

Université de Montréal

**Généralisation du théorème central limite conditionné
sur l'environnement d'une marche aléatoire biaisé sur
un arbre aléatoire**

par

Émile Chanel-Agouès

Département de mathématiques et statistique
Faculté des arts et sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.) en mathématiques

20 Août 2023

©Émile Chanel-Agouès, 2023

Université de Montréal

Faculté des arts et sciences

Ce mémoire intitulé

**Généralisation du théorème central limite conditionné sur
l'environnement d'une marche aléatoire biaisé sur un arbre
aléatoire**

Présenté par

Émile Chanel-Agouès

A été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

François Perron

(président-rapporteur)

Alexander Fribergh

(directeur de recherche)

Lucas Benigni

(membre du jury)

Résumé

Nous nous penchons sur les fluctuations des marches dans plusieurs modèles de marches aléatoires en milieux aléatoires. En particulier, le résultat principal de ce mémoire est de prouver qu'il existe un théorème central limite trempé pour la marche aléatoire sur un arbre de Galton-Watson infini avec feuilles équipées de biais aléatoires plus grand que 1. Un tel théorème a été prouvé dans le cas où le biais est constant dans [1] ; il s'agit donc de généraliser ce théorème.

Mots-clés : Marches aléatoires en milieux aléatoires (MAMA), arbres de Galton-Watson, structure de renouvellement

Abstract

We examine the fluctuations of walks in multiple models of random walks in random environments. In particular, the primary result of this dissertation is to prove there exists a quenched central limit theorem for the random on an infinite Galton-Watson tree with leaves equipped with random biases greater than 1. Such a theorem has already been proven in the case where the bias is constant in [1]; this is a generalization of that theorem.

Key words : Random walks on random environments (RWRE), Galton-Watson trees, renewal structure

Table des matières

Table des figures	vii
1. Introduction	1
1.1. Les marches aléatoires sur les réseaux et la conductance	1
1.2. Les arbres de Galton-Watson	2
1.3. Le modèle de piège de Bouchaud totalement dirigé	4
1.4. Le modèle des pièges de Bouchaud biaisé	6
1.5. Marche aléatoire sur \mathbb{Z} dans un environnement aléatoire	7
1.5.1. Le modèle	7
1.5.2. Les résultats	7
1.5.3. Parallèle entre la marche aléatoire sur \mathbb{Z} et le modèle de Bouchaud biaisé	8
1.6. La marche aléatoire sur un arbre de Galton-Watson avec un biais constant	10
1.6.1. Le modèle	10
1.6.2. Résultats de base	10
1.6.3. La décomposition de Harris	11
1.6.4. La marche sur le tronc	11
1.6.5. Liens avec la marche sur \mathbb{Z}	13
1.6.6. Les fluctuations de la marche	14
1.7. La marche aléatoire sur un arbre de Galton-Watson avec biais aléatoires	16
1.7.1. Le modèle	16
1.7.2. Transience et vitesse	16
1.7.3. Résultats	17
2. Le théorème central limite recuit	19
2.1. Le temps passé dans les pièges	20
2.2. Le temps passé sur le tronc	22
2.2.1. Le couplage de Y_n et la marche sur \mathbb{Z}	22
2.2.2. Les moments de $\zeta_2^Y - \zeta_1^Y$	22
2.3. Second moment des temps de régénération de la marche X_n	28
2.4. Preuve du TCL recuit	31
3. Théorème central limite trempé	34
3.1. Preuve du lemme 5	35
3.2. Preuve du lemme 6	38
3.3. Sommabilité de $\mathbb{Q}(\mathcal{B}_k^c)$	41
3.4. Sommabilité de $\mathbb{Q}(\mathcal{A}_k^c)$	43
Annexe A. La ruine du joueur	48
Bibliographie	51

Table des figures

1	un arbre de Galton-Watson avec feuilles conditionné pour être infini	2
2	Les probabilités de transition sur \mathbb{Z}	7
3	un potentiel typique quand la marche est transiente vers ∞	8
4	Les fonctions génératrices de la décomposition de Harris	11
5	L'arbre de Galton-Watson est décomposé deux parties : le tronc (lignes pleines) et les feuilles (lignes pointillées)	12
6	L'arbre binaire avec des demi-droites	12
7	$\partial B(\mathcal{T})$, les entrées des pièges (en rouge)	20
8	La première excursion de W_n de longueur H_1	23
9	la branche T_y^- (en rouge) et le sous-arbre T_y (en pointillé)	31

1. Introduction

Le présent mémoire se penche sur les marches aléatoires en milieu aléatoire (MAMA). On discutera de quelques modèles classiques et des liens entre eux pour donner un peu de contexte sur le domaine en général et pour introduire les concepts importants à la preuve du résultat principal : un théorème central limite sous la mesure trempée d'une marche aléatoire sur un arbre de Galton-Watson avec des biais aléatoires.

1.1. Les marches aléatoires sur les réseaux et la conductance

On commence par donner une définition très générale des marches aléatoires réversibles sur les réseaux. Un réseau est un graphe, c'est-à-dire un couplet $G = (V, E)$ où V est un ensemble de sommets et E un ensemble d'arêtes reliant chacune une paire de sommets, muni d'une fonction $c : E \rightarrow [0, \infty)$. On notera $x \sim y$ s'il existe une arête reliant x et y (on dira que x et y sont des voisins), puis $x \sim e$ si l'arête e est incidente au sommet x .

La marche aléatoire, définie comme X_n , est simplement un processus stochastique discret qui commence à un certain état $X_0 \in V$ puis transitionne vers un état voisin X_1 , puis X_2 et ainsi de suite de manière aléatoire. Le choix du voisin en question est dépendant de la fonction c . Une manière instinctive de voir la fonction c est de considérer qu'elle assigne à chaque arête un poids qui quantifie les chances de la marche aléatoire de l'emprunter quand elle en a l'occasion. La notation c vient du fait que cette fonction est souvent appelé la *conductance* à cause d'une forte analogie avec la théorie physique des réseaux électrique.

En définissant la mesure invariante $\pi(x) = \sum_{e \sim x} c(e)$, on peut définir la mesure

$$P_x(y) = \begin{cases} \frac{c(x,y)}{\pi(x)} & \text{si } x \sim y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

qui désigne la probabilité de transition de x vers y . Cette définition est pratique puisqu'elle permet de construire de façon flexible des lois d'environnements aléatoires, on peut en particulier fixer un graphe puis ensuite le munir de conductances aléatoires ou encore fixer la conductance puis créer le graphe de manière aléatoire.

Le modèle principalement étudié dans ce mémoire combine les deux et on obtiendra l'environnement aléatoire en produisant un graphe aléatoire puis en choisissant les conductances aléatoirement.

On présentera d'abord simplement les marches sur les arbres de Galton-Watson, puis on introduira quelques modèles différents avant de rentrer dans le vif du sujet pour nous permettre de nous familiariser avec les MAMAs et ses problématiques, puis introduire des concepts importants à la preuve de notre résultat principal. On discutera des modèles de Bouchaud, la marche aléatoire dans \mathbb{Z} et la marche aléatoire sur un arbre de Galton-Watson à biais constant. Leurs analyses restera qualitative puisque leur étude n'est pas le sujet principal de ce mémoire.

1.2. Les arbres de Galton-Watson

On commence par construire le graphe. Soit le processus de Galton-Watson Z_n défini explicitement par $P[Z_1 = k] = p_k$ et f la fonction génératrice associée, ce processus peut être vu comme un graphe où chaque "individu" est un sommet et chaque descendant est relié à son parent par une arête. Le graphe résultant est un arbre qu'on notera \mathcal{T} , qui peut être fini ou pas dépendamment de la distribution exacte. Dans notre cas on considérera uniquement des processus de Galton-Watson sur-critiques ($E[Z_1] > 1$) qui seront aussi conditionnés pour être infinis. On traitera aussi exclusivement du cas où $p_0 > 0$, ce qui implique que notre arbre possèdera des sous-arbres finis (on les appellera souvent les *feuilles* de l'arbre) qui agiront comme des pièges et ralentiront la marche.

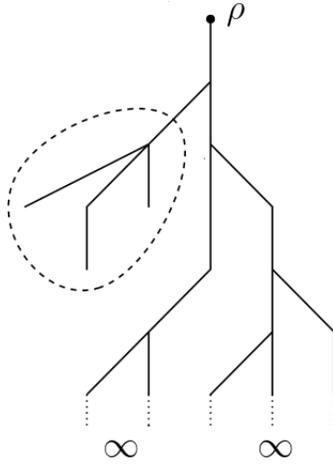


FIGURE 1 – un arbre de Galton-Watson avec feuilles conditionné pour être infini

Il est prouvé dans [10] que l'arbre peut être obtenu de façon équivalente en construisant un *tronc* infini (*backbone* en anglais) auquel on ajoute un certain nombre de feuilles (arbres finis). Le tronc, qu'on notera $B(\mathcal{T})$, est un arbre infini dont tous les individus ont au moins un descendant ; il n'y a donc pas de piège sur cet arbre.

On s'intéresse donc à une marche aléatoire X_n sur cet arbre. Une variable souvent étudiée dans ce contexte est la vitesse de la marche, on pose donc $|x| := d(\rho, x)$ la longueur du chemin entre $x \in \mathcal{T}$ et la racine ρ et $\nu := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|X_n|}{n}$ qui convergera presque-sûrement vers une constante par la loi forte des grands nombres. Sans définir explicitement la conductance, voici quelques questions qu'on se pose par rapport à la marche :

- (1) Est-ce que la marche est transiente ? Est-ce qu'elle se rend à l'infini ?
- (2) Si elle se rend à l'infini, à quelle vitesse la marche avance-t'elle ? Est-ce que $\nu > 0$?
- (3) Quel est le comportement de la marche par rapport à sa vitesse (est-ce que la marche se trouve souvent dans les environs de l'endroit où elle est "en moyenne" ?)

On s'intéresse particulièrement à la question (3) puisqu'il s'agit du résultat principal du mémoire : on prouvera que le processus

$$(B_t^n)_{t \geq 0} := \frac{|X_{[nt]}| - n\nu t}{\sigma\sqrt{n}} \quad (1.1)$$

converge en loi vers un mouvement Brownien standard sous certaines hypothèses.

Instinctivement, la réponse à la plupart de ces questions repose sur une meilleure compréhension de l'influence des pièges sur la marche. On expliquera plus tard que cet instinct est en parti faux, mais l'étude des pièges reste quand même central au comportement de la marche. On commence donc par présenter quelques modèles de piège afin de donner une idée intuitive du comportement limite auquel on pourrait s'attendre.

1.3. Le modèle de piège de Bouchaud totalement dirigé

Soit une suite i.i.d. de variables aléatoires positives $(\tau_i)_{i \geq 0}$ qui définiront l'environnement de notre marche. On définit explicitement la marche aléatoire $(X_t)_{t \geq 0}$ sur le graphe correspondant à \mathbb{Z} , cette marche consiste à passer un temps exponentiellement distribué et d'espérance τ_x au sommet x avant que la marche se déplace vers son voisin de droite. Ici, X_t désigne donc la position de la marche au temps t et on s'intéresse à la vitesse de X_t .

La marche discrète est extrêmement simple : il s'agit uniquement d'un déplacement vers la droite. Ce qui rend ce modèle intéressant est qu'on crée artificiellement des pièges dont on connaît la force, c.-à-d. l'espérance du temps passé dans le i^e piège étant de τ_i .

Une variable aléatoire clé pour comprendre le comportement de X_t est le temps que la marche prend pour faire n pas (et donc atteindre n). Cette quantité peut être écrite comme

$$S(n) := \sum_{i=0}^{n-1} \tau_i \mathbf{e}_i \quad (1.2)$$

où $(\mathbf{e}_i)_{i \geq 0}$ est une famille i.i.d. de variable aléatoire exponentielle d'espérance 1.

On remarque aussi que

$$X_t = S^{-1}(t) \quad \text{pour tout } t \geq 0 \quad (1.3)$$

où l'inverse continu à droite d'une fonction croissante ϕ est défini par

$$\phi^{-1}(t) := \sup\{u \geq 0 \mid \phi(u) \leq t\}$$

Cette équation nous permettra de trouver le comportement limite de X_t en ayant celui de S_n par argument d'inversion standard.

On considérera S_n parce qu'il s'agit d'une somme de variables i.i.d., qui est un objet largement étudié et bien compris.

Le cas le plus simple est quand $E[\tau^2] < \infty$, dans ce cas on peut obtenir les résultats suivant grâce à la loi des grands nombres et un théorème central limite pour $S(n)$. En notant $\nu := \frac{1}{E[\tau \mathbf{e}]}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S(n)}{n} = \nu^{-1} \text{ p.s. et } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S(n) - n\nu^{-1}}{\text{Var}(\tau \mathbf{e})\sqrt{n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1) \quad (1.4)$$

Par argument d'inversion standard, on obtient également

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X_t}{t} = \nu \text{ p.s. et } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X_t - t\nu}{\nu^{3/2} \text{Var}(\tau \mathbf{e})\sqrt{t}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1) \quad (1.5)$$

On peut également facilement prouver pour $0 \leq t \leq T$ que les processus

$$S_t^{(N)} := \frac{S(\lfloor tN \rfloor) - tN/\nu}{\sqrt{N}} \quad (1.6)$$

$$X_t^{(N)} := \frac{X_{\lfloor tN \rfloor} - \nu tN}{\sqrt{N}} \quad (1.7)$$

convergent tous les deux vers un mouvement Brownien standard dans la topologie de Skorohod quand N tend vers l'infini.

On répète que cette dynamique n'apparaît que quand $E[\tau^2] < \infty$, et bien que ce soit le cas le plus simple, c'est celui qui nous intéresse le plus dans ce mémoire. On remarque en effet que (1.1) et (1.7) sont très similaires, ce modèle influence donc les hypothèses qu'on posera pour obtenir (1.1). Bien que cet objet ne sera défini que dans la section 2, on déduira entre autres que les temps de régénération de la marche sur l'arbre devront posséder un second moment fini.

Sans rentrer dans les détails, le comportement de X_t diffère quand $E[\tau^2] = \infty$ et on observe plutôt une convergence vers une loi stable dont les paramètres dépendent de la queue des τ (plus spécifiquement de α dans $P[\tau \geq t] \sim t^{-\alpha}$). Pour un survol plus complet, le lecteur est invité à consulter **[16]**.

1.4. Le modèle des pièges de Bouchaud biaisé

On présente maintenant une variante un peu plus complexe du modèle des pièges de Bouchaud totalement dirigé : le modèle des pièges de Bouchaud biaisé. On pose encore une suite $(\tau_i)_{i \geq 0}$ de variables aléatoires positives i.i.d., puis on pose le paramètre $\alpha > 0$ comme contrainte additionnelle pour la loi des τ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha P[\tau \geq x] = 1 \quad (1.8)$$

On supposera dans notre cas que $\alpha > 2$.

Pour un $\beta > 1$, le modèle des pièges de Bouchaud β -biaisé est défini de la façon suivante : commençant à 0, la marche X_t passe un temps exponentiellement distribué d'espérance τ_x au sommet x puis se déplace vers la droite avec une probabilité $\beta/(\beta + 1)$ et vers la gauche avec une probabilité $1/(\beta + 1)$.

REMARQUE. Le modèle des pièges de Bouchaud totalement dirigé est le cas particulier où $\beta = \infty$

On note

- (1) Y_n une marche aléatoire biaisée discrète sur \mathbb{Z} qui suit les déplacements de la marche X_t
- (2) $S(n)$ le temps du n^{e} saut de X_t , ou plus explicitement $S(n) := \sum_{i=0}^{n-1} \tau_{Y_i} \mathbf{e}_i$ où $(\mathbf{e}_i)_{i \geq 0}$ est une famille de variables aléatoires exponentielle d'espérance 1.

Dans ce contexte, on appellera respectivement Y_n et S_n la *trace* de la marche et l'*horloge*. On souligne qu'on a changé notre définition de S_n par rapport à la section précédente (on a remplacé τ_i par τ_{Y_i}). On remarque donc que

$$X_t = Y_{S^{-1}(t)} \quad \text{pour tout } t \geq 0 \quad (1.9)$$

où on rappelle que l'inverse continue à droite d'une fonction croissante ϕ est défini par $\phi^{-1}(t) := \sup\{u \geq 0 \mid \phi(u) \leq t\}$.

La plus grande difficulté dans l'analyse du comportement de la marche est de comprendre la relation entre l'horloge et les trajectoires passées, en particulier $S(n)$ n'est plus une somme de variables i.i.d. Dans ce contexte, le temps passé dans un piège donné est déterminé par deux éléments : le nombre de visites à ce piège et le temps passé à chacune de ces visites. Bien que les temps passés en une visite sont encore indépendants, le nombre de visites pour deux sommets adjacents est très fortement corrélé. On pourrait donc assumer que les résultats obtenus par les propriétés des sommes de variables i.i.d. échoueraient.

La condition (1.8) implique cependant que la marche se déplace assez rapidement dans l'espace pour pouvoir utiliser le théorème central limite et donc conclure que les propriétés (1.4), (1.5), (1.6) et (1.7) sont toujours vraies. La méthode pour rendre cet instinct rigoureux est d'utiliser une structure de temps de régénération (on définit ce genre d'objet informellement dans la section 1.6.5, puis plus rigoureusement dans la section 2).

1.5. Marche aléatoire sur \mathbb{Z} dans un environnement aléatoire

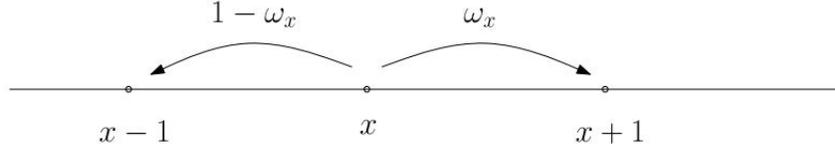


FIGURE 2 – Les probabilités de transition sur \mathbb{Z}

Dans les modèles précédents, les pièges sont introduits dans l’environnement de manière artificielle en forçant des temps d’attente. Cela nous a permis d’avoir une meilleure compréhension du comportement limite dans le cas où des pièges sont présents et nous a donné l’opportunité de décrire comment les modèles de pièges se comportent.

On présente maintenant un modèle pour lequel les pièges ne sont pas inclus dans sa définition mais montre un comportement limite similaire : la marche aléatoire sur \mathbb{Z} dans un environnement aléatoire.

1.5.1. Le modèle. Soit $\omega := (\omega_i, i \in \mathbb{Z})$ une famille de variables aléatoires i.i.d. dont les valeurs sont dans $(0, 1)$ définie sur Ω , qui sera notre environnement aléatoire. On note \mathbf{P} comme la distribution de ω et \mathbf{E} comme l’espérance correspondante. Conditionnellement à ω (c.-à-d. on choisit l’environnement), on définit la marche aléatoire sur l’environnement aléatoire $(X_n, n \geq 0)$ comme la marche aléatoire sur \mathbb{Z} dont les probabilités de transition sont données par $\omega : (X_n, n \geq 0)$ est la chaîne de Markov satisfaisant $X_0 = 0$ et pour $n \geq 0$,

$$P_\omega[X_{n+1} = x + 1 | X_n = x] = \omega_x = 1 - P_\omega[X_{n+1} = x - 1 | X_n = x]$$

où P_ω est la loi de $(X_n, n \geq 0)$ conditionnellement à ω et E_ω l’espérance correspondante. On l’appelle souvent la loi trempée. On note aussi $\mathbb{P}(\cdot) := \int P_\omega(\cdot) \mathbf{P}(d\omega)$ qu’on appelle souvent la loi moyenne ou recuite.

1.5.2. Les résultats. Dans l’étude des marches aléatoires sur \mathbb{Z} dans un milieu aléatoire, un rôle important est joué par la suite de variables

$$\rho_i := \frac{1 - \omega_i}{\omega_i}, \quad i \in \mathbb{Z} \tag{1.10}$$

Puisque leur loi nous permettra de savoir si la marche est transiente ou récurrente et si sa vitesse est positive ou non.

