

Université de Montréal

**Pièges et vieillissement pour les marches aléatoires sur
des environnements aléatoires hautement irréguliers :
phénoménologie et étude de cas.**

par

Élise Davignon

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Thèse présentée en vue de l'obtention du grade de
Philosophiæ Doctor (Ph.D.)
en mathématiques

Orientation mathématiques fondamentales

6 novembre 2023

Université de Montréal

Faculté des arts et des sciences

Cette thèse intitulée

Pièges et vieillissement pour les marches aléatoires sur des environnements aléatoires hautement irréguliers : phénoménologie et étude de cas.

présentée par

Élise Davignon

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes :

François Perron

(président-rapporteur)

Alexander Fribergh

(directeur de recherche)

Lucas Benigni

(membre du jury)

Janosch Orthmann

(examineur externe)

Résumé

Nous présentons d'abord une introduction au sujet des marches aléatoires en milieux aléatoires. Nous nous penchons en particulier sur les phénomènes de ralentissement, et plus précisément sur la propriété de vieillissement qu'exhibent plusieurs de ces systèmes lorsque les paramètres sont tels qu'ils conduisent l'environnement aléatoire à produire fréquemment des « pièges », soient des structures qui retiennent la marche aléatoire dans la même région de l'environnement pour de longues durées de temps. Nous illustrons ces notions à l'aide de résultats connus pour deux modèles.

Nous présentons par la suite une preuve pour une propriété de vieillissement dans le cas de la marche aléatoire biaisée sur les conductances aléatoires à queues lourdes dans la grille infinie hyper-cubique à d dimensions, qui est le sujet d'un article en attente de publication.

Mots-clé : Marches aléatoires en milieux aléatoires, pièges, vieillissement, variables à queue lourde, renouvellements, processus de Lévy.

Abstract

We first present an introduction to the topic of random walks on random environments (RWRE). In particular, we look at slow-down phenomena and, more specifically, ageing properties exhibited by multiple such systems when parameters are chosen such that the random environment frequently produces large “traps”: structures that hold up the progress of the random walk by keeping it in the same region of the environment for long periods of time. We illustrate these behaviours by presenting known results for two such models.

We then present a proof for an ageing property in the case of the biased random walk on heavy-tailed random conductances in the infinite hyper-cubic lattice in d dimensions; this is the subject of a research article pending publication.

Keywords : Random walks on random environments (RWRE), traps, ageing, heavy-tailed random variables, renewals, Lévy processes.

Table des matières

Résumé	v
Abstract	vii
Liste des figures	xiii
Liste des sigles, abréviations et symboles	xv
Remerciements	xxi
Introduction	1
Diffusion dans des milieux hautement irréguliers	2
Dans cette thèse	3
Première partie. Vieillissement pour les marches aléatoires en milieux aléatoires dans le régime sous-ballistique : concepts et exemples	5
Chapitre 1. Description générale du vieillissement.	7
1.1. Marches aléatoires, milieux aléatoires	7
1.1.1. Marches aléatoires sur des graphes	7
1.1.2. Vocabulaire des graphes	8
1.1.3. Marches aléatoires en milieux aléatoires	9
1.1.4. Réseaux et marches aléatoires réversibles	10
1.2. Pièges et transience directionnelle	12
1.2.1. Un exemple simple	12
1.2.2. Transience directionnelle	13
1.3. Modèle de Bouchaud et renouvellements	14
1.3.1. Le modèle de pièges complètement biaisé	15
1.3.2. Processus de renouvellements	16
1.3.3. Le modèle partiellement biaisé	17
1.4. Lois stables et subordonateurs	19

1.4.1.	Lois stables	19
1.4.2.	Queues à variation régulière et limites stables.....	20
1.4.3.	Limites pour le modèle de pièges	22
1.4.4.	Processus de Lévy et sous-ordinateurs stables.....	23
	Pour le modèle de Bouchaud	24
1.5.	Vieillessement et loi de l'arc-sinus	25
1.5.1.	Pour les sous-ordinateurs stables.....	25
1.5.2.	Pour le modèle de pièges complètement biaisé.....	26
Chapitre 2.	Exemples de modèles	29
2.1.	La marche aléatoire sur un arbre de Bienaymé	29
2.1.1.	L'arbre de Bienaymé.....	29
2.1.2.	La condition de survie et une décomposition utile	31
2.1.3.	La marche aléatoire	33
2.1.4.	Le régime sous-balistique et les pièges.....	35
2.1.5.	Temps passé sur les branches.....	36
2.1.6.	Distributions arithmétiques et absence de limites d'échelle.....	39
2.2.	La marche aléatoire sur l'environnement aléatoire à une dimension.....	40
2.2.1.	L'environnement aléatoire et le potentiel.....	40
2.2.2.	Récurrence, transience et vitesse asymptotique	42
2.2.3.	Les vallées de potentiel.....	42
2.2.4.	Temps dans les vallées pour la marche sur l'environnement aléatoire à une dimension.....	43
2.2.5.	Limites d'échelle et vieillissement	46
Deuxième partie.	Ageing for the biased random walk on heavy-tailed random conductances on \mathbb{Z}^d	49
Chapitre 3.	Introduction and presentation of the model	51
3.1.	Introduction	51
3.1.1.	The model.....	51
3.1.2.	Ageing.....	53
3.1.3.	Outline of the proof.....	54
3.2.	Preliminary notions.....	54
3.2.1.	The Good/Bad decomposition and the parameter K	55

3.2.2.	“Backtracking” and regeneration times.	56
3.2.3.	Traps.	57
3.2.3.1.	Large traps.	57
3.2.3.2.	The time spent outside of large traps	58
3.2.3.3.	The number of traps encountered.	59
3.2.4.	Estimating the time spent in large traps.	61
3.2.4.1.	Results on the distributions of W_∞ and c_*^{\max}	62
3.2.5.	Limiting results.	63
3.2.5.1.	Approximating regeneration times.	63
Chapitre 4.	Proof of ageing	67
4.1.	The regeneration periods when times t and ht occur.	67
4.1.1.	Regeneration times and large traps at the scale of elapsed time.	67
4.1.2.	Approximating regeneration times by the time spent on large traps.	72
4.1.3.	The last long regeneration period at the scale of elapsed time.	77
4.1.4.	Proof of Proposition 4.1.	81
4.2.	The walk is on the largest conductance.	81
4.2.1.	A slightly larger trap.	82
4.2.2.	Time considerations.	86
4.2.3.	The probability that the walk is away from the trap.	90
4.2.4.	Proof of Proposition 4.2.	103
4.2.5.	Proof of Theorem 3.2	105
4.3.	Closing remarks.	106
Références et annexes		109
Références bibliographiques		111
Annexe A. Certains résultats sur les marches aléatoires réversibles		115
A.1.	Circuits électriques.	115
A.1.1.	Quantités physiques.	115
A.1.2.	Lois d’Ohm et de Kirchhoff.	116
A.1.3.	Potentiel harmonique, conductance effective.	116
A.1.4.	Réduction de circuits.	117
A.2.	Parallèles avec les marches aléatoires	118

A.2.1.	Fonctions harmoniques et probabilités	119
A.2.2.	Fonctions de Green, nombre de visites	121
Annexe B.	Fonctions à variation régulière	123
B.1.	Définitions	123
B.2.	Résultats	124
Annexe C.	Useful results	127
C.1.	Influence of the first regeneration period.	127
C.2.	Random indices and conditional probabilities	128

Liste des figures

0.1	The Problem of the Random Walk.....	1
1.1	La marche biaisée sur \mathbb{Z} avec goulots d'étranglement. L'épaisseur des flèches indique les probabilités de transition. Les goulots d'étranglement sont en rouge..	12
1.2	N goulots d'étranglement successifs.....	13
1.3	Densités de lois stables.....	21
2.1	Arbre de Bienaymé.....	31
2.2	L'épine dorsale pour l'arbre de Bienaymé.....	32
2.3	Décomposition de l'arbre de Bienaymé conditionné à survivre.....	33
2.4	L'environnement aléatoire à une dimension.....	40
2.5	Potentiel pour l'environnement aléatoire à une dimension.....	41
2.6	Excursions du potentiel pour la MAMA en 1D.....	43
4.1	Potentiel pour la marche aléatoire biaisée sur les conductances aléatoires à queues lourdes sur \mathbb{Z}	107
A.1	Règles de réduction de circuits.....	118
A.2	Exemple de réduction de circuit.....	119

Liste des sigles, abréviations et symboles

Sigles

MAMA	Marche aléatoire en milieu aléatoire
RWRE	Random walk in a random environment
REM	Random energy model
BTM	Bouchaud trap model

Notations

t.q.

s.t.

$\mathbb{Z}^+, \mathbb{R}^+$

$f(x) \sim g(x)$

$f(x) = o(g(x)), \ll g(x)$

$f(x) = O(g(x))$

$f(x) \asymp g(x)$

Générales

tel que

such that

éléments non-négatifs (incl. 0) de \mathbb{Z}, \mathbb{R} .

équivalence asymptotique forte ($f(x)/g(x) \rightarrow 1$)

$f(x)$ est négligeable par rapport à $g(x)$
($f(x)/g(x) \rightarrow 0$)

$f(x)$ est dominé par $g(x)$ ($f(x) \leq Cg(x)$ pour $C > 0$ quelconque et x assez grand)

équivalence asymptotique faible ($f(x) = O(g(x))$
et $g(x) = O(f(x))$)

Probabilités

p.s.

a.s.

i.i.d.

presque sûrement

almost surely

indépendantes et identiquement distribuées – independent and identically distributed

$\xrightarrow{(d)}$	converge en distribution.
$X \propto Y$	X et Y sont égales à un facteur aléatoire de variance finie près.
$X \approx Y$	X et Y sont de même espérances et égales à un facteur aléatoire de variance finie près.
$X \sim Y$	X et Y sont de même distribution.

Chapitre 1

$G = (S, E)$	graphe avec ensemble de sommets S et d'arêtes E .
e^+, e^-	dans un graphe : extrémités d'une arête
$x \rightarrow y$	dans un graphe orienté : il existe une arête e t.q. $e^- = x$ et $e^+ = y$.
$x \sim y$	dans un graphe : il existe une arête entre les sommets x et y .
$\mathbf{p} = (p(x, y))_{x, y \in S}$	probabilités de transition
\mathbf{P}, \mathbf{E}	mesure de probabilité pour l'environnement.
ω	aléa de l'environnement.
X^ω	variable aléatoire mesurable par rapport à l'environnement.
$G^\omega = (S, E^\omega)$	graphe de l'environnement aléatoire.
$\mathbf{p}^\omega = (p^\omega(x, y))_{x, y \in S}$	probabilités de transition aléatoires.
F_x^ω, E_x^ω	mesure de probabilité trempée.
$\mathbb{P}_x, \mathbb{E}_x$	mesure de probabilité recuite avec condition initiale x .
$\pi = (\pi(x))_{x \in S}$	mesure invariante.
$c(x, y)$	conductance de l'arête (x, y) .
\mathcal{N}	distribution normale centrée réduite

$\mathcal{S}(\alpha, \beta, \mu, c)$ distribution stable d'indice α et de paramètres β, μ, c .

Chapitre 2

(m, m') pour deux mots : concaténation.

\emptyset mot vide.

\tilde{m} mot m tronqué au dernier caractère.

ξ_m^ω nombre d'enfants de l'individu m .

f, ψ fonctions de masse, génératrice des probabilités pour la distribution du nombre d'enfants.

$G_0^\omega = (S_0^\omega, E_0^\omega)$ composante connexe de \emptyset pour l'arbre de Bienaymé.

$\mathbf{P}_\infty, \mathbf{E}_\infty$ mesure de probabilités pour l'arbre de Bienaymé conditionné à survivre.

$\overline{\mathbf{P}}, \overline{\mathbf{E}}$ mesure de probabilités pour l'arbre de Bienaymé conditionné à s'éteindre.

G_∞^ω épine dorsale de G_0^ω .

$\psi_\infty, \overline{\psi}$ fonction génératrice des probabilités pour la distribution du nombre d'enfants sous $\mathbf{P}_\infty, \overline{\mathbf{P}}$.

$|m|$ distance de m à \emptyset dans G_0^ω .

β paramètre de biais.

μ espérance du nombre d'enfants sous \mathbf{P} .

β_c valeur critique du biais pour le régime sous-balistique.

H^ω Hauteur de l'arbre de Bienaymé.

Z_n^ω population de la n ième génération de l'arbre de Bienaymé.

$\bar{\psi}_n$	fonction génératrice des probabilités pour Z_n^ω sous $\bar{\mathbf{P}}$.
T_\emptyset^+	temps du retour au sommet \emptyset pour la marche aléatoire sur G_0^ω sous P_\emptyset^ω .
L^ω	Largeur de l'arbre de Bienaymé.
p_x^ω, q_x^ω	probabilités de transition vers la droite; vers la gauche pour le modèle de MAMA à une dimension.
ρ_x^ω	rapport entre ces deux probabilités.
$V^\omega(x)$	fonction de potentiel.
m_i	endroit de l' i ème « creux » de potentiel.
H_i^ω	hauteur de la i ème vallée de potentiel.
M_i	endroit de l' i ème sommet du potentiel.
$T_{M_i}, T_{m_i}^+$	temps d'atteinte de M_i , de retour en m_i .
$N_{M_i}(m_i)$	nombre de visites à m_i avant d'atteindre M_i .

Chapitre 3

$c_*^\omega(e)$	(gross) conductances.
γ	index for the tail of $c_*^\omega(e)$.
$c^\omega(e)$	net conductances.
$\ell; \lambda, \hat{\ell}$	bias vector; magnitude, orientation (unit vector).
$GOOD_K(\omega), BAD_K(\omega)$	good, bad portions of the environment.
$\mathbf{P}_x^K, \mathbf{E}_x^K$	law of the environment with $c_*^\omega(x, y) = K$ for all $y \sim x$.
\mathbb{P}_x^K	annealed law started at x under \mathbf{P}_x^K .

D	a random variable (see Fribergh and Kious [20]) less than or equal to the number of steps before the walk comes back behind its origin.
$\overline{\mathbb{P}}_x, \overline{\mathbb{E}}_x$	\mathbb{P}_x^K given $D = \infty$. (Law of the first regeneration period.)
τ_k	k th regeneration time.
\mathcal{T}_k	duration of the k th regeneration period.
T_A, T_x	hitting time of $A \subseteq \mathbb{Z}^d$, $x \in \mathbb{Z}^d$.
$LT(n), LT^{(i)}(n)$	event that an edge with conductance larger than n is encountered during the first, i th regeneration period. (“Large Trap”)
$\delta_k(n)$	index of the k th large trap encountered.
$\mathcal{T}_i^{\geq n}, \mathcal{T}_i^{< n}$	number of edges with conductances $\geq n$, $< n$ crossed in the i th regeneration period.
$OLT(\delta, n), OLT^{(i)}(\delta, n)$	event that a single edge with conductance larger than n is encountered; all others lower than n^δ . (“One Large Trap”)
$e^{(n)}, e_{(i)}^{(n)}$	on $OLT(\delta, n)$, $OLT^{(i)}(\delta, n)$: the single edge with conductance larger than n .
$\mathfrak{T}_n, \mathfrak{T}_n^{(i)}$	time spent on either endpoint of edges with conductance larger than n during the first, i th regeneration period. On $OLT(\delta, n)$, $OLT^{(i)}(\delta, n)$: time spent on $e^{(n)}$, $e_{(i)}^{(n)}$.
$T_{A,(k)}, \mathfrak{E}_{A,(k)}$	k th hitting, exiting time of $A \subseteq \mathbb{Z}^d$
V_n	number of separate, contiguous visits to $e^{(n)}$.
W_n	ratio between \mathfrak{T}_n and $c_*^\omega(e^{(n)})$.
$\mathbb{P}^\infty, \mathbb{E}^\infty$	probability measure for the limiting law of (\mathbf{U}_n, V_n) .

$\mathbb{P}_x^{K,\infty}, \mathbb{E}_x^{K,\infty}$ probability measure for the coupling of the annealed process under \mathbb{P}_x^K with the limits for \mathbf{U}_n, V_n , etc.

$c_*^{\max}, c_{*,i}^{\max}$ limit variable for $c_*^\omega(e^{(n)}), c_*^\omega(e_{(i)}^{(n)})$ under \mathbb{P}^∞ ; largest conductance encountered during a regeneration period under $\mathbb{P}_x^{K,\infty}$.

$\mathfrak{T}_\infty, \mathfrak{T}_\infty^{(i)}$ $W_\infty c_*^{\max}, W_\infty^{(i)} c_{*,i}^{\max}$

$\text{Inv}(n)$ scale for regeneration times.

Chapitre 4

$\alpha \in (0, 1)$ exponent for the large-trap threshold at the scale of elapsed time.

$\delta \in (0, 1)$ exponent for the medium-trap threshold at the scale of large traps.

$l(n, t), l(t)$ last n -large, t^α -large regeneration period started before time t .

\mathcal{S}_n sum of n first large regeneration periods.

$l^*(t)$ maximum number of large regeneration periods that add up to less than t .

$\alpha' \in (\alpha, 1)$ exponent for the larger-trap threshold at the scale of elapsed time

Remerciements

Pour leur précieux soutien financier : merci aux Fonds de Recherche du Québec – Nature et Technologie, aux bourses des Études Supérieures et Postdoctorales de l’Université de Montréal et au département de Mathématiques et Statistiques de l’Université de Montréal;

Pour son soutien en recherche : merci à Alexander Fribergh;

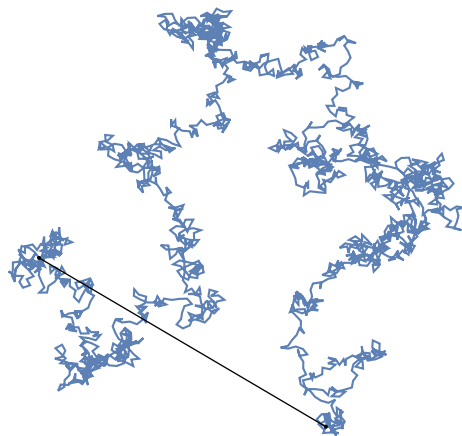
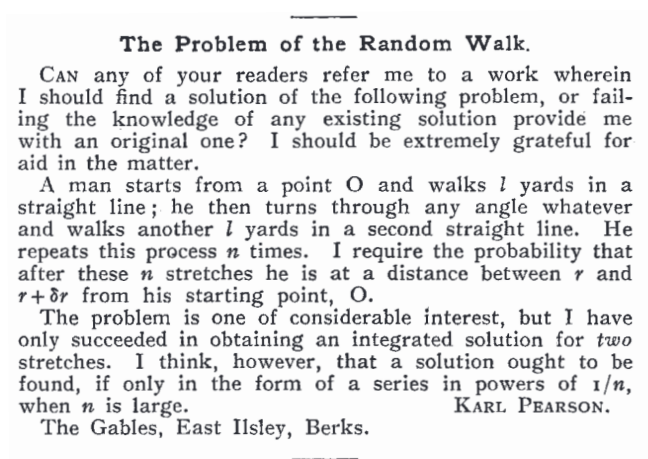
Pour leur bienveillance : merci à Marlène Frigon et Yvan Saint-Aubin;

Pour leur présence et le réconfort qu’ils et elles m’ont apporté, à l’université ou en dehors, avant pendant ou après l’accident de bateau, de près ou de loin, tout au long de mon parcours ou seulement pendant un moment: merci à Pépé, Audrey, Olive, Laurent, Alice, Marie, Marc, Marianne, Aurélie, Marjolaine, Alexis, Jonathan, P.-A., Dominique, Jean-Philippe, Aude, François, Sarah. Merci aussi – et plates excuses – à toutes celles et à tous ceux que cette autrice aura immanquablement oublié d’inclure ici;

Finalement : ce travail n’aurait jamais vu le jour sans les encouragements obstinés de Papa et Maman.

Introduction

Dans un court article paru dans la revue *Nature* en 1905, le mathématicien et statisticien anglais Karl Pearson pose ainsi le « problème de la marche aléatoire » [34] (figure 0.1) :



(a) Texte original paru dans *Nature* en 1905. Il s'agit de la première mention connue de l'expression « marche aléatoire » (*random walk*)

(b) Une réalisation du processus décrit par Pearson, avec $n = 200$. Les points de départ et d'arrivée sont marqués en noir.

Fig. 0.1. Karl PEARSON : The Problem of the Random Walk, *Nature*, 1905 [34]

« Un homme part d'un point O et marche une verge en ligne droite; puis il se retourne d'une angle quelconque, et marche une autre verge en une seconde ligne droite. Il répète ce processus n fois. Je demande la probabilité qu'après ces n étapes, il se trouve à une distance entre r et $r + \delta r$ de son point d'origine.

Le problème en est un d'intérêt considérable [...] »

Pour les physiciennes et les physiciens de l'époque, l'étude de ce problème est motivée par les questionnements entourant le phénomène du mouvement Brownien, et plus généralement la dynamique de diffusion de particules dans un gaz ou un autre fluide, et ce que ces phénomènes révèlent sur la nature de la matière – la même année, Albert Einstein [12]

donne une solution au problème de la marche aléatoire qui appuie la théorie des atomes, encore chaudement disputée.

Dans le problème de la marche aléatoire décrit par Pearson, la distribution marginale d'un « pas » pour le marcheur est homogène dans l'espace, ne dépendant pas du point de départ de chaque pas, et correspondant ainsi à l'homogénéité du milieu dans lequel le marcheur évolue. Dans le modèle de diffusion d'Einstein, qui tente une explication du mouvement Brownien, les changements aléatoires de direction de la particule en suspens dans un fluide sont dus à des collisions imprévisibles causées par les mouvements microscopiques des molécules qui composent ce fluide; l'homogénéité pour la distribution des bonds de la particule reflète la qualité homogène du fluide à l'échelle macroscopique.

Diffusion dans des milieux hautement irréguliers

À l'instar des marches aléatoires, l'étude des marches aléatoires en milieux aléatoires est motivée par l'intérêt porté à l'étude de systèmes physiques (par exemple la diffusion de particules) dont la dynamique est imprévisible, mais lorsque le *milieu* de diffusion lui-même présente des irrégularités à l'échelle macroscopique. Les processus résultants sont des processus stochastiques avec deux « niveaux d'aléatoire » : la constitution du *milieu* lui-même est aléatoire; puis, étant donné un milieu, le processus de diffusion est aléatoire aussi. On peut consulter par exemple l'ouvrage de Hughes [24] ou les notes de Zeitouni [41] pour un survol détaillé du domaine.

Lorsque les irrégularités sont « assez grandes » – ou, plus précisément, lorsque de grandes irrégularités dans le milieu aléatoire surviennent avec une assez grande fréquence – les processus de diffusion se trouvent souvent ralentis par celles-ci, ce qui donne place à un phénomène que les physiciennes et les physiciens appellent le « vieillissement »; ce terme qualifie généralement un système dynamique dont la rapidité de l'évolution décroît avec le temps, de telle sorte que le temps nécessaire pour observer un changement « significatif » dans l'état de celui-ci soit environ proportionnel à l'âge du système. On cite en exemples de modèles physiques qui exhibent une propriété de vieillissement : la dynamique de Glauber pour le modèle d'énergie aléatoire (MEA) (*random energy model* en anglais, REM) étudié entre autres par Ben Arous, Bovier, Gayrard et Černý [3, 4], ou par Bouchaud [9]. et le modèle parabolique d'Anderson (voir par exemple : Mörtens, Ortguiese, Sidorova [33]).

Le modèle d'énergies aléatoires est un modèle qui attribue aléatoirement des énergies à diverses configurations pour un « verre de spins », soit un système physique où les différentes particules n'interagissent que par leurs moments angulaires intrinsèques, appelés leurs *spins*. La dynamique de Glauber sur le MEA est un choix de probabilités de transitions afin de décrire une évolution aléatoire de l'état des spins dans le temps, qui dépend de l'énergie

associée à chaque configuration. La dynamique de Glauber sur le MEA est donc une marche aléatoire sur un environnement aléatoire.

Dans le modèle parabolique d'Anderson, on cherche à résoudre l'équation de la chaleur pour un potentiel aléatoire. Dans ce modèle, le potentiel joue le rôle de l'environnement aléatoire; l'évolution de la distribution des probabilités pour la marche aléatoire sur ce dernier donne la solution désirée.

Dans ces deux cas comme dans plusieurs autres, l'aléatoire dans le milieu de diffusion de la marche aléatoire produit, dans certains régimes de paramètres, des irrégularités qui « piègent » les particules, en ralentissent le mouvement, et causent ultimement l'émergence du phénomène de vieillissement.

Dans cette thèse

Dans la première partie de la présente thèse, nous ferons une courte introduction générale aux marches aléatoires en milieux aléatoires directionnellement transients, en illustrant à l'aide d'un exemple très simple comment l'environnement aléatoire peut créer des « pièges ». Nous présentons ensuite les outils mathématiques principaux que nous utiliserons pour comprendre le phénomène de vieillissement qui émerge lorsque ces pièges se produisent assez fréquemment (chapitre 1) . Puis, nous présenterons brièvement deux exemples de marches aléatoires en milieux aléatoires connus afin d'illustrer les résultats obtenus (chapitre 2).

Dans la seconde partie (chapitres 3 et 4), nous présenterons le modèle de marche aléatoire biaisée sur les conductances aléatoires en d dimensions, et nous donnerons une preuve pour une propriété de vieillissement pour ce dernier. Ces chapitres (rédigés en anglais) sont principalement tirés d'un article de recherche rédigé durant les travaux de thèse.

Partie 1

Vieillessement pour les marches aléatoires en milieux aléatoires dans le régime sous-ballistique : concepts et exemples

Chapitre 1

Description générale du vieillissement.

Ce chapitre vise à faire une description générale de l'émergence du phénomène de vieillissement pour les marches aléatoires en milieux aléatoires directionnellement transientes dans certains régimes de paramètres que nous appellerons *sous-balistiques*. Nous introduirons en chemin les principaux outils mathématiques requis pour démontrer la propriété de vieillissement.

La section 1.1 introduit d'abord le cadre mathématique général pour les marches aléatoires en milieux aléatoires sur des graphes; la section 1.2 illustre à l'aide d'un exemple très simple comment des « pièges » surviennent dans un modèle de marche aléatoire en milieu aléatoire directionnellement transient. La section 1.3 introduit le modèle de pièges de Bouchaud. Ce modèle sera utile pour comprendre comment les pièges influenceront la dynamique à long terme pour les marches aléatoires directionnellement transientes où ces « pièges » sont présents. La section 1.4 introduit le régime sous-balistique pour le modèle de Bouchaud. Nous y montrons les limites d'échelles appropriées pour le modèle dans ce régime de paramètres. Finalement, avec ces limites d'échelle, la section 1.5 introduit le phénomène de vieillissement grâce à un résultat de la théorie des processus de Lévy : la loi de l'arc-sinus.

1.1. Marches aléatoires, milieux aléatoires

1.1.1. Marches aléatoires sur des graphes

Historiquement, le terme *marche aléatoire* fait référence à une chaîne de Markov $\mathbf{X} = (X_t)_{t \in \mathbb{Z}^+}$ à temps discret sur un groupe additif S d'états et dont la suite des pas successifs $(X_t - X_{t-1})_{t \in \mathbb{N}}$ forme une suite de variables indépendantes et identiquement distribuées, de sorte qu'on peut écrire, par exemple, $X_t = X_0 + \sum_{i=1}^t Y_i$ pour $t \geq 1$, où les Y_i sont des variables aléatoires i.i.d.. On consultera par exemple la source de la première mention reconnue du terme : *The Problem of the Random Walk* (Pearson [34]), mentionné en introduction. Dans le contexte d'un espace d'états S discret dont les états sont les sommets d'un graphe $G =$

(S, E) , une marche aléatoire est plutôt une chaîne de Markov homogène à temps discret $\mathbf{X} = (X_t)_{t \in \mathbb{Z}^+}$, où une transition entre deux états n'est possible que lorsqu'ils sont reliés par une arête. Par conséquent, \mathbf{X} est simplement un chemin aléatoire sur le graphe G – c'est-à-dire que les paires successives $\{X_{t-1}, X_t\}$ sont toutes respectivement reliées par des arêtes de G .

Dans ce contexte, on réfère au graphe $G = (S, E)$ comme étant l'*environnement*, ou le *milieu* sur lequel la marche aléatoire évolue. On inclue également dans la caractérisation de l'environnement les probabilités de transition en un pas $\mathbf{p} = (p(x, y))_{x, y \in S}$ entre sommets voisins pour le processus \mathbf{X} .

Remarque 1.1. *On remarque que cette définition d'une marche aléatoire sur un graphe implique directement $p(x, y) = 0$ pour tout $x, y \in S$ tels que $\{x, y\} \notin E$; en fait, on assumera aussi sans perdre de généralités que $p(x, y) > 0$ pour tous $x, y \in S$ tels que $\{x, y\} \in E$.*

À proprement parler, le graphe G peut donc être entièrement déduit de \mathbf{p} ; toutefois, la structure de celui-ci est souvent utile à garder en tête pour raisonner; c'est pourquoi nous préférons l'inclure dans la description de l'environnement d'une marche aléatoire.

1.1.2. Vocabulaire des graphes

Nous prenons un bref moment pour préciser les définitions employées dans ce qui suit pour les graphes.

- i.* Un **graphe simple orienté** est un couple $G = (S, E)$ où l'ensemble E des arêtes est une partie de $S \times S$. On définit les applications $\cdot^+, \cdot^- : E \rightarrow S$ de telle sorte que $(x, y)^- \mapsto x$ et $(x, y)^+ \mapsto y$, et l'application $-\cdot : E \rightarrow E$, définie par $-(x, y) = (y, x)$.
- ii.* Un **graphe simple non-orienté** est un couple $G = (S, E)$ où l'ensemble E des arêtes est une partie de $\{\{x, y\} : x, y \in S\}$.
- iii.* Il existe une bijection évidente entre les graphes simples non-orientés et les graphes simples orientés où E est *symétrique* (c'est-à-dire que $e \in E$ si et seulement si $-e \in E$); pour cette raison, on assumera sans perte de généralité que tous les graphes simples sont orientés.
- iv.* On dit que le sommet y est **adjacent** au sommet x (et on notera $x \rightarrow y$) si et seulement si $(x, y) \in E$; si x et y sont mutuellement adjacents l'un à l'autre, on dira que x et y sont **voisins** et on notera $x \sim y$. Dans un graphe non-orienté, toutes les paires de sommets reliés par une arête sont respectivement des paires de sommets **voisins**.
- v.* Un **chemin fini de longueur n** dans le graphe G est un vecteur $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ tel que tous les couples ordonnés successifs (x_{i-1}, x_i) sont dans E pour tout $1 \leq i \leq n$.
- vi.* C'est un **cycle** si $x_0 = x_n$; on considère que toutes les permutations circulaires des sommets constituent également le même cycle.

- vii. Un **chemin semi-infini** dans le graphe G est une suite $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}^+}$ de sommets de G telle que les couples ordonnés successifs (x_{i-1}, x_i) sont dans E pour tout $i \in \mathbb{N}$.
- viii. Un chemin est **simple** s'il ne contient aucun sous-cycle; un cycle est simple s'il ne contient aucun sous-cycle propre.
- ix. Un chemin est un **sentier** si'il n'emprunte aucune arête plus d'une fois.

Ces termes et ce vocabulaire seront employés tels que définis ici tout au long de la présente thèse; d'autres définitions pourront également être utilisées, et elles seront précisées aux moments opportuns, le cas échéant.

1.1.3. Marches aléatoires en milieux aléatoires

On suppose une expérience aléatoire et un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, et un espace d'états S discret. On dénote par $\omega \in \Omega$ le résultat de l'expérience aléatoire réalisé. On notera $(G^\omega, \mathbf{p}^\omega)$ un **environnement aléatoire sur S** – il s'agit d'un graphe aléatoire $G^\omega = (S, E^\omega)$ et de probabilités de transition aléatoires $\mathbf{p}^\omega = (p^\omega(x, y))_{x, y \in S}$; G^ω et \mathbf{p}^ω sont mesurables sous \mathbf{P} .

La mesure \mathbf{P} sera appelée la **loi de l'environnement**.

Remarque 1.2. *Nous dénoterons souvent avec un sur-indice ω les quantités aléatoires mesurables par rapport à l'environnement.*

Pour un ω fixé, on considère maintenant $\mathbf{X} = (X_t)_{t \in \mathbb{Z}^+}$ une chaîne de Markov homogène à temps discret sur l'espace d'états S avec probabilités de transition en un pas \mathbf{p}^ω ; \mathbf{X} est dans l'ensemble $S^{\mathbb{Z}^+}$ des suites d'éléments de S , mesurable. On note P_x^ω la mesure de probabilités induite sur $S^{\mathbb{Z}^+}$ par la loi de \mathbf{X} conditionnellement à l'environnement ω et à $X_0 = x$, pour n'importe quel $x \in S$. \mathbf{X} est donc une marche aléatoire sur l'environnement $(G^\omega, \mathbf{p}^\omega)$.

La mesure P_x^ω sera appelée la **loi trempée** pour \mathbf{X} (*quenched law* en anglais), par analogie avec le trempage d'un ouvrage métallurgique dans un bain d'eau froide pour en fixer la forme. Pour tout événement $A \subseteq S^{\mathbb{Z}^+}$, la probabilité $P_x^\omega \{\mathbf{X} \in A\}$ est une variable aléatoire mesurable par rapport à l'environnement ω .

Avec cette définition, il suit naturellement que, pour tout $t \in \mathbb{Z}^+$, on a que la mesure P_x^ω est entièrement caractérisée par les énoncés suivants :

$$P_x^\omega \{X_{t+1} = z \mid X_t = y\} = p^\omega(y, z); \quad P_x^\omega \{X_0 = x\} = 1. \quad (1.1.1)$$

Finalement, on définit la **loi recuite** de (\mathbf{X}, ω) (*annealed law* en anglais, également une analogie avec la métallurgie) \mathbb{P}_x du processus \mathbf{X} (sachant que $X_0 = x$) comme le produit semi-direct des mesures \mathbf{P} et P_x^ω – à savoir : pour toute parties $A \subseteq \Omega$ et $B \subseteq S^{\mathbb{Z}^+}$ mesurables, on définit :

$$\mathbb{P}_x \{\omega \in A, \mathbf{X} \in B\} = \mathbf{E} [P_x^\omega \{\mathbf{X} \in B\} \cdot \mathbb{1}\{\omega \in A\}]. \quad (1.1.2)$$

En particulier,

$$\mathbf{P}\{A\} = \mathbb{P}_x\{A\}$$

pour tout $A \subseteq \Omega$ mesurable et pour tout $x \in S$.

Avec cette construction, on dit que sous \mathbb{P}_x , \mathbf{X} est une **marche aléatoire sur l'environnement aléatoire** $(G^\omega, \mathbf{p}^\omega)$.

1.1.4. Réseaux et marches aléatoires réversibles

Nous introduisons maintenant une analogie puissante entre les circuits électriques et les marches aléatoires sur des graphes, dans le cas particulier où celles-ci sont réversibles. Cette analogie est détaillée dans l'ouvrage *Probability on Trees and Networks* (Lyons, R. et Peres, Y., [32]); nous en présentons ici les aspects de base. Certains résultats utiles sont également cités et montrés dans l'annexe A.

Soit $\mathbf{X} = (X_t)_{t \in \mathbb{Z}^+}$ une chaîne de Markov homogène à temps discret sur l'espace discret des états S , avec les probabilités de transition en un pas $\mathbf{p} = (p(x, y))_{x, y \in S}$; il s'agit d'une marche aléatoire sur le graphe $G = (S, E)$, où $E = \{(x, y) : p(x, y) > 0\}$.

On dit que cette marche aléatoire est **réversible** lorsqu'il existe une fonction $\pi : S \rightarrow \mathbb{R}^+$ non-triviale qui satisfait, pour tous $x, y \in S$:

$$\pi(x)p(x, y) = \pi(y)p(y, x); \quad (1.1.3)$$

Remarque 1.3. *L'appellation « réversible » provient du fait que si, pour $N \in \mathbb{N}$ fixé, on définit $Y_k = X_{N-k}$ pour $0 \leq k \leq N$, alors $\mathbf{Y}_{\leq N} = (Y_k)_{0 \leq k \leq N}$ a la même distribution que \mathbf{X} en régime stationnaire. Intuitivement, cela signifie que « l'inversion temporelle » de \mathbf{X} a la même loi que \mathbf{X} . Autrement dit, en régime stationnaire, il serait impossible de distinguer un film de la progression de \mathbf{X} d'un même film joué à l'envers.*

Remarque 1.4. *On note en outre que lorsque \mathbf{X} est une marche aléatoire réversible, le graphe sous-jacent G peut être vu comme un graphe non-orienté, puisque E est symétrique; en effet, par (1.1.3), $p(x, y) > 0$ si et seulement si $p(y, x) > 0$.*

Le théorème 1.1 donne le *critère de Kolmogorov* pour les marches aléatoires réversibles; le corollaire 1.1 donne une conséquence de ce critère pratique pour les marches sur des arbres. (Voir par exemple Grimmett et Stirzaker [22], section 6.5) :

Théorème 1.1 (Critère de réversibilité de Kolmogorov). *Soit \mathbf{X} une marche aléatoire sur (G, \mathbf{p}) . Alors \mathbf{X} est réversible si et seulement si, pour tout cycle $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, x_0)$ dans G , on a*

$$p(x_0, x_1)p(x_1, x_2)p(x_2, x_3) \cdots p(x_n, x_0) = p(x_0, x_n)p(x_n, x_{n-1})p(x_{n-1}, x_{n-2}) \cdots p(x_1, x_0); \quad (1.1.4)$$

Autrement dit, la probabilité de parcourir le cycle est la même dans les deux sens.

Corollaire 1.1. *Il est suffisant de vérifier le critère de réversibilité de Kolmogorov seulement pour les cycles simples dont toutes les arêtes sont distinctes. En particulier, lorsque le graphe G est un arbre (ou une forêt, qui ne contient donc aucun tel cycle), le critère est trivialement vérifié.*

Donc, si \mathbf{X} est une marche aléatoire sur l'environnement (G, \mathbf{p}) où G est un arbre, alors \mathbf{X} est réversible.

La fonction π sera appelée **mesure invariante**, ou **mesure stationnaire**; elle satisfait les équations de stationnarité – à savoir :

$$\pi(y) = \sum_{x \in S} \pi(x)p(x, y). \quad (1.1.5)$$

On peut ainsi définir une fonction $c : S \times S \rightarrow \mathbb{R}^+$, avec :

$$c(x, y) = \pi(x)p(x, y). \quad (1.1.6)$$

Par définition de π , c est une fonction symétrique puisque $c(x, y) = c(y, x)$; en particulier, en se rappelant que $E \in S \times S$, on a donc que $c(e) = c(-e)$ pour toute arête e .

À l'inverse, étant donné un graphe $G = (S, E)$ non-orienté (E symétrique) et une fonction symétrique $c : S \times S \rightarrow \mathbb{R}^+$ supportée sur E (c'est-à-dire que $c(x, y) = 0$ pour tout $x, y \notin E$, et $c(e) = c(-e)$ pour tout $e \in E$), alors on peut définir une marche aléatoire réversible sur G . On choisit d'abord la fonction $\pi : S \rightarrow \mathbb{R}^+$ avec (à condition que la sommation converge pour tous $x \in S$ – on dit alors que le réseau (G, c) est *localement fini*) :

$$\pi(x) = \sum_{y: x \sim y} c(x, y); \quad (1.1.7)$$

on prend ensuite les probabilités de transition $\mathbf{p} = (p(x, y))_{x, y \in S}$ données par :

$$p(x, y) = \frac{c(x, y)}{\pi(x)}. \quad (1.1.8)$$

Il est trivial de vérifier que \mathbf{p} et π satisfont (1.1.3).

Le couplet (G, c) est appelé **un réseau**. Par analogie avec les réseaux électriques, on appellera $c(x, y)$ la **conductance** entre les *nœuds* x et y .

Cette équivalence entre les réseaux et les marches aléatoires réversibles fait en sorte qu'il sera souvent utile d'utiliser les réseaux pour caractériser la loi d'une marche aléatoire; en particulier, pour nous, cela signifie qu'on pourra souvent décrire la loi de l'environnement aléatoire en décrivant la distribution jointe de la famille de variables aléatoires $(c^\omega(e))_{e \in E}$.

L'analogie avec les réseaux électriques est beaucoup plus profonde que ce que nous avons détaillé ici : les notions de *résistance*, de *différence de potentiel électrique*, de *courant électrique* ainsi que les lois d'Ohm et de Kirchhoff ont toutes un rôle à jouer. Nous ferons

intervenir ces notions lorsqu'elles seront pertinentes; les résultats sont regroupés à l'annexe A.

1.2. Pièges et transience directionnelle

Pour une marche aléatoire \mathbf{X} sur l'environnement aléatoire $(G^\omega, \mathbf{p}^\omega)$, la nature aléatoire de l'environnement fait en sorte que ce dernier contient souvent des « pièges »; c'est-à-dire, des régions de l'environnement dont il est « difficile » (au sens de « peu probable ») de sortir rapidement. On mesurera la « taille » d'un piège à la propension que celui-ci a à ralentir le progrès de la marche aléatoire; plus il est probable que la marche y soit retenue longtemps, plus on dira que celui-ci est « grand ». (On pourra faire des définitions plus précises dans le contexte spécifique d'un modèle particulier.)

Ces « pièges » sont les responsables du phénomène de vieillissement observé dans certains régimes de paramètres pour des modèles de marches aléatoires en milieux aléatoires; en effet, lorsque d'assez grands pièges surviennent avec une assez grande fréquence dans l'environnement, leur effet cumulé ralentit la progression de la marche aléatoire drastiquement. Au chapitre 2, nous présentons plus en détails deux exemples de marches aléatoires en milieux aléatoires, et décrivons comment ces pièges sont formés, et à quelles conditions. Néanmoins il semble utile de donner ici un aperçu rapide du principe à l'aide d'un exemple très simplifié.

1.2.1. Un exemple simple

On considère une marche aléatoire biaisée sur \mathbb{Z} avec probabilités de transition $p(x, x + 1) = 2/3$, et $p(x, x - 1) = 1/3$, mais on fait la petite modification suivante : pour chaque site $x \in \mathbb{Z}$, indépendamment les uns des autres, on place avec probabilité 10^{-2} un « goulot d'étranglement » – si x est un goulot d'étranglement, alors on a plutôt $p(x, x + 1) = 1/101$, et $p(x, x - 1) = 100/101$.



Fig. 1.1. La marche biaisée sur \mathbb{Z} avec goulots d'étranglement. L'épaisseur des flèches indique les probabilités de transition. Les goulots d'étranglement sont en rouge.

Ici, on a donc les probabilités de transition $p^\omega(x, x + 1) = p_x^\omega$ et $p^\omega(x, x - 1) = q_x^\omega$, avec $q_x^\omega = 1 - p_x^\omega$, et

$$\mathbf{P} \left\{ p_x^\omega = \frac{2}{3} \right\} = \frac{99}{100}; \quad \mathbf{P} \left\{ p_x^\omega = \frac{1}{101} \right\} = \frac{1}{100}.$$

Remarque 1.5. Cet exemple est en fait un cas particulier du modèle de marche aléatoire en milieu aléatoire à une dimension présenté à la section 2.2.

La présence d'un seul goulot d'étranglement au sommet x ralentit déjà beaucoup la progression de la marche aléatoire, puisqu'il faudra en moyenne 100 visites en x avant d'atteindre

$x + 1$; toutefois, ce ralentissement est *exponentiel* lorsque ces goulots d'étranglement se succèdent rapidement. Si on suppose qu'il y a N goulots d'étranglement les uns à la suite des autres, par exemple aux sommets $x, x + 1, x + 2, \dots, x + N - 1$ (figure 1.2), alors à chaque visite en x , par un résultat classique pour les marches aléatoires biaisées sur \mathbb{Z} (consulter par exemple Grimmett et Stirzaker [22]), la probabilité (trempee) d'atteindre $x + N$ avant $x - 1$ est donnée par :

$$P_x^\omega \{ \text{toucher } x + N \text{ avant } x - 1 \} = \frac{99}{100^{N+1} - 1} \asymp 100^{-N}.$$



Fig. 1.2. N goulots d'étranglement successifs.

Il faudra donc en moyenne environ 100^N visites en x avant d'atteindre $x + N$ (de l'autre côté). Or, le nombre de goulots d'étranglement successifs est une variable aléatoire géométrique avec probabilité de succès $99/100$, qui dépend de l'environnement! On a donc que $\mathbf{P} \{ N > k \} = (1/100)^k$; dès lors, *pour la loi recuite*, si T est le nombre de visites en x avant d'atteindre l'autre côté du piège, on a :

$$\mathbb{P}_x \{ T > k \} \approx \mathbf{P} \{ 100^N > k \} \asymp k^{-1}.$$

Ce qu'il faut remarquer ici, c'est que *pour la loi recuite*, lorsque la marche arrive pour la première fois à un goulot d'étranglement, la variance (et même l'espérance) du nombre de visites à ce sommet avant d'atteindre l'autre bout est *infinie*. C'est pour cela qu'on parle de « pièges » – l'environnement peut générer des régions dont il est très difficile de s'échapper, ou des barrières très difficiles à traverser.

Dans le cas classique de la marche aléatoire biaisée sur \mathbb{Z} , le processus est transient vers la droite. La vitesse-limite est donnée par $p - q$; ici, ce serait $2/3 - 1/3 = 1/3$. Les fluctuations autour de la trajectoire moyenne seraient normalement distribuées. Toutefois, comme nous le verrons à la section 2.2, la présence des pièges, ici, change complètement la donne. Les limites d'échelle pour les fluctuations – et même le processus-limite – seront complètement différents! En effet (comme nous le verrons en détails à la section 2.2), avec les goulots d'étranglement, la vitesse asymptotique moyenne sera nulle... mais pourtant la marche sera toujours transiente vers la droite!

