

Université de Montréal

Sur les algèbres d'endomorphismes du produit tensoriel
de $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -modules en q racine de l'unité

par

Charles Sénécal

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en mathématiques

Orientation mathématiques pures

31 juillet 2023

Université de Montréal

Faculté des arts et des sciences

Ce mémoire intitulé

**Sur les algèbres d'endomorphismes du produit
tensoriel de $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -modules en q racine de l'unité**

présenté par

Charles Sénécal

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Abraham Broer

(président-rapporteur)

Yvan Saint-Aubin

(directeur de recherche)

Joel Kamnitzer

(membre du jury)

Résumé

Ce mémoire porte sur la structure des centralisateurs de l'action de l'extension de Lusztig $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$ du groupe quantique $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ sur les produits tensoriels de la forme $M \otimes \mathbf{L}_q(1)^{\otimes n}$ en q une racine de l'unité. Ici, n est un entier positif, $\mathbf{L}_q(1)$ est la représentation fondamentale de dimension 2 de $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$ et M est un $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -module simple ou projectif. Dans le cas des modules simples, on analyse l'action du groupe de tresses de type B sur les modules $\mathbf{L}_q(i) \otimes \mathbf{L}_q(1)^{\otimes n}$ via les matrices R et on identifie sa structure comme quotient de l'algèbre de Temperley–Lieb à une frontière \mathbf{TLb}_n . Dans le cas des modules projectifs, on utilise les idempotents de (ℓ, p) -Jones–Wenzl [BLS19, MS22, STWZ23] pour exprimer $\text{End}_{\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)}(\mathbf{P}_q(i) \otimes \mathbf{L}_q(1)^{\otimes n})$ comme une algèbre de Temperley–Lieb valencée [Spe21].

Le chapitre 1 introduit les algèbres de Temperley–Lieb et de Temperley–Lieb à une frontière, par générateurs et relations et de façon diagrammatique, en faisant le lien avec le langage des algèbres cellulaires. Le chapitre 2 présente, après une courte introduction au langage des algèbres de Hopf, le groupe quantique $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ et l'extension de Lusztig $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$ en q une racine de l'unité. Une partie de sa théorie de la représentation est présentée, ainsi que les matrices R et la dualité de Schur–Weyl quantique. Le chapitre 3 se penche sur l'étude de l'algèbre $\text{End}_{\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)}(\mathbf{L}_q(i) \otimes \mathbf{L}_q(1)^{\otimes n})$. En particulier, il montre que l'action du groupe de tresses de type B sur cet espace se factorise par l'algèbre \mathbf{TLb}_n , puis montre que le noyau de cette représentation est un idéal engendré par un préidempotent de Jones–Wenzl. Le chapitre 4 présente la construction des idempotents de (ℓ, p) -Jones–Wenzl et la preuve de leurs propriétés clés. Il fait ensuite le lien avec l'algèbre $\text{End}_{\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)}(\mathbf{P}_q(i) \otimes \mathbf{L}_q(1)^{\otimes n})$ et montre qu'elle est isomorphe à un sandwich de l'algèbre de Temperley–Lieb par ces idempotents.

Mots clés : théorie de la représentation des algèbres ; algèbres de Temperley–Lieb ; algèbres de Temperley–Lieb à une frontière ; groupes quantiques ; extension de Lusztig ; matrices R ;

dualité de Schur–Weyl quantique ; algèbres d’endomorphismes ; idempotents de (ℓ, p) -Jones–Wenzl.

Abstract

This thesis studies the structure of the centralizers of the action of Lusztig's extension $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$ of the quantum group $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ on tensor products of the form $M \otimes \mathbf{L}_q(1)^{\otimes n}$ when q is a root of unity. Here, n is a positive integer, $\mathbf{L}_q(1)$ is the 2-dimensional fundamental representation of $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$ and M is a simple or projective module over $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$. In the case of simple modules, we analyse the action of the type B braid group on the modules $\mathbf{L}_q(i) \otimes \mathbf{L}_q(1)^{\otimes n}$ via the R -matrices and we identify its structure as a quotient of the one-boundary Temperley–Lieb algebra TLb_n . In the case of projective modules, we use the (ℓ, p) -Jones–Wenzl idempotents [BLS19, MS22, STWZ23] to write $\mathrm{End}_{\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)}(\mathbf{P}_q(i) \otimes \mathbf{L}_q(1)^{\otimes n})$ as a valenced Temperley–Lieb algebra [Spe21].

Chapter 1 introduces the Temperley–Lieb algebras and the one-boundary Temperley–Lieb algebras, both by generators and relations and diagrammatically, also exhibiting their cellular structure. Chapter 2 gives an introduction to the language of Hopf algebras, then presents the quantum group $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ and Lusztig's extension $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$ at q a root of unity. Part of its representation theory is given, as well as its R -matrices and quantum Schur–Weyl duality. Chapter 3 focuses on the study of the algebra $\mathrm{End}_{\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)}(\mathbf{L}_q(i) \otimes \mathbf{L}_q(1)^{\otimes n})$. In particular, it shows that the type B braid group action factorizes through the algebra TLb_n , then shows that the kernel of this representation is an ideal generated by a Jones–Wenzl preidempotent. Chapter 4 gives the construction of (ℓ, p) -Jones–Wenzl idempotents and proves their key properties. It then makes explicitly the link with the algebra $\mathrm{End}_{\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)}(\mathbf{P}_q(i) \otimes \mathbf{L}_q(1)^{\otimes n})$ and shows that it is isomorphic to a sandwich of the Temperley–Lieb algebra by those idempotents.

Keywords : representation theory of algebras; Temperley–Lieb algebras; one-boundary Temperley–Lieb algebras; quantum groups; Lusztig's extension; R -matrices; quantum Schur–Weyl duality; endomorphism algebras; (ℓ, p) -Jones–Wenzl idempotents.

Table des matières

Résumé	5
Abstract	7
Notation	13
Remerciements	17
Introduction	19
Chapitre 1. Les algèbres de Temperley–Lieb et de Temperley–Lieb à une frontière	23
1.1. Les q -nombres	24
1.2. Les algèbres cellulaires	24
1.3. L’algèbre de Temperley–Lieb	27
1.3.1. Définitions et propriétés	27
1.3.2. Modules standards	32
1.3.3. Projecteurs de Jones–Wenzl	35
1.4. L’algèbre de Temperley–Lieb à une frontière	36
1.4.1. Définition et propriétés	37
1.4.2. Modules standards	41
1.4.3. Projecteurs de Jones–Wenzl	42
Chapitre 2. Le groupe quantique $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ et sa théorie de la représentation	45
2.1. Algèbres de Hopf	45

2.1.1.	Définition.....	46
2.1.2.	Exemples.....	47
2.1.3.	Catégories monoïdales tressées.....	48
2.2.	Définition de $U_q(\mathfrak{sl}_2)$	52
2.2.1.	Formes rationnelle et intégrale restreinte.....	52
2.2.2.	Spécialisation en un paramètre complexe : l'extension de Lusztig $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$	54
2.3.	Théorie de la représentation.....	54
2.3.1.	Terminologie.....	54
2.3.2.	Modules de Weyl et modules simples.....	56
2.3.3.	Modules projectifs.....	58
2.3.4.	Produits tensoriels.....	59
2.4.	Matrices R pour les représentations de $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ et de $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$	60
2.5.	Dualité de Schur–Weyl.....	63
2.5.1.	Représentation du groupe de tresses.....	63
2.5.2.	Représentation de l'algèbre de Temperley–Lieb.....	65
2.5.3.	Énoncé de la dualité.....	68
Chapitre 3.	Les endomorphismes de $L_q(i) \otimes L_q(1)^{\otimes n}$.....	71
3.1.	Représentations du groupe de tresses de type B et de l'algèbre de Temperley–Lieb à une frontière.....	71
3.1.1.	Le groupe de tresses de type B	72
3.1.2.	L'algèbre de Temperley–Lieb à une frontière.....	73
3.2.	L'algèbre $\mathcal{R}_{i,n}$ comme quotient de l'algèbre de Temperley–Lieb à une frontière	77
3.3.	Retour à $\text{End}_{\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)}(L_q(i) \otimes L_q(1)^{\otimes n})$	91
Chapitre 4.	Les endomorphismes de $P_q(i) \otimes L_q(1)^{\otimes n}$.....	93

4.1. Projecteurs de (ℓ, p) -Jones–Wenzl et leur image	94
4.1.1. Les caractères	94
4.1.2. Les projecteurs de (ℓ, p) -Jones–Wenzl	96
4.1.3. Spécialisation en une racine de l'unité	103
4.2. La structure d'algèbre des endomorphismes	109
Conclusion	113
Bibliographie	115

Notation

On présente une liste (non exhaustive) de symboles utilisés fréquemment dans ce mémoire et de leur signification.

\mathbb{N}	Les nombres entiers naturels $\{1, 2, 3, \dots\}$.
$\mathbb{Z}_{\geq k}$	Les nombres entiers supérieurs ou égaux à k .
\mathbb{C}^\times	Les nombres complexes non nuls.
\equiv_n	Relation d'équivalence modulo n sur les entiers.
$\delta_{a,b}$	Le delta de Kronecker, qui vaut 1 si $a = b$ et 0 sinon.
β_v	Pour $v \in \mathbb{k}^\times$, où \mathbb{k} est un corps ou un anneau commutatif, $\beta_v = v + v^{-1}$.
$\text{rad } M, \text{top } M, \text{soc } M$	Le radical, la coiffe et le socle d'un module M .
$[n]_q, [n]_{q!}, \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$	Respectivement le q -nombre, le nombre q -factoriel et le coefficient q -binomial (voir section 1.1).
\mathfrak{G}_λ	La matrice de Gram associée à la forme bilinéaire du module cellulaire $W(\lambda)$ (voir section 1.2).
$\mathcal{TL}^{\mathbb{k}}(\beta)$	La catégorie \mathbb{k} -linéaire de Temperley–Lieb de paramètre β , pour \mathbb{k} un corps ou un anneau commutatif unifère (voir section 1.3.1).
$\text{TL}_n^{\mathbb{k}}(\beta)$	La \mathbb{k} -algèbre de Temperley–Lieb de taille n et de paramètre β (voir section 1.3.1).
$*$	L'anti-involution de l'algèbre de Temperley–Lieb (voir section 1.3.1).
$\mathcal{S}_n(k)$	Le TL_n -module standard d'indice k (voir section 1.3.2).
$\mathfrak{B}_{n,k}$	La base standard du module $\mathcal{D}_n(k)$ (voir section 1.3.2).
$\mathcal{D}_n(k)$	Le TL_n -module simple d'indice k (voir section 1.3.2).

\mathfrak{p}_n	Le projecteur de Jones–Wenzl d’indice n , élément de l’algèbre de Temperley–Lieb (voir section 1.3.3).
$\mathcal{TLB}^{\mathbb{k}}(\beta, \beta_0, \beta_1)$	La catégorie \mathbb{k} -linéaire de Temperley–Lieb à une frontière de paramètres β, β_0, β_1 (voir section 1.4.1).
$\mathrm{TLb}_n^{\mathbb{k}}(\beta, \beta_0, \beta_1)$	La \mathbb{k} -algèbre de Temperley–Lieb à une frontière de paramètres β, β_0, β_1 (voir section 1.4.1).
$\widehat{\mathcal{S}}_n(k)$	Le TLb_n -module standard d’indice k (voir section 1.4.2).
$\widehat{\mathcal{B}}_{n,k}$	La base standard du module $\widehat{\mathcal{D}}_n(k)$ (voir section 1.4.2).
$\widehat{\mathcal{D}}_n(k)$	Le TLb_n -module simple d’indice k (voir section 1.4.2).
$\widehat{\mathfrak{p}}_k$	Le préidempotent de Jones–Wenzl de type $\widehat{\mathcal{S}}_n(-n)$ de TLb_n d’indice k (voir section 1.4.3).
τ	L’application linéaire <i>flip</i> définie à la section 2.1.1.
Δ	Le coproduit d’une algèbre de Hopf (voir section 2.1.1). En particulier, le coproduit de $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$ défini à la section 2.2.1.
$U_v(\mathfrak{sl}_2)$	La forme rationnelle (voir section 2.2.1).
$U_{\mathbb{Z}}^{\mathrm{res}}(\mathfrak{sl}_2)$	La forme intégrale restreinte (voir section 2.2.1).
$\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$	L’extension de Lusztig du groupe quantique $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ (voir section 2.2.2).
\mathfrak{m}_i	La mère de l’entier i (voir section 2.3.1).
$\mathfrak{g}_i, \mathfrak{d}_i$	La réflexion à gauche (resp. à droite) de l’entier i par rapport aux lignes critiques (voir section 2.3.1).
χ_M	Le caractère d’un $U_v(\mathfrak{sl}_2)$ - ou d’un $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -module M (voir section 2.3.1).
\mathcal{F}	La catégorie des $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -modules de dimension finie et de type 1 (voir section 2.3.1).
$\Delta_q(i)$	Le $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -module de Weyl d’indice i (voir section 2.3.2).
$\mathrm{L}_q(i)$	Le $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -module simple d’indice i (voir section 2.3.2).
$\mathrm{P}_q(i)$	Le $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -module projectif d’indice i (voir section 2.3.3).
\mathcal{R}	La matrice R universelle de $U_v(\mathfrak{sl}_2)$ (voir section 2.4).

$\check{R}_{M,N}$	Isomorphismes de commutativité de la catégorie \mathcal{F} (voir section 2.4).
B_n	Le groupe de tresses d'indice n (voir section 2.5.1).
$\mathcal{H}_n(q)$	L'algèbre de Hecke d'indice n et de paramètre q (voir section 2.5.2).
Γ_n	Le groupe de tresses de type B d'indice n (voir section 3.1.1).
$\mathcal{R}_{i,n}$	La sous-algèbre de $\text{End}_{\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)}(\mathbf{L}_q(i) \otimes \mathbf{L}_q(1)^{\otimes n})$ engendrée par l'action du groupe de tresses de type B (voir section 3.1.1).
$\check{\mathfrak{p}}_n^\ell$	Le projecteur de (ℓ, p) -Jones–Wenzl d'indice n , élément de l'algèbre de Temperley–Lieb (voir section 4.1.2).

Remerciements

Le dépôt de ce mémoire met un terme à un merveilleux périple d'un peu plus de 5 ans sur la montagne de l'Université de Montréal. Il est difficile de trouver des mots pour rendre compte des quelques dernières années et de ma gratitude envers le nombre impressionnant de personnes dont j'ai eu la chance de croiser le chemin, en particulier au sein de la cité *aissenstadtienne*. Je ne parviendrai certainement pas à rendre justice à tout le monde, mais je me dois de remercier certaines personnes dont le précieux support a été essentiel à la rédaction de la centaine de pages qui suit.

J'aimerais d'abord et avant tout exprimer ma grande reconnaissance envers mon superviseur. Yvan, de ta présence aux portes ouvertes de l'UdeM à ton accompagnement durant l'écriture de ce mémoire, en passant par la rigueur de ton enseignement et l'impressionnante générosité de ta supervision en recherche, ton enthousiasme pour les mathématiques a su m'aiguiller et me motiver pendant tout mon cheminement. Merci pour ton temps et ta sagesse.

J'aimerais ensuite remercier les autres membres du jury, Abraham Broer et Joel Kamnitzer, d'avoir gentiment accepté de lire et de commenter ce mémoire. J'aimerais aussi remercier Daniel Tubbenhauer pour d'intéressantes discussions concernant ce projet. J'aimerais enfin remercier le Conseil de recherche en sciences naturelles et en génie du Canada (CRSNG) ainsi que le Fonds de recherche du Québec - Nature et technologie (FRQNT) pour leur généreux support.

À celles et ceux qui sont passé·e·s par l'équipe d'Yvan : Alexis, Florence, Julia, Philippe, Philippe, Philip, Théo, merci pour les discussions et les ateliers éclairants. À celles et ceux qui ont formé mes premières familles au département : les responsables du café et les exécutant·e·s de l'AEMSUM, merci pour votre accueil, votre dévouement, les carafes de Colombien et les pitas thon cajun. À celles et ceux qui ont rendu aussi mémorables mes années

de baccalauréat, qui ont illuminé même les classes les plus sombres de Claire-McNicoll les matins d’hiver et qui ont périodiquement sauvé mon moral par leur apparition sur Discord ou sur skribbl.io : Alexandre, Francis, Irene, Isabelle, Jeanne, Julien, Leon, merci pour votre compagnie et votre humour savoureux. À celles et ceux qui, participant activement à la vie étudiante du département, ont contribué de près ou de loin aux joies du retour d’une vie sociale en présentiel et parmi qui je compte maintenant une kyrielle d’incalculables ami-e-s : Alain Didier, Alice, Dorchelle, Élise, Éloi, Francis, Geneviève, Jérémy, Jonathan, Marianne, Mathilde, Pierre-Alexandre, Sandrine, Stefan, Tony, Xurui, merci pour votre implication, votre inépuisable énergie et les moments de répit festifs. À celles et ceux qui évoluent hors du cercle opaque des mathématiques : ma famille et mes ami-e-s, merci pour votre indéfectible support et pour votre patience lorsque je tente de répondre à vos questions sur mes études.

Alexis, merci pour tant de choses, dont la relecture de ce mémoire, de précieux conseils académiques, des discussions fort rassurantes et une amitié défiant n’importe quel océan. Laurent, je n’aurais pu demander meilleur compagnon d’études et je me compte chanceux d’avoir croisé ton chemin, mais surtout d’avoir trouvé en toi bien plus qu’un partenaire d’analyse numérique. Philippe, discuter d’algèbre avec quiconque est en soi un plaisir, mais pouvoir le faire avec un ami qui m’est aussi cher est un rare privilège dont je suis très reconnaissant. Marc-Antoine, squasheur de grand calibre et colocataire exceptionnel d’appartement comme de bureau, je ne saurais imaginer des études de maîtrise sans ta présence. Shophika, ça a été un honneur et un bonheur de passer tant d’années d’études à tes côtés et je suis choyé de pouvoir continuer de compter sur quelqu’un d’aussi formidable que toi.

Je termine en remerciant mes parents, à qui je dois tout, mais surtout, à qui je dois que ce « tout » contienne le support inconditionnel de deux personnes que j’aime et que j’admire.

Introduction

Les algèbres de Temperley–Lieb, notées TL_n pour $n \in \mathbb{N}$, ont d’abord fait leur apparition dans des travaux de physique [TL71], intervenant dans des modèles sur réseau de physique statistique, comme les modèles d’Ising et de Potts. Elles sont aussi rapidement apparues dans les travaux de Jones, dans le cadre du développement de son invariant polynomial de nœuds [Jon85]. Elles ont continué d’avoir de nombreuses applications, à la fois en physique et en mathématiques. Au sein de cette dernière, par exemple, elles ont servi de modèle dans le développement de la théorie des algèbres cellulaires de Graham et Lehrer [GL96], elles jouent un rôle central dans la théorie de la représentation de l’algèbre de Lie \mathfrak{sl}_2 et du groupe quantique $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ et elles apparaissent dans la théorie des bimodules de Soergel comme catégorification des algèbres de Hecke de type \tilde{A}_1 [Eli16].

Ces algèbres ont donné naissance à de nombreuses variantes, comme les algèbres de Temperley–Lieb affines [GL98], à une frontière (ou blob) [Mar92], à deux frontières [dGN09], diluées [BSA14], à couture [MDRR15, LRSA20], valencées [FP18, Spe21], ouvrant de nouveaux horizons dans l’étude de leur théorie de la représentation et dans leurs applications en physique.

Les groupes quantiques, quant à eux, forment une structure mathématique ayant également fait ses premières apparitions dans des travaux de physique portant sur les méthodes de *scattering* inverse et la résolution de systèmes intégrables quantiques [TF79]. Les travaux indépendants de Drinfeld [Dri85] et de Jimbo [Jim85] ont ensuite permis de réaliser les groupes quantiques comme des algèbres de Hopf, ainsi que de faire systématiquement le lien avec l’équation de Yang–Baxter via l’introduction des matrices R .

Le développement de la théorie des groupes quantiques a été particulièrement fructueux et a permis de faire des avancées dans des domaines variés de la physique et des mathématiques : citons entre autres la théorie des nœuds [Tur16], la topologie de basse dimension

[RT91], la théorie conforme des champs [PS90], l’informatique quantique et la théorie de la représentation modulaire.

Les groupes quantiques et les algèbres diagrammatiques, telles que les algèbres de Temperley–Lieb, ont de nombreuses interactions et sont directement liées les unes aux autres. Notamment, la dualité de Schur–Weyl quantique, qui remonte à [Jim85] et même au travail de [RTW32] réinterprété dans un langage moderne, relie la catégorie des représentations du groupe quantique $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ à la catégorie de Temperley–Lieb. L’utilisation des outils diagrammatiques a permis d’obtenir de nombreux résultats sur la théorie de la représentation de $U_q(\mathfrak{sl}_2)$, en liant notamment les nombres de décomposition des simples de TL_n aux décompositions des produits tensoriels de représentations de $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ [And19].

Ce mémoire est consacré à l’étude des algèbres d’endomorphismes de certains produits tensoriels de représentations de l’extension de Lusztig $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$ du groupe quantique $U_q(\mathfrak{sl}_2)$, en q une racine de l’unité. En particulier, il porte sur les algèbres d’endomorphismes de la forme $\mathrm{End}_{\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)}(M \otimes L_q(1)^{\otimes n})$, où $n \in \mathbb{N}$, $L_q(1)$ est la représentation fondamentale de dimension 2 de $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$ et M est un $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -module simple ou projectif.

Cette recherche s’inscrit dans la lignée des travaux de Crampé et Poulain d’Andecy [CPd22] sur les algèbres de Hecke fusionnées et leur rôle dans la théorie de la représentation des groupes quantiques $U_q(\mathfrak{gl}_n)$. Les questions auxquelles ce mémoire cherche à répondre peuvent être vues comme une généralisation de l’étude des produits q -symétrisés de représentations de $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ au cas où q est une racine de l’unité. Des travaux récents de Iohara, Lehrer et Zhang [ILZ21] et d’Andersen, Lehrer et Zhang [ALZ15] cherchent également à répondre à des questions similaires, mais se penchent principalement sur le cas où q n’est pas une racine de l’unité.

Le chapitre 1 présente le cadre théorique des algèbres cellulaires dans lequel s’inscrivent les algèbres de Temperley–Lieb et de Temperley–Lieb à une frontière. Il donne ensuite la définition des algèbres de Temperley–Lieb et de Temperley–Lieb à une frontière, dans leur version classique par générateurs et relations ainsi que dans leur formulation diagrammatique et catégorique moderne. Le chapitre inclut toutes les propriétés de ces algèbres qui seront nécessaires pour les chapitres subséquents. Finalement, il introduit les (pré)idempotents de Jones–Wenzl pour les deux algèbres ainsi que leurs principales propriétés. Le contenu de ce chapitre est bien établi et ne contient pas de résultats originaux.

Le chapitre 2 est également un chapitre d'introduction. Il donne un aperçu du langage des algèbres de Hopf et des catégories monoïdales tressées, dans lesquelles s'inscrivent respectivement les groupes quantiques et leur catégorie de représentations. Le chapitre définit ensuite le groupe quantique $U_v(\mathfrak{sl}_2)$ et l'extension de Lusztig $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$ en q une racine de l'unité, puis donne un aperçu de sa théorie de la représentation. Trois familles de modules, c'est-à-dire les modules de Weyl, les modules simples et les modules projectifs, sont introduites et étudiées. On se penche également sur la décomposition des produits tensoriels de ces représentations. Le chapitre possède une section dédiée à l'étude des matrices R associées aux représentations de $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$ en q une racine de l'unité. Ceci sert, entre autres, pour définir une action du groupe de tresses sur certains produits tensoriels de représentations, ainsi que pour présenter la dualité de Schur–Weyl quantique, qui fait le pont entre les représentations de $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$ et l'algèbre de Temperley–Lieb TL_n . Encore une fois, ce chapitre ne contient pas de résultats originaux.

Le chapitre 3 utilise les outils présentés dans les deux chapitres précédents pour attaquer l'étude des endomorphismes des $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -modules de la forme $L_q(i) \otimes L_q(1)^{\otimes n}$, $n \in \mathbb{N}$, où $L_q(i)$ est un $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -module simple. Cela est fait en examinant une action du groupe de tresses de type B donnée via les matrices R de $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$, à la manière de [DRV13] et de [ILZ21], puis en décrivant la structure de son image, notée $\mathcal{R}_{i,n}$. On parvient à écrire explicitement l'algèbre $\mathcal{R}_{i,n}$ comme un quotient de l'algèbre de Temperley–Lieb à une frontière TLb_n par un idéal engendré par un préidempotent de Jones–Wenzl. Le problème n'est toutefois pas complètement résolu, car l'étude de l'algèbre complète $\mathrm{End}_{\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)}(L_q(i) \otimes L_q(1)^{\otimes n})$ est plus large et plus difficile que celle de $\mathcal{R}_{i,n}$ en général. Ce chapitre contient la majorité des contributions originales de ce mémoire, dont

- la définition de l'action de l'algèbre de Temperley–Lieb à une frontière sur $L_q(i) \otimes L_q(1)^{\otimes n}$ et la détermination des bons paramètres ;
- les isomorphismes $\mathrm{TLb}_n(\beta_q, [i+2]_q, [i+1]_q) \cong \pi \mathrm{TLb}_{n+1}(\beta_q, [i+1]_q, [i]_q) \pi$ et l'image par ces isomorphismes des idéaux engendrés par les préidempotents de Jones–Wenzl ;
- la structure de $\mathcal{R}_{i,n}$ comme un quotient de l'algèbre de Temperley–Lieb à une frontière.

Le chapitre 4 utilise également les outils des deux premiers chapitres pour étudier les endomorphismes des $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -modules de la forme $P_q(i) \otimes L_q(1)^{\otimes n}$, $n \in \mathbb{N}$, où $P_q(i)$ est un $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -module projectif. Pour ce faire, on commence par introduire les idempotents

de (ℓ, p) -Jones–Wenzl de Martin et Spencer [MS22] et de Burrull, Libedinsky et Sentinelli [BLS19], qui sont des analogues des idempotents de Jones–Wenzl dans le cas où q est une racine de l’unité et où la caractéristique du corps de définition est positive. La preuve qu’ils sont bien définis et qu’ils projettent vers le sous-module d’intérêt est donnée, en suivant les traces et en étoffant les arguments de [STWZ23]. On utilise ensuite ces idempotents pour faire explicitement le lien entre l’algèbre d’endomorphismes de $\mathbb{P}_q(i) \otimes \mathbb{L}_q(1)^{\otimes n}$ et un sandwich de l’algèbre de Temperley–Lieb $\mathbb{TL}_{n'}$, avec un $n' > n$. Ceci permet d’exprimer l’algèbre d’endomorphismes comme un cas particulier d’une algèbre de Temperley–Lieb valencée de Spencer [Spe21].

Chapitre 1

Les algèbres de Temperley–Lieb et de Temperley–Lieb à une frontière

Ce premier chapitre présente deux algèbres unifères qui joueront un rôle important pour le reste du mémoire : les algèbres de Temperley–Lieb et de Temperley–Lieb à une frontière. Une partie de leur théorie de la représentation est introduite en suivant le cadre général de la théorie des algèbres cellulaires.

On commence par une rapide présentation des q -nombres et de leurs propriétés élémentaires ; ce sont des objets combinatoires qui apparaîtront dans divers contextes au fil de ce mémoire.

On présente ensuite la définition des algèbres cellulaires ainsi que les théorèmes principaux les concernant, en suivant l'article original de Graham et Lehrer [GL96]. Le livre de Mathas [Mat99] est également une bonne référence. Cette théorie sera utile pour les deux sections suivantes.

La troisième section introduit la famille des algèbres de Temperley–Lieb. On étudie ensuite certaines de leurs propriétés et on s'attarde à des idempotents importants, les projecteurs de Jones–Wenzl, qui joueront un rôle déterminant au troisième chapitre. On présente également leurs modules standards.

La quatrième section présente enfin la famille des algèbres de Temperley–Lieb à une frontière. On introduit des idempotents analogues aux projecteurs de Jones–Wenzl en suivant le travail de Leroux-Lapierre [LL20]. On présente aussi leurs modules standards.

1.1. Les q -nombres

Plusieurs des définitions à venir feront intervenir diverses quantités qui dépendent d'un paramètre q pouvant être spécialisé en un nombre complexe.

Définition 1.1.1. Soient q un paramètre formel ou $q \in \mathbb{C}^\times \setminus \{\pm 1\}$ et $m \in \mathbb{Z}$. On définit le q -nombre m comme étant

$$[m]_q = \frac{q^m - q^{-m}}{q - q^{-1}}.$$

Si $q = 1$, on pose $[m]_q = m$ et si $q = -1$, $[m]_q = (-1)^m m$.

On donne quelques-unes de leurs propriétés utiles.

Proposition 1.1.2. Les q -nombres respectent

- (1) $[-m]_q = -[m]_q$;
- (2) $[2]_q [m]_q = [m-1]_q + [m+1]_q$
- (3) $[m]_q = 0$ si et seulement si $q^{2m} = 1$;
- (4) $[m]_q [n]_q - [m-1]_q [n+1]_q = [n-m+1]_q$.

DÉMONSTRATION. Toutes ces propriétés suivent d'un calcul direct. □

Une fois ces q -nombres introduits, on peut leur associer d'autres quantités combinatoires qui sont des q -déformations des quantités classiques. Par exemple, les nombres q -factoriels sont définis pour $m \in \mathbb{Z}$ par

$$[m]_q! = \begin{cases} [m]_q [m-1]_q \cdots [1]_q & \text{si } m \geq 1, \\ 1 & \text{si } m = 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et les coefficients q -binomiaux pour $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ par

$$\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}_q = \begin{cases} \frac{[m_1]_q!}{[m_2]_q! [m_1 - m_2]_q!} & \text{si } m_1 \geq m_2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1.2. Les algèbres cellulaires

La définition d'algèbre cellulaire a été introduite en 1996 par Graham et Lehrer [GL96]. Elle associe à une algèbre une base, dite cellulaire, qui rend particulièrement naturelle l'étude des représentations de l'algèbre en question. Les algèbres qui seront introduites dans les

prochains chapitres sont des exemples d'algèbres cellulaires et leur présentation rendra plus limpide les définitions suivantes, qui sont plutôt techniques.

Définition 1.2.1 (Graham–Lehrer [GL96]). *Soit \mathbb{k} un anneau commutatif unifié. Une \mathbb{k} -algèbre cellulaire est une algèbre associative unifiée \mathcal{A} avec les données cellulaires $(\Lambda, M, C, *)$ où*

- (1) (Λ, \preceq) est un ensemble partiellement ordonné et pour tout $\lambda \in \Lambda$, $M(\lambda)$ est un ensemble fini tel que $C : \sqcup_{\lambda \in \Lambda} M(\lambda) \times M(\lambda) \rightarrow \mathcal{A}$ est une application injective ayant pour image une \mathbb{k} -base de \mathcal{A} .
- (2) Si $\lambda \in \Lambda$ et $S, T \in M(\lambda)$, on écrit $C_{ST}^\lambda := C(S, T)$. Alors $*$ est une anti-involution \mathbb{k} -linéaire de \mathcal{A} telle que $(C_{ST}^\lambda)^* = C_{TS}^\lambda$.
- (3) Si $\lambda \in \Lambda$ et $S, T \in M(\lambda)$, on a, pour tout $a \in \mathcal{A}$,

$$aC_{ST}^\lambda \equiv \sum_{U \in M(\lambda)} r_a(U, S)C_{UT}^\lambda \pmod{\mathcal{A}^{\prec \lambda}}, \quad (1.2.1)$$

où $r_a(U, S) \in \mathbb{k}$ ne dépend pas de T et où $\mathcal{A}^{\prec \lambda}$ est le sous- \mathbb{k} -module de \mathcal{A} engendré par $\{C_{VW}^\mu \mid \mu \prec \lambda, V, W \in M(\mu)\}$.

Pour une première introduction à cette définition, il est suggéré de lire en parallèle les sections 1.2 et 1.3 ; cette dernière donne un premier exemple d'algèbre cellulaire.

Remarque 1.2.2. *Notons qu'en appliquant l'anti-involution $*$ à l'équation (1.2.1), on obtient*

$$C_{TS}^\lambda a^* \equiv \sum_{U \in M(\lambda)} r_a(U, S)C_{TU}^\lambda \pmod{\mathcal{A}^{\prec \lambda}}. \quad (1.2.2)$$

Cela montre que le résultat d'une multiplication à gauche (resp. à droite) d'un élément de la base cellulaire par un élément quelconque de \mathcal{A} est indépendant de l'étiquette à droite (resp. à gauche) de cet élément de la base, modulo des termes plus bas dans l'ordre cellulaire.

La propriété 3 de la définition ci-haut montre que la multiplication d'un élément de la base cellulaire par un élément de l'algèbre ne peut que fixer ou diminuer l'ordre cellulaire. C'est cette propriété qui sera cruciale pour permettre de définir les modules cellulaires.

Définition 1.2.3. *Pour tout $\lambda \in \Lambda$, on définit le \mathcal{A} -module à gauche $W(\lambda)$ comme étant le \mathbb{k} -module libre de base $\{C_S \mid S \in M(\lambda)\}$ avec l'action de \mathcal{A} donnée par*

$$a \cdot C_S = \sum_{T \in M(\lambda)} r_a(T, S)C_T \quad (1.2.3)$$

pour tout $a \in \mathcal{A}, S \in M(\lambda)$.

L'étude de la structure des modules cellulaires est étroitement liée à celle d'une forme bilinéaire définie sur ces derniers et dont l'existence suit des propriétés de la définition 1.2.1 ainsi que du lemme suivant.

Lemme 1.2.4. *Soient $\lambda \in \Lambda$ et $a \in \mathcal{A}$. Pour tous $S, T, U, V \in M(\lambda)$, on a*

$$C_{ST}^\lambda a C_{UV}^\lambda \equiv \phi_a(T, U) C_{SV}^\lambda \pmod{\mathcal{A}^{\prec \lambda}},$$

où $\phi_a(T, U) \in \mathbb{k}$ est indépendant de S et de V .

DÉMONSTRATION. En appliquant les équations (1.2.1) et (1.2.2), on obtient respectivement

$$C_{ST}^\lambda a C_{UV}^\lambda \equiv \sum_{W \in M(\lambda)} r_{C_{ST}^\lambda a}(W, U) C_{WV}^\lambda \pmod{\mathcal{A}^{\prec \lambda}} \quad (1.2.4)$$

et

$$C_{ST}^\lambda a C_{UV}^\lambda \equiv \sum_{W \in M(\lambda)} r_{a C_{UV}^\lambda}(W, T) C_{SW}^\lambda \pmod{\mathcal{A}^{\prec \lambda}}, \quad (1.2.5)$$

d'où on doit avoir $C_{ST}^\lambda a C_{UV}^\lambda \equiv r C_{SV}^\lambda \pmod{\mathcal{A}^{\prec \lambda}}$ avec $r = r_{C_{ST}^\lambda a}(S, U) = r_{a C_{UV}^\lambda}(V, T)$, qui est donc indépendant de S et de V . On pose finalement $\phi_a(T, U) = r$. \square

Les scalaires apparaissant dans le lemme 1.2.4 permettent alors de définir, pour $\lambda \in \Lambda$,

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : W(\lambda) \times W(\lambda) &\rightarrow \mathbb{k} \\ (C_S, C_T) &\mapsto \langle C_S, C_T \rangle = \phi_{\mathbf{1}}(S, T), \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

étendue bilinéairement. Ici, $\mathbf{1}$ est l'unité de \mathcal{A} .

Proposition 1.2.5. *Pour tout $\lambda \in \Lambda$, la forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique et on a $\langle ax, y \rangle = \langle x, a^*y \rangle$ pour tous $x, y \in W(\lambda)$, $a \in \mathcal{A}$.*

On peut encoder cette forme bilinéaire dans une matrice, ce qui simplifiera parfois son étude.

Définition 1.2.6. *Pour $\lambda \in \Lambda$, la matrice symétrique*

$$\mathfrak{G}_\lambda = \langle C_S, C_T \rangle_{S, T \in M(\lambda)}$$

est appelée la matrice de Gram associée à λ .

Les résultats qui suivent justifient l'introduction de cette forme bilinéaire et montrent l'utilité de toutes les définitions précédentes pour étudier la théorie de la représentation d'une algèbre cellulaire \mathcal{A} . Pour le reste de cette section, on se restreint au cas où \mathbb{k} est un corps.

Définition 1.2.7. Pour $\lambda \in \Lambda$, on définit $\text{rad}(\lambda) = \{x \in W(\lambda) \mid \langle x, y \rangle = 0, \forall y \in W(\lambda)\}$.

Le radical est également représenté par le noyau de la matrice de Gram associée. On pose $\Lambda_0 = \{\lambda \in \Lambda \mid \text{rad}(\lambda) \neq W(\lambda)\}$, c'est-à-dire l'ensemble des $\lambda \in \Lambda$ tels que la forme bilinéaire associée est non identiquement nulle.

Proposition 1.2.8. Soient \mathbb{k} un corps et $\lambda \in \Lambda$. Alors

- (1) $\text{rad}(\lambda)$ est un sous- \mathcal{A} -module de $W(\lambda)$.
- (2) Si $\lambda \in \Lambda_0$, le quotient $L_\lambda := W(\lambda)/\text{rad}(\lambda)$ est simple.
- (3) Si $\lambda \in \Lambda_0$, le radical de Jacobson de $W(\lambda)$ coïncide avec $\text{rad}(\lambda)$.

Proposition 1.2.9. Les modules $\{L_\lambda \mid \lambda \in \Lambda_0\}$ forment un ensemble complet de \mathcal{A} -modules simples (à isomorphisme près) et $L_\lambda \not\cong L_\mu$ dès que $\lambda \neq \mu$.

Notons que la théorie des algèbres cellulaires permet également d'étudier les projectifs indécomposables de façon élégante en utilisant les résultats ci-dessus. Le présent mémoire n'en fera pas usage, on réfère donc à [GL96] ou [Mat99] pour les détails.

1.3. L'algèbre de Temperley–Lieb

La première famille d'algèbres sur laquelle on se penche est celle des algèbres de Temperley–Lieb. Il est possible de les définir de plusieurs manières différentes, chacune ayant sa propre saveur et son utilité. On les présente tour à tour au cours de la prochaine section. On explicite également la structure cellulaire de l'algèbre.

Dans tout ce qui suit, on fixe un anneau \mathbb{k} ainsi qu'un élément $\beta \in \mathbb{k}$. Souvent, on prendra $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ et $\beta = q + q^{-1}$ avec $q \in \mathbb{C}^\times$, ou alors $\mathbb{k} = \mathbb{C}(v)$ et $\beta = v + v^{-1}$. Dans cette optique, pour tout $q \in \mathbb{k}^\times$, on pose $\beta_q = q + q^{-1}$.