On suppose que $\mathbf{E}[\log \rho_0]$ est bien définie (possiblement infinie). On obtient alors un critère pour la transience et récurrence, voir [11].

Théorème. (1) si $\mathbf{E}[\log \rho_0] < 0$ (respectivement > 0) alors la marche est transiente et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \infty \text{ (resp. } -\infty) \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

(2) si $\mathbf{E}[\log \rho_0] = 0$, alors la marche est récurrente et

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n = \infty \text{ et } \liminf_{n \rightarrow \infty} X_n = -\infty \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

Une explication de ce résultat est donnée au début de la section 1.5.3.

On se concentrera sur le cas où la marche est transiente, on assumera donc pour le reste de la section que $\mathbf{E}[\log \rho_0] < 0$ ce qui est essentiellement la même hypothèse que $\mathbf{E}[\log \rho_0] > 0$ par symétrie. Pour le cas où la marche est récurrente, le lecteur est invité à consulter [12]. Puisqu'on assume une transience directionnelle vers ∞ , on peut introduire, pour $n \geq 0$,

$$\Delta_n = \inf\{i \geq 0, X_i = n\} < \infty, \quad (1.11)$$

le temps d'arrivée à n .

On peut aussi déterminer si la marche a une vitesse positive ou non (voir [11]).

Théorème. *Si $\mathbf{E}[\log \rho_0] < 0$, alors*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta_n}{n} = \nu^{-1} \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{n} = \nu \quad \mathbb{P}\text{-p.s.},$$

avec

$$\nu = \begin{cases} \frac{1 - \mathbf{E}[\rho_0]}{1 + \mathbf{E}[\rho_0]} > 0 & \text{si } \mathbf{E}[\rho_0] < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

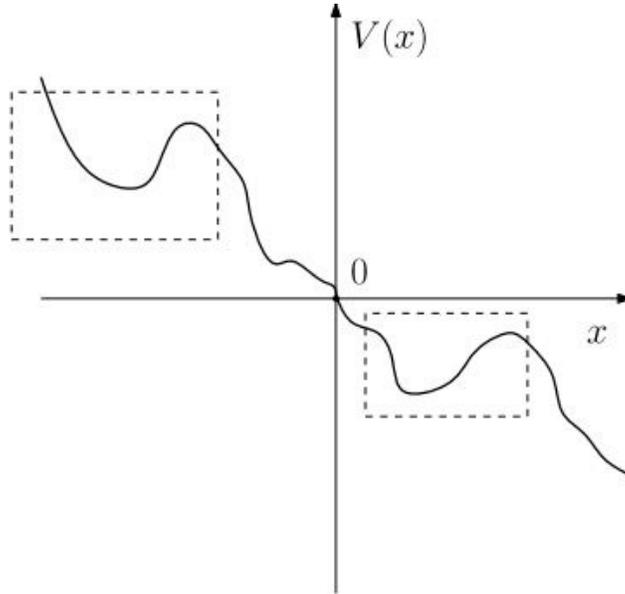


FIGURE 3 – un potentiel typique quand la marche est transiente vers ∞

1.5.3. Parallèle entre la marche aléatoire sur \mathbb{Z} et le modèle de Bouchaud biaisé. Le parallèle entre la marche sur \mathbb{Z} dans un environnement aléatoire et le modèle de Bouchaud biaisé peut être fait en considérant l'objet $V(x)$ qu'on appellera le *potentiel* (une autre référence au parallèle avec les réseaux électriques).

$$V(x) := \begin{cases} \sum_{i=1}^x \log \rho_i & \text{si } x \geq 1, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ -\sum_{i=x+1}^0 \log \rho_i & \text{si } x \leq -1 \end{cases} \quad (1.12)$$

Ce potentiel donne une image intuitive des probabilités de transition. Sans être trop rigoureux, on peut le voir comme un profil d'altitude sur lequel le marcheur se déplacera, favorisant la direction qui descend. Mathématiquement, on voit que

- (1) $V(x)$ est une somme de variables aléatoires i.i.d. de loi $\log \rho_0$. Cela implique que $V(x)$ peut être analysé très précisément.
- (2) $V(x)$ est lié la conductance. En effet, $c(x, x+1) = e^{-V(x)}$ par la définition de ρ . Cela implique également que $V(x)$ est lié à la mesure invariante $\pi = e^{-V(x)} + e^{-V(x-1)}$ de la marche dans l'environnement ω , ce qui explique pourquoi la marche est attirée vers les sections où $V(\cdot)$ est petit.

On explique maintenant plus en détail la stratégie qui permet de lier la marche sur \mathbb{Z} et le modèle des pièges de Bouchaud biaisé en utilisant le potentiel V . Dans la figure 3, on a mis en évidence des parties de l'environnement où la marche doit monter et donc marcher contre le potentiel pour atteindre $+\infty$. Ces vallées créent des obstacles qui empêchent la marche d'aller facilement vers $+\infty$ et on définit H comme la hauteur de ces vallées (c.-à-d. à quel point elles ont tendance à ralentir la marche). Par un résultat de [13], on constate que

Lemme. *S'il existe $\alpha > 0$ t.q. $\mathbf{E}[\rho_0^\alpha] = 1$ et $\mathbf{E}[\rho_0^\alpha \log \rho_0] < \infty$, alors*

$$\mathbb{P}[H \geq n] \sim C \exp(-\alpha n) \tag{1.13}$$

Quand le marcheur se trouve dans une vallée de hauteur H , la marche prend un certain temps T_{sortie} pour en sortir. Pour simplifier l'argument, on utilisera l'approximation $T_{\text{sortie}} = e^H \mathbf{e}$ où \mathbf{e} est une variable aléatoire exponentielle de paramètre 1. En utilisant l'approximation de la queue de H , on obtient

$$\mathbb{P}[T_{\text{sortie}} \geq n] \sim C n^{-\alpha} \tag{1.14}$$

Le parallèle avec le modèle des pièges de Bouchaud biaisé devrait maintenant être assez évident.

Quelques problèmes pourraient encore déranger le lecteur :

- (1) La tailles des pièges n'est plus indépendante, plusieurs voisins sont dans la même vallée et ont des temps de sortie similaire. Ce problème peut être résolu en considérant toutes les vallées comme des pièges (ou des sites dans le modèle des pièges de Bouchaud). Puisque les vallées sont généralement petites (au maximum de taille $C \log n$ avant le temps Δ_n), elles peuvent être considérées comme des points quand on rééchelonne l'environnement. On peut ensuite argumenter que la taille et la structure des plus gros pièges (qui sont, on le rappelle, la seule chose qui compte quand on parle du comportement limite) sont chacune indépendantes puisque les pièges sont loins les uns des autres.
- (2) le déplacement entre les vallées n'est pas une marche aléatoire biaisée. Même si c'est vrai, il est seulement nécessaire que la marche aille à l'encontre de la direction de transience pour des petite distance (au maximum $C \log n$ avant le temps Δ_n). Cela est toujours vrai dans ce modèle.

1.6. La marche aléatoire sur un arbre de Galton-Watson avec un biais constant

1.6.1. Le modèle. Avant de passer au modèle principalement étudié dans ce mémoire, on présente un dernier modèle : une marche aléatoire avec biais constant sur un arbre de Galton-Watson. On considère donc un arbre de Galton-Watson ayant une fonction génératrice $f(z) = \sum_{k \geq 0} p_k z^k$, c.-à-d. les nombres de descendants de tous les individus sont des copies i.i.d. de Z_1 , où $P[Z_1 = k] = p_k$. On suppose également que l'arbre est sur-critique, donc que $m := E[Z_1] = f'(1) \in (1, \infty)$.

On considérera le cas où $p_0 > 0$, ce qui implique que l'arbre aura des feuilles (arbres finis qui agiront comme des pièges). On note aussi q_{ext} la probabilité d'extinction ($0 < q_{\text{ext}} < 1$ puisque l'arbre est sur-critique), qui a la propriété que $f(q_{\text{ext}}) = q_{\text{ext}}$.

En commençant par un unique individu ρ appelé la *racine*, ce processus donnera un arbre noté \mathcal{T} . On supposera aussi la non-extinction de l'arbre, c'est-à-dire qu'on conditionne le processus pour que le graphe soit infini. On note (Ω, \mathbf{P}) l'espace de probabilité associé. On introduit encore un peu de notation : soit \overleftarrow{x} le parent de $x \in \mathcal{T}$ et $c(x)$ comme l'ensemble des enfants de x . On désignera généralement les enfants de x par x_i (c.-à-d. $\overleftarrow{x}_i = x$).

On considère la marche aléatoire β -biaisée sur cet arbre, qu'on définit explicitement par

$$P_\omega(X_n = y | X_{n-1} = x) = \begin{cases} \frac{\beta}{1 + \beta |c(x)|} & \text{si } y \in c(x) \text{ et } x \neq \rho \\ \frac{1}{1 + \beta |c(x)|} & \text{si } y = \overleftarrow{x} \\ \frac{\beta}{\beta |c(x)|} & \text{si } y \in c(x) \text{ et } x = \rho \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour un environnement fixé ω , la loi associée à la marche aléatoire β -biaisée est souvent appelée la loi *trempeée*, qu'on notera P_ω . On définit également la loi moyenne ou *recuite* comme $\mathbb{P}(\cdot) := \int P_\omega(\cdot) \mathbf{P}(d\omega)$.

REMARQUE. Dans un environnement ω fixé, il s'agit d'une chaîne de Markov réversible munie d'une mesure invariante $\pi(x) = \sum_{y \sim x} c(x, y)$ où $c(\overleftarrow{x}, x) := \beta^{|x|-1}$ est la conductance des arêtes (revoir la section 1.1 pour plus de détails). On rappelle que $|x| := d(\rho, x)$ est la distance de x à la racine.

1.6.2. Résultats de base. La réponse à la question (1) de la section 1.2 est donné par le théorème suivant qu'on peut retrouver dans [10] :

Théorème. Soit X_n la marche β -biaisé sur un arbre de Galton-Watson de loi \mathbf{P} . On obtient que

- Si $\beta < 1/m$, alors X_n est récurrent positif P_ω -p.s. pour \mathbf{P} -presque tout ω
- Si $\beta = 1/m$, alors X_n est récurrent nul P_ω -p.s. pour \mathbf{P} -presque tout ω
- Si $\beta > 1/m$, alors X_n est transient P_ω -p.s. pour \mathbf{P} -presque tout ω

On prend pour acquis pour le reste de la section que la marche est transiente, c.-à-d. que $\beta > 1/m$.

La question suivante demeure cependant : est-ce que la vitesse de la marche est positive? [7] y a répondu.

Théorème.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|X_n|}{n} = \nu(\beta, \mathbf{P}) \quad P_\omega\text{-p.s. pour } \mathbf{P}\text{-presque tout } \omega$$

De plus, $\nu > 0$ si $\beta \in (1/m, \beta_c)$ et $\nu = 0$ si $\beta \geq \beta_c$ où $\beta_c := 1/f'(q_{\text{ext}})$

On pourrait penser qu'un biais plus grand aurait l'effet d'augmenter la vitesse, mais on découvre qu'avec un biais trop élevée, elle sera 0. Il s'agit de l'influence des pièges ; un biais important rend ceux-ci encore plus efficace dans le sens où sortir d'un piège devient beaucoup plus difficile puisque ça implique de se déplacer à l'encontre du biais plusieurs fois en un court laps de temps.

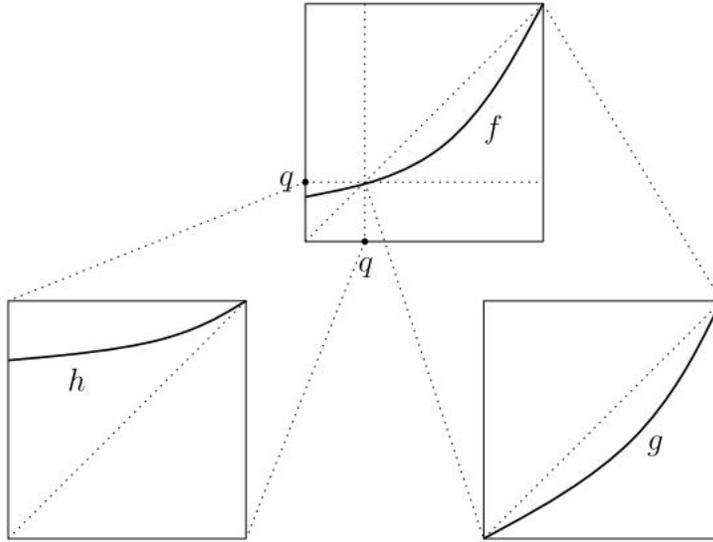


FIGURE 4 – Les fonctions génératrices de la décomposition de Harris

1.6.3. La décomposition de Harris. Soit

$$g(s) := \frac{f(s) - f(sq_{\text{ext}})}{1 - q_{\text{ext}}} \quad \text{et} \quad h(s) := \frac{f(sq_{\text{ext}})}{q_{\text{ext}}} \quad (1.15)$$

les fonctions g et h ont une représentation graphique élégante, voir la figure 4. On voit aussi facilement que $f'(q_{\text{ext}}) < 1$.

On sait par [10] qu'un arbre de f -Galton-Watson peut également être généré en

- (1) construisant un arbre g -Galton-Watson appelé le tronc et noté $B(\mathcal{T})$, où tous les sommets font partie d'un chemin infini,
- (2) attachant à chaque sommet $x \in B(\mathcal{T})$ un nombre aléatoire M_x d'arbre sous-critique (et donc nécessairement finis) h -Galton-Watson appelé les feuilles. On souligne que M_x peut être nul.

La décomposition de Harris nous permet de souligner les similarités de la marche aléatoire biaisée sur un arbre de Galton-Watson avec feuilles et des modèles de pièges présentés précédemment. On peut donc voir la marche sur le tronc comme la marche discrète sur \mathbb{Z} et le temps passé dans les pièges comme le temps d'attente. Une des plus grosses différences est que les pièges ne sont pas i.i.d. dans le sens où M_x dépend de la structure locale de l'arbre (c.-à-d. le nombre de sommet dans $B(\mathcal{T})$).

1.6.4. La marche sur le tronc. Une question demeure cependant pour ce qui est de la vitesse : comment est-ce que le biais affecte la vitesse de la marche sur le tronc ? On constate que

- (1) Augmenter le biais augmentera le temps passé dans les pièges et donc réduit la vitesse,

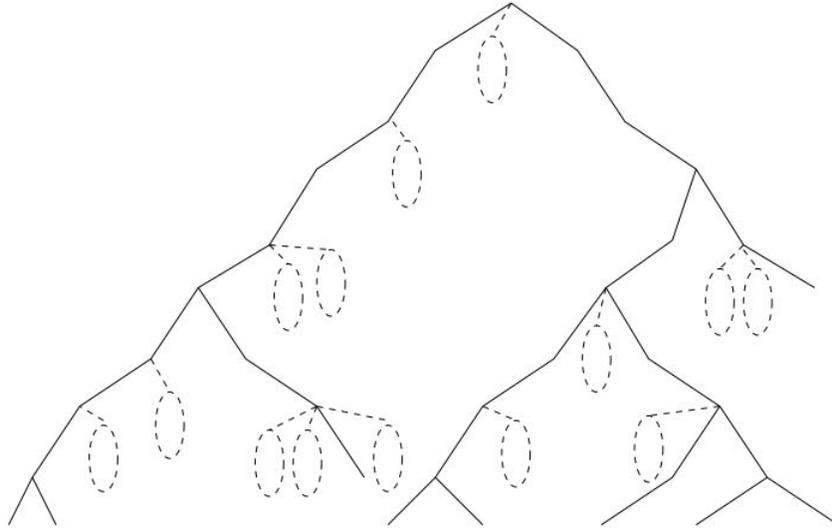


FIGURE 5 – L’arbre de Galton-Watson est décomposé deux parties : le tronc (lignes pleines) et les feuilles (lignes pointillées)

- (2) Sur le tronc, il n’y a pas de pièges pour la marche. On pourrait donc penser qu’un biais plus grand augmenterait la vitesse.

Le premier point peut être prouvé, au moins en moyenne, en utilisant la formule du temps de retour moyen (un cas particulier de la formule du temps d’aller-retour, voir [14]). Le second point n’est cependant pas aussi simple qu’il n’y paraît. Pour l’illustrer, on présente un contre-exemple : la marche sur un arbre binaire avec des demi-droites.

Soit \mathcal{T} un arbre binaire (c.-à-d. un arbre pour lequel $p_2 = 1$) auquel on ajoute un arbre infini à descendant unique à chaque sommet, on se réfère à la figure 6. Ces arbres qu’on ajoute seront essentiellement des demi-droites.

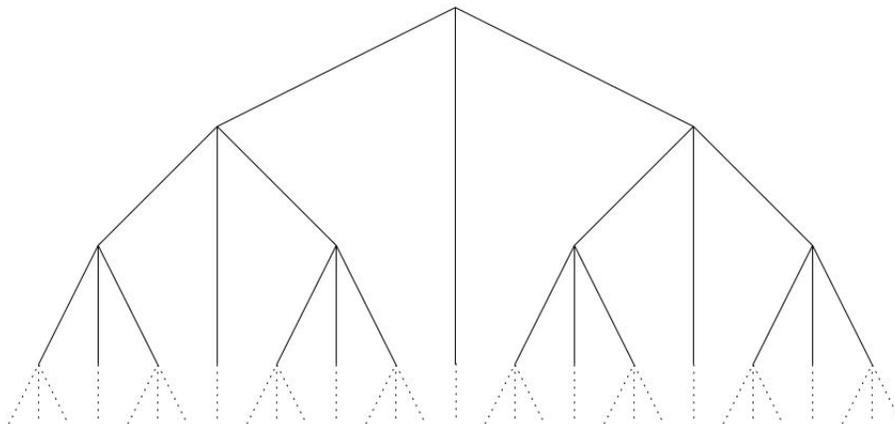


FIGURE 6 – L’arbre binaire avec des demi-droites

On voit facilement que la marche devient transiente pour $\beta > 1/2$ puisqu'il s'agit d'un arbre binaire auquel on ajoute des sommets. On observe les faits suivants.

- (1) Pour $\beta = 1/2 + \epsilon$, la marche vient à peine de devenir transiente et sa vitesse est petite ($\nu = O(\epsilon)$)
- (2) Pour $\beta = 3/4$, la marche sur la partie binaire de l'arbre a une vitesse $1/5$ (en comparant avec une marche $3/2$ -biaisé sur \mathbb{Z}) et les excursions dans les demi-droites seront courtes. Ça implique que $\nu > 0$.
- (3) Pour $\beta = 1$, la marche développe un comportement particulier dans les demi-droites : on aura des temps de retour finis avec une espérance du temps de retour qui est infinie. Cela implique que la marche peut uniquement se rendre à l'infini dans la partie binaire de l'arbre mais passera un temps très important dans les demi-droites (chaque excursion ayant une moyenne infinie). On obtient donc que $\nu = 0$.

Pour plus de détails, on réfère le lecteur à l'exemple 2.1 dans [15]

On a utilisé cet exemple pour montrer que la marche sur le tronc peut être plus complexe qu'elle n'y paraît. La portée de cet exemple est cependant plutôt restreint ; le ralentissement est causé par notre ajout de demi-droites qui agiront dans les faits comme des pièges. Le comportement de la marche devient aussi beaucoup plus simple quand $\beta > 1$, on pourrait donc argumenter qu'il s'agit d'une expérience un peu artificielle.

Il existe cependant des exemples plus convaincants mais aussi plus complexes, nous considérons que s'étendre sur le sujet dépasse le cadre de ce mémoire et que l'objectif est rempli : on voulait souligner qu'une bonne compréhension du comportement de la marche ne se limite pas à comment le biais affecte la marche dans les pièges. Pour plus de détails, nous référons de nouveau le lecteur à [15].