1.2.2. Transience directionnelle

Finalement, il convient de mentionner brièvement ici la notion de *transience directionnelle*. Nous n'avons pas pu trouver de définition générale de la transience directionnelle

dans la littérature; l'applicabilité du terme semble toujours évidente en contexte. Intuitivement, une marche aléatoire transiente est dite *directionnellement transiente* lorsqu'il existe une *direction* constante (pouvant dépendre des paramètres) telle que la marche aléatoire progressera en moyenne dans cette direction à long terme. Pour notre exemple de marche aléatoire biaisée avec goulots d'étranglement, la direction du biais est évidente. De façon un peu plus générale, la partie 2 porte sur une marche aléatoire biaisée dans \mathbb{Z}^d ; on pourra dire qu'un tel processus est transient dans la direction du vecteur unitaire $\hat{\ell}$ si et seulement si, d'une part, $\liminf_{t \rightarrow \infty} (X_t \cdot \hat{\ell}) = +\infty$, et, d'autre part, la composante du processus qui est orthogonale à $\hat{\ell}$ ne « dérive » pas : $\mathbb{E} [X_t - (X_t \cdot \hat{\ell})\hat{\ell}] = 0$.

De façon intuitive, pour les modèles directionnellement transients, l'intérêt c'est qu'on pourra facilement découper l'environnement aléatoire en sections indépendantes et identiquement distribuées, que la marche visitera en séquence. Cela permettra par exemple, au chapitre 3, de faire la définition des *temps de régénération* qui seront un outil essentiel pour la preuve du vieillissement. De façon plus générale, comme nous allons le voir tout de suite, ça facilite beaucoup la comparaison avec le modèle de pièges de Bouchaud.

1.3. Modèle de Bouchaud et renouvellements

Si on reprend l'exemple simple de la section 1.2.1, on remarque qu'on peut séparer le processus en une séquence d'étapes qui se répètent :

- i.* sur les portions de l'environnement sans goulot d'étranglement, la marche progresse « relativement rapidement » vers la droite, jusqu'à ce que ...
- ii.* la marche rencontre un goulot d'étranglement; alors, elle reste piégée derrière celui-ci pour une certaine durée de temps. Puis ...
- iii.* la marche réussit enfin à quitter le piège, en traversant tous les goulots d'étranglements successifs; elle se retrouve alors de l'autre côté, sur une portion de l'environnement sans goulot d'étranglement, qu'elle peut traverser rapidement. Et on recommence.

Si on fait abstraction de l'étendue et de la structure exacte des « pièges », en ne prêtant attention qu'au temps moyen passé dedans, et si de plus on ignore le temps négligeable passé à se déplacer *entre* les pièges, on obtient un modèle plus simple, qui capture néanmoins la même dynamique de ralentissement.

Bouchaud [9] introduit en 1992 un tel modèle, dans le contexte spécifique de l'étude des verres de spin et du modèle d'énergies aléatoires, pour expliquer le comportement de vieillissement observé dans ce cas. Il s'agit précisément du modèle de pièges successifs que nous venons de décrire.

Plusieurs modèles de MAMA directionnellement transients peuvent être facilement comparés au modèle de pièges de Bouchaud : les « pièges » sont des structures « localisées » (dont l'étendue spatiale est négligeable) qui retiennent longtemps la progression du processus

au même endroit; puis ce dernier se déplace enfin vers un autre piège, et ainsi de suite, de la même façon. La propriété de transience directionnelle est importante pour la comparaison parce qu'elle permet en quelque sorte de négliger « les retours en arrière », et les visites dans des pièges déjà rencontrés précédemment.

Dans cette section, nous présentons une formulation du modèle de Bouchaud en termes de marches aléatoires à temps continu sur un environnement aléatoire dont les sommets sont des pièges caractérisé par la durée moyenne du temps que la marche y passe lors d'une visite.

1.3.1. Le modèle de pièges complètement biaisé

Dans sa plus simple itération, le modèle de pièges de Bouchaud est « complètement biaisé » – c'est-à-dire que chaque piège est visité exactement une fois, puis le système passe au suivant, et ainsi de suite.

Plus précisément, on considère le graphe $G = (S, E)$ où $S = \mathbb{Z}^+$ et $E = \{(n, n+1) : n \in \mathbb{N}\}$. On prend une famille de variables aléatoires positives, indépendantes et identiquement distribuées $(\tau_i^\omega)_{i \in \mathbb{Z}^+}$, avec fonction de répartition complémentaire $\bar{F}(u) = \mathbf{P}\{\tau_0^\omega > u\}$. La variable τ_i^ω représente la « profondeur » de l' i ème piège, mesurée par l'espérance du temps qu'on y passera à chaque visite. Ces variables caractérisent l'environnement aléatoire.

On considère maintenant le processus $\mathbf{X} = (X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$; il s'agit d'un processus stochastique dont la loi trempée (sachant ω) est celle d'une chaîne de Markov homogène à temps continu sur \mathbb{Z}^+ dont les taux générateurs sont

$$G_{i,i}^\omega = -\frac{1}{\tau_i^\omega}; \quad G_{i,i+1}^\omega = \frac{1}{\tau_i^\omega}.$$

La fonction $t \mapsto X_t$ est continue à droite, avec limites à gauche.

Remarque 1.6. *On pourrait reproduire un modèle au comportement similaire pour une marche aléatoire à temps discret en choisissant les probabilités de transition aléatoires $p^\omega(x, x+1) = (1 + \tau_x^\omega)^{-1}$, et $p^\omega(x, x) = 1 - p^\omega(x, x+1)$ pour tous x .*

Le modèle est « complètement biaisé », puisque les seules transitions permises sont vers la droite. Ainsi, au temps t , X_t correspond exactement au nombre de transitions effectuées avant le temps t .

On note T_k le temps de la k ième transition, soit le temps d'arrivée au k ième piège; on note également $U_k = T_{k+1} - T_k$, la durée du séjour au k ième piège, pour $k \in \mathbb{Z}^+$; bien entendu,

$$T_k = \sum_{i=0}^{k-1} U_i.$$

Sous P_0^ω , les U_i sont de lois exponentielles d'espérance τ_i^ω ; autrement dit, si on pose

$$\mathbf{e}_i = \frac{U_i}{\tau_i^\omega},$$

alors sous P_0^ω , $(\mathbf{e}_i)_{i \in \mathbb{Z}^+}$ est une famille de variables aléatoires exponentielles standard indépendantes. Mais, puisque les τ_i^ω sont aussi indépendants et identiquement distribués, il s'ensuit que, sous \mathbb{P}_0 , $(U_i)_{i \in \mathbb{Z}^+}$ est aussi une famille de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, avec fonction de répartition complémentaire

$$\bar{F}_U(u) = \int_0^\infty \bar{F}(u/x) e^{-x} dx.$$

On note en particulier que, puisque $E_0^\omega[\mathbf{e}_i^\gamma] < +\infty$ pour tout $\gamma > 0$, il suit bien sûr que le moment $\mathbb{E}_0[U_i^\gamma]$ est fini si et seulement si $\mathbf{E}[(\tau_i^\omega)^\gamma]$ l'est aussi. Plus précisément, si on suppose $\bar{F}(u) \asymp u^{-\gamma}$ pour un certain exposant $\gamma > 0$, alors on a directement que $\bar{F}_U(u) \asymp u^{-\gamma}$ aussi, et vice-versa.

T_k est une somme de variables aléatoires i.i.d. Si les moments requis existent (espérance et variance), alors avec $\mu = \mathbb{E}_0[U_0]$ et $\sigma^2 = \mathbb{E}_0[(U_0 - \mu)^2]$, on a les limites habituelles pour T_k :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{T_k}{k} = \mu \quad \mathbb{P}_0 - \text{p.s.}; \quad \frac{T_k - k\mu}{\sigma\sqrt{k}} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{(d)} \mathcal{N}, \quad (1.3.1)$$

où on dénote par $\xrightarrow[k \rightarrow \infty]{(d)}$ la convergence en distribution sous \mathbb{P}_0 , et par \mathcal{N} une distribution normale standard.

1.3.2. Processus de renouvellements

On appelle **renouvellement** un événement qui survient de manière répétée, à des intervalles indépendants et identiquement distribués; un **processus de renouvellements** est un processus à temps continu qui compte le nombre de renouvellements survenus. Pour un aperçu de l'historique et des résultats principaux de la théorie des renouvellements, on consultera entre autres les travaux de Doob [10], Feller [17, 18], Lotka [28], etc.

Dans le modèle de pièges complètement biaisé décrit plus haut, \mathbf{X} est un processus de renouvellements sous \mathbb{P}_0 ; le temps du k ième renouvellement est donné par T_k , et on a que

$$X_t = \max \{k \in \mathbb{Z}^+ : T_k \leq t\}.$$

La durée du k ième renouvellement est U_k .

Le théorème 1.2 (voir par exemple Grimmett et Stirzaker [22]) donne les limites d'échelle pour \mathbf{X} à condition que les moments requis existent :

Théorème 1.2. *Si $\mu = \mathbb{E}_0[U_0] < +\infty$, on a :*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X_t}{t} = v \quad \mathbb{P}_0 - \text{p.s.}; \quad (1.3.2)$$

si de plus $\sigma^2 = \mathbb{E}_0[(U_0 - \mu)^2] < +\infty$, on a aussi

$$\frac{X_t - vt}{\sigma v^{3/2} \sqrt{t}} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{(d)} \mathcal{N}, \quad (1.3.3)$$

avec $v = \mu^{-1}$.

Autrement dit, lorsque $\mathbb{E}_0[U_0^2]$ existe, les fluctuations de X_t autour de la trajectoire espérée sont gaussiennes, et de l'ordre de \sqrt{t} , tout comme on peut s'y attendre.

Il sera d'intérêt de considérer également les caractéristiques du piège dans lequel \mathbf{X} se trouve « actuellement »; c'est-à-dire au temps t . On dénotera respectivement par A_t , R_t et V_t l'âge, le **temps de vie restant** et le **temps de vie total** du *renouvellement courant* – soit le dernier à avoir commencé avant le temps t , ou simplement : le (X_t) ième :

$$A_t = t - T_{X_t}; \quad R_t = T_{X_{t+1}} - t; \quad V_t = T_{X_{t+1}} - T_{X_t} = A_t + R_t. \quad (1.3.4)$$

Les processus $(A_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$, $(R_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ et $(V_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ ont la propriété de Markov; le théorème 1.3 donne des limites en loi pour chacun d'eux (sous certaines conditions) (encore une fois, voir par exemple Grimmett et Stirzaker [22]) :

Théorème 1.3. *Soit $\mu = \mathbb{E}_0[U_0] < +\infty$. On suppose de plus que la distribution marginale de U_0 est non-arithmétique ¹.*

Alors il existe un régime stationnaire pour $(A_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$, $(R_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ et $(V_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$; de plus, nous avons les limites en loi suivantes :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0 \{A_t > u\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0 \{R_t > u\} = \frac{1}{\mu} \int_u^\infty \bar{F}_U(x) dx; \quad (1.3.5)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0 \{V_t > u\} = \frac{1}{\mu} \int_u^\infty x dF_U(x), \quad (1.3.6)$$

où $F_U(x) = \mathbb{P}_0 \{U_0 \leq x\}$ et $\bar{F}_U(x) = 1 - F_U(x)$.

Le fait à noter ici, c'est qu'à la limite où t tend vers l'infini, A_t , R_t et V_t convergent en loi *sans remise à l'échelle* lorsque $\mu = \mathbb{E}_0[U_0] < +\infty$. Nous verrons à la section 1.4 que lorsque l'espérance n'existe pas, c'est plutôt A_t/t , R_t/t et V_t/t qui convergent en loi; c'est dans ces cas-là qu'on parle de *vieillesse*.

1.3.3. Le modèle partiellement biaisé.

Le modèle de pièges successifs décrit plus haut est très simple, mais pas nécessairement directement très utile; on le raffine en considérant qu'il est possible de retourner vers l'arrière.

On prend donc le graphe $G = (\mathbb{Z}, E)$ avec $E = \{(x, x \pm 1) : x \in \mathbb{Z}\}$; on choisit une famille de variables aléatoires positives indépendantes et identiquement distribuées $(\tau_x^\omega)_{x \in \mathbb{Z}}$, mesurable par rapport à \mathbf{P} . Sous la loi trempée P_0^ω , le processus $\mathbf{X} = (X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est maintenant

¹Une distribution de probabilités \mathcal{D} sur \mathbb{R} est **arithmétique** si l'ensemble

$$\text{supp } \mathcal{D} + \mathbb{Z} = \{x + n : n \in \mathbb{Z}, x \in \text{supp } \mathcal{D}\}$$

des translatés de son support par \mathbb{Z} n'est pas dense dans \mathbb{R} ; elle est **non-arithmétique** lorsque $\text{supp } \mathcal{D} + \mathbb{Z}$ est dense dans \mathbb{R} .

une chaîne de Markov homogène à temps continu sur \mathbb{Z} avec les taux générateurs

$$G_{x,x-1}^\omega = \frac{1}{\tau_x^\omega(1+\beta)}, \quad G_{x,x}^\omega = -\frac{1}{\tau_x^\omega}, \quad G_{x,x+1}^\omega = \frac{\beta}{\tau_x^\omega(1+\beta)}.$$

Autrement dit, le processus \mathbf{X} procède de la façon suivante sous P_0^ω :

- il s'arrête dans le piège $x \in \mathbb{Z}$ pour une durée de temps aléatoire de loi exponentielle d'espérance τ_x^ω ;
- puis, il passe au piège $x+1$ ou $x-1$ respectivement avec probabilités $1/(1+\beta)$ ou $\beta/(1+\beta)$. Il répète ensuite ces étapes.

On note $T_0 = 0$ et :

$$T_k = \inf \left\{ t > T_{k-1} : X_t \neq X_{T_{k-1}} \right\};$$

T_k est le temps de la k ième transition. Sous $P_0^\omega \{ \cdot \mid X_{T_k} = x \}$, la variable aléatoire $U_k = T_{k+1} - T_k$ suit une loi exponentielle d'espérance τ_x^ω .

On définit le processus $\mathbf{Y} = (Y_k)_{k \in \mathbb{Z}^+}$ avec $Y_k = X_{T_k}$; on remarque que le processus \mathbf{Y} , mesurable sous P_0^ω , est néanmoins complètement indépendant de ω ; il s'agit en fait d'une chaîne de Markov homogène à temps discret sur \mathbb{Z} avec les probabilités de transition $p_{\mathbf{Y}}(i, i+1) = \beta/(1+\beta)$ et $p_{\mathbf{Y}}(i, i-1) = 1/(1+\beta)$; il s'agit d'une marche aléatoire simple biaisée sur \mathbb{Z} . En utilisant des résultats élémentaires sur \mathbf{Y} , on montre le Lemme 1.1, qui donne les conditions pour la transience et la récurrence de \mathbf{X} .

Lemme 1.1. i. *Si $\beta > 1$, alors le \mathbf{X} est transient vers la droite; en particulier :*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X_t = +\infty;$$

ii. *Si $\beta = 1$, alors le processus \mathbf{X} est récurrent nul; on a :*

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} X_t = -\infty, \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} X_t = +\infty;$$

iii. *Si $\beta < 1$, alors le processus \mathbf{X} est transient vers la gauche; en particulier :*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X_t = -\infty.$$

On a, pour une suite $(\mathbf{e}_k)_{k \in \mathbb{Z}^+}$ de variables aléatoires indépendantes exponentielles mesurables sous P_0^ω , et indépendantes de \mathbf{Y} et de ω , on a que :

$$T_k = \sum_{i=0}^{k-1} \tau_{Y_i}^\omega \mathbf{e}_i,$$

et bien sûr cela signifie que, si $\mu = \mathbf{E}[\tau_0^\omega] < +\infty$, alors $\mathbb{E}_0[T_k] = k\mathbf{E}[\tau_0^\omega]$. De plus, lorsque $\beta \neq 1$, les corrélations entre les Y_i décroissent suffisamment rapidement pour qu'on obtienne malgré tout des limites similaires au cas complètement biaisé en appliquant la loi des grands nombres. Si $\sigma^2 = \text{Var}_0[\tau_0^\omega \mathbf{e}_0] < +\infty$, alors de même on obtient une limite similaire que précédemment pour les T_k avec le théorème central limite; on obtient ensuite des résultats pour

X_t par un argument d'inversion, puisque $X_t = Y_{T^{-1}(t)}$, où $T^{-1}(t) = \max \{k \in \mathbb{Z}^+ : T_k \leq t\}$ est l'inverse continu à droite de la fonction $k \mapsto T_k$.

1.4. Loïs stables et subordonateurs

Nous avons montré que lorsque $\mathbf{E}[(\tau_0^\omega)^2] < +\infty$, les limites d'échelle pour T_k et X_t sont données par la loi des grands nombre et le théorème de la limite centrale. En général, dans ce cas, on parle d'un régime de paramètres *balistique* – l'emploi de ce terme est en référence à la *vitesse moyenne asymptotique* qui est non-nulle. On a aussi le résultat suivant (consulter l'ouvrage de Ethier et Kurtz [16]) :

Théorème 1.4. *On considère $\mathbf{X} = (X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ le processus de renouvellements pour le modèle de pièges de Bouchaud complètement biaisé, et $(T_k)_{k \in \mathbb{Z}^+}$ où $T_0 = 0$ et T_k est le temps du k ème renouvellement pour \mathbf{X} . Soient $\mu = \mathbf{E}[\tau_0^\omega] < +\infty$ et $\sigma^2 = \mathbb{V}\text{ar}_0[\tau_0^\omega \mathbf{e}_0] < +\infty$.*

On définit

$$\mathcal{T}_t^N = \frac{T_{\lfloor Nt \rfloor} - \mu Nt}{\sigma \sqrt{N}},$$

et, avec $v = \frac{1}{\mu}$,

$$\mathcal{X}_t^N = \frac{X_{Nt} - vNt}{\sigma v^{3/2} \sqrt{N}}.$$

Alors, alors on a pour tout $M > 0$ les limites en loi suivantes :

$$\begin{aligned} (\mathcal{T}_t^N)_{0 \leq t \leq M} &\xrightarrow[N \rightarrow \infty]{(d)} (\mathcal{W}_t)_{0 \leq t \leq M} \\ (\mathcal{X}_t^N)_{0 \leq t \leq M} &\xrightarrow[N \rightarrow \infty]{(d)} (\mathcal{W}_t)_{0 \leq t \leq M}, \end{aligned} \tag{1.4.1}$$

où $(\mathcal{W}_t)_{0 \leq t \leq M}$ est un processus de Wiener, et la convergence est dans la topologie de Skorokhod.²

Dans ce qui suit, nous explorons les limites d'échelle pour les processus \mathbf{X} et $(T_k)_{k \in \mathbb{Z}^+}$ lorsque les périodes de renouvellement $(U_k)_{k \in \mathbb{Z}^+}$ sont indépendantes et identiquement distribuées, et que

$$\mathbb{P}_0 \{U_k > u\} \asymp u^{-\gamma}$$

pour un certain $\gamma \in (0, 1)$; ces limites d'échelle sont celles auxquelles on s'attend pour les marches aléatoires biaisées en milieux aléatoires très irréguliers, comme ceux des sections 2.1 et 2.2.

La discussion qui suit reprend des parties des ouvrages de Galambos [21] et Durrett [11].

1.4.1. Loïs stables

Soit \mathcal{D} une distribution de probabilités sur \mathbb{R} , $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille de variables aléatoires i.i.d. de distribution marginale \mathcal{D} pour tout $i \in \mathbb{N}$ et $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

²Consulter Ethier et Kurtz [16], Skorokhod [39] à ce sujet.

On dit que la distribution \mathcal{D} est **stable** lorsqu'il existe des suites de nombres $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que

$$\frac{S_n - b_n}{a_n} \sim \mathcal{D}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Le théorème 1.5 (voir par exemple l'ouvrage de Galambos [21]) donne une caractérisation complète des distributions stables.

Théorème 1.5. *Les distributions stables sont la famille de distributions $\mathcal{S}(\alpha, \beta, \mu, c)$ dont les fonctions caractéristiques sont données par :*

$$\phi(t) = \mathbb{E} \left[e^{it\mathcal{S}(\alpha, \beta, \mu, c)} \right] = e^{it\mu - |ct|^\alpha (1 + i\beta H(t, \alpha))}, \quad (1.4.2)$$

où

$$H(t, \alpha) = \operatorname{sgn} t \cdot \begin{cases} \tan\left(\frac{1}{2}\pi\alpha\right) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ -\frac{2}{\pi} \log |t| & \text{sinon.} \end{cases}$$

avec $\alpha \in (0, 2]$, $\beta \in [-1, 1]$, $c > 0$ et $\mu \in \mathbb{R}$. i est l'unité imaginaire ($i^2 = -1$).

Par exemple, $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2) = \mathcal{S}(2, 0, \mu, \frac{1}{2}\sigma^2)$; lorsque $\alpha = 1$, $\beta = 0$, on a affaire à une distribution de Cauchy.

Les paramètres μ et c contrôlent la position et la largeur du « pic central » de la distribution; α contrôle le comportement asymptotique et β contrôle « l'équilibre » relatif des queues à gauche et à droite de la distribution; la figure 1.3 illustre les effets des changements de différents paramètres. La figure 1.3a en particulier montre l'influence du paramètre α sur la forme des queues des distributions stables (en lois de puissances) à l'aide d'échelles logarithmiques.

Si les X_i sont i.i.d. et de distribution \mathcal{D} pour tout i et $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ satisfait plutôt que

$$\frac{S_n - b_n}{a_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} \mathcal{S}(\alpha, \beta, \mu, c),$$

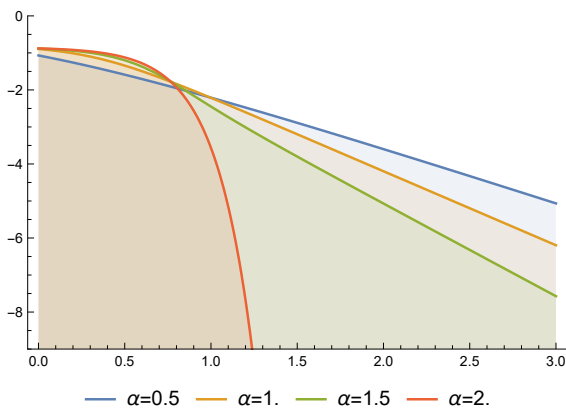
alors on dit que la distribution \mathcal{D} est **dans le domaine d'attraction de $\mathcal{S}(\alpha, \beta, \mu, c)$** . En particulier, toutes les distributions de second moment fini sont dans le domaine d'attraction de $\mathcal{N}(0, 1)$.

1.4.2. Queues à variation régulière et limites stables.

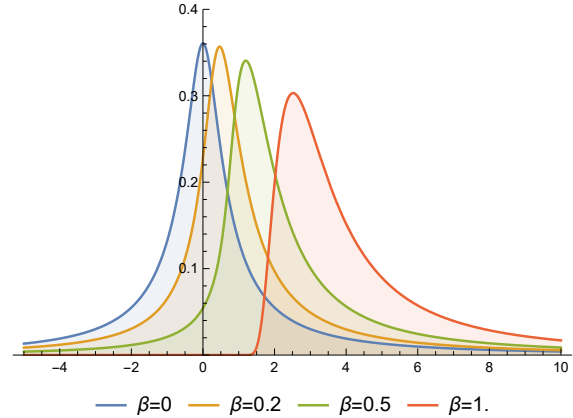
Soit \mathcal{D} une distribution sur \mathbb{R} , $F(x)$ la fonction de répartition associée à cette distribution et $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$ la fonction de répartition complémentaire. On définit la **queue** de \mathcal{D} $Q : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ par :

$$Q(x) = \lim_{y \rightarrow x^+} F(-y) + \bar{F}(x). \quad (1.4.3)$$

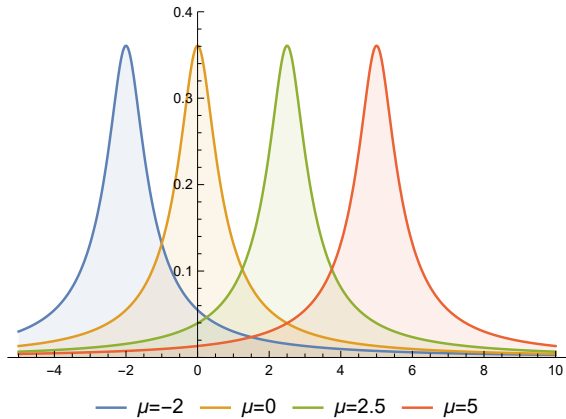
Le théorème 1.6 donne des critères pour les domaines d'attractions de lois stables (on consultera l'ouvrage de Durrett [11]) :



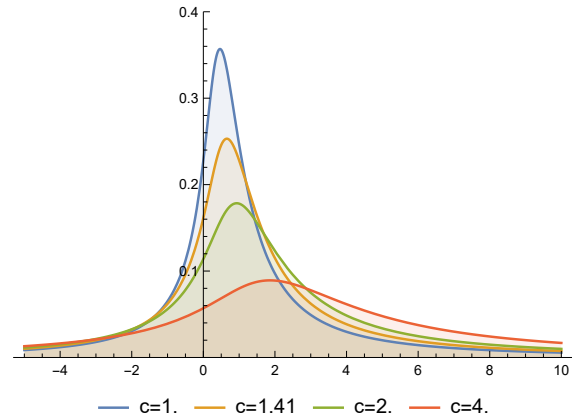
(a) $\beta = 0, \mu = 0, c = 1$.
Axes logarithmiques (base 10)



(b) $\alpha = 0,8, \mu = 0, c = 1$.



(c) $\alpha = 0,8, \beta = 0, c = 1$



(d) $\alpha = 0,8, \beta = 0,2, \mu = 0$

Fig. 1.3. Impact des paramètres α, β, μ et c sur la densité des lois stables.

Théorème 1.6. Soit \mathcal{D} une distribution quelconque, avec fonction de répartition F , fonction de répartition complémentaire \bar{F} et queue $Q(x) = \lim_{y \rightarrow x^+} F(-y) + \bar{F}(x)$.

De plus, soient $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille i.i.d. de variables aléatoires de distribution marginale \mathcal{D} et $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

On suppose que Q est une fonction à variation régulière³ pour un exposant $-\alpha$, avec $\alpha \in (0, 2)$, et que $\lim_{x \rightarrow \infty} \bar{F}(x)/Q(x)$ existe.

Alors, il existe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que

$$\frac{S_n - b_n}{a_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} \mathcal{S}(\alpha, \beta, \mu, c) \quad (1.4.4)$$

³Une fonction $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ est dite à **variation régulière** d'indice α lorsque

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(tx)}{f(x)} = t^\alpha.$$

De plus amples explications et théorèmes sur les fonctions à variation régulière sont reportés à l'annexe B.

pour certains paramètres $\beta \in [-1, 1]$, $\mu \in \mathbb{R}$, $c > 0$.

En fait, les suites sont données par

$$a_n = \inf \left\{ x \in \mathbb{R}^+ : Q(x) < n^{-1} \right\} := \text{Inv}_Q(n); \quad b_n = n \int_0^{a_n} x dQ(x). \quad (1.4.5)$$

Remarque 1.7. Lorsque $\alpha < 1$, on peut prendre $b_n = 0$ puisque ces quantités sont de toute façon négligeables comparativement à a_n .

Remarque 1.8. On remarque que le domaine d'attraction de la distribution normale $\mathcal{N}(0, 1)$ est donc beaucoup plus vaste; il suffit que $\int_{-x}^x t^2 dF(t)$ soit une fonction à variation lente en x pour que la distribution \mathcal{D} soit dans le domaine d'attraction de $\mathcal{N}(0, 1)$ (voir Galambos [21], chap. 6, théorème 11). Par contre, les suites constantes d'échelle (a_n) et (b_n) ne seront pas forcément toujours les mêmes.

Le théorème 1.6 indique seulement le paramètre α – souvent appelé **l'indice** – de la distribution-limite stable; les autres paramètres sont, en général, déterminés par la forme spécifique de \mathcal{D} .

Toutefois, dans le cas particulier où \mathcal{D} est supportée entièrement sur \mathbb{R}^+ , on sait que la distribution-limite sera **complètement asymétrique** – c'est-à-dire que l'on aura :

$$\frac{S_n - b_n}{a_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} \mathcal{S}(\alpha, 1, \mu, c).$$

1.4.3. Limites pour le modèle de pièges

Dans le modèle de pièges de Bouchaud totalement biaisé, si on suppose que les variables (U_k) ont la fonction de répartition recuite $F_U(x) = \mathbb{P}_0 \{U_k \leq x\}$, avec

$$\bar{F}_U(x) \sim Cx^{-\gamma},$$

alors, on aura les limites suivantes :

- si $\gamma \in (0, 1)$, on a la limite :

$$\frac{T_k}{k^{1/\gamma}} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{(d)} \mathcal{S}(\gamma, 1, \mu, c); \quad (1.4.6)$$

par un argument d'inversion relativement simple, on trouve que

$$\frac{X_t}{t^\gamma} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{(d)} \mathcal{S}(\gamma, 1, \mu, c)^{-\gamma}. \quad (1.4.7)$$

- si $\gamma \in (1, 2)$, le premier moment existe. On peut donc appliquer la loi des grands nombres :

$$\frac{T_k}{k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} \mu := \mathbf{E}[\tau_0^\omega]; \quad \frac{X_t}{t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} v := \mu^{-1}. \quad (1.4.8)$$

Dans ce cas, le second moment des $(U_k)_{k \in \mathbb{Z}^+}$ n'existe cependant pas; toutefois, puisque \bar{F}_U est asymptotiquement équivalente à une loi de puissance γ , le théorème 1.6 donne

la limite en loi suivante pour les fluctuations de T_k autour de $k\mu$:

$$\frac{T_k - k\mu}{k^{1/\gamma}} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{(d)} \mathcal{S}(\gamma, 1, m, c) \quad (1.4.9)$$

pour certains paramètres m, c . Par un argument d'inversion encore une fois, on obtient les fluctuations pour le processus lui-même :

$$\frac{X_t - tv}{t^{1/\gamma}} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{(d)} -v^{1+1/\gamma} \mathcal{S}(\gamma, 1, m', c'). \quad (1.4.10)$$

pour certains paramètres m' et c' .

Remarque 1.9. *Le cas $\alpha = 1$ peut également être traité – consulter par exemple l'ouvrage de Petrov [35].*

Remarquez que lorsque $\gamma < 1$, la vitesse moyenne asymptotique est nulle! C'est ce qu'on appelle donc le régime de paramètres **sous-balistique**.

On note le signe négatif pour la distribution limite des fluctuations de X_t lorsque $\gamma \in (1, 2)$; cela signifie qu'à la limite lorsque t est grand, X_t se trouve généralement « derrière » sa position espérée vt . Ceci s'explique par le ralentissement causé par les pièges, fréquemment assez profonds. Même si la vitesse asymptotique n'est pas nulle, l'influence des pièges est donc ressentie dans ces fluctuations.

1.4.4. Processus de Lévy et subordonateurs stables.

On cherche maintenant à obtenir une limite en distribution pour *les processus* $(T_k)_{k \in \mathbb{Z}^+}$ et $(X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$, après remise à l'échelle. Encore une fois, puisque les variables aléatoires $(U_k)_{k \in \mathbb{Z}^+}$ n'ont pas de second (ou même de premier) moment, on ne peut pas conclure à la convergence vers un processus de Wiener; il faut donc élargir la classe de processus stochastiques considérés.

Soit $\mathcal{Y} = (\mathcal{Y}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ un processus stochastique à temps continu. \mathcal{Y} est un **processus de Lévy** si :

- i.* $\mathcal{Y}_0 = 0$ p.s.;
- ii.* la fonction $t \mapsto \mathcal{Y}_t$ est càdlàg;⁴
- iii.* les incréments sont indépendants – plus précisément, pour toute suite croissante $t_0 = 0, t_1, t_2, t_3, \dots$, la famille $(\mathcal{Y}_{t_i} - \mathcal{Y}_{t_{i-1}})_{i \in \mathbb{N}}$ est une famille de variables indépendante;
- iv.* les incréments sont stationnaires – plus précisément : $\mathcal{Y}_t - \mathcal{Y}_s$ a la même distribution que \mathcal{Y}_{t-s} .

C'est un **processus de Lévy α -stable** (avec $\alpha \in (0, 2]$) si $\mathcal{Y}_t \sim t^{1/\alpha} \mathcal{S}(\alpha, \beta, \mu, c)$ pour certains paramètres β, μ, c .

⁴Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est **càdlàg** (c'est-à-dire : continue à droite, avec limite à gauche) si :

- i.* $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ existe pour tout a ;
- ii.* $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ pour tout a .

Un processus de Lévy strictement positif (donc croissant) est appelé un **subordonateur**; Le théorème 1.7 donne que les subordonateurs stables sont les limites d'échelle pour les marches aléatoires à temps discret avec des pas à queues lourdes (consulter Ethier et Kurtz [16]) :

Théorème 1.7. *Soit \mathcal{D} une distribution supportée sur \mathbb{R}^+ ; soit F sa fonction de répartition, \bar{F} sa fonction de répartition complémentaire, et la queue $Q(x) = \lim_{y \rightarrow x^+} F(-y) + \bar{F}(x)$ telle que $Q(x) \sim Cx^{-\alpha}$ pour un certain $C > 0$ et $\alpha \in (0, 2]$ quand $x \rightarrow \infty$.*

Soient $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées avec distribution marginale \mathcal{D} , et soit $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

Dans les deux cas suivants :

- i. *Si $\alpha < 1$ et $S_t^{(N)} = N^{-1/\alpha} S_{\lfloor Nt \rfloor}$;*
- ii. *Si $\alpha > 1$ et $S_t^{(N)} = N^{-1/\alpha} (S_{\lfloor Nt \rfloor} - \mu Nt)$, avec $\mu = \int_0^\infty x dF(x)$;*

alors

$$(S_t^{(N)})_{0 \leq t \leq M} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{(d)} (\mathcal{Y}_t)_{0 \leq t \leq M}$$

pour tous $M > 0$, où $(\mathcal{Y}_t)_{0 \leq t \leq M}$ est un processus de Lévy α -stable. La convergence en distribution est dans la topologie de Skorokhod.⁵

Pour le modèle de Bouchaud. Dans le cas du modèle de pièges, on obtient les limites d'échelle suivantes pour les processus :

- Dans le cas où $\gamma \in (0, 1)$, avec

$$T_t^{(N)} = \frac{T_{\lfloor Nt \rfloor}}{N^{1/\gamma}},$$

on a que

$$(T_t^{(N)})_{0 \leq t \leq M} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{(d)} (\mathcal{Y}_t)_{0 \leq t \leq M},$$

pour tous M , avec $(\mathcal{Y}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ un subordonateur γ -stable. La convergence est dans la topologie M_1 de Skorokhod sur l'espace des fonctions càdlàg sur $[0, M]$.

De même, avec

$$X_t^{(N)} = \frac{X_{\lfloor Nt \rfloor}}{N^\gamma},$$

on a que

$$(X_t^{(N)})_{0 \leq t \leq M} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{(d)} (\mathcal{Z}_t)_{0 \leq t \leq M},$$

pour tous $M > 0$. Ici, le processus $(\mathcal{Z}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est l'inverse d'un subordonateur γ -stable; c'est logique, puisqu'en effet, X_t est l'inverse continu à droite de la suite T_k . La convergence est dans la topologie uniforme sur l'espace des fonctions càdlàg sur $[0, M]$.

⁵Consulter Ethier et Kurtz [16], Skorokhod [39] à ce sujet.

- Dans le cas où $\gamma \in (1, 2)$, avec $\mu = \mathbf{E}[\tau_0^\omega]$ et $v = \mu^{-1}$, on a que

$$\left(\frac{T_{\lfloor Nt \rfloor} - \mu Nt}{N^{1/\gamma}} \right)_{0 \leq t \leq M} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{(d)} (\mathcal{Y}_t)_{0 \leq t \leq M},$$

pour tous M , où $(\mathcal{Y}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est un subordonateur γ -stable. La convergence est dans la topologie M_1 de Skorokhod sur l'espace des fonctions càdlàg sur $[0, M]$.

On a aussi que

$$\left(\frac{X_{Nt} - vNt}{N^{1/\gamma}} \right)_{0 \leq t \leq M} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{(d)} (-v^{1+1/\gamma} \mathcal{Y}_t)_{0 \leq t \leq M},$$

où $(\mathcal{Y}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est un subordonateur γ -stable; ici la convergence est dans la topologie uniforme.⁶

1.5. Vieillessement et loi de l'arc-sinus

Dans la section 1.4, nous avons présenté les résultats permettant de trouver les limites d'échelle pour le modèle de pièges de Bouchaud. On rappelle maintenant que ce processus est un processus de renouvellements. En particulier, on rappelle la définition de l'âge et des temps de vie restants et total :

$$A_t = t - T_{X_t}; \quad R_t = T_{X_{t+1}} - t; \quad V_t = A_t + R_t = T_{X_{t+1}} - T_{X_t}.$$

L'objectif de cette dernière section sera d'utiliser ces limites d'échelle, et en particulier les résultats sur les subordonateurs stables, pour tenter d'obtenir des limites d'échelle pour ces variables.

1.5.1. Pour les subordonateurs stables

Si $(\mathbf{Y}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est un subordonateur stable, sa trajectoire est constituée de segments croissants continus, entrecoupés de sauts dont la distribution est donnée par μ . Pour un seuil $y > 0$, on définit le temps d'atteinte

$$T_y = \inf \{t \geq 0 : \mathcal{Y}_t \geq y\};$$

il s'agit du premier instant où on dépasse le seuil y . Puisque $t \mapsto \mathcal{Y}_t$ est càdlàg, forcément $\mathcal{Y}_{T_y} \geq y$. On notera aussi

$$\mathcal{Y}_{T_y^-} = \lim_{t \rightarrow T_y^-} \mathcal{Y}_t,$$

la position du subordonateur « juste avant qu'on dépasse y . »

⁶Consulter Ethier et Kurtz [16] concernant les topologies M_1 de Skorokhod et uniforme sur l'espace des fonctions càdlàg sur $[0, M]$.

Pour les subordinateurs stables sans dérive constante, le sauts sont la seule façon de franchir le seuil y . On conclue donc que $\mathcal{Y}_{T_y^-} < y$ presque sûrement; le théorème 1.8 donne un résultat sur la distribution de $\mathcal{Y}_{T_y^-}$:

Théorème 1.8. *Soit $(\mathcal{Y}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ un subordinateur α -stable. Alors, pour tout y , nous avons :*

$$\mathbb{P} \left\{ \frac{\mathcal{Y}_{T_y^-}}{y} \leq u \right\} = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_0^u z^{\alpha-1} (1-z)^{-\alpha} dz. \quad (1.5.1)$$

Ce résultat est appelé « la loi de l'arc-sinus généralisée ».

1.5.2. Pour le modèle de pièges complètement biaisé

Nous allons utiliser ce résultat pour obtenir une limite d'échelle pour la variable A_t dans le modèle de pièges de Bouchaud complètement biaisé dans le cas où $\gamma \in (0, 1)$.

Théorème 1.9. *On a la limite en distribution suivante pour A_t :*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left\{ 1 - \frac{A_t}{t} \leq u \right\} = \frac{\sin \pi \gamma}{\pi} \int_0^u z^{\gamma-1} (1-z)^{-\gamma} dz. \quad (1.5.2)$$

DÉMONSTRATION. Dans le cas où $\gamma \in (0, 1)$, le processus

$$T_t^{(N)} = \frac{T_{\lfloor Nt \rfloor}}{N^{1/\gamma}}$$

converge vers un subordinateur α -stable.

Avec un seuil y fixé, on écrit $\xi_y^{(N)} = \min x \in \{k/N : k \in \mathbb{N}\} : T_x^{(N)} \geq y$, et $\xi_y^{(N),-} = \xi_y^{(N)} - \frac{1}{N}$. On a alors que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left\{ \frac{T_{\xi_y^{(N),-}}^{(N)}}{y} \leq u \right\} = \frac{\sin \pi \gamma}{\pi} \int_0^u z^{\gamma-1} (1-z)^{-\gamma} dz.$$

Mais $\xi_y^{(N)} = \min \{x \in \{k/N : k \in \mathbb{N}\} : T_k > N^{1/\gamma} y\} = \frac{1}{N} (X_{N^{1/\gamma} y} + 1)$, et $\xi_y^{(N),-} = \frac{1}{N} X_{N^{1/\gamma} y}$. Donc, il suit que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left\{ \frac{T_{X_{N^{1/\gamma} y}}}{N^{1/\gamma} y} \leq u \right\} = \frac{\sin \pi \gamma}{\pi} \int_0^u z^{\gamma-1} (1-z)^{-\gamma} dz;$$

ou, formulé autrement :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left\{ 1 - \frac{A_t}{t} \leq u \right\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left\{ \frac{T_{X_t}}{t} \leq u \right\} = \frac{\sin \pi \gamma}{\pi} \int_0^u z^{\gamma-1} (1-z)^{-\gamma} dz.$$

Autrement dit, nous avons trouvé une limite en loi, non pas pour A_t (comme dans le cas où $\mu = \mathbf{E}[\tau_0^\omega] < +\infty$), mais pour A_t/t . \square

C'est ce dernier résultat qui est caractéristique du vieillissement; en effet, ce que ce résultat montre, c'est que l'âge du dernier renouvellement est proportionnel à l'âge du processus en entier! Donc, le système « vieillit » !

Finalement, pour le modèle de Bouchaud complètement biaisé, on parvient facilement à formuler cette limite en termes de X_t et X_{ut} ; il suffit en effet de constater que $T_{X_t} < ut$ est exactement équivalent à $X_{ut} = X_t$. On a donc :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P} \{X_{ut} = X_t\} = \frac{\sin \pi \gamma}{\pi} \int_0^u z^{\gamma-1} (1-z)^{-\gamma} dz. \quad (1.5.3)$$

En général, les résultats de vieillissement auront des formes similaires à celle de l'équation (1.5.3).

Chapitre 2

Exemples de modèles

Dans ce chapitre, nous présentons deux exemples qui illustrent les notions introduites au chapitre 1 : la marche aléatoire sur un arbre de Bienaymé, et la marche aléatoire sur l'environnement aléatoire en 1 dimension. Pour chacun, nous présentons : des résultats préliminaires sur le comportement du modèle, les principaux paramètres et les régimes d'intérêt, le mécanisme qui engendre les « pièges » et des estimés du temps passé dans ceux-ci – donnant notamment les exposants caractéristiques attendus – et, pour la marche aléatoire en milieu aléatoire à 1 dimension, nous présentons les limites d'échelles et un résultat de vieillissement.

2.1. La marche aléatoire sur un arbre de Bienaymé

2.1.1. L'arbre de Bienaymé

Un *arbre de Bienaymé* est un arbre de descendance d'un processus branchant, c'est-à-dire un processus stochastique dans lequel les individus d'une population se reproduisent une fois chacun, produisant respectivement des nombres aléatoires d'enfants, indépendants et identiquement distribués.¹

Soit $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow [0, 1]$ la fonction de masse pour la distribution de probabilités du nombre d'enfants engendrés par un individu; on note

$$\psi(s) = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} f(k)s^k \quad (2.1.1)$$

la *fonction génératrice des probabilités* de la distribution du nombre d'enfants. L'espérance est donnée par $\mu = \psi'(1) = \lim_{s \rightarrow 1^-} \psi'(s)$.

On dit que le processus branchant « survit » s'il est infini; on dit qu'il « s'éteint » ou qu'il « meure » s'il est fini, et on note q la probabilité d'extinction du processus; selon un résultat

¹Ces arbres aléatoires sont plus largement connus sous la nomenclature « arbres de Galton-Watson »; toutefois, nous avons ici choisi d'emprunter l'appellation « arbre de Bienaymé », pour les raisons relevées entre autres par Addario-Berry, Brandenberger, Handman et Kerriou [1, 26].

classique (voir par exemple *Probability and Random Processes*, de Grimmett et Stirzaker [22]) on distingue trois cas non-triviaux (on ignore le cas où $f(1) = 1$) :

- le régime **sous-critique** : $\mu < 1$; dans ce cas, $q = 1$, et la taille totale de la population (en nombre d'individus) est d'espérance finie.
- le régime **critique** : $\mu = 1$; dans ce cas, $q = 1$ (sauf si $f(1) = 1$), mais la taille totale de la population est d'espérance infinie.
- le régime **sur-critique** : $\mu > 1$; dans ce cas, $q < 1$ et satisfait l'équation suivante :

$$q = \psi(q) \quad (2.1.2)$$

Remarque 2.1. *On remarque que si $f(0) = 0$, tous les individus doivent avoir au moins un enfant. Dans ce cas, on a nécessairement immédiatement que $\mu \geq 1$, avec l'égalité si et seulement si $f(1) = 1$. Dans le cas où $f(1) = 1$, l'analyse est triviale : chaque individu a exactement un enfant, et G^ω est isomorphe à une chaîne demi-infinie où les sommets sont les naturels, et on place des arêtes entre n et $n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Ce cas porte donc peu d'intérêt; dans ce qui suit, on suppose que $f(1) < 1$. On s'intéressera également particulièrement au cas où $f(0) > 0$.

La figure 2.1 montre les 20 premières générations d'un arbre de Bienaymé.

On considère S l'ensemble des mots de longueur finie formés à partir de l'alphabet \mathbb{N} , incluant le mot vide (de longueur 0), noté \emptyset :

$$S = \{(v_1, v_2, v_3, \dots, v_n) : v_i \in \mathbb{N} \text{ pour tous } i \text{ de } 1 \text{ à } n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset\}. \quad (2.1.3)$$

Si $m_1 = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_i), m_2 = (w_1, w_2, w_3, \dots, w_j)$ sont dans S , on dénotera par $(m_1, m_2) = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_i, w_1, w_2, w_3, \dots, w_j)$ la *concaténation* de ces deux mots; le résultat est aussi dans S . Chaque mot dans S représente un individu potentiel de la population. Il sera également utile d'introduire l'application $\bar{\cdot} : S \setminus \{\emptyset\} \rightarrow S$, qui tronque le dernier caractère d'un mot : $(m, \bar{\cdot}(i)) = m$ pour tout $m \in S$ et $i \in \mathbb{N}$.