1.3.1. Définitions et propriétés

On commence par donner une présentation diagrammatique de la catégorie de Temperley–Lieb. Pour ce faire, on aura besoin des objets suivants.

Définition 1.3.1. Soient $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ de même parité. Un (m, n) -diagramme est un dessin formé de deux colonnes de sites alignés verticalement, m à gauche et n à droite. Ces sites sont reliés deux à deux à l'aide de lignes qui restent dans l'espace entre les deux colonnes et qui ne s'intersectent pas.

Par exemple, voici un $(5, 5)$ -diagramme, un $(5, 3)$ -diagramme, un $(2, 6)$ -diagramme et un $(4, 0)$ -diagramme :

$$d_1 = \begin{array}{c} \overline{\quad} \\ \cup \\ \text{---} \\ \cap \\ \overline{\quad} \end{array}, \quad d_2 = \begin{array}{c} \cup \\ \text{---} \\ \cap \end{array}, \quad d_3 = \begin{array}{c} \text{---} \\ \cup \\ \text{---} \\ \cap \\ \text{---} \end{array}, \quad d_4 = \begin{array}{c} \cup \\ \text{---} \\ \cap \end{array} .$$

Les diagrammes sont considérés à isotopie près, c'est-à-dire qu'on identifie deux diagrammes si l'un peut être déformé vers l'autre de façon continue et en fixant les sites. À ces diagrammes, on associe un peu de terminologie. Une ligne reliant un site du côté gauche à un site du côté droit est appelée un **lien transversal**. Un (m, n) -diagramme dont le nombre de liens transversaux est maximal est appelé **épi** si $m \geq n$ et **mono** si $m \leq n$. Dans le premier cas, tous les sites de droite sont liés à un site de gauche et dans le second, tous les sites de gauche sont liés à un site de droite. L'analogie avec la terminologie pour les morphismes est justifiée par la définition suivante.

Définition 1.3.2. *La catégorie de Temperley–Lieb $\mathcal{TL}^k(\beta)$ est la catégorie \mathbb{k} -linéaire dont*

- *les objets sont les entiers non négatifs $\mathbb{Z}_{\geq 0}$;*
- *pour $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\text{Hom}_{\mathcal{TL}^k(\beta)}(m, n)$ est le \mathbb{k} -module libre ayant pour base l'ensemble des (m, n) -diagrammes ;*
- *la composition de morphismes se fait sur des éléments de la base en concaténant les deux diagrammes, puis en remplaçant chacune des boucles fermées dans le nouveau diagramme par un facteur β .*

Lorsque le contexte est clair, on laisse parfois tomber le \mathbb{k} et le β de la notation et on parle de la catégorie de Temperley–Lieb \mathcal{TL} . La définition de composition de morphismes nécessite un exemple. Si on reprend les diagrammes $d_1 \in \text{Hom}_{\mathcal{TL}}(5, 5)$ et $d_2 \in \text{Hom}_{\mathcal{TL}}(5, 3)$ de l'exemple précédent, la composition $d_2 \circ d_1 \in \text{Hom}_{\mathcal{TL}}(5, 3)$ est donnée par

$$d_1 \cdot d_2 = \begin{array}{c} \overline{\quad} \\ \cup \\ \text{---} \\ \cap \\ \overline{\quad} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \cup \\ \text{---} \\ \cap \end{array} = \begin{array}{c} \overline{\quad} \\ \cup \\ \text{---} \\ \cap \\ \text{---} \\ \cap \\ \overline{\quad} \end{array} = \beta \begin{array}{c} \cup \\ \text{---} \\ \cap \end{array} .$$

Notons que le sens d'écriture de la composition $d_2 \circ d_1$ est l'inverse du sens de la concaténation $d_1 \cdot d_2$; une attention particulière doit être portée sur l'opération que l'on effectue entre

deux diagrammes. Lorsqu'on écrit $d_1 d_2$ en omettant le symbole de l'opération, on comprend toujours qu'on parle de la concaténation et on lit donc les diagrammes de gauche à droite.

Remarque 1.3.3. *On peut vérifier qu'un diagramme mono est un monomorphisme et qu'un diagramme épi est un épimorphisme dans la catégorie \mathcal{TL} .*

Définition 1.3.4. *Soit $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. L'algèbre de Temperley-Lieb $\mathcal{TL}_n^{\mathbb{k}}(\beta)$ est $\text{End}_{\mathcal{TL}^{\mathbb{k}}(\beta)}(n, n)$ avec la composition comme multiplication.*

Comme pour la catégorie, on laisse parfois tomber le \mathbb{k} et le β de la notation et on écrit seulement \mathcal{TL}_n lorsque le contexte est clair ou sans importance. Cette présentation diagrammatique a un pendant algébrique, par générateurs et relations, qui sera également utile.

Définition 1.3.5. *L'algèbre de Temperley-Lieb $\mathcal{TL}_n^{\mathbb{k}}(\beta)$ est la \mathbb{k} -algèbre associative et unifère engendrée par une identité $\mathbf{1}$ et les éléments u_1, u_2, \dots, u_{n-1} avec les relations :*

$$\begin{aligned} u_i^2 &= \beta u_i && \text{pour } i \geq 1, \\ u_i u_{i\pm 1} u_i &= u_i && \text{pour } i, i \pm 1 \in \{1, \dots, n-1\}, \\ u_i u_j &= u_j u_i && \text{si } |i - j| \geq 2. \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

La correspondance entre ces deux présentations est faite à l'aide de l'application

$$u_i \mapsto \begin{array}{c} 1 \text{ ---} \\ \vdots \\ i-1 \text{ ---} \\ \vdots \\ i \text{) } \text{ (} \\ i+1 \text{ ---} \\ \vdots \\ i+2 \text{ ---} \\ \vdots \\ n \text{ ---} \end{array}, \quad \mathbf{1} \mapsto \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \tag{1.3.2}$$

et étendue linéairement. On peut alors vérifier que les relations (1.3.1) sont respectées. En effet,

$$\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \vdots \quad \vdots \\ \text{---} \text{---} \\ \vdots \quad \vdots \\ \text{---} \text{---} \end{array} = \text{) } \text{O} \text{(} = \beta \text{) } \text{(} = \beta u_i, \quad \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} = \text{) } \text{S} \text{(} = u_i,$$

$$u_i u_{i-1} u_i = \text{diagram} = u_i, \quad u_i u_j = \text{diagram} = u_j u_i \text{ si } |i - j| \geq 2.$$

On en déduit que l’algèbre de Temperley–Lieb définie diagrammatiquement ci-haut est isomorphe à un quotient de la version définie par générateurs et relations. On peut ensuite calculer les dimensions des algèbres de chacune des présentations et s’assurer qu’elles coïncident. Les détails de ce calcul se trouvent dans **[RSA14]**.

Théorème 1.3.6. *Les deux présentations de $\text{TL}_n^{\mathbb{k}}(\beta)$ sont isomorphes.*

Corollaire 1.3.7. *La dimension de $\text{TL}_n^{\mathbb{k}}(\beta)$ est $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$, soit le n^e nombre de Catalan.*

La définition diagrammatique a l’avantage de permettre d’exhiber la structure cellulaire de l’algèbre. Pour ce faire, il faut définir les données cellulaires $(\Lambda, M, C, *)$ de la définition 1.2.1. On pose

- $\Lambda = \{k \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq k \leq n, k \equiv n \pmod{2}\}$ muni de l’ordre total induit de \mathbb{Z} ;
- pour tout $k \in \Lambda$, $M(k)$ est l’ensemble des (n, k) -diagrammes épis ;
- l’application $C : M(k) \times M(k) \rightarrow \text{TL}_n^{\mathbb{k}}(\beta)$ prend deux (n, k) -diagrammes épis et forme un (n, n) -diagramme en concaténant le premier diagramme et la réflexion du second par rapport à l’axe vertical, rejoignant les k liens de chacun ;
- l’anti-involution $*$ envoie un diagramme vers sa réflexion par rapport à l’axe vertical et est étendue linéairement.

Prenons l’algèbre de Temperley–Lieb $\text{TL}_3^{\mathbb{k}}(\beta)$ pour illustrer cette structure. Dans ce cas, $\Lambda = \{1 < 3\}$ et

$$M(3) = \left\{ \begin{array}{c} \text{—} \\ \text{—} \\ \text{—} \end{array} \right\}, \quad M(1) = \left\{ \begin{array}{c} \text{—} \\ \text{—} \end{array} \right\}.$$

On peut alors calculer l’image de C pour obtenir la base de $\text{TL}_3^{\mathbb{k}}(\beta)$. Sur $M(3) \times M(3)$,

$$C \left(\begin{array}{c} \text{—} \\ \text{—} \\ \text{—} \end{array}, \begin{array}{c} \text{—} \\ \text{—} \\ \text{—} \end{array} \right) = \begin{array}{c} \text{—} \\ \text{—} \\ \text{—} \end{array},$$

et sur $M(1) \times M(1)$,

$$\begin{aligned}
C \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}, \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) &= \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \text{---} \text{---} = \overline{\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}}, \\
C \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}, \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) &= \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \text{---} \text{---} = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}, \\
C \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}, \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) &= \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \text{---} \text{---} = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}, \\
C \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}, \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) &= \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \text{---} \text{---} = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}.
\end{aligned}$$

Finalement, si on applique l'anti-involution sur un élément de la base, on obtient par exemple

$$C \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}, \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right)^* = \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right)^* = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} = C \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}, \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right)^*,$$

ce qui vérifie la propriété 2 de la définition 1.2.1. La propriété 3 de cette même définition correspond au fait que la multiplication à gauche d'un diagramme d_2 par un diagramme d_1 donne un diagramme $d_1 \cdot d_2$ dont le côté droit est identique au côté droit de d_2 et dont le nombre de lignes transversales est inférieur ou égal au nombre de lignes transversales de d_2 .

Théorème 1.3.8 (Graham–Lehrer [GL96]). *L'algèbre de Temperley–Lieb $\text{TL}_n^k(\beta)$ est cellulaire.*

Ce théorème permettra de continuer d'appliquer les résultats de la section 1.2 à TL_n et en particulier de définir ses modules cellulaires.

On conclut cette section en revenant à la définition par générateurs et relations.

Définition 1.3.9. *Un mot de Temperley–Lieb est une écriture d'un élément de TL_n à partir des générateurs $\{u_i \mid 1 \leq i \leq n-1\}$. C'est donc une expression de la forme*

$$u_{m_1} u_{m_2} u_{m_3} \cdots u_{m_k}, \quad 1 \leq m_i \leq n-1, \text{ pour tout } i \in \{1, 2, \dots, k\},$$

pour un certain $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Par convention, on pose le mot vide comme étant l'identité.

L'écriture en mot d'un élément de TL_n n'est pas unique en général, même lorsqu'on se restreint aux mots de longueur minimale. On se fixe donc une écriture canonique, appelée forme normale de Jones.

Proposition 1.3.10. *Un mot $a \in \mathrm{TL}_n$ peut s'écrire de façon unique sous la forme*

$$a = (u_{m_1} u_{m_1-1} \cdots u_{l_1}) (u_{m_2} u_{m_2-1} \cdots u_{l_2}) \cdots (u_{m_r} u_{m_r-1} \cdots u_{l_r})$$

où $1 \leq m_1 < m_2 < \cdots < m_r \leq n-1$ et $1 \leq l_1 < l_2 < \cdots < l_r \leq n-1$. La taille de ce mot est minimale.

1.3.2. Modules standards

Dans cette section, on définit les modules cellulaires (aussi appelés modules standards) associés aux algèbres de Temperley–Lieb. Pour ce faire, on s'appuie sur la définition 1.2.3. Dans le cas de l'algèbre de Temperley–Lieb, ils seront notés $\mathcal{S}_n(k)$, pour $k \in \Lambda$.

Pour tout $k \in \Lambda$, une base du module cellulaire $\mathcal{S}_n(k)$, qu'on note $\mathfrak{B}_{n,k}$, doit être donnée par un ensemble d'éléments indicés par $M(k)$. Dans le cas présent, $M(k)$ est l'ensemble des (n, k) -diagrammes épis et on prendra directement ces diagrammes comme éléments de la base de $\mathcal{S}_n(k)$. L'action à gauche d'un diagramme de Temperley–Lieb sur un élément de la base est donnée par la concaténation habituelle et étendue linéairement, mais avec une règle supplémentaire : tous les diagrammes obtenus ayant moins de k lignes transversales sont envoyés à 0. Ceci correspond au fait que l'action d'une algèbre cellulaire sur un module cellulaire de la définition 1.2.3 découle de la formule pour la multiplication à gauche d'un élément de la base cellulaire donnée à l'équation (1.2.1), qui est prise modulo les termes d'ordre cellulaire inférieur. Dans le module cellulaire, on ignore donc les termes ayant un nombre inférieur de lignes transversales.

Tout cela mérite un exemple : on se penche sur les modules cellulaires de TL_4 . Dans ce cas, $\Lambda = \{0 < 2 < 4\}$ et il y en a donc trois. Les bases sont données par

$$\mathfrak{B}_{4,0} = \left\{ \begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array} \right\}, \quad \mathfrak{B}_{4,2} = \left\{ \begin{array}{c} \cup \\ \cup \\ \cup \end{array} \right\}, \quad \mathfrak{B}_{4,4} = \left\{ \begin{array}{c} \equiv \\ \equiv \\ \equiv \end{array} \right\}.$$

Voici un exemple de multiplication dans $\mathcal{S}_4(2)$:

$$\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \end{array} \cdot \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 2} \\ + \\ \text{Diagram 3} \end{array} \right) = \begin{array}{c} \text{Diagram 4} \\ + \\ \text{Diagram 5} \end{array} = \beta \begin{array}{c} \text{Diagram 6} \end{array},$$

où le premier terme disparaît, car le nombre de lignes transversales diminue (de 2 à 0).

Il n'est pas difficile de calculer la dimension des modules cellulaires par des arguments combinatoires, qui se trouvent par exemple dans [RSA14]. On obtient, pour $k \in \Lambda$,

$$\dim \mathcal{S}_n(k) = \binom{n}{\frac{n-k}{2}} - \binom{n}{\frac{n-k}{2} - 1}. \quad (1.3.3)$$

Pour le reste de cette section, on prend \mathbb{k} un corps de caractéristique nulle. Pour étudier les modules simples de \mathbf{TL}_n , on a besoin de la forme bilinéaire sur les modules cellulaires. Cette dernière est définie sur les éléments de la base de $\mathcal{S}_n(k)$ de la façon suivante : pour deux (n, k) -diagrammes épis d_1 et d_2 , on effectue le produit $d_1^* \cdot d_2$ et on pose $\langle d_1, d_2 \rangle = 0$ si le (k, k) -diagramme obtenu a moins de k lignes transversales. Sinon, $\langle d_1, d_2 \rangle = \beta^m$, où m est le nombre de boucles fermées dans le nouveau diagramme. Par exemple, on a

$$\begin{aligned} \langle \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \end{array}, \begin{array}{c} \text{Diagram 3} \\ \text{Diagram 4} \end{array} \rangle &= \begin{array}{c} \text{Diagram 5} \\ \text{Diagram 6} \end{array} = \beta, & \langle \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \end{array}, \begin{array}{c} \text{Diagram 7} \\ \text{Diagram 8} \end{array} \rangle &= \begin{array}{c} \text{Diagram 9} \\ \text{Diagram 10} \end{array} = 1, \\ \langle \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \end{array}, \begin{array}{c} \text{Diagram 11} \\ \text{Diagram 12} \end{array} \rangle &= \begin{array}{c} \text{Diagram 13} \\ \text{Diagram 14} \end{array} = 0. \end{aligned}$$

Pour $k \in \Lambda$, on note $\mathcal{D}_n(k) \cong \mathcal{S}_n(k)/\text{rad}(k)$ la coiffe du module standard $\mathcal{S}_n(k)$. La coiffe d'un module est semisimple en général, mais il est possible de montrer que dans ce cas, chaque coiffe est en fait simple. Pour déterminer lorsque les modules standards sont eux-mêmes simples, il suffit de calculer les déterminants des matrices de Gram associées et vérifier s'ils sont non nuls. Sinon, la dimension des modules simples peut être obtenue en calculant les nombres de décomposition des modules standards. Ceux-ci sont obtenus de façon récursive et sont présentés dans [RSA14] pour le cas en caractéristique nulle. Le cas en caractéristique positive se trouve dans [Spe23] et on y trouve également une forme close pour les dimensions des simples. Les cas intéressants apparaissent lorsque l'algèbre \mathbf{TL}_n n'est

pas semisimple. Soit donc $q \in \mathbb{C}^\times$ une racine de l'unité et soit ℓ l'entier positif minimal tel que $q^{2\ell} = 1$. Posons

$$e_{n,k} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \not\equiv k \pmod{2}, \\ -1 & \text{si } \ell \mid \frac{n+k}{2} \text{ et } \ell \nmid k, \\ 1 & \text{si } \ell \mid \frac{n-k}{2}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Proposition 1.3.11 ([Spe23], 9.3). *Les dimensions des modules simples pour $\mathrm{TL}_n^{\mathbb{C}}(q)$ sont données par*

$$\dim \mathcal{D}_n(k) = \sum_{r=0}^{\frac{n-k}{2}} e_{n-2r+1, k+1} \left(\binom{n}{r} - \binom{n}{r-1} \right).$$

Exemple 1.3.12. *On applique les résultats précédents aux modules standards présentés plus haut pour TL_4 . On commence par calculer les matrices de Gram associées. En utilisant les bases déjà introduites, on obtient*

$$\mathfrak{G}_4(0) = \begin{pmatrix} \beta^2 & \beta \\ \beta & \beta^2 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{G}_4(2) = \begin{pmatrix} \beta & 1 & 0 \\ 1 & \beta & 1 \\ 0 & 1 & \beta \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{G}_4(4) = (1),$$

dont les déterminants sont $\det \mathfrak{G}_4(0) = \beta^2(\beta^2 - 1)$, $\det \mathfrak{G}_4(2) = \beta(\beta^2 - 2)$ et $\det \mathfrak{G}_4(4) = 1$. Le premier s'annule si $\beta \in \{0, \pm 1\}$ et le second si $\beta \in \{0, \pm\sqrt{2}\}$. Si on écrit $\beta = \beta_q = q + q^{-1}$ et ℓ l'entier positif minimal tel que $q^{2\ell} = 1$, on a

$$\beta_q = 0 \iff \ell = 2,$$

$$\beta_q = \pm 1 \iff \ell = 3,$$

$$\beta_q = \pm\sqrt{2} \iff \ell = 4.$$

Ainsi, en posant $q \in \mathbb{C}^\times$ tel que $q^{2\ell} = 1$ avec $\ell \in \{2, 3, 4\}$, au moins une des matrices de Gram associées aux modules standards de $\mathrm{TL}_n(\beta_q)$ devient singulière. Dans ce cas, le radical est non nul et la dimension de la coiffe simple est strictement plus petite que celle du standard. Par exemple, si on prend $q = e^{i\pi/3}$, on a $\ell = 3$, $\beta_q = 1$, $\det \mathfrak{G}_4(0) = 0$ et la proposition 1.3.11 donne

$$\dim \mathcal{D}_4(0) = 1 < 2 = \dim \mathcal{S}_4(0).$$

1.3.3. Projecteurs de Jones–Wenzl

Les algèbres de Temperley–Lieb $\mathrm{TL}_n^{\mathbb{C}(v)}(\beta_v)$ possèdent des éléments particulièrement utiles appelés projecteurs de Jones–Wenzl. Ils sont définis récursivement de la façon suivante :

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{1}, \quad \mathbf{p}_i = \mathbf{p}_{i-1} - \frac{[i-1]_v}{[i]_v} \mathbf{p}_{i-1} e_{i-1} \mathbf{p}_{i-1} \quad \text{pour } i = 2, \dots, n. \quad (1.3.4)$$

Pour un paramètre formel v , toutes ces expressions sont bien définies. Toutefois, lorsqu'on spécialise $v \mapsto q$ en une racine de l'unité, il peut arriver que certains q -nombres se trouvant au dénominateur s'annulent.

Les premiers projecteurs sont

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{1}, \quad \mathbf{p}_2 = \mathbf{1} - \frac{1}{[2]_v} e_1, \quad \mathbf{p}_3 = \mathbf{1} - \frac{[2]_v}{[3]_v} (e_1 + e_2) + \frac{1}{[3]_v} (e_1 e_2 + e_2 e_1).$$

On remarque alors que si on spécialise v en une racine de l'unité, ces projecteurs peuvent devenir singuliers. Par exemple, si $v \mapsto \pm i$, \mathbf{p}_2 est singulier parce que $[2]_{\pm i} = 0$, alors que si on spécialise $v \mapsto e^{\pm i\pi/3}$ ou $v \mapsto e^{\pm 2i\pi/3}$, \mathbf{p}_3 est singulier.

On représente les Jones–Wenzl diagrammatiquement par des rectangles blancs recouvrant les liens de diagrammes de Temperley–Lieb. On écrira parfois leur indice à l'intérieur du rectangle. Par exemple,

$$\boxed{2} = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} - \frac{1}{[2]_v} \begin{array}{c} \text{---} \curvearrowright \\ \text{---} \curvearrowleft \end{array}.$$

Quelques-unes de leurs propriétés intéressantes sont données dans la proposition suivante :

Proposition 1.3.13. *Les projecteurs de Jones–Wenzl vérifient*

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_i^2 &= \mathbf{p}_i, & \mathbf{p}_i e_j &= e_j \mathbf{p}_i = 0 \quad (1 \leq j < i), & \mathbf{p}_i e_j &= e_j \mathbf{p}_i \quad (j \geq i + 1), \\ \mathbf{p}_i \mathbf{p}_j &= \mathbf{p}_{\max(i,j)}, & e_i \mathbf{p}_i e_i &= \frac{[i+1]_v}{[i]_v} e_i \mathbf{p}_{i-1}. \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

On peut déduire de ces propriétés un rapide résultat qui sera utile plus tard.

Lemme 1.3.14. *On a, pour tous $0 < m \leq n$,*

$$\begin{array}{c} n-m \{ \\ \vdots \\ \text{---} \\ \vdots \\ m \{ \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \end{array} = \mu_{n,m} \begin{array}{c} \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \end{array},$$

où on pose $\mathfrak{p}_0 = 1$ et $\mu_{n,m} = \frac{[n+1]_v}{[n+1-m]_v}$.

DÉMONSTRATION. On le montre par récurrence. Le cas $n = 1$ découle directement des relations de TL_n . Pour $n > 1$, d'abord, si $m = 1$, on peut utiliser la définition des Jones–Wenzl pour calculer directement

$$\begin{aligned}
\begin{array}{c} \vdots \\ \text{---} \\ \boxed{n} \\ \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} &= \begin{array}{c} \vdots \\ \text{---} \\ \boxed{n-1} \\ \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} - \frac{[n-1]_v}{[n]_v} \begin{array}{c} \vdots \\ \text{---} \\ \boxed{n-1} \\ \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \vdots \\ \text{---} \\ \boxed{n-1} \\ \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \quad (\text{par (1.3.4)}) \\
&= [2]_v \begin{array}{c} \vdots \\ \text{---} \\ \boxed{n-1} \\ \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} - \frac{[n-1]_v}{[n]_v} \begin{array}{c} \vdots \\ \text{---} \\ \boxed{n-1} \\ \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \\
&= \frac{[2]_v [n]_v - [n-1]_v}{[n]_v} \begin{array}{c} \vdots \\ \text{---} \\ \boxed{n-1} \\ \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \\
&= \frac{[n+1]_v}{[n]_v} \begin{array}{c} \vdots \\ \text{---} \\ \boxed{n-1} \\ \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \quad (\text{par la proposition 1.1.2(2)}) \\
&= \mu_{n,1} \begin{array}{c} \vdots \\ \text{---} \\ \boxed{n-1} \\ \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array},
\end{aligned}$$

ce qui correspond bien à la forme voulue. Le cas pour $m > 1$ suit par récurrence en remarquant qu'après m applications du calcul précédent, on obtiendra un certain multiple de \mathfrak{p}_{n-m} par un scalaire $\mu'_{n,m}$ qui vérifie la relation $\mu'_{n,m} = \frac{[n+1]_v}{[n]_v} \mu'_{n-1,m-1}$. L'hypothèse d'induction donne $\mu'_{n-1,m-1} = \mu_{n-1,m-1} = \frac{[n]_v}{[n-m+1]_v}$ et on obtient bien $\mu'_{n,m} = \frac{[n+1]_v}{[n+1-m]_v} = \mu_{n,m}$, tel que désiré. \square

1.4. L'algèbre de Temperley–Lieb à une frontière

La seconde famille d'algèbres étudiée dans ce chapitre est celle des algèbres de Temperley–Lieb à une frontière (parfois appelées algèbres blob). Elles possèdent également une présentation algébrique et une présentation diagrammatique, que l'on donnera toutes les deux.

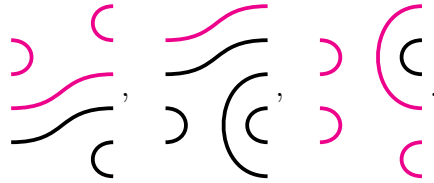
On fixe un anneau \mathbb{k} ainsi que trois éléments $\beta, \beta_0, \beta_1 \in \mathbb{k}$, car l'algèbre de Temperley–Lieb à une frontière dépend de trois paramètres. Comme avant, on utilise la notation $\beta_q = q + q^{-1}$ pour $q \in \mathbb{k}^\times$.

1.4.1. Définition et propriétés

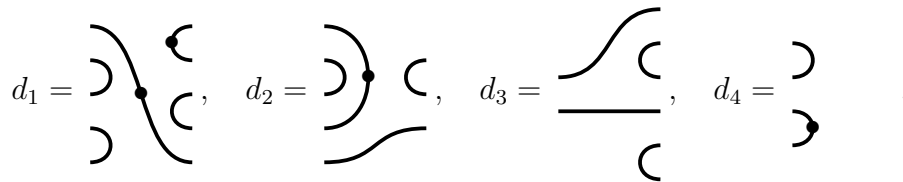
On commence par une présentation diagrammatique de la catégorie de Temperley–Lieb à une frontière. Pour ce faire, on doit définir une variation des diagrammes introduits à la section précédente.

Définition 1.4.1. Soient $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ de même parité. Un (m, n) -diagramme décoré est un (m, n) -diagramme dans lequel certains liens peuvent être marqués d'un (unique) point \bullet . Les liens pouvant être marqués sont ceux qui peuvent « voir » la frontière du haut du diagramme.

Par exemple, dans les $(4, 6)$ -diagrammes suivants, les liens en rose peuvent être marqués d'un point :



Voici un $(5, 5)$ -diagramme, un $(5, 3)$ -diagramme, un $(2, 6)$ -diagramme et un $(4, 0)$ -diagramme décorés :



Le troisième exemple montre qu'il n'est pas nécessaire d'avoir au moins une décoration. On peut alors définir une composition de diagrammes par la concaténation, comme dans le cas de l'algèbre de Temperley–Lieb. Puisque la définition 1.4.1 précise que les diagrammes décorés ont au maximum une décoration sur chaque lien, cette composition devra expliquer comment se débarrasser des multiples points sur un lien, en plus des boucles fermées décorées et des boucles fermées non décorées. Ce sont ces trois situations qui feront apparaître les trois paramètres de la définition. La catégorie suivante est introduite dans [GL03] sous le nom de catégorie de Temperley–Lieb de type B .

Définition 1.4.2. La catégorie de Temperley–Lieb à une frontière $\mathcal{TLB}^{\mathbb{k}}(\beta, \beta_0, \beta_1)$ est la catégorie \mathbb{k} -linéaire dont

- les objets sont les entiers non négatifs $\mathbb{Z}_{\geq 0}$;

- pour $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\text{Hom}_{\mathcal{TLB}^{\mathbb{k}}(\beta, \beta_0, \beta_1)}(m, n)$ est le \mathbb{k} -module libre ayant pour base l'ensemble des (m, n) -diagrammes décorés, qui est différent de 0 si et seulement si m et n sont de même parité;
- la composition de morphismes se fait sur des éléments de la base en concaténant les deux diagrammes, puis en remplaçant chaque ligne doublement décorée par une ligne simplement décorée et un facteur β_0 , chaque boucle fermée (simplement) décorée par un facteur β_1 et chaque boucle fermée non décorée par un facteur β .

Comme avant, lorsque le contexte est clair, on laissera parfois tomber le \mathbb{k} et les β, β_0, β_1 de la notation et on parlera de la catégorie de Temperley–Lieb à une frontière \mathcal{TLB} . La définition de la composition mérite encore une fois un exemple. Si on reprend les diagrammes $d_1 \in \text{Hom}_{\mathcal{TLB}}(5, 5)$ et $d_2 \in \text{Hom}_{\mathcal{TLB}}(5, 3)$ de l'exemple précédent, la composition $d_2 \circ d_1 \in \text{Hom}_{\mathcal{TLB}}(5, 3)$ est donnée par

$$d_1 \cdot d_2 = \text{diagram} = \beta_0 \text{diagram} = \beta_1 \beta_0 \text{diagram}.$$

Définition 1.4.3. Soit $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. L'algèbre de Temperley–Lieb à une frontière $\text{TLb}_n^{\mathbb{k}}(\beta, \beta_0, \beta_1)$ est $\text{End}_{\mathcal{TLB}^{\mathbb{k}}(\beta, \beta_0, \beta_1)}(n)$ avec la composition comme multiplication.

Cette présentation diagrammatique de TLb_n a elle aussi un pendant algébrique, par générateurs et relations. La définition suivante est d'abord apparue dans [MS93], puis dans [MDRR15] pour la version à 3 paramètres qu'on utilise.

Définition 1.4.4. L'algèbre de Temperley–Lieb à une frontière $\text{TLb}_n^{\mathbb{k}}(\beta, \beta_0, \beta_1)$ est la \mathbb{k} -algèbre associative et unifère engendrée par une identité $\mathbf{1}$ et les éléments $e_0, e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$ avec les relations :

$$\begin{aligned}
e_i^2 &= \beta e_i && \text{pour } i \geq 1, \\
e_i e_{i\pm 1} e_i &= e_i && \text{pour } i, i \pm 1 \in \{1, \dots, n-1\}, \\
e_i e_j &= e_j e_i && \text{si } |i - j| \geq 2, \\
e_0^2 &= \beta_0 e_0, \\
e_1 e_0 e_1 &= \beta_1 e_1.
\end{aligned} \tag{1.4.1}$$

On note que les générateurs e_1, e_2, \dots, e_{n-1} se comportent exactement comme les générateurs u_1, u_2, \dots, u_{n-1} de l'algèbre de Temperley–Lieb. En particulier, on a une inclusion

définie sur les générateurs par

$$\mathrm{TL}_n(\beta) \rightarrow \mathrm{TLb}_n(\beta, \beta_0, \beta_1)$$

$$u_i \mapsto e_i$$

et étendue linéairement. La correspondance entre la présentation par générateurs et relations et la présentation diagrammatique de TLb_n est faite en envoyant les générateurs $\mathbf{1}$ et e_1, \dots, e_{n-1} vers les mêmes diagrammes que dans le cas de Temperley–Lieb, puis en posant

$$e_0 \mapsto \begin{array}{c} \text{---}\bullet\text{---} \\ \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \quad (1.4.2)$$

On peut alors vérifier que les relations (1.4.1) sont respectées. Pour les deux dernières, on a

$$e_0^2 = \begin{array}{c} \text{---}\bullet\text{---}\bullet\text{---} \\ \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} = \beta_0 \begin{array}{c} \text{---}\bullet\text{---} \\ \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} = \beta_0 e_0 \quad \text{et} \quad e_1 e_0 e_1 = \begin{array}{c} \text{---}\text{---}\text{---} \\ \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} = \beta_1 \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} = \beta_1 e_1.$$

Il est ensuite possible de vérifier que les deux présentations de TLb_n sont isomorphes. Les détails de cette preuve se trouvent dans [HT18]. On note les résultats ici.

Théorème 1.4.5. *Les deux présentations de $\mathrm{TLb}_n^k(\beta, \beta_0, \beta_1)$ sont isomorphes.*

Corollaire 1.4.6. *La dimension de $\mathrm{TLb}_n^k(\beta, \beta_0, \beta_1)$ est $\binom{2n}{n}$.*

La présentation diagrammatique permet encore d'exhiber la structure cellulaire de l'algèbre. Les données cellulaires $(\Lambda, M, C, *)$ sont

- $\Lambda = \{k \in \mathbb{Z} \mid -n \leq k \leq n, k \equiv n \pmod{2}\}$ muni de l'ordre total $k_1 \prec k_2$ si $|k_1| < |k_2|$ ou $|k_1| = |k_2|$ et $k_1 < k_2$;
- pour tout $k \in \Lambda$, $M(k)$ est l'ensemble des $(n, |k|)$ -diagrammes épis tels que le lien transversal supérieur est décoré si et seulement si $k < 0$, les autres liens décorables pouvant être décorés ou non;
- l'application $C : M(k) \times M(k) \rightarrow \mathrm{TLb}_n^k(\beta, \beta_0, \beta_1)$ recolle deux diagrammes de la même façon que pour TL_n , mais sans dédoubler les décorations sur les liens transversaux;
- l'anti-involution $*$ est la même que pour TL_n .

Par exemple, si $n = 4$, on a $\Lambda = \{0 \prec -2 \prec 2 \prec -4 \prec 4\}$ et la fonction C pour $k = -2$ donne

$$C \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}, \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}.$$

Proposition 1.4.7 (Houde-Therrien [HT18]). *L'algèbre de Temperley–Lieb à une frontière $\text{TLb}_n^k(\beta, \beta_0, \beta_1)$ est cellulaire.*

On conclut cette section par un résultat analogue à la proposition 1.3.10, qui donne une écriture canonique pour les mots de Temperley–Lieb à une frontière.

Proposition 1.4.8 (Houde-Therrien [HT18]). *Un mot $a \in \text{TLb}_n$ peut s'écrire de façon unique sous la forme*

$$a = (e_{m_1} e_{m_1-1} \cdots e_0)(e_{m_2} e_{m_2-1} \cdots e_0) \cdots (e_{m_k} e_{m_k-1} \cdots e_0)b,$$

où $0 \leq k \leq n$, $b = (e_{m_{k+1}} e_{m_{k+1}-1} \cdots e_{l_1}) \cdots (e_{m_{k+r}} e_{m_{k+r}-1} \cdots e_{l_r})$ est un mot écrit dans la forme normale de Jones de TL_n et $0 \leq m_1 < m_2 < \cdots < m_{k+1}$.

Dans [MS93], les auteurs introduisent un nouveau générateur $f_0 = \beta_0 - e_0$ qui respecte les relations

$$f_0^2 = \beta_0 f_0 \quad \text{et} \quad e_1 f_0 e_1 = (\beta_0 \beta - \beta_1) e_1.$$

Ce nouveau générateur peut être représenté diagrammatiquement en ajoutant un \square plutôt qu'un \bullet comme décoration :

$$f_0 \mapsto \begin{array}{c} \text{---} \square \text{---} \\ \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}.$$

Proposition 1.4.9. *Les éléments $\mathbf{1}, f_0, e_1, \dots, e_{n-1}$ engendrent le même espace que les éléments $\mathbf{1}, e_0, e_1, \dots, e_{n-1}$ et le morphisme qui envoie f_0 vers e_0 et fixe tous les autres générateurs induit un isomorphisme*

$$\text{TLb}_n(\beta, \beta_0, \beta_1) \xrightarrow{\sim} \text{TLb}_n(\beta, \beta_0, \beta_0 \beta - \beta_1).$$

DÉMONSTRATION. Par définition de f_0 , il est clair que les espaces engendrés sont les mêmes. Une simple vérification des relations permet de conclure que c'est bel et bien un isomorphisme d'algèbres. \square

Il suit alors qu'une forme normale de Jones modifiée pour les mots de TLb_n peut être introduite en remplaçant les générateurs e_0 par des f_0 .

Proposition 1.4.10. *Un mot $a \in \text{TLb}_n$ peut s'écrire de façon unique sous la forme*

$$a = (e_{m_1} e_{m_1-1} \cdots e_1 f_0)(e_{m_2} e_{m_2-1} \cdots e_1 f_0) \cdots (e_{m_k} e_{m_k-1} \cdots e_1 f_0) b,$$

où $0 \leq k \leq n$, $b = (e_{m_{k+1}} e_{m_{k+1}-1} \cdots e_{l_1}) \cdots (e_{m_{k+r}} e_{m_{k+r}-1} \cdots e_{l_r})$ est un mot écrit dans la forme normale de Jones de TL_n et $0 \leq m_1 < m_2 < \cdots < m_{k+1}$.

1.4.2. Modules standards

Les modules cellulaires associés aux algèbres de Temperley–Lieb à une frontière sont similaires à ceux pour l'algèbre de Temperley–Lieb, mais il faut en plus s'occuper des décorations sur les liens. Cela sera fait en suivant la structure cellulaire introduite à la section précédente.

Pour tout $k \in \Lambda$, une base du module cellulaire $\widehat{\mathcal{S}}_n(k)$, qu'on note $\widehat{\mathcal{B}}_{n,k}$, est donnée par l'ensemble des diagrammes de $M(k)$. L'action à gauche d'un diagramme de Temperley–Lieb à une frontière sur un élément de la base est donnée par la concaténation habituelle et étendue linéairement, mais avec deux règles supplémentaires :

- comme pour les cellulaires de TL_n , tous les diagrammes obtenus ayant moins de k lignes transversales sont envoyés à 0 ;
- si $k > 0$, tous les diagrammes obtenus ayant une décoration sur le lien transversal supérieur sont envoyés à 0.

Encore une fois, ces règles suivent du fait que l'action de TLb_n découle des règles de multiplication modulo les termes d'ordre cellulaire inférieur.

En guise d'exemple, on peut se pencher sur les modules cellulaires de TLb_4 , pour contraster la situation avec celle de TL_4 . Dans ce cas, on rappelle que $\Lambda = \{0 \prec -2 \prec 2 \prec -4 \prec 4\}$ et il y a donc 5 modules cellulaires. Les bases sont données par

$$\widehat{\mathcal{B}}_{4,0} = \left\{ \begin{array}{c} \text{)} \\ \text{)} \\ \text{)} \\ \text{)} \\ \text{)} \\ \text{)} \end{array} \right\},$$

$$\widehat{\mathcal{B}}_{4,-2} = \left\{ \begin{array}{c} \text{)} \\ \text{)} \\ \text{)} \\ \text{)} \end{array} \right\}, \quad \widehat{\mathcal{B}}_{4,2} = \left\{ \begin{array}{c} \text{)} \\ \text{)} \\ \text{)} \\ \text{)} \end{array} \right\},$$

$$\widehat{\mathfrak{B}}_{4,-4} = \left\{ \begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\}, \quad \widehat{\mathfrak{B}}_{4,4} = \left\{ \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\}.$$

Voici un exemple de multiplication dans $\widehat{\mathcal{S}}_4(2)$:

$$\begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \cdot \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) = \begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} = \beta_1 \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array},$$

où le premier terme disparaît, car le lien transversal supérieur du diagramme obtenu est décoré.