REMARQUE. L'exemple de la marche sur un arbre binaire avec des demi-droites peut sembler contredire le théorème 1.6.2, mais on souligne que cet arbre n'est pas un arbre de Galton-Watson.

1.6.5. Liens avec la marche sur \mathbb{Z} . On explique comment les marches sur les arbres de Galton-Watson peuvent être vues comme des marches biaisées sur \mathbb{Z} . Le fait le plus surprenant sur les marches biaisées sur des arbres de Galton-Watson est leur relative insensitivité à la structure exacte des pièges. En posant H la taille d'un piège comme la plus grande distance entre un sommet du piège et le tronc, on sait qu'il y a des grands pièges de taille $H = o(n)$ et de temps d'attente qui sont au moins d'ordre β^H à une distance de moins de n de la racine (l'arbre croît exponentiellement). Comment se fait-il qu'on peut les ignorer ?

La nature dirigée de la marche est le facteur clé pour expliquer le tout. En effet, pour une certaine réalisation, la transience directionnelle va forcer la marche à se déplacer rapidement dans l'espace et aura seulement l'opportunité de visiter une petite partie de l'arbre.

Plus spécifiquement, pour la marche β -biaisée, on peut montrer que le nombre de sites différents visités avant le temps n par la marche sur le tronc est d'ordre n (c'est assez simple quand $\beta > 1$ puisqu'on peut comparer la marche avec une marche β -biaisée sur \mathbb{Z}). Cette perspective devrait aider à convaincre le lecteur de pourquoi la marche, dans une certaine mesure, se comporte de façon similaire sur \mathbb{Z} et sur les arbres.

La façon de rendre cet instinct rigoureux est d'introduire un objet qui s'appelle les *temps de régénération*. Il s'agit d'un objet central à ce mémoire et il sera défini rigoureusement au début du chapitre 2, mais de manière informelle il s'agit d'un temps de la marche où elle atteint à la fois un nouveau maximum dans la direction de la transience et un minimum pour le futur de la

marche. Ainsi, une nouvelle distance maximum est atteinte et la marche ne revient jamais avant le sommet en question. On appellera ce temps ζ_1^X . Même si ζ_1^X n'est pas un temps d'arrêt, il permet de séparer le passé du futur de la marche en des sections indépendantes. En itérant cette construction on obtient une suite $(\zeta_i^X)_{i \in \mathbb{N}}$ de temps de régénération et on peut voir la marche comme des blocs indépendants. Cette propriété est extrêmement utile puisque ça réduit le problème de comprendre la marche aléatoire à une somme de variables i.i.d. Ensuite, le facteur clé est simplement de comprendre les queues de ces variables.

REMARQUE. La comparaison entre les modèles de piège biaisés sur \mathbb{Z} et les MAMAs directionnellement transientes a aussi des limites. En général, le comportement recuit des marches devrait être similaire, en effet le problème revient dans les deux cas à comprendre une somme de variables i.i.d.

On observera cependant que le comportement trempé (c.-à-d. sur un environnement déterminé) diffère en ce qui concerne la marche sur \mathbb{Z} .

Sur \mathbb{Z} , la suite de grands pièges que le marcheur visitera est fixée puisqu'il n'existe qu'un seul chemin vers l'infini, ce qui implique que le temps requis pour atteindre n sera extrêmement dépendant de la géométrie exacte des grands pièges rencontrés. Ça explique également pourquoi les marches sur \mathbb{Z} ont des comportements limites trempés assez compliqués.

Dans le cas des marches sur des arbres, pour atteindre une distance de n , le marcheur doit d'abord choisir un chemin parmi un grand nombre (exposant n) de possibilités. Cela implique que la suite exacte des pièges rencontrés sera aussi choisie parmi un grand nombre de possibilités. En d'autres mots, la suite des pièges rencontrés est moyennée sur l'environnement, c.-à-d. choisie sous la mesure recuite. C'est ce qui fait qu'on s'attend à des comportements similaires sous la mesure recuite et trempée. Cette dynamique sera discutée également dans la section 3 et elle explique en partie notre résultat principal.

1.6.6. Les fluctuations de la marche. On veut maintenant discuter des fluctuations de la marche avec biais constant, c'est-à-dire comment la marche se déplace par rapport à sa vitesse (est-ce que la marche se trouve proche ou loin de là où elle se trouve en moyenne?). Il s'agit de la question (3) énoncée à la fin de la section 1.2 et tel que mentionné sera le point central de ce mémoire. On pose d'abord l'hypothèse suivante :

Hypothèse 1. la loi du processus de Galton-Watson Z_1 possède des moments exponentiels, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda > 1$ t.q. $\sum_{k \geq 0} \lambda^k p_k < \infty$

Il s'agit d'une hypothèse purement technique qui peut probablement être remplacée par une borne sur un moment assez élevé de Z_1 mais les résultats n'ont jamais été prouvés dans un autre contexte.

Dans le cas des marches aléatoires sur un arbre aléatoire avec un biais constant, le problème est déjà résolu dans [1] et il est prouvé que

Théorème 1. *En supposant que $\beta \in (m^{-1}, f'(q_{ext})^{-1/2})$ et l'hypothèse 1, il existe $\sigma > 0$ t.q. pour \mathbf{P} -presque tout \mathcal{T} , le processus*

$$(B_t^n)_{t \geq 0} := \frac{|X_{[nt]}| - nvt}{\sigma\sqrt{n}}$$

converge en P_ω -distribution sur $D([0, \infty), \mathbb{R})$ avec la topologie de Skorohod J_1 vers un mouvement Brownien standard.

Ce type de théorème s'appelle un *théorème central limite* (ou TCL). On souligne la condition que $\beta \in (m^{-1}, f'(q_{\text{ext}})^{-1/2})$, qui peut être expliquée par les observations au cours du chapitre : on a $\beta > 1/m$ pour avoir la transience et $\beta < f'(q_{\text{ext}})^{-1/2}$ pour contrôler le temps passé dans les pièges. Plus spécifiquement, en définissant T_{piege} et H_{piege} comme le temps passé dans un piège et la hauteur (taille) d'un piège respectivement, on obtient euristiquement que

$$\begin{aligned} P[T_{\text{piege}} \geq t] &\approx P[\beta^{H_{\text{piege}}} \geq t] \\ &= P\left[H_{\text{piege}} \geq \frac{\log t}{\log \beta}\right] \end{aligned}$$

Puis en combinant avec $P[H_{\text{piege}} \geq n] \sim cf'(q_{\text{ext}})^n$, on obtient

$$P[T_{\text{piege}} \geq t] \sim ct^{-\frac{\log f'(q_{\text{ext}})}{\log \beta}}$$

La borne $\beta < f'(q_{\text{ext}})^{-1/2}$ assure donc que T_{piege} possède un second moment fini et on voit tout de suite le lien avec les modèles précédents.

L'objectif principal de ce mémoire est de prouver le même théorème mais dans un modèle de marche différent, plus spécifiquement dans le cas où la marche ne possèdera plus un biais constant mais bien des biais aléatoires i.i.d.

REMARQUE. L'hypothèse 1 a quelques conséquences. En définissant ξ comme une variable aléatoire de la même distribution que la première génération de \mathcal{T} et ξ^f , ξ^g et ξ^h comme des variables distribuées selon la fonction génératrice associée (ξ n'est pas distribué comme $\xi^f \sim Z_1$ puisque l'arbre est conditionné pour être infini), on obtient que toutes ces variables possèdent des moments exponentiels. En effet, puisque $P(\xi = k) = p_k(1 - q^k)(1 - q)^{-1} \leq cp_k$ par les lois de Bayes, on peut conclure que ξ hérite cette propriété de ξ^f . ξ^g et ξ^h héritent également des moments exponentiels puisque ξ les domine stochastiquement.

1.7. La marche aléatoire sur un arbre de Galton-Watson avec biais aléatoires

On change un peu le modèle précédent. La construction de l'arbre est la même, on a donc toujours Z_1 t.q. $P[Z_1 = k] = p_k$, $p_0 > 0$ (c.-à-d. $q_{\text{ext}} > 0$), la décomposition de Harris et l'hypothèse 1. Ce qui différencie le modèle qu'on étudiera est la marche aléatoire elle-même : β ne sera plus le poids des arêtes et le biais sera maintenant aléatoire.

1.7.1. Le modèle. On assigne à chaque sommet x une copie i.i.d. d'une variable aléatoire A et on définit μ comme la mesure de cette variable. Il s'agira de nos biais et les A_x viendront essentiellement remplacer β .

Bien sûr, on doit changer nos probabilités de transition en conséquence :

$$P_\omega(X_n = y | X_{n-1} = x) = \begin{cases} \frac{A_y}{1 + \sum_{x_i \in c(x)} A_{x_i}} & \text{si } y \in c(x) \text{ et } x \neq \rho \\ \frac{1}{1 + \sum_{x_i \in c(x)} A_{x_i}} & \text{si } y = \overleftarrow{x} \\ \frac{A_y}{\sum_{x_i \in c(x)} A_{x_i}} & \text{si } y \in c(x) \text{ et } x = \rho \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On rappelle qu'on désigne les enfants de x par x_i , le parent de x comme \overleftarrow{x} , l'ensemble de enfants de x comme $c(x)$ et ρ comme le premier sommet.

Ce changement est significatif puisqu'il ajoute un niveau de hasard à la marche. Notamment, ce modèle de marche aléatoire ressemble à la marche sur \mathbb{Z} avec biais aléatoire, ce qui nous amène au constat suivant : les pièges ne sont plus uniquement les arbres sous-critiques qu'on ajoute au tronc. Dépendamment de la loi des A_x , il se pourrait que des pièges se forment sur le tronc, similairement aux vallées de la marche sur \mathbb{Z} (voir la section 1.5.3). On fera donc l'hypothèse suivante :

Hypothèse 2. Le support de μ est dans $[q, Q]$ où $1 < q < Q$ et le support de $\mu \circ \log^{-1}$ n'est pas un réseau, c'est-à-dire $\nexists \alpha > 0$ t.q. $\mu(\{\log^{-1}(A_x) \in \alpha\mathbb{N}\}) = 1$.

Ce qui forcera le biais à être plus grand que 1 et empêchera la formation de tels pièges. Bien sûr, cette hypothèse simplifie significativement le problème. On mentionne cependant que la marche avec un biais aléatoire sans cette hypothèse a, à notre connaissance, seulement été étudiée dans le cas où $p_0 = 0$ (on réfère le lecteur à [5]).

1.7.2. Transience et vitesse. Le résultat principal de ce mémoire est de prouver un TCL dans notre nouveau modèle (voir le théorème 1). Il est naturel de commencer par parler de transience et de vitesse, puisque si notre résultat est vrai, ça implique non seulement que la marche se rend jusqu'à l'infini mais aussi que $\nu > 0$. Ainsi, on présente un théorème de [6]. En notant Z_n^g comme le processus de Galton-Watson distribué selon la fonction génératrice g (c.-à-d. le nombre de descendants sur le tronc de l'arbre à la n^{e} génération), on a

Théorème 2. *la marche X_n sera transiente si $\inf_{t \in [0,1]} E[A^t] > \frac{1}{E[Z_1^g]}$ et elle est récurrente sinon*

L'hypothèse 2 nous assurera donc que la marche soit transiente. Ce résultat n'a rien de surprenant puisque cette hypothèse implique que la marche est directionnellement biaisée ($A_x > 1$).

Le cas de la vitesse est cependant un peu plus complexe. [5] prouve un critère rigoureux pour savoir si la vitesse est positive, mais il s'agit du cas où $p_0 = 0$ et sans l'hypothèse 2. Il n'y a à notre connaissance pas de théorème qui a été prouvé pour déterminer si $\nu > 0$ dans notre cas. Cela ne

va cependant pas causer problème puisque si la marche possède des temps de régénération avec un second moment fini (on le prouve dans la section 2.3), alors vitesse de la marche sera non-nulle. On donne plus de détail à la fin de la même section.

1.7.3. Résultats. On se rend compte cependant qu'avec les hypothèses qui ont été posées jusqu'à maintenant, il sera probablement impossible de prouver que

$$(B_t^n)_{t \geq 0} := \frac{|X_{\lfloor nt \rfloor}| - n\nu t}{\sigma \sqrt{n}}$$

converge en distribution vers un mouvement Brownien standard. En effet, on peut facilement trouver un contre-exemple en s'imaginant un environnement où les biais sont très élevés, ou autrement dit que la distribution des A_x est très proche de $Q < \infty$. Cela implique que la marche passerait énormément de temps dans les pièges et la vitesse serait nulle.

Il faudra donc faire une hypothèse pour borner l'effet des pièges, ce qui n'est pas surprenant puisque le cas du biais constant possède l'équivalent.

Définition 1. soit $\gamma > 0$ t.q.

$$\int y^\gamma \mu(dy) = \frac{1}{f'(q_{\text{ext}})} \quad (1.16)$$

Instinctivement, plus γ est élevé, plus le biais des A_x sera faible. On borne donc inférieurement γ : un biais plus faible rendra plus probable que la marche se déplace à l'encontre du biais et sorte des pièges.

Hypothèse 3. $\gamma > 2$

Cette hypothèse vient en quelque sorte remplacer la contrainte $\beta < f'(q_{\text{ext}})^{-1/2}$ du modèle constant et joue le même rôle dans la preuve : elle nous permettra également de conclure que le temps passé dans les pièges possède un second moment fini ($P_\omega(T_{\text{piège}} \geq t) \sim t^{-2}$).

Pour énoncer notre résultat il nous manque encore un peu de notation. Le lecteur aura sûrement remarqué que la marche aléatoire comprend trois "niveaux" de hasard : l'arbre, le biais et la marche elle-même. On définit donc la mesure P_{GW} comme la mesure de la construction de l'arbre \mathcal{T} , puis \mathbf{Q} comme la distribution de l'environnement ω (c.-à-d. \mathbf{Q} est la mesure de \mathcal{T} et des biais ensembles) et P_ω^x la distribution de la marche sur un environnement déterminé ω qui aurait comme point de départ le sommet x . On appellera souvent cette dernière mesure la mesure *trempeée*. On définit finalement la mesure *recuite* ou moyenne :

$$\mathbb{Q}^x(\cdot) := \int P_\omega^x(\cdot) \mathbf{Q}(d\omega) \quad (1.17)$$

Qui désigne la mesure de la marche sur un environnement non déterminé. Par souci de brièveté, on notera P_ω^ρ et \mathbb{Q}^ρ par P_ω et \mathbb{Q} . On associe également à ces mesures les espérances E_{GW} , $E_{\mathbf{Q}}$, E_ω^x , et $E_{\mathbb{Q}}^x$.

On a maintenant toute la notation pour poser notre résultat principal :

Théorème 3. *Sous les hypothèses 1, 2 et 3, il existe $\sigma > 0$ t.q. pour \mathbf{Q} -presque tout ω , le processus*

$$(B_t^n)_{t \geq 0} := \frac{|X_{\lfloor nt \rfloor}| - n\nu t}{\sigma \sqrt{n}}$$

converge en P_ω -distribution sur $D([0, \infty), \mathbb{R})$ avec la topologie de Skorohod J_1 vers un mouvement Brownien standard.

On remarque aussi que ce TCL est sous la mesure trempée, ce qui est considérablement plus difficile à montrer que sous la mesure recuite.

2. Le théorème central limite recuit

On veut prouver dans ce chapitre une version recuite du théorème 3 (donc que $B_t^n \xrightarrow{d} B_t$ sous la mesure \mathbb{Q}). Notre preuve repose sur le fait que les temps de régénération de la marche (qu'on introduira formellement sous peu) sont non seulement une bonne approximation de B_t^n (section 2.4), mais possède aussi une variance finie (section 2.3). On utilisera ensuite le théorème de Donsker sur les temps de régénération pour obtenir le résultat.

Pour bien comprendre ce qu'est un temps de régénération on doit tout d'abord introduire la marche Y_n qui correspondra à la marche sur le tronç $B(\mathcal{T})$. Soit $r(0) := 0$, $r(n) := \inf\{k > r(n-1) : X_k, X_{k-1} \in B(\mathcal{T})\}$, alors on aura $Y_n := X_{r(n)}$. On appellera Y_n la *trace* de la marche.

Définition 2. Soit ζ_i^Y le i^e temps de régénération de la marche Y_n et ζ_i^X le i^e temps de régénération de la marche X_n ,

$$\begin{aligned}\zeta_i^Y &:= \inf\{k > \zeta_{i-1}^Y : |Y_j| < |Y_k| < |Y_l| \text{ pour tout } j < k < l\} \\ \zeta_i^X &:= \inf\{i \geq 0 : X_i = Y_{\zeta_i^Y}\}\end{aligned}$$

où $\zeta_0^Y := 0$. Il s'agit d'un temps où la marche atteint une nouvelle distance maximum qui sera aussi un distance minimum pour le futur de la marche. C'est un objet fréquemment utilisé dans le contexte des marches aléatoires sur des arbres puisque cela permet de diviser la marche en des sections i.i.d. Il est à noter que ces temps de régénération ne sont pas des temps d'arrêt, c'est-à-dire qu'on ne sait pas qu'ils se produisent si on ne connaît pas le futur de la marche.

On peut définir également la fonction inverse $m_t := \sup\{j \geq 0 : \zeta_j^X \leq t\}$; le nombre de temps de régénération avant le temps t .

Faits sur les temps de régénération

- (1) Pour tout $n \geq 1$, $\zeta_n^X < \infty$ \mathbb{Q} -p.s.
- (2) Les vecteurs aléatoires $(\zeta_{n+1}^X - \zeta_n^X, |X_{\zeta_{n+1}^X}| - |X_{\zeta_n^X}|)_{n \geq 1}$ sont i.i.d.
- (3) $E[|X_{\zeta_n^X}|^j] < \infty$ pour $n, j \in \mathbb{N}$.

On se réfère aux preuves présentées dans [7] pour les faits (1) et (2) puisque les démonstrations suivraient aisément celles qui sont présentées malgré les différences des modèles.

La preuve de (3) sera présentée à la fin de la section 2.2.2 puisque tous les outils utiles à celle-ci n'ont pas encore été définis.

Comme mentionné auparavant, la preuve de la version recuite du théorème 3 repose sur ces temps de régénération et on veut entre autres prouver qu'ils ont une variance finie.

Conséquent, une bonne partie de ce chapitre sera consacrée à prouver le lemme suivant :

Lemme 1. *Sous les hypothèses du théorème 3, $E_{\mathbb{Q}}[(\zeta_2^X - \zeta_1^X)^2] < \infty$.*

La preuve elle-même est assez complexe mais une méthode assez instinctive de procéder est de borner le temps passé dans les pièges, puis de borner le temps passé sur le tronç.

2.1. Le temps passé dans les pièges

On utilisera un cas particulier de [2, Théorème 2], mais il faut poser quelques définitions d'abord : soit $\partial B(\mathcal{T}) := \{x \in \mathcal{T} \setminus B(\mathcal{T}) : \overleftarrow{x} \in B(\mathcal{T})\}$, essentiellement l'ensemble de sommets des feuilles directement connectés au tronc. Bien sûr, il s'agira des l'entrées des pièges. On définit également τ_E comme le temps d'arrivée de la marche vers E , plus précisément $\tau_E := \inf\{m \geq 0 : X_m \in E\}$.