On note $\xi^\omega = (\xi_m^\omega)_{m \in S}$ une famille de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées dont la loi marginale est donnée par la fonction de masse f ; on note $G^\omega = (S, E^\omega)$ le graphe dont les sommets sont les mots (dans S), et où les arêtes sont données par

$$E^\omega = \bigcup_{m \in S} \{(m, (i)) : 1 \leq i \leq \xi_m^\omega\}. \quad (2.1.4)$$

Intuitivement : si le parent m a ξ_m^ω enfants, ses enfants seront les sommets $(m, (1)), (m, (2)), (m, (3)), \dots, (m, (\xi_m^\omega))$; on a donc placé une arête reliant le sommet m à ses ξ_m^ω enfants.

Le graphe G^ω possède une infinité de composantes connexes; pour nos fins, l'arbre de Bienaymé sera simplement la composante connexe de G^ω qui contient le mot vide \emptyset ; on la notera $G_0^\omega = (S_0^\omega, E_0^\omega)$; G_0^ω sera l'environnement aléatoire sur lequel on étudiera une marche aléatoire.

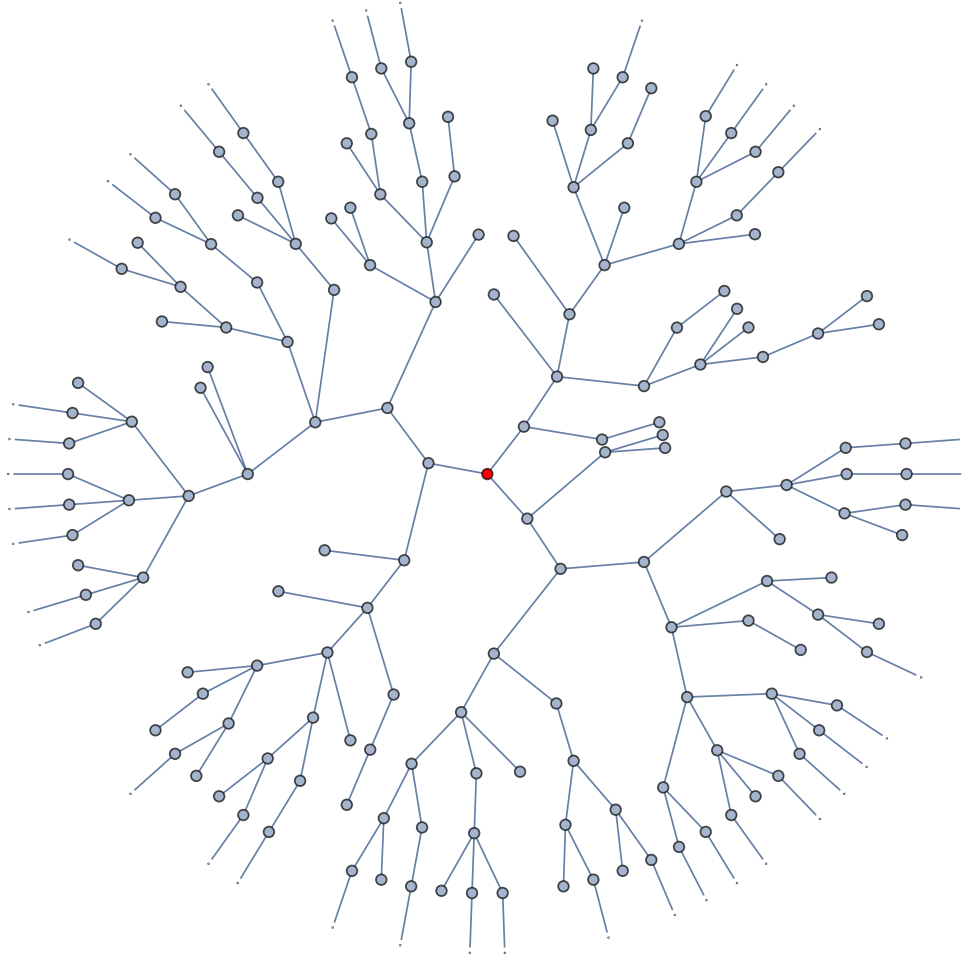


Fig. 2.1. Les 7 premières générations d'un arbre de Bienaymé avec $f(0) = f(1) = f(2) = f(3) = \frac{1}{4}$. La racine de l'arbre est en rouge. Nous avons marqué avec des demi-arêtes les sommets de la dernière génération qui ont au moins un enfant dans la génération suivante.

2.1.2. La condition de survie et une décomposition utile

Le problème, c'est que présentement, notre loi pour ω permet que G_0^ω soit fini; on voudrait étudier seulement les processus dans le cas où l'arbre est *infini*; c'est-à-dire : conditionnellement à ce que le processus survive.

On notera \mathbf{P}_∞ la mesure de probabilité \mathbf{P} conditionnelle à l'événement $\{|S_0^\omega| = +\infty\}$, et $\bar{\mathbf{P}}$ la mesure de probabilité \mathbf{P} conditionnelle à l'événement $\{|S_0^\omega| < +\infty\}$. La proposition 2.1 permet de construire un arbre aléatoire ayant la loi de G_0^ω sous \mathbf{P}_∞ , au moyen d'une décomposition de l'arbre en deux parties :

- Une *épine dorsale* (*backbone* en anglais) infinie, constituée de tous les sommets dont la descendance est infinie;
- des *branches* finies attachées aux sommets de l'épine dorsale.

La figure 2.2 montre l'épine dorsale pour l'arbre de la figure 2.1.

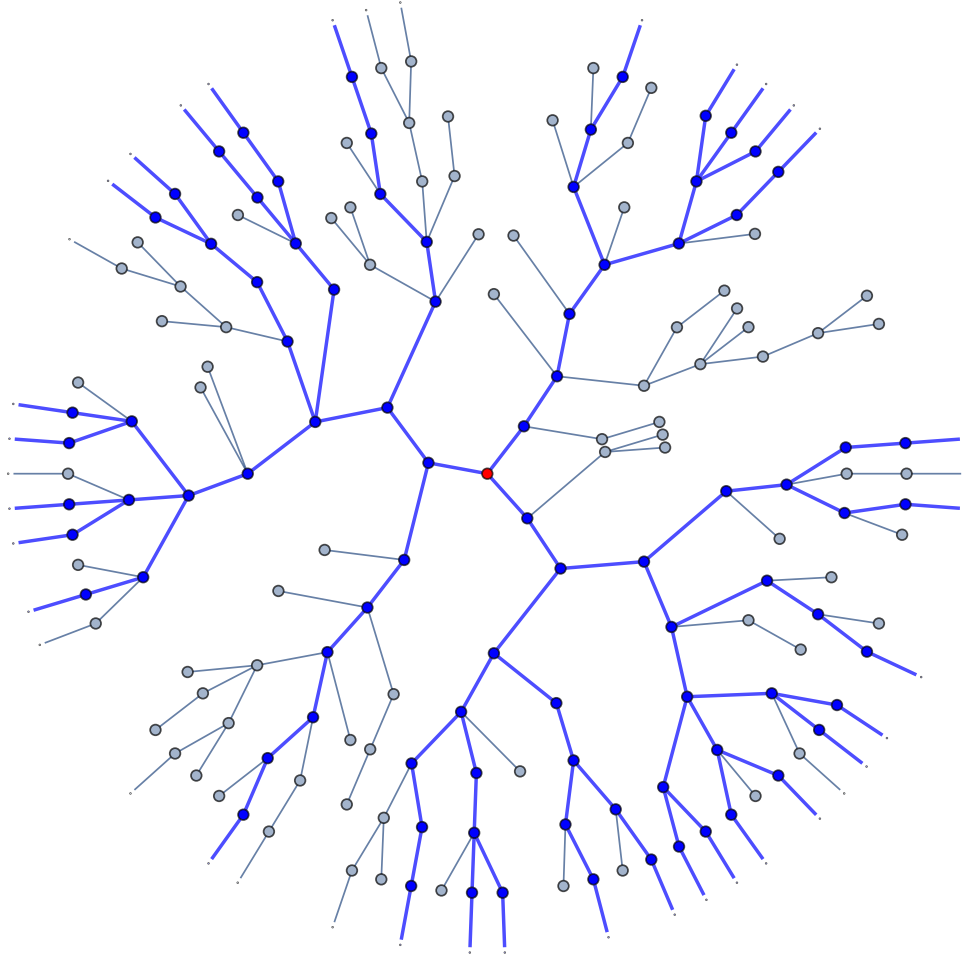


Fig. 2.2. L'épine dorsale (en bleu) pour l'arbre de Bienaymé de la figure 2.1.

En supposant que G_0^ω est un arbre de Bienaymé avec $0 < q < 1$, nous allons noter G_∞^ω le sous-graphe de G_0^ω qui ne contient que les sommets dont la descendance est infinie.

Proposition 2.1 (Décomposition de l'arbre conditionné à survivre – voir par exemple l'ouvrage de Lyons et Peres [32], section 5.7). *Si $0 < q < 1$, alors :*

- i. *La loi de G_0^ω sous $\bar{\mathbf{P}}$ est celle d'un arbre de Bienaymé dont la distribution du nombre d'enfants est caractérisée par la fonction génératrice des probabilités :*

$$\bar{\psi}(s) = \frac{1}{q} \psi(qs); \quad (2.1.5)$$

- ii. *La loi de G_∞^ω sous \mathbf{P}_∞ est celle d'un arbre de Bienaymé dont la distribution du nombre d'enfants est caractérisée par la fonction génératrice des probabilités :*

$$\psi_\infty(s) = \frac{1}{\bar{q}} (\psi(q + \bar{q}s) - q), \quad (2.1.6)$$

avec $\bar{q} = 1 - q$;

- iii. La loi de G_0^ω sous \mathbf{P}_∞ est la même que celle d'un arbre aléatoire T généré construit à partir de l'arbre G_∞^ω , auquel, pour chaque sommet $m \in S_\infty^\omega$, on « accroche » un nombre aléatoire indépendant U_m^ω de branches, c'est-à-dire des arbres aléatoires indépendants ayant la même loi que G_0^ω sous $\bar{\mathbf{P}}$; sachant que le nombre d'enfants $\tilde{\xi}_m^\omega$ de m dans l'arbre G_∞^ω est n , la loi de U_m^ω est caractérisée par

$$\mathbf{E}_\infty [s^{U_m^\omega} \mid \tilde{\xi}_m^\omega = n] = \frac{\psi^{(n)}(qs)}{\psi^{(n)}(q)}. \quad (2.1.7)$$

La figure 2.3 illustre comment obtenir les distributions respectives pour l'épine dorsale et les branches de l'arbre conditionné à survivre.

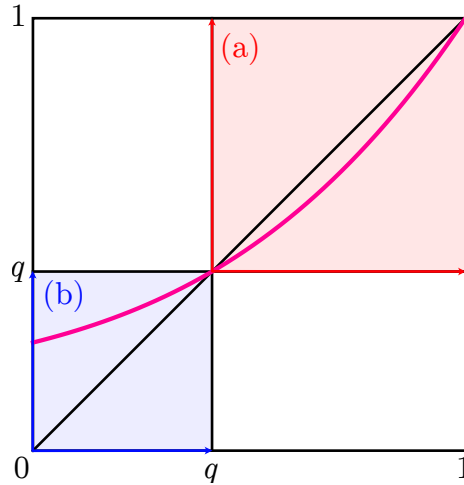


Fig. 2.3. Fonction génératrice des probabilités ψ pour la distribution du nombre d'enfants pour G_0^ω (courbe en rose); la portion de la courbe dans la région rouge (a) donne ψ_∞ , soit la fonction génératrice des probabilités pour le nombre d'enfants pour l'épine dorsale G_∞^ω ; la région bleue (b) donne $\bar{\psi}$, soit la fonction génératrice des probabilités pour le nombre d'enfants pour G_0^ω sous $\bar{\mathbf{P}}$; c'est la loi des branches.

2.1.3. La marche aléatoire

On définit la distance usuelle $d^\omega : S \times S \rightarrow \mathbb{R}^+$ sur le graphe G^ω ; restreinte à S_0^ω , cette fonction est toujours bien définie et symétrique, puisque G_0^ω est connexe. On introduit également la notation

$$|m| = d^\omega(\emptyset, m),$$

soit la distance à la racine de G_0^ω .

On fixe maintenant un paramètre de *biais* $\beta > 0$; on attribue aux arêtes dans E^ω les conductances suivante :

$$c^\omega(e) = \beta^{|e^-| \wedge |e^+|}, \quad (2.1.8)$$

où on emploie la notation : $a \wedge b := \min \{a, b\}$.

L'environnement aléatoire pour notre marche aléatoire sera le réseau (G^ω, c^ω) , sous la loi \mathbf{P}_∞ – c'est-à-dire que l'arbre G_0^ω est conditionné à survivre.

On définit ensuite les probabilités de transition $\mathbf{p}^\omega = (p^\omega(x, y))_{x, y \in S_0^\omega}$ comme dans (1.1.8). Il suit donc que, en supposant que $m \in S_0^\omega \setminus \{\emptyset\}$ et en rappelant que l'individu m a ξ_m^ω enfants – disons $m_1, \dots, m_{\xi_m^\omega}$ – et que le parent de m est noté \tilde{m} , alors on a que :

$$p^\omega(m, \tilde{m}) = \frac{1}{1 + \xi_m^\omega \beta}; \quad p^\omega(m, m_i) = \frac{\beta}{1 + \xi_m^\omega \beta}. \quad (2.1.9)$$

La marche aléatoire $\mathbf{X} = (X_t)_{t \in \mathbb{Z}^+}$ avec les probabilités de transition \mathbf{p}^ω est une marche aléatoire *biaisée* sur l'arbre de Bienaymé avec distribution du nombre d'enfants f conditionné à survivre; le paramètre de biais détermine la tendance générale du processus :

Théorème 2.1 (Lyons [29]). *Si $\mu = f'(1) = \mathbf{E}[\xi_m^\omega]$. Alors on a les critères de transience et de récurrence suivants :*

- i. *si $\beta < \frac{1}{\mu}$, alors le processus est P_\emptyset^ω -presque-sûrement récurrent pour \mathbf{P}_∞ -presque tous les environnements ω ;*
- ii. *si $\beta = \frac{1}{\mu}$, alors le processus est P_\emptyset^ω -presque sûrement récurrent nul pour \mathbf{P}_∞ -presque tous les environnements;*
- iii. *si $\beta > \frac{1}{\mu}$, alors le processus est P_\emptyset^ω -presque-sûrement transient pour \mathbf{P}_∞ -presque tous les environnements.*

Évidemment, si le processus est transient, on doit avoir que

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} |X_t| = +\infty \quad \text{p.s..}$$

Dans ce cas, on peut considérer \mathbf{X} comme un processus directionnellement transient, au sens où la marche se déplace toujours en s'éloignant de la racine; si, par exemple, on plonge l'arbre dans \mathbb{R}^2 , et que l'on place chaque sommet $m \in S_0^\omega$ sur la droite $y = -|m|$, alors la marche progresse « vers le bas ». Si on place plutôt chaque sommet $m \in S_0^\omega$ sur le cercle $x^2 + y^2 = |m|^2$ (comme dans les figures 2.1 et 2.2), alors la marche progresse « vers l'extérieur ».

Nous ne donnerons pas ici plus de détails sur la preuve, mais nous contenterons seulement de fournir une explication plus « intuitive » pour la valeur critique $1/\mu$. On remarque que lorsque $\xi_m^\omega \beta > 1$, alors la probabilité, partant de $m \in S_0^\omega$, de « descendre » vers la génération suivante, est plus élevée que la probabilité de « remonter » vers \tilde{m} ; en moyenne, donc, lorsque $\mathbf{E}[\xi_m^\omega] \beta = \mu \beta > 1$, on devrait avoir que le biais « pousse » la marche vers le bas de l'arbre.

Le théorème 2.2, dû à Lyons, Peres et Pemantle [30] donne un résultat sur la *vitesse moyenne asymptotique* de la marche \mathbf{X} :

Théorème 2.2. *On a que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|X_t|}{t} = v(\beta, f) \quad P_\emptyset^\omega - \text{p.s. pour } \mathbf{P}_\infty - \text{p.s. tout } \omega. \quad (2.1.10)$$

De plus, avec $\beta_c = 1/\psi'(q)$ (où on rappelle que ψ est la fonction génératrice des moments de la distribution du nombre d'enfants, et q est la probabilité d'extinction du processus) :

- i. si $f(0) = 0$ (l'arbre de Bienaymé n'a pas de feuilles), alors $v(\beta, f) > 0$;
- ii. si $f(0) > 0$ (l'arbre de Bienaymé a des feuilles), et $\frac{1}{\mu} < \beta < \beta_c$, alors $v(\beta, f) > 0$;
- iii. si $f(0) > 0$ et $\beta \geq \beta_c$, alors $v(\beta, f) = 0$.

On remarque que dans le cas où $f(0) > 0$, $0 < q < 1$; or, $\psi(q) = q$, et $\psi(1) = 1$ mais $\psi'(1) = \mu > 1$; puisque ψ est positive, croissante et convexe sur $[0, 1]$, un argument d'analyse simple permet de conclure que $\psi'(q) < 1$, et que, par conséquent, $\frac{1}{\mu} < 1 < \beta_c$.

C'est donc dire que, lorsque le processus \mathbf{X} est transient, on distingue deux régimes de paramètres distincts :

- le régime *balistique*, nommé ainsi puisque la vitesse asymptotique $v(\beta, f)$ est non-nulle;
- le régime *sous-balistique*, où, malgré que le processus soit transient, la vitesse asymptotique est nulle.

2.1.4. Le régime sous-balistique et les pièges

La présence du régime sous-balistique est pour le moins surprenante; en effet, on aurait pu s'attendre à ce que la vitesse moyenne asymptotique augmente de façon monotone en fonction du paramètre de biais β ; après tout, plus β est grand, plus le biais « vers le bas de l'arbre » est « fort ».² Dans les prochains paragraphes, nous tentons de donner une explication intuitive pour le résultat du théorème 2.2, en faisant une comparaison au modèle de Bouchaud vu au chapitre précédent.

Sous \mathbf{P}_∞ , nous avons vu que l'arbre de Bienaymé G_0^ω est décomposé en une épine dorsale (constituée de tous les sommets dont la descendance est infinie), et de branches finies rattachées à l'épine dorsale.

Puisqu'on sait que $\liminf_{t \rightarrow \infty} |X_t| = +\infty$ lorsque $\beta > \frac{1}{\mu}$, on sait déjà que la marche \mathbf{X} doit toujours revenir à l'épine dorsale éventuellement. De plus, comme chaque branche est attachée à un seul sommet de l'épine dorsale, on peut décomposer le comportement de la marche comme suit :

- La marche \mathbf{X} se déplace aléatoirement sur l'épine dorsale, avec une préférence à s'éloigner de la racine.
- Lorsque la marche entre dans une branche, elle y effectue une excursion; puis, elle revient à l'épine dorsale, et continue son chemin.

²Cela n'est en fait même pas évident pour les arbres de Bienaymé qui n'ont pas de feuilles; consulter par exemple les travaux de Lyons, Pemantle et Peres [31] pour des contre-exemples simples. Ben Arous, Fribergh et Sidorovicius [6] montrent que la vitesse asymptotique pour un arbre sans feuille est croissante en fonction de β pour $\beta \geq 1160$; Aidékon [2] obtient une expression pour la vitesse, et permet d'améliorer la borne à $\beta \geq 2$.

On peut par conséquent analyser le mouvement de la marche sur l'arbre de Bienaymé conditionné à survivre en considérant uniquement la marche sur l'épine dorsale, mais en « retenant » celle-ci à chaque pas pour une durée aléatoire indépendante qui correspond à la durée d'une excursion sur les branches attachées respectivement à chaque sommet. Ça ressemble beaucoup au modèle de pièges de Bouchaud du chapitre 1. Pour expliquer le régime sous-balistique, donc, on peut se pencher sur le temps passé dans les « branches » qui retiennent la marche.

2.1.5. Temps passé sur les branches.

Les branches sont des arbres de Bienaymé qui ont la même loi que G_0^ω sous $\bar{\mathbf{P}}$; la fonction génératrice des probabilités pour la distribution du nombre d'enfants est $\bar{\psi}(s) = \frac{1}{q}\psi(qs)$, et par conséquent, dans une branche, le nombre moyen d'enfants est

$$\bar{\mathbf{E}}[\xi_m^\omega] = \bar{\psi}'(1) = \psi'(q).$$

Dès lors, si $\beta < 1/\psi'(q)$, il suit que, lorsque la marche est dans une branche, le biais repousse celle-ci vers le haut de la branche, puisque les sommets n'ont pas assez d'enfants en moyenne; par conséquent, une analogie simple avec le résultat du théorème 2.1 permet de se convaincre que le temps d'excursion sur les branches seront d'espérance finie.

À l'inverse, lorsque $\beta \geq 1/\psi'(q)$, sur les branches, le biais pousse la marche à s'éloigner de la racine. Cela rend les excursions sur les branches beaucoup plus longues, puisqu'il devient très difficile pour la marche de remonter pour retourner sur l'épine dorsale. Les branches sont alors les « pièges » dans lesquels la marche aléatoire passe un temps aléatoire à queue lourde (c'est-à-dire que l'espérance est infinie), et on pourra s'attendre à observer une vitesse asymptotique nulle, comme pour le modèle de Bouchaud.

Les paragraphes suivants donnent un estimé pour le temps passé sur une branche, permettant entre autres d'obtenir un exposant caractéristique pour la queue de la distribution de celui-ci.

La structure de l'argument est simple : nous allons montrer que le temps passé dans la branche doit être « proportionnel » à une fonction de « la géométrie » de la branche – donc, une fonction de ω – sous la loi recuite.

On va dénoter par H^ω la *hauteur* de la branche; cela correspond à la distance maximale entre une feuille et la racine :

$$H^\omega = \max \{|m| : m \in S_0^\omega\}. \quad (2.1.11)$$

On définit également

$$Z_n^\omega = |\{m \in S_0^\omega : |m| = n\}|$$

le nombre d'individus de la n ème génération. Un résultat élémentaire de la théorie des processus branchants (voir par exemple l'ouvrage de Grimmett et Stirzaker [22]) donne que

$$\bar{\psi}_n(s) := \bar{\mathbf{E}} \left[s^{Z_n^\omega} \right] = \bar{\psi}_{n-1}(\bar{\psi}(s)),$$

et $\bar{\psi}_1(s) = \bar{\psi}(s)$. On a donc que

$$\bar{\mathbf{P}} \{H^\omega \geq n\} = \bar{\mathbf{P}} \{Z_n^\omega > 0\} = 1 - \bar{\psi}_n(0).$$

Un résultat par Heathcote, Seneta et Vere-Jones [23] permet de conclure que, lorsque n tend vers l'infini, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\bar{\mathbf{P}} \{H^\omega \geq n\} \sim C(\bar{\psi}'(1))^n = C\beta_c^{-n}. \quad (2.1.12)$$

On définit le temps d'atteinte strictement positif de la racine \emptyset pour la marche aléatoire sur G_0^ω :

$$T_\emptyset^+ = \inf \{t > 0 : X_t = \emptyset\}. \quad (2.1.13)$$

Par un résultat de la théorie des marches aléatoires réversibles (voir l'annexe A, Proposition A.5), on a que, sous P_\emptyset^ω ,

$$E_\emptyset^\omega [T_\emptyset^+] = \frac{1}{\pi^\omega(\emptyset)} \sum_{m \in S_0^\omega} \pi^\omega(m). \quad (2.1.14)$$

L'objectif de cette section n'est pas d'obtenir une expression exacte pour la distribution de T_\emptyset^+ , mais plutôt d'essayer d'estimer grossièrement l'ordre de grandeur de $\bar{\mathbf{E}} [P_\emptyset^\omega \{T_\emptyset^+ \geq u\}]$; à cette fin, il nous suffira de présumer que l'espérance trempée de T_\emptyset^+ est une bonne mesure de l'ordre de grandeur de celui-ci; c'est le cas puisque la variance trempée de T_\emptyset^+ est finie. En effet, sachant ω et $\{|S_0^\omega| < +\infty\}$, la marche sur G_0^ω est récurrente positive.

On fait donc la supposition que, sous P_\emptyset^ω et sachant que G_0^ω est fini,

$$T_\emptyset^+ \approx \frac{1}{\pi^\omega(\emptyset)} \sum_{m \in S_0^\omega} \pi^\omega(m) = \frac{1}{\pi^\omega(\emptyset)} \sum_{k=0}^{H^\omega} \sum_{m:|m|=k} \pi^\omega(m).$$

Ici, le symbole « \approx » signifie que les deux variables ont la même espérance et qu'elles sont égales à un facteur aléatoire de variance finie près.

Si on suppose que $|m| = k > 0$, alors

$$\pi^\omega(m) = c^\omega(m, \tilde{m}) + \sum_{i=1}^{\xi_m^\omega} c^\omega(m, (m, i)) = \beta^{k-1} + \xi_m^\omega \beta^k;$$

il s'ensuit que

$$\sum_{m:|m|=k} \pi^\omega(m) = \sum_{m:|m|=k} \beta^{k-1} + \sum_{m:|m|=k} \xi_m^\omega \beta^k = Z_k^\omega \beta^{k-1} + Z_{k+1}^\omega \beta^k.$$

De plus, $\pi^\omega(\emptyset) = Z_1^\omega$. On a donc :

$$T_\emptyset^+ \approx \frac{1}{Z_1^\omega} \left(Z_1^\omega + \sum_{k=1}^{H^\omega} (Z_k^\omega \beta^{k-1} + Z_{k+1}^\omega \beta^k) \right) = \frac{1}{Z_1^\omega} \left(2 \sum_{k=1}^{H^\omega} Z_k \beta^{k-1} + Z_{H^\omega+1} \beta^{H^\omega} \right). \quad (2.1.15)$$

Bien sûr, $Z_{H^\omega+1} = 0$ par définition de H^ω ; donc finalement,

$$T_\emptyset^+ \approx \frac{2}{Z_1^\omega} \sum_{k=1}^{H^\omega} Z_k \beta^{k-1} =: \chi^\omega. \quad (2.1.16)$$

On introduit maintenant la *largeur* de l'arbre de Bienaymé :

$$L^\omega := \max \{ Z_n^\omega : n \in \mathbb{Z}^+ \}. \quad (2.1.17)$$

Pour tout $0 \leq n \leq H^\omega$, on doit avoir :

$$1 \leq Z_n^\omega \leq L^\omega;$$

il suit donc naturellement que

$$\frac{2}{Z_1^\omega} \sum_{k=0}^{H^\omega-1} \beta^k \leq \chi^\omega \leq \frac{2L^\omega}{Z_1^\omega} \sum_{k=0}^{H^\omega-1} \beta^k. \quad (2.1.18)$$

Finalement, on peut donc conclure que

$$T_\emptyset^+ \approx \beta^{H^\omega}. \quad (2.1.19)$$

Si on définit $\bar{\mathbb{P}}_\emptyset$ pour la loi recuite de la marche \mathbf{X} sur l'arbre conditionné à s'éteindre, alors

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{P}}_\emptyset \{ T_\emptyset^+ \geq u \} &\asymp \bar{\mathbf{P}} \{ \beta^{H^\omega} \geq u \} \\ &= \bar{\mathbf{P}} \{ H^\omega \geq \log(u) / \log(\beta) \} \\ &\sim C \beta_c^{-\log(u) / \log(\beta)} \\ &= C u^{-\log(\beta_c) / \log(\beta)}. \end{aligned} \quad (2.1.20)$$

Et avec

$$\gamma = \frac{\log \beta_c}{\log \beta},$$

lorsque $\beta > \beta_c$, on a bel et bien que $\gamma \in (0, 1)$, et que

$$\bar{\mathbb{P}}_\emptyset \{ T_\emptyset^+ > u \} \asymp u^{-\gamma}.$$

Autrement dit, le temps passé par la marche dans un piège a une queue en loi de puissance dont l'exposant γ est inférieur à 1, ce qui explique l'existence du régime sous-balistique lorsque $\beta > \beta_c$. Par contre, une particularité du modèle de marche aléatoire sur l'arbre de Bienaymé infini empêche d'obtenir les mêmes limites d'échelle.

2.1.6. Distributions arithmétiques et absence de limites d'échelle.

La distribution de H^ω sous $\bar{\mathbf{P}}$ est arithmétique; en effet, les seuls résultats possibles sont des entiers. La conséquence, c'est que, bien que la distribution de T_\emptyset^+ sous $\bar{\mathbb{P}}_\emptyset$ soit à queue lourde, elle n'a pas pour autant une queue à variation régulière. En effet, on a que

$$Q(u) = \bar{\mathbf{P}} \{ \beta^{H^\omega} \geq u \} = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\mathbf{P}} \{ H^\omega \geq k \} \mathbb{1}_{[\beta^k, \beta^{k+1})}(u);$$

Si $u \in [\beta^k, \beta^{k+1})$ et $\lambda \in (\beta^n, \beta^{n+1})$, alors $Q(u) = \bar{\mathbf{P}} \{ H^\omega \geq k \}$, mais

$$Q(u\lambda) = \begin{cases} \bar{\mathbf{P}} \{ H^\omega \geq k+n \} & \text{si } \log_\beta u - k + \log_\beta \lambda - n < 1 \\ \bar{\mathbf{P}} \{ H^\omega \geq k+n+1 \} & \text{si } \log_\beta u - k + \log_\beta \lambda - n \geq 1. \end{cases}$$

Or on a par (2.1.12) que $\bar{\mathbf{P}} \{ H^\omega \geq k \} \sim C\beta_c^{-k}$; dès lors, on a donc que si $\lambda \in (\beta^n, \beta^{n+1})$,

$$\limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{Q(\lambda u)}{Q(u)} = \beta_c^{-n}; \quad \liminf_{u \rightarrow \infty} \frac{Q(\lambda u)}{Q(u)} = \beta_c^{-n-1};$$

la limite n'existe donc pas, à moins de considérer seulement des sous-suites de temps qui croissent exponentiellement.

La conséquence, c'est qu'on ne peut pas conclure que la distribution de β^{H^ω} sous $\bar{\mathbf{P}}$ (et donc la distribution de T_\emptyset^+) est dans le domaine d'attraction d'une distribution stable. Or en faisant le parallèle entre le modèle de Bouchaud, on peut estimer le temps requis pour atteindre le niveau n par une somme de variables aléatoires i.i.d. correspondant à des excursions successives sur des branches; ces variables sont donc distribuées comme T_\emptyset^+ sous $\bar{\mathbf{P}}$.

En fait, Ben Arous, Fribergh, Gantert et Hammond [5] obtiennent le résultat suivant :

Théorème 2.3. *Pour β suffisamment grand, il n'existe pas de limite d'échelle en distribution pour la marche aléatoire sur l'arbre de Bienaymé avec feuilles conditionné à survivre.*

Néanmoins, les auteurs obtiennent ce résultat :

Théorème 2.4. *Pour $\beta > \beta_c$ et $\gamma = \log_\beta \beta_c$, les distributions marginales des $\left(\frac{|X_t|}{t^\gamma}\right)_{t \in \mathbb{Z}^+}$ sont tendues.³*

En fait, on a que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log |X_t|}{\log t} = \gamma, \quad \mathbb{P}_\emptyset - p.s..$$

Autrement dit : même s'il n'existe pas de distribution-limite, on a tout de même un bon estimé de l'ordre de grandeur pour $|X_t|$ en fonction de t ; en effet, on sait que le rapport entre $|X_t|$ et t^γ : ni ne diverge à l'infini; ni ne converge vers 0.

³Ici on entend qu'une famille de mesures $(\mu_i)_{i \in I}$ sur \mathbb{R}^+ (indicées par un ensemble d'indices I) soit **tendue** lorsque pour tout $\epsilon > 0$ il existe $K > 0$ tel que $\mu_i([1/K, K]) > 1 - \epsilon$ pour tout $i \in I$.

2.2. La marche aléatoire sur l'environnement aléatoire à une dimension.

Nous abordons maintenant un exemple de marche aléatoire en milieu aléatoire classique. Comme pour la marche sur l'arbre de Bienaymé infini, ce modèle admet un régime de paramètres *sous-balistique*; comme pour la marche sur l'arbre de Bienaymé, nous présenterons une explication de ce régime de paramètres en montrant comment les pièges surviennent dans l'environnement, et en donnant un estimé du temps qui y est passé. Par contre, nous verrons que dans ce cas-ci, on a bel et bien des limites d'échelle – et ce sont les mêmes que pour le modèle de Bouchaud!

2.2.1. L'environnement aléatoire et le potentiel.

On considère le graphe $G = (\mathbb{Z}, E)$, où $E = \{(x, x \pm 1) : x \in \mathbb{Z}\}$; il s'agit simplement d'une chaîne doublement infinie.

On pose maintenant

$$\begin{aligned} p_x^\omega &= p^\omega(x, x+1); & q_x^\omega &= p^\omega(x, x-1) = 1 - p_x^\omega; \\ p^\omega(x, y) &= 0 \quad \forall y : |y - x| \neq 1 \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

pour tout $x \in \mathbb{Z}$, et on suppose que la famille $(p_x^\omega)_{x \in \mathbb{Z}}$ est indépendante et que les p_x^ω sont identiquement distribués.

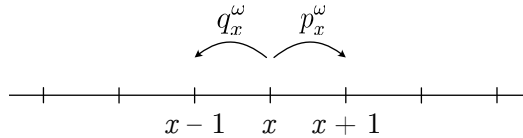


Fig. 2.4. L'environnement aléatoire à une dimension.

L'environnement est bien défini avec (G, \mathbf{p}^ω) ; cependant les variables aléatoires $\rho^\omega = (\rho_x^\omega)_{x \in \mathbb{Z}}$ définies par

$$\rho_x^\omega = \frac{q_x^\omega}{p_x^\omega} \tag{2.2.2}$$

jouent un rôle crucial pour analyser le comportement de la marche aléatoire sur celui-ci.

Sinai [38] introduit le **potentiel** $V^\omega : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, défini par les équations suivantes :

$$V^\omega(x) - V^\omega(x-1) = \log(\rho_x^\omega); \quad V^\omega(0) = 0. \tag{2.2.3}$$

Le potentiel est lui-même une marche aléatoire sur \mathbb{R} demi-infinie dont la distribution des pas est la distribution de $\log \rho_0^\omega$; la figure 2.5 montre une réalisation de V^ω .

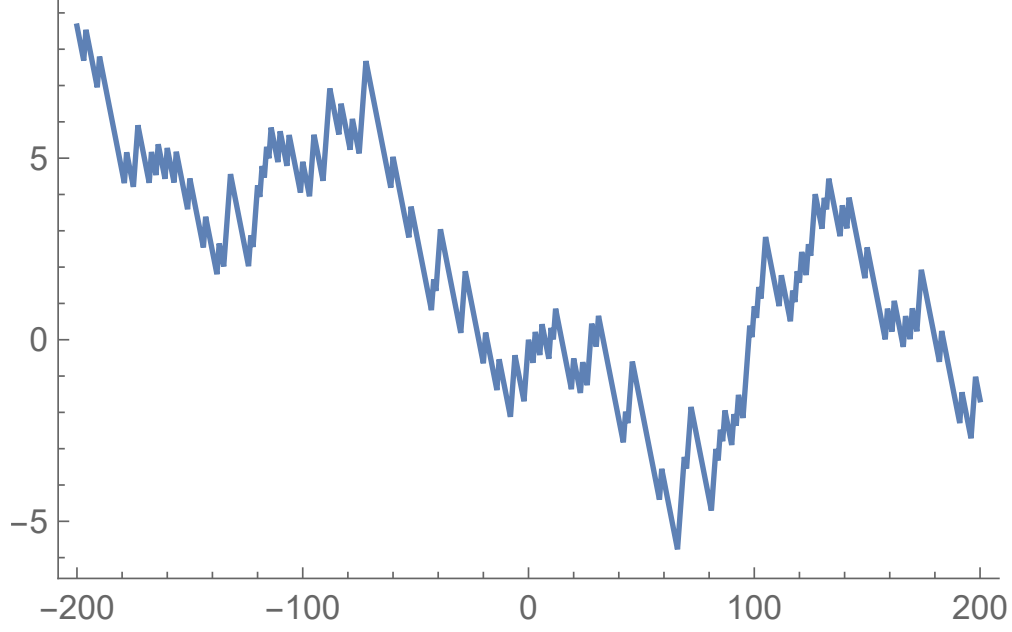


Fig. 2.5. Une réalisation de V^ω . Ici, $\mathbf{P} \{p_x^\omega = \sqrt{1640/4900}\} = 3/4$ et $\mathbf{P} \{p_x^\omega = 3/10\} = 1/4$.

Le choix du terme « potentiel » renvoie à la notion d'un potentiel d'énergie en physique; en effet, on a que

$$p_x^\omega = p^\omega(x, x+1) = \frac{1}{1 + e^{-(V^\omega(x-1) - V^\omega(x))}} = \frac{e^{-V^\omega(x)}}{e^{-V^\omega(x-1)} + e^{-V^\omega(x)}}. \quad (2.2.4)$$

$$q_x^\omega = p^\omega(x, x-1) = \frac{e^{-V^\omega(x-1)}}{e^{-V^\omega(x-1)} + e^{-V^\omega(x)}}$$

On remarque que si $V^\omega(x) < V^\omega(x-1)$, c'est que $p_x^\omega > q_x^\omega$, et la marche tend à aller vers $x+1$; à l'inverse, lorsque $V^\omega(x) > V^\omega(x-1)$, la marche tend à aller vers $x-1$. Dans un certain sens, la marche préfère aller vers les potentiels plus bas.

Bien sûr, puisque G est un arbre (c'est-à-dire qu'il n'y a pas de cycle), il est forcément possible d'obtenir les probabilités de transitions avec des conductances sur E . Si $c^\omega(x, x+1)$ est la conductance entre les sommets x et $x+1$, on doit avoir :

$$p_x^\omega = \frac{c^\omega(x, x+1)}{c^\omega(x-1, x) + c^\omega(x, x+1)}. \quad (2.2.5)$$

On remarque alors qu'il suffit de prendre :

$$c^\omega(x, x+1) = e^{-V^\omega(x)}, \quad (2.2.6)$$

et on a la mesure invariante

$$\pi^\omega(x) = e^{-V^\omega(x-1)} + e^{-V^\omega(x)}. \quad (2.2.7)$$

2.2.2. Récurrence, transience et vitesse asymptotique

Le paramètre important ici sera la distribution marginale des ρ_x^ω ; le théorème 2.5 (Solomon [40]) donne un critère de récurrence pour le processus \mathbf{X} sous la loi recuite \mathbb{P}_0 :

Théorème 2.5. i. Si $\mathbf{E}[\log \rho_0^\omega] < 0$ (resp. > 0), alors le processus \mathbf{X} est directionnellement transient, et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X_t = +\infty \quad (\text{resp } -\infty); \quad (2.2.8)$$

ii. si $\mathbf{E}[\log \rho_0^\omega] = 0$, alors le processus est récurrent nul et

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} X_t = -\infty, \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} X_t = +\infty. \quad (2.2.9)$$

Cela correspond à l'intuition physique : si V^ω est un « potentiel », alors la pente moyenne de celui-ci est donnée par $\mathbf{E}[\log \rho_0^\omega]$, et la marche aura tendance, globalement, à se déplacer vers le bas du potentiel.

Solomon [40] obtient également le théorème 2.6 qui donne une expression exacte pour la vitesse asymptotique :

Théorème 2.6. Dans le régime transient vers la droite – c'est-à-dire avec $\mathbf{E}[\log \rho_0^\omega] < 0$ – alors on a que, \mathbb{P}_0 – p.s.,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X_t}{t} = v$$

avec

$$v = \begin{cases} \frac{1 - \mathbf{E}[\rho_0^\omega]}{1 + \mathbf{E}[\rho_0^\omega]} & \text{si } \mathbf{E}[\rho_0^\omega] < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.2.10)$$

Autrement dit, ici encore, on observe deux sous-régimes de paramètres dans le régime transient:

- le régime balistique, lorsque $\mathbf{E}[\rho_0^\omega] < 1$;
- le régime sous-balistique, lorsque $\mathbf{E}[\rho_0^\omega] \geq 1$.

2.2.3. Les vallées de potentiel.

Comme à la section 2.1, l'émergence du régime sous-balistique est causée par l'apparition de structures dans l'environnement, qui « piègent » la marche aléatoire en la retenant au même endroit pendant de longues périodes, et on pourra donc encore faire la comparaison avec le modèle de Bouchaud.

Pour comprendre comment cela survient ici, on définit $m_0 = 0$; puis (en assumant sans perdre de généralité que $\mathbf{E}[\log \rho_0^\omega] < 0$), on introduit pour tout $i \in \mathbb{N}$:

$$m_i^\omega = \min \left\{ k > m_{i-1}^\omega : V^\omega(k) \leq V^\omega(m_i) \text{ et } V^\omega(k+1) > V^\omega(k). \right\}$$

Au point m_i , le potentiel atteint un nouveau minimum. Il effectue ensuite une excursion au-dessus du niveau $V^\omega(m_i)$, puis descend de façon monotone jusqu'au niveau $V^\omega(m_{i+1})$. La figure 2.6 montre la séparation de l'environnement en excursions successives au-dessus du minimum courant.

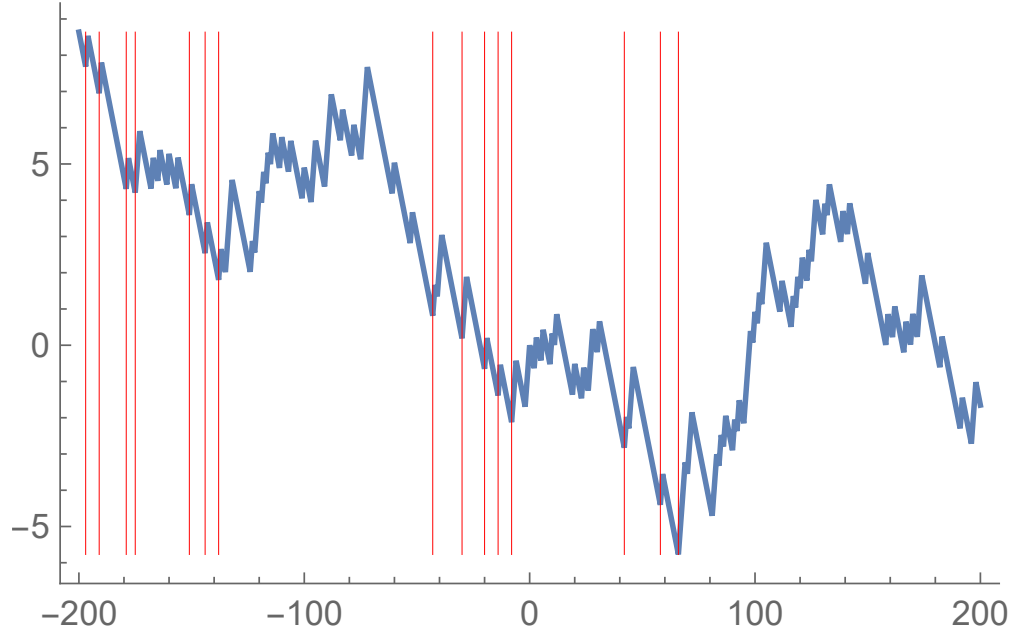


Fig. 2.6. Découpage de l'environnement aléatoire en excursions successives au-dessus du minimum courant.

On note

$$H_i^\omega = \max \{V^\omega(k) - V^\omega(m_i) : m_i \leq k < m_{i+1}\}; \quad (2.2.11)$$

il s'agit de la hauteur de l'excursion de V^ω au-dessus du niveau $V^\omega(m_i)$. Cette excursion forme une « barrière de potentiel » : en effet, pour pouvoir progresser au-delà, la marche aléatoire doit « remonter » cette différence de potentiel, or on rappelle que la marche est attirée vers les potentiels plus faibles.

2.2.4. Temps dans les vallées pour la marche sur l'environnement aléatoire à une dimension.

Le temps requis pour que la marche franchisse une barrière de potentiel augmente en fonction de la hauteur – ce sont donc ces barrières qui constituent les pièges de l'environnement. La marche aléatoire, progressant vers l'infini, rencontrera une succession de barrières de potentiel. Lorsque $\mathbf{E}[\rho_0^\omega] > 1$, ces barrières sont assez hautes en moyenne pour retenir la marche derrière elles, dans les « vallées » de potentiel formées juste devant, pendant des durées de temps à queues lourdes.

Dans les prochains paragraphes, nous présentons un estimé du temps requis pour franchir une barrière de potentiel. L'argument est similaire à celui de la section 2.1.5 : on estime l'ordre de grandeur du temps passé « dans le piège » par une fonction de la forme du piège. On pourra supposer que cet estimé est « proportionnel » au réel temps passé dans le piège, au sens où le rapport entre les deux est une variable aléatoire de variance finie. Pour une discussion plus détaillée, on consultera les travaux de Enriquez, Sabot et Zindy [14, 15], Sinai [38], Solomon [40], dont certains éléments sont présentés dans ce qui suit.

On remarque que $(V^\omega(x))_{x \in \mathbb{Z}^+}$ est une marche aléatoire sur \mathbb{R} avec des pas d'espérance $\mu = \mathbf{E}[\log \rho_0^\omega] < +\infty$; nous allons également supposer que $\sigma^2 = \mathbf{Var}[\log \rho_0^\omega] < +\infty$ pour ce qui suit. On va aussi faire la supposition que $1 \leq \mathbf{E}[\rho_0^\omega] < +\infty$, de sorte qu'on se trouve, selon le théorème 2.6, dans le régime sous-balistique.

On fait les hypothèses supplémentaires suivantes :

- (a) Il existe $\alpha \in (0, 1)$ tel que $\mathbf{E}[(\rho_0^\omega)^\alpha] = 1$ et $\mathbf{E}[(\rho_0^\omega)^\alpha \log \rho_0^\omega] < +\infty$.
- (b) La distribution de $\log \rho_0^\omega$ est non-arithmétique.