La dimension des modules cellulaires est donnée, pour $k \in \Lambda$, par

$$\dim \widehat{\mathcal{S}}_n(k) = \binom{n}{\frac{n-|k|}{2}}. \quad (1.4.3)$$

Les détails de ce calcul peuvent être trouvés dans [HT18].

1.4.3. Projecteurs de Jones–Wenzl

On introduit des idempotents analogues à ceux donnés pour TL_n , mais pour l'algèbre de Temperley–Lieb à une frontière. Pour toute cette section, on travaille avec des paramètres $\beta = \beta_v = v + v^{-1}, \beta_0, \beta_1$ génériques, c'est-à-dire qu'on prend par exemple $\mathbb{k} = \mathbb{C}(v, \beta_0, \beta_1)$ comme corps sous-jacent. Avant de parler des véritables projecteurs de Jones–Wenzl, on introduit d'abord les préidempotents de Jones–Wenzl (aussi appelés projecteurs de Jones–Wenzl généralisés dans [LL20]). Ce sont des idempotents à renormalisation près, mais qui sont toujours bien définis peu importe la spécialisation de v, β_0, β_1 . Pour ce faire, on aura besoin des coefficients

$$\delta_j = [j]_v \beta_1 - [j-1]_v \beta_0, \quad p_j = \prod_{i=0}^{j-1} (-1)^i \delta_i,$$

$$c_1^j = (-1)^{j-1} \delta_{j-1}, \quad c_2^j = \prod_{i=0}^{j-3} \frac{1}{(-1)^i \delta_i}.$$

Les préidempotents de Jones–Wenzl de type $\widehat{\mathcal{S}}_n(-n)$ pour TLb_n sont alors définis récursivement de la façon suivante :

$$\widehat{\mathfrak{p}}_1^- = e_0, \quad \widehat{\mathfrak{p}}_i^- = c_1^i \widehat{\mathfrak{p}}_{i-1}^- + c_2^i \widehat{\mathfrak{p}}_{i-1}^- e_{i-1} \widehat{\mathfrak{p}}_{i-1}^- \quad \text{pour } i = 2, \dots, n. \quad (1.4.4)$$

Il existe également des préidempotents $\widehat{\mathfrak{p}}_i^+$ de type $\widehat{\mathcal{S}}_n(n)$, définis par la même relation de récurrence, mais avec la condition initiale $\widehat{\mathfrak{p}}_1^+ = \beta_2 \mathbf{1} - e_0$. Leur étude peut être ramenée à celle des préidempotents de type $\widehat{\mathcal{S}}_n(-n)$, car ils correspondent à de tels préidempotents pour l'algèbre de Temperley–Lieb à une frontière $\mathrm{TLb}_n(\beta, \beta_0, \beta\beta_0 - \beta_1)$, qui est isomorphe à $\mathrm{TLb}_n(\beta, \beta_0, \beta_1)$. Ce ne sont pas ces types de préidempotents dont on aura besoin, on se concentre donc sur l'autre type pour la suite. Leurs principales propriétés sont rassemblées dans la proposition suivante et démontrées dans [LL20].

Proposition 1.4.11. *Les préidempotents de Jones–Wenzl vérifient*

$$\begin{aligned} (\widehat{\mathfrak{p}}_i^-)^2 &= p_i \widehat{\mathfrak{p}}_i^-, & \widehat{\mathfrak{p}}_i^- e_j &= e_j \widehat{\mathfrak{p}}_i^- = 0 \quad (1 \leq j < i), & \widehat{\mathfrak{p}}_i^- e_j &= e_j \widehat{\mathfrak{p}}_i^- \quad (j \geq i + 1), \\ e_0 \widehat{\mathfrak{p}}_i^- &= \widehat{\mathfrak{p}}_i^- e_0 = \beta_0 \widehat{\mathfrak{p}}_i^-, & \widehat{\mathfrak{p}}_i^- \widehat{\mathfrak{p}}_j^- &= p_{\min(i,j)} \widehat{\mathfrak{p}}_{\max(i,j)}^-, & e_i \widehat{\mathfrak{p}}_i^- e_i &= -c_1^{i+1} \widehat{\mathfrak{p}}_{i-1}^- e_i. \end{aligned} \tag{1.4.5}$$

En particulier, les éléments $\frac{1}{p_i} \widehat{\mathfrak{p}}_i^-$, lorsque bien définis, sont des idempotents. Il est aussi démontré dans [LL20] que les éléments $\widehat{\mathfrak{p}}_i^-$ sont non singuliers, c'est-à-dire qu'ils peuvent être évalués en n'importe quelle valeur de β, β_0, β_1 .

Chapitre 2

Le groupe quantique $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ et sa théorie de la représentation

Ce deuxième chapitre voit apparaître une autre algèbre qui jouera un rôle fondamental dans ce mémoire, c'est-à-dire le groupe quantique $U_q(\mathfrak{sl}_2)$.

Après une rapide introduction au langage des algèbres de Hopf, dont les groupes quantiques sont des exemples, on plonge directement dans la définition de la forme rationnelle $U_v(\mathfrak{sl}_2)$ et de l'extension de Lusztig $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$ en suivant principalement [CP95]. C'est à travers l'extension de Lusztig $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$ que se manifesterà la plupart du temps le groupe quantique $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ dans les chapitres subséquents.

On introduit ensuite les matrices R pour $U_v(\mathfrak{sl}_2)$ et $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$, des objets permettant de définir des morphismes de représentations qui seront des éléments clés des chapitres 3 et 4.

On investigate également la théorie de la représentation de $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$ en q une racine de l'unité. Ceci est fait en présentant trois familles importantes de modules.

Le chapitre se conclut en traitant de la dualité de Schur–Weyl, qui fait intervenir simultanément le groupe quantique $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ et les algèbres de Temperley–Lieb introduites au chapitre 1. C'est autour de ce résultat fondamental et de ses possibles généralisations que s'articuleront les chapitres qui suivent et les questions auxquelles ils cherchent à répondre.

2.1. Algèbres de Hopf

Les algèbres de Hopf sur un anneau commutatif \mathbb{k} sont un type particulier de \mathbb{k} -algèbres ayant également une structure de coalgèbre qui est compatible. Elles sont particulièrement

adaptées pour étudier des produits tensoriels de représentations, sur lesquels on se penchera tout au long des prochains chapitres. On en donne rapidement une définition pour permettre de fixer le vocabulaire.

2.1.1. Définition

On commence par donner une définition de \mathbb{k} -algèbre, reformulée en termes de diagrammes commutatifs. Cette définition rendra plus claire celle, duale, de coalgèbre.

Définition 2.1.1. *Soit \mathbb{k} un anneau commutatif. Une \mathbb{k} -algèbre est un \mathbb{k} -module \mathcal{A} muni d'applications \mathbb{k} -linéaires $\mu : \mathcal{A} \otimes_{\mathbb{k}} \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ (la multiplication) et $\iota : \mathbb{k} \rightarrow \mathcal{A}$ (l'unité) telles que les diagrammes suivants commutent :*

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{A} \otimes \mathbb{k} & \xrightarrow{\text{id} \otimes \iota} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} & & \mathbb{k} \otimes \mathcal{A} & \xrightarrow{\iota \otimes \text{id}} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} & & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} & \xrightarrow{\mu \otimes \text{id}} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \\ \cong \downarrow & & \downarrow \mu & & \cong \downarrow & & \downarrow \mu & & \text{id} \otimes \mu \downarrow & & \downarrow \mu \\ \mathcal{A} & \xrightarrow{\text{id}} & \mathcal{A} & & \mathcal{A} & \xrightarrow{\text{id}} & \mathcal{A} & & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{A} \end{array} \cdot$$

Les deux premiers diagrammes donnent les propriétés de l'unité de l'algèbre, alors que le troisième s'assure que la multiplication est associative. La propriété de commutativité d'une algèbre peut également s'exprimer sous forme de diagramme commutatif, soit

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} & \xrightarrow{\tau} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \\ \mu \downarrow & & \downarrow \mu \\ \mathcal{A} & \xrightarrow{\text{id}} & \mathcal{A} \end{array} \cdot$$

Ici, $\tau : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ est l'application linéaire définie sur les tenseurs élémentaires par $\tau(a_1 \otimes a_2) = a_2 \otimes a_1$. En renversant tous les diagrammes ci-haut, on peut alors obtenir les définitions de coalgèbre et de cocommutativité.

Définition 2.1.2. *Soit \mathbb{k} un anneau commutatif. Une \mathbb{k} -coalgèbre est un \mathbb{k} -module \mathcal{A} muni d'applications \mathbb{k} -linéaires $\Delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes_{\mathbb{k}} \mathcal{A}$ (la comultiplication, ou le coproduit) et $\epsilon : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{k}$ (la counité) telles que les diagrammes suivants commutent :*

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{A} \otimes \mathbb{k} & \xleftarrow{\text{id} \otimes \epsilon} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} & & \mathbb{k} \otimes \mathcal{A} & \xleftarrow{\epsilon \otimes \text{id}} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} & & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} & \xleftarrow{\Delta \otimes \text{id}} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \\ \cong \uparrow & & \uparrow \Delta & & \cong \uparrow & & \uparrow \Delta & & \text{id} \otimes \Delta \uparrow & & \uparrow \Delta \\ \mathcal{A} & \xleftarrow{\text{id}} & \mathcal{A} & & \mathcal{A} & \xleftarrow{\text{id}} & \mathcal{A} & & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} & \xleftarrow{\Delta} & \mathcal{A} \end{array} \cdot$$

Les deux premiers diagrammes donnent les propriétés de la counité d'une coalgèbre, alors que le troisième s'assure de la coassociativité du coproduit. La notion duale de la

commutativité, la cocommutativité, s'exprime par la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} & \xleftarrow{\tau} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \\ \Delta \uparrow & & \uparrow \Delta \\ \mathcal{A} & \xleftarrow{\text{id}} & \mathcal{A} \end{array} \quad .$$

Définition 2.1.3. *Un morphisme de coalgèbres est une application \mathbb{k} -linéaire $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ qui préserve la comultiplication et la counité, c'est-à-dire que $(\phi \otimes \phi) \circ \Delta^{\mathcal{A}} = \Delta^{\mathcal{B}} \circ \phi$ et $\epsilon^{\mathcal{B}} \circ \phi = \epsilon^{\mathcal{A}}$.*

Avec tout ceci, on peut définir la notion d'algèbre de Hopf.

Définition 2.1.4. *Soit \mathbb{k} un anneau commutatif. Une \mathbb{k} -algèbre de Hopf est un \mathbb{k} -module \mathcal{A} tel que*

- \mathcal{A} est une \mathbb{k} -algèbre et une \mathbb{k} -coalgèbre ;
- la comultiplication Δ et la counité ϵ sont des morphismes d'algèbres ;
- la multiplication μ et l'unité ι sont des morphismes de coalgèbres ;
- \mathcal{A} est muni d'une application \mathbb{k} -linéaire bijective $S : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ (l'antipode) telle que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} & \xrightarrow{S \otimes \text{id}} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} & \quad & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} & \xrightarrow{\text{id} \otimes S} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \\ \Delta \uparrow & & \downarrow \mu & & \Delta \uparrow & & \downarrow \mu \\ \mathcal{A} & \xrightarrow{\iota \otimes \epsilon} & \mathcal{A} & & \mathcal{A} & \xrightarrow{\iota \otimes \epsilon} & \mathcal{A} \end{array} \quad .$$

On n'aura pas besoin d'en savoir bien plus à propos des algèbres de Hopf en général pour le reste de ce mémoire. La partie qui nous sera la plus utile de la définition 2.1.4 est l'existence du morphisme d'algèbres $\Delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ donné par le coproduit. C'est ce qui permet de définir, de façon très naturelle, une structure de \mathcal{A} -module à gauche au produit tensoriel $M \otimes_{\mathbb{k}} N$ de deux \mathcal{A} -modules à gauche M et N . En effet, le \mathbb{k} -module $M \otimes_{\mathbb{k}} N$ possède une structure de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ -module à gauche où l'action est donnée par

$$(a_1 \otimes a_2)(m \otimes n) = a_1 m \otimes a_2 n, \quad a_1, a_2 \in \mathcal{A}, m \in M, n \in N.$$

On peut alors définir une structure de \mathcal{A} -module à gauche en posant

$$a \cdot (m \otimes n) := \Delta(a)(m \otimes n), \quad a \in \mathcal{A}, m \in M, n \in N.$$

2.1.2. Exemples

Plusieurs constructions naturelles en théorie de la représentation s'avèrent être des exemples d'algèbres de Hopf.

Exemple 2.1.5. Soit G un groupe fini. Alors, son algèbre de groupe $\mathbb{k}[G]$ est une \mathbb{k} -algèbre de Hopf en définissant, pour $g \in G$,

- la multiplication par celle induite de l'opération du groupe ;
- l'unité par $\iota(1) = e$, où e est l'identité de G ;
- le coproduit par $\Delta(g) = g \otimes g$;
- la counité par $\epsilon(e) = 1$ et $\epsilon(g) = 0$ pour tout $g \neq e$;
- l'antipode par $S(g) = g^{-1}$,

puis étendus linéairement. Cette définition du coproduit mène à la structure habituelle du produit tensoriel de représentations des groupes finis.

Exemple 2.1.6. Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie sur \mathbb{k} . Alors, son algèbre universelle enveloppante $U(\mathfrak{g})$ est une \mathbb{k} -algèbre de Hopf en définissant, pour $x \in \mathfrak{g}$,

- la multiplication et l'unité par celles induites de la construction de $U(\mathfrak{g})$;
- le coproduit par $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$;
- la counité par $\epsilon(x) = 0$ (et $\epsilon(1) = 1$) ;
- l'antipode par $S(x) = -x$,

étendus en morphismes d'algèbres sur tout $U(\mathfrak{g})$ de la façon évidente.

Ces deux exemples sont des \mathbb{k} -algèbres de Hopf cocommutatives. Ceci a pour conséquence que les produits tensoriels de $\mathbb{k}[G]$ - ou de $U(\mathfrak{g})$ -modules $M \otimes N$ sont naturellement isomorphes à leur *flip* $N \otimes M$, l'isomorphisme étant donné par

$$\tau : M \otimes N \xrightarrow{\sim} N \otimes M : m \otimes n \mapsto n \otimes m. \quad (2.1.1)$$

Comme on le verra, les groupes quantiques sont des exemples d'algèbres de Hopf non cocommutatives. Ils sont toutefois *presque cocommutatifs*, cette expression ayant un sens précis. Cela a d'importantes conséquences sur leur catégorie de représentations.

2.1.3. Catégories monoïdales tressées

Dans cette section, on introduit du vocabulaire à propos de certains types de catégories, dont les catégories de représentations de groupes quantiques seront des exemples. Bien qu'elles soient également définies dans [CP95], on suit la présentation de [EGNO16], dont la terminologie est plus moderne et standard dans la littérature.

Définition 2.1.7. Une catégorie monoïdale est un quintuplet $(\mathcal{C}, \otimes, a, \mathbf{1}, \iota)$ où \mathcal{C} est une catégorie, $\otimes : \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ est un bifoncteur, $a : (- \otimes -) \otimes - \xrightarrow{\sim} - \otimes (- \otimes -)$ est un isomorphisme fonctoriel,

$$a_{X,Y,Z} : (X \otimes Y) \otimes Z \xrightarrow{\sim} X \otimes (Y \otimes Z), \quad \text{pour } X, Y, Z \in \text{Ob } \mathcal{C},$$

appelé isomorphisme d'associativité, $\mathbf{1} \in \text{Ob } \mathcal{C}$ et $\iota : \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \xrightarrow{\sim} \mathbf{1}$ est un isomorphisme, tel que

- pour tous $W, X, Y, Z \in \text{Ob } \mathcal{C}$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 & ((W \otimes X) \otimes Y) \otimes Z & \\
 a_{W,X,Y} \otimes \text{id}_Z \swarrow & & \searrow a_{W \otimes X, Y, Z} \\
 (W \otimes (X \otimes Y)) \otimes Z & & (W \otimes X) \otimes (Y \otimes Z) \\
 a_{W, X \otimes Y, Z} \searrow & & \swarrow a_{W, X, Y \otimes Z} \\
 W \otimes ((X \otimes Y) \otimes Z) & \xrightarrow{\text{id}_W \otimes a_{X, Y, Z}} & W \otimes (X \otimes (Y \otimes Z))
 \end{array} \tag{2.1.2}$$

commute (cette condition est appelée l'axiome du pentagone);

- les foncteurs

$$L_{\mathbf{1}} : X \mapsto \mathbf{1} \otimes X \quad \text{et} \quad R_{\mathbf{1}} : X \mapsto X \otimes \mathbf{1}$$

sont des autoéquivalences de \mathcal{C} .

Cette définition laisse beaucoup de flexibilité en permettant au produit tensoriel de n'être associatif qu'à isomorphisme près. Dans la pratique, on voudra souvent considérer des catégories où les objets $(X \otimes Y) \otimes Z$ et $X \otimes (Y \otimes Z)$ sont égaux, pas seulement isomorphes. Ceci revient à prendre tous les morphismes $a_{X,Y,Z}$ comme étant l'identité. Une telle catégorie monoïdale est appelée **stricte**.

Une catégorie monoïdale peut être vue comme la catégorification de la structure de monoïde. Si on tente d'imposer en plus la commutativité, on a besoin de nouveaux isomorphismes fonctoriels.

Définition 2.1.8. Un tressage (ou isomorphisme de commutativité) sur une catégorie monoïdale \mathcal{C} est un isomorphisme fonctoriel $c_{X,Y} : X \otimes Y \xrightarrow{\sim} Y \otimes X$, pour tous objets X, Y de

\mathcal{C} , tel que les diagrammes

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X \otimes (Y \otimes Z) & \xrightarrow{c_{X,Y \otimes Z}} & (Y \otimes Z) \otimes X \\
 & \nearrow^{a_{X,Y,Z}} & & & \searrow^{a_{Y,Z,X}} \\
 (X \otimes Y) \otimes Z & & & & & Y \otimes (Z \otimes X) \quad (2.1.3) \\
 & \searrow_{c_{X,Y} \otimes \text{id}_Z} & & & \nearrow_{\text{id}_Y \otimes c_{X,Z}} \\
 & & (Y \otimes X) \otimes Z & \xrightarrow{a_{Y,X,Z}} & Y \otimes (X \otimes Z)
 \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccccc}
 & & (X \otimes Y) \otimes Z & \xrightarrow{c_{X \otimes Y,Z}} & Z \otimes (X \otimes Y) \\
 & \nearrow^{a_{X,Y,Z}^{-1}} & & & \searrow^{a_{Z,X,Y}^{-1}} \\
 X \otimes (Y \otimes Z) & & & & & (Z \otimes X) \otimes Y \quad (2.1.4) \\
 & \searrow_{\text{id}_X \otimes c_{Y,Z}} & & & \nearrow_{c_{X,Z} \otimes \text{id}_Y} \\
 & & X \otimes (Z \otimes Y) & \xrightarrow{a_{X,Z,Y}^{-1}} & (X \otimes Z) \otimes Y
 \end{array}$$

commutent pour tous $X, Y, Z \in \text{Ob } \mathcal{C}$.

Définition 2.1.9. Une catégorie monoïdale tressée est une catégorie monoïdale munie d'un tressage.

Le nom des isomorphismes de commutativité fait évidemment penser au groupe de tresses. Le lien entre les deux sera approfondi à la section 2.5. La proposition suivante montre une relation satisfaite par les tressages qui y sera utile.

Proposition 2.1.10. Soit \mathcal{C} une catégorie monoïdale tressée stricte avec tressage c . Alors, pour tous $X, Y, Z \in \text{Ob } \mathcal{C}$, le tressage satisfait l'équation de Yang–Baxter

$$(c_{Y,Z} \otimes \text{id}_X) \circ (\text{id}_Y \otimes c_{X,Z}) \circ (c_{X,Y} \otimes \text{id}_Z) = (\text{id}_Z \otimes c_{X,Y}) \circ (c_{X,Z} \otimes \text{id}_Y) \circ (\text{id}_X \otimes c_{Y,Z}). \quad (2.1.5)$$

DÉMONSTRATION. Si \mathcal{C} est stricte, les isomorphismes d'associativité sont tous l'identité et les deux diagrammes commutatifs de la définition 2.1.8 se simplifient énormément. Le diagramme

(2.1.4) appliqué à $X \otimes Y \otimes Z$ et le (2.1.3) appliqué à $Y \otimes Z \otimes X$ donnent respectivement

$$\begin{array}{ccc}
 & X \otimes Y \otimes Z & \\
 \text{id}_X \otimes c_{Y,Z} \swarrow & \downarrow c_{X \otimes Y, Z} & \\
 X \otimes Z \otimes Y & & \\
 c_{X,Z} \otimes \text{id}_Y \searrow & & \\
 & Z \otimes X \otimes Y &
 \end{array}
 \quad \text{et} \quad
 \begin{array}{ccc}
 & Y \otimes X \otimes Z & \\
 \downarrow c_{Y \otimes X, Z} & & \text{id}_Y \otimes c_{X,Z} \searrow \\
 & & Y \otimes Z \otimes X \\
 & & \swarrow c_{Z,Y} \otimes \text{id}_X \\
 & Z \otimes Y \otimes X &
 \end{array} . \quad (2.1.6)$$

On peut alors former un diagramme en liant ces deux triangles pour obtenir

$$\begin{array}{ccccc}
 & X \otimes Y \otimes Z & \xrightarrow{c_{X,Y} \otimes \text{id}_Z} & Y \otimes X \otimes Z & \\
 \text{id}_X \otimes c_{Y,Z} \swarrow & \downarrow c_{X \otimes Y, Z} & & \downarrow c_{Y \otimes X, Z} & \text{id}_Y \otimes c_{X,Z} \searrow \\
 X \otimes Z \otimes Y & & & & Y \otimes Z \otimes X \\
 c_{X,Z} \otimes \text{id}_Y \searrow & & & & \swarrow c_{Y,Z} \otimes \text{id}_X \\
 & Z \otimes X \otimes Y & \xrightarrow{\text{id}_Z \otimes c_{X,Y}} & Z \otimes Y \otimes X &
 \end{array} , \quad (2.1.7)$$

où le carré du centre commute, car c est fonctoriel. En effet, notons F et G les bifoncteurs de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ dans \mathcal{C} définis sur les objets $A, B \in \text{Ob } \mathcal{C}$ par

$$F(A, B) = A \otimes B \quad \text{et} \quad G(A, B) = B \otimes A$$

et sur les morphismes de la façon évidente. Alors, $c_{-, -}$ est un isomorphisme fonctoriel de F vers G . En appliquant ceci aux objets $(X \otimes Y, Z)$ et $(Y \otimes X, Z)$ avec le morphisme $(c_{X,Y}, \text{id}_Z)$ et en notant que $F(c_{X,Y}, \text{id}_Z) = c_{X,Y} \otimes \text{id}_Z$ et $G(c_{X,Y}, \text{id}_Z) = \text{id}_Z \otimes c_{X,Y}$, on obtient

$$\begin{array}{ccc}
 F(X \otimes Y, Z) = X \otimes Y \otimes Z & \xrightarrow{c_{X,Y} \otimes \text{id}_Z} & F(Y \otimes X, Z) = Y \otimes X \otimes Z \\
 \downarrow c_{X \otimes Y, Z} & & \downarrow c_{Y \otimes X, Z} \\
 G(X \otimes Y, Z) = Z \otimes X \otimes Y & \xrightarrow{\text{id}_Z \otimes c_{X,Y}} & G(Y \otimes X, Z) = Z \otimes Y \otimes X
 \end{array} ,$$

qui est le carré du centre voulu. Le diagramme complet (2.1.7) est donc commutatif et les chemins le long du contour donnent l'égalité de l'énoncé. \square

2.2. Définition de $U_q(\mathfrak{sl}_2)$

On définit le groupe quantique $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ en suivant [CP95]. C'est une \mathbb{k} -algèbre de Hopf qui sera définie et notée différemment selon l'anneau \mathbb{k} et la valeur de son paramètre q .

2.2.1. Formes rationnelle et intégrale restreinte

Pour cette section, on prend v une indéterminée et on pose $\mathcal{Z} = \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$.

Définition 2.2.1. *La forme rationnelle $U_v(\mathfrak{sl}_2)$ est la $\mathbb{Q}(v)$ -algèbre engendrée par les éléments $\{E, F, K^{\pm 1}, \mathbf{1}\}$ avec les relations*

$$KK^{-1} = K^{-1}K = \mathbf{1}, \quad KEK^{-1} = v^2E, \quad KFK^{-1} = v^{-2}F, \quad [E, F] = \frac{K - K^{-1}}{v - v^{-1}},$$

où $\mathbf{1}$ est l'identité de l'algèbre et $[E, F] = EF - FE$.

Sa structure d'algèbre de Hopf est donnée par le coproduit Δ , la counité ϵ et l'antipode S définis sur les générateurs par

$$\begin{aligned} \Delta(K) &= K \otimes K, & \Delta(E) &= E \otimes \mathbf{1} + K \otimes E, & \Delta(F) &= F \otimes K^{-1} + \mathbf{1} \otimes F, \\ \epsilon(K) &= 1, & \epsilon(E) &= \epsilon(F) = 0, \\ S(K) &= K^{-1}, & S(E) &= -EK^{-1}, & S(F) &= -KF. \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Pour $r \in \mathbb{N}$, on définit les **puissances divisées** par

$$E^{(r)} = \frac{E^r}{[r]_v!}, \quad F^{(r)} = \frac{F^r}{[r]_v!} \tag{2.2.2}$$

et, par abus de notation, on écrit le plus souvent E et F pour $E^{(1)}$ et $F^{(1)}$.

Définition 2.2.2. *La forme intégrale restreinte $U_{\mathcal{Z}}^{\text{res}}(\mathfrak{sl}_2)$ est la sous- \mathcal{Z} -algèbre de $U_v(\mathfrak{sl}_2)$ engendrée par les puissances divisées $E^{(r)}$ et $F^{(r)}$ pour $r \in \mathbb{N}$, ainsi que $K^{\pm 1}$ et $\mathbf{1}$.*

Le fait que ce soit en effet une forme intégrale, c'est-à-dire une \mathcal{Z} -algèbre, est non trivial et suit d'une réécriture de la présentation par d'autres générateurs et relations. Ce travail est fait, par exemple, dans [CP95]. On pose d'abord

$$\left[\begin{array}{c} K; u \\ r \end{array} \right]_v = \prod_{s=1}^r \frac{Kv^{u+1-s} - K^{-1}v^{s-1-u}}{v^s - v^{-s}}, \tag{2.2.3}$$

où $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ et $u \in \mathbb{Z}$. Il est possible de montrer que c'est bel et bien un élément de $U_{\mathcal{Z}}^{\text{res}}(\mathfrak{sl}_2)$.

Théorème 2.2.3 ([Lus90]). *La forme intégrale restreinte $U_{\mathbb{Z}}^{\text{res}}(\mathfrak{sl}_2)$ est isomorphe à la \mathbb{Z} -algèbre associative engendrée par l'ensemble $\{E^{(r)}, F^{(r)}, K^{\pm 1}, [K; u]_v \mid r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, u \in \mathbb{Z}\}$ avec les relations*

$$\begin{aligned}
(1) \quad & K^{\pm 1} K^{\mp 1} = \mathbf{1}, \quad KE^{(r)} = v^{2r} E^{(r)} K, \quad KF^{(r)} = v^{-2r} F^{(r)} K; \\
(2) \quad & (v - v^{-1}) \begin{bmatrix} K; 0 \\ 1 \end{bmatrix}_v = K - K^{-1}, \quad \begin{bmatrix} K; u \\ 0 \end{bmatrix}_v = \mathbf{1}; \\
(3) \quad & \begin{bmatrix} r+s \\ r \end{bmatrix}_v \begin{bmatrix} K; 0 \\ r+s \end{bmatrix}_v = \begin{bmatrix} K; 0 \\ r \end{bmatrix}_v \begin{bmatrix} K; -r \\ s \end{bmatrix}_v; \\
(4) \quad & \begin{bmatrix} K; -u'' \\ r \end{bmatrix}_v = \sum_{s=0}^r (-1)^s v^{u''(r-s)} \begin{bmatrix} u'' + s - 1 \\ s \end{bmatrix}_v K^s \begin{bmatrix} K; 0 \\ r-s \end{bmatrix}_v; \\
(5) \quad & \begin{bmatrix} K; u' \\ r \end{bmatrix}_v = \sum_{s=0}^{\min(r, u')} v^{u'(r-s)} \begin{bmatrix} u' \\ s \end{bmatrix}_v K^{-s} \begin{bmatrix} K; 0 \\ r-s \end{bmatrix}_v; \\
(6) \quad & E^{(r)} F^{(n)} = \sum_{s=0}^{\min(r, n)} F^{(n-s)} \begin{bmatrix} K; 2s - r - n \\ s \end{bmatrix}_v E^{(r-s)}; \\
(7) \quad & E^{(r)} E^{(n)} = \begin{bmatrix} r+n \\ r \end{bmatrix}_v E^{(r+n)}, \quad F^{(r)} F^{(n)} = \begin{bmatrix} r+n \\ r \end{bmatrix}_v F^{(r+n)}; \\
(8) \quad & \begin{bmatrix} K; u \\ r \end{bmatrix}_v E^{(n)} = E^{(n)} \begin{bmatrix} K; u+2n \\ r \end{bmatrix}_v, \quad \begin{bmatrix} K; u \\ r \end{bmatrix}_v F^{(n)} = F^{(n)} \begin{bmatrix} K; u-2n \\ r \end{bmatrix}_v,
\end{aligned}$$

pour tout $u \in \mathbb{Z}$, $n, r, s, u' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ et $u'' \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. De plus, la sous-algèbre engendrée par $\{K^{\pm 1}, [K; u]_v \mid r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, u \in \mathbb{Z}\}$ est abélienne.

La longue liste de relations n'interviendra pas dans le reste du mémoire. Toutefois, la dernière remarque sur la sous-algèbre abélienne sera importante pour définir les sous-espaces de poids de modules sur $U_{\mathbb{Z}}^{\text{res}}(\mathfrak{sl}_2)$ (ou $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$).

La forme intégrale restreinte est elle aussi une algèbre de Hopf avec les données définies par

$$\begin{aligned}
\Delta(K) &= K \otimes K, \\
\Delta(E^{(r)}) &= \sum_{k=0}^r v^{k(r-k)} E^{(r-k)} K^k \otimes E^{(k)}, \quad \Delta(F^{(r)}) = \sum_{k=0}^r v^{-k(r-k)} F^{(k)} \otimes K^{-k} F^{(r-k)}, \\
\epsilon(K) &= 1, \quad \epsilon(E^{(r)}) = \epsilon(F^{(r)}) = 0,
\end{aligned} \tag{2.2.4}$$

$$S(K) = K^{-1}, \quad S(E^{(r)}) = (-1)^r v^{r(r+1)} K^{-r} E^{(r)}, \quad S(F^{(r)}) = (-1)^r v^{-r(r+1)} F^{(r)} K^r.$$

En particulier, pour $r = 1$, on retrouve les formules (2.2.1).

2.2.2. Spécialisation en un paramètre complexe :

l'extension de Lusztig $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$

Si l'on veut étudier le groupe quantique $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ où le paramètre q est un nombre complexe plutôt qu'une indéterminée v , on peut étudier les spécialisations des structures définies à la section précédente. Considérons le morphisme d'évaluation $ev_q : \mathbb{Q}(v)$ (ou \mathbb{Z}) $\rightarrow \mathbb{C} : v \mapsto q$, pour $q \in \mathbb{C}^\times$. Alors, les modules

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}(v)} U_v(\mathfrak{sl}_2) \quad \text{et} \quad \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} U_{\mathbb{Z}}^{\text{res}}(\mathfrak{sl}_2)$$

définis via ce morphisme ont une structure naturelle d'algèbre, où la multiplication est donnée, pour $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ et $x_1, x_2 \in U_v(\mathfrak{sl}_2)$ (resp. $U_{\mathbb{Z}}^{\text{res}}(\mathfrak{sl}_2)$), par

$$(\alpha_1 \otimes x_1)(\alpha_2 \otimes x_2) = \alpha_1 \alpha_2 \otimes x_1 x_2.$$

Lorsque q n'est pas une racine de l'unité, les deux algèbres obtenues sont isomorphes. Sinon, elles diffèrent et celle qui nous intéresse est $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2) := \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} U_{\mathbb{Z}}^{\text{res}}(\mathfrak{sl}_2)$, appelée l'**extension de Lusztig**. Pour tout le reste du mémoire, on se permet d'écrire αx plutôt que $\alpha \otimes x$, où $\alpha \in \mathbb{C}$ et $x \in U_{\mathbb{Z}}^{\text{res}}(\mathfrak{sl}_2)$, pour désigner les éléments de $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$.

2.3. Théorie de la représentation

Cette section présente les principaux résultats concernant trois familles utiles de $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -modules qui interviendront plus tard dans ce mémoire : les modules de Weyl, les modules simples et les modules projectifs.

2.3.1. Terminologie

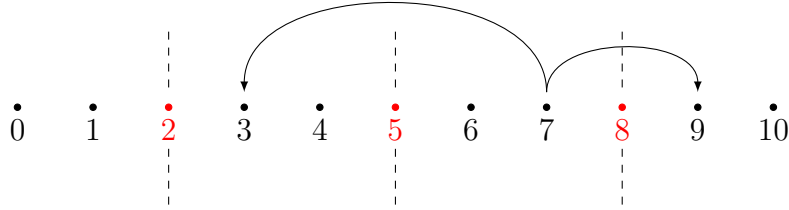
Avant d'introduire les trois familles de $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -modules, on commence par un peu de terminologie. Soient $q \in \mathbb{C}$ une racine de l'unité et ℓ le plus petit entier positif tel que $q^{2\ell} = 1$. Alors, pour $i \in \mathbb{N}$, on écrit $i = r\ell + s$ avec $0 \leq s < \ell$ et $r \geq 0$. Si $s = \ell - 1$, on dit que i est **critique**. Pour un entier $i \geq \ell$ non critique, on définit trois entiers qui lui sont associés :

- la **mère** de i est $\mathbf{m}_i = r\ell - 1$;
- la **réflexion à gauche** de i (par rapport à la ligne critique immédiatement à gauche) est $\mathbf{g}_i = i - 2(s + 1)$;

- la **réflexion à droite** de i (par rapport à la ligne critique immédiatement à droite) est $\mathbf{d}_i = i + 2(\ell - s - 1)$.

Notons que \mathbf{m}_i est toujours critique et correspond à l'entier sur la ligne critique immédiatement à gauche de i . Finalement, si $0 \leq i < \ell - 1$, on définit sa réflexion à droite \mathbf{d}_i de la même façon que ci-haut.

Par exemple, si $\ell = 3$, les entiers critiques sont $\{r\ell + \ell - 1 = (r + 1) \cdot 3 - 1 \mid r \in \mathbb{N}_0\} = \{2, 5, 8, \dots\}$. On peut alors placer des points représentant chaque entier dans \mathbb{N}_0 le long d'une droite horizontale et dessiner des lignes verticales à chaque entier critique. La mère de chaque entier, ainsi que les réflexions à gauche et à droite, peuvent alors être facilement obtenues visuellement. On a le dessin



duquel on peut lire, par exemple, $\mathbf{g}_7 = 3$, $\mathbf{d}_7 = 9$ et $\mathbf{m}_7 = 5$.

Certains résultats plus tard nécessiteront la notion d'espace de poids. On les définit d'abord dans le cas générique, c'est-à-dire pour les représentations de $U_v(\mathfrak{sl}_2)$. On dit qu'un $U_v(\mathfrak{sl}_2)$ -module M est de **type 1** si les valeurs propres de l'action de K sur M sont de la forme v^λ , pour $\lambda \in \mathbb{Z}$.

Définition 2.3.1. Soit M un $U_v(\mathfrak{sl}_2)$ -module de type 1 et de dimension finie. Ses espaces de poids M_λ , pour $\lambda \in \mathbb{Z}$, sont définis par

$$M_\lambda = \{m \in M \mid K \cdot m = v^\lambda m\}.$$

Tous les $U_v(\mathfrak{sl}_2)$ -modules M de type 1 et de dimension finie peuvent s'écrire comme la somme directe de leurs espaces de poids, c'est-à-dire que $M = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}} M_\lambda$ comme $\mathbb{Q}(v)$ -espaces vectoriels. Il est alors pratique d'encoder la dimension de ses espaces de poids à l'aide de l'objet suivant.

Définition 2.3.2. Soit M un $U_v(\mathfrak{sl}_2)$ -module de type 1 et de dimension finie. Son caractère, noté χ_M , est l'élément de $\mathbb{Z}[x, x^{-1}]$ défini par

$$\chi_M = \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}} (\dim M_\lambda) x^\lambda.$$

On passe maintenant aux $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -modules, où $q \in \mathbb{C}$ est une racine de l'unité avec $\ell \in \mathbb{N}$ l'entier positif minimal tel que $q^{2\ell} = 1$. Il est possible de montrer que l'élément K^ℓ de $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$ est central et que $K^{2\ell} = \mathbf{1}$. On en déduit que l'action de K sur un $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -module est diagonalisable et que ses valeurs propres sont des racines 2ℓ -ièmes de l'unité. On dit qu'un $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -module M de dimension finie est de **type 1** si les valeurs propres de l'action de K peuvent s'écrire comme une puissance entière de q , c'est-à-dire qu'elles sont de la forme q^λ pour $\lambda \in \mathbb{Z}$.

On note \mathcal{F} la catégorie dont les objets sont les $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -modules de dimension finie et de type 1 et dont les morphismes sont toutes les applications $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -linéaires.

Proposition 2.3.3 ([APK91]). *La catégorie \mathcal{F} est abélienne, fermée sous le produit tensoriel issu du coproduit Δ et possède suffisamment d'objets projectifs et d'injectifs.*

Par la suite et par abus de langage, on appellera « modules projectifs » les objets projectifs de \mathcal{F} . La définition des espaces de poids dans le cas présent utilise les générateurs de la sous-algèbre abélienne mentionnée au théorème 2.2.3.

Définition 2.3.4. *Soit M un objet de \mathcal{F} . Ses espaces de poids M_λ , pour $\lambda \in \mathbb{Z}$, sont définis par*

$$M_\lambda = \left\{ m \in M \mid K \cdot m = q^\lambda m, \begin{bmatrix} K & 0 \\ \ell & \end{bmatrix}_q \cdot m = \begin{bmatrix} \lambda \\ \ell \end{bmatrix}_q m \right\}.$$

De plus, le caractère de M , noté χ_M , est l'élément de $\mathbb{Z}[x, x^{-1}]$ défini par

$$\chi_M = \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}} (\dim M_\lambda) x^\lambda.$$

Comme q est une racine de l'unité, il arrive que $q^\lambda = q^{\lambda'}$ pour $\lambda \neq \lambda'$. Pour ne pas que les espaces de poids se confondent, la deuxième condition de la définition de M_λ est ajoutée. Il est alors possible de montrer que les deux égalités $q^\lambda = q^{\lambda'}$ et $\begin{bmatrix} \lambda \\ \ell \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} \lambda' \\ \ell \end{bmatrix}_q$ tiennent si et seulement si $\lambda = \lambda'$.