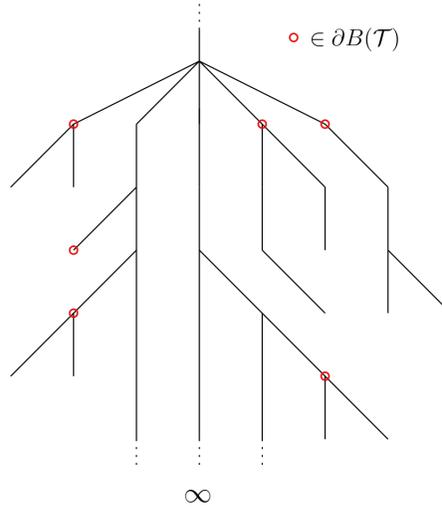


FIGURE 7 – $\partial B(\mathcal{T})$, les entrées des pièges (en rouge)

Corollaire 1. *Si les hypothèses 1 et 2 sont vraies, alors pour tout $y \in \partial B(\mathcal{T})$ on a*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{Q}^y(\tau_{B(\mathcal{T})} > x)}{x^{-\gamma}} \leq c\Gamma(1 + \gamma) \quad (2.1)$$

où γ apparaît dans (1.16)

On souligne que sous la mesure \mathbb{Q}^y , $\tau_{B(\mathcal{T})}$ est le temps d'une excursion dans le piège. Plus précisément, $\tau_{B(\mathcal{T})}$ désigne le temps pris par la marche pour revenir sur le tronc, ce qui implique que si on prend comme point de départ $y \in \partial B(\mathcal{T})$ l'entrée d'un piège, $\tau_{B(\mathcal{T})}$ sera le temps passé dans le piège.

Avec l'hypothèse 3, on retrouve une équation familière : la queue du temps passé dans les pièges sera d'ordre x^{-2} , tel que dans les modèles de pièges présentés dans le chapitre 1.

On veut utiliser ce corollaire pour prouver le lemme suivant :

Lemme 2. *Si les hypothèses 1, 2 et 3 sont vraies, alors pour tout $y \in \partial B(\mathcal{T})$ on a*

$$E_{\mathbb{Q}}^y[\tau_{B(\mathcal{T})}^2] < \infty$$

Démonstration. On commence par remarquer que

$$E_{\mathbb{Q}}^y[\tau_{B(\mathcal{T})}^2] = \int_0^{\infty} \mathbb{Q}^y(\tau_{B(\mathcal{T})}^2 > x) dx \quad (2.2)$$

Par les propriétés des intégrales impropres, s'il existe $f(x)$ intégrable t.q. $\mathbb{Q}^y(\tau_{B(\mathcal{T})}^2 > x) = O(f(x))$ alors $\mathbb{Q}^y(\tau_{B(\mathcal{T})}^2 > x)$ est intégrable. Puisque le corollaire 1 nous dit que $\mathbb{Q}^y(\tau_{B(\mathcal{T})}^2 > x) \leq O(x^{-\frac{\gamma}{2}})$, on conclut que si $\gamma > 2$ alors $E_{\mathbb{Q}}^y[\tau_{B(\mathcal{T})}^2] < \infty$. \square

2.2. Le temps passé sur le tronç

La prochaine étape pour prouver le lemme 1 est d'avoir une meilleure idée du comportement de la marche Y_n . On aimerait en fait prouver que $E_{\mathbb{Q}}[(\zeta_2^Y - \zeta_1^Y)^j] < \infty$ pour $j \in \mathbb{N}$. Pour ce faire, il est possible de "borner" la marche Y_n par une marche sur \mathbb{Z} .

2.2.1. Le couplage de Y_n et la marche sur \mathbb{Z} . On définit W_n , une marche biaisée sur \mathbb{Z} où $P(W_n = i | W_{n-1} = i - 1) = \frac{q}{1+q}$ (il s'agit du q de l'hypothèse 2) et on synchronise Y_n et W_n de la manière suivante :

- (1) Soit une suite de variables aléatoires i.i.d. $(U_i)_{i \geq 0}$ de distribution uniforme sur $[0, 1]$
- (2) En assumant que $Y_n = y \neq \rho$ possède k enfants dans $B(\mathcal{T})$ de sorte que $c(y) \cap B(\mathcal{T}) := \{y_1, \dots, y_k\}$, si $U_{n+1} \leq \frac{1}{1 + \sum_{1 \leq i \leq k} A_{y_i}}$ alors $Y_{n+1} = \leftarrow y$ et si $U_{n+1} \in (\frac{1 + \sum_{1 \leq i \leq j-1} A_{y_i}}{1 + \sum_{1 \leq i \leq k} A_{y_i}}, \frac{1 + \sum_{1 \leq i \leq j} A_{y_i}}{1 + \sum_{1 \leq i \leq k} A_{y_i}}]$ alors $Y_{n+1} = y_j$
- (3) Si $U_{n+1} \leq \frac{1}{1+q}$, alors $W_{n+1} = W_n - 1$ et $W_{n+1} = W_n + 1$ sinon
- (4) Si $Y_n = \rho$, alors $Y_{n+1} = \rho_j$ si $U_{n+1} \in (\frac{\sum_{1 \leq i \leq j-1} A_{y_i}}{\sum_{1 \leq i \leq k} A_{y_i}}, \frac{\sum_{1 \leq i \leq j} A_{y_i}}{\sum_{1 \leq i \leq k} A_{y_i}}]$

Instinctivement, W_n est une marche qui "suivra" Y_n et ces deux marches auront, une bonne partie du temps, le même comportement dans le sens où les marches avancent ou reculent similairement. Avec le choix de biais de W_n , on aura cependant que les marches ne se suivent pas exactement : W_n est en quelque sorte le cas extrême du nombre de fois que la marche recule (se déplace vers la racine), c'est dans ce sens qu'on dit que W_n vient borner Y_n . De façon plus rigoureuse, on remarque que si $|Y_{n+1}| < |Y_n|$ alors il est nécessairement vrai que $W_{n+1} < W_n$, ou autrement dit si Y_n recule alors W_n recule.

De là vient tout l'intérêt de cette construction, puisque cela implique que les temps de régénération de la marche W seront nécessairement aussi des temps de régénération de marche Y , ce qui veut dire qu'on aura des informations importantes sur la marche sur le tronç en étudiant un modèle bien plus simple. On définit donc l'objet clé de ce couplage : ζ_i^W , les temps de régénération de la marche W , qu'on appellera les *super temps de régénération*.

2.2.2. Les moments de $\zeta_2^Y - \zeta_1^Y$. On veut prouver que $E_{\mathbb{Q}}[(\zeta_2^Y - \zeta_1^Y)^j] < \infty$ pour tout j . Pour nous aider, on commence par prouver le lemme suivant :

Lemme 3. $W_{\zeta_1^W}$ possède des moments exponentiels, c.-à-d. qu'il existe une constante $s > 0$ arbitrairement proche de 0 t.q.

$$E \left[e^{sW_{\zeta_1^W}} \right] < \infty \quad (2.3)$$

(il s'agit d'une définition équivalente des moments exponentiels à celle énoncée dans l'hypothèse 1)

Démonstration. Soit l'évènement $\{W_{\zeta_1^W} = 1\}$, l'évènement que la marche ne revienne jamais à 1 après l'avoir atteint. On obtient que

$$P(W_{\zeta_1^W} = 1) = \frac{q}{q+1} - \frac{1}{q+1} = \frac{q-1}{q+1},$$

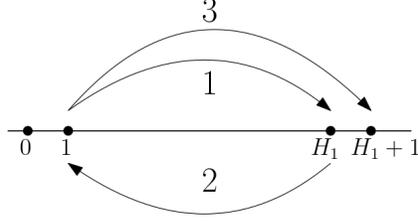


FIGURE 8 – La première excursion de W_n de longueur H_1

par les propriétés des marches biaisées sur \mathbb{Z} . Dans le cas où $W_{\zeta_1^W} \neq 1$, on s'intéresse à H_1 la distance parcourue par W avant de revenir à 1, qu'on définit explicitement avec

$$\begin{aligned}\Delta_i &:= \inf \{k : W_k = i\} \\ \Delta_i^+ &:= \inf \{k > \Delta_i : W_k = i\} \\ H_1 &:= \sup \{W_n : 0 < n \leq \Delta_1^+\}\end{aligned}$$

où Δ_i désigne le temps d'atteinte de i par la marche et Δ_i^+ est le temps pour atteindre i une seconde fois (il est possible que $\Delta_i^+ = \infty$).

Essentiellement, on observe que si la marche revient à 1, elle effectuera en quelque sorte une "excursion" de longueur H_1 .

Après cette excursion, la marche est à 1 puis se rend éventuellement à $H_1 + 1$ par transience. Dès que la marche atteint $H_1 + 1$ (c'est la première fois que la marche se rend aussi loin), on remarque que la marche se retrouve dans la même situation : on a une chance $P(W_{\zeta_1^W} = 1)$ que $W_{\zeta_1^W} = H_1 + 1$ et si $W_{\zeta_1^W} \neq H_1 + 1$, la marche effectue une autre excursion distribuée comme H_1 . On peut donc voir la distance $W_{\zeta_1^W}$ comme une série d'excursions de différentes distances i.i.d. Plus rigoureusement, en posant

$$S_i := \sum_{j=1}^i H_j, \quad (2.4)$$

on définit

$$H_i := \sup \left\{ W_n - S_{i-1} : \Delta_{S_{i-1}+1} \leq n \leq \Delta_{S_{i-1}+1}^+ \right\} \quad (2.5)$$

H_i est donc la longueur de la i^e excursion de W_n avant son retour à $S_{i-1} + 1$.

On souligne que S_i est essentiellement la variable qu'on étudie, puisqu'en définissant la v.a. J , le nombre d'excursion de la marche, on obtient que $W_{\zeta_1^W} = S_J + 1$. On remarque aussi que J possède une distribution assez simple :

$$J + 1 \sim Geo \left(P \left(W_{\zeta_1^W} = 1 \right) \right)$$

On s'attarde donc aux propriétés de H_1 . On commence par remarquer que

$$P(H_1 = 1) = \frac{1}{1+q},$$

la probabilité que la marche recule dès qu'elle atteint 1. Pour calculer $P(H_1 = k)$ dans le cas où $k \geq 2$, on commence par établir le parallèle avec le problème classique de la ruine du joueur dans le cas biaisé (ce problème est présenté dans l'annexe A). L'évènement $H_1 = k$ n'est rien d'autre que l'évènement "en partant de 2, atteindre k avant de revenir à 1 puis atteindre 1 avant $k + 1$ " dans le contexte de la ruine du joueur biaisée. On peut séparer l'évènement en deux évènements

indépendants : "atteindre k avant 1 en partant de 2" et "atteindre 1 avant $k + 1$ en partant de k ". En se rappelant que le biais est de $\frac{q}{1+q}$, ces probabilités seront respectivement de $\frac{\frac{1}{q}-1}{(\frac{1}{q})^{k-1}-1}$ et $\frac{q-1}{q^k-1}$ (selon (0.6) dans l'annexe). Ainsi, quand $k \geq 2$ on trouve

$$\begin{aligned}
P(H_1 = k) &= \frac{(\frac{1}{q} - 1)(q - 1)}{((\frac{1}{q})^{k-1} - 1)(q^k - 1)} \\
&= \frac{\frac{1}{q}(q - 1)^2}{(\frac{1}{q})^{k-1}(q^{k-1} - 1)(q^k - 1)} \\
&= \frac{q^{k-2}(q - 1)^2}{(q^{k-1} - 1)(q^k - 1)} \\
&= \left(\frac{q - 1}{q}\right)^2 \left(\frac{q^k}{(q^{k-1} - 1)(q^k - 1)}\right) \\
&\leq \left(\frac{q - 1}{q}\right)^2 \left(\frac{q^k}{(q^{k-1} - q^{k-2})(q^k - q^{k-1})}\right) \\
&= \frac{1}{q^{k-1}}
\end{aligned}$$

On peut conclure que

$$\begin{aligned}
E \left[e^{sH_1} \right] &= \sum_{k=1}^{\infty} e^{sk} P(H_1 = k) \\
&\leq e^s \frac{1}{q + 1} + \sum_{k=2}^{\infty} e^{sk} \frac{1}{q^{k-1}}
\end{aligned}$$

converge en choisissant $s > 0$ t.q. $\frac{e^s}{q} < 1$. On obtient donc que H_1 a des moments exponentiels.

On veut maintenant utiliser les moments exponentiels de H_1 pour conclure que $W_{\zeta_1^W}$ a également des moments exponentiels.

$$\begin{aligned}
E \left[e^{sW_{\zeta_1^W}} \right] &= E \left[e^{s(S_J+1)} \right] \\
&= e^s \sum_{i=0}^{\infty} E \left[e^{sS_J} \mid J = i \right] P(J = i) \\
&= e^s P(W_{\zeta_1^W} = 1) \sum_{i=0}^{\infty} E \left[e^{sS_i} \right] (1 - P(W_{\zeta_1^W} = 1))^i \\
&= e^s P(W_{\zeta_1^W} = 1) \sum_{i=0}^{\infty} E \left[e^{s \sum_{1 \leq j \leq i} H_j} \right] (1 - P(W_{\zeta_1^W} = 1))^i \\
&= e^s P(W_{\zeta_1^W} = 1) \sum_{i=0}^{\infty} E \left[e^{sH_1} \right]^i (1 - P(W_{\zeta_1^W} = 1))^i
\end{aligned}$$

où on a utilisé que les H_j sont i.i.d. à la dernière ligne. Puisque $E \left[e^{sH_1} \right]$ est une fonction continue croissante autour de 0 et égale à 1 quand $s = 0$, on peut choisir s pour que $E \left[e^{sH_1} \right]$ soit arbitrairement proche de 1, entre autres on peut choisir un s t.q. $E \left[e^{sH_1} \right] (1 - P(W_{\zeta_1^W} = 1)) < 1$, ce qui implique que la somme converge et que $W_{\zeta_1^W}$ possède des moments exponentiels. \square

REMARQUE. le lemme 3 n'implique pas que $Y_{\zeta_1^Y}$ possède des moments exponentiels parce que $W_{\zeta_1^W}$ ne domine pas stochastiquement $Y_{\zeta_1^Y}$ (malgré le fait que ζ_1^W domine stochastiquement ζ_1^Y).

Le lemme 3 nous sera utile pour prouver le résultat qui nous intéresse vraiment, c'est-à-dire contrôler les moments de $\zeta_2^Y - \zeta_1^Y$.

Lemme 4.

$$E \left[\left(\zeta_2^Y - \zeta_1^Y \right)^j \right] < \infty \quad \forall j \in \mathbb{N} \quad (2.6)$$

Démonstration. On utilisera bien entendu les outils et le lemme qu'on vient de présenter, notre première étape est donc de déterminer comment le couplage de W_n et Y_n et le lemme 3 simplifieront notre preuve.

Tel que mentionné, il existe $i \geq 1$ t.q. $\zeta_i^Y = \zeta_1^W$, puis par construction on constate que $\zeta_2^W - \zeta_1^W$ domine stochastiquement $\zeta_{i+1}^Y - \zeta_i^Y$. Par les propriétés des temps de régénération, $\zeta_{i+1}^Y - \zeta_i^Y$ et $\zeta_2^Y - \zeta_1^Y$ sont i.i.d. pour tout $i \geq 2$, il sera donc suffisant de prouver que $E[(\zeta_2^W - \zeta_1^W)^j] < \infty$

On commence par remarquer que dans la marche $W_{\zeta_1^W+n}$, la marche est restreinte à ne jamais revenir au sommet $W_{\zeta_1^W}$ (sinon il ne s'agirait pas d'un temps de régénération). On a cependant que la marche W_n ne possède pas de telle restriction mais possède autrement les mêmes probabilités de transition. Cela implique que ζ_1^W domine stochastiquement $\zeta_2^W - \zeta_1^W$ et qu'il suffira de prouver que $E[(\zeta_1^W)^j] < \infty$.

$$\begin{aligned} E \left[\left(\zeta_1^W \right)^j \right] &= \sum_{n=1}^{\infty} E \left[\left(\zeta_1^W \right)^j \mathbf{1}_{W_{\zeta_1^W}=n} \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} E \left[\Delta_n^j \mathbf{1}_{W_{\zeta_1^W}=n} \right] \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} E \left[\Delta_n^{2j} \right]^{1/2} \left(P \left(W_{\zeta_1^W} = n \right) \right)^{1/2} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-cn} E \left[\Delta_n^{2j} \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (2.7)$$

où on a utilisé les moments exponentiels de $W_{\zeta_1^W}$ (lemme 3) à la dernière ligne et Cauchy-Schwarz à la troisième.

On veut donc borner $E [\Delta_n^{2j}]$:

$$\begin{aligned}
E [\Delta_n^{2j}] &= \sum_{i=0}^{\infty} E [\Delta_n^{2j} \mathbf{1}_{in^2 \leq \Delta_n < (i+1)n^2}] \\
&\leq \sum_{i=0}^{\infty} E \left[\left((i+1)n^2 \right)^{2j} \mathbf{1}_{in^2 \leq \Delta_n < (i+1)n^2} \right] \\
&= n^{4j} \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)^{2j} P \left(in^2 \leq \Delta_n < (i+1)n^2 \right) \\
&\leq n^{4j} \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)^{2j} P \left(\Delta_n \geq in^2 \right)
\end{aligned} \tag{2.8}$$

En définissant l'évènement

$$\mathcal{A}_{i,n} := \left\{ \left| \{W_k\}_{k \leq in^2} \right| \leq \sqrt{in^2} \right\},$$

l'évènement qu'avant le temps in^2 la marche visite au maximum $\sqrt{in^2}$ sommets différents. On souligne que l'évènement $\mathcal{A}_{i,n}$ implique l'existence d'un sommet W_k , $k \leq in^2$ qui sera visité au moins $\lceil \sqrt{in^2} \rceil = \lceil i^{1/2}n \rceil$ fois par la marche. On peut donc déduire par les propriétés des marches biaisées sur \mathbb{Z} que

$$P(\mathcal{A}_{i,n}) \leq \left(1 - \frac{q-1}{q+1} \right)^{\lceil i^{1/2}n \rceil} \tag{2.9}$$

On remarque aussi que l'évènement $\{\Delta_n \geq in^2\} \cap \mathcal{A}_{i,n}^c$ implique que la marche atteint le sommet $-\lceil \sqrt{in^2} \rceil - 1 + n$ avant le sommet n (en terme mathématique, $\Delta_{-\lceil \sqrt{in^2} \rceil - 1 + n} < \Delta_n$) puisque la marche a visité au moins $\lceil \sqrt{in^2} \rceil + 1$ sommets mais ne s'est pas encore rendu à n . On peut donc de nouveau faire un parallèle avec la ruine du joueur et borner la probabilité que l'évènement $\{\Delta_n \geq in^2\} \cap \mathcal{A}_{i,n}^c$ se produise en utilisant l'équation (0.6) de l'annexe A.

$$\begin{aligned}
P \left(\Delta_n \geq in^2 \cap \mathcal{A}_{i,n}^c \right) &\leq \frac{q^n - 1}{q^{\lceil \sqrt{in^2} \rceil + 1} - 1} \\
&\leq \frac{q^n - 1}{q^{n \lceil i^{1/2} \rceil + 1} - 1}
\end{aligned} \tag{2.10}$$

On peut ensuite continuer de borner l'équation (2.8) en utilisant (2.9) et (2.10)

$$\begin{aligned}
E \left[\Delta_n^{2j} \right] &\leq n^{4j} \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)^{2j} P \left(\Delta_n \geq in^2 \right) \\
&\leq n^{4j} \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)^{2j} \left(P \left(\Delta_n \geq in^2 \cap \mathcal{A}_{i,n}^c \right) + P \left(\mathcal{A}_{i,n} \right) \right) \\
&\leq n^{4j} \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)^{2j} \left(\frac{q^n - 1}{q^{n \lfloor i^{1/2} \rfloor + 1} - 1} + \left(1 - \frac{q-1}{q+1} \right)^{\lfloor ni^{1/2} \rfloor} \right) \\
&\leq n^{4j} \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)^{2j} \left(\frac{q-1}{q^{\lfloor i^{1/2} \rfloor + 1} - 1} + \left(1 - \frac{q-1}{q+1} \right)^{\lfloor i^{1/2} \rfloor} \right) \\
&\leq n^{4j} C
\end{aligned}$$

puisque la somme va converger pour tout j et ne dépend plus de n .

