

Université de Montréal

Contributions à l'amélioration d'un système d'analyse de la biocinématique  
tridimensionnelle du genou

par

Gerald Parent  
Institut de Génie Biomédical  
Faculté de Médecine

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures  
en vue de l'obtention du grade de  
Maître ès sciences appliquées (M.Sc.A.)  
(Génie Biomédical)

août 2000

©Gerald Parent, 2000



Université de Montréal

Contribution à l'amélioration des systèmes d'analyse de la bioclimatique  
Instrumentation de base

par

W  
4  
W58  
2000  
n. 110

Gradué en  
Institut de Génie Chimique  
Faculté de Génie

Étudiant inscrit à la Faculté des études supérieures  
en vue de l'obtention du grade de  
Maître ès sciences appliquées (M.Sc.A.)  
(Génie Chimique)

1970  
©Gould Inc., 2000



Université de Montréal

Ce mémoire intitulé :

**Contributions à l'amélioration d'un système d'analyse de la  
biocinématique tridimensionnelle du genou**

présenté par : Gerald Parent

en vue de l'obtention du grade de : Maître ès Sciences Appliquées a été  
dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. AUBIN Carl-Éric, Ph.D., président

M. NEWMAN Nicholas, M.D., membre

M. de GUISE Jacques A., Ph.D., directeur de recherche

M. YAHIA L'Hocine, Ph.D., co-directeur de recherche

# Sommaire

L'analyse de la biocinématique tridimensionnelle du genou est nécessaire à une bonne compréhension de l'état du genou et au rétablissement de sa fonction après une blessure. Le système Geni (pour Genou Non-Invasif) développé au sein du groupe de recherche en Biomécanique et Biomatériaux permet de mesurer cette biocinématique.

Le système enregistre le mouvement du tibia par rapport au fémur grâce à des capteurs magnétiques de mouvement fixés à la jambe. Le système permet d'exprimer le mouvement de ces capteurs suivant une convention clinique établie et naturelle : flexion-extension, abduction-adduction, rotation tibiale interne-externe et translations le long d'axes médio-latéral, antéro-postérieur et proximo-distal. Pour exprimer le mouvement du genou sous la forme d'indices cinématiques suivant cette convention, une définition d'axes cinématiques sur modèle numérique virtuel ainsi qu'un calibrage de ce modèle numérique sur le genou réel sont nécessaires avant chaque expérimentation.

Ces opérations peuvent engendrer des erreurs qui se répercutent nécessairement sur la valeur des indices cinématiques. Afin de caractériser l'importance de ces erreurs et leur répercussion sur les résultats d'analyse cinématique, il a fallu dans un premier temps identifier et quantifier les principales sources d'erreur associées au système lorsqu'il est utilisé dans deux contextes différents : expérimentation *in vitro* sur pièce cadavérique et expérimentation *in vivo* sur sujet.

Il a ainsi été déterminé que l'utilisateur génère une erreur plus importante dans le contexte *in vivo* que dans le contexte *in vitro*, principalement à cause de la difficulté d'identification des repères anatomiques utilisés pour définir les axes cinématiques. Ainsi, il a été déterminé que les mesures sont plus précises sur le modèle virtuel de l'os (0.23 mm et 1.37 mm respectivement pour des points facilement et difficilement identifiables) que sur le genou réel

(1.9 mm et 7.0 mm respectivement pour des points facilement et difficilement identifiables).

Dans un second temps, il a été possible d'estimer l'effet de ces erreurs sur le calcul des indices cinématiques. En expérimentation *in vitro*, une erreur moyenne de 2 degrés est obtenue pour la mesure des indices cinématiques de rotation et c'est l'étape d'identification des axes cinématiques sur les modèles virtuels qui est la source la plus importante de cette erreur. En expérimentation *in vivo*, une erreur moyenne de 10 degrés est obtenue pour la mesure des indices cinématiques et c'est l'identification de repères de calibrage qui est la principale source de cette erreur.

Il a aussi été démontré que les résultats des expérimentations *in vivo* ne sont pas comparables d'une expérimentation à l'autre. Diverses avenues possibles afin d'améliorer la reproductibilité inter-expérimentale de ces résultats sont abordées.

# Table des matières

<b>Sommaire</b>	<b>iii</b>
<b>Table des matières</b>	<b>v</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>viii</b>
<b>Table des figures</b>	<b>x</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
1.1 Présentation de l'analyseur 3D du genou Geni . . . . .	4
1.1.1 Définition d'axes cinématiques et calibrage . . . . .	4
1.1.2 Évaluation des indices cinématiques avec Geni . . . . .	9
1.2 Problématique . . . . .	11
1.3 Objectifs . . . . .	13
1.4 Hypothèses de travail . . . . .	13
<b>2 Analyse des sources d'erreur</b>	<b>15</b>
2.1 Sources d'erreur dans Geni . . . . .	15
2.2 Erreurs provenant du matériel utilisé . . . . .	16
2.2.1 Les modèles numériques . . . . .	16
2.2.2 Les capteurs magnétiques et le pointeur magnétique. . . . .	17
2.3 Erreur générée par l'utilisateur . . . . .	18
2.3.1 Erreur due à l'identification de repères sur l'os virtuel lors des expérimentations <i>in vitro</i> . . . . .	20

2.3.2	Erreur due à la numérisation sur l'os réel lors des expérimentations <i>in vivo</i> . . . . .	21
2.3.3	Erreur due à la numérisation sur l'os virtuel lors des expérimentations <i>in vitro</i> . . . . .	21
2.3.4	Erreur due à la numérisation sur l'os virtuel lors des expérimentations <i>in vivo</i> . . . . .	22
2.4	Analyse des résultats. . . . .	22
<b>3</b>	<b>Propagation de l'erreur</b>	<b>28</b>
3.1	Méthodologie employée . . . . .	28
3.1.1	Le simulateur . . . . .	29
3.2	Résultats de la propagation de l'erreur . . . . .	33
3.2.1	Expérimentations <i>in vitro</i> . . . . .	33
3.2.2	Expérimentations <i>in vivo</i> . . . . .	39
3.2.3	Simulations isolées des erreurs sur le fémur et sur le tibia	44
3.3	Analyse des résultats et discussion . . . . .	48
3.3.1	Mesures de la reproductibilité des courbes et coefficients de corrélation. . . . .	48
3.3.2	Propagation de l'erreur lors des simulations . . . . .	50
<b>4</b>	<b>Discussion et perspectives</b>	<b>52</b>
4.1	Propositions de nouvelles techniques de calibrage pour les expérimentations <i>in vivo</i> . . . . .	53
4.1.1	Définition d'axes cinématiques directement sur le genou	53
4.1.2	Méthode par minimisation de l'erreur . . . . .	54
4.1.3	Définition d'axes et calibrage sur un seul os . . . . .	55
4.1.4	Autres perspectives . . . . .	57
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>59</b>
	<b>Références</b>	<b>61</b>

<b>6 Annexes</b>	<b>66</b>
6.1 Calcul des indices cinématiques . . . . .	66
6.1.1 Les indices cinématiques de rotations . . . . .	67
6.1.2 Les indices cinématiques de translations . . . . .	68
6.2 Estimation de la transformation rigide entre les deux repré- sentations des os. . . . .	69
6.2.1 Estimation de la transformation rigide entre deux en- sembles à l'aide de la correspondance directe de l'in- formation . . . . .	69
6.2.2 Estimation de la transformation rigide entre deux en- sembles à l'aide de la correspondance indirecte de l'in- formation . . . . .	96
6.3 Décomposition de l'estimation de la transformation rigide en une estimation de la rotation suivie d'une estimation de la translation . . . . .	104
6.4 Vérification de l'environnement magnétique afin d'éliminer le biais dans nos mesures . . . . .	108
6.5 Calcul des coefficients de corrélation multiple de Kadaba . . .	110
6.6 Explication de l'effet "papillon" lors de l'ajout de bruit sur l'orientation des axes cinématiques du repère d'interprétation .	114
6.6.1 Erreur sur la définition du système d'axes lié au tibia .	115
6.6.2 Erreur sur la définition du système d'axes lié au fémur	116



# Liste des tableaux

2.1	Variabilité et biais générés par l'utilisateur lors de l'identification de repères dans le référentiel réel de l'os . . . . .	23
2.2	Variabilité générée par l'utilisateur lors de l'identification de repères sur le modèle virtuel de l'os . . . . .	24
2.3	Résumé des différentes erreurs à considérer lors des expérimentations avec Geni. . . . .	27
6.1	Fiabilité des algorithmes de calibrage : condition semblables à l' <i>in vitro</i> . . . . .	85
6.2	Temps de calcul des différents algorithmes : conditions d'erreur semblables à l' <i>in vitro</i> . . . . .	87
6.3	Propagation de l'erreur sur l'estimation de la rotation : conditions <i>in vitro</i> pour 3 points. . . . .	88
6.4	Propagation de l'erreur sur l'estimation de la translation en conditions <i>in vitro</i> pour 3 points. . . . .	88
6.5	Propagation de l'erreur sur l'estimation de la rotation : conditions <i>in vitro</i> pour 4 points. . . . .	89
6.6	Propagation de l'erreur sur l'estimation de la translation en conditions <i>in vitro</i> pour 4 points. . . . .	89
6.7	Propagation de l'erreur sur l'estimation de la rotation : conditions <i>in vitro</i> pour 5 points. . . . .	90
6.8	Propagation de l'erreur sur l'estimation de la translation en conditions <i>in vitro</i> pour 5 points. . . . .	90

6.9	Propagation de l'erreur sur l'estimation de la rotation : conditions <i>in vitro</i> pour 10 points. . . . .	91
6.10	Propagation de l'erreur sur l'estimation de la translation en conditions <i>in vitro</i> pour 10 points. . . . .	91
6.11	La reproductibilité dans l'estimation de la transformation rigide entre deux surfaces grâce à la correspondance indirecte des points. . . . .	102

# Table des figures

1.1	Le programme Geni. . . . .	5
1.2	Les deux types de numérisation d'axes cinématiques. . . . .	7
1.3	Les deux représentations de l'os dans leur référentiel . . . . .	9
1.4	L'arbre des transformations nécessaires pour exprimer les axes cinématiques du genou dans le référentiel global. . . . .	10
1.5	Systèmes d'axes associés au fémur et au tibia . . . . .	12
2.1	Quantification du biais lors des numérisations sur un genou réel	22
3.1	Les différents effets de l'erreur sur les courbes d'indices cinématiques . . . . .	31
3.2	Indices cinématiques dont les points de calibrage sont bruités. Simulations d'expérimentations <i>in vitro</i> . . . . .	34
3.3	Indices cinématiques d'un mouvement dont les points de définition d'axes sont bruités. Simulations d'expérimentations <i>in vitro</i> . . . . .	36
3.4	Indices cinématiques d'un mouvement dont les points de calibrage et les points de définition d'axes sont bruités. Simulations d'expérimentations <i>in vitro</i> . . . . .	37
3.5	Résultats des différents coefficients de corrélation des simulations d'expérimentation <i>in vitro</i> . . . . .	38
3.6	Indices cinématiques dont les points de calibrage sont bruités. Simulations d'expérimentations <i>in vivo</i> . . . . .	40

3.7	Indices cinématiques dont les points de définition d'axes sont bruités. Simulations d'expérimentations <i>in vivo</i> . . . . .	41
3.8	Indices cinématiques d'un mouvement dont les points de calibrage et les points de définition d'axes sont bruités. Simulations d'expérimentations <i>in vivo</i> . . . . .	42
3.9	Résultats des différents coefficients de corrélation des simulations d'expérimentation <i>in vivo</i> . . . . .	43
3.10	Indices cinématiques d'un mouvement dont les points de calibrage du fémur sont bruités. Simulations d'expérimentations <i>in vivo</i> . . . . .	45
3.11	Indices cinématiques d'un mouvement dont les points de calibrage du tibia sont bruités. Simulations d'expérimentations <i>in vivo</i> . . . . .	46
3.12	Influence du repère d'interprétation sur les résultats des différents coefficients de corrélation. . . . .	47
6.1	Construction d'un système d'axes à partir de la numérisation de trois points . . . . .	72
6.2	Avantage de l'alignement de référentiels . . . . .	73
6.3	Estimation de départ et minimum local d'une fonction . . . . .	82
6.4	Quantification de l'erreur provenant d'une matrice de rotation. . . . .	84
6.5	Rapports de propagation de l'erreur sur la matrice de rotation dans les algorithmes de calibrage ( $K_R$ ) . . . . .	93
6.6	Rapports de propagation de l'erreur sur le vecteur de translation dans les algorithmes de calibrage ( $K_T$ ) . . . . .	94
6.7	Influence du nombre de points sur l'erreur en rotation. . . . .	95
6.8	Influence du nombre de points sur l'erreur en translation. . . . .	95
6.9	L'organigramme du type d'algorithmes où la correspondance inter-points n'est pas directe. . . . .	98
6.10	Histogramme typique des distances entre les paires de points calculées par l'algorithme. . . . .	100

6.11 Le problème dû aux échantillonnages différents de deux courbes.	100
6.12 Nouvel échantillonnage d'une surface à partir d'une autre. . .	101

# Chapitre 1

## Introduction

Le genou est une articulation complexe. Après une blessure à cette articulation, il est important de pouvoir restaurer le mieux possible sa fonction afin de ne pas le détériorer davantage.

Il n'existe présentement aucune méthode qui soit à la fois fiable et non-effractive qui permette de faire une analyse précise et exhaustive de l'état de la fonction du genou. Les orthopédistes et les physiothérapeutes utilisent généralement des tests manuels pour en déterminer les laxités. Il existe aussi des tests instrumentés permettant d'évaluer quantitativement ces laxités. Ces mesures sont néanmoins unidimensionnelles alors qu'on sait que le mouvement du genou est tridimensionnel et complexe. Aucun de ces outils ne permet donc de mesurer la cinématique tridimensionnelle d'un genou.

Des recherches ont tenté de décrire de façon précise la cinématique tridimensionnelle du genou à l'aide de marqueurs optiques collés sur la jambe du sujet ([Kadaba et al., 1990]). Cependant, Sati ([Sati, 1995]) a montré que le mouvement enregistré ne correspond pas au mouvement précis des os de la jambe à cause du mouvement important de la peau par rapport aux os.

Une solution pour éviter ce problème a été de fixer de façon rigide des marqueurs aux os de la jambe, par exemple à l'aide de tiges insérées dans le fémur et le tibia ([Lafortune, 1984, Ramsey et Wretenberg, 1999]). Cette technique est une technique effractive et ne peut être considérée à des fins

d'évaluation clinique du genou.

Au cours des dernières années, le Groupe de Recherche en Biomécanique et Biomatériaux de l'École Polytechnique de Montréal en collaboration avec l'École de technologie supérieure a développé un système de mesure de la cinématique tridimensionnelle du genou. Ce système permet de faire une description de la biocinématique liée au mouvement du genou 1) dans un contexte d'évaluation de l'état et de la fonctionnalité du genou, 2) dans un contexte d'évaluation des déformations ligamentaires lors d'un mouvement de la jambe, 3) dans un contexte d'évaluation ou de développement de nouvelles méthodes de correction orthopédique et 4) dans un contexte de planification chirurgicale.

Le système repose essentiellement sur l'enregistrement des mouvements des os du genou (fémur et tibia) de façon précise grâce à la fixation quasi rigide de capteurs de mouvements aux os. Un logiciel informatique fait la lecture de la position et de l'orientation de ces capteurs et calcule les indices du mouvement du genou. Afin de traduire de façon conventionnelle ce mouvement en des indices cinématiques cliniquement interprétables, un utilisateur doit définir un système d'axes cinématiques sur chaque os, et le mouvement de ces deux systèmes d'axes, l'un par rapport à l'autre, est calculé et analysé.

Des études préliminaires nous ont déjà permis de montrer la grande précision et la bonne reproductibilité intra-expérimentale du mouvement enregistré. Cependant, ces études préliminaires ont également décelé des lacunes qui font en sorte que les résultats entre plusieurs expérimentations ne peuvent être comparés entre eux; le calcul des indices cinématiques est trop dépendant de l'intervention subjective et non reproductible de l'utilisateur lors de la définition des axes cinématiques.

Afin d'améliorer la reproductibilité des résultats, le but de ce travail est d'abord de documenter les sources d'erreurs associées au système de mesure et d'évaluer leur retentissement au niveau du calcul des indices cinématiques. Suite à cette étude, il sera possible de proposer des améliorations à apporter à

la méthode de travail. Il est à noter qu'afin de faciliter la lecture de ce travail, la plupart des développements mathématiques et études préliminaires sont présentées en annexe.

La prochaine section présente de façon détaillée le système d'analyse développé par le groupe de recherche.



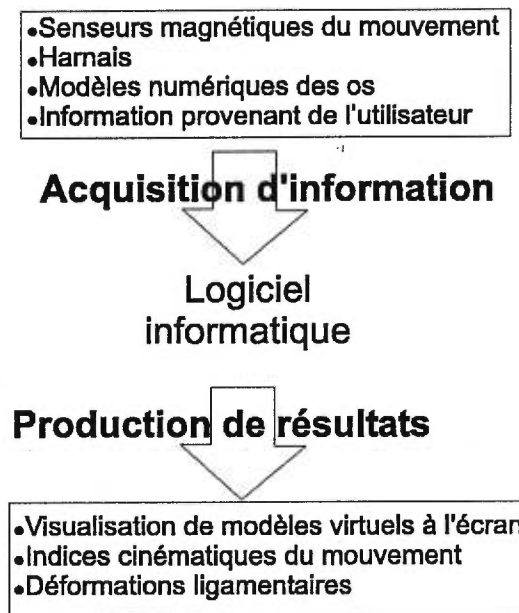


FIG. 1.1: Le programme Geni. À partir des mouvements 3D des capteurs fixés aux os avec un harnais, en associant un système d'axes cinématiques aux os, l'utilisateur peut calculer les indices cinématiques du mouvement et les déformations ligamentaires.

les axes cinématiques, on distingue deux catégories, 1) les méthodes *directes* : les axes sont créés directement sur la jambe par identification manuelle de repères anatomiques précis et 2) les méthodes *indirectes* : les axes sont tout d'abord définis par l'intermédiaire de modèles géométriques virtuels qui sont ensuite associés aux os de la jambe par une technique de calibrage (la figure 1.2 illustre chacune des deux catégories). Le *calibrage* consiste à l'établissement de relations entre deux systèmes de coordonnées qui sont dans le même domaine spatio-temporel contrairement au *recalage* qui consiste à l'établissement de relations entre domaines spatio-temporels différents ([Blainville et al., 1999]). Dans ce cas cas-ci, ce sont deux représentations 3D d'un même objet que l'on tente de relier entre elles, et l'utilisation du terme calibrage est donc correcte.

La première technique a comme avantage d'être simple et rapide. On identifiera sur le genou des repères anatomiques à l'aide d'un pointeur magnétique pour former des systèmes d'axes sur les deux os (fémur et tibia) et on suivra par la suite ces systèmes d'axes dans le temps, l'un par rapport à l'autre.

Un désavantage de cette méthode est que l'orientation et la position du système d'axes sont très sensibles à la position des points identifiés sur la jambe. La reproductibilité et la précision des résultats sont susceptibles d'en être affectées. De surcroît, les points à numériser sont souvent associés à des structures osseuses difficilement identifiables<sup>1</sup> chez le sujet (par exemple, les centres des condyles).

La deuxième technique nécessite l'utilisation d'un plus grand nombre de méthodes et d'outils afin d'obtenir les résultats escomptés. Entre autre, elle nécessite l'utilisation d'un modèle numérique virtuel.

Cette méthode nécessite cependant une étape supplémentaire de calibrage. En effet, on doit associer les os virtuels aux os réels et cette association nécessite elle aussi l'identification de repères anatomiques précis sur le

---

<sup>1</sup>On parlera d'un point facilement identifiable sur une surface lorsque la mesure de sa position dans l'espace est facilitée par la rencontre de plusieurs arêtes ou dénivellations.

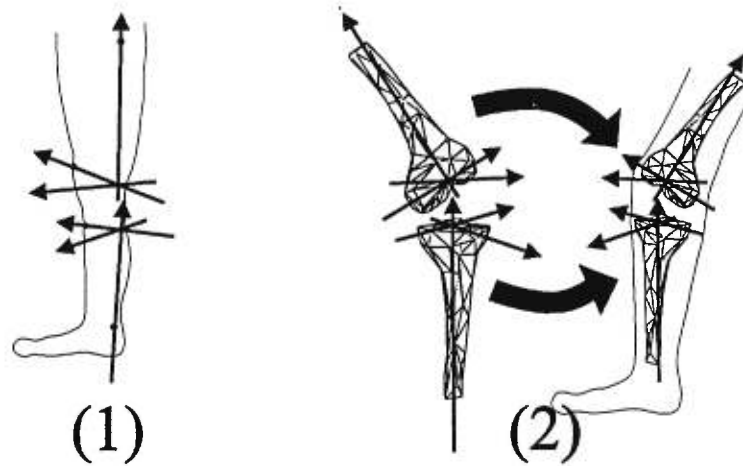


FIG. 1.2: Les deux types de définition d'axes cinématiques :  
 (1) la numérisation directe et (2) la numérisation indirecte.

genou du sujet. Un plus grand nombre de points peut cependant être utilisé de même que des méthodes informatiques de calibrage points-surfaces ou surfaces-surfaces.

Les avantages de cette méthode sont 1) il est possible de suivre graphiquement et en trois dimensions sur l'écran d'un ordinateur le mouvement du genou et d'en faire une analyse visuelle, 2) il est possible de conserver l'information sur les points ayant servi à la définition des systèmes d'axes et de documenter ainsi complètement l'expérience, 3) il est possible de modifier ces points et d'évaluer les indices cinématiques selon des définitions de repères différents.

Le système Geni peut exploiter les deux catégories de définition d'axes. Cependant, c'est la méthode indirecte qui a été choisie dans ce travail puisqu'elle permet d'ajouter l'information graphique.

Puisque le système Geni est utilisé dans deux contextes différents, en expérimentation *in vitro* sur genou cadavérique et en expérimentation *in vivo* sur sujets, la définition indirecte des systèmes d'axes et les méthodes de calibrage permettant d'associer les os virtuels os aux réels sont différentes pour chaque situation. En effet, dans le cas *in vitro*, la géométrie virtuelle

des os est connue de façon précise et il est possible d'accéder à des points de calibrage de façon directe. Dans le cas *in vivo*, la géométrie précise peut ne pas être connue et on ne peut pas avoir accès à des repères de calibrage de façon directe, à cause de la présence des muscles et de la peau.

Une étude préliminaire présentée en Annexe 2.1 a montré que, lors des expérimentations *in vivo*, il était préférable d'utiliser un calibrage par alignement de référentiels et que l'utilisation d'un modèle numérique de l'os personnalisé n'était pas nécessaire. Lors des expérimentations *in vitro* sur genou cadavérique, l'utilisation d'un modèle numérique personnalisé permettait l'utilisation d'une méthode de calibrage avec points correspondants. L'algorithme basé sur l'algèbre des quaternions ([Horn, 1987]) est l'algorithme que nous avons choisi d'utiliser pour faire ce travail, considérant des critères de précision, de fiabilité et de rapidité de calcul.

### Les différents référentiels

Dans le système Geni, des capteurs magnétiques sont utilisés pour enregistrer respectivement les mouvements du fémur et du tibia. La position et l'orientation de chaque capteur sont définies dans le référentiel global de la source du champ magnétique (figure 1.3 et 1.4). Après l'étape de définition d'axes et de calibrage, les systèmes d'axes cinématiques de chaque os sont exprimés dans le référentiel du capteur magnétique qui leur est associé et on peut alors exprimer à tout instant la position et l'orientation de chaque système d'axes dans le référentiel global, l'un par rapport à l'autre. La cinématique du mouvement peut à partir de ce moment être calculée.

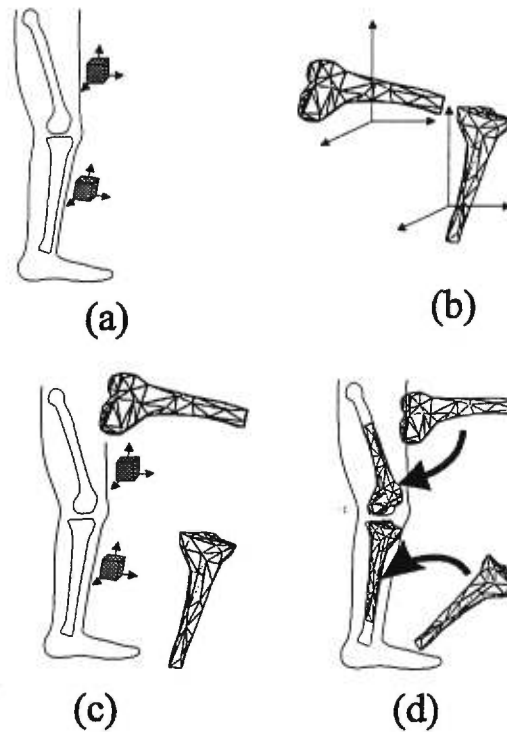


FIG. 1.3: Les deux représentations de l'os dans leur référentiel. (a) L'os dans le référentiel réel (le référentiel du capteur magnétique) et (b) l'os dans le référentiel virtuel. En (c), on fait coïncider les deux référentiels au référentiel du capteur magnétique. En (d), on associe les os numériques à la position et l'orientation des os réels (calibrage).

