

Université de Montréal

Calcul précis de l'équation d'état des gaz leptoniques. Quelques implications pour la formation et la destruction des étoiles à neutrons

par

Hayat Chatri

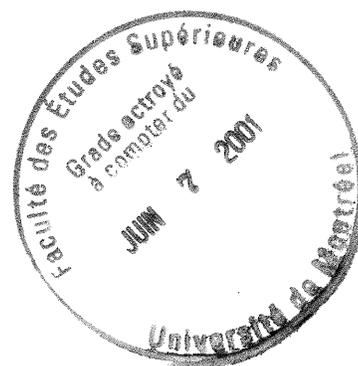
Département de physique

Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en physique

Mars, 2001

© Hayat Chatri, 2001



QC
3

1154

2001

N. 011

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé:

Calcul précis de l'équation d'état des gaz leptoniques. Quelques implications pour la formation et la destruction des étoiles à neutrons

présenté par:

Hayat Chatri

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes:

G. Fontaine, président-rapporteur
J.M. Pearson, directeur de recherche
L. Laurent, membre du jury

Mémoire accepté le:

SOMMAIRE

Les étoiles massives ($M \geq 8M_{\odot}$) deviennent des supernovae de type II à la fin de leur vie. Ce phénomène explosif est caractérisé par l'effondrement du coeur de Fer (^{56}Fe) qui, sous l'influence de sa propre gravité se détache des couches externes qui l'enveloppent. La théorie prédit que le coeur de l'étoile survit à cette explosion sous la forme d'une étoile à neutrons. Cette dernière pourrait subir une collision avec une autre étoiles à neutrons . Comme résultat d'une telle collision, il y aura une expulsion de la matière neutronique.

Pour décrire ces deux processus d'effondrement et de décompression, on doit posséder une bonne équation d'état. Or, dans la plupart des études sur la matière nucléaire dans les étoiles massives en implosion, les intégrales se trouvant dans les quantités fondamentales telles que la pression, l'énergie et l'entropie des électrons ont été représentés par des expressions approchées de Chandrasekhar. Cependant, ces approximations ne sont plus valable à certaines conditions (basse densité et haute température), et il nous est impossible de savoir ce qui se passe dans le milieu stellaire dans de telles conditions; et même dans le cas où ces approximations sont valables, plusieurs questions se posent toujours sur le degré d'erreur dû à ces approximations qui peuvent être, parfois, trompeuses. Dans notre étude on a pris en considération l'effet de création de paires qu'aura lieu dans le milieu stellaires à des basses densités et hautes températures; l'inclusion de ce détail constitue un élément nouveau de cette étude.

Le but de ce mémoire consiste à mener un calcul exact pour toutes les quantités physiques de l'équation d'état en évaluant numériquement ces intégrales, et aussi à voir quelles contributions elles peuvent apporter lors de leurs insertion dans des programmes déjà développés au Département de Physique de l'Université de Montréal, mais qui utilisent seulement des approximations. La bonne précision de nos calculs

d'intégrales et les différentes méthodes utilisées pour vérifier leurs valeurs numériques nous a permis de faire des corrections importantes à toutes les quantités physiques de l'équation et, surtout, à l'entropie et l'énergie libre de Helmholtz. Ce calcul nous a permis aussi de déterminer les domaines de validité des expressions approchés de Chandrasekhar, souvent utilisées par les astrophysiciens, et celles de la limite "bulle chaude".

TABLE DES MATIERES

SOMMAIRE	i
TABLE DES MATIERES	iii
LISTE DES TABLEAUX	vi
LISTE DES FIGURES	vii
REMERCIEMENTS	viii
CHAPITRE 1: Introduction	1
CHAPITRE 2: Gaz de leptons : Formalisme général	5
2.1 Gaz d'électrons	5
2.1.1 Nombre d'électrons par unité de volume	6
2.1.2 La pression	10
2.1.3 L'énergie par unité de volume	11

2.1.4	L'entropie par unité de volume	14
2.2	Gaz de neutrinos	16
2.2.1	Nombre de neutrinos par unité de volume	16
2.2.2	Énergie de neutrinos par unité de volume	19
2.2.3	Pression de neutrinos	20
2.2.4	Entropie de neutrinos	21
CHAPITRE 3: Évaluation numérique des intégrales		22
3.1	Présentation des intégrales à évaluer	22
3.2	Méthode d'intégration gaussienne	23
3.3	Application des méthodes d'intégration gaussienne aux intégrales	27
CHAPITRE 4: Expressions approchées		31
4.1	Gaz d'électrons fortement dégénéré	31
4.1.1	Approximation pour la densité des électrons	33
4.1.2	Approximation pour la pression	37
4.1.3	Approximation pour la densité d'énergie cinétique	39

4.1.4	Approximation pour l'entropie	41
4.1.5	Domaine de validité des séries de Chandrasekhar	42
4.2	Limite "bulle chaude"	43
4.2.1	Domaine de validité	47
CHAPITRE 5: Applications		50
5.1	Région de présence de positrons	50
5.2	Détermination de ν à densité donnée	52
5.3	Application à la décompression de la matière neutronique	53
5.3.1	La cellule de Wigner Seitz	55
5.3.2	Résultats	58
CONCLUSION		62
ANNEXE 1		64
BIBLIOGRAPHIE		82

LISTE DES TABLEAUX

3-1	Convergence de l'entropie à basse température et haute densité	29
3-2	Convergence de l'entropie à basse température et faible densité	30
5-1	Énergie libre minimisée pour une densité $2.10^{-5} \text{ fm}^{-3}$	59

LISTE DES FIGURES

4-1	Domaine de validité des séries de Chandrasekhar.	48
4-2	Domaine de validité des approximations dans la limite “bulle chaude”. . .	49
5-1	Région de présence de positrons.	60
5-2	la Température T et la fraction des nucléons Y_e en fonction de la densité ρ pour une énergie fixe $e = 12MeV$	61

REMERCIEMENTS

J'aimerais tout d'abord remercier chaleureusement mon directeur de recherche, le professeur J.M. Pearson pour son excellente direction. Je lui suis très reconnaissante pour son précieux appui tout au long de ces deux dernières années. Il a su par sa patience, ses encouragements et ses inestimables conseils rendre ma première expérience dans le domaine de la recherche scientifique, plaisante et fructueuse. Mon cheminement auprès d'un excellent physicien de grande expérience restera gravé dans ma mémoire pour toujours.

J'aimerais également remercier Mona Onsi pour son aide. Ses explications lors de mon apprentissage de la programmation en Fortran m'ont beaucoup servis.

J'aimerais aussi remercier tous ceux qui ont aidé à ce que mon séjour, dans ce laboratoire sans fenêtre, soit plus ensoleillé: Razvan pour son support et ses nombreuses corrections de ce texte, Nadia, Wafia et Rachid pour leurs encouragements et leurs soutiens. J'adresse aussi mes sincères remerciements, à tout le personnel du laboratoire René-J.A.-Lévesque et du Département de Physique.

Un grand merci à Mohamed Hrimech pour ses conseils et son aide et à mes deux amies Rajaâ et Nadia pour les excellents moments que nous avons passés ensemble.

Je tiens à remercier la F.E.S. pour la bourse d'exemption de frais de scolarité, et le C.R.S.N.G. pour le fond de recherche de J.M. Pearson, qui m'ont permis de poursuivre mes études au Canada.

Je réserve mes derniers remerciements les plus chaleureux et les plus profonds à

ma famille, mon père, ma mère, mes frères et soeurs qui m'ont supporté inconditionnellement et encouragé durant toutes ces années, dans les moments les plus pénibles. À eux, je dédie ce mémoire , avec joie et amour.

À mon cher père

CHAPITRE 1

Introduction

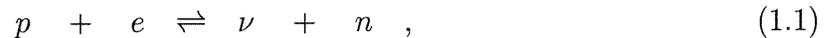
La présente étude concerne l'équation d'état du milieu stellaire, associée à la formation d'une étoile à neutrons lors des supernovae de type II, et aussi à la décomposition éventuelle d'une étoile à neutrons suite à sa collision avec une autre étoile à neutrons.

La supernova de type II marque la fin de l'évolution d'une étoile jeune et massive ($M \geq 8M_{\odot}$ où M_{\odot} est la masse du soleil). Dans le coeur de cette étoile, les conditions de température et de densité sont suffisantes pour déclencher des réactions nucléaires successives, au cours desquelles les protons se fusionnent en noyaux de ${}^4\text{He}$, les ${}^4\text{He}$ en noyaux de ${}^{12}\text{C}$, etc., passant par l' ${}^{16}\text{O}$ et le ${}^{28}\text{Si}$ pour finir au ${}^{56}\text{Fe}$. Une fois ce stade atteint, les réactions nucléaires dans le coeur, constitué essentiellement de fer, s'arrêtent, parce qu'elles ne génèrent plus d'énergie, mais elles continuent dans l'enveloppe. Ce coeur de fer continue donc à grandir jusqu'à ce que sa masse dépasse la limite $1.44M_{\odot}$ (dite limite de Chandrasekhar); à ce moment-là le système ne peut plus être stable.

Le coeur commence à s'effondrer très rapidement sous l'influence de sa propre gravité et se détache des enveloppes qui l'entourent. Cet effondrement continue jusqu'à ce que tous les noyaux se fusionnent entre eux pour former un seul noyau énorme: celui-ci constitue la matière nucléaire de densité $\rho_0 \equiv 2.7 \cdot 10^{14} \text{ g/cm}^3$ ($0.16 \text{ nucléons.fm}^{-3}$). Au moment de la formation de cette matière nucléaire, l'incompressibilité du milieu augmente très brusquement et l'effondrement s'arrête. Il en résulte un rebondissement qui va générer une onde de choc transmise aux couches externes de l'étoile; celles-ci sont alors expulsées violemment, ce qui est la caractéristique principale de l'explosion

supernovae. Le coeur reste intact comme étoile à neutron. La luminosité des supernovae peut dépasser 1% de celle d'une galaxie entière. Les astronomes chinois ont observé en l'an 1054 une telle explosion (nébuleuse de Crabe). Elle était visible en plein jour pendant un mois.

Expliquons plus en détail ce qui se passe durant cet effondrement, qui dure environ une seconde. Dans des conditions de densité très élevée et des température atteignant quelques milliards de degrés ($k_B T \sim 10 \text{ MeV}$), les atomes sont complètement ionisés. Ainsi, le système se compose seulement des noyaux et des électrons. Durant la phase de l'effondrement, la densité dans l'étoile augmente rapidement, et parallèlement les électrons ont une énergie de Fermi ε_F de plus en plus grande et donc les réactions de capture



deviennent possibles. Les protons sont donc transformés en neutrons et les noyaux qui restent deviennent de plus en plus riches en neutrons. Mais il arrive un point où les noyaux sont saturés (la ligne de "drip" neutronique), et les neutrons vont s'évaporer formant ainsi un gaz dans lequel baignent les noyaux; cette phase est connue sous le nom de "gouttelette". L'effondrement se fait avec une telle rapidité qu'à des très hautes densités (environ $10^{12} \text{ g.cm}^{-3} \equiv 6.10^{-4} \text{ nucléons/fm}^3$), les neutrinos n'auront plus le temps de s'échapper du système, à cause de la forte diffusion par les noyaux. Les neutrinos demeurent alors emprisonnés dans la matière (piègeage des neutrinos); ceci arrête la capture des électrons. Un équilibre se réalise alors dans la réaction de capture et il en résulte que la fraction leptonique $Y_l = Y_e + Y_\nu$ (nombre de leptons sur le nombre de nucléons) restera constante.

Une fois la densité moyenne atteint une valeur critique de l'ordre de $0.05 \text{ nucléons/fm}^3$, on observe un changement brusque dans la configuration des nucléons. Les noyaux deviennent de plus en plus rapprochés et commencent à se toucher, des ponts vont se former entre eux et le coeur entier qui était initialement formé de noyaux flottant dans

le gaz devient plutôt un liquide de protons et de neutrons avec des bulles occupées par une vapeur de neutrons; ainsi la matière est maintenant dans la phase “bulle”. Au fur et à mesure que la densité augmente, ces bulles rapetissent. Lorsque la densité atteint $2/3$ de sa valeur finale ρ_0 , les bulles disparaissent complètement et le coeur de l'étoile devient un seul et unique gros noyau formé de la matière nucléaire homogène.

Afin de traiter convenablement le processus de l'effondrement et de prévoir les caractéristiques et la suite de l'implosion, il est essentiel de déterminer l'équation d'état de la matière du coeur de l'étoile durant toutes les étapes de l'effondrement. De la même manière, on aura besoin de l'équation d'état pendant la décomposition qui aura lieu à la suite d'une collision entre des étoiles à neutrons. Dans ce mémoire, on est particulièrement intéressé par la contribution des électrons (aussi les neutrinos) à l'équation d'état. Les leptons contribuent toujours d'une façon significative à la pression P , l'énergie u et l'entropie S . La gamme de température qui nous intéresse est $k_B T \leq 10$ MeV; quant à celle de la densité ρ , une limite inférieure est imposée par le fait qu'on suppose que le gaz d'électrons est toujours uniforme. Suivant [1], ceci veut dire que la distance moyenne d entre les noyaux est beaucoup plus petite que le rayon atomique R_{at} ,

$$d = \left(\frac{AM}{\rho} \right)^{1/3} \ll R_{at} \quad . \quad (1.2)$$

Selon la théorie de Thomas Fermi des atomes, R_{at} est donné par

$$R_{at} = a_0(Z)^{-1/3} = \left(\frac{\hbar^2}{me^2} \right) Z^{-1/3} \quad , \quad (1.3)$$

où a_0 est le rayon de Bohr, m est la masse d'électron et Z le nombre atomique. C'est à dire que dans le cas général, le critère d'uniformité du gaz d'électrons est exprimé par

$$\rho \gg \left(\frac{me^2}{\hbar^2} \right)^3 AMZ \simeq 11.3.AZ \quad (g.cm^{-3}) \quad , \quad (1.4)$$

où A est le nombre de masse et M la masse des nucléons. Comme le coeur de l'étoile est formé essentiellement de ^{56}Fe , on exclue donc les densités inférieures à 10^4 g.cm^{-3} ($\sim 9.10^{-12} \text{ nucléons.fm}^{-3}$). Vu que la densité n'excédera pas celle de la matière nucléaire ρ_0 , la gamme de densités considérée ici est

$$9.10^{-12} \text{ (nucléons/fm}^3) \leq \rho \leq 0.16 \text{ (nucléons/fm}^3) \quad .$$

Les contributions de leptons sont normalement calculées en utilisant des approximations en séries formulées par Chandrasekhar. Pourtant, dans des conditions de basse densité et haute température, tel qu'on trouve dans la bulle chaude de supernovae type II et aussi la matière neutronique en décompression, ces approximations risquent de ne plus être valables. Le but de cette thèse est de développer les calculs exacts et de les insérer dans des programmes déjà développés au Département de Physique de l'Université de Montréal par H.Przysieznik et M.Onsi, [2] et [3], mais qui utilisent seulement des approximations. Celle-ci n'est pas la première fois qu'on calcule ces propriétés exactement, voir par exemple [4] (on remercie le professeur Gilles Fontaine de nous avoir signalé l'existence de cette article). Cependant, dans les conditions de basse densité et haute température qui nous intéressent, la création de paires électrons-positrons peut contribuer de façon significative à l'équation d'état. C'est l'inclusion de ces paires qui constitue l'élément nouveau de cette thèse.

