Université de Montréal

Une analyse de la relation entre les mécaniques classique et relativiste

par Pierre Ouellette

Département de philosophie

Faculté des arts et des sciences

Thèse présentée en vue de l'obtention du grade de docteur en philosophie

Janvier 2024

Université de Montréal

Département de philosophie, Faculté des arts et des sciences

Cette thèse intitulée

Une analyse de la relation entre les mécaniques classique et relativiste

Présentée par

Pierre Ouellette

A été évaluée par un jury composé des personnes suivantes

Molly Kao
Président rapporteur

Jean-Pierre Marquis
Directeur de recherche

Richard MacKenzie (dép. de physique)
Membre régulier

Louis Marchildon (UQTR)
Examinateur externe

Résumé

Notre thèse étudie la relation entre les mécaniques classique et relativiste. Il est généralement supposé, à partir de l'hypothèse des petites vitesses, que la mécanique classique correspond à la mécanique relativiste dans les cas où la vitesse des objets est petite par rapport à la vitesse de la lumière. Cette position nous semble inadéquate pour la simple raison que la mécanique classique ne peut être restreinte au seule domaine des petites vitesses. Nous proposons l'hypothèse que les deux mécaniques ont une structure commune et que chacune se distingue sous certaines conditions. Pour appuyer cette hypothèse, nous proposons une axiomatisation de la mécanique suffisamment générale pour servir de structure commune aux mécaniques classique et relativiste. Cette axiomatisation comporte une théorie de la relativité qui précise comment les quantités relatives sont reliées entre elles lorsque déterminées par rapport à différents référentiels, et les lois du mouvement qui précisent comment les forces exercées sur un objet détermine son mouvement. Cette mécanique générale est déterminée à deux constantes près et c'est en déterminant la valeur de ces constantes qu'apparaît le bris de la structure commune qui génère la mécanique classique d'une part et la mécanique relativiste d'autre part.

Mots clés : Relativité restreinte, axiomatisation, mécanique classique, mécanique relativiste, transformation de Galilée, transformation de Lorentz.

Abstract

Our thesis studies the relationship between classical and relativistic mechanics. It is generally assumed, based on the assumption of small velocities, that classical mechanics corresponds to relativistic mechanics in cases where the speed of objects is small compared to the speed of light. This position seems inadequate to us, for the simple reason that classical mechanics cannot be restricted to the realm of small velocities alone. We propose the hypothesis that the two mechanics have a common structure, and that each can be distinguished under certain conditions. To support this hypothesis, we propose an axiomatization of mechanics that is sufficiently general to serve as a common structure for both classical and relativistic mechanics. This axiomatization includes a theory of relativity that specifies how relative quantities are related to each other when determined with respect to different reference frames, and laws of motion that specify how forces exerted on an object determine its motion. This general mechanics is determined to within two constants, and it is by determining the value of these constants that the common structure that generates classical mechanics on the one hand and relativistic mechanics on the other is broken down.

Key words: Special relativity, axiomatization, classical mechanics, relativistic mechanics, Galileo transformation, Lorentz transformation.

Table des matières

Partie I. Présentation

1. L'introduction

Notre thèse étudie la relation entre les mécaniques classique et relativiste.

Il est généralement supposé que la mécanique classique des particules est obtenue à partir de la mécanique relativiste sous la condition que la vitesse v des particules est petite par rapport à la vitesse de la lumière c, ce qui correspond à poser que les fonctions de la mécanique classique sont obtenues à partir des fonctions de la mécanique relativiste dans la limite où $v/c \to 0$. Nous verrons que cette approche nous semble inadéquate tout simplement, cette approche limite arbitrairement la mécanique classique à un domaine très restreint de vitesse alors qu'elle est sensée s'appliquer à toutes les vitesses possibles.

Nous allons argumenter qu'il existe une structure commune aux deux mécaniques, mais qu'elles diffèrent sur certains axiomes que chaque mécanique ajoute à cette structure commune. Les deux théories ont en commun (i) une théorie de la relativité qui porte sur les quantités relatives, et (ii) une mécanique relative qui pose quelles sont les quantités relatives de la mécanique et les lois du mouvement. La mécanique classique ajoute à cette structure commune que le temps et la masse sont des quantités absolues, et que l'espace est euclidien; pour sa part, la mécanique relativiste ajoute que le principe de relativité s'applique à toutes les théories de la physique et que l'espace est minkowskien.

Pour bien appuyer notre thèse, nous allons présenter une théorie de la relativité et une théorie de la mécanique relative suffisamment générales pour servir de structure commune aux deux mécaniques. Nous serons alors en mesure de voir comment les deux mécaniques se distinguent selon les axiomes qu'elles ajoutent à cette structure commune.

Pour démontrer l'originalité de notre démarche, nous allons présenter, dans la première partie, les systèmes axiomatiques de la mécanique classique de relativiste de McKinsey, Sugar et Suppes (1953) et de la mécanique relativiste de Rubin et Suppes (1954) qui s'en inspire largement ; nous présenterons aussi les mécaniques classique et relativiste de Bunge (1967); finalement, nous présenterons aussi la version plus récente de la dynamique relativiste d'Andréka et al (2008). Nous conclurons qu'aucun de ces systèmes ne nous permet de dégager cette structure commune aux deux mécaniques qui est centrale à notre thèse.

Puis, dans la deuxième partie de notre travail, nous présenterons notre théorie relativiste $\mathbb{T}_R$ suffisamment générale pour servir de base aux deux mécaniques. Cette théorie de la relativité repose sur l'idée qu'une quantité relativiste de la physique peut être représentée par une relation binaire d'équivalence R sur un ensemble Σ de particules, déterminant ainsi un sous-ensemble de $\Sigma \times \Sigma$ composé de paires de particules. On met ensuite chaque paire de particules de ce sous-ensemble en relation avec un couple de valeurs, composé d'un scalaire Ω et d'un vecteur $\vec{U}$. On définit ensuite une loi de composition interne sur un ensemble composé de ces couples; après avoir posé les propriétés appropriées de cette loi de composition, on détermine les équations de transformation relativistes.

On en vient ensuite à notre formulation d'une mécanique relative qui sert de structure commune aux mécaniques classique et relativiste. Notre théorie de la mécanique relative est déterminée à deux constantes près, ω et ϖ, et il revient aux mécaniques classique et relativiste de poser les axiomes qui permettent de les déterminer. En mécanique classique, on démontre que l'axiome qui pose que le temps et la masse sont des quantités absolues implique que $\varpi = \infty$, et que l'axiome qui pose que l'espace est euclidien implique que $\omega = 0$. En mécanique relativiste, on démontre que l'axiome qui pose le principe de relativité implique que $\varpi = c$, la vitesse de la lumière, et qu'en conséquence de l'axiome qui pose que l'espace est minkowskien, on conclut que $\omega = c$.

Il en résulte que, dans notre approche, la mécanique classique n'est pas un cas particulier de la mécanique relativiste où on restreint cette dernière à des petites vitesses par rapport à la vitesse de la lumière. Les deux mécaniques partagent un même ensemble d'axiomes portant sur une théorie de la relativité et sur les lois du mouvement, mais diffèrent sur les axiomes qui déterminent les deux variables non déterminées de la théorie de la relativité.

2. La réduction de la mécanique relativiste à la mécanique classique

La mécanique classique est souvent présentée comme un cas limite de la mécanique relativiste car certaines fonctions de la première seraient obtenues à partir de fonctions de la seconde lorsque la vitesse v des particules est petite par rapport à la vitesse de la lumière c, soit lorsque à la limite $v/c \rightarrow 0$. On établit ainsi une correspondance entre ces fonctions, ce qui semble suffisant pour prétendre que la mécanique relativiste se réduit à la mécanique classique.

Par exemple, la quantité de mouvement relativiste $\vec{p}_{rel}$ d'une particule de masse m se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ est donnée par :

$$\vec{p}_{rel} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

et son énergie cinétique relativiste K_{rel}, par :

$$K_{rel} = mc^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1\right].$$

On peut établir une correspondance entre ces équations et leur expression équivalente en mécanique classique en les exprimant par un développement en série[1] :

$$\vec{p}_{rel} = m\vec{v}\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+\frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4}+\cdots\right),$$
$$K_{rel} = mc^2\left[\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+\frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4}+\cdots\right)-1\right] = \frac{1}{2}mv^2\left(1+\frac{3}{4}\frac{v^2}{c^2}+\cdots\right).$$

Ainsi, la quantité de mouvement classique, $\vec{p}_{clas} = m\vec{v}$, correspond à la quantité de mouvement relativiste en négligeant les termes d'ordre $\left(\frac{v^2}{c^2}\right)$ et plus :

$$\vec{p}_{clas} = \lim_{\frac{v^2}{c^2}\rightarrow 0} \vec{p}_{rel}\,;$$

---

[1] Le développement d'une série par la formule du binôme est donné par : $(1+x)^n = 1+\frac{nx}{1!}+\frac{n(n-1)x^2}{2!}+\frac{n(n-1)(n-2)x^3}{3!}+\cdots$. Ainsi, $\left(1+\left(-\frac{v^2}{c^2}\right)\right)^{-1/2} = 1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+\frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4}+\cdots$.

et il en est de même pour l'énergie cinétique classique, $K_{clas} = \frac{1}{2}mv^2$, qui correspond à l'énergie cinétique relativiste en négligeant les termes d'ordre $\left(\frac{v^2}{c^2}\right)$ et plus :

$$K_{clas} = \lim_{\frac{v^2}{c^2} \to 0} K_{rel}.$$

Cette limite est différente d'une autre limite que l'on voit à l'occasion dans les manuels de physique, où l'on pose plutôt que la vitesse de la lumière tend vers l'infini ($c \to \infty$); par exemple :

> « It is obvious that, by putting $c = \infty$, [the Galilean transformations] can equally well be derived from [the Lorentz transformations]. » (Pauli, 1958, p. 11)

> In the limit $v/c \to 0$ (or alternatively $c \to \infty$), … the Lorentz transformation becomes identical to the Galilean transformation. » (Kleppner et Kolenkow, 2014, p. 454)

Cette limite peut avoir un intérêt heuristique, mais elle est fausse empiriquement car la vitesse de la lumière est finie ($c =$ 299 792 458 m/s); de plus elle n'est pas satisfaisante d'un point de vue logique. Les fonctions de la mécanique relativiste sont obtenues en posant d'office que la vitesse de la lumière est finie et invariante pour tous les observateurs. En posant que $c \to \infty$, on introduit une contradiction au point de vue de la logique interne de la mécanique relativiste, étant donné qu'on ne peut poser que la vitesse de la lumière est à la fois finie et infinie. Peut-on alors conclure à la validité de la mécanique qui en découle? Il nous semble qu'au point de vue de la logique, on se retrouve dans une impasse.

Les correspondances entre les deux mécaniques par l'opération de limite $\frac{v^2}{c^2} \to 0$ sont bien connues des étudiantes et étudiants en physique car elles figurent dans la majorité des livres d'introduction à la relativité restreinte (par exemple, Tolman, 1917, p. 83; Moller, 1955, p. 71; Rosser, 1964, p. 183; Rindler, 2006 p. 112; Faraoni, 2013, p. 143).

Est-ce que ces correspondances suffisent à déterminer le lien entre les mécaniques einsteinienne et newtonienne? C'est ce qu'on prétend en général lorsqu'on discute de la question de la réduction des théories :

> « A paradigm case where a limiting reduction rather straightforwardly does obtain is that of classical Newtonian particle mechanics and the special theory of relativity. In the limit where $(v/c)^2 \to 0$, SR reduce to NM. » (Batterman, 1995, p. 172)

Cette réduction qui procède par une opération de limite échappe à la réduction « à la Nagel » (voir Nagel, 1979) qui stipule que la réduction d'une théorie T^* à une autre théorie T procède par une déduction logique des termes de la théorie T par les termes de la théorie T^* et de règles de correspondances. Une telle réduction par déduction permet d'une part d'expliquer la théorie T par la théorie T^*, et d'autre part de justifier un modèle rationnel des successions des théories. On a beaucoup critiqué ce modèle de réduction ailleurs, entre autres par Feyerabend (1962) et Khun (1962). Nous n'avons pas à entrer dans le débat qui s'en est suivi, il nous suffit nous de remarquer que la réduction « à la Nagel » ne s'applique pas au cas où la mécanique classique est une limite de la mécanique relativiste. Ce point est clairement établi par Nickles (1973) alors qu'il distingue les réductions de type 1 (« reduction_1 »), qui satisfont les règles de Nagel, et les réductions de type 2 (« reduction_2 ») :

> « By contrast, reduction_2 does not involve the theoretical explanation of one theory by another. Not all reduction is explanation! … [T]he main functions of reduction_2 are justificatory and heuristic. The development of new theoretical ideas is heuristically guided by the requirement that these ideas yield certain established results as a special case (e.g., in the limit), and they are often quickly justified to a degree by showing that they bear a certain relation to a predecessor theory. It was an important confirmation of [Special Theory of Relativity] to show that it yielded [Classical Mechanics] in the correct limit. … In the case of reduction_1 the reduced theory and reducing theories obviously must be logically compatible. Not for reduction_2. On the contrary, the two theories will *not* be logically compatible where reduction_2 is concerned. » (Nickles, 1973, p. 185-186)

Le modèle de réduction entre les deux mécaniques relèverait ainsi de processus de limite entre les équations des deux théories. C'est Berry (1994) qui exprime le mieux, à notre avis, ce type de réduction :

> « To begin, realise that theories in physics are mathematical; they are formal systems, embodied in equations. Therefore, we can expect questions of reduction to be questions of mathematics: how are the equations, or solutions of equations, of one theory, related to those of another? The less general theory must appear as

a particular case of the encompassing one, as some dimensionless parameter – call it δ – takes a particular limiting value. A general way of writing this scheme is

encompassing theory → less general theory as $\delta \to 0$.

Thus reduction must involve the study of limits, that is of asymptotics. The crucial question will be: what is the nature of the limit $\delta \to 0$? » (Berry, 1994, p. 598)

Berry continue en argumentant que la limite $\delta = v/c \to 0$ ne pose pas de problème sur le plan formel car elle ne présente aucune singularité :

« Reduction in its simplest form is well illustrated by the first example. Every physics student learns that one form of the connection between the encompassing theory of special relativity and the less general theory of Newtonian mechanics is contained in the 'low speed' series expansion

$$\sqrt{1-\delta^2} = 1 - \frac{1}{2}\delta^2 - \frac{1}{8}\delta^4 + \cdots$$

The left side represents special relativity, and the right side is a convergent Taylor series whose first term represents Newtonian mechanics. Mathematically, special relativity is analytic in δ at $\delta = 0$, so that the limit is unproblematic. » (Berry, 1994, p. 599)

Si, mathématiquement la limite $\delta \to 0$ ne pose pas de problème de singularité, il reste à savoir si cette limite représente bien la relation entre les deux mécaniques.

Selon l'hypothèse des petites vitesses, on obtient la quantité de mouvement classique par la limite :

$$\vec{p}_{clas} = \lim_{\frac{v^2}{c^2} \to 0} \vec{p}_{rel}.$$

Il suffit ensuite de poser l'équation du mouvement

$$\Sigma \vec{F}_{clas} = \frac{d\vec{p}_{clas}}{dt}.$$

Dans ce cas, la fonction de la quantité de mouvement serait la primitive de la mécanique classique et à partir de laquelle, à l'aide de l'équation du mouvement, on obtient les autres fonctions de la mécanique, dont l'énergie. Il serait alors possible de soutenir l'idée que « In the limit where $(v/c)^2 \to 0$, SR reduce to NM » comme le pose Batterman (op. cit).

Selon cette hypothèse, il faut que la vitesse v devienne très petite par rapport à la vitesse de la lumière c ($v/c \to 0$). On obtient alors une mécanique qui n'est valide que pour des petites vitesses où les effets relativistes seraient alors négligeables. Il est donc légitime de se demander si la théorie obtenue en posant la limite $v/c \to 0$ correspond bien à la mécanique classique? La question se pose car la mécanique que l'on obtient par la contrainte $v/c \to 0$ ne serait pas valide pour de grandes vitesses, alors que la mécanique classique l'est; par exemple, la mécanique obtenue de la mécanique relativiste par la contrainte $v/c \to 0$ ne pourrait pas s'appliquer au mouvement des satellites car à la vitesse à laquelle ils évoluent sur leur orbite, les effets relativistes ne sont pas négligeables; or, la mécanique classique s'applique au mouvement des satellites, même si ses prédictions ne sont pas aussi exactes que celles de la mécanique relativiste. Ainsi, la limite $v/c \to 0$ restreint considérablement le domaine d'application de la mécanique classique.

En fait, la contrainte $v/c \to 0$ détermine un domaine d'application commun aux deux mécaniques et pour lequel l'écart entre les valeurs prédites est négligeable, ce qui ne nous semble pas suffisant pour conclure à la réduction de la mécanique relativiste à la mécanique classique. Après tout, ce n'est pas parce que les domaines d'application de deux théories coïncident qu'une de ces théories peut se réduire à l'autre.

Et ce n'est pas tout : il faut aussi tenir compte des transformations de Lorentz. Rappelons que ces équations permettent de calculer les variables de temps t' et de position x' d'une particule σ par rapport à un système de référence S' si on connaît les valeurs des variables de temps t et de position x de cette particule par rapport à un référentiel S, et la vitesse $v_{(S,S')}$ du référentiel S' par rapport au référentiel S S'. Ces équations sont :

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{(S,S')}^2}{c^2}}}\left(t - \frac{v_{(S,S')}}{c^2}\, x\right),$$

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{(S,S')}^2}{c^2}}}\left(-v_{(S,S')}t + x\right).$$

Pour obtenir la mécanique classique à partir de la mécanique relativiste par un processus de limite, il faudrait qu'on puisse aussi obtenir de la même façon les équations de transformation de Galilée :

$$t' = t,$$
$$x' = -v_{(s,s')}t + x.$$

La question se pose alors : est-ce que les équations de transformations de Galilée peuvent être obtenues par une opération limite sur les équations de transformations de Lorentz? Voici un tableau qui résume le résultat de deux différentes opérations de limite sur les équations de Lorentz.

	$\frac{v_{(s,s')}}{c} \to 0$	$\left(\frac{v_{(s,s')}}{c}\right)^2 \to 0$
$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{{v_{(s,s')}}^2}{c^2}}}$	$\gamma = 1$	$\gamma = 1$
$t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{(s,s')}^2}{c^2}}}\left(t - \frac{v_{(s,s')}}{c^2}\,x\right)$	$t' = t - \frac{v_{(s,s')}}{c^2}\,x$	$t' = t - \frac{v_{(s,s')}}{c^2}\,x$
$x' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{(s,s')}^2}{c^2}}}\left(-v_{(s,s')}t + x\right)$	$x' = -v_{(s,s')}t + x$	$x' = -v_{(s,s')}t + x$

On constate d'abord que la limite $\frac{v_{(s,s')}}{c} \to 0$ pour la transformation du temps ne donne pas $t' = t$; en effet, comme le mentionne Baierlen (2006) :

> « Let the ratio v/c be as small as desired (but nonzero). Then it is always possible to find an event pair for which Δx is large enough that the term with Δx dominates over the term with Δt. This behavior is entirely different from what the Galilean transformation, $\Delta t' = \Delta t$, asserts. » (Baierlen, 2006, p. 193)

.

Ensuite, il faut remarquer que la limite $\left(\frac{v_{(s,s')}}{c}\right)^2 \to 0$ ne résulte pas en les transformations de Galilée, mais plutôt aux transformations infinitésimales de Lorentz pour la vitesse infinitésimale δv (voir Strecker, 1967, p. 12) :

$$d\tau' = d\tau - \delta\beta dx$$

$$dx' = \delta\beta d\tau - dx$$

où $\tau = ct$ et $\beta = v_{(S,S')}/c$. Il est possible de générer les transformation de Lorentz finie par une succession infinie de transformation de Lorentz infinitésimale.

Il ne faut pas s'étonner de ce résultat. Les transformations de Lorentz forment un groupe et en conséquence, le résultat de deux transformations de Lorentz successives doit être une transformation de Lorentz. Ainsi, toute transformation de Lorentz finie combinée à une transformation de Lorentz infinitésimale doit résulter en une transformation de Lorentz, ce qui ne serait pas le cas si la transformation de Lorentz infinitésimale était la transformation galiléenne.

Cet argument devrait nous convaincre qu'une transformation de Lorentz, même pour des toutes petites vitesses, ne peut résulter en une transformation de Galilée (voir Baierlen, 2006).

Bref, on semble bien être dans une impasse. Nous avons le sentiment qu'il existe une relation entre les mécaniques relativiste et classique, et entre les équations de transformations propres à ces deux mécaniques, mais d'importantes difficultés se posent lorsqu'on cherche à représenter cette relation comme le résultat d'une limite à effectuer sur les fonctions de la mécanique relativiste.

Partie II. Les systèmes d'axiomes des mécaniques classique et relativiste

Nous allons nous restreindre ici à la présentation des axiomatisations de McKinsey, Sugar et Suppes (1953) pour la mécanique classique et de sa contrepartie relativiste proposée par Sugar et Suppes (1954), puis les axiomatisations des deux mécaniques de Bunge (1967). Nous présenterons aussi les travaux plus récents d'Andréka et al (2008) de l'École de logique et relativité (que nous appellerons plus simplement l'École hongroise), fondée par István Németi et Hajnal Andréka, et affiliée à l'Institut de mathématiques Alfréd Rényi de l'Académie hongroise des sciences.

Il nous faut mentionner qu'il existe d'autres axiomatisons de la mécanique classique, disponibles seulement en allemand et qui ne nous sont pas accessibles, dont celle de Hamel (1927) et celle de Hermes (1959). Nous n'en tiendrons pas compte. Nous laisserons aussi de côté l'axiomatisation de Simon (1947) qui, en s'inspirant des travaux de Mach, vise à clarifier la notion de masse en mécanique classique et qui ne nous semble pas pertinente pour notre étude.

3. Les systèmes d'axiomes de McKinsey, Sugar et Suppes (1953) et de Rubin et Suppes (1954)

3.1 La mécanique classique : McKinsey, Sugar et Suppes (1953)

Le système d'axiomes de McKinsey, Sugar et Suppes (1953) aura marqué à sa façon la philosophie des sciences par son approche différente de l'axiomatisation basée sur la théorie des ensembles et non pas sur une logique des propositions, ce qui était prôné par l'empirisme logique, courant dominant en philosophie des sciences à l'époque. Cette approche a été par la suite reprise par Suppes (Suppes, 1967; voir aussi Da Costa et Choiaqui, 1988), puis par les structuralistes, dont Sneed (1971), Stegmuller (1976, 1979) et Balzer, Moulines et Sneed (1987), pour discuter des enjeux propres à la philosophie des sciences, dont la nature des termes théoriques et la réduction inter théorique.

Le système axiomatique de McKinsey, Sugar et Suppes (1953) est composé de cinq notions primitives : les ensembles P et T, et les fonctions s, m et f sur ces ensembles; et de six axiomes. Chaque élément $p \in P$ représente une particule et chaque élément $t \in T$, un instant. La fonction $s(p, t)$ représente la position de la particule p à l'instant t; la fonction $m(p)$ représente la masse de la particule p; et la fonction $f(p, t, i)$ ($i = 1, 2, 3, \ldots$) représente la $i^{ème}$ force exercée sur la particule p.

Un système $\Gamma = < P, T, s, m, f >$ est appelé un *système de mécanique classique de particules de dimension* n, ou simplement un *système de mécanique classique de particules* s'il satisfait les axiomes $P1$ à $P6$.

« Kinematical axioms.

$\boldsymbol{P}$**1.** P is a non-empty, finite set.

$\boldsymbol{P}$**2.** T is an interval of real numbers.

$\boldsymbol{P}$**3.** If $p \in P$ and $t \in T$, then $s(p, t)$ is a *n*-dimensional vector such that $d^2 s(p, t)/dt^2$ exists.

Dynamical axioms.

$\boldsymbol{P}$**4.** If $p \in P$, then $m(p)$ is a positive real number.

$\boldsymbol{P}$**5.** If $p \in P$ and $t \in T$, then $f(p, t, 1)$, $f(p, t, 2)$, …, $f(p, t, i)$, … are *n*-dimensional vector such that the series $\sum_{i=1}^{\infty} f(p, t, i)$ is absolutely convergent.

$\boldsymbol{P}$**6.** If $p \in P$ and $t \in T$, then :

$$m(p) \frac{d^2 s(p, t)}{d^2 t} = \sum_{i=1}^{\infty} f(p, t, i) \text{ . »}$$

(McKinsey, Sugar and Suppes, 1953)

L'axiome $\boldsymbol{P}$**6** pose la deuxième loi de Newton. Mentionnons qu'il existe une autre formulation de la deuxième loi de Newton, à notre avis plus générale. Définissons d'abord la quantité de mouvement, $\wp$, d'une particule comme le produit de sa masse et de sa vitesse, soit, en reprenant la notation de McKinsey, Sugar et Suppes (1953) :

$$\wp(p, t) = m(p) \frac{ds(p, t)}{dt}.$$

Alors, la deuxième loi de Newton peut être écrite sous la forme :

$$\frac{d\wp(p, t)}{dt} = \sum_{i=1}^{\infty} f(p, t, i).$$

La question des transformations des fonctions de la mécanique d'un référentiel à un autre n'est pas abordée dans cet article, mais dans un autre article, cette fois de McKinsey et Suppes (1953), paru dans le même volume. À partir des axiomes de McKinsey, Sugar et Suppes (1953), McKinsey et Suppes (1953) prouvent ce théorème :

> « **Theorem 1**. Let $\Gamma =< P, T, m, s, f >$ be an n-dimensional system of particle mechanics; let $\mathcal{A}$ be a non-singular square matrix of order n; let $\mathcal{B}$ anc $\mathcal{C}$ be n-dimensional vectors; and let α, β and γ be real numbers such that $\beta \neq 0$ and $\gamma > 0$. Let T' be the set of all real numbers t' such that, for some t in T,
>
> (i) $$t' = \alpha + \beta t,$$
>
> and let m', s', and f' be defined by the following equations (for p any element of P, t' any element of T' and i any member of I):
>
> $$m'(p) = \gamma m(p)$$
>
> (ii) $$s'(p, t') = \beta^2\, s\left(p, \frac{t'-\alpha}{\beta}\right) \cdot \mathcal{A} + t'\mathcal{B} + \mathcal{C}$$
>
> $$f'(p, t', i) = \gamma\, f\left(p, \frac{t'-\alpha}{\beta}, i\right) \cdot \mathcal{A}.$$
>
> Then $\Gamma' =< P, T', m', s', f' >$ is also an n-dimensional system of particle mechanics. Conversely, if equations (i) and (ii) hold, and $\Gamma' = < P, T', m', s', f' >$ is a n-dimensional system of particle mechanics, then so is $\Gamma =< P, T, m, s, f >$. » (McKinsey et Suppes, 1953, p. 273-274)

Les différents paramètres de ces équations de transformation ont les interprétations suivantes :

> « The transformation $t' = \alpha + \beta t$ amounts to changing the unit of time by an amount $1/\beta$ … and shifting the origin of time by an amount $-\alpha$. The transformation $m'(p) = \gamma m(p)$ amounts to changing the unit of mass by an amount $1/\gamma$. The terms $\mathcal{C}$ and $t'\mathcal{B}$ in the transformation for the position vector amount respectively to a translation, and the imposition of a uniform velocity for the new coordinate system with respect to the old. The multiplication of $s\left(p, \frac{t'-\alpha}{\beta}\right)$ by the matrix $\beta^2\mathcal{A}$ amounts to subjecting this vector to to a general affine transformation. Since every

affine transformation can be factored into a series of orthogonal transformations and stretches, we therefore see that the transformation on the position vector consists of the following: a series of rotations about the origin, reflections, and stretches is made, followed by a shift in the origin, and the imposition on the coordinate system of a uniform velocity. The force function, finally, is subjected to a series of rotations about the origin, reflections and stretches. » (McKinsey et Suppes, 1953, p. 274)

On le voit, ces équations de transformation sont plus générales que celles de Galilée. Si on pose que $\alpha = \mathcal{C} = 0$ (les origines du temps et de la position sont inchangées); que $\beta = \gamma = 1$ (les unités de temps et de masse sont inchangées); que $\mathcal{A} = 1$ (il n'y a ni rotation, ni réfection, ni étirement); alors on obtient :

$$
\begin{aligned}
&t' = t,\\
&m'(p) = m(p),\\
&s'(p,t') = s(p,t) + t\mathcal{B},\\
&f'(p,t',i) = f\ (p,t,i),
\end{aligned}
$$

qui correspondent aux équations de transformation de Galilée.

Ils prouvent ensuite (McKinsey, Sugar et Suppes, 1953; leur théorème 3, p. 277) que ces transformations sont les seules qui transforment un système de la mécanique des particules en un autre système de la mécanique des particules.

3.2 Discussion : la troisième loi de Newton

McKinsey, Sugar et Suppes (1953) ne formulent pas d'axiomes pour la troisième loi de Newton, aussi il nous a semblé important de discuter spécifiquement de ce point.

La troisième loi de Newton pose que lorsque deux particules p et q interagissent ensemble, la particule p exerce sur la particule q une force de même norme que la force que la particule q exerce sur la particule p, mais de sens opposé. Une conséquence de la troisième loi est que la somme des forces internes d'un système de particules est toujours nulle. De plus, si la somme des forces externes est nulle, alors on peut démontrer, à l'aide de la deuxième loi de Newton, que la quantité de mouvement totale du système est conservée; c'est ce qu'on appelle le principe de conservation de la quantité de mouvement, une des conséquences les plus importantes des lois de Newton. Entre autres, le principe de conservation de la quantité de mouvement permet d'étudier les collisions entre particules.

Revenons sur la position de McKinsey, Sugar et Suppes (1953) sur la troisième loi de Newton. Selon eux, la troisième loi de Newton pose la question de la distinction entre les forces internes et externes :

> « Closely connected with the Third Law is the question of the distinction between internal and external forces. This distinction could have been made initially by replacing the primitive f by two new primitives: g, to represent external forces; and h, to represent internal forces. … Instead of introducing the new primitives g and h, we believe that it is formally more simple and useful to speak of sets of balanced pairs of forces, instead of speaking of internal forces. » (McKinsey, Sugar and Suppes, 1953, p. 260-261)

Les notions « équilibre de force » et « ensemble équilibré » sont introduites par les deux définitions suivantes :

> « **Definition 1.** Let $< P, T, m, s, f >$ be an n-dimensional system of particle mechanics, let $p, q \in P$, and let $i, j \in I$ [2]. Then we say that the i^{th} *force acting on* p *and the* j^{th} *force acting on* q *balance each other* if the following conditions are satisfied for every $t \in T$:
>
> (1) $f(p,t,i) = -f(q,t,j)$,
>
> (2) The vectors $f(p,t,i)$, $f(q,t,j)$ and $s(p,t) - s(q,t)$, unless one is $\vec{0}$, are all parallel.
>
> **Definition 2.** Let $< P, T, m, s, f >$ be a system of particle mechanics and let $P \times I$ be the Cartesian product of P and I: i.e., the set of all ordered couples $< p, i >$ such that $p \in P$ and $i \in I$. Then we shall call a subset A of $P \times I$ a *balanced set*, if there exist two mutually exclusive sets A_1 and A_2 whose union is A, and a ono-to-one correspondence between A_1 and A_2 such that, whenever $< p, i > \in A_1$ corresponds to $< q, j > \in A_2$, then the i^{th} force acting on p and the j^{th} force acting on q balance each other. » (McKinsey, Sugar et Suppes, 1953, p. 261-262)

Mentionnons tout de suite qu'il n'est pas clair ce que les auteurs veulent dire par « corresponds to » dans « whenever $< p, i > \in A_1$ corresponds to $< q, j > \in A_2$ ». Dans le cadre d'une axiomatisation de la

[2] I est l'ensemble des nombres entiers positifs.

mécanique, « corresponds to » pourrait vouloir dire « interacts with », auquel cas cette expression se lirait : « whenever $< p, i > \in A_1$ *interacts with* $< q, j > \in A_2$ ». Un système de particules serait alors dit équilibré si, lorsque deux particules interagissent ensemble, la force exercée sur une particule est équilibrée par une force exercée sur l'autre particule.

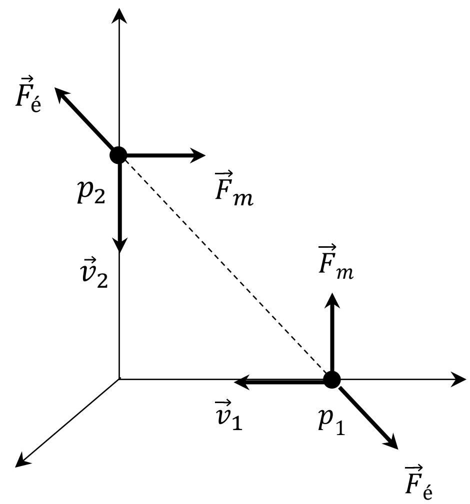
Si notre interprétation de « correspond to » dans la définition 2 est correcte, un ensemble de particules serait un « ensemble équilibré » si les forces exercées entre deux particules en interaction s'équilibrent, de sorte que la somme des forces internes du système est nulle. Mais, rien dans le système d'axiomes pose qu'une telle interaction entre particules existe, et il revient à la troisième loi de poser l'existence d'une telle interaction entre paires de particules.