On écrit

$$V_N(y) = \frac{V^\omega(\lfloor yN \rfloor) - \mu yN}{\sqrt{\sigma^2 N}}$$

pour tout $y \in \mathbb{R}^+$; alors, en fixant un $M > 0$ quelconque, on a que $(V_N(y))_{0 \leq y \leq M} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{(d)} (\mathcal{W}(y))_{0 \leq y \leq M}$, où $(\mathcal{W}(y))_{0 \leq y \leq M}$ est un processus de Wiener.⁴

Iglehart [25] utilise les propriétés connues du processus de Wiener (aussi appelé Mouvement Brownien) – notamment que la hauteur maximale d'une excursion à sens contraire du biais a une queue exponentielle – pour déduire que, lorsque u tend vers l'infini :

$$\mathbf{P}\{H_i^\omega \geq u\} \sim Ce^{-\alpha u}, \quad (2.2.12)$$

où α est tel que décrit dans l'hypothèse (a). On rappelle que H_i^ω est la hauteur maximale de excursion subséquente de $V^\omega(x)$ au-dessus de $V^\omega(m_i)$, le i ème minimum atteint (tel que défini par l'équation (2.2.11)).

On s'inquiète maintenant du temps passé dans le piège. Nous n'entrerons pas ici dans les détails exacts de la description de « la vallée » de potentiel – on consultera les auteurs susmentionnés à ce sujet. L'argument qui suit sera, comme à la section précédente, davantage heuristique.

En présument que le piège est la barrière de potentiel de hauteur H_i^ω , nous allons estimer le temps passé dans le piège simplement comme le temps requis, à partir du moment où la marche atteint m_i , pour « escalader » la barrière de potentiel. On note :

$$M_i = \min \{x \geq m_i : V^\omega(x) = H_i^\omega\}$$

⁴La convergence est en distribution dans la topologie de Skorokhod; on se référera par exemple à l'ouvrage de Ethier et Kurtz [16], chapitre 3, ou à Skorokhod [39].

le site où le potentiel atteint ce sommet, et

$$T_{M_i} = \min \{t \geq 0 : X_t = M_i\}; \quad T_{m_i}^+ = \min \{t > 0 : X_t = m_i\}$$

le temps d'atteinte de M_i et le temps d'atteinte positif de m_i , respectivement, par la marche \mathbf{X} . Alors le temps passé dans le piège correspond à T_{M_i} sous la loi trempée commençant en m_i ($P_{m_i}^\omega$).

Nous allons assumer que, sous $P_{m_i}^\omega$,

$$T_{M_i} \propto N_{M_i}(m_i),$$

où $N_{M_i}(m_i)$ est le nombre de visites en m_i avant d'atteindre M_i . Ici, « \propto » signifie « à un facteur aléatoire de variance finie près ».

Or, sous $P_{m_i}^\omega$, $N_{M_i}(m_i)$ suit une loi géométrique avec paramètre de succès $P_{m_i}^\omega \{T_{M_i} < T_{m_i}^+\}$; on a donc, en utilisant l'analogie avec les circuits électriques (voir l'annexe A, section A.2) :

$$E_{m_i}^\omega [N_{M_i}(m_i)] = \frac{1}{P_{m_i}^\omega \{T_{M_i} < T_{m_i}^+\}} = \pi^\omega(m_i) \mathcal{R}_{\text{eff}}(m_i \leftrightarrow M_i), \quad (2.2.13)$$

où

$$\mathcal{R}_{\text{eff}}(m_i \leftrightarrow M_i) = \sum_{k=m_i}^{M_i-1} c(k, k+1)^{-1} = \sum_{k=m_i}^{M_i-1} e^{-V^\omega(k)},$$

et

$$\pi^\omega(m_i) = e^{-V^\omega(m_i)} (1 + \rho_{m_i}^\omega).$$

Donc on a que

$$E_{m_i}^\omega [N_{M_i}(m_i)] = (1 + \rho_{m_i}^\omega) \sum_{k=m_i}^{M_i-1} e^{V(k) - V(m_i)} \propto e^{H_i^\omega},$$

et en supposant que $N_{M_i}(m_i) \propto E_{m_i}^\omega [N_{M_i}(m_i)]$, on obtient finalement que, sous $P_{m_i}^\omega$,

$$T_{M_i} \propto e^{H_i^\omega}.$$

Finalement, comme à la section précédente, on a que lorsque u tend vers l'infini :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{m_i} \{T_{M_i} > u\} &\asymp \mathbf{P} \{e^{H_i^\omega} > u\} \\ &= \mathbf{P} H_i^\omega > \log u \\ &\sim C u^{-\alpha}. \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

Encore une fois, le temps passé dans le piège suivra une loi de puissance, avec un exposant α entre 0 et 1.

2.2.5. Limites d'échelle et vieillissement

Le théorème 2.7, montré d'abord par Kesten, Kozlov, Spitzer [27] donne des limites en lois pour les fluctuations de \mathbf{X} . On remarque que les limites sont identiques à celles pour le modèle de pièges de Bouchaud données à la section 1.4.

Théorème 2.7. *Nous faisons les hypothèses suivantes :*

- i. $-\infty \leq \mathbf{E}[\log \rho_0^\omega] < 0$;
- ii. *Il existe $\gamma \in (0, 2)$ tel que $\mathbf{E}[(\rho_0^\omega)^\gamma] = 1$ et $\mathbf{E}[(\rho_0^\omega)^\gamma \log^+ \rho_0^\omega] < +\infty$;*
- iii. *La distribution de $\log \rho_0^\omega$ est non-arithmétique.*

Alors,

- *si $\gamma \in (1, 2)$, avec $v = (1 + \mathbf{E}[\rho_0^\omega])/(1 - \mathbf{E}[\rho_0^\omega])$, on a que*

$$\frac{X_t - vt}{t^{1/\gamma}} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{(d)} -v^{1+1/\gamma} \mathcal{S}(\gamma, 1, m, c) \quad (2.2.15)$$

pour certains paramètres $m \in \mathbb{R}$, $c > 0$.

- *si $\gamma \in (0, 1)$, alors*

$$\frac{X_t}{t^\gamma} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{(d)} (\mathcal{S}(\gamma, 1, m', c'))^{-\gamma}. \quad (2.2.16)$$

pour certains paramètres $m' \in \mathbb{R}$, $c > 0$.

De plus, avec les méthodes développées par Enriquez, Sabot et Zindy [13, 15], on peut montrer aussi la convergence pour les processus :

Théorème 2.8. *Sous les hypothèses du Théorème 2.7, alors on a que :*

- *si $\gamma \in (1, 2)$, avec $v = (1 + \mathbf{E}[\rho_0^\omega])/(1 - \mathbf{E}[\rho_0^\omega])$:*

$$\left(\frac{X_{\lfloor Nt \rfloor} - vNt}{N^{1/\gamma}} \right)_{0 \leq t \leq M} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{(d)} (-v^{1+1/\gamma} \mathcal{Y}_t)_{0 \leq t \leq M}, \quad (2.2.17)$$

où $(\mathcal{Y}_t)_{0 \leq t \leq M}$ est un subordonateur stable d'indice γ ;

- *si $\gamma \in (0, 1)$, alors*

$$\left(\frac{X_{\lfloor Nt \rfloor}}{N^\gamma} \right)_{0 \leq t \leq M} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{(d)} (\mathcal{Z}_t)_{0 \leq t \leq M} \quad (2.2.18)$$

où $(\mathcal{Z}_t)_{0 \leq t \leq M}$ est l'inverse d'un subordonateur stable d'indice γ .

Dans les deux cas, la convergence est dans la topologie uniforme sur l'espace des fonctions càdlàg sur l'intervalle $[0, M]$.

Finalement, le théorème 2.9, également par Enriquez, Sabot, Zindy [14], donne une propriété de vieillissement pour la marche aléatoire sur l'environnement aléatoire :

Théorème 2.9. *Sous les hypothèses du Théorème 2.7, avec $\gamma \in (0, 1)$, on a que pour tout $\eta > 0$, $h > 1$:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0 \{ |X_{th} - X_t| \leq \eta \log t \} = \frac{\sin \gamma \pi}{\pi} \int_0^{1/h} y^{\gamma-1} (1-y)^{-\gamma} dy. \quad (2.2.19)$$

Ici, la borne sur la distance entre X_t et X_{ht} dans l'événement du côté gauche de (2.2.19) est $\eta \log t$ plutôt que 0 comme dans (1.5.3). Ceci est dû au fait que, contrairement au modèle de pièges de Bouchaud, ici les pièges ont une étendue – ce sont les vallées de potentiel. La borne $\eta \log t$ traduit le fait qu'à l'échelle du temps t , les pièges significatifs rencontrés par la marche sont de largeur bornée par $\eta \log t$.

Remarque 2.2. *Les hypothèses du théorème 2.7 permettent d'éviter le souci avec les distributions arithmétiques encouru à la section 2.2.2 pour la marche aléatoire sur l'arbre de Bienaymé infini.*

Partie 2

Ageing for the biased random walk on
heavy-tailed random conductances on \mathbb{Z}^d

Chapitre 3

Introduction and presentation of the model

3.1. Introduction

Random walks on random environments (RWREs) have been the subject of extensive and dynamic research over the last twenty-five years; see Hughes [24], Zeitouni [41] for surveys of the field. Amongst various phenomena associated to RWRE models, the phenomenon of trapping has been of much interest, so much so that it has served as the inspiration for a specific toy model called the Bouchaud trapping model (BTM) (see Bouchaud [9]), studied in depth by Zindy [42] among many others, and which serves to isolate and observe behaviours more or less specific to trapping dynamics. One of these behaviours is called *aging*, wherein a significant change to the system must occur most probably after a time of the order of the age of the system. The BTM exhibits aging in a certain regime of parameters, as do multiple other models; see for example those discussed by Ben Arous, Bovier and Gaynard [3], Ben Arous, Bovier and Černý [4], or Enriquez, Sabot and Zindy [14]. In their works, Enriquez, Sabot and Zindy [15, 42] present a proof of the aging property for the BTM and for the random walk on the random environment on \mathbb{Z} that lay out a template of sorts for similar models.

Meanwhile, in research by Fribergh and Kious [20], the authors present a number of preliminary results and estimates pertaining to the biased random walk on random conductances in \mathbb{Z}^d , a model exhibiting strong trapping behaviour. By using a relatively close analogy with the BTM, we will show that ageing also occurs for this model.

3.1.1. The model.

We consider the infinite d -dimensional lattice, which is the graph where \mathbb{Z}^d are the vertices and the edges $E(\mathbb{Z}^d)$ are between nearest neighbours (vertices with distance 1 between them). For our purposes, it will be sufficient to consider undirected edges and to ignore single-edge loops. Thus, elements of $E(\mathbb{Z}^d)$ are two-element subsets of \mathbb{Z}^d . We shall say that vertices

$u, v \in \mathbb{Z}^d$ are *adjacent*, and denote it $u \sim v$, if $\{u, v\} \in E(\mathbb{Z}^d)$, and we will say that edge $e \in E(\mathbb{Z}^d)$ is *incident* upon vertex $v \in \mathbb{Z}^d$ if $v \in e$. We will at times employ e^\pm and e^\mp to refer to either endpoints of edge $e \in E(\mathbb{Z}^d)$, with the understanding that the use of either sign is *a priori* insignificant and serves only to distinguish between “an end point” and “the other endpoint”. Lastly, for convenience, we introduce $\{e_1, e_2, \dots, e_d\}$ an orthonormal basis of \mathbb{Z}^d .

We now introduce $\omega = (c_*^\omega(e))_{e \in E(\mathbb{Z}^d)}$ a family of i.i.d., strictly positive random variables. This constitutes the *environment*, and we will denote by \mathbf{P} the measure induced by ω – this is the *law of the environment*. The $c_*^\omega(e)$ themselves we will call *conductances*. We then select a bias vector $\ell = \lambda \hat{\ell}$, where $\hat{\ell}$ is a vector on the unit d -dimensional sphere, and λ is a strictly positive constant. Without loss of generality, we can select $\hat{\ell}$ such that its coordinates in \mathbb{R}^d are positive and decreasing; i.e., if $\hat{\ell} = (\hat{\ell}_1, \dots, \hat{\ell}_d)$, then $\hat{\ell}_1 \geq \hat{\ell}_2 \geq \dots \geq \hat{\ell}_d \geq 0$. For any edge $e \in E(\mathbb{Z}^d)$, we now define

$$c^\omega(e) = c_*^\omega(e) \exp(\ell \cdot (e^+ + e^-)). \quad (3.1.1)$$

We shall call the $c^\omega(e)$ *net conductances* – the net result of the initial conductances, combined with the effect of the bias. They are measurable with respect to \mathbf{P} . For any $x \in \mathbb{Z}^d$, we define the *net invariant measure* by

$$\pi^\omega(x) = \sum_{y: y \sim x} c^\omega(x, y). \quad (3.1.2)$$

(It is understood that $c^\omega(x, y) = c^\omega(y, x) = c^\omega(\{x, y\})$.)

We consider the discrete-time random walk $\mathbf{X} = (X_n)_{n \geq 0}$, and denote its induced probability measure given ω , $X_0 = x$ by P_x^ω , which we call the *quenched law of X starting at x* . For any two adjacent vertices u and v , and any time $n \geq 0$, the quenched law satisfies :

$$P_x^\omega \{X_{n+1} = v \mid X_n = u\} = p^\omega(u, v) = \frac{c^\omega(u, v)}{\pi^\omega(u)}. \quad (3.1.3)$$

In other words, given ω , \mathbf{X} is a discrete-time reversible markov chain on \mathbb{Z}^d and its transition probabilities from vertex $u \in \mathbb{Z}^d$ are proportional to the net conductances incident upon u . The net conductances are themselves a product of the conductances (the higher an incident conductance, the more likely that the walk will cross it next) and a bias factor (the walk “prefers” to go in the direction of the bias vector, a preference which increases with λ). Throughout the following, the bias vector will serve as a guide to orient ourselves in the environment. We will refer to the direction of $\hat{\ell}$ generally as “ahead”, and motion alongside e_1 (parallel to the \mathbb{Z}^d coordinate axes and most closely aligned with the bias vector) as motion “forwards”.

Finally, we will denote with \mathbb{P}_x the *annealed law of \mathbf{X} starting at x* . For any two events A and B such that A is measurable with respect to \mathbf{X} , and B is measurable with respect to

ω , \mathbb{P}_x is defined as :

$$\mathbb{P}_x \{A, B\} = \mathbf{E} [P_x^\omega \{A\} \cdot \mathbb{1}\{B\}], \quad (3.1.4)$$

where $\mathbb{1}\{B\}$ is the indicator variable of event B .

We can now pause a moment to get a sense of the behaviour of this model.

Theorem 3.1 (See Fribergh [19], Shen [37]). *For $d \geq 2$, we have that*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{n} = v \quad \mathbb{P} - a.s., \quad (3.1.5)$$

where $v = 0$ if $\mathbf{E} [c_*^\omega] = \infty$ and $v \cdot \hat{\ell} > 0$ if $\mathbf{E} [c_*^\omega] < \infty$.

Furthermore, if there exists $\gamma < 1$ such that $\log \mathbf{P} \{c_*^\omega \geq t\} \sim -\gamma \log t$ for $t \rightarrow \infty$, then it follows that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(X_n \cdot \hat{\ell})}{\log n} = \gamma \quad \mathbb{P} - a.s. \quad (3.1.6)$$

For example, when the tail of the c_*^ω is a power law with an exponent γ between 0 and -1 , then the progression of the random walk along the direction of the bias in n steps is $O(n^\gamma)$ $\mathbb{P} - a.s.$ This hints, that the process can be transient even with a null limiting speed, suggests that the model exhibits strong trapping in this range of parameters. This is the case that interests us.

From now on, we will assume that for a fixed $\gamma \in (0, 1)$ and all t :

$$\mathbf{P} \{c_*^\omega \geq t\} = L(t)t^{-\gamma}, \quad (3.1.7)$$

where $L(t)$ is a slowly-varying function – i.e. $L(t) \sim L(ht)$ for all fixed $h > 0$ as $t \rightarrow \infty$. In particular, this assumption means that the marginal distribution for conductances has a heavy tail.

3.1.2. Ageing.

The result that is the main object of this paper is the following theorem :

Theorem 3.2. *For any fixed $\gamma \in (0, 1)$, $h > 1$, we have :*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0 \{\|X_{ht} - X_t\| \leq 1\} = \frac{\sin \pi \gamma}{\pi} \int_0^{1/h} y^{\gamma-1} (1-y)^{-\gamma} dy. \quad (3.1.8)$$

To provide intuition for this result, let us imagine that we let the random walk progress for a fixed time t , and call $x = X_t$ the site where we find the process after that elapsed time. How long will it take for the walk to move away from the vicinity of site x where it was at time t ?

Let U be the first step after time t when the walk steps away from the immediate vicinity of site x :

$$U = \inf\{u > t : \|X_u - X_t\| > 1\}.$$

If we assume that, once the walk moves significantly away from x , it never returns, then it follows that $\|X_{th} - X_t\| \leq 1$ if and only if $U > ht$. Consequently, Theorem 3.2 tells us that the ratio t/U (of time elapsed to the total time before we have left the vicinity of x for good) converges in distribution to a generalized arc-sine law with parameter γ .

In plain words, this means that, as time goes on, *the time required for the process to move significantly away from its current state will be of the same order as the time elapsed* – a property which characterizes aging behaviour. The meaning of the words “significantly away”, here, is rather flexible. For some models, it is an increasing function of time elapsed – e.g. for the random walk on the random environment in \mathbb{Z} (see Enriquez, Sabot and Zindy [15]). However, the aging property of Theorem 3.2 is very strong; here, “significantly away” means “further away than one edge”, irrespective of time elapsed.

3.1.3. Outline of the proof.

The argument we provide is articulated around the concept of *regeneration times*. These are an increasing sequence of random times that separate the random walk in independent and identically distributed *regeneration periods*. They are introduced by Fribergh and Kious [20], along with a number of preliminary results which will serve as starting points for our proof; these will be briefly recalled in section 3.2. In particular, Fribergh and Kious [20] have shown that only the largest conductances encountered “matter”, and that the time spent outside of them is negligible.

In section 4.1, we provide size estimates for the number of regeneration periods where such large conductances are encountered, as well as estimates for the tails of marginal distributions of the duration of those regeneration periods. At the end of this section, we prove Proposition 4.1 : that times t and ht belong to the same regeneration period with probability equal to the right-hand side of (3.1.8).

In section 4.2, we demonstrate Proposition 4.2 : that with overwhelming probability, at time t , the walk finds itself at either endpoint of the single edge with largest conductance encountered within the current regeneration period – and the same at time ht , for $h > 1$. Thus X_t and X_{ht} are endpoints of the same edge with overwhelming probability when t and ht belong to the same regeneration period, and we can conclude the proof of Theorem 3.2.

3.2. Preliminary notions

In this section we recall definitions and results from Fribergh and Kious [20] that will serve as starting points for the argument set forth later. Unless the proofs of these results or the exact statements of the definitions are specifically relevant to us, we will skip them here and simply invite the reader to consult their original source.

3.2.1. The Good/Bad decomposition and the parameter K

While Theorem 3.2 is stated for the annealed law \mathbb{P}_0 , most of the analysis done by Fribergh and Kious [20] relies on a certain decomposition of the environment and on certain conditions that we should mention here. These specific conditions will be of little concern to us; nevertheless, they do impact the way the argument is structured.

The authors introduce what they dub “the Good / Bad decomposition”. What follows is a summary of it (see Fribergh and Kious [20], definitions 4.1 – 4.3 for full details. See also Fribergh [19]).

Selecting a certain real number $K > 1$, the following definitions are made :

- i.* that an edge $e \in E(\mathbb{Z}^d)$ is K -normal if its conductance $c_*^\omega(e)$ satisfies $1/K \leq c_*^\omega(e) \leq K$ – otherwise the edge is K -abnormal;
- ii.* that a vertex $x \in \mathbb{Z}^d$ is K -open if all of the edges incident upon x are K -normal – otherwise the vertex is K -closed;
- iii.* that a vertex is $x \in \mathbb{Z}^d$ is K -good if there exists an infinite path $(x_i)_{i \geq 0}$ in \mathbb{Z}^d starting at $x_0 = x$ and such that
 - (a) $x_{2i+1} - x_{2i} = e_1$ for all $i \geq 0$ – every other step is “forwards” (i.e. in the direction most closely aligned with the bias vector ℓ ; remember that we assumed without loss of generality that $\ell \cdot e_1 > \ell \cdot e_j$ for all $j \geq 1$), and
 - (b) x_i is K -open for all i .

If a vertex is not K -good, then it is K -bad.

We denote by $BAD_K(\omega)$ and $GOOD_K(\omega)$ the sets of K -bad and K -good vertices respectively, given the environment ω .

Fribergh and Kious [20] use these definitions for technical reasons that are of little interest to us; crucially, however, these also intervene in the definitions of regeneration times and of a couple of other notions that *will*, in fact, be central to our study. Specifically, many of the results hereafter require the parameter K to be chosen sufficiently large, and will also require a specific condition : that the conductances of edges incident upon the random walk’s starting point be all equal to K . Thus the authors make the following definition (definition 5.1 from Fribergh and Kious [20]) : for all events A, B such that A is measurable with respect to X and B is measurable with respect to ω ,

- iv.* the law of the environment *given that edges incident upon x have conductance K* :

$$\mathbf{P}_x^K \{B\} = \mathbf{P} \{B \mid c_*^\omega(x, y) = K \forall y \sim x\} \quad (3.2.1)$$

- v.* the annealed law starting at x *given that the edges incident upon x have conductance K* :

$$\mathbb{P}_x^K \{A, B\} = \mathbf{E}_x^K [P_x^\omega \{A\} \mathbb{1}\{B\}] \quad (3.2.2)$$

3.2.2. “Backtracking” and regeneration times.

The avowed goal of constructing a sequence of regeneration times is this : *to obtain a sequence of independent and identically distributed entities*. In this specific instance, this requires particular and careful considerations that are highlighted in section 5 of the article by Fribergh and Kious [20]; including the introduction of a useful coupling as well as many more quantities which are, again, not needed at present.

First the random variable D is introduced in equation (5.3) from Fribergh and Kious [20]:

$$D = \inf \left\{ \left\{ n > 0 : X_n \cdot \hat{\ell} \leq X_0 \cdot \hat{\ell} \right\} \cup \mathcal{I}_0 \cup \bigcup_{j=1}^d \left\{ n > 0 : X_{n-1} = X_0 + e_j \text{ and } Z_n = 0 \right\} \right\} \quad (3.2.3)$$

\mathcal{I}_0 and Z_n are not relevant now; they are defined by the coupling mentioned above. For us, what is important is that D is less than or equal to the number of steps before the walk has come back to the portion of the environment that is “behind” its starting point with respect to the direction of the bias. In particular, on the event $\{D = \infty\}$, the walk never “backtracks”.

We introduce now the measure :

$$\bar{\mathbb{P}}_x \{ \cdot \} = \mathbb{P}_x^K \{ \cdot \mid D = \infty \}. \quad (3.2.4)$$

It is the annealed “ K -measure” conditioned (among other things) for the walk to “never return behind its starting point”.

It is also shown in Proposition 5.1 from Fribergh and Kious [20] that as long as x is K -open, the law of $(X_n)_{n \geq 0}$ started at x conditional on the event $\{D = \infty\}$ is independent of the exact configuration of conductances incident upon x – in other words : $\mathbb{P}_x \{ \cdot \mid D = \infty, x \text{ is open} \} = \bar{\mathbb{P}}_x \{ \cdot \}$.

With this, the authors introduce a useful coupling to define *regeneration times*; they are an increasing sequence of random times $(\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$ with the following properties (among others; again, see Fribergh and Kious [20], section 5, for further details) :

- i.* For any $i \in \mathbb{N}$, X_{τ_i} is K -good.
- ii.* For all $i \in \mathbb{N}$, $X_{\tau_i} = X_{\tau_{i-1}} + e_1 = X_{\tau_{i-2}} + 2e_1$. In words : just before time τ_i , the walk has done two consecutive steps “forwards”.
- iii.* For any $i \in \mathbb{N}$ and all $m, n \in \mathbb{N}$ such that $m < \tau_i - 2 < \tau_i < n$, $X_m \cdot \hat{\ell} \leq X_{\tau_i-2} \cdot \hat{\ell} < X_{\tau_i} \cdot \hat{\ell} < X_n \cdot \hat{\ell}$.

Remark 3.1. *This is not a proper definition, but it will be sufficient for us to know these properties. Note also that the τ_i depend on the parameter K ; the dependence has been omitted from the notation in an effort to keep the latter as legible as possible.*

These properties of regeneration times make them very useful; the last property in particular makes it possible to limit the possible correlations between the environment “behind” the walker at time τ_i and the environment “in front” of them.

In particular, Theorem 5.4 of Fribergh and Kious [20] provides the further two properties (which the authors call the fundamental properties of regeneration times – see section 5.5 in Fribergh and Kious [20]) :

- iv.* For any $i \in \mathbb{N}$, $(X_{\tau_i+n} - X_{\tau_i})_{n \geq 0}$ is independent from $((X_{\tau_i \wedge k})_{k \geq 0}, (\tau_j)_{1 \leq j \leq i}, (c_*^\omega(X_{\tau_i}, X_{\tau_i} - e_l))_{1 \leq l \leq d})$ under the annealed law.
- v.* For any $i \in \mathbb{N}$, $(X_{\tau_i+n} - X_{\tau_i})_{n \geq 0}$ and $(X_n)_{n \geq 0}$ have the same distribution under $\bar{\mathbb{P}}_x$.

Thus, under $\bar{\mathbb{P}}_x$, $((X_{(\tau_i+n) \wedge \tau_{i+1}} - X_{\tau_i})_{n \geq 0})_{i \in \mathbb{N}}$ are independent and identically distributed. For any fixed i , we henceforth refer to the contiguous range of times $\{n \geq 0 : \tau_{i-1} \leq n < \tau_i\}$ (with the convention that $\tau_0 = 0$ even if it is not necessarily a regeneration time) as *the i -th regeneration period*. We will denote by

$$\mathcal{T}_i = \tau_i - \tau_{i-1}, \tag{3.2.5}$$

with $\tau_0 = 0$, the total length of the i -th regeneration period. Because of the way we have defined regeneration times, it follows that under $\bar{\mathbb{P}}_0$, $(\mathcal{T}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ is a family of i.i.d. random variables; further, note that

$$\tau_n = \sum_{i=1}^n \mathcal{T}_i.$$

3.2.3. Traps.

We have said in the introduction that, under the conditions laid out then, our model exhibits strong trapping behaviour. The specific mechanism that produces this behaviour is as follows : when the walk comes to a site where one incident edge has a conductance that is significantly larger than all the others around it, it is very likely to cross that edge. But once it’s at the other end, it’s likely that the edge it just crossed is also the largest incident edge there as well, by a similarly huge margin. And so it is very likely to cross the same edge back again, and again, and so on and so forth.

Sections 6 through 9 of Fribergh and Kious [20] are dedicated to the study of these traps. We will introduce here the main notations and results from there that pertain to them and that will be relevant to us.

3.2.3.1. Large traps. At the start of section 7 of Fribergh and Kious [20], the authors introduce the definition of a *n -large trap* as an edge with a conductance greater than or equal to n . For this it will be helpful to introduce first the hitting times for any part $A \subseteq \mathbb{Z}^d$ of the lattice :

$$T_A = \inf \{t \geq 0 : X_t \in A\}. \tag{3.2.6}$$

In particular, for an edge $e \in E(\mathbb{Z}^d)$, the hitting time T_e is the first time when the walk encounters either endpoint. If A is never hit, $T_A = +\infty$.

With this notation, Fribergh and Kious [20] define the following event :

$$LT(n) := \left\{ \text{There exists } e \in E(\mathbb{Z}^d) \text{ such that } c_*^\omega(e) \geq n \text{ and } T_e < \tau_1 \right\}. \quad (3.2.7)$$

The event $LT(n)$ is the event that a large trap is encountered during the first regeneration period.

Remark 3.2. *The event $LT(n)$ depends also on K through the definition of regeneration times.*

We will expand this notation slightly further by letting $LT^{(i)}(n)$ be the analogous event for the i -th regeneration period, for any $i \in \mathbb{N}$. Note that under $\bar{\mathbb{P}}_0$, when the interval $[0, \tau_1)$ is a regeneration period as well, then because of the structure of the regeneration times, it follows that the family of events $(LT^{(i)}(n))_{i \in \mathbb{N}}$ is i.i.d.; these events are independent from one-another and they all have the same probability.

The following result gives a way to estimate that probability :

Lemma 3.1 (Lemma 9.5 from Fribergh and Kious [20]). *There exists a certain K_0 such that, for any $K > K_0$, there exists $\eta > 0$ with :*

$$\frac{\bar{\mathbb{P}}_0 \{LT(n)\}}{C(K, d) \mathbf{P} \{c_*^\omega \geq n\}} \in (1 - n^{-\eta}, 1 + n^{-\eta}) \quad (3.2.8)$$

where $C(K, d)$ is a constant depending only on K and the dimension of the lattice, and η also depends on K .

Put another way, considering equation (3.1.7), this is, for some C that depends on K and d :

$$\bar{\mathbb{P}}_0 \{LT(n)\} \asymp CL(n)n^{-\gamma}(1 + O(n^{-\eta})). \quad (3.2.9)$$

If $LT^{(i)}(n)$ occurs, we will call the regeneration period from τ_{i-1} to τ_i a n -long regeneration period.

Because it will be useful to us, we will also introduce the following sequence of n -long regeneration periods :

$$\delta_1(n) = \inf \left\{ i \in \mathbb{N} : \mathbb{1} \{LT^{(i)}(n)\} = 1 \right\}; \quad \delta_i(n) = \inf \left\{ j \geq \delta_{i-1}(n) : \mathbb{1} \{LT^{(j)}(n)\} = 1 \right\}. \quad (3.2.10)$$

It is helpful to remark immediately that, under $\bar{\mathbb{P}}_0$, the sequence of random variables $(\delta_i(n) - \delta_{i-1}(n))_{i \in \mathbb{N}}$ (with $\delta_0(n) = 0$; they are the number of regeneration periods between n -long ones) is quite simply a sequence of i.i.d. geometric random variables with success probability $\bar{\mathbb{P}}_0 \{LT(n)\}$.

3.2.3.2. The time spent outside of large traps. One fact that will be greatly helpful to us – and in fact, the main motivation for introducing the notion of a large trap at all –

is that the amount of time (in steps) spent *outside* of large traps (meaning : the number of steps where the walk crosses an edge with a smaller conductance) is negligible. In order to formalize this notion, we must first introduce a number of notations present in the paper by Fribergh and Kious [20].

First, we introduce $E_{<n} = \{e \in E(\mathbb{Z}^d) : c_*^\omega(e) < n\}$ the (random) set of all edges with conductances smaller than n ; this is the complement to the set of n -large traps. We further introduce

$$\mathcal{E}_x = \{\{x, x \pm e_j\} : j = 1, \dots, d\}$$

the set of edges incident upon the vertex x . Finally,

$$\mathcal{R}^x = \{e \in E(\mathbb{Z}^d) : e^\pm \cdot \hat{\ell} > x \cdot \hat{\ell}\} \cup \mathcal{E}_x;$$

it is the set of all edges “further ahead” of the vertex x , and also the edges immediately incident upon x . Under $\bar{\mathbb{P}}_x$, then, the entire walk happens on \mathcal{R}^x .

With these definitions, we now introduce the following notation (as in equation (6.2) of Fribergh and Kious [20]):

$$\mathcal{T}_i^{\geq n} := \sum_{e \in E_{<n}^c \cap (\mathcal{R}^0 \setminus \mathcal{E}_0)} |\{k \in [\tau_{i-1} + 1, \tau_i) : \{X_{k-1}, X_k\} = e\}|; \quad (3.2.11)$$

it corresponds to the number of steps taken across edges of $\mathcal{R}^0 \setminus \mathcal{E}_0$ (that is to say, edges “further ahead” than the origin, excluding edges incident upon the origin) that have a conductance larger than n during the i -th regeneration period.

Of course, we may define the complementary quantity; it counts the number of steps taken across edges with conductances *smaller than* n during the i -th regeneration period:

$$\mathcal{T}_i^{<n} := \mathcal{T}_i - \mathcal{T}_i^{\geq n} \quad (3.2.12)$$

Both $(\mathcal{T}_i^{<n})_{i \in \mathbb{N}}$ and $(\mathcal{T}_i^{\geq n})_{i \in \mathbb{N}}$ are i.i.d. families of random variables under $\bar{\mathbb{P}}_0$, due to the nature of regeneration times and regeneration periods.

We have the following result, which will allow us to control the amount of time spent outside of large traps :

Lemma 3.2 (Lemma 6.2 from Fribergh and Kious [20]). *For any $\delta \in (0, 1)$, there exists K_δ such that for all $K \geq K_\delta$ and any positive constant a , we have for all n :*

$$\bar{\mathbb{P}}_0 \left\{ \mathcal{T}_1^{<n^\delta} > an \right\} \leq C(K, \delta, a) n^{-\gamma - \frac{1}{2}(1-\delta)(1-\gamma)}, \quad (3.2.13)$$

where $C(K, \delta, a)$ is some constant that depends on K , δ and a .

3.2.3.3. The number of traps encountered. As we have alluded to earlier, the mechanism that actually traps the walk in a certain area for extended durations relies, not only on the walk encountering edges with large conductances, but also there being no other large conductances nearby; it is therefore interesting to consider the following events, for some

$e \in E(\mathbb{Z}^d)$, $\delta \in (0, 1)$ and $n \geq 0$:

$$OLT_e(\delta, n) := \left\{ c_*^\omega(e) \geq n, T_e < \tau_1 \text{ and for all } e' \text{ such that } T_{e'} < \tau_1 \text{ or } e' \sim e, c_*^\omega(e') < n^\delta \right\} \quad (3.2.14)$$

and

$$OLT(\delta, n) := \bigcup_{e \in E(\mathbb{Z}^d)} OLT_e(\delta, n) \quad (3.2.15)$$

Taken together, these definition mean that, on the event $OLT(\delta, n)$:

- a n -large trap is encountered before the first regeneration time;
- any other edge encountered (meaning : edges of which the walk visits at least one endpoint) has a conductance lower than n^δ ;
- all edges incident on either endpoints of the n -large trap also have conductances lower than n^δ .

(The symbol OLT stands for “one large trap”.) The authors denote this specific trap with the symbol $e^{(n)}$, the single edge with conductance larger than n encountered before the first regeneration time; on $OLT_e(\delta, n)$, then $e^{(n)} = e$. Note that $e^{(n)}$ is ill defined if $OLT(\delta, n)$ does not occur.

As for $LT(n)$, we will also introduce the notations $OLT_e^{(i)}(\delta, n)$, $OLT^{(i)}(\delta, n)$ and $e_i^{(n)}$ to designate the analogous events and edges respectively in the i -th regeneration period (between times τ_{i-1} and τ_i).

Clearly, $OLT(\delta, n) \subseteq LT(n)$ for any $\delta \in (0, 1)$ and $n > 0$, and likewise for $OLT^{(i)}(\delta, n)$ and $LT^{(i)}(n)$.

Fribergh and Kious [20] show the following result :

Lemma 3.3 (Lemma 9.6 from Fribergh and Kious [20]). *For a fixed $\delta \in (0, 1)$, there exists K_δ such that for any $K \geq K_\delta$, there is an $\eta > 0$ with*

$$\frac{\bar{\mathbb{P}}_0 \{LT(n)\}}{\bar{\mathbb{P}}_0 \{OLT(\delta, n)\}} \in [1, 1 + n^{-\eta}]. \quad (3.2.16)$$

In particular, when n tends to infinity, we must have

$$\bar{\mathbb{P}}_0 \{OLT(\delta, n)\} = \bar{\mathbb{P}}_0 \{LT(n)\} (1 - O(n^{-\eta})), \quad (3.2.17)$$

or, put yet another way :

$$\bar{\mathbb{P}}_0 \{OLT(\delta, n) \mid LT(n)\} = 1 - O(n^{-\eta}). \quad (3.2.18)$$

Lastly it will be useful to introduce yet another probability measure :

$$\mathbb{P}_n \{\cdot\} := \bar{\mathbb{P}}_0 \{\cdot \mid LT(n)\} \quad (3.2.19)$$

3.2.4. Estimating the time spent in large traps.

The object of most of section 9 from Fribergh and Kious [20] is to produce estimates for the durations of time spent on large traps. In this section we will briefly describe the method employed as it will provide insight into the useful results that we will be using later.

Assuming that $OLT(\delta, n)$ occurs (which we know is overwhelmingly likely when $LT(n)$ occurs), then let $\mathfrak{T}_n = \left| \left\{ t \leq \tau_1 : X_t \in e^{(n)} \right\} \right|$ be the total time spent on either endpoint of the single large trap encountered before the first regeneration time. We may then write :

$$\mathfrak{T}_n = \sum_{j=1}^{V_n} \mathfrak{T}_{n,(j)}, \quad (3.2.20)$$

where the V_n is the total number of separate contiguous visits to $e^{(n)}$, and the $\mathfrak{T}_{n,(j)}$ are the length of each of these visits. More precisely, for any region $A \subseteq \mathbb{Z}^d$ of the lattice, let us introduce the following notations :

$$\mathfrak{E}_{A,(1)} = \mathfrak{E}_A = \inf \{ t > T_A : X_t \notin A \}; \quad \mathfrak{E}_{A,(k)} = \inf \{ t > T_{A,(k)} : X_t \notin A \}; \quad (3.2.21)$$

$$T_{A,(1)} = T_A; \quad T_{A,(k)} = \inf \{ t > \mathfrak{E}_{A,(k-1)} : X_t \in A \}. \quad (3.2.22)$$

We will call $T_{A,(k)}$ and $\mathfrak{E}_{A,(k)}$ the k -th (re-)hitting and (re-)exiting times for region A , with them being infinite when the k -th re-hitting / re-exit never occurs. Then, we have

$$V_n = \max \{ k \in \mathbb{N} : T_{e^{(n)},(k)} < +\infty \}; \quad (3.2.23)$$

$$\mathfrak{T}_{n,(j)} = \mathfrak{E}_{e^{(n)},(j)} - T_{e^{(n)},(j)}. \quad (3.2.24)$$

Section 9.1 from Fribergh and Kious[20] shows the existence of a limiting law for V_n , along with a collection of other random variables of little interest to us here – we will refer to them as \mathbf{U}_n – when $n \rightarrow \infty$; it introduces a measure \mathbb{P}^∞ and limit variables \mathbf{U}_∞ and V_∞ such that

$$\mathbb{P}_n \{ (\mathbf{U}_n, V_n) \in \cdot \} \rightarrow \mathbb{P}^\infty \{ (\mathbf{U}_\infty, V_\infty) \in \cdot \}. \quad (3.2.25)$$

Section 9.2 from Fribergh and Kious [20] shows that the times of each visit $\mathfrak{T}_{n,(j)}$ are in some sense proportional to $c_*^\omega(e^{(n)})$; indeed, upon arriving on edge $e^{(n)}$, the time it takes before one can exit resembles a geometric random variable whose mean would be proportional to $c_*^\omega(e^{(n)})$. We skip most of these details here; this alone should serve to motivate the definition, in section 9.3, of the variable W_n as :

$$W_n := \frac{\mathfrak{T}_n}{c_*^\omega(e^{(n)})}. \quad (3.2.26)$$

From there, Fribergh and Kious [20] show that (\mathbf{U}_n, V_n) and $c_*^\omega(e^{(n)})$ are asymptotically independent – i.e., their joint distribution converges to that of $(\mathbf{U}_\infty, V_\infty)$ and c_*^{\max} which are independent under \mathbb{P}^∞ .

More precisely, if we define the variable c_*^{\max} to be independent of $(\mathbf{U}_\infty, V_\infty)$ and to have the same law under \mathbb{P}^∞ as the largest conductance encountered before the first regeneration time : $\mathbb{P}^\infty \{c_*^{\max} \geq n\} = \bar{\mathbb{P}}_0 \{LT(n)\}$. Then, under \mathbb{P}^∞ , for appropriate events A, B, F , we have :

$$\mathbb{P}^\infty \{\mathbf{U}_\infty \in A, V_\infty \in B, c_*^{\max} \in F\} = \mathbb{P}^\infty \{\mathbf{U}_\infty \in A, V_\infty \in B\} \mathbb{P}^\infty \{c_*^{\max} \in F\}. \quad (3.2.27)$$

This also holds when we replace $\mathbb{P}^\infty \{\cdot\}$ with $\mathbb{P}^\infty \{\cdot \mid c_*^{\max} \geq n\}$.

The following is a re-statement of Lemma 9.8 by Fribergh and Kious [20] that highlights better the asymptotic independence of (\mathbf{U}_n, V_n) and $c_*^\omega(e^{(n)})$:

Lemma 3.4. *There exists K_0 such that for any $K > K_0$, there is $\eta > 0$ with*

$$\begin{aligned} & \sup_{A,B,F} |\mathbb{P}^\infty \{\mathbf{U}_\infty \in A, V_\infty \in B\} \mathbb{P}^\infty \{c_*^{\max} \in F \mid c_*^{\max} \geq n\} \\ & \quad - \mathbb{P}_n \{\mathbf{U}_n \in A, V_n \in B, c_*^\omega(e^{(n)}) \in F\}| \\ & = o(n^{-\eta}) \end{aligned} \quad (3.2.28)$$

as n tends to infinity, when the supremum is taken over Borelians A, B, F in the appropriate sets.

Finally, for an appropriate coupling of these probability spaces, with a measure $\mathbb{P}^{n,\infty}$, Proposition 9.1 by Fribergh and Kious [20] guarantees that $c_*^\omega(e^{(n)})$, \mathbf{U}_n, V_n converge to c_*^{\max} , $\mathbf{U}_\infty, V_\infty$, and in particular that $\mathfrak{T}_n = W_n c_*^\omega(e^{(n)})$ converges to $\mathfrak{T}_\infty = W_\infty c_*^{\max}$. We will denote the probability measure for this coupling by $\mathbb{P}_0^{K,\infty}$.

It is also worth noting that, under this coupling, c_*^{\max} does correspond to the largest conductance encountered during the regeneration period; hence, $\{c_*^{\max} > n\} = \{LT(n)\}$; on $OLT(\delta, n)$, $c_*^{\max} = c_*^\omega(e^{(n)})$.

3.2.4.1. Results on the distributions of W_∞ and c_*^{\max} . The following lemmas give us estimates for the distributions of W_∞ and c_*^{\max} :

Lemma 3.5 (Lemma 9.9 from Fribergh and Kious [20]). *For any $\xi \in [0, 1 - \gamma]$,*

$$\mathbb{E}^\infty [W_\infty^{\gamma+\xi}] < +\infty \quad (3.2.29)$$

Lemma 3.6 (Lemma 9.10 from Fribergh and Kious [20]). *We have*

$$\mathbb{P}^\infty \{W_\infty c_*^{\max} \geq t\} \sim C_1 \mathbb{E}^\infty [W_\infty^\gamma] L(t) t^{-\gamma} \quad (3.2.30)$$

We recall that these lemmas are useful because they are estimates of the law of $\mathfrak{T} = W_n c_*^\omega(e^{(n)})$, the time spent on the n -large trap (if the walk encounters one) during a regeneration period.

3.2.5. Limiting results.

Lastly, before we begin proving our theorem, we will recall some important notations and results introduced by Fribergh and Kious [20], section 10, and that pertain to the laws of the regeneration times.

First off, we introduce the following notation :

$$\text{Inv}(t) := \inf \left\{ x \geq 0 : \mathbf{P} \{c_*^\omega > x\} \leq t^{-1} \right\} \quad (3.2.31)$$

for the generalised inverse of the inverse of the tail of the distribution of conductances To get a better grip on $\text{Inv}(t)$, suppose that the distribution of c_*^ω is continuous and supported on $(0, \infty)$ (i.e. its tail is strictly decreasing on this interval); then, we must have

$$\mathbf{P} \{c_*^\omega > \text{Inv}(n)\} = 1/n; \quad \text{Inv}(\mathbf{P} \{c_*^\omega > t\}^{-1}) = t. \quad (3.2.32)$$

In fact, we have the following useful lemma on $\text{Inv}(n)$:

Lemma 3.7. *The function $n \mapsto \text{Inv}(n)$ is regularly varying with index $1/\gamma$. In particular, $\text{Inv}(n)/n^{1/\gamma}$ is a slowly varying function.*

PROOF. Let $f(t) = \mathbf{P} \{c_*^\omega > t\}^{-1}$. Then we have that

$$f(t) = L(t)^{-1}t^\gamma,$$

and f is a regularly varying function; furthermore, $\text{Inv}(n) = f^{-1}(n)$ is its right-continuous inverse.

The lemma follows from a classical result on regularly varying functions; see for example Bingham, Goldie and Teugen [8] or Feller [17].¹ \square

This Lemma has the following corollary : as $n \rightarrow \infty$, for any $r > 0$,

$$n^{\frac{1}{\gamma}-r} \ll \text{Inv}(n) \ll n^{\frac{1}{\gamma}+r}, \quad (3.2.33)$$

where the notation $a \ll b$ is understood to mean that $a = o(b)$.