CHAPITRE 2

Gaz de leptons : Formalisme général

2.1 Gaz d'électrons

Dans les conditions de température T et de pression P qui nous intéressent la matière stellaire est complètement ionisée. On peut écrire alors pour le nombre d'électrons par unité de volume

$$n_e = \frac{1}{\mu_e} N_A \rho \quad , \quad (2.1)$$

où N_A est le nombre d'Avogadro et où on a introduit la masse atomique par électron libre,

$$\frac{1}{\mu_e} = \sum_{A,Z} X_{AZ} \frac{Z}{A} \quad , \quad (2.2)$$

où X_{AZ} est la fraction par masse de l'isotope (Z,A) dans le gaz. Ici on a supposé qu'il n'y ait pas de positrons. Si les conditions sont telles qu'il y a une concentration non négligeable de paires positrons-électrons e^\pm , la quantité n_e donnée par (2.1) représente l'excès des électrons par rapport aux positrons.

Dans ces mêmes conditions de T et de P , les électrons constituent un gaz uniforme,

bien que les interactions entre les électrons et les noyaux ne soient pas négligeables (par contre les interactions entre les électrons peuvent être négligées). En même temps, le gaz d'électrons est au moins partiellement dégénéré, c'est à dire que la limite classique de Maxwell-Boltzmann de la mécanique statistique n'est pas du tout valable.

2.1.1 Nombre d'électrons par unité de volume

Puisque les électrons obéissent à la statistique de Fermi-Dirac, si on définit $n_-(p)dp$ le nombre d'électrons par unité de volume, ayant une impulsion entre p et $p + dp$, on a que

$$n_-(p)dp = \frac{G(p)dp}{\exp\left(\frac{\varepsilon - \mu}{kT}\right) + 1} \quad , \quad (2.3)$$

où μ est le potentiel chimique, ε est l'énergie totale d'électron,

$$\varepsilon = (p^2c^2 + m^2c^4)^{1/2} \quad , \quad (2.4)$$

et $G(p)$ est le nombre d'états par unité de volume d'une particule ayant une impulsion entre p et $p + dp$, donné par:

$$G(p)dp = \frac{gp^2dp}{2\pi^2\hbar^3} \quad , \quad (2.5)$$

où g est la multiplicité de spin qui égale à 2 pour les électrons. L'équation (2.3) devient donc

$$n_-dp = \frac{1}{\pi^2\hbar^3} \frac{p^2dp}{\exp\left(\frac{\varepsilon - \mu}{kT}\right) + 1} \quad . \quad (2.6)$$

Par ailleurs, soit n_- le nombre d'électrons total par unité de volume, alors

$$\int_0^\infty n_-(p) dp = n_- \quad , \quad (2.7)$$

d'où on a

$$n_- = \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{\exp\left(\frac{\varepsilon - \mu}{kT}\right) + 1} \quad . \quad (2.8)$$

On veut réécrire n_- en fonction de l'énergie, donc remplaçons p avec ε dans l'équation (2.8)

$$n_- = \frac{1}{\pi^2 (\hbar c)^3} \int_0^\infty \frac{\varepsilon (\varepsilon^2 - m^2 c^4)^{1/2}}{\exp\left(\frac{\varepsilon - \mu}{kT}\right) + 1} d\varepsilon \quad , \quad (2.9)$$

et en posant les changements de variables suivants:

$$x = \frac{\varepsilon - m_e c^2}{kT} \quad , \quad \beta = kT / m_e c^2 \quad , \quad \nu = \frac{\mu - m_e c^2}{kT} \quad , \quad (2.10)$$

on aura l'expression suivante pour le nombre d'électrons par unité de volume

$$n_- = \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^3 \beta^{3/2} \int_0^\infty \frac{(1 + \beta x)(2x + \beta x^2)^{1/2}}{\exp(x - \nu) + 1} dx. \quad (2.11)$$

L'effet de création de paires e^\pm

À très haute température, les collisions entre les particules peuvent donner lieu à la formation de paires électroniques (électrons et positrons, e^\pm); de ce fait, le nombre de par-

ticules n'est plus une quantité donnée, mais dépend des conditions de l'équilibre thermique. Donc, dans les conditions de T et de P qui nous intéressent on peut s'attendre à ce qu'une certaine concentration de paires e^\pm soit présente dans notre système en équilibre thermodynamique. En conséquence, dans notre étude on doit prendre en considération l'effet de création de paires.

On peut voir la création de paires e^\pm comme une "décomposition" des photons en électrons e^- et positrons e^+ , $\gamma \rightleftharpoons e^- + e^+$. Le fait que le système est en équilibre chimique implique que,

$$\mu_- + \mu_+ = \mu_\gamma \quad . \quad (2.12)$$

Comme le potentiel chimique du photon μ_γ est nul, la masse des photons étant nulle, on a

$$\mu_- = -\mu_+ \equiv \mu \quad . \quad (2.13)$$

En utilisant la même procédure présentée auparavant, on peut facilement obtenir une expression pour le nombre de positrons et comme ce sont aussi des fermions on peut les décrire par une fonction de distribution de Fermi-Dirac, ainsi on peut écrire à partir des équations (2.6) et (2.13),

$$n_+ dp = \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} \frac{p^2 dp}{\exp\left(\frac{\epsilon_+ + \mu}{kT}\right) + 1} \quad (2.14)$$

et en appliquant les changements de variables 2.10, on obtient le nombre de positrons par unité de volume

$$n_+ = \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^3 \beta^{3/2} \int_0^\infty \frac{(1 + \beta x)(2x + \beta x^2)^{1/2}}{\exp\left(x + \nu + \frac{2}{\beta}\right) + 1} dx \quad . \quad (2.15)$$

Par ailleurs, l'excès n_e est donné par la différence entre les populations d'électrons et de positrons ,

$$n_e = n_- - n_+ \quad . \quad (2.16)$$

En remplaçant n_+ et n_- par leurs expressions, on trouvera pour cet excès d'électrons dans le milieu stellaire

$$n_e = \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^3 \beta^{3/2} \int_0^\infty (1 + \beta x)(2x + \beta x^2)^{1/2} \left[\frac{1}{\exp(x - \nu) + 1} - \frac{1}{\exp(x + \nu + \frac{2}{\beta}) + 1} \right] dx \quad (2.17)$$

qu'on peut réécrire aussi comme:

$$n_e = \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^3 \beta^{3/2} \sinh \left(\nu + \frac{1}{\beta} \right) \int_0^\infty \frac{(1 + \beta x)(2x + \beta x^2)^{1/2}}{\cosh(x + 1/\beta) + \cosh(\nu + 1/\beta)} dx \quad . \quad (2.18)$$

De l'expression (2.17) on peut voir que pour β donné, ν augmente monotoniquement avec la densité n_e . À partir de (2.11) et (2.15) on peut déduire que l'effet de création de paires est négligeable ($\frac{n_+}{n_-} \ll 1$), pour $\nu \gg 1$ (n_e grand) et quelque soit β , ou pour $\beta \ll 1$ et quelque soit ν . Ainsi on prévoit qu'à des hautes températures et basses densités, on aura une quantité importante de paires dans le milieu stellaire. On note aussi que pour $\nu = -(1/\beta)$, on n'aura pas d'excès, c'est à dire que $n_- = n_+$.

2.1.2 La pression

La pression P d'un gaz de particules sans interaction est donnée par

$$P = \frac{1}{3} \int_0^\infty n(p) p v dp \quad (2.19)$$

où v est la vitesse associée à l'impulsion p . Soient P_+ et P_- les pressions exercées par les positrons et par les électrons respectivement. Pour un gaz d'électrons et positrons l'expression précédente devient

$$P_\pm = \frac{1}{3} \int_0^\infty n_\pm(p) p v dp \quad . \quad (2.20)$$

Or, à partir des expressions de p et ε

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad , \quad \varepsilon = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad , \quad (2.21)$$

on peut facilement déduire que

$$v = \frac{pc^2}{\varepsilon} \quad . \quad (2.22)$$

Mettons cette dernière équation dans (2.20)

$$P_\pm = \frac{c^2}{3\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{p^4}{\varepsilon (\exp(\frac{\varepsilon \pm \mu}{kT}) + 1)} dp. \quad (2.23)$$

On peut exprimer ce résultat en fonction de x , β et ν

$$P_{\pm} = \frac{1}{3\pi^2} \frac{m^4 c^5}{\hbar^3} \beta^{5/2} \int_0^{\infty} (\beta x^2 + 2x)^{3/2} \frac{1}{\exp(x \pm \nu + \frac{1}{\beta} \pm \frac{1}{\beta}) + 1} dx \quad (2.24)$$

En considérant la présence de positrons avec les électrons dans notre système, on peut voir que la pression est

$$P_e = P_+ + P_- \quad (2.25)$$

C'est-à-dire que l'expression de P_e est donnée par

$$P_e = \frac{1}{3\pi^2} \frac{m^4 c^5}{\hbar^3} \beta^{5/2} \int_0^{\infty} (\beta x^2 + 2x)^{3/2} \left[\frac{1}{\exp(x - \nu) + 1} + \frac{1}{\exp(x + \nu + \frac{2}{\beta}) + 1} \right] dx \quad (2.26)$$

2.1.3 L'énergie par unité de volume

Généralement, l'énergie cinétique totale par unité de volume d'un gaz de particules d'énergie cinétique t et impulsion p est

$$u = \int_0^{\infty} n(p) \cdot t(p) \cdot dp \quad . \quad (2.27)$$

C'est-à-dire que,

$$u = \int_0^{\infty} n(\varepsilon) \cdot t(\varepsilon) \cdot d\varepsilon \quad , \quad (2.28)$$

où l'énergie cinétique

$$t(\varepsilon) = \varepsilon - m_e c^2 \quad . \quad (2.29)$$

Ainsi, pour le cas d'un gaz d'électrons et de positrons on a que

$$u_{\pm} = \int_0^{\infty} t(\varepsilon) n_{\pm}(\varepsilon) d\varepsilon \quad , \quad (2.30)$$

où u_- est l'énergie cinétique totale par unité de volume des électrons et u_+ celle des positrons. En remplaçant n_- et n_+ par leurs expressions (2.11) et (2.15), on a

$$u_{\pm} = \frac{1}{\pi^2} \frac{m^4 c^5}{\hbar^3} \beta^{5/2} \int_0^{\infty} \frac{x(1 + \beta x)(2x + \beta x^2)^{1/2}}{\exp(x \pm \nu + \frac{1}{\beta} \pm \frac{1}{\beta}) + 1} dx \quad . \quad (2.31)$$

L'énergie cinétique totale des électrons et des positrons est $u_- + u_+$. L'énergie totale de ce système avec la masse des particules incluse est

$$u'_e = u_- + u_+ + (n_- + n_+) m c^2 \quad , \quad (2.32)$$

ou tout simplement

$$u'_e = u_- + u_+ + (n_e + 2n_+) m c^2 \quad . \quad (2.33)$$

Mais pour une densité ρ donnée, l'excès n_e est une constante donnée par l'équation (2.1). Il nous convient alors de redéfinir l'énergie interne totale par unité de volume

selon la section (24.9) de la référence [5],

$$u_e = u_- + u_+ + 2n_+ mc^2 \quad . \quad (2.34)$$

Avec cette définition et compte tenu des expressions de u_- , u_+ et n_+ , on a

$$u_e = \frac{1}{\pi^2} \frac{m^4 c^5}{\hbar^3} \beta^{5/2} \int_0^\infty (1 + \beta x)(2x + \beta x^2)^{1/2} \left[\frac{x}{\exp(x - \nu) + 1} + \frac{x + 2/\beta}{\exp(x + \nu + \frac{2}{\beta}) + 1} \right] dx \quad (2.35)$$

2.1.4 L'entropie par unité de volume

L'entropie a un rôle important dans notre étude. Son expression se déduit à partir de l'énergie, la pression et le nombre de particules dans le système. Pour un gaz homogène qui contient des différentes particules on a

$$TS = PV + E - \sum_i \mu_i N_i. \quad (2.36)$$

De cette équation et en posant $\mathcal{S}_e = S/V$, on peut exprimer l'entropie par unité de volume comme

$$\frac{\mathcal{S}_e}{k} = \frac{P + E/V - \sum_i \mu_i n_i}{kT}. \quad (2.37)$$

Notre définition de μ contient déjà l'énergie au repos (mc^2). Donc, si on interprète E comme l'énergie cinétique totale, il faudrait soustraire mc^2 de μ_- et μ_+ , C'est-à-dire que pour un gaz d'électrons et de positrons, on a

$$\frac{\mathcal{S}_e}{k} = \frac{1}{kT} (P + u_+ + u_- - (\mu_- - mc^2)n_- - (\mu_+ - mc^2)n_+) \quad (2.38)$$

et en tenant compte des équations (2.10), (2.13), (2.16) et (2.34), on peut simplifier cette dernière expression pour trouver que

$$\frac{\mathcal{S}_e}{k} = \frac{u_e + P_e}{kT} - \nu n_e. \quad (2.39)$$

À première vue, on penserait que cette quantité pourrait être facilement calculée si l'on connaissait u_e , P_e et n_e . Mais en fait, il s'avère que pour certaines conditions de température et de densité, le calcul doit être effectué à un haut degré de précision,

afin d'éviter les annulations quasi-totales, entre le premier terme et le deuxième terme, qui apparaissent pour les calculs de précision ordinaire. Une attention particulière est nécessaire surtout pour les basses températures. C'est pour cela, qu'on a décidé de développer analytiquement cette expression, afin de minimiser l'effet des annulations.

À partir des expressions de u_e , P_e et n_e , on peut écrire

$$\mathcal{S}_e = \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^3 \beta^{3/2} \int_0^\infty (2x + \beta x^2)^{1/2} \left[\frac{3(\nu + 2/\beta)(1 + \beta x) + (5x + 4\beta x^2)}{\exp(x + \nu + \frac{2}{\beta}) + 1} - \frac{3\nu(1 + \beta x) - (5x + 4\beta x^2)}{\exp(x - \nu) + 1} \right] dx \quad . \quad (2.40)$$

2.2 Gaz de neutrinos

En plus des électrons et de positrons, la matière stellaire peut dans des conditions extrêmes contenir des neutrinos et antineutrinos. On suppose qu'il y a un équilibre thermique entre les neutrinos et les antineutrinos comme nous l'avons fait pour le cas des électrons.