Définition 2.3.5. *Soit M un $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -module et $\lambda \in \mathbb{Z}$. On dit que $x \in M$ est un vecteur de poids λ si $x \in M_\lambda$. Si, de plus, $E^{(n)} \cdot x = 0$ pour tout $n \geq 1$, on dit que x est de plus haut poids λ . Si x engendre M , on dit que M est un module de plus haut poids λ .*

2.3.2. Modules de Weyl et modules simples

On introduit d'abord les modules de Weyl, qui sont des modules de plus haut poids de dimension finie. On suit les présentations de [AT17] et de [Pin20].

Définition 2.3.6. Soit $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Le module de Weyl $\Delta_q(i)$ est l'espace vectoriel ayant comme \mathbb{C} -base les vecteurs $\{m_0, m_1, \dots, m_i\}$ et où l'action de $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$ est donnée par

$$K \cdot m_k = q^{i-2k} m_k, \quad E^{(n)} \cdot m_k = \begin{bmatrix} i - k + n \\ n \end{bmatrix}_q m_{k-n}, \quad F^{(n)} \cdot m_k = \begin{bmatrix} k + n \\ n \end{bmatrix}_q m_{k+n},$$

où on pose $m_k = 0$ si $k < 0$ ou $k > i$.

De l'action donnée ci-haut, on peut déduire que $\Delta_q(i)$ est un module de plus haut poids i . Lorsque q n'est pas une racine de l'unité, les modules $\Delta_q(i)$ sont simples et forment un ensemble complet de classes d'isomorphisme de modules simples de dimension finie et de type 1. Dans notre cas, on a plutôt la proposition suivante.

Proposition 2.3.7 ([AT17]). Soit $i = r\ell + s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. La coiffe de $\Delta_q(i)$, notée $L_q(i)$, est un module simple. De plus,

- (1) $\Delta_q(i) \cong L_q(i)$ si et seulement si $i < \ell$ ou $i \equiv -1 \pmod{\ell}$.
- (2) Sinon, il existe une suite exacte courte non scindée

$$0 \rightarrow L_q(i) \rightarrow \Delta_q(\mathbf{d}_i) \rightarrow L_q(\mathbf{d}_i) \rightarrow 0, \quad (2.3.1)$$

où $L_q(\mathbf{d}_i)$ est la coiffe et $L_q(i)$ est le socle de $\Delta_q(\mathbf{d}_i)$.

- (3) Les modules $\{L_q(i) \mid i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ forment un ensemble complet de classes d'isomorphisme d'objets simples de \mathcal{F} .

Remarque 2.3.8. Le module simple $L_q(1) \cong \Delta_q(1)$ de dimension 2 est souvent appelé la représentation fondamentale de $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$ et jouera un rôle important dans ce mémoire.

L'affirmation 2 de la proposition précédente indique que tout module simple $L_q(i)$ peut être réalisé comme sous-module d'un module de Weyl $\Delta_q(\mathbf{d}_i)$. Comme on connaît l'action de tous les générateurs de $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$ sur les modules de Weyl, il sera utile plus tard de connaître explicitement cette réalisation. Soit $V_{\mathbf{d}_i}$ le sous-espace de $\Delta_q(\mathbf{d}_i)$ ayant pour base

$$\{m_{al+b} \mid 0 \leq a \leq r \text{ et } \ell - s - 1 \leq b < \ell\}.$$

Proposition 2.3.9. L'espace vectoriel $V_{\mathbf{d}_i}$ est fermé sous l'action de $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$. Alors, on a $V_{\mathbf{d}_i} \cong L_q(i)$ et $\dim L_q(i) = \dim V_{\mathbf{d}_i} = (r+1)(s+1)$.

Cette réalisation permet également de mettre en lumière le fait que le simple $L_q(i)$ est l'unique module simple de plus haut poids i dont le vecteur de plus haut poids est donné par $m_{\ell-s-1} \in V_{\mathbf{d}_i}$. En effet, $m_{\ell-s-1}$ engendre $V_{\mathbf{d}_i}$,

$$K \cdot m_{\ell-s-1} = q^{(\mathbf{d}_i - 2(\ell-s-1))} m_{\ell-s-1} = q^i m_{\ell-s-1},$$

et on peut également vérifier que $\begin{bmatrix} K; 0 \\ \ell \end{bmatrix}_q \cdot m_{\ell-s-1} = \begin{bmatrix} i \\ \ell \end{bmatrix}_q$. Ceci permet de démontrer le lemme suivant.

Lemme 2.3.10. *Soit M un $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -module de plus haut poids $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ de dimension finie et de type 1. Alors, sa coiffe $\text{top } M$ est la somme directe de copies du module simple $L_q(i)$.*

2.3.3. Modules projectifs

Comme la catégorie \mathcal{F} possède suffisamment de projectifs, chaque objet M de \mathcal{F} possède une couverture projective dans \mathcal{F} . On s'intéresse en particulier aux couvertures projectives des modules simples, dont la structure est décrite par la proposition suivante.

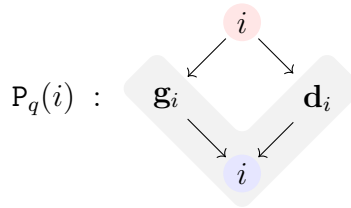
Proposition 2.3.11 ([AT17]). *La couverture projective du module simple $L_q(i)$, notée $P_q(i)$, est un $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -module indécomposable de type 1. De plus,*

- (1) *Si $i \equiv -1 \pmod{\ell}$, alors $P_q(i) \cong L_q(i) \cong \Delta_q(i)$.*
- (2) *Si $i \not\equiv -1 \pmod{\ell}$, alors $P_q(i)$ est de dimension $2\ell(r+1)$ et il existe une suite exacte courte non scindée*

$$0 \rightarrow \Delta_q(\mathbf{d}_i) \rightarrow P_q(i) \rightarrow \Delta_q(i) \rightarrow 0.$$

- (3) *Si M est un objet projectif indécomposable de \mathcal{F} , alors $M \cong P_q(i)$ pour un certain $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.*

La structure des couvertures projectives $P_q(i)$ peut être représentée à l'aide du diagramme de Loewy suivant.



Dans cette figure, chaque sommet représente un facteur de composition isomorphe au simple de l'étiquette correspondante. On comprend que le facteur $L_q(\mathbf{g}_i)$ doit être retiré si $\mathbf{g}_i < 0$. Les flèches de i à \mathbf{g}_i et de \mathbf{d}_i à i indiquent que $P_q(i)$ possède des sous-quotients isomorphes à une extension non triviale de $L_q(i)$ par $L_q(\mathbf{g}_i)$ et de $L_q(\mathbf{d}_i)$ par $L_q(i)$, respectivement. Ces sous-quotients sont isomorphes aux modules de Weyl $\Delta_q(i)$ et $\Delta_q(\mathbf{d}_i)$, qui s'écrivent comme extensions des bons simples selon la proposition 2.3.7. Les deux autres flèches indiquent des sous-quotients isomorphes à des comodules de Weyl, dont on ne discutera pas.

De cette figure, on peut lire le socle (en bleu), le radical (en gris) ainsi que la coiffe (en rouge) de $\mathbb{P}_q(i)$ et on peut déduire que $\dim \text{End}_{\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)}(\mathbb{P}_q(i)) = 2$: les deux morphismes de base sont l'identité et celui qui envoie la coiffe vers le socle.

2.3.4. Produits tensoriels

Dans cette section, on s'attarde à la décomposition en indécomposables des produits tensoriels entre des $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -modules simples ou projectifs et la représentation fondamentale $\mathbb{L}_q(1)$. Les deux théorèmes suivants seront utiles aux chapitres 3 et 4. Leur preuve complète se trouve dans [Pin20].

Théorème 2.3.12. *Soit $i = r\ell + s$, où $r, s \in \mathbb{N}$ et $s < \ell$. Alors*

$$\mathbb{L}_q(i) \otimes \mathbb{L}_q(1) \cong \begin{cases} \mathbb{L}_q(i+1), & \text{si } s = 0, \\ \mathbb{L}_q(i-1) \oplus \mathbb{L}_q(i+1), & \text{si } 0 < s < \ell - 1, \\ \mathbb{P}_q(i-1), & \text{si } s = \ell - 1. \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Ce résultat est bien connu, mais on en donne tout de même une preuve, car elle est constructive et certains de ses détails seront utiles. On suit [Pin20], où se trouvent les détails qui seront sautés ici.

On peut réaliser le module simple $\mathbb{L}_q(i)$ comme sous-module du Weyl $\Delta_q(\mathbf{d}_i)$. Si on note $\{m_k\}_{0 \leq k \leq \mathbf{d}_i}$ la base de $\Delta_q(\mathbf{d}_i)$, alors la base de $\mathbb{L}_q(i)$ est donnée par le sous-ensemble

$$\{m_{a\ell+b} \mid 0 \leq a \leq r \text{ et } \ell - s - 1 \leq b < \ell\}.$$

On identifie également $\mathbb{L}_q(1)$ à $\Delta_q(1)$ et on note sa base $\{x_0, x_1\}$. Considérons le vecteur $y = m_{\ell-s-1} \otimes x_0$. Comme $m_{\ell-s-1}$ et x_0 sont de plus haut poids dans $\mathbb{L}_q(i)$ et $\mathbb{L}_q(1)$, on a $\Delta(E^{(n)})y = 0$ pour tout n . De plus, $\Delta(H)y = (i+1)y$, d'où y est un vecteur de plus haut poids $i+1$ dans $M = \mathbb{L}_q(i) \otimes \mathbb{L}_q(1)$. Par le lemme 2.3.10, on sait alors que $\text{top}\langle y \rangle$ contient une copie de $\mathbb{L}_q(i+1)$. Si $s = 0$, on a

$$\dim M = (\dim \mathbb{L}_q(i))(\dim \mathbb{L}_q(1)) = (s+1)(r+1) \cdot 2 = 2(r+1) = (s+2)(r+1) = \dim \mathbb{L}_q(i+1),$$

d'où $M \cong \mathbb{L}_q(i+1)$ et on a terminé. Si $s \geq 1$, on pose $x = m_{\ell-s-1} \otimes x_1 + q^{s-\ell} m_{\ell-s} \otimes x_0$. Alors, on peut vérifier que $\Delta(E^{(n)})x = 0$ pour tout n et que $\Delta(H)x = (i-1)x$, d'où x est un vecteur de plus haut poids $i-1$ dans M et $\mathbb{L}_q(i-1) \subseteq \text{top}\langle x \rangle$.

On peut ensuite vérifier que $\dim\langle x \rangle \leq s(r+1)$ et que $\dim\langle y \rangle \leq (s+2)(r+1)$. De ces deux affirmations, on déduit le reste de l'énoncé. En effet, on a alors

$$\dim L_q(i-1) = s(r+1) \geq \dim\langle x \rangle \geq \dim \text{top}\langle x \rangle \geq \dim L_q(i-1),$$

d'où $\langle x \rangle \cong L_q(i-1)$. Si $s = \ell - 1$, alors $L_q(i) \cong \Delta_q(i) \cong P_q(i)$ est projectif, d'où M l'est aussi. Le sous-module $\langle x \rangle$ est donc contenu dans un module projectif indécomposable, qui doit être $P_q(i-1)$ par la proposition 2.3.11. Alors, $P_q(i) \subseteq M$ et comme

$$\dim P_q(i-1) = 2(r+1)\ell = 2(i+1) = (\dim L_q(i))(\dim L_q(1)) = \dim M,$$

on a $M \cong P_q(i-1)$. Si $1 \leq s \leq \ell - 2$, on a

$$\dim L_q(i+1) = (s+2)(r+1) \geq \dim\langle y \rangle \geq \dim \text{top}\langle y \rangle \geq \dim L_q(i+1),$$

d'où $\langle y \rangle \cong L_q(i+1)$. Comme

$$\dim M = 2(s+1)(r+1) = (s-1)(r+1) + s(r+1) = \dim L_q(i-1) + \dim L_q(i+1),$$

on conclut que $M \cong L_q(i-1) \oplus L_q(i+1) \cong \langle x \rangle \oplus \langle y \rangle$. □

Théorème 2.3.13. *Soit $i = r\ell + s$, où $r, s \in \mathbb{N}$ et $s < \ell - 1$. Alors,*

$$P_q(i) \otimes L_q(1) \cong (1 + \delta_{s,\ell-2})P_q(i+1) \oplus (1 - \delta_{r,0}\delta_{s,0})P_q(i-1) \oplus \delta_{s,0}P_q(i+2\ell-1),$$

où $\delta_{i,j}$ est le delta de Kronecker.

2.4. Matrices R pour les représentations

de $U_v(\mathfrak{sl}_2)$ et de $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$

Soient \mathcal{A} une algèbre de Hopf et M, N deux \mathcal{A} -modules. Comme discuté à la fin de la section 2.1.1, l'espace vectoriel $M \otimes_{\mathbb{C}} N$ a naturellement une structure de \mathcal{A} -module obtenue via le coproduit. En général, à moins que \mathcal{A} ne soit cocommutative, les modules $M \otimes N$ et $N \otimes M$ ne sont pas isomorphes. Dans le cas où \mathcal{A} est un groupe quantique et M et N sont de dimension finie, il est toutefois possible de définir un isomorphisme non trivial $\check{R}_{M,N} : M \otimes N \xrightarrow{\sim} N \otimes M$ construit à partir d'objets spéciaux appelés matrices R . Dans cette section, on donne un aperçu de cette construction pour $U_v(\mathfrak{sl}_2)$ et $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$.

On définit d'abord la **matrice R universelle** du groupe quantique $U_v(\mathfrak{sl}_2)$ par

$$\mathcal{R} = e^{\frac{\hbar}{2}H \otimes H} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v^{\frac{1}{2}n(n+1)}(1-v^{-2})^n}{[n]_v!} F^n \otimes E^n. \quad (2.4.1)$$

Cette formule nécessite des explications, car elle ne définit pas un élément de $U_v(\mathfrak{sl}_2) \otimes U_v(\mathfrak{sl}_2)$. D'abord, la somme infinie doit être comprise comme un élément d'une certaine complétion de $U_v(\mathfrak{sl}_2) \otimes U_v(\mathfrak{sl}_2)$ dont les détails sont donnés à la section 10.1D de [CP95]. Toutefois, son action sur n'importe quelle représentation de dimension finie de $U_v(\mathfrak{sl}_2)$ est bien définie, car F et E agissent alors de façon nilpotente et on n'aura à tenir compte que d'un nombre fini de termes de la somme.

Ensuite, l'exponentielle $e^{\frac{\hbar}{2}H \otimes H}$ n'est ni un élément de $U_v(\mathfrak{sl}_2) \otimes U_v(\mathfrak{sl}_2)$, ni de sa complétion. Si M et N sont des $U_v(\mathfrak{sl}_2)$ -modules de type 1 de dimension finie et $m \in M$ et $n \in N$ sont des vecteurs de poids k_1 et k_2 respectivement, c'est-à-dire que $K \cdot m = v^{k_1}m$ et $K \cdot n = v^{k_2}n$, on comprendra ce terme comme l'application linéaire

$$\Xi : M \otimes N \rightarrow M \otimes N : m \otimes n \mapsto v^{\frac{k_1 k_2}{2}} m \otimes n.$$

Si $\rho_1 : U_v(\mathfrak{sl}_2) \rightarrow \text{End}(M)$ et $\rho_2 : U_v(\mathfrak{sl}_2) \rightarrow \text{End}(N)$ sont les représentations associées, on pose

$$R_{M,N} := \Xi \circ \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{v^{\frac{1}{2}n(n+1)}(1-v^{-2})^n}{[n]_v!} \rho_1(F^n) \otimes \rho_2(E^n) \right).$$

Proposition 2.4.1. *En gardant la notation ci-haut, $R_{M,N} : M \otimes N \rightarrow M \otimes N$ est une application linéaire inversible telle que*

$$R_{M,N} \circ (\rho_1 \otimes \rho_2)(\Delta(x)) \circ R_{M,N}^{-1} = (\rho_1 \otimes \rho_2)(\tau \circ \Delta(x)) \quad (2.4.2)$$

pour tout $x \in U_v(\mathfrak{sl}_2)$, où τ est l'application définie à la section 2.1.1. De plus, $R_{M,N}$ satisfait l'équation de Yang-Baxter quantique.

De l'équation 2.4.2, on peut déduire directement qu'en composant l'application $R_{M,N}$ avec τ , on obtient un morphisme de modules inversible $\check{R} := \tau \circ R_{M,N} : M \otimes N \rightarrow N \otimes M$. Il en découle le corollaire suivant.

Corollaire 2.4.2. *La catégorie des $U_v(\mathfrak{sl}_2)$ -modules de type 1 de dimension finie est monoïdale tressée et l'isomorphisme de commutativité $M \otimes N \rightarrow N \otimes M$ est donné par $\check{R}_{M,N}$.*

On voudrait conserver ces résultats lorsqu'on spécialise $v \mapsto q$ en une racine de l'unité. Or, comme $[\ell]_q = 0$ si $q^{2\ell} = 1$, la formule de \mathcal{R} donnée en (2.4.1) aura des pôles. Toutefois, si on la réécrit en faisant intervenir les puissances divisées $E^{(n)}$ et $F^{(n)}$, on obtient

$$\mathcal{R} = e^{\frac{\hbar}{2}H \otimes H} \sum_{n=0}^{\infty} [n]_v! v^{\frac{1}{2}n(n+1)} (1 - v^{-2})^n F^{(n)} \otimes E^{(n)}, \quad (2.4.3)$$

qui, elle, reste bien définie lorsqu'on prend la limite $v \rightarrow q$. En fait, cette somme tronque maintenant au ℓ^e terme, car $[n]_q! = 0$ dès que $n \geq \ell$. Si M et N sont des $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -modules de type 1 de dimension finie, $m \in M$ et $n \in N$ sont des vecteurs de poids k_1 et k_2 respectivement et $\rho_1 : \mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2) \rightarrow \text{End}(M)$ et $\rho_2 : \mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2) \rightarrow \text{End}(N)$ sont les représentations associées, on pose de façon analogue à ci-haut

$$R_{M,N} := (\text{ev}_q \circ \Xi) \circ \left(\sum_{n=0}^{\ell-1} [n]_q! q^{\frac{1}{2}n(n+1)} (1 - q^{-2})^n \rho_1(F^{(n)}) \otimes \rho_2(E^{(n)}) \right)$$

et

$$\check{R}_{M,N} = \tau \circ R_{M,N}.$$

Alors, les résultats ci-haut pour $U_v(\mathfrak{sl}_2)$ restent vrais pour $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$.

Corollaire 2.4.3. *La catégorie \mathcal{F} des $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -modules de type 1 de dimension finie est monoïdale tressée et l'isomorphisme de commutativité $M \otimes N \rightarrow N \otimes M$ est donné par $\check{R}_{M,N}$.*

Les isomorphismes \check{R} sont un tressage ; ils respectent donc les propriétés de ces derniers présentées à la définition 2.1.8 et à la proposition 2.1.10. Comme elles nous seront utiles, on les redonne ici pour ce cas particulier.

Proposition 2.4.4. *Soient M, N, P des $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -modules. Alors,*

$$\begin{aligned} \check{R}_{M \otimes N, P} &= (\check{R}_{M,P} \otimes \mathbf{id}_N)(\mathbf{id}_M \otimes \check{R}_{N,P}), \\ \check{R}_{M, N \otimes P} &= (\mathbf{id}_N \otimes \check{R}_{M,P})(\check{R}_{M,N} \otimes \mathbf{id}_P), \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

et

$$\begin{aligned} &(\check{R}_{N,P} \otimes \mathbf{id}_M)(\mathbf{id}_N \otimes \check{R}_{M,P})(\check{R}_{M,N} \otimes \mathbf{id}_P) \\ &= (\mathbf{id}_P \otimes \check{R}_{M,N})(\check{R}_{M,P} \otimes \mathbf{id}_N)(\mathbf{id}_M \otimes \check{R}_{N,P}). \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

2.5. Dualité de Schur–Weyl

La dualité de Schur–Weyl classique relie la théorie de la représentation du groupe $GL_N(\mathbb{C})$ (ou des algèbres enveloppantes $U(\mathfrak{gl}_N)$ et $U(\mathfrak{sl}_N)$) avec celle du groupe symétrique S_n . La dualité de Schur–Weyl quantique étend ces résultats à la déformation $U_q(\mathfrak{gl}_N)$ (resp. $U_q(\mathfrak{sl}_N)$) de $U(\mathfrak{gl}_N)$ (resp. $U(\mathfrak{sl}_N)$) et le rôle du groupe symétrique est alors joué par l’algèbre de Hecke $\mathcal{H}_n(q)$. Dans cette section, on se consacre au cas de $U_q(\mathfrak{sl}_2)$, couvrant également le cas de $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$ en racine de l’unité.

2.5.1. Représentation du groupe de tresses

Dans une catégorie monoïdale tressée \mathcal{C} , le tressage permet de définir une action du groupe de tresses sur les produits tensoriels d’objets de \mathcal{C} . Dans cette section, on étudie cette action pour la catégorie \mathcal{F} des $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -modules de dimension finie et de type 1. On s’attarde en particulier aux produits tensoriels de la forme $L_q(1)^{\otimes n}$.

Définition 2.5.1. *Le groupe de tresses B_n est le groupe engendré par les éléments T_1, T_2, \dots, T_{n-1} avec les relations*

$$\begin{aligned} T_i T_j &= T_j T_i && \text{si } j \neq i \pm 1, \\ T_i T_{i+1} T_i &= T_{i+1} T_i T_{i+1} && \text{pour } i = 1, \dots, n-2. \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

On représente diagrammatiquement les générateurs par

$$T_i = \left| \dots \right| \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \left| \dots \right|. \tag{2.5.2}$$

$i \quad i+1$

Le produit de deux générateurs $T_i T_j$ est obtenu en apposant le diagramme de T_j par-dessus celui de T_i , puis en connectant les brins ensemble. Tous les diagrammes sont considérés à isotopie près. On peut alors vérifier que ces diagrammes respectent les relations de la définition. Par exemple, pour la deuxième, on a

$$T_i T_{i+1} T_i = \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} = \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} = T_{i+1} T_i T_{i+1}.$$

$i \quad i+1 \quad i+2 \qquad i \quad i+1 \quad i+2$

Cette représentation diagrammatique donne un groupe isomorphe à celui obtenu à partir des générateurs et des relations ci-haut. On cherche ensuite à utiliser le tressage de la section 2.4, construit à partir des matrices R , pour obtenir des endomorphismes de $L_q(1)^{\otimes n}$ menant à une action du groupe de tresse. Pour ce faire, on définit

$$\check{R}_i := \mathbf{id}_{L_q(1)}^{\otimes(i-1)} \otimes \check{R}_{L_q(1), L_q(1)} \otimes \mathbf{id}_{L_q(1)}^{\otimes(n-i-1)}, \quad 1 \leq i \leq n-1. \quad (2.5.3)$$

Ces endomorphismes permettent de définir la représentation du groupe de tresse suivante.

Proposition 2.5.2. *L'application*

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{C}B_n &\rightarrow \text{End}_{\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)}(L_q(1)^{\otimes n}) \\ T_i &\mapsto \check{R}_i, \quad 1 \leq i \leq n-1, \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

étendue linéairement et multiplicativement, est un morphisme d'algèbres.

DÉMONSTRATION. La vérification de la première relation de (2.5.1) suit directement de la définition de Ψ . Pour l'autre, notons que l'équation (2.4.5) faisant intervenir les matrices R donne la relation de tresse

$$\begin{array}{ccc} P \otimes N \otimes M & & P \otimes N \otimes M \\ \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \end{array} & = & \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \end{array} \\ M \otimes N \otimes P & & M \otimes N \otimes P \end{array}$$

$$(\check{R}_{N,P} \otimes \mathbf{id}_M)(\mathbf{id}_N \otimes \check{R}_{M,P})(\check{R}_{M,N} \otimes \mathbf{id}_P) = (\mathbf{id}_P \otimes \check{R}_{M,N})(\check{R}_{M,P} \otimes \mathbf{id}_N)(\mathbf{id}_M \otimes \check{R}_{N,P}).$$

En appliquant ceci dans le cas particulier où $M = N = P = L_q(1)$ et en prenant le produit tensoriel avec l'identité sur les autres facteurs, on obtient alors la relation

$$\Psi(T_i T_{i+1} T_i) = \check{R}_i \check{R}_{i+1} \check{R}_i = \check{R}_{i+1} \check{R}_i \check{R}_{i+1} = \Psi(T_{i+1} T_i T_{i+1}),$$

tel que désiré. □

Dans le cas de la dualité de Schur–Weyl classique, les groupes ou algèbres considérés sont des algèbres de Hopf cocommutatives. Leur catégorie de modules admet un tressage issu du *flip* τ , qui satisfait la relation supplémentaire $\tau^2 = \tau \circ \tau = \mathbf{id}$. Dans ce cas, l'action du groupe de tresse obtenue en suivant la même démarche que ci-haut se factorise donc par le

groupe symétrique S_n . Dans le cas quantique, bien que $\check{R}_i^2 \neq \mathbf{id}$ en général, l'action introduite plus haut satisfait également des relations supplémentaires. Une analyse plus approfondie de l'action des morphismes \check{R}_i sera nécessaire pour les révéler, ce qui sera fait au cours de la prochaine section.

2.5.2. Représentation de l'algèbre de Temperley–Lieb

Pour cette section, supposons que $\ell > 2$. D'abord, le théorème 2.3.12 donne la décomposition $L_q(1) \otimes L_q(1) \cong L_q(0) \oplus L_q(2)$, qui est une somme directe de deux modules simples non isomorphes. Alors, par le lemme de Schur, le morphisme \check{R}_i doit agir comme un multiple de l'identité sur chacun d'eux.

Lemme 2.5.3. *L'action de $\check{R}_1 \in \text{End}_{\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)}(L_q(1) \otimes L_q(1))$ est donnée par*

$$\check{R}_1 = q^{\frac{1}{2}} \mathbf{id}_{L_q(2)} - q^{\frac{-3}{2}} \mathbf{id}_{L_q(0)}.$$

DÉMONSTRATION. Comme mentionné avant l'énoncé, il suffit de calculer la valeur propre de \check{R}_1 sur chacun des deux facteurs directs simples. Notons $\{x_0, x_1\}$ la base du module $L_q(1)$. Alors, la copie de $L_q(2)$ est engendrée par le vecteur $x_0 \otimes x_0$, sur lequel on a

$$\check{R}_1 \cdot (x_0 \otimes x_0) = \tau(q^{\frac{1}{2}} x_0 \otimes x_0) = q^{\frac{1}{2}} x_0 \otimes x_0.$$

La copie de $L_q(0)$ est engendrée par le vecteur $x_0 \otimes x_1 - qx_1 \otimes x_0$, sur lequel on a

$$\begin{aligned} \check{R}_1 \cdot (x_0 \otimes x_1 - qx_1 \otimes x_0) &= \tau(q^{\frac{-1}{2}} x_0 \otimes x_1 + (q - q^{-1})q^{\frac{-1}{2}} x_1 \otimes x_0 - q \cdot q^{\frac{-1}{2}} x_0 \otimes x_1) \\ &= q^{\frac{-1}{2}} x_1 \otimes x_0 + (q^{\frac{1}{2}} - q^{\frac{-3}{2}} - q^{\frac{1}{2}}) x_0 \otimes x_1 \\ &= -q^{\frac{-3}{2}} (-qx_1 \otimes x_0 + x_0 \otimes x_1), \end{aligned}$$

ce qui donne la deuxième valeur propre. L'énoncé suit directement. \square

On introduit maintenant l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_n(q)$, par laquelle la représentation du groupe de tresse donnée à la section précédente se factorise, ce qui donne de nouvelles relations satisfaites par les morphismes \check{R}_i .

Définition 2.5.4. *Soient \mathbb{k} un anneau commutatif, $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{k}^\times$. L'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_n^{\mathbb{k}}(q)$ est la \mathbb{k} -algèbre associative et unifière engendrée par $\mathbf{1}$ et les éléments $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$*

avec les relations :

$$\begin{aligned} (\sigma_i - q)(\sigma_i + q^{-1}) &= 0 \quad \text{pour } i \in \{1, \dots, n-1\}, \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad \text{pour } i \in \{1, \dots, n-2\}, \\ \sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_i \quad \text{pour } i, j \in \{1, \dots, n-1\} \text{ avec } |i-j| \geq 2. \end{aligned}$$

Lorsque le contexte est clair, on peut retirer le \mathbb{k} ou le q de la notation et parler de l'algèbre de Hecke \mathcal{H}_n .

Remarque 2.5.5. Si $q = \pm 1$, la première relation de (2.5.4) se réduit à $\sigma_i^2 = 1$. Les relations résultantes correspondent ainsi à celles du groupe symétrique S_n , où les σ_i désignent les transpositions $(i, i+1)$. Alors, pour $q = \pm 1$, $\mathcal{H}_n(q) \cong \mathbb{C}S_n$ et l'algèbre de Hecke peut donc être vue comme un analogue « q -déformé » de $\mathbb{C}S_n$.

Proposition 2.5.6. L'application définie par

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{H}_n(q) &\rightarrow \text{End}_{\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)}(\mathbb{L}_q(1)^{\otimes n}) \\ \sigma_i &\mapsto q^{\frac{1}{2}} \check{R}_i, \quad 1 \leq i \leq n-1 \end{aligned}$$

est une représentation de l'algèbre de Hecke et on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}B_n & \xrightarrow{T_i \mapsto q^{-\frac{1}{2}} \sigma_i} & \mathcal{H}_n(q) \\ & \searrow \Psi & \downarrow \psi \\ & & \text{End}_{\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)}(\mathbb{L}_q(1)^{\otimes n}) \end{array} \quad .$$

DÉMONSTRATION. Les relations 2 et 3 de la définition 2.5.4 sont les mêmes que celles du groupe de tresses et il suit donc directement de la proposition 2.5.2 qu'elles sont satisfaites par les morphismes $q^{\frac{1}{2}} \check{R}_i$. Pour la première relation, par le lemme 2.5.3, sur les i -ième et $(i+1)$ -ième copies de $\mathbb{L}_q(1)$, on a

$$\psi(\sigma_i - q) = q \mathbf{id}_{\mathbb{L}_q(2)} - q^{-1} \mathbf{id}_{\mathbb{L}_q(0)} - q \mathbf{id}_{\mathbb{L}_q(2) \oplus \mathbb{L}_q(0)} = -(q + q^{-1}) \mathbf{id}_{\mathbb{L}_q(0)}$$

et

$$\psi(\sigma_i + q^{-1}) = q \mathbf{id}_{\mathbb{L}_q(2)} - q^{-1} \mathbf{id}_{\mathbb{L}_q(0)} + q^{-1} \mathbf{id}_{\mathbb{L}_q(2) \oplus \mathbb{L}_q(0)} = (q + q^{-1}) \mathbf{id}_{\mathbb{L}_q(2)}.$$

Alors le produit de $\psi(\sigma_i - q)$ et de $\psi(\sigma_i + q^{-1})$ donne 0, tel que désiré. \square

C'est cette représentation qui jouera un rôle central dans la dualité de Schur–Weyl. Il est toutefois possible d'aller encore plus loin et de factoriser cette représentation par l'algèbre de Temperley–Lieb, révélant encore une fois de nouvelles relations.

Proposition 2.5.7. *L'application*

$$\begin{aligned}\tilde{\psi} : \mathbb{T}\mathbb{L}_n(\beta_q) &\rightarrow \text{End}_{\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)}(\mathbb{L}_q(1)^{\otimes n}) \\ u_i &\mapsto q - q^{\frac{1}{2}}\check{R}_i, \quad 1 \leq i \leq n - 1\end{aligned}$$

est une représentation de l'algèbre de Temperley–Lieb et on peut étendre le diagramme commutatif de la proposition précédente pour donner

$$\begin{array}{ccccc}\mathbb{C}B_n & \xrightarrow{T_i \mapsto q^{-\frac{1}{2}}\sigma_i} & \mathcal{H}_n(q) & \xrightarrow{\sigma_i \mapsto q - u_i} & \mathbb{T}\mathbb{L}_n(\beta_q) \\ & \searrow \Psi & \downarrow \psi & \swarrow \tilde{\psi} & \\ & & \text{End}_{\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)}(\mathbb{L}_q(1)^{\otimes n}) & & \end{array} .$$

DÉMONSTRATION. Pour la première relation de la définition 1.3.5, on a

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}(u_i)^2 - \beta_q \tilde{\psi}(u_i) &= (q - q^{\frac{1}{2}}\check{R}_i)^2 - (q + q^{-1})(q - q^{\frac{1}{2}}\check{R}_i) \\ &= q^2 - 2q^{\frac{3}{2}}\check{R}_i + q\check{R}_i^2 - q^2 - 1 + q^{\frac{3}{2}}\check{R}_i + q^{-\frac{1}{2}}\check{R}_i \\ &= q\check{R}_i^2 + q^{-\frac{1}{2}}\check{R}_i - q^{\frac{3}{2}}\check{R}_i - 1 \\ &= (q^{\frac{1}{2}}\check{R}_i - q)(q^{\frac{1}{2}}\check{R}_i + q^{-1}) = 0,\end{aligned}$$

par la proposition 2.5.6. Pour la deuxième relation, notons d'abord que le lemme 2.5.3 implique que le morphisme $\tilde{\psi}(u_i) = q - q^{\frac{1}{2}}\check{R}_i$ agit sur le sommand direct $\mathbb{L}_q(0)$ du produit des i -ième et $(i + 1)$ -ième copies de $\mathbb{L}_q(1)$ comme $(q + q^{-1})\mathbf{id}_{\mathbb{L}_q(0)}$ et annihile le sommand $\mathbb{L}_q(2)$. Pour la suite, quitte à prendre le produit tensoriel avec l'identité sur les autres copies de $\mathbb{L}_q(1)$, il est suffisant de considérer le module $\mathbb{L}_q(1)^{\otimes 3}$ et la relation $u_1 u_2 u_1 = u_1$. En notant $\{x_0, x_1\}$ la base de $\mathbb{L}_q(1)$, on sait que le sous-module $\mathbb{L}_q(1) \cong \mathbb{L}_q(0) \otimes \mathbb{L}_q(1) \subset \mathbb{L}_q(1)^{\otimes 3}$ est engendré par le vecteur $v := (x_0 \otimes x_1 - qx_1 \otimes x_0) \otimes x_0$. Sur ce dernier, on a

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}(u_2)\tilde{\psi}(u_1)v &= (q + q^{-1})(q - q^{\frac{1}{2}}\check{R}_2)v \\ &= (q + q^{-1})(qx_0 \otimes x_1 \otimes x_0 - q^2x_1 \otimes x_0 \otimes x_0 - x_0 \otimes x_0 \otimes x_1 + q^2x_1 \otimes x_0 \otimes x_0) \\ &= (q + q^{-1})(qx_0 \otimes x_1 \otimes x_0 - x_0 \otimes x_0 \otimes x_1),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\tilde{\psi}(u_1)\tilde{\psi}(u_2)\tilde{\psi}(u_1)(v) &= (q - q^{\frac{1}{2}}\check{R}_1)(\tilde{\psi}(u_2)\tilde{\psi}(u_1)(v)) \\
&= (q + q^{-1}) \left(q^2 x_0 \otimes x_1 \otimes x_0 - qx_0 \otimes x_0 \otimes x_1 - q^{\frac{3}{2}}(q^{\frac{-1}{2}} x_1 \otimes x_0 \otimes x_0 \right. \\
&\quad \left. + (q - q^{-1})q^{\frac{-1}{2}} x_0 \otimes x_1 \otimes x_0) + qx_0 \otimes x_0 \otimes x_1 \right) \\
&= (q + q^{-1})(x_0 \otimes x_1 \otimes x_0 - qx_1 \otimes x_0 \otimes x_0) = (q + q^{-1})v.
\end{aligned}$$

Alors, $\tilde{\psi}(u_1)\tilde{\psi}(u_2)\tilde{\psi}(u_1)(v) = (q + q^{-1})v = \tilde{\psi}(u_1)(v)$ et on conclut que $\tilde{\psi}(u_i u_{i+1} u_i) = \tilde{\psi}(u_i)$, tel que désiré. Un calcul analogue montre que $\tilde{\psi}(u_i u_{i-1} u_i) = \tilde{\psi}(u_i)$. Finalement, la troisième relation suit clairement de la définition des $\tilde{\psi}(u_i)$. \square

2.5.3. Énoncé de la dualité

Sont maintenant en place tous les résultats qu'il faut pour pouvoir énoncer la dualité de Schur–Weyl quantique. On commence par le cas semisimple, où on prend $\mathbb{k} = \mathbb{C}(v)$.

Théorème 2.5.8. *L'algèbre $\mathrm{TL}_n^{\mathbb{C}(v)}(\beta_v)$ coïncide avec le centralisateur de l'action de $U_v(\mathfrak{sl}_2)$ sur le module $\Delta_v(1)^{\otimes n}$. De plus, comme $\mathrm{TL}_n^{\mathbb{C}(v)}(\beta_v) \otimes U_v(\mathfrak{sl}_2)$ -module, on a la décomposition suivante :*

$$\Delta_v(1)^{\otimes n} \cong \bigoplus_{\substack{i=0 \\ i \equiv 2n}}^n \mathcal{S}_n(i) \otimes \Delta_v(i). \quad (2.5.5)$$

On se penche maintenant sur le cas où v est spécialisé en une racine de l'unité $q \in \mathbb{C}^\times$.

Proposition 2.5.9. *Le morphisme $\psi : \mathcal{H}_n(q) \rightarrow \mathrm{End}_{\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)}(\mathrm{L}_q(1)^{\otimes n})$ défini à la proposition 2.5.6 est surjectif.*

DÉMONSTRATION. C'est un cas spécial du théorème 6.3 de [DPS98], où la surjectivité de ψ est montrée pour n'importe quelle spécialisation de v, v^{-1} dans un corps quelconque \mathbb{k} . \square

On a déjà montré que le morphisme ψ se factorise par l'algèbre de Temperley–Lieb $\mathrm{TL}_n(\beta_q)$. On aimerait montrer que, comme dans le cas semisimple, le morphisme $\tilde{\psi}$ ainsi obtenu est un isomorphisme. Pour ce faire, il suffit de montrer que les dimensions concordent. La dimension de $\mathrm{TL}_n(q)$ est donnée au corollaire 1.3.7.