### 1.1.2 Évaluation des indices cinématiques avec Geni

Les indices cinématiques sont calculés dans Geni suivant la définition d'axes cinématiques proposée par Grood et Suntay ([Grood et Suntay, 1983]). Cette définition d'axes, parce que couramment utilisée par la communauté scientifique ([Wu et Cavanagh, 1995]), a été préférée à d'autres systèmes d'axes proposés dans la littérature ([Pennock et Clark, 1990, Elias et al., 1990, Churchill et al., 1998, Hollister et al., 1993]).

De plus, le choix de cette méthode de calcul des indices cinématiques a été

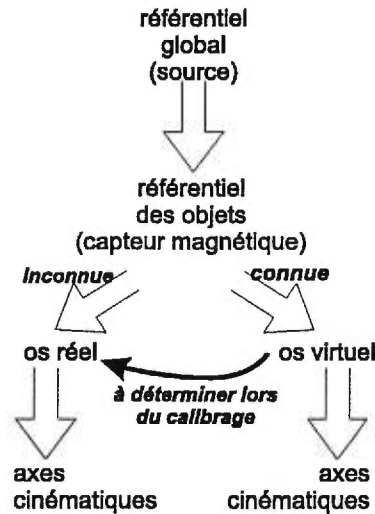


FIG. 1.4: L'arbre des transformations nécessaires pour exprimer les axes cinématiques du genou dans le référentiel global.

préférée à l'utilisation la méthode de calcul par axes hélicoïdaux ([Kinzel et al., 1972, Woltring, 1994]), les indices cinématiques calculés à l'aide de cette dernière n'étant pas facilement interprétables en clinique ([Hamel, 1997]).

Dans la méthode de Grood et Suntay, deux systèmes d'axes anatomiques sont d'abord identifiés, un sur le fémur et l'autre sur le tibia (figure 1.5).

L'axe X fémoral est défini comme passant par les centres des deux condyles fémoraux. L'axe Z fémoral est défini perpendiculairement à l'axe X fémoral et situé dans le plan formé par l'axe X fémoral et l'axe central de la diaphyse fémorale. L'axe Y fémoral est perpendiculaire aux deux autres axes fémoraux.

L'axe X tibial est défini comme passant par les centres des deux plateaux tibiaux. L'axe Z tibial est défini perpendiculairement à l'axe X tibial et situé dans le plan formé par l'axe X tibial et le centre de l'axe central de la diaphyse tibiale. L'axe Y tibial est perpendiculaire aux deux autres axes tibiaux.

Trois rotations successives ( $R_x, R_{y'}, R_{z''}$ ) autour d'axes cinématiques X, Y' et Z'' permettent d'exprimer l'orientation du système d'axes du tibia

par rapport au système d'axes du fémur. L'angle de flexion-extension  $\alpha$  est mesuré autour de l'axe X fémoral (l'axe X). L'angle d'abduction-adduction  $\beta$  est mesuré autour de l'axe Y fémoral ayant subi la rotation d'angle  $\alpha$  autour de l'axe X ( $Y' = R_x Y$ ). Finalement, l'angle de rotation tibiale interne-externe  $\gamma$  est mesuré autour de l'axe Z fémoral ayant successivement subi les rotations d'angles  $\alpha$  autour de l'axe X et  $\beta$  autour de  $Y'$  ( $Z'' = R_{y'} R_x Z$ ). Cet axe  $Z''$  coïncide avec l'axe Z tibial.

En plus de ces rotations, trois translations  $T_x, T_y, T_z$  permettent d'exprimer la position de l'origine du système d'axes du tibia par rapport à l'origine du système d'axes du fémur. Les translations proximo-distale, médio-latérale et postéro-antérieure sont respectivement les distances mesurées le long des axes X, Y et Z tibiaux entre les deux origines des systèmes d'axes.

Tous ces indices dépendent du placement des axes anatomiques qui demeure très peu reproductible comme le montrera ce travail.

## 1.2 Problématique

Les conclusions des premières études à avoir été effectuées avec notre système [Hamel, 1997, Maach, 1998, Hagemeister et al., 1999] indiquent le besoin d'apporter des améliorations au système Geni au niveau de la reproductibilité des résultats, tant au niveau inter et intra sujets que inter et intra observateurs. Les opérations de définition d'axes cinématiques et de calibrage s'effectuent de façon manuelle et par conséquent sont liées à la subjectivité de l'utilisateur. Puisque ces opérations sont nécessaires au début de chaque expérimentation, les résultats inter-expérimentations pourront être comparés entre eux seulement si la variabilité des étapes de calibrage et de définition d'axes cinématiques est documentée et minimisée.

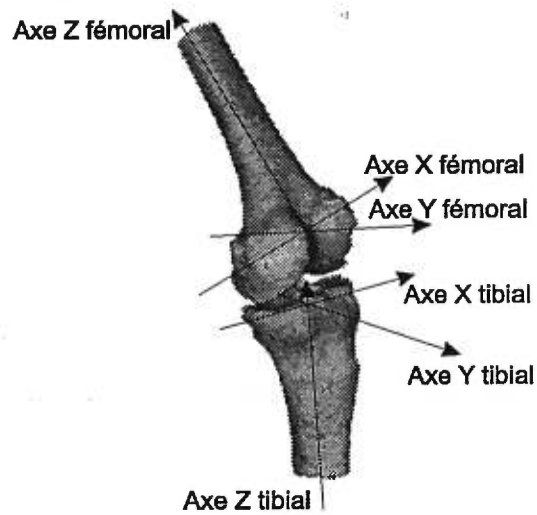


FIG. 1.5: Systèmes d'axes associés au fémur et au tibia. Pour calculer la position et l'orientation tridimensionnelles de chaque os dans l'espace, on attribue un système d'axes à chacun d'entre eux. Un positionnement adéquat des systèmes d'axes permet d'obtenir des résultats cliniquement interprétables.



### 1.3 Objectifs

Le but de ce projet est de proposer une méthode de calcul des indices cinématiques qui soit la moins subjective possible et qui produise ainsi des résultats inter-expérimentaux les plus reproductibles possibles.

Plus spécifiquement, le premier objectif de ce travail est d'identifier les principales sources d'erreur, de les documenter et d'évaluer leur retentissement au niveau du calcul des indices cinématiques.

Ce travail pourra aussi permettre d'identifier de nouvelles méthodes de définition d'axes cinématiques et de calcul des indices cinématiques.

Ainsi, au chapitre 2, nous identifierons et quantifierons les sources d'erreurs présentes lors de l'utilisation de Geni. Au chapitre 3, la propagation de ces sources d'erreurs dans le calcul des indices cinématiques sera évaluée. Suite à ces résultats sur la propagation d'erreur, il sera possible au chapitre 4 de proposer des solutions qui permettent éventuellement une meilleure reproductibilité des résultats.

### 1.4 Hypothèses de travail

Les hypothèses sous-jacentes à ce projet sont les suivantes :

Le mouvement du genou est un mouvement tridimensionnel qu'il est possible de mesurer de façon reproductible en utilisant une représentation anatomique du mouvement.

Une bonne reproductibilité des indices cinématiques sera révélatrice d'une bonne reproductibilité dans la définition des axes cinématiques et dans le calibrage.

L'utilisation du système Geni suppose aussi que les capteurs magnétiques sont fixés de façon quasi rigide aux os de la jambe et sont solidaires de leurs mouvements. Cette dernière hypothèse est évaluée par un projet effectuée en

parallèle par Shafagh Ganjikia, étudiante à la maîtrise à l'Institut de Génie Biomédical.

# Chapitre 2

## Analyse des sources d'erreur

Dans ce chapitre, les différentes sources d'erreurs présentes dans le système Geni seront dans un premier temps identifiées, d'une part celles provenant du matériel utilisé et d'autre part celles générées par l'utilisateur. Dans un deuxième temps, ces erreurs seront quantifiées et il sera alors possible d'estimer l'erreur générée lors de l'identification de points, sur le modèle virtuel ou sur le genou réel, en expérimentation *in vitro* et en expérimentation *in vivo*.

### 2.1 Sources d'erreur dans Geni

Les mesures prises avec le système Geni sont entachées d'imprécisions provenant de deux sources : l'erreur due au matériel utilisé (les capteurs magnétiques et le modèle numérique utilisé) et l'erreur due à l'utilisateur du système. Dans les deux cas, on peut décomposer l'erreur en une erreur aléatoire (ou *incertitude*) et une erreur systématique (un *biais*) ([Hoffmann, 1982]).

L'erreur aléatoire (*incertitude*) survient lors de mesures prises sous des conditions reproductibles. Une condition reproductible signifie qu'un utilisateur refait une mesure, utilisant le même outil et suivant une unique procédure de mesure.

L'erreur systématique (biais) est une déviation dans les mesures, causée par un outil de mesure défectueux ou imparfait, par la procédure de mesure, par une influence de source extérieure (environnement de travail) ou par une influence de l'utilisateur.

Puisque d'une part, l'utilisateur du système peut générer une erreur lors de l'utilisation du système Geni et que d'autre part, le matériel qu'il utilise peut également produire une erreur sur les mesures, nous tenterons de déterminer séparément quelles sont les sources de ces erreurs.

## 2.2 Erreurs provenant du matériel utilisé

### 2.2.1 Les modèles numériques

Pour identifier un repère anatomique sur le modèle numérique, l'utilisateur visualise ce dernier à l'écran d'un ordinateur. L'utilisateur pointe, à l'aide d'un curseur graphique, les endroits auxquels correspondent les repères qu'il désire utiliser pour le calibrage et/ou la numérisation des axes cinématiques. Ainsi, si on fait abstraction de l'utilisateur du système, l'erreur due à notre instrument lors de la numérisation sur le modèle virtuel se résume à l'erreur de la reconstruction du modèle numérique qui peut ne pas représenter fidèlement l'os du sujet à étudier.

Si on utilise un modèle numérique lors d'une expérimentation, on peut utiliser le modèle numérique de l'os du sujet (on l'appelle alors reconstruction personnalisée) ou bien on peut utiliser un modèle numérique d'un os provenant d'une reconstruction d'un autre sujet (reconstruction non-personnalisée).

Si l'on utilise une reconstruction personnalisée, l'erreur sur le modèle revient simplement à l'erreur de reconstruction numérique. Avec la méthodologie employée par notre groupe de recherche (reconstruction d'images tomographiques), cette erreur est estimée à moins d'un millimètre ([Sati, 1995]) et peut être négligée des sources d'erreur présente dans notre système vue sa faible importance.

Cependant, si la reconstruction n'est pas personnalisée, il se peut que la différence entre la morphologie des os réels et des modèles numériques soit assez importante et d'autres études devront mesurer l'effet de cette source d'erreur sur les calculs des indices cinématiques.

### 2.2.2 Les capteurs magnétiques et le pointeur magnétique.

Pour connaître la position et l'orientation de chaque os de la jambe dans le temps, notre groupe de recherche a opté pour un système utilisant des capteurs de position et d'orientation sensibles à un champ magnétique produit par une source émettrice (système Fastrak de Polhemus). Chaque récepteur mesure sa position et son orientation par rapport à une source émettrice sous forme d'une matrice contenant l'information sur la rotation et sur la translation. Cette mesure est accompagnée d'erreurs sous la forme d'une incertitude et d'un biais.

L'incertitude sur les mesures nous est fournie par le fabricant (0.8 mm RMS en position et 0.15 degrés RMS en orientation) pour des situations normales d'utilisation. Le biais quant à lui peut devenir significatif dans le cas où le champ magnétique enregistré localement par chaque récepteur est modifié. Pour que nos mesures ne soient pas entachées de ce biais, il faudra travailler dans un environnement qui n'aura pas une influence sur le champ magnétique local de chaque récepteur. Pour ce faire, il faut s'assurer qu'aucun objet métallique, conducteur de courant ou magnétisable, ne se retrouve dans l'environnement de travail, à la fois par examen visuel de l'espace de travail et également par une procédure de vérification de l'environnement magnétique avant chaque expérimentation (voir Annexe 4).

Ainsi, on peut supposer un biais nul et ne considérer qu'une erreur aléatoire due à l'utilisation des capteurs magnétiques et du pointeur magnétique. On peut mesurer cette erreur aléatoire sur la mesure tridimensionnelle de la position du pointeur au moyen d'un simple test de numérisations multiples

d'un point fixe dans l'espace. Ce test consiste à prendre 90 numérisations<sup>1</sup> d'un point fixe dans l'espace avec le pointeur magnétique. Si on fait l'hypothèse que la distribution des mesures enregistrées est gaussienne et centrée sur la position tridimensionnelle réelle du point dans l'espace, cette distribution permet de déterminer l'écart-type de l'erreur sur les mesures due au système de pointeur magnétique utilisé. Le principal effet d'une distribution de l'erreur non-gaussienne serait d'influencer les résultats du calibrage du système (voir section 6.2) dont l'estimation requiert de minimiser une erreur dont la distribution soit gaussienne. Cependant, dans le présent travail, l'influence d'une distribution de l'erreur qui ne serait pas gaussienne ne modifierait que de façon négligeable la propagation de l'erreur dans les calculs d'indices cinématiques.

Le test nous a permis de quantifier à 0.4 mm l'erreur due uniquement au pointeur magnétique. Cette erreur, on le verra plus loin, est bien inférieure à la grandeur de l'erreur générée par l'utilisateur lors de la numérisation avec le pointeur.

### 2.3 Erreur générée par l'utilisateur

Pour identifier quelles sont les sources et types d'erreur que l'utilisateur générera, il faut tout d'abord analyser la procédure d'identification de repères anatomiques, à l'écran de l'ordinateur sur le modèle virtuel et sur le genou réel. Dans une première étape, l'utilisateur identifie des points à la surface de l'objet virtuel ; ces points seront sa référence visuelle pour la numérisation sur le modèle réel. Dans un deuxième temps, l'identification de points sur le modèle réel est effectuée à l'aide du pointeur magnétique.

À chaque identification de points sur le modèle virtuel, l'utilisateur poin-

---

<sup>1</sup>La plupart des données ont été recueillies avec le système GENI qui nécessite l'identification de 10 séries de 9 points par l'utilisateur. Puisque cet échantillon nous apparaissait suffisamment grand pour représenter la distribution de nos mesures, nous l'avons utilisé tel quel.

tera avec une certaine imprécision à la surface de l'os. On fera l'hypothèse que cette erreur est distribuée de façon gaussienne autour d'une valeur moyenne. Cette approximation n'est pas tout à fait exacte car la numérisation se fait à la surface d'un objet et que par conséquent, l'erreur se distribue à la surface de l'os. Cependant, puisqu'ainsi le calcul de l'estimation de l'erreur devient trop dépendant de la morphologie de l'os et de la position des sites anatomiques, nous travaillerons avec l'approximation d'une gaussienne en trois dimensions pour modéliser notre erreur. Cette approximation n'affecte cependant que de façon négligeable les résultats sur la propagation de l'erreur.

Lors de la numérisation sur l'os réel, l'utilisateur tentera d'identifier avec le pointeur magnétique sur l'os réel le point correspondant qu'il voit à l'écran de l'ordinateur. Il générera de nouveau une erreur aléatoire qui est la somme de l'incertitude liée à son geste et de l'incertitude due au pointeur magnétique. Cependant, il ajoutera cette fois-ci un biais dans la mesure. L'utilisateur peut croire en effet pointer sur le site correspondant à ce qu'il voit à l'écran, mais systématiquement pointer à une certaine distance de sa cible. Ce biais provient du fait que même si l'utilisateur voit un point à l'écran sur la géométrie osseuse virtuelle, il est parfois difficile d'identifier ce point sur la géométrie osseuse réelle, et bien plus encore s'il faut *imaginer* cette surface dans les cas où la peau et les muscles recouvrent les os de la jambe.

Dans ce travail, on cherche à reproduire l'effet de l'erreur générée lors de différentes définitions d'axes sur le genou. Différents utilisateurs généreront ainsi différents biais et ces biais devraient en hypothèse n'être aucunement corrélés entre eux. Pour cette raison, sur plusieurs simulations, ce biais sera considéré comme une erreur aléatoire supplémentaire que l'utilisateur pourrait générer lors d'une définition d'axes cinématiques sur le genou. La somme de l'erreur à considérer lorsque l'utilisateur génère deux erreurs aléatoires (dans ce cas-ci un biais et une variabilité) sera ([Hoffmann, 1982]) :

$$\sigma_{\text{à considérer}} = \sqrt{\text{variabilité}^2 + \text{biais}^2}$$

Comme on l'a mentionné auparavant, lors de l'identification de repères anatomiques sur les genoux en expérimentation *in vivo*, l'utilisateur est désavantagé par le fait que les structures osseuses ne sont pas visibles et que par conséquent, l'erreur lors de l'identification des points s'en trouve augmentée. De plus, lors des expérimentations *in vitro*, on peut augmenter la précision des mesures de calibrage en utilisant des marqueurs spéciaux fixés aux os et visibles dans les deux représentations de ces derniers. Par exemple, dans nos études *in vitro*, de petits triangles métalliques sont fixés aux os à l'aide de vis. Ainsi, les mesures prises lors des étapes de numérisation des deux types d'expérimentations, *in vitro* et *in vivo*, comportent des grandeurs d'erreurs différentes. On prendra soin dans ce travail de bien distinguer sur quel type d'expérimentation les résultats s'appliquent.

Dans le cas des expérimentations *in vitro*, on parlera de points facilement identifiables sur le modèle réel et virtuel pour faire le calibrage. Dans le cas des expérimentations *in vivo*, on aura des points difficilement identifiables sur le modèle réel et le modèle virtuel lors du calibrage. Finalement, pour les deux types d'expérimentations, les points utilisés lors de l'identification des axes cinématiques sont des points difficilement identifiables sur le modèle virtuel.

### 2.3.1 Erreur due à l'identification de repères sur l'os virtuel lors des expérimentations *in vitro*

Pour déterminer l'erreur aléatoire générée par l'utilisateur lors des expérimentations *in vitro*, deux utilisateurs ont identifié 10 fois une série de 9 points facilement identifiables sur un os cadavérique. Les points utilisés sont les extrémités de trois triangles fixés à l'os de cadavre. L'écart-type de la position de ces points déterminera l'erreur aléatoire générée par l'utilisateur lors de l'identification de points facilement identifiables.

Lors des tests de numérisation multiple, on peut vérifier si l'utilisateur induit un biais seulement si on connaît la position du vrai point qu'il doit



identifier. Ceci sera réalisé en demandant à l'utilisateur de regarder à l'écran de l'ordinateur où on lui montre un point sur le modèle virtuel qu'il doit ensuite identifier sur le genou réel; c'est d'ailleurs la procédure utilisée lors du calibrage. Ainsi, si une déviation constante des mesures est présente, on pourra l'associer au geste de l'utilisateur sur le genou réel et non pas dans le référentiel virtuel.

On utilise ainsi les points numérisés précédemment et on applique aux points dans le référentiel réel la transformation rigide qui les superposera le mieux (au sens des moindres carrés, voir Annexe 2.1) aux points dans le référentiel virtuel. La distance moyenne entre les deux ensembles de points, une fois celles-ci minimisée, nous fournira une grandeur du biais (figure 2.1). Le tableau 2.1 rapporte les résultats de ces mesures.

### 2.3.2 Erreur due à la numérisation sur l'os réel lors des expérimentations *in vivo*

Pour quantifier l'erreur lors de la numérisation de l'os réel pour des expérimentations *in vivo*, nous avons utilisé la même procédure que celle présentée auparavant pour des expérimentations *in vitro*. Cette fois-ci, nous avons demandé à deux utilisateurs de numériser 10 fois une série de 9 points difficilement identifiables (par exemple, les centres des condyles). Ces 9 points étaient identifiés à l'écran de l'ordinateur afin que l'on puisse également calculer le biais comme expliqué dans la section précédente. Les résultats de ces tests sont montrés au tableau 2.1.

### 2.3.3 Erreur due à la numérisation sur l'os virtuel lors des expérimentations *in vitro*

Pour quantifier l'incertitude sur les mesures enregistrées sur le modèle virtuel lors des expérimentations *in vitro*, deux utilisateurs ont identifié 10 séries de 9 points facilement identifiables. Les résultats de ce test sont montrés au tableau 2.2.

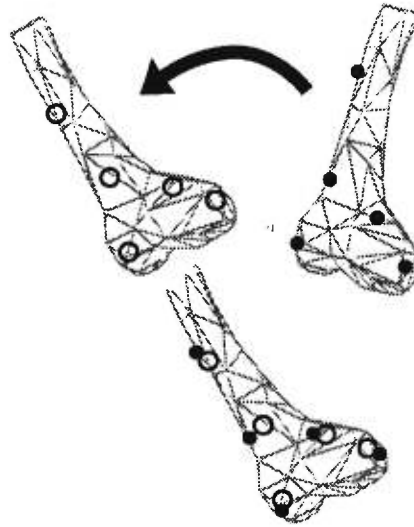


FIG. 2.1: Quantification du biais lors des numérisations sur un genou réel.

### 2.3.4 Erreur due à la numérisation sur l'os virtuel lors des expérimentations *in vivo*

Finalement, pour quantifier l'incertitude sur les mesures enregistrées sur le modèle virtuel lors d'expérimentations *in vivo*, nous avons demandé à deux utilisateurs d'identifier 30 séries de 3 points difficilement identifiables pour quantifier l'écart-type de l'identification de ce type de points. Les résultats sont montrés au tableau 2.2.

## 2.4 Analyse des résultats.

Les résultats de la section 2.2 et 2.3 montrent que le matériel utilisé dans Geni est adéquat pour les expérimentations *in vitro* et *in vivo*, celui-ci ne générant pas plus d'erreur que l'utilisateur du système.

L'erreur aléatoire sur les mesures inter-expérimentales se décompose donc en deux parties : l'incertitude sur la numérisation dans le référentiel réel et

Type de points	Variabilité (mm)	Biais (mm)
Faciles à identifier sur modèle réel ( <i>in vitro</i> )	0.72	1.77
Difficiles à identifier sur modèle réel ( <i>in vivo</i> )	2.28	6.51

TAB. 2.1: Variabilité et biais générés par l'utilisateur lors de l'identification de repères dans le référentiel réel de l'os

Type de points	Variabilité (mm)
Faciles à identifier sur modèle virtuel ( <i>in vitro</i> )	0.23
Difficiles à identifier sur modèle virtuel ( <i>in vivo</i> )	1.37

TAB. 2.2: Variabilité générée par l'utilisateur lors de l'identification de repères sur le modèle virtuel de l'os

l'incertitude sur la numérisation dans le référentiel virtuel. L'incertitude sur les mesures dans le référentiel réel est de 0.72 mm pour des expérimentations *in vitro* et de 2.28 mm pour des expérimentations *in vivo*. L'incertitude sur les mesures dans le référentiel virtuel est quant à elle de 0.23 mm pour des expérimentations *in vitro* et de 1.37 mm pour des expérimentations *in vivo*.

On voit en premier lieu qu'il est plus difficile de numériser des points dans le référentiel réel que dans le référentiel virtuel. Ceci est principalement dû au fait que la numérisation sur le modèle virtuel de l'os s'effectue à l'aide d'une souris informatique à l'écran d'un ordinateur. On a donc un outil de numérisation ne générant presque pas d'erreur de numérisation et on a la possibilité de bouger et d'agrandir le modèle numérique à l'écran de l'ordinateur comme on le désire. Dans le référentiel réel, l'utilisateur numérise souvent des points dans une position inconfortable avec un pointeur magnétique qui génère une erreur lui aussi (0.4 mm RMS).

Deuxièmement, on constate qu'il est plus difficile de numériser des points lors des expérimentations *in vivo* que lors des expérimentations *in vitro*. Ceci est dû au fait que dans le premier des cas, les points à numériser sont des points difficilement identifiables (voir section 1.1.1 pour la définitions de points facilement ou difficilement identifiables). De plus, lors de la numérisation sur le modèle réel, l'utilisateur ne voit pas les os directement à cause de la peau et des structures recouvrant ceux-ci et ne permettant pas d'avoir une correspondance visuelle entre ce qui est représenté à l'écran de l'ordinateur (les modèles virtuels des os) et ce qu'il a devant lui.

L'erreur systématique (biais) mesurée est de 1.77 mm pour des conditions d'expérimentations *in vitro* et de 6.51 mm pour des conditions d'expérimentations *in vivo*. On remarque de nouveau que les valeurs du biais sont plus élevées dans le cas des expérimentations *in vivo*, principalement à cause des points difficiles à identifier sur la surface de l'os. De plus, lors des expérimentations *in vivo*, le biais peut être influencé de façon importante par la distance entre la peau et l'os qui est non-négligeable à certains endroits.

Les différents résultats présentés dans les tableaux 2.1 et 2.2 nous permettent maintenant de quantifier l'erreur générée lors des procédés d'identification d'axes cinématiques et de calibrage et ce, dans le cas des expérimentations *in vivo* et *in vitro*.

Ainsi, le tableau 2.3 résume les grandeurs des erreurs moyennes mesurées pour donner une grandeur de l'erreur totale à considérer, d'une part dans le référentiel réel de l'os et d'autre part dans le référentiel virtuel de l'os. Les résultats de ce tableau seront utilisés dans les sections suivantes afin de caractériser la grandeur de l'erreur présente dans les expérimentations. On ajoutera aux points utilisés pour le calibrage et pour la définition d'axes cinématiques une erreur dont l'écart-type ( $\sigma$ ) sera dépendant du type d'opération et du type d'expérimentation dont il s'agira.