On peut aussi utiliser (2.7) pour obtenir

$$\begin{aligned}
E \left[\left(\zeta_1^W \right)^j \right] &\leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-cn} E \left[\Delta_n^{2j} \right]^{1/2} \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-cn} \left(Cn^{4j} \right)^{1/2} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

□

On peut maintenant facilement montrer que le fait (3) énoncé dans la section 2 est vrai.

Corollaire 2. $E_{\mathbb{Q}} \left[|X_{\zeta_i^X}|^j \right] < \infty$ pour tout $j \in \mathbb{N}$

Démonstration. Dans la preuve du lemme 4 on prouve que $E \left[\left(\zeta_1^W \right)^j \right] < \infty$, ce qui implique que

$$E_{\mathbb{Q}} \left[|Y_{\zeta_1^Y}|^j \right] \leq E \left[\left(\zeta_1^Y \right)^j \right] \leq E \left[\left(\zeta_1^W \right)^j \right] < \infty$$

Le lemme 4 implique aussi directement que $E_{\mathbb{Q}} \left[\left(|Y_{\zeta_2^Y}| - |Y_{\zeta_1^Y}| \right)^j \right]$. Le résultat suit par convexité.

□

2.3. Second moment des temps de régénération de la marche X_n

On pose quelques variables avant d'entamer la preuve du lemme 1. Soit

$$\eta_k := r(k+1) - r(k), \quad (2.11)$$

le temps total pris par la marche X_n entre le k^e et $(k+1)^e$ pas sur le tronç $B(\mathcal{T})$ (on rappelle que $Y_n = X_{r(n)}$). Ce temps est réparti en

$$N_k := \sum_{j=r(k)+1}^{r(k+1)} \mathbf{1}_{\{X_j=Y_k\}} \quad (2.12)$$

excursions successives dans les pièges du sommet Y_k . On peut aussi écrire

$$\eta_k = 1 + \sum_{j=1}^{N_k} \psi_{k,j} \quad \text{où} \quad \psi_{k,j} := \sum_{i=r(k)}^{r(k+1)} \mathbf{1}_{\{\sum_{l=r(k)}^i \mathbf{1}_{\{X_l=Y_k\}}=j\}}$$

est la durée de la j^e excursion dans les pièges de Y_k . On souligne que $\psi_{k,j}$ est distribué exactement comme $\tau_{B(\mathcal{T})} + 1$ sous la mesure \mathbb{Q}^y où $y \in \partial B(\mathcal{T})$

On rappelle l'énoncé du lemme 1 :

Lemme. *Sous les hypothèses du théorème 3, $E_{\mathbb{Q}}[(\zeta_2^X - \zeta_1^X)^2] < \infty$.*

Démonstration. On remarque que $\zeta_2^X - \zeta_1^X$ est distribué identiquement sous la mesure \mathbb{Q} et sous $\mathbb{Q}(\cdot | \zeta_1^Y = 1)$, donc

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{Q}} \left[(\zeta_2^X - \zeta_1^X)^2 \right] &= E_{\mathbb{Q}} \left[(\zeta_2^X - \zeta_1^X)^2 \mid \zeta_1^Y = 1 \right] \\ &= E_{\mathbb{Q}} \left[\left(\sum_{k=1}^{\zeta_2^Y - \zeta_1^Y} \eta_k \right)^2 \mid \zeta_1^Y = 1 \right] \\ &\leq E_{\mathbb{Q}} \left[(\zeta_2^Y - \zeta_1^Y) \sum_{k=1}^{\zeta_2^Y - \zeta_1^Y} \eta_k^2 \mid \zeta_1^Y = 1 \right] \end{aligned}$$

Par convexité. On utilise encore la convexité pour avoir

$$\begin{aligned} &E_{\mathbb{Q}} \left[(\zeta_2^Y - \zeta_1^Y) \sum_{k=1}^{\zeta_2^Y - \zeta_1^Y} \left(1 + \sum_{j=1}^{N_k} \psi_{k,j} \right)^2 \mid \zeta_1^Y = 1 \right] \\ &\leq E_{\mathbb{Q}} \left[(\zeta_2^Y - \zeta_1^Y) \sum_{k=1}^{\zeta_2^Y - \zeta_1^Y} (N_k + 1) \left(1 + \sum_{j=1}^{N_k} \psi_{k,j}^2 \right) \mid \zeta_1^Y = 1 \right] \\ &\leq E_{\mathbb{Q}} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (\zeta_2^Y - \zeta_1^Y) (N_k + 1) \psi_{k,j}^2 \mathbf{1}_{k \leq \zeta_2^Y - \zeta_1^Y} \mathbf{1}_{j \leq N_k + 1} \mid \zeta_1^Y = 1 \right] \end{aligned}$$

On souligne que la durée $\psi_{k,j}$ de chaque excursion individuelle est indépendante de $\zeta_2^Y - \zeta_1^Y$ et N_k . Conséquent, en considérant que $y \in \partial B(\mathcal{T})$, on peut continuer l'équation précédente par

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} E_{\mathbb{Q}} [\psi_{k,j}^2] E_{\mathbb{Q}} \left[(\zeta_2^Y - \zeta_1^Y) (N_k + 1) \mathbf{1}_{k \leq \zeta_2^Y - \zeta_1^Y} \mathbf{1}_{j \leq N_k + 1} \mid \zeta_1^Y = 1 \right] \\
&= E_{\mathbb{Q}}^y \left[(\tau_{B(\mathcal{T})} + 1)^2 \right] \sum_{k=1}^{\infty} E_{\mathbb{Q}} \left[(\zeta_2^Y - \zeta_1^Y) (N_k + 1) \mathbf{1}_{k \leq \zeta_2^Y - \zeta_1^Y} \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{1}_{j \leq N_k + 1} \mid \zeta_1^Y = 1 \right] \\
&= E_{\mathbb{Q}}^y \left[(\tau_{B(\mathcal{T})} + 1)^2 \right] \sum_{k=1}^{\infty} E_{\mathbb{Q}} \left[(\zeta_2^Y - \zeta_1^Y) \mathbf{1}_{k \leq \zeta_2^Y - \zeta_1^Y} (N_k + 1)^2 \mid \zeta_1^Y = 1 \right]
\end{aligned}$$

On rappelle que par le lemme 2, $E_{\mathbb{Q}}^y \left[(\tau_{B(\mathcal{T})} + 1)^2 \right] < \infty$, il suffira donc de considérer le reste de l'équation pour le reste de la preuve.

On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec la norme L^2 pour obtenir

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty} E_{\mathbb{Q}} \left[(\zeta_2^Y - \zeta_1^Y) \mathbf{1}_{k \leq \zeta_2^Y - \zeta_1^Y} (N_k + 1)^2 \mid \zeta_1^Y = 1 \right] \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} E_{\mathbb{Q}} \left[(\zeta_2^Y - \zeta_1^Y)^2 \mathbf{1}_{k \leq \zeta_2^Y - \zeta_1^Y} \mid \zeta_1^Y = 1 \right]^{1/2} E_{\mathbb{Q}} \left[(N_k + 1)^4 \mid \zeta_1^Y = 1 \right]^{1/2} \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} E_{\mathbb{Q}} \left[(\zeta_2^Y - \zeta_1^Y)^4 \right]^{1/4} \mathbb{Q} \left(k \leq \zeta_2^Y - \zeta_1^Y \mid \zeta_1^Y = 1 \right)^{1/4} E_{\mathbb{Q}} \left[(N_k + 1)^4 \mid \zeta_1^Y = 1 \right]^{1/2} \\
&\leq \mathbb{Q} \left(\zeta_1^Y = 1 \right)^{-(1/4+1/2)} \sum_{k=1}^{\infty} E_{\mathbb{Q}} \left[(\zeta_2^Y - \zeta_1^Y)^4 \right]^{1/4} \mathbb{Q} \left(k \leq \zeta_2^Y - \zeta_1^Y \right)^{1/4} E_{\mathbb{Q}} \left[(N_k + 1)^4 \right]^{1/2}
\end{aligned}$$

On commence par remarquer que le lemme 4 nous donne que $E_{\mathbb{Q}} \left[(\zeta_2^Y - \zeta_1^Y)^4 \right]^{1/4} < \infty$.

On constate également que puisque la racine ne possède pas de parent, si nous n'avons aucune autre information, il est plus probable de tomber dans un piège à partir de la racine. On peut donc stochastiquement dominer le nombre d'excursion d'un sommet par le nombre d'excursion partant de la racine, c'est-à-dire $E_{\mathbb{Q}}[(N_k + 1)^4] \leq E_{\mathbb{Q}}[(N_0 + 1)^4]$.

De plus, il est évident que le nombre d'excursion à partir de la racine est une loi géométrique de paramètre $1 - p_{\text{ex}}$ (en fait $N_0 + 1 \sim \text{Geo}(1 - p_{\text{ex}})$), où

$$p_{\text{ex}} := \frac{\sum_{x \in c(\rho) \cap \partial B(\mathcal{T})} A_x}{\sum_{x \in c(\rho)} A_x}$$

la probabilité d'excursion à partir de la racine. En utilisant les propriétés des variables aléatoires géométriques, on obtient que

$$\begin{aligned}
E_{\mathbb{Q}}[(N_0 + 1)^4] &\leq CE_{\mathbb{Q}} \left[(1 - p_{\text{ex}})^{-4} \right] \\
&\leq CE_{\mathbb{Q}} \left[\left(\sum_{x \in c(\rho)} A_x \right)^4 \right] \\
&\leq CE_{\mathbb{Q}} \left[(|c(\rho)|Q)^4 \right] \\
&\leq CQ^4 E_{\mathbb{Q}} \left[|c(\rho)|^4 \right] \\
&= CE_{\mathbb{Q}} \left[\xi^4 \right] \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

où on rappelle que Q est défini comme $1 < q \leq A_x \leq Q$ dans l'hypothèse 2 et que ξ est distribué comme le nombre de sommet à la première génération de l'arbre (donc $|c(\rho)|$) et possède des moments exponentiels (voir la remarque 1.6.6).

On obtient donc finalement que

$$\begin{aligned}
E_{\mathbb{Q}} \left[\left(\zeta_2^X - \zeta_1^X \right)^2 \right] &\leq C \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{Q} \left(k \leq \zeta_2^Y - \zeta_1^Y \right)^{1/4} \\
&\leq C \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{E_{\mathbb{Q}} \left[\left(\zeta_2^Y - \zeta_1^Y \right)^j \right]}{k^j} \right)^{1/4}
\end{aligned}$$

par l'inégalité de Tchebychev, où $j \in \mathbb{N}$. En particulier, on peut choisir $j > 4$ pour obtenir que la somme converge par le lemme 4, ce qui conclut la preuve. \square

REMARQUE (la vitesse). On peut prouver assez facilement que le lemme 1 implique que $\nu > 0$. Il suffira de prouver que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|X_{\zeta_n^X}|}{\zeta_n^X} > 0$, puisqu'il s'agit d'une sous-suite de $\frac{|X_n|}{n}$ ($\nu := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|X_n|}{n}$).

Il résulte de la loi des grands nombres que

$$\frac{\zeta_n^X}{n} \xrightarrow{\mathbb{Q}\text{-p.s.}} E_{\mathbb{Q}} \left[\zeta_2^X - \zeta_1^X \right],$$

et

$$\frac{|X_{\zeta_n^X}|}{n} \xrightarrow{\mathbb{Q}\text{-p.s.}} E_{\mathbb{Q}} \left[\left| X_{\zeta_2^X} \right| - \left| X_{\zeta_1^X} \right| \right]$$

Ce qui nous permet de conclure que

$$\frac{|X_{\zeta_n^X}|}{\zeta_n^X} = \frac{n}{\zeta_n^X} \frac{|X_{\zeta_n^X}|}{n} \xrightarrow{\mathbb{Q}\text{-p.s.}} \frac{E_{\mathbb{Q}} \left[\left| X_{\zeta_2^X} \right| - \left| X_{\zeta_1^X} \right| \right]}{E_{\mathbb{Q}} \left[\zeta_2^X - \zeta_1^X \right]} > 0 \quad (2.13)$$

Bien sûr, c'est le lemme 1 qui nous permet d'appliquer la loi des grands nombres sur $|X_{\zeta_n^X}|$ et ζ_n^X .

2.4. Preuve du TCL recuit

Maintenant que nous avons prouvé que la variance des temps de régénération est finie, nous sommes prêts à entamer la preuve du TCL recuit. On utilisera une approximation de B_t^n en définissant

$$\chi_j := |X_{\zeta_j^X}| - |X_{\zeta_{j-1}^X}| - \nu(\zeta_j^X - \zeta_{j-1}^X) = |Y_{\zeta_j^Y}| - |Y_{\zeta_{j-1}^Y}| - \nu(\zeta_j^X - \zeta_{j-1}^X) \quad (2.14)$$

$$\Sigma_m := \sum_{j=2}^m \chi_j = (|X_{\zeta_m^X}| - \nu\zeta_m^X) - (|X_{\zeta_1^X}| - \nu\zeta_1^X) \quad (2.15)$$

Bien sûr, on constate que les χ_j sont i.i.d. sous la mesure \mathbb{Q} et que ceux-ci sont centrés par la définition de ν . On peut aussi conclure que $E_{\mathbb{Q}}[\chi_j^2] < \infty$ grâce au lemme 1.

En se rappelant la définition de $m_t := \sup\{j \geq 0 : \zeta_j^X \leq t\}$, le nombre de temps de régénération avant le temps t , on veut montrer que $\Sigma_{m_t n}$ est une bonne approximation de B_t^n . Pour se faire, on aura besoin de poser quelques définitions.

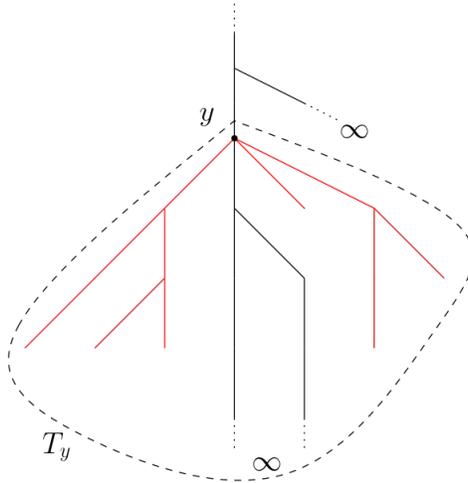


FIGURE 9 – la branche T_y^- (en rouge) et le sous-arbre T_y (en pointillé)

Pour $x \in \mathcal{T}$, on pose \mathcal{T}_x comme le sous-arbre de \mathcal{T} contenant tous les descendants de x et pour $y \in B(\mathcal{T})$, on pose \mathcal{T}_y^- comme le sous-arbre contenant tous les descendants de y qui ne sont pas dans $B(\mathcal{T})$; on appellera \mathcal{T}_y^- une branche de l'arbre \mathcal{T} . Par définition, il est donc donné que \mathcal{T}_y^- est un arbre fini ayant une racine y et un nombre aléatoire M_y^- d'arbre de Galton-Watson de loi h . Puisque M_y^- est stochastiquement dominé par ξ , on obtient par l'hypothèse 1 et la remarque qui la suit que ceux-ci ont des moments exponentiels. On peut donc conclure par [7, Théorème B] qu'il existe une constante $C > 0$ t.q.

$$P_{GW}(\mathcal{H}(\mathcal{T}_y^-) \geq n) \leq C f'(q_{\text{ext}})^n, \quad (2.16)$$

où on définit $\mathcal{H}(T) := \sup\{d(\rho, x) : x \in T\}$ la taille de l'arbre. On pose également $\mathcal{H}_n := \max\{\mathcal{H}(\mathcal{T}_y^-) : y \in \{Y_k\}_{k=0}^n\}$, la plus grande branche observée par la marche Y avant le temps n .

On peut maintenant s'engager dans la preuve que $\Sigma_{m_{tn}}$ est une bonne approximation de B_t^n , spécifiquement que pour tout $\epsilon > 0$ il est vrai que

$$\mathbb{Q} \left(\sup_{t \in [0, T]} \left| B_t^n - \frac{\Sigma_{m_{tn}}}{\sigma \sqrt{n}} \right| > \epsilon \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

On commence par l'inéquation suivante :

$$\sup_{t \in [0, T]} \left| B_t^n - \frac{\Sigma_{m_{tn}}}{\sigma \sqrt{n}} \right| \leq \frac{|X_{\zeta_1^X}| + \nu \zeta_1^X + \mathcal{H}_{nT}}{\sigma \sqrt{n}} + \sup_{1 \leq j \leq m_{nT}} \frac{|Y_{\zeta_{j+1}^Y}| - |Y_{\zeta_j^Y}| + \nu(\zeta_{j+1}^X - \zeta_j^X)}{\sigma \sqrt{n}} \quad (2.17)$$

Cette borne n'est pas nécessairement instinctive ou évidente, alors prenons un instant pour l'expliquer. On commence par remarquer que quand $nt = \zeta_i^X$ on obtient que

$$\begin{aligned} \left| B_t^n - \frac{\Sigma_{m_{tn}}}{\sigma \sqrt{n}} \right| &= \left| \frac{|X_{[nt]}| - nt\nu}{\sigma \sqrt{n}} - \frac{(|X_{\zeta_{m_{tn}}^X}| - \nu \zeta_{m_{tn}}^X) - (|X_{\zeta_1^X}| - \nu \zeta_1^X)}{\sigma \sqrt{n}} \right| \\ &= \left| \frac{|X_{\zeta_i^X}| - \nu \zeta_i^X}{\sigma \sqrt{n}} - \frac{(|X_{\zeta_i^X}| - \nu \zeta_i^X) - (|X_{\zeta_1^X}| - \nu \zeta_1^X)}{\sigma \sqrt{n}} \right| \\ &= \frac{|X_{\zeta_i^X}| - \nu \zeta_i^X}{\sigma \sqrt{n}} \end{aligned}$$

c'est-à-dire qu'au premier temps de régénération près, B_t^n et $\frac{\Sigma_{m_{tn}}}{\sigma \sqrt{n}}$ sont égaux. Puisque $\frac{\Sigma_{m_{tn}}}{\sigma \sqrt{n}}$ est une fonction escalier qui change seulement de valeur quand $nt = \zeta_i^X$, l'erreur d'approximation est essentiellement la variation maximum de B_t^n entre les temps de régénération. Cette variation est au plus de $\sup_{1 \leq j \leq m_{nT}} \frac{|Y_{\zeta_{j+1}^Y}| - |Y_{\zeta_j^Y}| + \nu(\zeta_{j+1}^X - \zeta_j^X)}{\sigma \sqrt{n}}$ sur le tronç, puis en prenant en compte que la marche est possiblement allée dans des pièges on rajoute $\frac{\mathcal{H}_{nT}}{\sigma \sqrt{n}}$.

Au temps nT , il est évident que la marche X a visité au maximum nT sommets sur $B(\mathcal{T})$. En utilisant (2.16) et une borne d'union, il est possible de borner la probabilité que la marche X ai rencontré une branche de hauteur au moins $c \log(n)$ avant le temps Tn par $C_T n f'(q_{\text{ext}})^{c \log(n)}$. En choisissant c t.q. $f'(q_{\text{ext}})^c \leq e^{-3}$, on obtient que

$$\mathbb{Q}(\mathcal{H}_{nT} \geq c \log n) \leq C_T n e^{-3 \log(n)} = \frac{C_T}{n^2} \quad (2.18)$$

et on peut utiliser le lemme de Borel-Cantelli pour obtenir qu'il existe \mathbb{Q} -p.s. un nombre fini de n t.q. X visite la racine d'une branche de taille $c \log(n)$ avant le temps nT . Puisque $\mathbb{Q}(|X_{\zeta_1^X}| = \infty) = 0$ et $\mathbb{Q}(\zeta_1^X = \infty) = 0$ et que $X_{\zeta_1^X}$ et ζ_1^X dépendent pas de n , on peut conclure que le premier terme de (2.17) tend vers 0 \mathbb{Q} -p.s.