Le motif invoqué par McKinsey, Sugar et Suppes (1953) pour ne pas poser la troisième loi de Newton est qu'elle ne serait pas toujours vraie :

> « Finally, we have not taken the Third Law as an axiom. We have omitted this law because it often happens in applications that one wants to consider a system of particles where it is not true that to every action there is an equal and opposite reaction: thus in exterior ballistics, for example, we never consider the perturbation of the earth's orbit occasioned by firing a cannon. » (Mckinsey, Sugar et Suppes, 1953, p. 260)

Pourtant, que l'orbite de la Terre soit perturbée par le lancement d'un boulet par un canon est justement un exemple d'application de la troisième loi de Newton ; dans ce cas, la réaction (le boulet qui exerce une poussée sur le canon) est égale en module et opposée en direction à l'action (le canon qui exerce une poussée sur le boulet). Si le canon est solidement fixé à la Terre, la poussée qu'il reçoit du boulet se transmet à la Terre, ce qui est propre à modifier son mouvement sur son orbite. On peut tenir compte de cette perturbation de l'orbite terrestre, mais cette perturbation est minime et peut être négligée car elle serait difficilement mesurable. Ainsi, de négliger cette perturbation n'invalide pas la troisième loi : ce n'est pas en conséquence de la troisième loi qu'on néglige cette perturbation, c'est qu'elle est négligeable.

Cela étant dit, il faut admettre qu'il est vrai que la troisième loi n'est pas valide dans tous les cas. Prenons, par exemple, deux particules p_1 et p_2 chargées positivement, se déplaçant respectivement à la vitesse $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sur une trajectoire perpendiculaire l'une par rapport à l'autre alors qu'elles se dirigent vers un même point (voir la figure ci-dessous).



Chaque particule exerce sur l'autre une force électrique $\vec{F}_{é}$ telle que ces deux forces électriques sont de même intensité mais de sens opposé, ce qui satisfait la troisième loi de Newton. En plus de cette force électrique, chaque particule exerce sur l'autre une force magnétique $\vec{F}_m$ qui est perpendiculaire au vecteur vitesse de chaque particule, de sorte que ces forces magnétiques, de même intensité, sont perpendiculaires entre elles et ne satisfont donc pas la troisième loi de Newton car elles ne sont pas en sens opposé. On en conclut que la troisième loi est valide en électrostatique, mais pas en électrodynamique (voir Griffiths, 1999, p. 350).

Ce contre-exemple pose un problème majeur car, nous l'avons vu, la troisième loi est essentielle à la mécanique pour déduire le principe de conservation de la quantité de mouvement pour un système isolé.

La solution à ce contre-exemple fourni par l'électrodynamique réside non dans le rejet de la troisième loi de Newton comme le fait McKinsey, Sugar et Suppes (1953), mais dans la redéfinition de la notion de la quantité de mouvement; l'électrodynamique attribue une quantité de mouvement au champ électromagnétique, donnée par :

$$\vec{\wp}_{\text{ém}} = \frac{1}{c^2} \int \vec{E} \times \vec{B} \; dV,$$

où $\vec{E}$ le champ électrique, $\vec{B}$, le champ magnétique. La quantité de mouvement du système est alors définie par :

$$\vec{\wp} = \vec{\wp}_{\text{méc}} + \wp_{\text{ém}}.$$

On peut démontrer (voir Griffiths, 1999, p. 355) qu'ainsi redéfinie, la quantité de mouvement totale est conservée lorsqu'on doit tenir des effets électrodynamiques sur une particule de masse m et de charge électrique q.

S'il y a une certain fondement à la position de McKinsey, Sugar et Suppes (1953) sur la troisième loi de Newton, il nous semble, qu'à défaut de poser un axiome pour la troisième loi, il faudrait que le principe de conservation de la quantité de mouvement soit posé comme un axiome, ce qui n'est pas fait dans le système de McKinsey, Sugar et Suppes (1953).

3.3 La mécanique relativiste : Rubin et Suppes (1954)

Passons maintenant au système axiomatique de Rubin et Suppes (1954).

Un sextuple ordonné $\Gamma = \langle P, \mathfrak{T}, m, s, f, c \rangle$ est appelé un *système de mécanique relativiste de particules de dimension* n (ou, tout simplement, un système de mécanique relativiste de particules) si et seulement s'il satisfait les $\boldsymbol{A}$**1** à $\boldsymbol{A}$**7** suivants.

« Kinematical Axioms

$\boldsymbol{A}$**1.** P is a nonempty, finite set.

$\boldsymbol{A}$**2.** If $p \in P$, then $\mathfrak{I}(p)$ is an interval of real numbers.

$\boldsymbol{A}$**3.** If $p \in P$ and $t \in \mathfrak{I}(p)$, then $s_p(t)$ is an n-dimensional vector; and, moreover, the second derivative of $s_p(t)$ exists throughout the interval $\mathfrak{T}(p)$.

$\boldsymbol{A}$**4.** The constant c is a positive real number such that for every $p \in P$ and $t \in \mathfrak{T}(p)$,

$$\left|\frac{ds_p(t)}{dt}\right| < c.$$

Dynamical Axioms

$\boldsymbol{A}$**5.** If $p \in P$, then $m(p)$ is a positive real number.

$\boldsymbol{A}$**6.** If $p \in P$ et $t \in \mathfrak{I}(p)$, then $f(p,t,1)$, $f(p,t,2)$, … are n-dimensional vectors such that the series

$$\sum_{i=1}^{\infty} f(p,t,i)$$

is absolutely convergent.

***A*7.** If $p \in P$ and $t \in \mathfrak{J}(p)$, then

$$m(p)\left[\frac{d}{dt}\frac{\frac{ds_p(t)}{dt}}{\sqrt{1-\frac{\left(\frac{ds_p(t)}{dt}\right)^2}{c^2}}}\right] = \sqrt{1-\frac{\left(\frac{ds_p(t)}{dt}\right)^2}{c^2}}\sum_{i=1}^{\infty} f(p,t,i)\,.\text{»}$$

(Rubin and Suppes, 1954, p. 566)

Cet axiome énonce l'équation du mouvement qui permet de déterminer les fonctions de vitesse et de position lorsque les forces $f(p,t,i)$ sont déterminées.

Rubin et Suppes définissent ensuite la position dans l'espace-temps par :

$$q(p,t) = \langle s(p,t), t\rangle,$$

et la force relativiste par :

$$f^{rel}(p,t,i) = \langle f(p,t,i), \frac{f(p,t,i)\cdot v_p(t)}{c^2}\rangle.$$

Ainsi définie, la force relativiste correspond à la force de Minkowski dans l'espace à quatre dimensions de Minkowski (voir Rindler, 1982, p. 101 à 105, ou Sard, 1970, p. 166 à 168) :

$$F^{\mu} = \left(\gamma\vec{F}, \gamma\,\vec{F}\cdot\frac{\vec{v}}{c}\right),$$

où $\vec{v}$ est le vecteur vitesse de la particule ($ds_p(t)/dt$ dans l'axiomatique de Rubin et Suppes), γ est le facteur de Lorentz :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

et :

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right),$$

qui est l'équation du mouvement dans l'espace euclidien à trois dimensions.

Il faut remarquer que les axiomes $\boldsymbol{A4}$ et $\boldsymbol{A7}$ ne sont pas indépendants. En effet, selon l'axiome $\boldsymbol{A7}$:

$$m(p)\left[\frac{d}{dt}\frac{\frac{ds_p(t)}{dt}}{\sqrt{1-\frac{\left(\frac{ds_p(t)}{dt}\right)^2}{c^2}}}\right] = \sqrt{1-\frac{\left(\frac{ds_p(t)}{dt}\right)^2}{c^2}}\sum_{i=1}^{\infty} f(p,t,i).$$

Pour les fins de la discussion, réécrivons cette équation en notation vectorielle, où $\frac{ds_p(t)}{dt} = \vec{v}$:

$$m(p)\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sum_{i=1}^{\infty}\vec{f}(p,t,i).$$

Après avoir effectué la dérivée du terme de gauche, on obtient :

$$m(p)\left(\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\vec{a} + (\vec{v}\cdot\vec{a})\vec{v}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\right) = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sum_{i=1}^{\infty}\vec{f}(p,t,i)$$

$$\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\vec{a} + (\vec{v}\cdot\vec{a})\vec{v} = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\vec{f}(p,t,i)}{m(p)}.$$

Lorsque la vitesse $\vec{v}$ tend vers c, le terme $\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)$ tend vers 0 et on obtient :

$$(\vec{v}\cdot\vec{a})\vec{v} = 0.$$

Cette équation n'est satisfaite que si $\vec{a} = 0$, ce qui implique que la norme de la vitesse $\vec{v}$ ne peut dépasser c. Ainsi, l'axiome **A7** implique l'existence de la vitesse limite c postulée par l'axiome $\boldsymbol{A4}$.

Venons-en maintenant aux transformations des fonctions de leur système.

Rubin et Suppes (1954) ne déduisent pas les transformations de Lorentz à partir de principes plus généraux, mais les introduisent via la définition suivante.

> « **Definition 1**. Let c, c', and λ be positive real numbers. Then a matrix $\mathcal{A}$ of order *n* + 1 is said to be a *generalized Lorentz matrix with respect to* $\langle c, c', \lambda\rangle$ if and only if there exist numbers δ and β, an n-dimensional vector U, and an orthogonal matrix $\mathcal{E}$ of order *n* , such that
>
> $$\delta^2 = 1\,, \qquad \beta^2\left(1 - \frac{U^2}{c'^2}\right) = 1,$$
>
> and
>
> $$\mathcal{A} = \lambda\begin{pmatrix} \mathcal{I} & 0 \\ 0 & \dfrac{c}{c'} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathcal{E} & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathcal{I} + \dfrac{\beta - 1}{U^2} U^* U & -\dfrac{\beta U^*}{c^2} \\ -\beta U & \beta \end{pmatrix}. »$$
>
> (Rubin et Suppes, 1954, p. 569)

En effectuant le produit des trois matrices, on obtient :

$$\mathcal{A} = \lambda\begin{pmatrix} \mathcal{E}\left(\mathcal{I} + (\beta - 1)\dfrac{U^*U}{U^2}\right) & -\mathcal{E}\beta\dfrac{U^*}{c^2} \\ -\beta U\,\delta\dfrac{c}{c'} & \beta\,\delta\dfrac{c}{c'} \end{pmatrix}.$$

Rubin et Suppes donnent l'interprétation suivante des termes de cette matrice de Lorentz généralisée :

> « c is the old and c' the new velocity of light. … When $\delta = -1$, we have a reversal of the direction of time. The matrix $\mathcal{E}$ represents (for $n \leq 3$) a rotation of the spatial coordinates — or a rotation followed by a reflection. The vector U represents the relative velocity of the two inertial frames of reference, and the number β, which is determined by U and c', is the well-known Lorentz contraction factor. Finally, it is easy to check that the last matrix in the factorization of the matrix $\mathcal{A}$ yields the ordinary Lorentz transformations. » (Rubin et Suppes, 1954, p. 577)

Il est surprenant de constater que dans le système de Rubin et Suppes, il n'est pas spécifié que la vitesse de la lumière ne soit pas une constante invariante, la même dans tous les référentiels. C'est à notre avis, un problème majeur.

Comme le mentionne à juste titre Rubin et Suppes dans la dernière citation, on peut comparer la matrice de la transformation générale de Lorentz, $\mathcal{A}$, avec la matrice de transformation de Lorentz L en quatre dimensions (voir Rosser, 1964, p. 96 et 97), en prenant soin d'adapter la notation pour utiliser les mêmes variables que Rubin et Suppes :

$$L = \begin{pmatrix} \mathcal{I} + (\beta - 1)\dfrac{U^*U}{U^2} & -\beta\dfrac{U^*}{c^2} \\ -\beta U & \beta \end{pmatrix}.$$

Si on pose dans la matrice $\mathcal{A}$ que $\lambda = 1$, $\delta = 1$ (le temps n'est pas inversé), $c = c'$ (la vitesse limite est la même dans tous les systèmes de références) et $\mathcal{E} = \mathcal{I}$ (il n'y a pas de rotation), alors la matrice $\mathcal{A}$ est :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathcal{I} + (\beta - 1)\dfrac{U^*U}{U^2} & -\beta\dfrac{U^*}{c^2} \\ -\beta U & \beta \end{pmatrix}$$

et elle est bel et bien égale à la transformation L de Lorentz.

Rubin et Suppes (1954) démontrent ensuite le théorème suivant selon lequel la matrice généralisée de Lorentz $\mathcal{A}$ préserve les équations du mouvement de leur système axiomatique :

> « **Theorem 1**. Let $\langle P, \mathfrak{T}, m, s, f, c\rangle$ be an n-dimensional [system of relativistic particle mechanics]. Let c', c and λ be positive real numbers, let B be an (n + 1)-dimensional vector, and let $\mathcal{A}$ be a generalized Lorentz matrix with respect to$\langle c, c', \lambda\rangle$. For each p in P let the function h_p be defined as follows (for all t in $\mathfrak{T}(p)$) :
>
> $$h_p = \left[\langle s_p(t), t\rangle\mathcal{A} + B\right]_{n+1}.$$
>
> (By Lemma 1 the inverse function h_p^{-1} exists.) Let the function $\mathfrak{T}'$ be defined as follows: for p in P, $\mathfrak{T}'(p)$ is the range of the function h_p; and let the functions m', s', and f' be defined by the following equations (for p in P, t' in $\mathfrak{T}'(p)$ and i in 1) :
>
> $$m'(p) = \gamma\, m(p),$$
>
> $$s' = \left[\langle\, s, \left(p, h_p^{-1}(t')\right), h_p^{-1}(t')\,\rangle\ \mathcal{A} + B\right]_{1,\dots,n},$$
>
> $$f'(p, t', i) = \frac{\gamma}{\lambda^2}\frac{c'^2}{c^2}\left[\langle f(p,t,i), \frac{f(p,t,i)\cdot v_{p(t)}}{c^2}\ \rangle\mathcal{A}\right]_{1,\dots,n}.$$

Then $\Gamma' = \langle P, \mathfrak{T}', m', s', f', c' \rangle$ is an n-dimensional system of relativistic particle mechanics. » (Rubin et Suppes, 1954, p. 573)

Rubin et Suppes donnent l'interprétation suivante de ces équations de transformation :

« All the transformations mentioned in Definition 1 and Theorem 1 have a clear intuitive interpretation if we consider $\langle P, \mathfrak{T}, m, s, f, c \rangle$ as a physical system whose mechanical properties are observed and measured with respect to some (inertial) frame of reference and some set of units of measurement, and $\langle P, \mathfrak{T}', m', s', f', c' \rangle$ as the same physical system observed and measured with respect to some other (inertial) frame of reference and some other set of units of measurement. … The introduction of the number γ amounts to changing the unit of mass by an amount $1/\gamma$, and the vector B corresponds to shifting the origin of the spatial frame of reference by $-[\beta]_{1,\dots,n}$, and the origin of time by an amount $-[\beta]_{n+1}$. The number λ represents a uniform stretch of space and time. » (Rubin et Suppes, 1954, p. 576-577)

Finalement, Rubin et Suppes, par leur théorème 2, prouvent l'existence des transformations de Lorentz $\mathcal{A}$.

« **Theorem 2**. Let $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$[[3]] be an eligible transformation, and let c and c' be positive real numbers such that (i) for every *n*-dimensional system of relativistic particle mechanics Γ_c, $\langle \Phi(\Gamma_c), c' \rangle$ is a system of relativistic particle mechanics and (ii) Φ_1 carries no c-line into a c'-particle path. Then there exist positive real numbers γ and λ, an $(n+1)$-dimensional vector B and a generalized Lorentz matrix $\mathcal{A}$ with respect to $\langle c, c', \lambda \rangle$, such that, for any vectors Z_1 and Z_2 in E_n with $|Z_2| < c$, every x in R, and γ in R^+,

$$\phi_1(y) = \gamma\, y,$$

$$\phi_2(Z_1, x) = \langle Z_1, x \rangle \mathcal{A} + B,$$

$$\phi_3(Z_1, Z_2) = \frac{\gamma c'^2}{\lambda^2 c^2} \left[\langle Z_1, \frac{Z_1 \cdot Z_2}{c^2} \rangle \mathcal{A} \right]_{1,\dots,n} . »$$

[3] ϕ_1 est une fonction $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, ϕ_2 une fonction $E_{n+1} \rightarrow E_{n+1}$, et ϕ_3 une fonction $E_{2n} \rightarrow E_{2n}$.

(Rubin et Suppes, 1954, p. 578 et 579)

Ces équations nous semblent incomplètes. Premièrement, nous avons déjà vu que dans le système de Rubin et Suppes (1954), la vitesse de la lumière n'était pas une vitesse invariante, qu'elle est égale à c dans un référentiel et à c' dans un autre. Mais, leurs équations de transformation ne précisent pas comment les deux valeurs peuvent être reliées.

Ensuite, en relativité restreinte, l'équation de transformation de la masse est donnée (en utilisant les mêmes variables que Rubin et Suppes) par (voir, par exemple, Rosser, 1964, p. 203) :

$$m'(p) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(m(p) - \frac{U}{c^2} m(p) v_{p(t)} \right).$$

Mais l'équation de transformation pour la masse $m(p)$: $m'(p) = \gamma m(p)$, ne porte que sur un changement dans les unités de masse d'un référentiel à un autre, il n'y a donc pas d'équation de transformation pour la masse.

Finalement, il n'y a aucune équation de transformation pour la quantité de mouvement :

$$\mathcal{P}(p,t) = \frac{m(p)}{\sqrt{1 - \frac{\left(\frac{ds_p(t)}{dt}\right)^2}{c^2}}} \frac{ds_p(t)}{dt},$$

donnée en relativité restreinte par (voir, par exemple, Rosser, 1964, p. 204) :

$$\mathcal{P}'_x(p,t) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (\mathcal{P}_x - m(p)U).$$

De plus, il est curieux que Rubin et Suppes (1954) introduisent les transformations de Lorentz par voie de définition et ne les déduisent pas à partir de notions primitives, ce qui serait le propre d'une axiomatisation. Nous ne pouvons que déplorer que Rubin et Suppes ne nous aient pas fournis une axiomatisation des transformations de Lorentz.

Une telle axiomatisation nous auraient permis de déterminer γ, le facteur de Lorentz qui apparaît dans les équations de transformation de la masse et de la force, et surtout de déterminer sur quelle base conceptuelle est fondée la mécanique relativiste.

Il faut reconnaître l'importance des deux théorèmes de Rubin et Suppes selon lesquels les transformations de Lorentz préservent l'invariance de la force de Minkowski, et que de telles transformations existent. De telles preuves sont habituellement obtenues à partir des propriétés de l'espace-temps de Minkowski (voir, par exemple, Weinberg, 1972, chapitre 2). Ici, ces preuves sont obtenues sans référence explicites à ces propriétés, ce qui rend leurs théorèmes plus généraux. C'est effectivement un résultat important.

3.4 Discussion : la relation entre les mécaniques classique et relativiste

Le tableau ci-dessous montre la correspondance les axiomes des deux mécaniques[4].

Mécanique classique		**Mécanique relativiste**	**L'objet des axiomes**
$P1$	⇄	$A1$	L'ensemble de particules
$P2$	⇄	$A2$	La variable de temps
$P3$	⇄	$A3$	La variable de vitesse et d'accélération
		$A4$	La vitesse maximale c
$P4$	⇄	$A5$	La masse
$P5$	⇄	$A6$	La force résultante
$P6$	←	$A7$	La deuxième loi de Newton

Le système d'axiomes de Rubin et Suppes (1954) est une adaptation du système d'axiomes de la mécanique classique de McKinsey, Sugar et Suppes (1953) pour en faire un système d'axiomes pour la mécanique relativiste. En conséquence, certains de ces axiomes sont identiques, sinon interchangeables. Ce sont les axiomes portant sur l'ensemble des particules (P_1 et A_1), le temps (P_2 et A_2), les vitesse et accélération (P_3 et A_4), la masse (P_4 et A_5) et la force résultante (P_5 et A_6).

Par ailleurs, les deux systèmes diffèrent par l'ajout en relativité d'un axiome sur la vitesse c :

***A*4.** The constant c is a positive real number such that for every $p \in P$ and $t \in \mathfrak{T}(p)$,

[4] Dans ce tableau, la double flèche ↔ indique que les axiomes sont interchangeables, alors que la simple flèche → indique que l'axiome de gauche est obtenu en modifiant ou adaptant l'axiome de droite.

$$\left|\frac{ds_p(t)}{dt}\right| < c.$$

et par leurs formulations de la deuxième loi :

Mécanique classique : $\boldsymbol{P6.}$ If $p \in P$ and $t \in T$, then :

$$m(p)\frac{d^2s(p,t)}{d^2t} = \sum_{i=1}^{\infty} f(p,t,i)\ .$$

Mécanique relativiste: $\boldsymbol{A7.}$ If $p \in P$ and $t \in \mathfrak{I}(p)$, then

$$m(p)\left[\frac{d}{dt}\frac{\frac{ds_p(t)}{dt}}{\sqrt{1-\frac{\left(\frac{ds_p(t)}{dt}\right)^2}{c^2}}}\right] = \sqrt{1-\frac{\left(\frac{ds_p(t)}{dt}\right)^2}{c^2}}\sum_{i=1}^{\infty} f(p,t,i).$$

En ce qui concerne la relation entre les deux mécaniques, Rubin et Suppes précisent :

> « If (i) "c" is replaced by "$1/k$" in the inequality of Axiom $A4$ and the equation of Axiom A7, (ii) k is treated as a primitive replacing c, and (iii) Axiom $A4$ is modified to read: "The constant k is a nonnegative real number such that … ," then, by adding appropriate further axioms, we can get either classical or relativistic particle mechanics. Thus an additional axiom asserting that $k = 0$ gives us classical mechanics; and the assertion that $k > 0$ gives us relativistic mechanics. » (Rubin et Suppes, 1954, p. 567)

Or, poser $c = 1/k$, puis $k = 0$ revient à poser que la vitesse de la lumière est infinie ($c = \infty$). Comme nous l'avons discuté précédemment, cet énoncé est empiriquement faux. La vitesse de la lumière a une valeur finie ($c =$ 299 792 458 m/s). Poser qu'elle est infinie est strictement faux et compromet, du point de vue de la logique, la validité de la mécanique qui en résulte.

Toutefois, ces axiomatisations nous donnent des arguments pour appuyer notre thèse, à savoir qu'il existe une structure commune aux deux mécaniques. Dans ces systèmes d'axiomes, les deux mécaniques partagent déjà plusieurs axiomes et divergent essentiellement sur la formulation de la seconde loi de

Newton. Pourtant, les deux versions de la seconde loi ont ceci en commun : elles affirment toutes les deux que le taux de variation de la quantité de mouvement doit être mis en relation avec la force résultante.

4. Le système axiomatique de Bunge

4.1 La mécanique classique

Dans sa rigueur qui le caractérise, Bunge nous présente son système axiomatique en distinguant les théories formelles qu'il faut présupposer (la logique élémentaire, la théorie des ensembles, la théorie des espaces vectoriels, l'analyse algébrique), les théories de la protophysique (une théorie du temps, l'espace géométrique euclidien, la théorie générale des systèmes que Bunge a introduite auparavant (Bunge, 1967, p. 112 et suivantes) et les composantes de la base primitive de la mécanique des particules que nous présentons ici.

La base primitive du système axiomatique de Bunge est composée de cinq ensembles :

1. $\mathbb{E}^3$, un espace vectoriel dans lequel la position de chaque point $x \in \mathbb{E}^3$ est donnée par $x = (x_1, x_2, x_3)$ relativement à une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{E}^3$;
2. T, un ensemble dont les éléments sont déterminés par une théorie du temps;
3. K, un ensemble de systèmes de référence;
4. $\{X\}$, un ensemble de coordonnées de particules, $X = (X_1, X_2, X_3)$ déterminée par rapport à un système de référence $k \in K$;
5. $\Sigma = \{\sigma\}$, un ensemble dont chaque élément σ représente une particule.

Dans ces ensembles, il faut bien distinguer, selon Bunge, la position x par rapport à une base de $\mathbb{E}^3$ et la coordonnée X par rapport à un système de référence k :

> « We can interpret some coordinate systems as reference frames and conversely symbolize any reference frame as a coordinate system, but we should not confuse geometrical concepts with physical entities. One and the same physical frame of reference … can be associated with infinitely many mathematical coordinate systems, all of which are interconvertible.
>
> A coordinate system is a concept and therefore it cannot move in space; accordingly, a coordinate transformation need not be interpreted as involving motion. On the other hand, reference frames can move relative to others. » (Bunge, 1967, p. 104)

À ces ensembles, il faut ajouter les trois fonctions suivantes :

6. M, un scalaire positif qui représente la masse d'une particule $\sigma \in \Sigma$;

7. F^e, un vecteur qui représente la force exercée sur une particule par un champ extérieur, par exemple, le champ gravitationnel ou le champ électrique ;

8. F^i, un vecteur qui représente la force exercée sur une particule par une autre particule, soit selon Bunge, « one side of the interaction between the particles σ and σ', the other side being the reaction. » (Bunge, 1967, p. 130).

À l'aide de ces notions primitives, Bunge définit ensuite deux concepts cruciaux pour la mécanique des particules :

« Df 1. *Instantaneous velocity* of $\sigma \in \Sigma$, at $t \in T$, relative to $k \in K$:

$$v(\sigma, k, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dt} X(\sigma, k, t) \equiv \dot{X}(\sigma, k, t) \,.$$

Df 2. Linear momentum of $\sigma \in \Sigma$, a$t \in T$, relative to $k \in K$:

$$p(\sigma, k, t) \stackrel{\text{def}}{=} M(\sigma) \cdot v(\sigma, k, t). \text{»}$$

(Bunge, 1967, p. 131)

Les axiomes du système axiomatique de la mécanique des particules (MP) déterminent la nature des huit notions de la base primitive et attribuent à chacune d'elle une interprétation physique.

« *Chronogeometrical axioms.*

$\boldsymbol{MP}$ **1.1.** (a) T in an interval of the real line. (b) Every $t \in T$ represents (refers to) an instant of time. (c) The relation $\leq$ that orders T means "earlier than or simultaneous with".

…

$\boldsymbol{MP}$ **1.2.** (a) $\mathbb{E}^3$ is a three-dimensional Euclidean space. (b) $\mathbb{E}^3$ maps (represents) ordinary space. » (Bunge, 1967, p. 167, p. 131)

En ce qui concerne l'axiome $\boldsymbol{MP}$ **1.1.**, Bunge précise qu'il implique que la théorie du temps de la mécanique classique est une théorie du temps universel, c'est-à-dire une théorie qui suppose un seul temps pour toute position et pour tout système de référence (voir Bunge, 1967, p. 95).

« Kinematical axioms

$\boldsymbol{MP}$ **2.1.** (a) Σ is a nonempty denumerable set. (b) every $\sigma \in \Sigma$ represents a corpuscule (particle).

…

$\boldsymbol{MP}$ **2.2** For every two different $t, t' \in T$, if $\sigma \in \Sigma$ at t, then $\sigma \in \Sigma$ at t'.

…

$\boldsymbol{MP}$ **2.3.** (a) K is a non empty denumerable. (b) Every $k \in K$ is a rigid system of corpuscules at least four of which lie on the vertices of a regular trihedral. (c) For every $k \in K$ there exists a Cartesian system of axes $e = (e_1, e_2, e_3)$ such that $e \hat{=} k$. (d) No $k \in K$ Interacts with any $\sigma \in \Sigma$ that is not a part of k.

…

$\boldsymbol{MP}$ **2.4.** (a) For every $\sigma \in \Sigma$ and every $k \in K$, every $X \in \{X\}$ is a continuous and real function from T to $\mathbb{E}^3$. (b) For every $\sigma \in \Sigma$ and every $k \in K$, $\dot{X}$ is a piece-wise continuous and real valued function from T to $\mathbb{E}^3$. (c) $X(\sigma, k, t)$ represents the position of σ, relative to the frame k, at the instant t. (d) Every quintuple $(\sigma, X_1, X_2, X_3, t)$ represents an event. (e) For any given $\sigma \in \Sigma$ and any given $k \in K$, the set $\{X(\sigma, k, t) | t \in T\}$ represents a trajectory (motion) of σ.

…

$\boldsymbol{MP}$ **2.5.** For any two $\sigma, \sigma' \in \Sigma$ and every $k \in K$ and every $t \in T$, if $X(\sigma, k, t) = X(\sigma', k, t)$ and $\dot{X}(\sigma, k, t) = \dot{X}(\sigma, k, t)$, then $\sigma = \sigma'$. » (Bunge, 1967, p. 132-133)

Dans l'axiome $\boldsymbol{MP}$**2.3**, $c \hat{=} o$, qui se lit « c modélise o », est une relation de référence entre un objet conceptuel c et un objet physique o; par exemple, la théorie de l'électron de Lorentz modélise l'électron réel. Bunge nous explique ainsi la relation $e \hat{=} k$:

« Relative to any given basis $e,$ every point $x \in \mathbb{E}^3$ is uniquely characterized by the triple $x = (x_1, x_2, x_3)$. These coordinates must not be mistaken for the physical coordinates X_i $(i = 1,2,3)$ of a material point: these are time-dependent and relative to a $k \in K,$ which is a physical frame; e is a conceptual image of k » (Bunge, 1967, p. 130)

Bunge nous précise que par l'axiome $\boldsymbol{MP}$**2.5**, les fonctions de position et de vitesse identifient (ou caractérisent) une particule de façon unique. Pourtant, dans une collision parfaitement inélastique entre deux particules, celles-ci, « collées » l'une à l'autre après la collision, ont ainsi la même position et la même vitesse, mais elles ne sont pas identiques. Pour cette raison, nous ne pensons pas que cet axiome soit utile, ni nécessaire.

Il en est de même pour l'axiome $\boldsymbol{MP}$**2.2.** qui pr.cise, selon Bunge, qu'une particule reste une particule.

Passons maintenant aux axiomes de la dynamique.

« *Dynamical axioms*

$\boldsymbol{MP}$ **3.1.** (a) M is a function from Σ to $\mathbb{R}^+$ of nonnegative reals. (b) The value of M at $\sigma \in \Sigma$ represents the mass (inertia) of σ.

$\boldsymbol{MP}$ **3.2.** If $\sigma_i \in \Sigma$ for every finite $i \in N$, then $M(\sum_i \sigma_i) = \sum_i M(\sigma_i)$.

$\boldsymbol{MP}$ **3.3.** Every $F^e \in \{F^e\}$ is a real valued vector on $\Sigma \times K \times \mathbb{E}^3 \times T \to \mathbb{E}^3$. (b) The value of F^e for any given sextuple $< \sigma, k, x, t >$ represents the external force acting on σ, relative to the frame k, at the place x and the instant t.

$\boldsymbol{MP}$ **3.4.** (a) Every $F^i \in \{F^i\}$, F^i is a real valued vector on $\Sigma \times \Sigma \times K \times \mathbb{E}^3 \times T \in \mathbb{E}^3$. (b) The value of F^i for any given 7-tuple $< \sigma, \sigma', k, x, t >$ represents the force exerted by σ' on σ relative to k at x and t.

$\boldsymbol{MP}$ **3.5.** For every $\sigma, \sigma' \in \Sigma$, every $t \in T$, every $F^e \in \{F^e\}$ and every $F^i \in \{F^i\}$, there is at least one $k \in K$ such that :

(a) $\dfrac{dp(\sigma, k, t)}{dt} = F^e(\sigma, k, t) + \sum_{\sigma' \neq \sigma} F^i(\sigma, \sigma', k, t)$;

(b) $F^i(\sigma, \sigma', k, t) = -F^i(\sigma', \sigma, k, t)$. » (Bunge, 1967, p. 133)

L’ensemble des axiomes $\boldsymbol{MP}$ **1** à $\boldsymbol{MP}$ 3 forme le système axiomatique de la physique des particules, auquel Bunge ajoute les deux définitions suivantes de concepts importants en mécanique des particules.

Df 3. A reference frame $k \in K$ is called *galilean*, or *inertial*, iff it satisfies the preceding axioms. Notation : $g \in G \subset K$.

Df 4. A system $\sigma^N = \sum_{i \in N} \sigma_i$ of N particles $\sigma_i \in \Sigma$ is called a *classical mechanical system of point particles* iff every part σ_i de σ^N satisfies the preceding axioms.

Il nous semble que le système axiomatique de Bunge représente mieux la mécanique des particules que celui de McKinsey, Sugar et Suppes (1953), d’abord par la formulation de l’axiome $\boldsymbol{MP}$ **3.5b** qui énonce la troisième loi de Newton; par la formulation dans l’axiome $\boldsymbol{MP}$**3.5a** de la deuxième loi où la force résultante sur une particule est égale au taux de variation de la quantité de mouvement de cette particule; et par la précision dans l’axiome $\boldsymbol{MP}$ **3.4** qu’une force est exercée par une particule sur une autre particule, précision qu’on ne retrouve pas chez McKinsey, Sugar et Suppes (1953).

4.2 La mécanique relativiste

Pour Bunge, la théorie de la relativité restreinte est issue de l’électromagnétique classique car celle-ci lui fournit les deux concepts qui sont à la base de la relativité restreinte : le concept de champ électromagnétique dont la propagation est indépendante de l’émetteur et du récepteur; et le concept de système de référence inertiel :

> « SR [Special Relativity] presupposes CEM [Classical Electromagnetism]… In particular, CEM supplies SR the concept of electromagnetic radiation field… A second concept CEM supplies SR is that of inertial frame, as a frame relative to which MAXWELL'S equations hold … One could also use a more restricted concept of inertial frame in SR, namely this: A reference frame is called *inertial* iff all light rays propagate in vacuum along straight lines relative to it. The electromagnetic concept of inertial frame enables us to state the *principle of relativity* in a mechanics-free fashion, namely thus: "The basic laws of physics ought to be the same in (relative to) all inertial reference frames" - where 'inertial' means "such that MAXWELL'S equations are satisfied in it". » (Bunge, 1967, p. 182-183)

Bunge argumente ensuite que la mécanique classique n’étant pas invariante sous les transformations qui préservent les équations de Maxwell, il faut obtenir une théorie de la relativité restreinte qui puisse assurer cette invariance. Selon Bunge, la cinématique est la base de cette théorie de la relativité restreinte. Bunge commence donc par donner une axiomatique de la cinématique relativiste.