On remarque que le procédé de définition d'axes cinématiques sur le modèle virtuel comporte une erreur de grandeur égale à l'erreur sur l'identification de points sur le modèle virtuel en expérimentation *in vivo*. Ceci est dû au fait que les points utilisés pour déterminer les axes cinématiques sur l'os sont des points qui sont difficilement identifiables, en expérimentation *in vitro* comme en expérimentation *in vivo*.

Type d'expérimentation	Type d'opération	erreur(mm) : $\sigma$ à considérer
<i>in vitro</i>	Calibrage (référentiel réel)	1.9
<i>in vitro</i>	Calibrage (référentiel virtuel)	0.23
<i>in vitro</i>	Définition d'axes cinématiques (référentiel virtuel)	1.37
<i>in vivo</i>	Calibrage (référentiel réel)	7.0
<i>in vivo</i>	Calibrage (référentiel virtuel)	1.37
<i>in vivo</i>	Définition d'axes cinématiques (référentiel virtuel)	1.37

TAB. 2.3: Résumé des différentes erreurs à considérer lors des expérimentations avec Geni.

# Chapitre 3

## Propagation de l'erreur

Connaissant les différentes sources et les grandeurs des erreurs générées lors de l'identification de repères anatomiques avec le système Geni, il est maintenant possible de déterminer la propagation de ces erreurs à travers les fonctions de calcul des indices cinématiques. C'est ce qui sera effectué dans ce chapitre.

### 3.1 Méthodologie employée

Deux méthodes peuvent être utilisées afin de quantifier la propagation de l'erreur dans une fonction de calcul : 1) une méthode analytique où une connaissance analytique de la fonction de calcul et de ses dérivées est nécessaire et 2) une méthode utilisant des simulations mathématiques. Cette méthode ne nécessite pas la connaissance analytique de la fonction et de ses dérivées.

Puisque dans notre cas, la plupart des fonctions utilisées et leurs dérivées ne sont pas facilement dérivables analytiquement, nous proposons d'utiliser la deuxième méthode où des simulations des calculs de Geni permettent d'estimer la propagation de l'erreur sur les indices cinématiques.



### 3.1.1 Le simulateur

Pour réaliser ces simulations, nous avons écrit un simulateur avec le logiciel Matlab qui permet de lire un fichier d'acquisitions cinématiques et un fichier de calibrage provenant d'une expérimentation réelle effectuée avec le système Geni. Le simulateur calcule les indices cinématiques du mouvement utilisant la même méthode de calcul que le système Geni. Le simulateur a été conçu afin qu'un utilisateur puisse ajouter une erreur, dont il peut ajuster l'amplitude, sur les points utilisés lors du calibrage et lors de l'identification des axes. Ainsi, l'utilisateur a un moyen d'isoler et d'observer l'effet des différentes erreurs de notre système sur les différents indices cinématiques. Pour que les simulations soient significatives, l'utilisateur prendra soin de simuler les calculs 100 fois<sup>1</sup> afin de reproduire l'effet d'un bruit aléatoire.

Le simulateur nous fournit deux types de résultats. Premièrement, les indices cinématiques (abduction et rotation tibiale en fonction de la flexion<sup>2</sup>) sont calculés comme le fait Geni. Les différentes simulations de ces courbes sont mises en graphique pour évaluer qualitativement l'effet de l'erreur sur celles-ci. Les résultats peuvent apparaître tels quels ou normalisés<sup>3</sup> afin de mieux discerner les différences dans l'orientation des courbes ou pour comparer des amplitudes relatives de mouvement.

Comme deuxième résultat, plusieurs mesures de la corrélation des courbes sont calculées afin de quantifier l'effet de l'erreur sur les courbes, car en hypothèse, une bonne reproductibilité des courbes implique une bonne reproductibilité de la définition d'axes et du calibrage.

---

<sup>1</sup>100 simulations est un bon compromis entre le temps de calcul et une représentation fiable des résultats.

<sup>2</sup>Le simulateur pourrait également nous donner les résultats des translations dans l'espace. Puisque la majorité des résultats cliniques rapportés jusqu'à présent sont des angles, nous n'avons pas encore programmé le calcul des translations dans le simulateur.

<sup>3</sup>On fait coïncider le centre des courbes en traduisant celles-ci.

### Le coefficient de corrélation multiple

Le coefficient de corrélation multiple ([Kadaba et al., 1989]) dont le calcul est montré en Annexe 5 et que plusieurs auteurs considèrent lors de l'évaluation de la corrélation de courbes cinématiques, pourra être calculé et donnera une mesure de la moyenne des variances le long des courbes par rapport à l'amplitude totale du mouvement.

Le coefficient de corrélation multiple ne permet cependant pas de distinguer un effet de décalage des courbes d'avec un effet de changement dans l'orientation des courbes. Deux courbes identiques peuvent être distantes l'une de l'autre suite à une translation (3.1(a)) ou suite à une rotation (3.1(b)). La différence entre ces deux effets peut bien s'observer qualitativement si l'on fait coïncider les centres des courbes 3.1(c et d). Lors de l'analyse, il arrivera que l'on veuille mesurer de manière distincte ces deux effets et il sera nécessaire d'avoir une mesure permettant de le faire.

### La moyenne et l'écart-type des écarts-types le long du mouvement

À la figure 3.1 (d) où les courbes d'abduction en fonction de la flexion sont normalisées, on remarque que l'erreur sur l'indice cinématique (dans ce cas-ci, l'abduction) de chaque point en fonction de la flexion est différente et nulle au centre puisque les courbes ont été translattées : c'est l'effet "papillon". La variation de l'erreur en abduction par rapport à la courbe moyenne en fonction de la flexion, même si les courbes ne coïncident pas (figure 3.1 (b)), permet de mesurer des changements dans l'orientation de celles-ci. Ainsi, si on calcule l'écart-type des écarts-types d'abduction tout le long de la courbe, on obtiendra une valeur non-nulle qui sera d'autant plus grande que l'effet "papillon" sera important. On a donc avec le calcul de l'écart-type des écarts-types le long de la flexion une mesure de la variabilité de l'orientation des courbes.

De plus, en calculant la moyenne des écarts-types le long de la flexion sur les courbes non-normalisées, on aura une mesure du déplacement moyen des

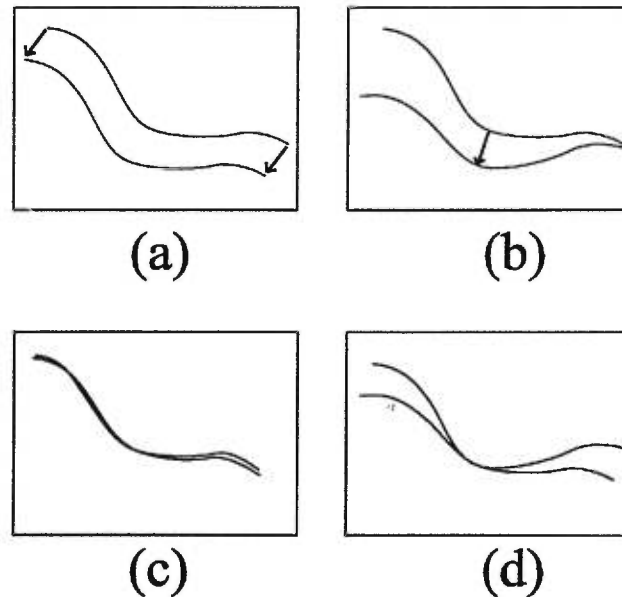


FIG. 3.1: Les différents effets de l'erreur sur les courbes d'indices cinématiques. En (a), les deux courbes sont reliées par une translation et si on fait coïncider leur centre en (c), les courbes sont pratiquement superposées. En (b), les deux courbes sont reliées entre elles par une rotation ce qui fait que si on fait coïncider leur centre en (d), les courbes ne sont pas bien superposées, même si elles sont à la base identiques.

courbes (ici, en abduction).

En résumé, en combinant l'information provenant de la moyenne des écarts-types et de l'écart-type des écarts-types des courbes d'indices cinématiques en fonction de la flexion, il est possible de distinguer l'effet de l'erreur produisant une variation dans l'amplitude des courbes d'avec celui produisant une variation dans l'orientation des courbes.

#### Grandeurs d'erreurs ajoutées aux points et méthodes de calcul utilisées

Les conditions des deux types d'expérimentations cliniques (*in vitro* et *in vivo*) peuvent être simulées puisqu'on connaît les grandeurs des erreurs

générees lors de ces types d'expérimentations (tableau 2.3 du chapitre 2) et les algorithmes utilisés dans chacun des cas (voir Annexe 2.1) : l'algorithme d'alignement de référentiel est utilisé pour le calibrage en simulations d'expérimentations *in vivo* et l'algorithme basé sur l'algèbre des quaternions avec 10 séries de 9 points est utilisé pour le calibrage lors des simulations d'expérimentations *in vitro*.

## 3.2 Résultats de la propagation de l'erreur

### 3.2.1 Expérimentations *in vitro*

La première série de simulations reproduit les conditions d'expérimentations *in vitro* avec notre système. Un mouvement de flexion-extension du genou a été obtenu d'une expérience réelle. À ce mouvement est associé un calibrage et une numérisation d'axes cinématiques qui permet d'obtenir deux courbes d'indices cinématiques : une décrit l'évolution de l'angle d'abduction en fonction de la flexion de la jambe et l'autre décrit l'angle de rotation tibiale en fonction de la flexion. Ces deux courbes sont montrées à la première rangée de chaque figure de la série 3.2 à 3.4 à titre de référence pour les simulations.

Le mouvement choisi pour ces simulations est un mouvement typique du genou où on observe une faible amplitude de l'abduction en fonction de la flexion et une plus grande amplitude de la rotation tibiale en fonction de la flexion. Les effets de l'erreur sur les calculs sont les mêmes pour tout autre mouvement et seuls les résultats des coefficients de corrélation des courbes sont influencés par la forme et l'amplitude de la courbe.

À la deuxième rangée de chaque figure de cette série, on observe les courbes simulées d'abduction et de rotation tibiale en fonction de la flexion. À la troisième rangée, les courbes ont été translatées en faisant coïncider leur centre afin de faire ressortir visuellement les variations dans l'orientation des courbes.

Nous avons commencé par ajouter une erreur gaussienne en 3D de 1.9 mm aux points de calibrage utilisés dans le référentiel réel et 0.2 mm pour ceux utilisés dans le référentiel virtuel. Dix mouvements simulés avec ces données sont montrés à la figure 3.2. Les coefficients de corrélation multiple, les moyennes et écarts-types des écarts-types pendant le cycle de flexion ont été calculés sur 100 courbes simulées et sont présentés à la figure 3.5 à gauche de chaque graphique.

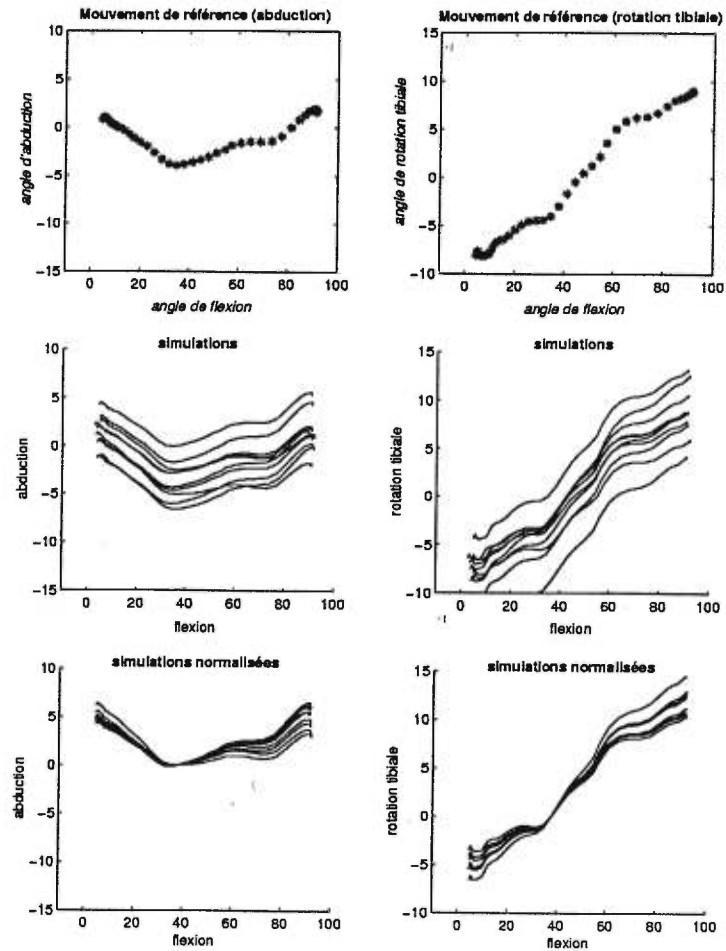


FIG. 3.2: Indices cinématiques dont les points de calibrage sont bruités avec une erreur gaussienne 3D de 1.9 mm dans le référentiel réel et 0.2 mm dans le référentiel virtuel (rangées 2 et 3). Simulations d'expérimentations *in vitro*.

Dans la deuxième série de simulations, l'erreur a été ajoutée sur les points de définition d'axes cinématiques (dans le référentiel virtuel) avec une amplitude de 1.4 mm. Dix mouvements simulés avec ces données sont montrés à la figure 3.3. Les coefficients de corrélation multiple, les moyennes et écarts-types des écarts des courbes pendant un cycle de flexion sont montrés à la figure 3.5 au centre de chaque graphique.

L'effet combiné des deux sources d'erreur (sur les points de calibrage : 1.9 mm dans le référentiel réel et 0.2 mm dans le référentiel virtuel et sur les points de définition d'axes cinématiques dans le référentiel virtuel : 1.4 mm) est présenté à la figure 3.4 et les résultats de corrélation des courbes sont présentés à droite de chaque graphique de la figure 3.5.

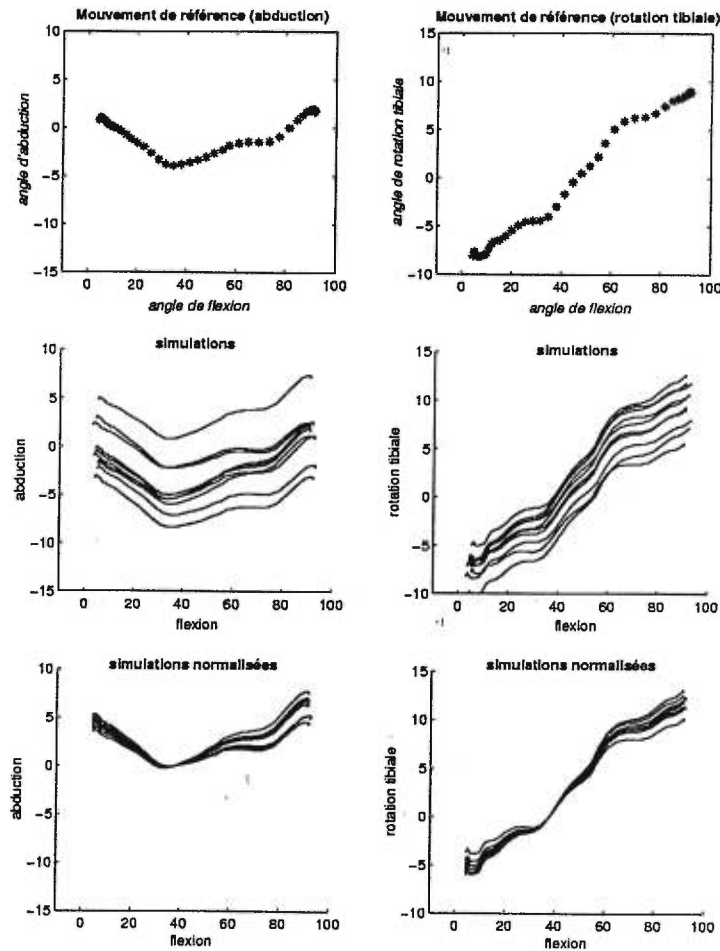


FIG. 3.3: Indices cinématiques d'un mouvement dont les points de définition d'axes sont bruités avec une erreur gaussienne 3D de 1.4 mm (rangées 2 et 3). Simulations d'expérimentations *in vitro*.



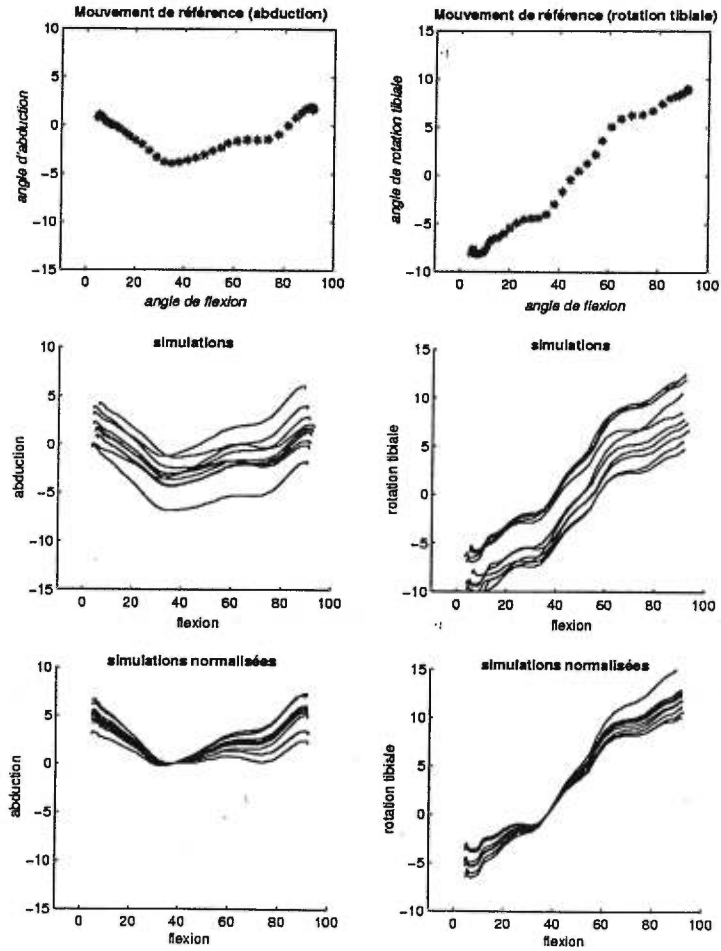


FIG. 3.4: Indices cinématiques d'un mouvement dont les points de calibrage (1.9 mm et 0.2 mm respectivement dans les référentiels réels et virtuels) et les points de définition d'axes (1.4 mm dans le référentiel virtuel) sont bruités (rangées 2 et 3). Simulations d'expérimentations *in vitro*.

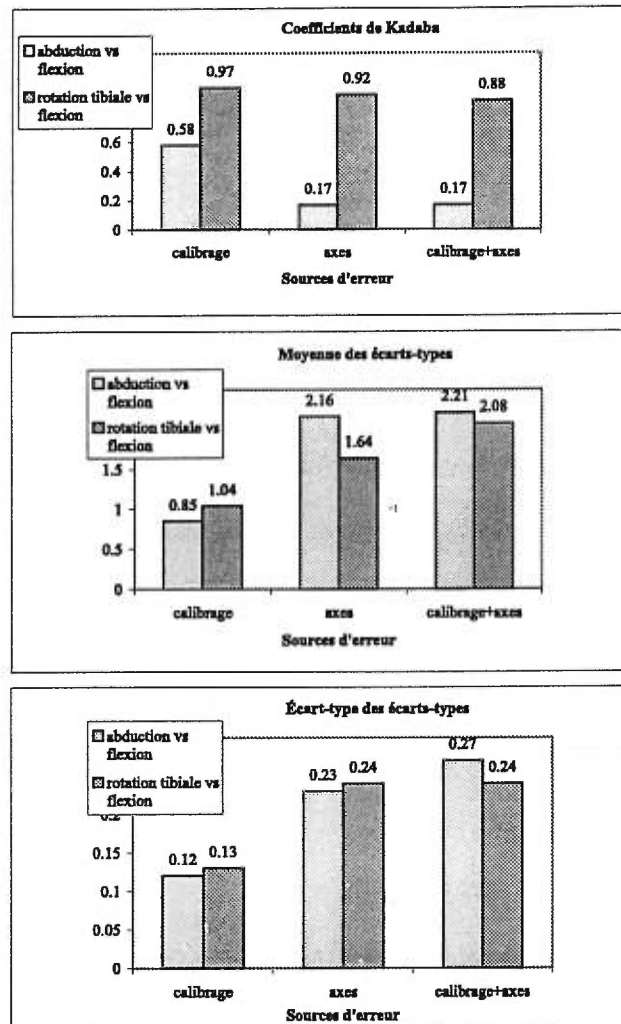


FIG. 3.5: Résultats des différents coefficients de corrélation des simulations d'expérimentation *in vitro*. Dans la première rangée on observe de gauche à droite les coefficients de corrélation multiple pour les trois séries de simulations, à la fois pour les courbes d'abduction et pour les courbes de rotation tibiale en fonction de la flexion. Dans la deuxième rangée, on observe les résultats de moyenne de l'écart-type pour les mêmes conditions. Finalement, on observe dans la troisième rangée, toujours pour les mêmes conditions, les résultats de l'écart-type des écarts-types pendant un cycle de flexion.

### 3.2.2 Expérimentations *in vivo*

Pour observer l'effet de l'erreur sur la définition des axes cinématiques et des points de calibrage dans le cas des conditions *in vivo*, nous avons utilisé les résultats de l'erreur de numérisation en condition *in vivo* en parallèle avec un fichier de calibrage provenant d'expérimentation *in vivo*. Les courbes d'indices cinématiques de référence sont encore une fois montrées en haut de chacune des figures à titre de comparaison.

Un bruit gaussien de 7.0 mm dans le référentiel réel et 1.4 mm dans le référentiel virtuel a été ajouté aux 3 points utilisés pour faire le calibrage de chaque os. Les différentes courbes sur la figure 3.6 représentent les indices cinématiques (abduction vs flexion et rotation tibiale vs flexion) calculés à partir de différents calibrage. Tout comme à la section précédente, les coefficients de corrélation multiple, les moyennes et écarts-types des écarts des courbes pendant un cycle de flexion sont regroupés à la figure 3.9, à gauche de chaque graphique.

Nous avons ensuite repris les simulations en ajoutant un bruit sur les points d'identification des axes cinématiques avec une amplitude de 1.4 mm dans le référentiel virtuel. Les simulations sont présentées à la figure 3.7 et les résultats de corrélation sont présentés au centre de chaque graphique de la figure 3.9.

L'effet combiné des erreurs de définitions d'axes cinématiques (1.4 mm dans le référentiel virtuel) et des points de calibrage (7.0 mm dans le référentiel réel et 1.4 mm dans le référentiel virtuel) a été simulé à la figure 3.8. Les résultats de corrélation des courbes sont présentés à droite de chaque graphique de la figure 3.9.

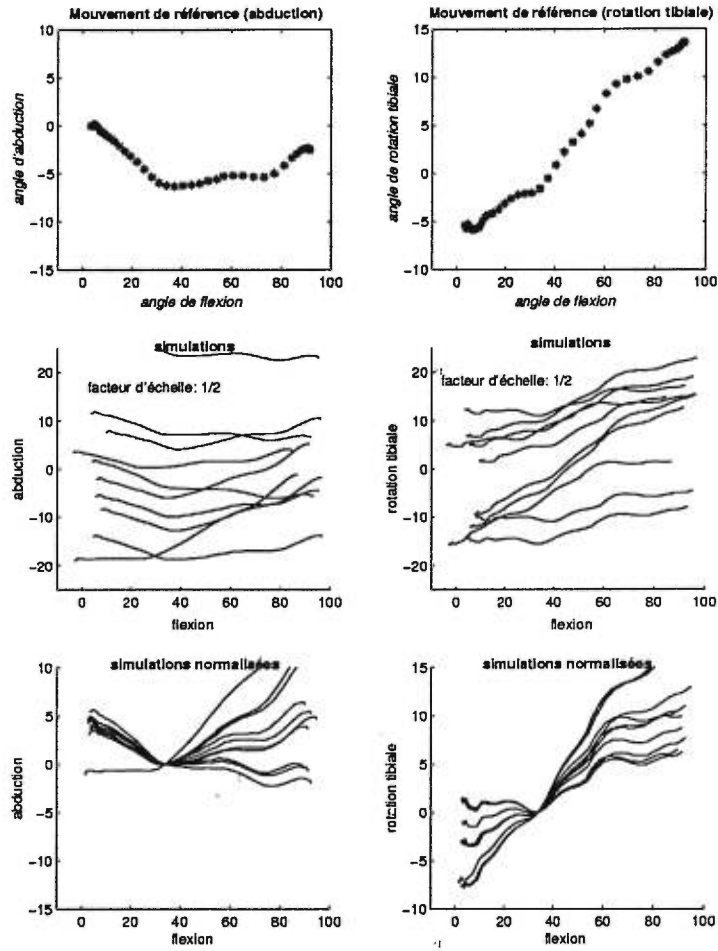


FIG. 3.6: Indices cinématiques dont les points de calibrage sont bruités : 7.0 mm dans le référentiel réel et 1.4 mm dans le référentiel réel. (rangées 2 et 3). Simulations d'expérimentations *in vivo*.