3.2.5.1. Approximating regeneration times. Section 10 from Fribergh and Kious [20] presents multiple results for the convergence in distribution of a number of sequences of random variables, all with the goal of showing that regeneration times τ_n converge, with the proper scaling (which turns out to be a factor $\text{Inv}(n)$), to a fully asymmetric stable law with index γ . Here, we will give an account of the main ones that will be of use to us. We will also take the care to employ the notations we have established to re-state them in a more legible way. To this end, we introduce the following notations (in accordance with the

¹ Voir le théorème B.1 de l'annexe B sur les fonctions à variation régulières.

notations already introduced in the previous sections) :

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_i &= \tau_i - \tau_{i-1} \\ \mathfrak{T}_n^{(i)} &= \left| \left\{ t \in [\tau_{i-1}, \tau_i) : X_t \in e_{(i)}^{(n)} \right\} \right| = W_n^{(i)} c_*^\omega(e_{(i)}^{(n)}) \\ \mathfrak{T}_\infty^{(i)} &= W_\infty^{(i)} c_{*,(i)}^{\max}.\end{aligned}\tag{3.2.34}$$

Lemma 3.8. *For some small $r_0 > 0$, we have the following :*

- i. *There exists K_0 finite such that for any $K > K_0$ and $\epsilon \in (0, \frac{1}{6})$ and some $\delta > 0$, under \mathbb{P}_0^K :*

$$\frac{\tau_n - \sum_{i=1}^n W_{\frac{1-\epsilon}{n}}^{(i)} c_*^\omega(e_{(i)}^{(n^{\frac{1-\epsilon}{\gamma}})}) \mathbb{1}\{OLT^{(i)}(\delta, n^{\frac{1-\epsilon}{\gamma}})\}}{n^{\frac{1}{\gamma}-r_0}} \xrightarrow{(d)} 0.\tag{3.2.35}$$

- ii. *For any $\epsilon \in (0, \frac{1}{6})$, under \mathbb{P}^∞ :*

$$\frac{\sum_{i=1}^n W_\infty^{(i)} c_{*,(i)}^{\max} \mathbb{1}\{c_{*,(i)}^{\max} < n^{\frac{1-\epsilon}{\gamma}}\}}{n^{\frac{1}{\gamma}-r_0}} \xrightarrow{(d)} 0.\tag{3.2.36}$$

- iii. *There exists a coupling of the probability spaces for \mathbb{P}_0 and \mathbb{P}^∞ , and measures $\mathbb{P}_0^{K,\infty}$ for that coupling such that there is a positive K_0 , such that for any $K > K_0$ and any $\epsilon \in (0, \frac{1}{6})$, under $\mathbb{P}_0^{K,\infty}$:*

$$\frac{\sum_{i=1}^n \left| W_{\frac{1-\epsilon}{n}}^{(i)} c_*^\omega(e_{(i)}^{(n^{\frac{1-\epsilon}{\gamma}})}) \mathbb{1}\{OLT^{(i)}(\delta, n^{\frac{1-\epsilon}{\gamma}})\} - \sum_{i=1}^n W_\infty^{(i)} c_{*,(i)}^{\max} \mathbb{1}\{c_{*,(i)}^{\max} \geq n^{\frac{1-\epsilon}{\gamma}}\} \right|}{n^{\frac{1}{\gamma}-r_0}} \xrightarrow{(d)} 0.\tag{3.2.37}$$

PROOF. These are simply results shown in (or consequences of the proofs of) Proposition 10.1, Lemma 10.3 and equation (10.14) in Fribergh and Kious [20]. Note that these results ostensibly show the convergence when the denominator is $\text{Inv}(n)$; however the proofs actually demonstrate the results for $n^{\frac{1}{\gamma}-r_0}$ for some $r_0 > 0$, and this is what will be useful to us. Note also that, while these results are shown with $\delta = \frac{1}{2}$, the authors also comment that the proofs work in the same way for any value of $\delta \in (0, 1)$ \square

Equation (3.2.35) can be re-written using our notations to look like this:

$$\frac{\tau_n - \sum_{i=1}^n \frac{\mathfrak{T}_n^{(i)}}{n^{\frac{1-\epsilon}{\gamma}}} \mathbb{1}\{OLT^{(i)}(\delta, n^{\frac{1-\epsilon}{\gamma}})\}}{n^{\frac{1}{\gamma}-r_0}} \xrightarrow{(d)} 0,\tag{3.2.38}$$

or even:

$$\frac{\sum_{i=1}^n \left(\mathcal{T}_i - \frac{\mathfrak{T}_n^{(i)}}{n^{\frac{1-\epsilon}{\gamma}}} \mathbb{1}\{OLT^{(i)}(\delta, n^{\frac{1-\epsilon}{\gamma}})\} \right)}{n^{\frac{1}{\gamma}-r_0}} \xrightarrow{(d)} 0.\tag{3.2.39}$$

Similarly, we may rewrite (3.2.36) as

$$\frac{\sum_{i=1}^n \mathfrak{F}_\infty^{(i)} \mathbb{1}\left\{c_{*,(i)}^{\max} < n^{\frac{1-\epsilon}{\gamma}}\right\}}{n^{\frac{1}{\gamma}-r_0}} \xrightarrow{(d)} 0, \quad (3.2.40)$$

and (3.2.37) as

$$\frac{\sum_{i=1}^n \left| \mathfrak{F}_\infty^{(i)} \mathbb{1}\left\{OLT^{(i)}(\delta, n^{\frac{1-\epsilon}{\gamma}})\right\} - \mathfrak{F}_\infty^{(i)} \mathbb{1}\left\{c_{*,(i)}^{\max} \geq n^{\frac{1-\epsilon}{\gamma}}\right\} \right|}{n^{\frac{1}{\gamma}-r_0}} \xrightarrow{(d)} 0. \quad (3.2.41)$$

Adding equations (3.2.39) and (3.2.41), and subtracting (3.2.40) yields:

$$\frac{\sum_{i=1}^n \left| \mathcal{T}_i - \mathfrak{F}_\infty^{(i)} \right|}{n^{\frac{1}{\gamma}-r_0}} \xrightarrow{(d)} 0, \quad (3.2.42)$$

which in turn implies

$$\sup_{1 \leq i \leq n} \frac{\left| \mathcal{T}_i - \mathfrak{F}_\infty^{(i)} \right|}{n^{\frac{1}{\gamma}-r_0}} \xrightarrow{(d)} 0. \quad (3.2.43)$$

It is imperative to remember that these convergences hold under the specific coupling described in Proposition 9.1 of Fribergh and Kious [20], in which $\mathfrak{F}_n^{(i)} \mathbb{1}\{OLT^{(i)}(\delta, n)\}$ converges in probability to $\mathfrak{F}_\infty^{(i)} \mathbb{1}\{c_{*,(i)}^{\max} \geq n\}$ for all i .

Fribergh and Kious [20] use the results of Lemma 3.8 to prove the following proposition :
Lemma 3.9 (Proposition 10.3 from Fribergh and Kious [20]). *We have that, as n tends to infinity,*

$$\frac{\tau_n}{\text{Inv}(n)} \xrightarrow{(d)} C_\infty S_\gamma, \quad (3.2.44)$$

where C_∞ is a constant (defined in equation (10.9) of Fribergh and Kious [20]), and S_γ is a random variable with a fully asymmetric stable distribution of index γ .

This will be immensely helpful to us because it will allow us to identify the relevant scale for the number of regeneration periods that will be of interest to us.

Chapitre 4

Proof of ageing

4.1. The regeneration periods when times t and ht occur.

Our first aim will be to show that for any $h > 0$, the probability that times t and ht occur within the same regeneration period will only depend on h in the long term; more specifically :

Proposition 4.1. *Let $h > 1$. Then,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\mathbb{P}}_0 \{ \tau_{i-1} \leq t < ht < \tau_i \text{ for some } i \} = \frac{\sin \pi \gamma}{\pi} \int_0^{1/h} y^{\gamma-1} (1-y)^{-\gamma} dy. \quad (4.1.1)$$

This also holds with \mathbb{P}_0^K .

4.1.1. Regeneration times and large traps at the scale of elapsed time.

First, let us define some useful language. In what follows, we will call time t the “elapsed time” – the time elapsed since the process has started. It will be useful to think of it as “the present”, or “now”, everything before time t as “the past”, and everything after that, “the future”. We will relate most other quantities of interest to this scale.

For instance, at the scale of elapsed time t , the large traps of interest will be t^α -large traps, for some exponent α smaller than, but arbitrarily close to 1 (further restrictions on the choice of α will be specified later). We will simply call these traps “large traps”, and we will call “long” any regeneration period during which such a trap is encountered.

Hence, when not otherwise explicitly specified, the sequence $(\delta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ of long regeneration periods (where a large trap is encountered) will be :

$$\delta_1 = \inf \{ j \in \mathbb{N} : \mathbb{1} \{ LT^{(j)}(t^\alpha) \} = 1 \}; \quad \delta_{i+1} = \inf \{ j > \delta_i : \mathbb{1} \{ LT^{(j)}(t^\alpha) \} = 1 \}. \quad (4.1.2)$$

We may, if need be, revert to the more explicit notation introduced in (3.2.10).

We also introduce the variable $l(n, t)$ for the last n -long regeneration period started before time t :

$$l(n, t) = \max \{i \in \mathbb{N} : \tau_{\delta_i(n)-1} \leq t\}. \quad (4.1.3)$$

Again, at the scale of elapsed time t , we will mostly be concerned with $l(u) := l(t^\alpha, u)$, and specifically $l(t) = l(t^\alpha, t)$.

Questions of interest will now be to determine :

- how big is $\delta_{l(t)}$?
- how big is $l(t)$?

We will begin by providing an important estimate for $\delta_{l(t)}$: that in probability under \mathbb{P}_0^K as t tends to infinity, $\delta_{l(t)} \ll t^{\gamma+\zeta}$ for any $\zeta > 0$.

Lemma 4.1. *As t goes to infinity, for all K larger than some K_0 , we must have that for any $\zeta > 0$, $\delta_{l(t)} \ll t^{\gamma+\zeta}$ in probability under \mathbb{P}_0^K , and $\delta_{l(t)+1} \gg t^{\gamma-\zeta}$; specifically, for any $\eta > 0$:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0^K \left\{ \delta_{l(t)} > \eta t^{\gamma+\zeta} \right\} = 0. \quad (4.1.4)$$

and

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0^K \left\{ \delta_{l(t)+1} > \eta t^{\gamma-\zeta} \right\} = 1. \quad (4.1.5)$$

PROOF. For some $\zeta, \eta > 0$, we choose $\eta_0 = \eta/2$ and $n(t) = \eta_0 t^{\gamma+\zeta}$; then, we know from Lemma 3.7 that :

$$\text{Inv}(n(t)) = \eta_0^{\frac{1}{\gamma}} f(\eta_0 t^{\gamma+\zeta}) t^{1+r},$$

where $r = \zeta/\gamma$ and f is a slowly varying function.

From this, we have :

$$\begin{aligned} \liminf_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0^K \left\{ \tau_{n(t)} > t \right\} &= \liminf_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0^K \left\{ \frac{\tau_{n(t)}}{\text{Inv}(n(t))} > \frac{t}{\text{Inv}(n(t))} \right\} \\ &= \liminf_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0^K \left\{ C_\infty S_\gamma > \frac{\eta_0^{-\frac{1}{\gamma}}}{f(\eta_0 t^{\gamma+\zeta}) t^r} \right\} \\ &= 1, \end{aligned}$$

where the second equality follows from Lemma 3.9.

But by definition of $l(t)$, we must always have $\tau_{\delta_{l(t)}-1} \leq t$; hence we have

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0^K \left\{ \tau_{\delta_{l(t)}-1} \leq t < \tau_{n(t)} \right\} = 1,$$

which must guarantee

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0^K \left\{ \delta_{l(t)} - 1 < n(t) \right\} = 1,$$

because the (τ_i) are a strictly increasing sequence. This is simply

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0^K \left\{ \delta_{l(t)} < (\eta_0 + t^{-\gamma-\zeta}) t^{\gamma+\zeta} < \eta t^{\gamma+\zeta} \right\} = 1,$$

since for t large enough, we must always have that $\eta_0 > t^{-\gamma-\zeta}$. This, then, concludes the proof of (4.1.4).

The proof works very similarly for (4.1.5); with $n(t) = \eta t^{\gamma-\zeta}$, then $t/\text{Inv}(n(t)) = \eta^{-\frac{1}{\gamma}} t^{-r}/f(\eta t^{\gamma-\zeta})$, and the probability that $\tau_{n(t)}/\text{Inv}(n(t))$ is larger than $t/\text{Inv}(n(t))$ tends to 0; thus $\tau_{n(t)}$ is almost surely smaller than t , but since $t < \tau_{\delta_{l(t)+1}}$ by definition of $l(t)$, the result follows. \square

Remark 4.1. *Note that this proof also provides a bound on the number of full regeneration periods before time t of any size : let $m(t)$ be that number, then $m(t) \ll t^{\gamma+\zeta}$ (or, indeed, $t^\gamma g(t)$) as well.*

We now turn our attention to the scale of the variable $l(t)$, for which there will be slightly more work.

Lemma 4.2. *As t goes to infinity, for all K larger than some K_0 , we must have that for any $\zeta > 0$, $l(t) \ll t^{\gamma(1-\alpha)+\zeta}$ in probability under \mathbb{P}_0^K ; specifically, for any $\eta > 0$:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0^K \{l(t) > \eta t^{\gamma(1-\alpha)+\zeta}\} = 0. \quad (4.1.6)$$

PROOF. We show the result under $\bar{\mathbb{P}}_0$; this being a conditional measure on an event measurable with respect to the first regeneration period, limits will be the same as long as $\mathbb{P}_0^K \{l(t) = 1\} \rightarrow 0$, which is the case – see appendix C. This proof proceeds by contradiction : suppose there are strictly positive numbers η_0, ζ_0 and p , and an increasing and unbounded sequence $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ of positive numbers such that, for all $k \in \mathbb{N}$:

$$\bar{\mathbb{P}}_0 \{l(t) > \eta_0 t_k^\kappa\} \geq p,$$

with $\kappa = \gamma(1-\alpha) + \zeta_0$.

The sequence $\delta_{l(t)}$ is strictly increasing by definition; hence, this is equivalent to :

$$\bar{\mathbb{P}}_0 \left\{ \delta_{l(t)} > \delta_{\lfloor \eta_0 t_k^\kappa \rfloor} \right\} \geq p.$$

We will show that this is a contradiction; indeed, we have that

$$\delta_{\lfloor \eta_0 t_k^\kappa \rfloor} = \sum_{i=1}^{\lfloor \eta_0 t_k^\kappa \rfloor} (\delta_i - \delta_{i-1});$$

this means that, under $\bar{\mathbb{P}}_0$, $\delta_{\lfloor \eta_0 t_k^\kappa \rfloor}$ is a sum of independent geometric random variables with success parameter

$$\rho_k = \bar{\mathbb{P}}_0 \{LT(t^\alpha)\} \asymp L(t_k^\alpha) t_k^{-\gamma\alpha},$$

as per Lemma 3.1.

In particular, if we define $\xi = \frac{1}{4}\zeta_0$, then the expected value μ_k for $\delta_{\lfloor \eta_0 t_k^\kappa \rfloor}$ is bounded below by :

$$\mu_k = \bar{\mathbb{E}}_0 \left[\delta_{\lfloor \eta_0 t_k^\kappa \rfloor} \right] \geq \frac{c}{L(t_k^\alpha)} \lfloor \eta_0 t_k^\kappa \rfloor t_k^{\gamma\alpha} \geq c \eta_0 t_k^{\kappa+\alpha\gamma-\xi},$$

where c is some positive constant. For the second inequality, recall that $L(t_k^\alpha) \ll t_k^\xi$, since L is slowly varying.

The variance for $\delta_{\lfloor \eta_0 t_k^\kappa \rfloor}$ is bounded above by

$$\sigma_k^2 = \overline{\text{Var}}_0 \left[\delta_{\lfloor \eta_0 t_k^\kappa \rfloor} \right] \leq C \eta_0 t_k^{\kappa+2\gamma\alpha+\xi};$$

again, the t_k^ξ takes care of the $L(t_k^\alpha)^{-2}$ factor.

A simple Chebyshev bound yields :

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{P}}_0 \left\{ \delta_{\lfloor \eta_0 t_k^\kappa \rfloor} > t_k^{\gamma+\xi} \right\} &= \overline{\mathbb{P}}_0 \left\{ \delta_{\lfloor \eta_0 t_k^\kappa \rfloor} - c \eta_0 t_k^{\kappa+\gamma\alpha-\xi} > t_k^{\gamma+\xi} - c \eta_0 t_k^{\kappa+\gamma\alpha-\xi} \right\} \\ &\geq \overline{\mathbb{P}}_0 \left\{ \delta_{\lfloor \eta_0 t_k^\kappa \rfloor} - \mu_k > c \eta_0 t_k^{\kappa+\gamma\alpha-\xi} \left(1 - \frac{1}{\eta_0 c} t_k^{-\xi} \right) \right\} \\ &\geq \overline{\mathbb{P}}_0 \left\{ \left| \delta_{\lfloor \eta_0 t_k^\kappa \rfloor} - \mu_k \right| < c \eta_0 t_k^{\kappa+\gamma\alpha-\xi} \left(1 - \frac{1}{\eta_0 c} t_k^{-\xi} \right) \right\} \\ &\geq 1 - \frac{\overline{\text{Var}}_0 \left[\delta_{\lfloor \eta_0 t_k^\kappa \rfloor} \right]}{\left(c \eta_0 t_k^{\kappa+\gamma\alpha-\xi} \left(1 - \frac{1}{\eta_0 c} t_k^{-\xi} \right) \right)^2} \\ &\geq 1 - \frac{C \eta_0 t_k^{\kappa+2\gamma\alpha+\xi}}{\left(c \eta_0 t_k^{\kappa+\gamma\alpha-\xi} \left(1 - \frac{1}{\eta_0 c} t_k^{-\xi} \right) \right)^2} \\ &= 1 - O(t_k^{3\xi-\kappa}). \end{aligned}$$

By our choice, $3\xi - \kappa < 0$; hence, by taking the limit when k tends to infinity, we must have that

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \overline{\mathbb{P}}_0 \left\{ \delta_{\lfloor \eta_0 t_k^\kappa \rfloor} > t_k^{\gamma+\xi} \right\} = 1.$$

But we have supposed that $\mathbb{P}_0^K \{l(t_k) > \eta_0 t_k^\kappa\} \geq p$; it therefore must follow that

$$\begin{aligned} \liminf_{k \rightarrow \infty} \overline{\mathbb{P}}_0 \left\{ \delta_{l(t)} > t_k^{\gamma+\xi} \right\} &\geq \liminf_{k \rightarrow \infty} \overline{\mathbb{P}}_0 \left\{ \delta_{l(t)} > t_k^{\gamma+\xi}, l(t_k) > \eta_0 t_k^\kappa \right\} \\ &\geq \liminf_{k \rightarrow \infty} \overline{\mathbb{P}}_0 \left\{ \delta_{\lfloor \eta_0 t_k^\kappa \rfloor} > t_k^{\gamma+\xi}, l(t_k) > \eta_0 t_k^\kappa \right\} \\ &= \liminf_{k \rightarrow \infty} \overline{\mathbb{P}}_0 \left\{ l(t_k) > \eta_0 t_k^\kappa \right\} \\ &\geq p. \end{aligned}$$

This is in contradiction with the result shown in Lemma 4.1. Thus, our initial supposition is disproved, and for any positive ζ and η , we must indeed have that

$$\overline{\mathbb{P}}_0 \left\{ l(t) > \eta t^{\gamma(1-\alpha)+\zeta} \right\}.$$

□

The following corollary of the previous two lemmas gives similar bounds for $l(t) + 1$ and $\delta_{l(t)+1}$:

Corollary 4.1. *We also have that $l(t) + 1 \ll t^{\gamma(1-\alpha)+\zeta}$, $\delta_{l(t)+1} \ll t^{\gamma+\zeta}$, and $\delta_{l(t)} \gg t^{\gamma-\zeta}$, for any $\zeta > 0$, in probability under \mathbb{P}_0^K when t tends to infinity.¹*

PROOF. The bound for $l(t) + 1$ is done in a similar way to the end of the proof for Lemma 4.1, starting from the bound for $l(t)$.

The bound for $\delta_{l(t)+1}$ is done as follows. With $\eta, \zeta > 0$, $\kappa = \gamma(1 - \alpha) + \zeta$, we make the following union bound :

$$\mathbb{P}_0^K \left\{ \delta_{l(t)+1} > \eta t^{\gamma+\zeta} \right\} \leq \mathbb{P}_0^K \left\{ \delta_{\lfloor t^\kappa \rfloor} > \eta t^{\gamma+\zeta} \right\} + \mathbb{P}_0^K \left\{ l(t) + 1 > \lfloor \eta t^\kappa \rfloor \right\}.$$

The second term goes to 0 when t tends to infinity since $l(t) + 1 \ll t^\kappa$; the first term goes to 0 as well, and to show this we simply use a Chebyshev bound as has been done in the proof of Lemma 4.2. \square

Lemma 4.3. *There is K_0 finite such that when $K > K_0$, we have the following :*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0^K \left\{ \delta_1 = 1 \right\} = 0, \tag{4.1.7}$$

and

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0^K \left\{ l(t) = 1 \right\} = 0. \tag{4.1.8}$$

PROOF. $\{\delta_1 = 1\}$ is precisely the event that $LT^{(1)}(t^\alpha)$ occurs; that probability goes to 0 under \mathbb{P}_0^K and under $\bar{\mathbb{P}}_0$.

$\{l_t = 1\}$ is precisely the event where $\delta_{l(t)} = \delta_1$; however we have shown that $\delta_{l(t)} \gg t^{\gamma-\zeta}$. It is also easy to show (with similar methods as in lemma 4.2), that $\delta_1 \ll t^{\gamma\alpha+\xi}$ for some ξ . It is now sufficient to chose ξ and ζ in such a way as to obtain a contradiction almost surely in the limit. \square

To sum up, here are the bounds we know so far : at the scale of elapsed time t ,

- large traps are of size larger than t^α (for α smaller than but very near 1);
- For all $\zeta > 0$, we have that $t^{\gamma-\zeta} \ll \delta_{l(t)}, \delta_{l(t)+1} \ll t^{\gamma+\zeta}$;
- $l(t)$ is $\ll t^{\gamma(1-\alpha)+\zeta}$ for any $\zeta > 0$.

¹As a reminder, we write $f(x) \ll g(x)$ (or $f(x) = o(g(x))$) when $x \rightarrow a$ if

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0;$$

If $f(x)$ and $g(x)$ are random variables, then the statement “ $f(x) \ll g(x)$ (or $f(x) = o(g(x))$) when $x \rightarrow a$ in probability under \mathbb{P} ” should be understood simply as stating that $f(x)/g(x)$ converges to 0 in probability under \mathbb{P} when x tends to a .

4.1.2. Approximating regeneration times by the time spent on large traps.

In sections 3.2.4 and 3.2.5, we have recalled results from Fribergh and Kious [20] that provide us with means to approximate the regeneration times; thus far we have employed Lemma 3.9 to get a grip on the scale of the number of regeneration periods that occur before time t and, more generally, the number of regeneration periods that should be of interest to us.

Let us first recall the notation introduced in equation (3.2.34) :

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_i &= \tau_i - \tau_{i-1} \\ \mathfrak{F}_n^{(i)} &= \left| \left\{ t \in [\tau_{i-1}, \tau_i) : X_t \in e_{(i)}^{(n)} \right\} \right| = W_n^{(i)} c_*^\omega(e_{(i)}^{(n)}) \\ \mathfrak{F}_\infty^{(i)} &= W_\infty^{(i)} c_{*,(i)}^{\max}.\end{aligned}$$

Now that we are especially interested in results at the scale of elapsed time, we will re-state lemma 3.8 at this specific scale.

Lemma 4.4. *As long as $\alpha > \frac{5}{6}$, then for any $\zeta \in (0, b)$ with*

$$b = \min \left\{ \frac{\gamma}{5}(6\alpha - 5), \frac{\gamma^2 r_0}{1 + \gamma r_0} \right\},$$

and r_0 as in Lemma 3.8, and for any $\delta \in (0, 1)$, we have the following limits when t tends to ∞ :

- i. *There exists K_0 finite such that for any $K > K_0$, under \mathbb{P}_0^K ,*

$$\frac{\sum_{i=1}^{t^{\gamma+\zeta}} \left(\mathcal{T}_i - \mathfrak{F}_{t^\alpha}^{(i)} \mathbb{1} \left\{ OLT^{(i)}(\delta, t^\alpha) \right\} \right)}{t} \xrightarrow{(d)} 0. \quad (4.1.9)$$

- ii. *Under \mathbb{P}^∞ :*

$$\frac{\sum_{i=1}^{t^{\gamma+\zeta}} \mathfrak{F}_\infty^{(i)} \mathbb{1} \left\{ c_{*,(i)}^{\max} < t^\alpha \right\}}{t} \xrightarrow{(d)} 0. \quad (4.1.10)$$

- iii. *There exists a coupling of the probability spaces and a measure $\mathbb{P}_0^{K,\infty}$ on that coupling with K_0 such that when $K > K_0$:*

$$\frac{\sum_{i=1}^{t^{\gamma+\zeta}} \left| \mathfrak{F}_{t^\alpha}^{(i)} \mathbb{1} \left\{ OLT^{(i)}(\delta, t^\alpha) \right\} - \mathfrak{F}_\infty^{(i)} \mathbb{1} \left\{ c_{*,(i)}^{\max} \geq t^\alpha \right\} \right|}{t} \xrightarrow{(d)} 0. \quad (4.1.11)$$

PROOF. It suffices to apply the results of Lemma 3.8 with $n(t) = t^{\gamma+\zeta}$, choosing ϵ carefully.

The condition that $\zeta < \frac{\gamma}{5}(6\alpha - 5)$ ensures that the choice of $\epsilon < \frac{1}{6}$ is possible whilst α remains smaller than 1, but it does require that α be larger than $5/6$. The condition that $\zeta < \frac{\gamma^2 r_0}{1 + \gamma r_0}$ ensures that $n(t)^{\frac{1}{\gamma} - r_0} \ll t$ when t grows large. \square

Remark 4.2. *In fact, we are even left with some margin here; we could easily prove these same results with t^{1-r_1} in the denominator of the left-hand sides for some small $r_1 > 0$.*

These immediately yield the following corollary :

Corollary 4.2. *With the hypotheses of Lemma 4.4, and specifically under the same coupling as in part iii of the aforementioned lemma, we have that for any $n := n(t) \leq t^{\gamma+\zeta}$:*

$$\sup_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq t^{\gamma+\zeta}} \frac{\sum_{k=1}^n |\mathcal{T}_{i_k} - \mathfrak{F}_{\infty}^{(i_k)}|}{t} \xrightarrow{(d)} 0, \quad (4.1.12)$$

and

$$\sup_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq t^{\gamma+\zeta}} \frac{\sum_{k=1}^n |\mathcal{T}_{i_k} - \mathfrak{F}_{\infty}^{(i_k)} \mathbb{1}\{c_{*,(i_k)}^{\max} \geq t^{\alpha}\}|}{t} \xrightarrow{(d)} 0. \quad (4.1.13)$$

where the supremum is over n -tuples of distinct indices.

The same results can be obtained by replacing $\mathfrak{F}_{\infty}^{(i_k)}$ (resp. $\mathfrak{F}_{\infty}^{(i_k)} \mathbb{1}\{c_{*,(i_k)}^{\max} \geq t^{\alpha}\}$) with $\mathfrak{F}_{t^{\alpha}}^{(i_k)}$ (resp. $\mathfrak{F}_{t^{\alpha}}^{(i_k)} \mathbb{1}\{OLT^{(i_k)}(\delta, t^{\alpha})\}$).

PROOF. When $n(t) = t^{\gamma+\zeta}$, then these are obtained simply by adding and subtracting (4.1.9), (4.1.10) and (4.1.11), or a combination thereof, with the triangle inequality as described above. It must follow that when $n(t) \leq t^{\gamma+\zeta}$, the convergence is also to 0, since the left hand side must be even smaller. \square

We will use these results to get a better grip on the distribution of $\tau_{\delta_{l(t)}}$; indeed we will show that, regardless of the fact that $\delta_{l(t)}$ is a random variable, the same approximations still apply.

Lemma 4.5. *Under the same coupling as in part iii of Lemma 4.4, with the same hypotheses, we have*

$$\frac{\tau_{\delta_{l(t)}} - \sum_{i=1}^{\delta_{l(t)}} \mathfrak{F}_{\infty}^{(i)} \mathbb{1}\{c_{*,(i)}^{\max} \geq t^{\alpha}\}}{t} \xrightarrow{(d)} 0. \quad (4.1.14)$$

This also holds if we replace $\delta_{l(t)}$ with $\delta_{l(t)+1} - 1$, $\delta_{l(t)+1}$, $\delta_{l(t)} - 1$ or any other random variable that is $\ll t^{\gamma+\zeta}$ for all $\zeta > 0$, in probability under \mathbb{P}_0^K or $\mathbb{P}_0^{K,\infty}$

PROOF. For the purpose of this proof, let

$$\Delta_t := \left| \tau_{\delta_{l(t)}} - \sum_{i=1}^{\delta_{l(t)}} \mathfrak{F}_{\infty}^{(i)} \mathbb{1}\{c_{*,(i)}^{\max} \geq t^{\alpha}\} \right|.$$

Then, for $\eta > 0$ and for some $\zeta \in (0, b)$, we have the following union bound:

$$\mathbb{P}_0^{K,\infty} \left\{ \frac{\Delta_t}{t} > \eta \right\} \leq \mathbb{P}_0^K \left\{ \delta_{l(t)} > t^{\gamma+\zeta} \right\} + \mathbb{P}_0^{K,\infty} \left\{ \frac{\Delta_t}{t} > \eta, \delta_{l(t)} \leq t^{\gamma+\zeta} \right\}$$

The first term goes to 0 by Lemma 4.1.

On the event that $\delta_{l(t)} \leq t^{\gamma+\zeta}$, then we have that

$$\Delta_t \leq \sum_{i=1}^{t^{\gamma+\zeta}} \left| \mathcal{T}_i - \mathfrak{F}_{\infty}^{(i)} \mathbb{1}\{c_{*,(i)}^{\max} \geq t^{\alpha}\} \right| =: \tilde{\Delta}_t;$$

where we have introduced $\tilde{\Delta}_t$ as shorthand for the purpose of legibility. Hence,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_0^{K,\infty} \left\{ \frac{\Delta_t}{t} > \eta, \delta_{l(t)} \leq t^{\gamma+\zeta} \right\} &\leq \mathbb{P}_0^{K,\infty} \left\{ \frac{\tilde{\Delta}_t}{t} > \eta, \delta_{l(t)} \leq t^{\gamma+\zeta} \right\} \\ &\leq \mathbb{P}_0^{K,\infty} \left\{ \frac{\tilde{\Delta}_t}{t} > \eta \right\}. \end{aligned}$$

But this goes to 0 by the result of Corollary 4.2. Thus, we may conclude that $\Delta_t/t \xrightarrow{(d)} 0$.

The proof is similar for any random variable that is $\ll t^{\gamma+\zeta}$ in probability under \mathbb{P}_0^K or $\mathbb{P}_0^{K,\infty}$. \square

Notice that, since $\{c_{*,(i)}^{\max} \geq t^\alpha\} = LT^{(i)}(t^\alpha)$, we might as well write :

$$\frac{\tau_{\delta_{l(t)}} - \sum_{i=1}^{l(t)} \mathfrak{Z}_\infty^{(\delta_i)}}{t} \xrightarrow{(d)} 0. \quad (4.1.15)$$

We can also write the same with $l(t) + 1$ instead of $l(t)$.

Hence, we are interested in the law of $\mathfrak{Z}_\infty^{(\delta_k)}$. We will show the following lemma :

Lemma 4.6. *For all $i \in \mathbb{N}$ and $u > 0$, as t goes to infinity,*

$$\mathbb{P}^\infty \left\{ \frac{\mathfrak{Z}_\infty^{(\delta_i)}}{t} > u \right\} \sim \frac{C_1 \mathbb{E}^\infty [W_\infty^{-\gamma}] L(t) t^{-\gamma}}{\mathbb{P}^\infty \{c_*^{\max} \geq t^\alpha\}} u^{-\gamma}. \quad (4.1.16)$$

PROOF. The $(\mathfrak{Z}_\infty^{(\delta_i)})_{i \in \mathbb{N}}$ are an i.i.d. family of random variables. By definition of the δ_i , since $LT^{(i)}(t^\alpha) = \{c_*^{\max}(i) \geq t^\alpha\}$, we must have that: ²

$$\mathbb{P}^\infty \left\{ \frac{\mathfrak{Z}_\infty^{(\delta_i)}}{t} > u \right\} = \mathbb{P}^\infty \{W_\infty c_*^{\max} > tu \mid c_*^{\max} \geq t^\alpha\}.$$

We have an estimate for $\mathbb{P}^\infty \{W_\infty c_*^{\max} > tu\}$ (Lemma 3.6):

$$\mathbb{P}^\infty \{W_\infty c_*^{\max} > tu\} \sim C_1 \mathbb{E}^\infty [W_\infty^\gamma] L(t) t^{-\gamma}.$$

Since $L(tu) \sim L(t)$ (because L is slowly varying), it will suffice to show that

$$\mathbb{P}^\infty \{W_\infty c_*^{\max} > tu \mid c_*^{\max} < t^\alpha\} \ll \mathbb{P}^\infty \{W_\infty c_*^{\max} > tu\}$$

in order to obtain

$$\mathbb{P}^\infty \left\{ \frac{\mathfrak{Z}_\infty^{(\delta_i)}}{t} > u \right\} \sim \frac{\mathbb{P}^\infty \{W_\infty c_*^{\max} > tu\}}{\mathbb{P}^\infty \{c_*^{\max} \geq t^\alpha\}}.$$

²See Lemma C.2 for a proof of this.

With a Chebyshev bound, using Lemma 3.5 with $\epsilon \in (0, 1 - \gamma)$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^\infty \{W_\infty c_*^{\max} > tu, c_*^{\max} < t^\alpha\} &= \int_{x=0}^{t^\alpha} \mathbb{P}^\infty \{W_\infty > tu/x\} d\mathbb{P}^\infty \{c_*^{\max} \leq x\} \\ &\leq \frac{\mathbb{E}^\infty [W_\infty^{\gamma+\epsilon}]}{(tu)^{\gamma+\epsilon}} \int_0^{t^\alpha} x^{\gamma+\epsilon} d\mathbb{P}^\infty \{c_*^{\max} \leq x\} \\ &= \frac{\mathbb{E}^\infty [W_\infty^{\gamma+\epsilon}]}{(tu)^{\gamma+\epsilon}} \mathbb{E}^\infty [(c_*^{\max})^{\gamma+\epsilon} \mathbb{1}\{c_*^{\max} < t^\alpha\}]. \end{aligned}$$

We now compute $\mathbb{E}^\infty [(c_*^{\max})^{\gamma+\epsilon} \mathbb{1}\{c_*^{\max} < t^\alpha\}]$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^\infty [(c_*^{\max})^{\gamma+\epsilon} \mathbb{1}\{c_*^{\max} < t^\alpha\}] &= \int_{y=0}^\infty \mathbb{P}^\infty \{(c_*^{\max})^{\gamma+\epsilon} \mathbb{1}\{c_*^{\max} < t^\alpha\} > y\} dy \\ &= \int_{y=0}^{t^{\alpha(\gamma+\epsilon)}} \mathbb{P}^\infty \{y^{\frac{1}{\gamma+\epsilon}} < c_*^{\max} < t^\alpha\} dy \end{aligned}$$

The integrand in that last integral is :

$$\mathbb{P}^\infty \{y^{\frac{1}{\gamma+\epsilon}} < c_*^{\max} < t^\alpha\} = \mathbb{P}^\infty \{c_*^{\max} > y^{\frac{1}{\gamma+\epsilon}}\} - \mathbb{P}^\infty \{c_*^{\max} > t^\alpha\}.$$

From 3.1, and specifically (3.2.9), we know that there are constants $c < C$ such that when n is large enough :

$$cL(n)n^{-\gamma} < \bar{\mathbb{P}}_0 \{LT(n)\} = \mathbb{P}^\infty \{c_*^{\max} > n\} < CL(n)n^{-\gamma};$$

this allows us to bound the integrand by :

$$\mathbb{P}^\infty \{y^{\frac{1}{\gamma+\epsilon}} < c_*^{\max} < t^\alpha\} \leq CL(y^{\frac{1}{\gamma+\epsilon}})y^{\frac{-\gamma}{\gamma+\epsilon}}$$

Thus, the integral becomes :

$$\mathbb{E}^\infty [(c_*^{\max})^{\gamma+\epsilon} \mathbb{1}\{c_*^{\max} < t^\alpha\}] \leq C \int_{y=0}^{t^{\alpha(\gamma+\epsilon)}} L(y^{\frac{1}{\gamma+\epsilon}})y^{\frac{-\gamma}{\gamma+\epsilon}} dy$$

For any small $r > 0$, we can find a positive constant t_0 such that when $t > t_0$, $L(t) < t^r$. Let then $y_0 = t_0^{\gamma+\epsilon}$; if $y > y_0$, then $y^{\frac{1}{\gamma+\epsilon}} > t_0$ and $L(y^{\frac{1}{\gamma+\epsilon}}) < y^{\frac{r}{\gamma+\epsilon}}$.

Letting

$$M := \int_{y=0}^{y_0} L(y^{\frac{1}{\gamma+\epsilon}})y^{\frac{-\gamma}{\gamma+\epsilon}} dy,$$

then we have

$$\begin{aligned} \int_{y=0}^{t^{\alpha(\gamma+\epsilon)}} L(y^{\frac{1}{\gamma+\epsilon}})y^{\frac{-\gamma}{\gamma+\epsilon}} dy &\leq M + \int_{y=0}^{t^{\alpha(\gamma+\epsilon)}} y^{\frac{r-\gamma}{\gamma+\epsilon}} dy \\ &= M + \left(\frac{\epsilon+r}{\gamma+\epsilon}\right)^{-1} \left[y^{\frac{\epsilon+r}{\gamma+\epsilon}}\right]_0^{t^{\alpha(\gamma+\epsilon)}} \\ &= M + \left(\frac{\epsilon+r}{\gamma+\epsilon}\right)^{-1} t^{\alpha(\epsilon+r)}. \end{aligned}$$

Thus, we have that, when t tends to infinity, so long as we chose $r < \frac{1-\alpha}{\alpha}\epsilon$, we have :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^\infty \{W_\infty c_*^{\max} > tu, c_*^{\max} < t^\alpha\} &\leq \mathbb{E}^\infty [W_\infty^{\gamma+\epsilon}] u^{-(\gamma+\epsilon)} C \left(M + \frac{\gamma+\epsilon}{\epsilon+r} t^{\alpha(\epsilon+r)} \right) t^{-\gamma-\epsilon} \\ &= O(t^{-\gamma-(1-\alpha)\epsilon+\alpha r}) \\ &\ll L(t)t^{-\gamma} \asymp \mathbb{P}^\infty \{W_\infty c_*^{\max} > tu\}. \end{aligned}$$

Hence, we must have that, when t tends to infinity, recalling Lemma 3.1 and the fact that L is slowly varying :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^\infty \left\{ \frac{\mathfrak{I}_\infty^{(\delta_i)}}{t} > u \right\} &= \mathbb{P}^\infty \{W_\infty c_*^{\max} > tu \mid c_*^{\max} \geq t^\alpha\} \\ &= \frac{\mathbb{P}^\infty \{W_\infty c_*^{\max} > tu, c_*^{\max} \geq t^\alpha\}}{\mathbb{P}^\infty \{c_*^{\max} \geq t^\alpha\}} \\ &\sim \frac{\mathbb{P}^\infty \{W_\infty c_*^{\max} > tu\}}{\mathbb{P}^\infty \{c_*^{\max} \geq t^\alpha\}} \\ &\sim \frac{C_1 \mathbb{E}^\infty [W_\infty^\gamma] L(t)(tu)^{-\gamma}}{\mathbb{P}^\infty \{c_*^{\max} \geq t^\alpha\}}. \end{aligned}$$

□

As a direct corollary of this, we have the following :

Corollary 4.3. *For any $i \in \mathbb{N}$ and $u > 0$, as t goes to infinity, under the same coupling as before,*

$$\left| \frac{\mathcal{T}_{\delta_i} - \mathfrak{I}_\infty^{(\delta_i)}}{t} \right| \xrightarrow{(d)} 0. \quad (4.1.17)$$

In particular, we also have that :

$$\mathbb{P}_0^K \left\{ \frac{\mathcal{T}_{\delta_i}}{t} > u \right\} \sim \frac{C_1 \mathbb{E}^\infty [W_\infty^\gamma] L(t)t^{-\gamma}}{\mathbb{P}^\infty \{c_*^{\max} \geq t^\alpha\}} u^{-\gamma}. \quad (4.1.18)$$

PROOF. Since the \mathcal{T}_{δ_i} are independent and identically distributed, it will suffice to show the result for \mathcal{T}_{δ_1} . Recall that $\delta_1 \ll t^{\gamma+\zeta}$. We proceed via a union bound as in the proof of Lemma 4.5; on the event that $\delta_1 < t^{\gamma+\zeta}$, then we must have that

$$\left| \frac{\mathcal{T}_{\delta_i} - \mathfrak{I}_\infty^{(\delta_i)}}{t} \right| \leq \sup_{1 \leq j \leq t^{\gamma+\zeta}} \left| \frac{\mathcal{T}_j - \mathfrak{I}_\infty^{(j)}}{t} \right|,$$

and by Corollary 4.2, this goes to 0 in distribution under our coupling. Thus, we must have that as t goes to infinity, for any i ,

$$\left| \frac{\mathcal{T}_{\delta_i} - \mathfrak{I}_\infty^{(\delta_i)}}{t} \right| \xrightarrow{(d)} 0,$$

where the convergence is in distribution under the coupling measure.

What this means is that the random variables \mathcal{T}_{δ_i}/t and $\mathfrak{T}_{\infty}^{(\delta_i)}/t$ must have asymptotically the same distribution, which, with Lemma 4.6, implies (4.1.18). \square

4.1.3. The last long regeneration period at the scale of elapsed time.

Proposition 4.1 claims to provide a limit for the probability that times t and ht occur during “the same regeneration period”. It is presented as such because we wish to stress the notion that this proposition does not depend on some of the arbitrary choices we have made – most notably, notice that it does not depend on the choice of the scaling exponent α for the size of large traps.

However, on our way to prove the proposition, we will likely need to show in *which* specific regeneration period both these epochs occur. Let us state it now plainly : we will show that times t and ht both occur in *a long regeneration period*; more specifically, if t occurs in a long regeneration period, then it will have to be the last one that began before time t . This is regeneration period number $\delta_{l(t)}$.

Therefore we will aim to show :

- that when t is large, it is overwhelmingly likely to be between $\tau_{\delta_{l(t)}-1}$ and $\tau_{\delta_{l(t)}}$;
- limiting laws for $\tau_{\delta_{l(t)}-1}/t$ and $t/\tau_{\delta_{l(t)}}$.

First, we will introduce the following notations :

$$\mathcal{S}_n = \sum_{i=1}^n \mathcal{T}_{\delta_i}, \tag{4.1.19}$$

the sum of the length of the n first long regeneration periods. We immediately have the following :

Lemma 4.7. *There exists K_0 finite such that for all $K > K_0$, when t tends to infinity and under \mathbb{P}_0^K ,*

$$\frac{\tau_{\delta_{l(t)}} - \mathcal{S}_{l(t)}}{t} \xrightarrow{(d)} 0. \tag{4.1.20}$$

This also holds if we replace $l(t)$ with $l(t) + 1$.

PROOF. This is simply the result of (4.1.12) together with (4.1.15). \square

We also introduce the following notation:

$$l^*(t) = \sup \{n \in \mathbb{N} : \mathcal{S}_n \leq t\}, \tag{4.1.21}$$

the number of complete, long regeneration periods (taken in order), that total the largest time smaller than t . Note that this is *a priori* different from $l(t) - 1$, the number of complete, long regeneration periods that *actually occur* before time t .

Under \mathbb{P}_0^K , $\mathcal{S}_{l^*(t)}/t$ converges to a *generalized arc-sine distribution* with parameter γ (also known as a Beta($\gamma, 1 - \gamma$) distribution).

Lemma 4.8. *There is $K_0 < \infty$ such that for all $K > K_0$ and all $0 \leq a \leq b \leq 1$, we have*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0^K \left\{ a \leq \frac{\mathcal{S}_{l^*(t)}}{t} \leq b \right\} = \frac{\sin \pi \gamma}{\pi} \int_{y=a}^b y^{\gamma-1} (1-y)^{-\gamma} dy. \quad (4.1.22)$$

Furthermore, for $0 \leq a \leq b$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0^K \left\{ 1+a \leq \frac{\mathcal{S}_{l^*(t)+1}}{t} \leq 1+b \right\} = \frac{\sin \pi \gamma}{\pi} \int_{y=a}^b \frac{dy}{y^\gamma (1+y)}. \quad (4.1.23)$$

PROOF. The following argument closely mirrors that of Zindy [42], also in Enriquez, Sabot and Zindy [15, 14]. Begin by splitting the probability space according to the value of $l^*(t)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_0^K \left\{ a \leq \frac{\mathcal{S}_{l^*(t)}}{t} \leq b \right\} &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}_0^K \left\{ a \leq \frac{\mathcal{S}_{l^*(t)}}{t} \leq b, l^*(t) = i \right\} \\ &= \int_{y=a}^b \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}_0^K \left\{ \frac{\mathcal{T}_{\delta_{i+1}}}{t} \geq 1-y \right\} f_i(y) dy, \end{aligned}$$

where $f_i(y)$ is the probability density of \mathcal{S}_i/t . Indeed, the probability that $\mathcal{S}_{l^*(t)}$ is between at and bt and that $l^*(t) = i$ is exactly the same as the probability that \mathcal{S}_i is between at and bt and that, given the value of \mathcal{S}_i/t , then the next long regeneration period ($\mathcal{T}_{\delta_{i+1}}$) will carry us over time t .