La base primitive de la cinématique relativiste est composée des éléments suivants :

- $\Sigma = \{\sigma\}$, un ensemble dont chaque élément σ représente un système physique;
- S, l'ensemble des signaux électromagnétiques, et sous-ensemble de Σ ($S \subset \Sigma$);
- I, l'ensemble des systèmes de référence inertiel, lui aussi sous-ensemble de S ($I \subset \Sigma$);
- T, une théorie du temps local où le temps est établi en relation à un système de référence;
- $\mathbb{E}^3$, une variété appliquée sur l'espace local;
- $\{X\}$, une famille de fonctions représentant la position d'un système physique $\sigma \in \Sigma$;
- c, un nombre positif représentant le module de la vitesse de la lumière dans le vide.

L'objet de base de la cinématique relativiste est l'ensemble $\Sigma \times S \times I$, soit un triplet ordonné de système physique, signaux électromagnétiques et système de référence inertiel.

Par définition, nous avons les deux abréviations suivantes :

> « **Df. 1.** *Spacetime:* $\mathbb{E}^{3+1} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}^3 \times T$.
>
> **Df. 2.** *Cotime*: $X_0 \stackrel{\text{def}}{=} ct$. »
>
> (Bunge, 1967, p. 184),

et les concepts suivants :

> « **Df. 3.** If $\sigma \in \Sigma$, $i \in I$ and $t \in T$, then $V(\sigma, i, t) \stackrel{\text{def}}{=} dX(\sigma, i, t)/dt$.
>
> **Df. 4.** **If** $\sigma \in \Sigma$, $i \in I$ and $t \in T$, then: σ is in uniform motion w.r.t. $i \stackrel{\text{def}}{=} V(\sigma, i, t) =$ const. »
>
> (Bunge, 1967, p. 184)

Les axiomes de la cinématique relativiste sont :

« $\boldsymbol{SR}$ **1** (a) $\Sigma \neq \emptyset$. (b) Every $\sigma \in \Sigma$ represents a physical system.

$\boldsymbol{SR}$ **2** (a) $S \neq \emptyset \wedge S \subset \Sigma$. (b) Every $s \in S$ represents an electromagnetic signal.

$\boldsymbol{SR}$ **3** $I \neq \emptyset \wedge I \subset \Sigma - S$. (b) Every $i \in I$ is an inertial reference frame. (c) For every $i \in I$, there is a base $e = \langle e_0, e_1, e_2, e_3 \rangle$ in $\mathbb{E}^{3+1}$ such that $e \mathrel{\widehat{=}} i$.

$\boldsymbol{SR}$ **4** (a) $\mathbb{E}^3$ is a tridimensional Euclidean space with inner product. (b) $\mathbb{E}^3$ represents ordinary space relative to ("as seem from") any given $i \in I$.

$\boldsymbol{SR}$ **5** (a) T is an interval of the real line. (b) T is the range of the time function satisfying the axioms of the local time theory. (c) Every $t \in T$ represents an instant of i-time.

$\boldsymbol{SR}$ **6** (a) $\{x\}$ is a nonempty family of functions. (b) Every $X \in \{X\}$ is a function from $\Sigma \times I \times T$ to $\mathbb{R}^3$. (c) $X(\sigma, i, t)$ represents the position of a point system $\sigma \in \Sigma$, refered to the frame i, at the instant t relative to i. (d) For every point there exists a septuple $\langle \sigma, s, i, X_0, X_1, X_2, X_3 \rangle \mathrel{\widehat{=}}$ event.

$\boldsymbol{SR}$ **7** Every $s \in S$ propagates in vacuum, relative to any $i \in I$, with uniform rectilinear motion at the speed c.

$\boldsymbol{SR}$ **8** For every $i, i' \in I$, the associated cotimes are such that $\partial X_0 / \partial X_0'$ exists and is positive. »

(Bunge, 1967, p. 185)

Bunge pose ensuite les équations de transformations et démontre, par le théorème suivant, que ces équations relient les coordonnées de deux systèmes inertiels :

« *Thm 3*. Let $i, i' \in I$ such that, at $t = t' = 0$, i and i' coincide and, for t» > 0, i' moves along the x-axes of i with uniform motion $V(i', i) = u =$ const. Then the coordinates of one and the same physical system $\sigma \in \Sigma$ in the two frames for $t < 0$ are related by

$$X_0' = \frac{X_0 - \frac{u}{c} X_1}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad X_1' = \frac{x_1 - \frac{u}{c} X_0}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad X_2' = X_2\,, \quad X_3' = X_3\,. »$$

(Bunge, 1967, p. 189)

Ainsi, tout comme Rubin et Suppes (1954), Bunge ne déduit pas les équations de transformations de Lorentz.

Bunge déduit ensuite les principales caractéristiques de la cinématique relativiste, à savoir la contraction des longueurs (Théorème 7; Bunge, 1967, p. 192), la dilatation du temps (Théorème 8; Bunge, 1967, p. 194) et la transformation des vitesses relativistes (Théorème 9; Bunge, 1967, p. 194).

Il en vient ensuite à la physique relativiste qui, au-delà de la simple mécanique, inclut l'ensemble des théories invariantes sous les transformations de Lorentz. De ces théories, Bunge s'intéresse surtout à celles qui ont une formulation « classique » et nous fournit une espèce de recette générale pour la rendre « relativiste » :

> « Given an arbitrary physical theory containing at least one physical coordinate and time, the theory can be relativized by applying the following method: *(a)* pick the fundamental laws of the given nonrelativistic theory and assume they hold in the rest (primed) frame; *(b)* reformulate those law statements in MINKOWSKI'S 4-dimensional language; *(c)* check whether the new statements are in fact covariant; *(d)* append to them the transformation formulas for the basic magnitudes of the theory; *(e)* check whether the formulas containing the relative velocity approach the corresponding nonrelativistic formulas for $c \to \infty$ – and keep calm if some of them do not. In short, Relativistic physics = Nonrelativistic physics + Four-dimensional language + SR kinematics. » (Bunge, 1967, p. 195 et 196)

Rappelons qu'un quadrivecteur de l'espace de Minkowski est un quadruplet $v^\mu = (v^0, v^1, v^2, v^3)$. Le tableau ci-dessous montre les principaux quadrivecteurs utilisés en mécanique :

Position	$X^\mu = (ct, x, y, z)$	t est le temps; x, y, z sont les composantes scalaires du vecteur position dans un espace vectoriel à 3 dimensions.
Vitesse	$u^\mu = \gamma\left(c, u_x u_y, u_z\right)$	$\gamma = 1/\sqrt{1 - u^2/c^2}$ est le facteur de Lorentz; c est la vitesse de la lumière; u_x, u_y, u_z sont les composantes scalaires du vecteur vitesse dans un espace vectoriel à 3 dimensions.
Force	$K^\mu = \left(\gamma \frac{F \cdot u}{c}, \gamma\, F\right)$	$\gamma = 1/\sqrt{1 - u^2/c^2}$ est le facteur de Lorentz; c est la vitesse de la lumière; u est le vecteur vitesse.

Ajoutons à ces quadrivecteurs le temps propre :

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2} dt},$$

où $u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$ est la norme du vecteur vitesse. Ainsi, à l'aide du temps propre, on peut obtenir le quadrivecteur vitesse à partir du quadrivecteur position :

$$u^\mu = \frac{dX^\mu}{d\tau},$$
$$u^\mu = \frac{d}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}\ dt}}(ct, x, y, z),$$
$$u^\mu = \gamma\left(c, u_x, u_y u_z\right),$$

où $u_x = dx/dt$, $u_y = dy/dt$ et $u_z = dz/dt$.

Finalement, le temps propre nous permet de réécrire le quadrivecteur force sous la forme :

$$K^\mu = \frac{d}{d\tau}(m_0 u^\mu).$$

Nous pouvons maintenant présenter de quelle façon Bunge applique sa recette générale à la mécanique :

« To build relativistic particle mechanics start by postulating the Newton-Euler[5] equation for a particle with mass m_0 in a frame in which the particle is "momentarily at rest". Since in the rest frame $dt' = dT_0 \equiv d\tau$, the equation of motion can be written: $d(m_0 dX'/d\tau)/d\tau = F'$. Introduce now the 4-velocity $u^\mu \stackrel{\text{def}}{=} dX^\mu/d\tau$ and the Minkowski force K^μ and generalize the law of motion to all four coordinates: $d\left(\frac{m_0 dX'^\mu}{d\tau}\right)/d\tau = K'^\mu$. Finally refer these equations to the unprimed inertial frame by performing a Lorentz transformation. Since the two sides of the equation are 4-vectors, the form of the equation is preserved:

$$\frac{d}{d\tau}(m_0 u^\mu) = K^\mu. \text{»}$$

(Bunge, 1967, p. 198)

4.3 Discussion : la relation entre les mécaniques classique et relativiste

Bunge le reconnaît, son analyse de la dynamique relativiste n'est pas une axiomatisation, mais pourrait servir de base à une axiomatisation :

« It will be noticed that the preceding construction of the foundations of [Special Relativity] dynamics has been heuristic rather than axiomatic … As to the axiomatic reconstruction of [Special Relativity] dynamics, it is a comparatively simple enterprise. In its elementary (non-Hamiltonian) formulation, both m and the 4-force K will occur as primitives whereas E will be defined. »

La recette générale proposée par Bunge pour obtenir une théorie relativiste : « Relativistic physics = Nonrelativistic physics + Four-dimensional language + SR kinematics » (Bunge, 1967, p. 196), est certes simple et efficace. Elle nous permet de comprendre comment la théorie non relativiste est reliée à la théorie relativiste.

Mais comment la théorie relativiste est-elle reliée à la théorie non relativiste? Selon Bunge :

[5] L'équation de Newton-Euler est la formulation de la deuxième loi de Newton selon laquelle le taux de variation de la quantité de mouvement d'une particule est égal à la somme des forces exercée sur cette particule; soit, en utilisant la formulation de Bunge (1967) :

$$\frac{d}{dt}\big(M(\sigma)\cdot v(\sigma,k,t)\big) = \sum\nolimits_{\sigma'\neq\sigma} F^i(\sigma,\sigma',k,t).$$

> « One usually says that [the nonrelativistic theory] **T** is contained in [the relativistic theory] **RT** in the sense that **RT** goes over into **T** for $v \ll c$. (There is no proper limit for $c \to \infty$ since, by hypothesis, $c =$ const.) Thus the spatial components of the 4-velocity approach the ordinary velocity in the nonrelativistic limit. But the time component $u^0 = dX^0/d\tau$, which does not occur at all in [classical mechanics], approaches c instead of vanishing in the nonrelativistic limit. Similarly the total energy of a body does not vanish but approaches the proper or rest energy m_0c^2. … [Special relativity] is not just a question of large velocities or high energy: several of its basic concepts are structurally different from the classical homologues. Consequently, neither **T** [is contained in] **RT** nor the converse relation hold. » (Bunge, 1967, p. 206-207)

Ainsi, selon Bunge, les concepts de base des deux mécaniques n'ont pas la même structure; d'autres diraient qu'ils sont incommensurables. Cependant, nous pensons que la recette générale de Bunge : « Relativistic physics = Nonrelativistic physics + Four-dimensional language + SR kinematics » nous permet au contraire de mettre en évidence qu'il existe une structure commune aux mécaniques classique et relativiste.

Le recette générale de Bunge nous amène à poser la question suivante : en quoi la formulation d'un concept dans le cadre du langage quadridimensionnel et de la cinématique relativiste modifie ce concept tel qu'il est maintenant « structurellement différent » de ce qu'il était au préalable? Après tout, si un concept de la physique non relativiste est utilisé par une théorie relativiste, c'est qu'il y a quelque chose dans ce concept qui le rend utile à cette théorie, toute relativiste qu'elle soit.

Prenons la question de l'espace quadridimensionnel. Il est indéniable que l'espace-temps de Minkowski de la relativité restreinte est radicalement différent de l'espace euclidien de la relativité classique. Entre autres, dans l'espace-temps de Minkowski, l'invariance de la pseudo norme des quadrivecteurs implique que le temps est indissociable de l'espace, contrairement à l'espace euclidien où l'invariant est la distance entre deux points de l'espace, sans égard au temps. À l'origine de cette différence, on retrouve une différence de métrique. Mais au-delà de cette différence, si les concepts de base de la théorie non relativiste sont réutilisés par la théorie relativiste, c'est qu'ils conviennent à la théorie relativiste. Par exemple, la loi du mouvement des deux mécaniques relie la variation de la quantité de mouvement d'une particule aux forces exercées sur cette particule, indépendamment de la métrique de l'espace dans lequel la quantité de mouvement et la force est représentée. Il nous apparaît alors important de déterminer ce qui est commun aux deux mécaniques avant qu'elles se distinguent par leur espace. C'est le but de cette thèse.

5. L’école hongroise de logique et de relativité : le système d’axiomes Specrel.

5.1 Les axiomes du système Specrel

L’École hongroise de logique, fondée par István Németi et Hajnal Andréka, est affiliée à l’Institut de mathématiques Alfréd Rényi de l’Académie des sciences hongroise. Un groupe de chercheur de cette École, que l’on appellera dorénavant l’École hongroise, mené par Hajnal Andréka a étudié spécifiquement la relativité restreinte au point de vue de la logique et a produit plusieurs versions de son axiomatisation.

Une première version de l’axiomatisation de l’École hongroise a été développée en 2002 (Andréka et al, 2002) mais n’a jamais été publiée, quoiqu’elle soit disponible sur l’internet; elle comporte 1312 pages, il y a donc lieu d’y référer comme le « gros livre ». D’autres versions de cette axiomatisation ont été publiées en réécrivant les axiomes, en scindant certains, en regroupant d’autres, et en simplifiant la preuve des différents théorèmes et propositions. Nous allons résumer et discuter ici une de ces versions (Andréka et al, 2007a) qui nous semble la plus représentative du travail de l’École hongroise et qui nous permettra de discuter ensuite de leur axiomatisation de la dynamique relativiste. (Andréka et al, 2008)

Présentons d’abord le système axiomatique général de l’École hongroise avant d’en venir à leur axiomatisation de la dynamique. Pour simplifier la présentation, nous n’utiliserons pas la formulation de leurs axiomes dans le langage du premier ordre, mais plutôt la formulation qu’ils en donnent dans le métalangage qu’est le « langage naturel ».

Selon Andréka et al. (2007a, p. 619) les modèles du système **Specrel**[6] ont la forme :

$$\langle Q, +, *, <; B, Ob, Ph; W \rangle \ ,$$

où :

i. Q est un ensemble non vide dont les éléments représentent une quantité, et sur lequel on a les relations binaires habituelles $+$, $*$ et $<$; dans le cadre de cette axiomatisation, Q peut être l’ensemble des réels.
ii. B est un ensemble non vide dont les éléments sont les entités, appelées « objets » qui sont en mouvement; les objets peuvent être des systèmes de coordonnés, des ondes électromagnétiques, ou des centres de masse;

[6] Dans le « gros livre » (Andréka et al, 2002), le système de base est appelé « **basax** », mais l’appellation « **Specrel** » est celle qu’on trouve dans les plus récentes publications, dont Andréka et al, (2007a) et (2008).

iii. Ob et Ph sont des sous-éléments de B; Ob représente l'ensemble des observateurs et Ph, l'ensemble des photons;

iv. W est un sous-élément de l'ensemble résultant de l'opération $Ob \times B \times Q \times \cdots \times Q$.

Voici les axiomes du système **Specrel** selon Andréka al. (2007a).

> « **Axiom 1 (AxField).** The quantities behave like real numbers do in the sense that $\langle Q, +, *, < \rangle$ is a linearly ordered field in which every positive member has a square root. Such fields are called "quadratic". » (Andréka al., 2007a, p. 619)[7]

La coordonnée d'un point est un n-*tuple* $p = \langle p_1, \dots, p_n \rangle$ d'éléments de Q et l'ensemble de tous ces n-*tuples* est dénoté par Q^n. Le n-tuple $\bar{0} := \langle 0, , \dots 0 \rangle \in Q^n$ est appelé l'origine, et $\bar{t} := \{\langle x, 0, \dots 0 \rangle \in Q^n : x \in Q\}$ est appelé l'axe de temps. Finalement, le « *worldline* » (noté wline$_m$(b) $:= \{p \in \boldsymbol{Q^n}: \boldsymbol{W}(m, b, p)\}$), que l'on peut traduire par « trajectoire dans l'espace-temps », ou simplement « trajectoire », d'un objet b tel qu'observé par un observateur m désigne l'ensemble des positions de b dans l'espace-temps observé par m. Ainsi, l'énoncé $W(o, b, p_1, \dots, p_n)$, ou simplement $W(o, b, p)$, signifie : « l'observateur $o \in Ob$ observe l'objet $b \in B$ à la position $p = (p_1, \dots, p_n)$ dans l'espace-temps ».

La distance spatiale entre les coordonnées de deux points p et q est définie par :

$$space(p, q) = \sqrt{(p_2 - q_2)^2 + \cdots + (p_n - q_n)^2},$$

et l'intervalle de temps, par :

$$time(p, q) = \sqrt{(p_1 - q_1)^2}.$$

Les deux axiomes suivants traitent du mouvement d'un observateur par rapport à un autre observateur. Le premier pose que la vitesse de tout observateur par rapport à lui-même est nulle, et le second, que la vitesse de tout observateur par rapport à un autre est constante.

[7] $\langle Q, +, *, < \rangle$ est un champ ordonné si pour tout élément $a, b, c \in Q$: (i) si $a < b$ alors $a + c < b + c$, et (ii) si $0 < a$ et $0 < b$, alors $0 < a * b$. Ce champ est quadratique si pour tout élément $a \in Q$, $0 < a$, alors il existe un élément $b \in Q$ tel que $0 < b$ et $a = b * b$.

« **Axiom 2 (AxSelf)** An observer m in his own coordinate system is motionless in the origin (of space), i.e. his worldline is the time-axis: $\boldsymbol{wline_m}(m) = t$. » (Andréka al., 2007a, p. 620)

« **Axiom 3 (AxLine)** The motion of an observer as observed by any observer is uniform, i.e. such that both the “spatial direction” and the “pace” of the motion are constant (and “longest possible” with this property). In geometrical terms this means that in each observer’s coordinate system, the worldline of an observer is a straight line, i.e. $\boldsymbol{wline_m(k)}$ is a straight line for all $m, k \in Ob$. » (Andréka al., 2007a, p. 620)

Le quatrième axiome fixe la valeur de la vitesse des photons par rapport à tout observateur; de fait, il pose que la vitesse des photons, et donc de la lumière, est une quantité invariante, au sens où elle a la même valeur pour tous les observateurs.

« **Axiom 4 (AxPh)** For every observer, the speed of light is 1, and moreover, photons move uniformly along straight lines and in each location in each direction it is possible to send out a photon. In geometrical terms this means that the worldlines of photons are exactly the straight lines of slope 1. » (Andréka al., 2007a, p. 621)

Le prochain axiome pose qu’aucun observateur, par rapport à tout autre observateur, ne peut avoir une vitesse égale ou plus grande que celle de la lumière.

« **Axiom 5 (AxThEx)** For each observer $m \in Ob$, in each space-time location, in each direction, with any speed smaller than that of the light it is possible to “send out” an observer. » (Andréka al., 2007a, p. 622)

Les deux prochains axiomes, les derniers, portent sur la relation entre les objets et les observateurs. Le premier pose que la coïncidence spatiale de trois objets est universelle, le second, que la simultanéité de deux évènements par rapport à deux observateurs implique que la distance spatiale entre ces deux évènements est nulle pour ces mêmes observateurs.

« **Axiom 6 (AxEvent)** If an observer observes three bodies at the same spacetime location, then all other observers observe that these three bodies meet. » (Andréka al., 2007a, p. 622)

« **Axiom 7 (AxSim)** Any two observers agree on the spatial distance between two events, if these two events are simultaneous for both of them. » (Andréka al., 2007a, p. 622)

À partir de ces axiomes, l'École hongroise déduit, à l'aide d'arguments géométriques, les principaux effets relativistes de la cinématique, à savoir : (i) la relativité de la simultanéité, (ii) la dilatation du temps, (iii) la contraction des longueurs, et (iv) le paradoxe des jumeaux (voir les théorèmes 11.4, 11.6 de Andréka et al., 2007a, p. 624 à 638).

Les transformations de Lorentz sont définies par :

« **Definition 11.9 (Lorentz transformation)** Let $-1 < v < 1, v \in$ Q. By the Lorentz transformation (or boost) of velocity v and over [a quadratic ordered field $\mathfrak{Q} = \langle \mathrm{Q}, +, *, \leq \rangle$] we understand a linear mapping $f : Q^n \to Q^n$ for which

$$f(\mathbf{1}_t) = \langle \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}, 0, \dots, 0 \rangle,$$

$$f(\mathbf{1}_x) = \langle \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, 0, \dots, 0 \rangle,$$

$f(\mathbf{1}_i) = \langle 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0 \rangle$, [where the 1 stands in the i-th place], for all $3 \leq i \leq n$. »

(Andréka et al., 2007a, p. 639-640)

En tenant compte de la définition 11.9 et de notre remarque, les transformations de Lorentz pour les coordonnées de temps et d'espace sont :

$$t' = \frac{t - vx}{\sqrt{1-v^2}} \quad ; \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-v^2}} \quad ; \quad y' = y \quad ; \quad z' = z\,.$$

Finalement, au plan formel, Andréka et al (2007a) démontrent que le système d'axiomes **Specrel** est consistant (Andréka et al, 2007a, Corollaire 11.12, p. 644) et que les axiomes du système **Specrel** $-$ **Axiom 3 (AxLine)** sont indépendants (Andréka et al, 2007a, Théorème 11.14 (ii), p. 645).

Nous avons deux raisons d'être quelque peu perplexe face au système axiomatique de l'École hongroise.

D’abord, il y a l’aspect purement formel. L’École hongroise nous offre une axiomatisation de la théorie de la relativité dans un langage du premier ordre. Ce choix se veut une réponse à une remarque faite par Suppes (1974) :

> « We still need the kind of foundational and metamathematical investigation of the geometry of special relativity exemplified so well for Euclidean geometry in Tarski’s classic article. We do not have a first-order formulation of axioms for the geometry of special relativity, and there seem to be no metamathematical results of any sort as yet in the literature. » (Suppes, 1974, p. 469)

L’École hongroise insiste pour préciser que leur axiomatisation est dans un langage du premier ordre[8] :

> « For good reasons, foundations of mathematics was carried through strictly within first-order logic (FOL). For the same reasons, foundations of spacetime theories are best developed within FOL. For example, in any foundational work it is essential to avoid tacit assumptions, and one acknowledged feature of using FOL is that it helps to eliminate tacit assumptions. That is only one of the many reasons why we work within FOL. » (Andréka et al, 2012, p. 634)

Pourtant, les preuves de leurs théorèmes et leurs propositions ne sont pas formulées dans ce langage du premier ordre, mais font appel à une combinaison d’analyses géométriques sur des diagrammes de l’espace-temps de Minkowski et d’expériences de pensées impliquant des observateurs, des photons émis et réfléchis par des miroirs, et des vaisseaux spatiaux.

D’ailleurs, et c’est notre deuxième raison d’être perplexe, l’utilisation de la notion « d’observateur » n’est pas sans poser de problèmes. L’École hongroise utilise une approche qui semble s’inspirer de celle que l’on retrouve dans les manuels de physique et d’une certaine façon, ils suivent Einstein qui, dans son article fondateur (Einstein, 1905), utilise des expériences de pensée avec des observateurs physiques. La notion d’observateur en physique a ainsi évolué pour devenir synonyme de système de référence, et ce serait dans ce sens que l’École hongroise utilise la notion « d’observateur » :

> « We use the expression « ***observer*** » in the sense of the physics book d’Inverno (1992, p. 17). So, in our sense, an observer “***coordinatizes***” the set of events … Still other books use a more abstract notion of observer such that for them “reference

8 Voir aussi Andréka et al, (2002), p. 1245-1252.

> frame" = "observer + coordinatization" become the case. For us, **this is *only* a matter of choosing words, no issue of ideology is involved**; and since we had to make a choice, we decided to follow d'Inverno's terminology where "observer" is basically the same as "reference frame". » (Andréka et al, 2002, note 16, p. 16-17; nous avons ajouté le caractère gras)

Ainsi, dans leur expérience de pensée, les vaisseaux spatiaux deviennent des systèmes de référence inertiels :

> « In the technical language what we called "inertial spaceship" above is called an inertial reference frame, and the scientist in the spaceship making the experiments is called an "observer". Later "*observer*" and reference frame tend to be identified. » (Andréka et al., 2007a, p. 607-608)

Cette façon de procéder nous semble particulière dans le cadre d'une axiomatisation où l'on s'attend à ce que l'utilisation d'expériences de pensée soient éliminées au profit de notions plus abstraites et plus générales. Ne pas introduire des expériences de pensée dans une axiomatisation nous semble être le propre des analyses conceptuelles inhérentes aux axiomatisations, et non une question d'idéologie comme le suggère notre citation d'Andréka et al (2007a).

Malgré ces points de perplexité, notre principale critique de l'approche de l'École hongroise porte sur l'absence de démonstration des équations de transformation de Lorentz qui nous semblent au cœur d'une théorie de la relativité, à la fois car les transformations de Lorentz déterminent les quantités physiques qui sont invariantes, et parce qu'elles permettent de déduire les différents effets relativistes (relativité de la simultanéité et de l'ordre temporel des évènements, dilatation du temps et contraction des longueurs). Ainsi il est possible de démontrer les axiomes 5 (**AxThEx**), 6 (**AxEvent**) et 7 (**AxSim**) à partir des transformations de Lorentz. Il nous apparaît donc qu'il aurait fallu procéder autrement et de poser les seuls axiomes qui permettent de déduire les transformations de Lorentz, et non les introduire par voie de définition.

5.2 Le système de dynamique relativiste de l'École hongroise.

Le système **Specrel** est repris par Andréka et al (2008) en tant que système axiomatique de base pour obtenir un second système d'axiomes, appelé **SpecrelDyn**, pour la dynamique relativiste. L'idée maîtresse de l'approche de l'École hongroise est de poser que l'équation du mouvement du centre de masse de deux particules reste la même à la suite d'une collision parfaitement inélastique[9] entre elles, et de déduire de ce postulat à la fois la relativité de la masse d'une particule et le principe de conservation de la quantité de mouvement d'un système de particules.

Les modèles du système **SpecrelDyn** ont la forme :

$$\langle Q, +, *, <; B, Ob, Ph; W; M \rangle \,,$$

où $Q, +, *, <, B, Ob, Ph, W$ font partie des modèles du système **Specrel**. Nous avons donc : $Ob \in B$ et $Ph \in B$.

Dans un modèle du système **SpecrelDyn,** M est une fonction dans telle que $M(k,b) > 0$ pour tout observateur k et objet b tel que posé par l'axiome suivant :

> « **AxFrame** : … $M : Ob \times B \to Q$ is a function $M(k,b) > 0$ for every observer k and body b. … » (Andréka et al, 2008, p. 166)

Si $k \in Ob$ et $b \in B$, alors $m_k(b) \stackrel{\text{def}}{=} M(k,b)$ est appelée la masse relativiste de l'objet b par rapport à l'observateur k.

Posons que $p_\tau = p_1$, la coordonnée temporelle de la coordonnée $\langle p_1, p_2, \dots p_n \rangle$ du point p dans l'espace-temps de dimension n. Les ensembles des objets entrants et sortants de la collision sont alors définis explicitement par :

$$in_k = \{b \in B : q \in wline_k(b) \land \forall p \in wline_k(b)[p_\tau < q_\tau \lor p = q]\}\,,$$
$$out_k = \{b \in B : q \in wline_k(b) \land \forall p \in wline_k(b)[p_\tau > q_\tau \lor p = q]\}\,.$$

Une collision inélastique entre les objets b et c qui résulte en l'objet d est l'évènement pour lequel, selon l'observateur k, le trajet (*world line*) des objets entrants b et c se termine et celui de l'objet sortant c commence; au plan formel, une collision inélastique est définie par $inecoll_k(b, c : d)$ si et seulement si $b \neq c$ et s'il existe une coordonnée q telle que $in_k(q) = \{b, c\}$ et $out_k(q) = \{d\}$.

[9] Une collision parfaitement inélastique est une collision entre deux ou plus particules et pour laquelle il résulte que ces particules ne forment plus qu'un objet après la collision.

Andréka et al (2008, p. 170) définissent ensuite la notion de localisation dans l'espace-temps, $loc_k(b,t)$, de l'objet b à l'instant t par rapport à l'observateur k comme la coordonnée du point $p = \langle p_\tau, p_2 \dots,, p_n \rangle$ tel que $p \in wline_k(b)$, $p_\tau = t$ et p existe; sinon, $loc_k(b,t)$ est non définie.

La notion de localisation dans l'espace-temps permet de définir le centre de masse, $cen_k(b,c,t)$ de deux objets b et c à l'instant t par rapport à l'observateur k comme la coordonnée du point $q = \langle q_\tau, q_2, \dots, q_n \rangle$ tel que $q_\tau = t$ et q est la coordonnée du point sur le segment de droite qui relie $loc_k(b,t)$ et $loc_k(c,t)$ dont le rapport de la distance entre $loc_k(b,t)$ et $cen_k(b,c,t)$ et de la distance entre $cen_k(b,c,t)$ et $loc_k(c,t)$ est la même que le rapport de la masse relative de c et de la masse relative b :

$$\frac{loc_k(b,t) - cen_k(b,c,t)}{cen_k(b,c,t) - loc_k(c,t)} = \frac{m_k(c)}{m_k(b)}.$$

En isolant $cen_k(b,c,t)$, on obtient :

$$cen_k(b,c,t) = \frac{m_k(b) \cdot loc_k(b,t) + m_k(c) \cdot loc_k(c,t)}{m_k(b) + m_k(c)},$$

qui est la forme usuelle de la position du centre de masse.

Le trajet du centre de masse (*center-line of mass*) des objets b et c par rapport à l'observateur k est donné par $cen_k(b,c) \coloneqq \{cen_k(b,c,t) : t \in Q$ et $cen_k(b,c,t)$ est définie$\}$. Il faut noter que $cen_k(b,c)$ est soit un segment de droite, soit un point, ou l'ensemble nul.

Nous sommes maintenant en mesure de poser l'axiome **AxCenter**, l'axiome central (sans jeu de mots…) du système **SpecrelDyn.**

> « **AxCenter** If inertial bodies b and c collide inelastically originating single inertial body d, then the world-line of d is the continuation of the center-line of mass of b and c. » (Andréka et al, 2008, p. 172)

Comme le mentionne Andréka et al (2008), cet axiome peut être considéré comme la définition de la masse relativiste.

La proposition suivante énonce que, dans la dynamique relativiste, la masse n'est pas constante contrairement à la dynamique newtonienne :

« **Proposition 4.1.** Assume **SpecRel** and **AxCenter**. Let $k, h \in IOb$, $b, c, d \in Ib$ be such that $inecoll_k(b, c : d)$, $inecoll_h(b, c : d)$ and h is not at rest w.r.t. k, and h does not move orthogonally to the collision of b, c. Then

$$\frac{m_k(b)}{m_k(c)} \neq \frac{m_h(b)}{m_h(c)} \text{ . »}$$

(Andréka et al, 2008, p. 173)

Malheureusement, la preuve de la proposition est omise :

« We omit the proof of Prop. 4.1, but Fig. 3 is an illustration of it. » (Andréka et al, 2008, p. 173)

Voici cette figure 3 qui serait une illustration de la proposition 4.1.

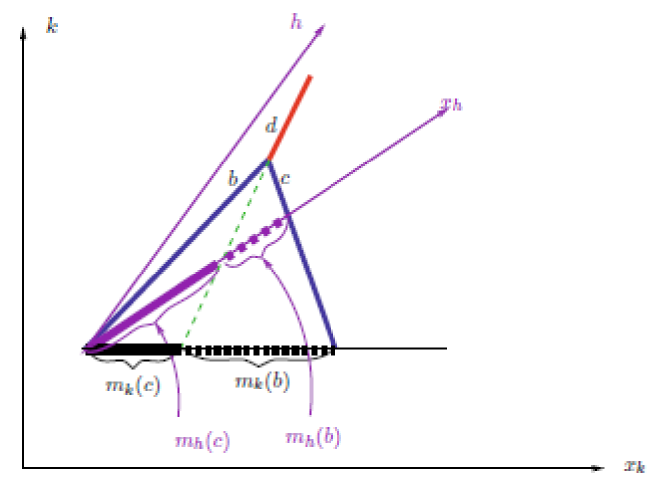


Figure 3. Illustration for Prop. 4.1. The proportion of the bold and dotted segments on the horizontal line is different from that on the slanted one.

Deux autres axiomes s'ajoutent à l'axiome **AxCenter,** chacun utilisant la notion de la masse au repos, $m_0(b)$, d'un objet b, définie comme la masse de l'objet b par rapport à un observateur alors que sa vitesse est nulle par rapport à cet observateur.

« **AxSpeed**. The relativistic masses of two inertial bodies are the same if both of their rest masses and speeds are equal. »

« **Ax∀inecoll**. For every observer, every kind of possible inelastic collision is realized by inertial bodies having rest mass. » (Andréka et al, 2008, p. 173)

Le système d'axiomes **SpecrelDyn** est alors défini comme l'ensemble de ces trois axiomes et du système **Specrel** :

SpecrelDyn := {**AxCenter**, **AxSpeed**, **Ax∀inecoll**} ∪ **Specrel**.