2.2.1 Nombre de neutrinos par unité de volume

Comme pour les électrons, les neutrinos et les antineutrinos obéissent à la statistique de Fermi-Dirac, on peut donc écrire

$$n_{\pm\nu}(p)dp = \frac{G(p)dp}{\exp\left(\frac{\varepsilon_{\pm}\mu}{kT}\right) + 1} \quad , \quad (2.41)$$

où $n_{-\nu}$ est la densité de neutrinos, $n_{+\nu}$ est celle des antineutrinos, et $G(p)$ est la fonction donnée par (2.5) avec cette fois, $g = 1$. Donc

$$n_{\pm\nu}(p)dp = \frac{1}{2\pi^2\hbar^3} \frac{p^2 dp}{\exp\left(\frac{\varepsilon_{\pm}\mu}{kT}\right) + 1} \quad , \quad (2.42)$$

qu'on peut écrire aussi en fonction de l'énergie ($\varepsilon = pc$ car $m_{\pm\nu} = 0$),

$$n_{\pm\nu}(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{1}{2\pi^2(\hbar c)^3} \frac{\varepsilon^2 d\varepsilon}{\exp\left(\frac{\varepsilon_{\pm}\mu}{kT}\right) + 1} \quad . \quad (2.43)$$

En substituant (2.10), l'équation précédente devient

$$n_{\pm\nu} = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{kT}{\hbar c} \right)^3 \int_0^\infty \frac{x^2}{\exp(x \pm \nu_\nu) + 1} dx \quad . \quad (2.44)$$

Comme dans le cas des électrons, l'excès de neutrinos est $n_\nu = n_{-\nu} - n_{+\nu}$. C'est-à-dire que

$$n_\nu = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{kT}{\hbar c} \right)^3 \int_0^\infty x^2 \left(\frac{1}{\exp(x - \nu_\nu) + 1} - \frac{1}{\exp(x + \nu_\nu) + 1} \right) dx. \quad (2.45)$$

On peut effectuer un calcul semblable à celui pour les électrons, mais il est utile de remarquer qu'un calcul plus simple peut être utilisé pour les neutrinos parce que l'intégrale (2.45) s'évalue analytiquement comme suit. Nous pouvons observer que les termes de l'équation (2.45) sont des fonctions de Fermi-Dirac d'ordre entier

$$F_n(\nu) = \int_0^\infty \frac{x^n}{\exp(x - \nu) + 1} dx \quad , \quad (2.46)$$

qui obéissent* [6] à l'équation

$$F_n(\nu) + (-)^{n+1} F_n(-\nu) = S_n(\nu) \quad , \quad \nu \geq 0 \quad , \quad (2.47)$$

où la série $S_n(\nu)$ est donnée par

$$S_n(\nu) = \frac{\nu^{n+1}}{n+1} \left[1 + \sum_{r=1}^n 2(n+1)n\dots(n-2r+2)(1-2^{1-2r})\zeta(2r)\nu^{-2r} \right] \quad . \quad (2.48)$$

*On tient à remercier le professeur Lattimer qui a attiré notre attention à cette référence.

$\zeta(2r)$ est la fonction zeta donnée par [7]

$$\zeta(2r) = \frac{2^{2r-1}\pi^{2r}}{(2r)!} |B_{2r}| \quad (2.49)$$

où B_{2r} est le nombre de Bernoulli [7]. Avec $n = 2$, (2.45) s'écrit maintenant

$$n_\nu = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{kT}{\hbar c} \right)^3 S_2(\nu_\nu) \quad (2.50)$$

Développons $S_2(\nu_\nu)$

$$S_2(\nu_\nu) = \frac{\nu_\nu^3}{3} \left[1 + 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \zeta(2) \cdot \nu_\nu^{-2} \right] \quad (2.51)$$

et comme $B_2 = \frac{1}{6}$ alors $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$. Donc

$$S_2(\nu_\nu) = \frac{\nu_\nu^3}{3} \left[1 + \pi^2 \cdot \nu_\nu^{-2} \right] \quad (2.52)$$

et en fonction du potentiel chimique des neutrinos μ_ν ,

$$S_2(\nu_\nu) = \frac{1}{3} \left(\frac{\mu_\nu}{kT} \right)^3 \left[1 + \pi^2 \left(\frac{kT}{\mu_\nu} \right)^2 \right] \quad (2.53)$$

En mettant cette dernière équation dans (2.47) on a l'expression finale du nombre de neutrinos par unité de volume

$$n_\nu = \frac{1}{6\pi^2} \left(\frac{\mu_\nu}{\hbar c} \right)^3 \left[1 + \pi^2 \left(\frac{kT}{\mu_\nu} \right)^2 \right] \quad (2.54)$$

2.2.2 Énergie de neutrinos par unité de volume

Comme les neutrinos et les antineutrinos n'ont pas de masse, leur énergie totale est due seulement à leur énergie cinétique, $\varepsilon = t$. Par ailleurs, leur énergie cinétique totale par unité de volume est donnée par

$$u_{\pm\nu} = \int_0^\infty \varepsilon n_{\pm\nu}(\varepsilon) d\varepsilon \quad , \quad (2.55)$$

où $u_{-\nu}$ et $u_{+\nu}$ sont les énergies cinétique totale de neutrinos et d'antineutrinos par unité de volume respectivement. En substituant les équations (2.10) et (2.44), on aura

$$u_{\pm\nu} = \frac{kT}{2\pi^2} \left(\frac{kT}{\hbar c} \right)^3 \int_0^\infty \frac{x^3}{\exp(x \pm \nu_\nu) + 1} dx \quad . \quad (2.56)$$

Dans notre système l'énergie cinétique totale de neutrinos et antineutrinos est

$$u_\nu = u_{+\nu} + u_{-\nu} \quad . \quad (2.57)$$

C'est-à-dire que,

$$u_\nu = \frac{kT}{2\pi^2} \left(\frac{kT}{\hbar c} \right)^3 \int_0^\infty \left(\frac{x^3}{\exp(x - \nu_\nu) + 1} + \frac{x^3}{\exp(x + \nu_\nu) + 1} \right) dx \quad (2.58)$$

qu'on peut exprimer en fonction de $S_3(\nu_\nu)$

$$u_\nu = \frac{kT}{2\pi^2} \left(\frac{kT}{\hbar c} \right)^3 S_3(\nu_\nu) \quad . \quad (2.59)$$

Évaluons maintenant $S_3(\nu_\nu)$. À partir de (2.45), étant donné que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ et que $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$ on peut écrire

$$S_3(\nu_\nu) = \frac{\nu_\nu^4}{4} \left[1 + 2\pi^2 \nu_\nu^{-2} + \frac{7}{15} \pi^4 \nu_\nu^{-4} \right] \quad (2.60)$$

qui devient, en fonction du potentiel chimique

$$S_3(\nu_\nu) = \frac{1}{4} \left(\frac{\mu_\nu}{kT} \right)^4 \left[1 + 2\pi^2 \frac{(kT)^2}{\mu_\nu^2} + \frac{7}{15} \pi^4 \frac{(kT)^4}{\mu_\nu^4} \right] \quad (2.61)$$

Finalement on trouve l'expression de l'énergie totale de neutrinos,

$$u_\nu = \frac{\mu_\nu}{8\pi^2} \left(\frac{\mu_\nu}{\hbar c} \right)^3 \left[1 + 2\pi^2 \frac{(kT)^2}{\mu_\nu^2} + \frac{7}{15} \pi^4 \frac{(kT)^4}{\mu_\nu^4} \right] \quad (2.62)$$

2.2.3 Pression de neutrinos

Pour calculer la pression de neutrinos il suffit de remarquer que si l'on remplace la vitesse v par la vitesse de neutrinos c dans l'expression(2.19), on trouve que

$$P_\nu = \frac{u_\nu}{3} \quad (2.63)$$

et en substituant (2.62), la pression est donnée par

$$P_\nu = \frac{\mu_\nu}{24\pi^2} \left(\frac{\mu_\nu}{\hbar c} \right)^3 \left[1 + 2\pi^2 \frac{(kT)^2}{\mu_\nu^2} + \frac{7}{15} \pi^4 \frac{(kT)^4}{\mu_\nu^4} \right] \quad (2.64)$$

2.2.4 Entropie de neutrinos

Son expression est obtenue directement à partir de la densité, l'énergie et la pression par l'expression

$$\frac{\mathcal{S}_\nu}{k} = \frac{u_\nu + P_\nu}{kT} - \nu_\nu n_\nu = \frac{3u_\nu}{4kT} - \nu_\nu n_\nu \quad . \quad (2.65)$$

En remplaçant n_ν , u_ν et P_ν par leurs expressions on a

$$\frac{\mathcal{S}_\nu}{k} = \frac{\mu_\nu^2 kT}{6(\hbar c)^3} \left[1 + \frac{7\pi^2 (kT)^2}{15 \mu_\nu^2} \right] \quad . \quad (2.66)$$

CHAPITRE 3

Évaluation numérique des intégrales

3.1 Présentation des intégrales à évaluer

Dans le cas des électrons, on a vu que toutes les quantités qui apparaissent dans l'équation d'état s'expriment en fonction des intégrales généralisées de Fermi

$$I(\sigma, \kappa, \lambda, \beta) = \int_0^\infty \frac{x^\sigma (2x + \beta x^2)^\kappa}{\exp(x - \lambda) + 1} dx \quad , \quad (3.1)$$

où σ est entier, κ est demi-entier et $\lambda = \nu$ ou $-(\nu + 2/\beta)$. Ces intégrales ne peuvent donc pas être évaluées analytiquement. Une approche numérique est nécessaire. Une méthode numérique à haute précision s'impose ici, puisque des annulations quasi-totales risquent de fausser le calcul pour certaines quantités, telles que l'excès des électrons, n_e , et l'entropie des électrons, S_e . Pour les calculs impliquant des quantités extrêmement petites, l'erreur d'arrondi devient un facteur à considérer attentivement. Une approche puissante est la méthode gaussienne, qui fournit des résultats à haute précision.

Puisque κ est un demi-entier, on est obligé de faire un changement de variable au voisinage de l'origine en posant

$$y = (2x + \beta x^2)^\kappa \quad . \quad (3.2)$$

Sans ce changement de variable l'intégrand varie comme x à une puissance non-entière, ce qui risque toujours d'introduire des erreurs importantes dans le calcul numérique. Par exemple, avant de faire cette transformation nous sommes tombés dans la situation absurde où l'entropie pour certains n_e et T est négative (voir tables 3-1 et 3-2). Mais avec ce changement de variable, on a pu améliorer la précision de calcul de l'entropie. Voici par exemple, la nouvelle expression de l'entropie en substituant la transformation (3.2) à (2.40),

$$\begin{aligned}
S_e = & \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^3 \beta^{3/2} \int_0^\infty \frac{y^2}{\sqrt{1+\beta y^2}(1+\sqrt{1+\beta y^2})} \times \\
& \left[\frac{1}{\exp\left(\frac{y^2}{1+\sqrt{1+\beta y^2}} + \nu + \frac{2}{\beta}\right)} \left[3\left(\frac{2}{\beta} + \nu\right)(1+\sqrt{1+\beta y^2} + \beta y^2) + \frac{5y^2(1+\sqrt{1+\beta y^2}) + 4\beta y^4}{(1+\sqrt{1+\beta y^2})} \right] \right. \\
& \left. - \frac{1}{\exp\left(\frac{y^2}{1+\sqrt{1+\beta y^2}} - \nu\right)} \left[3\nu(1+\sqrt{1+\beta y^2} + \beta y^2) - \frac{5y^2(1+\sqrt{1+\beta y^2}) + 4\beta y^4}{(1+\sqrt{1+\beta y^2})} \right] \right] dy \quad (3.3)
\end{aligned}$$

3.2 Méthode d'intégration gaussienne

Toute méthode d'intégration numérique dépend d'une approximation de la forme suivante

$$\int_a^b w(x)y(x)dx \simeq \sum_{i=1}^n A_i y(x_i) \quad , \quad (3.4)$$

où $w(x)$ est une fonction de pondération. Si les n points x_i sont équidistants, comme dans le cas de la méthode de Simpson, seuls les polynômes de degré inférieur ou égal à n sont calculés exactement, tandis que dans le cas des diverses méthodes gaussiennes l'espacement de points est tel que tous les polynômes de degré $\leq 2n$ sont calculés exactement. C'est pour cela que dans un certain sens, la méthode d'intégration gaussienne est plus précise que celles fondées sur des arguments également répartis. Nous exposons

maintenant la méthode de Gauss-Legendre et celle de Gauss-Laguerre, les seules qu'on a utilisées dans notre étude.

Méthode de Gauss-Legendre à n points

Elle se rapporte au cas où $w(x) = 1$ et les limites d'intégration sont en général normalisées à $[-1,1]$ et elle est donnée par

$$\int_{-1}^1 y(x) dx \simeq \sum_{i=1}^n A_i y(x_i) \quad , \quad (3.5)$$

où les n points x_i sont les noeuds du polynôme de Legendre d'ordre n , $P_n(x)$, et les coefficients A_i sont

$$A_i = \frac{2(1 - x_i^2)}{n^2 [P_{n-1}(x_i)]^2} \quad . \quad (3.6)$$

On trouve les A_i et x_i dans des tables [9].

Dans le cas général où l'intervalle d'intégration est $[a,b]$, il est préférable pour des raisons pratiques de travailler avec une valeur fixe de n , le nombre de points figurants dans (3.3); nous avons pris $n = 6$. Pour avoir alors une précision arbitraire on divise l'intervalle $[a,b]$ en M petits sous-intervalles. Ensuite on se sert de la formule de Gauss-Legendre après avoir transformé les bornes d'intégration de chaque sous-intervalle sous la forme $[-1,1]$. Donc en divisant l'intervalle $[a,b]$ en M blocs on a

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^M \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \quad , \quad (3.7)$$

où $[x_i, x_{i+1}]$ sont les petits intervalles après la division et

$$x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{M} \quad . \quad (3.8)$$

Afin qu'on puisse appliquer Gauss-Legendre dans ces intervalles, on translate chacun de ces intervalles à $[-1, 1]$ en faisant la transformation suivante

$$z^{(j)} = \frac{2M}{b-a}(x-a) - (2j+1) \quad , \quad (3.9)$$

c'est-à-dire que

$$x = \frac{b-a}{2M}(z^{(j)} + 2j+1) + a \quad j = 0, 1, \dots, M-1 \quad . \quad (3.10)$$

Il en résulte qu'après cette transformation, (3.7) devient

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2M} \sum_{i=1}^M \int_{-1}^1 f\left(x = \frac{b-a}{2M}(z + 2j+1) + a\right) dz \quad . \quad (3.11)$$

À cette forme on peut appliquer directement la formule de Gauss-Legendre et pour augmenter la précision sur $[a, b]$, il suffit d'augmenter M .

Méthode de Gauss-Laguerre à n points

Dans la méthode de Gauss-Laguerre, la fonction de pondération prend la forme $w(x) = e^{-x}$, et l'intervalle d'intégration est de 0 à $+\infty$; sa formule est

$$\int_0^{\infty} e^{-x} y(x) dx \simeq \sum_{i=1}^n A_i y(x_i) \quad , \quad (3.12)$$

où les x_i sont les racines du polynôme de Laguerre d'ordre n , $L_n(x)$, et les coefficients A_i sont donnés par

$$A_i = \frac{(n!)^2}{x_i [L'_n(x_i)]^2} \quad . \quad (3.13)$$

De même, les x_i et A_i sont tabulés [9].

Vu la forme de l'intégrale, la procédure de diviser $[0, +\infty]$ en M sous-intervalles, n'est pas valable. La seule généralisation possible est de remplacer la limite inférieure 0 par une valeur positive c , comme suit; on fait un changement de variable pour translater la limite inférieure de c à 0. Pour cela, posons $y = x - c$, on a alors

$$\int_c^{\infty} f(x) dx \simeq \int_0^{\infty} f(y + c) dy = \int_0^{\infty} e^{-y} e^y f(y + c) dy \quad . \quad (3.14)$$

En prenant $g(y) = e^y f(y + c)$, on aura la forme habituelle de Gauss-Laguerre. Ainsi, on écrit

$$\int_0^{\infty} e^{-y} g(y) dy \simeq \sum_{i=1}^n A_i g(y_i) \quad . \quad (3.15)$$

Dans notre calcul on a utilisé la formule de Gauss-Laguerre avec $n = 14$.