We now write $G_t(x)$ for the tail of \mathcal{T}_{δ_1}/t ; we have an estimate for $G_t(u)$ when t grows large. We also denote by $dU_t(y)$ the measure $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(y) dy$. Then, this integral becomes :

$$\mathbb{P}_0^K \left\{ a \leq \frac{\mathcal{S}_{l^*(t)}}{t} \leq b \right\} = \int_{y=a}^b G_t(1-y) dU_t(y). \quad (4.1.24)$$

Let

$$\hat{U}_t(\lambda) = \int_{y=0}^{\infty} e^{-\lambda y} dU_t(y)$$

be the Laplace transform of $dU_t(y)$; it corresponds to $\hat{U}_t(\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}_0^K [e^{-\lambda \mathcal{S}_i/t}]$; because \mathcal{S}_i is a sum of i.i.d. random variables, this is a geometric sum, and it evaluates to :

$$\hat{U}_t(\lambda) = \frac{1}{\mathbb{E}_0^K [1 - e^{-\lambda \mathcal{T}_{\delta_1}/t}]}.$$

Hence we are left to compute the Laplace transform for \mathcal{T}_{δ_1}/t . Recalling Corollary 4.3 (which gives an estimate for $G_t(1-y)$ as t grows large, using integration by parts, we obtain

$$\mathbb{E}_0^K [1 - e^{-\lambda \mathcal{T}_{\delta_1}/t}] \sim \frac{C_1 \mathbb{E}^\infty [W_\infty^\gamma] L(t) t^{-\gamma}}{\mathbb{P}^\infty \{c_*^{\max} \geq t^\alpha\}} \Gamma(1-\gamma) \lambda^\gamma.$$

Thus we have that as t grows large,

$$\hat{U}_t(\lambda) \sim \frac{\mathbb{P}^\infty \{c_*^{\max} \geq t^\alpha\} t^\gamma}{C_1 \mathbb{E}^\infty [W_\infty^\gamma] L(t)} \cdot \frac{\lambda^{-\gamma}}{\Gamma(1-\gamma)}.$$

To invert the Laplace transform, note first that, by the definition of the Gamma function,

$$\Gamma(\gamma)\lambda^{-\gamma} = \int_{y=0}^{\infty} y^{\gamma-1} e^{-\lambda y} dy.$$

Multiplying both sides by $(\mathbb{P}^{\infty} \{c_*^{\max} \geq t^{\alpha}\} t^{\gamma}) / (C_1 \mathbb{E}^{\infty} [W_{\infty}^{\gamma}] L(t))$ and dividing by $\Gamma(1 - \gamma)\Gamma(\gamma)$, we find :

$$\frac{\mathbb{P}^{\infty} \{c_*^{\max} \geq t^{\alpha}\} t^{\gamma}}{C_1 \mathbb{E}^{\infty} [W_{\infty}^{\gamma}] L(t)} \cdot \frac{\lambda^{-\gamma}}{\Gamma(1 - \gamma)} = \int_{y=0}^{\infty} e^{-\lambda y} \left(\frac{\mathbb{P}^{\infty} \{c_*^{\max} \geq t^{\alpha}\} t^{\gamma}}{C_1 \mathbb{E}^{\infty} [W_{\infty}^{\gamma}] L(t)} \cdot \frac{y^{\gamma-1} dy}{\Gamma(1 - \gamma)\Gamma(\gamma)} \right)$$

Here, the left-hand side is the Laplace transform of the right-hand side. By comparison, therefore, we see that we must have, for t tending to infinity, that

$$dU_t(y) \sim \frac{\mathbb{P}^{\infty} \{c_*^{\max} \geq t^{\alpha}\} t^{\gamma}}{C_1 \mathbb{E}^{\infty} [W_{\infty}^{\gamma}] L(t)} \cdot \frac{y^{\gamma-1} dy}{\Gamma(1 - \gamma)\Gamma(\gamma)}.$$

This is vague convergence of the Lebesgue-Stieltjes measure derived from $U_t(y) = \int_0^y dU_t$. Recalling now that

$$G_t(1 - y) \sim \frac{C_1 \mathbb{E}^{\infty} [W_{\infty}^{\gamma}] L(t) t^{-\gamma}}{\mathbb{P}^{\infty} \{c_*^{\max} \geq t^{\alpha}\}} (1 - y)^{-\gamma},$$

then

$$G_t(1 - y) dU_t(y) \sim \frac{1}{\Gamma(1 - \gamma)\Gamma(\gamma)} (1 - y)^{-\gamma} y^{\gamma-1} dy.$$

We finish this proof by recalling that $\frac{1}{\Gamma(1-\gamma)\Gamma(\gamma)} = \frac{\sin \pi \gamma}{\pi}$ and taking the limit on both sides of (4.1.24).

The expression for (4.1.23) is derived using a similar argument. \square

We have shown, so far, that $\mathcal{S}_{l^*(t)}/t$ converges in distribution to a generalized arc-sine law; if we could only show the same limit for $S_{l(t)-1}$, we would be set.

To do this, we will first need to control the gap between the end of the last long regeneration period started before time t (that's $\tau_{\delta_{l(t)}}$), and the start of the *next* long regeneration period (that's $\tau_{\delta_{l(t)+1}}$).

Lemma 4.9. *There exists K_0 finite such that for all $K > K_0$, when t tends to infinity and under \mathbb{P}_0^K ,*

$$\frac{\tau_{\delta_{l(t)-1}} - \tau_{\delta_{l(t)}}}{t} \xrightarrow{(d)} 0. \quad (4.1.25)$$

The same holds if we replace $l(t)$ with $l(t) + 1$

PROOF. We consider

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{\delta_{l(t)-1}} - \tau_{\delta_{l(t)}}}{t} &= \frac{\tau_{\delta_{l(t)}} - \mathcal{T}_{\delta_{l(t)}} - \tau_{\delta_{l(t)-1}}}{t} \\ &= \frac{\tau_{\delta_{l(t)}} - S_{l(t)}}{t} + \frac{\tau_{\delta_{l(t)-1}} - S_{l(t)-1}}{t} + \frac{S_{l(t)} - S_{l(t)-1} - \mathcal{T}_{\delta_{l(t)}}}{t} \end{aligned}$$

The first and second term in the right-hand side of that last equality converge to 0 in distribution under \mathbb{P}_0^K by Lemma 4.7; the last term is exactly 0 by definition.

We obtain the result with $l(t) + 1$ instead of $l(t)$ in exactly the same way. \square

Now we may tackle this pivotal result :

Lemma 4.10. *There exists K_0 finite such that for all $K > K_0$, and $0 \leq a \leq b \leq 1$, we have :*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0^K \left\{ a \leq \frac{\tau_{\delta_{l(t)}-1}}{t} \right\} = \frac{\sin \pi \gamma}{\pi} \int_{y=a}^b y^{\gamma-1} (1-y)^{-\gamma} dy. \quad (4.1.26)$$

Furthermore, for $0 \leq a \leq b$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0^K \left\{ 1 + a \leq \frac{\tau_{\delta_{l(t)}}}{t} \leq 1 + b \right\} = \frac{\sin \pi \gamma}{\pi} \int_{y=a}^b \frac{dy}{y^\gamma (1-y)}. \quad (4.1.27)$$

PROOF. It is obvious from the definition of \mathcal{S}_n that we must have

$$\mathcal{S}_{l(t)-1} \leq \tau_{\delta_{l(t)-1}} \leq \tau_{\delta_{l(t)}-1} \leq t;$$

Thus it follows that we must have $l(t) - 1 \leq l^*(t)$. We now show that $l(t) > l^*(t)$; to do this, note that, applying Lemmas 4.7 and 4.9 :

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0^K \left\{ \frac{\mathcal{S}_{l(t)}}{t} \leq 1 \right\} &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0^K \left\{ \frac{\tau_{\delta_{l(t)}}}{t} \leq 1 \right\} \\ &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0^K \left\{ \frac{\tau_{\delta_{l(t)+1}-1}}{t} \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

But, by definition (see (4.1.3)), $l(t)$ is the index of the last long regeneration period started at or before time t ; we must thus have that the *next* long regeneration period (with index $l(t) + 1$) starts *strictly after* time t . Or, put another way : $\tau_{\delta_{l(t)+1}-1} > t$. Hence,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0^K \left\{ \mathcal{S}_{l(t)} \leq t \right\} = 0,$$

or, equivalently ;

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0^K \left\{ \mathcal{S}_{l(t)} > t \right\} = 1.$$

But on the event that $\mathcal{S}_{l(t)} > t$, then it must follow that $l(t) > l^*(t)$ (or, $l(t) - 1 \geq l^*(t)$); hence,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0^K \left\{ l(t) - 1 = l^*(t) \right\} = 1.$$

We are now ready to draw our conclusion. Indeed : we already know from Lemma 4.7 that $\tau_{\delta_{l(t)}-1}$ and $\mathcal{S}_{l(t)-1}$ must converge in distribution to the same limit; we have

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0^K \left\{ a \leq \frac{\tau_{\delta_{l(t)}-1}}{t} \leq b \right\} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0^K \left\{ a \leq \frac{\mathcal{S}_{l(t)-1}}{t} \leq b \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0^K \left\{ a \leq \frac{\mathcal{S}_{l^*(t)}}{t} \leq b, l(t) - 1 = l^*(t) \right\} \\ &\quad + \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0^K \left\{ a \leq \frac{\mathcal{S}_{l(t)-1}}{t} \leq b, l(t) - 1 \neq l^*(t) \right\}. \end{aligned}$$

On the right-hand side of that last equality, the second term goes to 0. The first term must be:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0^K \left\{ a \leq \frac{\mathcal{S}_{l^*(t)}}{t} \leq b, l(t) - 1 = l^*(t) \right\} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0^K \left\{ a \leq \frac{\mathcal{S}_{l^*(t)}}{t} \leq b \right\} \\ &= \frac{\sin \pi \gamma}{\pi} \int_{y=a}^b y^{\gamma-1} (1-y)^{-\gamma} dy \end{aligned}$$

The reasoning is very similar for $\tau_{\delta_{l(t)}}$ □

This has the following, immediate corollary :

Corollary 4.4. *There exists K_0 such that for all $K > K_0$, we have*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0^K \left\{ \tau_{\delta_{l(t)}-1} \leq t < \tau_{\delta_{l(t)}} \right\} = 1. \quad (4.1.28)$$

PROOF. It suffices to notice that the limiting distribution for $\tau_{\delta_{l(t)}}/t$ is supported on $[1, +\infty)$. □

4.1.4. Proof of Proposition 4.1.

We know that time t occurs in the $\delta_{l(t)}$ -th regeneration period – that’s the last long regeneration period that started before time t – with overwhelming probability. In order for time ht to occur in the same regeneration period, we either need a freak event where both t and ht occur within some other regeneration period, or ht also occurs before $\tau_{\delta_{l(t)}}$. Let the event $\mathcal{A}(t)$ be :

$$\mathcal{A}(t) = \{ \tau_{i-1} \leq t \leq ht < \tau_i \text{ for some } i \}.$$

Then, when t grows large :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_0^K \{ \mathcal{A}(t) \} &= \mathbb{P}_0^K \left\{ \tau_{\delta_{l(t)}-1} \leq t \leq ht < \tau_{\delta_{l(t)}} \right\} + \mathbb{P}_0^K \left\{ \tau_{i-1} \leq t \leq ht < \tau_i \text{ for some } i \neq \delta_{l(t)} \right\} \\ &= \mathbb{P}_0^K \left\{ ht < \tau_{\delta_{l(t)}} \right\} + o(1) \end{aligned}$$

Taking the limit when t goes to infinity on either side, we get

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0^K \{ \mathcal{A}(t) \} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0^K \left\{ ht < \tau_{\delta_{l(t)}} \right\} \\ &= \frac{\sin \pi \gamma}{\pi} \int_{x=h-1}^{\infty} \frac{dx}{x^\gamma (1+x)}. \end{aligned}$$

To complete the proof, we need only make the change of variables $y = \frac{1}{1+x}$. □

4.2. The walk is on the largest conductance.

At this point, half the work is done: we have determined a probability that times t and ht will occur within the same regeneration period, which we now know must be the last long one started before time t . Our next objective will be to show that, in that case, then not

only are X_t and X_{ht} likely to be very close by; they are overwhelmingly likely to be at either end of the same edge. In fact, that edge will be the largest one encountered during that regeneration period : $e_{(\delta_{l(t)})}^{(t^\alpha)}$.

Central to this proof will be the following proposition :

Proposition 4.2. *There exists K_0 finite such that when $K > K_0$, for any $\alpha' \in (\alpha, 1)$ and some $\delta \in (0, 1)$:*

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0^K \left\{ OLT^{(\delta_{l(t)})} \left(\delta \frac{\alpha}{\alpha'}, t^{\alpha'} \right), X_t \in e_{(\delta_{l(t)})}^{(t^{\alpha'})} \right\} = 1. \quad (4.2.1)$$

Before we provide a rigorous proof of it, let us justify the intuition broadly.

We have just been using limit theorems to approximate the length of regeneration periods – especially the long ones – by the time spent in large traps. This suggests that the time spent *within* a long regeneration period, but *outside* of the single large trap that is likely to have been encountered, will be negligible. Thus it seems plausible that X_t would be in the large trap with overwhelming probability and, in so far as X_{ht} happens within the same regeneration period, that it, too, would be on that same edge.

4.2.1. A slightly larger trap

Worthy of note in Proposition 4.2 is the introduction of α' , an exponent larger still than α but nonetheless smaller than 1; this, the proposition claims, is the appropriate scale for the single large trap encountered during the last t^α -long regeneration period started before time t .

Loosely speaking, this is a manifestation of the *inspection paradox* of renewal theory fame (see for example Feller [17], section VI.7(a), or Ross [36], section 7.7): it is likely that the large trap in the current long regeneration period is larger than those in other long regeneration periods, because it's more likely that time t will fall in a longer regeneration period.

We show the following lemma :

Lemma 4.11. *There exists K_0 finite such that when $K > K_0$, for some $\delta \in (0, 1)$, with $\eta_0 > 0$ as in Lemma 3.3, and $\eta_1 > 0$ as in Lemma 3.4, as long as $\alpha > \max \{ \gamma / (\gamma + \eta_i), i = 0, 1 \}$, for any $\alpha' \in [\alpha, 1)$:*

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0^K \left\{ OLT^{(\delta_{l(t)})} \left(\delta \frac{\alpha}{\alpha'}, t^{\alpha'} \right) \right\} = 1 \quad (4.2.2)$$

PROOF. Lemma 3.3 guarantees³ that for any fixed i , when t goes to infinity :

$$\mathbb{P}_0^K \left\{ OLT^{(\delta_i)} (\delta, t^\alpha)^c \right\} = O(t^{-\alpha\eta_0}).$$

³Again, see Lemma C.2 from Appendix C for full details.

We now use a simple union bound with a suitable choice of $\zeta > 0$ and, with Lemma 4.2 :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_0^K \left\{ OLT^{(\delta_{l(t)})}(\delta, t^\alpha)^c \right\} &\leq \mathbb{P}_0^K \left\{ l(t) > t^{\gamma(1-\alpha)+\zeta} \right\} + \sum_{i=1}^{t^{\gamma(1-\alpha)+\zeta}} \mathbb{P}_0^K \left\{ OLT^{(\delta_i)}(\delta, t^\alpha)^c \right\} \\ &= o(1) + O(t^{\gamma(1-\alpha)+\zeta-\alpha\eta_0}). \end{aligned}$$

When $\alpha > \gamma/(\gamma + \eta_0)$, then it follows that $\gamma < \alpha(\gamma + \eta_0)$, and we can find $\zeta > 0$ small enough that $\gamma(1 - \alpha) + \zeta - \alpha\eta_0 < 0$; thus,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0^K \left\{ OLT^{(\delta_{l(t)})}(\delta, t^\alpha)^c \right\} = 0,$$

and the result is proven for $\alpha' = \alpha$.

We now turn our attention to the case when $\alpha' > \alpha$; then, for the purposes of this proof, let us write

$$E_t = OLT^{(\delta_{l(t)})}(\delta, t^\alpha) \cap \left\{ c_*^\omega \left(e_{(\delta_{l(t)})}^{(t^\alpha)} \right) \geq t^{\alpha'} \right\}.$$

Clearly, $E_t \subseteq OLT^{(\delta_{l(t)})}(\delta(\alpha/\alpha'), t^{\alpha'})$; indeed, on the event E_t , all conductances encountered are smaller than $t^{\delta\alpha}$ (because $OLT^{(\delta_{l(t)})}(\delta, t^\alpha)$ occurs) and the largest conductance encountered (that's $c_*^\omega \left(e_{(\delta_{l(t)})}^{(t^\alpha)} \right)$) exceeds $t^{\alpha'}$.

Therefore, with a union bound, again, we have :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_0^K \left\{ OLT^{(\delta_{l(t)})}(\delta(\alpha/\alpha'), t^{\alpha'})^c \right\} &\leq \mathbb{P}_0^K \left\{ E_t^c \right\} \\ &\leq \mathbb{P}_0^K \left\{ OLT^{(\delta_{l(t)})}(\delta, t^\alpha)^c \right\} + \mathbb{P}_0^K \left\{ c_*^\omega \left(e_{(\delta_{l(t)})}^{(t^\alpha)} \right) < t^{\alpha'} \right\}. \end{aligned}$$

The first term is $o(1)$, as we have only just shown earlier. We now focus our attention on the second term; it will be enough to show that it, too, is $o(1)$.

By definition of $e_{(\delta_{l(t)})}^{(t^\alpha)}$, it is clear that

$$\left\{ c_*^\omega \left(e_{(\delta_{l(t)})}^{(t^\alpha)} \right) < t^{\alpha'} \right\} = \left\{ c_*^\omega \left(e_{(\delta_{l(t)})}^{(t^\alpha)} \right) \in [t^\alpha, t^{\alpha'}] \right\}.$$

We now fix an integer M (whose value will be chosen later), and write:

$$\alpha_k = \alpha + \frac{k}{M}(\alpha' - \alpha), \quad I_k = [t^{\alpha_{k-1}}, t^{\alpha_k}).$$

It follows that

$$\mathbb{P}_0^K \left\{ c_*^\omega \left(e_{(\delta_{l(t)})}^{(t^\alpha)} \right) < t^{\alpha'} \right\} = \sum_{k=1}^M \mathbb{P}_0^K \left\{ c_*^\omega \left(e_{(\delta_{l(t)})}^{(t^\alpha)} \right) \in I_k \right\}.$$

Consider now the fact that $\mathcal{T}_{\delta_{l(t)}}/t$ must have the same limiting law as $\mathfrak{T}_{t^\alpha}^{(\delta_{l(t)})}/t = W_{t^\alpha}^{(\delta_{l(t)})} c_*^\omega \left(e_{(\delta_{l(t)})}^{(t^\alpha)} \right) / t$ (by Corollary 4.2, reasoning as in the proof of Lemma 4.5 and equation (4.1.15)). In particular, then, since $\mathcal{T}_{\delta_{l(t)}} \geq t - \tau_{\delta_{l(t)}}$, with Lemma 4.10, it must follow that

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0^K \left\{ W_{t^\alpha}^{(\delta_{l(t)})} c_*^\omega \left(e_{(\delta_{l(t)})}^{(t^\alpha)} \right) < t^{1-\epsilon} \right\} = 0$$

for any $\epsilon > 0$.

Therefore, when t goes to infinity, we must have :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_0^K \left\{ c_*^\omega \left(e_{(\delta_{l(t)})}^{(t^\alpha)} \right) < t^{\alpha'} \right\} &\leq \mathbb{P}_0^K \left\{ c_*^\omega \left(e_{(\delta_{l(t)})}^{(t^\alpha)} \right) W_{t^\alpha}^{(\delta_{l(t)})} < t^{1-\epsilon} \right\} \\
&\quad + \sum_{k=1}^M \mathbb{P}_0^K \left\{ c_*^\omega \left(e_{(\delta_{l(t)})}^{(t^\alpha)} \right) \in I_k, c_*^\omega \left(e_{(\delta_{l(t)})}^{(t^\alpha)} \right) W_{t^\alpha}^{(\delta_{l(t)})} \geq t^{1-\epsilon} \right\} \\
&\leq \mathbb{P}_0^K \left\{ c_*^\omega \left(e_{(\delta_{l(t)})}^{(t^\alpha)} \right) W_{t^\alpha}^{(\delta_{l(t)})} < t^{1-\epsilon} \right\} \\
&\quad + \sum_{k=1}^M \mathbb{P}_0^K \left\{ c_*^\omega \left(e_{(\delta_{l(t)})}^{(t^\alpha)} \right) \in I_k, W_{t^\alpha}^{(\delta_{l(t)})} \geq t^{1-\epsilon-\alpha_k} \right\}
\end{aligned} \tag{4.2.3}$$

The first term goes to 0 as discussed above; the sum will be handled by making a union bound for every term, since $l(t) \ll t^{\gamma(1-\alpha)+\zeta}$ for some ζ . Specifically :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^M \mathbb{P}_0^K \left\{ c_*^\omega \left(e_{(\delta_{l(t)})}^{(t^\alpha)} \right) \in I_k, W_{t^\alpha}^{(\delta_{l(t)})} \geq t^{1-\epsilon-\alpha_k} \right\} \\
&\leq \sum_{k=1}^M \sum_{i=1}^{t^{\gamma(1-\alpha)+\zeta}} \mathbb{P}_0^K \left\{ c_*^\omega \left(e_{(\delta_i)}^{(t^\alpha)} \right) \in I_k, W_{t^\alpha}^{(\delta_i)} \geq t^{1-\epsilon-\alpha_k} \right\}
\end{aligned} \tag{4.2.4}$$

Now, first, note that the law of $(c_*^\omega \left(e_{(\delta_i)}^{(t^\alpha)} \right), W_{t^\alpha}^{(\delta_i)})$ under \mathbb{P}_0^K is the same as the law of $(c_*^\omega \left(e^{(t^\alpha)} \right), W_{t^\alpha})$ under \mathbb{P}_{t^α} .⁴ By Lemma 3.4, however, we know that, as t grows large,

$$\sup_{A,B} \left(\mathbb{P}_{t^\alpha} \left\{ c_*^\omega \left(e^{(t^\alpha)} \right) \in A, W_{t^\alpha} \in B \right\} - \mathbb{P}^\infty \left\{ c_*^{\max} \in A \mid c_*^{\max} \geq t^\alpha \right\} \mathbb{P}^\infty \left\{ W_\infty \in B \right\} \right) = o(n^{-\eta_1})$$

for some $\eta_1 > 0$. All together, it means that, as long as we have chosen $\alpha > \gamma/(\gamma + \eta_1)$ and a suitable $\zeta > 0$ small enough,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^M \sum_{i=1}^{t^{\gamma(1-\alpha)+\zeta}} \mathbb{P}_0^K \left\{ c_*^\omega \left(e_{(\delta_i)}^{(t^\alpha)} \right) \in I_k, W_{t^\alpha}^{(\delta_i)} \geq t^{1-\epsilon-\alpha_k} \right\} \\
&= \sum_{k=1}^M t^{\gamma(1-\alpha)+\zeta} \left(o(t^{-\alpha\eta_1}) + \mathbb{P}^\infty \left\{ c_*^{\max} \in I_k \mid c_*^{\max} \geq t^\alpha \right\} \mathbb{P}^\infty \left\{ W_\infty > t^{1-\epsilon-\alpha_k} \right\} \right) \\
&= o(1) + \sum_{k=1}^M t^{\gamma(1-\alpha)+\zeta} \mathbb{P}^\infty \left\{ c_*^{\max} \in I_k \mid c_*^{\max} \geq t^\alpha \right\} \mathbb{P}^\infty \left\{ W_\infty > t^{1-\epsilon-\alpha_k} \right\}
\end{aligned} \tag{4.2.5}$$

⁴Again, for a proof of this, see Lemma C.2 from Appendix C.

All that is left now is to control the factors in the sum. Recalling that, for K large enough, $\mathbb{P}^\infty \{c_*^{\max} > n\} = \mathbb{P}_0^K \{LT(n)\} \asymp L(n)n^{-\gamma}$ (Lemma 3.1), we have :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^\infty \{c_*^{\max} \in I_k \mid c_*^{\max} > t^\alpha\} &= \frac{\mathbb{P}^\infty \{c_*^{\max} \in I_k\}}{\mathbb{P}^\infty \{c_*^{\max} > t^\alpha\}} \\
&\leq \frac{\mathbb{P}^\infty \{c_*^{\max} \geq t^{\alpha_{k-1}}\}}{\mathbb{P}^\infty \{c_*^{\max} \geq t^\alpha\}} \\
&\asymp \frac{L(t^{\alpha_{k-1}})t^{-\gamma\alpha_{k-1}}}{L(t^\alpha)t^{-\gamma\alpha}} \\
&= o(t^{-\gamma(\alpha_{k-1}-\alpha)+r}), \tag{4.2.6}
\end{aligned}$$

where r is an arbitrarily small positive number.

We also have, by Chebyshev's inequality, with Lemma 3.5, for $\xi \in (0, 1 - \gamma)$ as near $1 - \gamma$ as we want :

$$\mathbb{P}^\infty \{W_\infty \geq t^{1-\epsilon-\alpha_k}\} = O(t^{-(\gamma+\xi)(1-\epsilon-\alpha_k)}) \tag{4.2.7}$$

Thus, taking (4.2.6) and (4.2.7) together, we can bound the sum on the right hand side of (4.2.5) when t is large enough and for a suitable constant C :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^M t^{\gamma(1-\alpha)+\zeta} \mathbb{P}^\infty \{c_*^{\max} \in I_k \mid c_*^{\max} \geq t^\alpha\} \mathbb{P}^\infty \{W_\infty > t^{1-\epsilon-\alpha_k}\} \\
&\leq C \sum_{k=1}^M t^{\gamma(1-\alpha)+\zeta-\gamma(\alpha_{k-1}-\alpha)+r-(\gamma+\xi)(1-\epsilon-\alpha_k)} \tag{4.2.8}
\end{aligned}$$

We would like to get a handle on the exponent here. Recalling that $\alpha_k - \alpha_{k-1} = \frac{1}{M}(\alpha' - \alpha)$, and that $\alpha < \alpha_k \leq \alpha'$ for all $1 \leq k \leq M$, then for all k :

$$\begin{aligned}
&\gamma(1-\alpha) + \zeta - \gamma(\alpha_{k-1} - \alpha) + r - (\gamma + \xi)(1 - \epsilon - \alpha_k) \\
&= \gamma[\epsilon + \frac{1}{M}(\alpha' - \alpha)] + \zeta + r - \xi(1 - \epsilon - \alpha_k) \\
&= \frac{1}{M}(\alpha' - \alpha)\gamma + \zeta + r + (\gamma + \xi)\epsilon - \xi(1 - \alpha_k) \\
&\leq \frac{1}{M}(\alpha' - \alpha)\gamma + \zeta + r + (\gamma + \xi)\epsilon - \xi(1 - \alpha'); \tag{4.2.9}
\end{aligned}$$

therefore (4.2.8) becomes :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^M t^{\gamma(1-\alpha)+\zeta} \mathbb{P}^\infty \{c_*^{\max} \in I_k \mid c_*^{\max} \geq t^\alpha\} \mathbb{P}^\infty \{W_\infty > t^{1-\epsilon-\alpha_k}\} \\
&\leq CMt^{\frac{1}{M}\gamma(\alpha' - \alpha) + \zeta + r + (\gamma + \xi)\epsilon - \xi(1 - \alpha')}. \tag{4.2.10}
\end{aligned}$$

We now show that the exponent on the right-hand side of (4.2.10) can be taken to be negative. We may choose M as large as is necessary, and ζ and r , likewise, as small as

necessary; therefore it will suffice to select ϵ and ξ such that :

$$(\gamma + \xi)\epsilon - \xi(1 - \alpha') < 0.$$

Since $\epsilon > 0$ can be arbitrarily small, and ξ can be anywhere between 0 and $1 - \gamma$ (as per Lemma 3.5), this is not a problem; all we need to do is to select ϵ and ξ satisfying :

$$\epsilon < \frac{\xi(1 - \alpha')}{\gamma + \xi}.$$

Let us now quickly pose $\Delta = \xi(1 - \alpha') - (\gamma + \xi)\epsilon$. $\Delta > 0$. We now take $r < \Delta/4$, $\zeta < \Delta/4$ and $M > \frac{1}{\Delta}4\gamma(\alpha' - \alpha)$, and with these choices then (4.2.5) and (4.2.10) together yield

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^M \sum_{i=1}^{t^{\gamma(1-\alpha)+\zeta}} \mathbb{P}_0^K \left\{ c_*^\omega \left(e_{(\delta_i)}^{(t^\alpha)} \right) \in I_k, W_{t^\alpha}^{(\delta_i)} \geq t^{1-\epsilon-\alpha_k} \right\} \\ &= O(t^{-\frac{\Delta}{4}}) = o(1). \end{aligned} \tag{4.2.11}$$

Taking (4.2.3), (4.2.4), (4.2.5) and (4.2.11), the result is proved. \square

Remark 4.3. *Note that this imposes additional constraints on the choice of α ; notably*

$$\alpha > \frac{\gamma}{\gamma + \eta_i}; \quad i = 0, 1; \tag{4.2.12}$$

where $\eta_0 > 0$ and η_1 are as in Lemmas 3.3 and 3.4 respectively. However all the constraints are in the form of lower bounds strictly smaller than 1. This, therefore, poses no problem.

4.2.2. Time considerations.

Next up, we need to show two crucial facts about how the walk spends its time during that last long regeneration period started before t . Lemma 4.10 tells us that that total time $\mathcal{T}_{\delta_{l(t)}}$ is on the order of t ; we want to show two things :

- that the time spent *away* from the large trap in that long regeneration period is of order $t^{1-\epsilon}$ for an $\epsilon > 0$;
- that, therefore, it is overwhelmingly likely that we have at least *reached* the large trap before time t .

Recall the following definitions from section 3.2.3.2 :

$$\mathcal{T}_i^{\geq n} := \sum_{e \in E_{< n}^c \cap (\mathcal{R}^0 \setminus \mathcal{E}_0)} |\{k \in [\tau_{i-1} + 1, \tau_i) : \{X_{k-1}, X_k\} = e\}|; \tag{3.2.11}$$

and

$$\mathcal{T}_i^{< n} := \mathcal{T}_i - \mathcal{T}_i^{\geq n}. \tag{3.2.12}$$

As we have just shown, the event $OLT^{(\delta_{l(t)})}(\delta_{\alpha'}^\alpha, t^{\alpha'})$ occurs with overwhelming probability as t grows large; recall that on $OLT^{(i)}(\delta, n)$ for any δ , then, as introduced in section 3.2.4,

the time spent on either endpoint of the large trap is :

$$\mathfrak{T}_n^{(i)} = \left| \left\{ k \in [\tau_{i-1}, \tau_i) : X_k \in e_{(i)}^{(n)} \right\} \right|.$$

Assuming that $OLT^{(i)}(\delta, n)$ occurs, then we must have that

$$\mathcal{T}_i^{\geq n^\delta} \leq \mathfrak{T}_n^{(i)}. \quad (4.2.13)$$

Indeed, $c_*^\omega(e_{(i)}^{(n)})$ is the only conductance encountered that is larger than n^δ on $OLT^{(i)}(\delta, n)$, and $\mathcal{T}_i^{\geq n^\delta}$ therefore counts the number of times when the walk at an endpoint of $e_{(i)}^{(n)}$ by crossing it, which is at most the number of times when the walk arrives at an endpoint of $e_{(i)}^{(n)}$ from anywhere. Conversely, still on $OLT^{(i)}(\delta, n)$: the number of times when the walk is away from $e_{(i)}^{(n)}$ during the regeneration period from τ_{i-1} to τ_i is bounded as follows :

$$\mathcal{T}_i - \mathfrak{T}_n^{(i)} \leq \mathcal{T}_i^{< n^\delta} \quad (4.2.14)$$

Remark 4.4. In fact the discrepancy between $\mathcal{T}_i^{\geq n^\delta}$ and $\mathfrak{T}_n^{(i)}$ is exactly V_n , the total number of separate, respectively contiguous sojourns on $e_{(i)}^{(n)}$ (see (3.2.23)), since that number corresponds to the number of times that the walk arrives on the large trap from somewhere else.

Lemma 4.12. Fix $\epsilon \in [0, 1 - \alpha(1 - \frac{(1-\delta)(1-\gamma)}{1+\gamma}))$. Then, there exists K_0 finite such that when $K > K_0$, for all $i > 1$ and all $\eta > 0$, as t goes to infinity :

$$\mathbb{P}_0^K \left\{ \mathcal{T}_{\delta_i}^{< t^{\alpha\delta}} > \eta t^{1-\epsilon} \right\} = O(t^{-\phi+\zeta}) \rightarrow 0 \quad (4.2.15)$$

for any small $\zeta > 0$ and

$$\phi = \frac{1}{2}(1 + \gamma)(1 - \epsilon - \alpha) + \frac{1}{2}(1 - \gamma)\alpha(1 - \delta). \quad (4.2.16)$$

Furthermore, when $\epsilon \in [0, b')$ for some $b' > 0$, we also have

$$\mathbb{P}_0^K \left\{ \mathcal{T}_{\delta_{l(t)}}^{< t^{\alpha\delta}} > \eta t^{1-\epsilon} \right\} = o(1). \quad (4.2.17)$$

PROOF. Note that under \mathbb{P}_0^K , the sequences $(\mathcal{T}_i^{< n^\delta})_{i>1}$ and $(\mathcal{T}_{\delta_i}^{< n^\delta})_{i>1}$ are i.i.d. sequences of random variables with the same respective marginal distributions as $\mathcal{T}_1^{< n^\delta}$ and $\mathcal{T}_{\delta_1}^{< n^\delta}$ under $\overline{\mathbb{P}}_0$.

Hence, for instance, for any $i > 1$ and any $\delta' \in (0, 1)$, according to Lemma 3.2 :

$$\mathbb{P}_0^K \left\{ \mathcal{T}_i^{< n^{\delta'}} > an \right\} \leq C(\delta', a)n^{-\gamma - \frac{1}{2}(1-\delta')(1-\gamma)}.$$

We take $n = t^{1-\epsilon}$, $a = \eta$ and $\delta' = \frac{\alpha\delta}{1-\epsilon}$, and this immediately becomes :

$$\mathbb{P}_0^K \left\{ \mathcal{T}_i^{< t^{\alpha\delta}} > \eta t^{1-\epsilon} \right\} \leq C(\delta', \eta)t^{-\gamma(1-\epsilon) - \frac{1}{2}(1-\epsilon-\alpha\delta)(1-\gamma)}. \quad (4.2.18)$$

We now consider

$$\mathbb{P}_0^K \left\{ \mathcal{T}_{\delta_i}^{<t^{\alpha\delta}} > \eta t^{1-\epsilon} \right\} = \bar{\mathbb{P}}_0 \left\{ \mathcal{T}_{\delta_1}^{<t^{\alpha\delta}} > \eta t^{1-\epsilon} \right\}.$$

Under $\bar{\mathbb{P}}_0$, δ_1 is simply a geometric random variable with success parameter $p(t) = \bar{\mathbb{P}}_0 \{LT(t^\alpha)\} \asymp L(t^\alpha)t^{-\gamma\alpha}$. In particular, $\bar{\mathbb{P}}_0 \{\delta_1 > k\} = (1 - p(t))^k$, and since $p(t) \gg t^{-\gamma\alpha-r}$ for any $r > 0$, then it follows that when t is large enough, $1 - p(t) \leq (1 - t^{-\gamma\alpha-r})$. Thus, for any $\zeta > 0$,

$$\bar{\mathbb{P}}_0 \left\{ \delta_1 > t^{\gamma\alpha+\zeta} \right\} \leq \left(1 - t^{-\gamma\alpha-r}\right)^{t^{\gamma\alpha+\zeta}} \sim e^{-t^{\zeta-r}},$$

and it suffices to select $r = \zeta/2$ in order to have :

$$\bar{\mathbb{P}}_0 \left\{ \delta_1 > t^{\gamma\alpha+\zeta} \right\} = O(e^{-t^{\zeta/2}}) = o(t^{-\theta}),$$

for any $\theta > 0$.

Thus, we have the following union bound :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{P}}_0 \left\{ \mathcal{T}_{\delta_1}^{<t^{\alpha\delta}} > \eta t^{1-\epsilon} \right\} &\leq \bar{\mathbb{P}}_0 \left\{ \delta_1 > t^{\gamma\alpha+\zeta} \right\} + \sum_{i=1}^{t^{\gamma\alpha+\zeta}} \bar{\mathbb{P}}_0 \left\{ \mathcal{T}_i^{<t^{\alpha\delta}} > \eta t^{1-\epsilon} \right\} \\ &= o(t^{-\theta}) + t^{\gamma\alpha+\zeta} O(t^{-\gamma(1-\epsilon) - \frac{1}{2}(1-\epsilon-\alpha\delta)(1-\gamma)}) \\ &= O(t^{-\gamma(1-\epsilon-\alpha) - \frac{1}{2}(1-\gamma)(1-\epsilon-\alpha\delta) + \zeta}) = O(t^{-\phi+\zeta}), \end{aligned} \quad (4.2.19)$$

where we have simply defined

$$\phi := \gamma(1 - \epsilon - \alpha) + \frac{1}{2}(1 - \gamma)(1 - \epsilon - \alpha\delta).$$

By some rearranging, we get (4.2.16) :

$$\begin{aligned} \phi &= \gamma(1 - \epsilon - \alpha) + \frac{1}{2}(1 - \gamma)(1 - \epsilon - \alpha\delta) \\ &= \gamma(1 - \epsilon - \alpha) + \frac{1}{2}(1 - \gamma)(1 - \epsilon - \alpha) + \frac{1}{2}(1 - \gamma)\alpha(1 - \delta) \\ &= \frac{1}{2}(1 + \gamma)(1 - \epsilon - \alpha) + \frac{1}{2}(1 - \gamma)\alpha(1 - \delta). \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

Of course we want to ensure that $\phi > 0$; for this it will be sufficient that

$$(1 + \gamma)(\alpha - (1 - \epsilon)) < (1 - \gamma)\alpha(1 - \delta);$$

this is verified if

$$\epsilon < 1 - \alpha + \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma}\alpha(1 - \delta), \quad (4.2.20)$$

which is the condition stated in the lemma. Crucially, the upper bound on the possible values for ϵ is *larger* than $1 - \alpha$.

The proof of (4.2.17) is done with a similar union bound; since we only want the right-hand side to be $o(1)$, we may use Lemma 4.1 to provide a suitable bound for $\delta_{l(t)}$; from

there, reasoning as above, it will be possible to find at least some value $\epsilon > 0$ for which the convergence holds. \square

We will now show that it is overwhelmingly likely that, at time t , the walk has already encountered the single large trap it encounters during the $\delta_{l(t)}$ -th regeneration period.

First, recall the definition of the hitting times :

$$T_A = \inf \{t \geq 0 : X_t \in A\}. \quad (3.2.6)$$

We have the following :

Lemma 4.13. *There exists K_0 finite such that when $K > K_0$, with $\delta \in (0, 1)$,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0^K \left\{ OLT^{(\delta_{l(t)})}(\delta \frac{\alpha}{\alpha'}, t^{\alpha'}), T_{e_{(\delta_{l(t)})}^{(t^{\alpha'})}} < t \right\} = 1. \quad (4.2.21)$$

PROOF. We already know that

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0^K \left\{ OLT^{(\delta_{l(t)})}(\delta(\alpha/\alpha'), t^{\alpha'}) \right\} = 1.$$

From the definition of $e_{(\delta_{l(t)})}^{(t^{\alpha'})}$, it is clear that

$$\tau_{\delta_{l(t)}-1} \leq T_{e_{(\delta_{l(t)})}^{(t^{\alpha'})}} < \tau_{\delta_{l(t)}}.$$

It is also equally clear that

$$T_{e_{(\delta_{l(t)})}^{(t^{\alpha'})}} - \tau_{\delta_{l(t)}-1} \leq \mathcal{T}_{\delta_{l(t)}} - \mathfrak{T}_{t^{\alpha'}}^{(\delta_{l(t)})} \leq \mathcal{T}_{\delta_{l(t)}}^{< t^{\alpha\delta}},$$

since $\mathcal{T}_{\delta_{l(t)}} - \mathfrak{T}_{t^{\alpha'}}^{(i)}$ is the time spent *away* from either endpoint of $e_{(\delta_{l(t)})}^{(t^{\alpha'})}$, and that must include at least the time *before* the walk ever gets to them.

Thus, by Lemma 4.12, and specifically by (4.2.17) with $\epsilon = 0$, it must follow that when t grows large, for any $\eta > 0$

$$\mathbb{P}_0^K \left\{ T_{e_{(\delta_{l(t)})}^{(t^{\alpha'})}} - \tau_{\delta_{l(t)}-1} > \eta t, OLT^{(\delta_{l(t)})}(\delta(\alpha/\alpha'), t^{\alpha'}) \right\} = o(1).$$

On the other hand, Lemma 4.10 tells us that for any $\eta > 0$, when t grows large, $t - \tau_{\delta_{l(t)}-1}$ should be of the order of ηt for some $\eta > 0$.

More precisely : for any $\eta \in (0, 1)$, consider the following union bound, with $\eta_0 = \eta/2$

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}_0^K \left\{ t - \tau_{\delta_{l(t)}-1} > \eta t, OLT^{(\delta_{l(t)})}(\delta(\alpha/\alpha'), t^{\alpha'}) \right\} \\
\leq & \mathbb{P}_0^K \left\{ t - T_{e^{(t\alpha')}}_{e^{(\delta_{l(t)})}} > \eta_0 t, OLT^{(\delta_{l(t)})}(\delta(\alpha/\alpha'), t^{\alpha'}) \right\} \\
& + \mathbb{P}_0^K \left\{ T_{e^{(t\alpha')}}_{e^{(\delta_{l(t)})}} - \tau_{\delta_{l(t)}-1} > \eta_0 t, OLT^{(\delta_{l(t)})}(\delta(\alpha/\alpha'), t^{\alpha'}) \right\} \\
\leq & \mathbb{P}_0^K \left\{ T_{e^{(t\alpha')}}_{e^{(\delta_{l(t)})}} < t, OLT^{(\delta_{l(t)})}(\delta(\alpha/\alpha'), t^{\alpha'}) \right\} \\
& + \mathbb{P}_0^K \left\{ T_{e^{(t\alpha')}}_{e^{(\delta_{l(t)})}} - \tau_{\delta_{l(t)}-1} > \eta_0 t, OLT^{(\delta_{l(t)})}(\delta(\alpha/\alpha'), t^{\alpha'}) \right\}
\end{aligned}$$

Rearranging yields :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}_0^K \left\{ T_{e^{(t\alpha')}}_{e^{(\delta_{l(t)})}} < t, OLT^{(\delta_{l(t)})}(\delta(\alpha/\alpha'), t^{\alpha'}) \right\} \\
\geq & \mathbb{P}_0^K \left\{ t - \tau_{\delta_{l(t)}-1} > \eta t, OLT^{(\delta_{l(t)})}(\delta(\alpha/\alpha'), t^{\alpha'}) \right\} \\
& - \mathbb{P}_0^K \left\{ T_{e^{(t\alpha')}}_{e^{(\delta_{l(t)})}} - \tau_{\delta_{l(t)}-1} > \eta_0 t, OLT^{(\delta_{l(t)})}(\delta(\alpha/\alpha'), t^{\alpha'}) \right\}.
\end{aligned}$$

By taking the limit when t goes to infinity, with Lemmas 4.10 and 4.12, we have that

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0^K \left\{ T_{e^{(t\alpha')}}_{e^{(\delta_{l(t)})}} < t, OLT^{(\delta_{l(t)})}(\delta(\alpha/\alpha'), t^{\alpha'}) \right\} \geq \frac{\sin \pi \gamma}{\pi} \int_{y=0}^{(1-\eta)} y^{\gamma-1} (1-y)^{-\gamma} dy.$$

We conclude by taking the limit when η goes to 0. □

4.2.3. The probability that the walk is away from the trap.

We now come to the central argument required here : to show that, once the large trap in a long regeneration period has been reached, it is very unlikely that the walk finds itself away from it at any moment within a window of time proportional to t before the next regeneration period begins.

This proof proceeds by contradiction : Lemma 4.12 tells us that it is unlikely that we would spend a time $t^{1-\epsilon}$ away from the large trap. We will use the Markov property of the walk under the quenched law to show that if the probability that the walk is away from the trap at time t was not vanishingly small, then neither would it be that small at times $t+k$, for a number of values of k which exceeds $t^{1-\epsilon}$ – in other words, the walk would end up away from the trap far more often than Lemma 4.12 allows.

In an effort to keep notation palatable, unless confusion is imminent, we will simply drop the superscripts for the $t^{\alpha'}$ -large traps, so that $e_{(\delta_i)} := e_{(\delta_i)}^{(t^{\alpha'})}$. In the same spirit, we also abridge $OLT^{(i)}(\delta_{\frac{\alpha}{\alpha'}}, t^{\alpha'})$ to $OLT^{(i)}$.

Lemma 4.14. *There exists K_0 finite such that when $K > K_0$, for suitable choices of $\alpha' \in (\alpha, 1)$, $\delta \in (0, 1)$, for $\zeta > 0$ sufficiently small and for any $i > 1$,*

$$\mathbb{P}_0^K \left\{ OLT^{(\delta_i)}, T_{e_{(\delta_i)}} \leq t < \tau_{\delta_i}, X_t \notin e_{(\delta_i)} \right\} = o(t^{-\gamma(1-\alpha)-\zeta}) \quad (4.2.22)$$

PROOF. Suppose that the lemma is false; that is, suppose that there exists an unbounded, increasing sequence t_n and a strictly positive η such that, for all values of n ,

$$\mathbb{P}_0^K \left\{ OLT_{\alpha'}^{(\delta_i)}, T_{e_{(\delta_i)}} \leq t_n < \tau_{\delta_i}, X_{t_n} \notin e_{(\delta_i)} \right\} \geq \eta t_n^{-\gamma(1-\alpha)-\zeta}, \quad (4.2.23)$$

(Here, implicit dependence on t has been replaced with implicit dependence on t_n ; i.e., $\delta_i = \delta_i(t_n^\alpha)$, $OLT_{\alpha'}^{(\delta_i)} = OLT^{(\delta_i)}(\delta(\alpha/\alpha'), t_n^{\alpha'})$.)

We endeavour to show that this supposition will imply a contradiction. First let us introduce the following events :

$$A_j := \left\{ T_{e_{(\delta_i)}} \leq t_n + 2j < \tau_{\delta_i}, X_{t_n+2j} \notin e_{(\delta_i)} \right\}. \quad (4.2.24)$$

With this notation, we may re-state (4.2.23) simply as

$$\mathbb{P}_0^K \left\{ A_0, OLT^{(\delta_i)} \right\} \geq \eta t_n^{-\gamma(1-\alpha)-\zeta}. \quad (4.2.25)$$

Step 1 : The walk is unlikely to have left the $t_n^{\alpha'}$ -large edge.