Ce système d'axiomes permet de prouver le théorème suivant :

> « **Theorem 4.3**. Assume $d \geq 3$ and **SpecRelDyn**. Let k be an observer and b be an inertial body having rest mass. Then
>
> $$m_0(b) = m_k(b) \cdot \sqrt{1 - v_k(b)^2}\,. \text{ »}$$
>
> (Andréka et al, 2008, p. 175)

La preuve de ce théorème est obtenue par l'analyse d'une collision parfaitement inélastique $inecoll_k(b, c\,; d)$; c'est essentiellement une preuve géométrique à partir des diagrammes d'espace-temps d'une collision parfaitement inélastique et utilise la dilatation du temps pour introduire le facteur $\sqrt{1 - v_k(b)^2}$. Ainsi, selon l'analyse de l'École hongroise, la relativité de la masse est essentiellement une conséquence de la dilatation du temps.

Venons-en maintenant à la conservation de la masse relativiste et de la quantité de mouvement selon l'approche de l'École hongroise dont ils veulent en faire du système axiomatique **SpecrelDyn** à la condition de remplacer l'axiome **AxCenter** par l'axiome suivant :

> « **AxCenter⁺ :** If a is an inertial body and inertial bodies b and c collide inelastically originating inertial body d, then the center-line of a and d is the continuation of the center-line of a, b and c, i.e. there is a line that contains both the center-line of a, b and c and the center-line of a and d. » (Andréka et al, 2008, p. 175)

Ils définissent ainsi un nouveau système axiomatique, **SpecrelDyn⁺** comme le système **SpecrelDyn** dont on a remplacé **AxCenter** par **AxCenter⁺** :

SpecrelDyn⁺ := {**AxCenter⁺**, **AxSpeed**, **Ax∀inecoll**} ∪ **Specrel**.

Reprenons maintenant les définitions des principes de conservation de masse et quantité de mouvement selon Andréka et al. :

> « **ConsMass :** Conservation of relativistic mass:

$$\forall k \in \boldsymbol{IOb}\, \forall b,c,d \in \boldsymbol{Ib}\, [inecoll_k(b,c : d) \Rightarrow$$

$$m_k(b) + m_k(c) = m_k(d)].$$

…

ConsMoment : Conservation of linear momentum:

$$\forall k \in \boldsymbol{IOb}\, \forall b,c,d \in \boldsymbol{Ib}\, [inecollk(b,c : d) \Rightarrow$$

$$m_k(b) \cdot v_k(b) + m_k(c) \cdot v_k(c) = m_k(d) \cdot v_k(d)].$$ »

(Andréka et al, 2008, p. 180)

Andréka et al énoncent ensuite successivement les théorème, corolaire et proposition suivants:

« **Theorem 5.2**. Assume **AxSelf**. Items (i)–(iv) below are equivalent.

(i) **AxCenter+**.

(ii) **ConsMass** ∧ **ConsMoment**.

(iii) **ConsMass** ∧ **AxCenter**.

(iv) **ConsMoment** ∧ **AxCenter**.

…

Corollary 5.3. Assume **SpecRelDyn⁺**. Let $k \in IOb$, $b,c,d \in Ib$ and assume $inecollk(b,c : d)$ and $m_0(b)$, $m_0(c)$, $m_0(d)$ exist. Then

$m_k(d) = m_k(b) + m_k(c)$, but

$m_0(d) > m_0(b) + m_0(c)$, whenever $\vec{v}_k(b) \neq \vec{v}_k(c)$.

…

Proposition 5.4.

SpecRelDyn $\not\Rightarrow$ **ConsMass**, and

SpecRelDyn $\not\Rightarrow$ **ConsMoment**. »

(Andréka et al, 2008, p. 181-182)

La preuve de ces trois énoncés n'est pas présentée dans Andréka et al (2008), mais dans Andréka et al (2007b), un rapport de recherche qui n'est malheureusement pas disponible; il n'a pas été publié et ne se trouve pas sur le site de l'Institut de mathématiques Alfréd Rényi, ni ailleurs à notre connaissance.

5.3 Discussion : le système d'axiomes de la mécanique de l'École hongroise

On classe les collisions en 2 catégories, les collisions élastiques et inélastiques. Lors d'une collision élastique, l'énergie cinétique des particules en collision est conservée; c'est le cas des collisions sans contact, par exemple, deux particules qui se repoussent mutuellement sous l'effet de la force électrique. À l'inverse, lors d'une collision inélastique, l'énergie cinétique des particules en collision n'est pas conservée et se dissipe sous d'autres formes (chaleur, déformation ou autre); la plus grande perte d'énergie cinétique est obtenue lors d'une collision parfaitement inélastique, les collisions où les particules restent unies une à l'autre après la collision.

Les collisions élastiques sont utilisées depuis Lewis et Tolman (1909) pour démontrer qu'en relativité, la masse m d'une particule de masse au repos m_0 se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ est donnée par :

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v}{c^2}}}.$$

Lewis et Tolman en concluaient qu'en relativité restreinte, la quantité de mouvement de cet objet est :

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

et son énergie propre :

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Cette approche est souvent reprise en apportant des variantes (voir entre autres Einstein (1935); et surtout Ehlers et al (1965)), mais le résultat est toujours le même. Dans un premier temps, on pose que la quantité de mouvement relativiste d'un objet se déplaçant à la vitesse $\vec{u}$ est donnée par :

$$\vec{p} = m(v)\vec{v}$$

où $m(v)$ est une fonction de la vitesse $\vec{v}$ à déterminer. On procède ensuite à l'analyse d'une collision observée dans deux référentiels, un étant en mouvement relatif constant par rapport à l'autre. En appliquant ensuite le principe de conservation de la quantité de mouvement dans ces deux référentiels, on démontre que la fonction $m(v)$ est :

$$m(v) = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

L'École hongroise diffère donc de cette approche en analysant une collision inélastique et en posant non le principe de conservation de la quantité de mouvement, mais la continuité de la trajectoire du centre de masse pour les collisions inélastiques :

> « The usual approach in standard relativity texts goes by assuming as new axioms the conservation of relativistic mass and conservation of momentum, cf. d'Inverno ([1992], p.43–36) and Rindler ([2006], pp.108–112). These are very strong assumptions compared to ours, and by our above mentioned proof, these strong assumptions are not needed for introducing or explaining relativistic mass. » (Andréka et al, 2008, p. 164)

Dans son théorème 5.2, l'École hongroise prétend déduire de façon purement géométrique la loi de la conservation de la quantité de mouvement à partir de collisions inélastiques, mais la preuve en est inaccessible. Nous le regrettons.

Dans une collision inélastique, une partie de l'énergie des particules avant la collision est perdue sous forme de chaleur; il faut cependant tenir compte de l'équivalence en masse de cette énergie perdue car elle contribue à la quantité de mouvement totale des particules en collision. Cette contribution de l'énergie perdue à la quantité de mouvement après la collision apparait automatiquement à l'aide des transformations de Lorentz de la quantité de mouvement entre les systèmes de référence S et S'.

Pour illustrer notre propos, prenons une collision entre deux particules de masse au repos identique m_0 se déplaçant l'une vers l'autre à la vitesse u par rapport au système de référence S', de sorte que la quantité de mouvement p'_x du système des deux particules en collision est nulle par rapport au référentiel S' ($p'_x = 0$). Si la vitesse relative entre les systèmes de référence S et S' est v, alors la quantité de mouvement de ce système de particules est $p_x = M_0 \gamma v$, où $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

Cependant, selon la transformation de Lorentz de la quantité de mouvement (voir Rosser, 1964, p. 204), avant la collision, la quantité de mouvement du système composé des deux particules, est :

$$p_x = \gamma\left(p'_x + \frac{v}{c^2}E'\right),$$

où $E' = 2m_0c^2 + K'$, K' étant l'énergie cinétique des particules due à leur vitesse u par rapport au système de référence S'; c'est cette énergie K' qui sera perdue lors de la collision inélastique et dissipée sous forme de chaleur. En faisant les substitutions (et en se rappelant que $p'_x = 0$), nous obtenons :

$$p_x = \gamma v\left(2m_0 + \frac{K'}{c^2}\right).$$

En comparant avec la quantité de mouvement du système de particules par rapport à S :

$$p_x = M_0\gamma v,$$

nous pouvons conclure que la masse M_0 du système des deux particules de masse m_0 est :

$$M_0 = 2m_0 + \frac{K'}{c^2},$$

et non $2m_0$. Cet exemple illustre le fait qu'on doive tenir compte de l'énergie des particules dans la quantité de mouvement du système de particules lors d'une collision inélastique, ce qui apparaît directement à partir des équations de transformation.

Or, l'École hongroise propose de déduire de façon purement géométrique le principe de conservation de la quantité de mouvement lors d'une collision inélastique, sans les équations de transformation. Pour être concluante, il faudrait s'assurer que cette preuve tient compte de l'équivalent en masse de l'énergie cinétique perdue. Sans pouvoir consulter la preuve leur proposition, nous ne pouvons juger de la validité de l'approche de l'École hongroise.

Finalement, l'École hongroise a réussi à déterminer l'expression pour la masse relativiste et les principes de conservation de la masse et de la quantité de mouvement, ce qui leur permet d'obtenir l'équation du mouvement pour un cas particulier : les collisions parfaitement inélastiques, mais pas pour les cas plus généraux.

L'équation du mouvement est cette équation qui permet de déterminer les fonctions de vitesse et de position d'un objet, ce que fait la seconde loi de Newton. Cependant, les principes de conservation de la masse et de la quantité de mouvement ne nous permettent pas d’en déduire cette équation du mouvement. Autrement dit, l’École hongroise ne présente pas une axiomatique de la dynamique newtonienne.

Partie III. Notre axiomatisation des mécaniques classique et relativiste

Nous allons présenter ici notre théorie de la relativité qui met en évidence une structure commune aux deux mécaniques, classique et relativiste.

Nous pensons que les fonctions de la mécanique, qu'elle soit classique ou relativiste, représentent des quantités relatives, c'est-à-dire des quantités physiques que l'on peut assigner à une particule σ_i par rapport à une autre particule σ_j, par exemple, la position, la vitesse et l'accélération, et même la masse et l'énergie. Il revient alors à une théorie de la relativité de déterminer comment une quantité physique initialement attribuée à une particule σ_i par rapport à une particule σ_j peut aussi être attribuée par rapport à une autre particule σ_k, ce qui est fait avec les équations de transformation, par exemple celles de Galilée ou de Lorentz.

6. Notre théorie de la relativité

La notion de quantité relative qui est à la base de notre étude ne repose pas sur une interprétation physique de cette quantité relative. Cette quantité relative peut être la position et le temps, comme on le fait dans les présentations standards de la théorie de la relativité; mais ce pourrait être aussi la vitesse, la quantité de mouvement, ou l'énergie. Aussi, les axiomes de notre système portent sur les propriétés de ces quantités relatives.

6.1 Les axiomes

Un système $\mathbb{T}_R = \langle \Sigma; R; \mathbb{R}, \mathbb{E}^3, E; \Pi^\pi, Q^\pi, \circ_{Q^\pi} \rangle$ est une *théorie de la relativité* s'il satisfait les axiomes $\boldsymbol{AxT_R1}$ à $\boldsymbol{AxT_R8}$ suivants.

$\boldsymbol{Axiome\ AxT_R1}$. (a) Σ est un ensemble non vide. (b) Chaque élément $\sigma \in \Sigma$ représente une particule.

Une particule σ est une entité qui n'a pas de volume, mais qui peut avoir une vitesse ou une masse. C'est ce qu'on entend en mécanique lorsqu'on parle de particules. Dans notre système axiomatique, une particule est aussi une référence pour différentes quantités de la physique; on peut ainsi avoir la position $\vec{r}_{(\sigma_j,\sigma_i)}$ de la particule σ_i par rapport à la particule σ_j, ou la vitesse $v_{(\sigma_j,\sigma_i)}$ de la particule σ_i par rapport à la particule σ_j. La particule σ_j est alors la particule de référence des quantités physiques attribuées à la particule σ_i.

En utilisant ainsi une particule de référence, on est dispensé d'introduire des systèmes de référence ou référentiels. Nous trouvons cette notion ambiguë, quelquefois représentée comme un système d'axes, d'autres fois comme des tiges rigides perpendiculaires l'une à l'autre, ou comme un laboratoire, ou un observateur. Nous nous proposons plutôt d'utiliser des particules comme référence des quantités physiques, ce qui a l'avantage de n'introduire qu'une sorte d'objet dans notre système. Il faut toutefois remarquer qu'il nous est loisible de poser qu'une de ces particules est un système de référence ou un quelconque référentiel, tel un laboratoire ou un observateur.

Nous allons maintenant introduire une relation binaire R sur Σ dont les éléments seront dénotés par (σ_j, σ_i) et qui se lit : la particule σ_i est en relation R avec la particule σ_j. La relation R nous permet ainsi de représenter des quantités relatives de la physique telles la coordonnée spatio-temporelle de σ_i par rapport à σ_j, ou sa vitesse relative, sa masse, sa quantité de mouvement, etc.

Pour représenter une quantité relative de la physique, la relation R doit minimalement être une relation d'équivalence, c'est-à-dire qu'elle doit être : (i) réflexive $\big((\sigma_i, \sigma_i) \in R\big)$, (ii) symétrique $\big((\sigma_j, \sigma_i) \in R \vdash (\sigma_i, \sigma_j) \in R\big)$ et (iii) transitive $\big((\sigma_k, \sigma_j) \in R \wedge (\sigma_j, \sigma_i) \in R \vdash (\sigma_k, \sigma_i) \in R\big)$. On obtient ainsi un sous-ensemble de couples de particules (σ_j, σ_i) ayant tous entre eux la même relation R.

Par exemple, posons que l'ensemble Σ est donné par $\Sigma = \{\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c, \dots, \sigma_f, \sigma_g, \sigma_i, \sigma_j, \sigma_k, \sigma_l, \sigma_m, \dots\}$; la relation R peut être donnée par l'ensemble des couples :

$$R = \left\{ \begin{array}{c} (\sigma_i, \sigma_i), (\sigma_i, \sigma_j), (\sigma_i, \sigma_k), (\sigma_i, \sigma_l), \\ (\sigma_j, \sigma_i), (\sigma_j, \sigma_j), (\sigma_j, \sigma_k), (\sigma_j, \sigma_l), \\ (\sigma_k, \sigma_i), (\sigma_k, \sigma_j), (\sigma_k, \sigma_k), (\sigma_k, \sigma_l), \\ (\sigma_l, \sigma_i), (\sigma_l, \sigma_j), (\sigma_l, \sigma_k), (\sigma_l, \sigma_l) \end{array} \right\}.$$

Cet ensemble est un sous-ensemble du produit de l'ensemble Σ par lui-même, $\Sigma \times \Sigma$.

Chaque particule de ces couples de R est équivalente aux autres en ce sens que si toute particule σ_i est en relation R avec toute autre particule σ_j, σ_k ou σ_l.Cette équivalence entre les particules de l'ensemble Σ est tout à fait similaire à la notion d'équivalence entre les référentiels inertiels que l'on retrouve en relativité restreinte, d'où son importance.

Axiome AxT_R2. R est une relation d'équivalence sur l'ensemble Σ, telle que $(\sigma_j, \sigma_i) \in R \subseteq \Sigma \times \Sigma$.

Nous voulons maintenant quantifier la relation entre les particules σ_i et σ_j. Pour y parvenir, nous allons construire un ensemble E de couples composés d'un scalaire et d'un vecteur à trois dimensions, à l'image des quadrivecteurs de l'espace de Minkowski.

Axiome $\boldsymbol{AxT_R3}$. $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels.

Axiome $\boldsymbol{AxT_R4}$. $\mathbb{E}^3$ est un espace vectoriel euclidien à trois dimensions (voir Mac Lane et Birkhoff, 1997, p. 200 et suivantes).

Par définition, un espace vectoriel euclidien est un espace vectoriel tel que pour chaque paire de vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, il existe un produit scalaire $g(\vec{a},\vec{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots a_nb_n$ qui soit :

- bilinéaire : $g(\vec{a}+\vec{b},\vec{c}) = g(\vec{a},\vec{c}) + g(\vec{b},\vec{c})$,
- symétrique : $g(\vec{a},\vec{b}) = g(\vec{b},\vec{a})$,
- positif : $g(\vec{a},\vec{a}) > 0$, sauf si $\vec{a} = 0$.

De plus, pour tout espace vectoriel de dimension n finie, il existe une base orthonormée $\{\hat{e}\} = \{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3, \dots, \hat{e}_n\}$ telle que :

- $g(\hat{e}_\alpha, \hat{e}_\beta) = 0$, si $\alpha \neq \beta$, $(\alpha, \beta = 1,2, \dots n)$,
- $g(\hat{e}_\alpha, \hat{e}_\beta) = 1$, $(\alpha, \beta = 1,2, \dots n)$,

de sorte que tout vecteur $\vec{a}$ peut être écrit sous la forme :

$$\vec{a} = a_1\hat{e}_1 + a_2\hat{e}_2 + \cdots + a_n\hat{e}_n \, .$$

Dans notre cas, l'espace vectoriel euclidien est à trois dimensions ($n = 3$). Les axes correspondant à chaque vecteur $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$ et $\hat{e}_3$ de la base $\{\hat{e}_\alpha\}$ sont respectivement les axes x, y et x et dénotées $\hat{e}_x$, $\hat{e}_y$ et $\hat{e}_z$.

Nous pouvons maintenant introduire formellement l'ensemble E.

Axiome $\boldsymbol{AxT_R5}$. E est une relation binaire sur l'ensemble $\mathbb{R}$ vers l'ensemble $\mathbb{E}^3$, telle que si $\Omega \in \mathbb{R}$ et $\vec{U} \in \mathbb{E}^3$, alors $(\Omega, \vec{U}) \in E \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{E}^3$.

Pour quantifier la relation R entre les particules σ_i et σ_j, nous allons poser l'existence d'une fonction Π^π sur R vers E, où π est un paramètre arbitraire.

Axiome AxT$_R$6. Soit π un paramètre arbitraire, alors $\Pi^{\pi}: R \to E$ tel que pour tout $\left(\sigma_j, \sigma_i\right) \in R$, $\Pi^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)} \in E$.

Nous allons maintenant former Q^{π}, l'ensemble image de la fonction Π^{π} dont les éléments sont

$$Q^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)} = \left(\Omega^{\pi}{}_{(\sigma_j,\sigma_i)}, \vec{U}^{\pi}{}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right),$$

et réécrire sous une autre forme les éléments $Q^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}$ de l'ensemble Q^{π}.

Axiome AxT$_R$7. (a) $Q^{\pi} = \left\{\left(\Omega^{\pi}{}_{(\sigma_j,\sigma_i)}, \vec{U}^{\pi}{}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right) \in E \mid \exists\left(\sigma_j, \sigma_i\right), Q^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)} = \left(\Omega^{\pi}{}_{(\sigma_j,\sigma_i)}, \vec{U}^{\pi}{}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right)\right\}$

(b) Pour toute quantité $Q^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)} = \left(\Omega^{\pi}{}_{(\sigma_j,\sigma_i)}, \vec{U}^{\pi}{}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right) \in Q^{\pi}$, il existe des scalaires $q^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}$, $\omega^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)} \in \mathbb{R}$ et un vecteur $\vec{u}^{\pi}{}_{(\sigma_j,\sigma_i)} \in \mathbb{E}^3$ tels que :

$$Q^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)} = \left(q^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\omega^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}, q^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\vec{u}^{\pi}{}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right) = q^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\left(\omega^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}, \vec{u}^{\pi}{}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right),$$

où $\omega^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)} = \Omega^{\pi}{}_{(\sigma_j,\sigma_i)}/q^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}$ et $\vec{u}^{\pi}{}_{(\sigma_j,\sigma_i)} = \vec{U}^{\pi}{}_{(\sigma_j,\sigma_i)}/q^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}$.

Ce dernier axiome peut paraître trivial, mais il nous est nécessaire pour pouvoir établir une relation entre la quantité $Q^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}$ et les quadrivecteurs de l'espace de Minkowski. Pour comprendre cette relation, nous avons dressé un tableau des principaux quadrivecteurs.

Quadrivecteurs de l'espace de Minkowski			
Position-temps	$dt_{(\sigma_j,\sigma_i)}$	$d\vec{r}_{(\sigma_j,\sigma_i)} = dt_{(\sigma_j,\sigma_i)}\vec{v}_{(\sigma_j,\sigma_i)}$	$\left(c\, dt_{(\sigma_j,\sigma_i)}, d\vec{r}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right)$.
Impulsion	$m_{(\sigma_j,\sigma_i)}$	$\vec{p}_{(\sigma_j,\sigma_i)} = m_{(\sigma_j,\sigma_i)}\vec{v}_{(\sigma_j,\sigma_i)}$	$\left(c\, m_{(\sigma_j,\sigma_i)}, \vec{p}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right)$.
Densité de courant	$\rho_{(\sigma_j,\sigma_i)}$	$\vec{J}_{(\sigma_j,\sigma_i)} = \rho_{(\sigma_j,\sigma_i)}\vec{v}_{(\sigma_j,\sigma_i)}$	$\left(c\, \rho_{(\sigma_j,\sigma_i)}, \vec{J}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right)$.

Dans ce tableau, $dt_{(\sigma_j,\sigma_i)}$ représente l'intervalle de temps, $d\vec{r}_{(\sigma_j,\sigma_i)}$ l'intervalle d'espace; $m_{(\sigma_j,\sigma_i)}$ la masse et $\vec{p}_{(\sigma_j,\sigma_i)}$ la quantité de mouvement; $\rho_{(\sigma_j,\sigma_i)}$ la densité de charge et $\vec{J}_{(\sigma_j,\sigma_i)}$, la densité de courant.

Pour établir la correspondance entre notre quantité $Q^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}$ et ces quadrivecteurs, nous interprétons la variable $\vec{u}_{(\sigma_j,\sigma_i)}$ de la quantité $Q^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}$ comme étant le vecteur vitesse relative $\vec{v}_{(\sigma_j,\sigma_i)}$ de la particule σ_i par rapport à la particule σ_j. On obtient alors les quadrivecteurs selon l'interprétation que l'on attribue à la variable $q_{(\sigma_j,\sigma_i)}$; par exemple si on pose que $q_{(\sigma_j,\sigma_i)} = dt_{(\sigma_j,\sigma_i)}$, l'intervalle de temps, on obtient le quadrivecteur position-temps.

Cela étant dit, dans nos axiomes, nous n'avons pas à interpréter les variables de la quantité relative $Q^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)} = q^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\left(\omega^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}, \vec{u}^{\pi}{}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right)$. Une interprétation sera donnée plus tard dans les axiomes de notre mécanique relative.

Nous allons maintenant poser l'existence d'une loi de composition partielle $\circ_{\boldsymbol{Q}^{\boldsymbol{\pi}}}$ sur l'ensemble Q^{π} telle que toute quantité $Q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_i)}$ est égale à la composition des quantités $Q^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}$ et $Q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_j)}$: $Q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_i)} = \left[Q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{\boldsymbol{Q}^{\boldsymbol{\pi}}} \left[Q^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right]$ [10]. On parle de composition partielle car elle n'est pas totale sur l'ensemble Q^{π}; par exemple, on ne peut composer les quantités $Q^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}$ et $Q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_l)}$, même si ce sont deux éléments de l'ensemble Q^{π}. On remarque donc ici l'importance de l'ordre des indices σ_i, σ_j et σ_k.

$\boldsymbol{Axiome\ AxT_R 8.1}$. (a) $\circ_{\boldsymbol{Q}^{\boldsymbol{\pi}}}$ est une loi de composition partielle sur l'ensemble Q^{π} telle que :

$$\left[Q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{\boldsymbol{Q}^{\boldsymbol{\pi}}} \left[Q^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right] = Q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_i)}.$$

(b) En fonction des variables $q_{(\sigma_j,\sigma_i)}$, $\omega_{(\sigma_j,\sigma_i)}$ et $\vec{u}_{(\sigma_j,\sigma_i)}$, la loi de composition est donnée par :

$$\left[Q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{\boldsymbol{Q}^{\boldsymbol{\pi}}} \left[Q^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right] = \left(q^{\pi}{}_{(\sigma_k,\sigma_i)}\omega^{\pi}{}_{(\sigma_k,\sigma_i)}\,, q^{\pi}{}_{(\sigma_k,\sigma_i)}\vec{u}^{\pi}{}_{(\sigma_k,\sigma_i)}\right),$$

où

$$q^{\pi}{}_{(\sigma_k,\sigma_i)}\omega^{\pi}{}_{(\sigma_k,\sigma_i)} = \left[q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_j)}\omega^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{q\omega} \left[q^{\pi}{}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\omega^{\pi}{}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right],$$
$$q^{\pi}{}_{(\sigma_k,\sigma_i)}\vec{u}^{\pi}{}_{(\sigma_k,\sigma_i)} = \left[q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_j)}\vec{u}^{\pi}{}_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{q\vec{u}} \left[q^{\pi}{}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\vec{u}^{\pi}{}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right].$$

En se rappelant la correspondance que nous avons établie entre les quantités $Q^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}$ et les quadrivecteurs de l'espace de Minkowski, la composition partielle introduite dans l'axiome précédant correspond aux

[10] Les crochets [ ] sont utilisés ici pour mettre en évidence les quantités relativistes $Q^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}$ et $Q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_j)}$ qui sont composées. Il ne faut confondre ici avec l'utilisation des crochets en théorie des ensembles pour désigner des classes d'équivalence.

équations de transformations d'un référentiel à un autre. Par exemple, la composition des quantités ${q^{\pi}}_{(\sigma_j,\sigma_i)}{\omega^{\pi}}_{(\sigma_j,\sigma_i)}$ et $q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_j)}{\vec{u}^{\pi}}_{(\sigma_k,\sigma_j)}$:

$$ {q^{\pi}}_{(\sigma_k,\sigma_i)}{\omega^{\pi}}_{(\sigma_k,\sigma_i)} = \left[q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_j)}\omega^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{q\omega} \left[{q^{\pi}}_{(\sigma_j,\sigma_i)}{\omega^{\pi}}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right] $$

correspond à la transformation de la variable de temps en relativité restreinte :

$$ t_{(S',\sigma)} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2_{(S,S')}}{c^2}}}\left(t_{(S,\sigma)} - \frac{v_{(S,S')}}{c^2}x_{(S,\sigma)}\right), $$

où $t_{(S,\sigma)}$ et $t_{(S',\sigma)}$ sont respectivement la variable de temps de la particule σ par rapport au référentiel S et S'; $x_{(S,\sigma)}$, la variable de position de la particule σ par rapport au référentiel S; $v_{(S,S')}$, la vitesse du référentiel S' par rapport au référentiel S; et c, la vitesse de la lumière.

En fait, déterminer les équations des compositions :

$$ {q^{\pi}}_{(\sigma_k,\sigma_i)}{\omega^{\pi}}_{(\sigma_k,\sigma_i)} = \left[q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_j)}\omega^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{q\omega} \left[{q^{\pi}}_{(\sigma_j,\sigma_i)}{\omega^{\pi}}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right], $$
$$ {q^{\pi}}_{(\sigma_k,\sigma_i)}{\vec{u}^{\pi}}_{(\sigma_k,\sigma_i)} = \left[q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_j)}{\vec{u}^{\pi}}_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{q\vec{u}} \left[{q^{\pi}}_{(\sigma_j,\sigma_i)}{\vec{u}^{\pi}}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right], $$

revient à déterminer les équations de transformation, et c'est ce que nous allons faire.

Les axiomes suivants déterminent les propriétés des quantités $q^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}$, $\omega^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}$ et ${\vec{u}^{\pi}}_{(\sigma_j,\sigma_i)}$ qui sont nécessaires pour obtenir les équations de transformation.

La seule propriété que nous posons pour la quantité ${q^{\pi}}_{(\sigma_j,\sigma_i)}$, c'est que pour toutes particules σ_i, σ_j et σ_k, les quantités ${q^{\pi}}_{(\sigma_j,\sigma_i)}$ et ${q^{\pi}}_{(\sigma_k,\sigma_i)}$ ont le même signe; ainsi, selon qu'on interprète ${q^{\pi}}_{(\sigma_j,\sigma_i)}$ comme temps ou la masse, il n'y a pas d'inversion de temps, pas plus que la masse ne devient négative.

$\boldsymbol{Axiome\ AxT_R 8.2}$. Les quantités ${q^{\pi}}_{(\sigma_j,\sigma_i)}$ et ${q^{\pi}}_{(\sigma_k,\sigma_i)}$ ont le même signe.

Définissons la *réciproque d'une quantité*, disons ${\omega^{\pi}}_{(\sigma_j,\sigma_i)}$, comme la quantité obtenue en permutant les indices de cette quantité; par exemple la réciproque de ${\omega^{\pi}}_{(\sigma_j,\sigma_i)}$ est ${\omega^{\pi}}_{(\sigma_i,\sigma_j)}$. L'axiome suivant pose que la quantité ${\omega^{\pi}}_{(\sigma_j,\sigma_i)}$ est égale à sa réciproque.

$\boldsymbol{Axiome\ AxT_R 8.3}$. $\omega^{\pi}{}_{(\sigma_j,\sigma_i)} = \omega^{\pi}{}_{(\sigma_i,\sigma_j)}$.

Finalement, en ce qui concerne la quantité $\vec{u}^{\pi}{}_{(\sigma_j,\sigma_i)}$, nous allons poser que la norme de sa réciproque $\vec{u}^{\pi}{}_{(\sigma_i,\sigma_j)}$ est égale à la norme de $\vec{u}^{\pi}{}_{(\sigma_j,\sigma_i)}$ $\left(u^{\pi}{}_{(\sigma_i,\sigma_j)} = u^{\pi}{}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right)$, mais que les orientations des deux vecteurs sont opposées $\left(\vec{u}^{\pi}{}_{(\sigma_j,\sigma_i)} = -\vec{u}^{\pi}{}_{(\sigma_i,\sigma_j)}\right)$.

De plus, si la quantité composée $\vec{u}^{\pi}{}_{(\sigma_k,\sigma_i)} = 0$ alors les vecteurs des quantités $\vec{u}^{\pi}{}_{(\sigma_j,\sigma_i)}$ et $\vec{u}^{\pi}{}_{(\sigma_j,\sigma_k)}$ des particules σ_i et σ_k par rapport à toute autre particule σ_j sont égaux.

$\boldsymbol{Axiome\ AxT_R 8.4}$. (a) $\vec{u}^{\pi}{}_{(\sigma_j,\sigma_i)} = -\vec{u}^{\pi}{}_{(\sigma_i,\sigma_j)}$.

(b) si $\vec{u}^{\pi}{}_{(\sigma_k,\sigma_i)} = 0$ alors pour toutes particules σ_j, $\vec{u}^{\pi}{}_{(\sigma_j,\sigma_i)} = \vec{u}^{\pi}{}_{(\sigma_j,\sigma_k)}$.

Nous aurons aussi besoin des propriétés suivantes de la loi de composition. Tout d'abord, la composition de la quantité nulle $Q^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)} = (0{,}0) = 0$ avec toute quantité $Q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_j)}$ non nulle est la quantité nulle $Q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_i)} = 0$. Ensuite, la loi composition de la quantité $Q^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)} = \left(q^{\pi}{}_{(\sigma_j,\sigma_i)} \vec{u}^{\pi}{}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right)$ avec la quantité $Q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_j)}$ est indépendante de l'orientation des bases $\{\hat{e}_{(\sigma_i)}\}$, $\{\hat{e}_{(\sigma_j)}\}$ et $\{\hat{e}_{(\sigma_k)}\}$.

$\boldsymbol{Axiome\ AxT_R 8.5}$. (a) Pour toutes particules $\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k \in \Sigma$, $\left[Q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{\boldsymbol{Q}^{\boldsymbol{\pi}}} [0] = 0$.

(b) Pour toutes particules σ_i, σ_j et σ_k, la quantité $Q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_i)} = \left[Q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{\boldsymbol{Q}^{\boldsymbol{\pi}}} \left[Q^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right]$ est indépendante de l'orientation des bases $\{\hat{e}_{(\sigma_i)}\}$, $\{\hat{e}_{(\sigma_j)}\}$ et $\{\hat{e}_{(\sigma_k)}\}$.

Il nous reste maintenant à déterminer les équations de la loi de composition $\circ_{Q^{\pi}}$ de la quantité Q.

6.2 Les équations de transformation

Notre démarche s'inspire largement des travaux de Ignatowski (1910), Franck et Rothe (1911), et Berzi et Gorini (1969) qui ont déterminé les équations de transformation de Lorentz à une constante près, la vitesse de la lumière, sans utiliser le postulat de la constance de la vitesse de la lumière. Pour y parvenir, ils posaient, explicitement ou non, que les transformations forment un groupe; ils parvenaient ainsi à déterminer les équations de transformation du temps et de la position en appliquant les propriétés de groupe de transformation du temps et des positions.

Notre système d'axiome ne pose pas que les transformations forment un groupe. Nous avons préféré poser qu'une quantité relative peut être représentée par une relation d'équivalence et de poser l'existence d'une loi de composition sur les quantités relatives. Nous allons maintenant déterminer les équations de cette loi de composition.

Une des propriétés importantes des équations de la composition $\circ_{Q^\pi}$ est qu'elles sont linéaires, c'est-à-dire qu'elles préservent les opérations d'addition et de multiplication par un scalaire quelconque k :

- $\left[Q^\pi_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{Q^\pi} \left[Q^\pi_{(\sigma_j,\sigma_i)} + Q^\pi_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right] = \left[Q^\pi_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{Q^\pi} \left[Q^\pi_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right] + \left[Q^\pi_{(\sigma_k,\sigma_j)} \circ_{Q^\pi} Q^\pi_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right]$;
- $\left[Q^\pi_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{Q^\pi} \left[kQ^\pi_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right] = k\left[Q^\pi_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{Q^\pi} \left[Q^\pi_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right]$.

C'est ce que démontre le théorème $\boldsymbol{ThT_R1.}$

$\boldsymbol{Th\acute{e}or\grave{e}me\ ThT_R1}$. La loi de composition $\circ_{Q^\pi}$ est linéaire.