3.3 Application des méthodes d'intégration gaussienne aux intégrales

Après avoir mis au point les méthodes d'intégration gaussienne, expliquons maintenant plus en détail comment nous avons évalué nos intégrales et comment on s'est assuré d'obtenir la précision voulue. On cherche à obtenir une précision d'au moins six chiffres significatifs. Donc, on augmente la précision jusqu'à ce que ces six chiffres restent stables. À première vue, on peut penser que la méthode de Gauss-Laguerre suffit puisque les bornes de nos intégrales sont de 0 à $+\infty$. Mais pour $\nu \geq -2$, le choix de $n = 14$ points ne donnerait pas la précision désirée. En principe, on pourrait augmenter n , mais ceci entraînerait un changement de l'ordre de la méthode, ce qui n'est pas pratique car on serait obligé de changer, chaque fois, les tables de coefficients. Donc pour $\nu \geq -2$, il faut diviser en au moins deux blocs,

$$\int_0^{\infty} f(x)dx = \int_0^c f(x)dx + \int_c^{\infty} f(x)dx$$

où $c = \nu + 2$,

(3.16)

Ainsi, en translatant les bornes d'intégration, on peut utiliser la méthode de Gauss-Legendre pour le premier bloc et celle de Gauss-Laguerre pour le deuxième bloc.

En raison de la variation rapide de $f(x)$ au voisinage de $x \simeq \nu$, on aura besoin d'un grand nombre de points n autour de ce point. Donc, dans le cas où $\nu \geq 10$, pour ne pas avoir une densité très grande de points même dans une région où on n'a pas de variations rapides, on divise le premier bloc en deux autres, $[0,b]$ et $[b,c]$ et on aura,

$$\int_0^{\infty} f(x)dx = \int_0^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx + \int_c^{\infty} f(x)dx$$

où $b = \nu - 10$.

(3.17)

De même, on applique la méthode de Gauss-Legendre pour ces deux blocs après une translations des bornes.

Dans chaque bloc où l'on utilise Gauss-Legendre, on augmente M jusqu'à ce que on trouve la précision voulue. Il ne faut pas que M dépasse cette valeur minimale nécessaire car autrement on risque d'augmenter l'erreur d'arrondi. Ainsi, pour le premier bloc on a pu déterminer que la stabilité est assurée à partir de 100 points pour les cas de l'énergie et de la pression sur la gamme de n_e et T qui nous intéressent. Toutefois, pour n_e , à cause des annulations entre les termes au voisinage de l'origine, nous sommes obligés d'aller jusqu'à 300 points. Dans le cas de l'entropie, la situation est beaucoup plus compliquée surtout pour une région où le risque des annulations est grand (basse température et haute densité). Cette situation est bien représentée dans la Table 3-1 où S_e^1 et S_e^2 sont les entropies avec la transformation (3.2) et sans celle-ci respectivement. On voit que même si la convergence est plus rapide avec S_e^1 qu'avec S_e^2 , le problème de la stabilité s'impose. Un nombre énorme d'itérations est nécessaire juste pour arriver à une stabilité à trois chiffres significatifs, soit 200000. Ainsi, même si on augmente le nombre de pas, la stabilité à six chiffres apparaît impossible à cause des oscillations qui sont dues aux erreurs d'arrondi. Cependant, pour une densité plus basse ($n_e = 0.601183 \cdot 10^{-8} \text{fm}^{-3}$; voir la Table 3-2) la stabilité est atteinte à partir de 2000 à condition de faire la transformation (3.2) (Sans (3.2) et même avec un nombre énorme de pas, la stabilité à six chiffres n'est pas assurée (voir S_e^2)). Heureusement, dans le premier cas particulièrement complexe, une approximation par la série de Chandrasekhar s'avère suffisamment précise (voir le chapitre 4). Dans le bloc $[b, c]$ il n'y a pas de risques d'annulations, et un algorithme à 100 pas s'avère tout à fait satisfaisant pour toutes les quantités physiques à calculer.

Tableau 3-1: Convergence de la valeur calculée de l'entropie par rapport au nombre de pas à basse température et haute densité ($T=8.6.10^{-5}\text{Mev}$ et $\nu = 0.223058.10^7$ ($n_e = 0.314626.10^{-1}fm^{-3}$)). S_e^1 est l'entropie calculée avec la transformation (3.2) et S_e^2 celle calculée sans cette transformation.

M	S_e^1	S_e^2
100	$0.156752.10^{-5}$	$-0.124427.10^{-4}$
500	$0.156717.10^{-5}$	$0.216929.10^{-6}$
1000	$0.156716.10^{-5}$	$0.108536.10^{-5}$
2000	$0.156716.10^{-5}$	$0.139603.10^{-5}$
10000	$0.155279.10^{-5}$	$0.153719.10^{-5}$
20000	$0.125364.10^{-5}$	$0.124586.10^{-5}$
100000	$0.149275.10^{-6}$	$0.148638.10^{-6}$
200000	$0.138831.10^{-6}$	$0.138907.10^{-6}$
250000	$0.138791.10^{-6}$	$0.138592.10^{-6}$
300000	$0.138957.10^{-6}$	$0.138896.10^{-6}$
1000000	$0.138883.10^{-6}$	$0.139105.10^{-6}$

Tableau 3-2: Convergence de la valeur calculée de l'entropie par rapport au nombre de pas à basse température et faible densité ($T=8.6.10^{-5}\text{Mev}$ et $\nu = 0.825101.10^4$ ($n_e = 0.601183.10^{-8} \text{ fm}^{-3}$)).

M	S_e^1	S_e^2
100	$0.528972.10^{-11}$	$-0.754990.10^{-11}$
500	$0.507330.10^{-11}$	$0.392850.10^{-11}$
1000	$0.507075.10^{-11}$	$0.466679.10^{-11}$
2000	$0.507073.10^{-11}$	$0.492792.10^{-11}$
10000	$0.507073.10^{-11}$	$0.505796.10^{-11}$
20000	$0.507073.10^{-11}$	$0.506622.10^{-11}$
100000	$0.507073.10^{-11}$	$0.507033.10^{-11}$
200000	$0.507073.10^{-11}$	$0.507059.10^{-11}$
250000	$0.507073.10^{-11}$	$0.507063.10^{-11}$
300000	$0.507073.10^{-11}$	$0.507066.10^{-11}$
1000000	$0.507073.10^{-11}$	$0.507072.10^{-11}$

CHAPITRE 4

Expressions approchées

On a vu dans le chapitre précédent, comment évaluer numériquement les intégrales de la section (2.1). Dans ce chapitre on note toutefois que dans certaines conditions de densité et de température, il existe de très bonnes approximations sous forme analytique.

4.1 Gaz d'électrons fortement dégénéré

On s'intéresse dans cette section à la région des hautes densités qui a posée beaucoup de problèmes dans l'évaluation numérique des intégrales, tel que le cas de l'entropie, et comme on a déjà vu à la fin de la sous-section (2.1.1), cette région correspond à

$$\nu \gg 1 \quad , \quad (4.1)$$

où ν est donnée dans (2.10). On note aussi que (4.1) est une condition suffisante pour l'absence de paires e^\pm du milieu stellaire.

Lorsque l'inégalité (4.1) est satisfaite, Chandrasekhar a écrit toutes les quantités

n_e, u_e, P_e et S_e sous la forme suivante

$$I = \int_0^{\infty} \frac{du}{\exp(-u_0 + u) + 1} \cdot \frac{d\phi(u)}{du} \quad , \quad (4.2)$$

et y a appliqué le théorème de Sommerfeld

$$\int_0^{\infty} \frac{du}{\exp(-u_0 + u) + 1} \cdot \frac{d\phi(u)}{du} = \phi(u_0) + 2[c_2\phi''(u_0) + c_4\phi^{(4)}(u_0) + \dots] + 0(e^{-u_0}) \quad , (4.3)$$

où $\phi(u)$ s'annule à $u = 0$, et les c_k sont données en fonction de $\zeta(k) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^k}$ (la fonction zeta de Riemann) comme

$$c_k = 1 - \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} - \frac{1}{4^k} + \dots = [1 - 2^{-(k-1)}]\zeta(k) \quad . \quad (4.4)$$

on donne ici quelques valeurs de c_k dont on aura besoin dans notre calcul

$$c_2 = \frac{\pi^2}{12} \quad ; \quad c_4 = \frac{7\pi^4}{720} \quad ; \quad c_6 = \frac{31\pi^6}{30240} \quad ; \quad c_8 = \frac{127\pi^8}{1209600}; \dots \quad (4.5)$$

4.1.1 Approximation pour la densité des électrons

En absence de positrons, la densité d'électrons dans le système est maintenant $n_e = n_-$ donnée par (2.8)

$$n_e = \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{\exp\left(\frac{\varepsilon - \mu}{kT}\right) + 1} \quad . \quad (4.6)$$

Afin d'appliquer le théorème de Sommerfeld à cette expression on doit la transformer sous une forme convenable. On va faire le changement de variable suivant,

$$\frac{p}{mc} = \sinh \theta \quad , \quad (4.7)$$

c'est-à-dire que

$$p^2 dp = (mc)^3 \sinh^2 \theta \cosh \theta d\theta \quad (4.8)$$

et l'énergie totale des électrons est

$$\varepsilon = mc^2 \cosh \theta \quad . \quad (4.9)$$

L'expression (4.6) devient donc

$$n_e = \frac{(mc)^3}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{\sinh^2 \theta \cosh \theta d\theta}{\exp\left(\frac{mc^2 \cosh \theta - \mu}{kT}\right) + 1} \quad , \quad (4.10)$$

et si l'on pose maintenant

$$\frac{\cosh \theta}{\beta} = u \quad ; \quad du = \frac{\sinh \theta d\theta}{\beta} \quad , \quad (4.11)$$

on peut réécrire n_e comme,

$$n_e = \frac{(mc)^3}{\pi^2 \hbar^3} \beta \int_0^\infty \frac{du}{\exp(-u_0 + u) + 1} \cdot \frac{d\phi(u)}{du} \quad , \quad (4.12)$$

où on a mis

$$\frac{d\phi(u)}{du} = \sinh \theta \cosh \theta \quad ; \quad u_0 = \frac{\mu}{kT} \quad . \quad (4.13)$$

Trouvons maintenant la série correspondante à (4.12). Calculons $\phi(u_0)$ et les dérivés de ϕ (on va jusqu'au huitième terme pour plus de précision).

$$\phi(u_0) = \int_0^{u_0} \sinh \theta \cosh \theta du = mc^2 \int_0^{\theta_0} \sinh^4 \theta d\theta \quad , \quad (4.14)$$

où θ_0 est donnée par

$$\frac{p_0}{mc} = \sinh \theta_0 = X \equiv X(\nu, \beta) \quad . \quad (4.15)$$

De (4.11) et (4.13) on a que

$$u_0 = \frac{\cosh \theta_0}{\beta} = \frac{(1 + X^2)^{1/2}}{\beta} = \frac{\mu}{kT} \quad (4.16)$$

et en utilisant (2.10), on trouve la relation suivante

$$1 + X^2 = (1 + \nu\beta)^2 \quad . \quad (4.17)$$

Il s'en suit de (4.14) que

$$\phi(u_0) = \frac{1}{3\beta} \sinh^3 \theta_0 \quad . \quad (4.18)$$

Cette expression peut s'écrire comme

$$\phi(u_0) = \frac{1}{3\beta} X^3 \quad . \quad (4.19)$$

Pour la dérivée seconde de ϕ , on a que

$$\frac{d^2\phi}{du^2} = \frac{\beta}{\sinh \theta} (2 \sinh^2 \theta + 1) \quad , \quad (4.20)$$

ou en fonction de X ,

$$\left(\frac{d^2\phi}{du^2} \right)_{u=u_0} = \beta \frac{2X^2 + 1}{X} \quad . \quad (4.21)$$

Pour la quatrième dérivée, on trouve

$$\left(\frac{d^4\phi}{du^4} \right)_{u=u_0} = 3\beta^3 \frac{1}{X^5} \quad , \quad (4.22)$$

la sixième dérivée est donnée par

$$\left(\frac{d^6\phi}{du^6}\right)_{u=u_0} = 15\beta^5 \frac{6X^2 + 7}{X^9} . \quad (4.23)$$

Pour la huitième dérivée pour laquelle aucune expression n'a été publiée, je trouve

$$\left(\frac{d^8\phi}{du^8}\right)_{u=u_0} = 315\beta^7 \frac{16X^2(X^2 + 3) + 33}{X^{13}} \quad (4.24)$$

et finalement, à l'aide du théorème de Sommerfeld, on trouve la série correspondante à la densité des électrons, soit :

$$n_e = \frac{(mc)^3}{3\pi^2\hbar^3} X^3 \left[1 + \frac{\pi^2\beta^2}{2} \frac{2X^2 + 1}{X^4} + \frac{7\pi^4}{40} \frac{\beta^4}{X^8} + \frac{31\pi^6}{336} \beta^6 \frac{6X^2 + 7}{X^{12}} + \frac{127\pi^8}{640} \beta^8 \frac{16X^2(X^2 + 3) + 33}{X^{16}} + \dots \right] . \quad (4.25)$$

4.1.2 Approximation pour la pression

De façon équivalente, la condition (4.1) nous indique que la pression provient seulement des électrons, $P_e = P_-$. C'est-à-dire que

$$P_e = \frac{c^2}{3\pi^2\hbar^3} \int_0^\infty \frac{p^4 dp}{\varepsilon(\exp(\frac{\varepsilon-\mu}{kT}) + 1)} \quad . \quad (4.26)$$

Essayons de réécrire cette expression sous une forme équivalente à (4.2) afin qu'on puisse appliquer le théorème de Sommerfeld. En employant le même changement de variable donné à (4.7), on a que

$$\frac{p^4 dp}{\varepsilon} = m^4 c^3 \sinh^4 \theta d\theta \quad . \quad (4.27)$$