Proposition 2.5.10. *On a*

$$\dim \mathrm{End}_{\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)}(\mathrm{L}_q(1)^{\otimes n}) = \dim \mathrm{End}_{U_v(\mathfrak{sl}_2)}(\Delta_v(1)^{\otimes n}) = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Les principales étapes de la preuve sont les suivantes. La dimension de $\text{End}_{U_v(\mathfrak{sl}_2)}(\Delta_v(1)^{\otimes n})$ peut être calculée par un argument récursif en utilisant les multiplicités des sommands directs de $\Delta_v(1)^{\otimes n}$ données par les coefficients de Clebsch–Gordan. Un tel calcul se trouve par exemple dans le chapitre 2 de [LZ10]. La dimension peut également être déduite du théorème 2.5.8. Finalement, le fait que $\dim \text{End}_{\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)}(\mathbf{L}_q(1)^{\otimes n}) = \dim \text{End}_{U_v(\mathfrak{sl}_2)}(\Delta_v(1)^{\otimes n})$ suit de la théorie des modules *tilting*, voir par exemple [AST18].

Corollaire 2.5.11. *Le morphisme $\tilde{\psi}$ de la section précédente induit un isomorphisme*

$$\mathbb{T}\mathbf{L}_n(\beta_q) \cong \text{End}_{\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)}(\mathbf{L}_q(1)^{\otimes n}).$$

Remarque 2.5.12. *Dans notre contexte, ces résultats ont été démontrés par Martin [Mar92].*

Chapitre 3

Les endomorphismes de $L_q(i) \otimes L_q(1)^{\otimes n}$

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'algèbre d'endomorphismes $\mathcal{R}_{i,n}$ engendrée par la représentation du groupe de tresses de type B sur les produits tensoriels de $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -modules de la forme $L_q(i) \otimes L_q(1)^{\otimes n}$. Ces endomorphismes sont exprimés à l'aide des matrices R associées au groupe quantique $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$. Ils forment en général une sous-algèbre propre de $\text{End}_{\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)}(L_q(i) \otimes L_q(1)^{\otimes n})$.

On commence par introduire la représentation du groupe de tresses de type B sur ces espaces, puis on montre qu'elle se factorise par l'algèbre de Temperley–Lieb à une frontière. On se sert ensuite de ce fait pour identifier $\mathcal{R}_{i,n}$ avec un certain quotient de Temperley–Lieb à une frontière par un idéal engendré par des projecteurs de Jones–Wenzl généralisés introduits au chapitre 1. Ceci est fait en déterminant de façon inductive le noyau de la représentation.

3.1. Représentations du groupe de tresses de type B et de l'algèbre de Temperley–Lieb à une frontière

On cherche à définir des représentations similaires à celles introduites à la section 2.5, mais pour des produits tensoriels de la forme $L_q(i) \otimes L_q(1)^{\otimes n}$. Le rôle du groupe de tresses sera alors joué par le groupe de tresses de type B et celui de l'algèbre de Temperley–Lieb, par l'algèbre de Temperley–Lieb à une frontière.

3.1.1. Le groupe de tresses de type B

On définit le groupe de tresses de type B ainsi que son action sur les modules de la forme $L_q(i) \otimes L_q(1)^{\otimes n}$. On suit en partie la présentation de Daugherty, Ram et Virk [DRV13] et de Iohara, Lehrer et Zhang [ILZ21].

Définition 3.1.1. *Le groupe de tresses de type B , noté Γ_n , est le groupe engendré par les éléments T_1, T_2, \dots, T_{n-1} et ξ_1 avec les relations*

$$\begin{aligned}
 T_i T_j &= T_j T_i && \text{si } j \neq i \pm 1, \\
 T_i T_{i+1} T_i &= T_{i+1} T_i T_{i+1} && \text{pour } i = 1, \dots, n-2, \\
 \xi_1 T_1 \xi_1 T_1 &= T_1 \xi_1 T_1 \xi_1, \\
 \xi_1 T_i &= T_i \xi_1 && \text{si } i \neq 1.
 \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

On représente diagrammatiquement les générateurs par

$$T_i = \left| \begin{array}{c} \dots \\ \text{crossing} \\ \dots \end{array} \right|, \quad \xi_1 = \left| \begin{array}{c} \text{cup} \\ \dots \\ \text{cap} \end{array} \right|. \tag{3.1.2}$$

On peut alors vérifier que ces diagrammes respectent les relations de la définition. Par exemple, pour la troisième, on a

$$\xi_1 T_1 \xi_1 T_1 = \left[\text{diagram 1} \right] = \left[\text{diagram 2} \right] = \left[\text{diagram 3} \right] = T_1 \xi_1 T_1 \xi_1.$$

Cette représentation diagrammatique donne un groupe isomorphe à celui obtenu à partir des générateurs et des relations ci-haut. On définit ensuite certains endomorphismes du $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -module $L_q(i) \otimes L_q(1)^{\otimes n}$ à partir des matrices R par

$$\begin{aligned}
 \check{R}_0^2 &:= \check{R}_{L_q(1), L_q(i)} \circ \check{R}_{L_q(i), L_q(1)} \otimes \mathbf{id}_{L_q(1)}^{\otimes (n-1)}, \\
 \check{R}_i &:= \mathbf{id}_{L_q(i)} \otimes \mathbf{id}_{L_q(1)}^{\otimes (i-1)} \otimes \check{R}_{L_q(1), L_q(1)} \otimes \mathbf{id}_{L_q(1)}^{\otimes (n-i-1)}, \quad 1 \leq i \leq n-1,
 \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

qui permettent de définir une représentation du groupe de tresses de type B .

Proposition 3.1.2. *L'application*

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{C}\Gamma_n &\rightarrow \text{End}_{\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)}(\mathbb{L}_q(i) \otimes \mathbb{L}_q(1)^{\otimes n}) \\ \xi_1 &\mapsto \check{R}_0^2, \\ T_i &\mapsto \check{R}_i, \quad 1 \leq i \leq n-1, \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

étendue linéairement et multiplicativement, est un morphisme d'algèbres.

DÉMONSTRATION. La vérification de la première et de la dernière relation de 3.1.1 suit directement de la définition de Φ . La deuxième est la même que pour le groupe de tresses et sa vérification est faite dans la preuve de la proposition 2.5.2. Finalement, pour la troisième, en appliquant plusieurs fois de suite la relation de tresse, on a

$$\check{R}_0^2 \check{R}_1 \check{R}_0^2 \check{R}_1 = \begin{array}{c} \text{L}_q(i) \otimes \text{L}_q(1) \otimes \text{L}_q(1) \\ \text{Diagram 1} \\ \text{L}_q(i) \otimes \text{L}_q(1) \otimes \text{L}_q(1) \end{array} = \begin{array}{c} \text{L}_q(i) \otimes \text{L}_q(1) \otimes \text{L}_q(1) \\ \text{Diagram 2} \\ \text{L}_q(i) \otimes \text{L}_q(1) \otimes \text{L}_q(1) \end{array} = \begin{array}{c} \text{L}_q(i) \otimes \text{L}_q(1) \otimes \text{L}_q(1) \\ \text{Diagram 3} \\ \text{L}_q(i) \otimes \text{L}_q(1) \otimes \text{L}_q(1) \end{array} = \begin{array}{c} \text{L}_q(i) \otimes \text{L}_q(1) \otimes \text{L}_q(1) \\ \text{Diagram 4} \\ \text{L}_q(i) \otimes \text{L}_q(1) \otimes \text{L}_q(1) \end{array} = \check{R}_1 \check{R}_0^2 \check{R}_1 \check{R}_0^2,$$

ce qui termine la démonstration. □

Ce sont les morphismes obtenus par cette représentation du groupe de tresses de type B qu'on étudie plus en détail dans les prochaines sections, c'est-à-dire qu'on étudie l'algèbre suivante.

Définition 3.1.3. *Soient $i = r\ell + s$, avec $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ et $0 \leq s \leq \ell - 1$, et $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathcal{R}_{i,n}$ la sous-algèbre de $\text{End}_{\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)}(\mathbb{L}_q(i) \otimes \mathbb{L}_q(1)^{\otimes n})$ engendrée par les morphismes \check{R}_0^2 et \check{R}_i , $1 \leq i \leq n-1$. En d'autres mots, $\mathcal{R}_{i,n} := \text{Im}(\Phi)$.*

3.1.2. L'algèbre de Temperley–Lieb à une frontière

Pour montrer que l'algèbre $\mathcal{R}_{i,n}$ satisfait des relations supplémentaires et que la représentation Φ se factorise par l'algèbre de Temperley–Lieb à une frontière, on a besoin d'examiner plus en détail l'action de l'endomorphisme \check{R}_0^2 sur les deux premiers facteurs $\mathbb{L}_q(i) \otimes \mathbb{L}_q(1)$ du produit tensoriel. Les règles de fusion données à la proposition 2.3.12 permettent de décrire explicitement cette action.

Proposition 3.1.4. *Soit $i = r\ell + s$, où $r \geq 0$ et $0 \leq s < \ell - 1$. Alors l'action de $\check{R}_0^2 \in \text{End}_{\mathcal{L}U_q(s\ell_2)}(\mathbf{L}_q(i) \otimes \mathbf{L}_q(1))$ est donnée par*

$$\check{R}_0^2 = \begin{cases} q^i \cdot \mathbf{id}_{\mathbf{L}_q(i+1)} & \text{si } s = 0, \\ q^{\mathbf{d}i} \cdot \mathbf{id}_{\mathbf{L}_q(i-1)} + q^i \cdot \mathbf{id}_{\mathbf{L}_q(i+1)} & \text{si } 0 < s < \ell - 1. \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Comme $\mathbf{L}_q(i) \otimes \mathbf{L}_q(1)$ est un module simple ou une somme de deux modules simples non isomorphes, \check{R}_0^2 agit comme un multiple de l'identité sur chacun d'eux et il suffit de calculer ses valeurs propres pour caractériser complètement son action.

Selon la preuve du théorème 2.3.12 et en gardant la même notation, la copie de $\mathbf{L}_q(i+1) \subset \mathbf{L}_q(i) \otimes \mathbf{L}_q(1)$ est engendrée par $m_{\ell-s-1} \otimes x_0$. Sur ce vecteur, on a

$$\begin{aligned} \check{R}_0^2(m_{\ell-s-1} \otimes x_0) &= \tau \circ R_{\mathbf{L}_q(1), \mathbf{L}_q(i)} \circ \tau \circ R_{\mathbf{L}_q(i), \mathbf{L}_q(1)}(m_{\ell-s-1} \otimes x_0) \\ &= \tau \circ R_{\mathbf{L}_q(1), \mathbf{L}_q(i)} \circ \tau \left(e^{\frac{1}{2}H \otimes H} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{1}{2}n(n+1)}(1-q^{-2})^n}{[n]_q!} F^n \cdot m_{\ell-s-1} \otimes E^n \cdot x_0 \right) \\ &= \tau \circ R_{\mathbf{L}_q(1), \mathbf{L}_q(i)} \circ \tau \left(q^{\frac{i}{2}} m_{\ell-s-1} \otimes x_0 \right) \\ &= q^{\frac{i}{2}} \tau \left(e^{\frac{1}{2}H \otimes H} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{1}{2}n(n+1)}(1-q^{-2})^n}{[n]_q!} F^n \cdot x_0 \otimes E^n \cdot m_{\ell-s-1} \right) \\ &= q^i m_{\ell-s-1} \otimes x_0, \end{aligned}$$

d'où la valeur propre sur le sous-module isomorphe à $\mathbf{L}_q(i+1)$ est q^i . Si $s = 0$, nous avons terminé. Sinon, un vecteur qui engendre la copie de $\mathbf{L}_q(i-1) \subset \mathbf{L}_q(i) \otimes \mathbf{L}_q(1)$ est donné par $m_{\ell-s-1} \otimes x_1 + q^{s-\ell} m_{\ell-s} \otimes x_0$. Sur ce vecteur, on a

$$\begin{aligned} \check{R}_0^2(m_{\ell-s-1} \otimes x_1 + q^{s-\ell} m_{\ell-s} \otimes x_0) &= \tau \circ R_{\mathbf{L}_q(1), \mathbf{L}_q(i)} \circ \tau \circ R_{\mathbf{L}_q(i), \mathbf{L}_q(1)}(m_{\ell-s-1} \otimes x_1 + q^{s-\ell} m_{\ell-s} \otimes x_0) \\ &= \tau \circ R_{\mathbf{L}_q(1), \mathbf{L}_q(i)} \circ \tau \left(e^{\frac{1}{2}H \otimes H} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{1}{2}n(n+1)}(1-q^{-2})^n}{[n]_q!} F^n \cdot m_{\ell-s-1} \otimes E^n \cdot x_1 \right. \\ &\quad \left. + q^{s-\ell} e^{\frac{1}{2}H \otimes H} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{1}{2}n(n+1)}(1-q^{-2})^n}{[n]_q!} F^n \cdot m_{\ell-s} \otimes E^n \cdot x_0 \right) \\ &= \tau \circ R_{\mathbf{L}_q(1), \mathbf{L}_q(i)} \circ \tau \left(q^{\frac{-i}{2}} m_{\ell-s-1} \otimes x_1 \right. \\ &\quad \left. + q^{\frac{i-2}{2}} ([\ell-s]_q (q - q^{-1}) + q^{s-\ell}) m_{\ell-s} \otimes x_0 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= q^{-\frac{i}{2}} \tau \left(e^{\frac{1}{2}H \otimes H} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{1}{2}n(n+1)}(1-q^{-2})^n}{[n]_q!} F^n \cdot x_1 \otimes E^n \cdot m_{\ell-s-1} \right) \\
&\quad + q^{\frac{i-2}{2}} ([\ell-s]_q(q-q^{-1}) + q^{s-\ell}) \left(e^{\frac{1}{2}H \otimes H} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{1}{2}n(n+1)}(1-q^{-2})^n}{[n]_q!} F^n \cdot x_0 \otimes E^n \cdot m_{\ell-s} \right) \\
&= q^{-i} m_{\ell-s-1} \otimes x_1 + q^{i-2} ([\ell-s]_q(q-q^{-1}) + q^{s-\ell}) m_{\ell-s} \otimes x_0 \\
&\quad + q^{-1} ([\ell-s]_q(q-q^{-1}) + q^{s-\ell}) ([\mathbf{d}_i - (\ell-s-1)]_q(q-q^{-1})) m_{\ell-s-1} \otimes x_1 \\
&= q^{\mathbf{d}_i} (m_{\ell-s-1} \otimes x_1 + q^{s-\ell} m_{\ell-s} \otimes x_0),
\end{aligned}$$

où on a utilisé les propriétés des q -nombres et le fait que $q^{2\ell} = 1$ à la dernière égalité. Alors, la valeur propre sur le sous-module isomorphe à $L_q(i-1)$ est $q^{\mathbf{d}_i}$, et l'énoncé de la proposition suit directement. \square

Cette proposition permet alors de vérifier que l'action du groupe de tresses de type B introduite à la section précédente se factorise bel et bien par l'algèbre de Temperley–Lieb à une frontière.

Proposition 3.1.5. *Soit $i = r\ell + s$, où $r \geq 0$ et $0 \leq s < \ell - 1$. L'application*

$$\rho : \text{TLb}_n(\beta_q, [i+1]_q, [i]_q) \rightarrow \text{End}_{\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)}(L_q(i) \otimes L_q(1)^{\otimes n})$$

définie sur les générateurs par

$$\begin{aligned}
\rho(e_0) &= \frac{1}{1-q^{-2}}(q^i - \check{R}_0^2), \\
\rho(e_k) &= q - q^{\frac{1}{2}} \check{R}_k \quad (\text{si } k \geq 1),
\end{aligned}$$

et étendue linéairement et multiplicativement, est un morphisme d'algèbres et on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{C}\Gamma_n & \xrightarrow{\mu} & \text{TLb}_n(\beta_q, [i+1]_q, [i]_q) \\
& \searrow \Phi & \downarrow \rho \\
& & \text{End}_{\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)}(L_q(i) \otimes L_q(1)^{\otimes n})
\end{array} ,$$

où μ est le morphisme défini par $\mu(T_k) = q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}e_k$ et $\mu(\xi_1) = q^i - (1-q^{-2})e_0$.

DÉMONSTRATION. Il suffit de vérifier que cette définition de ρ respecte les relations de l'algèbre de Temperley–Lieb à une frontière données à l'équation (1.4.1). Il suit de la représentation de Temperley–Lieb donnée à la proposition 2.5.7 que les relations impliquant

seulement les générateurs e_1, e_2, \dots, e_{n-1} sont vérifiées. Il ne reste alors que les deux dernières relations de (1.4.1). Pour la première, en appliquant la proposition 3.1.4, on a

$$\rho(e_0)|_{\mathbf{L}_q(i+1)} = \frac{1}{1 - q^{-2}}(q^i - q^i) = 0,$$

d'où $\rho(e_0)^2|_{\mathbf{L}_q(i+1)} = 0 = [i + 1]_q \rho(e_0)|_{\mathbf{L}_q(i+1)}$, ce qui conclut la vérification dans le cas où $s = 0$. Si $s \geq 1$, en appliquant encore la proposition 3.1.4, on a

$$\begin{aligned} [i + 1]_q \rho(e_0)|_{\mathbf{L}_q(i-1)} &= \frac{q^{i+1} - q^{i-1}}{q - q^{-1}} \cdot \frac{1}{1 - q^{-2}}(q^i - q^{\mathbf{d}_i}) \cdot \mathbf{id}_{\mathbf{L}_q(i-1)} \\ &= \frac{q^i - q^{-i-2}}{(1 - q^{-2})^2}(q^i - q^{\mathbf{d}_i}) \cdot \mathbf{id}_{\mathbf{L}_q(i-1)} \\ &= \frac{(q^i - q^{-r\ell-s-2})(q^i - q^{\mathbf{d}_i})}{(1 - q^{-2})^2} \cdot \mathbf{id}_{\mathbf{L}_q(i-1)} \\ &= \frac{(q^i - q^{(r+2)\ell-s-2})(q^i - q^{\mathbf{d}_i})}{(1 - q^{-2})^2} \cdot \mathbf{id}_{\mathbf{L}_q(i-1)} \quad (\text{car } q^{2(r+1)\ell} = 1) \\ &= \left(\frac{q^i - q^{\mathbf{d}_i}}{1 - q^{-2}} \right)^2 \cdot \mathbf{id}_{\mathbf{L}_q(i-1)} \\ &= \rho(e_0)^2|_{\mathbf{L}_q(i-1)}, \end{aligned}$$

ce qui termine la vérification de la première relation dans tous les cas. Pour la seconde, on note d'abord que $\mathbf{L}_q(1) \otimes \mathbf{L}_q(1) \cong \mathbf{L}_q(0) \oplus \mathbf{L}_q(2)$ et que

$$\rho(e_1)|_{\mathbf{L}_q(0)} = (q + q^{-1}) \cdot \mathbf{id}_{\mathbf{L}_q(0)}, \quad \rho(e_1)|_{\mathbf{L}_q(2)} = 0.$$

Pour vérifier la relation $e_1 e_0 e_1 = [i]_q e_1$, on n'a donc qu'à examiner l'action des images par ρ des deux côtés de cette égalité sur le sous-module

$$\mathbf{L}_q(i) \otimes \mathbf{L}_q(0) \subset \mathbf{L}_q(i) \otimes (\mathbf{L}_q(0) \oplus \mathbf{L}_q(2)) \cong \mathbf{L}_q(i) \otimes \mathbf{L}_q(1) \otimes \mathbf{L}_q(1).$$

Ce dernier est engendré par le vecteur $v := m_{\ell-s-1} \otimes (q^{-1}x_0 \otimes x_1 - x_1 \otimes x_0)$, où le vecteur $q^{-1}x_0 \otimes x_1 - x_1 \otimes x_0$ engendre le sous-module isomorphe à $\mathbf{L}_q(0)$ dans $\mathbf{L}_q(1) \otimes \mathbf{L}_q(1)$, sur lequel on a

$$\rho(e_1)v = (q + q^{-1})v$$

et

$$\begin{aligned} \check{R}_0^2(v) &= \tau \circ R_{\mathbf{L}_q(i), \mathbf{L}_q(1)} \circ \tau \left(q^{\frac{i-2}{2}} m_{\ell-s-1} \otimes x_0 \otimes x_1 - q^{\frac{i}{2}} m_{\ell-s-1} \otimes x_1 \otimes x_0 \right. \\ &\quad \left. - q^{\frac{i-2}{2}} (q^{\ell-s} - q^{s-\ell}) m_{\ell-s} \otimes x_0 \otimes x_0 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= q^{i-1}m_{\ell-s-1} \otimes x_0 \otimes x_1 - q^{-i}m_{\ell-s-1} \otimes x_1 \otimes x_0 - q^{i-2}(q^{\ell-s} - q^{s-\ell})m_{\ell-s} \otimes x_0 \otimes x_0 \\
&\quad - q^{-1}(q^{i+\ell-s-1} - q^{-i-\ell+s+1})m_{\ell-s-1} \otimes x_1 \otimes x_0,
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\rho(e_0)v &= \frac{1}{1-q^{-2}} (q^i - \check{R}_0^2) v \\
&= \frac{1}{1-q^{-2}} \left((-q^i + q^{-i} + q^{-1}(q^{\ell-s} - q^{s-\ell}))(q^{i+\ell-s-1} - q^{-i-\ell+s+1})m_{\ell-s-1} \otimes x_1 \otimes x_0 \right. \\
&\quad \left. + q^{i-2}(q^{\ell-s} - q^{s-\ell})m_{\ell-s} \otimes x_0 \otimes x_0 \right).
\end{aligned}$$

On a ensuite

$$\rho(e_1)(m_{\ell-s-1} \otimes x_1 \otimes x_0) = qm_{\ell-s-1} \otimes x_1 \otimes x_0 - m_{\ell-s-1} \otimes x_0 \otimes x_1 = -qv$$

et

$$\rho(e_1)(m_{\ell-s} \otimes x_0 \otimes x_0) = 0,$$

donc on obtient

$$\begin{aligned}
\rho(e_1)\rho(e_0)\rho(e_1)v &= \frac{-q(q+q^{-1})}{1-q^{-2}} (-q^i + q^{-i} + q^{-1}(q^{\ell-s} - q^{s-\ell}))(q^{i+\ell-s-1} - q^{-i-\ell+s+1})v \\
&= \frac{-q(q+q^{-1})}{1-q^{-2}} (q^{r\ell-s-2} - q^{r\ell+s-2})v \\
&= \frac{q+q^{-1}}{q-q^{-1}} (q^{r\ell+s} - q^{r\ell-s})v \\
&= \frac{q+q^{-1}}{q-q^{-1}} (q^{r\ell+s} - q^{-r\ell-s})v \quad (\text{car } q^{2r\ell} = 1) \\
&= [i]_q(q+q^{-1})v,
\end{aligned}$$

d'où $\rho(e_1)\rho(e_0)\rho(e_1) = [i]_q\rho(e_1)$, tel que désiré. \square

L'étude de l'algèbre $\mathcal{R}_{i,n}$ se réduit donc à examiner l'action de $\text{TLb}_n(\beta_q, [i+1]_q, [i]_q)$ via le morphisme ρ de la proposition ci-haut, c'est-à-dire que $\mathcal{R}_{i,n} \cong \text{Im } \rho$.

3.2. L'algèbre $\mathcal{R}_{i,n}$ comme quotient de l'algèbre de Temperley–Lieb à une frontière

On cherche maintenant à identifier le noyau de la représentation de l'algèbre de Temperley–Lieb à une frontière introduite à la proposition 3.1.5, pour pouvoir écrire l'algèbre $\mathcal{R}_{i,n}$ comme

un quotient de \mathbf{TLb}_n . Ce noyau dépend principalement de l'indice du simple $L_q(i)$ apparaissant dans le produit $L_q(i) \otimes L_q(1)^{\otimes n}$ ainsi que, bien sûr, du ℓ tel que $q^{2\ell} = 1$. Pour toute la section, on fixe les hypothèses suivantes.

Hypothèses 3.2.1. Soient $i = r\ell + s$ avec $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $0 \leq s \leq \ell - 2$ et $n \in \mathbb{N}$.

Notons que le cas $s = \ell - 1$ est exclu, car dans ce cas, $L_q(i) \cong \Delta_q(i) \cong P_q(i)$ et l'algèbre des endomorphismes de l'espace correspondant sera étudiée au chapitre 4. La présente section est consacrée à la preuve du théorème suivant.

Théorème 3.2.2. *Sous les hypothèses 3.2.1, on a*

$$\mathcal{R}_{i,n} \cong \frac{\mathbf{TLb}_n(\beta_q, [i+1]_q, [i]_q)}{\langle \widehat{\mathfrak{p}}_{s+1}^- \rangle},$$

où $\langle \widehat{\mathfrak{p}}_{s+1}^- \rangle$ est l'idéal engendré par le préidempotent de Jones–Wenzl $\widehat{\mathfrak{p}}_{s+1}^-$ dans \mathbf{TLb}_n .

La preuve se fera par récurrence sur s . De multiples résultats préliminaires seront nécessaires avant de pouvoir entamer la démonstration. On commence par le cas de base $s = 0$, c'est-à-dire $i \equiv 0 \pmod{\ell}$.

Lemme 3.2.3. *Soient $i = r\ell$ avec $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $n \in \mathbb{N}$ et*

$$\rho : \mathbf{TLb}_n(\beta_q, [i+1]_q, [i]_q) \rightarrow \text{End}_{\mathcal{LU}_q(\mathfrak{sl}_2)}(L_q(i) \otimes L_q(1)^{\otimes n})$$

la représentation de la proposition 3.1.5. Alors $\text{Ker } \rho = \langle \widehat{\mathfrak{p}}_1^- \rangle$ et $\text{Im } \rho \cong \mathbf{TL}_n(\beta_q)$.

DÉMONSTRATION. D'une part, dans ce cas, la proposition 3.1.4 donne

$$\check{R}_0^2 = q^i \cdot \mathbf{id}_{L_q(i+1)} \otimes \mathbf{id}_{L_q(1)^{\otimes n-1}} = q^i \cdot \mathbf{id}_{L_q(i) \otimes L_q(1)^{\otimes n}},$$

d'où

$$\rho(e_0) = \frac{1}{1 - q^{-2}}(q^i - \check{R}_0^2) = 0.$$

On en déduit que $\langle e_0 \rangle \subseteq \text{Ker } \rho$. D'autre part, en restreignant le morphisme ρ aux générateurs e_1, e_2, \dots, e_{n-1} de \mathbf{TLb}_n , la dualité de Schur–Weyl garantit que $\dim \text{Im } \rho \geq \dim \mathbf{TL}_n(\beta_q)$. Comme $\mathbf{TLb}_n(\beta_q, [i+1]_q, [i]_q) / \langle e_0 \rangle \cong \mathbf{TL}_n(\beta_q)$, on conclut que $\langle e_0 \rangle = \text{Ker } \rho$. L'énoncé du lemme suit en notant que $e_0 = \widehat{\mathfrak{p}}_1^-$. \square

Lemme 3.2.4. *Sous les hypothèses 3.2.1, soit $\mathbf{pr} \in \text{End}_{\mathcal{LU}_q(\mathfrak{sl}_2)}(L_q(i) \otimes L_q(1))$ le morphisme de projection sur le facteur direct $L_q(i+1)$. Alors, on a*

$$\text{End}_{\mathcal{LU}_q(\mathfrak{sl}_2)}(L_q(i+1) \otimes L_q(1)^{\otimes n}) \cong \mathbf{pr} \text{End}_{\mathcal{LU}_q(\mathfrak{sl}_2)}(L_q(i) \otimes L_q(1)^{\otimes n+1}) \mathbf{pr},$$

où

$$\mathbf{pr} \operatorname{End}_{\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)}(\mathbf{L}_q(i) \otimes \mathbf{L}_q(1)^{\otimes n+1}) \mathbf{pr} = \{\mathbf{pr} \circ f \circ \mathbf{pr} \mid f \in \operatorname{End}_{\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)}(\mathbf{L}_q(i) \otimes \mathbf{L}_q(1))\}$$

et où on fait un abus de notation en considérant $\mathbf{pr} \in \operatorname{End}_{\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)}(\mathbf{L}_q(i) \otimes \mathbf{L}_q(1)^{\otimes n+1})$ comme étant le morphisme $\mathbf{pr} \otimes \mathbf{id}_{\mathbf{L}_q(1)}^{\otimes n}$.

DÉMONSTRATION. D'abord, si $s = 0$, on a $\mathbf{L}_q(i) \otimes \mathbf{L}_q(1) \cong \mathbf{L}_q(i+1)$ et \mathbf{pr} est le morphisme identité, d'où

$$\begin{aligned} \mathbf{pr} \operatorname{End}_{\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)}(\mathbf{L}_q(i) \otimes \mathbf{L}_q(1)^{\otimes n+1}) \mathbf{pr} &\cong \operatorname{End}_{\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)}(\mathbf{L}_q(i) \otimes \mathbf{L}_q(1)^{\otimes n+1}) \\ &\cong \operatorname{End}_{\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)}(\mathbf{L}_q(i+1) \otimes \mathbf{L}_q(1)^{\otimes n}). \end{aligned}$$

Si $s \geq 1$, des propriétés habituelles des espaces de morphismes, on a

$$\begin{aligned} \operatorname{End}_{\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)}(\mathbf{L}_q(i) \otimes \mathbf{L}_q(1)^{\otimes n+1}) &\cong \operatorname{End}_{\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)}((\mathbf{L}_q(i-1) \oplus \mathbf{L}_q(i+1)) \otimes \mathbf{L}_q(1)^{\otimes n}) \\ &\cong \operatorname{End}_{\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)}(\mathbf{L}_q(i-1) \otimes \mathbf{L}_q(1)^{\otimes n}) \\ &\quad \oplus \operatorname{Hom}_{\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)}(\mathbf{L}_q(i-1) \otimes \mathbf{L}_q(1)^{\otimes n}, \mathbf{L}_q(i+1) \otimes \mathbf{L}_q(1)^{\otimes n}) \\ &\quad \oplus \operatorname{Hom}_{\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)}(\mathbf{L}_q(i+1) \otimes \mathbf{L}_q(1)^{\otimes n}, \mathbf{L}_q(i-1) \otimes \mathbf{L}_q(1)^{\otimes n}) \\ &\quad \oplus \operatorname{End}_{\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)}(\mathbf{L}_q(i+1) \otimes \mathbf{L}_q(1)^{\otimes n}). \end{aligned}$$

En précomposant et en postcomposant avec le morphisme \mathbf{pr} , tous ces termes s'annulent sauf pour le dernier, d'où on obtient

$$\mathbf{pr} \operatorname{End}_{\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)}(\mathbf{L}_q(i) \otimes \mathbf{L}_q(1)^{\otimes n+1}) \mathbf{pr} \cong \operatorname{End}_{\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)}(\mathbf{L}_q(i+1) \otimes \mathbf{L}_q(1)^{\otimes n})$$

comme espaces vectoriels. Finalement, puisque $\mathbf{pr} \circ \mathbf{pr} = \mathbf{pr}$ et que ce morphisme est l'identité sur le sous-module de $\mathbf{L}_q(i) \otimes \mathbf{L}_q(1)^{\otimes n+1}$ isomorphe à $\mathbf{L}_q(i+1) \otimes \mathbf{L}_q(1)^{\otimes n}$, il est clair que la composition se fait de la même façon dans les deux espaces et donc que c'est également un isomorphisme d'algèbres. \square

Il sera utile de connaître un élément de l'algèbre $\mathbb{T}\mathbf{Lb}_n(\beta_q, [i+1]_q, [i]_q)$ qui est envoyé par ρ sur la projection \mathbf{pr} .

Lemme 3.2.5. *Sous les hypothèses 3.2.1 et avec ρ la représentation de Temperley–Lieb à une frontière introduite plus tôt, on a $\rho(\pi) = \mathbf{pr}$, où $\pi = \left(\mathbf{1} - \frac{e_0}{[i+1]_q} \right)$.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de considérer le cas $n = 1$, c'est-à-dire le module $L_q(i) \otimes L_q(1)$. Si $s = 0$, on sait déjà que $\rho(e_0) = 0$ par la preuve du lemme 3.2.3 et alors $\rho(\pi) = \mathbf{id}_{L_q(i) \otimes L_q(1)}$, ce qui est le résultat voulu, car $L_q(i) \otimes L_q(1) \cong L_q(i+1)$. Sinon, on a

$$\rho(e_0)|_{L_q(i+1)} = 0 \quad \text{et} \quad \rho(e_0)|_{L_q(i-1)} = [i+1]_q \cdot \mathbf{id}_{L_q(i-1)}$$

par la preuve de la proposition 3.1.5, d'où on déduit

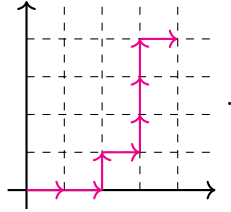
$$\rho(\pi) = \rho\left(\mathbf{1} - \frac{e_0}{[i+1]_q}\right) = \mathbf{id}_{L_q(i-1) \oplus L_q(i+1)} - \frac{[i+1]_q}{[i+1]_q} \cdot \mathbf{id}_{L_q(i-1)} = \mathbf{pr},$$

tel que désiré. □

Avant de continuer, il est nécessaire de montrer quelques résultats concernant les dimensions de \mathbf{TLb}_n et d'une certaine sous-algèbre. Les définitions et les calculs qui suivent s'inspirent de la section 1.3 de [HT18]. Il sera utile de faire le lien entre les diagrammes décorés de \mathbf{TLb}_n et les objets suivants.

Définition 3.2.6. Une (n, m) -trajectoire croissante est une marche sur \mathbb{Z}^2 de $(0, 0)$ à (n, m) où chaque pas est fait vers la droite ou vers le haut.

On les représente par une suite de flèches dans \mathbb{Z}^2 , comme dans le dessin suivant d'une $(4, 4)$ -trajectoire croissante :



Lemme 3.2.7. Le nombre de (n, m) -trajectoires croissantes est donné par $\binom{n+m}{n}$.

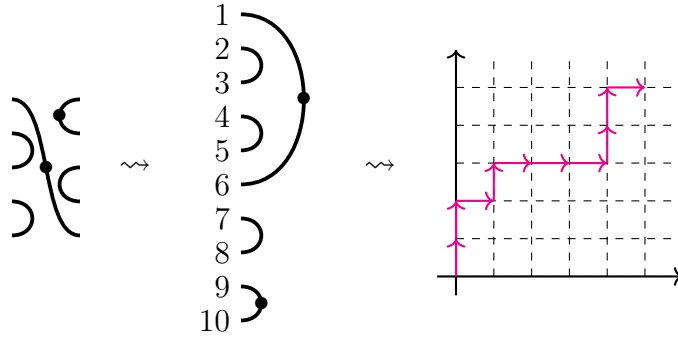
DÉMONSTRATION. Une (n, m) -trajectoire croissante est formée de $n + m$ pas, dont exactement n sont vers la droite et dont les autres sont vers le haut. □

La correspondance entre un (n, n) -diagramme décoré D et une (n, n) -trajectoire croissante est faite de la façon suivante :

- (1) On fait de D un $(2n, 0)$ -diagramme en faisant faire une rotation de 180° dans le sens horaire à la frontière de droite, puis en la collant sous la frontière de gauche. On numérote les sites de 1 à $2n$ du haut vers le bas.

- (2) Si un lien décoré est ouvert au site i , le i -ième pas de la trajectoire correspondante est vers le haut. Si ce lien se referme au site j , pour tous les sites k entre i et j , le k -ième pas est vers le haut si k ouvre un lien et vers la droite si k ferme un lien. Puis, le j -ième pas est vers la droite.
- (3) Si un lien décorable non décoré est ouvert au site i , le i -ième pas est vers la droite. On suit ensuite la même procédure que ci-haut en remplaçant tous les pas vers le haut par des pas vers la droite et vice versa : si ce lien se referme au site j , pour tous les sites k entre i et j , le k -ième pas est vers la droite si k ouvre un lien et vers le haut si k ferme un lien. Puis, le j -ième pas est vers le haut.

Par exemple, pour le $(5, 5)$ -diagramme suivant, on obtient



Lemme 3.2.8. *La dimension de $\pi \text{TLb}_{n+1}(\beta_q, [i+1]_q, [i]_q)\pi$, où $\pi = \left(\mathbf{1} - \frac{e_0}{[i+1]_q}\right)$, est inférieure ou égale à $\binom{2n}{n}$.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer que le nombre de mots de la base de TLb_{n+1} qui restent non nuls lorsqu'on les multiplie par π à gauche et à droite est inférieur ou égal à $\binom{2n}{n}$. Pour ce faire, on compte un certain nombre de mots qui s'annulent dans $\pi \text{TLb}_{n+1}\pi$, à savoir ceux dont une expression commence ou se termine par le générateur e_0 . Puisque $\pi e_0 = e_0 \pi = 0$, ces mots s'annulent dans $\pi \text{TLb}_{n+1}\pi$. Notons qu'un élément possède une expression qui commence par e_0 si et seulement si le diagramme le représentant a un lien décoré s'ouvrant au premier site du haut à gauche, ce qui peut être vu par le dessin suivant : si w est un mot de TLb_{n+1} ,

$$e_0 w = \begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \\ \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \end{array} \boxed{w} .$$

Ainsi, selon la correspondance avec les $(n+1, n+1)$ -trajectoires croissantes exposée ci-haut, la trajectoire correspondant à un tel élément commence par un pas vers le haut. Le reste du diagramme est alors complètement déterminé par le reste de la trajectoire, de $(0, 1)$ à $(n+1, n+1)$, c'est-à-dire par la donnée d'une $(n+1, n)$ -trajectoire croissante. Il existe donc $\binom{2n+1}{n+1}$ éléments de \mathbf{TLb}_{n+1} dont une expression commence par e_0 . En répétant le même argument, ou bien en utilisant l'anti-involution de \mathbf{TLb}_{n+1} , on conclut qu'il existe aussi $\binom{2n+1}{n+1}$ éléments dont une expression se termine par e_0 . Finalement, pour les éléments dont une expression commence et se termine par e_0 , le premier et le dernier pas de la trajectoire correspondante sont fixés et ils sont donc en bijection avec les $\binom{2n}{n}$ (n, n) -trajectoires croissantes. Comme il y a $\binom{2n+2}{n+1}$ éléments de la base de \mathbf{TLb}_{n+1} , on conclut qu'il y a au maximum

$$\binom{2n+2}{n+1} - 2\binom{2n+1}{n+1} + \binom{2n}{n} = \binom{2n}{n}$$

éléments de base non nuls dans $\pi\mathbf{TLb}_{n+1}\pi$, ce qui donne la borne voulue pour sa dimension. \square

Proposition 3.2.9. *Sous les hypothèses 3.2.1, l'application*

$$\varphi : \mathbf{TLb}_n(\beta_q, [i+2]_q, [i+1]_q) \rightarrow \pi\mathbf{TLb}_{n+1}(\beta_q, [i+1]_q, [i]_q)\pi$$

$$E_0 \mapsto [i+1]_q\pi e_1\pi$$

$$E_k \mapsto \pi e_{k+1}\pi \quad \text{pour } k \geq 1$$

$$\mathbf{1} \mapsto \pi$$

où $\pi = \left(\mathbf{1} - \frac{e_0}{[i+1]_q}\right)$ et où on note E_0, E_1, \dots, E_{n-1} les générateurs de $\mathbf{TLb}_n(\beta_q, [i+2]_q, [i+1]_q)$ et e_0, e_1, \dots, e_n ceux de $\mathbf{TLb}_{n+1}(\beta_q, [i+1]_q, [i]_q)$, est un isomorphisme d'algèbres.