Using (4.2.25), we will show that for some $\eta_1 > 0$ and for all $0 \leq j \leq \eta_1 t_n^{\alpha' - \alpha\delta}$, we have :

$$\mathbb{P}_0^K \left\{ A_j, OLT^{(\delta_i)} \right\} \geq \frac{1}{2} \eta t_n^{-\gamma(1-\alpha)-\zeta} \quad (4.2.26)$$

Before we launch into a long chain of arguments, let us provide some intuition and a short outline. First, note that once the walk arrives at the large trap, it is not easy to get away; on $OLT(\delta(\alpha/\alpha'), t^{\alpha'})$, under the quenched law, the probability of success should be bounded by $O(t_n^{\alpha\delta - \alpha'})$ since, of course, the large trap has conductance greater than t^α and all other edges have conductances lower than $t^{\alpha\delta}$.

Under the quenched law, events are best thought of as collections of *paths* (or, parts of $(\mathbb{Z}^d)^{\mathbb{N}}$) that the walk can take; much of the argument will focus on these. We will show that the probability that the walk takes a path that hits the large trap before leading it away at time t_n is within a constant factor of the probability that the walk takes the same path, but makes $2j$ extra steps back and forth along the large trap before resuming. While the former path is a path in A_0 , the latter one is a path in A_j .

The argument will be split into the following sub-steps :

- 1 (a) First, we will introduce a “path transform” that takes any path that hits the large trap, and adds in $2j$ extra steps back and forth along the large trap upon first arriving there;
- 1 (b) next, we will also introduce the condition that the walk goes back and forth at least once along the large trap, to avoid possible unpleasantness when regeneration times happen while in the trap;
- 1 (c) then, assuming this condition, we will show that the probabilities of the paths in A_0 and the transformed paths are within a constant factor of each other, as mentioned above;
- 1 (d) finally, we will show that the condition that the walk goes back and forth along the large trap is overwhelmingly likely, such that the impact on our estimate is negligible.

Step 1 (a) : The path transform.

Under the quenched law, we can think of events as sets of half-infinite paths – infinite sequences $x = (x_l)_{l \in \mathbb{Z}^+} \in (\mathbb{Z}^d)^{\mathbb{Z}^+}$ where each consecutive pair $\{x_{i-1}, x_i\}$ is an edge in $E(\mathbb{Z}^d)$. We will use the notation $[\cdot]_k$ for the k -th component (corresponding to the position of the walk after it has gone i steps along the path). We also consider random variables to be functions of paths.

We introduce the “path transforms” $r_j : A_0 \rightarrow (\mathbb{Z}^d)^{\mathbb{Z}^+}$. r_j maps all the paths in A_0 to the same path, with an intervening $2j$ steps back and forth along the large trap upon first encountering it. More specifically, if $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}^+} \in A_0$, then $r_j(\mathbf{x})$ is defined as follows :

$$[r_j(\mathbf{x})]_k = \begin{cases} x_k & \text{if } k \leq T_{e_{(\delta_i)}}(\mathbf{x}) \\ (e_{(\delta_i)}(\mathbf{x}))^\pm & \text{if } k = T_{e_{(\delta_i)}}(\mathbf{x}) + 2m, 0 \leq m \leq j \\ (e_{(\delta_i)}(\mathbf{x}))^\mp & \text{if } k = T_{e_{(\delta_i)}}(\mathbf{x}) + 2m - 1, 0 \leq m \leq j \\ x_{k-2j} & \text{if } k > T_{e_{(\delta_i)}}(\mathbf{x}) + 2j \end{cases} \quad (4.2.27)$$

Here, $(e_{(\delta_i)})^\pm$ and $(e_{(\delta_i)})^\mp$ are respectively the first endpoint of the large trap encountered, and “the other one”, whichever it is. Note also that the dependence on the random variables $e_{(\delta_i)}$ and $T_{e_{(\delta_i)}}$ on \mathbf{x} have been made explicit.

Call $\mathbf{x}' = (x'_k)_{k \in \mathbb{Z}^+} = r_j(\mathbf{x})$ the “transformed path”. Our aim is to show that \mathbf{x}' is in A_j .

It is immediately clear from the definition of r_j that $e_{(\delta_i)}(\mathbf{x}') = e_{(\delta_i)}(\mathbf{x})$, and $T_{e_{(\delta_i)}}(\mathbf{x}') = T_{e_{(\delta_i)}}(\mathbf{x})$. Also, $x'_{t_n} = x_{2j}$, since when $\mathbf{x} \in A_0$, $t_n \geq T_{e_{(\delta_i)}}(\mathbf{x})$. Hence, it is clear that $x'_{t_n+2j} \notin e_{(\delta_i)}(\mathbf{x}')$. So far all conditions are met for \mathbf{x}' to be in A_j .

We would like very much for $\tau_{\delta_i}(\mathbf{x}')$ to be equal to $\tau_{\delta_i}(\mathbf{x}) + 2j$ – that is, it would be very useful to us if the regeneration time τ_{δ_i} for \mathbf{x}' was simply delayed by our $2j$ extra steps, but that it otherwise happened at the same place. This, however, is not as obvious.

Indeed, unless the walk crosses the large trap $e_{(\delta_i)}$ in both directions at least once, it is technically still possible that τ_{δ_i} (the first regeneration time after encountering the large trap) could occur behind either endpoint of $e_{(\delta_i)}$; if the path \mathbf{x} is a such path (where $x_{\tau_{\delta_i}} \cdot \ell < (\frac{\pm}{(\delta_i)} \cdot \ell)$, then the introduction of $2j$ back-and-forth steps along $e_{(\delta_i)}$ will completely change the regeneration structure.

For this reason, we will begin by excluding these paths.

Step 1 (b) : The back-and-forth condition.

For any $e \in E(\mathbb{Z}^d)$, we may introduce the following event :

$$BF(e) := \{X_{T_e+k} \in e : k = 0, 1, 2\} \cup \{T_e = +\infty\}; \quad (4.2.28)$$

the event $BF(e)$ is the event that the walk travels back and forth across edge e at least once, immediately as soon as it encounters it, or never encounters edge e at all.

On the event $BF(e_{(\delta_i)})$, the regeneration time τ_{δ_i} *cannot* occur at either endpoint of the edge $e_{(\delta_i)}$. This ensures that adding further back-and-forth steps along $e_{(\delta_i)}$ will not change *where* the regeneration happens; it will only delay that by exactly as many steps as we choose to insert in the walk's path.

We now introduce :

$$\tilde{A}_j := A_j \cap BF(e_{(\delta_i)}). \quad (4.2.29)$$

If $\mathbf{x} \in \tilde{A}_0$, then it already goes back and forth along $e_{(\delta_i)}(\mathbf{x})$ once, and the regeneration time $\tau_{\delta_i}(\mathbf{x})$ occurs later, at a site "ahead of" $e_{(\delta_i)}$ along the direction of the bias. Thus, the transform preserves the regeneration structure, and simply delays that regeneration time by $2j$ steps : $\tau_{\delta_i}(\mathbf{x}') = \tau_{\delta_i}(\mathbf{x})$. It therefore follows that $t_n + 2j < \tau_{\delta_i}(\mathbf{x}')$, which concludes the proof that $\mathbf{x}' = r_j(\mathbf{x}) \in \tilde{A}_j$. Or, if we let

$$B_j := r_j(\tilde{A}_0), \quad (4.2.30)$$

then we have shown that $B_j \subseteq \tilde{A}_j \subseteq A_j$.

Step 1 (c) : The probability of transformed paths.

We recall that our objective is to show (4.2.26); it would be sufficient, therefore, to show that $P_0^\omega \{B_j, OLT^{(\delta_i)}\}$ is larger than half of $P_0^\omega \{A_0, OLT^{(i)}\}$, before taking the expectation with respect to ω . However, for this to work, we will first need to show that, for sufficiently many values of j :

$$P_0^\omega \{B_j, OLT^{(\delta_i)}\} \geq \frac{2}{3} P_0^\omega \{\tilde{A}_0, OLT^{(\delta_i)}\}. \quad (4.2.31)$$

In other words : on $OLT^{(\delta_i)}$, B_j is at least two thirds as likely as \tilde{A}_0 – the requirement that the large trap keep the walk trapped for an extra $2j$ steps is not too onerous, probability-wise.

First, let us introduce the sets $LE(t_n^{\alpha'})$ of edges with $t_n^{\alpha'}$ -large conductances whose neighbouring edges all have conductances lower than $t_n^{\alpha\delta}$:

$$LE(t_n^{\alpha'}) := \left\{ e \in E(\mathbb{Z}^d) : c_*^\omega(e) \geq t_n^{\alpha'}, c_*^\omega(f) < t_n^{\alpha\delta} \forall f \sim e \right\},$$

and $LEV(t_n^{\alpha'})$, the set of endpoints of edges in $LE(t_n^{\alpha'})$:

$$LEV(t_n^{\alpha'}) := \bigcup_{e \in LE(t_n^{\alpha'})} e.$$

These random sets are measurable with respect to ω , and therefore constants under P^ω .

We will also denote by $OLT_{0 \leftrightarrow v, l}^{(\delta_i)}$ the set of all paths of length l which start and end respectively at vertices 0 and v , and are also in $OLT^{(\delta_i)}$. With the notation $\mathbf{x}_{\leq k} = (x_i)_{0 \leq i \leq k}$ for the sequence of the k first steps of path \mathbf{x} ,

$$OLT_{0 \leftrightarrow v, l}^{(\delta_i)} := \left\{ \mathbf{x}_{\leq l} : \mathbf{x} \in OLT^{(\delta_i)}, T_v(\mathbf{x}) = l \right\}.$$

The goal of these definitions is to split the probability space into smaller portions, until we can look at the probability, path by path, according to where and when the walk hits the large trap. Under the quenched law, then, we have :

$$\begin{aligned} P_0^\omega \left\{ B_j, OLT^{(\delta_i)} \right\} &= \sum_{v \in LEV(t_n^{\alpha'})} P_0^\omega \left\{ B_j, OLT^{(\delta_i)}, X_{T_{e_{(\delta_i)}}} = v \right\} \\ &= \sum_{v \in LEV(t_n)} \sum_{l=0}^{t_n} \sum_{\mathbf{x} \in OLT_{0 \leftrightarrow v, l}^{(\delta_i)}} [P_0^\omega \{ \mathbf{X}_{\leq l} = \mathbf{x} \} \\ &\quad \times P_0^\omega \{ X_{l+m} \in e_{(\delta_i)} \forall 0 \leq m \leq 2j \mid \mathbf{X}_{\leq l} = \mathbf{x} \} \\ &\quad \times P_0^\omega \{ B_j, OLT^{(\delta_i)} \mid X_{l+m} \in e_{(\delta_i)} \forall m \leq 2j, \mathbf{X}_{\leq l} = \mathbf{x} \}]. \end{aligned} \quad (4.2.32)$$

We introduce $w = w(e_{(\delta_i)})$ the “other” endpoint of $e_{(\delta_i)}$: the one that is *not* encountered first; it is measurable with respect to $X_{T_{e_{(\delta_i)}}}$ or, on $T_{e_{(\delta_i)}} = l$, it is measurable with respect to X_l .

Since the walk can never stay in place, we may rewrite the second factor in the term of our triple-sum as :

$$\begin{aligned} &P_0^\omega \left\{ X_{l+m} \in e_{(\delta_i)} \forall m \leq 2j \mid \mathbf{X}_{\leq l} = \mathbf{x} \right\} \\ &= P_0^\omega \left\{ X_{l+2m-1} = w, X_{l+2m} = v \forall 1 \leq m \leq j \mid \mathbf{X}_{\leq l} = \mathbf{x} \right\} \end{aligned}$$

With the Markov property repeatedly applied, this is :

$$\begin{aligned} &P_0^\omega \left\{ X_{l+2m-1} = w, X_{l+2m} = v \forall 1 \leq m \leq j \mid \mathbf{X}_{\leq l} = \mathbf{x} \right\} \\ &= P_0^\omega \left\{ X_{l+1} = w \mid X_l = v \right\}^j \times P_0^\omega \left\{ X_{l+2} = v \mid X_{l+1} = w, X_l = v \right\}^j, \end{aligned}$$

Under the quenched law, v and w are constants, so this is simply

$$\begin{aligned} P_0^\omega \{X_{l+1} = w \mid X_l = v\}^j &\times P_0^\omega \{X_{l+2} = v \mid X_{l+1} = w, X_l = v\}^j \\ &= p^\omega(v, w)^j p^\omega(w, v)^j \end{aligned}$$

where the p^ω are the quenched transition probabilities defined from equation (3.1.1) to (3.1.3); this is :

$$p^\omega(v, w) = \frac{c_*^\omega(v, w)e^{\ell \cdot (v+w)}}{\sum_{z: z \sim v} c_*^\omega(v, z)e^{\ell \cdot (v+z)}}$$

Of course, $\{v, w\} = e_{(\delta_i)}$ and we have, therefore, that $c_*^\omega(v, w) \geq t_n^{\alpha'}$; on the other hand, for all other $z \sim v$, $c_*^\omega(v, z) \leq t_n^{\alpha\delta}$. Therefore, we have

$$\begin{aligned} p^\omega(v, w) &= 1 - \frac{\sum_{z \sim v: z \neq w} c_*^\omega(v, z)e^{\ell \cdot (v+z)}}{\sum_{z' \sim v} c_*^\omega(v, z')e^{\ell \cdot (v+z')}} \\ &\geq 1 - \frac{\sum_{z \sim v: z \neq w} c_*^\omega(v, z)e^{\ell \cdot (v+z)}}{c_*^\omega(v, w)e^{\ell \cdot (v+w)}} \\ &\geq 1 - t_n^{\alpha\delta - \alpha'} \sum_{z \sim v: z \neq w} e^{\ell \cdot (z-w)} \\ &\geq 1 - Ct_n^{\alpha\delta - \alpha'}, \end{aligned}$$

where we can take $C = 2de^{2\lambda}$, with $\lambda = \|\ell\|$. We can come to the same bound for $p^\omega(w, v)$, in a similar way.

At the end of all of this, then, the second factor in the term of the right-hand side of (4.2.32) is bounded as follows : for all $j \leq \eta_1 t_n^{\alpha' - \alpha\delta}$,

$$\begin{aligned} P_0^\omega \{X_{l+m} \in e_{(\delta_i)} \mid \forall 0 \leq m \leq 2j \mid \mathbf{X}_{\leq l} = \mathbf{x}\} &\geq (1 - Ct_n^{\alpha\delta - \alpha'})^{2j} \\ &\geq (1 - Ct_n^{-(\alpha' - \alpha\delta)})^{2\eta_1 t_n^{\alpha' - \alpha\delta}} \\ &\rightarrow e^{-2C\eta_1} \end{aligned}$$

as n grows to infinity. Therefore, we can find an $\eta_1 > 0$ such that, when n is sufficiently large, for all $j \leq \eta_1 t_n^{\alpha' - \alpha\delta}$,

$$P_0^\omega \{X_{l+m} \in e_{(\delta_i)} \mid \forall 0 \leq m \leq 2j \mid \mathbf{X}_{\leq l} = \mathbf{x}\} \geq \frac{2}{3}. \quad (4.2.33)$$

Going back to (4.2.32), this now yields:

$$\begin{aligned} P_0^\omega \{B_j, OLT^{(\delta_i)}\} &\geq \frac{2}{3} \sum_{v \in LEV(t_n)} \sum_{l=0}^{t_n} \sum_{\mathbf{x} \in OLT_{0 \leftrightarrow v, l}^{(\delta_i)}} [P_0^\omega \{\mathbf{X}_{\leq l} = \mathbf{x}\} \\ &\quad \times P_0^\omega \{B_j, OLT^{(\delta_i)} \mid X_{l+m} \in e_{(\delta_i)} \mid \forall m \leq 2j, \mathbf{X}_{\leq l} = \mathbf{x}\}]. \end{aligned} \quad (4.2.34)$$

Now, recall that $B_j = r_j(\tilde{A}_0)$; this means that every path in B_j is the image of a path in A_0 . Given that, upon hitting time $e_{(\delta_i)}$ at time l , we then spent $2j$ steps going back and forth along $e_{(\delta_i)}$, and *then* resume the same path, we see that

$$P_0^\omega \left\{ B_j, OLT^{(\delta_i)} \mid X_{l+m} \in e_{(\delta_i)} \forall m \leq 2j, \mathbf{X}_{\leq l} = \mathbf{x} \right\} = P_0^\omega \left\{ \tilde{A}_0, OLT^{(\delta_i)} \mid \mathbf{X}_{\leq l} = \mathbf{x} \right\}. \quad (4.2.35)$$

Replacing (4.2.35) in (4.2.34), we finally find

$$\begin{aligned} P_0^\omega \left\{ B_j, OLT^{(\delta_i)} \right\} &\geq \frac{2}{3} \sum_{v \in LEV(t_n)} \sum_{l=0}^{t_n} \sum_{\mathbf{x} \in OLT_{0 \leftrightarrow v, l}^{(\delta_i)}} \left[P_0^\omega \left\{ \mathbf{X}_{\leq l} = \mathbf{x} \right\} \times P_0^\omega \left\{ \tilde{A}_0, OLT^{(\delta_i)} \mid \mathbf{X}_{\leq l} = \mathbf{x} \right\} \right] \\ &= \frac{2}{3} P_0^\omega \left\{ \tilde{A}_0, OLT^{(\delta_i)} \right\}, \end{aligned}$$

which is exactly (4.2.31).

Step 1 (d) : Removing the back-and-forth condition.

We have bounded $P_0^\omega \left\{ B_j, OLT^{(\delta_i)} \right\}$ below by $\frac{2}{3} P_0^\omega \left\{ \tilde{A}_0, OLT^{(\delta_i)} \right\}$. Now, to complete our task, all that is left to do is show that the probability of \tilde{A}_0 and that of A_0 are not too dissimilar.

Using the same trick as before, we have :

$$\begin{aligned} P_0^\omega \left\{ \tilde{A}_0, OLT^{(\delta_i)} \right\} &= P_0^\omega \left\{ A_0, BF(e_{(\delta_i)}), OLT^{(\delta_i)} \right\} \\ &= \sum_{v \in LEV(t_n')} \sum_{l=0}^{t_n} \sum_{\mathbf{x} \in OLT_{0 \leftrightarrow v, l}^{(\delta_i)}} \left[P_0^\omega \left\{ \mathbf{X}_{\leq l} = \mathbf{x} \right\} \right. \\ &\quad \times P_0^\omega \left\{ BF(e_{(\delta_i)}) \mid \mathbf{X}_{\leq l} = \mathbf{x} \right\} \\ &\quad \left. \times P_0^\omega \left\{ A_0, OLT^{(\delta_i)} \mid BF(e_{(\delta_i)}), \mathbf{X}_{\leq l} = \mathbf{x} \right\} \right] \end{aligned} \quad (4.2.36)$$

Of course, we have :

$$\begin{aligned} &P_0^\omega \left\{ A_0, OLT^{(\delta_i)} \mid X_{\leq l} = \mathbf{x} \right\} \\ &\leq P_0^\omega \left\{ A_0, OLT^{(\delta_i)} \mid BF(e_{(\delta_i)}), \mathbf{X}_{\leq l} = \mathbf{x} \right\} P_0^\omega \left\{ BF(e_{(\delta_i)}) \mid \mathbf{X}_{\leq l} = \mathbf{x} \right\} \\ &\quad + P_0^\omega \left\{ BF(e_{(\delta_i)})^c \mid \mathbf{X}_{\leq l} = \mathbf{x} \right\}, \end{aligned}$$

or, rearranging :

$$\begin{aligned} &P_0^\omega \left\{ A_0, OLT^{(\delta_i)} \mid BF(e_{(\delta_i)}), \mathbf{X}_{\leq l} = \mathbf{x} \right\} P_0^\omega \left\{ BF(e_{(\delta_i)}) \mid \mathbf{X}_{\leq l} = \mathbf{x} \right\} \\ &\geq P_0^\omega \left\{ A_0, OLT^{(\delta_i)} \mid X_{\leq l} = \mathbf{x} \right\} - P_0^\omega \left\{ BF(e_{(\delta_i)})^c \mid \mathbf{X}_{\leq l} = \mathbf{x} \right\}. \end{aligned}$$

Replacing this in (4.2.36), we finally get :

$$\begin{aligned}
P_0^\omega \{A_0, OLT^{(\delta_i)}\} &\geq \sum_{v \in LEV(t_n^{\alpha'})} \sum_{l=0}^{t_n} \sum_{\mathbf{x} \in OLT_{0 \leftrightarrow v, l}^{(\delta_i)}} [P_0^\omega \{\mathbf{X}_{\leq l} = \mathbf{x}\} \\
&\quad \times (P_0^\omega \{A_0, OLT^{(\delta_i)} \mid X_{\leq l} = \mathbf{x}\} - P_0^\omega \{BF(e_{(\delta_i)})^c \mid \mathbf{X}_{\leq l} = \mathbf{x}\})] \\
&= P_0^\omega \{A_0, OLT^{(\delta_i)}\} \\
&\quad - \sum_{v \in LEV(t_n^{\alpha'})} \sum_{l=0}^{t_n} \sum_{\mathbf{x} \in OLT_{0 \leftrightarrow v, l}^{(\delta_i)}} [P_0^\omega \{\mathbf{X}_{\leq l} = \mathbf{x}\} \\
&\quad \times P_0^\omega \{BF(e_{(\delta_i)})^c \mid \mathbf{X}_{\leq l} = \mathbf{x}\}]
\end{aligned} \tag{4.2.37}$$

Using again the same technique as earlier with the Markov property of the walk under the quenched law, we have

$$\begin{aligned}
P_0^\omega \{BF(e_{(\delta_i)})^c \mid \mathbf{X}_{\leq l} = \mathbf{x}\} &= 1 - P_0^\omega \{BF(e_{(\delta_i)}) \mid \mathbf{X}_{\leq l}\} \\
&\leq 1 - (1 - Ct_n^{-(\alpha' - \alpha\delta)})^2 \\
&= O(t_n^{-(\alpha' - \alpha\delta)}).
\end{aligned}$$

which is $o(t^{-\gamma(1-\alpha)-\zeta})$; indeed, notice that $\alpha\delta + \gamma(1-\alpha)$ is a convex combination of γ and δ , both strictly in $(0, 1)$. Therefore, as long as we satisfy the additional condition that

$$\alpha > \max\{\gamma, \delta\}, \tag{4.2.38}$$

then with $\alpha' > \alpha$, it is trivial that $\alpha' - \alpha\delta > \gamma(1-\alpha) + \zeta$ for ζ small enough.

Note also that this bound is independent of ω , since C only depends on the dimension of the lattice (d) and the strength of the bias (λ).

From this, therefore, it follows that

$$P_0^\omega \{\tilde{A}_0, OLT^{(\delta_i)}\} \geq P_0^\omega \{A_0, OLT^{(\delta_i)}\} - o(t^{-\gamma(1-\alpha)}). \tag{4.2.39}$$

Conclusion of step 1

Since $B_j \subseteq A_j$, with (4.2.31) and (4.2.39), we have that

$$\begin{aligned}
P_0^\omega \{A_j, OLT^{(\delta_i)}\} &\geq P_0^\omega \{B_j, OLT^{(\delta_i)}\} \\
&\geq \frac{2}{3} P_0^\omega \{\tilde{A}_0, OLT^{(\delta_i)}\} \\
&\geq \frac{2}{3} P_0^\omega \{A_0, OLT^{(\delta_i)}\} - o(t_n^{-\gamma(1-\alpha)-\zeta})
\end{aligned}$$

or, with (4.2.25),

$$P_0^\omega \{A_j, OLT^{(\delta_i)}\} \geq \left(\frac{2}{3} - o(1)\right) \eta t_n^{-\gamma(1-\alpha)-\zeta}$$

That is to say, for all n sufficiently large,

$$P_0^\omega \{A_j, OLT^{(\delta_i)}\} \geq \frac{1}{2} \eta t_n^{-\gamma(1-\alpha)-\zeta}.$$

To conclude the argument for step 1 of this proof, we simply take the expectation with respect to ω on either side (on the condition that edges incident on 0 are equal to K); this yields (4.2.26).

Step 2 : Obtaining contradictory bounds for the expected time spent on the edge.

In step 1, we have shown that if we assume (4.2.23) – that is to say, if it is likely that the random walk has left the large edge at time t_n , then it is also quite likely that the walk is not on the edge $2j$ steps later, for $j \leq \eta_1 t_n^{\alpha' - \alpha \delta}$. We will now obtain a contradiction by obtaining conflicting lower and upper bounds on the expected time spent outside of the large edge – that's $\mathcal{T}_{(\delta_i)} - \mathfrak{T}_{t_n^{\alpha'}}$.

More precisely, we first introduce the following event :

$$E(t_n) := \left\{ \mathcal{T}_{\delta_i} - \mathfrak{T}_{t_n^{\alpha'}} < t_n^{1-\epsilon}, OLT^{(\delta_i)} \right\}; \quad (4.2.40)$$

this is the event that the time spent outside of the $t_n^{\alpha'}$ -large edge is less than $t_n^{1-\epsilon}$. It is immediate that:

$$\mathbb{E}_0^K \left[(\mathcal{T}_{\delta_i} - \mathfrak{T}_{t_n^{\alpha'}}) \mathbb{1}\{E(t_n)\} \right] \leq t_n^{1-\epsilon} \mathbb{P}_0^K \{E(t_n)\} \leq t_n^{1-\epsilon}. \quad (4.2.41)$$

What we set out to do now is show the following : to show that for all n is large enough, some constant C and some exponent $\psi = \psi(\alpha, \alpha', \delta, \epsilon, \zeta)$,

$$C t_n^\psi \leq \mathbb{E}_0^K \left[(\mathcal{T}_{\delta_i} - \mathfrak{T}_{t_n^{\alpha'}}) \mathbb{1}\{E(t_n)\} \right] \leq t_n^{1-\epsilon}. \quad (4.2.42)$$

Note how the values of $\alpha, \alpha', \delta, \epsilon$ and ζ are all chosen by us; we have some control over ψ , and if we can choose these parameters such that $\psi > 1 - \epsilon$, then (4.2.42) will become a contradictory statement, since if $\psi > 1 - \epsilon$, then $t_n^{1-\epsilon} \ll C t_n^\psi$.

The proof will therefore proceed in these sub-steps:

- 2 (a) First, assuming that $\mathbb{P}_0^K \{OLT^{(\delta_i)}, E(t_n)^c\} = o(t_n^{-\gamma(1-\alpha)-\zeta})$, we will find the following lower bound :

$$\mathbb{E}_0^K \left[(\mathcal{T}_{\delta_i} - \mathfrak{T}_{t_n^{\alpha'}}) \mathbb{1}\{E(t_n)\} \right] \geq \frac{1}{3} \eta \eta_1 t_n^{\alpha' - \alpha \delta - \gamma(1-\alpha) - \zeta}; \quad (4.2.43)$$

thus, an appropriate expression for ψ will be :

$$\psi = \alpha' - \alpha \delta - \gamma(1 - \alpha) - \zeta. \quad (4.2.44)$$

- 2 (b) Secondly, we will show that it is possible to chose α, δ, ϵ and ζ such that our previous assumption is verified: that

$$\mathbb{P}_0^K \{OLT^{(\delta_i)}, E(t_n)^c\} = o(t_n^{-\gamma(1-\alpha)-\zeta}) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (4.2.45)$$

This will result in the following constraints being imposed on parameters α , δ and ϵ :

$$\alpha > \frac{2\gamma}{1+\gamma}; \quad (4.2.46)$$

$$\delta < 1 - \frac{2\gamma(1-\alpha)}{(1-\gamma)\alpha}; \quad (4.2.47)$$

$$\epsilon < 1 - \alpha + \frac{\frac{1}{2}(1-\gamma)\alpha(1-\delta) - \gamma(1-\alpha)}{\frac{1}{2}(1+\gamma)}. \quad (4.2.48)$$

2 (c) Lastly, we will show that it is possible to choose α' , α , δ , ϵ and ζ such that $\psi > 1 - \epsilon$ as well; more precisely, we will show that the following, supplementary constraints must be imposed on α , δ and ϵ :

$$\alpha > 1 - \frac{1-\gamma}{\gamma(1+\gamma)}; \quad (4.2.49)$$

$$\delta < \frac{1}{2\alpha}(1-\gamma - \gamma(1+\gamma)(1-\alpha)); \quad (4.2.50)$$

$$\epsilon > \alpha\delta + \gamma(1-\alpha); \quad (4.2.51)$$

Step 2 (a) : Obtaining a lower bound for $\mathbb{E}_0^K [(\mathcal{T}_{\delta_i} - \mathfrak{T}^{(\delta_i)}) \mathbb{1}\{E(t_n)\}]$.

First we note that on the event $OLT^{(\delta_i)}$, we have :

$$(\mathcal{T}_{\delta_i} - \mathfrak{T}_{t_n^{\alpha'}}^{(\delta_i)}) = \left| \left\{ k \in [\tau_{\delta_i-1}, \tau_{\delta_i}) : X_k \notin e_{(\delta_i)} \right\} \right|.$$

Now, note that on the event A_j , for $0 \leq j \leq \eta_1 t_n^{\alpha' - \alpha\delta}$, the time $t_n + 2j$ is included in $\{k : [\tau_{\delta_i-1}, \tau_{\delta_i}) : X_k \notin e_{(\delta_i)}\}$. Therefore it follows that

$$\mathbb{1}\{E(t_n)\} \sum_{j=0}^{\eta_1 t_n^{\alpha' - \alpha\delta}} \mathbb{1}\{A_j\} \leq \mathbb{1}\{E(t_n)\} (\mathcal{T}_{\delta_i} - \mathfrak{T}_{t_n^{\alpha'}}^{(\delta_i)}).$$

Taking the expectation on either side yields:

$$\mathbb{E}_0^K \left\{ (\mathcal{T}_{\delta_i} - \mathfrak{T}_{t_n^{\alpha'}}^{(\delta_i)}) \mathbb{1}\{E(t_n)\} \right\} \geq \sum_{j=1}^{\eta_1 t_n^{\alpha' - \alpha\delta}} \mathbb{P}_0^K \{A_j, E(t_n)\}.$$

Now we must obtain a lower bound on $\mathbb{P}_0^K \{A_j, E(t_n)\}$. For that, we will need the result of step 1, which we recall now (equation (4.2.26)) :

$$\mathbb{P}_0^K \{A_j, OLT^{(\delta_i)}\} \geq \frac{1}{2} \eta t_n^{-\gamma(1-\alpha)-\zeta}. \quad (4.2.26)$$

From the definition of $E(t_n)$, it follows that

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_0^K \{A_j, E(t_n)\} &\geq \frac{1}{2} \eta t_n^{-\gamma(1-\alpha)-\zeta} - \mathbb{P}_0^K \{A_j, OLT^{(\delta_i)}, E(t_n)^c\} \\ &\geq \frac{1}{2} \eta t_n^{-\gamma(1-\alpha)-\zeta} - \mathbb{P}_0^K \{OLT^{(\delta_i)}, E(t_n)^c\}. \end{aligned}$$

Let us now assume, for the time being, that we indeed have (4.2.45) :

$$\mathbb{P}_0^K \{OLT^{(\delta_i)}, E(t_n)^c\} = o(t^{-\gamma(1-\alpha)-\zeta}); \quad (n \rightarrow \infty) \quad (4.2.45)$$

then it follows that for n large enough, $\mathbb{P}_0^K \{OLT^{(\delta_i)}, E(t_n)\} \leq \frac{1}{6}\eta t_n^{-\gamma(1-\alpha)-\zeta}$, and then we have

$$\mathbb{P}_0^K \{A_j, E(t_n)\} \geq \frac{1}{3}\eta t_n^{-\gamma(1-\alpha)-\zeta}. \quad (4.2.52)$$

Thus, for n sufficiently large, we must have :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_0^K \left[(\mathcal{T}_{\delta_i} - \mathfrak{T}_{t_n^{\alpha'}}^{(\delta_i)}) \mathbb{1}\{E(t_n)\} \right] &\geq \sum_{j=1}^{\eta_1 t_n^{\alpha'} - \alpha\delta} \mathbb{P}_0^K \{A_j, E(t_n)\} \\ &\geq \frac{1}{3}\eta\eta_1 t_n^{\alpha' - \alpha\delta - \gamma(1-\alpha) - \zeta}. \end{aligned} \quad (4.2.43)$$

This is the first inequality of (4.2.42) with $C = \frac{1}{3}\eta\eta_1$ and, as announced in (4.2.44) :

$$\psi = \alpha' - \alpha\delta - \gamma(1 - \alpha) - \zeta. \quad (4.2.44)$$

Step 2 (b) : It is possible to select α , δ , ϵ and ζ such that (4.2.45) is verified.

We must now make sure that our assumption of (4.2.45) is verified for our choices of α , δ , ϵ and ζ .

Since we know that on $OLT^{(\delta_i)}$, $\mathcal{T}_{\delta_i} - \mathfrak{T}_{t_n^{\alpha'}}^{(\delta_i)} \leq \mathcal{T}_{\delta_i}^{< t_n^{\alpha\delta}}$, then it follows that

$$E(t_n)^c \cap OLT^{(i)} \subseteq \left\{ \mathcal{T}_{\delta_i}^{< t_n^{\alpha\delta}} \geq t_n^{1-\epsilon} \right\}.$$

With Lemma 4.12, for an arbitrary small $\zeta' > 0$, then

$$\mathbb{P}_0^K \{E(t_n)^c, OLT^{(\delta_i)}\} = O(t_n^{-\phi+\zeta'}),$$

with

$$\phi = \frac{1}{2}(1 + \gamma)(1 - \epsilon - \alpha) + \frac{1}{2}(1 - \gamma)\alpha(1 - \delta). \quad (4.2.16)$$

Our pursuit is now to show that we may select $\epsilon > 1 - \alpha$ such that ϕ (which depends on ϵ) is larger than $\gamma(1 - \alpha)$.

With (4.2.16), the condition that $\phi > \gamma(1 - \alpha)$ can be re-arranged as a condition on ϵ , written as :

$$\epsilon < 1 - \alpha + \frac{\frac{1}{2}(1 - \gamma)\alpha(1 - \delta) - \gamma(1 - \alpha)}{\frac{1}{2}(1 + \gamma)}. \quad (4.2.48)$$

Because we must select $\epsilon > 1 - \alpha$ that satisfies this condition in order for $\phi > \gamma(1 - \alpha)$, it becomes imperative that the exponents α and δ that we have chosen allow the left-hand side of (4.2.48) to be larger than $1 - \alpha$. This is true when that last term is positive – or, put

another way, we must have :

$$\frac{1}{2}(1 - \gamma)\alpha(1 - \delta) - \gamma(1 - \alpha) > 0.$$

We can re-arrange this into a condition on our choice of $\delta \in (0, 1)$:

$$\delta < 1 - \frac{2\gamma(1 - \alpha)}{(1 - \gamma)\alpha}. \quad (4.2.47)$$

For *that* condition to be verifiable, we must have that the right-hand side of (4.2.47) be positive, which means that we must have

$$0 < 1 - \frac{2\gamma(1 - \alpha)}{(1 - \gamma)\alpha};$$

Again, this inequality can be re-arranged into yet another condition on our choice of $\alpha \in (0, 1)$:

$$\alpha > \frac{2\gamma}{1 + \gamma}. \quad (4.2.46)$$

This last condition can always be verified, since $\gamma \in (0, 1)$.

We have made good progress; we have now shown that

$$\mathbb{P}_0^K \left\{ OLT^{(\delta_i)}, E(t_n) \right\} = O(t_n^{-\phi + \zeta'})$$

for some $\phi > \gamma(1 - \alpha)$ and some arbitrarily small $\zeta' > 0$. In order for this to be $o(t_n^{-\gamma(1 - \alpha) - \zeta})$, we must have :

$$-\gamma(1 - \alpha) - \zeta > -\phi + \zeta';$$

Since ζ' can be chosen as small as we wish, it will be sufficient to choose

$$\zeta < \phi - \gamma(1 - \alpha).$$

With choices of α, δ, ϵ that satisfy (4.2.46), (4.2.47), (4.2.48) and ζ small enough, as we have just shown, it follows indeed that

$$\mathbb{P}_0^K \left\{ OLT^{(\delta_i)}, E(t_n)^c \right\} = o(t_n^{-\gamma(1 - \alpha) - \zeta}). \quad (4.2.45)$$

Step 2 (c) : It is possible to select $\alpha, \alpha', \delta, \epsilon$ and ζ such that $\psi > 1 - \epsilon$.

Our task now is to show that there are possible values for all our parameters which can satisfy the condition that

$$\psi = \alpha' - \alpha\delta - \gamma(1 - \alpha) - \zeta > 1 - \epsilon \quad (4.2.53)$$

Much like the last layer of a Rubik's Cube, these last few steps will be the most delicate, for we will now attempt to find suitable ranges of values for our multiple parameters *without undoing what we have already done*.

First, note that (4.2.53) can be re-written as a condition on ϵ :

$$\epsilon > 1 - \alpha' + \alpha\delta + \gamma(1 - \alpha) + \zeta; \quad (4.2.51)$$

however we must not forget that ϵ is already constrained by (4.2.48). These two constraints together are :

$$1 - \alpha' + \alpha\delta + \gamma(1 - \alpha) + \zeta < \epsilon < 1 - \alpha + \frac{\frac{1}{2}(1 - \gamma)\alpha(1 - \delta) - \gamma(1 - \alpha)}{\frac{1}{2}(1 + \gamma)}. \quad (4.2.54)$$

In order that both these conditions may be verified simultaneously, it will be sufficient, then, to select α and δ in such a way that

$$\alpha\delta + \gamma(1 - \alpha) < 1 - \alpha + \frac{\frac{1}{2}(1 - \gamma)\alpha(1 - \delta) - \gamma(1 - \alpha)}{\frac{1}{2}(1 + \gamma)},$$

since we may choose $(1 - \alpha')$ and ζ as small as we want. Rearranging this inequality yields a further condition on our choice of δ :

$$\delta < \frac{1}{2\alpha} (1 - \gamma - \gamma(1 + \gamma)(1 - \alpha)). \quad (4.2.50)$$

It should be noted that as α tends to 1, this tends to $\frac{1}{2}(1 - \gamma)$; therefore it is easy to see that it will always be possible to satisfy this with some choice of δ lower than $(1 - \gamma)/2$ by an arbitrarily small amount, as long as we choose α large enough. At the very least, however it will suffice that the right-hand side of (4.2.50) be positive, which yields this inequality:

$$1 - \gamma - \gamma(1 + \gamma)(1 - \alpha) > 0.$$

Rearranging gives the following condition on α – again, it is a lower bound, and no trouble at all:

$$\alpha > 1 - \frac{1 - \gamma}{\gamma(1 + \gamma)}. \quad (4.2.49)$$

Thus, with α , ϵ and δ satisfying (4.2.49), (4.2.51) and (4.2.50) respectively, and $(1 - \alpha')$ and ζ sufficiently small, we have that

$$\psi = \alpha' - \alpha\delta - \gamma(1 - \alpha) - \zeta > 1 - \epsilon. \quad (4.2.53)$$

Conclusion of Step 2

We have now carefully shown that if the parameters α , δ and ϵ are chosen in accordance with conditions (4.2.46), (4.2.47), (4.2.48), (4.2.49), (4.2.50) and (4.2.51), then we have both:

$$Ct_n^\psi \leq \mathbb{E}_0^K \left[(\mathcal{T}_{\delta_i} - \mathfrak{F}_{t_n^{\alpha'}}^{(\delta_i)}) \mathbb{1}\{E(t_n)\} \right] \leq t_n^{1-\epsilon} \quad (4.2.42)$$

and

$$\psi = \alpha' - \alpha\delta - \gamma(1 - \alpha) - \zeta > 1 - \epsilon. \quad (4.2.53)$$

As argued earlier, this is a contradiction because in that case, $t_n^{1-\epsilon} \ll Ct_n^\psi$, and eventually we must have that $Ct_n^\psi > t_n^{1-\epsilon}$ for all n large enough.

Thus, we must assume that (4.2.23) is false, and the lemma is proved. \square

4.2.4. Proof of Proposition 4.2

We now aim to show that

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0^K \left\{ OLT^{(\delta_{l(t)})}, X_t \in e_{(\delta_{l(t)})} \right\} = 1;$$

Of course, we already know from Lemma 4.11 that $OLT^{(\delta_{l(t)})}$ occurs with overwhelming probability as t goes to infinity; therefore it will be sufficient to show :

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0^K \left\{ OLT^{(\delta_{l(t)})}, X_t \notin e_{(\delta_{l(t)})} \right\} = 0.$$

There are three, mutually exclusive possibilities for how the walk can be outside of the large trap at time t :

- it could simply not have reached it yet;
- the last long regeneration period might have ended before time t ;
- the walk reached the edge, and got away from it within the regeneration period.

We will use a union bound to control each of these terms separately. We have :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_0^K \left\{ OLT^{(\delta_{l(t)})}, X_t \notin e_{(\delta_{l(t)})} \right\} &\leq \mathbb{P}_0^K \left\{ T_{e_{(\delta_{l(t)})}} > t \right\} + \mathbb{P}_0^K \left\{ t \geq \tau_{\delta_{l(t)}} \right\} \\ &\quad + \mathbb{P}_0^K \left\{ OLT^{(\delta_{l(t)})}, T_{e_{(\delta_{l(t)})}} \leq t < \tau_{\delta_{l(t)}}, X_t \notin e_{(\delta_{l(t)})} \right\}. \end{aligned}$$

The first and second terms on the right-hand-side are $o(1)$ by Lemma 4.13 and Corollary 4.4 respectively when t goes to infinity.

For the last term, we may complete it with a union bound. Because we are working under \mathbb{P}_0^K , it's best if we avoid the case where $l(t) = 1$ – but that's also quite unlikely. We have, for an arbitrarily small $r > 0$:

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}_0^K \left\{ OLT^{(\delta_{l(t)})}, T_{e_{(\delta_{l(t)})}} \leq t < \tau_{\delta_{l(t)}}, X_t \notin e_{(\delta_{l(t)})} \right\} \\ &\leq \mathbb{P}_0^K \left\{ \delta_{l(t)} = 1 \right\} + \mathbb{P}_0^K \left\{ l_t > t^{\gamma(1-\alpha)+r} \right\} + \sum_{i=2}^{t^{\gamma(1-\alpha)+r}} \mathbb{P}_0^K \left\{ OLT^{(\delta_i)}, T_{e_{(\delta_i)}} \leq t < \tau_{\delta_i}, X_t \notin e_{(\delta_i)} \right\} \end{aligned}$$

The first term on the right-hand-side is $o(1)$, because

$$\mathbb{P}_0^K \left\{ l(t) = 1 \right\} = \mathbb{P}_0^K \left\{ \delta_{l(t)} = \delta_1 \right\},$$

but $\delta_{l(t)} \gg t^{\gamma-\zeta}$ in probability under \mathbb{P}_0^K when t grows large, for any $\zeta > 0$, while δ_1 is a geometric random variable $\ll t^{\alpha\gamma-\zeta}$.

The second term is $o(1)$ by Lemma 4.2.

The sum is $o(1)$ because, by Lemma 4.14, each of its individual terms is $o(t^{-\gamma(1-\alpha)-\zeta})$ for some ζ small enough – which we can choose, given all other parameters already chosen. As long as we now choose $r > 0$ smaller than ζ , then, we are done. \square

We are almost done! All that is left is to tie all of this together into a proof of Theorem 3.2; however, before we can do this, we still need the following corollary to Proposition 4.2 :

Corollary 4.5. *There exists K_0 such that when $K > K_0$, with $\alpha' \in (\alpha, 1)$ and $\delta \in (0, 1)$ as before, for $h \geq 1$:*

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0^K \left\{ OLT^{(\delta_{l(ht)})}, X_{ht} \notin e_{(\delta_{l(ht)})} \right\} = 1. \quad (4.2.55)$$

PROOF. The proof to this mirrors exactly the proof to Proposition 4.2; it is sufficient to take $t' = ht$ and re-do the whole thing. There is, however, a subtlety to be dealt with in the end.

Re-doing all the arguments with $t' = ht$ implies going all the way back up to section 4.1.1, and defining large traps as edges with a conductance larger than $(ht)^\alpha$. It is not *a priori* obvious that the large traps will be the same.

To untangle this, we will simply need to bring back the explicit notations introduced in section 4.1.1 to show that

$$\delta_{l((ht)^\alpha, ht)}((ht)^\alpha) = \delta_{l(t^\alpha, ht)}(t^\alpha);$$

that is to say : the last $(ht)^\alpha$ -long regeneration period started before time ht is the same as the last t^α -long regeneration period started before the same time.

Intuitively, this is extremely likely, since the only way these are different is if the last $(ht)^\alpha$ -long regeneration *wasn't* the last t^α -long regeneration. But then, the last $(ht)^\alpha$ -long regeneration started before ht will have also ended before ht , which we know to be very unlikely.

It is obvious from definitions that we must have

$$\delta_{l((ht)^\alpha, ht)}(ht) \leq \delta_{l(t^\alpha, ht)}(t^\alpha);$$

indeed, any $(ht)^\alpha$ -long regeneration period is *also* a t^α -long one.

Suppose now that $\limsup_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0^K \left\{ \delta_{l((ht)^\alpha, ht)}((ht)^\alpha) < \delta_{l(t^\alpha, ht)}(t^\alpha) \right\} = p > 0$. Then, we must have

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0^K \left\{ \tau_{\delta_{l((ht)^\alpha, ht)}(ht)} \leq \tau_{\delta_{l(t^\alpha, ht)}(t^\alpha)-1} \right\} = p > 0;$$

that is: the probability that the last $(ht)^\alpha$ -long regeneration period before time ht ends as or before the last t^α -long regeneration period before time ht stars.