Dans la littérature, il existe différentes preuves de la linéarité des équations de transformation. Plusieurs reposent sur l'homogénéité de l'espace, par exemple Einstein (1905), Eisenberg (1967), Terletskii (1968), Levy-Leblond (1976). Certaines posent l'invariance du mouvement rectiligne uniforme, c'est-à-dire que si un objet a un mouvement rectiligne uniforme par rapport à un référentiel, il doit être u mouvement rectiligne uniforme dans les autres référentiels; voir par exemple, Frank et Rothe (1911), Stephenson et Kilminster (1958), et Ahori (1959). Ces preuves sont valables lorsque on cherche à déterminer les équations de transformation des fonctions de position et de temps. Or, nous n'avons pas interprété physiquement nos quantités relativistes; on ne peut donc pas recourir à ces preuves.

La preuve que nous présentons est une adaptation de celles présentées par Berzi et Gorini (1969) et par Gannett (2007), et qui repose sur les propriétés générales des fonctions et non sur leur interprétation physique.

Preuve. (i) Démontrons d'abord que

$$\left[Q^\pi_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{Q^\pi} \left[Q^\pi_{(\sigma_j,\sigma_i)} + Q^\pi_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right] = \left[Q^\pi_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{Q^\pi} \left[Q^\pi_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right] + \left[Q^\pi_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{Q^\pi} \left[Q^\pi_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right].$$

Par l'axiome $\boldsymbol{AxT_R8.1a}$, nous avons : $\left[Q^\pi_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{Q^\pi} \left[Q^\pi_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right] = Q^\pi_{(\sigma_k,\sigma_i)}$.

Posons que $\delta Q^0_{(\sigma_j,\sigma_i)} = Q^\pi_{(\sigma_j,\sigma_i)} - Q^0_{(\sigma_j,\sigma_i)}$, c'est-à-dire que $\delta Q^0_{(\sigma_j,\sigma_i)}$ est la quantité qu'il faut ajouter à $Q^0_{(\sigma_j,\sigma_i)}$ pour obtenir $Q^\pi_{(\sigma_j,\sigma_i)}$, de sorte que :

$$Q^\pi_{(\sigma_j,\sigma_i)} = Q^0_{(\sigma_j,\sigma_i)} + \delta Q^0_{(\sigma_j,\sigma_i)}$$

$$Q^\pi_{(\sigma_k,\sigma_i)} = \left[Q^\pi_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{Q^\pi} \left[Q^0_{(\sigma_j,\sigma_i)} + \delta Q^0_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right].$$

De même, posons que $\delta^\pi_0 = Q^\pi_{(\sigma_k,\sigma_i)} - \left[Q^\pi_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{Q^\pi} \left[Q^0_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right]$, de sorte que :

$$Q^\pi_{(\sigma_k,\sigma_i)} = \left[Q^\pi_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{Q^\pi} \left[Q^0_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right] + \delta^\pi_0.$$

Pour démontrer que :

$$Q^\pi_{(\sigma_k,\sigma_i)} = \left[Q^\pi_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{Q^\pi} \left[Q^0_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right] + \left[Q^\pi_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{Q^\pi} \left[\delta Q^0_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right],$$

il faut maintenant démontrer que δ^π_0 est nécessairement égal à $\left[Q^\pi_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{Q^\pi} \left[\delta Q^0_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right]$. Posons que $Q^0_{(\sigma_j,\sigma_i)} = 0$, de sorte que :

$$Q^\pi_{(\sigma_k,\sigma_i)} = \left[Q^\pi_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{Q^\pi} [0] + \delta^\pi_0.$$

Puisque selon l'axiome $\boldsymbol{AxT_R}\ \mathbf{8.5}\boldsymbol{a}$, $\left[Q^\pi_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{Q^\pi} [0] = 0$, nous obtenons nécessairement :

$$\left[Q^\pi_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{Q^\pi} \left[\delta Q^0_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right] = \delta^\pi_0,$$

ce qui prouve que :

$$Q^\pi_{(\sigma_k,\sigma_i)} = \left[Q^\pi_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{Q^\pi} \left[Q^0_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right] + \left[Q^\pi_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{Q^\pi} \left[\delta Q^0_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right].$$

On en conclut que :

$$\left[Q^\pi_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{Q^\pi} \left[Q^\pi_{(\sigma_j,\sigma_i)} + Q^\pi_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right] = \left[Q^\pi_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{Q^\pi} \left[Q^\pi_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right] + \left[Q^\pi_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{Q^\pi} \left[Q^\pi_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right].$$

La composition $\circ_{Q^\pi}$ préserve donc l'addition.

(ii) Démontrons ensuite que :

$$\left[Q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{Q^\pi} \left[kQ^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right] = k\left(Q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right) \circ_{Q^\pi} \left(Q^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right),$$

où k est un scalaire quelconque.

Posons d'abord que k est un entier positif. Procédons par induction et démontrons que

$$\left[Q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{Q^\pi} \left[kQ^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right] = k\left(Q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right) \circ_{Q^\pi} \left(Q^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right)$$

implique nécessairement que :

$$\left[Q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{Q^\pi} \left[(k+1)Q^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right] = (k+1)\left(Q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right) \circ_{Q^\pi} \left(Q^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right).$$

Nous venons de démontrer que la composition $\circ_{Q^\pi}$ préserve l'addition, et donc que :

$$\left[Q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{Q^\pi} \left[kQ^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)} + Q^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right] = \left[Q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{Q^\pi} \left[kQ^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right] + \left[Q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{Q^\pi} \left[Q^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right].$$

Par hypothèse,

$$\left[Q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{Q^\pi} \left[kQ^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right] = kQ^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_i)},$$

De laquelle on conclut que, pour tout k positif :

$$\left[Q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{Q^\pi} \left[kQ^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)} + Q^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right] = k\left[Q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_j)} \circ_{Q^\pi} Q^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right] + \left[\left(Q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right) \circ_{Q^\pi} \left(Q^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right)\right],$$
$$\left[Q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{Q^\pi} \left[(k+1)Q^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right] = (k+1)\left[Q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{Q^\pi} \left[Q^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right].$$

On vient ainsi de prouver par induction que

$$\left[Q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{Q^\pi} \left[kQ^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right] = kQ^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_i)}$$

pour tout k entier positif.

(iii) Posons maintenant que $k = -m$, où m est un entier positif. À partir du résultat obtenu en (i), nous avons :

$$\left[Q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{Q^\pi} \left[mQ^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)} - mQ^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right] = \left[Q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{Q^\pi} \left[mQ^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right] + \left[Q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{Q^\pi} \left[-mQ^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right].$$

Selon l'axiome $\boldsymbol{AxT_R}$ $\mathbf{8.5}\boldsymbol{a}$**,**

$$\left[Q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{Q^{\pi}} \left[mQ^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)} - mQ^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right] = \left[Q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{Q^{\pi}} [0] = 0,$$

ce qui donne :

$$\left[Q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{Q^{\pi}} \left[-mQ^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right] = -\left[Q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{Q^{\pi}} \left[mQ^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right].$$

Selon le résultat obtenu en (ii) :

$$\left[Q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{Q^{\pi}} \left[mQ^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right] = m\left[Q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{Q^{\pi}} \left[Q^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right].$$

On conclut que :

$$\left[Q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{Q^{\pi}} \left[-mQ^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right] = -m\left[Q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{Q^{\pi}} \left[Q^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right]$$

c'est-à-dire que

$$\left[Q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{Q^{\pi}} \left[kQ^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right] = kQ^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_i)}$$

pour tout entier négatif $k = -m$. Ceci prouve que

$$\left[Q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{Q^{\pi}} \left[kQ^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right] = kQ^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_i)}$$

pour tout k entier, positif ou négatif.

(iv) Supposons maintenant que k est un nombre rationnel : $k = \frac{m}{n}$, où m et n sont des entiers (positifs ou négatifs), et posons qu'il existe des quantités $Q^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}$ et $Q^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}$ tels que $mQ^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)} = nQ^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}$. Ainsi,

$$\left[Q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{Q^{\pi}} \left[mQ^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right] = \left[Q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{Q^{\pi}} \left[nQ^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right]$$

et

$$m\left[Q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{Q^{\pi}} \left[Q^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right] = n\left[Q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{Q^{\pi}} \left[Q^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right],$$

que l'on réécrit

$$\left[Q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{Q^{\pi}} \left[Q^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right] = \frac{n}{m}\left[Q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{Q^{\pi}} \left[Q^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right].$$

Or, à partir de $mQ^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)} = nQ^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}$, on obtient aussi $Q^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)} = \frac{n}{m}Q^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}$, soit :

$$\left[Q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{Q^\pi} \left[Q^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right] = \left[Q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{Q^\pi} \left[\frac{n}{m}Q^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right].$$

En comparant les deux égalités pour $\left[Q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{Q^\pi} \left[Q^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right]$, on conclut que :

$$\left[Q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{Q^\pi} \left[kQ^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right] = kQ^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_i)}$$

pour tout nombre k rationnel, positif ou négatif.

(v) Supposons finalement que k est un nombre irrationnel qui peut être représenté par la séquence de nombre entiers k_i tel que $\lim\limits_{k_i\to\infty} k_i = k$. Nous avons successivement :

$$\begin{aligned}
Q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_i)} &= \left[Q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{Q^\pi} \left[kQ^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right],\\
Q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_i)} &= \left[Q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{Q^\pi} \left[\lim_{k_i\to\infty} k_i Q^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right],\\
Q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_i)} &= \lim_{k_i\to\infty} k_i \left[Q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{Q^\pi} \left[Q^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right],\\
Q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_i)} &= k\left[Q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{Q^\pi} \left[Q^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right].
\end{aligned}$$

Nous avons donc prouvé que la loi de composition $\circ_{Q^\pi}$ est linéaire. ■

La loi de composition $\circ_{Q^\pi}$ étant linéaire, elle peut être écrite sous forme d'un système d'équations linéaires. Les équations de la composition $Q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_i)} = \left[Q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{Q^\pi} \left[Q^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right]$ ont donc la forme générale suivante[11] :

$$\begin{aligned}
q_{(\sigma_k,\sigma_i)}\omega_{(\sigma_k,\sigma_i)} &= q_{(\sigma_j,\sigma_i)}\left[a_{0(\sigma_k,\sigma_j)}\omega_{(\sigma_j,\sigma_i)} + b_{0(\sigma_k,\sigma_j)}u_{x(\sigma_j,\sigma_i)} + c_{0(\sigma_k,\sigma_j)}u_{y(\sigma_j,\sigma_i)} + d_{0(\sigma_k,\sigma_j)}u_{z(\sigma_j,\sigma_i)}\right],\\
q_{(\sigma_k,\sigma_i)}u_{x(\sigma_k,\sigma_i)} &= q_{(\sigma_j,\sigma_i)}\left[a_{1(\sigma_k,\sigma_j)}\omega_{(\sigma_j,\sigma_i)} + b_{1(\sigma_k,\sigma_j)}u_{x(\sigma_j,\sigma_i)} + c_{1(\sigma_k,\sigma_j)}u_{y(\sigma_j,\sigma_i)} + d_{1(\sigma_k,\sigma_j)}u_{z(\sigma_j,\sigma_i)}\right],\\
q_{(\sigma_k,\sigma_i)}u_{y(\sigma_k,\sigma_i)} &= q_{(\sigma_j,\sigma_i)}\left[a_{2(\sigma_k,\sigma_j)}\omega_{(\sigma_j,\sigma_i)} + b_{2(\sigma_k,\sigma_j)}u_{x(\sigma_j,\sigma_i)} + c_{2(\sigma_k,\sigma_j)}u_{y(\sigma_j,\sigma_i)} + d_{2(\sigma_k,\sigma_j)}u_{z(\sigma_j,\sigma_i)}\right],\\
q_{(\sigma_k,\sigma_i)}u_{z(\sigma_k,\sigma_i)} &= q_{(\sigma_j,\sigma_i)}\left[a_{3(\sigma_k,\sigma_j)}\omega_{(\sigma_j,\sigma_i)} + b_{3(\sigma_k,\sigma_j)}u_{x(\sigma_j,\sigma_i)} + c_{3(\sigma_k,\sigma_j)}u_{y(\sigma_j,\sigma_i)} + d_{3(\sigma_k,\sigma_j)}u_{z(\sigma_j,\sigma_i)}\right].
\end{aligned}$$

[11] Pour alléger la notation, nous omettrons dorénavant l'exposant π qui représentent le paramètre arbitraire des quantités $Q^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}$, $Q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_j)}$ et $Q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_i)}$.

Comme ces équations sont linéaires, les seize coefficients $b_{l(\sigma_k,\sigma_j)}$, $c_{l(\sigma_k,\sigma_j)}$ et $d_{l(\sigma_i,\sigma_k)}$ $(l = 0,1,2,3)$ dépendent de la relation entre les particules σ_j et doivent être indépendants de la relation entre les particules σ_j et σ_i.

Dix de ces coefficients peuvent être déterminés à l'aide de l'indépendance de la composition $\left[Q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ_{Q^{\pi}} \left[Q^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right]$ par rapport à l'orientation des référentiels posée par l'axiome $\boldsymbol{AxT_R8.5b}$, comme le montre le théorème suivant, dont la preuve est une adaptation de la preuve présentée par Gannett (2007).

Théorème $\boldsymbol{ThT_R2}$. Les coefficients $c_{1(\sigma_k,\sigma_j)}$, $d_{1(\sigma_k,\sigma_j)}$, $b_{2(\sigma_k,\sigma_j)}$, $d_{2(\sigma_k,\sigma_j)}$, $b_{3(\sigma_k,\sigma_j)}$ et $c_{3(\sigma_k,\sigma_j)}$ sont tous nuls ($c_{1(\sigma_k,\sigma_j)} = d_{1(\sigma_k,\sigma_j)} = b_{2(\sigma_k,\sigma_j)} = d_{2(\sigma_k,\sigma_j)} = b_{3(\sigma_k,\sigma_j)} = c_{3(\sigma_k,\sigma_j)} = 0$).

Preuve. Considérons deux particules, σ_j et σ_k et leur base $\left\{\hat{e}_{x(\sigma_j)}, \hat{e}_{y(\sigma_j)}, \hat{e}_{z(\sigma_j)}\right\}$ et $\left\{\hat{e}_{x(\sigma_k)}, \hat{e}_{y(\sigma_k)}, \hat{e}_{z(\sigma_k)}\right\}$. Posons que les axes correspondants de ces bases sont tous parallèles l'un à l'autre ($\hat{e}_{x(\sigma_j)}$ et $\hat{e}_{x(\sigma_k)}$ sont parallèles, etc). Effectuons une rotation de 180° des axes $\hat{e}_{y(\sigma_j)}$ et $\hat{e}_{z(\sigma_j)}$ autour de l'axe des $\hat{e}_{x(\sigma_j)}$ de sorte que les axes $\hat{e}_{y(\sigma_j)}$ et $\hat{e}_{z(\sigma_j)}$ sont inversés par rapport aux axes $\hat{e}_{y(\sigma_k)}$ et $\hat{e}_{y(\sigma_k)}$. La quantité $Q_{(\sigma_i,\sigma_j)}$ de la particule σ_i par rapport à la particule σ_j qui était donnée par le quadruplet :

$$Q_{(\sigma_j,\sigma_i)} = q_{(\sigma_j,\sigma_i)}\left(\omega_{(\sigma_j,\sigma_i)}, u_{x(\sigma_j,\sigma_i)}, u_{y(\sigma_j,\sigma_i)}, u_{z(\sigma_j,\sigma_i)}\right),$$

est maintenant donnée par le quadruplet :

$$Q_{(\sigma_j,\sigma_i)} = q_{(\sigma_j,\sigma_i)}\left(\omega_{(\sigma_j,\sigma_i)}, u_{x(\sigma_j,\sigma_i)}, -u_{y(\sigma_j,\sigma_i)}, -u_{z(\sigma_j,\sigma_i)}\right).$$

La quantité $q_{(\sigma_j,\sigma_i)}u_{x(\sigma_j,\sigma_i)}$ qui, avant la rotation, était reliée à la quantité $q_{(\sigma_k,\sigma_i)}u_{x(\sigma_k,\sigma_i)}$ par :

$$q_{(\sigma_k,\sigma_i)}u_{x(\sigma_k,\sigma_i)} = q_{(\sigma_j,\sigma_i)}\left[a_{1(\sigma_k,\sigma_j)}\omega_{(\sigma_j,\sigma_i)} + b_{1(\sigma_k,\sigma_j)}u_{x(\sigma_j,\sigma_i)} + c_{1(\sigma_k,\sigma_j)}u_{y(\sigma_j,\sigma_i)} + d_{1(\sigma_k,\sigma_j)}u_{z(\sigma_j,\sigma_i)}\right].$$

est maintenant reliée par :

$$q_{(\sigma_k,\sigma_i)}u_{x(\sigma_k,\sigma_i)} = q_{(\sigma_j,\sigma_i)}\left[a_{1(\sigma_k,\sigma_j)}\omega_{(\sigma_j,\sigma_i)} + b_{1(\sigma_k,\sigma_j)}u_{x(\sigma_j,\sigma_i)} - c_{1(\sigma_k,\sigma_j)}u_{y(\sigma_j,\sigma_i)} - d_{1(\sigma_k,\sigma_j)}u_{z(\sigma_j,\sigma_i)}\right].$$

Or, selon l'axiome $\boldsymbol{AxT_R 8.5b}$**,** la quantité $q_{(\sigma_i,\sigma_k)} u_{x(\sigma_i,\sigma_k)}$ est invariante à la suite de cette rotation; on en conclut que $c_{1(\sigma_k,\sigma_j)} = d_{1(\sigma_k,\sigma_j)} = 0$.

Si on effectue le même raisonnement pour une rotation autour de l'axe des $\hat{e}_{y(\sigma_j)}$, on obtient $a_{2(\sigma_k,\sigma_j)} = d_{2(\sigma_k,\sigma_j)} = 0$. Et en faisant de même pour l'axe des $\hat{e}_{z(\sigma_j)}$, on en conclut $b_{3(\sigma_k,\sigma_j)} = c_{3(\sigma_k,\sigma_j)} = 0$. ■

On obtient ainsi le système d'équations :

$$
\begin{aligned}
q_{(\sigma_k,\sigma_i)} \omega_{(\sigma_k,\sigma_i)} &= q_{(\sigma_j,\sigma_i)} \left[a_{0(\sigma_k,\sigma_j)} \omega_{(\sigma_j,\sigma_i)} + b_{0(\sigma_k,\sigma_j)} u_{x(\sigma_j,\sigma_i)} + c_{0(\sigma_k,\sigma_j)} u_{y(\sigma_j,\sigma_i)} + d_{0(\sigma_k,\sigma_j)} u_{z(\sigma_j,\sigma_i)} \right], \\
q_{(\sigma_k,\sigma_i)} u_{x(\sigma_k,\sigma_i)} &= q_{(\sigma_j,\sigma_i)} \left[a_{1(\sigma_k,\sigma_j)} \omega_{(\sigma_j,\sigma_i)} + b_{1(\sigma_k,\sigma_j)} u_{x(\sigma_j,\sigma_i)} \right], \\
q_{(\sigma_k,\sigma_i)} u_{y(\sigma_k,\sigma_i)} &= q_{(\sigma_j,\sigma_i)} \left[a_{2(\sigma_k,\sigma_j)} \omega_{(\sigma_j,\sigma_i)} + c_{2(\sigma_k,\sigma_j)} u_{y(\sigma_i,\sigma_j)} \right], \\
q_{(\sigma_k,\sigma_i)} u_{z(\sigma_k,\sigma_i)} &= q_{(\sigma_j,\sigma_i)} \left[a_{3(\sigma_k,\sigma_j)} \omega_{(\sigma_j,\sigma_i)} + d_{3(\sigma_k,\sigma_j)} u_{z(\sigma_j,\sigma_i)} \right].
\end{aligned}
$$

Théorème $\boldsymbol{ThT_R 3}$**.** Les coefficients $a_{1(\sigma_k,\sigma_j)}$, $a_{2(\sigma_k,\sigma_j)}$ et $a_{3(\sigma_k,\sigma_j)}$ sont donnés par :

$$
\begin{aligned}
a_{1(\sigma_k,\sigma_j)} &= a_{0(\sigma_k,\sigma_j)} \frac{u_{x(\sigma_k,\sigma_j)}}{\omega_{(\sigma_k,\sigma_i)}}, \\
a_{2(\sigma_k,\sigma_j)} &= a_{0(\sigma_k,\sigma_j)} \frac{u_{y(\sigma_k,\sigma_j)}}{\omega_{(\sigma_k,\sigma_i)}}, \\
a_{3(\sigma_k,\sigma_j)} &= a_{0(\sigma_k,\sigma_j)} \frac{u_{z(\sigma_k,\sigma_j)}}{\omega_{(\sigma_k,\sigma_i)}}.
\end{aligned}
$$

Preuve. Posons $\vec{u}_{(\sigma_j,\sigma_i)} = 0$, de sorte que les équations de la composition $\circ_Q$ sont :

$$
\begin{aligned}
q_{(\sigma_k,\sigma_i)} \omega_{(\sigma_k,\sigma_i)} &= q_{(\sigma_j,\sigma_i)} a_{0(\sigma_k,\sigma_j)} \omega_{(\sigma_j,\sigma_i)}, \\
q_{(\sigma_k,\sigma_i)} u_{x(\sigma_k,\sigma_i)} &= q_{(\sigma_j,\sigma_i)} a_{1(\sigma_k,\sigma_j)} \omega_{(\sigma_j,\sigma_i)}, \\
q_{(\sigma_k,\sigma_i)} u_{y(\sigma_k,\sigma_i)} &= q_{(\sigma_j,\sigma_i)} a_{2(\sigma_k,\sigma_j)} \omega_{(\sigma_j,\sigma_i)}, \\
q_{(\sigma_k,\sigma_i)} u_{z(\sigma_k,\sigma_i)} &= q_{(\sigma_j,\sigma_i)} a_{3(\sigma_k,\sigma_j)} \omega_{(\sigma_j,\sigma_i)}.
\end{aligned}
$$

En divisant la deuxième équation par la première, nous obtenons :

$$
a_{1(\sigma_k,\sigma_j)} = a_{0(\sigma_k,\sigma_j)} \frac{u_{x(\sigma_k,\sigma_i)}}{\omega_{(\sigma_k,\sigma_i)}}.
$$

Or, selon l'axiome $\boldsymbol{AxT_R 8.4b}$, si $u_{x(\sigma_j,\sigma_i)} = 0$, alors $u_{x(\sigma_k,\sigma_i)} = u_{x(\sigma_k,\sigma_j)}$, ce qui donne :

$$a_{1(\sigma_k,\sigma_j)} = a_{0(\sigma_k,\sigma_j)} \frac{u_{x(\sigma_k,\sigma_j)}}{\omega_{(\sigma_k,\sigma_i)}}.$$

En procédant de même pour les deux autres coefficients, on obtient :

$$a_{2(\sigma_k,\sigma_j)} = a_{0(\sigma_k,\sigma_j)} \frac{u_{y(\sigma_k,\sigma_j)}}{\omega_{(\sigma_k,\sigma_i)}}, \quad \text{et} \quad a_{3(\sigma_j,\sigma_k)} = a_{0(\sigma_k,\sigma_j)} \frac{u_{z(\sigma_k,\sigma_j)}}{\omega_{(\sigma_k,\sigma_i)}}. \blacksquare$$

Les équations de la loi de composition $\circ_Q$ sont donc :

$$q_{(\sigma_k,\sigma_i)}\omega_{(\sigma_k,\sigma_i)} = q_{(\sigma_j,\sigma_i)}\left[a_{0(\sigma_k,\sigma_j)}\omega_{(\sigma_j,\sigma_i)} + b_{0(\sigma_k,\sigma_j)}u_{x(\sigma_j,\sigma_i)} + c_{0(\sigma_k,\sigma_j)}u_{y(\sigma_j,\sigma_i)} + d_{0(\sigma_k,\sigma_j)}u_{z(\sigma_j,\sigma_i)}\right],$$
$$q_{(\sigma_k,\sigma_i)}u_{x(\sigma_k,\sigma_i)} = q_{(\sigma_j,\sigma_i)}\left[a_{0(\sigma_k,\sigma_j)}u_{x(\sigma_k,\sigma_j)}\frac{\omega_{(\sigma_j,\sigma_i)}}{\omega_{(\sigma_k,\sigma_i)}} + b_{1(\sigma_k,\sigma_j)}u_{x(\sigma_j,\sigma_i)}\right],$$
$$q_{(\sigma_k,\sigma_i)}u_{y(\sigma_k,\sigma_i)} = q_{(\sigma_j,\sigma_i)}\left[a_{0(\sigma_k,\sigma_j)}u_{y(\sigma_k,\sigma_j)}\frac{\omega_{(\sigma_j,\sigma_i)}}{\omega_{(\sigma_k,\sigma_i)}} + c_{2(\sigma_k,\sigma_j)}u_{y(\sigma_j,\sigma_i)}\right],$$
$$q_{(\sigma_k,\sigma_i)}u_{z(\sigma_k,\sigma_i)} = q_{(\sigma_j,\sigma_i)}\left[a_{0(\sigma_k,\sigma_j)}u_{z(\sigma_k,\sigma_j)}\frac{\omega_{(\sigma_j,\sigma_i)}}{\omega_{(\sigma_k,\sigma_i)}} + d_{3(\sigma_k,\sigma_j)}u_{z(\sigma_j,\sigma_i)}\right].$$

Selon l'axiome $\boldsymbol{AxT_R\ 8.5b}$, ces équations sont indépendantes de l'orientation des bases $\{\hat{e}_{(\sigma_i)}\}$, $\{\hat{e}_{(\sigma_j)}\}$ et $\{\hat{e}_{(\sigma_k)}\}$. Nous allons donc choisir ces bases telles qu'elles sont parallèles l'une à l'autre. De plus, nous allons choisir l'orientation de la base $\{\hat{e}_{(\sigma_k)}\}$ de sorte que les composantes vectorielles $u_{y(\sigma_k,\sigma_j)}$ et $u_{z(\sigma_k,\sigma_j)}$ du vecteur $\vec{u}_{(\sigma_k,\sigma_j)}$ sont nulles ($u_{y(\sigma_k,\sigma_j)} = u_{z(\sigma_k,\sigma_j)} = 0$). Autrement dit, l'axe $\hat{e}_{x(\sigma_k)}$ est parallèle aux axes $\hat{e}_{x(\sigma_i)}$ et $\hat{e}_{x(\sigma_j)}$, et au vecteur $\vec{u}_{(\sigma_k,\sigma_j)}$. Les équations de la composition $\circ_Q$ sont alors :

$$q_{(\sigma_k,\sigma_i)}\omega_{(\sigma_k,\sigma_i)} = q_{(\sigma_j,\sigma_i)}\left[a_{0(\sigma_k,\sigma_j)}\omega_{(\sigma_j,\sigma_i)} + b_{0(\sigma_k,\sigma_j)}u_{x(\sigma_j,\sigma_i)}\right],$$
$$q_{(\sigma_k,\sigma_i)}u_{x(\sigma_k,\sigma_i)} = q_{(\sigma_j,\sigma_i)}\left[-a_{0(\sigma_k,\sigma_j)}u_{x(\sigma_k,\sigma_j)}\frac{\omega_{(\sigma_j,\sigma_i)}}{\omega_{(\sigma_k,\sigma_i)}} + b_{1(\sigma_k,\sigma_j)}u_{x(\sigma_j,\sigma_i)}\right],$$
$$q_{(\sigma_k,\sigma_i)}u_{y(\sigma_k,\sigma_i)} = c_{2(\sigma_k,\sigma_j)}q_{(\sigma_j,\sigma_i)}u_{y(\sigma_j,\sigma_i)},$$
$$q_{(\sigma_k,\sigma_i)}u_{z(\sigma_k,\sigma_i)} = d_{3(\sigma_k,\sigma_j)}q_{(\sigma_j,\sigma_i)}u_{z(\sigma_j,\sigma_i)}.$$

Théorème $\boldsymbol{ThT_R4}$. Le coefficient $b_{1(\sigma_k,\sigma_j)}$ est donné par $b_{1(\sigma_k,\sigma_j)} = a_{0(\sigma_k,\sigma_j)}/\omega_{(k,i)}$.

Preuve. Posons cette fois $u_{x(\sigma_k,\sigma_i)} = 0$. Nous avons alors, selon la deuxième équation :

$$0 = a_{0(\sigma_k,\sigma_j)}u_{x(\sigma_k,\sigma_j)}\frac{\omega_{(\sigma_j,\sigma_i)}}{\omega_{(\sigma_k,\sigma_i)}} + b_{1(\sigma_k,\sigma_j)}u_{x(\sigma_j,\sigma_i)}.$$

Or, selon l'axiome $\boldsymbol{AxT_R8.4b}$, si la quantité composée $u_{x(\sigma_k,\sigma_i)}$ est nulle ($u_{x(\sigma_k,\sigma_i)} = 0$), alors les quantités $u_{x(\sigma_j,\sigma_i)}$ et $u_{x(\sigma_j,\sigma_k)}$ sont égales ($u_{x(\sigma_j,\sigma_i)} = u_{x(\sigma_j,\sigma_k)}$); de plus, en conséquence de l'axiome $\boldsymbol{AxT_R8.4a}$, $u_{x(\sigma_j,\sigma_k)} = -u_{(\sigma_k,\sigma_j)}$. On obtient alors, après simplification :

$$b_{1(\sigma_k,\sigma_j)} = a_{0(\sigma_k,\sigma_j)} \frac{\omega_{(\sigma_j,\sigma_i)}}{\omega_{(\sigma_k,\sigma_i)}}. \blacksquare$$

Les équations de $T_{(\sigma_k,\sigma_j)}$ sont donc :

$$\begin{aligned}
q_{(\sigma_k,\sigma_i)}\omega_{(\sigma_k,\sigma_i)} &= q_{(\sigma_j,\sigma_i)}\left[a_{0(\sigma_k,\sigma_j)}\omega_{(\sigma_j,\sigma_i)} + b_{0(\sigma_k,\sigma_j)}u_{x(\sigma_j,\sigma_i)}\right],\\
q_{(\sigma_k,\sigma_i)}u_{x(\sigma_k,\sigma_i)} &= a_{0(\sigma_k,\sigma_j)}\frac{\omega_{(\sigma_j,\sigma_i)}}{\omega_{(\sigma_k,\sigma_i)}} q_{(\sigma_j,\sigma_i)}\left[u_{x(\sigma_k,\sigma_j)} + u_{x(\sigma_j,\sigma_i)}\right],\\
q_{(\sigma_k,\sigma_i)}u_{y(\sigma_k,\sigma_i)} &= q_{(\sigma_j,\sigma_i)}c_{2(\sigma_k,\sigma_j)}u_{y(\sigma_j,\sigma_i)},\\
q_{(\sigma_k,\sigma_i)}u_{z(\sigma_k,\sigma_i)} &= q_{(\sigma_j,\sigma_i)}d_{3(\sigma_k,\sigma_j)}u_{z(\sigma_j,\sigma_i)}.
\end{aligned}$$

Il nous reste maintenant à déterminer les coefficients $a_{0(\sigma_k,\sigma_j)}$, $b_{0(\sigma_k,\sigma_j)}$ $c_{2(\sigma_k,\sigma_j)}$ et $d_{3(\sigma_k,\sigma_j)}$.

Théorème $\boldsymbol{ThT_R5}$. Le coefficient $b_{0(\sigma_k,\sigma_j)}$ est donné par $b_{0(\sigma_k,\sigma_j)} = \omega \frac{u_{x(\sigma_k,\sigma_j)}}{\varpi^2} a_{0(\sigma_k,\sigma_j)}$, où ω et ϖ sont des constantes à déterminer.

Preuve. La preuve du théorème repose sur les trois lemmes suivants.

Lemme $\boldsymbol{LeT_R5.1}$. Le coefficient $b_{0(\sigma_k,\sigma_j)}$ est donné par $b_{0(\sigma_k,\sigma_j)} = K_{(\sigma_j)} \frac{u_{x(\sigma_k,\sigma_j)}}{\omega_{(\sigma_k,\sigma_j)}} a_{0(\sigma_k,\sigma_j)}$, où $K_{(\sigma_j)}$ est une constante à déterminer.