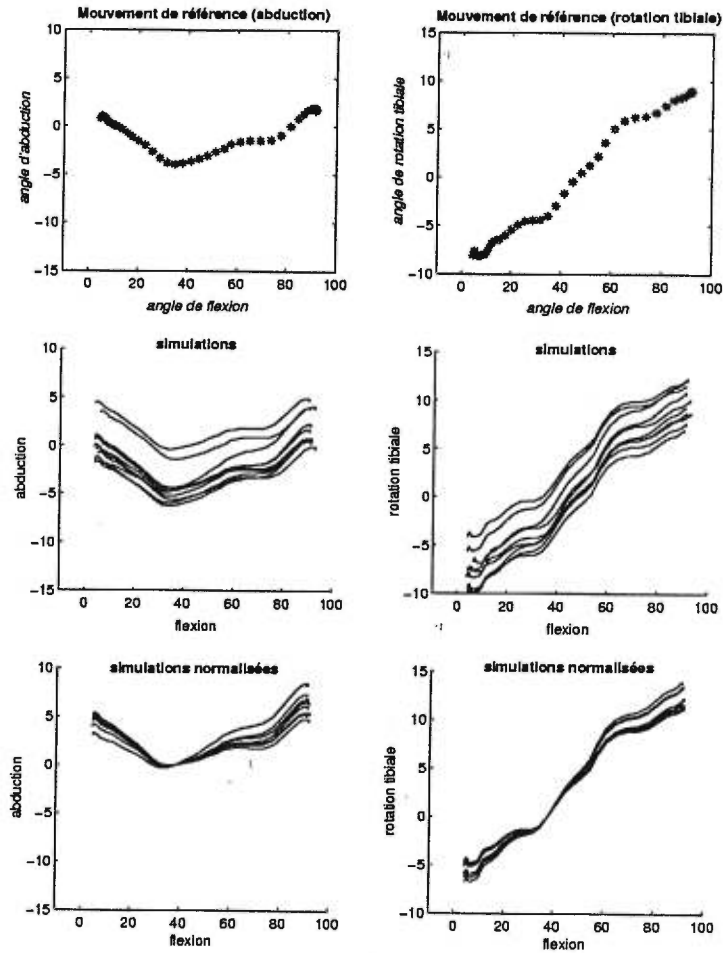


FIG. 3.7: Indices cinématiques dont les points de définition d'axes sont bruités : 1.4 mm dans le référentiel virtuel (rangées 2 et 3). Simulations d'expérimentations *in vivo*.

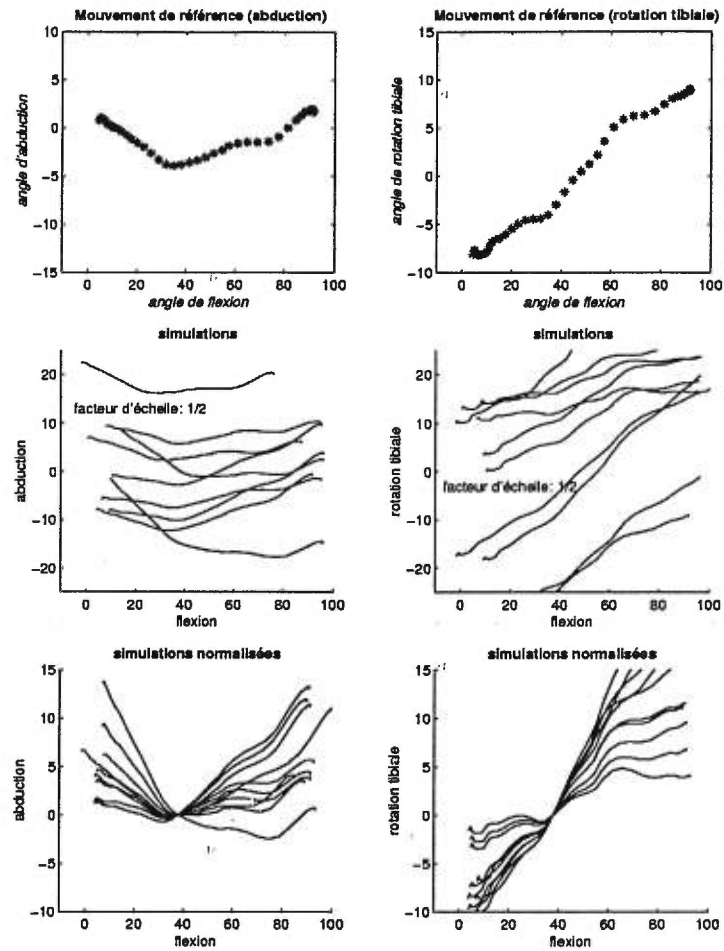


FIG. 3.8: Indices cinématiques d'un mouvement dont les points de calibrage (7.0 mm et 1.4 mm respectivement dans les référentiels réels et virtuels) et les points de définition d'axes (1.4 mm dans le référentiel virtuel) sont bruités (rangées 2 et 3). Simulations d'expérimentations *in vivo*.

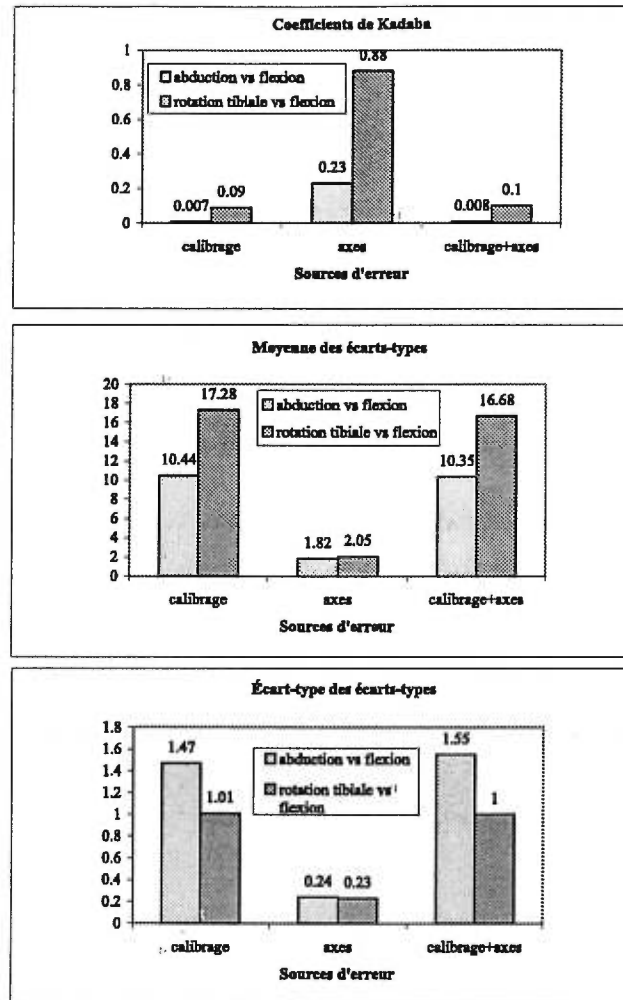


FIG. 3.9: Résultats des différents coefficients de corrélation des simulations d'expérimentation *in vivo*. Dans la première rangée on observe de gauche à droite les coefficients de corrélation multiple pour les trois séries de simulations, à la fois pour les courbes d'abduction et pour les courbes de rotation tibiale en fonction de la flexion. Dans la deuxième rangée, on observe les résultats de moyenne de l'écart-type pour les mêmes conditions. Finalement, on observe dans la troisième rangée, toujours pour les mêmes conditions, les résultats de l'écart-type des écarts-types pendant un cycle de flexion.

### 3.2.3 Simulations isolées des erreurs sur le fémur et sur le tibia

Afin d'isoler l'influence de l'erreur due à la définition de repères anatomiques pour le calibrage sur chacun des os, l'erreur a d'abord été ajoutée au fémur seul (figure 3.10), le tibia n'étant pas affecté, puis inversement, au tibia seul (figure 3.11). L'erreur ajoutée est de 7.0 mm dans le référentiel réel et de 1.4 mm dans le référentiel virtuel. Les mêmes résultats (à une moins grande échelle) sont obtenus si l'erreur est ajoutée aux points de définition d'axes.



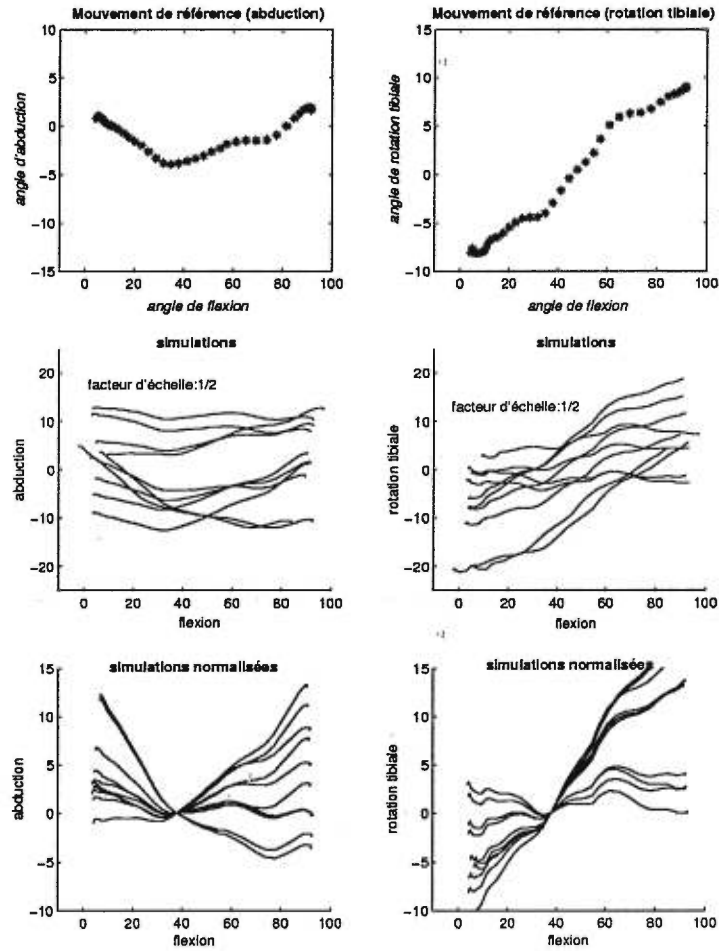


FIG. 3.10: Indices cinématiques d'un mouvement dont les points de calibrage du fémur sont bruités (7.0 mm dans le référentiel réel et 1.4 mm dans le référentiel virtuel) (rangées 2 et 3). Simulations d'expérimentations *in vivo*.

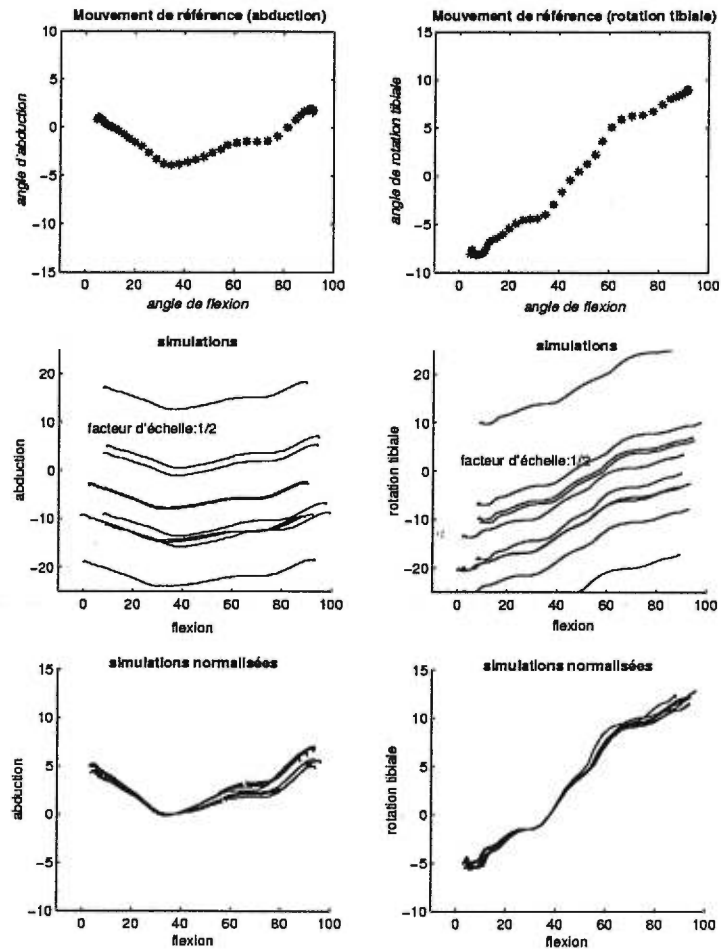


FIG. 3.11: Indices cinématiques d'un mouvement dont les points de calibrage du tibia sont bruités (7.0 mm dans le référentiel réel et 1.4 mm dans le référentiel virtuel) (rangées 2 et 3). Simulations d'expérimentations *in vivo*.

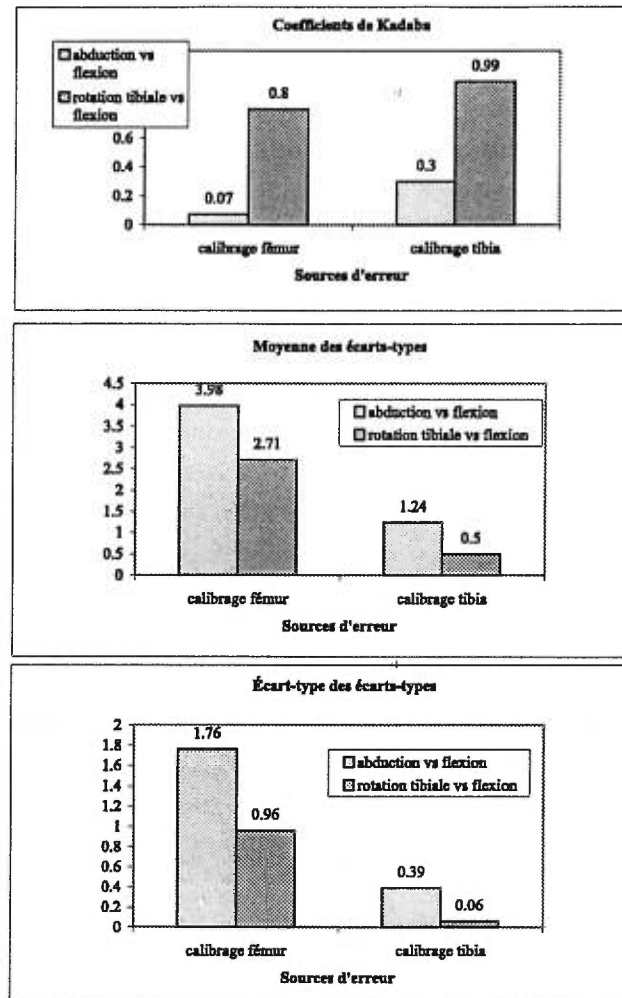


FIG. 3.12: Influence du repère d'interprétation sur les résultats des différents coefficients de corrélation. Dans la première rangée on observe de gauche à droite les coefficients de corrélation multiple pour les deux séries de simulations, à la fois pour les courbes d'abduction et pour les courbes de rotation tibiale en fonction de la flexion. Dans la deuxième rangée, on observe les résultats de moyenne de l'écart-type pour les mêmes conditions. Finalement, on observe dans la troisième rangée, toujours pour les mêmes conditions, les résultats de l'écart-type des écarts-types pendant un cycle de flexion.

### 3.3 Analyse des résultats et discussion

#### 3.3.1 Mesures de la reproductibilité des courbes et coefficients de corrélation.

L'objectif lors des simulations est de tenter de quantifier l'effet des différentes erreurs identifiées au chapitre précédent sur la reproductibilité de nos calculs d'indices cinématiques. Pour effectuer ce travail, nous avons proposé trois mesures de la reproductibilité des courbes, une bonne reproductibilité des résultats étant par hypothèse l'indicateur d'un faible effet de l'erreur sur les courbes.

Ainsi, nous avons, pour chacune des courbes, calculé le coefficient de corrélation multiple, la moyenne des écarts le long des courbes et l'écart-type des écarts le long des courbes.

##### **Le coefficient de corrélation multiple**

Pour un même mouvement, le coefficient de corrélation multiple semble généralement être un indice de mesure fiable pour la reproductibilité des courbes, et ainsi de la quantification de l'erreur ajoutée : plus l'erreur ajoutée est grande, plus le coefficient est faible (figures 3.5 et 3.9 en correspondance avec le tableau 2.3). Ainsi, si un utilisateur veut comparer deux séries de courbes d'un même mouvement (par exemple avant et après le port d'une orthèse plantaire dans le cas de l'analyse de la marche), il pourrait utiliser le coefficient de corrélation multiple pour comparer la reproductibilité de ses résultats.

Cependant, le coefficient est très influencé par la forme de la courbe à analyser. Si on regarde aux figures 3.5 et 3.9 les coefficients de corrélation multiple pour les courbes d'abduction et de rotation tibiale, on remarquera que les deux sont, pour une même erreur ajoutée, très différents. Pourtant, si on regarde les courbes associées (figures 3.2 à 3.4 et 3.6 à 3.8), on remarque que qualitativement, l'effet de l'erreur semble être le même.

La différence dans les mesures s'explique par le fait que l'amplitude totale du mouvement entre en jeu dans le calcul du coefficient de corrélation multiple (au dénominateur, voir Annexe 5). Ainsi, pour deux courbes ayant deux amplitudes différentes mais une même grandeur d'erreur ajoutée, nous aurons deux coefficients différents. Cet effet aura tendance à augmenter si l'amplitude du mouvement mesurée est faible. Des petites variations entre les courbes modifieront de façon plus grande le coefficient de corrélation multiple que si l'amplitude du mouvement est grande.

Lors des expérimentations, seulement les résultats ayant sensiblement les mêmes amplitudes totales de mouvement devraient être comparées au moyen du coefficient de Kadaba. De plus, l'utilisation de cet indice de corrélation dans des conditions où l'amplitude du mouvement à analyser est petite devrait être évitée.

### **La moyenne et l'écart-type de la déviation des courbes pendant un cycle de flexion**

Les moyennes et les écarts-types des écarts le long des courbes ont également été calculées. La comparaison des courbes d'abduction en fonction de la flexion et de rotation tibiale en fonction de la flexion des figures 3.5 et 3.9 nous montrent que la forme de la courbe ne semble pas avoir d'effet sur ces deux indices. De plus, les deux indices semblent également bien quantifier l'erreur ajoutée aux courbes et par conséquent la reproductibilité des résultats.

Dans ce sens, une revue plus détaillée de la littérature sur les statistiques appliquées aux mouvements physiologiques s'impose afin de déterminer quels indices statistiques pourraient être utilisés afin de discerner les variabilités dues au changement d'orientation des courbes et à un décalage des courbes. Pour l'instant le coefficient de corrélation multiple utilisé par Kadaba et al. est le seul coefficient que nous ayons retenu de la littérature. La moyenne et l'écart-type des écarts-types pendant un cycle de flexion ont été propo-

sés intuitivement. D'autres mesures statistiques (coefficient de corrélation) permettent peut-être d'arriver au même résultat de manière plus conventionnelle.

### 3.3.2 Propagation de l'erreur lors des simulations

Notre outil de simulation a permis de quantifier l'effet de l'erreur provenant de l'identification des axes cinématiques sur le modèle numérique et de l'identification des points servant au calibrage des os dans les référentiels réels et virtuels de ceux-ci sur les résultats finaux que sont les indices cinématiques du mouvement.

#### Simulations d'expérimentations *in vitro*

Les simulations visant à reproduire les conditions expérimentales *in vitro* montrent que l'influence des différentes erreurs est faible et les résultats des coefficients de corrélations le quantifient bien (moyenne des écarts-types de 2.21 et 2.08 degrés et écart-type des écarts-types de 0.27 et 0.24 degrés respectivement pour l'abduction et pour la rotation tibiale en fonction de la flexion du genou), exception faite du coefficient de corrélation multiple pour le mouvement d'abduction en fonction de la flexion (0.17) qui semble être relativement faible par rapport au coefficient de corrélation multiple pour la rotation tibiale en fonction de la flexion (0.88). Sachant que ceci est principalement dû à la forme de la courbe d'abduction dont l'amplitude est faible (c.f. section 3.3.1), on constate combien il peut être trompeur de n'avoir que le coefficient de corrélation multiple comme mesure de la corrélation de courbes.

On remarque que c'est l'identification des axes cinématiques qui semble être l'opération induisant le plus d'erreur sur les résultats finaux avec une moyenne d'écart de près de 2 degrés pour l'identification d'axes cinématiques par rapport à une moyenne d'écart de près de 1 degré dû à l'erreur d'identification des points de calibrage. Si on arrive à améliorer la reproductibilité

de la méthode de définition d'axes cinématiques sur le modèle virtuel de l'os qui est la source principale de l'erreur dans le cas des expérimentations *in vitro*, on pourra augmenter la reproductibilité des valeurs absolues d'indices cinématiques.

Également, l'analyse de la moyenne des écarts-types le long du mouvement montre que la comparaison entre les valeurs absolues d'angles provenant de deux expérimentations *in vitro* avec calibrage et définition d'axes différents peut être effectuée à l'intérieur d'un intervalle d'incertitude relativement faible (2 à 3 degrés en moyenne le long du mouvement).

Finalement, l'orientation de la courbe n'est pas beaucoup influencée par les différentes sources d'erreurs (figure 3.5). Seulement de faibles variations font en sorte que, d'après les simulations, les courbes cinématiques provenant d'expérimentations *in vitro* peuvent être comparées en les juxtaposant afin de comparer les variations d'amplitudes relatives dans le mouvement.

### Simulations d'expérimentations *in vivo*

Les simulations visant à reproduire les conditions expérimentales *in vivo* quant à elle nous montrent que les résultats d'indices cinématiques obtenus suite à différents calibrages ne peuvent tout simplement pas être comparés, la propagation de l'erreur y étant trop grande (moyenne des écarts-types de 10 et 17 degrés respectivement pour l'abduction et pour la rotation tibiale en fonction de la flexion du genou).

De plus, même en juxtaposant les courbes cinématiques en leurs centres, on ne peut comparer deux mesures puisque l'orientation des courbes est trop influencée par l'erreur (figure 3.9). Ainsi, avec la méthode actuelle, les seuls résultats qui peuvent être comparés entre eux lors des expérimentations *in vivo* sont les résultats d'expérimentations où l'on utilise un seul calibrage et une seule définition d'axes pour toutes les acquisitions. Nous tenterons au prochain chapitre de proposer de nouvelles méthodes de calibrage et de définition d'axes cinématiques pour améliorer cette situation.

## Chapitre 4

### Discussion et perspectives

Le premier objectif de ce travail était d'identifier les principales sources d'erreurs présentes dans le système Geni. Au chapitre 2, il a été montré que les principales erreurs provenaient de l'utilisateur qui identifie les points servant à la définition d'axes et au calibrage avec une incertitude et un biais. Les erreurs sont surtout importantes au niveau des expérimentations *in vivo*, principalement à cause du biais généré par l'utilisateur. Ce biais est important en grande partie à cause de l'absence de correspondance visuelle directe entre l'os réel et l'os virtuel : l'utilisateur ne voit pas les os directement. De plus, le biais pourrait sans doute être minimisé avec une meilleure connaissance de l'anatomie de la jambe de la part de l'utilisateur du système Geni.

Comme deuxième objectif, il fallait évaluer le retentissement des erreurs générées lors de l'identification de points au niveau du calcul des indices cinématiques. Ceci a été fait au chapitre 3. On a pu tout d'abord constater qu'en expérimentation *in vitro*, c'est l'étape de définition des axes cinématiques qui a le plus d'effet sur les résultats tandis qu'en expérimentation *in vivo*, c'est l'étape de calibrage qui affecte le plus les résultats. Dans le cas des expérimentations *in vivo*, on a pu constater qu'aucune comparaison n'est possible entre différentes expérimentations avec la méthode présentement utilisée.



## 4.1 Propositions de nouvelles techniques de calibrage pour les expérimentations *in vivo*

Quatre possibilités s'offrent à nous pour l'instant quant à l'avenir des expérimentations *in vivo* : 1) Trouver une méthode définissant les axes cinématiques directement sur le genou réel de façon reproductible sans avoir recours aux modèles numériques, 2) une méthode utilisant les ultrasons en parallèle avec un calibrage minimisant l'erreur, 3) une méthode nécessitant le calibrage précis que d'un des deux os et 4) une méthode où la définition d'axes cinématiques serait déterminée à l'aide d'information *a priori* sur le mouvement et sur la position relative des deux os de la jambe l'un par rapport à l'autre.

### 4.1.1 Définition d'axes cinématiques directement sur le genou

On a présenté à la section 1.1.1 deux catégories de méthodes définissant les axes cinématiques : directe ou indirecte. Une décision avait été faite au début du projet Geni afin d'utiliser une définition d'axes *indirecte* sur un modèle numérique par le biais d'un calibrage. Puisqu'on sait maintenant que c'est l'étape de calibrage qui affecte le plus les résultats en expérimentation *in vivo*, une première solution au problème pourrait donc être une définition d'axes cinématiques *directe* sur la jambe.