Une conséquence de (4) est que $E_{\mathbb{Q}}[(|Y_{\zeta_2^Y}| - |Y_{\zeta_1^Y}|)^k] < \infty$, ce qui implique que la distance entre les points de régénération est petite. En particulier, en bornant m_{nT} par nT , on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{Q} \left(\sup_{1 \leq j \leq m_{nT}} \frac{|Y_{\zeta_{j+1}^Y}| - |Y_{\zeta_j^Y}|}{\sigma \sqrt{n}} > \epsilon \right) &= \mathbb{Q} \left(\bigcup_{j=1}^{m_{nT}} \left(\frac{|Y_{\zeta_{j+1}^Y}| - |Y_{\zeta_j^Y}|}{\sigma \sqrt{n}} > \epsilon \right) \right) \\ &\leq nT \mathbb{Q} \left(\frac{|Y_{\zeta_2^Y}| - |Y_{\zeta_1^Y}|}{\sigma \sqrt{n}} > \epsilon \right) \\ &= nT E_{\mathbb{Q}} \left[\mathbf{1}_{\{|Y_{\zeta_2^Y}| - |Y_{\zeta_1^Y}| > \epsilon \sigma \sqrt{n}\}} \right] \\ &\leq \frac{nT}{(\epsilon \sigma \sqrt{n})^2} E_{\mathbb{Q}} \left[\left(|Y_{\zeta_2^Y}| - |Y_{\zeta_1^Y}| \right)^2 \mathbf{1}_{\{|Y_{\zeta_2^Y}| - |Y_{\zeta_1^Y}| > \epsilon \sigma \sqrt{n}\}} \right] \\ &= C_{\epsilon, T} E_{\mathbb{Q}} \left[\left(|Y_{\zeta_2^Y}| - |Y_{\zeta_1^Y}| \right)^2 \mathbf{1}_{\{|Y_{\zeta_2^Y}| - |Y_{\zeta_1^Y}| > \epsilon \sigma \sqrt{n}\}} \right] \end{aligned}$$

Qui converge vers 0 quand $n \rightarrow \infty$ par convergence dominée. À l'aide du lemme 1, on peut utiliser la même démarche pour prouver que $\mathbb{Q}(\sup_{1 \leq j \leq m_{nT}} \frac{\zeta_{j+1}^X - \zeta_j^X}{\sigma \sqrt{n}} > \epsilon)$ tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$. On peut donc conclure que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{Q} \left(\sup_{t \in [0, T]} \left| B_t^n - \frac{\Sigma_{m_{nt}}}{\sigma \sqrt{n}} \right| > \epsilon \right) = 0$$

Puisque $\zeta_1^X < \infty$ \mathbb{Q} -p.s., la loi des grands nombres nous donne que

$$\frac{\zeta_n^X}{n} = \frac{\zeta_1^X}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \zeta_k^X - \zeta_{k-1}^X \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E_{\mathbb{Q}}[\zeta_2^X - \zeta_1^X] \quad \mathbb{Q}\text{-p.s.}$$

et par [8, corollaire 13.6.4] et la continuité de l'inverse des fonctions strictement croissantes, on constate que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m_{nt}}{nt} = c \quad \mathbb{Q}\text{-p.s.}$$

Par le lemme 1, Σ_m est une somme de variables aléatoires i.i.d. centrées dotées d'un second moment fini. On peut donc utiliser le théorème de Donsker et les remarques précédentes pour conclure que $(\Sigma_{m_{nt}}/\sqrt{n})_{t \geq 0}$ converge en loi vers un mouvement Brownien. Par la continuité des composition des limites continues et [8, théorème 13.2.1], on obtient le théorème central limite recuit suivant.

Corollaire 3. *sous les hypothèses 1, 2 et 3, il existe une constante $\sigma^2 > 0$ t.q. le processus*

$$B_t^n := \frac{|X_{[nt]}| - n\sigma t}{\sigma \sqrt{n}}$$

converge en \mathbb{Q} -distribution sur $D([0, \infty), \mathbb{R})$ doté de la topology de Skorohod J_1 vers un mouvement Brownien standard.

3. Théorème central limite trempé

Nous étendrons le théorème central limite recuit à une version trempée dans cette section. Au lieu de donner une explication plus générale de notre direction, on énonce les trois lemmes importants pour la preuve du théorème 3.

Lemme 5. *Si on suppose les hypothèses du théorème 3 et que pour toute fonction Lipschitz bornée $F : C([0, T], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ et tout $b \in (1, 2)$ il est vrai que*

$$\sum_{k \geq 1} \text{Var}_{\mathbf{Q}} \left(E_{\omega} \left[F \left(\mathbb{B}^{\lfloor b^k \rfloor} \right) \right] \right) < \infty \quad (3.1)$$

Alors pour \mathbf{Q} -presque tout environnement ω , le processus $(B_t^n)_{t \geq 0}$ converge en P_{ω} -distribution sur $D([0, \infty), \mathbb{R})$ avec la topologie de Skorohod J_1 vers un mouvement Brownien standard.

On souligne que le lemme 5 est essentiellement une version affaiblie du théorème 3, dans le sens où les seules différences sont les hypothèses.

Pour pouvoir énoncer les prochains lemmes, on définit informellement les évènements \mathcal{A}_k et \mathcal{B}_k comme $\mathcal{A}_k \cap \mathcal{B}_k :=$ "On peut considérer que le chemin parcouru par la marche est choisi sous la mesure recuite". On en discute aussi dans la remarque à la fin de la section 1.6.5, mais c'est ce qui nous permettra de prouver que le théorème 3 est vrai : le comportement de la marche sera similaire à son comportement sous la mesure recuite, simplement parce que le marcheur voit une partie très petite des sommets et que les chemins à sa disposition sont très nombreux.

Lemme 6. *Si $\sum_{k \geq 1} \mathbb{Q}(\mathcal{A}_k^c) < \infty$ et $\sum_{k \geq 1} \mathbb{Q}(\mathcal{B}_k^c) < \infty$ alors pour toute fonction Lipschitz bornée $F : C([0, T], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ et tout $b \in (1, 2)$ on aura que*

$$\sum_{k \geq 1} \text{Var}_{\mathbf{Q}} \left(E_{\omega} \left[F \left(\mathbb{B}^{\lfloor b^k \rfloor} \right) \right] \right) < \infty \quad (3.2)$$

Lemme 7. $\sum_{k \geq 1} \mathbb{Q}(\mathcal{A}_k^c) < \infty$ et $\sum_{k \geq 1} \mathbb{Q}(\mathcal{B}_k^c) < \infty$

3.1. Preuve du lemme 5

On commence par définir $\mathbb{B}_t^n(X)$ comme l'interpolation linéaire de B_t^n , c'est-à-dire satisfaisant

$$\mathbb{B}_{k/n}^n = \frac{|X_k| - kv}{\sigma\sqrt{n}}$$

où $k, n \in \mathbb{N}$. Cette définition implique que $B_t^n = \mathbb{B}_t^n$ si $nt \in \mathbb{N}$ et on remarque que $|B_t^n - \mathbb{B}_t^n| \leq n^{-1/2}(\nu + 1)/\sigma$ ce qui nous permettra de considérer uniquement \mathbb{B}_t^n .

Lemme. *Si on suppose les hypothèses du théorème 3 et que pour toute fonction Lipschitz bornée $F : C([0, T], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ et tout $b \in (1, 2)$ il est vrai que*

$$\sum_{k \geq 1} \text{Var}_{\mathbf{Q}} \left(E_{\omega} \left[F \left(\mathbb{B}^{\lfloor b^k \rfloor} \right) \right] \right) < \infty \quad (3.3)$$

Alors pour \mathbf{Q} -presque tout environnement ω , le processus $(B_t^n)_{t \geq 0}$ converge en P_{ω} -distribution sur $D([0, \infty), \mathbb{R})$ avec la topologie de Skorohod J_1 vers un mouvement Brownien standard.

Démonstration. On mentionne que le lemme 5 est un analogue de [9, Lemme 4.1]

Supposons que pour toute fonction Lipschitz bornée $F : C([0, T], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ et tout $b \in (1, 2)$ il est vrai \mathbf{Q} -p.s. que

$$E_{\omega} \left[F \left(\mathbb{B}^{\lfloor b^k \rfloor} \right) \right] \rightarrow E[F(B)] \quad (3.4)$$

où B est un mouvement brownien standard.

Pour tout $\delta, T > 0$, la fonction $F_{T, \delta}(f) := \sup\{|f(s) - f(t)| \wedge 1 : s, t \leq T, |t - s| \leq \delta\}$ est une fonction Lipschitz bornée, on aura donc \mathbf{Q} -p.s. que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{k \rightarrow \infty} E_{\omega} \left[F_{T, \delta} \left(\mathbb{B}^{\lfloor b^k \rfloor} \right) \right] = \lim_{\delta \rightarrow 0} E_{\omega} [F_{T, \delta}(B)] = 0 \quad (3.5)$$

par (3.4), le théorème de convergence dominée et que les propriétés du mouvement brownien impliquent que $F_{T, \delta}(B) \rightarrow 0$ quand $\delta \rightarrow 0$.

Considérons maintenant F une fonction Lipschitz bornée t.q. $\|F\|_{\infty} \leq 1/2$, et $\|F\|_{Lip} \leq 1$ s.p.d.g. ($\|F\|_{Lip}$ est défini par $|F(f) - F(g)| \leq \|F\|_{Lip} \|f - g\|_{\infty}$) et on pose k_n l'unique entier t.q. $\lfloor b^{k_n} \rfloor \leq n < \lfloor b^{k_n+1} \rfloor$. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| E_{\omega} [F(\mathbb{B}^n)] - E_{\omega} \left[F \left(\mathbb{B}^{\lfloor b^{k_n} \rfloor} \right) \right] \right| &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} E_{\omega} \left[\left| F(\mathbb{B}^n) - F \left(\mathbb{B}^{\lfloor b^{k_n} \rfloor} \right) \right| \right] \\ &\leq \|F\|_{Lip} \limsup_{n \rightarrow \infty} E_{\omega} \left[\sup_{s \leq T} \left| \mathbb{B}_s^n - \mathbb{B}_s^{\lfloor b^{k_n} \rfloor} \right| \wedge 1 \right] \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} E_{\omega} \left[\sup_{s \leq T} \left| \mathbb{B}_s^n - \mathbb{B}_s^{\lfloor b^{k_n} \rfloor} \right| \wedge 1 \right] \end{aligned}$$

En se rappelant que $B_t^n = \frac{|X_{\lfloor nt \rfloor} - nvt}{\sigma\sqrt{n}}$, on constate que

$$\mathbb{B}_s^n = \sqrt{\frac{\lfloor b^{k_n} \rfloor}{n}} \mathbb{B}_{s \frac{n}{\lfloor b^{k_n} \rfloor}}^{\lfloor b^{k_n} \rfloor},$$

ce qui nous permet de continuer à raffiner notre borne avec

$$\begin{aligned}
& \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| E_\omega [F(\mathbb{B}^n)] - E_\omega [F(\mathbb{B}^{\lfloor b^{kn} \rfloor})] \right| \\
& \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} E_\omega \left[\sup_{s \leq T} \left| \sqrt{\frac{\lfloor b^{kn} \rfloor}{n}} \mathbb{B}_s^{\lfloor b^{kn} \rfloor} - \mathbb{B}_s^{\lfloor b^{kn} \rfloor} \right| \wedge 1 \right] \\
& \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} E_\omega \left[\sup_{s \leq T} \left| \left(\sqrt{\frac{\lfloor b^{kn} \rfloor}{n}} - 1 \right) \mathbb{B}_s^{\lfloor b^{kn} \rfloor} \right| \wedge 1 \right] + E_\omega \left[\sup_{s \leq T} \left| \mathbb{B}_s^{\lfloor b^{kn} \rfloor} - \mathbb{B}_{s \lfloor \frac{n}{b^{kn}} \rfloor}^{\lfloor b^{kn} \rfloor} \right| \wedge 1 \right] \\
& \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} |1 - b^{-1/2}| E_\omega \left[\sup_{s \leq Tb} \left| \mathbb{B}_s^{\lfloor b^{kn} \rfloor} \right| \wedge 1 \right] + E_\omega \left[\sup_{\substack{s \leq T \\ |s-t| \leq T(b-1)}} \left| \mathbb{B}_s^{\lfloor b^{kn} \rfloor} - \mathbb{B}_t^{\lfloor b^{kn} \rfloor} \right| \wedge 1 \right] \\
& = |1 - b^{-1/2}| \limsup_{n \rightarrow \infty} E_\omega \left[\sup_{s \leq Tb} \left| \mathbb{B}_s^{\lfloor b^{kn} \rfloor} \right| \wedge 1 \right] + \limsup_{n \rightarrow \infty} E_\omega [F_{T, T(b-1)}(\mathbb{B}^{\lfloor b^{kn} \rfloor})]
\end{aligned}$$

On souligne que la fonction $\sup_{s \leq Tb} |f(s)| \wedge 1$ est une fonction Lipschitz bornée puisque

$$\begin{aligned}
\left| \sup_{s \leq Tb} |f(s)| - \sup_{s \leq Tb} |g(s)| \right| & \leq \sup_{s \leq Tb} ||f(s)| - |g(s)|| \\
& \leq \sup_{s \leq Tb} |f(s) - g(s)| \\
& = \|f - g\|_\infty
\end{aligned}$$

On peut donc utiliser (3.4) pour obtenir

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| E_\omega [F(\mathbb{B}^n)] - E_\omega [F(\mathbb{B}^{\lfloor b^{kn} \rfloor})] \right| \leq |1 - b^{-1/2}| E \left[\sup_{s \leq Tb} |B_s| \wedge 1 \right] + \limsup_{k \rightarrow \infty} E_\omega [F_{T, T(b-1)}(\mathbb{B}^{\lfloor b^k \rfloor})]$$

Qui converge vers 0 quand $b \rightarrow 1$ quand on utilise 3.5. Puisque si (3.4) est vrai alors la limite de $E_\omega [F(\mathbb{B}^{\lfloor b^k \rfloor})]$ ne dépend pas de b , on déduit que

$$E_\omega [F(\mathbb{B}^n)] \rightarrow E[F(B)] \quad \mathbf{Q} - \text{p.s.} \quad (3.6)$$

On peut maintenant conclure que, puisque les fonctions Lipschitz bornées sont denses et séparables dans l'espace des fonctions continues bornées, alors (3.6) est vrai \mathbf{Q} -p.s. $\forall F \in C_b(C([0, T], \mathbb{R}))$, ce qui implique une convergence en distribution $\mathbb{B}^n \xrightarrow{d} B$ sous la mesure P_ω pour \mathbf{Q} -presque tout ω et nous donne le TCL trempé.

Il nous reste cependant à prouver que (3.3) implique (3.4). Le corollaire 3 nous donne que

$$E_{\mathbf{Q}} [E_\omega [F(\mathbb{B}^{\lfloor b^k \rfloor})]] = E_{\mathbf{Q}} [F(\mathbb{B}^{\lfloor b^k \rfloor})] \xrightarrow{k \rightarrow \infty} E[F(B)],$$

Il suffira donc de montrer que $E_\omega [F(\mathbb{B}^{\lfloor b^k \rfloor})] \xrightarrow{\mathbf{Q}\text{-p.s.}} E_{\mathbf{Q}} [E_\omega [F(\mathbb{B}^{\lfloor b^k \rfloor})]]$. On rappelle qu'une des définitions de la convergence presque sûre est $X_n \xrightarrow{p.s.} X$ si $\forall \epsilon > 0$, $P(|X_n - X| > \epsilon \text{ infiniment souvent}) = 0$.

On utilise l'inégalité de Tchebychev pour obtenir

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} \left(|E_{\mathbf{Q}}[E_{\omega}[F(\mathbb{B}^{\lfloor b^k \rfloor})]] - E_{\omega}[F(\mathbb{B}^{\lfloor b^k \rfloor})]]| > \epsilon \right) &\leq \epsilon^{-2} E_{\mathbf{Q}} \left[|E_{\mathbf{Q}}[E_{\omega}[F(\mathbb{B}^{\lfloor b^k \rfloor})]] - E_{\omega}[F(\mathbb{B}^{\lfloor b^k \rfloor})]]|^2 \right] \\ &\leq \epsilon^{-2} \text{Var}_{\mathbf{Q}} \left(E_{\omega} \left[F \left(\mathbb{B}^{\lfloor b^k \rfloor} \right) \right] \right) \end{aligned}$$

Le résultat suit donc par (3.3) et le lemme de Borel-Cantelli. □

3.2. Preuve du lemme 6

Commençons par poser quelques définitions qui nous seront utiles. Pour un environnement fixé ω on pose X^1, X^2 pour désigner deux marches aléatoires indépendantes sur ω et Y^1, Y^2 les marches correspondantes sur le tronc de l'arbre. Pour $i = 1, 2$; $k \in \mathbb{N}$ et $t, s \geq 0$, $s \in \mathbb{N}$, on pose

$$\mathbb{B}_{t,s}^{k,i} := \mathbb{B}_{t+\frac{s}{b^k}}^{\lfloor b^k \rfloor}(X^i) - \mathbb{B}_{\frac{s}{b^k}}^{\lfloor b^k \rfloor}(X^i) \quad (3.7)$$

Qui définit la variable aléatoire $\mathbb{B}_t^{\lfloor b^k \rfloor}$ pour la marche i mais en considérant que la marche commence à X_s^i . On pose aussi les temps de régénération $\vartheta_k^{Y^i}$ et $\vartheta_k^{X^i}$:

$$\begin{aligned} \vartheta_k^{Y^i} &:= \min \left\{ m > \lfloor b^{\frac{k}{4}} \rfloor : m \in \left(\zeta_j^{Y^i} \right)_{j \geq 1} \right\} \\ \vartheta_k^{X^i} &:= \min \left\{ m : X_m^i = Y_{\vartheta_k^{Y^i}}^i \right\} \end{aligned}$$

Le premier temps de régénération après le temps $\lfloor b^{\frac{k}{4}} \rfloor$ avec la marche Y^i et le temps correspondant pour la marche X^i . On pose finalement les cinq évènements suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_k^1 &:= \left\{ \{Y_s^1 : s \leq \vartheta_k^{Y^1}\} \cap \{Y_{\vartheta_k^{Y^2}}^2\} = \emptyset \right\} \\ \mathcal{A}_k^2 &:= \left\{ \{Y_s^2 : s \leq \vartheta_k^{Y^2}\} \cap \{Y_{\vartheta_k^{Y^1}}^1\} = \emptyset \right\} \\ \mathcal{B}_k^i &:= \left\{ \vartheta_k^{X^i} \leq b^{k/3} \right\} \\ \mathcal{A}_k &:= \mathcal{A}_k^1 \cap \mathcal{A}_k^2 \quad \mathcal{B}_k := \mathcal{B}_k^1 \cap \mathcal{B}_k^2 \end{aligned}$$

L'évènement \mathcal{A}_k implique bien sûr que les marches Y^1, Y^2 ne se croiseront pas après le temps $\vartheta_k^{Y^1} \vee \vartheta_k^{Y^2}$ et que les marches seront donc indépendantes après ce point. On souligne que les évènements \mathcal{A}_k et \mathcal{B}_k sont ceux mentionnés dans le lemme 7.