Preuve. Divisons l'équation pour $q_{(\sigma_k,\sigma_i)}u_{x(\sigma_k,\sigma_i)}$ par celle pour $q_{(\sigma_k,\sigma_i)}\omega_{(\sigma_k,\sigma_i)}$; après simplification, on obtient :

$$u_{x(\sigma_k,\sigma_i)} = \frac{u_{x(\sigma_k,\sigma_j)} + u_{x(\sigma_j,\sigma_i)}}{1 + \dfrac{b_{0(\sigma_k,\sigma_j)}}{a_{0(\sigma_k,\sigma_j)}}\dfrac{u_{x(\sigma_j,\sigma_i)}}{\omega_{(\sigma_j,\sigma_i)}}}.$$

Cette équation, qui est la composition des quantités $u_{x(\sigma_j,\sigma_i)}$ et $u_{x(\sigma_k,\sigma_j)}$, est valable pour toutes particules par rapport à la particule référence σ_j. Entre autres, nous pouvons permuter les indices i et k :

$$u_{x(\sigma_i,\sigma_k)} = \frac{u_{x(\sigma_i,\sigma_j)} + u_{x(\sigma_j,\sigma_k)}}{1 + \frac{b_{0(\sigma_i,\sigma_j)}}{a_{0(\sigma_i,\sigma_j)}}\frac{u_{x(\sigma_j,\sigma_k)}}{\omega_{(\sigma_j,\sigma_k)}}}.$$

Selon l'axiome $\boldsymbol{AxT_R8.4a}$, $u_{x(\sigma_i,\sigma_j)} = -u_{x(\sigma_j,\sigma_i)}$, $u_{x(\sigma_k,\sigma_j)} = -u_{x(\sigma_j,\sigma_k)}$ $u_{x(\sigma_i,\sigma_k)} = -u_{x(\sigma_k,\sigma_i)}$, ce qui donne :

$$-u_{x(\sigma_k,\sigma_i)} = \frac{-u_{x(\sigma_j,\sigma_i)} - u_{x(\sigma_k,\sigma_j)}}{1 + \frac{b_{0(\sigma_i,\sigma_j)}}{a_{0(\sigma_i,\sigma_j)}}\frac{u_{x(\sigma_j,\sigma_k)}}{\omega_{(\sigma_j,\sigma_k)}}},$$

$$u_{x(\sigma_k,\sigma_i)} = \frac{u_{x(\sigma_j,\sigma_i)} + u_{x(\sigma_k,\sigma_j)}}{1 + \frac{b_{0(\sigma_i,\sigma_j)}}{a_{0(\sigma_i,\sigma_j)}}\frac{u_{x(\sigma_j,\sigma_k)}}{\omega_{(\sigma_j,\sigma_k)}}}.$$

Or, les deux équations pour la transformation de la quantité relative $u_{x(\sigma_k,\sigma_i)}$ doivent être égales, d'où nous obtenons, après simplification :

$$\frac{b_{0(\sigma_k,\sigma_j)}}{a_{0(\sigma_k,\sigma_j)}}\frac{u_{x(\sigma_j,\sigma_i)}}{\omega_{(\sigma_j,\sigma_i)}} = \frac{b_{0(\sigma_i,\sigma_j)}}{a_{0(\sigma_i,\sigma_j)}}\frac{u_{x(\sigma_j,\sigma_k)}}{\omega_{(\sigma_j,\sigma_k)}},$$

que nous écrivons sous la forme :

$$\frac{b_{0(\sigma_k,\sigma_j)}}{a_{0(\sigma_k,\sigma_j)}}\frac{\omega_{(\sigma_j,\sigma_k)}}{u_{x(\sigma_j,\sigma_k)}} = \frac{b_{0(\sigma_i,\sigma_j)}}{a_{0(\sigma_i,\sigma_j)}}\frac{\omega_{(\sigma_j,\sigma_i)}}{u_{x(\sigma_j,\sigma_i)}}.$$

En tenant compte de l'axiome $\boldsymbol{AxT_R8.3}$, $\omega_{(\sigma_j,\sigma_k)} = \omega_{(\sigma_k,\sigma_j)}$ et $\omega_{(\sigma_j,\sigma_i)} = \omega_{(\sigma_i,\sigma_j)}$; et, selon l'axiome $\boldsymbol{AxT_R8.4a,}$ $u_{x(\sigma_j,\sigma_i)} = -u_{x(\sigma_i,\sigma_j)}$ et $u_{x(\sigma_j,\sigma_k)} = -u_{x(\sigma_k,\sigma_j)}$, de sorte que l'égalité ci-dessus est :

$$\frac{b_{0(\sigma_k,\sigma_j)}}{a_{0(\sigma_k,\sigma_j)}}\frac{\omega_{(\sigma_k,\sigma_j)}}{u_{x(\sigma_k,\sigma_j)}} = \frac{b_{0(\sigma_i,\sigma_j)}}{a_{0(\sigma_i,\sigma_j)}}\frac{\omega_{(\sigma_i,\sigma_j)}}{u_{x(\sigma_i,\sigma_j)}}.$$

Les termes de chaque côté de cette équation sont toutes des quantités de la particule σ_j par rapport à la particule σ_i (à droite) ou par rapport à la particule σ_k (à gauche). On en conclut les termes de chaque côté de l'équation doivent être indépendants des particules σ_i et σ_k et doivent être propres à la particule σ_j. Posons donc :

$$\frac{b_{0(\sigma_k,\sigma_j)}}{a_{0(\sigma_k,\sigma_j)}}\frac{\omega_{(\sigma_k,\sigma_j)}}{u_{x(\sigma_k,\sigma_j)}} = K_{(\sigma_j)}.$$

ce qui donne :

$$b_{0(\sigma_k,\sigma_j)} = K_{(\sigma_j)} \frac{u_{x(\sigma_k,\sigma_j)}}{\omega_{(\sigma_k,\sigma_j)}} \, a_{0(\sigma_k,\sigma_j)}. \blacksquare$$

Lemme $\boldsymbol{LeT_R 5.2}$. La constante $K_{(\sigma_j)}$ est donnée par $K_{(\sigma_j)} = \omega_{(\sigma_k,\sigma_j)}\omega_{(\sigma_j,\sigma_i)}/\varpi^2$, où ϖ est une constante invariante.

Preuve. Compte tenu du lemme $\boldsymbol{LeT_R 5.1}$, l'équation de composition de la quantité $u_{x(\sigma_k,\sigma_i)}$ est :

$$u_{x(\sigma_k,\sigma_i)} = \frac{u_{x(\sigma_k,\sigma_j)} + u_{x(\sigma_j,\sigma_i)}}{1 + K_{(\sigma_j)} \frac{u_{x(\sigma_k,\sigma_j)}}{\omega_{(\sigma_k,\sigma_j)}} \frac{u_{x(\sigma_j,\sigma_i)}}{\omega_{(\sigma_j,\sigma_i)}}}$$

On peut déterminer $K_{(\sigma_j)}$ à l'aide du fait que la courbe de l'équation de la composition de la quantité $u_{x(\sigma_k,\sigma_i)}$ coupe la droite $u_{x(\sigma_k,\sigma_i)} = u_{x(\sigma_j,\sigma_i)}$ à deux points, c'est-à-dire que la quantité composée $u_{x(\sigma_k,\sigma_i)}$ est égale à une des quantité qui la compose, en l'occurrence, $u_{x(\sigma_j,\sigma_i)}$, et ce, quel que soit la quantité $u_{x(\sigma_k,\sigma_j)}$. Évidemment, si la quantité $u_{(\sigma_k,\sigma_j)}$ est nulle ($u_{(\sigma_k,\sigma_j)} = 0$), on obtient trivialement l'égalité des quantités $u_{x(\sigma_k,\sigma_i)}$ et $u_{x(\sigma_j,\sigma_i)}$ ($u_{x(\sigma_k,\sigma_i)} = u_{x(\sigma_j,\sigma_i)}$); mais notre théorie de la relativité permet l'égalité des quantités $u_{x(\sigma_k,\sigma_i)}$ et $u_{x(\sigma_j,\sigma_i)}$ même si la quantité $u_{x(\sigma_k,\sigma_j)}$ n'est pas nulle.

En posant que $u_{x(\sigma_k,\sigma_i)} = u_{x(\sigma_j,\sigma_i)} = +\varpi$ dans l'équation de transformation des quantités $u_{x(\sigma_k,\sigma_j)}$ et $u_{x(\sigma_j,\sigma_i)}$, on obtient :

$$\varpi = \frac{u_{x(\sigma_k,\sigma_j)} + \varpi}{1 + K_{(\sigma_j)} \frac{u_{x(\sigma_k,\sigma_j)}}{\omega_{(\sigma_k,\sigma_j)}} \frac{\varpi}{\omega_{(\sigma_j,\sigma_i)}}}.$$

En simplifiant, on conclut que la constante $K_{(\sigma_j)}$est donnée par $K_{(\sigma_j)} = \omega_{(\sigma_k,\sigma_j)}\omega_{(\sigma_j,\sigma_i)}/\varpi^2$. ■

Lemme $\boldsymbol{LeT_R 5.3}$. Pour toutes particules σ_i, σ_j et σ_k, la variable $\omega_{(\sigma_j,\sigma_i)}$ est une constante invariante :

$$\omega_{(\sigma_j,\sigma_i)} = \omega_{(\sigma_j,\sigma_k)} = \omega.$$

Preuve. Selon le lemme $\boldsymbol{LeT_R 5.2}$, le produit $K_{(\sigma_j)}\varpi^2$ est constant par rapport à toutes particules de référence σ_i, le produit $\omega_{(\sigma_k,\sigma_j)}\omega_{(\sigma_j,\sigma_i)}$ doit lui aussi être constant pour toutes particules. Or, en tenant compte de l'axiome $\boldsymbol{AxT_R 8.3}$, on obtient $\omega_{(\sigma_k,\sigma_j)}\omega_{(\sigma_j,\sigma_i)} = \omega_{(\sigma_k,\sigma_j)}\omega_{(\sigma_i,\sigma_j)} = \omega_{(\sigma_j,\sigma_k)}\omega_{(\sigma_j,\sigma_i)}$, c'est-à-dire que le produit $\omega_{(\sigma_k,\sigma_j)}\omega_{(\sigma_j,\sigma_i)}$ est indépendant des particules σ_i, σ_j et σ_k et est constant pour toutes particules σ_j de référence. On en conclut que $\omega_{(\sigma_j,\sigma_k)}$ et $\omega_{(\sigma_j,\sigma_i)}$ sont des constantes invariantes que l'on peut écrire tout simplement ω. ■

On conclut alors que la constante $K_{(\sigma_j)}$ est donnée par $K_{(\sigma_j)} = \omega^2/\varpi^2$ et que la constante $b_{0(\sigma_k,\sigma_j)}$ est :

$$b_{0(\sigma_k,\sigma_j)} = \omega \frac{u_{x(\sigma_k,\sigma_j)}}{\varpi^2} a_{0(\sigma_k,\sigma_j)}. \blacksquare$$

Les équations de composition sont, après simplification :

$$q_{(\sigma_k,\sigma_i)} = a_{0(\sigma_k,\sigma_j)} q_{(\sigma_j,\sigma_i)} \left[1 + \frac{u_{x(\sigma_k,\sigma_j)}}{\varpi^2} u_{x(\sigma_j,\sigma_i)}\right],$$
$$q_{(\sigma_k,\sigma_i)} u_{x(\sigma_k,\sigma_i)} = a_{0(\sigma_k,\sigma_j)} q_{(\sigma_j,\sigma_i)} \left[u_{x(\sigma_k,\sigma_j)} + u_{x(\sigma_j,\sigma_i)}\right].$$

On remarque que le terme ω n'apparaît plus dans les équations de composition.

Il nous est maintenant possible de déterminer $a_{0(\sigma_k,\sigma_j)}$.

Théorème ThT_R6. Le coefficient $a_{0(\sigma_j,\sigma_i)}$ est donné par :

$$a_{0(\sigma_k,\sigma_j)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u_{x(\sigma_k,\sigma_j)}^2}{\varpi^2}}}.$$

Preuve. La preuve repose sur les deux lemmes suivants.

Lemme LeT_R6.1. Le coefficient $a_{0(\sigma_k,\sigma_j)}$ est donné par :

$$a_{0(\sigma_k,\sigma_j)} = \frac{1}{a_{0(\sigma_j,\sigma_k)}\left(1 - \frac{u_{x(\sigma_j,\sigma_k)}^2}{\varpi^2}\right)}.$$

Preuve. À partir des équations de composition pour les quantités $q_{(\sigma_k,\sigma_i)}$ et $q_{(\sigma_k,\sigma_i)} u_{x(\sigma_k,\sigma_i)}$ que nous avons obtenues :

$$q_{(\sigma_k,\sigma_i)} = a_{0(\sigma_k,\sigma_j)} q_{(\sigma_j,\sigma_i)} \left[1 + \frac{u_{x(\sigma_k,\sigma_j)}}{\varpi^2} u_{x(\sigma_j,\sigma_i)}\right],$$
$$q_{(\sigma_k,\sigma_i)} u_{x(\sigma_k,\sigma_i)} = a_{0(\sigma_k,\sigma_j)} q_{(\sigma_j,\sigma_i)} \left[u_{x(\sigma_k,\sigma_j)} + u_{x(\sigma_j,\sigma_i)}\right].$$

on peut obtenir les équations de composition inverses pour la composition des quantités $q_{(\sigma_j\ ,\sigma_i)}$ et $q_{(\sigma_j,\sigma_i)}u_{x(\sigma_j,\sigma_i)}$ selon deux méthodes.

Permutons d'abord les indices k et j dans les équations $q_{(\sigma_k,\sigma_i)}$ et $q_{(\sigma_k,\sigma_i)}u_{x(\sigma_k,\sigma_i)}$:

$$q_{(\sigma_j\ ,\sigma_i)} = a_{0(\sigma_j,\sigma_k)}q_{(\sigma_k,\sigma_i)}\left[1 + \frac{u_{x(\sigma_j,\sigma_k)}}{\varpi^2}u_{x(\sigma_k,\sigma_i)}\right],$$

$$q_{(\sigma_j,\sigma_i)}u_{x(\sigma_j,\sigma_i)} = a_{0(\sigma_j,\sigma_k)}q_{(\sigma_k,\sigma_i)}\left[u_{x(\sigma_j,\sigma_k)} + u_{x(\sigma_k,\sigma_i)}\right],$$

ce qui nous donne effectivement les équations de composition des quantités $q_{(\sigma_j\ ,\sigma_i)}$ et $q_{(\sigma_j,\sigma_i)}u_{x(\sigma_j,\sigma_i)}$.

On peut aussi obtenir algébriquement ces équations pour les quantités $q_{(\sigma_j,\sigma_i)}\ et\, q_{(\sigma_j,\sigma_i)}u_{x(\sigma_j,\sigma_i)}$ à partir des équations pour $q_{(\sigma_k,\sigma_i)}$ et$q_{(\sigma_k,\sigma_i)}u_{x(\sigma_k,\sigma_i)}$.

Réécrivons d'abord les équations de composition des quantités $q_{(\sigma_k,\sigma_i)}$ et $q_{(\sigma_k,\sigma_i)}u_{x(\sigma_k,\sigma_i)}$ sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} q_{(\sigma_k,\sigma_i)} &= a_{0(\sigma_k,\sigma_j)} \left[q_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right] + a_{0(\sigma_k,\sigma_j)}\frac{u_{(\sigma_k,\sigma_j)}}{\varpi^2}\left[q_{(\sigma_j,\sigma_i)}u_{x(\sigma_j,\sigma_i)}\right], \\ q_{(\sigma_k,\sigma_i)}u_{x(\sigma_k,\sigma_i)} &= a_{0(\sigma_k,\sigma_j)}u_{x(\sigma_k,\sigma_j)}\left[q_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right] + a_{0(\sigma_k,\sigma_j)}\left[q_{(\sigma_j,\sigma_i)}u_{x(\sigma_j,\sigma_i)}\right]. \end{aligned}$$

Isolons la variable $q_{(\sigma_j,\sigma_i)}$ dans la première équation :

$$q_{(\sigma_j,\sigma_i)} = \frac{1}{a_{0(\sigma_k,\sigma_j)}}q_{(\sigma_k,\sigma_i)} - \frac{u_{x(\sigma_k,\sigma_j)}}{\varpi^2}\left[q_{(\sigma_j,\sigma_i)}u_{x(\sigma_j,\sigma_i)}\right],$$

et substituons dans la deuxième équation;

$$q_{(\sigma_k,\sigma_i)}u_{x(\sigma_k,\sigma_i)} = a_{0(\sigma_k,\sigma_j)}u_{x(\sigma_k,\sigma_j)}\left[\frac{1}{a_{0(\sigma_k,\sigma_j)}}q_{(\sigma_k,\sigma_i)} - \frac{u_{x(\sigma_k,\sigma_j)}}{\varpi^2}\left[q_{(\sigma_j,\sigma_i)}u_{x(\sigma_j,\sigma_i)}\right]\right]$$
$$+ a_{0(\sigma_k,\sigma_j)}\left[q_{(\sigma_j,\sigma_i)}u_{x(\sigma_j,\sigma_i)}\right].$$

Après simplification, on obtient :

$$q_{(\sigma_k,\sigma_i)}u_{x(\sigma_k,\sigma_i)} = u_{(\sigma_k,\sigma_j)}q_{(\sigma_k,\sigma_i)} + a_{0(\sigma_k,\sigma_j)}\left(1 - \frac{u^2_{x(\sigma_k,\sigma_j)}}{\varpi^2}\right)\left[q_{(\sigma_j,\sigma_i)}u_{x(\sigma_j,\sigma_i)}\right].$$

On peut maintenant isoler la variable $q_{(\sigma_j,\sigma_i)}u_{x(\sigma_j,\sigma_i)}$:

$$q_{(\sigma_j,\sigma_i)}u_{x(\sigma_j,\sigma_i)} = \frac{1}{a_{0(\sigma_k,\sigma_j)}\left(1 - \frac{u^2_{x(\sigma_k,\sigma_j)}}{\varpi^2}\right)} q_{(\sigma_k,\sigma_i)}\left[u_{x(\sigma_k,\sigma_i)} - u_{x(\sigma_k,\sigma_j)}\right].$$

Selon l'axiome $\boldsymbol{AxT_R 8.4a}$, $u_{(\sigma_k,\sigma_j)} = -u_{(\sigma_j,\sigma_k)}$, ce qui donne :

$$q_{(\sigma_j,\sigma_i)}u_{x(\sigma_j,\sigma_i)} = \frac{1}{a_{0(\sigma_k,\sigma_j)}\left(1 - \frac{u^2_{x(\sigma_j,\sigma_k)}}{\varpi^2}\right)} q_{(\sigma_k,\sigma_i)}\left[u_{x(\sigma_k,\sigma_i)} + u_{x(\sigma_j,\sigma_k)}\right].$$

En isolant cette fois la quantité $q_{(\sigma_j,\sigma_i)}u_{x(\sigma_j,\sigma_i)}$ dans l'équation pour $q_{(\sigma_k,\sigma_i)}$ et en substituant dans l'équation pour $q_{(\sigma_k,\sigma_i)}u_{x(\sigma_k,\sigma_i)}$, et en isolant la variable $q_{(\sigma_j,\sigma_i)}$, on obtient :

$$q_{(\sigma_j\ ,\sigma_i)} = \frac{1}{a_{0(\sigma_k,\sigma_j)}\left(1 - \frac{u^2_{x(\sigma_k,\sigma_j)}}{\varpi^2}\right)} q_{(\sigma_j,\sigma_i)}\left[1 - \frac{u_{x(\sigma_k,\sigma_j)}}{\varpi^2}u_{x(\sigma_k,\sigma_i)}\right]$$

Toujours selon l'axiome $\boldsymbol{AxT_R 8.4a}$, $u_{(\sigma_k,\sigma_j)} = -u_{(\sigma_j,\sigma_k)}$, on obtient :

$$q_{(\sigma_j\ ,\sigma_i)} = \frac{1}{a_{0(\sigma_k,\sigma_j)}\left(1 - \frac{u^2_{x(\sigma_j,\sigma_k)}}{\varpi^2}\right)} q_{(\sigma_j,\sigma_i)}\left[1 + \frac{u_{x(\sigma_j,\sigma_k)}}{\varpi^2}u_{x(\sigma_k,\sigma_i)}\right].$$

En comparant les équations pour $q_{(\sigma_j\ ,\sigma_i)}$ et $q_{(\sigma_j,\sigma_i)}u_{x(\sigma_j,\sigma_i)}$ que nous venons d'obtenir algébriquement avec celles que nous avions obtenu en permutant les indices k et j dans les équations pour $q_{(\sigma_k,\sigma_i)}$ et $q_{(\sigma_k,\sigma_i)}u_{x(\sigma_k,\sigma_i)}$, on conclut que :

$$a_{0(\sigma_j,\sigma_k)} = \frac{1}{a_{0(\sigma_k,\sigma_j)}\left(1 - \frac{u^2_{x(\sigma_j,\sigma_k)}}{\varpi^2}\right)},$$

soit :

$$a_{0(\sigma_k,\sigma_j)} = \frac{1}{a_{0(\sigma_j,\sigma_k)}\left(1 - \frac{u^2_{x(\sigma_j,\sigma_k)}}{\varpi^2}\right)}. \blacksquare$$

Lemme $\boldsymbol{LeT_R 6.2}$. Le coefficient $a_{0(\sigma_j,\sigma_k)}$ est donné par :

$$a_{0(\sigma_j,\sigma_k)} = \frac{1}{a_{0(\sigma_k,\sigma_j)}\left(1 - \frac{u^2_{x(\sigma_k,\sigma_j)}}{\varpi^2}\right)}.$$

Preuve. La preuve de ce lemme est similaire à celle du lemme précédent.

Obtenons cette fois les équations pour les quantités $q_{(\sigma_k,\sigma_i)}$ et$q_{(\sigma_k,\sigma_i)}u_{x(\sigma_k,\sigma_i)}$ à partir des équations pour les quantités $q_{(\sigma_j\ ,\sigma_i)}$ et $q_{(\sigma_j,\sigma_i)}u_{x(\sigma_j,\sigma_i)}$:

$$\begin{aligned} q_{(\sigma_j,\sigma_i)} &= a_{0(\sigma_j,\sigma_k)} \left[q_{(\sigma_k,\sigma_i)}\right] + a_{0(\sigma_j,\sigma_k)}\frac{u_{x(\sigma_j,\sigma_k)}}{\varpi^2}\left[q_{(\sigma_k,\sigma_i)}u_{x(\sigma_k,\sigma_i)}\right], \\ q_{(\sigma_j,\sigma_i)}u_{x(\sigma_j,\sigma_i)} &= a_{0(\sigma_j,\sigma_k)}u_{\sigma_j,\sigma_k} \left[q_{(\sigma_k,\sigma_i)}\right] + a_{0(\sigma_j,\sigma_k)} \left[q_{(\sigma_k,\sigma_i)}u_{x(\sigma_k,\sigma_i)}\right]. \end{aligned}$$

En isolant $q_{(\sigma_k,\sigma_i)}u_{x(\sigma_k,\sigma_i)}$ dans la première équation, et en substituant dans la deuxième et isolant $q_{(\sigma_k,\sigma_i)}$, on obtient :

$$q_{(\sigma_k,\sigma_i)} = \frac{1}{a_{0(\sigma_j,\sigma_k)}\left(1 - \frac{u^2_{x(\sigma_j,\sigma_k)}}{\varpi^2}\right)} q_{(\sigma_j,\sigma_i)}\left[1 - \frac{u_{x(\sigma_j,\sigma_k)}}{\varpi^2}u_{x(\sigma_j,\sigma_i)}\right].$$

Selon l'axiome $\boldsymbol{AxT_R 8.4a}$, $u_{(\sigma_j,\sigma_k)} = -u_{(\sigma_k,\sigma_j)}$, on obtient :

$$q_{(\sigma_k,\sigma_i)} = \frac{1}{a_{0(\sigma_j,\sigma_k)}\left(1 - \frac{u^2_{x(\sigma_k,\sigma_j)}}{\varpi^2}\right)} q_{(\sigma_j,\sigma_i)}\left[1 + \frac{u_{(\sigma_k,\sigma_j)}}{\varpi^2}u_{x(\sigma_j,\sigma_i)}\right].$$

En isolant cette fois $q_{(\sigma_k,\sigma_i)}$ dans la première équation, et en substituant dans la deuxième et isolant $q_{(\sigma_k,\sigma_i)}u_{x(\sigma_k,\sigma_i)}$, on obtient :

$$q_{(\sigma_k,\sigma_i)}u_{x(\sigma_k,\sigma_i)} = \frac{1}{a_{0(\sigma_j,\sigma_k)}\left(1 - \frac{u^2_{x(\sigma_j,\sigma_k)}}{\varpi^2}\right)} q_{(\sigma_j,\sigma_i)}\left[-u_{x(\sigma_j,\sigma_k)} + u_{x(\sigma_j,\sigma_i)}\right].$$

Finalement, toujours selon l'axiome $\boldsymbol{AxT_R 8.4a}$, $u_{(\sigma_j,\sigma_k)} = -u_{(\sigma_k,\sigma_j)}$, on obtient :

$$q_{(\sigma_k,\sigma_i)}u_{x(\sigma_k,\sigma_i)} = \frac{1}{a_{0(\sigma_j,\sigma_k)}\left(1-\frac{u^2_{x(\sigma_k,\sigma_j)}}{\varpi^2}\right)}q_{(\sigma_j,\sigma_i)}\left[u_{x(\sigma_k,\sigma_j)} + u_{x(\sigma_j,\sigma_i)}\right].$$

En comparant les équations pour $q_{(\sigma_k,\sigma_i)}$ et $q_{(\sigma_k,\sigma_i)}u_{x(\sigma_k,\sigma_i)}$ que nous venons d'obtenir algébriquement avec les équations que nous avions déjà obtenues :

$$q_{(\sigma_k,\sigma_i)} = a_{0(\sigma_k,\sigma_j)}q_{(\sigma_j,\sigma_i)}\left[1+\frac{u_{x(\sigma_k,\sigma_j)}}{\varpi^2}u_{x(\sigma_j,\sigma_i)}\right],$$
$$q_{(\sigma_k,\sigma_i)}u_{x(\sigma_k,\sigma_i)} = a_{0(\sigma_k,\sigma_j)}q_{(\sigma_j,\sigma_i)}\left[u_{x(\sigma_k,\sigma_j)} + u_{x(\sigma_j,\sigma_i)}\right],$$

on conclut que :

$$a_{0(\sigma_k,\sigma_j)} = \frac{1}{a_{0(\sigma_j,\sigma_k)}\left(1-\frac{u^2_{x(\sigma_k,\sigma_j)}}{\varpi^2}\right)},$$

soit :

$$a_{0(\sigma_j,\sigma_k)} = \frac{1}{a_{0(\sigma_k,\sigma_j)}\left(1-\frac{u^2_{x(\sigma_k,\sigma_j)}}{\varpi^2}\right)}. \blacksquare$$

Nous pouvons maintenant prouver le théorème $\boldsymbol{ThT_R6}$.

En multipliant ensemble les deux équations obtenues dans les lemmes $\boldsymbol{LeT_R6.1}$ et $\boldsymbol{LeT_R6.2}$ on obtient :

$$a_{0(\sigma_k,\sigma_j)}a_{0(\sigma_j,\sigma_k)} = \frac{1}{a_{0(\sigma_j,\sigma_k)}\left(1-\frac{u^2_{x(\sigma_j,\sigma_k)}}{\varpi^2}\right)}\frac{1}{a_{0(\sigma_k,\sigma_j)}\left(1-\frac{u^2_{x(\sigma_k,\sigma_j)}}{\varpi^2}\right)},$$

c'est-à-dire :

$$a^2_{0(\sigma_k,\sigma_j)}a^2_{0(\sigma_j,\sigma_k)} = \frac{1}{\left(1-\frac{u^2_{x(\sigma_k,\sigma_j)}}{\varpi^2}\right)}\frac{1}{\left(1-\frac{u^2_{x(\sigma_j,\sigma_k)}}{\varpi^2}\right)}.$$

Or, selon l'axiome $\boldsymbol{AxT_R8.4a}$, $u_{(\sigma_k,\sigma_j)} = -u_{(\sigma_j,\sigma_k)}$. On en conclut que le produit $a^2_{0(\sigma_k,\sigma_j)}a^2_{0(\sigma_j,\sigma_k)}$ est indépendant de l'ordre des indices k et j; en conséquence :

$$a_{0(\sigma_j,\sigma_k)} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2_{x(\sigma_j,\sigma_k)}}{\varpi^2}}}.$$

Selon l'axiome $\boldsymbol{AxT_R 8.2}$, les quantités $q_{(\sigma_j,\sigma_i)}$ et $q_{(\sigma_k,\sigma_i)}$ ont le même signe, ce qui implique que $a_{0(\sigma_j,\sigma_k)}$ doit être positif. Nous obtenons donc :

$$a_{0(\sigma_j,\sigma_k)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2_{x(\sigma_j,\sigma_k)}}{\varpi^2}}}. \blacksquare$$

Il ne reste plus qu'à déterminer les coefficients $c_{2(\sigma_k,\sigma_j)}$ et $d_{3(\sigma_k,\sigma_j)}$.

$\boldsymbol{Th\acute{e}or\grave{e}me\ ThT_R 7}$. Les coefficients $c_{2(\sigma_k,\sigma_j)}$ et $d_{3(\sigma_k,\sigma_j)}$ sont tous deux égaux à 1 ($c_{2(\sigma_k,\sigma_j)} = d_{3(\sigma_k,\sigma_j)} = 1$).

Preuve. Rappelons que les équations de la loi de composition pour $q_{(\sigma_i,\sigma_k)}u_{y(\sigma_k,\sigma_i)}$ et $q_{(\sigma_i,\sigma_k)}u_{z(\sigma_k,\sigma_i)}$ sont :

$$q_{(\sigma_k,\sigma_i)}u_{y(\sigma_k,\sigma_i)} = q_{(\sigma_j,\sigma_i)}c_{2(\sigma_k,\sigma_j)}u_{y(\sigma_j,\sigma_i)},$$
$$q_{(\sigma_k,\sigma_i)}u_{z(\sigma_k,\sigma_i)} = q_{(\sigma_j,\sigma_i)}d_{3(\sigma_k,\sigma_j)}u_{z(\sigma_j,\sigma_i)}.$$

À partir de ces équations, on peut obtenir les équations inverses par de la simple algèbre :

$$q_{y(\sigma_j,\sigma_i)}u_{y(\sigma_j,\sigma_i)} = \frac{1}{c_{2(\sigma_k,\sigma_j)}}\ q_{y(\sigma_k,\sigma_i)}u_{y(\sigma_k,\sigma_i)},$$
$$q_{z(\sigma_j,\sigma_i)}u_{z(\sigma_j,\sigma_i)} = \frac{1}{d_{3(\sigma_k,\sigma_j)}}\ q_{z(\sigma_k,\sigma_i)}u_{z(\sigma_k,\sigma_i)};$$

ou en permutant les indices j et k :

$$q_{(\sigma_j,\sigma_i)}u_{y(\sigma_j,\sigma_i)} = q_{(\sigma_k,\sigma_i)}c_{2(\sigma_j,\sigma_k)}u_{y(\sigma_j,\sigma_i)},$$
$$q_{(\sigma_j,\sigma_i)}u_{z(\sigma_j,\sigma_i)} = q_{(\sigma_k,\sigma_i)}d_{3(\sigma_j,\sigma_k)}u_{z(\sigma_j,\sigma_i)}.$$

De ces deux systèmes d'équations, on obtient :

$$c_{2(\sigma_k,\sigma_j)}c_{2(\sigma_j,\sigma_k)} = 1 \quad ; \quad d_{3(\sigma_k,\sigma_j)}d_{3(\sigma_j,\sigma_k)} = 1.$$

Selon l'axiome $\boldsymbol{AxT_R 7.3}$, chacun de ces coefficients doit être positif, sinon selon les équations ci-dessus :

$$q_{(\sigma_k,\sigma_i)}u_{y(\sigma_k,\sigma_i)} = q_{(\sigma_j,\sigma_i)}c_{2(\sigma_k,\sigma_j)}u_{y(\sigma_j,\sigma_i)},$$
$$q_{(\sigma_j,\sigma_i)}u_{y(\sigma_j,\sigma_i)} = q_{(\sigma_k,\sigma_i)}c_{2(\sigma_j,\sigma_k)}u_{y(\sigma_j,\sigma_i)},$$

et

$$q_{(\sigma_k,\sigma_i)}u_{z(\sigma_k,\sigma_i)} = q_{(\sigma_j,\sigma_i)}d_{3(\sigma_k,\sigma_j)}u_{z(\sigma_j,\sigma_i)},$$
$$q_{(\sigma_j,\sigma_i)}u_{z(\sigma_j,\sigma_i)} = q_{(\sigma_k,\sigma_i)}d_{3(\sigma_j,\sigma_k)}u_{z(\sigma_j,\sigma_i)},$$

on pourrait conclure que les axes correspondants seraient inversés. On en conclut donc que :

$$c_{2(\sigma_k,\sigma_j)} = d_{3(\sigma_k,\sigma_j)} = 1. \blacksquare$$

On en conclut que les équations de la loi de composition des quantités $Q_{(\sigma_k,\sigma_j)}$ et $Q_{(\sigma_j,\sigma_i)}$ sont données par :

$$q_{(\sigma_k,\sigma_i)} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2_{x(\sigma_k,\sigma_j)}}{\varpi^2}}}q_{(\sigma_j,\sigma_i)}\left[1+\frac{u_{x(\sigma_k,\sigma_j)}u_{x(\sigma_j,\sigma_i)}}{\varpi^2}\right],$$
$$q_{(\sigma_k,\sigma_i)}u_{x(\sigma_k,\sigma_i)} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2_{(\sigma_k,\sigma_j)}}{\varpi^2}}}q_{(\sigma_j,\sigma_i)}\left[u_{x(\sigma_k,\sigma_j)}+u_{x(\sigma_j,\sigma_i)}\right],$$
$$q_{(\sigma_k,\sigma_i)}u_{y(\sigma_k,\sigma_i)} = q_{(\sigma_j,\sigma_i)}u_{y(\sigma_j,\sigma_i)},$$
$$q_{(\sigma_k,\sigma_i)}u_{z(\sigma_k,\sigma_i)} = q_{(\sigma_j,\sigma_i)}u_{z(\sigma_j,\sigma_i)}.$$

Ainsi, les équations de composition de la quantité $Q_{(\sigma_j,\sigma_i)}$ sont déterminées à la constante ϖ près qui représente une constante invariante.

Pour terminer cette partie, nous allons introduire la notion de valeur propre $q_{0(\sigma_i)}$ de la particule σ_i.

$\boldsymbol{Th\acute{e}or\grave{e}me\ ThT_R 8}$. La quantité propre $q_{0(\sigma_i)}$ de la particule σ_i est donnée, pour toutes particules $\sigma_j \in \Sigma$ par :

$$q_{0(\sigma_i)} = q_{(\sigma_j,\sigma_i)}\sqrt{1-\frac{u^2_{x(\sigma_j,\sigma_i)}}{\varpi^2}}.$$

Preuve. La preuve du théorème repose sur le lemme suivant.