Pour ce faire, il faudrait trouver des sites anatomiques faciles à identifier ou qui affectent peu les résultats. Par exemple, au lieu de devoir identifier les centres des condyles fémoraux qui sont difficiles à situer chez le sujet et qui génèrent beaucoup d'erreurs sur l'orientation de l'axe de flexion, l'identification de certains points comme le grand trochanter ou les centres des maléoles de la cheville pourraient générer moins d'erreur. Cette moins grande propagation de l'erreur pourrait être causée par le fait que ces points sont situés loin de l'articulation du genou et qu'une erreur d'identification produirait

ainsi un faible effet sur l'orientation des axes cinématiques.

Une mesure de la reproductibilité de l'identification de nouveaux points devra être testée avec le simulateur Matlab afin de déterminer si les résultats produits avec ceux-ci sont d'une reproductibilité suffisante pour qu'on en fasse l'utilisation clinique.

#### 4.1.2 Méthode par minimisation de l'erreur

Une deuxième solution possible réside dans la poursuite du travail déjà accompli pour les expérimentations *in vitro* qui utilise un calibrage par minimisation d'erreur entre deux ensembles de points.

Lors des expérimentations *in vivo*, le modèle virtuel de l'os est formé par des points à la surface de l'os tandis que les repères anatomiques identifiées sur l'os réel se trouvent à la surface de la peau du sujet. Afin que la coïncidence entre les points soit juste, il faut un moyen pour mesurer la distance entre la peau et l'os lors de chaque identification de repère anatomique sur le genou réel. Une fois les distances entre la peau et les os du genou connues pour plusieurs repères, un calibrage par minimisation de l'erreur entre points non-correspondants suivant une des techniques présentées en Annexe 2.2 pourrait être utilisée.

Afin d'évaluer cette distance entre la peau et l'os du sujet, il serait possible d'utiliser une sonde ultrasonore. Des essais préliminaires de l'utilisation d'une telle sonde sur le genou ont été effectués. Ces premiers essais ont conclu en la faisabilité de la mesure de distance entre la peau et l'os à l'aide d'une sonde ultrasonore avec une précision intéressante (les premiers essais montraient une précision de l'ordre de 2 mm sur l'estimation de la distance entre la peau et l'os). Aucune validation précise n'a été effectuée lors de ces expérimentations, mais les résultats obtenus sont suffisamment intéressants pour que l'on puisse projeter de faire le calibrage à l'aide de cette méthode.

L'ensemble des étapes serait effectué dans un temps plus long (l'acquisition à l'aide de la sonde ultrasonore pourrait prendre plusieurs minutes)

et coûterait plus cher (le prix du système ultrasonore). De plus, une reconstruction numérique personnalisée du sujet serait nécessaire pour réaliser un calibrage précis et reproductible. Ceci augmenterait non seulement le prix (radiographies, tomographie) de l'examen mais également la durée de ce dernier et la dose de rayon X imposée au sujet. En contrepartie, ce calibrage pourrait être relativement précis, dépendamment du nombre de points acquis avec la sonde ultrasonore.

Plusieurs études doivent être conduites afin de déterminer si ce projet peut être à long terme intéressant pour une version commerciale de Geni. S'il ne l'est pas, peut-être le restera-t-il pour une version destinée à la recherche.

### 4.1.3 Définition d'axes et calibrage sur un seul os

On remarque à la figure 3.12 de la section 3.2 que l'écart-type des écarts-types le long des courbes n'est pas le même si l'on ajoute l'erreur sur les points du tibia que sur les points du fémur. Ceci traduit le fait que l'effet du changement d'orientation des courbes (effet "papillon") est beaucoup moins prononcé lorsqu'on ajoute l'erreur aux points du tibia que si l'on ajoute l'erreur sur les points du fémur (figure 3.11 vs figure 3.10). En Annexe 6, on montre que l'effet "papillon" est plus prononcé si le repère d'interprétation est bruité, i.e. dans ce cas-ci, si l'on ajoute du bruit aux points du fémur<sup>1</sup>.

Le phénomène nous a conduit à l'hypothèse suivante : si le calibrage du fémur est effectué de façon adéquate, l'effet d'une erreur de numérisation sur le tibia entraînera surtout des translations latérales et verticales des courbes d'angles cinématiques. Si ce n'est pas le cas, il y aura en plus des variations dans l'orientation des courbes.

Ainsi, le calcul de la moyenne et de l'écart-type des écarts pendant un cycle de flexion permettront à l'utilisateur deux observations. La moyenne des écarts-types pendant un cycle de flexion permettra de déterminer s'il y a

---

<sup>1</sup>Rappel : les indices du mouvement calculés sont ceux qui permettent d'exprimer le tibia dans le repère d'interprétation du fémur.

une grande présence de l'erreur dans sa définition d'axes de manière générale, et l'écart-type des écarts lui donnera une indication à savoir si son erreur est présente en plus grande partie sur le positionnement des axes cinématiques liés au fémur, au tibia ou si l'erreur est bien répartie entre les deux.

Une étude est nécessaire afin de déterminer les relations existant entre l'effet de l'erreur d'orientation tridimensionnelle des systèmes d'axes cinématiques du tibia ou du fémur, la moyenne et l'écart-type des écarts le long des mouvements. Une fois ces relations connues, il pourrait être possible à l'utilisateur d'enregistrer des mesures et de déterminer par la suite si son calibrage ou la définition de ses axes cinématiques est identique à celle d'une expérience de référence ; il faut pour cela supposer que les deux mouvements enregistrés sont identiques. Une fois assuré que le système d'axes du repère d'interprétation est bien orienté, les courbes cinématiques pourraient être "translatées" ou "normalisées" uniquement en modifiant l'orientation du système d'axes cinématiques associé au deuxième repère (dans ce cas-ci, celui du tibia).

Jusqu'à présent, notre repère d'interprétation a toujours été le système d'axes associé au fémur. Cependant, si on reprend les calculs avec le système d'axes associé au tibia comme repère d'interprétation, la situation sera inversée : un changement dans l'orientation tridimensionnelle du repère d'interprétation du tibia changera l'orientation des courbes et un changement dans l'orientation tridimensionnelle du repère d'interprétation du fémur n'aura tendance qu'à translater les courbes cinématiques.

Si on met en commun les deux séries de valeurs calculées, beaucoup de données sont disponibles afin de déterminer l'orientation relative du système d'axes du tibia avec celui du fémur (ou vice-versa). Ceci permettrait d'obtenir la même configuration que dans le mouvement de référence. En résumé, un calibrage précis et reproductible d'un des deux repères du genou pourrait n'être que la seule étape nous permettant de faire des comparaisons entre plusieurs mouvements.

#### 4.1.4 Autres perspectives

Suite à la recherche d'une solution pour faire le calibrage précis et reproductible en expérimentation *in vivo*, la question se pose : qu'est-ce qui fait la difficulté de reproduire les résultats de mesures d'un mouvement du genou qui est, selon notre hypothèse, un mouvement reproductible ?

Une réponse à cette question peut être le fait que ce que l'on tente de (re)produire est un mouvement significatif pour le clinicien qui le comprend selon les définitions des conventions établies : le genou fait un mouvement tridimensionnel suivant un angle autour d'un axe de flexion-extension, d'un axe d'abduction-adduction, d'un axe de rotation tibiale et suivant des translations selon ces trois mêmes axes.

On sait ([Hamel, 1997]) que le mouvement du genou pourrait très bien se décrire de façon précise uniquement par le mouvement des capteurs magnétiques, fixés à la jambe, par l'entremise de l'axe hélicoïdal. Ce faisant, aucune convention subjective n'influencerait les calculs et les résultats inter-expérimentations seraient plus reproductibles. Cependant, on perdrait alors tout l'intérêt des utilisateurs pour qui les données ainsi récoltées auraient une signification moins "clinique".

N'existe-t-il pas alors une façon de concilier ces deux approches afin d'améliorer la reproductibilité des résultats d'indices cinématiques ? Pouvons-nous reproduire ceux-ci avec une technique n'utilisant pas le calibrage actuel des os tout en gardant la relation avec les définitions de mouvements telles qu'indiquées dans la littérature sur la cinématique du mouvement du genou ?

Si l'on tente de faire ce travail, il faudra définir les axes cinématiques autrement que par une étape manuelle ou la subjectivité de l'utilisateur est mise en cause. Plusieurs suggestions seront à considérer : la définition d'axes cinématiques pourrait être effectuée à l'aide d'information *a priori* sur la position et l'orientation des axes cinématiques (par exemple l'axe de flexion sur le fémur est parallèle à l'axe de flexion sur le tibia lors de l'extension complète du genou) ou des informations *a priori* sur le mouvement du genou

en tant que tel (par exemple le plus grand mouvement est effectué autour de l'axe de flexion, le plus petit autour de l'axe de l'abduction). Ces différentes conditions peuvent aider à rétablir les conventions qui nous amèneraient à une définition d'axes liée de façon moins importante à l'intervention subjective d'un utilisateur. Ceci permettrait une évaluation beaucoup plus reproductible et plus rapide du mouvement du genou.

Les résultats fournis par les études *in vitro* sur genoux cadavériques nous seront indispensables dans l'avancement des travaux. Les mesures qu'on peut en tirer nous aideront à déterminer s'il est judicieux de se diriger vers de telles avenues. Les expérimentations *in vitro* ont l'avantage de produire des valeurs dans un environnement contrôlé. Si l'on arrive à trouver des caractéristiques communes d'un genou à l'autre pouvant servir de base à la définition d'axes cinématiques sur le genou, nous pourrions alors nous en servir dans le but d'élaborer une méthode de mesure des indices cinématiques où l'influence de l'utilisateur serait minimisée.

# Chapitre 5

## Conclusion

Le premier objectif de ce travail était d'identifier les sources d'erreur pouvant influencer nos résultats finaux. Nous avons réalisé ceci et montré que le biais et l'incertitude liés à l'utilisateur du système est le principal élément qui puisse influencer sur la reproductibilité de nos résultats. Nous avons également déterminé que c'est l'identification de points sur le genou réel pour faire le calibrage qui génère le plus d'erreur lors des expérimentations *in vitro* (1.9mm) et *in vivo* (7.0 mm)

Le deuxième objectif de ce travail était de quantifier l'effet des différentes sources d'erreur sur nos résultats. Nous avons ainsi montré qu'en expérimentation *in vitro* ceux-ci étaient peu influencés par les sources d'erreur, les résultats pouvant être comparés à l'intérieur d'un intervalle de précision de 2 à 3 degrés sans normalisation. Plus spécifiquement, la source d'erreur produisant le plus d'effet sur les résultats lors des expérimentations *in vitro* est la définition d'axes cinématiques sur le modèle virtuel de l'os.

En expérimentation *in vivo*, aucune comparaison inter expérimentale n'est possible à l'intérieur d'un intervalle de précision de 10 à 15 degrés à cause des erreurs présentes lors de la définition d'axes cinématiques et du calibrage du système. De plus, même en faisant une normalisation des courbes, les résultats obtenus ne sont pas comparables de façon satisfaisante.

Ceci nous pousse maintenant à la recherche de nouvelles techniques de

définition d'axes cinématiques sur les deux os de la jambe pour analyser son mouvement tridimensionnel lors d'expérimentation *in vivo*. Des efforts doivent maintenant être apportés afin de trouver une méthode qui soit moins influencée par le geste de l'utilisateur. Quelques idées sont déjà présentées en discussion, mais la plus grande partie du développement reste néanmoins devant nous.



## Références

- [Arun et al., 1987] Arun, K., Huang, T., et Blostein, S. (1987). Least square fitting of two 3-D points sets. *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-9(5) : 698–700.
- [Besl et McKay, 1992] Besl, P. J. et McKay, N. D. (1992). A Method for Registration of 3-D Shapes. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 14(2) : 239–256.
- [Blainville et al., 1999] Blainville, E., Bricault, I., Cinquin, P., et Lavallée, S. (1999). *Concepts and Methods of registration for Computer-Integrated Surgery (dans : Computer Assisted Orthopedic Surgery)*, pages 15–34. Hogrefe and Huber Publishers.
- [Bolle et Cooper, 1986] Bolle, R. M. et Cooper, D. B. (1986). On Optimally Combining Pieces of Information, with Application to Estimating 3-D Complex-Object Position from Range Data. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-8(5) : 619–638.
- [Churchill et al., 1998] Churchill, D. L., Incavo, S. J., Johnson, C. C., et Beynnon, B. D. (1998). The transepicondylar axis approximates the optimal flexion axis of the knee. *Clinical orthopaedics and related research*, (356) : 111–118.
- [Dougherty et Giardina, 1987] Dougherty, E. R. et Giardina, C. R. (1987). *Image Processing-Continuous to Discrete (Geometric, Transform and Statistical Methods)*, volume 1, chapitre 7, pages 371–436. Prentice-Hall, Inc.

- [Elias et al., 1990] Elias, S., Freeman, M., et Gockay, E. (1990). A correlative study of the geometry and anatomy of the distal femur. *Clinical orthopaedics and related research*, (260) : 99–103.
- [Goldstein, 1980] Goldstein, H. (1980). *Classical Mechanics*. Addison-Wesley Publishing Company Inc.
- [Grood et Suntay, 1983] Grood, E. et Suntay, W. (1983). A Joint Coordinate System for the Clinical Description of the Three-Dimensionnal Motions : Application to the Knee. *Journal of Biomechanical Engineering*, 105 : 136–144.
- [Hagemeister et al., 1999] Hagemeister, N., Yahia, L., Duval, N., et de Guise, J. A. (1999). In vivo reproducibility of a new non-invasive diagnostic tool for the three-dimensional knee evaluation. *The Knee*, 6 : 175–181.
- [Hamel, 1997] Hamel, G. (1997). Définition de paramètres cliniques représentatifs de la cinématique tridimensionnelle de genoux normaux. Mémoire de Maîtrise, Institut de génie biomédical, École Polytechnique de Montréal.
- [Haralick et al., 1989] Haralick, R. M., Joo, H., Lee, C.-N., Zhuang, X., Vaidya, V. G., et Kim, M. B. (1989). Pose Estimation from Corresponding Point Data. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 19(6) : 1426–1445.
- [Hoffmann, 1982] Hoffmann, D. (1982). *Measurement Errors, Probability and Information Theory (Handbook of Measurement Science)*, volume 1, chapitre 6, pages 241–275. John Wiley & Sons Ltd.
- [Hollister et al., 1993] Hollister, A. M., Jatana, S., Singh, A. K., Sullivan, W. W., et Lupichuk, A. G. (1993). The axes of rotation of the knee. *Clinical orthopaedics and related research*, (290) : 259–268.
- [Horn, 1987] Horn, B. K. P. (1987). Closed-form solution of absolute orientation using unit quaternions. *Journal of Optical Society of America A*, 4(4) : 629–642.

- [Huang et al., 1986] Huang, T. S., Blostein, S. D., et Margerum, E. A. (1986). Least-squares estimation of motion parameters from 3-D point correspondences. *Proc. IEEE Conf. Computer Vision and Pattern Recognition, Miami Beach, Fl.*
- [Kadaba et al., 1990] Kadaba, M., Ramakrishnan, H., et Wooten, M. (1990). Measurement of lower extremity kinematics during level walking. *Journal of Orthopaedics Research*, 8(3) : 383–392.
- [Kadaba et al., 1989] Kadaba, M., Ramakrishnan, H., Wooten, M., Gainey, J., Gorton, G., et Cochran, G. (1989). Repeatability of kinematics, kinetics and electromyographic data in normal adult gait. *Journal of Orthopaedic Research*, 7(6) : 849–861.
- [Kanatani, 1994] Kanatani, K. (1994). Analysis of 3-D Rotation Fitting. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 16(5) : 543–549.
- [Kinzel et al., 1972] Kinzel, G. L., Hall Jr, A., et Hillberry, B. M. (1972). Measurement of the total motion between two body segments- I. Analytical development. *Journal of Biomechanics*, 5 : 283–293.
- [Lafortune, 1984] Lafortune, M. (1984). *The use of intra-cortical pins to measure the motion of the knee joint during walking.* thèse de PhD, Pennsylvania State University.
- [Maach, 1998] Maach, I. E. (1998). Développement d'un nouveau système pour analyser la biocinématique du genou. Application : Évaluation de l'orthèse plantaire. Mémoire de Maîtrise, Institut de génie biomédical, École Polytechnique de Montréal.
- [Pennock et Clark, 1990] Pennock, G. et Clark, K. (1990). An anatomy-based coordinate system for the description of the kinematic displacements in the human knee. *Journal of Biomechanics*, 23(12) : 1209–1218.

- [Press et al., 1992] Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., et Flannery, B. P. (1992). *Numerical Recipes in C; The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, deuxième édition.
- [Ramsey et Wretenberg, 1999] Ramsey, D. et Wretenberg, P. (1999). Biomechanics of the knee : methodological considerations in the in vivo kinematic analysis of the tibiofemoral and patellofemoral joint. *Clinical Biomechanics*, 14 : 595–611.
- [Sansò, 1973] Sansò, F. (1973). An exact solution of the Roto-Translation Problem. *Photogrammetria*, 29 : 203–216.
- [Sati, 1995] Sati, M. (1995). *Computer-assisted knee surgery system : Planning of prosthetic ligament insertion*. thèse de PhD, Institut de génie biomédical, École Polytechnique de Montréal.
- [Umeyama, 1991] Umeyama, S. (1991). Least-Squares Estimation of Transformation Parameters Between Two Point Patterns. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 13(4) : 376–380.
- [Véron, 1995] Véron, S. (1995). Interprétation des déplacements dans l'espace. Rapport technique, Laboratoire de Biomécanique, Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers.
- [Woltring, 1994] Woltring, H. (1994). 3-D attitude representation of human joints : A standardization proposal. *Journal of Biomechanics*, 27(12) : 1399–1414.
- [Wu et Cavanagh, 1995] Wu, G. et Cavanagh, P. R. (1995). ISB Recommendations for Standardization in the reporting of kinematic data. *Journal of Biomechanics*, 28(10) : 1257–1261.
- [Zhang, 1994] Zhang, Z. (1994). Iterative Point Matching for Registration of Free-Form Curves and Surfaces. *International Journal of Computer Vision*, 13(2) : 119–152.

- [Zhuang et Huang, 1994] Zhuang, X. et Huang, Y. (1994). Robust 3-D-3-D Pose Estimation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 16(8) : 818-824.

# Chapitre 6

## Annexes

### 6.1 Calcul des indices cinématiques

La cinématique du genou peut être décrite à l'aide du système GENI. Plus précisément, les expérimentations permettent de mesurer les positions et orientations relatives entre le fémur et le tibia et ce, en fonction du temps. Dans un premier temps, notre groupe de recherche tente de faire ces mesures sans les exprimer dans un cadre temporel. Autrement dit, les différents angles et translations sont décrits et comparés entre eux en fonction du mouvement lui-même (bien souvent en fonction de l'angle de flexion du genou) et non en fonction du temps, faisant ainsi l'hypothèse que les différences de vitesses du mouvement n'influencent pas les résultats. Cependant, le système permet à un utilisateur (s'il le désire) de calculer les différents paramètres cinétiques du mouvement du genou (vitesse, accélération) reliés aux forces déployées dans l'articulation.

Lors d'une acquisition avec le système Geni, la position et l'orientation du fémur et du tibia en fonction du temps sont mesurées par des capteurs magnétiques de mouvement. Les matrices de position et d'orientation de chaque capteur dans l'espace par rapport à la source émettrice de champ magnétique sont notées par  $B_T$  et  $B_F$ , respectivement pour le capteur fixé au tibia et au fémur.

Afin que le mouvement soit cliniquement interprétable, il faut définir des axes cinématiques dans les référentiels de chaque capteur magnétique ; on notera les matrices de ces systèmes d'axes par  $C_T$  et  $C_F$ , respectivement pour le système d'axes du tibia et du fémur.

### Annexe 1.1 Les indices cinématiques de rotations

La matrice exprimant la position et l'orientation du système d'axes associé au fémur dans le référentiel fixe de la source est donnée par  $B_F \times C_F$  et la matrice exprimant la position et l'orientation du système d'axes associé au tibia dans le référentiel fixe de la source est donnée par  $B_T \times C_T$ . La matrice permettant de décrire la position et l'orientation du système d'axes associé au tibia par rapport au système d'axes associé au fémur est donnée par  $M = (B_F \times C_F)^{-1} \times B_T \times C_T$ .

Les indices cinématiques du mouvement sont calculés lorsqu'on considère la matrice de transformation comme une suite de trois rotations successives autour d'axes mobiles [Véron, 1995, Grood et Suntay, 1983]. La première rotation (ax) est la rotation autour de l'angle x du fémur (axe médiolatéral). La deuxième rotation s'effectue avec un angle ay autour de l'axe y du fémur (axe antéropostérieur) transformé par la première rotation x ( $y' = R_{ax} \times y$ ). La troisième rotation s'effectue avec un angle az autour de l'axe z du fémur (axe proximo-distal) ayant subi les rotations succesives autour de l'axe x du fémur et l'axe y du fémur transformé suite à ax ( $z' = R_{ay'} \times R_{ax} \times z$ ). La matrice M s'écrit :

$$M = \begin{pmatrix} cy \cdot cz & -cy \cdot sz & sy \\ sx \cdot sy \cdot cz + cx \cdot sz & -sx \cdot sy \cdot sz + cx \cdot cz & -sx \cdot cy \\ -cx \cdot sy \cdot cz + sx \cdot sz & cx \cdot sy \cdot sz + sx \cdot cz & cx \cdot cy \end{pmatrix}$$

avec  $cx = \cos(ax)$ ,  $cy = \cos(ay)$ ,  $cz = \cos(az)$ ,  $sx = \sin(ax)$ ,  $sy = \sin(ay)$  et  $sz = \sin(az)$ . On voit donc que pour calculer les angles ax, ay et az à partir de la matrice de transformation, il suffit de calculer :

$$ay = asin(M(1, 3))$$

et si  $cos(ay)$  n'est pas égal à 0,

$$ax = atan\left(\frac{-M(2, 3)}{M(3, 3)}\right)$$

et

$$az = atan\left(\frac{-M(1, 2)}{M(1, 1)}\right)$$

### Annexe 1.2 Les indices cinématiques de translations

La translation est définie par la translation du système d'axes du fémur par rapport au système d'axes du tibia. La matrice de mouvement à utiliser cette fois sera  $M = (B_T \cdot C_T)^{-1} \cdot B_F \cdot C_F$  et les translations le long des trois axes fixes du tibia sont directement données par la quatrième colonne de la matrice M.



## Annexe 2 Estimation de la transformation rigide entre les deux représentations des os.

Si on utilise un modèle virtuel dans nos expérimentations, un calibrage du système est nécessaire. Le calibrage consiste à estimer la transformation rigide qu'il existe entre les deux représentations de l'os : virtuelle et réelle.

L'utilisateur détermine la position de différents repères anatomiques du genou dans chacune des deux représentations de chaque os. La relation existant entre ces deux représentations dans l'espace peut ensuite être calculée. Plusieurs algorithmes de la littérature permettent de mettre en correspondance l'information provenant des deux représentations des os. Ils peuvent être regroupés en deux catégories : les algorithmes utilisant une correspondance *directe* de l'information et les algorithmes utilisant une correspondance *indirecte* de l'information.

Dans le premier des cas (Annexe 2.1), la correspondance entre les deux ensembles de points est établie avant d'effectuer le calcul avec l'algorithme. On aura donc toujours le même nombre de points dans chacune des deux représentations de notre objet. Dans l'autre cas (Annexe 2.2), on doit faire l'hypothèse que les deux ensembles de points correspondent à un même objet, défini par une même surface. Les algorithmes de ce type sont itératifs et nécessitent la connaissance d'un estimé initial de la solution.

### Annexe 2.1 Estimation de la transformation rigide entre deux ensembles à l'aide de la correspondance directe de l'information

Deux situations d'expérimentation sont possibles avec le système Geni : les expérimentations *in vitro* sur genou cadavérique et les expérimentation *in vivo* avec sujet. En situation *in vitro*, l'utilisateur identifiera des points à la surface de l'os ou des triangles fixés aux os, visibles à l'écran de l'or-

dinateur et identifiables avec le pointeur magnétique. De ce fait, les points sont correspondants. En situation *in vivo*, les points identifiés sur le modèle numérique sont situés à la surface de l'os tandis que les points identifiés dans le référentiel réel sont situés sur la peau du patient. Les deux ensembles de points ne sont pas correspondants.

### Calibrage en expérimentation *in vivo*

Pour établir une correspondance entre les deux représentations de l'os dans le cas des expérimentation *in vivo*, l'utilisateur identifiera dans chacun des deux référentiels des points qui formeront deux systèmes d'axes qui seront mis en correspondance.

On forme un système d'axes orthonormé à partir de trois points non colinéaires dans l'espace<sup>1</sup>. On trouve un premier vecteur du système d'axes en reliant le premier au deuxième point mesuré (figure 6.1(a)). On forme ensuite un vecteur (temporaire) reliant le point 1 au point 3 (figure 6.1(a)). Ces deux premiers vecteurs ne sont pas parallèles si on fait l'hypothèse que nos trois points ne sont pas colinéaires. Ainsi, le produit vectoriel entre le vecteur 1 et le vecteur temporaire donne un vecteur non-nul qui est perpendiculaire aux deux autres. On notera ce vecteur comme le vecteur 3 de notre base orthogonale (figure 6.1(b)). On peut ensuite calculer le vecteur 2 qui complètera cette base orthogonale en calculant le produit vectoriel entre le vecteur 3 et le vecteur 1 (figure 6.1(c)). On se retrouve ainsi avec un système d'axes orthogonal. Il suffit de normaliser chacun des vecteurs calculés pour obtenir notre système d'axes orthonormé(6.1(d)).