En mettant cette expression dans (4.26), on aura

$$P_e = \frac{m^4 c^5}{3\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{\sinh^4 \theta d\theta}{\exp(\frac{mc^2 \cosh \theta - \mu}{kT}) + 1} \quad , \quad (4.28)$$

qu'on peut aussi réécrire comme

$$P_e = \frac{m^4 c^5}{3\pi^2 \hbar^3} \beta \int_0^\infty \frac{du}{\exp(-u_0 + u) + 1} \cdot \frac{d\phi(u)}{du} \quad , \quad (4.29)$$

où u est la variable donnée à (4.11), mais cette fois

$$\frac{d\phi(u)}{du} = \sinh^3 \theta \quad . \quad (4.30)$$

En intégrant cette dernière expression, on aura

$$\phi(u_0) = \frac{1}{8\beta} f(X) \quad , \quad (4.31)$$

où la fonction $f(X)$ est définie par Chandrasekhar [ch.10] comme

$$f(X) = X(2X^2 - 3)(1 + X^2)^{1/2} + 3 \sinh^{-1} X \quad . \quad (4.32)$$

Maintenant, en dérivant (4.30) on aura pour la dérivé seconde

$$\left(\frac{d^2 \phi}{du^2} \right)_{u=u_0} = 3\beta X (X^2 + 1)^{1/2} \quad , \quad (4.33)$$

la quatrième dérivé

$$\left(\frac{d^4 \phi}{du^4} \right)_{u=u_0} = 3\beta^3 \frac{(X^2 + 1)^{1/2} (2X^2 - 1)}{X^3} \quad , \quad (4.34)$$

la sixième dérivé

$$\left(\frac{d^6 \phi}{du^6} \right)_{u=u_0} = -45\beta^5 \frac{(1 + X^2)^{1/2}}{X^7} \quad , \quad (4.35)$$

et finalement pour la huitième dérivé, je trouve

$$\left(\frac{d^8 \phi}{du^8} \right)_{u=u_0} = -945\beta^7 \frac{(1 + X^2)^{1/2} (2X^2 + 3)}{X^{11}} \quad . \quad (4.36)$$

En appliquant le théorème de Sommerfeld à (4.29), on obtient la série correspondante à la pression

$$P_e = \frac{m^4 c^5}{24\pi^2 \hbar^3} f(X) \left[1 + 4\pi^2 \beta^2 \frac{X(X^2 + 1)^{1/2}}{f(X)} + \frac{7\pi^4}{15} \beta^4 \frac{(X^2 + 1)^{1/2}(2X^2 - 1)}{X^3 f(X)} - \frac{31\pi^6}{42} \beta^6 \frac{(1 + X^2)^{1/2}}{X^7 f(X)} - \frac{127\pi^8}{80} \beta^8 \frac{(1 + X^2)^{1/2}(2X^2 + 3)}{X^{11} f(X)} + \dots \right] . \quad (4.37)$$

4.1.3 Approximation pour la densité d'énergie cinétique

Comme pour la pression, quand $\nu \gg 1$, l'énergie cinétique totale est due seulement aux électrons. C'est à dire que

$$u_e = \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{(\varepsilon - mc^2) p^2 dp}{\exp(\frac{\varepsilon - \mu}{kT}) + 1} , \quad (4.38)$$

qu'on peut réécrire en fonction de θ comme

$$u_e = \frac{m^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{\sinh^2 \theta \cosh \theta (\cosh \theta - 1) d\theta}{\exp(\frac{mc^2 \cosh \theta - \mu}{kT}) + 1} . \quad (4.39)$$

Afin d'évaluer cette intégrale, effectuons les mêmes changements que dans le cas de la densité et de la pression. Écrivons-la comme

$$u_e = \frac{m^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} \beta \int_0^\infty \frac{du}{\exp(-u_0 + u) + 1} \cdot \frac{d\phi(u)}{du} , \quad (4.40)$$

où

$$\frac{d\phi(u)}{du} = \sinh \theta \cosh \theta (\cosh \theta - 1) \quad . \quad (4.41)$$

D'où on déduit que

$$\phi(u_0) = \frac{1}{24\beta} g(X) \quad , \quad (4.42)$$

où la fonction $g(X)$ est donnée par

$$g(X) = 8X^3((1 + X^2)^{1/2} - 1) - f(X) \quad . \quad (4.43)$$

La seconde dérivé est

$$\left(\frac{d^2\phi}{du^2}\right)_{u=u_0} = \beta \frac{(3X^2 + 1)(X^2 + 1)^{1/2} - (2X^2 + 1)}{X} \quad , \quad (4.44)$$

la quatrième dérivé est

$$\left(\frac{d^4\phi}{du^4}\right)_{u=u_0} = 3\beta^3 \frac{(X^2 + 1)^{1/2}(2X^4 - X^2 + 1) - 1}{X^5} \quad , \quad (4.45)$$

la sixième dérivé est

$$\left(\frac{d^6\phi}{du^6}\right)_{u=u_0} = 15\beta^5 \frac{(1 + X^2)^{1/2}(7 + X^2) - (7 + 6X^2)}{X^9} \quad , \quad (4.46)$$

et pour la huitième dérivé, je trouve

$$\left(\frac{d^8\phi}{du^8}\right)_{u=u_0} = 315\beta^7 \frac{(1+X^2)^{1/2}(2X^4+27X^2+33) - (16X^4+48X^2+33)}{X^{13}} . \quad (4.47)$$

Ainsi, on aura comme série pour l'énergie cinétique totale l'expression suivante

$$\begin{aligned} u_e &= \frac{m^4 c^5}{24\pi^2 \hbar^3} g(X) \left[1 + 4\pi^2 \beta^2 \frac{(3X^2+1)(X^2+1)^{1/2} - (2X^2+1)}{Xg(X)} \right. \\ &+ \frac{7\pi^4}{5} \beta^4 \frac{(X^2+1)^{1/2}(2X^4-X^2+1) - 1}{X^5 g(X)} + \frac{31\pi^6}{42} \beta^6 \frac{(1+X^2)^{1/2}(7+X^2) - (7+6X^2)}{X^9 g(X)} \\ &\left. + \frac{127\pi^8}{1680} \beta^8 \frac{(1+X^2)^{1/2}(2X^4+27X^2+33) - (16X^4+48X^2+33)}{X^{13} g(X)} + \dots \right] . \quad (4.48) \end{aligned}$$

4.1.4 Approximation pour l'entropie

On a calculé la série correspondante à l'entropie directement à partir de sa définition, donnée par (2.39), en remplaçant la densité, l'énergie et la pression par leurs approximations. En mettant les expressions (4.25), (4.37) et (4.48) dans l'équation (2.39), on trouve la série correspondante à l'entropie.

$$\begin{aligned} S_e &= \frac{1}{3} \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^3 \beta X (1+X^2)^{1/2} \left[1 + \frac{7}{30} \pi^2 \beta^2 \frac{(2X^2-1)}{X^4} - \frac{31\pi^4}{56} \beta^4 \frac{1}{X^8} \right. \\ &\quad \left. - \frac{127}{80} \pi^6 \beta^6 \frac{2X^2+3}{X^{12}} + \dots \right] . \quad (4.49) \end{aligned}$$

Cette fonction est de l'ordre 7 pour la variable β . En considérant la relation $TS = dE$ on retrouve que l'énergie, tel que (4.48), est une fonction d'ordre 8 en β .

4.1.5 Domaine de validité des séries de Chandrasekhar

On a déjà vu que les développements en séries ((4.25), (4.37), (4.48) et (4.49)) ne sont valables que dans la limite où $\nu \gg 1$. Mais il reste à déterminer exactement les limites correspondantes de densités et de températures. Pour cette raison, on a calculé toutes nos quantités physiques dans des différentes conditions de T et ν avec deux méthodes: le calcul numérique direct des intégrales, ainsi que le calcul des séries correspondantes. En faisant le rapport des résultats obtenus avec ces deux méthodes, on a pu déterminer pour plusieurs T la limite inférieure de densité, à partir de laquelle le calcul avec les séries correspondantes est valide. Les résultats sont présentés dans la figure 4-1. Les quatre courbes délimitent les domaines de validité des approximations en séries pour la densité, l'énergie, la pression et l'entropie des électrons dans notre milieu stellaire. Pour la région en-dessous des courbes, le calcul des séries correspondantes est une excellente approximation puisque les limites sont établies avec une précision de 10^{-6} . On note que même pour les densités qui délimitent la validité de la série, le calcul avec les intégrales est obtenu avec une grande précision. C'est-à-dire que même si on augmente le nombre de pas les résultats restent les mêmes. Ceci n'est pas le cas en allant plus loin en-dessous des courbes vers des grandes densités et des basses température (le cas de l'entropie). Dans ces conditions, le calcul avec les séries s'impose.

4.2 Limite “bulle chaude”

Pour des températures très élevées

$$\beta \gg 1 \quad , \quad (4.50)$$

et des densités si basses que ν atteint sa valeur minimale

$$\nu = -\frac{1}{\beta} \quad , \quad (4.51)$$

les paires e^\pm créées sont très nombreuses comparées aux électrons d’ionisation [10], et donc

$$n_\pm \gg n_e \equiv n_- - n_+ \quad . \quad (4.52)$$

Les conditions (4.50) et (4.51) sont approximativement réalisées dans les bulles chaudes des supernovas. Avec la condition (4.51), les équations (2.11) et (2.15) se réduisent à

$$n_\pm \simeq \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^3 \beta^{3/2} \int_0^\infty \frac{(1 + \beta x)(2x + \beta x^2)^{1/2}}{\exp(x + \frac{1}{\beta}) + 1} dx \quad . \quad (4.53)$$

En faisant la limite (4.50), on a comme approximation pour n_\pm à haute température,

$$n_\pm \simeq \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^3 \beta^3 \int_0^\infty \frac{x^2}{e^x + 1} dx = \frac{3}{2\pi^2} \zeta(3) \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^3 \beta^3 \quad . \quad (4.54)$$

C'est-à-dire que la densité n_{\pm} est fonction seulement de la température,

$$n_{\pm} \simeq 15.21.T^3 (cm^{-3}) \quad . \quad (4.55)$$

On trouve une situation semblable dans le cas d'un gaz de photons en équilibre thermique, où la densité des photons est

$$n_{\gamma} = \frac{1}{\pi^2(\hbar c)^3} \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^2 d\varepsilon}{\exp \frac{\varepsilon}{kT} - 1} = \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^3 \beta^3 = 20.28.T^3 (cm^{-3}) \quad . \quad (4.56)$$

On voit que n_{\pm} et n_{γ} ont la même dépendance en T et que

$$n_{\pm} = \frac{3}{4} n_{\gamma} \quad . \quad (4.57)$$

De l'équation (2.1), on peut remarquer que la condition $n_{\pm} \gg n_e$ nécessaire pour la validité de (4.51), peut être exprimée comme

$$\frac{\rho}{\mu_e} \ll 2.5.10^4 . T_9^3 \quad (g.cm^{-3}) \quad . \quad (4.58)$$

Densité d'énergie interne totale

Avec les conditions (4.50) et (4.51) et à partir de (2.35), la densité d'énergie interne totale devient

$$u_e \simeq \frac{2}{\pi^2} \frac{m^4 c^5}{\hbar^3} \beta^4 \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x + 1} = \frac{7\pi^2}{60} \frac{1}{\hbar^3} kT^4 \quad , \quad (4.59)$$

où u_e a la même dépendance en température que dans la loi de Stefan-Boltzmann. Pour un gaz de photons en équilibre thermique, la densité d'énergie est

$$u_\gamma = \frac{1}{\pi^2(\hbar c)^3} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^3 d\varepsilon}{\exp \frac{\varepsilon}{kT} - 1} = aT^4 \quad , \quad (4.60)$$

où la constante a est donnée par

$$a = \frac{\pi^2}{15} \frac{k^4}{(\hbar c)^3} \quad . \quad (4.61)$$

En comparant (4.59) et (4.60), on trouve que

$$u_e = \frac{7}{4} u_\gamma = \frac{7}{4} aT^4 \quad . \quad (4.62)$$

Pression des électrons

En substituant les limites (4.50) et (4.51) dans l'expression (2.26), la pression dans ces conditions devient

$$P_e = \frac{2}{3\pi^2} \frac{m^4 c^5}{\hbar^3} \beta^4 \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x + 1} \quad . \quad (4.63)$$

En regardant (4.59), on remarque que

$$P_e = \frac{1}{3} u_e \quad . \quad (4.64)$$

Comme dans le cas d'un gaz de photons où

$$P_\gamma = \frac{1}{3\pi^2(\hbar c)^3} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^3 d\varepsilon}{\exp \frac{\varepsilon}{kT} - 1} = \frac{1}{3} a T^4 \quad , \quad (4.65)$$

dans la limite de "bulle chaude" la pression aussi varie avec T^4 ,

$$P_e = \frac{7}{4} P_\gamma = \frac{7}{12} a T^4 \quad . \quad (4.66)$$

Entropie des électrons

À partir de l'expression de l'entropie donnée dans (2.39) et en y substituant (4.64), dans les limites (4.50) et (4.51), l'entropie est proportionnelle à l'énergie

$$\frac{S_e}{k} = \frac{4}{3} \frac{u_e}{kT} \quad . \quad (4.67)$$

Donc, dans la limite "bulle chaude", l'entropie varie monotoniquement avec la température

$$S_e = \frac{7a}{3} T^3 \quad . \quad (4.68)$$

Constatons qu'on a la même dépendance en T que si on avait un gaz de photons, puisque dans ce cas

$$S_\gamma = \frac{4}{3T} u_\gamma = \frac{4a}{3} T^3 \quad . \quad (4.69)$$

C'est-à-dire que

$$S_e = \frac{7}{4} S_\gamma \quad . \quad (4.70)$$

4.2.1 Domaine de validité

Les conditions (4.50) et (4.51) ne donnent pas exactement le domaine de validité des approximations de la limite “bulle chaude”. Comme dans le cas des séries de Chandrasekhar et afin de déterminer ce domaine, on a calculé pour des différentes températures et densités, l'énergie, la pression et l'entropie des électrons avec le calcul numérique et à partir des approximations. En calculant pour plusieurs valeurs de T et n_e , le rapport des résultats des deux méthodes, on a pu déterminer (avec une précision de moins de 10^{-2}) la limite supérieure des densités dans laquelle on peut utiliser ces approximations. La figure 4-2 représente cette région de validité qui est située en-dessus de la courbe.

La véritable bulle chaude associée à une explosion supernovae, se forme juste après le rebondissement entre l'étoile à neutron embryonnaire et son enveloppe à une densité $n_e = 10^{-4} \text{ fm}^{-3}$ et une température $T \simeq 1 \text{ MeV}$. Ce point est indiqué avec une croix sur la figure 4-2; on voit bien que la limite “bulle chaude” présentée ci-haut ne s'applique pas à la véritable bulle chaude. Effectivement, cela a été confirmé par le calcul du rapport de l'énergie obtenue à partir de l'évaluation numérique de son expression exacte (2.35) et celle à partir de son approximation (4.62). Ce rapport est de l'ordre de 650 pour la bulle chaude. De même, le rapport des entropies calculées par les deux méthodes est de l'ordre de 37.