Lemme $\boldsymbol{LeT_R 8.1}$. La composition des quantités $a_{0(\sigma_k,\sigma_j)}$ et $a_{0(\sigma_j,\sigma_i)}$ est donnée par :

$$a_{0(\sigma_k,\sigma_i)} = a_{0(\sigma_k,\sigma_j)} a_{0(\sigma_j,\sigma_i)} \left[1 + \frac{u_{x(\sigma_k,\sigma_j)} u_{x(\sigma_j,\sigma_i)}}{\varpi^2}\right].$$

Preuve. La quantité $q_{(\sigma_j,\sigma_i)}$ pouvant représenter toute quantité scalaire relative, nous pouvons poser que $q_{(\sigma_j,\sigma_i)} = a_{0(\sigma_j,\sigma_i)}$, de sorte que $q_{(\sigma_k,\sigma_j)} = a_{0(\sigma_k,\sigma_j)}$ et $q_{(\sigma_k,\sigma_i)} = a_{0(\sigma_k,\sigma_i)}$ dans l'équation de composition $q_{(\sigma_k,\sigma_i)}$. ■

En ce qui concerne la preuve du théorème, il suffit de combiner les équations de composition des quantités $a_{0(\sigma_k,\sigma_i)}$ (lemme $\boldsymbol{LeT_R 8.1}$) :

$$a_{0(\sigma_k,\sigma_i)} = a_{0(\sigma_k,\sigma_j)} a_{0(\sigma_j,\sigma_i)} \left[1 + \frac{u_{x(\sigma_k,\sigma_j)} u_{x(\sigma_j,\sigma_i)}}{\varpi^2}\right],$$

et $q_{(\sigma_k,\sigma_i)}$:

$$q_{(\sigma_k,\sigma_i)} = a_{0(\sigma_k,\sigma_j)} q_{(\sigma_j,\sigma_i)} \left[1 + \frac{u_{x(\sigma_k,\sigma_j)} u_{x(\sigma_j,\sigma_i)}}{\varpi^2}\right]$$

pour obtenir, en divisant une équation par l'autre :

$$\frac{q_{(\sigma_k,\sigma_i)}}{a_{0(\sigma_k,\sigma_i)}} = \frac{q_{(\sigma_j,\sigma_i)}}{a_{0(\sigma_j,\sigma_i)}}.$$

Il faut remarquer que chaque côté de l'équation exprime une quantité de la particule σ_i par rapport aux particules σ_j (à droite) et σ_k (gauche), d'où nous concluons que chaque côté de l'équation exprime une propriété qui est propre à la particule σ_i et non relative à quelque autre particule :

$$q_{0(\sigma_i)} = \frac{q_{(\sigma_k,\sigma_i)}}{a_{0(\sigma_k,\sigma_i)}} = \frac{q_{(\sigma_j,\sigma_i)}}{a_{0(\sigma_j,\sigma_i)}},$$

d'où :

$$q_{0(\sigma_i)} = q_{(\sigma_j,\sigma_i)} \sqrt{1 - \frac{u^2_{x(\sigma_j,\sigma_i)}}{\varpi^2}}$$

pour toutes particules $\sigma_j \in \Sigma$. ■

La valeur propre $q_{0(\sigma_i)}$ est souvent définie comme étant la valeur de la quantité $q_{(\sigma_j,\sigma_i)}$ lorsque la vitesse de la particule σ_i est nulle par rapport à la particule σ_j. On peut en effet obtenir la valeur propre $q_{0(\sigma_i)}$ par l'équation de transformation :

$$q_{(\sigma_k,\sigma_i)} = a_{0(\sigma_k,\sigma_j)} q_{(\sigma_j,\sigma_i)} \left[1 + \frac{u_{x(\sigma_k,\sigma_j)} u_{x(\sigma_j,\sigma_i)}}{\varpi^2}\right].$$

Nous devons d'abord interpréter les quantités relatives $u_{x(\sigma_j,\sigma_i)}$ et $u_{x(\sigma_k,\sigma_j)}$ respectivement comme la vitesse relative de la particule σ_i par rapport à la particule σ_j, et de la particule σ_j par rapport à la particule σ_k. Ensuite, il faut poser la condition particulière $u_{x(\sigma_j,\sigma_i)} = 0$; on obtient alors :

$$q_{(\sigma_j,\sigma_i)} = q_{(k,\sigma_i)} \sqrt{1 - \frac{u^2_{x(\sigma_k,\sigma_i)}}{\varpi^2}},$$

qui est valide pour toute particule de référence σ_k.

Nous pensons que notre façon de déterminer la valeur au repos est plus générale car elle ne pose la condition particulière $u_{x(\sigma_j,\sigma_i)} = 0$. La valeur propre peut alors plus facilement être comme une propriété de la particule σ_i, indépendamment de sa relation avec quelques particules de référence σ_j.

7. La mécanique

Une théorie de la mécanique possède trois composantes, une cinématique, une dynamique et les lois du mouvement. Les quantités de base de la cinématique sont le temps et la position; celles de la dynamique sont la masse et la quantité de mouvement. Les lois du mouvement permettent de déterminer le mouvement des particules, donc leur position à différents temps, à partir de la quantité de mouvement.

Nous allons présenter une théorie de la mécanique relative. Cette mécanique relative est notre structure de base, commune aux deux mécaniques, classique et relativiste.

7.1 La théorie de la mécanique relative

Un système $\mathbb{T}_M = \langle \mathbb{T}_{RC}, \mathbb{T}_{RD}, f \rangle$ est une *théorie de la mécanique relative de la particule* s'il satisfait les axiomes $\boldsymbol{AxT_M 1}$ à $\boldsymbol{AxT_M 3}$.

$\boldsymbol{Axiome\ AxT_M 1.1}$ (a) $\mathbb{T}_{RC}$ est une théorie de la relativité de la cinématique

(b) $\mathbb{T}_{RC} = \langle \Sigma; R; \mathbb{R}, \mathbb{E}^3, E; \Pi_X^\pi;\ X^\pi, \circ_{X^\pi} \rangle$.

(c) $X^\pi_{(\sigma_j,\sigma_i)} = \left(q^\pi_{X(\sigma_j,\sigma_i)}\omega, q^\pi_{X(\sigma_j,\sigma_i)} \vec{u}^\pi_{X(\sigma_j,\sigma_i)} \right)$ est la position relative de la particule σ_i par rapport à la particule σ_j.

La position relative $X^\pi_{(\sigma_j,\sigma_i)}$ est la quantité de base de la cinématique dont nous devons interpréter les variables $q^\pi_{X(\sigma_j,\sigma_i)}$ et $\vec{u}^\pi_{X(\sigma_j,\sigma_i)}$, ce que font les deux axiomes suivants. La constante ω est, pour l'instant, non interprétée.

$\boldsymbol{Axiome\ AxT_M 1.2}$ $q^\pi_{X(\sigma_j,\sigma_i)}$ représente la variable de temps $t_{(\sigma_j,\sigma_i)}$ de la particule σ_i par rapport à la particule σ_j.

$\boldsymbol{Axiome\ AxT_M 1.3}$. $\vec{u}_{X(\sigma_j,\sigma_i)}$ représente le vecteur vitesse $\vec{v}_{(\sigma_j,\sigma_i)}$ de la particule σ_i par rapport à la particule σ_j.

Nous pouvons maintenant définir le vecteur position $\vec{r}_{(\sigma_j,\sigma_i)}$ d'une particule.

$\boldsymbol{D\acute{e}finition\ D\acute{e}T_M 1}$. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{E}^3$, le vecteur position $\vec{r}_{(\sigma_j,\sigma_i)}$ de la particule σ_j par rapport à la particule σ_i est définie par :

$$\vec{r}_{(\sigma_j,\sigma_i)} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}_{(\sigma_j,\sigma_i)} dt_{(\sigma_j,\sigma_i)}.$$

En conséquence de cette définition, le vecteur position $\vec{r}_{(\sigma_j,\sigma_i)}$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{E}^3$ est donné par :

$$\vec{r}_{(\sigma_j,\sigma_i)} = \int_{t_0}^{t} \vec{v}_{(\sigma_j,\sigma_i)} dt_{(\sigma_j,\sigma_i)},$$
$$\vec{r}_{(\sigma_j,\sigma_i)} = \int_{t_0}^{t} v_{x(\sigma_j,\sigma_i)} dt_{(\sigma_j,\sigma_i)} \vec{e}_{x(\sigma_i)} + \int_{t_0}^{t} v_{y(\sigma_j,\sigma_i)} dt_{(\sigma_j,\sigma_i)} \vec{e}_{y(\sigma_i)} + \int_{t_0}^{t} v_{z(\sigma_j,\sigma_i)} dt_{(\sigma_j,\sigma_i)} \vec{e}_{z(\sigma_i)}.$$
$$\vec{r}_{(\sigma_j,\sigma_i)} = x_{(\sigma_j,\sigma_i)} \vec{e}_{x(\sigma_i)} + y_{(\sigma_j,\sigma_i)} \vec{e}_{y(\sigma_i)} + z_{(\sigma_j,\sigma_i)} \vec{e}_{z(\sigma_i)},$$

où $x_{(\sigma_j,\sigma_i)} = \int_{t_0}^{t} v_{x(\sigma_j,\sigma_i)} dt_{(\sigma_j,\sigma_i)}$, etc.

En tenant compte de ces axiomes et de cette définition, la position relative $X^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}$ de la particule σ_i par rapport à la particule σ_j est donnée par :

$$X^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)} = \left(\omega t_{(\sigma_j,\sigma_i)}, \vec{r}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right).$$

Les équations de la loi de composition $\circ_{X^{\pi}}$ sont :

$$\omega_{(\sigma_j,\sigma_i)} = \omega_{(\sigma_k,\sigma_i)} = \omega_{(\sigma_k,\sigma_j)} = \omega,$$
$$t_{(\sigma_k,\sigma_i)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2_{x(\sigma_k,\sigma_j)}}{\varpi^2}}} \left[t_{(\sigma_j,\sigma_i)} + \frac{v_{x(\sigma_k,\sigma_j)}}{\varpi^2} x_{(\sigma_j,\sigma_i)} \right],$$
$$x_{(\sigma_k,\sigma_i)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2_{x(\sigma_k,\sigma_j)}}{\varpi^2}}} \left[v_{x(\sigma_k,\sigma_j)} t_{(\sigma_j,\sigma_i)} + x_{(\sigma_j,\sigma_i)} \right],$$
$$y_{(\sigma_k,\sigma_i)} = y_{(\sigma_j,\sigma_i)},$$
$$z_{(\sigma_k,\sigma_i)} = z_{(\sigma_j,\sigma_i)}.$$

De plus, nous avons l'équation de transformation de la vitesse :

$$v_{x(\sigma_k,\sigma_i)} = \frac{v_{x(\sigma_k,\sigma_j)} + v_{x(\sigma_j,\sigma_i)}}{1 + \frac{v_{x(\sigma_k,\sigma_j)} v_{x(\sigma_j,\sigma_i)}}{\varpi^2}},$$

et le temps propre $t_{0(\sigma_i)}$ par rapport à la particule σ_i :

$$t_{0(\sigma_i)} = \sqrt{1 - \frac{v^2_{x(\sigma_j,\sigma_i)}}{\varpi^2}}\ t_{(\sigma_j,\sigma_i)}.$$

Rappelons que la constante invariante ϖ avait été introduite en posant que la quantité $u_{x(\sigma_k,\sigma_i)}$ obtenue par la composition des quantités $u_{x(\sigma_j,\sigma_i)}$ et $u_{x(\sigma_k,\sigma_j)}$ était égale à $u_{x(\sigma_j,\sigma_i)}$; nous avions alors posé que cette quantité était égale à ϖ ($u_{x(\sigma_k,\sigma_i)} = u_{x(\sigma_j,\sigma_i)} = \varpi$). En conséquence de l'axiome $\boldsymbol{AxT_M 1.3}$, nous pouvons conclure que ϖ représente une vitesse invariante, c'est-à-dire que si une particule se déplace à la vitesse ϖ par rapport à une autre particule, alors elle se déplace à la vitesse ϖ par rapport à toute autre particule.

Passons maintenant à la quantité relative de la dynamique.

$\boldsymbol{Axiome\ AxT_M 2.1}$ (a) $\mathbb{T}_{RD}$ est une théorie de la relativité de la dynamique.

(b) $\mathbb{T}_{RD} = \langle \Sigma; R; \mathbb{R}, \mathbb{E}^3, E; \Pi_P^\pi, P^\pi, \circ_{P^\pi} \rangle$.

(c) $P^\pi_{(\sigma_j,\sigma_i)} = \left(q^\pi_{P(\sigma_j,\sigma_i)} \omega, q^\pi_{P(\sigma_j,\sigma_i)} \vec{u}^\pi_{P(\sigma_j,\sigma_i)} \right)$ est la quantité de mouvement relative de la particule σ_i par rapport à la particule σ_j.

La quantité relative P^π, que nous appellerons simplement la *quantité de mouvement relative*, est donnée par :

$$P^\pi = \left(\omega q^\pi_{P(\sigma_j,\sigma_i)}, q^\pi_{P(\sigma_j,\sigma_i)} \vec{u}^\pi_{P(\sigma_j,\sigma_i)} \right).$$

Il nous faut maintenant interpréter les quantités relatives $q^\pi_{P(\sigma_j,\sigma_i)}$ et $\vec{u}^\pi_{P(\sigma_j,\sigma_i)}$.

$\boldsymbol{Axiome\ AxT_M 2.2}$ $q^\pi_{P(\sigma_j,\sigma_i)}$ représente l'intervalle la masse $m_{(\sigma_j,\sigma_i)}$ de la particule σ_i par rapport à la particule σ_j.

$\boldsymbol{Axiome\ AxT_M 2.3}$ $\vec{u}^\pi_{P(\sigma_j,\sigma_i)}$ représente le vecteur vitesse $\vec{v}_{(\sigma_j,\sigma_i)}$ de la particule σ_i par rapport à la particule σ_j.

La quantité de mouvement relative est donc :

$$P^\pi = \left(m_{(\sigma_j,\sigma_i)} \omega, m_{(\sigma_j,\sigma_i)} \vec{v}_{(\sigma_j,\sigma_i)} \right).$$

Dans cette quantité relative, la $m_{(\sigma_j,\sigma_i)} \vec{v}_{(\sigma_j,\sigma_i)}$ est le vecteur de la quantité de mouvement.

Définition DéT_M2. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{E}^3$, le vecteur quantité de mouvement $\vec{p}_{(\sigma_j,\sigma_i)}$ de la particule σ_i par rapport à la particule σ_j est définie par :

$$\vec{p}_{(\sigma_j,\sigma_i)} = m_{(\sigma_j,\sigma_i)}\vec{v}_{(\sigma_j,\sigma_i)}.$$

En tenant compte de ces axiomes, la quantité de mouvement relative $P^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}$ est donnée par :

$$P^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)} = \left(m_{(\sigma_j,\sigma_i)}\omega, \vec{p}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right).$$

Les équations de la loi de composition $\circ_{P^\pi}$ sont :

$$m_{(\sigma_k,\sigma_i)} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2_{x(\sigma_k,\sigma_j)}}{\varpi^2}}}\left[m_{(\sigma_j,\sigma_i)} + \frac{v_{x(\sigma_k,\sigma_j)}}{\varpi^2}p_{x(\sigma_j,\sigma_i)}\right],$$

$$p_{x(\sigma_k,\sigma_i)} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2_{x(\sigma_k,\sigma_j)}}{\varpi^2}}}\left[v_{x(\sigma_k,\sigma_j)}m_{(\sigma_j,\sigma_i)} + p_{x(\sigma_j,\sigma_i)}\right],$$

$$p_{y(\sigma_k,\sigma_i)} = p_{y(\sigma_j,\sigma_i)},$$

$$p_{z(\sigma_k,\sigma_i)} = p_{z(\sigma_j,\sigma_i)}.$$

Enfin, la masse propre, dénotée $m_{0(\sigma_i)}$ est donnée par :

$$m_{0(\sigma_i)} = \sqrt{1-\frac{v^2_{x(\sigma_j,\sigma_i)}}{\varpi^2}}\, m_{D(\sigma_j,\sigma_i)}.$$

En conséquence, le vecteur quantité de mouvement $\vec{p}_{(\sigma_j,\sigma_i)}$ peut être écrite sous la forme :

$$\vec{p}_{(\sigma_j,\sigma_i)} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2_{x(\sigma_j,\sigma_i)}}{\varpi^2}}} m_{0(\sigma_i)}\vec{v}_{(\sigma_j,\sigma_i)}.$$

Nous allons maintenant présenter les axiomes qui énoncent les lois du mouvement de Newton. Ces axiomes s'inspirent largement du système axiomatique de la mécanique classique de Bunge (1967) que nous avons déjà présenté.

Le premier axiome pose la formulation de Newton-Euler de la deuxième loi de Newton selon lequel la force est la dérivée de la quantité de mouvement par rapport au temps $t_{(\sigma_j,\sigma_i)}$; seulement, dans notre théorie de la mécanique relative, la quantité de mouvement est la quantité de mouvement relative, $P^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}$, et le temps, le temps propre,

$$t_{0(\sigma_i)} = \sqrt{1 - \frac{v^2_{x(\sigma_k,\sigma_j)}}{\varpi^2}}\, dt_{(\sigma_j,\sigma_i)}.$$

Axiome $\boldsymbol{AxT_M 3.1}$. (a) Pour toute particule $\sigma_i \in \Sigma$, il existe une particule $\sigma_j \in \Sigma$ tel que :

$$F^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)} = \frac{dP^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}}{dt_{0(\sigma_i)}}.$$

(b) $F^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}$ est la force relative exercée sur la particule σ_i par rapport à la particule σ_j.

La force relative $F^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}$ est donc donnée par :

$$F^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)} = \frac{d\left(m_{(\sigma_j,\sigma_i)}\omega, \vec{p}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right)}{dt_{0(\sigma_i)}},$$

$$F^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)} = \left(\frac{dm_{(\sigma_j,\sigma_i)}}{dt_{0(\sigma_i)}}\omega, \frac{d\,\vec{p}_{(\sigma_j,\sigma_i)}}{dt_{0(\sigma_i)}}\right),$$

$$F^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2_{x(\sigma_j,\sigma_i)}}{\varpi^2}}}\left(\frac{dm_{(\sigma_j,\sigma_i)}}{dt_{(\sigma_j,\sigma_i)}}\omega, \frac{d\,\vec{p}_{(\sigma_j,\sigma_i)}}{dt_{(\sigma_j,\sigma_i)}}\right).$$

Nous allons maintenant introduire les axiomes pour interpréter le terme $\frac{d\,\vec{p}_{(\sigma_j,\sigma_i)}}{dt_{0(\sigma_i)}}$ comme le vecteur force dans l'espace vectoriel euclidien.

Axiome $\boldsymbol{AxT_M 3.2}$ (a) $\vec{f}^{\,n}$ est une fonction vectorielle $\Sigma \times \Sigma \times \Sigma \to \mathbb{E}^3$.

(b) $\vec{f}^{\,n}_{(\sigma_j,\sigma_k \to \sigma_i)}$ représente la $n^{\text{ème}}$ force ($n \in \mathbb{N}$) exercée par la particule σ_k sur la particule σ_i, par rapport à la particule σ_j.

Il faut remarquer ici que la fonction force, $\vec{f}^{\,n}$, n'est pas une quantité relative au sens où nous l'entendons.

$\boldsymbol{D\acute{e}finition\ D\acute{e}T_M 3}$. La force résultante $\vec{F}_{(\sigma_j,\sigma_i)}$ exercée sur la particule sur la particule σ_i, par rapport à la particule σ_j est définie par :

$$\vec{F}_{(\sigma_j,\sigma_i)} = \sum\nolimits_l \vec{f}^{\,l}_{(\sigma_j,\sigma_k\rightarrow\sigma_i)} + \sum\nolimits_m \vec{f}^{\,m}_{(\sigma_j,\sigma_l\rightarrow\sigma_i)} + \sum\nolimits_n \vec{f}^{\,n}_{(\sigma_j,\sigma_m\rightarrow\sigma_i)} \dots .$$

$\boldsymbol{Axiome\ AxT_M 3.3}$ Pour toute particule $\sigma_i \in \Sigma$, il existe une particule $\sigma_j \in \Sigma$ tel que :

$$\vec{F}_{(\sigma_j,\sigma_i)} = \frac{d\vec{p}_{(\sigma_j,\sigma_i)}}{dt_{(\sigma_j,\sigma_i)}}.$$

Ainsi, le vecteur force exercée sur la particule σ_i par rapport à la particule σ_j est la dérivée du vecteur quantité de mouvement de la particule σ_i par rapport à la particule σ_j par rapport au temps de la particule σ_i par rapport à la particule σ_j, et non par rapport au temps propre de la particule σ_i comme pour la force relative.

Compte tenu de cet axiome, la force relative peut écrite sous la forme :

$$F^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2_{x(\sigma_i,\sigma_i)}}{\varpi^2}}} \left(\frac{dm_{(\sigma_j,\sigma_i)}}{dt_{(\sigma_j,\sigma_i)}} \omega, \vec{F}_{(\sigma_j,\sigma_i)} \right).$$

Il nous reste à formuler la troisième loi de Newton.

$\boldsymbol{Axiome\ AxT_M 3.4}$. Pour toute particule $\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k \in \Sigma$:

$$\vec{f}_{(\sigma_j,\sigma_k\rightarrow\sigma_i)} = -\vec{f}_{(\sigma_j,\sigma_i\rightarrow\sigma_k)}.$$

Terminons cette section en présentant la définition de l'énergie cinétique $K_{(\sigma_j,\sigma_j)}$ de la particule σ_i par rapport à la particule σ_j.

$\boldsymbol{D\acute{e}finition\ D\acute{e}T_M 5}$. L'énergie cinétique relative $K_{(\sigma_j,\sigma_j)}$ d'une particule σ_i (de masse $m_{(\sigma_j,\sigma_i)}$ et se déplaçant à la vitesse $\vec{v}_{(\sigma_j,\sigma_i)}$) par rapport à la particule σ_j, est définie par :

$$\int_{K_0}^{K} dK_{(\sigma_j,\sigma_i)} = \int_{p_0}^{p} \vec{v}_{(\sigma_j,\sigma_i)} \cdot d\vec{p}_{(\sigma_j,\sigma_i)}.$$

7.2 La mécanique classique

Nous allons maintenant poser les axiomes qui permettent d'obtenir la mécanique classique.

Un système $\mathbb{T}_{MC} = \langle \mathbb{T}_{RC_C}, \mathbb{T}_{RD_C}, f \rangle$ est une *théorie de la mécanique classique* s'il satisfait les axiomes $\boldsymbol{AxT_{MC}1}$ à $\boldsymbol{AxT_{MC}3}$.

$\boldsymbol{Axiome\ AxT_{MC}1.1}$ $\mathbb{T}_{RC_C}$ est une théorie de la mécanique relative.

Les quantités relatives de la mécanique classique sont :

$$X^{\pi}_{C(\sigma_j,\sigma_i)} = \left(t_{C(\sigma_j,\sigma_i)}\omega_C, \vec{r}_{C(\sigma_j,\sigma_i)}\right),$$
$$P^{\pi}_{C(\sigma_j,\sigma_i)} = \left(m_{C(\sigma_j,\sigma_i)}\omega_C, \vec{p}_{C(\sigma_j,\sigma_i)}\right).$$

C'est par l'interprétation de ces quantités relatives que la mécanique classique se distingue de la mécanique relativiste. Entre autres, le temps $t_{C(\sigma_j,\sigma_i)}$ et la masse $m_{C(\sigma_j,\sigma_i)}$ de la particule σ_i par rapport à la particule σ_j ont toutes deux la même valeur, peu importe la particule σ_j. Autrement dit, le temps et la masse sont des quantités absolues et non relatives. C'est ce que formule les axiomes suivants.

$\boldsymbol{Axiome\ AxT_{MC}2.1}$ Pour toute particules $\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k \in \Sigma$, $t_{C(\sigma_j,\sigma_i)} = t_{C(\sigma_k,\sigma_i)} = t_{C(\sigma_i)}$.

$\boldsymbol{Axiome\ AxT_{MC}2.2}$ Pour toute particules $\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k \in \Sigma$, $m_{C(\sigma_j,\sigma_i)} = m_{C(\sigma_k,\sigma_i)} = m_{C(\sigma_i)}$.

Ces axiomes nous permettent de déterminer la vitesse invariante ϖ_C.

$\boldsymbol{Th\acute{e}or\grave{e}me\ ThT_{MC}1.}$ La constante ϖ_c est égale à l'infini ($\varpi_c = \infty$).

Preuve. Soit l'équation de transformation pour $t_{C(\sigma_k,\sigma_i)}$:

$$t_{C(\sigma_k,\sigma_i)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2_{x(\sigma_k,\sigma_j)}}{\varpi_c^2}}}\left[t_{C(\sigma_j,\sigma_i)} - \frac{v_{x(\sigma_k,\sigma_j)}}{\varpi^2}x_{C(\sigma_j,\sigma_i)}\right].$$

Or, l'axiome $\boldsymbol{AxT_{MC}1.1}$ pose que $t_{(\sigma_k,\sigma_i)} = t_{(\sigma_j,\sigma_i)}$; on conclut :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2_{x(\sigma_k,\sigma_j)}}{\varpi_c^2}}} = 1\ ; \quad \frac{v_{x(\sigma_k,\sigma_j)}}{\varpi_c^2}x_{C(\sigma_j,\sigma_i)} = 0.$$

Ces deux équations sont satisfaites si et seulement si $\varpi_c = \infty$. ■

Il faut noter que, dans cette preuve, on aurait pu utiliser l'équation de transformation pour la masse pour obtenir le même résultat.

Il nous reste maintenant à déterminer la constante ω_C. Pour cela, nous allons utiliser une autre des caractéristiques de la mécanique classique, à savoir que l'espace de la mécanique classique est l'espace euclidien.

$\boldsymbol{Axiome\ AxT_{MC}3.1}$ La position relative $X^{\pi}_{C(\sigma_j,\sigma_i)}$ de la particule σ_i par rapport à une particule de référence σ_j est représentée par le vecteur position $\vec{r}_{C(\sigma_j,\sigma_i)}$ dans l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{E}^3$ à trois dimensions.

$\boldsymbol{Axiome\ AxT_{MC}3.2}$ La quantité de mouvement relative $P^{\pi}_{C(\sigma_j,\sigma_i)}$ de la particule σ_i par rapport à une particule de référence σ_j est représentée par le vecteur quantité de mouvement $\vec{p}_{C(\sigma_j,\sigma_i)}$ dans l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{E}^3$ à trois dimensions.

Nous sommes maintenant en mesure de déterminer la quantité ω_C.

$\boldsymbol{Th\acute{e}or\grave{e}me\ ThT_{MC}2}$. La constante ω_C est nulle ($\omega_C = 0$).

Preuve. En tenant compte des axiomes de la mécanique classique, la position relative $X^{\pi}_{C(\sigma_j,\sigma_i)}$ de la particule σ_i par rapport à la particule σ_j est :

$$X^{\pi}_{C(\sigma_j,\sigma_i)} = \left(t_{C(\sigma_j,\sigma_i)}\omega_C, \vec{r}_{C(\sigma_j,\sigma_i)}\right).$$

Or, selon l'axiome $\boldsymbol{Axiome\ AxT_{MC}3.1}$, la position relative $X_{C(\sigma_j,\sigma_i)}$ est plutôt donné par :

$$X_{C(\sigma_j,\sigma_i)} = \vec{r}_{C(\sigma_j,\sigma_i)}.$$

Nous en concluons que $\omega_C = 0$. ■

De même que pour le théorème $\boldsymbol{ThT_{MC}1}$, on aurait pu utiliser la quantité de mouvement relative avec le même résultat.

Ainsi, les constantes ϖ et ω_g sont déterminées par les axiomes qui posent que les quantités scalaires $q^{\pi}_{C(\sigma_j,\sigma_i)}$ de la mécanique classique sont absolues et que les quantité relatives $Q^{\pi}_{C(\sigma_j,\sigma_i)}$ sont représentées dans l'espace euclidien.

Les équations de transformation de la mécanique classique sont donc :

$$t_{C(\sigma_k,\sigma_i)} = t_{C(\sigma_j,\sigma_i)} = t_{C(\sigma_i)}, \qquad m_{C(\sigma_k,\sigma_i)} = m_{C(\sigma_j,\sigma_i)} = m_{C(\sigma_i)},$$
$$x_{C(\sigma_k,\sigma_i)} = v_{x(\sigma_k,\sigma_j)} t_{C(\sigma_j,\sigma_i)} + x_{C(\sigma_j,\sigma_i)}, \qquad p_{Cx(\sigma_k,\sigma_i)} = m_{C(\sigma_i)} v_{x(\sigma_k,\sigma_j)} + p_{Cx(\sigma_j,\sigma_i)},$$
$$y_{C(\sigma_i,\sigma_k)} = y_{C(\sigma_i,\sigma_j)}, \qquad p_{Cy(\sigma_k,\sigma_i)} = p_{Cy(\sigma_j,\sigma_i)},$$
$$z_{C(\sigma_i,\sigma_k)} = x_{C(\sigma_i,\sigma_j)}, \qquad p_{Cz(\sigma_k,\sigma_i)} = p_{Cz(\sigma_j,\sigma_i)}.$$

et la transformation des vitesses est donnée par :

$$v_{x(\sigma_k,\sigma_i)} = v_{x(\sigma_k,\sigma_j)} + v_{x(\sigma_j,\sigma_i)}.$$

Finalement, l'énergie d'une particule libre est donnée par :

$$\int_0^{K_c} dK_{C(\sigma_j,\sigma_i)} = \int_0^{p} \vec{v}_{(\sigma_j,\sigma_i)} \cdot d\vec{p}_{C(\sigma_j,\sigma_i)},$$

$$K_{C(\sigma_j,\sigma_i)} = \frac{1}{2} m_{(\sigma_i)} v^2_{(\sigma_j,\sigma_i)}.$$

7.3 La mécanique relativiste

Posons maintenant les axiomes qui déterminent la mécanique relativiste.

Un système $\mathbb{T}_{MR} = \langle \mathbb{T}_{RC_R}, \mathbb{T}_{RD_R}, f \rangle$ est une *théorie de la mécanique relativiste* s'il satisfait les axiomes $\boldsymbol{AxT_{MR}1}$ à $\boldsymbol{AxT_{MR}3}$.

$\boldsymbol{Axiome\ AxT_{MR}1}$. $\mathbb{T}_{MR}$ est une théorie de la mécanique relative.

Les quantités relatives de la mécanique relativiste sont donc :

$$X^{\pi}_{R(\sigma_j,\sigma_i)} = \left(t_{R(\sigma_j,\sigma_i)} \omega_R, \vec{r}_{R(\sigma_j,\sigma_i)} \right),$$
$$P^{\pi}_{R(\sigma_j,\sigma_i)} = \left(m_{R(\sigma_j,\sigma_i)} \omega_R, \vec{p}_{R(\sigma_j,\sigma_i)} \right).$$

Tout comme la mécanique classique, la mécanique relativiste est déterminée à deux constantes près, ϖ_R et ω_R. Ces constantes peuvent être déterminées par les axiomes suivants.

Le premier de ces axiomes pose le principe de relativité.

Axiome $\boldsymbol{AxT_{MR}2}$. Si, appliquée à une particule σ_i, une loi $\mathcal{L}$ de la physique est valide par rapport à une particule σ_j, et si la particule σ_j se déplaçe à une vitesse constante $\vec{v}_{(\sigma_k,\sigma_j)}$ par rapport à une autre particule σ_k, alors la loi $\mathcal{L}$ est valide par rapport à la particule σ_k.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème suivant :

Théorème $\boldsymbol{ThT_{MR}1}$. La constante ϖ_R est égale à la vitesse de la lumière c.

La preuve de ce théorème est une adaptation d'une preuve similaire présentée par Stephenson et Kilmister (1958, p. 9-11).