DÉMONSTRATION. D'abord, notons que π est un idempotent :

$$\begin{aligned} \pi \cdot \pi &= \left(\mathbf{1} - \frac{e_0}{[i+1]_q}\right) \left(\mathbf{1} - \frac{e_0}{[i+1]_q}\right) = \mathbf{1} - 2\frac{e_0}{[i+1]_q} + \frac{e_0^2}{[i+1]_q^2} \\ &= \mathbf{1} - 2\frac{e_0}{[i+1]_q} + \frac{[i+1]_q e_0}{[i+1]_q^2} = \pi. \end{aligned}$$

On peut alors vérifier que φ préserve toutes les relations de \mathbf{TLb}_n données à l'équation (1.4.1) : pour $i \geq 1$,

$$\varphi(E_i^2) = \varphi(E_i)\varphi(E_i) = \pi e_{i+1}\pi^2 e_{i+1}\pi = \pi e_{i+1}^2\pi = \beta_q\pi e_{i+1}\pi = \beta_q\varphi(E_i),$$

car π commute avec e_{i+1} pour tout $i \geq 1$. Pour cette même raison, on a $\varphi(E_i E_{i\pm 1} E_i) = \varphi(E_i)$ pour tout $i \geq 1$, $\varphi(E_i E_j) = \varphi(E_j E_i)$ pour tous $i, j \geq 1$ tels que $|i - j| > 1$ et, pour $i \geq 2$,

$$\varphi(E_0 E_i) = \pi e_1 \pi^2 e_{i+1} \pi = \pi e_1 e_{i+1} \pi = \pi e_{i+1} e_1 \pi = \pi e_{i+1} \pi^2 e_1 \pi = \varphi(E_i E_0).$$

Ensuite, on a

$$\varphi(E_1 E_0 E_1) = [i+1]_q \pi e_2 \pi e_1 \pi e_2 \pi = \pi e_2 e_1 e_2 \pi = \pi e_2 \pi = [i+1]_q \varphi(E_1)$$

et

$$\begin{aligned} \varphi(E_0^2) &= [i+1]_q^2 \pi e_1 \pi e_1 \pi = [i+1]_q^2 \pi e_1 \left(\mathbf{1} - \frac{e_0}{[i+1]_q} \right) e_1 \pi \\ &= [i+1]_q^2 \pi \left(\beta_q e_1 - \frac{[i]_q}{[i+1]_q} e_1 \right) \pi \\ &= [i+1]_q^2 \left(\beta_q - \frac{[i]_q}{[i+1]_q} \right) \pi e_1 \pi \\ &= [i+2]_q [i+1]_q \pi e_1 \pi \\ &= [i+2]_q \varphi(E_0), \end{aligned}$$

où on a utilisé la propriété 2 de la proposition 1.1.2 et le fait que $\beta_q = [2]_q$ à l'avant-dernière égalité. On conclut finalement que φ est un morphisme d'algèbres. Il reste à montrer qu'il est bijectif.

Soit \mathfrak{M} la base de mots de TLb_n , mis sous forme normale de Jones. Pour montrer que φ est injectif, il suffit de montrer que $\varphi(\mathfrak{M}) = \{\varphi(m) \mid m \in \mathfrak{M}\}$ est linéairement indépendant. De l'action de φ sur les générateurs, on voit que si $m \in \mathfrak{M}$ est un mot de longueur j contenant k fois E_0 , alors $\varphi(m)$ contient un mot de longueur $j+k+1$ contenant $k+1$ fois le générateur e_0 . Il est obtenu en rassemblant chaque π qu'il est possible de coller, puis en développant chacune des $k+1$ copies restantes de $\pi = \left(\mathbf{1} - \frac{e_0}{[i+1]_q} \right)$ et en choisissant dans chacune le terme en $-\frac{e_0}{[i+1]_q}$. Cela donne le mot voulu, qui est le plus long de $\varphi(m)$, multiplié par le scalaire non nul $\left(\frac{-1}{[i+1]_q} \right)^{k+1}$. En déplaçant au besoin les e_0 à l'intérieur du mot, il est alors sous forme normale de Jones. Par exemple, pour TLb_2 , on obtient les mots suivants.

m	$\varphi(m)$	Mot le plus long	Longueur
\emptyset	π	e_0	1
E_1	πe_2	$e_0 e_2$	2
E_0	$\pi e_1 \pi$	$e_0 e_1 e_0$	3
$E_0 E_1$	$\pi e_1 \pi e_2$	$e_0 e_1 e_0 e_2$	4
$E_1 E_0$	$\pi e_2 e_1 \pi$	$e_0 e_2 e_1 e_0$	4
$E_0 E_1 E_0$	$\pi e_1 \pi e_2 e_1 \pi$	$e_0 e_1 e_0 e_2 e_1 e_0$	6

Pour $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, on note \mathfrak{M}_k l'ensemble des $m \in \mathfrak{M}$ tels que leur mot le plus long dans $\varphi(m)$ est de longueur k . L'ensemble $\varphi(\mathfrak{M}_k)$ est nécessairement linéairement indépendant. En effet, le mot le plus long de ces $\varphi(m)$ est déjà sous forme de Jones et si l'on retire les e_0 de l'écriture, on obtient les mots originaux m , avec les indices des générateurs décalés de 1, qui sont tous différents. Ensuite, pour tout $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, chaque $\varphi(m) \in \varphi(\mathfrak{M}_k)$ est clairement linéairement indépendant de l'ensemble $\varphi(\mathfrak{M}_{<k})$, où $\mathfrak{M}_{<k} := \bigcup_{k' < k} \mathfrak{M}_{k'}$. On peut ainsi ajouter de façon inductive les éléments $\varphi(m)$, en ordre croissant de leur mot le plus long, pour conclure que l'ensemble $\varphi(\mathfrak{M})$ obtenu est linéairement indépendant. Ainsi, φ est injectif.

Finalement, a montré au lemme 3.2.8 que

$$\dim \pi \mathrm{TLb}_{n+1}(\beta_q, [i+1]_q, [i]_q) \pi \leq \binom{2n}{n} = \dim \mathrm{TLb}_n(\beta_q, [i+2]_q, [i+1]_q),$$

d'où il suit de l'injectivité de φ que le morphisme est également surjectif. \square

On veut utiliser les résultats ci-haut pour déterminer récursivement le noyau de la représentation de TLb_n . Pour ce faire, il faut d'abord s'assurer que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{TLb}_n(\beta_q, [i+2]_q, [i+1]_q) & \xrightarrow{\varphi} & \pi \mathrm{TLb}_{n+1}(\beta_q, [i+1]_q, [i]_q) \pi \\
\rho \downarrow & & \downarrow \rho' \\
\mathrm{End}_{\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)}(\mathbf{L}_q(i+1) \otimes \mathbf{L}_q(1)^{\otimes n}) & \xleftarrow{\sim} & \mathbf{pr} \mathrm{End}_{\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)}(\mathbf{L}_q(i) \otimes \mathbf{L}_q(1)^{\otimes n+1}) \mathbf{pr}
\end{array} \tag{3.2.1}$$

commute, où φ est l'isomorphisme du lemme 3.2.9, ρ et ρ' sont respectivement les représentations de TLb_n et de TLb_{n+1} de la proposition 3.1.5 et l'isomorphisme du bas est celui du lemme 3.2.4.

Proposition 3.2.10. *Le diagramme (3.2.1) commute.*

DÉMONSTRATION. Conservant la notation du lemme 3.2.9, on note E_0, E_1, \dots, E_{n-1} les générateurs de $\mathrm{TLb}_n(\beta_q, [i+2]_q, [i+1]_q)$ et e_0, e_1, \dots, e_n ceux de $\mathrm{TLb}_{n+1}(\beta_q, [i+1]_q, [i]_q)$. Il

suffit de montrer que les générateurs E_0, \dots, E_{n-1} sont envoyés vers le même morphisme dans $\text{End}_{\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)}(\mathbf{L}_q(i+1) \otimes \mathbf{L}_q(1)^{\otimes n})$ peu importe le chemin emprunté dans le diagramme.

D'abord, pour $k \geq 1$, on a $\rho(E_k) = q - q^{\frac{1}{2}}\check{R}_k$, où \check{R}_k agit sur les k -ième et $(k+1)$ -ième copies de $\mathbf{L}_q(1)$. Suivant l'autre direction, on a

$$\rho'(\varphi(E_k)) = \rho'(\pi e_{k+1} \pi) = \mathbf{pr} \circ (q - q^{\frac{1}{2}}\check{R}_{k+1}) \circ \mathbf{pr},$$

où \check{R}_{k+1} agit sur les $(k+1)$ -ième et $(k+2)$ -ième copies de $\mathbf{L}_q(1)$ dans $\mathbf{L}_q(i) \otimes \mathbf{L}_q(1)^{\otimes n+1}$. Or, ces dernières deviennent les k -ième et $(k+1)$ -ième copies dans $\mathbf{L}_q(i+1) \otimes \mathbf{L}_q(1)^{\otimes n}$ sous l'isomorphisme du bas du diagramme et on obtient donc bel et bien le même endomorphisme.

Ensuite, rappelons qu'on a

$$\mathbf{L}_q(i+1) \otimes \mathbf{L}_q(1)^{\otimes n} \cong (\mathbf{L}_q(i) \otimes \mathbf{L}_q(1)^{\otimes n-1}) \oplus (\mathbf{L}_q(i+2) \otimes \mathbf{L}_q(1)^{\otimes n-1}),$$

et par la proposition 3.1.4, on sait que $\rho(E_0) = \frac{1}{1-q^{-2}}(q^{i+1} - \check{R}_0^2)$ agit sur le premier sommand direct comme

$$\frac{q^{i+1} - q^{\mathbf{d}_{i+1}}}{1 - q^{-2}} \mathbf{id}_{\mathbf{L}_q(i) \otimes \mathbf{L}_q(1)^{\otimes n-1}} = [i+2]_q \mathbf{id}_{\mathbf{L}_q(i) \otimes \mathbf{L}_q(1)^{\otimes n-1}}$$

et annihile le second. Le module $\mathbf{L}_q(i) \otimes \mathbf{L}_q(1)^{\otimes n+1}$ se décompose comme

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_q(i) \otimes \mathbf{L}_q(1)^{\otimes n+1} &\cong (1 - \delta_{s,0})(\mathbf{L}_q(i-1) \otimes \mathbf{L}_q(1)^{\otimes n}) \oplus (\mathbf{L}_q(i+1) \otimes \mathbf{L}_q(1)^{\otimes n}) \\ &\cong (1 - \delta_{s,0})(\mathbf{L}_q(i-1) \otimes \mathbf{L}_q(1)^{\otimes n}) \oplus (\mathbf{L}_q(i) \otimes \mathbf{L}_q(1)^{\otimes n-1}) \\ &\quad \oplus (\mathbf{L}_q(i+2) \otimes \mathbf{L}_q(1)^{\otimes n-1}). \end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer que $\rho'(\varphi(E_0))$ agit par le même scalaire sur le sous-module isomorphe à $\mathbf{L}_q(i) \otimes \mathbf{L}_q(1)^{\otimes n-1}$ dans $\mathbf{L}_q(i+1) \otimes \mathbf{L}_q(1)^{\otimes n} \subset \mathbf{L}_q(i) \otimes \mathbf{L}_q(1)^{\otimes n+1}$ et comme 0 sur son complément. Comme $\rho'(\varphi(E_0)) = \rho'([i+1]_q \pi e_1 \pi) = [i+1]_q \cdot \mathbf{pr} \circ (q - q^{\frac{1}{2}}\check{R}_1) \circ \mathbf{pr}$, le morphisme obtenu est nul sur le sous-module isomorphe à $\mathbf{L}_q(i-1) \otimes \mathbf{L}_q(1)^{\otimes n}$. De plus, il agit comme un multiple de l'identité sur les $n-1$ dernières copies de $\mathbf{L}_q(1)$, donc il suffit de s'attarder au module

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_q(i) \otimes \mathbf{L}_q(1) \otimes \mathbf{L}_q(1) &\cong (1 - \delta_{s,0})(\mathbf{L}_q(i-1) \otimes \mathbf{L}_q(1)) \oplus (\mathbf{L}_q(i+1) \otimes \mathbf{L}_q(1)) \\ &\cong (1 - \delta_{s,0})(\mathbf{L}_q(i-1) \otimes \mathbf{L}_q(1)) \oplus \mathbf{L}_q(i) \oplus \mathbf{L}_q(i+2). \end{aligned}$$

On a déjà établi que le morphisme $\rho'(\varphi(E_0))$ est nul sur le premier sommand direct. En appliquant deux fois de suite la preuve du théorème 2.3.12, on peut vérifier que les sommands

directs isomorphes à $L_q(i+2)$ et $L_q(i)$ sont respectivement engendrés par les vecteurs

$$y = m_{\ell-s-1} \otimes x_0 \otimes x_0 \quad \text{et} \quad x = [\ell-s-1]_q m_{\ell-s-1} \otimes x_0 \otimes x_1 \\ + q^{s+1-\ell} (m_{\ell-s-1} \otimes x_1 + [\ell-s]_q q^{-1} m_{\ell-s} \otimes x_0) \otimes x_0.$$

Le morphisme \mathbf{pr} est l'identité sur ces deux vecteurs. Sur le premier, on a

$$(q - q^{\frac{1}{2}} \check{R}_1)(m_{\ell-s-1} \otimes x_0 \otimes x_0) = q m_{\ell-s-1} \otimes x_0 \otimes x_0 - q^{\frac{1}{2}} (q^{\frac{1}{2}} m_{\ell-s-1} \otimes x_0 \otimes x_0) = 0,$$

d'où $\rho'(\varphi(E_0))$ est nul sur la copie de $L_q(i+2)$. Finalement, sur le second, on a

$$(q - q^{\frac{1}{2}} \check{R}_1)x = [s+2-\ell]_q (q m_{\ell-s-1} \otimes x_1 \otimes x_0 - m_{\ell-s-1} \otimes x_0 \otimes x_1) := w,$$

puis

$$[i+1]_q \cdot \mathbf{pr}(w) = [s+2-\ell]_q (q[i+1]_q - [i]_q) m_{\ell-s-1} \otimes x_1 \otimes x_0 \\ - [s+2-\ell]_q [i+1]_q m_{\ell-s-1} \otimes x_0 \otimes x_1 \\ + [s+2-\ell]_q \frac{q^{i+\ell-s} - q^{i-\ell+s}}{q - q^{-1}} m_{\ell-s} \otimes x_0 \otimes x_0 \\ = [i+2]_q q^{s+1-\ell} m_{\ell-s-1} \otimes x_1 \otimes x_0 \\ + [i+2]_q [\ell-s-1]_q m_{\ell-s-1} \otimes x_0 \otimes x_1 \\ + [i+2]_q q^{s-\ell} [\ell-s]_q m_{\ell-s} \otimes x_0 \otimes x_0 \\ = [i+2]_q x,$$

où la deuxième égalité peut être vérifiée en développant toutes les expressions et en utilisant le fait que $q^{2\ell} = 1$. Ce dernier calcul montre que $\rho'(\varphi(E_0))$ agit comme le scalaire $[i+2]_q$ sur la copie de $L_q(i)$, tel que désiré. On en conclut que le diagramme (3.2.1) commute. \square

Lemme 3.2.11. *Avec les hypothèses 3.2.1 et φ l'isomorphisme du lemme 3.2.9, pour tout $1 \leq k \leq n$,*

$$\varphi(\widehat{\mathbf{P}}_{k+1}^-) = (-1)^k [i+1]_q \pi e_1 \cdots e_k \widehat{\mathbf{p}}_k^- e_{k+1} \cdots e_1 \pi,$$

où on différencie les préidempotents de Jones–Wenzl des deux algèbres de Temperley–Lieb à une frontière par l'utilisation de lettres majuscules et minuscules, suivant la même convention que plus haut pour les générateurs. En particulier, on obtient $\varphi(\widehat{\mathbf{P}}_{s+2}^-) \subseteq \pi(\widehat{\mathbf{p}}_{s+1}^-)\pi$.

DÉMONSTRATION. D'abord, notons que si on pose $\beta_0 = [i+1]_q$ et $\beta_1 = [i]_q$, on obtient

$$\delta_k = [k]_q \beta_1 - [k-1]_q \beta_0 = [k]_q [i]_q - [k-1]_q [i+1]_q = [i-k+1]_q,$$

où on a utilisé la quatrième propriété de la proposition 1.1.2. Alors, les coefficients apparaissant dans la relation de récurrence des préidempotents de Jones–Wenzl peuvent être réécrits comme

$$c_1^k = (-1)^{k-1} \delta_{k-1} = (-1)^{k-1} [i - k + 2]_q, \quad c_2^k = \prod_{j=0}^{k-3} \frac{1}{(-1)^j \delta_j} = \prod_{j=0}^{k-3} \frac{(-1)^j}{[i - j + 1]_q},$$

$$C_1^k = (-1)^{k-1} \delta_{k-1} = (-1)^{k-1} [i - k + 3]_q, \quad C_2^k = \prod_{j=0}^{k-3} \frac{1}{(-1)^j \delta_j} = \prod_{j=0}^{k-3} \frac{(-1)^j}{[i - j + 2]_q},$$

où on continue d'utiliser la même convention pour les lettres majuscules et minuscules.

On va montrer le lemme par récurrence sur l'indice k . Les cas de base $k = 1$ et $k = 2$ suivent d'un calcul direct. Ensuite, utilisant l'hypothèse d'induction, on a

$$\begin{aligned} \varphi(\widehat{\mathbf{P}}_{k+1}^-) &= \varphi(C_1^{k+1} \widehat{\mathbf{P}}_k^- + C_2^{k+1} \widehat{\mathbf{P}}_k^- E_k \widehat{\mathbf{P}}_k^-) \\ &= (-1)^k [i - k + 2]_q \varphi(\widehat{\mathbf{P}}_k^-) + \left(\prod_{j=0}^{k-2} \frac{(-1)^j}{[i - j + 2]_q} \right) \varphi(\widehat{\mathbf{P}}_k^-) \varphi(E_k) \varphi(\widehat{\mathbf{P}}_k^-) \\ &= (-1)^k [i - k + 2]_q (-1)^{k-1} [i + 1]_q \pi e_1 \cdots e_{k-1} \widehat{\mathbf{p}}_{k-1}^- e_k \cdots e_1 \pi \\ &\quad + \left(\prod_{j=0}^{k-2} \frac{(-1)^j}{[i - j + 2]_q} \right) [i + 1]_q^2 \pi e_1 \cdots e_{k-1} \widehat{\mathbf{p}}_{k-1}^- e_k \cdots e_1 \pi e_{k+1} \pi e_1 \cdots e_{k-1} \widehat{\mathbf{p}}_{k-1}^- e_k \cdots e_1 \pi \\ &= (-1)^k [i + 1]_q \pi e_1 \cdots e_k \left((-1)^{k-1} [i - k + 2]_q \widehat{\mathbf{p}}_{k-1}^- \right. \\ &\quad \left. + (-1)^k \left(\prod_{j=0}^{k-2} \frac{(-1)^j}{[i - j + 2]_q} \right) [i + 1]_q \widehat{\mathbf{p}}_{k-1}^- e_{k-1} \cdots e_1 \left(\mathbf{1} - \frac{e_0}{\beta_0} \right) e_1 \cdots e_{k-1} \widehat{\mathbf{p}}_{k-1}^- \right) e_{k+1} \cdots e_1 \pi \\ &= (-1)^k [i + 1]_q \pi e_1 \cdots e_k \left(c_1^k \widehat{\mathbf{p}}_{k-1}^- \right. \\ &\quad \left. + (-1)^k \left(\prod_{j=0}^{k-2} \frac{(-1)^j}{[i - j + 2]_q} \right) [i + 1]_q \left(\beta - \frac{\beta_1}{\beta_0} \right) \widehat{\mathbf{p}}_{k-1}^- e_{k-1} \widehat{\mathbf{p}}_{k-1}^- \right) e_{k+1} \cdots e_1 \pi \\ &= (-1)^k [i + 1]_q \pi e_1 \cdots e_k \left(c_1^k \widehat{\mathbf{p}}_{k-1}^- \right. \\ &\quad \left. + (-1)^k \left(\prod_{j=0}^{k-2} \frac{(-1)^j}{[i - j + 2]_q} \right) [i + 1]_q \left([2]_q - \frac{[i]_q}{[i + 1]_q} \right) \widehat{\mathbf{p}}_{k-1}^- e_{k-1} \widehat{\mathbf{p}}_{k-1}^- \right) e_{k+1} \cdots e_1 \pi \\ &= (-1)^k [i + 1]_q \pi e_1 \cdots e_k \left(c_1^k \widehat{\mathbf{p}}_{k-1}^- \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (-1)^k \left(\prod_{j=-1}^{k-3} \frac{(-1)^{j+1}}{[i-j+1]_q} \right) [i+2]_q \widehat{\mathfrak{p}}_{k-1}^- e_{k-1} \widehat{\mathfrak{p}}_{k-1}^- \Big) e_{k+1} \cdots e_1 \pi \\
& = (-1)^k [i+1]_q \pi e_1 \cdots e_k (c_1^k \widehat{\mathfrak{p}}_{k-1}^- + c_2^k \widehat{\mathfrak{p}}_{k-1}^- e_{k-1} \widehat{\mathfrak{p}}_{k-1}^-) e_{k+1} \cdots e_1 \pi \\
& = (-1)^k [i+1]_q \pi e_1 \cdots e_k \widehat{\mathfrak{p}}_k^- e_{k+1} \cdots e_1 \pi,
\end{aligned}$$

tel que désiré. □

Comme on cherche à utiliser l'isomorphisme du lemme 3.2.9 pour déterminer récursivement le noyau de la représentation, on aimerait avoir également l'inclusion inverse de celle énoncée dans le lemme 3.2.11.

Lemme 3.2.12. *Avec les hypothèses 3.2.1 et φ l'isomorphisme du lemme 3.2.9, on a l'égalité $\pi \langle \widehat{\mathfrak{p}}_{s+1}^- \rangle \pi = \varphi(\langle \widehat{\mathfrak{P}}_{s+2}^- \rangle)$.*

DÉMONSTRATION. Grâce au lemme 3.2.11, il suffit de montrer l'inclusion

$$\pi \langle \widehat{\mathfrak{p}}_{s+1}^- \rangle \pi \subseteq \varphi(\langle \widehat{\mathfrak{P}}_{s+2}^- \rangle).$$

Posons $g := \varphi(\widehat{\mathfrak{P}}_{s+2}^-)$. Comme $\pi \langle \widehat{\mathfrak{p}}_{s+1}^- \rangle \pi = \{\pi \cdot a \cdot \widehat{\mathfrak{p}}_{s+1}^- \cdot b \cdot \pi \mid a, b \in \text{TLb}_{n+1}\}$, il suffit de montrer que pour tous $a, b \in \text{TLb}_{n+1}$, il existe $a', b' \in \pi \text{TLb}_{n+1} \pi$ tels que

$$\pi \cdot a \cdot \widehat{\mathfrak{p}}_{s+1}^- \cdot b \cdot \pi = a' \cdot g \cdot b' \in \langle \varphi(\widehat{\mathfrak{P}}_{s+2}^-) \rangle = \varphi(\langle \widehat{\mathfrak{P}}_{s+2}^- \rangle).$$

Par linéarité, il suffit de le montrer pour tous mots a, b . Soit donc, sans perte de généralité, $\pi a^* \widehat{\mathfrak{p}}_{s+1}^- b \pi \neq 0$ avec $a, b \in \text{TLb}_n$ sous forme normale de Jones modifiée (voir proposition 1.4.10), où $*$ est l'anti-involution de TLb_n .

Affirmation : $b\pi$ contient au moins un $f_0 = \beta_0 - e_0 = \frac{1}{[i+1]_q} - e_0$.

DÉMONSTRATION DE L'AFFIRMATION. Notons d'abord que $\pi = \frac{1}{[i+1]_q} f_0$ et $f_0 \widehat{\mathfrak{p}}_{s+1}^- = 0$. L'affirmation est vraie si le mot de Temperley–Lieb de b dans la forme normale de Jones modifiée est vide. Sinon,

- Si $l_1 = 1$: $b\pi = \frac{1}{[i+1]_q} b f_0$ est un mot de TLb_{n+1} contenant au moins un f_0 .
- Si $l_1 > 1$ et b contient déjà au moins un f_0 : par la forme normale de Jones modifiée, on voit que $b\pi = \frac{1}{[i+1]_q} b f_0 = \frac{[i+1]_q}{[i+1]_q} b = b$ contient au moins un f_0 .
- Si $l_1 > 1$ et b ne contient pas de f_0 : dans ce cas, $b\pi = \frac{1}{[i+1]_q} f_0 b$ et alors

$$\widehat{\mathfrak{p}}_{s+1}^- b \pi = \frac{1}{[i+1]_q} \widehat{\mathfrak{p}}_{s+1}^- f_0 b = 0,$$

ce qui est une contradiction.

△

Par symétrie, le même argument permet de montrer que πa^* contient également au moins un f_0 . Alors,

$$\pi a^* \widehat{\mathfrak{p}}_{s+1}^- b\pi = (\cdots) f_0 e_1 \cdots e_{m_1} \widehat{\mathfrak{p}}_{s+1}^- e_{m'_1} \cdots e_1 f_0 (\cdots), \quad (3.2.2)$$

où dans les parenthèses se situe le reste de l'expression des mots πa^* et $b\pi$ sous forme normale de Jones modifiée. Notons qu'on doit avoir $m_1, m'_1 \geq s+1$, car sinon, $e_{m_1} \widehat{\mathfrak{p}}_{s+1}^- = 0$ ou $\widehat{\mathfrak{p}}_{s+1}^- e_{m'_1} = 0$. Sans perte de généralité, on suppose que $m_1 \leq m'_1$. Si $m_1 = m'_1 = s+1$, alors

$$\begin{aligned} e_{m_1} \widehat{\mathfrak{p}}_{s+1}^- e_{m'_1} &= e_{s+1} \widehat{\mathfrak{p}}_{s+1}^- e_{s+1} \\ &= -c_1^{s+2} \widehat{\mathfrak{p}}_s^- e_{s+1} \\ &= (-1)^{s+1} ([s+1]_q [i]_q - [s]_q [i+1]_q) \widehat{\mathfrak{p}}_s^- e_{s+1} \\ &= (-1)^{s+1} [i - (s+1) + 1]_q \widehat{\mathfrak{p}}_s^- e_{s+1} \\ &= (-1)^{s+1} [r\ell]_q \widehat{\mathfrak{p}}_s^- e_{s+1} = 0, \end{aligned}$$

où la deuxième égalité suit de la dernière propriété de la proposition 1.4.11, la quatrième égalité suit de la quatrième propriété de la proposition 1.1.2 et la dernière égalité suit du fait que $[r\ell]_q = 0$. Cette contradiction permet donc de prendre $m'_1 \geq s+2$. Si $m_1 = m'_1 \geq s+2$, on a $e_{m_1} \widehat{\mathfrak{p}}_{s+1}^- e_{m'_1} = \beta_q \widehat{\mathfrak{p}}_{s+1}^- e_{m'_1}$, d'où sans perte de généralité on peut prendre $m_1 < m'_1$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned} f_0 e_1 \cdots e_{m_1} \widehat{\mathfrak{p}}_{s+1}^- e_{m'_1} \cdots e_1 f_0 &= (e_{m'_1} e_{m'_1-1} \cdots e_{m_1+2}) f_0 e_1 \cdots e_{m_1} \widehat{\mathfrak{p}}_{s+1}^- e_{m_1+1} e_{m_1} \cdots e_1 f_0 \\ &= (e_{m'_1} e_{m'_1-1} \cdots e_{m_1+2}) f_0 e_1 \cdots e_{m_1} e_{m_1+1} e_{m_1} \cdots e_{s+3} \widehat{\mathfrak{p}}_{s+1}^- e_{s+2} \cdots e_1 f_0 \\ &= (e_{m'_1} e_{m'_1-1} \cdots e_{m_1+2}) f_0 e_1 \cdots e_{s+1} \widehat{\mathfrak{p}}_{s+1}^- e_{s+2} \cdots e_1 f_0 \\ &= (-1)^{s+1} [i+1]_q (e_{m'_1} e_{m'_1-1} \cdots e_{m_1+2}) g, \end{aligned}$$

où la dernière ligne suit du lemme 3.2.11 et du fait que $\pi = \frac{1}{[i+1]_q} f_0$, la parenthèse est comprise comme étant vide si $m'_1 = m_1 + 1$ et les générateurs $e_{m_1+1} e_{m_1} \cdots e_{s+3}$ à la deuxième ligne n'apparaissent pas si $m_1 = s+1$. L'équation (3.2.2) devient ainsi

$$\pi a^* \widehat{\mathfrak{p}}_{s+1}^- b\pi = (-1)^{s+1} [i+1]_q (\cdots) (e_{m'_1} e_{m'_1-1} \cdots e_{m_1+2}) g (\cdots),$$

d'où on conclut qu'il existe $a', b' \in \mathbf{TLb}_{n+1}$ tels que $\pi a^* \widehat{\mathfrak{p}}_{s+1}^- b \pi = a' g b'$. De plus, comme $\pi g \pi = g$ et

$$\pi a' g b' \pi = \pi \pi a^* \widehat{\mathfrak{p}}_{s+1}^- b \pi \pi = \pi a^* \widehat{\mathfrak{p}}_{s+1}^- b \pi = a' g b',$$

on peut écrire $\pi a^* \widehat{\mathfrak{p}}_{s+1}^- b \pi = \pi a' \pi g \pi b' \pi \in \langle \varphi(\widehat{\mathfrak{P}}_{s+2}^-) \rangle = \varphi(\langle \widehat{\mathfrak{P}}_{s+2}^- \rangle)$, car $\pi a' \pi, \pi b' \pi \in \pi \mathbf{TLb}_{n+1} \pi$. On conclut donc finalement que $\pi \langle \widehat{\mathfrak{p}}_{s+1}^- \rangle \pi \subseteq \varphi(\langle \widehat{\mathfrak{P}}_{s+2}^- \rangle)$, tel que désiré. \square

Il est enfin temps de mettre tous ces résultats ensemble et de revenir à la preuve du théorème 3.2.2. On rappelle d'abord son énoncé.

Théorème 3.2.2. *Sous les hypothèses 3.2.1, on a*

$$\mathcal{R}_{i,n} \cong \frac{\mathbf{TLb}_n(\beta_q, [i+1]_q, [i]_q)}{\langle \widehat{\mathfrak{p}}_{s+1}^- \rangle},$$

où $\langle \widehat{\mathfrak{p}}_{s+1}^- \rangle$ est l'idéal engendré par le préidempotent de Jones–Wenzl $\widehat{\mathfrak{p}}_{s+1}^-$ dans \mathbf{TLb}_n .

DÉMONSTRATION. Soient $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ et $n \in \mathbb{N}$. Si $s = 0$, le résultat est vrai par le lemme 3.2.3. Supposons que le résultat soit vrai pour un certain entier s . On pose comme d'habitude $i = r\ell + s$, d'où $i + 1 = r\ell + (s + 1)$. Alors, le résultat tient pour $\mathcal{R}_{i,k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et on cherche à le montrer pour $\mathcal{R}_{i+1,n}$. Soient ρ et ρ' les représentations du diagramme (3.2.1) et conservons les conventions utilisées plus haut pour les préidempotents de Jones–Wenzl en majuscules et en minuscules. Alors, en particulier, l'hypothèse d'induction donne

$$\mathcal{R}_{i,n+1} \cong \rho'(\mathbf{TLb}_{n+1}(\beta_q, [i+1]_q, [i]_q)) \cong \frac{\mathbf{TLb}_{n+1}(\beta_q, [i+1]_q, [i]_q)}{\langle \widehat{\mathfrak{p}}_{s+1}^- \rangle}.$$

Si on restreint ρ' à la sous-algèbre $\pi \mathbf{TLb}_{n+1}(\beta_q, [i+1]_q, [i]_q) \pi$, on en déduit

$$\begin{aligned} \rho'(\pi \mathbf{TLb}_{n+1}(\beta_q, [i+1]_q, [i]_q) \pi) &\cong \frac{\pi \mathbf{TLb}_{n+1}(\beta_q, [i+1]_q, [i]_q) \pi}{\text{Ker } \rho' \cap (\pi \mathbf{TLb}_{n+1}(\beta_q, [i+1]_q, [i]_q) \pi)} \\ &\cong \frac{\pi \mathbf{TLb}_{n+1}(\beta_q, [i+1]_q, [i]_q) \pi}{\pi \langle \widehat{\mathfrak{p}}_{s+1}^- \rangle \pi}. \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{i+1,n} &\cong \text{Im } \rho \cong \rho'(\pi \mathbf{TLb}_{n+1}(\beta_q, [i+1]_q, [i]_q) \pi) \\ &\cong \frac{\pi \mathbf{TLb}_{n+1}(\beta_q, [i+1]_q, [i]_q) \pi}{\pi \langle \widehat{\mathfrak{p}}_{s+1}^- \rangle \pi} \\ &\cong \frac{\mathbf{TLb}_n(\beta_q, [i+2]_q, [i+1]_q)}{\langle \widehat{\mathfrak{P}}_{s+2}^- \rangle}, \end{aligned}$$

où le deuxième isomorphisme suit de la commutativité du diagramme 3.2.1, le troisième vient de la discussion ci-haut et le dernier suit de la proposition 3.2.9 et du lemme 3.2.12. On obtient donc l'expression voulue pour $\mathcal{R}_{i+1,n}$. Le théorème suit par récurrence. \square

3.3. Retour à $\text{End}_{\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)}(\mathbf{L}_q(i) \otimes \mathbf{L}_q(1)^{\otimes n})$

Maintenant qu'on sait décrire l'algèbre $\mathcal{R}_{i,n}$, il serait intéressant de caractériser la structure de l'algèbre complète des endomorphismes $\text{End}_{\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)}(\mathbf{L}_q(i) \otimes \mathbf{L}_q(1)^{\otimes n})$. En particulier, il serait intéressant de savoir pour quelles valeurs de ℓ, i et n cette algèbre est isomorphe à $\mathcal{R}_{i,n}$. Il n'est pas difficile de trouver des exemples où ce n'est pas le cas.

Exemple 3.3.1. *Posons $q = e^{i\pi/3}$, c'est-à-dire que $\ell = 3$, et $i = 3, n = 5$. Dans ce cas, on a*

$$\mathbf{L}_q(3) \otimes \mathbf{L}_q(1)^{\otimes 5} \cong \mathbf{L}_q(2) \oplus \mathbf{L}_q(4) \oplus \mathbf{L}_q(8) \oplus 4\mathbf{P}_q(4).$$

De la structure de ces modules présentée à la section 2.3, il n'est pas difficile de calculer la dimension de l'espace d'endomorphismes, ce qui donne

$$\dim \text{End}_{\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)}(\mathbf{L}_q(3) \otimes \mathbf{L}_q(1)^{\otimes 5}) = 43.$$

Or, comme $i = 3 = 1 \cdot \ell + 0$, le lemme 3.2.3 donne $\mathcal{R}_{3,5} \cong \mathbf{TL}_5$ et le corollaire 1.3.7 donne $\dim \mathbf{TL}_5 = 42 < 43$, d'où il est clair que l'algèbre d'endomorphismes n'est pas isomorphe à $\mathcal{R}_{3,5}$.

Il existe donc parfois certains endomorphismes de $\mathbf{L}_q(i) \otimes \mathbf{L}_q(1)^{\otimes n}$ qui ne sont pas obtenus via l'action du groupe de tresses de type B . Une étude plus approfondie de l'algèbre d'endomorphismes serait nécessaire pour révéler leur origine et identifier la structure de l'algèbre complète, ce qui ne sera pas fait dans ce mémoire.

Chapitre 4

Les endomorphismes de $P_q(i) \otimes L_q(1)^{\otimes n}$

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'algèbre d'endomorphismes des produits tensoriels de $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -modules de la forme $P_q(i) \otimes L_q(1)^{\otimes n}$. La stratégie, complètement différente de celle employée au chapitre 3, est d'utiliser la dualité de Schur–Weyl sur le plus grand espace $L_q(1)^{\otimes d_i+n}$, puis de projeter sur le sous-espace approprié. Pour ce faire, il faut construire de nouveaux idempotents de l'algèbre de Temperley–Lieb, appelés idempotents de (ℓ, p) -Jones–Wenzl et dus au travail de Burrull, Libedinsky et Sentinelli [BLS19], Martin et Spencer [MS22] et Sutton, Tubbenhauer, Wedrich et Zhu [STWZ23]. Ces idempotents généralisent les idempotents de Jones–Wenzl au cas où q^2 est une racine primitive ℓ -ième de l'unité et projettent vers les sommands directs projectifs d'intérêt. On fait ensuite le lien vers l'algèbre d'endomorphismes du bon produit de $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -modules, qui est finalement identifiée à certaines algèbres étudiées par Spencer [Spe21] et généralisant les algèbres à couture de Morin-Duchesne, Rasmussen et Ridout [MDRR15].

La première section construit les idempotents de (ℓ, p) -Jones–Wenzl, puis montre qu'ils sont bien définis en q une racine de l'unité en suivant la preuve de [STWZ23]. Il est également montré qu'ils ont les propriétés désirées, explicitant plusieurs détails laissés de côté dans [STWZ23].

La seconde section présente un théorème original faisant explicitement le lien entre les algèbres de [Spe21], construites à l'aide des idempotents de (ℓ, p) -Jones–Wenzl, et les algèbres d'endomorphismes de $P_q(i) \otimes L_q(1)^{\otimes n}$.

4.1. Projecteurs de (ℓ, p) -Jones–Wenzl et leur image

Cette première section est consacrée à la présentation des projecteurs de (ℓ, p) -Jones–Wenzl et à la preuve de leurs propriétés utiles.

4.1.1. Les caractères

En utilisant les caractères pour les $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -modules introduits à la définition 2.3.4, il est possible de déduire la multiplicité de certains modules de Weyl au sein de produits tensoriels d'intérêt. Ce résultat (le lemme 4.1.2) sera utile pour montrer que les projecteurs de (ℓ, p) -Jones–Wenzl sont bien définis.