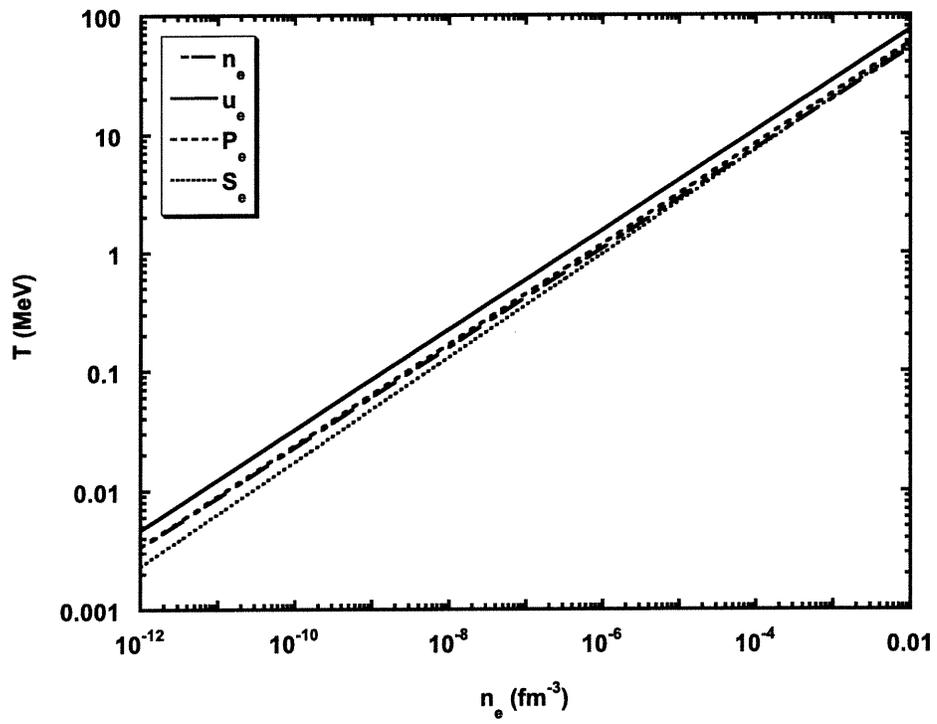


Figure 4-1: Domaine de validité des séries de Chandrasekhar.

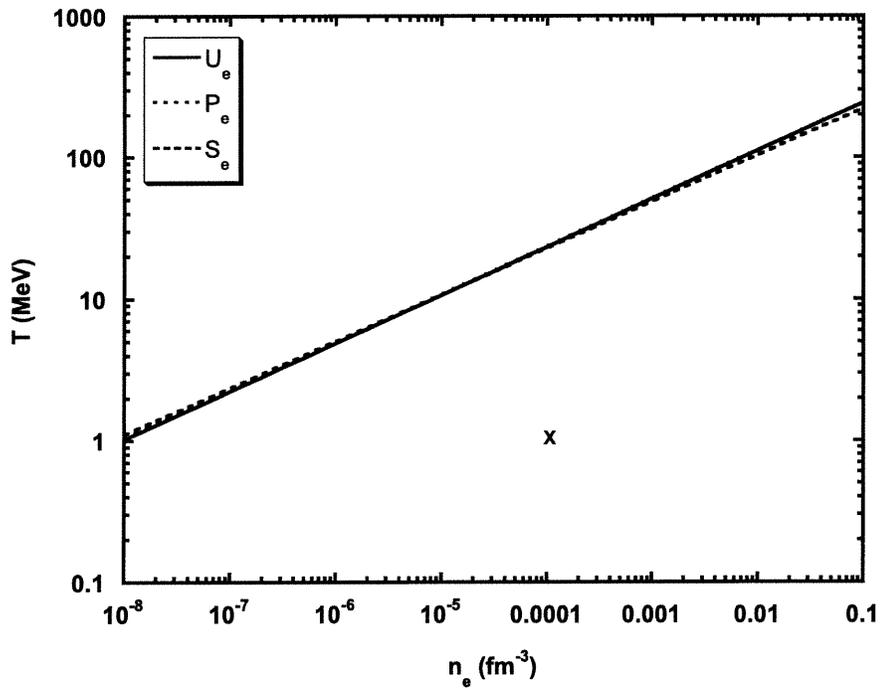


Figure 4-2: Domaine de validité des approximations dans la limite "bulle chaude".

CHAPITRE 5

Applications

Dans ce chapitre on va présenter quelques résultats que l'on a obtenus. Ainsi, dans la section (5.1) nous allons déterminer la gamme de densités et de températures pour lesquelles il y aura une présence appréciable de positrons dans le milieu stellaire. Dans la section (5.2), nous expliquerons comment nous avons pu déterminer le potentiel chimique à partir de la densité n_e , inversement à ce qu'on a fait jusqu'à maintenant. Dans tous les calculs précédents, nous avons évalué toutes nos intégrales ainsi que leurs approximations en fixant ν afin de trouver les densités des électrons. Mais dans la réalité physique et dans toutes les autres applications de l'équation d'état, c'est la densité n_e qui est donnée, tandis que ν est inconnu. Finalement, dans la section (5.3), nous donnerons les résultats de l'application de notre programme au problème de la décompression de la matière neutronique.

5.1 Région de présence de positrons

Nous avons déjà signalé (section 2.1) que la présence de positrons dans le milieu stellaire n'est prise en considération que dans certaines conditions. On ne connaissait pas exactement dans quelles conditions de température et de densité l'effet de création de paires aura lieu. Toutefois, on sait que la création de paires e^\pm ne se fait qu'aux hautes températures et basses densités. Pour déterminer avec précision les conditions physiques dans lesquelles les positrons sont présents, on a calculé pour des différentes températures et densités, le rapport des densités de positrons et des électrons apparais-

sant dans notre système. La figure 5.1 présente nos résultats. Dans la région en-dessous de la courbe, représentée par la ligne continue, la concentration de positrons est très petite vis-à-vis de celle des électrons, le rapport n_+/n_- est inférieur à 1%. Dans celle délimitée par les deux courbes, le rapport des deux densités prend des valeurs entre $0.1 \leq n_+/n_- \leq 0.9$. Pour celle en-dessus de la ligne pointillée, les conditions de température et de densité sont telles que les deux concentrations sont comparables, le rapport n_+/n_- dépasse les 90%.

5.2 Détermination de ν à densité donnée

Nous recherchons à évaluer le potentiel chimique μ et le paramètre ν , en fonction des densités des électrons lors de l'effondrement des étoiles à neutrons. Il nous est impossible d'obtenir une expression directe de ν en fonction de n_e et nous sommes contraints d'aborder le calcul de façon inverse. Ainsi, nous avons calculé les densités des électrons en évaluant les intégrales précédentes (3.1) et leurs approximations pour différentes valeurs de ν . Par la suite, en faisant appel à la méthode de bisection on trouve la valeur de ν qui correspond à une densité donnée. Selon le théorème de la valeur moyenne pour une fonction continue, on sait qu'il existe au moins une racine pour l'équation

$$f(x) = 0 \quad , \quad (5.1)$$

dans l'intervalle $[a, b]$ si $f(a)$ et $f(b)$ ont des signes opposés. La méthode de bisection est basée sur ce théorème et consiste à déterminer numériquement cette racine. En connaissant un intervalle $[a, b]$ où le rapport $f(a)/f(b)$ est négatif, on évalue la fonction dans le milieu de $[a, b]$, $x = (a + b)/2$. En vérifiant le signe dans ce point x , on obtient un autre intervalle, plus petit, qui contient la racine, soit $[a, x]$ ou $[x, b]$. Après chaque itération, les limites de l'intervalle contenant la racine diminuent par un facteur de deux. Si après n itérations, la racine est dans un intervalle de grandeur ε_n , donc après la prochaine itération la racine sera dans un autre intervalle de grandeur $\varepsilon_n/2$. Le processus de vérification du signe, se continue jusqu'à ce qu'on a

$$\left| \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{f(x_i)} \right| \leq \varepsilon \quad , \quad (5.2)$$

où $[x_i, x_{i+1}]$ est l'intervalle obtenu après un certain nombre d'itérations et qui contient bien sûr la racine, et ε une constante très petite et sa valeur dépend de la précision qu'on désire avoir, soit dans notre cas 10^{-6} .

5.3 Application à la décompression de la matière neutronique

Notre image de la désintégration d'une étoile à neutrons est extrêmement simpliste. On suppose qu'au départ l'étoile à neutrons a une température $T = 0$; au centre de cette étoile la densité est ρ_0 . Une fraction Y_e des nucléons dans cet objet consiste de protons; vu la neutralité exacte de l'étoile, il va y avoir un nombre égal d'électrons. Une valeur typique de cette fraction est $Y_e = 0.04$ (figure-2 de [3]). La figure-1 de [3] indique une énergie par nucléon de 12 MeV, il faut bien noter que cette énergie est constituée d'une contribution purement nucléaire, aussi de la contribution de l'énergie cinétique des électrons et l'interaction coulombienne entre les protons d'une part, et entre les électrons et protons d'autre part (l'interaction coulombienne entre les électrons est négligeable dans les conditions normales). On remarque que cette énergie par nucléon est positive et pourtant l'étoile est stable. Mais nous n'avons pas tenu compte de l'énergie gravitationnelle E_{grav} , donc en tenant compte de celle-ci, l'énergie totale de l'étoile s'écrit

$$E = 12A + E_{grav} \quad \text{MeV} \quad , \quad (5.3)$$

où A est le nombre total de nucléons, et l'énergie gravitationnelle d'une étoile de densité uniforme est donnée par

$$E_{grav} = -\frac{3GM^2A^2}{5R} \quad , \quad (5.4)$$

où G est la constante de gravitation(= $6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$), M la masse du nucléon et $R = r_0A^{1/3}$ le rayon de l'étoile qui est assimilée à un énorme noyau; une valeur typique de R est de 10 km. En substituant cette expression de E_{grav} dans (5.3), on

aura

$$E = \left(12 - \frac{3GM^2 A^{2/3}}{5r_0}\right)A \text{ MeV} . \quad (5.5)$$

Avec $A \simeq 10^{57}$, on a

$$\frac{3GM^2 A^{2/3}}{5r_0} \simeq 67 \text{ MeV} . \quad (5.6)$$

l'énergie totale E est alors négative. Il en résulte que l'étoile à neutrons est liée par la gravité.

On a toujours la possibilité de collision de deux étoiles à neutrons [11], bien sûr après des milliards d'années. Comme résultat de cette collision, on peut imaginer qu'il y aura des éjections de petits morceaux de la matière neutronique. Comparé au cas de l'étoile, le nombre total A de nucléons constituant ces morceaux est beaucoup plus petit, de sorte que

$$\frac{3GM^2 A^{2/3}}{5r_0} \ll 12 \text{ MeV} . \quad (5.7)$$

L'énergie totale de ces morceaux est alors positive, et vu le manque de liaison, une décompression très rapide va suivre.

Durant cette décompression, il va y avoir des désintégrations β^- . Cependant, pour simplifier le modèle nous allons supposer que les neutrinos restent piégés dans le morceau de l'étoile. Ils n'emportent aucune énergie à l'extérieur de l'étoile. On néglige en même temps le rayonnement électromagnétique. Donc selon ce modèle extrêmement grossier, la décompression est adiabatique. D'ailleurs, vu que le processus a lieu dans le vide, les morceaux de matière ne font aucun travail. L'énergie est alors constante

(expansion Joule), $e = 12$ MeV.

On pourrait bien imaginer que pendant cette décomposition, on retrace la même séquence qui avait lieu lors de l'effondrement mais dans un sens inverse. Donc au début, on aura encore, pour un certain moment, une phase où la matière est complètement homogène suivie par les deux phases inhomogènes; celle de bulle et par suite celle de gouttelette. Notre intérêt pour ce processus de décompression demeure dans le fait que cette formation de gouttelette constitue un site possible pour la nucléosynthèse.

5.3.1 La cellule de Wigner Seitz

Afin d'étudier la matière nucléaire inhomogène à l'intérieur de l'étoile, nous adoptons le modèle de Wigner Seitz, tel que développé dans [3]. Selon ce modèle, les nucléons sont distribués d'une manière symétrique autour du centre d'une cellule sphérique, dite cellule de Wigner-Seitz (W.S.), de rayon R_c . Les densités moyennes de neutrons et de protons à l'intérieur de ces cellules doivent être équivalentes aux densités macroscopiques correspondantes: $\bar{\rho}_n$, qui est donnée par

$$\bar{\rho}_n = \bar{\rho}(1 - Y_e) \quad (5.8)$$

et $\bar{\rho}_p$, qui est donnée par

$$\bar{\rho}_p = \bar{\rho}Y_e \quad , \quad (5.9)$$

où $\bar{\rho}$ est la densité macroscopique totale (qui était représentée par ρ jusqu'à maintenant) . Les fonctions de distribution de densités de neutrons et de protons sont donc

contraintes par

$$\frac{3}{R_c^3} \int_0^{R_c} \rho_q(r) r^2 dr = \bar{\rho}_q \quad , \quad (5.10)$$

où q dénote n ou p , selon le cas. Dans ce type de cellule, le nombre total de nucléons est

$$N_q = \frac{4\pi}{3} R_c^3 \bar{\rho}_q \quad . \quad (5.11)$$

Pour les fonctions de distribution de neutrons et de protons, on adopte la forme suivante

$$\rho_q(r) = \rho_{Bq} + \frac{\rho_{0q}}{1 + \exp\left(\frac{r-C_q}{a_q}\right)} \quad , \quad (5.12)$$

où ρ_{Bq} est un terme constant sur lequel se superposent les variations radiales de la fonction Fermi. Lorsque ρ_{0q} est positif, la densité décroît du centre à la surface de la cellule; cette configuration est donc de type gouttelette. De même, lorsque ρ_{0q} est négatif, il y aura une déficience de nucléons au centre de la cellule. C'est une configuration de type bulle.

La deux constantes ρ_{Bq} ne sont pas indépendantes des autres paramètres, mais plutôt elles sont reliées par

$$\rho_{Bq} = \bar{\rho}_q - \frac{3}{R_c^3} I_q \rho_q \quad , \quad (5.13)$$

où I_q est

$$I_q = \int_0^{R_c} \frac{r^2 dr}{1 + \exp\left(\frac{r-C_q}{a_q}\right)} \quad . \quad (5.14)$$

La cellule Wigner Seitz est caractérisée par 7 paramètres

$$a_n, \quad a_p, \quad C_n, \quad C_p, \quad \rho_{0n}, \quad \rho_{0p}, \quad \text{et } R_c \quad .$$

Le fait que le rayon R_c est un paramètre libre implique que le nombre de nucléons N_q dans la cellule n'est pas fixe.

Toujours suivant [3], l'énergie spécifiquement nucléaire est calculée par la méthode TETF (temperature-dependent extended Thomas-Fermi), utilisant la force de Skyrme SkSC6. Notre but sera de chercher comment se distribuent les nucléons à l'intérieur d'une cellule Wigner Seitz, à chaque valeur de la densité moyenne. Étant donné qu'on suppose qu'à chaque instant notre système est en équilibre thermodynamique, la configuration nucléonique optimale pour la densité en question sera celle pour laquelle l'énergie libre totale de Helmholtz par nucléon, $f = e - Ts$ est minimale, où e et s sont respectivement l'énergie et l'entropie par nucléon; à noter bien que toutes ces quantités contiennent non seulement les contributions purement nucléaires, mais aussi les contributions électroniques. Nous minimisons cette énergie f par rapport à ces 7 paramètres et aussi par rapport à Y_e (les variations de Y_e correspondent à la désintégration β).