But, by Corollary 4.4 (with $t' = ht$), we must have that $\mathbb{P}_0^K \left\{ ht < \tau_{\delta_{l((ht)^\alpha, ht)}(ht)} \right\} \rightarrow 1$; therefore, we have

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0^K \left\{ ht < \tau_{\delta_{l((ht)^\alpha, ht)}(ht)} \leq \tau_{\delta_{l(t^\alpha, ht)}(t^\alpha)-1} \right\} = p > 0.$$

This is absurd, because by definition of $l(t^\alpha, ht)$ and $\delta_{l(t^\alpha, ht)}(t^\alpha)$, it is necessary that

$$\tau_{\delta_{l(t^\alpha, ht)}(t^\alpha)-1} \leq ht.$$

Hence, we have shown that

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0^K \left\{ \delta_{l((ht)^\alpha, ht)}(ht) \neq \delta_{l(t^\alpha, ht)}(t^\alpha) \right\} = 0, \quad (4.2.56)$$

and the corollary follows with a simple union bound. \square

4.2.5. Proof of Theorem 3.2

For a fixed $h \geq 1$, we introduce the following events :

$$\mathcal{B}(t) = \{ \|X_{ht} - X_t\| \leq 1 \},$$

and for any $h \geq 1$, the following :

$$\mathcal{C}_h(t) = \left\{ OLT^{(\delta_{l(ht)})}, X_{ht} \in e_{(\delta_{l(ht)})} \right\},$$

$$\mathcal{D}_h(t) = \left\{ \tau_{\delta_{l(ht)}-1} \leq ht < \tau_{\delta_{l(ht)}} \right\},$$

and

$$\mathcal{E}_h(t) = \left\{ \delta_{l(ht)} = \delta_{l(t)} \right\}.$$

For a fixed $h > 0$, events $\mathcal{C}_1(t)$, $\mathcal{C}_h(t)$, $\mathcal{D}_1(t)$ and $\mathcal{D}_h(t)$ probability tending to 1 under \mathbb{P}_0^K for K large enough, as has been shown in Proposition 4.2 and Corollaries 4.5 and 4.4.

Let

$$\mathcal{B}'(t) = \mathcal{B}(t) \cap \mathcal{C}_1(t) \cap \mathcal{C}_h(t) \cap \mathcal{D}_1(t) \cap \mathcal{D}_h(t),$$

and

$$\mathcal{E}'_h(t) = \mathcal{E}_h(t) \cap \mathcal{C}_1(t) \cap \mathcal{C}_h(t) \cap \mathcal{D}_1(t) \cap \mathcal{D}_h(t).$$

It is clear that $\mathcal{B}'(t) = \mathcal{E}'_h(t)$; indeed, on one hand, $\mathcal{E}'_h(t) \subset \mathcal{B}'(t)$, since if $\delta_{l(t)}$ and $\delta_{l(ht)}$ are the same, then on $\mathcal{D}_1(t) \cap \mathcal{D}_h(t)$, times t and ht occur within the same regeneration period, and on $\mathcal{C}_1(t) \cap \mathcal{C}_h(t)$, they are on the same edge.

On the other hand, $\mathcal{B}'(t) \setminus \mathcal{E}'_h(t)$ is empty; otherwise, we would need times t and ht to occur within two different regeneration periods. As per the definition of regeneration times, this implies that X_{ht} is at least two steps “ further ahead ” than X_t along the direction of the bias, so that $\|X_{ht} - X_t\| \geq 2$.

Therefore, we have, with Proposition 4.1

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0^K \{ \mathcal{B}(t) \} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0^K \{ \mathcal{B}'(t) \} \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0^K \{ \mathcal{E}'_h(t) \} \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0^K \left\{ \tau_{\delta_{l(t)}-1} \leq t < ht < \tau_{\delta_{l(t)}} \right\} \\
&= \frac{\sin \pi \gamma}{\pi} \int_{y=0}^{1/h} y^{\gamma-1} (1-y)^{-\gamma} dy.
\end{aligned}$$

Thus, the theorem is proved. □

4.3. Closing remarks

We now close this discussion with an interesting bit of comparison between our result and that of Enriquez, Sabot and Zindy [14]. Indeed, one may wonder : since the above discussion has been about a random walk in \mathbb{Z}^d , with no restrictions on d whatsoever *a priori*, then how does our aging result compare with theirs? After all, in the case where $d = 1$, our model and theirs are quite similar. So why can we find such a tight bound for $|X_{th} - X_t|$ (a constant bound) while they can only find a logarithmic one?

The subtle difference lies, of course, in the way the conductances are selected. In the classical random walk on the random environment in \mathbb{Z} , the *transition probabilities* are chosen to be i.i.d.; as a result, the conductance between x and $x + 1$ is given as

$$c(x, x + 1) = e^{-V(x)},$$

where $V(x)$ is itself a random walk on \mathbb{R} measurable with respect to \mathbf{P} , and such that⁵

$$V(x) - V(x - 1) = \log \frac{p^\omega(x, x + 1)}{p^\omega(x, x - 1)}.$$

Because of this, the conductances very much depend on each other.

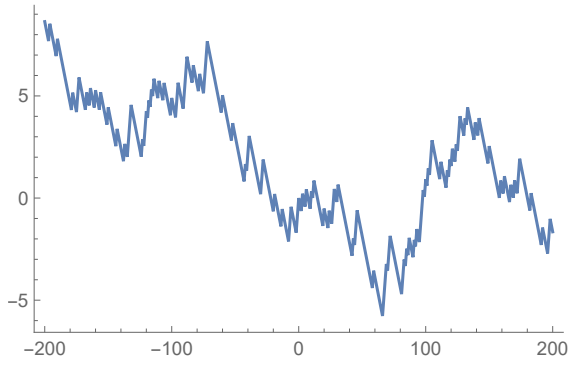
By contrast, in our model, it is the raw *conductances* who are selected independently and with identical distributions; once the bias is applied and the net conductances $c^\omega(x, x + 1)$ are obtained, though, we are free to revert to the “potential” view of the environment; indeed, it suffices to invert the above equation to get

$$V(x) = -\log c^\omega(x, x + 1) = -\ell x - \log c_*^\omega(x, x + 1).$$

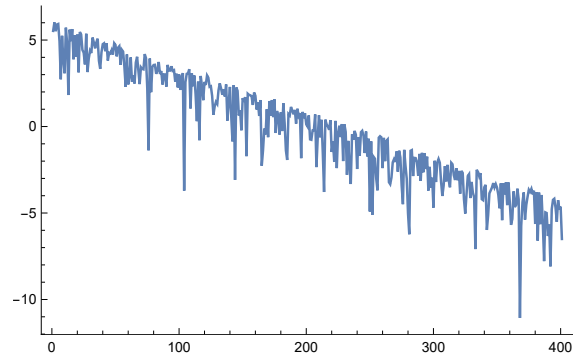
Figure 4.1 shows both potentials for the classical random walk in a random environment on \mathbb{Z} , and for the biased random walk on random conductances on \mathbb{Z} .

As we can readily see, in our model, there are also “valleys” in the potential profile – except that they aren’t so much *valleys* as they are deep and – crucially – extremely *narrow* chasms. The relatively large difference in width between the largest traps encountered by

⁵ Voir la section 2.2.



(a) Environment for the classical random walk on the random environment in \mathbb{Z}



(b) Environment for the biased random walk on random heavy-tailed conductances in \mathbb{Z}^d for $d = 1$.

Fig. 4.1. Potential profiles for random environments in two one-dimensional models.

the walk after a time t is what explains our much more precise localization of the position of the walk at times t and ht . Indeed, whereas in the classical random walk in the random environment on \mathbb{Z} , the large traps encountered get wider even as they get deeper, in our model the traps *do* get deeper, but they nevertheless remain ever the same, very *narrow* width of just one edge.

Références et annexes

Références bibliographiques

- [1] Luigi ADDARIO-BERRY, Anna BRANDENBERGER, Jad HANDMAN et Céline KERRIOU : Universal height and width bounds for random trees. arXiv [math.PR] 2105.03195, avril 2022.
- [2] Elie AÏDÉKON : Speed of the biased random walk on a Galton-Watson tree. *Probability Theory and Related Fields*, 159(3–4):597–617, 2014.
- [3] Gérard BEN AROUS, Anton BOVIER et Véronique GAYRARD : Glauber dynamics of the random energy model. *Communications in Mathematical Physics*, 236(1):1–54, 2003.
- [4] Gérard BEN AROUS, Anton BOVIER et Jiří ČERNÝ : Universality of the REM for dynamics of mean-field spin glasses. *Communications in Mathematical Physics*, 282(3):663–695, 2008.
- [5] Gérard BEN AROUS, Alexander FRIBERGH, Nina GANTERT et Alan HAMMOND : Biased random walks on Galton-Watson trees with leaves. *Annals of Probability*, 40(1):280 – 338, 2012.
- [6] Gérard BEN AROUS, Alexander FRIBERGH et Vidas SIDORAVICIUS : Lyons-Pemantle-Peres monotonicity problem for high biases. *Communications in Pure and Applied Mathematics*, 67(4):519–530, 2014.
- [7] Jean BERTOIN : *Lévy Processes*. Cambridge University Press, 1996.
- [8] Nicholas H. BINGHAM, Charles M. GOLDIE et Jozef L. TEUGELS : *Regular Variation*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 1987.
- [9] Jean-Philippe BOUCHAUD : Weak ergodicity breaking and aging in disordered systems. 2(9):1705–1713, 1992.
- [10] Joseph Leo DOOB : Renewal theory from the point of view of the theory of probability. *Transactions of the American Mathematical Society*, 63(3):422 – 438, 1948.
- [11] Richard DURRETT : *Probability : Theory and Examples (4th edition)*. Cambridge University Press, 2010.
- [12] Albert EINSTEIN : Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen. *Annalen der Physik*, 322(8):549 – 560, 1905. en allemand.
- [13] Nathanaël ENRIQUEZ, Christophe SABOT et Olivier ZINDY : A probabilistic representation of constants in Kesten’s renewal theorem. *Probability Theory and Related Fields*, 144:581 – 613, 2007.
- [14] Nathanaël ENRIQUEZ, Christophe SABOT et Olivier ZINDY : Aging and quenched localisation for one-dimensional random walks in random environment in the sub-ballistic regime. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 137:423–452, 2009.
- [15] Nathanaël ENRIQUEZ, Christophe SABOT et Olivier ZINDY : Limit laws for transient random walks in random environments on \mathbb{Z} . *Annales de l’Institut Fourier*, 59(6):2469–2508, 2009.
- [16] Stewart N. ETHIER et Thomas G. KURTZ : *Markov Processes: Characterization and Convergence*. John Wiley and Sons, Inc., 1986.

- [17] William FELLER : *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. Wiley, second edition édition, 1991.
- [18] William “Willy” FELLER : On the integral equation of renewal theory. *Annals of Mathematical Statistics*, 12(2):243 – 267, 1941.
- [19] Alexander FRIBERGH : Biased random walks in positive random conductances on \mathbb{Z}^d . *Annals of Probability*, 41(6):3910 – 3972, 2013.
- [20] Alexander FRIBERGH et Daniel KIOUS : Scaling limits for sub-ballistic biased random walks in random conductances. *Annals of Probability*, 46(2):605–686, 2018.
- [21] Janos GALAMBOS : *Advanced probability theory*. Marcel Dekker, Inc., New York, 1988.
- [22] Geoffrey GRIMMETT et David STIRZAKER : *Probability and Random Processes*. Presses de l’Université Oxford, troisième édition, 2001.
- [23] Christopher Robin HEATHCOTE, Eugene SENETA et David VERE-JONES : A refinement of two theorems in the theory of branching processes. *Theory of Probability and its Applications*, 12(2):297 – 301, 1967.
- [24] Barry D. HUGHES : *Random Walks and Random Environments*. Oxford University Press, 1996.
- [25] Donald L. IGLEHART : Extreme values in the GI/G/1 queue. *Annals of Mathematical Statistics*, 43(2): 627–635, 1972.
- [26] Céline KERRIOU : Heights of random trees. Mémoire de maîtrise, Université McGill, Montréal, QC, mai 2021. Disponible à <https://escholarship.mcgill.ca/downloads/8623j3982.pdf>.
- [27] Harry KESTEN, Mikhail V. KOZLOV et Frank SPITZER : A limit law for random walk in a random environment. *Compositio Mathematica*, (2):145 – 168, 1975.
- [28] Alfred J. LOTKA : A contribution to the theory of self-renewing aggregates, with special reference to industrial replacement. *Annals of Mathematical Statistics*, 10(1):1 – 25, 1939.
- [29] Russel LYONS : Random walks, capacity and percolation on trees. *Annals of Probability*, 20:2043 – 2088, 1992.
- [30] Russell LYONS, Robin PEMANTLE et Yuval PERES : Biased random walks on Galton-Watson trees. *Probability Theory and Related Fields*, 106(2):249–264, 1996.
- [31] Russell LYONS, Robin PEMANTLE et Yuval PERES : *Classical and Modern Branching Processes*, volume 84 de *The IMA Volumes on Mathematics and its Applications*, chapitre Unsolved Problems Concerning Random Walks on Trees. Springer, New York, NY, 1997.
- [32] Russell LYONS et Yuval PERES : *Probability on Trees and Networks*. Presses de l’Université Cambridge, décembre 2016.
- [33] Peter MÖRTENS, Marcel ORTGIÈSE et Nadia SIDOROVA : Ageing in the parabolic Anderson model. *Annales de l’Institut Henri-Poincaré*, 47(4):969–1000, 2011.
- [34] Karl PERASON : The problem of the random walk. *Nature*, 72(294), juillet 1905.
- [35] Vasily Vladimirovich PETROV : *Sums of Independent Random Variables*. De Gruyter, 1975.
- [36] Sheldon M. ROSS : *Introduction to Probability Models*. Elsevier, elevenième édition, 2014.
- [37] Lian SHEN : Asymptotic properties of certain anisotropic walks in random media. *Annals of Applied Probability*, 12(2):477–510, 2002.
- [38] Yakov G. SINAI : The limiting behavior of a one-dimensional random walk in a random medium. *Theory of Probability and Applications*, 27(2):256–268, 1983.
- [39] Anatoliy Volodymyrovych SKOROKHOD : Limit theorems for stochastic processes. *Theory of Probability and its Applications*, 1(3):261–290, 1956.
- [40] Fred SOLOMON : Random walks in a random environment. *Annals of Probability*, 3(1):1–31, 1975.

- [41] Ofer ZEITOUNI : Random walks in random environments. *Lecture notes in Mathematics*, 1837:193–312, 2004.
- [42] Olivier ZINDY : Scaling limit and aging for directed trap models. *Markov Processes and Related Fields*, 15(1):31–50, 2009.

Annexe A

Certains résultats sur les marches aléatoires réversibles

Nous avons regroupé ici un certain nombre de résultats concernant les marches aléatoires réversibles. On suppose un réseau sur le graphe $G = (S, E)$, où S est l'ensemble des sommets, et E est l'ensemble des arêtes; on reprend la notation des sections 1.1.2 et 1.1.4. On considère également la fonction symétrique $c : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ avec $c(x, y) = 0$ si $(x, y) \notin E$ et $c(x, y) > 0$ sinon, et $c(x, y) = c(y, x)$ pour toute paire $x, y \in S$.

A.1. Circuits électriques

A.1.1. Quantités physiques.

Il existe une puissante analogie entre les circuits électriques et les marches aléatoires réversibles. Dans le graphe G , chaque arête représente un composant de circuit électrique; chaque sommet représente un *nœud*, soit un point de contact entre les bornes de différents composants. On introduit les quantités suivantes, inspirées par la physique :

- Le **potentiel électrique** au nœud x , noté $v(x)$, correspond en physique à une quantité d'énergie par unité de charge électrique à cet endroit. On note $\mathbf{d}v(x, y) = v(x) - v(y)$ la **différence de potentiel** entre les nœuds adjacents $x, y \in S$.
- Le **courant électrique** le long de l'arête (x, y) , noté $i(x, y)$, correspond à un débit de charge électrique par unité de temps qui circulent de x vers y dans un composant électrique. On doit avoir que $i(x, y) = -i(y, x)$.
- La **conductance électrique** entre les nœuds adjacents x et y est donnée par $c(x, y)$; c'est une mesure de la capacité d'un composant de circuit à conduire le courant électrique.

- La **résistance électrique** entre les nœuds adjacents x et y est notée $r(x, y)$; c'est une mesure de la propension d'un composant à résister au passage du courant. Plus précisément, $r(x, y) = c(x, y)^{-1}$.

A.1.2. Lois d'Ohm et de Kirchhoff

En physique, les lois d'Ohm et de Kirchhoff sont les conséquences des définitions de conductance et de résistance; pour nous, ces définitions rendront utiles et intéressantes les quantités physiques définies plus haut.

La loi d'Ohm (Loi 1) définit la conductance et la résistance comme les facteurs de proportionnalité entre la différence de potentiel entre deux nœuds adjacents et le courant qui circule entre ces deux nœuds.

Loi 1 (d'Ohm). La différence de potentiel, la résistance, la conductance et le courant sont reliés par les équations :

$$\mathbf{d}v = r \cdot i; \quad c \cdot \mathbf{d}v = i. \quad (\text{A.1.1})$$

La loi des nœuds de Kirchhoff, quant à elle, est une conséquence du principe physique de conservation de la charge électrique:

Loi 2 (des nœuds de Kirchhoff). Le courant total passant par le nœud x est :

$$I(x) := \sum_{y:x \sim y} i(x, y). \quad (\text{A.1.2})$$

On dira que le nœud x est une **source positive** (resp. **négative**) de courant si

$$I(x) > 0 \quad (\text{resp. } <); \quad (\text{A.1.3})$$

on notera $\mathcal{S}^\pm \subseteq S$ les parties de S correspondant respectivement aux sources positives et négatives de courant.

Le **courant total circulant des sources positives vers les sources négatives** est :

$$I_{\text{tot}} = \sum_{x \in \mathcal{S}^+} I(x) = - \sum_{x \in \mathcal{S}^-} I(x) = \frac{1}{2} \sum_{x \in S} |I(x)|. \quad (\text{A.1.4})$$

Pour tous les autres nœuds, on a que $I(x) = 0$.

A.1.3. Potentiel harmonique, conductance effective.

Une fonction $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ est **harmonique** pour le réseau (G, c) au point $x \in S$ si et seulement si elle satisfait l'équation

$$f(x) = \sum_{y:x \sim y} \frac{1}{\pi(x)} c(x, y) f(y). \quad (\text{A.1.5})$$

(On rappelle que $\pi(x) = \sum_{y:x \sim y} c(x, y)$.)

On une partie $A = \mathcal{S}^+ \subseteq S$ comme sources positives, et une partie $Z = \mathcal{S}^-$ comme sources négatives. On peut alors fixer $v(a) = v_0$ pour tout $a \in A$, et $v(z) = 0$ pour tout $z \in Z$; v_0 est la différence de potentiel appliquée aux sources de courant – c’est une quantité arbitraire.

La loi des nœuds de Kirchhoff donne alors le système d’équations suivant :

$$\begin{cases} v(x) = \sum_{y:x \sim y} \frac{1}{\pi(x)} c(x, y) v(y) & \forall x \notin A, Z. \\ v(a) = v_0 & \forall a \in A \\ v(z) = 0 & \forall z \in Z. \end{cases} \quad (\text{A.1.6})$$

Autrement dit, le potentiel v est harmonique sur $S \setminus \mathcal{S}^\pm$, et les conditions aux frontières sont données par $v(a) = v_0$ et $v(z) = 0$ pour tout $z \in Z$.

On a le théorème suivant (voir par exemple Lyons et Peres [32]):

Théorème A.1. *Soit $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, et $B \subseteq S$ une partie de S , appelée la « frontière ».*

Alors, pour tout $f|_B$ fixé (c’est à dire qu’on fixe $f(x)$ pour tout $x \in B$), il existe une unique fonction f qui est harmonique pour le réseau (G, c) sur $S \setminus B$.

Il suit de ce théorème que, étant donné a, Z et v_0 , le potentiel est entièrement déterminé uniquement par le système d’équations (A.1.6);

Finalement, on introduit la **conductance effective** du circuit entre les sources a et Z ; elle est définie par l’équation suivante :

$$\mathcal{C}_{\text{eff}}(a \leftrightarrow Z) \cdot v_0 = I_{\text{tot}}. \quad (\text{A.1.7})$$

La conductance effective $\mathcal{C}_{\text{eff}}(A \leftrightarrow Z)$ est une mesure de la capacité totale de *tout le circuit* à laisser passer le courant de la source positive a vers les sources négatives Z .

A.1.4. Réduction de circuits

Dans le cas particulier où $A = \{a\}$ et $Z = \{z\}$ sont des singletons, on peut calculer la conductance effective entre les nœuds a et z en employant une méthode itérative pour la réduction d’un circuit, qui procède par une succession de circuits **équivalents** (c’est-à-dire dont la conductance effective entre les nœuds a et z ne change pas) mais qui comptent chaque fois de moins en moins d’arêtes.

Pour ce faire, à chaque étape, on remplace un certain nombre d’arêtes par une seule arête en s’assurant que la conductance effective reste la même; les lemmes A.1, A.2 et A.3 détaillent les transformations qui préservent la conductance effective.

Lemme A.1. *Lorsque deux composantes e_1 et e_2 sont connectés en série (c’est-à-dire bout à bout), alors on peut les remplacer par une composante e^* dont la résistance est la somme des deux : $r(e^*) = r(e_1) + r(e_2)$ (figure A.1a).*

Lemme A.2. Lorsque deux composantes e_1 et e_2 sont connectées en parallèle (c'est-à-dire qu'elles relient les mêmes bornes), alors on peut les remplacer par une composante e^* dont la conductance est la somme des deux : $c(e^*) = c(e_1) + c(e_2)$ (figure A.1b).

Lemme A.3. En supposant qu'il y a trois nœuds z_1, z_2, z_3 avec $z_i \sim z_{i+1}$ (où les indices sont modulo 3), ce triangle de composantes est équivalent à une étoile (figure A.1c). On ajoute alors un quatrième sommet w au centre; on retire alors toutes les composantes du triangle, puis on ajoute les composantes (w, z_i) pour $i = 1, 2, 3$ avec les conductances

$$c(w, z_i) = \gamma / c(z_{i-1}, z_{i+1}),$$

où

$$\gamma = \frac{r(z_1, z_2) + r(z_2, z_3) + r(z_3, z_1)}{r(z_1, z_2)r(z_2, z_3)r(z_3, z_1)}.$$

La figure A.2 montre un exemple de calcul (tiré de Lyons et Peres [32]).

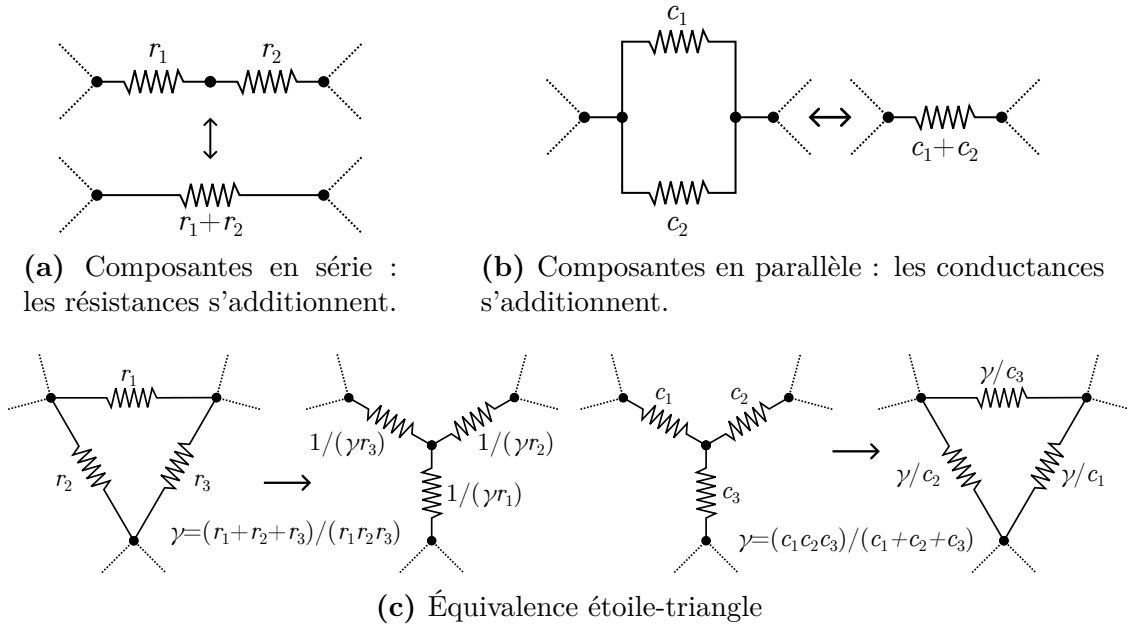


Fig. A.1. Règles élémentaires de réduction des circuits.

A.2. Parallèles avec les marches aléatoires

On considère $\mathbf{X} = (X_t)_{t \in \mathbb{Z}^+}$ la marche aléatoire réversible sur G avec les conductances c . Les probabilités de transitions pour \mathbf{X} sont données par $p(x, y) = c(x, y) / \pi(x)$, comme à l'équation (1.1.8).

Dès lors, on remarque qu'une fonction f est harmonique pour (G, c) au sommet $x \in S$ si et seulement si

$$f(x) = \sum_{y: x \sim y} p(x, y) f(y).$$

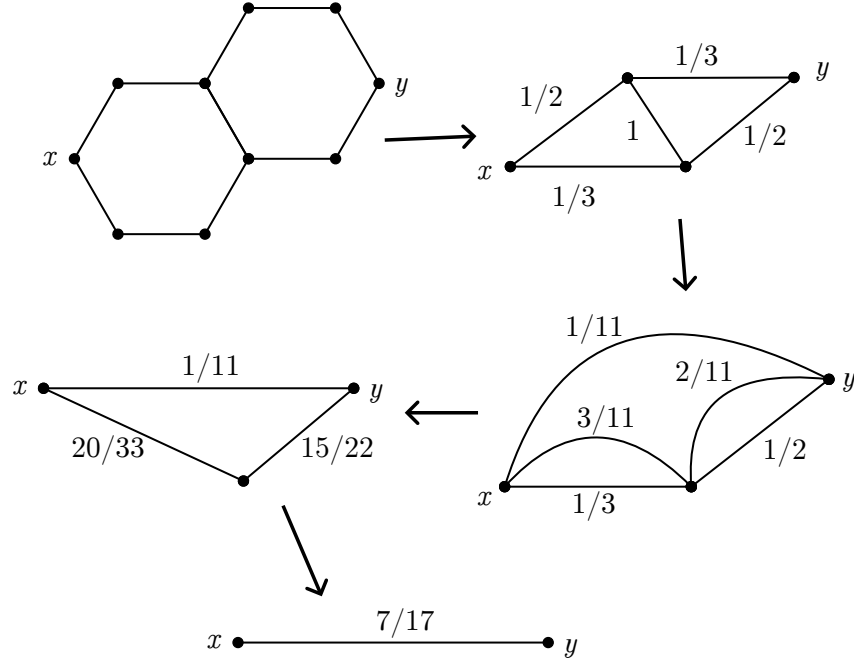


Fig. A.2. Exemple de réduction de circuit (tiré de Lyons, Peres [32]). Ici, toutes les conductances sur le réseau de départ valent 1. Les conductances sont indiquées tout le long du calcul intermédiaire. On cherche la conductance effective $\mathcal{C}_{\text{eff}}(x \leftrightarrow y)$, qui vaut $7/17$.

A.2.1. Fonctions harmoniques et probabilités

Pour toute région $R \subseteq S$, on note T_R le **temps d'atteinte de R** , avec

$$T_R = \inf \{t \geq 0 : X_t \in R\}; \quad (\text{A.2.1})$$

on note T_R^+ le **temps d'atteinte strictement positif** :

$$T_R^+ = \inf \{t > 0 : X_t \in R\},$$

qui est simplement égal à T_R lorsque $X_0 \notin R$.

On a le résultat suivant :

Proposition A.1. *Soient $A, Z \subseteq S$ disjoints. On note $f(x) = \mathbb{P}_x \{T_A < T_Z\}$ la probabilité pour la marche \mathbf{X} d'atteindre A avant Z en partant du sommet x .*

Alors, avec $A = \mathcal{S}^+$ et $Z = \mathcal{S}^-$, et $v_0 = 1$, $f(x) = v(x)$; la fonction $f(x)$ est égale au potentiel électrique en x .

DÉMONSTRATION. On fixe $A, Z \subseteq S$ disjoints. On remarque que, en conditionnant par le premier pas, avec l'homogénéité et la propriété de Markov pour \mathbf{X} , on obtient le système

d'équations suivant :

$$\begin{cases} \mathbb{P}_x \{T_A < T_Z\} = \sum_{y:x \sim y} p(x,y) \mathbb{P}_y \{T_A < T_Z\} & \forall x \notin A, Z; \\ \mathbb{P}_x \{T_A < T_Z\} = 1 & \forall x \in A; \\ \mathbb{P}_x \{T_A < T_Z\} = 0 & \forall x \in Z. \end{cases} \quad (\text{A.2.2})$$

Avec $A = \mathcal{S}^+$, $Z = \mathcal{S}^-$ et $v_0 = 1$, le potentiel électrique $v(x)$ satisfait ces mêmes équations; la conclusion suit immédiatement du Théorème A.1 puisque f et v sont égales sur $A \cup Z$ et harmoniques partout ailleurs. \square

On a aussi ceci :

Proposition A.2. *Soit $a \in S$, $Z \subseteq S$ avec $a \notin Z$.*

Alors, $\mathcal{C}_{\text{eff}}(a \leftrightarrow Z) = \pi(a) \mathbb{P}_a \{T_Z < T_a^+\}$.

DÉMONSTRATION. En conditionnant par le premier pas, on a que

$$\mathbb{P}_a \{T_a^+ < T_Z\} = \sum_{x:a \sim x} p(a,x) \mathbb{P}_x \{T_a < T_Z\}.$$

On suppose $\mathcal{S}^+ = A = \{a\}$, $\mathcal{S}^- = Z$ et $v_0 = 1$, et on remarque que dans ce cas,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_a \{T_a^+ < T_Z\} &= \frac{1}{\pi(a)} \sum_{x:a \sim x} c(a,x) v(x) \\ &= \frac{1}{\pi(a)} \sum_{x:a \sim x} c(a,x) (v_0 - \mathbf{d}v(a,x)) \\ &= v_0 - \frac{1}{\pi(a)} \sum_{x:a \sim x} i(a,x) \\ &= v_0 - \frac{1}{\pi(a)} I_{\text{tot}} \end{aligned}$$

puisque $I_{\text{tot}} = \sum_{x \in A} I(x) = I(a)$. Mais $I_{\text{tot}} = v_0 \cdot \mathcal{C}_{\text{eff}}(a \leftrightarrow Z)$; de plus, $v_0 = 1$. Donc, finalement,

$$\mathbb{P}_a \{T_a^+ < T_Z\} = 1 - \frac{1}{\pi(a)} \mathcal{C}_{\text{eff}}(a \leftrightarrow Z),$$

et on complète en calculant la probabilité complémentaire. \square

On notera $\{a \rightarrow Z\}$ l'événement $\{X_0 = a, T_a^+ < T_Z\}$; dès lors, on voit que

$$\mathbb{P}_a \{a \rightarrow Z\} = \frac{\mathcal{C}_{\text{eff}}(a \leftrightarrow Z)}{\pi(a)},$$

ce qui ressemble agréablement à l'équation (1.1.8), mais en un peu plus général.

A.2.2. Fonctions de Green, nombre de visites

Soit $N_Z(x)$ le nombre de visites au site x strictement avant T_Z , pour $Z \subseteq S$ et $x \in S$ quelconque. On introduit :

$$\mathcal{G}_Z(a, x) = \mathbb{E}_a [N_Z(x)];$$

il s'agit de l'espérance du nombre de visites en x strictement avant d'atteindre Z . En particulier, sous \mathbb{P}_a , $N_Z(a)$ suit une loi géométrique dont le paramètre de succès est $\mathbb{P}_a \{a \rightarrow Z\}$. Donc,

$$\mathcal{G}_Z(a, a) = \frac{1}{\mathbb{P}_a \{a \rightarrow Z\}} = \pi(a) \mathcal{R}_{\text{eff}}(a \leftrightarrow Z),$$

où $\mathcal{R}_{\text{eff}}(a \leftrightarrow Z) = \mathcal{C}_{\text{eff}}(a \leftrightarrow Z)^{-1}$.

En conditionnant par le *dernier* pas, on remarque que, pour tout $x \neq a, \notin Z$,

$$\mathcal{G}_Z(a, x) = \sum_{y: x \sim y} \mathcal{G}_Z(a, y) p(y, x);$$

ce qui implique que

$$\frac{\mathcal{G}_Z(a, x)}{\pi(x)} = \frac{1}{\pi(x)} \sum_{y: x \sim y} c(x, y) \frac{\mathcal{G}_Z(a, y)}{\pi(y)};$$

finalement, si $f(x) = \frac{\mathcal{G}_Z(a, x)}{\pi(x)}$, on a que la fonction f satisfait

$$\begin{cases} f(x) = \sum_{y: x \sim y} \frac{1}{\pi(x)} c(x, y) f(y) & \forall x \neq a, \notin Z; \\ f(a) = \mathcal{R}_{\text{eff}}(a \leftrightarrow Z); \\ f(x) = 0 & \forall x \in Z. \end{cases} \quad (\text{A.2.3})$$

Ceci conduit au résultat suivant :

Proposition A.3. Avec $\{a\} = \mathcal{S}^+$, $Z = \mathcal{S}^-$ et $v_0 = \mathcal{R}_{\text{eff}}(a \leftrightarrow Z)$ (donc $I_{\text{tot}} = 1$), on a que

$$\frac{\mathcal{G}_Z(a, x)}{\pi(x)} = v(x)$$

On a bien sûr que si $v_0 = \mathcal{R}_{\text{eff}}(a \leftrightarrow Z)$, alors il suit que $v(x)/v_0 = \mathbb{P}_x \{T_a < T_Z\}$, en vertu de la proposition A.1; dès lors, on trouve que

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{G}_Z(a, x)}{\pi(x)} &= \frac{\mathbb{P}_x \{T_a < T_Z\}}{\pi(a) \mathbb{P}_a \{a \rightarrow Z\}} \\ &= \frac{1}{\pi(a)} \mathbb{P}_x \{T_a < T_Z\} \mathcal{G}_Z(a, a) \\ &= \frac{\mathcal{G}_Z(x, a)}{\pi(a)}, \end{aligned} \quad (\text{A.2.4})$$

puisqu'on remarque que $\mathcal{G}_Z(x, a) = \mathbb{P}_x \{T_a < T_Z\} \mathcal{G}_Z(a, a)$.

On définit $N_Z^+(x) = \sum_{t=0}^{T_Z^+} \mathbb{1}\{X_t = x\}$ le nombre de visites en x strictement avant T_Z^+ .

Proposition A.4.

$$\mathbb{E}_a [N_a^+(x)] = \frac{\pi(x)}{\pi(a)}.$$

DÉMONSTRATION. On définit $N_Z^+(x) = \sum_{t=0}^{T_Z^+} \mathbb{1}\{X_t = x\}$ le nombre de visites en x strictement avant T_Z^+ , et on calcule :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_a [N_a^+(x)] &= \mathbb{P}_a \{a \rightarrow x\} \mathcal{G}_a(x, x) \\ &= \frac{\mathbb{P}_a \{a \rightarrow x\}}{\mathbb{P}_x \{x \rightarrow a\}} \\ &= \frac{\pi(x)}{\pi(a)}. \end{aligned}$$

□

On appelle une **excursion à partir de a** la portion de la marche aléatoire entre les temps 1 et T_a^+ sous \mathbb{P}_a ; la durée de l'excursion correspond au temps du premier retour en a . On a que

$$T_a^+ = \sum_{x \in S} N_a^+(x),$$

et on a par conséquent le résultat suivant sur les temps d'excursions sur les graphes :

Proposition A.5. *L'espérance du temps d'excursion à partir de a pour une marche aléatoire réversible est donnée par :*

$$\mathbb{E}_a [T_a^+] = \frac{1}{\pi(a)} \sum_{x \in S} \pi(x). \tag{A.2.5}$$

Annexe B

Fonctions à variation régulière

Ici sont regroupés les définitions et théorèmes importants concernant les fonctions à variation régulière, d'après notamment les ouvrages de référence de Durrett [11], Bertoin [7], Feller [17], Bingham, Goldie et Teugels [8]

B.1. Définitions

On dit qu'une fonction $f : (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ est à **variation régulière** si il existe une fonction $u : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $t > 0$, $u(t) < +\infty$ et on a :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(tx)}{f(x)} = u(t). \quad (\text{B.1.1})$$

On a immédiatement le Lemme B.1 qui garantit la forme de la fonction u :

Lemme B.1. *Soit $f : (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à variation régulière avec*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(tx)}{f(x)} = u(t),$$

où $u(t) < +\infty$ pour tout t .

Alors $u(t) = t^\alpha$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$.

DÉMONSTRATION. On a que

$$\begin{aligned} u(st) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(stx)}{f(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(stx)}{f(tx)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(tx)}{f(x)} \\ &= u(s)u(t). \end{aligned}$$

En prenant $g(t) = \log u(t)$, on obtient l'équation fonctionnelle :

$$g(st) = g(s) + g(t),$$

dont les seules solutions sont les multiples du logarithme. On doit donc avoir $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $g(t) = \alpha \log(t)$, et $u(t) = t^\alpha$. \square

On dit qu'une fonction est à **variation régulière d'exposant** α si $u(t) = t^\alpha$; on dit qu'elle est à **variation lente** si $\alpha = 0$; dans ce cas,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(tx)}{f(x)} = 1$$

pour tout $t > 0$.

Le Lemme B.2 montre une décomposition utile pour les fonctions à variation régulière: **Lemme B.2.** *Soit $f : (a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à variation régulière d'exposant α . Alors, la fonction $L(x) = x^{-\alpha} f(x)$ est à variation lente.*

DÉMONSTRATION. On calcule simplement :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{L(tx)}{L(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(tx)}{f(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\alpha}{(tx)^\alpha} \\ &= t^\alpha \cdot \frac{1}{t^\alpha} = 1. \end{aligned}$$

\square

On peut faire les mêmes définitions pour les limites lorsque $x \rightarrow 0^+$; on dit alors que les fonctions sont à variation régulière (ou lente) près de 0.

B.2. Résultats

On consultera Bingham, Goldie et Teugen [8] et Feller [17] pour les preuves de ces résultats.

Le théorème B.1 donne un résultat sur l'inverse d'une fonction à variation régulière.

Théorème B.1. *Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction positive à variation régulière d'exposant $\alpha > 0$, et soit*

$$f^{-1}(x) = \inf \{y \in \mathbb{R}^+ : f(y) > x\}.$$

Alors, la fonction f^{-1} est à variation régulière d'exposant $1/\alpha$; de plus, on a que lorsque x tend vers l'infini,

$$f(f^{-1}(x)) \sim f^{-1}(f(x)) \sim x.$$

Le théorème B.2 donne un résultat sur le lien entre les densités et les fonctions de répartition à variation régulière :

Théorème B.2. *Soit $f : (a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction à variation régulière d'exposant α , et $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, alors*

- i. $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = +\infty$ et F est à variation régulière, d'exposant $\alpha + 1$ lorsque $\alpha > -1$;
- ii. de plus, $\lim_{x \rightarrow \infty} x f(x)/F(x) = \alpha + 1$.

Le théorème B.3 donne un résultat sur les transformées de Laplace pour les fonctions à variation régulière :

Théorème B.3. *Soit $L : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction à variation lente, et $0 \leq \alpha \leq 1$. Soit $F(x)$ une fonction de répartition, et $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$. On écrit*

$$\mathcal{L}F(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} dF(t).$$

Les deux énoncés suivants sont logiquement équivalents :

- i. $\bar{F}(x) \sim \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} L(x)x^{-\alpha}$ pour x à l'infini
- ii. $1 - \mathcal{L}F(\lambda) \sim \lambda^\alpha L(1/\lambda)$ pour λ près de 0.

Annexe C

Useful results

C.1. Influence of the first regeneration period.

In this section, we show that

Lemma C.1. *Let $\mathbf{I}(u) = (I_i(u))_{i \geq 1}$ be a family of sequences of indicator variables, where for all $u \geq 0$, $I_i(u)$ is measurable with respect to the i th regeneration period $(X_t)_{\tau_{i-1} \leq t < \tau_i}$; furthermore suppose that*

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \bar{\mathbb{P}}_0 \{I_1(u) = 1\} = \lim_{u \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0^K \{I_1(u) = 1\} = 0$$

Then it follows that for any family of events $(A(u))_{u \geq 0}$ where $A(u)$ is measurable with respect to $\mathbf{I}(u)$ for all $u \geq 0$, and limiting probabilities for $A(u)$ as $u \rightarrow \infty$ under \mathbb{P}_0^K and $\bar{\mathbb{P}}_0$, then we must have

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \bar{\mathbb{P}}_0 \{A(u)\} = \lim_{u \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0^K \{A(u)\}.$$

PROOF. Since $\mathbb{P}_0^K \{I_1(u) = 1\} \rightarrow 0$ and $\bar{\mathbb{P}}_0 \{I_1(u) = 1\} \rightarrow 0$, it follows that

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0^K \{A(u)\} = \lim_{u \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0^K \{A(u) \mid I_1(u) = 0\},$$

and similarly for $\bar{\mathbb{P}}_0$,

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \bar{\mathbb{P}}_0 \{A(u)\} = \lim_{u \rightarrow \infty} \bar{\mathbb{P}}_0 \{A(u) \mid I_1(u) = 0\}.$$

Since $\bar{\mathbb{P}}_0 \{\cdot\} = \mathbb{P}_0^K \{\cdot \mid D = \infty\}$, and $\{D = \infty\}$ is measurable with respect to the first regeneration period $(X_t)_{0 \leq t < \tau_1}$, it follows that $\mathbf{I}(u)_{>1} = (I_i(u))_{i > 1}$ has the same distribution under \mathbb{P}_0^K as under $\bar{\mathbb{P}}_0$; Thus, $\mathbf{I}(u)$ has the same distribution under $\mathbb{P}_0^K \{\cdot \mid I_1(u) = 0\}$ as under $\bar{\mathbb{P}}_0 \{\cdot \mid I_1(u) = 0\}$; therefore it must also follow that

$$\mathbb{P}_0^K \{A(u) \mid I_1(u) = 0\} = \bar{\mathbb{P}}_0 \{A(u) \mid I_1(u) = 0\},$$

and the result is immediate. □

Corollary C.1. *It follows from the previous lemma that any event measurable with respect to either $\delta_j(t)$ (for any $j \geq 1$) and $l(t)$ converges to the same probability under \mathbb{P}_0^K as under $\overline{\mathbb{P}}_0$.*

PROOF. The random variable $\delta_i(t)$ is measurable with respect to the sequence $I_i(t) = \mathbb{1}\{LT^{(i)}(t^\alpha)\}$; the random variable $l(t)$ is measurable with respect to the sequence $I'_i(t) = \mathbb{1}\{LT^{(i)}(u^\alpha)\} \mathbb{1}\{u < \tau_i\}$. The previous lemma completes the proof, since $\mathbb{P}_0^K \{LT^{(i)}(t^\alpha)\} \rightarrow 0$ as well as under $\overline{\mathbb{P}}_0$, and similarly for $\mathbb{P}_0^K \{u < \tau_i\}$. \square

C.2. Random indices and conditional probabilities

The following section contains the proof of a result employed in the proof for Lemma 4.11. More specifically, at the start of that proof, we require this :

$$\mathbb{P}_0^K \{OLT^{(\delta_i)}(\delta, t^\alpha)^c\} = \mathbb{P}_0^K \{OLT(\delta, t^\alpha) \mid LT(t^\alpha)\}.$$

Heuristically, this is true because the $LT^{(i)}(n)$ and the $OLT^{(i)}(\delta, n)$ are sequences of events such that the pairs $((OLT^{(k)}(\delta, n), LT_n^{(k)}))_{k \in \mathbb{N}}$ are i.i.d., and δ_i is a random index entirely measurable with respect to the sequence $LT^{(k)}(n)$. Therefore, we would expect that “the only extra information given by δ_i is that $LT^{(\delta_i)}$ definitely occurs.”

It will suffice to show this general lemma :

Lemma C.2. *Let $(X_n, I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ be a sequence of i.i.d. couples of random variables, with I_n an indicator variable for all n (its distribution is supported on $\{0, 1\}$). (X_1 and I_1 may not be independent, but the couples are i.i.d.) Furthermore, let N be a random variable measurable with respect to $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ and such that $\mathbb{P}\{N < +\infty\} = 1$ and $\mathbb{P}\{I_N = 1\} = 1$.*

Then, it follows that for any x :

$$\mathbb{P}\{X_N \leq x\} = \mathbb{P}\{X_1 \leq x \mid I_1 = 1\}.$$

In other words, X_N under \mathbb{P} has the same distribution as X_1 under $\mathbb{P}\{\cdot \mid I_1 = 1\}$.

PROOF. Let $\mathbf{I} = (I_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ be the random sequence of 0s and 1s. Then there is a function $f : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}$ such that $N = f(\mathbf{I})$. We denote by $f^{-1}(n)$ the set of all possible values for \mathbf{I} which yield $N = n$. if $\mathbf{I} \in f^{-1}(n)$, then $I_n = 1$.

We now condition by the value of \mathbf{I} and split $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ into the slices of $f^{-1}(n)$.

$$\mathbb{P}\{X_N \leq x\} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}\{X_N \leq x \mid \mathbf{I} \in f^{-1}(n)\} \mathbb{P}\{\mathbf{I} \in f^{-1}(n)\}$$

If $\mathbf{I} \in f^{-1}(n)$, then $I_n = 1$; because the (X_n, I_n) couples are all independent, we thus have that

$$\mathbb{P}\{X_N \leq x \mid \mathbf{I} \in f^{-1}(n)\} = \mathbb{P}\{X_n \leq x \mid I_n = 1\},$$

and any other information about \mathbf{I} is irrelevant.

Because the couples are identically distributed, this is $\mathbb{P}\{X_1 \leq x \mid I_1 = 1\}$. Thus,

$$\mathbb{P}\{X_N \leq x\} = \mathbb{P}\{X_1 \leq x \mid I_1 = 1\} \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}\{\mathbf{I} \in f^{-1}(n)\} = \mathbb{P}\{X_1 \leq x \mid I_1 = 1\} \mathbb{P}\{N < +\infty\}$$

and the result is proved. □