birkhäuser, Boston, 1997.

[Co] S. C. Coutinho, *A Primer of Algebraic D-modules*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 33, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[D] M. Demazure, *A Very Simple Proof of Bott's Theorem*, Inventiones Mathematicae **33** (1976), no. 3, 271–272.

[EGA1] A. Grothendieck, *Éléments de géométrie algébrique : I. Le langage des schémas*, Publications Mathématiques de l'IHÉS **4** (1960), 5–228.

[EGA2] A. Grothendieck, *Éléments de géométrie algébrique : II. Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes*, Publications Mathématiques de l'IHÉS **8** (1961), 5–222.

[EGA3] A. Grothendieck, *Éléments de géométrie algébrique : III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents, Première partie*, Publications Mathématiques de l'IHÉS **11** (1961), 5–167.

[EGA4] A. Grothendieck, *Éléments de géométrie algébrique : IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, Quatrième partie*, Publications Mathématiques de l'IHÉS **32** (1967), 5–361.

[GH] P. Griffiths et J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, Pure and Applied Mathematics, John Wiley & Sons, New York, 1978.

[Ha] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 52, Springer-Verlag, New York, 1977.

[He] W. H. Hesselink, *Cohomology and the Resolution of the Nilpotent Variety*, Mathematische Annalen **223** (1976), no. 3, 249–252.

[HTT] R. Hotta, K. Takeuchi et T. Tanisaki, *D-modules, Perverse Sheaves, and Representation Theory*, Progress in Mathematics, vol. 236, Birkhäuser, Boston, 2008.

[H1] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 9, Springer-Verlag, New York, 1978.

[H2] J. E. Humphreys, *Linear Algebraic Groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 21, Springer-Verlag, New York, 1975.

[J] J. C. Jantzen, *Representations of Algebraic Groups*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 107, American Mathematical Society, Providence, 2003.

[Ka] R. Kane, *Reflection Groups and Invariant Theory*, CMS Books in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2001.

[Ka] M. Kashiwara, *Faisceaux constructibles et systèmes holonomes d'équations aux dérivées partielles linéaires à points singuliers réguliers*, Séminaire Goulaouic-Schwartz (1979-1980), Exposé no. 19.

[Ke] G. R. Kempf, *On the collapsing of homogeneous bundles*, Inventiones Mathematicae **37** (1976), no. 3, 229–239.

[Ko] B. Kostant, *Lie Algebra Cohomology and the Generalized Borel–Weil Theorem*, Annals of Mathematics. Second Series **74** (1961), 329–387.

[KP] H. Kraft et C. Procesi, *On the geometry of conjugacy classes in classical groups*, Commentari Mathematici Helvetici **57** (1982), no. 1, 539–602.

[Ma] I. G. Macdonald, *The Poincaré Series of a Coxeter Group*, Mathematische Annalen **199** (1972), 161–174.

[Mc] J. McCleary, *A User's Guide to Spectral Sequences*, 2e ed., Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 58, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[Me] Z. Mebkhout, *Sur le problème de Hilbert–Riemann*, dans *Complex Analysis, Microlocal Calculus and Relativistic Quantum Theory : Proceedings of the International Colloquium, Centre Physique, Les Houches, 1979*, Lecture Notes in Physics, vol. 126, Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[Mi] D. Miličić, *Lectures on Algebraic Theory of D-modules*, manuscrit non publié. http://www.math.utah.edu/~milicic/Eprints/dmodules.pdf

[Mu] D. Mumford, *The Red Book of Varieties and Schemes*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1358, Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[Se] J.-P. Serre, *Algèbre locale, multiplicités*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 11, Springer-Verlag, Berlin, 1965.

[Sp] T. A. Springer, *Linear Algebraic Groups*, 2e ed., Progress in Mathematics, vol. 9, Birkhäuser, Boston, 1998.

[St] J. T. Stafford, *Module Structure of Weyl Algebras*, The Journal of the London Mathematical Society. Second Series **18** (1978), no. 3, 429–442.

[W] C. A. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 38, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.