5.3.2 Résultats

Selon notre modèle de décompression, l'énergie e par nucléon reste fixe; environ 12 MeV. Pour une densité moyenne $\bar{\rho}$ donnée, il faut alors minimiser f à des différentes températures T , afin de trouver la valeur de T pour laquelle $e = 12$ MeV. Dans la table 5-1, nous montrons les résultats que nous avons trouvés à la densité typique $\bar{\rho} = 2.10^{-5} \text{ fm}^{-3}$. On voit dans cette table que lorsque l'énergie est environ $e = 12$ MeV, la température est supérieure à 4.5 MeV. Les valeurs de ρ_{0n} et ρ_{0p} indiquent qu'à ces températures, la solution optimale correspond toujours à un gaz homogène. Ceci veut dire que le modèle tel que nous l'avons formulé est incapable de mener à la formation de gouttelette. Par contre, à des températures inférieures ou égales à 1.5 MeV, on voit que les valeurs positives de ρ_{0n} et ρ_{0p} indiquent bien la formation de gouttelette. Il faudrait alors un modèle plus sophistiqué qui tient compte de la perte d'énergie par les neutrinos. Le programme que nous avons modifié (Voir Annexe 1) va rester indispensable à cette étude plus sophistiquée (voir figure 4-1). Même si ce modèle est insuffisant, il est important de voir comment varie la température T et la fraction des nucléons Y_e à cette énergie fixe, $e = 12$ MeV, lors de la minimisation de l'énergie libre f (voir figure 5-2).

Tableau 5-1: Énergie libre minimisée pour une densité $2.10^{-5} \text{ fm}^{-3}$.

$T(\text{MeV})$	Y_e	$f(\text{MeV})$	ρ_{0n}	ρ_{0p}	$e(\text{MeV})$
0.1	0.374	-5.27345	0.0945	0.0625	-5.26794
0.9	0.328	-5.59222	0.0940	0.0632	-4.43244
1.5	0.115	-7.52908	0.0918	0.0660	0.20182
1.63	0.052	-8.21712	0.00	0.00	2.80282
2.7	0.130	-16.10293	0.0	0.0	5.31288
4.0	0.226	-27.23168	0.0	0.0	9.49748
4.2	0.241	-29.08776	0.0	0.0	10.30517
4.4	0.255	-30.98316	0.0	0.0	11.15185
4.5	0.261	-31.94584	0.0	0.0	11.59899
4.6	0.268	-32.91866	0.0	0.0	12.066156
4.8	0.281	-34.89522	0.0	0.0	13.04364

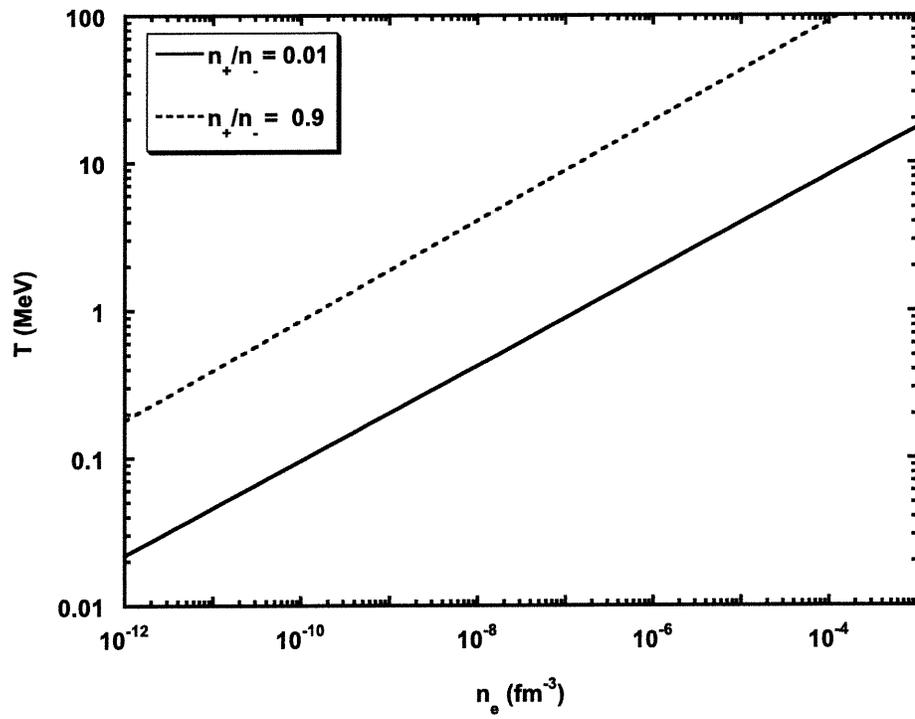


Figure 5-1: Région de présence de positrons.

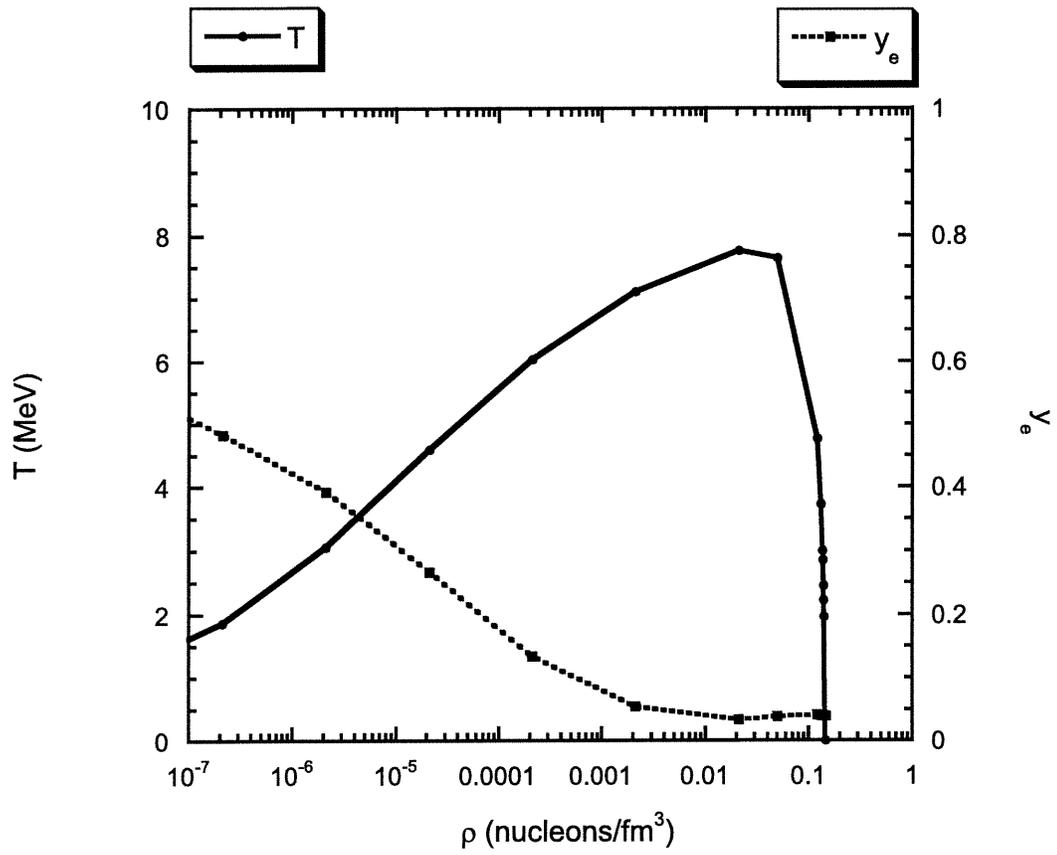


Figure 5-2: la Température T et la fraction des nucléons Y_e en fonction de la densité ρ pour une énergie fixe $e = 12\text{MeV}$.

CONCLUSION

Nous avons étudié la matière nucléaire qui compose les étoiles en effondrement et en décompression. Lors de ces deux phénomènes, les leptons (surtout les électrons) contribuent toujours d'une façon significative à l'équation d'état. Dans ce mémoire, nous nous sommes particulièrement intéressés par ces contributions.

La visée première de notre travail était de mener un calcul exact de ces contributions, qui sont habituellement calculées par les approximations de Chandrasekhar. Nous avons donc évalué numériquement les intégrales qui donnent les quantités physiques fondamentales du milieu stellaire telles que l'énergie, la pression et l'entropie des électrons. Nous avons porté beaucoup de soin à la précision du calcul. Ceci nous a permis d'une part de bien déterminer les erreurs des calculs réalisés seulement avec les approximations, et d'autre part d'accéder dans la région de basse densité et haute température, où les expressions approchées sont incapables de nous fournir des résultats raisonnables, puisqu'elles ne prennent pas en considération la présence des positrons dans ce type de milieu stellaire. Ainsi, nous avons pu préciser les conditions de densités et températures dans lesquelles les approximations de Chandrasekhar ne sont pas valables. Dans cette même région, une autre approximation est souvent utilisée, celle de la limite "bulle chaude". De la même façon, avec le calcul que nous avons développé, on a pu déterminer le domaine de validité de ces approximations et il en résulte que le véritable état "bulle chaude" trouvé dans les supernovae type II, est exclu de ce domaine. Cependant, nous avons trouvé qu'à basse température et haute densité, il y a un risque d'annulation entre les termes de l'entropie (aussi l'énergie libre). Le niveau de précision de 10^{-6} qu'on désirait obtenir est alors impossible à atteindre avec ce calcul et, particulièrement pour ce cas, un développement par la série de Chandrasekhar s'avère suffisamment précis et indispensable.

Nous avons adopté le modèle de Wigner-Seitz afin d'étudier la matière nucléaire inhomogène à l'intérieur de l'étoile. Nous avons donc inséré nos résultats dans d'autres programmes déjà développés à l'Université de Montréal, afin de minimiser l'énergie libre, pour trouver comment se distribuent les nucléons à l'intérieur d'une cellule de Wigner-Seitz. Les corrections à l'entropie et à l'énergie libre calculées avec notre programme sont importantes.

Comme application de nos programmes, nous avons étudié un modèle extrêmement grossier et simpliste de la décompression de la matière neutronique. Ce modèle assimile cette décompression à l'expansion Joule qui est caractérisé par une énergie constante. Nos calculs avec ce modèle montrent que la matière neutronique reste homogène. On aura pas donc formation de l'inhomogénéité qui représente la nucléosynthèse. Ceci démontre que si on veut réaliser la nucléosynthèse par la décompression de la matière neutronique, il faut un modèle plus sophistiqué de ce dernier processus.

ANNEXE 1

```
subroutine elec(znu,zkt,yepp)
implicit double precision(a-h,o-z)
c la methode de bisection
zmec2=0.511004d0
beta=zkt/zmec2
znu1=-1.d0/beta
znu2=2.d6
20 call nuelec(znu1,zkt,yne)
yne1=yne
f1=yne1-yepp
call nuelec(znu2,zkt,yne)
yne2=yne
f2=yne2-yepp
x=f1/f2
if(x.gt.0.d0) then
print*, 'x positif',x
else
znu=(znu1+znu2)/2.d0
call nuelec(znu,zkt,yne)
yne3=yne
f3=yne3-yepp
y=f3/f1
if(y.lt.0.d0) then
znu2=znu
f2=f3
else
```

```

znu1=znu
f1=f3
endif
endif
z=dabs((yne1-yne2)/yne1)
if(z.gt.1.d-5) then
go to 20
else
endif
return
end

c   cette sous-routine c'est le calcul de la densite des electrons
c   en utilisant la serie de Chandrasekhar
c
subroutine nuelec(znu,zkt,yne)
implicit double precision(a-h,o-z)

c   initialisation des variables

hbc=197.329d0
zmec2=0.511004d0
pi=3.141592653898d0
beta=zkt/zmec2
znumin=18.d0
if(znu.lt.znumin) then
c   on utilise le calcul de densite par l'integrale
call intgr1(znu,zkt,yne)
else

c   on va utiliser la serie qui correspond a la densite des electrons

```

```

xw=dsqrt(((1.d0+znu*beta)**2)-1.d0)
zhh=((zmec2/hbc)**3)/(pi*pi)
yne=zhh/3.d0*(xw**3)*ffres(xw,znu)
endif
return
end

c   cette sous-routine calcule la densite des electrons en evaluant son
c   integrale
subroutine intgr1(znu,zkt,yne)
implicit double precision(a-h,o-z)
dimension xl(6),al(6),xi(14),ai(14)
call gla14(xi,ai)
call gassl6(xl,al)
hbc=197.329d0
zmec2=0.511004d0
pi=3.141592653898d0
beta=(zkt)/zmec2
zc=(zmec2/hbc)**3*dsqrt(beta)*beta/(pi*pi)
c=====
c   1)NOMBRE D'ELECTRONS PAR UNITE DE VOLUME (=yne):
c=====
c   premier bloc de a---b(ici=b2)avec Gauss-Legendre
c   -----
a=0.d0
b=znu-10.d0
if(b.lt.0.d0) b=0.d0

c
b2=dsqrt(b*b*beta+2.d0*b)
m=300
rmax=b2-a
cxn=0.5d0*rmax/m

```

```

resu1=0.d0
do 110 i=1,m
  b1=2.d0*cxn*float(i-1)
  sum=0.d0
  do 100 j=1,6
    z=b1+cxn*(xl(j)+1.d0)+a
    fu1=fu(z,beta,znu)
    sum=sum+al(j)*fu1
100  continue
    resu1=resu1+sum
110  continue
    resu1=cxn*resu1
c
c  deuxieme bloc de b----c avec Gauss-Legendre
c  -----
c  c=znu+2.d0
c  if(c.lt.0.d0) c=0.d0
c
c  m2=100
c  rmax=c-b
c  cxn=0.5d0*rmax/m2
c  resu2=0.d0
c  do 300 i=1,m2
c    b1=2.d0*cxn*float(i-1)
c    sum2=0.d0
c    do 150 j=1,6
c      z=b1+cxn*(xl(j)+1.d0)+b
c      f=fun1(z,beta,znu)
c      sum2=sum2+al(j)*f
150  continue
    resu2=resu2+sum2
300  continue

```

```

      resu2=cxn*resu2
c
c   troisieme bloc de c----l'infini (Gauss-Laguerre)
c   -----
      resu3=0.d0
      do 24 k=1,14
      y=xi(k)+c
      ff=fun1(y,beta,znu)
      resu3=resu3+ff*ai(k)*dexp(xi(k))
24  continue
      yne=zc*(resu1+resu2+resu3)

      return
      end
c
c   cette sous-routine c'est le calcul des autres quantites a partir
c   des series correspondantes
c
      subroutine etat(znu,zkt,eel1,sel1)
      implicit double precision(a-h,o-z)
c
      hbc=197.329d0
      zmec2=0.511004d0
      pi=3.141592653898d0
      beta=(zkt)/zmec2
      znumin=18.d0
      if(znu.lt.znumin) then
c   on utilise les expressions exactes (les integrales)
      call eta(znu,zkt,eel1,sel1)
      else
c   On va utilitiser les series

```

```

      xw=dsqrt(((1.d0+znu*beta)**2)-1.d0)
      zhh=((zmec2/hbc)**3)/(pi*pi)
c   * L'energie des electrons (=eel1)

      eel1=zhh*zmec2/24.d0*ffeng(xw,znu)

c   * La pression des electrons
      pel1=zhh*zmec2/24.d0*ffprs(xw,beta)

c   * L'entropie des electrons
      sel1=zhh*pi*pi*fetrp(xw,beta)/3.d0
      endif

      return
      end

c   cette sous-routine evalue les integrales de l'energie la pression et
c   l'entropie
      subroutine eta(znu,zkt,eel1,sel1)
      implicit double precision(a-h,o-z)
      dimension xl(6),al(6),xi(14),ai(14)
      call gla14(xi,ai)
      call gassl6(xl,al)
      hbc=197.329d0
      zmec2=0.511004d0
      pi=3.141592653898d0
      beta=(zkt)/zmec2
      zc=(zmec2/hbc)**3*dsqrt(beta)*beta/(pi*pi)

c=====
c   2)) ENERGIE PAR UNITE DE VOLUME (=energie):
c=====