Preuve. Le principe de relativité s'applique à toutes les théories de la physique, et donc à l'électromagnétisme. Appliquons donc ce principe à l'équation d'onde électromagnétique :

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2_{(\sigma_j,\sigma_i)}}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2_{(\sigma_j,\sigma_i)}}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2_{(\sigma_j,\sigma_i)}}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2_{(\sigma_j,\sigma_i)}}=0.$$

D'après le principe de relativité, si la vitesse $\vec{v}_{(\sigma_k,\sigma_j)}$ est constante, alors l'équation d'onde est aussi valide par rapport à la particule référence σ_k :

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2_{(\sigma_k,\sigma_i)}}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2_{(\sigma_k,\sigma_i)}}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2_{(\sigma_k,\sigma_i)}}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2_{(\sigma_k,\sigma_i)}}=0.$$

Pour déterminer la constante ϖ_R, nous allons transformer les dérivées partielles en utilisant les équations de transformation :

$$t_{R(\sigma_k,\sigma_i)}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2_{x(\sigma_k,\sigma_j)}}{\varpi_R^2}}}\left[t_{R(\sigma_j,\sigma_i)}+\frac{v_{x(\sigma_k,\sigma_j)}}{\varpi_R^2}x_{R(\sigma_j,\sigma_i)}\right],$$

$$x_{R(\sigma_k,\sigma_i)} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_{x(\sigma_k,\sigma_j)}^2}{\varpi_R^2}}}\left[v_{x(\sigma_k,\sigma_j)}t_{R(\sigma_j,\sigma_i)} + x_{R(\sigma_j,\sigma_i)}\right],$$

$$y_{R(\sigma_i,\sigma_k)} = y_{R(\sigma_j,\sigma_i)},$$

$$z_{R(\sigma_i,\sigma_k)} = z_{R(\sigma_j,\sigma_i)}.$$

Après simplification, nous obtenons les équations suivantes pour la transformation des dérivées partielles de l'équation d'onde[12] :

$$\frac{\partial^2}{\partial t_{(\sigma_j,\sigma_i)}^2} = \frac{1}{1-\frac{v_{x(\sigma_k,\sigma_j)}^2}{\varpi^2}}\frac{\partial^2}{\partial t_{(\sigma_k,\sigma_i)}^2} + 2\frac{1}{1-\frac{v_{x(\sigma_k,\sigma_j)}^2}{\varpi^2}}v_{x(\sigma_k,\sigma_j)}\frac{\partial}{\partial t_{(\sigma_k,\sigma_i)}}\frac{\partial}{\partial x_{(\sigma_k,\sigma_i)}} + \frac{1}{1-\frac{v_{x(\sigma_k,\sigma_j)}^2}{\varpi^2}}v_{x(\sigma_k,\sigma_j)}^2\frac{\partial^2}{\partial x_{(\sigma_k,\sigma_i)}}\ ,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_{(\sigma_j,\sigma_i)}^2} = \frac{1}{1-\frac{v_{x(\sigma_k,\sigma_j)}^2}{\varpi^2}}\frac{v_{x(\sigma_k,\sigma_j)}^2}{\varpi^2}\frac{\partial^2}{\partial t_{(\sigma_k,\sigma_i)}^2} + \frac{1}{1-\frac{v_{x(\sigma_k,\sigma_j)}^2}{\varpi^2}}\frac{v_{x(\sigma_k,\sigma_j)}}{\varpi_L^2}\frac{\partial}{\partial t_{(\sigma_k,\sigma_i)}}\frac{\partial}{\partial x_{(\sigma_k,\sigma_i)}} + \frac{1}{1-\frac{v_{x(\sigma_k,\sigma_j)}^2}{\varpi^2}}\frac{\partial^2}{\partial x_{(\sigma_k,\sigma_i)}^2}\ ,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y_{(\sigma_j,\sigma_i)}^2} = \frac{\partial^2}{\partial y_{(\sigma_k,\sigma_j)}^2}\ ,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z_{(\sigma_j,\sigma_i)}^2} = \frac{\partial^2}{\partial z_{(\sigma_k,\sigma_i)}^2}\,.$$

En substituant dans l'équation d'onde par rapport à particule σ_k et en regroupant les termes, on obtient :

$$\frac{1}{1-\frac{v_{x(\sigma_k,\sigma_j)}^2}{\varpi^2}}\left(1-\frac{v_{x(\sigma_k,\sigma_j)}^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2\phi}{\partial x_{(\sigma_k,\sigma_i)}^2} - \frac{1}{1-\frac{v_{x(\sigma_k,\sigma_j)}^2}{\varpi^2}}v_{(\sigma_k,\sigma_j)}\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{\varpi^2}\right)\frac{\partial\phi}{\partial t_{(\sigma_k,\sigma_i)}}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y_{(\sigma_k,\sigma_i)}^2}$$

$$+\frac{\partial^2\phi}{\partial z_{(\sigma_k,\sigma_i)}^2} - \frac{1}{1-\frac{v_{x(\sigma_k,\sigma_j)}^2}{\varpi^2}}\left(1-\frac{v_{x(\sigma_k,\sigma_j)}^2}{c^2}\right)\frac{1}{c^2}\ \frac{\partial^2\phi}{\partial t_{(\sigma_k,\sigma_i)}^2} = 0\,.$$

En comparant cette équation avec l'équation d'onde par rapport à la particule σ_j, on conclut qu'elles sont égales si :

[12] Afin d'alléger l'écriture, nous allons omettre les indices R des variables relativistes.

$$\frac{1}{1-\frac{v_{x(\sigma_k,\sigma_j)}^2}{\varpi^2}}\left(1-\frac{v_{x(\sigma_k,\sigma_j)}^2}{c^2}\right)=1 \text{ et } \frac{1}{c^2}-\frac{1}{\varpi^2}=0.$$

De ces équations, on conclut que $\varpi_R = c$. ■

Il nous reste maintenant à déterminer la constante ω_R qui figure dans les quantités relatives

$$X_{R(\sigma_j,\sigma_i)}^{\pi}=\left(t_{R(\sigma_j,\sigma_i)}\omega_R,\vec{r}_{R(\sigma_j,\sigma_i)}\right),$$
$$P_{R(\sigma_j,\sigma_i)}^{\pi}=\left(m_{R(\sigma_j,\sigma_i)}\omega_R,\vec{p}_{R(\sigma_j,\sigma_i)}\right).$$

Le propre de la relativité est que ses quantités relatives sont représentées par des quadrivecteurs dans l'espace-temps de Minkowski, ce que fait l'axiome suivant.

Axiome $\boldsymbol{AxT_{MR}3}$. Les quantités relatives de la particule σ_i par rapport à une particule de référence σ_j sont représentées par un quadrivecteur dans l'espace vectoriel minkowskien à quatre dimensions.

L'espace-temps de Minkowski est un espace vectoriel à quatre dimensions tel que le produit scalaire $g^4(v,w)$ des quadrivecteurs $v=(v^0,v^1,v^2,v^3)$ et $w=(w^0,w^1,w^2,w^3)$ est défini par $g^4(v,w)=v^0w^0-v^1w^1-v^2w^2-v^3w^3$, et la pseudo-norme du quadrivecteur $v=(v^0,v^1,v^2,v^3)$, par $g^4(v,v)=(v^0)^2-(v^1)^2-(v^2)^2-(v^3)^2$. Ainsi, le quadrivecteur de position relative dans l'espace-temps de Minkowski est donné par $X_{(\sigma_j,\sigma_i)}=\left(t_{(\sigma_j,\sigma_i)}\omega_C,x_{(\sigma_j,\sigma_i)},y_{(\sigma_j,\sigma_i)},z_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right)$ et sa pseudo-norme, par $X_{(\sigma_j,\sigma_i)}^2=t_{(\sigma_j,\sigma_i)}^2\omega_R^2-x_{(\sigma_j,\sigma_i)}^2-y_{(\sigma_j,\sigma_i)}^2-z_{(\sigma_j,\sigma_i)}^2$.

Une des propriétés importantes de l'espace-temps de Minkowski est l'invariance de la pseudo-norme des quadrivecteurs (voir Naber, 2012, p. 12), ce qui nous permet de déterminer la constante ω_L.

$\boldsymbol{Th}$é$\boldsymbol{or}$è$\boldsymbol{me}$ $\boldsymbol{ThT_{MR}2}$. La constante ω_C est égale à la vitesse de la lumière c.

Preuve. Le point de départ de la preuve est l'invariance de la pseudo-norme du quadrivecteur position, de sorte que $X_{R(\sigma_j,\sigma_i)}^2=X_{R(\sigma_k,\sigma_i)}^2$. En appliquant les équations de transformation, nous avons successivement :

$X_{R(\sigma_j,\sigma_i)}^2=X_{R(\sigma_k,\sigma_i)}^2,$

$$X^2_{R(\sigma_j,\sigma_i)} = t^2_{R(\sigma_K,\sigma_i)}\omega_R^2 - x^2_{R(\sigma_K,\sigma_i)} - y^2_{R(\sigma_K,\sigma_i)} - z^2_{R(\sigma_K,\sigma_i)},$$

$$X^2_{R(\sigma_j,\sigma_i)} = \frac{1}{1-\frac{v^2_{x(\sigma_k,\sigma_j)}}{c^2}}\left[t_{R(\sigma_j,\sigma_i)} + \frac{v_{x(\sigma_k,\sigma_j)}}{c^2}x_{R(\sigma_j,\sigma_i)}\right]^2 \omega_R^2$$

$$-\frac{1}{1-\frac{v^2_{x(\sigma_k,\sigma_j)}}{c^2}}\left[v_{x(\sigma_k,\sigma_j)}t_{R(\sigma_j,\sigma_i)} + x_{R(\sigma_j,\sigma_i)}\right]^2 - y^2_{R(\sigma_j,\sigma_i)} - z^2_{R(\sigma_j,\sigma_i)}.$$

Après simplification, nous obtenons :

$$X^2_{(\sigma_j,\sigma_i)} = \frac{1}{1-\frac{v^2_{x(\sigma_k,\sigma_j)}}{c^2}}\left(1-\frac{v^2_{x(\sigma_k,\sigma_j)}}{\omega_R^2}\right)t^2_{R(\sigma_j,\sigma_i)}\omega_R^2$$

$$-\frac{1}{1-\frac{v^2_{x(\sigma_k,\sigma_j)}}{c^2}}\left(1-\frac{v^2_{x(\sigma_k,\sigma_j)}}{c^4}\omega_R^2\right)x^2_{R(\sigma_j,\sigma_i)} - y^2_{R(\sigma_j,\sigma_i)} - z^2_{R(\sigma_j,\sigma_i)}.$$

En comparant avec l'identité $X^2_{(\sigma_j,\sigma_i)} = t^2_{R(\sigma_j,\sigma_i)}\omega_R^2 - x^2_{R(\sigma_j,\sigma_i)} - y^2_{R(\sigma_j,\sigma_i)} - z^2_{R(\sigma_j,\sigma_i)}$, nous avons les deux égalités suivantes :

$$\frac{1}{1-\frac{v^2_{x(\sigma_k,\sigma_j)}}{c^2}}\left(1-\frac{v^2_{x(\sigma_k,\sigma_j)}}{\omega_R^2}\right) = 1,$$

$$\frac{1}{1-\frac{v^2_{x(\sigma_k,\sigma_j)}}{c^2}}\left(1-\frac{v^2_{x(\sigma_k,\sigma_j)}}{c^4}\omega_R^2\right) = 1.$$

On conclut de ces équations que $\omega_R = c$. ■

Ainsi, la constante ϖ_R est déterminée par le principe de relativité, et la constante ω_C, par le choix de l'espace-temps de Minkowski.

En résumé, les équations de la loi de composition de la théorie de la cinématique relativiste sont, pour la position relative :

$$t_{R(\sigma_k,\sigma_i)} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2_{x(\sigma_k,\sigma_j)}}{c^2}}}\left[t_{R(\sigma_j,\sigma_i)} + \frac{v_{x(\sigma_k,\sigma_j)}}{c^2}x_{R(\sigma_j,\sigma_i)}\right],$$

$$x_{R(\sigma_k,\sigma_i)} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2_{(\sigma_k,\sigma_j)}}{c^2}}}\left[v_{x(\sigma_k,\sigma_j)}t_{R(\sigma_j,\sigma_i)} + x_{R(\sigma_j,\sigma_i)}\right],$$

$$y_{R(\sigma_i,\sigma_k)} = y_{R(\sigma_j,\sigma_i)},$$

$$z_{R(\sigma_i,\sigma_k)} = z_{R(\sigma_j,\sigma_i)};$$

pour la quantité de mouvement relativiste :

$$m_{(\sigma_k,\sigma_i)} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2_{x(\sigma_k,\sigma_j)}}{c^2}}}\left[m_{(\sigma_j,\sigma_i)} + \frac{v_{x(\sigma_k,\sigma_j)}}{\varpi^2}p_{x(\sigma_j,\sigma_i)}\right],$$

$$p_{x(\sigma_k,\sigma_i)} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2_{x(\sigma_k,\sigma_j)}}{c^2}}}\left[v_{x(\sigma_k,\sigma_j)}m_{(\sigma_j,\sigma_i)} + p_{x(\sigma_j,\sigma_i)}\right],$$

$$p_{y(\sigma_i,\sigma_k)} = p_{y(\sigma_j,\sigma_i)},$$

$$p_{z(\sigma_i,\sigma_k)} = p_{z(\sigma_j,\sigma_i)};$$

et l'équation de transformation de la vitesse est :

$$v_{x(\sigma_k,\sigma_i)} = \frac{v_{x(\sigma_k,\sigma_j)} + v_{x(\sigma_j,\sigma_i)}}{1+\frac{v_{x(\sigma_k,\sigma_j)}v_{x(\sigma_j,\sigma_i)}}{c^2}}$$

Finalement, en mécanique relativiste, le temps propre de la particule σ_i est donné par :

$$t_{R0(\sigma_i)} = t_{R(\sigma_j,\sigma_i)}\sqrt{1-\frac{v^2_{x(\sigma_k,\sigma_j)}}{c^2}}.$$

et la masse propre :

$$m_{R0(\sigma_i)} = m_{R(\sigma_j,\sigma_i)}\sqrt{1-\frac{v^2_{x(\sigma_k,\sigma_j)}}{c^2}}$$

Déterminons maintenant l'énergie cinétique relativiste :

$$\int_{K_{R0}}^{K_R} dK_{R(\sigma_j,\sigma_i)} = \int_0^p \vec{v}_{(\sigma_j,\sigma_i)} \cdot d\vec{p}_{R(\sigma_j,\sigma_i)},$$

dont la solution est :

$$K_{R(\sigma_j,\sigma_i)} - K_{R0(\sigma_j,\sigma_i)} = m_{0(\sigma_i)}c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_{x(\sigma_j,\sigma_i)}^2}{c^2}}} - 1\right).$$

On en déduit :

$$E_{R0(\sigma_j,\sigma_i)} = m_{0(\sigma_i)}c^2,$$

$$K_{R(\sigma_j,\sigma_i)} = m_{0(\sigma_i)}c^2\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_{x(\sigma_j,\sigma_i)}^2}{c^2}}},$$

où $E_{R0(\sigma_j,\sigma_i)}$ est l'énergie propre de la particule σ_i.

Ces deux équations établissent l'équivalence entre la d'une particule et son contenu en énergie et nous permet de réécrire la masse au repos en fonction de l'énergie au repos, $E_{0(\sigma_i)}$:

$$m_{0(\sigma_i)} = \frac{E_{0(\sigma_i)}}{c^2}.$$

De plus, ces équations permettent aussi d'établir l'énergie propre d'une particule :

$$E_{0(\sigma_i)} = E_{c(\sigma_j,\sigma_i)}\sqrt{1-\frac{u_{(\sigma_j,\sigma_i)}^2}{c^2}}.$$

8. En conclusion : la relation entre les mécaniques classique et relativiste.

Après avoir analysé les mérites et lacunes des systèmes axiomatiques de la mécanique proposés conjointement par McKinsey, Sugar et Suppes (1953), et Rubin et Suppes (1954); par Bunge (1967); puis par l'École hongroise de logique dans Andréka et al (2007a) et Andréka et al (2008), nous avons présenté successivement une théorie de la relativité et une théorie de la mécanique relative; à partir de cette théorie de la mécanique relative, nous avons formulé une théorie de la mécanique classique et une théorie de la mécanique relativiste.

Notre théorie de la relativité est essentiellement une théorie sur les quantités relatives, les quantités de la physique qu'on assigne à une particule σ_i par rapport à une autre particule σ_j. Nous avons représenté ces quantités par une relation d'équivalence R, déterminant ainsi un ensemble de paires de particules. Nous avons ensuite associé à chaque paire de particules de cet ensemble une quantité relative

$$Q^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)} = \left(q^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\omega^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}, q^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\vec{u}^{\pi}{}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right).$$

Nous avons ensuite posé une loi composition partielle $\circ^{\pi}_{Q}$ sur les quantité relatives $Q^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}$, telle que

$$\left[Q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_j)}\right] \circ^{\pi}_{Q} \left[Q^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right] = Q^{\pi}_{(\sigma_k,\sigma_i)}.$$

Après avoir posé les axiomes qui déterminent les propriétés des variables $q^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}$, $\omega^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}$ et $\vec{u}^{\pi}{}_{(\sigma_j,\sigma_i)}$ de la quantité relative $Q^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}$, nous avons déduit les équations de la loi de composition $\circ^{\pi}_{Q}$:

$$q_{(\sigma_k,\sigma_i)} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2_{x(\sigma_k,\sigma_j)}}{\varpi^2}}} q_{(\sigma_j,\sigma_i)}\left[1+\frac{u_{x(\sigma_k,\sigma_j)}u_{x(\sigma_j,\sigma_i)}}{\varpi^2}\right],$$

$$q_{(\sigma_k,\sigma_i)}u_{x(\sigma_k,\sigma_i)} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2_{x(\sigma_k,\sigma_j)}}{\varpi^2}}} q_{(\sigma_j,\sigma_i)}\left[u_{x(\sigma_k,\sigma_j)}+u_{x(\sigma_j,\sigma_i)}\right],$$

$$q_{(\sigma_k,\sigma_i)}u_{y(\sigma_k,\sigma_i)} = q_{(\sigma_j,\sigma_i)}u_{y(\sigma_j,\sigma_i)},$$

$$q_{(\sigma_k,\sigma_i)}u_{z(\sigma_k,\sigma_i)} = q_{(\sigma_j,\sigma_i)}u_{z(\sigma_j,\sigma_i)}.$$

et de la quantité propre $q_{0(\sigma_i)}$:

$$q_{0(\sigma_i)} = q_{(\sigma_j,\sigma_i)}\sqrt{1-\frac{u^2_{(\sigma_j,\sigma_i)}}{\varpi^2}}.$$

Dans notre théorie de la relativité, deux constantes sont indéterminées : ω, qui apparaît dans la quantité relative $Q^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}$, et ϖ, qui apparaît dans les équations de la loi de composition $\circ^{\pi}_{Q}$.

Nous avons ensuite présenté une théorie de la mécanique relative. Les axiomes de cette théorie posent les propriétés de la position relative $X^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}$ de la particule σ_i par rapport à la particule σ_j :

$$X^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)} = \left(t_{(\sigma_j,\sigma_i)}\omega, \vec{r}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right),$$

et de la quantité de mouvement relative de la particule σ_i par rapport à la particule σ_j :

$$P^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)} = \left(m_{(\sigma_j,\sigma_i)}\omega, \vec{p}_{(\sigma_j,\sigma_i)}\right)$$

S'ajoutent à ces axiomes ceux qui formulent les lois du mouvement qui déterminent les propriétés de la force relative $F^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)}$ exercée sur la particule σ_i par rapport à la particule σ_j :

$$F^{\pi}_{(\sigma_j,\sigma_i)} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2_{x(\sigma_k,\sigma_j)}}{\varpi^2}}}\left(\frac{dm_{(\sigma_j,\sigma_i)}}{dt_{(\sigma_j,\sigma_i)}}\omega, \frac{d\,\vec{p}_{(\sigma_j,\sigma_i)}}{dt_{(\sigma_j,\sigma_i)}}\right).$$

Cette théorie de la mécanique relative est déterminée aux constantes ω et ϖ près. Elle forme une structure commune aux mécaniques classique et relativiste, et il revient à chacune de ces deux mécaniques de poser les axiomes qui déterminent les constantes ω et ϖ.

La mécanique classique pose que le temps et la masse sont des quantités absolues et non relatives; il s'en suit que $\varpi_C = \infty$. Puis elle pose que ces quantités $X^{\pi}_{C(\sigma_j,\sigma_i)}$ et $P^{\pi}_{C(\sigma_j,\sigma_i)}$ sont représentées dans l'espace euclidien; il s'en suit que $\omega_C = 0$.

La mécanique relativiste pose le principe de relativité; il s'en suit que $\varpi_R = c$, la vitesse de la lumière. Puis, elle pose que ces quantités $X^{\pi}_{R(\sigma_j,\sigma_i)}$ et $P^{\pi}_{R(\sigma_j,\sigma_i)}$ sont représentées dans l'espace euclidien; il s'en suit que $\omega_R = c$.

Ainsi, les deux mécaniques diffèrent l'une de l'autre par les axiomes qui déterminent les quantités ω et ϖ de la théorie de la relativité. C'est donc en conséquence de ces axiomes que les équations de la loi de composantes des quantités relatives seront différentes; et c'est en conséquence de ces axiomes que la formulation de leurs lois du mouvement sera différente.

Revenons maintenant sur la question de la relation entre les deux mécaniques. Nous avons déjà discuté des problèmes reliés à l'hypothèse que la mécanique relativiste se réduit à la mécanique classique dans la limite où la vitesse v des particules est petite par rapport à la vitesse c de la lumière ($v/c \rightarrow 0$). Cette question peut maintenant être discutée dans le cadre de notre théorie de la mécanique, ce qui est un des mérites d'axiomatiser les théories de la physique.

Dans notre axiomatisation, les équations de la loi de composition $\circ_Q^\pi$ diffèrent par la valeur de la constante ϖ. La question de la réduction des équations de la mécanique relativiste à celle de la mécanique classique se pose maintenant au niveau des axiomes : est-ce que l'axiome du temps et de la masse absolus en mécanique classique peut se déduire de celui du principe de relativité en mécanique relativiste? Et si oui, sous quelles conditions?

En ce qui concerne les quantités relatives de la position et du temps des deux mécaniques, elles diffèrent selon la valeur de la constante ω. Cette constante est déterminée dans chaque mécanique par l'axiome de l'espace. Ainsi, il faut se poser la question suivante : est-ce que l'espace euclidien de la mécanique classique peut se déduire de l'espace minkowskien de la mécanique relativiste? Si oui, sous quelles conditions?

À notre connaissance, il faut répondre non à ces deux questions.

On ne peut déduire à partir du principe de relativité que le temps et la masse sont des quantités absolues. C'est plutôt l'inverse que l'on conclut : en conséquence du principe de relativité, le temps $t_{(\sigma_j,\sigma_i)}$ de la particule σ_i par rapport à la particule σ_j dépend du temps propre $t_{0(,\sigma_i)}$ de la particule σ_i et de la vitesse $v_{x(\sigma_j,\sigma_i)}$ de la particule σ_i par rapport à la particule σ_j; il en est de même pour la masse.

De même, en ce qui concerne la relation entre les espaces euclidien et minkowskien, on ne peut déduire l'un de l'autre (voir Naber, 2012).

Il apparaît donc que même si les deux mécaniques ont une structure de base commune, la théorie de la mécanique relative, les axiomes de chacune des deux mécanique amènent ce qu'on peut appeler un « bris de structure ». Dans le cadre de notre théorie de la mécanique, il est donc le propre de la mécanique relativiste de ne pas se réduire à la mécanique classique, ces deux mécaniques sont structurellement différentes.

Notre axiomatisation nous permet d'aborder une autre sujet de discussion en ce qui concerne la nécessité de poser l'invariance de la vitesse de la lumière pour déduire les équations de transformation de Lorentz.

Pour les fins de la discussion, rappelons que dans son article fondateur de la relativité restreinte, Einstein (1905) avait déduit les équations de transformation de Lorentz (qui sont nos équations de transformation relativiste) à partir de deux postulats :

> « 1. The laws by which the states of physical systems undergo change are not affected, whether these changes of state be referred to the one or the other of two systems of co-ordinates in uniform translatory motion.
>
> 2. Any ray of light moves in the "stationary" system of co-ordinates with the determined velocity c, whether the ray be emitted by a stationary or by a moving body. Hence
>
> $$\text{velocity} = \frac{\text{light path}}{\text{time interval}}. \text{ »}$$
>
> (Einstein, 1905, p. 41)

Le premier postulat pose le principe de relativité, le second, l'universalité de la vitesse de la lumière. Ces deux postulats ont été souvent utilisés pour déduire les équations de transformations de Lorentz, par exemple, Einstein (1907), Born (1962), Rosser (12964), Møller (1972), Rindler (1982), Faraoni (2013).

D'autre part, la nécessité de poser l'universalité de la lumière était remise en question par Ignatowski (1911) qui détermine les équations de Lorentz à partir du seul postulat de relativité, mais en posant que les transformations forment un groupe. Cette approche a été reprise entre autres par Franck et Rothe (1911), Lalan (1937), Berzi et Gorini (1969) et Levy-Leblond (1969). Dans cette approche, les équations de transformation sont déterminées à une constante près, notre variable ϖ, et ces auteurs suggèrent que sa valeur soir déterminée expérimentalement; par exemple :

> « We are left with the problem of the choice between the Lorents transformations … and the Galilean transformation… As is well known, the Lorentz transformations admit one and only one invariant velocity which is equal to c. In the limit when this

> velocity is taken to be infinite, one obtains the Galilean transformations. Hence the above problem of choice can be solved only by experience and involves the search for an invariant velocity in nature. » (Berzi et Gorini, 1969, p. 1523)

Notre approche nous permet d'aborder le problème différemment. D'une part, dans notre le cadre de notre théorie de la relativité, nous avons déduit d'une part l'existence d'une quantité invariante à partir des propriétés des quantités relatives; d'autre part, dans le cadre de notre théorie de la mécanique relativiste, nous avons démontré, à partir du seul principe de relativité, que cette quantité invariante est la vitesse de la lumière. Il n'est donc pas nécessaire de poser l'invariance de la vitesse de la lumière comme l'a fait Einstein (1905), ni de recourir à l'expérience pour déterminer la valeur de la vitesse invariante comme l'a d'abord proposé Ignatowski (1911).

En conclusion, même si les mécaniques classique et relativiste ont une structure de base commune, la théorie de la mécanique relative, les axiomes que posent chacune des deux mécaniques brisent en quelque sorte cette structure commune. Or, les mécaniques classique et relativiste ne sont pas les seules théories qui semblent avoir une structure de base commune. Pensons aux formulation hamiltonienne et lagrangienne de la mécanique, ou encore à la mécanique classique (ou relativiste) et la mécanique quantique. Rappelons à cet effet ce qu'en disait Paul Dirac, dans son article fondateur de la mécanique quantique :

> « We make the fundamental assumption that *the difference between Heisenberg products of two quantum quantities is equal to* $ih/2\pi$ *times their Poisson bracket expression*. … *The correspondence between the quantum and classical theories lies not so much in the limiting agreement when* $h \to 0$ *as in the fact that the mathematical operations on the two theories obey in many cases the same laws*. » (Dirac, 1925, p. 648-649; les mots sont en italiques dans le texte)

9. Bibliographie

Aharoni, J. 1959. *The Special Theory of Relativity*. Oxford, The Clarendon Press.

Andréka, Hajnal, Judith X. Madarász, Istvá Németi, A. Andai, G. Sági, I. Sain et Cs Tőke. 2002. *On the Logical Structure of Relativity Theories*. https://old.renyi.hu/pub/algebraic-logic/olsort.html.

Andréka, Hajnal, , Judith X. Madarász et Istvá Németi. 2007a. « Logic of Space-Time and Relativity Theory ». *Handbook of Spatial Logics*. New York : Springer.

Andréka, Hajnal, , Judith X. Madarász, Istvá Németi et G. Székely. 2007b. « $E = mc^2$ derived from geometrical axioms ». Rapport de recherche. Budapest : Alfréd Rényi Institute of Mathematics.

Andréka, Hajnal, , Judith X. Madarász, Istvá Németi et G. Székely. 2008. « Axiomatizing Relativistic Dynamics without Conservation Postulates ». *Studia Logica*, 89. 163-186.

Andréka, Hajnal, , Judith X. Madarász, Istvá Németi et G. Székely. 2012. « A Logic Road from Special Relativity to General Relativity ». *Synthese*, 186. 633-649.

Baierlein, Ralph. 2006. « Two Myths about Special Relativity ». *American Journal of Physics*, 74. 193-195.

Balzer, Wolfgang, Moulines, C.U. et Sneed, Joseph D. 1987. *An Architectonic for Science. The Structuralist Program*. Dordrecht : D. Reidel Publishing Compagny.

Batterman, Robert W. 1995. « Theories Between Theories : Asymptotic limiting InterTheoretic Relations ». *Synthese* 103 (2). 171-201.

Berry, Michael. 1994. « Asymptotics, Singularities and the Reduction of Theories ». *Logic, Methodology and Philosophy of Science IX*. Sous la direction de Pratwitz, D, Skyms, B. et Westerstähl, D. 597-907. North-Holland : Elsevier.

Born, Max. 1962. *Einstein's Theory of Relativity*. New York, Dover Publications, Inc.

Berzi, Vittorio et Gorini, Vittorio. 1969. « Reciprocity Principle and the Lorentz Transformation ». *Journal of Mathematical Physics* 10 (8), 1818-1524.

Bunge, Mario. 1967. *Foundations of Physics*. New York : Springer-Verlag.

Da Costa, Newton C. A. et Chuaqui, Rolando. 1988. « On Suppes' Set Theoretical Predicates ». *Erkenntnis,* 29. 95-112.

d'Inverno, Ray. 1992. *Introducing Einstein's relativity*. Oxford : Clarendon Press.

Dirac, Paul A. M. 1925. « The Fundamental Equations of Quantum Mechanics ». *Proceedings of the Royal Society on London*, 109, 642-653.

Ehlers, J., W. Rindler et R. Penrose. 1965. « Energy Conservation as the Basis of Relativistic Mechanics II ». *American Journal of Physics*, 33. 995-997.

Einstein, Albert. 1905. « Zur Elektrodynamik bewegter Körper ». *Annalen der Physik*, 17 (10), 891-921. Tranduit en anglais dans Lorentz H. A., A. Einstein, H. Minkowski et H. Weyl. *The Principles of Relativity*. 1952. New York, Dover publications, Inc. P. p. 37-65.

Einstein, Albert. 1907. « Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogene Folgerungen ». *Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik*, 4, p. 411-462. Traduit en anglais dans Schwartz, H. M. 1977. « Einstein's comprehensive 1907 essay on relativity ». *American Journal of Physics*, 45, 512-517, 811-817, 899-902.

Einstein, Albert. 1935. « Elementary Derivation oft he Equivalence of Mass and Energy ». *Bulletin of the American Mathematical Society*, 41. 223-230.

Eisenberg, Leonard J. 1967. « Necessity of the Linearity of Relativistic Transformations between Inertial Systems . *American Journal of Physics*, 35, 647.

Faraoni, Valerio. 2013. *Special Relativity*. New York : Springer.

Feyerabend, Paul. 1962. « Explanation, Reduction, and Empericism ». Dans *Scientific Explanation, Space and Time*. Sous la direction de Feigl, Herbert et Scriven, Michael, 28-97. Minnesota : University of Minnesota Press.

Franck, Philip, et Herman Rothe. 1911. « Über eine Verallgemeinerung des Relativitatsprinzips und die dazugehorige Mechanik ». *Annalen der Physik*, 34, (5), 825-853.

Gannett, Joel W. 2007. « Nothing but relativity, redux ». *European Journal of Physics*, 28, 1145-1150.

Griffiths, David J. 1999. *Introduction to electrodynamics*. Upper Saddle River : Prentice Halls.

Ignatowski, Vladimir. 1910. « Einige allgemeine Bemerkungen zum Relativitätsprinzip », Physikalische Zeitschrift, 11. 972-976.[13]

Kleppner, Daniel et Robert Kolenkow. 2014. *An Introduction to Mechanics. Seconde édition*. Cambridge : Cambridge University Press.

Kuhn, Thomas. 1962. *The Structure of Scientific Revolutions*. Chicago : University of Chicago Press.

Lalan, V. 1937. « Sur les postulats qui sont à la base des cinématiques ». *Bulletin de la Société mathématique de France*, 65, 83-99.

Levy-Leblond, Jean-Marc. 1976. « One more derivation of the Lorentz transformation ». *American journal of Physics*, 44 (3), 271-277.

Lewis, Gilbert N. et Richard C. Tolman. 1909. « The Principle of Relativity, and Non-Newtonian Mechanics ». *Philosophical Magazine and Journal of Science*, XVIII. 510-523.

MacLane, Saunders et Garrett Birkhoff. 1991. *Algebra*. Providence, AMS Chelsea Publishing.

McKinsey, J. C. C., Sugar, A. C. et Suppes, Patrick. 1953. « Axiomatic Foundations of Classical Particle Mechanics ». *Journal of Rational Mechanics and Analysis*, 2 (2). 253-272.

McKinsey, J.C.C., et Patrick Suppes. « Transformations of Systems of Classical Particle Mechanics ». *Journal of Rational Mechanics and Analysis*, 2 (2). 273-289.

Møller, C. 1972. *The Theory of Relativity*. Dehli : Oxford University Press.

Naber, Gregory L. 2012. *The Geometry of Minkowski Spacetime*. New York : Springer.

Nagel, Ernst. 1979. *The Structure of Science*. *Second edition.* Indianapolis : Hackett Publishing Company.

Nickles, Thomas. 1973. « Two Concepts of Intertheoretic Reduction ». *Journal of Philosophy*, 70 (4), 181-201.

Pauli, Wolfgang. 1958. *Theory of Relativity*. Oxford : Pergamon Press.

[13] Une traduction anglaise est disponible sur Wikisource : https://en.wikisource.org/wiki/Translation:Some_General_Remarks_on_the_Relativity_Principle (Consultée le 20 avril 2022).

Rindler, Wolfgang. 1982. *Introduction to Special Relativity*. Oxford : Clarendon University Press.

Rindler, Wolfgang. 2006. *Relativity. Special, General, and Cosmological*. Oxford : Oxford University Press.

Rosser, W. G. V. 1964. *An Introduction to the Theory of Relativity*. London : Butterworths.

Rubin, Herman et Suppes, Patrick. 1954. « Transformations of Systems of Relativistic Particle Mechanics ». *Pacific Journal of Mathematics*, 4 (4), 563-601.

Sard, R. D. 1970. *Relativistic Mechanics. Special Relativity and Classical Particle Dynamics*. New York : W. A. Benjamin, Inc.

Sneed, Joseph. 1971. *The Logical Structure of Mathematical Physics*. Dordrecht : D. Reidel.

Stegmüller, Wolfgang. 1976. *The Structure and Dynamics of Theories*. New York : Springer.

Stegmüller, Wolfgang. 1979. *The Structuralist View of Theories: A Possible Analogue of the Bourbaki Programme in Physical Science*. New York : Springer.

Stephenson, G. et Kilminster, C. W. 1958. *Special Relativity for Physicists*. London, Longmans, Green and Co.

Strecker, J. L. 1967. « Infinitesimal Lorentz Transformation ». *American Journal of Physics*, 35 (1), 12-14.

Suppes, Patrick. 1967. *Set-Theoretical Structures in Science*. Stanford : Stanford University Press.

Suppes, Patrick. 1974. « The Axiomatic Method in the Empirical Sciences ». *Proceedings of the Tarski Symposium*. Sous la direction de Henkin, L., J. Addison, C. C. Chang, W. Craig, D Scott et R. Vaught. Providence : American Mathematical Society. 465-479.

Terletskii, Yakov P. 1968. *Paradoxes in the Theory of Relativity*. New York, Springer Science+Business Media.

Tolman, Richard. 1917. *The Theory of the Relativity of Motion*. Berkeley : University of California Press.

Weinberg, Steven. 1972. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. New York : John Wiley & Sons.