En répétant l'opération dans les deux vues, on obtient deux systèmes d'axes orthonormés situés dans deux espaces différents. Chacun de ces deux systèmes d'axes a comme origine le premier de ses points <sup>2</sup> exprimé dans ses

<sup>1</sup>Si les points sont colinéaires, un des degrés de liberté de la transformation à estimer ne pourra être calculé et ainsi une partie de l'information ne pourra être trouvée.

<sup>2</sup>Le point d'origine peut également être le point 2 ou le point trois ou une combinaison de ceux-ci. On utilisera le point ou la combinaison de points la plus facile à identifier en

propres coordonnées  $(P_x^V, P_y^V, P_z^V)$  et  $(P_x^R, P_y^R, P_z^R)$  (V :virtuel et R :Réal). On exprimera les 3 vecteurs de base (i,j,k) de chaque système d'axe (R,V) par  $v_{i,j,k}^{R,V} = (x_{i,j,k}^R, y_{i,j,k}^R, z_{i,j,k}^R)'$ . La transformation rigide M faisant passer du référentiel Virtuel au référentiel Réel s'écriera comme suit :

$$M_{V \rightarrow R} = (-T_V) \cdot (R_V^{-1}) \cdot (R_R) \cdot (T_R) \quad (6.1)$$

$$M_{V \rightarrow R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -P_x^V \\ 0 & 1 & 0 & -P_y^V \\ 0 & 0 & 1 & -P_z^V \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{1x}^V & v_{1y}^V & v_{1z}^V & 0 \\ v_{2x}^V & v_{2y}^V & v_{2z}^V & 0 \\ v_{3x}^V & v_{3y}^V & v_{3z}^V & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{1x}^R & v_{2x}^R & v_{3x}^R & 0 \\ v_{1y}^R & v_{2y}^R & v_{3y}^R & 0 \\ v_{1z}^R & v_{2z}^R & v_{3z}^R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & P_x^R \\ 0 & 1 & 0 & P_y^R \\ 0 & 0 & 1 & P_z^R \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

La méthode par alignement de référentiels, qu'on appellera également la méthode à 3 points, nécessite la connaissance de 3 points dans chacune des deux vues pour bâtir les deux systèmes d'axes. Ce sont les systèmes d'axes par la suite qui sont mis en correspondance, et non pas les points eux-même. On voit bien dans le calcul que la distance entre les points 1 et 2 dans chacune des deux vues n'est pas utilisée puisque les vecteurs sont normalisés, mais seulement l'orientation du vecteur reliant ces deux points. De même, la distance entre les points 1 et 3 n'est pas importante mais seulement la composante perpendiculaire au premier vecteur calculé l'est.

Lors des expérimentations *in vivo*, où les points ne sont pas correspondants à cause des tissus qui recouvrent les os, ou si on veut utiliser un modèle numérique non personnalisé pour un sujet, on utilisera la mise en correspondance de systèmes d'axes. En effet, même si les os réels et virtuels n'ont pas

---

x, y et z.

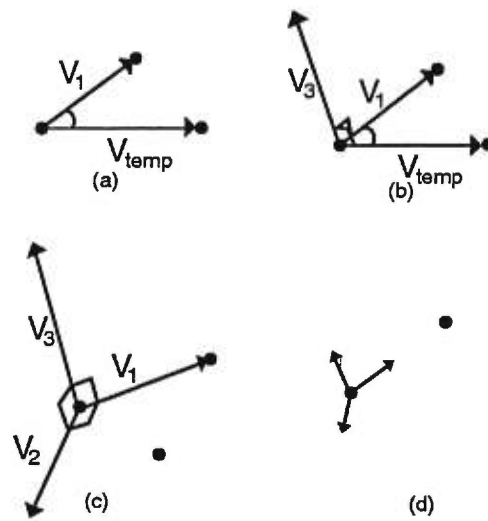


FIG. 6.1: Construction d'un système d'axes à partir de la numérisation de trois points

les mêmes proportions, ils pourront tout de même former un système d'axes qu'on pourra faire coïncider dans les deux vues (figure 6.2).

Cette méthode de calcul a cependant l'inconvénient de ne pouvoir utiliser que trois points lors de son calcul de la transformation rigide. Par conséquent, si le premier point est mal positionné ou qu'un des deux autres points forme un vecteur mal orienté, la transformation estimée en sera automatiquement affectée. En pratique, cette méthode ne sera donc utilisée que dans trois cas : 1) en expérimentation *in vivo*, 2) lorsqu'on n'aura pas la géométrie osseuse personnalisée du sujet (modèle virtuel) ou 3) lorsqu'on tentera d'établir une première estimation grossière de la transformation rigide entre les deux objets pour ensuite raffiner la solution par une méthode plus précise.

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = (T_x \quad T_y \quad T_z)$$

Si les points sont numérisés indépendamment dans chaque référentiel, une certaine erreur liée aux sources d'erreur identifiée à la section 2 existe et on aura plutôt la relation suivante entre les deux ensemble de points :

$$P_i^R = R \times P_i^V + T + \text{erreur}_i, \quad \forall i \quad (6.4)$$

Parmi toutes les transformations possibles R et T, nous tenterons d'estimer celles qui produisent le moins d'erreur dans la dernière équation.

La minimisation de l'erreur dans l'équation précédente revient à minimiser :

$$|\text{erreur}_i| = |P_i^R - R \times P_i^V - T|$$

Cette erreur est exprimée ici sous la forme d'un vecteur 3 X 1. Si on veut faire la minimisation de l'erreur sur l'ensemble des points pour trouver la transformation rigide qui s'*ajuste* le mieux aux deux ensembles de points, on devra minimiser l'erreur suivante :

$$\Sigma^2 = \sum_{i=1}^{i=N} \|P_i^R - R \times P_i^V - T\|^2 \quad (6.5)$$

Il est montré en Annexe 3 que l'estimation de la transformation rigide minimisant l'erreur dans l'équation précédente peut être décomposée en deux parties : l'estimation de la matrice de rotation  $\tilde{R}$  en un premier temps et ensuite l'estimation du vecteur de translation  $\tilde{T}$ . Ainsi, on obtiendra  $\tilde{R}$  en minimisant :

$$\Sigma^2 = \sum_{i=1}^N \|Q_i^R - R \cdot Q_i^V\|^2 \quad (6.6)$$

où  $Q_i^R$  et  $Q_i^V$  définissent les positions des points par rapport à leur centroïde comme :

$$\begin{aligned} Q_i^R &\triangleq P_i^R - \bar{P}^R, \quad \forall i \\ Q_i^V &\triangleq P_i^V - \bar{P}^V, \quad \forall i \end{aligned} \quad (6.7)$$

on calculera par la suite  $\tilde{T}$  :

$$\tilde{T} = \bar{Q}^r - \tilde{R} \cdot \bar{Q}^v \quad (6.8)$$

Plusieurs auteurs ont développé l'équation 6.6 afin de d'estimer  $\tilde{R}$  et  $\tilde{T}$  qui minimisent l'erreur totale du système ([Horn, 1987, Arun et al., 1987, Haralick et al., 1989, Bolle et Cooper, 1986, Umeyama, 1991, Zhuang et Huang, 1994, Kanatani, 1994, Sansò, 1973]). Les méthodes retenues ici pour faire l'analyse sont la *méthode par décomposition en valeurs singulières* [Arun et al., 1987], la *méthode des quaternions* de Horn [Horn, 1987], la *méthode du Simplex* [Press et al., 1992] et finalement une méthode utilisant l'estimateur des moindres carrés. Une brève description du fonctionnement de ces algorithmes sera présentée et nous décrirons les méthodes utilisées pour tester ces différents algorithmes.

### Méthode par minimisation de l'erreur avec l'estimateur des moindres carrés (estimateur MC)

Pour faire l'estimation de la transformation rigide avec l'estimateur des moindres carrés, il faut faire les hypothèses suivantes : 1) l'erreur sur les points utilisés dans nos calculs sont des mesures d'une variable aléatoire dont la distribution de probabilité est gaussienne et 2) la structure des équations est linéaire, i.e. que la relation entre les coordonnées des points de l'ensemble

Réel et de l'ensemble Virtuel doit être linéaire. Nous avons déjà expliqué à la section 2 que nous utilisons la première des deux hypothèses pour caractériser les points de notre numérisation. De plus, puisque dans ce cas-ci la transformation est rigide, l'équation 6.4 montre bien que la relation entre les points est linéaire.

Les distances des points par rapport à leur centroïde étant notées  $Q_i^R$  et  $Q_i^V$  respectivement dans le référentiel réel et virtuel, la relation existant entre ceux-ci est donnée par l'équation suivante (voir Annexe 3) :

$$Q_i^R = R \times Q_i^V + erreur_i \quad , \quad \forall i \quad (6.9)$$

On peut réécrire cette dernière équation en faisant ressortir les éléments de la matrice R :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} qx_1 \\ qy_1 \\ qz_1 \\ qx_2 \\ \dots \\ qz_N \end{pmatrix}}_{\varphi^R} = \underbrace{\begin{pmatrix} qx_1 & qy_1 & qz_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & qx_1 & qy_1 & qz_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & qx_1 & qy_1 & qz_1 \\ qx_2 & qy_2 & qz_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & qx_N & qy_N & qz_N \end{pmatrix}}_{\varphi^V} \times \underbrace{\begin{pmatrix} R_{11} \\ R_{12} \\ R_{13} \\ R_{21} \\ R_{22} \\ R_{23} \\ R_{31} \\ R_{32} \\ R_{33} \end{pmatrix}}_{\rho} + erreur \quad (6.10)$$

où

$$Q_i^{R,V} = \begin{pmatrix} qx_i \\ qy_i \\ qz_i \end{pmatrix}^{R,V}$$

L'équation 6.10 est écrite sous la forme  $\varphi^R = \varphi^V \cdot \rho$ .

Dans ce cas ([Dougherty et Giardina, 1987]), l'estimateur des moindres carrés de la solution de ce système d'équations ( $\tilde{\varrho}$ ) est donné par :

$$\tilde{\varrho}_{MC} = (\varphi^{V'} \cdot \varphi^V)^{-1} \cdot \varphi^{V'} \cdot \varphi^R \quad (6.11)$$

Les différents éléments de la matrice  $\tilde{\varrho}$  nous donnent la meilleure estimation (au sens des moindres carrés) de la matrice de rotation  $\tilde{R}$ . Cette matrice  $\tilde{R}$  nous permettra finalement de trouver  $\tilde{T}$  avec l'équation 6.8.

Pour que la matrice  $\varphi^{V'} \cdot \varphi^V$  soit inversible, on devra avoir au moins 9 équations dans le système d'équations décrit en 6.10, et par conséquent, avoir au moins 3 points identifiés dans chacun des référentiels. Cependant, si le système d'équations est redondant <sup>4</sup> ou que le nombre d'équations est trop faible, l'inversion de la matrice posera souvent des problèmes. On dit alors que la matrice est mal conditionnée. Théoriquement, pour que la matrice soit inversible, il faut que le rapport entre la plus grande valeur propre et la plus petite valeur propre de celle-ci soit le plus grand possible. La méthode matricielle a comme principal inconvénient d'être liée au fait que la matrice  $\varphi^{V'} \cdot \varphi^V$  doit être bien conditionnée.

### Détermination de R et T par la méthode de décomposition en valeurs singulières (D.V.S.)

Dû aux problèmes d'inversion de la matrice  $\varphi^{V'} \cdot \varphi^V$  dans l'équation 6.11 qui peut être mal conditionnée, plusieurs auteurs ont tenté de trouver une autre méthode pour minimiser l'erreur dans le système d'équations. Le développement d'une première technique est décrite dans l'article d'Arun et al. ([Arun et al., 1987]).

---

<sup>4</sup>Il suffit pour cela qu'une partie des points choisis soient linéairement dépendants des autres, par exemple quatre points colinéaires, et qu'ainsi le nombre d'équations ne donne pas assez d'information au système.



On commence encore une fois par décrire les coordonnées des points de chaque ensemble (réel et virtuel) par rapport à leur centroïde, ce qui nous donne les matrices  $Q^R$  et  $Q^V$  reliées par la matrice de rotation  $R$  (équation 6.9). En effectuant la décomposition en valeur singulière ([Press et al., 1992]) du produit entre la matrice  $Q^R$  avec  $Q^{V'}$ , on obtient trois matrices  $(U, \Lambda, V)$  qui sont définies comme suit :

$$Q^{R'} \cdot Q^V = U \cdot \Lambda \cdot V' \quad (6.12)$$

L'estimation de la rotation au sens des moindres carrés est donnée par :

$$\tilde{R} = V \cdot U' \quad (6.13)$$

Trois cas peuvent se présenter. Premièrement, si le déterminant de  $\tilde{R}$  est égal à +1, la matrice est une matrice de rotation et le travail est accompli. Deuxièmement, si le déterminant de la matrice est égal à -1 (matrice de réflexion) et qu'une des valeurs de la diagonale de la matrice  $\Lambda$  est nulle, la matrice de rotation est obtenue en inversant le signe de la colonne de  $V$  correspondant à la position de la valeur nulle dans la matrice  $\Lambda$  puis en recalculant  $\tilde{R} = V_{transformé} \cdot U'$ . Finalement, si le déterminant de  $X$  est égal à -1 et qu'aucune valeur de  $\Lambda$  n'est nulle, la méthode d'estimation de la transformation n'est pas appropriée pour le problème.

Dans l'article d'Arun et al., on mentionne que ce dernier cas ne survient que très rarement. Cependant, lorsque cela arrive, il devient impossible de faire l'estimation de la transformation rigide.

## Détermination de $R$ et $T$ à l'aide de l'algèbre des Quaternions

Un quaternion est une construction mathématique formée de 4 valeurs alignées dans un vecteur. Les valeurs du quaternion peuvent être imaginaires

Le vecteur propre de  $N$  correspondant à la plus grande valeur propre de  $N$  est le quaternion unitaire  $(q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3)^t$  représentant la rotation qui minimise l'erreur dans l'équation 6.6. Pour former la matrice de rotation à partir du quaternion, on utilise la relation suivante :

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} (q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_2q_1 + q_0q_3) & (q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_3q_1 - q_0q_2) & 2(q_3q_2 + q_0q_1) & (q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2) \end{pmatrix}$$

Ainsi, suivant cette méthode, on forme tout d'abord les 9 sommes  $M_{ij}$ , on trouve les valeurs et vecteurs propres de la matrice  $M$  et on calcule finalement la matrice de rotation  $\tilde{R}$ . Ensuite, il ne reste qu'à calculer le vecteur de translation  $\tilde{T}$  grâce à l'équation 6.8.

Détermination de  $R$  et  $T$  à l'aide d'une méthode itérative : la méthode du Simplex descendant

La méthode du Simplex descendant provient de Nelder et Mead ([Press et al., 1992]). La méthode est une méthode générale itérative pour trouver le minimum d'une fonction. La méthode du Simplex a l'avantage par rapport aux autres méthodes de calcul itératives de ne pas nécessiter le calcul des dérivées de la fonction.

La méthode travaille dans un espace à  $N+1$  dimensions, où  $N$  est le nombre de paramètres à estimer. Dans notre cas, ce que l'on tente de minimiser est l'erreur totale qu'engendre notre estimation de la matrice de rotation dans l'équation 6.6. Si on utilise de nouveau la représentation de la matrice de rotation en un quaternion, on travaille dans un espace à 4 dimensions.

L'algorithme a besoin de  $N+1$  (dans notre cas 5) premières estimations des paramètres pour débiter la minimisation. L'algorithme calcule l'erreur totale et remplace l'estimation de départ qui génère le plus d'erreur par une

combinaison des autres. Cette procédure est répétée jusqu'à ce que les 5 estimations soient identiques. Ces dernières nous donnent donc<sup>5</sup> la solution de  $\tilde{R}$  minimisant l'erreur. On retrouve finalement  $\tilde{T}$  grâce à l'équation 6.8.

Le principal avantage de cette méthode est le fait que la méthode du Simplex est bien détaillée dans la littérature et implantée sous différentes formes (sous Matlab ou en langage C ([Press et al., 1992])). L'algorithme du Simplex peut aussi bien convenir à la minimisation d'une fonction d'erreur (c'est le cas ici) qu'à la minimisation d'une autre fonction, ce qui fait de lui un bon sujet à la programmation orientée objet.

Cependant, puisque son calcul est itératif, le temps d'exécution de l'algorithme peut être plutôt long<sup>6</sup>. De plus, il faut donner à l'algorithme 5 estimations de la solution au départ. Ces 5 estimations de départ sont assez difficiles à déterminer si on veut éviter que l'algorithme tombe dans un minimum local de la fonction.

La figure 6.3 montre l'équivalent 2D de l'effet d'un minimum local sur le passage d'une estimation de départ à une solution finale. Dans notre cas, la fonction d'erreur contient souvent plusieurs minimums locaux et il est parfois nécessaire de répéter l'algorithme du Simplex avec plusieurs séries d'estimations de départ avant de trouver le minimum global de la fonction d'erreur. Pour ce faire, on décomposera l'ensemble des rotations possibles en plusieurs groupes pour couvrir toutes les solutions possibles dans l'espace 4D.

### Méthode employée pour comparer les algorithmes d'estimation de transformations rigides

Dans le cas des expérimentations *in vivo*, on utilisera l'algorithme d'alignement de référentiels pour estimer la transformation rigide entre deux ensembles de trois points formant un système d'axes dans chaque vue. Dans le cas des expérimentations *in vitro*, il reste à déterminer lequel des algorithmes

---

<sup>5</sup>À travers le quaternion unitaire.

<sup>6</sup>Ceci peut constituer un problème si le calcul est à répéter plusieurs fois

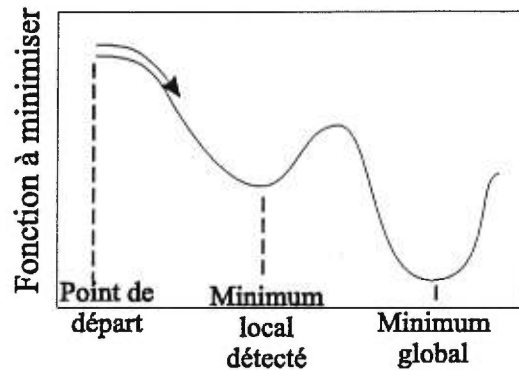


FIG. 6.3: L'estimation de départ d'une fonction est important pour trouver un minimum global à la fonction. L'algorithme commence avec la solution de départ et se déplace le long de la courbe jusqu'à ce qu'il obtienne un minimum à la fonction. Ce minimum n'est pas nécessairement le minimum global de la fonction.

nous donnera les meilleurs résultats si on considère les critères 1) de fiabilité (l'algorithme doit toujours nous retourner un résultat qui soit fiable, 2) de temps de calcul (le calcul de la transformation rigide doit être le plus court possible) et 3) de propagation de l'erreur (la transformation estimée doit être celle qui minimise l'erreur au sens des moindres carrés).

Afin de déterminer le meilleur algorithme suivant les trois critères précédents, nous avons écrit un simulateur en langage C++. Le simulateur forme deux ensembles de points reliés entre eux par une transformation rigide connue. Il bruite les deux ensembles de points avant de les faire passer dans les algorithmes. Le bruit ajouté est un bruit gaussien centré autour de zéro et auquel on peut varier l'amplitude. L'amplitude ajoutée est de grandeur égale à l'erreur mesurée lors des tests effectués en section 2 pour le cas des expérimentations *in vitro*.

Lors des calculs, on place un chronomètre à l'entrée et à la sortie de chaque algorithme afin de faire une comparaison du *temps de calcul* nécessaire à la fonction informatique pour retourner son résultat. Ceci nous permet de

comparer les algorithmes au niveau de leur temps de calcul.

On comparera ensuite les matrices de transformation retournées par les différents algorithmes avec la matrice de transformation imposée entre les deux ensembles pour quantifier la *propagation de l'erreur*. Plus précisément, on comparera tout d'abord les translations ( $\tilde{T}$ ) en X, Y et Z de la matrice de transformation estimée avec les translations  $T_x$ ,  $T_y$  et  $T_z$  imposées. L'erreur totale selon les trois axes sera donnée par  $\Delta_{translation}$  :

$$\Delta_{translation} = \sqrt{(T_x - \tilde{T}_x)^2 + (T_y - \tilde{T}_y)^2 + (T_z - \tilde{T}_z)^2}$$

On comparera également la matrice de rotation estimée avec celle connue. Pour faire la comparaison entre deux matrices de rotation, nous comparons l'effet que celles-ci ont lorsqu'on applique chacune d'elles à un système d'axe orthonormal centré à l'origine et dont les axes sont parallèles aux axes X, Y et Z. La figure 6.4 montre les distances d'erreurs mesurées. Ainsi, l'erreur moyenne  $\Delta_{rotation}$  d'une matrice de rotation (R) par rapport à l'estimation ( $\tilde{R}$ ) se définira comme suit :

$$\Delta_{rotation} = \frac{1}{3} \cdot \sum_{j=1}^3 \sqrt{\sum_{i=1}^3 (R_{ij} - \tilde{R}_{ij})^2}$$

Afin de comparer ces résultats de propagation de l'erreur indépendamment de l'erreur ajoutée ( $\sigma_{ajouté}$ ) aux points<sup>7</sup>, nous calculerons les rapports de propagation de l'erreur comme suit :

$$K_R = \frac{\Delta_{rotation}}{\sigma_{ajouté}}$$

et

---

<sup>7</sup>On fait l'approximation que l'effet de l'erreur est linéaire.

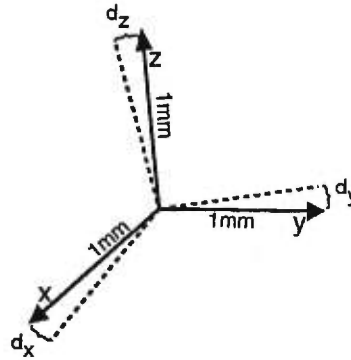


FIG. 6.4: Quantification de l'erreur provenant d'une matrice de rotation.

$$K_T = \frac{\Delta_{translation}}{\sigma_{ajouté}}$$

Dans tous les cas, les algorithmes sont écrits pour détecter un échec possible dans le calcul de la matrice de transformation. Un échec peut survenir si l'algorithme ne peut effectuer le calcul ou si la propagation de l'erreur dans l'algorithme est trop élevée. Si l'amplitude de l'erreur présente entre la transformation estimée et la transformation véritable est trois fois plus élevée que l'amplitude de l'erreur ajoutée aux points utilisés pour faire l'estimation ( $K_T = 3$  ou  $K_R = 3$ ), on déclare un échec de l'algorithme. Ceci nous permettra de comparer les algorithmes au niveau de leur *fiabilité*.

## Résultats des comparaisons entre les algorithmes

### Fiabilité des algorithmes

Le tableau 6.1 montre les résultats de fiabilité des algorithmes, dans des conditions d'expérimentations *in vitro*. On y trouve les pourcentages d'échec des algorithmes pour l'ensemble des simulations.

On voit donc en premier lieu que certains algorithmes sont à proscrire suite aux résultats de fiabilité montrés au tableau 6.1. Si on fixe par exemple

# de points	Quaternions	D.V.S.	estimateur MC	Simplex	Alig. réf.
3	14	69	96	14.66	19.66
4	2.66	5.33	48.66	2.33	15.33
5	0	0.33	18	0.33	13
6	0	0	3	0	10.33
7	0	0	1	0	5.66
8	0	0	0.33	0	7.33
9	0	0	0	0	9.33
10	0	0	0	0	6.66

TAB. 6.1: Fiabilité des algorithmes de calibrage : condition semblables à l'*in vitro*. Les valeurs expriment des pourcentages d'échec.

à 5 % d'échec le maximum acceptable d'échec, l'algorithme de l'estimateur MC ne peut être utilisé s'il y a moins de 6 points de calibrage, l'algorithme de D.V.S. ne peut pas être utilisé s'il y a moins de 5 points de calibrage et les algorithmes de Simplex et de Quaternions ne peuvent être utilisés s'il n'y a que 3 points de calibrage. Finalement, la méthode par alignement de référentiels ne montre pas une fiabilité satisfaisante.

### Temps de calcul des algorithmes

La seconde comparaison entre les différents algorithmes se situe au niveau du temps de calcul. Les temps moyens lors de 100 simulations ont été calculés pour chaque algorithme et sont montrés au tableau 6.2 en fonction du nombre de points utilisés.

Suite à l'étude du tableau 6.2, on peut tout de suite écarter la méthode du Simplex comme algorithme de calcul. Ce dernier requiert un temps de calcul beaucoup trop grand, surtout si les calculs sont effectués à plusieurs reprises.

### Propagation de l'erreur dans les algorithmes de calibrage

Dans les tableaux 6.3 à 6.10, on retrouve les mesures de propagation de l'erreur à travers les différents algorithmes de calibrage en fonction de l'erreur ajoutée. Nous présentons les résultats pour des simulations utilisant 3 points de calibrage (tableaux 6.3 et 6.4)<sup>8</sup>, 4 points de calibrage (tableaux 6.5 et 6.6), 5 points de calibrage (tableaux 6.7 et 6.8) et finalement 10 points de calibrage (tableaux 6.9 et 6.10).