```

```

c      premier bloc de a---b(ici=b2)avec la methode de Gauss-Legendre
c      -----

a=0.d0
b=znu-10.d0
if(b.lt.0.d0) b=0.d0
b2=dsqrt(b*b*beta+2.d0*b)
mg=100
rmax=b2-a
cxn=0.5d0*rmax/mg
energ1=0.d0
do 101 i=1,mg
  b1=2.d0*cxn*float(i-1)
  sumg=0.d0
  do 102 j=1,6
    z=b1+cxn*(xl(j)+1.d0)+a
    gk1=gk(z,beta,znu)
    sumg=sumg+al(j)*gk1
102  continue
    energ1=energ1+sumg
101  continue
    energ1=cxn*energ1
c
c      deuxieme bloc de b----c avec Gauss-Legendre
c      -----

c=znu+2.d0
if(c.lt.0.d0) c=0.d0
c
mg2=100
rmax=c-b
cxn=0.5d0*rmax/mg2

```

```

energ2=0.d0
do 190 i=1,mg2
  b1=2.d0*cxn*float(i-1)
  sumg2=0.d0
  do 240 j=1,6
    z=b1+cxn*(xl(j)+1.d0)+b
    g2=g(z,beta,znu)
    sumg2=sumg2+al(j)*g2
240    continue
    energ2=energ2+sumg2
190  continue
energ2=cxn*energ2
c
c      troisieme bloc de c----l'infini (Gausse-Laguerre)
c      -----
energ3=0.d0
do 25 j=1,14
  y=xi(j)+c
  g3=g(y,beta,znu)
  energ3=energ3+g3*ai(j)*dexp(xi(j))
25  continue
eel1=zc*zkt*(energ1+energ2+energ3)

c=====
c      3))) PRESSION PAR UNITE DE VOLUME:
c=====
c      premier bloc de a---b(ici=b2)avec Gauss-legendre
c      -----
mp=100
rmax=b2-a
cxn=0.5d0*rmax/mp
press1=0.d0

```

```

do 103 i=1,mp
  b1=2.d0*cxn*float(i-1)
  sump=0.d0
  do 104 j=1,6
    z=b1+cxn*(xl(j)+1.d0)+a
    pk1=pk(z,beta,znu)
    sump=sump+al(j)*pk1
104  continue
  press1=press1+sump
103  continue
  press1=cxn* press1
c
c  deuxieme bloc de b----c avec legendre
c  -----
mp2=100
rmax=c-b
cxn=0.5d0*rmax/mp2
press2=0.d0
do 500 i=1,mp2
  b1=2.d0*cxn*float(i-1)
  sump2=0.d0
  do 105 j=1,6
    z=b1+cxn*(xl(j)+1.d0)+b
    p2=p(z,beta,znu)
    sump2=sump2+al(j)*p2
105  continue
  press2=press2+sump2
500  continue
  press2=cxn* press2
c
c  troisieme bloc de c----l'infini (Gauss-Laguerre)
c  -----

```

```

press3=0.d0
do 30 j=1,14
y=xi(j)+c
p3=p(y,beta,znu)
press3=press3+p3*ai(j)*dexp(xi(j))
30 continue
pel1=zc*zkt*(press1+press2+press3)/3.d0

c=====
c   CALCUL DE L'ENTROPIE AVEC 3 BLOC:
c=====
c
c   premier bloc de a---b2(=b) avec la methode de Gauss-Legendre
c   -----
c
b2=dsqrt(b*b*beta+2.d0*b)
msn=1000
rmax=b2-a
cxn=0.5d0*rmax/msn
entrp1=0.d0
do 621 i=1,msn
b1=2.d0*cxn*float(i-1)
sumsn=0.d0
do 292 j=1,6
z=b1+cxn*(xl(j)+1.d0)+a
fkn1=fkk(z,beta,znu)
sumsn=sumsn+al(j)*fkn1
292 continue
entrp1=entrp1+sumsn
621 continue
entrp1=cxn*entrp1
c

```

```

c      deuxieme bloc de b----c avec Gauss-Legendre
c      -----
      ms1=100
      if(bx.lt.0.d0) bx=0.d0
      rmax=c-b
      cxn=0.5d0*rmax/ms1
      entrp2=0.d0
      do 651 i=1,ms1
          b1=2.d0*cxn*float(i-1)
          sumsn1=0.d0
          do 814 j=1,6
              z=b1+cxn*(xl(j)+1.d0)+b
              fkk2=fee(z,beta,znu)
              sumsn1=sumsn1+al(j)*fe
814          continue
          entrp2=entrp2+sumsn1
651      continue
      entrp2=cxn*entrp2
c
c      Troisiemme bloc c --l'infini (Gausse-Laguerre)
c      -----
      entrp3=0.d0
      do 74 j=1,14
          y=xi(j)+c
          fe3=fe(y,beta,znu)
          entrp3=entrp3+fe3*ai(j)*dexp(xi(j))
74      continue
      zzz=(zme2/hbc)**3*dsqrt(beta)*beta/(3.d0*pi*pi)
      sel1=zzz*(entrp1+entrp2+entrp3)

      return
      end

```

```

c   Fonctions utilisees:
c
c   la densite des electrons
c   -----
c   function fun1(x,beta,znu)
c   implicit double precision(a-h,o-z)
c   a=dexp(x-znu)+1.d0
c   b=dexp(x+znu+2.d0/beta)+1.d0
c   e=dsqrt(2.d0*x+beta*x*x)
c   fun1=(1.d0+beta*x)*e*(1.d0/a-1.d0/b)
c   return
c   end

c   fonction utilisee dans le premier bloc qui calcule la densite
c   des electron (ou il y a un changement de variable)

c   function fu(x,beta,znu)
c   implicit double precision(a-h,o-z)
c   z=dsqrt(1.d0+beta*x*x)
c   a=1.d0+dexp(x*x/(1.d0+z)-znu)
c   b=1.d0+dexp(2.d0/beta+znu+x*x/(1.d0+z))
c   fu=x*x*(1.d0/a-1.d0/b)
c   return
c   end

c
c   fonction pour l'energie
c   -----
c   function g(x,beta,znu)
c   implicit double precision(a-h,o-z)
c   cette fonction est celle representee dans l'integrale de l'energie
c   a=dexp(x-znu)+1.d0

```

```

b=dexp(x+znu+2.d0/beta)+1.d0
e=dsqrt(beta*x*x+2.d0*x)
g=(beta*x+1.d0)*e*(x/a+(x+2.d0/beta)/b)
return
end
c fonction utilisee dans le premier bloc qui calcule la densite
c d'energie des electron (ou il y a un changement de variable)
function gk(x,beta,znu)
implicit double precision(a-h,o-z)
z=dsqrt(1.d0+beta*x*x)
a=1.d0+dexp(x*x/(1.d0+z)-znu)
b=1.d0+dexp(2.d0/beta+znu+x*x/(1.d0+z))
z1=x*x/(1.d0+z)
gk=x*x*(z1/a+(z1+2.d0/beta)/b)
return
end

c fonction pour l'entropie
c -----
function fe(x,beta,znu)
implicit double precision(a-h,o-z)
c cette fonction est celle representee dans l'integrale de l'entropie
a=dexp(x-znu)+1.d0
b=dexp(x+znu+2.d0/beta)+1.d0
e=dsqrt(2.d0*x+beta*x*x)
z1=4.d0*x*x*beta+5.d0*x
z2=3.d0*(1.d0+beta*x)
z3=(znu+(2.d0/beta))*z2+z1
z4=z2*znu-z1
fe=e*(z3/b-z4/a)
return
end

```

```

c   fonction utilisee dans le premier bloc qui calcule l'entropie
c   des electron (ou il y a un changement de variable)
      fonction fkk(x,beta,znu)
      implicit double precision(a-h,o-z)
c   cette fonction est celle representee dans l'integrale de l'entropie
      z=dsqrt(1.d0+beta*x*x)
      a=1.d0+dexp(-x*x/(1.d0+z)+znu)
      b=1.d0+dexp(2.d0/beta+znu+x*x/(1.d0+z))
      e=1.d0+z
      z1=(4.d0*beta*(x**4)+5.d0*x*x*e)/(e*e)
      z2=3.d0*(e+beta*x*x)/e
      z3=(2.d0/beta+znu)*z2+z1
      z4=znu*z2-z1
      fkk=x*x*(z3/b+z4/a)/z
      return
      end

c   cette fonction est celle representee dans les series de Chandrasekhar
c   * pour pour la densite des electrons:

      fonction ffres(x,beta)
      implicit double precision(a-h,o-z)
      pi=3.141592653898d0
      c1=pi*pi*(beta**2)/2.d0
      c2=7.d0*(pi*beta)**4/40.d0
      c3=31.d0*(pi*beta)**6/336.d0
      c4=127.d0*(pi*beta)**8/640.d0
      y=dsqrt(1.d0+x*x)
      y2=16.d0*(x**2)*((x**2)+3.d0)+33.d0
      a1=c1*(1.d0+2.d0*x*x)/(x**4)

```

```

a2=c2/(x**8)
a3=c3*(7.d0+6.d0*x*x)/(x**12)
a4=c4*y2/(x**16)
c   ffres=1.d0+a1+a2+a3+a4
ffres=1.d0
return
end

c   * pour l'energie des electrons

function ffeng(x,beta)
implicit double precision(a-h,o-z)
pi=3.141592653898d0
c1=4.d0*pi*pi*(beta**2)
c2=7.d0*(pi*beta)**4/5.d0
c3=31.d0*(pi*beta)**6/42.d0
c4=127.d0*(pi*beta)**8/1680.d0
y=dsqrt(1.d0+x*x)
zzf=x*y*(2.d0*x*x-3.d0)+3.d0*dlog(x+y)
zg=8.d0*(x**3)*(y1**2)-zzf
y2=1.d0+3.d0*x*x
y3=1.d0-x*x+2.d0*(x**4)
y4=7.d0+x*x
y5=2.d0*(x**4)+27.d0*x*x+33.d0
y6=16.d0*(x**4)+48.d0*x*x+33.d0
a1=c1*(y*y2-1.d0-2.d0*x*x)/x
a2=c2*(y*y3-1.d0)/(x**5)
a3=c3*(y*y4-7.d0-6.d0*x*x)/(x**9)
a4=c4*(y*y5-y6)/(x**13)
ffeng=zg+a1+a2+a3+a4
return
end

```

c * pour la pression des electrons

```

function ffprs(x,beta)
implicit double precision(a-h,o-z)
pi=3.141592653898d0
c1=4.d0*pi*pi*(beta**2)
c2=7.d0*(pi*beta)**4/15.d0
c3=31.d0*(pi*beta)**6/42.d0
c4=127.d0*(pi*beta)**8/80.d0
y=dsqrt(1.d0+x*x)
zf=x*y*(2.d0*x*x-3.d0)+3.d0*dlog(x+y)
a1=c1*x*y
a2=c2*y*(2.d0*x*x-1.d0)/(x**3)
a3=c3*y/(x**7)
a4=c4*y*(2.d0*x*x+3.d0)/(x**11)
ffprs=zf+a1+a2-a3-a4
return
end

```

c * pour l'entropie

```

function fetrp(x,beta)
implicit double precision(a-h,o-z)
pi=3.141592653898d0
c1=7.d0/30.d0*pi*pi
c2=31.d0/56.d0*(pi**4)
c3=127.d0*(pi**6)/80.d0
y=dsqrt(1.d0+x*x)
a1=beta*x*y
a2=c1*(beta**3)*y*(2.d0*x*x-1.d0)/(x**3)
a3=c2*(beta**5)*y/(x**7)
y2=2*x*x+3.d0

```

```
a4=c3*(beta**7)*y2/(x**11)
fetrp=a1+a2-a3-a4
return
end
c   Cette sous-routine nous donne toutes les quantites necessaires pour
c   evaluer les integrales avec les deux methodes gaussienne
subroutine gla14(xi,ai)
implicit double precision (a-h,o-z)
c   double precision xi(14),ai(14)
dimension xi(14),ai(14)
xi(1)=0.09974751d0
xi(2)=0.52685765d0
xi(3)=1.30062912d0
xi(4)=2.43080108d0
xi(5)=3.93210282d0
xi(6)=5.82553622d0
xi(7)=8.14024014d0
xi(8)=10.91649951d0
xi(9)=14.21080501d0
xi(10)=18.10489222d0
xi(11)=22.72338163d0
xi(12)=28.27298172d0
xi(13)=35.14944366d0
xi(14)=44.36608171d0

ai(1)=0.23181558d0
ai(2)=0.35378469d0
ai(3)=0.25873461d0
ai(4)=0.11548289d0
ai(5)=0.03319209d0
ai(6)=0.00619287d0
ai(7)=0.00073989d0
```

```
ai(8)=0.00005491d0
ai(9)=0.00000241d0
ai(10)=0.00000006d0
ai(11)=0.00000000d0
ai(12)=0.00000000d0
ai(13)=0.00000000d0
ai(14)=0.00000000d0
return
end
```

```
subroutine gassl6(xl,a1)
implicit double precision (a-h,o-z)
dimension xl(6),a1(6)
xl(1)=-0.932469514203152d0
xl(2)=-0.661209386466265d0
xl(3)=-0.238619186083197d0
xl(4)=-xl(3)
xl(5)=-xl(2)
xl(6)=-xl(1)
a1(1)=0.171324492379170d0
a1(2)=0.360761573048139d0
a1(3)=0.467913934572691d0
a1(4)=a1(3)
a1(5)=a1(2)
a1(6)=a1(1)
return
end
```

BIBLIOGRAPHIE

- [1] C.J. Pethick, D.G. Ravenhall, Matter at large neutron excess and the physics of neutro-star crusts: 1995, *Annu. Rev. Nuc. Part. Sci* **45**, 429-484
- [2] M.Onsi, H.Przysieznik and J.M. Pearson, Equation of state of stellar nuclear matter in the temperature-dependent extended Thomas-Fermi formalism: 1997, *Phys. Rev C* **50**, 3139-3148
- [3] M.Onsi, H. Przysieznik and J.M. Pearson, Equation of state of homogenous nuclear matter and the symmetry coefficient: 1994, *Phys. Rev C* **55**, 460-468
- [4] Josep M. Aparicio, A simple and accurate method for the calculation of generalized Fermi functions: 1998, *Ap. J. Supp* **117**, 627-632
- [5] J.P. Cox and R.T. Guili, Principles of stellar structure, Application to stars. 1968, p. 865
- [6] P.Rhodes, Fermi-Dirac fuctions of integral order: 1950, *Proc. Roy. Soc A* **204**, 396-405
- [7] I.S. Gradshteyn And I.M.Ryzhik, Table of integrals, series, and products. I.S. 1980, p.1074
- [8] S.Chandrasekhar. An introduction to the study of stellar structure. 1939, p. 391
- [9] M. Abramowitz and I.A. Stegun, Handbook of mathematical functions. 1970,p. 916, 923
- [10] L.Landau et E.Lifchitz, Physique statistique (partie 1). 1984, p. 343
- [11] E.Symbalisty and D.N.Schramm, Neutron Star Collisions and the r-Process: 1982, *Ap. Letters* **22**, 143-145