De la définition des modules de Weyl, on peut déduire que leur caractère s'écrit simplement comme

$$\chi_{\Delta_q(i)} = [i + 1]_x = x^{-i} + x^{-i+2} + \cdots + x^{i-2} + x^i,$$

où le coefficient devant le terme x^k correspond à la dimension de l'espace de poids k , qui dans ce cas est toujours égale à 1 pour $k \in \{-i, -i+2, \dots, i\}$. On cherche ensuite à exprimer le caractère des modules projectifs. De la suite exacte non scindée caractérisant ces derniers donnée à la proposition 2.3.11,

$$0 \longrightarrow \Delta_q(\mathbf{d}_i) \longrightarrow \mathbf{P}_q(i) \longrightarrow \Delta_q(i) \longrightarrow 0,$$

on déduit que K agit sur $\mathbf{P}_q(i)$ comme sur $\Delta_q(\mathbf{d}_i) \oplus \Delta_q(i)$, d'où

$$\chi_{\mathbf{P}_q(i)} = \chi_{\Delta_q(\mathbf{d}_i)} + \chi_{\Delta_q(i)} = [\mathbf{d}_i + 1]_x + [i + 1]_x \quad (4.1.1)$$

est l'expression du caractère cherchée. Les caractères se comportent également bien par rapport au produit tensoriel de représentations, c'est-à-dire qu'on a l'égalité suivante.

Lemme 4.1.1. *Soient M, N des objets de la catégorie \mathcal{F} des $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -modules de dimension finie et de type 1. Alors,*

$$\chi_{M \otimes N} = \chi_M \cdot \chi_N.$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer que si $m_\lambda \in M_\lambda$ et $n_\mu \in N_\mu$, alors $m_\lambda \otimes n_\mu \in (M \otimes N)_{\lambda+\mu}$. Puisque $\Delta(K) = K \otimes K$, il est clair que $\Delta(K)(m_\lambda \otimes n_\mu) = q^{\lambda+\mu} m_\lambda \otimes n_\mu$, tel que désiré. Pour l'action de $\left[\begin{smallmatrix} K; 0 \\ \ell \end{smallmatrix} \right]_q$, l'élément défini à l'équation (2.2.3), on peut montrer par induction que

$$\Delta \left(\left[\begin{smallmatrix} K; 0 \\ \ell \end{smallmatrix} \right]_q \right) = \sum_{s=0}^{\ell} \left[\begin{smallmatrix} K; 0 \\ \ell - s \end{smallmatrix} \right]_q K^{-s} \otimes \left[\begin{smallmatrix} K; 0 \\ s \end{smallmatrix} \right]_q K^{\ell-s}.$$

Le résultat voulu suit alors de la relation

$$\begin{bmatrix} \lambda + \mu \\ \ell \end{bmatrix}_q = \sum_{s=0}^{\ell} \begin{bmatrix} \lambda \\ \ell - s \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} \mu \\ s \end{bmatrix}_q q^{-(\lambda+\mu)s+\ell\mu},$$

dont une preuve se trouve dans [CP95]. \square

Si un certain module M possède une filtration par des modules de Weyl, la multiplicité d'un Weyl au sein de M est bien définie et on la note $(M : \Delta_q(i))$. Par exemple, on a

$$(\mathbf{P}_q(i) : \Delta_q(k)) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \text{ ou } \mathbf{d}_i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le prochain lemme porte sur les multiplicités des modules de Weyl qui sont facteurs d'un produit tensoriel particulier où le projectif $\mathbf{P}_q(i)$ apparaît.

Lemme 4.1.2. *Soient $i, k \in \mathbb{N}_0$ avec i non critique et $(\mathbf{P}_q(i) : \Delta_q(k)) = 1$. Alors*

$$(\mathbf{P}_q(\mathbf{m}_{\mathbf{d}_i}) \otimes \mathbf{L}_q(1)^{\otimes(\mathbf{d}_i - \mathbf{m}_{\mathbf{d}_i})} : \Delta_q(k)) = 1.$$

DÉMONSTRATION. Notons d'abord que, comme $\mathbf{m}_{\mathbf{d}_i}$ est critique, on a en fait $\mathbf{P}(\mathbf{m}_{\mathbf{d}_i}) \cong \Delta(\mathbf{m}_{\mathbf{d}_i})$. On a aussi $\mathbf{L}(1) \cong \Delta(1)$, car $1 < \ell$. On obtient donc, en utilisant le lemme 4.1.1,

$$\begin{aligned} \chi_{\mathbf{P}_q(\mathbf{m}_{\mathbf{d}_i}) \otimes \mathbf{L}_q(1)^{\otimes(\mathbf{d}_i - \mathbf{m}_{\mathbf{d}_i})}} &= \chi_{\mathbf{P}_q(\mathbf{m}_{\mathbf{d}_i})} \cdot (\chi_{\mathbf{L}_q(1)})^{(\mathbf{d}_i - \mathbf{m}_{\mathbf{d}_i})} \\ &= \chi_{\Delta_q(\mathbf{m}_{\mathbf{d}_i})} \cdot (\chi_{\Delta_q(1)})^{(\mathbf{d}_i - \mathbf{m}_{\mathbf{d}_i})} \\ &= [\mathbf{m}_{\mathbf{d}_i} + 1]_x \cdot [2]_x^{(\mathbf{d}_i - \mathbf{m}_{\mathbf{d}_i})}. \end{aligned}$$

Comme $[k]_x [2]_x = [k-1]_x + [k+1]_x$ pour tout $k > 0$, on obtient par induction sur n , pour tout $0 < n \leq k$,

$$[k]_x \cdot ([2]_x)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} [k-n+2j]_x.$$

On peut alors appliquer cette formule à l'expression obtenue plus haut, ce qui donne

$$[\mathbf{m}_{\mathbf{d}_i} + 1]_x \cdot [2]_x^{(\mathbf{d}_i - \mathbf{m}_{\mathbf{d}_i})} = \sum_{j=0}^{\mathbf{d}_i - \mathbf{m}_{\mathbf{d}_i}} \binom{\mathbf{d}_i - \mathbf{m}_{\mathbf{d}_i}}{j} [\mathbf{m}_{\mathbf{d}_i} + 1 - (\mathbf{d}_i - \mathbf{m}_{\mathbf{d}_i}) + 2j]_x.$$

Cette expression nous donne la multiplicité de chaque Weyl dans une filtration de $\mathbf{P}(\mathbf{m}_{\mathbf{d}_i}) \otimes \mathbf{L}(1)^{\otimes(\mathbf{d}_i - \mathbf{m}_{\mathbf{d}_i})}$:

$$(\mathbf{P}(\mathbf{m}_{\mathbf{d}_i}) \otimes \mathbf{L}(1)^{\otimes(\mathbf{d}_i - \mathbf{m}_{\mathbf{d}_i})} : \Delta(\mathbf{m}_{\mathbf{d}_i} - (\mathbf{d}_i - \mathbf{m}_{\mathbf{d}_i}) + 2j)) = \binom{\mathbf{d}_i - \mathbf{m}_{\mathbf{d}_i}}{j}, \quad 0 \leq j \leq \mathbf{d}_i - \mathbf{m}_{\mathbf{d}_i}.$$

On sait que $(P(i) : \Delta(k)) = 1$ si et seulement si $k = i$ ou $k = \mathbf{d}_i$. Si $j = 0$, on a $\mathbf{m}_{\mathbf{d}_i} + 1 - (\mathbf{d}_i - \mathbf{m}_{\mathbf{d}_i}) + 2j = 2\mathbf{m}_{\mathbf{d}_i} + 1 - \mathbf{d}_i = i + 1$, et si $j = \mathbf{d}_i - \mathbf{m}_{\mathbf{d}_i}$, on a $\mathbf{m}_{\mathbf{d}_i} + 1 - (\mathbf{d}_i - \mathbf{m}_{\mathbf{d}_i}) + 2j = \mathbf{d}_i + 1$, qui correspondent respectivement au caractère de $\Delta(i)$ et de $\Delta(\mathbf{d}_i)$. Dans les deux cas, le coefficient binomial vaut 1, d'où chacun des deux Weyl apparaît dans la filtration avec multiplicité 1, tel que désiré. \square

4.1.2. Les projecteurs de (ℓ, p) -Jones–Wenzl

Pour cette section, on suit les constructions de Martin et Spencer [MS22] et de Burrull, Libedinsky et Sentinelli [BLS19], en adaptant les formules à la situation qui nous intéresse, c'est-à-dire à la caractéristique nulle. Ceci correspond à prendre $p = \infty$ dans leurs expressions.

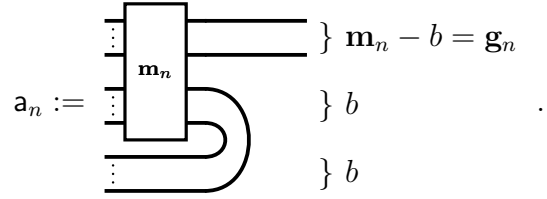
Des propriétés de la proposition 1.3.13, on peut également déduire que le projecteur $\mathbf{p}_n \in \mathbf{TL}_n$ est l'unique idempotent projetant sur la représentation triviale de \mathbf{TL}_n . En effet, pour tout mot a de \mathbf{TL}_n , on a

$$a \cdot \mathbf{p}_n = \begin{cases} \mathbf{p}_n & \text{si } a \text{ est le mot vide,} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

d'où $\mathbf{TL}_n \cdot \mathbf{p}_n \cong \mathcal{S}_n(n)$ comme modules à gauche, où $\mathcal{S}_n(n)$ est le module standard d'indice n , donc trivial, introduit à la section 1.3.2. On voudrait définir un idempotent analogue lorsqu'on spécialise $v \mapsto q$ en une racine de l'unité. On cherche donc un idempotent de \mathbf{TL}_n qui projette sur la couverture projective du module trivial. Cette couverture projective n'est pas le module trivial lui-même si $n \geq \ell$ est non critique.

Un tel idempotent a été obtenu par Martin et Spencer dans [MS22], basé sur les travaux de Burrull, Libedinsky et Sentinelli [BLS19]. On adapte ici leur construction dans le cas qui nous intéresse, c'est-à-dire en caractéristique nulle. Ceci revient à poser $p = \infty$, ce qui simplifie grandement la présentation. On les introduit d'abord comme éléments de $\mathbf{TL}_n^{\mathbb{C}(v)}(\beta_v)$, où v est un paramètre formel et $\beta_v = v + v^{-1}$.

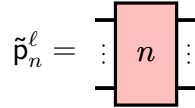
Définition 4.1.3 (Projecteurs de (ℓ, p) -Jones–Wenzl). *Écrivons $n+1 = a\ell + b$, avec $0 \leq b < \ell$ et $a \geq 0$. Si $b = 0$, c'est-à-dire que $n = a\ell - 1$ est critique, on pose $\tilde{\mathbf{p}}_n^\ell := \mathbf{p}_n \in \mathbf{TL}_n^{\mathbb{C}(v)}(\beta_v)$. Sinon, on pose $\lambda_n = \frac{[a\ell - b]_v}{[a\ell]_v}$ et $\tilde{\mathbf{p}}_n^\ell := \mathbf{p}_n + \lambda_n \mathbf{u}_n \in \mathbf{TL}_n^{\mathbb{C}(v)}(\beta_v)$, où $\mathbf{u}_n = \mathbf{a}_n \mathbf{a}_n^*$ et $*$ est l'anti-involution de \mathbf{TL}_n introduite à la section 1.3.1, avec $\mathbf{a}_n \in \text{Hom}_{\mathcal{TL}}(n, \mathfrak{g}_n)$ donné par*



En diagrammes, cela donne

The equation is $\tilde{p}_n^\ell = \text{[rectangle with } n \text{ strands]} + \lambda_n \text{[diagram with two } m_n \text{ rectangles and strands]}.$ The second diagram consists of two rectangles labeled m_n . The left rectangle has b strands entering from the left and b strands exiting to the right. The right rectangle has b strands entering from the left and b strands exiting to the right. A single strand from the bottom left of the first rectangle loops around the bottom and enters the bottom of the second rectangle. Another single strand from the bottom left of the second rectangle loops around the bottom and enters the bottom of the first rectangle.

On représente diagrammatiquement les projecteurs de (ℓ, p) -Jones–Wenzl par des rectangles colorés :

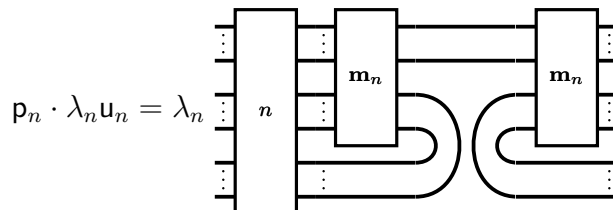


On réserve la notation \tilde{p}_n^ℓ pour les projecteurs de (ℓ, p) -Jones–Wenzl sur $\mathbb{C}(v)$ et on écrira plus tard $p_n^\ell = \text{sp}(\tilde{p}_n^\ell)$, où $\text{sp} : \mathbb{C}(v) \rightarrow \mathbb{C} : v \mapsto q$ est un morphisme de spécialisation. Notons que l'équation (4.1.2) de la définition, lorsqu'on spécialise $v \mapsto q$ en une racine primitive 2ℓ -ième de l'unité, fait intervenir des q -nombres au dénominateur. Il n'est donc pas clair, a priori, que la version spécialisée de ces idempotents sera toujours bien définie. On montrera que c'est le cas au théorème 4.1.13. Pour l'instant, commençons par montrer que c'est génériquement un idempotent.

Théorème 4.1.4. *Les éléments p_n et $\lambda_n u_n$ de $\text{TL}_n^{\mathbb{C}(v)}$ sont des idempotents orthogonaux. En particulier, le projecteur de (ℓ, p) -Jones–Wenzl $\tilde{p}_n^\ell = p_n + \lambda_n u_n$ est un idempotent.*

DÉMONSTRATION. Cela suit d'un calcul direct et des propriétés des Jones–Wenzl classiques.

On a en effet $p_n \cdot p_n = p_n$ et



$$= \lambda_n \text{ (diagram with two boxes labeled } n \text{ and } m_n \text{)} = 0,$$

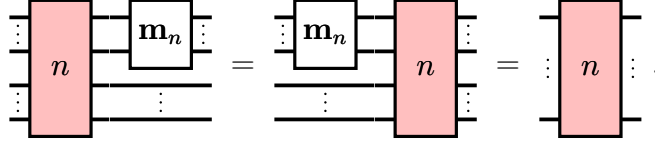
où on a utilisé la deuxième et la quatrième propriétés de la proposition 1.3.13. De même, on obtient $\lambda_n u_n \cdot p_n = 0$. Finalement,

$$\begin{aligned} \lambda_n u_n \cdot \lambda_n u_n &= (\lambda_n)^2 \text{ (diagram with four boxes labeled } m_n \text{)} \\ &= (\lambda_n)^2 \text{ (diagram with three boxes labeled } m_n \text{)} \\ &= \left(\frac{[al - b]_v}{[al]_v} \right)^2 \left(\frac{[m_n + 1]_v}{[m_n + 1 - b]_v} \right) \text{ (diagram with two boxes labeled } m_n \text{ and } m_n - b \text{)} \\ &= \left(\frac{[al - b]_v}{[al]_v} \right)^2 \left(\frac{[al]_v}{[al - b]_v} \right) \text{ (diagram with two boxes labeled } m_n \text{)} \\ &= \lambda_n u_n, \end{aligned}$$

où on a utilisé la propriété d'absorption des Jones–Wenzl classiques (quatrième propriété de la proposition 1.3.13) aux deuxième et quatrième égalités, et le lemme 1.3.14 à la troisième égalité. En mettant tous ces calculs ensemble, on obtient le résultat désiré. \square

On donne ensuite quelques propriétés de ces idempotents qui seront utiles pour montrer qu'ils sont bien définis en q racine de l'unité et qu'ils correspondent bel et bien aux projecteurs voulus.

Lemme 4.1.5. *Les projecteurs de (ℓ, p) -Jones–Wenzl $\check{p}_n^\ell \in \mathrm{TL}_n^{\mathbb{C}(v)}$ satisfont la propriété d’absorption suivante :*



DÉMONSTRATION. Le calcul suit directement de la définition des (ℓ, p) -Jones–Wenzl et de la propriété d’absorption pour les Jones–Wenzl classiques. \square

Avant d’énoncer et de prouver le prochain lemme, rappelons que la définition du module standard $\mathcal{S}_n(\mathfrak{g}_n)$ donne une action de TL_n sur l’ensemble des diagrammes épis de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{JL}}(n, \mathfrak{g}_n)$. Le résultat d’une multiplication $a \cdot m$, où $a \in \mathrm{TL}_n$ et $m \in \mathcal{S}_n(\mathfrak{g}_n)$, est pris dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{JL}}(n, \mathfrak{g}_n)$ modulo le sous-module engendré par tous les diagrammes d’ordre cellulaire inférieur, c’est-à-dire ceux qui ne sont pas épis. Comme on travaille pour l’instant sur $\mathrm{TL}_n^{\mathbb{C}(v)}(\beta_v)$, on a $\mathrm{rad} \mathcal{S}_n(\mathfrak{g}_n) = 0$ et $\mathcal{D}_n(\mathfrak{g}_n) \cong \mathcal{S}_n(\mathfrak{g}_n)$ est simple.

Lemme 4.1.6. *Comme modules à gauche, on a $\mathrm{TL}_n^{\mathbb{C}(v)} \cdot \check{p}_n^\ell \cong \mathcal{S}_n(n) \oplus \mathcal{S}_n(\mathfrak{g}_n)$.*

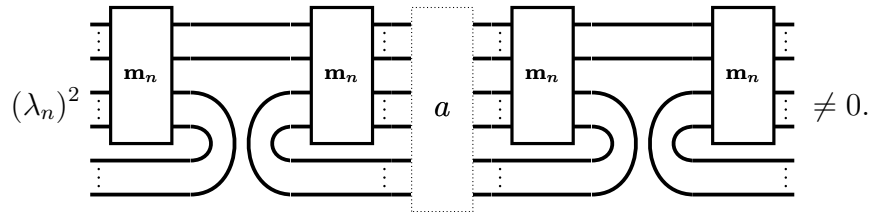
DÉMONSTRATION. On sait déjà que $\mathrm{TL}_n \cdot \mathfrak{p}_n \cong \mathcal{S}_n(n)$, le module trivial de TL_n , par définition des Jones–Wenzl classiques. Comme \mathfrak{p}_n et $\lambda_n \mathfrak{u}_n$ sont des idempotents orthogonaux, il ne reste qu’à montrer que $\mathrm{TL}_n \cdot \lambda_n \mathfrak{u}_n \cong \mathcal{S}_n(\mathfrak{g}_n)$. On a $\mathfrak{a}_n \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{JL}}(n, \mathfrak{g}_n)$, d’où on peut définir un morphisme $\phi : \mathrm{TL}_n \cdot \lambda_n \mathfrak{u}_n \rightarrow \mathcal{S}_n(\mathfrak{g}_n) : a \cdot \lambda_n \mathfrak{u}_n \mapsto \overline{a \cdot \mathfrak{a}_n}$, où le trait indique qu’on prend l’image de $a \cdot \mathfrak{a}_n \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{JL}}(n, \mathfrak{g}_n)$ dans $\mathcal{S}_n(\mathfrak{g}_n)$, c’est-à-dire dans le quotient par le sous-module décrit au paragraphe précédant le lemme. Ceci revient donc à dire que les termes de $a \cdot \mathfrak{a}_n$ qui ne sont pas des multiples de diagrammes épis sont envoyés à 0. Cette application est clairement TL_n -linéaire. De plus, comme $\mathcal{S}_n(\mathfrak{g}_n)$ est simple, il est engendré par n’importe quel élément non nul, d’où $\phi(\mathbf{1}_{\mathrm{TL}_n} \cdot \lambda_n \mathfrak{u}_n) = \mathfrak{a}_n \neq 0$ entraîne que ϕ est surjective. (L’élément \mathfrak{a}_n est non nul dans $\mathcal{S}_n(\mathfrak{g}_n)$ puisque le premier terme obtenu en développant le $\mathfrak{p}_{\mathfrak{m}_n}$, qui correspond à remplacer la boîte par l’identité sur \mathfrak{m}_n liens, donne un multiple non nul d’un diagramme épi différent de tous les autres.) Finalement, si $\phi(a \cdot \lambda_n \mathfrak{u}_n) = 0$, alors $a \cdot \mathfrak{a}_n$ est une somme de diagrammes ayant strictement moins de \mathfrak{g}_n liens transversaux, d’où $a \cdot \mathfrak{a}_n$ a au moins un arc reliant deux de ses \mathfrak{g}_n sites de droite. Ainsi, lorsqu’on multiplie $a \cdot \mathfrak{a}_n$ par \mathfrak{a}_n^* à droite, un arc est collé sur le Jones–Wenzl $\mathfrak{p}_{\mathfrak{m}_n}$ du diagramme \mathfrak{a}_n^* , ce qui entraîne $a \cdot \mathfrak{a}_n \mathfrak{a}_n^* = 0$ à cause

de la deuxième propriété de la proposition 1.3.13. Alors, $a \cdot \lambda_n u_n = \lambda_n a \cdot \mathbf{a}_n \mathbf{a}_n^* = 0$, d'où on conclut que ϕ est aussi injective, c'est-à-dire que c'est un isomorphisme. \square

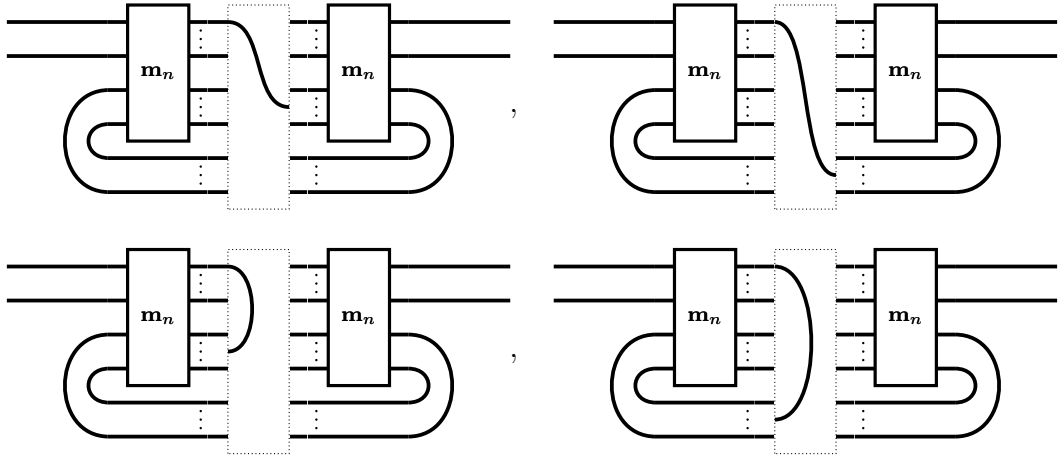
Pour prouver le prochain lemme, on aura besoin de caractériser l'action de $\tilde{\mathbf{p}}_n^\ell$ sur les modules simples de $\mathrm{TL}_n^{\mathbb{C}(v)}$. L'utilité de cette caractérisation vient du fait que la dualité de Schur–Weyl permet de faire le pont entre, d'un côté, l'élément $\tilde{\mathbf{p}}_n^\ell$ et son action sur les modules simples de TL_n , et de l'autre, l'endomorphisme de $\Delta_v(1)^{\otimes n}$ correspondant à $\tilde{\mathbf{p}}_n^\ell$ et l'image de cet endomorphisme. Dans l'objectif d'identifier ces derniers, on s'attarde d'abord sur les premiers. Pour étudier l'action de $\tilde{\mathbf{p}}_n^\ell$ sur les modules simples de TL_n , on peut fixer une base provenant de l'isomorphisme du lemme 4.1.6 et utiliser des techniques diagrammatiques pour faire les calculs.

D'abord, sur $\mathcal{S}_n(n)$, on sait déjà que $\tilde{\mathbf{p}}_n^\ell$ agit comme l'identité : \mathbf{p}_n est l'idempotent associé à ce module et l'action de $\lambda_n u_n$ est nulle. De plus, on voit que l'action de $\lambda_n u_n$ est nulle sur tout demi-diagramme ayant plus de \mathbf{g}_n défauts ou moins de \mathbf{g}_n défauts. En effet, si a est un demi-diagramme ayant $j > \mathbf{g}_n$ défauts, alors le produit $\lambda_n u_n \cdot a$ ne peut en avoir que \mathbf{g}_n au maximum, car $\lambda_n u_n$ a \mathbf{g}_n liens transversaux, d'où le diagramme résultant sera nul dans $\mathcal{S}_n(j)$. Si a a $j < \mathbf{g}_n$ défauts, alors a admet au moins un arc reliant deux des \mathbf{m}_n liens du haut, d'où $\lambda_n u_n \cdot a = 0$ à cause du $\mathbf{p}_{\mathbf{m}_n}$ de droite de u_n . Comme \mathbf{p}_n agit comme 0 sur tous les modules autres que $\mathcal{S}_n(n)$, on en conclut que $\tilde{\mathbf{p}}_n^\ell$ agit comme 0 sur tous les modules autres que $\mathcal{S}_n(n)$ et $\mathcal{S}_n(\mathbf{g}_n)$.

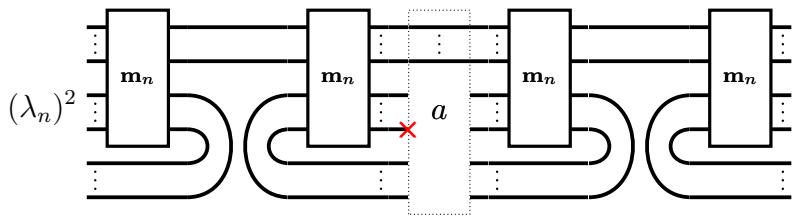
Ensuite, sur $\mathcal{S}_n(\mathbf{g}_n)$, on va montrer que $\tilde{\mathbf{p}}_n^\ell \cdot \mathcal{S}_n(\mathbf{g}_n) \cong \mathbb{C}u_n$. De l'isomorphisme $\mathcal{S}_n(\mathbf{g}_n) \cong \mathrm{TL}_n \cdot \lambda_n u_n$, on sait que l'action de $\tilde{\mathbf{p}}_n^\ell$ sur $\mathcal{S}_n(\mathbf{g}_n)$ correspond à celle sur $\mathrm{TL}_n \cdot \lambda_n u_n$. Soit $a \in \mathrm{TL}_n$ tel que $\tilde{\mathbf{p}}_n^\ell \cdot a \cdot \lambda_n u_n = (\lambda_n)^2 u_n \cdot a \cdot u_n \neq 0$, c'est-à-dire un diagramme a tel que



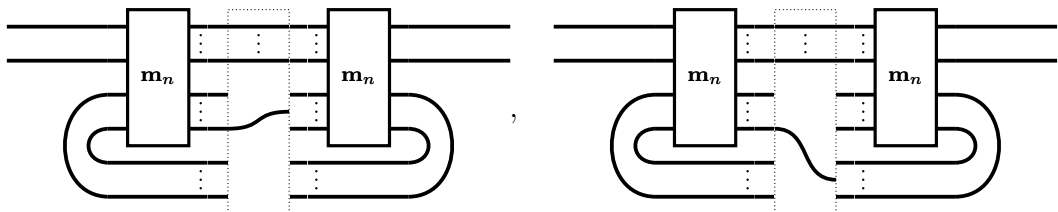
D'abord, notons que le site du haut à gauche de a doit nécessairement être lié au site du haut à droite de a . En effet, sinon on obtiendrait un des quatre dessins suivants :

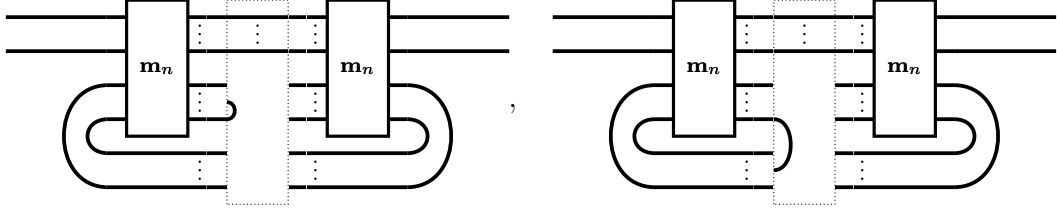


Dans les deux premiers cas, le lien transversal force une boucle à se refermer sur le $\mathfrak{p}_{\mathbf{m}_n}$ de droite, ce qui donne 0. Dans les deux autres, le lien force une boucle à se refermer sur le $\mathfrak{p}_{\mathbf{m}_n}$ de gauche, ce qui donne encore 0. La seule possibilité pour que le diagramme reste non nul est donc bien un lien horizontal entre le premier site de gauche et le premier site de droite. De la même façon, on obtient des liens horizontaux entre tous les $\mathbf{m}_n - b$ premiers sites, ce qui donne

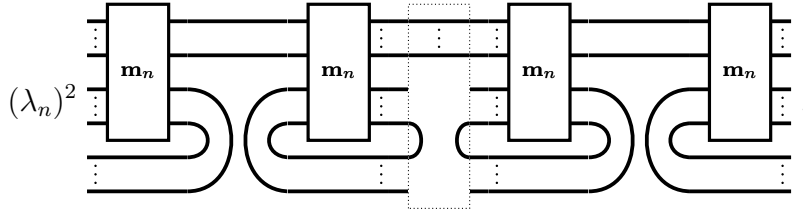


On se penche ensuite sur le lien marqué par un \times ci-haut. Pour que le diagramme reste non nul, il doit soit être connecté au site \mathbf{m}_n de droite, soit être connecté au site $\mathbf{m}_n + 1$ de gauche. Sinon, on obtient un des dessins suivants :





Dans le premier et le troisième cas, le lien force une boucle à se refermer sur la face droite du $\mathfrak{p}_{\mathbf{m}_n}$ de gauche. Dans le deuxième et le quatrième cas, le lien force une boucle à se refermer sur les b liens du bas de la face gauche de a , ce qui donne une boucle se collant sur la face gauche du $\mathfrak{p}_{\mathbf{m}_n}$ de gauche. Les seules possibilités sont donc bien un lien horizontal ou une boucle jusqu'au site $\mathbf{m}_n + 1$ de gauche. Dans le premier cas, on obtient alors forcément des liens horizontaux entre tous les autres sites pour que le diagramme reste non nul, et donc $a = \mathbf{1}_{\text{TL}_n}$. Dans le second, on peut répéter le même argument de façon symétrique pour le côté droit, et on obtient le diagramme



En appliquant le lemme 1.3.14, on peut alors remplacer les deux $\mathfrak{p}_{\mathbf{m}_n}$ du milieu et leur bulle du bas par des $\mathfrak{p}_{\mathbf{m}_n-1}$ au coût d'un certain scalaire. On procède ensuite de la même façon pour le site $\mathbf{m}_n - 1$ de gauche, et ainsi de suite. Ceci permet de conclure que les seules possibilités pour a sont des diagrammes de la forme

$$a_k = \left. \begin{array}{l} \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \end{array} \right\} \mathbf{m}_n - b = \mathbf{g}_n \\ \left. \begin{array}{l} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\} k \quad ,$$

avec $0 \leq k \leq b$, le cas $k = 0$ correspondant à $a_0 = \mathbf{1}_{\text{TL}_n}$. Dans tous ces cas, on a

$$\tilde{\mathfrak{p}}_n^\ell \cdot a_k \cdot \lambda_n \mathbf{u}_n = (\lambda_n)^2 \mathbf{u}_n \cdot a_k \cdot \mathbf{u}_n = \lambda_n \mu_k \cdot \lambda_n \mathbf{u}_n,$$

où μ_k est un scalaire non nul provenant de l'application du lemme 1.3.14.

On sait que l'ensemble $\{a \cdot \lambda_n \mathbf{u}_n \mid a \in \mathfrak{B}_n\}$, où \mathfrak{B}_n est l'ensemble des (n, n) -diagrammes formant une base de TL_n , engendre $\mathcal{S}_n(\mathbf{g}_n)$ comme espace vectoriel. On peut remplacer, pour

chaque $k \geq 1$, $a_k \cdot \lambda_n \mathbf{u}_n$ par $b_k := a_k \cdot \lambda_n \mathbf{u}_n - \lambda_n \mu_k \cdot \lambda_n \mathbf{u}_n$ sans changer l'espace engendré. Alors, en notant que

$$\tilde{\mathfrak{p}}_n^\ell \cdot b_k = \tilde{\mathfrak{p}}_n^\ell \cdot (a_k \cdot \lambda_n \mathbf{u}_n - \lambda_n \mu_k \cdot \lambda_n \mathbf{u}_n) = \lambda_n \mu_k \cdot \lambda_n \mathbf{u}_n - \lambda_n \mu_k \cdot \lambda_n \mathbf{u}_n = 0,$$

on obtient un ensemble générateur de $\mathcal{S}_n(\mathfrak{g}_n)$ tel que $\tilde{\mathfrak{p}}_n^\ell$ agit comme 0 sur tous les vecteurs sauf $\mathbf{1}_{\mathrm{TL}_n} \cdot \lambda_n \mathbf{u}_n$, et comme 1 sur ce dernier vecteur. On obtient donc que $\tilde{\mathfrak{p}}_n^\ell \cdot (\mathrm{TL}_n \cdot \lambda_n \mathbf{u}_n) \cong \mathbb{C} \mathbf{u}_n$, tel que désiré. On a alors tout ce qu'il faut pour montrer le lemme suivant.

Lemme 4.1.7. *On a*

$$\begin{cases} \chi_{\mathrm{Im}(\tilde{\mathfrak{p}}_n^\ell)} = \chi_{\Delta(n)} & \text{si } n \text{ est critique,} \\ \chi_{\mathrm{Im}(\tilde{\mathfrak{p}}_n^\ell)} = \chi_{\Delta(n)} + \chi_{\Delta(\mathfrak{g}_n)} & \text{sinon,} \end{cases}$$

où on considère $\mathrm{Im}(\tilde{\mathfrak{p}}_n^\ell)$ comme étant l'image de l'action de $\tilde{\mathfrak{p}}_n^\ell$ sur $\Delta_v(1)^{\otimes n}$.

DÉMONSTRATION. Si n est critique, alors $\tilde{\mathfrak{p}}_n^\ell = \mathfrak{p}_n$ et $\mathrm{Im}(\tilde{\mathfrak{p}}_n^\ell) = \Delta_v(n)$, d'où le résultat suit directement. Si n n'est pas critique, par les calculs et les arguments précédents, on sait que, dans une base appropriée, $\tilde{\mathfrak{p}}_n^\ell$ agit comme l'identité sur $\mathcal{S}_n(n)$ et comme la projection sur un sous-espace de dimension 1 sur $\mathcal{S}_n(\mathfrak{g}_n)$. La dualité de Schur–Weyl du théorème 2.5.8 donne l'écriture de $\Delta_v(1)^{\otimes n}$ comme $\mathrm{TL}_n \otimes U_v(\mathfrak{sl}_2)$ -module

$$\Delta_v(1)^{\otimes n} \cong \bigoplus_{\substack{i=0 \\ i \equiv 2n}}^n \mathcal{S}_n(i) \otimes \Delta_v(i),$$

d'où on déduit $(\tilde{\mathfrak{p}}_n^\ell \otimes \mathbf{1}) \cdot \Delta_v(1)^{\otimes n} \cong (\mathcal{S}_n(n) \otimes \Delta_v(n)) \oplus ((\mathbb{C} \mathbf{u}_n) \otimes \Delta_v(\mathfrak{g}_n))$ comme $\mathrm{TL}_n \otimes U_v(\mathfrak{sl}_2)$ -modules. Ainsi, comme $\mathcal{S}_n(n)$ et $\mathbb{C} \mathbf{u}_n$ sont de dimension 1, l'image de l'action de $\tilde{\mathfrak{p}}_n^\ell$ sur le $U_v(\mathfrak{sl}_2)$ -module $\Delta_v(1)^{\otimes n}$ est isomorphe à $\Delta_v(n) \oplus \Delta_v(\mathfrak{g}_n)$. On conclut que $\chi_{\mathrm{Im}(\tilde{\mathfrak{p}}_n^\ell)} = \chi_{\Delta(n) \oplus \Delta(\mathfrak{g}_n)} = \chi_{\Delta(n)} + \chi_{\Delta(\mathfrak{g}_n)}$, tel que désiré. \square

4.1.3. Spécialisation en une racine de l'unité

Cette section est consacrée à la preuve que les (ℓ, p) -Jones–Wenzl $\tilde{\mathfrak{p}}_n^\ell$ sont bien définis lorsque q est une racine primitive 2ℓ -ième de l'unité et qu'ils projettent sur un sommand projectif particulier de $L_q(1)^{\otimes n}$. On suit en grande partie l'exposition et les preuves de [STWZ23].

Soit R un anneau intègre. Un sous-ensemble $S \subseteq R \setminus \{0\}$ est dit **multiplicatif** si $1 \in S$ et $s, s' \in S$ implique $ss' \in S$.

Définition 4.1.8. Si $S \subseteq R \setminus \{0\}$ est multiplicatif, on définit la localisation de R en S , notée $S^{-1}R$, comme étant l'ensemble des classes d'équivalence

$$\left\{ \frac{r}{s} \mid r \in R, s \in S \right\}$$

sous la relation

$$\frac{r}{s} \sim \frac{r'}{s'} \iff rs' = r's.$$

Cette définition généralise celle du corps des fractions d'un anneau R , qui correspond au cas $S = R \setminus \{0\}$.

Étant donné un idéal premier $\mathfrak{p} \subset R$, on peut vérifier que l'ensemble $S := R \setminus \mathfrak{p}$ est multiplicatif, et on définit la localisation de R en l'idéal \mathfrak{p} comme étant

$$R_{\mathfrak{p}} := S^{-1}R.$$

Notons que l'expression *localisation de R en X* est ambiguë et son sens diffère selon que X soit un ensemble multiplicatif ou un idéal premier.

On se penche maintenant sur la notion de complétion I -adique d'un anneau R , où $I \subset R$ est un idéal. Pour ce faire, nous avons besoin de quelques définitions préalables. Soit (Λ, \leq) un ensemble partiellement ordonné. Considérons une famille $(R_{\lambda})_{\lambda \in \Lambda}$ d'anneaux et supposons qu'il existe des morphismes $f_{\lambda\mu} : R_{\mu} \rightarrow R_{\lambda}$ pour tous λ, μ tels que $\lambda \leq \mu$, qui satisfont $f_{\lambda\lambda} = \mathbf{id}_{\lambda}$ et, pour tous $\lambda \leq \mu \leq \nu$,

$$f_{\lambda\mu} f_{\mu\nu} = f_{\lambda\nu}.$$

Alors on appelle la famille $(R_{\lambda}, f_{\lambda\mu})$ un système projectif d'anneaux relatif à Λ .