Lemme. *Si $\sum_{k \geq 1} \mathbb{Q}(\mathcal{A}_k^c) < \infty$ et $\sum_{k \geq 1} \mathbb{Q}(\mathcal{B}_k^c) < \infty$ alors pour toute fonction Lipschitz bornée $F : C([0, T], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ et tout $b \in (1, 2)$ on aura que*

$$\sum_{k \geq 1} \text{Var}_{\mathbf{Q}} \left(E_{\omega} \left[F \left(\mathbb{B}^{\lfloor b^k \rfloor} \right) \right] \right) < \infty \quad (3.8)$$

Démonstration. On commence par essayer de borner $|F(\mathbb{B}_{\cdot,0}^{k,i}) - F(\mathbb{B}_{\cdot,\vartheta_k^{X^i}}^{k,i})|$ et puisque la fonction F est Lipschitz, on considère naturellement $\sup_{t \leq T} \left| \mathbb{B}_{t,0}^{k,i} - \mathbb{B}_{t,\vartheta_k^{X^i}}^{k,i} \right|$.

$$\begin{aligned}
\sup_{t \leq T} \left| \mathbb{B}_{t,0}^{k,i} - \mathbb{B}_{t,\vartheta_k^{X^i}}^{k,i} \right| &\leq \sup_{m \leq Tb^k} \frac{1}{\sqrt{[b^k]}\sigma} \left| |X_m^i| - mv - |X_{m+\vartheta_k^{X^i}}^i| + (m + \vartheta_k^{X^i})v + |X_{\vartheta_k^{X^i}}^i - \vartheta_k^{X^i}v \right| \\
&\leq \sup_{m \leq Tb^k} cb^{-k/2} \left| |X_m^i| - |X_{m+\vartheta_k^{X^i}}^i| + |X_{\vartheta_k^{X^i}}^i| \right| \\
&\leq \sup_{m \leq Tb^k} cb^{-k/2} \left(\left| |X_m^i| - |X_{m+\vartheta_k^{X^i}}^i| \right| + |X_{\vartheta_k^{X^i}}^i| \right) \\
&\leq cb^{-k/2} \left(\vartheta_k^{X^i} + \vartheta_k^{X^i} \right) \\
&\leq cb^{-k/2} \vartheta_k^{X^i}
\end{aligned}$$

qui est borné par $cb^{-k/6}$ si l'évènement \mathcal{B}_k^i se produit, ce qui implique également la borne suivante :

$$\begin{aligned}
\left| F\left(\mathbb{B}_{\cdot,0}^{k,i}\right) - F\left(\mathbb{B}_{\cdot,\vartheta_k^{X^i}}^{k,i}\right) \right| &\leq \|F\|_{Lip} \sup_{t \leq T} \left| \mathbb{B}_{t,0}^{k,i} - \mathbb{B}_{t,\vartheta_k^{X^i}}^{k,i} \right| \\
&\leq Cb^{-k/6}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Pour toute fonction Lipschitz bornée $F : C([0, T], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$. Par souci de brièveté, on définit $\mathcal{D}_k := \mathcal{A}_k \cap \mathcal{B}_k$. En utilisant les évènements définis précédemment et le fait que la fonction F est bornée, on obtient

$$\begin{aligned}
\text{Var}_{\mathbf{Q}} \left(E_{\omega} \left[F\left(\mathbb{B}^{\lfloor b^k \rfloor}\right) \right] \right) &= E_{\mathbf{Q}} \left[E_{\omega} \left[F\left(\mathbb{B}^{\lfloor b^k \rfloor}\right) \right]^2 \right] - E_{\mathbf{Q}} \left[E_{\omega} \left[F\left(\mathbb{B}^{\lfloor b^k \rfloor}\right) \right] \right]^2 \\
&= E_{\mathbf{Q}} \left[F\left(\mathbb{B}_{\cdot,0}^{k,1}\right) F\left(\mathbb{B}_{\cdot,0}^{k,2}\right) \right] - E_{\mathbf{Q}} \left[F\left(\mathbb{B}_{\cdot,0}^{k,1}\right) \right]^2 \\
&\leq \left(E_{\mathbf{Q}} \left[F\left(\mathbb{B}_{\cdot,0}^{k,1}\right) F\left(\mathbb{B}_{\cdot,0}^{k,2}\right) \mid \mathcal{D}_k \right] + C\mathbb{Q}(\mathcal{D}_k^c) \right) - \left(E_{\mathbf{Q}} \left[F\left(\mathbb{B}_{\cdot,0}^{k,1}\right) \mid \mathcal{D}_k \right] + C\mathbb{Q}(\mathcal{D}_k^c) \right)^2 \\
&\leq C\mathbb{Q}(\mathcal{D}_k^c) + E_{\mathbf{Q}} \left[F\left(\mathbb{B}_{\cdot,0}^{k,1}\right) F\left(\mathbb{B}_{\cdot,0}^{k,2}\right) \mid \mathcal{D}_k \right] - E_{\mathbf{Q}} \left[F\left(\mathbb{B}_{\cdot,0}^{k,1}\right) \mid \mathcal{D}_k \right]^2
\end{aligned}$$

On peut maintenant utiliser (3.9) pour avoir

$$\begin{aligned}
&\leq C\mathbb{Q}(\mathcal{D}_k^c) + \left(E_{\mathbf{Q}} \left[F\left(\mathbb{B}_{\cdot,\vartheta_k^{X^1}}^{k,1}\right) F\left(\mathbb{B}_{\cdot,\vartheta_k^{X^2}}^{k,2}\right) \mid \mathcal{D}_k \right] + C(b^{-k/6} + b^{-2k/6}) \right) - \left(E_{\mathbf{Q}} \left[F\left(\mathbb{B}_{\cdot,\vartheta_k^{X^1}}^{k,1}\right) \mid \mathcal{D}_k \right] + Cb^{-k/6} \right)^2 \\
&\leq C\mathbb{Q}(\mathcal{D}_k^c) + C(b^{-k/6} + b^{-k/3}) + E_{\mathbf{Q}} \left[F\left(\mathbb{B}_{\cdot,\vartheta_k^{X^1}}^{k,1}\right) F\left(\mathbb{B}_{\cdot,\vartheta_k^{X^2}}^{k,2}\right) \mid \mathcal{D}_k \right] - E_{\mathbf{Q}} \left[F\left(\mathbb{B}_{\cdot,\vartheta_k^{X^1}}^{k,1}\right) \mid \mathcal{D}_k \right]^2 \\
&\leq C(\mathbb{Q}(\mathcal{D}_k^c) + b^{-k/6}) + E_{\mathbf{Q}} \left[F\left(\mathbb{B}_{\cdot,\vartheta_k^{X^1}}^{k,1}\right) F\left(\mathbb{B}_{\cdot,\vartheta_k^{X^2}}^{k,2}\right) \mid \mathcal{D}_k \right] - E_{\mathbf{Q}} \left[F\left(\mathbb{B}_{\cdot,\vartheta_k^{X^1}}^{k,1}\right) \mid \mathcal{D}_k \right]^2 \\
&\leq C(\mathbb{Q}(\mathcal{A}_k^c) + \mathbb{Q}(\mathcal{B}_k^c) + b^{-k/6}) + E_{\mathbf{Q}} \left[F\left(\mathbb{B}_{\cdot,\vartheta_k^{X^1}}^{k,1}\right) F\left(\mathbb{B}_{\cdot,\vartheta_k^{X^2}}^{k,2}\right) \mid \mathcal{D}_k \right] - E_{\mathbf{Q}} \left[F\left(\mathbb{B}_{\cdot,\vartheta_k^{X^1}}^{k,1}\right) \mid \mathcal{D}_k \right]^2
\end{aligned}$$

On souligne que $F\left(\mathbb{B}_{\cdot,\vartheta_k^{X^1}}^{k,1}\right)$ et $F\left(\mathbb{B}_{\cdot,\vartheta_k^{X^2}}^{k,2}\right)$ sont indépendants sous la mesure $\mathbb{Q}(\cdot | \mathcal{D}_k)$ par définition de l'évènement \mathcal{A}_k . Il s'agit du point le plus important pour la preuve du théorème 3 : si \mathcal{D}_k se

produit alors la marche voit rapidement assez peu de sommet pour qu'on puisse prendre la mesure recuite ($\sum_{k \geq 1} \text{Var}_{\mathbb{Q}}(E_{\omega}[F(\mathbb{B}^{\lfloor b^k \rfloor})]) < \infty$ implique que l'environnement spécifique ne change pas énormément $\mathbb{B}^{\lfloor b^k \rfloor}$). On constate donc que

$$\begin{aligned} & E_{\mathbb{Q}} \left[F(\mathbb{B}^{k,1}_{\cdot, \vartheta_k^{X_1}}) F(\mathbb{B}^{k,2}_{\cdot, \vartheta_k^{X_2}}) \mid \mathcal{D}_k \right] - E_{\mathbb{Q}} \left[F(\mathbb{B}^{k,1}_{\cdot, \vartheta_k^{X_1}}) \mid \mathcal{D}_k \right]^2 \\ &= E_{\mathbb{Q}} \left[F(\mathbb{B}^{k,1}_{\cdot, \vartheta_k^{X_1}}) F(\mathbb{B}^{k,2}_{\cdot, \vartheta_k^{X_2}}) \mid \mathcal{D}_k \right] - E_{\mathbb{Q}} \left[F(\mathbb{B}^{k,1}_{\cdot, \vartheta_k^{X_1}}) \mid \mathcal{D}_k \right] E_{\mathbb{Q}} \left[F(\mathbb{B}^{k,2}_{\cdot, \vartheta_k^{X_2}}) \mid \mathcal{D}_k \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

ce qui nous permet de conclure l'inégalité précédente par

$$\leq C(\mathbb{Q}(\mathcal{B}_k^c) + \mathbb{Q}(\mathcal{A}_k^c) + b^{-k/6})$$

qui sera sommable si $\mathbb{Q}(\mathcal{B}_k^c)$ et $\mathbb{Q}(\mathcal{A}_k^c)$ sont sommables. □

3.3. Sommabilité de $\mathbb{Q}(\mathcal{B}_k^c)$

On rappelle la définition de \mathcal{B}_k

$$\begin{aligned}\vartheta_k^{Y^i} &:= \min \left\{ m > \lfloor b^{\frac{k}{4}} \rfloor : m \in (\zeta_j^{Y^i})_{j \geq 1} \right\} \\ \vartheta_k^{X^i} &:= \min \left\{ m : X_m^i = Y_{\vartheta_k^{Y^i}}^i \right\} \\ \mathcal{B}_k^i &:= \left\{ \vartheta_k^{X^i} \leq b^{k/3} \right\} \quad \mathcal{B}_k := \mathcal{B}_k^1 \cap \mathcal{B}_k^2\end{aligned}$$

On prouve que $\mathbb{Q}((\mathcal{B}_k^1)^c)$ est sommable :

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}((\mathcal{B}_k^1)^c) &= \mathbb{Q} \left((\mathcal{B}_k^1)^c, \zeta_1^{X^1} > \frac{b^{k/3}}{2} \right) + \mathbb{Q} \left((\mathcal{B}_k^1)^c, \zeta_1^{X^1} \leq \frac{b^{k/3}}{2} \right) \\ &\leq \mathbb{Q} \left(\zeta_1^{X^1} > \frac{b^{k/3}}{2} \right) + \mathbb{Q} \left(\vartheta_k^{X^1} > b^{k/3} \mid \zeta_1^{X^1} \leq \frac{b^{k/3}}{2} \right) \\ &\leq \mathbb{Q} \left(\zeta_1^{X^1} > \frac{b^{k/3}}{2} \right) + \mathbb{Q} \left(\sum_{i=1}^{\lfloor b^{k/4} \rfloor - 1} (\zeta_{i+1}^{X^1} - \zeta_i^{X^1}) > \frac{b^{k/3}}{2} \right) \\ &\leq \mathbb{Q} \left(\zeta_1^{X^1} > \frac{b^{k/3}}{2} \right) + 2b^{-k/3} E_{\mathbb{Q}} \left[\sum_{i=1}^{\lfloor b^{k/4} \rfloor - 1} (\zeta_{i+1}^{X^1} - \zeta_i^{X^1}) \right] \\ &\leq \mathbb{Q} \left(\zeta_1^{X^1} > \frac{b^{k/3}}{2} \right) + 2 \frac{b^{k/4}}{b^{k/3}} E_{\mathbb{Q}} [\zeta_2^{X^1} - \zeta_1^{X^1}] \\ &\leq \mathbb{Q} \left(\zeta_1^{X^1} > \frac{b^{k/3}}{2} \right) + cb^{-k/12}\end{aligned}$$

où l'inégalité de Markov a été utilisée à la troisième ligne. Il nous reste à montrer que

$$\mathbb{Q} \left(\zeta_1^{X^1} > \frac{b^{k/3}}{2} \right)$$

est sommable. On définit d'abord $T_l^X := \min\{m > 0 : |X_m| = l, X_m \in B(\mathcal{T})\}$, le temps où la marche X_n atteint une distance l sur le tronc pour la première fois.

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q}\left(\zeta_1^X \geq \frac{b^{k/3}}{2}\right) &\leq \mathbb{Q}(|X_{\zeta_1^X}| > ck) + \mathbb{Q}\left(\zeta_1^X \geq \frac{b^{k/3}}{2}, |X_{\zeta_1^X}| \leq ck\right) \\
&\leq \frac{C}{k^2} + \mathbb{Q}\left(T_{ck}^X \geq \frac{b^{k/3}}{2}, |X_{\zeta_1^X}| \leq ck\right) \\
&\leq \frac{C}{k^2} + \mathbb{Q}\left(T_{ck}^X \geq \frac{b^{k/3}}{2}\right) \\
&\leq \frac{C}{k^2} + 2b^{-k/3}E_{\mathbb{Q}}\left[T_{ck}^X\right]
\end{aligned}$$

où on a utilisé le corollaire 2 et l'inégalité de Markov. Puisque $\nu > 0$, il est nécessairement vrai que $E_{\mathbb{Q}}\left[T_{ck}^X\right] = O(k)$, on obtient donc que

$$\mathbb{Q}\left(\zeta_1^X \geq \frac{b^{k/3}}{2}\right) \leq C\left(\frac{1}{k^2} + b^{-k/3}k\right) \tag{3.10}$$

On peut donc conclure que $\mathbb{Q}(\mathcal{B}_k^c) \leq 2\mathbb{Q}((\mathcal{B}_k^1)^c)$ est sommable.

3.4. Sommabilité de $\mathbb{Q}(\mathcal{A}_k^c)$

Il nous reste uniquement à prouver que $\mathbb{Q}(\mathcal{A}_k^c)$ est sommable et dans cet optique on commence par définir les évènements suivants :

$$\begin{aligned} C'_{k,i} &:= \left\{ \zeta_1^{Y^i} < \frac{b^{k/4}}{2} \right\} \\ C''_{k,i} &:= \left\{ \zeta_{\lfloor b^{k/8} \rfloor}^{Y^i} < b^{k/4} \right\} \\ C_k &:= C'_{k,1} \cap C'_{k,2} \cap C''_{k,1} \cap C''_{k,2} \end{aligned}$$

On peut utiliser une démarche très similaire à celle qu'on a utilisée pour obtenir (3.10) pour prouver que $\mathbb{Q}((C'_{k,i})^c)$ est sommable. En définissant $T_l^Y := \min\{m > 0 : |Y_m| = l\}$, on obtiendra

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}((C'_{k,i})^c) &= \mathbb{Q}\left(\zeta_1^Y \geq \frac{b^{k/4}}{2}\right) \leq \mathbb{Q}(|Y_{\zeta_1^Y}| > ck) + \mathbb{Q}\left(\zeta_1^Y \geq \frac{b^{k/4}}{2}, |Y_{\zeta_1^Y}| \leq ck\right) \\ &\leq \mathbb{Q}(|Y_{\zeta_1^Y}| > ck) + \mathbb{Q}\left(T_{ck}^Y \geq \frac{b^{k/4}}{2}, |Y_{\zeta_1^Y}| \leq ck\right) \\ &\leq \frac{C}{k^2} + \mathbb{Q}\left(T_{ck}^Y \geq \frac{b^{k/4}}{2}\right) \\ &\leq \frac{C}{k^2} + 2b^{-k/4} E_{\mathbb{Q}}[T_{ck}^Y] \end{aligned}$$

et puisque la vitesse sur le tronç est positive (elle est même bornée inférieurement par ν), on déduit que $E_{\mathbb{Q}}[T_{ck}^Y] = O(k)$. On arrive donc à la nouvelle borne

$$\mathbb{Q}((C'_{k,i})^c) \leq C \left(\frac{1}{k^2} + b^{-k/4} k \right) \quad (3.11)$$

qui est bien sûr sommable.

On remarque aussi que l'évènement $C'_{k,1} \cap (C''_{k,1})^c$ implique que

$$\sum_{i=1}^{\lfloor b^{k/8} \rfloor - 1} (\zeta_{i+1}^Y - \zeta_i^Y) > \frac{b^{k/4}}{2}$$

Ce qui nous donne par l'inégalité de Markov que

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}(C'_{k,1} \cap (C''_{k,1})^c) &\leq \mathbb{Q}\left(\sum_{i=1}^{\lfloor b^{k/8} \rfloor - 1} (\zeta_{i+1}^Y - \zeta_i^Y) > \frac{b^{k/4}}{2}\right) \\ &\leq 2b^{-k/4} E_{\mathbb{Q}}\left[\sum_{i=1}^{\lfloor b^{k/8} \rfloor - 1} (\zeta_{i+1}^Y - \zeta_i^Y)\right] \\ &\leq 2 \frac{b^{k/8}}{b^{k/4}} E_{\mathbb{Q}}[\zeta_2^Y - \zeta_1^Y] \\ &\leq cb^{-k/8} \end{aligned}$$

Bien évidemment, la même inégalité reste vraie pour l'évènement $C'_{k,2} \cap (C''_{k,2})^c$, ce qui nous permet de conclure que

$$\mathbb{Q}(C_k^c) \leq \mathbb{Q}((C'_{k,1})^c) + \mathbb{Q}(C'_{k,1} \cap (C''_{k,1})^c) + \mathbb{Q}((C'_{k,2})^c) + \mathbb{Q}(C'_{k,2} \cap (C''_{k,2})^c) \quad (3.12)$$

est sommable et on utilisera cet évènement pour nous aider à borner $\mathbb{Q}(\mathcal{A}_k^c)$

On rappelle la définition de l'évènement \mathcal{A}_k

$$\begin{aligned} \vartheta_k^{Y^i} &:= \min \left\{ m > \lfloor b^{\frac{k}{4}} \rfloor : m \in (\zeta_j^{Y^i})_{j \geq 1} \right\} \\ \mathcal{A}_k^1 &:= \left\{ \{Y_s^1 : s \leq \vartheta_k^{Y^1}\} \cap \{Y_{\vartheta_k^{Y^2}}^2\} = \emptyset \right\} \\ \mathcal{A}_k^2 &:= \left\{ \{Y_s^2 : s \leq \vartheta_k^{Y^2}\} \cap \{Y_{\vartheta_k^{Y^1}}^1\} = \emptyset \right\} \\ \mathcal{A}_k &:= \mathcal{A}_k^1 \cap \mathcal{A}_k^2 \end{aligned}$$

On pose $D_l := \{x \in B(\mathcal{T}) : |x| = l\}$ l'ensemble des sommets dans $B(\mathcal{T})$ à distance l de la racine, et \mathcal{Z}^i l'ensemble de sommet dans $D_{\lfloor b^{k/8} \rfloor}$ visité par Y^i . Si l'évènement C_k se réalise il y aura au maximum $b^{k/4}$ sommets dans \mathcal{Z}^1 . L'évènement $(\mathcal{A}_k^1)^c \cap C_k$ implique que les marches Y^1 et Y^2 se sont croisées à une distance d'au moins $\lfloor b^{k/8} \rfloor$

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}((\mathcal{A}_k^1)^c \cap C_k) &\leq E_{\mathbf{Q}} \left[P_{\omega}(Y^2 \text{ visite } \mathcal{Z}^1 \text{ avant le temps } b^{k/4}) \right] \\ &\leq b^{k/4} E_{\mathbf{Q}} \left[\max_{v \in D_{\lfloor b^{k/8} \rfloor}} P_{\omega}(Y \text{ visite } v \text{ avant le temps } b^{k/4}) \right] \end{aligned} \quad (3.13)$$

Notre nouvel objectif est donc de borner la probabilité que la marche Y_n se rende à un sommet spécifique à une distance $\lfloor b^{k/8} \rfloor$, il sera donc pratique de voir $B(\mathcal{T})$ comme une demi-droite munie de pièges (les autres chemins de $B(\mathcal{T})$) reliant la racine ρ et v . Conséquemment, il sera utile de définir $p(j) := \{y \in B(\mathcal{T}) : j \in \mathcal{T}_y\}$, l'ensemble des ancêtres de j (c.-à-d. l'unique chemin reliant la racine et j), et

$$\beta(j) := P_{\omega}^j(Y_i \neq \overleftarrow{j} \forall i),$$

la chance de ne jamais revenir avant un sommet j quand la marche l'atteint (ne jamais revenir sur $p(v)$ quand la marche en sort). On remarque que sous la mesure \mathbf{Q} , les $\beta(j)$ sont identiquement distribués mais pas nécessairement indépendants pour tout $j \in B(\mathcal{T})$ et que $\beta(j) > 0$ \mathbf{Q} -p.s. puisque la marche est transiente.