L'erreur ajoutée comme l'erreur propagée sont exprimées en millimètres.

---

<sup>8</sup>Nous présentons pour chacune des situations les résultats de la propagation de l'erreur sur la matrice de rotation et sur le vecteur de translation.



# de points	Quaternions	D.V.S.	estimateur MC	Simplex	Alig. réf.
3	0.34	6.62	0.18	133.8	0.12
4	0.35	1.12	0.20	126.93	0.11
5	0.36	0.74	0.22	129.01	0.12
6	0.36	0.74	0.23	137.66	0.12
7	0.37	0.75	0.24	148.29	0.12
8	0.37	0.81	0.26	155.12	0.12
9	0.38	0.76	0.26	164.59	0.12
10	0.39	0.76	0.28	172.44	0.12

TAB. 6.2: Temps de calcul des différents algorithmes : conditions d'erreur semblables à l'*in vitro*; le temps est exprimé en msec.

$\sigma_{\text{bruit\_ajouté}}$	Quaternions	D.V.S.	estimateur MC	Simplex	Alig. réf.
$\sigma_{\text{in vitro}}$	0.057	0.061	2.24	0.066	0.063
$2\sigma_{\text{in vitro}}$	0.126	0.118	2.182	0.131	0.142
$3\sigma_{\text{in vitro}}$	0.216	0.174	2.131	0.180	0.189

TAB. 6.3: Propagation de l'erreur sur l'estimation de la rotation : conditions *in vitro* pour 3 points. Les résultats sont en mm.  $\sigma_{\text{in vitro}}$  est tiré du tableau 2.3

$\sigma_{\text{bruit\_ajouté}}$	Quaternions	D.V.S.	estimateur MC	Simplex	Alig. réf.
$\sigma_{\text{in vitro}}$	8.06	8.10	12.45	7.62	8.09
$2\sigma_{\text{in vitro}}$	16.87	13.88	21.53	14.39	15.71
$3\sigma_{\text{in vitro}}$	23.20	21.10	51.36	22.09	22.53

TAB. 6.4: Propagation de l'erreur sur l'estimation de la translation en conditions *in vitro* pour 3 points. Les résultats sont en mm.  $\sigma_{\text{in vitro}}$  est tiré du tableau 2.3

$\sigma_{\text{bruit\_ajouté}}$	Quaternions	D.V.S.	estimateur MC	Simplex	Alig. réf.
$\sigma_{\text{in vitro}}$	0.04	0.04	0.18	0.05	0.07
$2\sigma_{\text{in vitro}}$	0.08	0.09	0.52	0.08	0.13
$3\sigma_{\text{in vitro}}$	0.12	0.174	0.82	0.12	0.19

TAB. 6.5: Propagation de l'erreur sur l'estimation de la rotation : conditions *in vitro* pour 4 points. Les résultats sont en mm.  $\sigma_{\text{in vitro}}$  est tiré du tableau 2.3 ..

$\sigma_{\text{bruit\_ajouté}}$	Quaternions	D.V.S.	estimateur MC	Simplex	Alig. réf.
$\sigma_{\text{in vitro}}$	6.01	5.82	8.30	6.28	8.92
$2\sigma_{\text{in vitro}}$	11.29	12.70	23.32	11.82	17.78
$3\sigma_{\text{in vitro}}$	17.37	17.73	30.45	16.91	25.32

TAB. 6.6: Propagation de l'erreur sur l'estimation de la translation en conditions *in vitro* pour 4 points. Les résultats sont en mm.  $\sigma_{\text{in vitro}}$  est tiré du tableau 2.3

$\sigma_{\text{bruit\_ajouté}}$	Quaternions	D.V.S.	estimateur MC	Simplex	Alig. réf.
$\sigma_{\text{in vitro}}$	0.04	0.04	0.11	0.04	0.08
$2\sigma_{\text{in vitro}}$	0.09	0.07	0.21	0.08	0.14
$3\sigma_{\text{in vitro}}$	0.10	0.11	0.31	0.11	0.22

TAB. 6.7: Propagation de l'erreur sur l'estimation de la rotation : conditions *in vitro* pour 5 points. Les résultats sont en mm.  $\sigma_{\text{in vitro}}$  est tiré du tableau 2.3

$\sigma_{\text{bruit\_ajouté}}$	Quaternions	D.V.S.	estimateur MC	Simplex	Alig. réf.
$\sigma_{\text{in vitro}}$	5.45	5.13	9.60	5.39	9.44
$2\sigma_{\text{in vitro}}$	12.12	21.14	23.3	10.22	17.71
$3\sigma_{\text{in vitro}}$	15.01	15.05	30.36	14.11	28.49

TAB. 6.8: Propagation de l'erreur sur l'estimation de la translation en conditions *in vitro* pour 5 points. Les résultats sont en mm.  $\sigma_{\text{in vitro}}$  est tiré du tableau 2.3

$\sigma_{\text{bruit\_ajouté}}$	Quaternions	D.V.S.	estimateur MC	Simplex	Alig. réf.
$\sigma_{\text{invitro}}$	0.02	0.02	0.05	0.02	0.08
$2\sigma_{\text{invitro}}$	0.04	0.04	0.08	0.05	0.16
$3\sigma_{\text{invitro}}$	0.06	0.06	0.13	0.06	0.33

TAB. 6.9: Propagation de l'erreur sur l'estimation de la rotation : conditions *in vitro* pour 10 points. Les résultats sont en mm.  $\sigma_{\text{invitro}}$  est tiré du tableau 2.3

$\sigma_{\text{bruit\_ajouté}}$	Quaternions	D.V.S.	estimateur MC	Simplex	Alig. réf.
$\sigma_{\text{invitro}}$	2.81	2.90	5.84	2.99	10.31
$2\sigma_{\text{invitro}}$	6.64	6.37	10.85	6.52	18.79
$3\sigma_{\text{invitro}}$	8.50	9.25	15.68	8.37	30.31

TAB. 6.10: Propagation de l'erreur sur l'estimation de la translation en conditions *in vitro* pour 10 points. Les résultats sont en mm.  $\sigma_{\text{invitro}}$  est tiré du tableau 2.3

Nous avons voulu montrer les résultats de trois niveaux d'erreur pour vérifier que la relation entre l'erreur ajoutée et l'erreur propagée était, de façon générale, linéaire; c'est le cas ici.

Une fois cela conclu, nous avons exprimé l'erreur propagée en fonction de l'écart-type  $\sigma$  de l'erreur ajoutée aux points de calibrage, à l'aide des coefficients de propagation  $K_R$  et  $K_T$ . Les figures 6.5 et 6.6 montrent les résultats sous forme de graphiques bidimensionnels où le niveau de gris est proportionnel à la proportion d'erreur propagée. Plus la couleur se rapproche du noir, moins l'erreur est propagée.

Les résultats sont montrés pour quatre des cinq algorithmes en fonction du nombre de points utilisés pour faire le calibrage. Pour analyser correctement les données, nous avons supprimé la courbe représentant la propagation de l'erreur dans l'algorithme de l'estimateur MC; cette dernière montre une trop grande propagation de l'erreur par rapport aux autres algorithmes pour permettre de discerner des différences dans les résultats de ceux-ci.

On voit donc qu'outre l'algorithme par alignement de référentiels, on a une diminution de la propagation de l'erreur en fonction du nombre de points, et que cette diminution de l'erreur est semblable pour les trois autres algorithmes : celui des Quaternions, celui de la D.V.S. et celui du Simplex. Ceci s'explique bien par le fait que ces trois algorithmes utilisent la minimisation de l'erreur au sens des moindres carrés pour estimer la transformation rigide. Alors, peu importe la méthode, l'erreur ne peut être minimisée qu'à un certain point.

Les moins bonnes performances de l'algorithme avec estimateur MC quant à la propagation de l'erreur semblent être dues au problème d'inversion de matrice qui serait mal conditionnée lorsque le rapport  $|\text{Erreur} / \text{Nombre de points utilisés}|$  est élevé. Si le nombre de points utilisé est supérieur à 6, les tableaux 6.9 et 6.10 nous montrent que la propagation de l'erreur se situe à un niveau comparable aux autres algorithmes de minimisation de l'erreur.

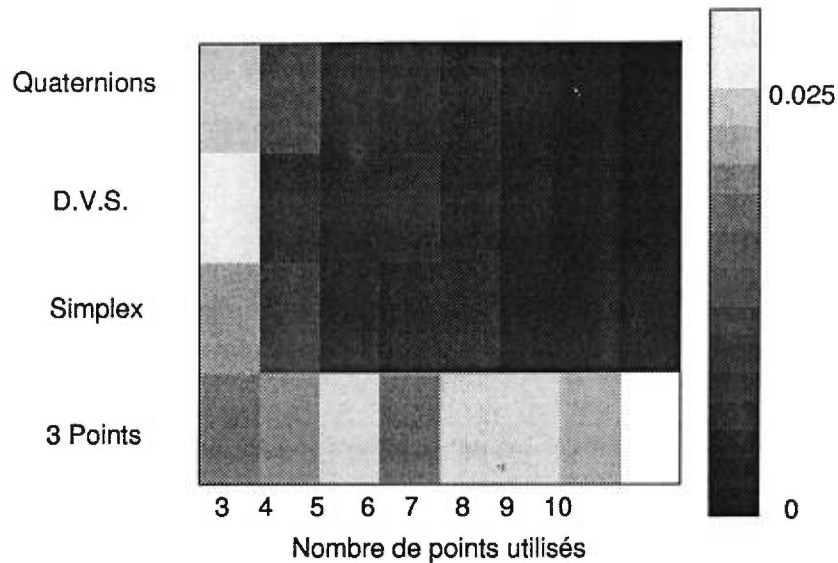


FIG. 6.5: Rapports de propagation de l'erreur sur la matrice de rotation dans les algorithmes de calibrage ( $K_R$ )

### Choix d'un algorithme pour estimer la transformation rigide

Si on a accès à plus de trois points de calibrage, en considérant les critères de temps de calcul, de fiabilité et de propagation de l'erreur, le choix de l'algorithme se limite donc entre l'algorithme des quaternions et l'algorithme de décomposition en valeur singulière (D.V.S.). En comparant les temps de calcul des deux algorithmes au tableau 6.2, on voit que l'algorithme des quaternions est deux fois plus rapide que l'algorithme de D.V.S.. Pour cette raison, l'algorithme basé sur l'algèbre des quaternions sera l'algorithme dont nous servirons pour estimer la transformation rigide reliant deux ensembles de points correspondants dans l'espace.

### Nombre de points à utiliser pour faire un calibrage

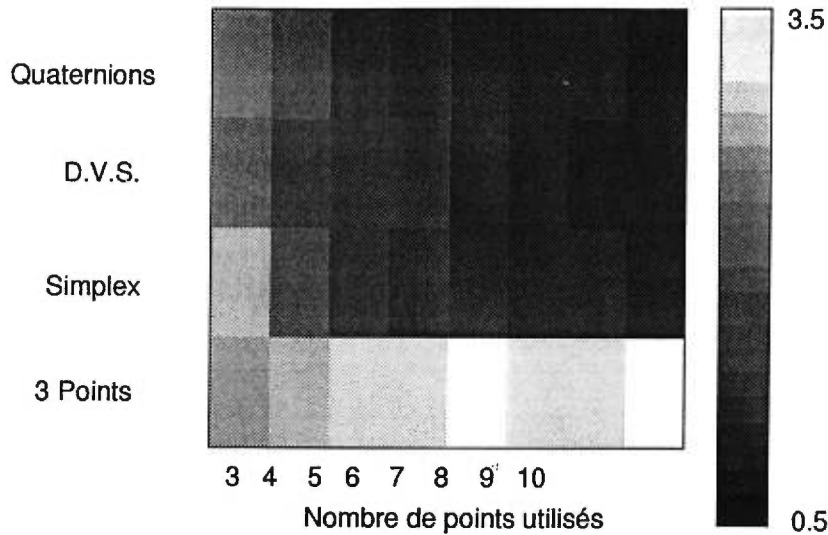


FIG. 6.6: Rapports de propagation de l'erreur sur le vecteur de translation dans les algorithmes de calibrage ( $K_T$ )

Afin de déterminer combien de points seront nécessaires pour faire le calibrage, il faut faire un compromis entre la précision que l'on obtiendra en numérisant un plus grand nombre de points et le temps de numérisation que l'on veut le plus court possible. Les figures 6.7 et 6.8 montrent que la propagation de l'erreur semble diminuer de façon moins importante lorsque le calcul est effectué avec au moins 7 points. Pour cette raison, il est suggéré d'utiliser plus de 6 points de calibrage. Chaque point peut également être numérisé plus d'une fois, ce qui fera diminuer l'importance de l'erreur aléatoire (section 2) présente dans les mesures.



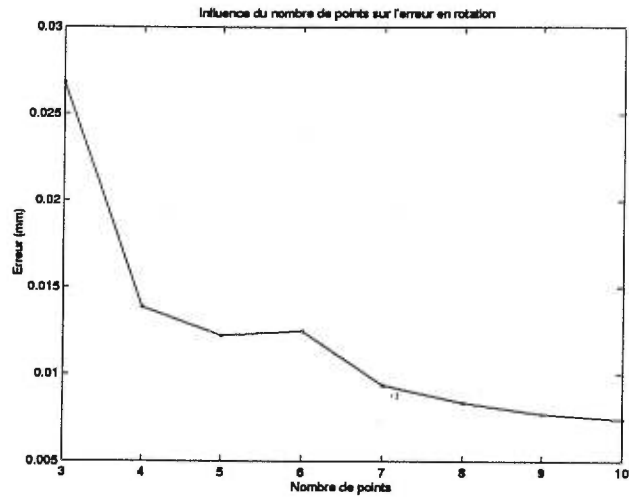


FIG. 6.7: Influence du nombre de points sur l'erreur en rotation.

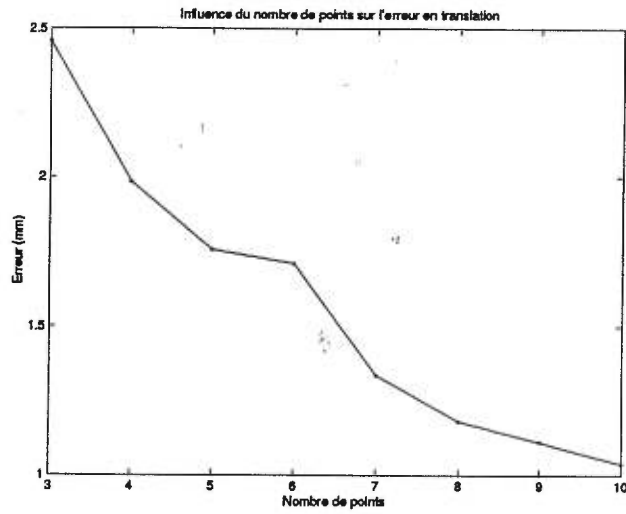


FIG. 6.8: Influence du nombre de points sur l'erreur en translation.

## Annexe 2.2 Estimation de la transformation rigide entre deux ensembles à l'aide de la correspondance indirecte de l'information

Si on veut numériser plusieurs points de calibrage et apporter plus d'information à notre système, le problème revient à maximiser l'ajout d'information en minimisant le plus possible le temps de numérisation de l'objet et ce, dans ses deux représentations.

Pour ce faire, il est possible de travailler avec des algorithmes n'utilisant pas la correspondance *directe* entre des points pour minimiser l'erreur. Ces algorithmes génèrent plutôt eux-même cette correspondance entre les points à partir de l'information des deux ensembles de points. Il s'agit par exemple d'associer deux points ensemble selon leur proximité dans l'espace.

Parmi les algorithmes de la littérature réalisant ce travail, nous avons mis en place l'algorithme du plus proche voisin (*Iterative Closest Point*) ou *ICP* de Besl et McKay ([Besl et McKay, 1992]) et des variations de celui-ci.

### Conditions d'utilisation de ces algorithmes

Il est important de mentionner ici que toutes les méthodes *indirectes* décrites ci-dessous sont des méthodes de raffinement d'une solution déjà grossièrement estimée. Ceci est dû au fait que pour pouvoir trouver une correspondance entre deux ensembles de points par leur proximité dans l'espace, il faut déjà que ceux-ci ne soient pas trop éloignés les uns des autres. Pratiquement, lors de l'utilisation de telles méthodes, on utilisera toujours une technique comme la méthode d'alignements de référentiels pour avoir un premier estimé grossier de la transformation rigide que l'on pourra améliorer par la suite.

Pour pouvoir utiliser l'algorithme, il faut que l'on soit en présence de deux ensembles de points représentant des surfaces relativement semblables ;

dans le cas contraire, l'estimation de la transformation rigide entre les deux ensembles de points devient trop dépendante de l'estimation initiale qu'on donne à l'algorithme.

### **Détermination de R et T à l'aide de la méthode du plus proche voisin (*Iterative Closest Point*)**

L'algorithme est composé de trois étapes que l'on répète jusqu'à ce qu'on trouve un minimum à la distance entre les deux ensembles de points. La transformation à estimer est celle qui, une fois appliquée sur les points de l'ensemble des points de *départ* rapproche ceux-ci le plus (au sens des moindres carrés) des points de l'ensemble des points *d'arrivée*. L'organigramme de ce type d'algorithme est montré à la figure 6.9.

Premièrement, on forme parmi l'ensemble des points d'arrivée un sous-ensemble de points qui sont les points les plus près des points de départ. Pour former cet ensemble, on prend chaque point de l'ensemble de départ et on calcule les distances entre ce point et tous les points de l'ensemble d'arrivée. Le point de l'ensemble d'arrivée qui minimise la distance avec le point de départ est retenu pour la correspondance avec celui-ci. On fait de même avec tous les points de l'ensemble de départ.

Ensuite, une estimation de la transformation rigide entre l'ensemble de départ et le sous-ensemble d'arrivée est faite grâce à un algorithme de type mise en correspondance de l'information comme décrit en Annexe 2.1. Finalement, on applique à tous les points de départ la transformation obtenue à l'itération courante et on recalcule le sous-ensemble de points minimisant la distance entre les deux ensembles.

La distance calculée est comparée avec celle de l'itération précédente. L'algorithme arrête lorsque le changement en distance ou la distance elle-même descendent sous un seuil fixé par l'utilisateur. Dans l'article de Besl et McKay, les auteurs utilisent l'algorithme des quaternions pour estimer la matrice de transformation entre l'ensemble de départ et le sous-ensemble

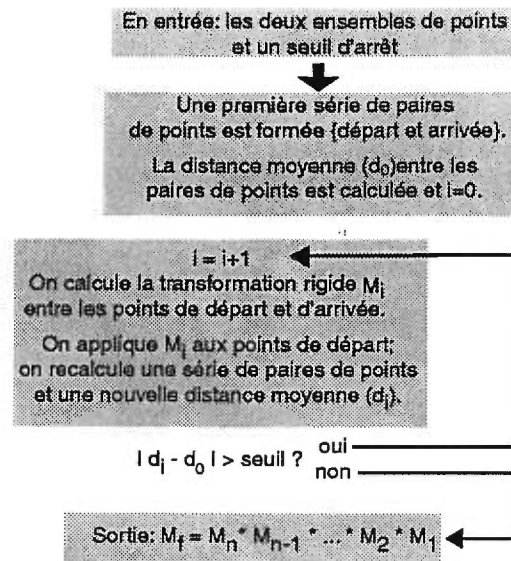


FIG. 6.9: L'organigramme du type d'algorithmes où la correspondance inter-points n'est pas directe.

d'arrivée.

### Variations à la méthode du plus proche voisin

Zhang et al. ont proposé en 94 ([Zhang, 1994] une méthode très similaire à celle de Besl et McKay. Le nouvel algorithme proposé est plus robuste car il tient compte des points dans le référentiel de départ qui n'ont pas de "bon correspondant" dans le groupe des points situés dans le référentiel d'arrivée.

Avant de calculer la transformation entre les points correspondants, l'algorithme calcule les distances entre chaque paire de points correspondants déterminée au cours de la première étape de l'algorithme. La moyenne et l'écart type de ces distances sont ensuite calculés. Ces deux valeurs servent à déterminer une valeur limite de distance au-delà de laquelle on considère que le point ne fait pas partie de l'ensemble de points correspondants. Un histogramme typique des distances inter-points est montré en figure 6.10. On voit que certains points sont au-delà d'une certaine limite (calculée à l'aide

de la moyenne et de l'écart-type de l'ensemble des distances) et ceux-ci ne seront pas pris en compte lors de l'estimation de la transformation rigide.

### **Améliorations apportées à la méthode du plus proche voisin**

Nous avons par la suite apporté une autre modification à l'algorithme ICP. L'algorithme a comme défaut d'être dépendant de l'échantillonnage des deux ensembles de points. Le phénomène est bien expliqué dans l'article de Zhang et al. ([Zhang, 1994]) et la figure 6.11 en est inspirée. Le problème est que jusqu'à présent, on supposait que parmi l'ensemble de points d'arrivée il existait un sous-ensemble de points qui était relié par une transformation rigide unique à l'ensemble de départ. Cette hypothèse peut être fautive dans certains cas où l'échantillonnage dans les deux ensembles n'est pas le même et peut devenir une source d'erreur importante si l'échantillonnage de notre objet n'est pas suffisamment précis.

Pour contrer le problème, nous faisons l'hypothèse que les deux objets que nous tentons de superposer dans l'espace ont une surface lisse et ont des normales à chaque point qui sont une bonne approximation des normales des polygones voisins à ce point. Dans le cas des os du genou, cette approximation n'est pas mauvaise car on a peu de structures dont la surface change brusquement d'orientation. De plus, le grand nombre de polygones utilisés dans les modèles numériques des os du genou aide grandement cette hypothèse. Une fois cette hypothèse posée, on peut donc associer à chaque point de l'ensemble de départ non pas un point de l'ensemble d'arrivée mais le point coupant la surface d'arrivée (c.f. figure 6.12).

### **Estimation de la qualité de l'estimation**

Nous devons tester la reproductibilité de la transformation rigide estimée par l'algorithme décrit à la section précédente. Les paramètres influençant le plus cette reproductibilité sont les position, et orientation initiales des deux surfaces de points.

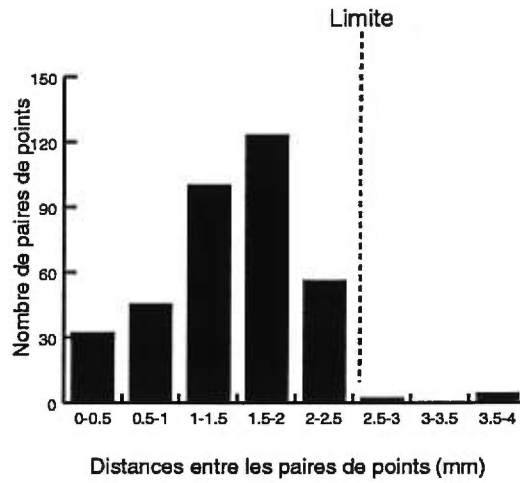


FIG. 6.10: Histogramme typique des distances entre les paires de points calculées par l'algorithme. La limite indiquée en pointillés est un seuil fixé par l'algorithme permettant de rejeter les points qui sont situés trop loin de la surface.

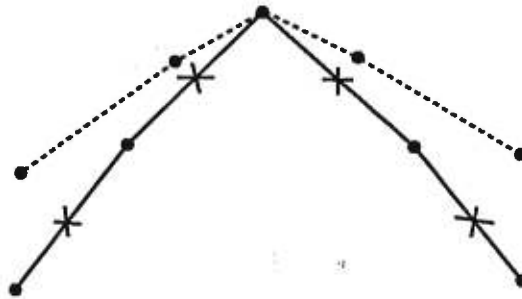


FIG. 6.11: Le problème dû aux échantillonnages différents de deux courbes. On voit que les points de la courbe en pointillés devraient trouver leur correspondants sur la courbe pleine aux endroits notés par des X et non pas aux points (cercles noirs) qui définissent la courbe.

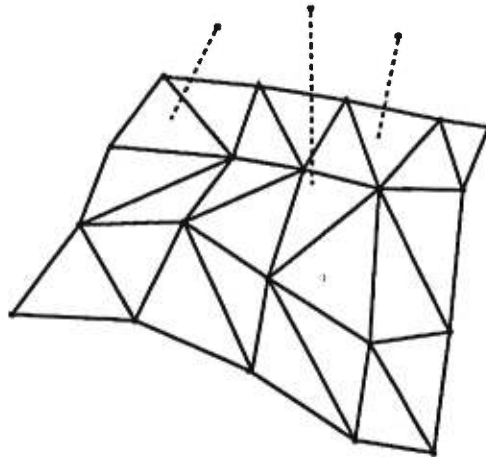


FIG. 6.12: Nouvel échantillonnage d'une surface à partir d'une autre. Les points correspondants sont placés à l'intersection entre la surface et la normale à la surface passant par le point.