Définition 4.1.9. Soit $(R_{\lambda}, f_{\lambda\mu})$ un système projectif d'anneaux relatif à un ensemble partiellement ordonné Λ . La limite projective $R = \varprojlim R_{\lambda}$ est définie comme étant le sous-anneau du produit $\prod_{\lambda \in \Lambda} R_{\lambda}$ donné par

$$\{(x_{\lambda})_{\lambda \in \Lambda} \mid x_{\lambda} = f_{\lambda\mu}(x_{\mu}) \text{ pour tous } \lambda \leq \mu\}. \quad (4.1.3)$$

On voit que le produit est un exemple particulier de limite projective, obtenu lorsque Λ est muni de l'ordre partiel trivial. En effet, dans ce cas, les seuls morphismes d'anneaux $f_{\lambda\mu}$ du système projectif sont les morphismes identité $f_{\lambda\lambda} = \mathbf{id}_{\lambda}$, et la condition de la définition devient triviale. La complétion I -adique est un autre exemple particulier de limite projective. Prenons $\Lambda = \mathbb{N}_0$ muni de l'ordre standard et posons $R_n = R/I^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, avec

$I^0 := R$. Alors, on a des applications naturelles $p_{nm} : R_m = R/I^m \rightarrow R/I^n = R_n$ pour tous $m \geq n$, qui font de (R_n, p_{nm}) un système projectif d'anneaux.

Définition 4.1.10. *La complétion I -adique de l'anneau R est $\hat{R} = \varprojlim R_n$.*

Une façon de comprendre cette définition est de voir les ensembles $R \supseteq I \supseteq I^2 \supseteq I^3 \supseteq \dots$ comme des voisinages de 0, c'est-à-dire de considérer les éléments de I^n comme de plus en plus petits à mesure que n augmente. Alors, les éléments $(r_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ respectant la condition (4.1.3) sont ceux tels que $r_n = p_{nm}(r_m)$, c'est-à-dire tels que $r_n - r_m \in I^n$. Ce sont donc des suites respectant une condition de Cauchy par rapport à la topologie induite par les voisinages I^n . En fait, si l'idéal I respecte la condition supplémentaire $\bigcap_n I^n = 0$, la complétion I -adique \hat{R} correspond précisément à la complétion topologique de R par rapport à cette topologie, car les limites formelles des suites de Cauchy ainsi obtenues seront uniques.

Soit $\mathfrak{p} = (v - q)$ l'idéal premier de $\mathbb{C}[v]$ engendré par le polynôme $v - q$, et soit $\mathbb{L} = \mathbb{C}[v]_{\mathfrak{p}}$ la localisation en cet idéal premier. Autrement dit, \mathbb{L} est l'ensemble des fonctions rationnelles en une variable v dont le dénominateur ne s'annule pas lorsque $v = q$. Notons $\widehat{\mathbb{L}}$ sa complétion \mathfrak{p} -adique et $\Phi(\widehat{\mathbb{L}})$ le corps des fractions de cette dernière. Alors, on a $\widehat{\mathbb{L}} = \mathbb{C}[[v - q]]$, l'anneau des séries formelles en $v - q$, et $\Phi(\widehat{\mathbb{L}}) = \mathbb{C}((v - q))$, l'anneau des séries de Laurent formelles. Ce dernier est un corps de caractéristique nulle qui contient le corps $\mathbb{C}(v)$. Tout ceci peut être représenté par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{C}[[v - q]] & \hookrightarrow & \mathbb{C}((v - q)) & \hookleftarrow & \mathbb{C}(v) \\ \downarrow & & & & \\ \mathbb{C}[[v - q]]/(v - q) & \cong & \mathbb{C} & & \end{array} .$$

À ce diagramme en correspond un autre faisant intervenir les algèbres de Temperley-Lieb définies sur ces différents anneaux. On obtient

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{TL}_n^{\mathbb{C}[[v-q]]}(\beta_v) & \hookrightarrow & \mathrm{TL}_n^{\mathbb{C}((v-q))}(\beta_v) & \hookleftarrow & \mathrm{TL}_n^{\mathbb{C}(v)}(\beta_v) \\ \downarrow & & & & \\ \mathrm{TL}_n^{\mathbb{C}[[v-q]]/(v-q)}(\beta_v) & \cong & \mathrm{TL}_n^{\mathbb{C}}(\beta_q) & & \end{array} . \quad (4.1.4)$$

La proposition suivante, portant sur les relèvements d'idempotents, sera un ingrédient essentiel pour montrer que les (ℓ, p) -Jones–Wenzl sont bien définis en q racine primitive 2ℓ -ième de l'unité et qu'ils projettent bien sur le bon $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -module projectif.

Proposition 4.1.11 ([Lam91, 21.34]). *Soit \mathbb{k} un anneau noethérien commutatif qui est I -adiquement complet par rapport à un idéal $I \subset \mathbb{k}$. Soit R une \mathbb{k} -algèbre de type fini. Alors R est IR -adiquement complet, et les idempotents de R/IR peuvent être relevés à des idempotents de R .*

Avant d'attaquer le théorème principal de la section, on présente quelques résultats sur les sommands directs projectifs de $L_q(1)^{\otimes n}$ lorsque q est une racine de l'unité.

Proposition 4.1.12. *Soient $q \in \mathbb{C}^\times$ une racine de l'unité, ℓ l'entier positif minimal tel que $q^{2\ell} = 1$ et $n \in \mathbb{N}$.*

- (1) *Si n est critique, alors le $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -module $P_q(n) \cong L_q(n) \cong \Delta_q(n)$ est un sommand direct du produit $L_q(1)^{\otimes n}$.*
- (2) *Si $n \geq \ell$, alors le $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -module projectif $P_q(\mathfrak{g}_n)$ est un sommand direct (avec multiplicité 1) du produit $L_q(1)^{\otimes n}$.*

DÉMONSTRATION. Pour (1), si n est critique, alors $n = r\ell - 1$ pour un certain $r \geq 1$. On le montre par induction sur r . D'abord, si $r = 1$, on peut voir directement du théorème 2.3.12 que le simple $L_q(\ell - 1)$ apparaît comme sommand direct du produit $L_q(1)^{\otimes \ell - 1}$. Ensuite, on a

$$\begin{aligned}
L_q(1)^{\otimes ((r+1)\ell - 1)} &= L_q(1)^{\otimes (r\ell - 1)} \otimes L_q(1)^{\otimes \ell} \cong (M \oplus L_q(r\ell - 1)) \otimes L_q(1)^{\otimes \ell} \\
&\cong (M' \oplus P_q(r\ell - 2)) \otimes L_q(1)^{\otimes \ell - 1} \\
&\cong (M'' \oplus P_q(r\ell - \ell)) \otimes L_q(1) \\
&\cong M''' \oplus P_q((r + 1)\ell - 1),
\end{aligned}$$

pour certains modules M, M', M'' et M''' , où on a utilisé l'hypothèse d'induction au premier isomorphisme, le théorème 2.3.12 au deuxième, le corollaire 2.3.13 $\ell - 2$ fois au troisième et une fois au quatrième, ainsi que le fait que $(r\ell - \ell + 2\ell - 1) = (r + 1)\ell - 1$. L'énoncé (1) suit donc par induction.

Pour (2), on note d'abord que le produit $L_q(1)^{\otimes n} = L_q(1)^{\otimes m_n} \otimes L_q(1)^{\otimes n - m_n}$ contient un sommand direct isomorphe à $P_q(\mathfrak{m}_n) \otimes L_q(1)^{\otimes n - m_n}$ par le (1). On va montrer, par récurrence sur n , que $P_q(\mathfrak{g}_n)$ est un sommand direct de ce sous-module. Si $n = r\ell$ pour $r \geq 1$, on a $m_n = r\ell - 1$, $\mathfrak{g}_n = r\ell - 2$ et

$$P_q(r\ell - 1) \otimes L_q(1) = L_q(r\ell - 1) \otimes L_q(1) \cong P_q(r\ell - 2)$$

par le théorème 2.3.12, tel que désiré. Ensuite, supposons que $P_q(\mathfrak{g}_n) \subseteq P_q(\mathfrak{m}_n) \otimes L_q(1)^{\otimes n - \mathfrak{m}_n}$ pour un certain entier n non critique et écrivons $n = r\ell + s$ avec $r \geq 1$ et $0 \leq s < \ell - 2$. (Si $s = \ell - 2$, $n + 1$ est critique et il n'y a rien à montrer.) Alors,

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}_n &= r\ell - 1, & \mathfrak{g}_n &= r\ell - s - 2, & n + 1 &= r\ell + s + 1, & \mathfrak{m}_{n+1} &= r\ell - 1, \\ \mathfrak{g}_{n+1} &= r\ell - s - 3, & n + 1 - \mathfrak{m}_{n+1} &= s + 2 = n - \mathfrak{m}_n + 1, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P_q(\mathfrak{m}_{n+1}) \otimes L_q(1)^{\otimes n+1 - \mathfrak{m}_{n+1}} &= (P_q(r\ell - 1) \otimes L_q(1)^{\otimes n - \mathfrak{m}_n}) \otimes L_q(1) \\ &\cong (M \oplus P_q(\mathfrak{g}_n)) \otimes L_q(1) \\ &\cong (M \otimes L_q(1)) \oplus (P_q(r\ell - s - 2) \otimes L_q(1)) \\ &\cong M' \oplus (M'' \oplus P_q(r\ell - s - 3)) \\ &\cong M''' \oplus P_q(\mathfrak{g}_{n+1}), \end{aligned}$$

pour certains modules M, M', M'' et M''' , où on a utilisé l'hypothèse d'induction pour passer à la deuxième ligne et le corollaire 2.3.13 pour passer à la quatrième. Ceci donne le résultat voulu par induction.

Il reste toutefois à montrer que le module apparaît avec multiplicité 1. Ceci peut être fait en considérant les caractères de $P_q(\mathfrak{g}_n)$ et de $L_q(1)^{\otimes n}$. On a montré plus haut que

$$\chi_{P_q(\mathfrak{g}_n)} = \chi_{\Delta_q(\mathfrak{g}_n)} + \chi_{\Delta_q(n)} = [\mathfrak{g}_n + 1]_x + [n + 1]_x,$$

où on a utilisé le fait que $\mathbf{d}_{\mathfrak{g}_n} = n$, et que

$$\chi_{L_q(1)^{\otimes n}} = (\chi_{L_q(1)})^n = (x + x^{-1})^n.$$

Comparant les deux, on note que les termes x^n et x^{-n} , apparaissant dans $[n + 1]_x = \chi_{\Delta_q(n)}$, apparaissent avec coefficient 1 dans $\chi_{L_q(1)^{\otimes n}}$. On conclut qu'il peut y avoir au maximum une copie de $\Delta_q(n)$ dans la filtration de $L_q(1)^{\otimes n}$ par des modules de Weyl, d'où le sommand $P_q(\mathfrak{g}_n)$ apparaît avec multiplicité 1. \square

Tous les outils nécessaires pour énoncer et prouver le théorème suivant ont maintenant été présentés. Ce théorème est dû indépendamment à Martin et Spencer [MS22] et à Sutton, Tubbenhauer, Wedrich et Zhu [STWZ23], dont on suit la stratégie de preuve.

Théorème 4.1.13. *Soit $q \in \mathbb{C}^\times$ une racine de l'unité et soit ℓ l'entier positif minimal tel que $q^{2\ell} = 1$. On note $\mathfrak{p}_n^\ell := \mathfrak{sp}(\tilde{\mathfrak{p}}_n^\ell)$, où \mathfrak{sp} est le morphisme de spécialisation $v \mapsto q$. Alors, le projecteur \mathfrak{p}_n^ℓ est bien défini et l'image de son action sur le module $\mathbf{L}_q(1)^{\otimes n}$ est isomorphe à $\mathbf{P}_q(\mathfrak{g}_n)$.*

DÉMONSTRATION. D'abord, si n est critique, $\mathfrak{p}_n^\ell = \mathfrak{p}_n$ est bien défini et l'énoncé suit directement des propriétés des projecteurs de Jones–Wenzl.

Si n est non critique, notons que l'élément $\tilde{\mathfrak{p}}_n^\ell \in \mathbf{TL}_n^{\mathbb{C}(v)}(\beta_v)$ est un idempotent et son image a le bon caractère, c'est-à-dire que $\chi_{\text{Im}(\tilde{\mathfrak{p}}_n^\ell)} = \chi_{\Delta(n)} + \chi_{\Delta(\mathfrak{g}_n)} = \chi_{\mathbf{P}_q(\mathfrak{g}_n)}$ par le lemme 4.1.7 et l'équation (4.1.1). De plus, la propriété d'absorption du lemme 4.1.5 implique que l'image de $\tilde{\mathfrak{p}}_n^\ell$ est contenue dans le sous-module $\Delta_v(\mathfrak{m}_n) \otimes \mathbf{L}(1)^{\otimes(n-\mathfrak{m}_n)}$. Or, en lui appliquant le lemme 4.1.2, on sait que ce sous-module contient une seule copie de $\Delta(n)$ et de $\Delta(\mathfrak{g}_n)$, les facteurs de Weyl de $\mathbf{P}_q(\mathfrak{g}_n)$, comme sous-modules. L'élément $\tilde{\mathfrak{p}}_n^\ell$ est donc l'unique idempotent de $\mathbf{TL}_n^{\mathbb{C}(v)}(\beta_v)$ ayant cette propriété d'absorption et dont l'image a le bon caractère.

Comme $\mathbf{P}_q(\mathfrak{g}_n)$ est un facteur direct de $\mathbf{P}_q(\mathfrak{m}_n) \otimes \mathbf{L}_q(1)^{\otimes(n-\mathfrak{m}_n)}$, on sait qu'il existe un idempotent $E \in \mathbf{TL}_n^{\mathbb{C}}(\beta_q)$ qui projette sur ce facteur et qui absorbe l'idempotent $\mathfrak{p}_{\mathfrak{m}_n} \otimes \mathbf{1}_{\mathbf{TL}_{n-\mathfrak{m}_n}}$. Par la proposition 4.1.11 (en prenant $I = \mathfrak{p}_p$, $\mathbb{k} = \mathbb{C}[[v - q]]$ et $R = \mathbf{TL}_n^{\mathbb{C}[[v-q]]}(\beta_v)$), on sait qu'on peut alors relever E à un idempotent de $\mathbf{TL}_n^{\mathbb{C}[[v-q]]}(\beta_v)$, puis plonger ce dernier dans $\mathbf{TL}_n^{\mathbb{C}(v-q)}(\beta_v)$, qui est une algèbre semisimple contenant $\mathbf{TL}_n^{\mathbb{C}(v)}(\beta_v)$. Comme l'élément de cette algèbre qu'on vient d'obtenir est toujours un idempotent ayant le bon caractère et la propriété d'absorption, l'unicité obtenue au premier paragraphe garantit que cet élément est nul autre que $\tilde{\mathfrak{p}}_n^\ell$. Donc le relèvement de E à $\mathbf{TL}_n^{\mathbb{C}[[v-q]]}(\beta_v)$ est $\tilde{\mathfrak{p}}_n^\ell$, ce qui revient à dire que les coefficients des termes de $\tilde{\mathfrak{p}}_n^\ell$ ne s'annulent pas au dénominateur quand on spécialise $v \mapsto q$. On conclut donc que $E = \mathfrak{p}_n^\ell$ est bien défini et projette bien sur $\mathbf{P}_q(\mathfrak{g}_n)$. \square

Exemple 4.1.14. *Soient $n = 3$ et $q = e^{i\pi/3}$, de sorte que $\ell = 3$. Alors, dans $\mathbf{TL}_3^{\mathbb{C}}(\beta_q)$, le projecteur de Jones–Wenzl*

$$\mathfrak{p}_3 = \mathbf{1} - \frac{[2]_q}{[3]_q}(e_1 + e_2) + \frac{1}{[3]_q}(e_1e_2 + e_2e_1)$$

est mal défini, car $[3]_q = 0$. Or, dans ce cas, on a $\mathfrak{m}_3 = 2$ et la définition 4.1.3 donne $\lambda_3 = \frac{[2]_v}{[3]_v}$ puis, dans $\mathbf{TL}_n^{\mathbb{C}(v)}(\beta_v)$,

$$\tilde{\mathfrak{p}}_3^\ell = \mathfrak{p}_3 + \frac{[2]_v}{[3]_v} \mathfrak{p}_2 e_2 \mathfrak{p}_2$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{1} - \frac{[2]_v}{[3]_v}(e_1 + e_2) + \frac{1}{[3]_v}(e_1 e_2 + e_2 e_1) + \frac{[2]_v}{[3]_v} \left(\mathbf{1} - \frac{1}{[2]_v} e_1 \right) e_2 \left(\mathbf{1} - \frac{1}{[2]_v} e_1 \right) \\
&= \mathbf{1} - \frac{[2]_v}{[3]_v} e_1 + \frac{1}{[2]_v [3]_v} e_1 = \mathbf{1} - \frac{1}{[2]_v} e_1,
\end{aligned}$$

dont la spécialisation $\mathbf{p}_3^\ell = \mathbf{sp}(\tilde{\mathbf{p}}_3^\ell) = \mathbf{1} - \frac{1}{[2]_v} e_1 \Big|_{v \rightarrow q} = \mathbf{1} - e_1$ est bien définie.

4.2. La structure d’algèbre des endomorphismes

Dans cette section, on montre que les algèbres d’endomorphismes de certains produits tensoriels de $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -modules peuvent être obtenues en « sandwichant » l’algèbre de Temperley–Lieb entre des idempotents bien choisis. La présentation s’inspire du travail fait par Crampé et Poulain d’Andecy dans [CPd22].

La proposition 4.1.12 montre que le module projectif $\mathbf{P}_q(i)$ apparaît comme facteur direct (avec multiplicité 1) au sein du produit tensoriel $\mathbf{L}_q(1)^{\otimes \mathbf{d}_i}$. À l’aide du projecteur de (ℓ, p) -Jones–Wenzl construit à la section 4.1, on en déduit une méthode pour construire l’algèbre des endomorphismes du produit $\mathbf{P}_q(i) \otimes (\mathbf{L}_q(1))^{\otimes n}$, pour $n \in \mathbb{N}$ quelconque.

On considère d’abord le produit tensoriel $\mathbf{L}_q(1)^{\otimes (\mathbf{d}_i + n)}$, qui se décompose comme

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_q(1)^{\otimes (\mathbf{d}_i + n)} &= \mathbf{L}_q(1)^{\otimes \mathbf{d}_i} \otimes \mathbf{L}_q(1)^{\otimes n} \\
&\cong (\mathbf{P}_q(i) \oplus M) \otimes \mathbf{L}_q(1)^{\otimes n} \quad \text{pour un certain module } M \\
&\cong (\mathbf{P}_q(i) \otimes \mathbf{L}_q(1)^{\otimes n}) \oplus M' \quad \text{pour un certain module } M'.
\end{aligned} \tag{4.2.1}$$

Soit $\tilde{\psi}$ la représentation de l’algèbre de Temperley–Lieb de la proposition 2.5.7. Grâce au théorème 4.1.13, on sait que la représentation de l’élément $\mathbf{p}_{\mathbf{d}_i}^\ell \in \mathbf{TL}_{\mathbf{d}_i}(\beta_q)$ agit sur le module $\mathbf{L}_q(1)^{\otimes \mathbf{d}_i} \cong \mathbf{P}_q(i) \oplus M$ comme

$$\tilde{\psi}(\mathbf{p}_{\mathbf{d}_i}^\ell) \Big|_{\mathbf{P}_q(i)} = \mathbf{id}_{\mathbf{P}_q(i)}, \quad \tilde{\psi}(\mathbf{p}_{\mathbf{d}_i}^\ell) \Big|_M = 0. \tag{4.2.2}$$

Étant donné une partition $(n_1, n_2, \dots, n_j) \vdash n_1 + n_2 + \dots + n_j$, on pose

$$\mathbf{p}_{(n_1, n_2, \dots, n_j)}^\ell := \mathbf{p}_{n_1}^\ell \otimes \mathbf{p}_{n_2}^\ell \otimes \dots \otimes \mathbf{p}_{n_j}^\ell \in \mathbf{TL}_{n_1 + n_2 + \dots + n_j}.$$

On considère alors la partition $(\mathbf{d}_i, 1^n) = (\mathbf{d}_i, 1, \dots, 1) \vdash \mathbf{d}_i + n$. Comme $\mathbf{p}_1^\ell = \mathbf{1}_{\mathbf{TL}_1}$, l’élément correspondant est $\mathbf{p}_{(\mathbf{d}_i, 1^n)}^\ell = \mathbf{p}_{\mathbf{d}_i}^\ell \otimes \mathbf{1}_{\mathbf{TL}_n} \in \mathbf{TL}_{\mathbf{d}_i + n}$. Les équations (4.2.1) et (4.2.2) donnent alors

$$\tilde{\psi}(\mathbf{p}_{(\mathbf{d}_i, 1^n)}^\ell) \Big|_{\mathbf{P}_q(i) \otimes \mathbf{L}_q(1)^{\otimes n}} = \mathbf{id}_{\mathbf{P}_q(i) \otimes \mathbf{L}_q(1)^{\otimes n}}, \quad \tilde{\psi}(\mathbf{p}_{(\mathbf{d}_i, 1^n)}^\ell) \Big|_{M'} = 0. \tag{4.2.3}$$

On définit ensuite une nouvelle algèbre par

$$\mathrm{TL}_{(\mathbf{d}_i, 1^n)}(\beta_q) := \mathbf{p}_{(\mathbf{d}_i, 1^n)}^\ell \cdot \mathrm{TL}_{\mathbf{d}_i+n}(\beta_q) \cdot \mathbf{p}_{(\mathbf{d}_i, 1^n)}^\ell.$$

C'est un sous-algèbre de $\mathrm{TL}_{\mathbf{d}_i+n}$, mais pas une sous-algèbre unifère, car les unités diffèrent : l'unité de $\mathrm{TL}_{(\mathbf{d}_i, 1^n)}$ est l'idempotent $\mathbf{p}_{(\mathbf{d}_i, 1^n)}^\ell$.

Remarque 4.2.1. *L'algèbre $\mathrm{TL}_{(\mathbf{d}_i, 1^n)}(\beta_q)$ est un exemple particulier d'algèbre à couture, introduites par Morin-Duchesne, Rasmussen et Ridout [MDRR15] et étudiées par Langlois-Rémillard et Saint-Aubin [LRSA20]. Ces dernières ont été généralisées par Flores et Peltola [FP18] et Spencer [Spe21], sous le nom d'algèbres de Temperley–Lieb valencées.*

Comme c'est une sous-algèbre de $\mathrm{TL}_{\mathbf{d}_i+n}$, on peut utiliser $\tilde{\psi}$ pour définir une représentation $\tilde{\psi}'$ de $\mathrm{TL}_{(\mathbf{d}_i, 1^n)}$ sur le produit $\mathbb{P}_q(i) \otimes \mathbb{L}_q(1)^{\otimes n}$ en posant

$$\tilde{\psi}'(\mathbf{p}_{(\mathbf{d}_i, 1^n)}^\ell \cdot a \cdot \mathbf{p}_{(\mathbf{d}_i, 1^n)}^\ell) := \tilde{\psi}(\mathbf{p}_{(\mathbf{d}_i, 1^n)}^\ell \cdot a \cdot \mathbf{p}_{(\mathbf{d}_i, 1^n)}^\ell) \Big|_{\mathbb{P}_q(i) \otimes \mathbb{L}_q(1)^{\otimes n}}. \quad (4.2.4)$$

L'équation (4.2.3) garantit alors que $\tilde{\psi}'(\mathbf{p}_{(\mathbf{d}_i, 1^n)}^\ell \cdot a \cdot \mathbf{p}_{(\mathbf{d}_i, 1^n)}^\ell)$ est un endomorphisme du sous-espace $\mathbb{P}_q(i) \otimes \mathbb{L}_q(1)^{\otimes n} \subset \mathbb{L}_q(1)^{\otimes(\mathbf{d}_i+n)}$ et la dualité de Schur–Weyl du corollaire 2.5.11 assure qu'il commute avec l'action de $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$. En fait, on a le résultat suivant.

Théorème 4.2.2. *La représentation $\tilde{\psi}'$ induit un isomorphisme*

$$\mathrm{TL}_{(\mathbf{d}_i, 1^n)}(\beta_q) \cong \mathrm{End}_{\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)}(\mathbb{P}_q(i) \otimes \mathbb{L}_q(1)^{\otimes n}).$$

DÉMONSTRATION. D'abord, la discussion précédant le théorème implique que l'image de $\tilde{\psi}'$ est bel et bien contenue dans $\mathrm{End}_{\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)}(\mathbb{P}_q(i) \otimes \mathbb{L}_q(1)^{\otimes n})$. Il suffit donc de montrer que $\tilde{\psi}'$ est bijectif.

Soit $\mathbf{p}_{(\mathbf{d}_i, 1^n)}^\ell \cdot a \cdot \mathbf{p}_{(\mathbf{d}_i, 1^n)}^\ell \in \mathrm{TL}_{(\mathbf{d}_i, 1^n)}$ tel que $\tilde{\psi}'(\mathbf{p}_{(\mathbf{d}_i, 1^n)}^\ell \cdot a \cdot \mathbf{p}_{(\mathbf{d}_i, 1^n)}^\ell) = 0$. Alors, on a

$$\tilde{\psi}(\mathbf{p}_{(\mathbf{d}_i, 1^n)}^\ell \cdot a \cdot \mathbf{p}_{(\mathbf{d}_i, 1^n)}^\ell) \Big|_{\mathbb{P}_q(i) \otimes \mathbb{L}_q(1)^{\otimes n}} = 0,$$

et de l'équation (4.2.3), on déduit également que l'endomorphisme est nul sur le module $\mathbb{L}_q(1)^{\otimes(\mathbf{d}_i+n)}$ au complet, c'est-à-dire que

$$\tilde{\psi}(\mathbf{p}_{(\mathbf{d}_i, 1^n)}^\ell \cdot a \cdot \mathbf{p}_{(\mathbf{d}_i, 1^n)}^\ell) = 0.$$

Ceci implique que $\mathbf{p}_{(\mathbf{d}_i, 1^n)}^\ell \cdot a \cdot \mathbf{p}_{(\mathbf{d}_i, 1^n)}^\ell = 0$, car $\tilde{\psi}$ est un isomorphisme par la dualité de Schur–Weyl du corollaire 2.5.11. On conclut que $\tilde{\psi}'$ est injectif.

Pour la surjectivité, on considère $\phi \in \text{End}_{\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)}(\mathbf{P}_q(i) \otimes \mathbf{L}_q(1)^{\otimes n})$. On peut l'étendre en un élément

$$\tilde{\phi} \in \text{End}_{\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)}(\mathbf{P}_q(i) \otimes \mathbf{L}_q(1)^{\otimes n} \oplus M') \cong \text{End}_{\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)}(\mathbf{L}_q(1)^{\otimes(\mathbf{d}_i+n)}),$$

en posant $\tilde{\phi}|_{M'} = 0$. La dualité de Schur–Weyl garantit alors l'existence d'un $x \in \mathbb{T}\mathbf{L}_{\mathbf{d}_i+n}$ tel que $\tilde{\psi}(x) = \tilde{\phi}$. Ensuite, de l'équation (4.2.3) et de (4.2.4), on déduit que

$$\tilde{\psi}'(\mathbf{p}_{(\mathbf{d}_i, 1^n)}^\ell \cdot x \cdot \mathbf{p}_{(\mathbf{d}_i, 1^n)}^\ell) = \phi.$$

Ceci permet de conclure que $\tilde{\psi}'$ est également surjectif et donc que c'est un isomorphisme, tel que désiré. □

Conclusion

Ce mémoire a révélé la structure de certaines algèbres d'endomorphismes de produits tensoriels de $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -modules dans le cas où q^2 est une racine primitive ℓ -ième de l'unité. En particulier, nous avons étudié la sous-algèbre $\mathcal{R}_{i,n}$ de $\text{End}_{\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)}(\mathbb{L}_q(i) \otimes \mathbb{L}_q(1)^{\otimes n})$ engendrée par l'action du groupe de tresses de type B , où $\mathbb{L}_q(i)$ est un $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -module simple. Nous avons caractérisé la structure de cette algèbre comme un quotient de l'algèbre de Temperley–Lieb à une frontière TLb_n par un idéal engendré par un préidempotent de Jones–Wenzl. Pour ce faire, il a fallu analyser en détail l'action des matrices R sur l'espace $\mathbb{L}_q(i) \otimes \mathbb{L}_q(1)^{\otimes n}$ pour révéler toutes les relations auxquelles elles satisfont (voir les propositions 3.1.4 et 3.1.5), puis identifier le noyau de la représentation par un argument récursif (voir les propositions et lemmes 3.2.4, 3.2.8, 3.2.9, 3.2.1, 3.2.11 et 3.2.12). Ces résultats ont permis de montrer le théorème 3.2.2. Ensuite, nous avons étudié l'algèbre $\text{End}_{\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)}(\mathbb{P}_q(i) \otimes \mathbb{L}_q(1)^{\otimes n})$, où $\mathbb{P}_q(i)$ est un module projectif. Pour cela, nous avons introduit les idempotents de (ℓ, p) -Jones–Wenzl et nous avons fait la preuve de leurs propriétés d'intérêt (voir les lemmes 4.1.5, 4.1.6, 4.1.7 et le théorème 4.1.13). Ce travail a mené au théorème 4.2.2, où l'algèbre d'endomorphismes a enfin été identifiée à une algèbre de Temperley–Lieb valencée obtenue en sandwichant l'algèbre de Temperley–Lieb par les idempotents introduits plus tôt.

Certaines questions restent toujours en suspens. D'abord, comme les efforts du présent mémoire se sont concentrés sur la sous-algèbre $\mathcal{R}_{i,n}$ dans le cas du produit avec un module simple $\mathbb{L}_q(i)$, la prochaine étape est de considérer l'algèbre complète d'endomorphismes et d'identifier sa structure. Ensuite, il serait également intéressant de considérer les produits tensoriels de la représentation fondamentale de $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)$, $\mathbb{L}_q(1)$, avec d'autres modules. On peut notamment tenter de caractériser l'algèbre $\text{End}_{\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_2)}(\Delta_q(i) \otimes \mathbb{L}_q(1)^{\otimes n})$, où $\Delta_q(i)$ est un module de Weyl; ceci semble être le prochain défi à relever.

Bibliographie

- [ALZ15] Andersen, Henning H., Gustav I. Lehrer et Ruibin Zhang: *Cellularity of certain quantum endomorphism algebras*. Pacific Journal of Mathematics, 279(1-2):11–35, 2015.
- [And19] Andersen, Henning H.: *Simple modules for Temperley-Lieb algebras and related algebras*. J. Algebra, 520:276–308, 2019. <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2018.10.035>.
- [APK91] Andersen, Henning H., Patrick Polo et Wen Kexin: *Representations of quantum algebras*. Inventiones mathematicae, 104(1):1–60, 1991.
- [AST18] Andersen, Henning H., Catharina Stroppel et Daniel Tubbenhauer: *Cellular structures using U_q -tilting modules*. Pacific J. Math., 292:21–59, 2018.
- [AT17] Andersen, Henning H. et Daniel Tubbenhauer: *Diagram categories for U_q -tilting modules at roots of unity*. Transformation Groups, 22(1):29–89, 2017. <https://doi.org/10.1007/s00031-016-9363-z>.
- [BLS19] Burrull, Gaston, Nicolás Libedinsky et Paolo Sentinelli: *p -Jones-Wenzl idempotents*. Advances in Mathematics, 352:246–264, 2019.
- [BSA14] Belletête, Jonathan et Yvan Saint-Aubin: *The principal indecomposable modules of the dilute Temperley-Lieb algebra*. J. Math. Phys., 55(11):111706, 41, 2014. <https://doi.org/10.1063/1.4901546>.
- [CP95] Chari, Vajayanthi et Andrew Pressley: *A Guide to Quantum Groups*. Cambridge University Press, 1995.
- [CPd22] Crampé, Nicolas et Loïc Poulain d’Andecy: *Fused Braids and Centralisers of Tensor Representations of $U_q(\mathfrak{gl}_N)$* . Algebr. Representat. Theory, 2022. <https://doi.org/10.1007/s10468-022-10116-7>.
- [dGN09] Gier, Jan de et Alexander Nichols: *The two-boundary Temperley-Lieb algebra*. J. Algebra, 321(4):1132–1167, 2009. <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2008.10.023>.
- [DPS98] Du, Jie, Brian J. Parshall et Leonard L. Scott: *Quantum Weyl Reciprocity and Tilting Modules*. Communications in Mathematical Physics, 195:321–352, 1998.
- [Dri85] Drinfeld, Vladimir G.: *Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation*. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 283(5):1060–1064, 1985.

- [DRV13] Daugherty, Zajj, Arun Ram et Rahbar Virk: *Affine and degenerate affine BMW algebras: actions on tensor space*. *Selecta Mathematica*, 19(2):611–653, 2013. <https://doi.org/10.1007/s00029-012-0105-3>.
- [EGNO16] Etingof, Pavel, Shlomo Gelaki, Dmitri Nikshych et Victor Ostrik: *Tensor Categories*. American Mathematical Soc., 2016.
- [Eli16] Elias, Ben: *The two-color Soergel calculus*. *Compositio Mathematica*, 152(2):327–398, 2016.
- [FP18] Flores, Steven et Eveliina Peltola: *Standard modules, radicals, and the valenced Temperley-Lieb algebra*. arXiv:1801.10003, 2018. <https://arxiv.org/abs/1801.10003>.
- [GL96] Graham, John J. et Gustav I. Lehrer: *Cellular algebras*. *Inventiones mathematicae*, 123(1):1–34, 1996.
- [GL98] Graham, John J. et Gustav I. Lehrer: *The representation theory of affine Temperley-Lieb algebras*. *Enseign. Math. (2)*, 44(3-4):173–218, 1998.
- [GL03] Graham, John J. et Gustav I. Lehrer: *Diagram algebras, Hecke algebras and decomposition numbers at roots of unity*. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 36(4):479–524, 2003. [https://doi.org/10.1016/S0012-9593\(03\)00020-X](https://doi.org/10.1016/S0012-9593(03)00020-X).
- [HT18] Houde-Therrien, Léonard: *Théorie de la représentation de l’algèbre de Temperley-Lieb à une frontière*. Mémoire de maîtrise, Université de Montréal, 2018.
- [ILZ21] Iohara, Kenji, Gustav I. Lehrer et Ruibin Zhang: *Equivalence of a tangle category and a category of infinite dimensional $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -modules*. *Represent. Theory*, 25(10):265–299, 2021. <https://www.ams.org/ert/2021-25-10/S1088-4165-2021-00568-6/>.
- [Jim85] Jimbo, Michio: *A q -difference analogue of $U(\mathfrak{g})$ and the Yang-Baxter equation*. *Lett. Math. Phys.*, 10(1):63–69, 1985. <https://doi.org/10.1007/BF00704588>.
- [Jon85] Jones, Vaughan F. R.: *A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras*. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 12(1):103 – 111, 1985.
- [Lam91] Lam, Tsit Yuen: *A First Course in Noncommutative Rings*, tome 131 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer US, New York, NY, 1991. <http://link.springer.com/10.1007/978-1-4684-0406-7>.
- [LL20] Leroux-Lapierre, Alexis: *La famille exceptionnelle des algèbres à couture*. Mémoire de maîtrise, Université de Montréal, 2020.
- [LRSA20] Langlois-Rémillard, Alexis et Yvan Saint-Aubin: *The representation theory of seam algebras*. *SciPost Phys.*, 8:019, 2020. <https://scipost.org/10.21468/SciPostPhys.8.2.019>.
- [Lus90] Lusztig, George: *Quantum groups at roots of 1*. *Geometriae Dedicata*, 35:89–113, 1990.
- [LZ10] Lehrer, Gustav I. et Ruibin Zhang: *A Temperley-Lieb Analogue for the BMW Algebra*. Dans Gyoja, Akihiko, Hiraku Nakajima, Ken ichi Shinoda, Toshiaki Shoji et Toshiyuki Tanisaki (rédacteurs): *Representation Theory of Algebraic Groups and Quantum Groups*, pages 155–190. Birkhäuser Boston, Boston, 2010. https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4697-4_7.

- [Mar92] Martin, Paul P.: *On Schur–Weyl duality, A_n Hecke algebras and quantum $sl(N)$ on $\otimes^{n+1}\mathbb{C}^N$* . International Journal of Modern Physics A, 07:645–673, 1992.
- [Mat99] Mathas, Andrew: *Iwahori-Hecke Algebras and Schur Algebras of the Symmetric Group*. University Lecture Series. American Mathematical Society, 1999.
- [MDRR15] Morin-Duchesne, Alexi, Jørgen Rasmussen et David Ridout: *Boundary algebras and Kac modules for logarithmic minimal models*. Nuclear Physics B, 899:677–769, 2015. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0550321315003028>.
- [MS93] Martin, Paul P. et Hubert Saleur: *The blob algebra and the periodic Temperley–Lieb algebra*. Letters in Mathematical Physics, 30:189–206, 1993.
- [MS22] Martin, Stuart et Robert A. Spencer: *(ℓ, p) -Jones–Wenzl idempotents*. Journal of Algebra, 603:41–60, 2022. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021869322001338>.
- [Pin20] Pinet, Théo: *La structure des représentations des algèbres de Temperley–Lieb affines sur la chaîne de spins XXZ*. Mémoire de maîtrise, Université de Montréal, 2020.
- [PS90] Pasquier, Vincent et Hubert Saleur: *Common structures between finite systems and conformal field theories through quantum groups*. Nuclear Physics B, 330(2):523–556, 1990.
- [RSA14] Ridout, David et Yvan Saint-Aubin: *Standard modules, induction and the structure of the Temperley–Lieb algebra*. Adv. Theor. Math. Phys., 18(5):957–1041, 2014.
- [RT91] Reshetikhin, Nicolai et Vladimir G. Turaev: *Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups*. Inventiones mathematicae, 103(3):547–598, 1991.
- [RTW32] Rumer, G., E. Teller et H. Weyl: *Eine für die Valenztheorie geeignete Basis der binären Vektorinvarianten*. Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse, 1932:499–504, 1932.
- [Spe21] Spencer, Robert A.: *Modular Valenced Temperley–Lieb Algebras*. arXiv:2108.10011, 2021. <https://arxiv.org/abs/2108.10011>.
- [Spe23] Spencer, Robert A.: *The Modular Temperley–Lieb Algebra*. Rocky Mountain Journal of Mathematics, 53(1):177 – 208, 2023. <https://doi.org/10.1216/rmj.2023.53.177>.
- [STWZ23] Sutton, Louise, Daniel Tubbenhauer, Paul Wedrich et Jieru Zhu: *SL_2 tilting modules in the mixed case*. Selecta Mathematica, 29(3):39, 2023. <https://doi.org/10.1007/s00029-023-00835-0>.
- [TF79] Tahtadžjan, Leon A. et Lyudvig D. Faddeev: *The quantum method for the inverse problem and the XYZ Heisenberg model*. Uspekhi Mat. Nauk, 34(5):13–63, 256, 1979.
- [TL71] Temperley, Harold N. V. et Elliott H. Lieb: *Relations between the ‘Percolation’ and ‘Colouring’ Problem and other Graph-Theoretical Problems Associated with Regular Planar Lattices: Some Exact Results for the ‘Percolation’ Problem*. Proc. R. Soc. Lond. A, 322(1549):251–280, 1971.
- [Tur16] Turaev, Vladimir G.: *Quantum Invariants of Knots and 3-Manifolds*. De Gruyter, Berlin, Boston, 2016. <https://doi.org/10.1515/9783110435221>.