Le prochain lemme présenté nous aidera à borner inférieurement le nombre d'excursion de $p(j)$ vers le reste de l'arbre. Pour simplifier l'énoncé de ce lemme, on définit $z_1 \in \mathbb{N}$

$$z_1 := \inf \left\{ z > 1 : P_{GW}(Z_1^g = 1) + E_{GW} \left[\mathbf{1}_{Z_1^g > z} Z_1^g \right] < 1 \right\} \quad (3.14)$$

dont l'existence est garantie par les moments exponentiels de Z_1^g (voir la remarque à la fin la section 1.6.6, puisque $Z_1^g \sim \xi^g$). Bien que la définition de z_1 semble arbitraire, son utilité sera révélée dans la preuve du lemme. En se rappelant que $c(j)$ désigne l'ensemble des enfants de j , on définit aussi

$$E_j := \{2 \leq |c(\overleftarrow{j}) \cap B(\mathcal{T})| \leq z_1\} \cap \{\beta(x) \geq c_1 \forall x \in (c(\overleftarrow{j}) \cap B(\mathcal{T})) \setminus j\}, \quad (3.15)$$

l'évènement que j possède un nombre de voisin sur $B(\mathcal{T})$ entre 1 et $z_1 - 1$, puis que la marche en partant de chacun de ces voisins a une probabilité plus grande que c_1 (une constante pour l'instant

non définie) de ne pas revenir à \overleftarrow{j} . Intuitivement, on peut voir l'évènement E_j comme "il existe des pièges importants au sommet \overleftarrow{j} ". On pose également la v.a. $M_j = \sum_{i \in p(j)} \mathbf{1}_{E_i}$ le nombre de fois que l'évènement E_i se produit sur le chemin de j . On souligne que E_j est indépendant de $M_{\overleftarrow{j}}$ et que E_j et M_j sont dépendants de la constante c_1 .

Lemme 8. *Q-p.s. il existe $N, c_1, \delta_0 > 0$ tels que pour tout k t.q. $\lfloor b^{k/8} \rfloor \geq N$,*

$$\min_{j \in D_{\lfloor b^{k/8} \rfloor}} \frac{M_j}{\lfloor b^{k/8} \rfloor} \geq \delta \quad (3.16)$$

Autrement dit, le nombre de sommets pour lesquels l'évènement E_j se produit sur un chemin de longueur $\lfloor b^{k/8} \rfloor$ est au minimum d'ordre $\lfloor b^{k/8} \rfloor$ pour k assez grand

Démonstration. Nous adapterons la preuve du lemme 2.2 de [4]. Ainsi, on définit $\phi_n = \sum_{j \in D_n} e^{-\theta M_j}$ où θ est une constante arbitraire positive et on suppose que $E_{\mathbf{Q}} \left[\sum_{j \in D_1} \mathbf{1}_{E_j^c} \right] < 1$.

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{Q}}[\phi_n] &= E_{\mathbf{Q}} \left[\sum_{i \in D_{n-1}} e^{-\theta M_i} \cdot \left(\sum_{j \in D_1(\mathcal{T}_i)} \mathbf{1}_{E_j^c} + \mathbf{1}_{E_j} e^{-\theta} \right) \right] \\ &= \sigma(\theta) E_{\mathbf{Q}}[\phi_{n-1}] \\ &= \sigma(\theta)^n \end{aligned}$$

par indépendance et où $\sigma(\theta) := E_{\mathbf{Q}} \left[\sum_{j \in D_1} \mathbf{1}_{E_j^c} + \mathbf{1}_{E_j} e^{-\theta} \right] = E_{\mathbf{Q}}[\phi_1]$. On peut ensuite utiliser l'inégalité de Markov pour obtenir :

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} \left(\min_{j \in D_n} M_j < \delta n \right) &= \mathbf{Q} \left(e^{-\min_{j \in D_n} \theta M_j} > e^{-\theta \delta n} \right) \\ &\leq e^{\delta \theta n} E_{\mathbf{Q}} \left[\sum_{j \in D_n} e^{-\theta M_j} \right] \\ &= e^{n \delta \theta} \sigma(\theta)^n \\ &= e^{n(\delta \theta + \log \sigma(\theta))} \\ &:= e^{n \alpha(\theta, \delta)} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Si on pose $\delta = 0$, on constate que

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow \infty} \alpha(\theta, 0) &= \lim_{\theta \rightarrow \infty} \log \sigma(\theta) \\ &= \log E_{\mathbf{Q}} \left[\lim_{\theta \rightarrow \infty} \sum_{j \in D_1} \mathbf{1}_{E_j^c} + \mathbf{1}_{E_j} e^{-\theta} \right] \\ &< 0 \end{aligned}$$

par hypothèse et le théorème de convergence dominée. Par la continuité de la fonction $\alpha(\theta, \delta)$, il existe $\delta_0 > 0$ et θ_0 assez grand t.q.

$$-c_2 := \alpha(\theta_0, \delta_0) < 0 \quad (3.18)$$

L'équation (3.16) suit directement par le lemme de Borel-Cantelli.

Il nous reste à prouver la supposition faite au début de la preuve, c.-à-d. que $E_{\mathbf{Q}} \left[\sum_{j \in D_1} \mathbf{1}_{E_j^c} \right] < 1$. C'est ici que la définition de la constante z_1 sera utile.

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{Q}} \left[\sum_{j \in D_1} \mathbf{1}_{E_j^c} \right] &= \mathbf{Q}(Z_1^g = 1) + \sum_{i=2}^{\infty} E_{\mathbf{Q}} \left[\sum_{j \in D_1} \mathbf{1}_{E_j^c} \mid Z_1^g = i \right] \mathbf{Q}(Z_1^g = i) \\ &\leq P_{GW}(Z_1^g = 1) + \sum_{i=2}^{z_1} i(1 - \mathbf{Q}(\beta \geq c_1)^i) P_{GW}(Z_1^g = i) + \sum_{i=z_1+1}^{\infty} i P_{GW}(Z_1^g = i) \\ &\leq P_{GW}(Z_1^g = 1) + E_{GW} \left[\mathbf{1}_{Z_1^g > z_1} Z_1^g \right] + (1 - \mathbf{Q}(\beta \geq c_1)^{z_1}) \sum_{i=2}^{z_1} i P_{GW}(Z_1^g = i) \end{aligned}$$

Bien sûr, ici $\beta > 0$ p.s. puisque la marche est transiente. On peut ensuite choisir c_1 pour que $(1 - \mathbf{Q}(\beta \geq c_1)^{z_1})$ soit arbitrairement proche de 0, et donc

$$(1 - \mathbf{Q}(\beta \geq c_1)^{z_1}) \sum_{i=2}^{z_1} i P_{GW}(Z_1^g = i) = c(1 - \mathbf{Q}(\beta \geq c_1)^{z_1})$$

est arbitrairement proche de 0. On pourra donc conclure par la définition de z_1 (3.14) que

$$E_{\mathbf{Q}} \left[\sum_{j \in D_1} \mathbf{1}_{E_j^c} \right] < 1$$

□

Pour pouvoir utiliser le lemme 8 plus efficacement, on aimerait avoir plus d'information sur le N mentionné dans l'énoncé, plus spécifiquement la queue de la variable. On obtient par (3.17), (3.18) et une borne d'union que

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(N > n) &= \sum_{i=n}^{\infty} \mathbf{Q} \left(\min_{j \in D_i} M_j < \delta_0 i \right) \\ &\leq \sum_{i=n}^{\infty} e^{-c_2 i} \\ &= \frac{e^{-c_2 n}}{1 - e^{-c_2}} \end{aligned} \tag{3.19}$$

Il est aussi possible de borner inférieurement la probabilité que la marche tombe dans un piège quand elle en a l'occasion (c.-à-d. quand $|c(j) \cap B(\mathcal{T})| > 1$) par

$$c_3 := \frac{q}{1 + q + Q}$$

Par souci de brièveté, on définit pour le reste de la preuve l'évènement $\mathcal{A}'_{k,v} := \{Y \text{ visite } v \text{ avant le temps } b^{k/4}\}$. On remarque que si l'évènement $\mathcal{A}'_{k,v}$ se produit alors la marche Y voit au minimum M_v pièges pour lesquels l'évènement E se produit. On remarque également qu'à chaque fois que la marche rencontre un sommet j t.q. E_j se produit, elle a une chance d'au moins $c_3 c_1$ de non seulement tomber dans le piège, mais aussi de ne jamais revenir sur $p(v)$.

On peut donc conclure que

$$P_\omega(\mathcal{A}'_{k,v}) \leq (1 - c_3 c_1)^{M_v}$$

ce qui, en continuant à partir de (3.13), nous amène finalement à

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q}((\mathcal{A}_k^1)^c \cap C_k) &\leq b^{k/4} E_{\mathbf{Q}} \left[\max_{v \in D_{\lfloor b^{k/8} \rfloor}} P_\omega(\mathcal{A}'_{k,v}) \right] \\
&\leq b^{k/4} E_{\mathbf{Q}} \left[\max_{v \in D_{\lfloor b^{k/8} \rfloor}} (1 - c_3 c_1)^{M_v} \right] \\
&\leq b^{k/4} E_{\mathbf{Q}} \left[(1 - c_3 c_1)^{\min_{v \in D_{\lfloor b^{k/8} \rfloor}} M_v} \right] \\
&= b^{k/4} E_{\mathbf{Q}} \left[(1 - c_3 c_1)^{\min_{v \in D_{\lfloor b^{k/8} \rfloor}} M_v} \left(\mathbf{1}_{\{\lfloor b^{k/8} \rfloor \geq N\}} + \mathbf{1}_{\{\lfloor b^{k/8} \rfloor < N\}} \right) \right] \\
&\leq b^{k/4} \left(E_{\mathbf{Q}} \left[(1 - c_3 c_1)^{\delta_0 \lfloor b^{k/8} \rfloor} \right] + \mathbf{Q} \left(N > \lfloor b^{k/8} \rfloor \right) \right) \\
&= b^{k/4} \left((1 - c_3 c_1)^{\delta_0 \lfloor b^{k/8} \rfloor} + \frac{e^{-c_2 \lfloor b^{k/8} \rfloor}}{1 - e^{-c_2}} \right) \tag{3.20}
\end{aligned}$$

On a bien entendu utilisé le lemme 8 et l'équation (3.19) aux dernières étapes. En utilisant (3.12) et (3.20), on peut finalement conclure que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{Q}(\mathcal{A}_k^c) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} 2\mathbb{Q}((\mathcal{A}_k^1)^c) \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} 2 \left(\mathbb{Q}((\mathcal{A}_k^1)^c \cap C_k) + \mathbb{Q}(C_k^c) \right) \\
&< \infty
\end{aligned}$$

Annexe A

La ruine du joueur

Le modèle de la ruine du joueur est assez simple : on joue à pile ou face, si la pièce tombe sur pile, on gagne 1\$ et si elle tombe sur face on perd 1\$, puis on répète l'expérience. On considérera le cas plus général où la pièce est possiblement biaisée, c'est-à-dire que $P[\text{pile}] = p$ et $P[\text{face}] = q$. Formellement, on définit la famille de variables i.i.d. $(X_i)_{i \geq 1}$ de loi $P[X_i = 1] = p$ et $P[X_i = -1] = q$, puis on pose

$$S_n := S_0 + \sum_{i=1}^n X_i, \quad (0.1)$$

les avoirs du joueur après n lancers (S_0 est bien sûr son argent au départ). On souligne que ce problème est équivalent à une marche aléatoire p -biaisée sur \mathbb{Z} partant de S_0

On introduit le temps d'arrêt $\tau := \inf\{i \geq 0 : S_i = -B \text{ ou } S_i = A\}$ puis on essaye de calculer $P[S_\tau = A | S_0 = 0]$. Il s'agit essentiellement de la chance que le joueur remporte A \$ avant qu'il ne se ruine (qu'il perde B \$). Dans cet optique, on pose

$$f(k) = P[S_\tau | S_0 = k] \quad (0.2)$$

La quantité recherchée est donc $f(0)$. On remarque évidemment que $f(A) = 1$ et $f(B) = 0$. On peut aussi établir une relation de récurrence pour la fonction f , en effet si $-B < k < A$ alors

$$f(k) = pf(k+1) + qf(k-1) \quad (0.3)$$

Intuitivement, en partant de k on a une chance p de se rendre à $k+1$ et la marche se comporte comme si elle commençait à $k+1$, et la même chose est vrai pour $k-1$. Quand on a des conditions limites, on sait qu'une équation du genre de (0.3) induira une solution unique pour $f(k)$.

On peut définir

$$\Delta f(k) := f(k) - f(k-1), \quad (0.4)$$

ce qui nous permettra d'obtenir, en utilisant l'équation (0.3), que

$$\Delta f(k) = \frac{q}{p} \Delta f(k-1) \quad (0.5)$$

On remarque ensuite que $f(k)$ peut être vu comme une somme télescopique, c.-à-d. que

$$\begin{aligned}
f(k) &= \sum_{j=-B+1}^k \Delta f(j) \\
&= \sum_{j=-B+1}^k \left(\frac{q}{p}\right)^{j-1+B} \Delta f(-B+1) \\
&= f(-B+1) \sum_{j=0}^{k-1+B} \left(\frac{q}{p}\right)^j \\
&= f(-B+1) \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{k+B}}{1 - \frac{q}{p}}
\end{aligned}$$

Puisqu'on sait que de $f(A) = 1$, on peut trouver la valeur $f(-B+1)$ et une solution explicite pour $f(k)$ suivra.

$$\begin{aligned}
f(A) &= f(-B+1) \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{A+B}}{1 - \frac{q}{p}} \\
f(-B+1) &= \frac{1 - \frac{q}{p}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{A+B}}
\end{aligned}$$

On obtient donc que

$$f(k) = P[S_\tau = A | S_0 = k] = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{k+B}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{A+B}} \quad (0.6)$$

Il reste cependant un problème dans notre preuve : il n'est pas évident que $\tau < \infty$ et donc que S_τ est bien défini. Intuitivement, la marche a toujours une chance non nulle de faire les $A+B$ prochains déplacements dans la même direction et donc mettre fin à l'expérience. Pour le prouver rigoureusement, on aura besoin de l'indépendance de ces séquences de déplacement, on définit donc l'évènement

$$E_k = \{X_i = 1 \text{ pour } i \in [(k-1)(A+B)+1, k(A+B)]\},$$

des évènements indépendants et on aura bien entendu que $P[E_k] = p^{A+B}$

Ces évènements séparent la marche en segments de longueur $(A+B)$ puis désigne le cas où la marche se déplace vers la droite pour toute cette séquence.

On peut voir que si l'évènement E_k se produit alors forcément la marche se rend à A , ce qui implique que les évènements E_i et $\{\tau > k(A+B)\}$ sont incompatibles pour $i \in [1, k]$. Autrement dit,

$$\{\tau > k(A+B)\} \subset \cap_{i \leq k} E_i^c,$$

ce qui donne, par indépendance des E_i ,

$$P[\tau > k(A+B)] \leq \left(1 - p^{A+B}\right)^k \quad (0.7)$$

où le membre de droite ressemble, comme on pourrait s'y attendre, à une loi géométrique.

On utilise ensuite la convergence dominée pour conclure :

$$\begin{aligned} P[\tau = \infty] &= \lim_{k \rightarrow \infty} P[\tau > k(A+B)] \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} (1 - p^{A+B})^k \\ &= 0 \end{aligned}$$

On remarque aussi que le fait que $\tau < \infty$ p.s. n'est pas la seule conséquence de l'équation (0.7), on peut même prouver quelque chose de beaucoup plus puissant : on aura que τ possède des moments exponentiels.

On présente d'abord (0.7) un peu différemment :

$$P \left[\frac{\tau}{A+B} > k \right] \leq (1 - p^{A+B})^k, \quad (0.8)$$

ce qui implique que la variable $\frac{\tau}{A+B}$ est dominé stochastiquement par une variable

$$G \sim Geo(1 - p^{A+B})$$

Puisque les variables géométriques ont des moments exponentiels, on déduit que $\frac{\tau}{A+B}$ possède des moments exponentiels, ce qui implique à son tour que τ possède des moments exponentiels.

Bibliographie

- [1] A. Bowditch. A quenched central limit theorem for biased random walks on supercritical Galton-Watson trees <https://doi.org/10.48550/arXiv.1701.04294>
- [2] Alan Hammond. "Stable limit laws for randomly biased walks on supercritical trees." *Ann. Probab.* 41 (3A) 1694 - 1766, May 2013. <https://doi.org/10.1214/12-AOP752>
- [3] Y. Peres and O. Zeitouni. A central limit theorem for biased random walks on Galton-Watson trees. *Probab. Theory Related Fields*, 2008.
- [4] Dembo, A., Gantert, N., Peres, Y., Zeitouni, O. : Large deviations for random walks on Galton-Watson trees : averaging and uncertainty. *Probab. Theory Related Fields* 122, 241–288 (2001)
- [5] E. Aidékon. Transient random walks in random environment on a Galton-Watson tree <https://doi.org/10.48550/arXiv.0710.3377>
- [6] R. Lyons and R. Pemantle. Random walk in a random environment and first-passage percolation on trees. *Ann. Probab.*, 20(1) :125–136, 1992.
- [7] R. Lyons, R. Pemantle, and Y. Peres. Biased random walks on Galton-Watson trees. *Probab. Theory Related Fields*, 106(2) :249–268, 1996.
- [8] W. Whitt. *Stochastic-process limits*. Springer-Verlag, New York, 2002.
- [9] E. Bolthausen and A. Sznitman. On the static and dynamic points of view for certain random walks in random environment. *Methods and Applications of Analysis*, 2002.
- [10] Lyons, R. (1992). Random walks, capacity and percolation on trees. *Ann. of Probab.* 20, 2043–2088.
- [11] Solomon, F. (1975). Random walks in a random environment. *Ann. Probab.* 3, 1–31.
- [12] Sinai, Ya.G. (1982). The limiting behavior of a one-dimensional random walk in a random medium. *Th. Probab. Appl.* 27, 256–268.
- [13] Iglehart, D.L. (1972). Extreme values in the GI/G/1 queue. *Ann. Math. Statist.* 43, 627–635
- [14] Chandra A. K., Raghavan P., Ruzzo W. L., Smolensky R. and Tiwari P. (1996/7), The electrical resistance of a graph captures its commute and cover times, *Comput. Complexity* 6(4), 312–340.
- [15] Lyons, R., Pemantle, R. and Peres, Y. (1997). Unsolved problems concerning random walks on trees. *IMA Vol. Math. Appl.* 84,223–237.
- [16] G. Ben Arous and A. Fribergh, Biased random walks on random graphs, <https://doi.org/10.48550/arXiv.1406.5076>
- [17] H. Kesten, M.V. Kozlov, and F. Spitzer : Limit law for random walk in a random environment. *Composito Mathematica* 30 , 145–168 (1975). http://www.numdam.org/item?id=CM_1975__30_2_145_0