Ainsi, pour évaluer la reproductibilité de l'estimation, nous faisons varier la position et l'orientation initiale des deux surfaces avant d'amorcer le calcul de l'algorithme. Ce travail est effectué par un utilisateur qui positionne et oriente les deux surfaces de façon à les superposer de manière qualitativement acceptable. Avec ces positions et orientations de départ, l'algorithme estime la transformation minimisant l'erreur entre les deux surfaces. Nous comparons ensuite les matrices de transformation obtenues comme on l'a fait en Annexe 2.1.

Les reproductibilités du positionnement et de l'orientation du fémur sur deux séries<sup>9</sup> de 10 initialisations sont présentées au tableau 6.11. Un écart-type de 1 degré (min  $\bar{0}.03$ , max  $\bar{4}.5$ ) dû à la rotation et de 0.9 mm (min  $\bar{0}.3$ , max  $\bar{1}.6$ ) dû à la translation ont été mesurés.

Certaines améliorations à la méthode employée pourraient être apportées afin d'augmenter encore la reproductibilité lors de l'estimation de la matrice de transformation rigide. Le principal problème lors de l'estimation à l'aide de correspondance indirecte de l'information est la multitude de minimums lo-

<sup>9</sup>Deux utilisateurs ont effectué le travail.

	$\sigma_{rotation}$ (degrés)	$\sigma_{translation}$ (mm)
Algorithme de correspondance indirecte	1.0	0.9

TAB. 6.11: La reproductibilité dans l'estimation de la transformation rigide entre deux surfaces grâce à la correspondance indirecte des points.

caux (figure 6.3) dans la fonction de distance entre les deux ensembles de points. Ainsi, pour déterminer la solution minimisant globalement la distance, il faudrait répéter plusieurs fois le calcul avec une solution initiale différente et comparer les différents minimums locaux pour en tirer le minimum global. Cependant, le temps de calcul peut devenir un désavantage important dans ce genre de solution.

### Applications possibles de l'algorithme

L'algorithme utilisant la correspondance indirecte de l'information peut être utilisé pour améliorer l'identification des axes cinématiques sur des genoux dont les morphologie osseuse se ressemblent beaucoup. Après une première identification d'un système d'axes à un os, un calibrage permet d'utiliser le même système d'axes pour les deux os, jusqu'à la limite de reproductibilité de l'algorithme. L'identification étant faite pour l'instant manuellement pour chaque os, une certaine incertitude lors de l'identification des points produit une erreur sur le positionnement et l'orientation des axes.

Si on compare les résultats obtenus jusqu'à présent à l'aide de l'algorithme avec ceux obtenus par identification manuelle des axes cinématiques, on remarque que cette nouvelle méthode n'apporte pour l'instant, pas une grande



amélioration. On rappellera que l'erreur générée sur chaque point dans le référentiel numérique de l'os était de 1.37 mm lors de l'identification manuelle des points. Ainsi, si on prend un modèle numérique de genou ayant une largeur fémorale inter-condyloire de 150 mm, l'erreur moyenne générée lors de l'identification manuelle des axes cinématiques sera de 1 degré en rotation et en abduction. La grandeur de cette erreur est la même que celle générée lors de l'utilisation de l'algorithme.

En ce qui concerne le positionnement des axes cinématiques, l'estimation de la translation est améliorée grâce à l'utilisation de l'algorithme par rapport à l'identification manuelle (2 mm pour l'identification manuelle vs 0.9 mm pour l'estimation avec l'algorithme).

### Annexe 3 Décomposition de l'estimation de la transformation rigide en une estimation de la rotation suivie d'une estimation de la translation

En Annexe 2.1, on voit que l'estimation de la transformation rigide entre deux ensembles de points se fait au début en une seule étape et les 12 paramètres (9 valeurs pour la matrice  $\tilde{R}$  et 3 valeurs pour le vecteur  $\tilde{T}$ ) sont calculés ensemble. Il est cependant possible de séparer l'estimation de la rotation et de la translation en 2 étapes. Il y a un avantage à travailler ainsi. En effet, en séparant ces deux étapes, on réduit le nombre de points nécessaires pour pouvoir faire l'estimation (3 au lieu de 4). Huang et al. ([Huang et al., 1986]) proposent la démonstration suivante où l'hypothèse de départ est :

Les centroïdes des ensembles des points virtuels et réels étant respectivement notés  $D$  (pour départ) et  $A$  (pour arrivée), la translation minimisant l'erreur entre les deux ensembles est donnée par  $\tilde{T} = A - R \cdot D$  et ainsi le problème revient donc à estimer la matrice de rotation  $\tilde{R}$ .

L'ensemble des points situés dans le référentiel virtuel est l'ensemble de départ et est noté  $\{D_i\}$ . L'ensemble des points de départ transformés par les matrices  $\tilde{R}$  et  $\tilde{T}$  est l'ensemble solution et est noté par  $\{S_i\}$ . Autrement dit,  $S_i \triangleq \tilde{R} \cdot D_i + \tilde{T}$ . L'ensemble  $\{S_i\}$  est donc l'ensemble des points  $\{D_i\}$  ayant subi la transformation rigide de rotation et de translation qui l'amènent le plus près, au sens des moindres carrés, des points de l'ensemble d'arrivée. Il ne faut pas confondre l'ensemble des points "solution"  $\{S_i\}$  avec l'ensemble des points "arrivée" identifiés dans le repère réel,  $\{P_i^R\} \triangleq \{A_i\}$  qui lui est défini comme  $A_i \triangleq \tilde{R} \cdot D_i + \tilde{T} + \text{erreur}$ .

Les positions des points par rapport à leur centroïde sont :

$$\begin{aligned} Q_i^A &\triangleq A_i - \bar{A}, \\ Q_i^D &\triangleq D_i - \bar{D} \end{aligned} \quad (6.14)$$

avec  $\bar{A} = 1/N \sum_{i=1}^N A_i$  et  $\bar{D} = 1/N \sum_{i=1}^N D_i$

Ainsi, l'équation de l'erreur (6.5) peut se réécrire comme :

$$\Sigma^2 = \sum_{i=1}^N \|A_i - (R \cdot D_i + T)\|^2 \quad (6.15)$$

$$= \sum_{i=1}^N \|Q_i^A + \bar{A} - R \cdot Q_i^D - R \cdot \bar{D} - T\|^2 \quad (6.16)$$

Nous allons maintenant nous servir du théorème suivant pour pouvoir éliminer de nos équations la translation :

*Théorème 1.* Si les solutions pour les matrices R et T minimisant l'erreur au carré sont notées  $\tilde{R}$  et  $\tilde{T}$ , les centroïdes de  $\{A_i\}$  et de  $\{S_i = \tilde{R} \cdot D_i + \tilde{T}\}$  coïncident.

*Preuve :* Puisque les transformations  $\tilde{R}$  et  $\tilde{T}$  sont rigides, elles n'introduisent pas de distorsions sur les distances entre les points. Cela se traduit par la contrainte de rigidité suivante :

$$\|S_i - S_j\|^2 = \|D_i - D_j\|^2 \Leftrightarrow \|S_i - S_j\|^2 - \|D_i - D_j\|^2 = 0, \forall i, j$$

Le problème se résout ([Huang et al., 1986]) en se servant des multiplicateurs de Lagrange ([Goldstein, 1980]). Supposons la fonction F qui est la somme de l'erreur au carré sur tous les points ( $\sum_{i=1}^N \|A_i - S_i\|^2$ ) et additionnons-lui la valeur 0 (tirée de l'équation précédente) multipliée par un multiplicateur  $\lambda$  de Lagrange :

$$F = \sum_{i=1}^N \|A_i - S_i\|^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} \{ \|S_i - S_j\|^2 - \|D_i - D_j\|^2 \} \quad (6.17)$$

où  $\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$ . Pour minimiser l'erreur par rapport au choix de  $S_i$ , dérivons tout d'abord la fonction  $F$  par rapport à  $S_{ix}$ ,

$$\frac{\partial F}{\partial S_{ix}} = 0 = 2(S_{ix} - A_i) + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} 2(S_{ix} - S_{jx}) \quad (6.18)$$

En sommant l'équation précédente pour  $i=1$  à  $N$  et divisant par  $N$ , on obtient :

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (S_{ix} - A_i) = 0$$

En faisant la même dérivation par rapport à  $S_{iy}$  et  $S_{iz}$ , on trouve finalement que :

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N A_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_i \quad (6.19)$$

traduisant le fait que les centroïdes de l'ensemble solution et de l'ensemble des points sur le modèle réel sont superposés. C.Q.F.D.

Le théorème 1 permet maintenant d'affirmer que, dans l'équation 6.16, la somme des erreurs sur l'ensemble des points peut se réécrire comme :

$$\Sigma^2 = \sum_{i=1}^N \|Qa_i - \bar{R} \cdot Qd_i\|^2 \quad (6.20)$$

puisque  $\bar{A} = R \cdot \bar{D} - T$ . Il est à noter que l'on a pu poser  $\bar{A} - R \cdot \bar{D} - T = 0$  grâce au théorème 1, mais ce n'est le cas que lorsqu'on est en présence des matrices  $R$  et  $T$  minimisant l'erreur, donc  $R = \tilde{R}$  et  $T = \tilde{T}$ , et c'est précisément ce

que l'on cherche à obtenir. On voit ainsi que l'on peut séparer le calcul de la transformation rigide en calculant tout d'abord  $\tilde{R}$  et, par la suite, trouver  $\tilde{T}$  grâce à :

$$\tilde{T} = \tilde{A} - \tilde{R} \cdot \tilde{D} \quad (6.21)$$

C.Q.F.D.

## **Annexe 4 Vérification de l'environnement magnétique afin d'éliminer le biais dans nos mesures**

Le système Fastrak de Polhemus permettant de mesurer la position et l'orientation des os dans l'espace fonctionne grâce à des capteurs magnétiques fixés à la jambe et sensibles à une source de champ magnétique.

Tout objet pouvant créer une interaction avec le champ magnétique faisant en sorte que l'amplitude ou la direction de ce dernier en soit affectée est à considérer comme néfaste pour l'environnement de travail. Cette interaction peut être due à la présence d'objets ferromagnétiques, magnétisables ou conducteurs de courant électrique ayant une forme appropriée. En général, pour nos expériences, l'utilisateur doit éloigner de la région dans laquelle il travaille tout objet métallique, conducteur de courant ou magnétisable.

Pour s'assurer que le biais dû aux interférences magnétiques ne soit pas trop grand dans notre environnement de travail, nous vérifions ce dernier avant chaque expérimentation. Pour ce faire, nous utilisons un objet dont les positions tridimensionnelles de 12 points facilement repérables à sa surface (12 trous) sont connues puisque préalablement mesurées à l'aide d'un outil de numérisation précis et non-influencé par l'environnement magnétique (pointeur à goniomètre Microscribe, précision de 0.4 mm RMS).

On numérise à l'aide du pointeur magnétique ces 12 points et on compare ensuite les 66 distances existant entre les 66 combinaisons de deux points possibles parmi ces 12 points. Puisqu'on connaît les 66 distances inter-points mesurées sans l'influence de l'environnement magnétique, on peut donc comparer celles-ci avec les 66 mesures recueillies lors de la numérisation. Il est ainsi possible d'estimer l'erreur de numérisation liée au matériel utilisé. La somme de l'erreur systématique (biais) et de l'erreur aléatoire sur chaque numérisation de points est ainsi évaluée. Puisque les points à numériser sont facilement identifiables, nous ne considérons pas l'influence de l'utilisateur.

Puisque nous voulons déterminer le biais sur les mesures, nous devons éliminer l'effet de l'erreur aléatoire sur la mesure. On peut pour ce faire prendre plusieurs numérisations de chaque point et en faire des moyennes. Si on fait l'hypothèse que nos mesures suivent une probabilité de distribution gaussienne, les moyennes ainsi obtenues permettraient de calculer l'erreur systématique résultante. Cependant, il faudrait faire une numérisation de plusieurs séries de points, allongeant ainsi le temps d'opération.

Nous avons plutôt choisi de garder l'erreur aléatoire dans nos mesures. Puisqu'il est possible de quantifier cette erreur aléatoire, l'erreur due à l'environnement peut donc être calculée par simple soustraction de l'erreur aléatoire estimée de l'erreur totale mesurée lors du test de la boîte. Cette erreur systématique (le résultat de la soustraction) devra être minimisée avant chaque expérience pour pouvoir valider les résultats subséquents obtenus durant l'expérimentation.

## Annexe 5 Calcul des coefficients de corrélation multiple de Kadaba

Afin de quantifier la corrélation entre plusieurs courbes expérimentales, Kadaba et al. ([Kadaba et al., 1989]) ont proposé deux indices de corrélations : le coefficient ajusté de corrélation multiple *intra expérimentation* et *inter expérimentations*.

### Coefficient ajusté de corrélation multiple *intra expérimentation*

Ce coefficient détermine la corrélation entre plusieurs courbes qui décrivent un mouvement répété dans de mêmes conditions expérimentales (le même jour, avec le même matériel, le même sujet, ...). Il se calcule comme suit :

$$\begin{aligned}
 R_a^2(\textit{intra}) &= 1 - \frac{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^T (Y_{ijt} - \bar{Y}_{it})^2 / MT(N-1)}{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^T (Y_{ijt} - \bar{Y}_i)^2 / M(NT-1)} \\
 &= 1 - \frac{\sum_{i=1}^M \sum_{t=1}^T \textit{var}(Y_{it}) / MT}{\sum_{i=1}^M \textit{var}(Y_i) / M}
 \end{aligned}$$

où  $Y_{ijt}$  est le  $t^{\text{ième}}$  échantillon de la  $j^{\text{ième}}$  courbe de la  $i^{\text{ième}}$  expérimentation,

$\bar{Y}_{it}$  est la moyenne des  $N$  valeurs des courbes à l'échantillon  $t$  de la  $i^{\text{ième}}$  expérimentation,

$\bar{Y}_i$  est la moyenne de toutes les valeurs des courbes de la  $i^{\text{ième}}$  expérimentation,

$\textit{var}(Y_{it})$  est la variance des  $N$  courbes de la  $i^{\text{ième}}$  expérimentation à l'échantillon  $t$ ,

et  $\textit{var}(Y_i)$  est la variance des tous les échantillons de la  $i^{\text{ième}}$  expérimentation



Le rapport à droite de l'équation est en fait le rapport entre (la moyenne des  $M$  moyennes des  $T$  variances le long de chaque série de  $N$  courbes) et (la moyenne des  $M$  variances des  $N \cdot T$  échantillons de chaque expérimentation). Ainsi, si on veut seulement quantifier la corrélation d'une série de courbe acquises lors d'une expérimentation, le rapport devient égal au rapport de (la moyenne des variances le long du mouvement) sur (la variance de tous les échantillons de l'expérimentation).

Si la variance des courbes est grande par rapport à l'amplitude du mouvement, le coefficient de corrélation aura tendance à être faible et pourra à la limite être négatif. C'est pour cette raison que l'on tiendra toujours le coefficient au carré plutôt que de l'exprimer comme  $R_a$ . Si l'amplitude du mouvement est très faible, ceci aura comme conséquence de rendre instable le calcul du coefficient de corrélation, le dénominateur du rapport dans l'équation tendant alors vers 0.

Il arrive souvent que ce que l'on tente de mesurer soit la corrélation entre plusieurs courbes d'une même expérimentation. Le rapport à droite de l'équation devient alors le rapport entre (la moyenne des  $T$  variances le long du mouvement) et (la variance de l'ensemble des valeurs des échantillons de toute l'expérimentation).

Même s'il s'agit d'un coefficient de corrélation intra expérimentation, le coefficient peut tenir compte de plusieurs expérimentations dans son calcul. La corrélation *entre* les différentes expériences n'est calculée, mais plutôt l'ensemble des corrélations de chaque séries de courbes est *moyenné* pour nous donner un seul coefficient intra expérimentation. Ce coefficient est ainsi utilisé à chaque fois que l'on veut évaluer la reproductibilité intra-expérimentale d'une ou de plusieurs séries de courbes.

Dans l'article de Kadaba et al., le coefficient ne permettait de calculer le coefficient que pour des ensembles contenant le même nombre de courbes et le même nombre d'échantillons par courbes. La notation de l'équation précédente permet de contourner ce problème; il faut seulement obtenir des

courbes ayant le même nombre d'échantillons, ce qui peut être réalisé par un rééchantillonnage adéquat des courbes.

### Coefficient ajusté de corrélation multiple *inter experimentations*

Ce deuxième coefficient de corrélation quantifie la corrélation existant entre les courbes provenant de différentes conditions expérimentales (différentes journées, différents sujets, ...) et se calcule comme suit :

$$R_a^2(inter) = 1 - \frac{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^T (Y_{ijt} - \bar{Y}_t)^2 / T (MN - 1)}{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^T (Y_{ijt} - \bar{Y})^2 / (MNT - 1)}$$

$$= 1 - \frac{\sum_{t=1}^T var(Y_t) / T}{var(Y)}$$

où cette fois encore  $Y_{ijt}$  est le  $t^{ième}$  échantillon de la  $j^{ième}$  courbe de la  $i^{ième}$  expérimentation,

$\bar{Y}_t$  est la moyenne de tous les  $t^{ième}$  échantillons des  $N * M$  courbes,

$\bar{Y}$  est la moyenne de toutes les valeurs lors de toutes les expérimentations,

$var(Y_t)$  est la variance de toutes les courbes à l'échantillon  $t$ ,

et  $var(Y)$  est la variance de l'ensemble des échantillons.

Cette fois, le rapport à droite de l'équation est le rapport entre (la moyenne des variances des toutes les courbes mesurées à l'échantillon  $t$ ) et (la variance de toutes les valeurs enregistrées). Encore une fois, l'amplitude du mouvement se retrouve au dénominateur du rapport ce qui rend le calcul du coefficient de corrélation très instable si l'amplitude du mouvement analysé est faible.

Ce coefficient est utilisé si l'on veut évaluer la corrélation entre plusieurs séries de courbes. Dans l'article de Kadaba et al., le coefficient ne permettait de calculer le coefficient que pour des ensembles contenant le même nombre de courbes et le même nombre d'échantillons par courbes. La notation de l'équation précédente permet de contourner ce problème; il faut seulement

obtenir des courbes ayant la même longueur ce qui peut être réalisé par un rééchantillonnage adéquat des courbes.

## Annexe 6 Explication de l'effet "papillon" lors de l'ajout de bruit sur l'orientation des axes cinématiques du repère d'interprétation

Lorsqu'on analyse les résultats des simulations de calcul des indices cinématiques, on voit apparaître des résultats non reproductibles provenant de deux sources : il peut y avoir une translation des courbes ou un changement dans l'orientation des courbes (figure 3.1). Des changements dans l'orientation des courbes peuvent être mieux observés si l'on fait coïncider toutes les courbes en leur centre, ce qui fait apparaître l'effet "papillon", dû à la forme de l'ensemble des courbes qui forment un éventail. On a remarqué que cet effet papillon était plus accentué lorsqu'on ajoutait du bruit au système d'axes cinématiques lié au repère d'interprétation (habituellement le fémur), soit à travers les points de calibrage, soit à travers les points de définition d'axes cinématiques sur le modèle virtuel.

Le phénomène est assez complexe et il est plus facile à montrer à partir des équations permettant de définir les indices cinématiques du mouvement. On a vu à en Annexe 1 que la matrice décrivant la position et l'orientation du système d'axes du tibia par rapport au système d'axes du fémur pouvait s'écrire  $M = (C_F \cdot B_F)^{-1} \times C_T \cdot B_T$  et que celle-ci pouvait être interprétée comme une série de rotations successives autour de trois axes mobiles. Notons ces trois rotations  $R_x$ ,  $R_y$  et  $R_z$ , respectivement d'angles  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$  et  $\alpha_z$ . Ainsi,  $M = R_x \cdot R_y \cdot R_z$ . Dans notre cas, nous ferons l'hypothèse que le mouvement de flexion ( $R_x$ ) est beaucoup plus grand que le mouvement d'abduction ( $R_y$ ) et le mouvement de rotation tibiale ( $R_z$ ).

Supposons maintenant une erreur dans la matrice de définition des axes cinématiques sur le fémur et sur le tibia, respectivement dénotées par  $E_F$  et  $E_T$ . La matrice  $M$  devient alors bruitée et égale à

$$M_{bruitée} = (B_F \cdot C_F \cdot E_F)^{-1} \cdot B_T \cdot C_T \cdot E_T$$

$$M_{bruitée} = E_F^{-1} \cdot C_F^{-1} \cdot B_F^{-1} \cdot B_T \cdot C_T \cdot E_T$$

$$M_{bruitée} = E_F^{-1} \cdot M \cdot E_T = E_F^{-1} \cdot R_x \cdot R_y \cdot R_z \cdot E_T$$

### Annexe 6.1 Erreur sur la définition du système d'axes lié au tibia

Si l'erreur n'est présente que sur l'orientation du système d'axes du tibia,  $E_F = I$  et ainsi,

$$M_{bruitée} = R_x \cdot R_y \cdot R_z \cdot E_T$$

En décomposant  $E_T$  comme une série de rotations autour d'axes mobiles  $E_T = E_x \cdot E_y \cdot E_z$ , avec des angles  $e_x$ ,  $e_y$  et  $e_z$  autour des axes mobiles  $x$ ,  $y$  et  $z$ , la matrice  $M$  devient :

$$M_{bruitée} = R_x \cdot R_y \cdot R_z \cdot E_x \cdot E_y \cdot E_z$$

$$M_{bruitée} = R_x \cdot R_y \cdot R_z \cdot E_x \cdot [(R_y \cdot R_z)^{-1} \cdot (R_y \cdot R_z)] \cdot E_y \cdot [(R_z)^{-1} \cdot (R_z)] \cdot E_z$$

$$M_{bruitée} = R_x \cdot [(R_y \cdot R_z) \cdot E_x \cdot (R_y \cdot R_z)^{-1}] \cdot R_y \cdot [R_z \cdot E_y \cdot R_z^{-1}] \cdot (R_z) \cdot [E_z]$$

Ainsi, si on utilise l'hypothèse d'un mouvement faible en abduction et en rotation tibiale, ce qui se traduit par des matrices  $R_y$  et  $R_z$  qui tendent vers l'identité, on arrivera à une forme qui approxime l'effet de l'erreur  $E_T$  sur les courbes d'indices cinématiques :

$$M = [R_x \cdot E_x] \cdot [R_y \cdot E_y] \cdot [R_z \cdot E_z]$$

$$M = R_x(ax + ex) \cdot R_y(ay + ey) \cdot R_z(az + ez)$$

puisque deux rotations successives autour d'un même axe sont équivalentes à une seule rotation autour de cet axe mais avec un angle égal à la somme des deux angles.

On voit bien que l'effet approximatif d'une erreur sur la définition des axes cinématiques du tibia équivaut à un décalage des indices cinématiques, et que cet effet sera d'autant plus grand que l'erreur sur la définition des axes cinématiques sera grande.

Ainsi, si l'on fait ensuite coïncider les courbes en leur centre, ce décalage disparaîtra et ne laissera place qu'à des faibles variations dues aux termes qu'on a négligé dans nos équations ; l'amplitude du papillon sera faible.

L'approximation faite sera bonne si on se limite à de petits angles d'abduction et de rotation tibiale. Dans d'autres circonstances, l'effet des erreurs se propagera de façon moins constante en fonction du mouvement.

## Annexe 6.2 Erreur sur la définition du système d'axes lié au fémur

Si l'erreur n'est présente que sur la matrice de définition d'axes sur le fémur et que par conséquent  $E_T = 0$ , la matrice  $M_{bruitée}$  deviendra :

$$M_{bruitée} = E_F^{-1} \cdot R_x \cdot R_y \cdot R_z$$

Décomposons l'erreur sur le fémur en trois rotations successives :  $E_F^{-1} = E_x \cdot E_y \cdot E_z$ , la matrice M devient :

$$M_{bruitée} = E_x \cdot E_y \cdot E_z \cdot R_x \cdot R_y \cdot R_z$$

$$M_{bruitée} = [(R_x) \cdot (R_x)^{-1}] \cdot E_x \cdot [(R_x \cdot R_y) \cdot (R_x \cdot R_y)^{-1}] \cdot E_y \cdot [(R_x \cdot R_y \cdot R_z) \cdot (R_x \cdot R_y \cdot R_z)^{-1}] \cdot E_z \cdot R_x \cdot R_y \cdot R_z \quad (6.22)$$

$$M_{bruitée} = \underbrace{(R_x \cdot [R_x^{-1} \cdot E_x \cdot R_x])}_{R_x\_bruitée} \cdot \underbrace{(R_y \cdot [(R_x \cdot R_y)^{-1} \cdot E_y \cdot (R_x \cdot R_y)])}_{R_y\_bruitée} \cdot \underbrace{(R_z \cdot [(R_x \cdot R_y \cdot R_z)^{-1} \cdot E_z \cdot (R_x \cdot R_y \cdot R_z)])}_{R_z\_bruitée} \quad (6.23)$$

On voit très bien que chacune des trois rotations autour des axes mobiles seront modifiées par une combinaison des matrices d'erreur et des matrices de rotation elle-même. Qui plus est, puisque la matrice  $R_x$  peut devenir très différente de la matrice identité lors du mouvement, la propagation de l'erreur pourra être très non-linéaire et ainsi, l'effet de l'erreur pourra varier au cours du mouvement du genou. C'est pour cette raison que l'on observe une variation de l'amplitude de l'erreur au cours du mouvement, qui se traduit par un effet "papillon" important si l'on fait coïncider les courbes en leur centre.